Alkalmazott matematikai lapok

1977/1-2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

3. KÖTET

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPJA

III. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

Kéziratok a következő címre küldendők:

Prékopa András, felelős szerkesztő
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 1—11*

ÁTFEDÉSES MEMÓRIÁJÚ SZÁMÍTÓGÉPEK TELJESÍTMÉNYÉRŐL

IVÁNYI ANTAL és KÁTAI IMRE
Budapest

A *Markov-láncok* elméletének felhasználásával vizsgáljuk a nagyteljesítményű számítógépekben gyakran alkalmazott átfedéses memória hatékonyságát. HELLERMAN, BURNETT és COFFMAN vizsgálatait folytatva meghatározzuk az átfedéses memóriájú számítógépek sebességét (az időegység alatt átlagosan elvégzett műveletek számát) a *Hellerman-féle számítógépmodell* és az általános *Markov-féle viselkedési modell* esetén: a hivatkozási sorozatot modellező *Markov-lánc* tulajdonságait felhasználva megmutatjuk a sebesség és az első időegység alatt — alkalmasan választott kezdeti eloszlás mellett — feldolgozott műveletek száma közti szoros kapcsolatot. Egy egyszerű algoritmust adunk a sebesség számszerű értékének meghatározására.

1. Bevezetés

A számítógép egyik legfontosabb paramétere a sebessége. Ezt rendszerint az időegység alatt átlagosan elvégzett műveletek számával szokták jellemezni. Mivel a sebességet a feldolgozási lánc (perifériák, processzor, memória) leglassúbb eleme korlátozza, ezért a teljesítmény növelésére jó eszköz a párhuzamosítás.

Az átlagos műveletvégzési idő gyakran lényegesen kisebb, mint a memória hozzáférési ideje. Ezért a nagy teljesítményű gépeknél (a CDC, IBM, Honeywell cég számos nagy gépénél, a szovjet BESZM—6 esetén) gyakran alkalmazzák az operatív memória egyidejű működésre képes modulokra osztását, az ún. átfedéses memóriát. Például a BESZM—6 operatív memóriája 8 darab 4096 szavas modulból áll: a modulok 2 µs-onként 1—1 szóhoz való hozzáférést tesznek lehetővé. A modulok hatékonyabb működése érdekében az egymást követő rekeszek egymást (ciklikusan) követő modulokban helyezkednek el [11].

HELLERMAN [5], VULIHMAN [9], BURNETT és COFFMAN [3], STONE [8] számos matematikai modellt javasoltak az átfedéses memóriájú számítógépek működésére és mind analitikusan, mind szimulációs módszerrel meghatározták az egyes modellek sebességét a programviselkedésre tett különböző feltevések mellett.

Dolgozatunk célja ezen vizsgálatok folytatása, és a *Hellerman-féle számítógép modell* sebességének meghatározása az általános *Markov-féle programviselkedési modell* esetén.

Eredményünk megfogalmazásához és bizonyításához felhasználjuk a *Markov-láncok* elméletének következő fogalmait és állításait.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi tér, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ pedig egy *homogén Markov-lánc*, melyben a lehetséges állapotok halmaza $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A *Markov-lánc* kezdeti eloszlása legyen

$$\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{1.1}$$

az egylépéses átmeneti valószínűségek mátrixa pedig

$$\Pi = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}, \tag{1.2}$$

azaz

$$P(\xi_1 = j) = p_j; \quad P(\xi_{t+1} = j \mid \xi_t = i) = p_{ij}, \quad (t = 1, 2, \dots).$$

Legyen

$$p_{ij}^{(k)} = P(\xi_{t+k} = j \mid \xi_t = i), \quad (t = 1, 2, \dots; \ k = 1, 2, \dots).$$

A következő jól ismert állítás Markov nevéhez fűződik. (Ezt, megfordításával együtt, ergodicitási tételnek is nevezik.)

1.1. Lemma. Legyen ξ_t $(t=1,2,\dots)$ olyan Markov-lánc, melyre található olyan j és k, hogy $p_{ij}^{(k)}>0$ minden szóbajövő i-re $(i=1,\dots,n)$ fennáll. Ekkor minden i-re és j-re fennáll

$$\lim_{r\to\infty} p_{ij}^{(r)} = x_j,$$

továbbá

$$|p_{ij}^{(r)} - x_j| \leqq C\varrho^r, \tag{1.3}$$

ahol ϱ és C konstansok $(0<\varrho<1,\ 0<C)$.

Legyen f az $\{1,\dots,n\}$ halmazon definiált függvény. Jelölje $M_\pi f(\xi_t)$ az $f(\xi_t)$ várható értékét, feltételezve, hogy ξ_t kezdeti eloszlása π.

Tekintsünk egy másik *Markov-láncot*, melynek kezdeti eloszlása $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$, és az egylépéses átmenetvalószínűségek mátrixa (1.2) szerinti. Nyilvánvaló, hogy ez a *Markov-lánc* stacionárius, következésképpen minden t-re $P(\xi_t=h)=P(\xi_1=h)$, és így $M_\mathbf{x} f(\xi_t)=M_\mathbf{x} f(\xi_1)$. Továbbá, (1.3)-ból könnyen következik, hogy

$$|M_\pi f(\xi_t) - M_\mathbf{x} f(\xi_t)| \leqq C_1\varrho^t, \tag{1.4}$$

ahol ϱ és C_1 alkalmas konstansok $(0<\varrho<1,\ C_1>0)$.

2. A számítógép matematikai modellje

A *Vulihman-féle modell* [9] szerint a számítógép központi processzorból (KP) és operatív memóriából (OM) áll.

Az operatív memória n darab modulból áll: $N=\{v_1,\dots,v_n\}$. Minden modulhoz tartozik egy egyszavas regiszter (v_i-hez ϱ_i, $i=1,\dots,n$).

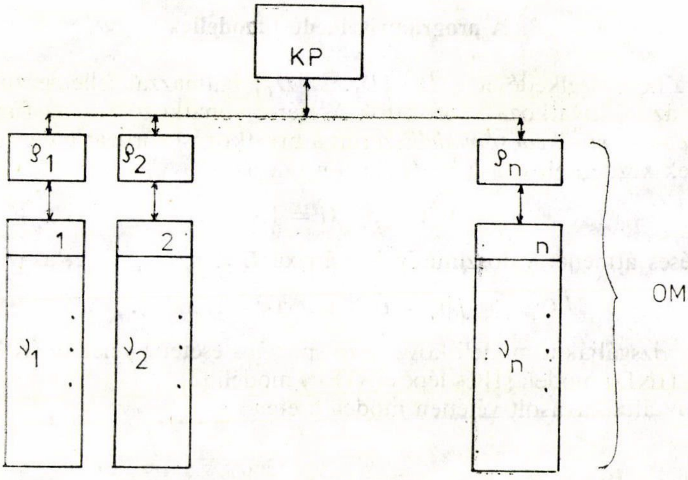
A programok futását $\omega_T=r_1\dots r_T$ $(r_t\in N,\ t=1,\dots,T)$ hivatkozási sorozatokkal modellezzük. Legyen N^T az összes T-hosszúságú hivatkozási sorozat halmaza.

A *Vulihman-féle modell* szerint a $\tau[\omega_T]$ futási idő a következőképpen számítható ki. Az $r_t=v_j$ hivatkozás feldolgozása két részből áll: az operatív memória Δ_{mem} (v_j megfelelő rekeszéből való kiolvasás és ϱ_j-be töltés), a központi processzor pedig Δ_{proc} (v_j-ből való kiolvasás és a művelet elvégzése) idő alatt dolgozza fel r_t-t.

A processzor szekvenciálisan, a memória modulok párhuzamosan (a hivatkozási sorozat folytatását ismerve) végzik a feldolgozást.

Az egyszerűség kedvéért legyen $N=\{1,\dots,n\}$.

Jelöljük τ_i-vel $(i=1,\dots)$ azt az időpontot, amikor r_i feldolgozása befejeződik.



1. ábra. A *Vulihman-féle számitógép-séma*

A következő, ALGOL-szerű nyelven írt program a $\tau[\omega_T]$ kiszámítására szolgáló algoritmust, azaz a *Vulihman-féle számítógépmodellt* definiálja (a MOD tömb elemei munkaváltozók).

2.1. Definíció

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{FOR}}\ i=1\ \underline{\text{STEP}}\ 1\ \underline{\text{UNTIL}}\ n\\ \text{MOD}\,[i]:=0;\\ \underline{\text{COMMENT}}\text{: minden modul szabad;}\end{array}\right\}\text{ előkészítés}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{MOD}\,[r_1]:=\Delta_{mem};\\ \underline{\text{COMMENT}}\text{: a memória feldolgozta } r_1\text{-et;}\\ \quad\tau_1:=\text{MOD}\,[r_1]+\Delta_{proc};\\ \underline{\text{COMMENT}}\text{: a processzor feldolgozta } r_1\text{-et;}\end{array}\right\}\ \tau_1\text{ számítása}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{FOR}}\ t=2\ \underline{\text{STEP}}\ 1\ \underline{\text{UNTIL}}\ T\\ \qquad\underline{\text{BEGIN}}\ \text{MOD}\,[r_t]:=\text{MOD}\,[r_t]+\Delta_{mem};\\ \qquad\underline{\text{COMMENT}}\text{: a memória feldolgozta } r_t\text{-t;}\\ \qquad\text{MOD}\,[r_t]:=\text{MAX}\,(\text{MOD}\,[r_t],\ \tau_{t-1});\\ \qquad\underline{\text{COMMENT}}\text{: a memória feldolgozta } r_t\text{-t és a}\\ \qquad\qquad\qquad\text{processzor feldolgozta } r_{t-1}\text{-et;}\\ \qquad\tau_t:=\text{MOD}\,[r_t]+\Delta_{proc};\\ \qquad\underline{\text{COMMENT}}\text{: a processzor feldolgozta } r_t\text{-t;}\\ \qquad\underline{\text{END}};\end{array}\right\}\ \tau_T=\tau[\omega_T]\text{ számítása}$$

A *Hellerman-féle modell* [5] a *Vulihman-féle modellnek* [9] az a speciális esete, amikor $\Delta_{proc}=0$. A továbbiakban a *Hellerman-féle modellel* foglalkozunk.

Egy, a *Hellerman-modellre* és véletlen programviselkedési modellre vonatkozó eredményt [6]-ban, a *Vulihman-modellre* vonatkozó eredményeinket pedig [7]-ben írtuk le.

3. A programviselkedési modellek

A programok viselkedését a $D=\{D_1, \ldots, D_T\}$ halmazzal jellemezzük, ahol D_k $(k=1, \ldots, T)$ az ω_k hivatkozási sorozatok N^k térre vonatkozó eloszlásfüggvénye.

A *Markov-féle viselkedési modell* szerint a hivatkozási sorozat *homogén Markov-lánc*, amelynek kezdeti eloszlása $\pi=(p_1, \ldots, p_n)$, azaz

$$(3.1) \qquad P(r_1 = i) = p_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

és az egylépéses átmenet valószínűségek mátrixa $\Pi=[p_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$, azaz

$$(3.2) \qquad P(r_{t+1} = j \,|\, r_t = i) = p_{ij} \quad (t = 1, 2, \ldots).$$

Gyakran vizsgálják a modell következő speciális eseteit: véletlen (RAN) modell [2], független (IND) modell [1] és lépés (STEP) modell [3].

A BÉLÁDY által javasolt véletlen modell esetén

$$(3.3) \qquad p_{ij} = P(r_{t+1} = j \,|\, r_t = i) = \frac{1}{n} \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots),$$

és

$$(3.4) \qquad p_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

vagy — az eloszlásfüggvényeket használva a modell formális definiálására:

$$(3.5) \qquad \forall\, n, \omega_k\colon\ D_k(\omega_k) = \frac{1}{n^k}.$$

A független modell esetén

$$(3.6) \qquad p_{ij} = P(r_{t+1} = j \,|\, r_t = i) = q_j \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots).$$

Az átfedéses memóriájú számítógépekre a BURNETT és COFFMAN által javasolt lépés-modell bizonyult jónak. Itt

$$(3.7) \qquad p_{ij} = P(r_{t+1} = j \,|\, r_t = i) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } j \equiv i+1 \pmod n \\ \beta = \dfrac{1-\alpha}{n-1}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. A sebesség definíciója

Egy számítógép-modell teljesítményét adott programviselkedési modell esetén a

$$(4.1) \qquad V = \liminf_{k \to \infty} \frac{k}{\sum\limits_{\omega_k \in N^k} D_k(\omega_k)\,\tau(\omega_k)}$$

módon definiált [4] sebességgel jellemezzük.

Ha nemcsak a lim inf, hanem a lim is létezik, azt V'-vel jelöljük. Például a *Vulihman-féle számítógépmodellre* a *Markov-féle viselkedés* esetén létezik V', de bizonyos más viselkedési modellek esetén csak V.

Vizsgálataink egyik célja, hogy a sebességet a többi paraméter függvényében előállítsuk, ami a $D=MAR$, $\Delta_{proc}=0$, $\Delta_{mem}=1$ feltételek esetén a $V(n)$-re vonatkozó explicit kifejezés meghatározását jelenti.

A következőkben eljárást adunk a V' sebesség meghatározására a *Markov-féle viselkedési modell* esetén, gondot fordítva a számítások műveletigényének csökkentésére.

5. A Markov-modell vizsgálata

Legyen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ az $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mezőn *homogén Markov-lánc* $\{1, \ldots, n\}$ lehetséges állapotokkal, $\pi=(p_1, \ldots, p_n)$ kezdeti eloszlással, $\Pi=[p_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ egylépéses átmenet valószínűség mátrixszal. Tegyük fel, hogy $p_{ij}>0$ minden i,j-re. A számítógép sebességét az egységnyi idő alatt feldolgozott hivatkozások átlagos számával jellemezzük. Legyen $x_1, x_2, \ldots$ az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *Markov-lánc* egy konkrét realizációja. Jelölje t_1 azt a számot, amelyre $x_1, \ldots, x_{t_1}$ mind különbözők, és x_{t_1+1} az $x_1, \ldots, x_{t_1}$ egyike; t_2 azt a számot, amelyre $x_{t_1+1}, \ldots, x_{t_1+t_2}$ mind különbözők és $x_{t_1+t_2+1}$ az $x_{t_1+1}, \ldots, x_{t_1+t_2}$ egyike stb.

Világos, hogy a számítógép a h-adik időegység alatt az $x_{t_1+\ldots+t_{h-1}+1}, \ldots, x_{t_1+\ldots+t_h}$ hivatkozásokat dolgozza fel. Így az első h időegység alatt összesen $t_1+\ldots+t_h$ hivatkozást dolgoz fel.

Jelölje $\mathscr{T}$ a következő $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}$ sorozatok halmazát:

1. $i_1, \ldots, i_k$ páronként különböző elemek $\{1, 2, \ldots, n\}$-ben;
2. i_{k+1} az $i_1, \ldots, i_k$ valamelyike.

Jelölje $\mathscr{T}^{(k)}_{i_1, i_{k+1}}$ $(\subseteq \mathscr{T})$ azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek $k+1$ hosszúságúak, i_1 kezdő- és i_{k+1} utolsó elemmel. Világos, hogy $k=1$ esetén csak $i_1=i_{k+1}$ lehetséges. A

$$\mathscr{T}=\left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{T}^{(1)}_{j,j}\right) \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{T}^{(k)}_{i,j}\right) \tag{5.1}$$

felbontás $\mathscr{T}$ diszjunkt felbontása. Jelölje $\mathscr{H}$ a $\mathscr{T}^{(k)}_{i,j}$ elemek halmazát.

Egy tetszőleges $\omega\in\Omega$-hoz a következő $B_1, B_2, \ldots, B_j\in\mathscr{H}$ sorozatot rendeljük hozzá. Ha k az a maximális szám, amelyre $\eta_1, \ldots, \eta_k$ különbözők, akkor $B_1=\mathscr{T}^{(k)}_{\eta_1, \eta_{k+1}}$. Ha s az a maximális egész, amelyre $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_{k+s}$ különbözők, akkor $B_2=\mathscr{T}^{(k)}_{\eta_{k+1}, \eta_{k+s+1}}$ stb.

Tekintsünk most egy tetszőleges $B_1, B_2 \ldots$ sorozatot a $\mathscr{H}^\infty=\mathscr{H}\times\mathscr{H}\times\ldots$ térben. Illeszkedőnek nevezünk egy ilyen sorozatot, ha minden r-re teljesül a következő: $B_{r+1}=\mathscr{T}^{(k)}_{i,j}$, $B_r=\mathscr{T}^{(s)}_{a,b}$ esetén $b=i$.

Ez a leképezés egy meghatározott P^* valószínűségi mértéket indukál $\mathscr{H}^\infty$ hengerhalmazain.

Tetszőleges $B_{h_1}, \ldots, B_{h_s}\in\mathscr{H}$, $h_1<\ldots<h_s$ esetén jelölje $E(B_{h_1}, \ldots, B_{h_s})$ azon ω-k összességét, amelyeknél az $\omega\to\{B_1, B_2, \ldots\}$ leképezésben a $h_1, h_2, \ldots, h_s$ helyeken a rögzített $B_{h_1}, \ldots, B_{h_s}$ áll. Legyen

$$P^*(B_{h_1}, \ldots, B_{h_s}) = P\big(E(B_{h_1}, \ldots, B_{h_s})\big). \tag{5.2}$$

Nyilvánvalóan

$$P(B_1 = \mathscr{T}^{(k)}_{i,j}) = \sum_{\{i, i_2, \ldots, i_k, j\}\in\mathscr{T}^{(k)}_{i,j}} p_i p_{ii_2} \cdots p_{i_{k-1}i_k} p_{i_k j}. \tag{5.3}$$

Definiálunk egy $Q(B)$ függvényt $\mathscr{H}$ elemein. $B=\mathscr{T}_{a,b}^{(s)}$ esetén legyen

$$Q(B)=\sum_{\{a,a_2,\ldots,a_s,b\}\in\mathscr{T}_{a,b}^{(s)}} p_{aa_2}p_{a_2a_3}\ldots p_{a_{s-1}a_s}p_{a_sb}. \tag{5.4}$$

Könnyen belátható, hogy illeszkedő $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sorozatra

$$P^*(B_1, B_2, \ldots, B_r)=P(B_1)Q\{B_2\}\ldots Q\{B_r\}, \tag{5.5}$$

míg nem illeszkedőre $P^*(B_1, B_2, \ldots, B_r)=0$.

A feltételes valószínűségekre fennáll a

$$P(B_{r+1}|B_1, B_2, \ldots, B_r)=P(B_{r+1}|B_r) \tag{5.6}$$

reláció, ahol

$$P(B_{r+1}|B_r)=\begin{cases} Q(B_{r+1}), & \text{ha } B_{r+1} \text{ illeszkedik } B_r\text{-hez,}\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{5.7}$$

(5.6) miatt a $B_1, B_2, \ldots$ sorozat *homogén Markov-láncot* alkot. Figyelembe véve, hogy tetszőleges $B_r, B_{r+2}\in\mathscr{H}$ esetén mindig található olyan $B_{r+1}\in\mathscr{H}$, amellyel B_r, B_{r+1}, B_{r+2} illeszkedő sorozat, valamint azt, hogy $Q(B)>0$ minden $B\in\mathscr{H}$-ra, azonnal belátható, hogy a kétlépéses átmenetvalószínűségek mátrixában minden elem pozitív. Ezért az 1.1. lemma érvényes.

Legyen l tetszőleges függvény $\mathscr{H}$ elemein értelmezve. Jelölje $\mu_t(\omega)$ a $\sum_{j=1}^{t} l(B_j)$ összeget.

Világos, hogy ha $l(\mathscr{T}_{i,j}^{(k)})=k$ $(\forall i,j)$, akkor a $\mu_t(\omega)$ éppen a t időegység alatti feldolgozások száma.

Jelölje $\mathbf{u}$ a stacionárius kezdeti eloszlást. Világos, hogy

$$M_\pi\mu_t=\sum_{j=1}^{t} M_\pi l(B_j), \tag{5.8}$$

továbbá

$$M_{\mathbf{u}}l(B_j)=M_{\mathbf{u}}l(B_1),$$

s így

$$M_{\mathbf{u}}\mu_t=tM_{\mathbf{u}}l(B_1). \tag{5.9}$$

Másrészt, az 1.1. lemma miatt

$$M_\pi\mu_t-M_{\mathbf{u}}\mu_t=O\left(\sum_{j=1}^{t}\varrho^j\right)=O(1). \tag{5.10}$$

Speciálisan érvényes a következő

5.1. TÉTEL. Legyen Π pozitív elemű átmenet valószínűség mátrix, π tetszőleges, $\mathbf{u}$ a stacionárius kezdeti eloszlás. Ekkor a t idő alatti feldolgozások $\mu_t(\omega)$ számának várható értékére teljesül az

$$M_\pi\mu_t=tM_{\mathbf{u}}l(B_1)+O(1) \tag{5.11}$$

reláció, ahol $B_1=\mathscr{T}_{i,j}^{(k)}$ esetén $l(B_1)=k$.

$\mu_t(\omega)$ határeloszlása azonnal következik I. A. IBRAHIMOV és JU. V. LINNIK [10] könyvének 464. oldalán levő, 19.1.1. számú tételből.

Legyen

$$\sigma^2 = M_{\mathbf{u}}|l(B_1)-M_{\mathbf{u}}l(B_1)|^2+ \tag{5.12}$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty} M_{\mathbf{u}}\{(l(B_{j+1})-M_{\mathbf{u}}l(B_{j+1}))(l(B_1)-M_{\mathbf{u}}l(B_1))\}.$$

5.2. TÉTEL. Az előző tétel feltételei esetén, ha $\sigma\neq 0$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(\mu_t-M_\pi\mu_t)<z\right\}=\Phi(z). \tag{5.13}$$

Végül egy egyszerű eljárást adunk a stacionárius $\mathbf{u}$ eloszlás meghatározására. Ez az egyetlen $\{u(A),\ A\in\mathscr{H}\}$ nem-negatív komponensű vektor, amelyre

$$\sum_{A\in\mathscr{H}} u(A)=1, \tag{5.14}$$

továbbá

$$P^*(B|A)u(A)=u\{B)\quad (\forall B\in\mathscr{H}) \tag{5.15}$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy a

$$q_{a,b,h}=Q(\mathscr{T}_{a,b}^{(h)}) \tag{5.16}$$

mennyiségeket meghatároztuk. Az $u_{i,j,k}=u(\mathscr{T}_{i,j}^{(k)})$ jelöléssel feltételi egyenletünk

$$u_{a,a,1}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{n}u_{i,a,k'}=\frac{u_{a,b,h}}{q_{a,b,h}} \tag{5.17}$$

alakú lesz. Vegyük észre, hogy a bal oldal független b-től és h-tól. Így

$$\frac{u_{a,b,h}}{q_{a,b,h}}=F_a, \tag{5.18}$$

majd ezt az előzőbe behelyettesítve

$$F_a q_{a,a,1}+\sum_{i=1}^{n}F_i\left\{\sum_{k=2}^{n}q_{i,a,k}\right\}=F_a. \tag{5.19}$$

Vezessük be a

$$c_{a,i}=\sum_{k=2}^{n}q_{i,a,k}, \tag{5.20}$$

a

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{nn}\end{bmatrix} \tag{5.21}$$

és

$$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\,(1-q_{j,j,1}) \tag{5.22}$$

jelöléseket. Így F_j a

$$(5.23) \qquad (\mathbf{C}-\mathbf{D})\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszer, $F_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} F_i = 1$ feltételeket kielégítő megoldása. Miután az F_a-kat meghatároztuk, az $u_{a,b,k} = F_a q_{a,b,h}$ formulából kapjuk az u-kat. Világos, hogy

$$(5.24) \qquad Ml(B_1) = \sum_{a=1}^{n} u_{a,a,1} + \sum_{k=2}^{n} k \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} u_{a,b,k}.$$

Ez az algoritmus lehetővé teszi, hogy a stacionáris eloszlást $|\mathcal{H}|+1 = n+ +(n-1)n^2+1$ helyett $n+1$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Ez $n=2$ esetén 7 helyett 3, $n=3$ esetén 22 helyett 4 egyenletet jelent.

Legköltségesebb a $q_{a,b,h}$ mennyiségek meghatározása. Bizonyos esetekben lehetőség van a műveletigény nagyfokú redukciójára. Megmutatjuk, hogy ez igaz, ha a programviselkedés független valószínűségi változók sorozatával írható le, azaz, ha $p_{ij} = p_j$ minden i-re. Szükségünk lesz a következő észrevételre.

Tetszőleges $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathcal{S}$ komplex számok esetén jelölje $\mathcal{S}_{i_1, i_2, \dots, i_l}$ az $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ halmazt. Legyen $s_k(\mathcal{S}) = \sum_{j_1<j_2<\dots<j_k} x_{j_1} \dots x_{j_k}$ $(k \geqq 1)$, az $\mathcal{S}$ halmaz elemeinek k-adik elemi szimmetrikus polinomja, hasonlóan $s_k(\mathcal{S}_{i_1, i_2, \dots, i_l}) = \sum_{j_1<j_2<\dots<j_k} x_{j_1} \dots x_{j_k}$, az összegezés azon $j_1, j_2, \dots, j_k$ indexekre terjed ki, amelyekre $x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in \mathcal{S}_{i_1, i_2, \dots, i_l}$. Legyen $s_0(\mathcal{S}) = 1$, $s_0(y_{i_1, \dots, i_l}) = 1$.

Tegyük fel, hogy feladatunk az összes $s_k(\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_l})$ $(k = 1, \dots, n-l;\ l \leqq t)$ szimmetrikus polinom meghatározása, ahol t jóval kisebb n-nél. Az alábbiakból nyilvánvaló lesz, hogy célszerű ezeket a következő módon meghatározni. Először kiszámítjuk az $s_k(\mathcal{S})$ értékeket, majd egy rekurziós formulával ebből az $s_k(\mathcal{S}_i)$-ket, ezek után az $s_k(\mathcal{S}_{i,j})$-ket stb.

Legyen

$$F(z) = \prod_{i=1}^{n} (z+x_i) = s_n(\mathcal{S}) + s_{n-1}(\mathcal{S})z + \dots + s_0(\mathcal{S})z^n,$$

$$F_j(z) = \frac{F(z)}{z+x_j} = \prod_{i \neq j'} (z+x_i) = s_{n-1}(\mathcal{S}_j) + s_{n-2}(\mathcal{S}_j)\, z + \dots + s_0(\mathcal{S}_j)\, z^n.$$

Figyelembe véve, hogy $F(z) = (z+x_j)\, F_j(z)$, az együtthatók összehasonlításával az

$$(5.25) \qquad \begin{cases} s_0(\mathcal{S}_j) = s_0(\mathcal{S}) = 1 \\ s_h(\mathcal{S}_j) = s_h(\mathcal{S}) - x_j s_{h-1}(\mathcal{S}_j) \\ \qquad (h = 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

formulát nyerjük. Tehát $s_h(\mathcal{S})$-ek ismeretében $n-2$ db szorzással és $n-1$ összeadással (kivonással) megkapjuk $s_h(\mathcal{S}_j)$-ket. Ezt $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_j$, $\mathcal{S}_j \to \mathcal{S}_{j,k}$ helyettesítéssel alkal mazva megkapjuk $s_h(\mathcal{S}_{j,k})$-kat stb.

Az $s_h(\mathcal{S})$ polinomértékeket az alábbi *Horner-szerű eljárással* kaphatjuk meg:

$$F^{(0)}(z) = 1, \quad F^{(j+1)}(z) = F^{(j)}(z)(z+x_{j+1}), \quad F^{(n)}(z) = F(z)$$

$$F^{(j)}(z) = a_j^{(j)} + a_{j-1}^{(j)}z + \ldots + a_0^{(j)}z^j$$

jelölésekkel

$$a_0^{(0)} = 1,$$

$$a_0^{(j)} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$(5.26) \qquad a_{j+1}^{(j+1)} = x_{j+1}a_j^{(j)} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\underline{a_t^{(j+1)} = a_t^{(j)} + x_{j+1}a_{t-1}^{(j)} \quad (t = 1, 2, \ldots, j),}$$

$$a_h^{(n)} = s_h(\mathcal{S}) \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ez explicit eljárás $s_h(\mathcal{S})$ kiszámítására, a szükséges műveletek száma $O(n^2)$.

Legyen most $\mathcal{S} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Vegyük észre, hogy $p_{ij} = p_j$ miatt

$$q_{a,b,h} = \sum_{\{a, i_2, \ldots, i_h b\} \in \mathcal{T}_{a,b}^{(h)}} p_{i_2} \cdots p_{i_h} p_b \quad (h \geqq 2).$$

A jobb oldali összeget $\Sigma_A + \Sigma_B$ részre bontjuk, aszerint, hogy $a=b$, vagy $a \neq b$. Így egyszerű kombinatorikai meggondolással

$$\Sigma_A = (h-1)!\, p_a s_{h-1}(\mathcal{S}_a),$$

$$\Sigma_B = p_b^2(h-1)!\, s_{h-2}(\mathcal{S}_{a,b}),$$

azaz

$$(5.27) \qquad q_{a,b,h} = (h-1)!\, p_a s_{h-1}(\mathcal{S}_a) + (h-1)!\, p_b^2 s_{h-2}(\mathcal{S}_{a,b}), \quad q_{a,a,1} = p_a.$$

Így, az (5.25), (5.26), (5.27) formulákat alkalmazva a $q_{a,b,h}$-k kiszámítására, mindössze $O(n^3)$ műveletre van szükség.

6. Megjegyzések

1. Eljárásunk alkalmas a *Vulihman-féle modell* sebességének felső becslésére is, *Markov-féle programviselkedés* esetén.

2. Nem nehéz megmutatni, hogy (az 5.1. tétel jelölésével)

$$(6.1) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{\mu_t(\omega)}{t} = M_u l(B_1)$$

m.m. ω-ra.

Ebből következik, hogy valamely konkrét program feldolgozásának sebességét egy ideig megfigyelve, a kapott érték közel lesz az $M_u l(B_1)$ pontos sebességértékhez, legalábbis m. m. realizáció esetén. Ez lehetőséget ad $M_u l(B_1)$ meghatározására. (6.1) helyett a konvergencia-sebességre vonatkozó állításból kiindulva, e becslés pontossága is becsülhető.

3. Adott $\mathbf{\Pi}$ átmenet-valószínűségmátrix esetén jelölje $M(\mathbf{\Pi})$ az összes $q_{a,b,h}$ kiszámításához szükséges aritmetikai műveletek számát. Láttuk, hogy $p_{ij} = p_j$ esetén

$M(\Pi)=O(n^3)$. Azt sejtjük, hogy általános Π mátrixra $M(\Pi)\neq O(n^c)$, bármilyen nagy is a c állandó. Azt hisszük továbbá, hogy $p_{ij}=\varphi(j-i)$ $(\forall i, j)$ esetén $M(\Pi)=O(n^c)$, alkalmas c állandóval.

4. Eljárásunkkal jellemezhető a számítógép átlagos kihasználtsága (leterheltsége) is. Azt mondjuk, hogy a t-edik időegység alatt a számítógép kihasználtsága $\lambda(k)$ $(k=1, 2, ..., n)$, ha ebben az időben k számú hivatkozást dolgoz fel.

5. Fontos lenne a következő probléma megoldása. Legyenek $\eta_1, \eta_2, ...$ illetve $\zeta_1, \zeta_2, ...$ egymástól független *Markov-láncok* $N=\{1, 2, ..., n\}$ lehetséges állapotokkal, (π_1, Π_1), illetve (π_2, Π_2) kezdeti eloszlással, ill. átmenetvalószínűség mátrixszal. Az η-sorozat feldolgozása történjék ugyanúgy, mint előzőleg.

Tegyük fel, hogy az 1. időegység alatt $\eta_1, ..., \eta_s$ kerül feldolgozásra. Ha $\zeta_1 \neq \neq \eta_1, \eta_2, ..., \eta_s$, akkor az 1. időegység alatt feldolgozásra kerül még az a maximális t számú különböző $\zeta_1, ..., \zeta_t$, amelyre $\{\zeta_1, ..., \zeta_t\} \cap \{\eta_1, ..., \eta_s\}=\emptyset$. Ha $\zeta_1 \in \{\eta_1, ..., \eta_s\}$, akkor a ζ sorozat feldolgozása nem kezdődik meg. A feldolgozás folytatódik. Kérdés, hogy t idő alatt a ζ sorozatból hány elem feldolgozása történik meg.

Nehéznek tűnik ez a probléma azzal a változtatással, hogy nem adunk abszolút prioritást az η-sorozat feldolgozásának.

A multiprogramozás teljesítménynövelő hatását jellemeznék a három vagy több *Markov-láncra* vonatkozó eredmények.

IRODALOM

[1] AHO, A. V., DENNING, P. J. AND ULLMANN, J. D., "Principles of optimal page replacement", *J. of ACM*, **18** (1971) 80—93.

[2] BELADY, L. A., "A study of replacement algorithms for a virtual storage computer", *IBM Systems Journal* **5** (1966) 282—288.

[3] BURNETT, G. J. AND COFFMAN, E. G., "A combinatorial problem related to interleaved memory systems", *Journal of ACM* **20** (1973) 39—45.

[4] COFFMAN, E. G., *Operating Systems Theory*, (Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1973.)

[5] HELLERMAN, H., *Digital Computer Principles*, (Mc Graw Hill, New York, 1967).

[6] IVÁNYI, A. AND KÁTAI, I., "Estimates for speed of computers with interleaved memory systems", *Annales Univ. Sci. Bp.* **19** (1976) 159—164.

[7] IVÁNYI, A. AND KÁTAI, I., "On the speed of computers with interleaved memory systems", *MTA SZTAKI Közlemények* **18** (1977) 105—118.

[8] STONE, H. S., "A note on a combinatorial problem of Burnett and Coffman", *Comm. of ACM* **17** (1974) 165—166.

[9] Вулихман, В. Е., «Исследование методов организации оперативной памяти и потока информации в высокопроизводительных электронных машинах» Кандидатская диссертация, Москва, 1972.

[10] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*, (Наука, Москва, 1965.)

[11] Королев, Л. Н., *Структура ЭВМ и их математическое обеспечение*, (Наука, Москва, 1974.)

(Beérkezett: 1978. január 25.)

IVÁNYI ANTAL ÉS KÁTAI IMRE
1088 BUDAPEST, VIII., MÚZEUM KRT. 6—8.
ELTE TTK NUMERIKUS ÉS GÉPI MATEMATIKAI TANSZÉK

ON THE PERFORMANCE OF COMPUTERS WITH INTERLEAVED MEMORY

A. Iványi and I. Kátai

Using *Markov-chain* theory the performance of computers with interleaved memory is investigated. Continuing the researchs due to Hellerman, Burnett and Coffman we determine the speed (the mean number of operations executed in a time unit) of computers with interleaved memory for the *Hellerman's computer model.* Employing the features of the *Markov-chain* modelling the program behaviour a near connection is proved between the speed and the number of the executed (during the first time unit, at appropriate initial distribution) operations. Finally a simple algorithm is given to compute the speed.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 13—25*

SZEKVENCIÁLIS STATISZTIKAI DÖNTÉSI MÓDSZEREK FÜGGETLEN HIVATKOZÁSOK ESETÉBEN[1]

ARATÓ MÁTYÁS

Budapest

Az elmúlt években jelentősen megnőtt az érdeklődés a számítógéprendszerek modellezésének és elemzésének problémái iránt, beleértve az interaktív számítógép-hálózatokat is. A cikkek legtöbbjében vizsgált statikus elemzésnél feltették, hogy a rendszer minden paramétere (igénybevétel mértéke, tárolási költség stb.) előre ismert, és hogy a tervezés ezek átlagértékén alapul. Amikor a rendszer paraméterei időben változnak vagy ismeretlenek, a dinamikus kezelés nemcsak lényeges javítását eredményezi a működésnek, de léteznek speciális esetek, mikor viszonylag egyszerű megoldásokat kapunk.

Ennek a cikknek a célja, hogy egzakt formájú optimális politikát találjunk a file-ok dinamikus elhelyezésére, a lapcserére és a tranzakciók sebességparaméterének becslésére. Ebben a dolgozatban viszonylag egyszerű modelleket tekintünk, hogy az ilyen jellegű problémák megoldásának fő módszereit bemutassuk. A statisztikai szekvenciális döntéselmélet jól ismert módszereit használjuk. Ilyen rendszerek elemzésében az alkalmazásra irányuló közlemények mellett (lásd korábbi munkáinkat: ARATÓ [3], [4] vagy ARATÓ, BENCZÚR, KRÁMLI [5], BENCZÚR, KRÁMLI, PERGEL [8]) a szekvenciális módszerek (vagy optimális szabályozás) elméletében elvileg új eredményeink vannak. Az első fejezet bemutat egy alapmodellt, amelyet számítógép-hálózatokban file kijelölésre használunk független hivatkozási string esetén. A problémával A. SEGALL [19] cikkében általánosan foglalkozott, de nem kapott egyszerű megoldásokat, mivel modellje bonyolult volt. A második fejezet tartalmazza azokat a korábbi eredményeinket, amelyek a laptárolásra vonatkoztak, amikor a hivatkozási string egy független sorozat. Új tételt adunk meg ismert valószínűségek esetén, amely A. LEW [16] eredményének általánosítása. Ezen kívül ez a tétel megmutatja az összefüggést a szekvenciális módszer és a dinamikus programozás között. A harmadik fejezetben egy adatbázis rendszer tranzakciói számára adunk egy új modellt, amelynek statisztikai vizsgálatát és elemzését LEWIS és SHEDLER [18] végezték el. Ilyen típusú modellt korábbi cikkeinkben használtunk. (ARATÓ [2], ARATÓ, KNUTH és TŐKE [6], KNUTH [15]), de statisztikai elemzés és adatgyűjtés nélkül.

1. Dinamikus file elhelyezés független hivatkozási stringekkel

Ebben a részben egy dinamikus file elhelyezési problémával foglalkozunk, egy n-számítógépes hálózatban, amikor a file-igény mérték sebességei ismertek, és később, amikor azok nem ismertek. Feltesszük, hogy a file csak az egyik számítógép memóriájában tárolható, de elérhető a többi által is. Feltesszük, hogy az idő diszkrét és a számítógépek teljes kapcsolatban vannak.

Az $Y_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, n;\ t=1, 2, \dots)$ változók az 1 vagy a 0 értéket vehetik fel, attól függően, hogy a file az i-edik számítógép memóriájában van a t időben, vagy egy másiknál, azaz ha

$$Y_i(t) = 1, \quad \text{akkor} \quad Y_1(t) = \dots = Y_{i-1}(t) = Y_{i+1}(t) = \dots = Y_n(t) = 0.$$

[1] A II. *Magyar Számítástudományi Konferencián* elhangzott előadás. (Preprint I. kötet, 33—57. old.)

Jelöljék $\eta_j(t)$ $(j=1, 2, \ldots, n; t=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók sorozatait, amelyek leírják az n számítógép általi file igényeket

$$\eta_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha van kérés a } t \text{ időben a } j\text{-edik számítógépnél,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Feltesszük, hogy az $\eta_j(t)$ változók teljesen független *Bernoulli sorozatokat* alkotnak és ugyanarra a j-re azonos eloszlású valószínűségi változók

$$(1.1) \qquad P\{\eta_j(t) = 1\} = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_n > 0$. Feltesszük továbbá, hogy a műveleti költség 0, amikor a file abban a gépben van, amely kéri, és az átviteli költség az egyik számítógépből a másikra való átmenetként 1. Ez esetben a teljes költség várható értéke egy $t=1, 2, \ldots, N$ periódusra

$$(1.2) \qquad C = \mathbf{E}\left\{\sum_{t=1}^{N} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \eta_j(t) Y_i(t)\right\}.$$

Definiáljuk a d_t döntéseket a t időben $(t=0, 1, 2, \ldots)$ a következőképpen: ha a szóban forgó $d_t = i$, akkor a file-t az i-edik számítógép tárolja a $t+1$ időben (azaz t után). Ez azt jelenti, hogy

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } d_{t-1} = i, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Most feltesszük, hogy a d_t döntés az előző megfigyelések $\{\eta_1(s), \ldots, \eta_n(s), d_s, s \leqq t-1\}$ függvénye. A feladat C minimalizálása (1.2)-ben. Az esetben, amikor a hivatkozási valószínűségek $p_1 \geqq \ldots \geqq p_n > 0$ ismertek, a következő állítás igaz.

1.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az $\eta_j(t)$ hivatkozási folyamatok független *Bernoulli folyamatok*, $p_1 \geqq \ldots \geqq p_n > 0$, (lásd (1.1)), akkor a $d_t \equiv 1$ döntési politika optimális, azaz ez minimalizálja (1.2)-t.

Bizonyítás. Jelölje $y_j(s)$ $(s \leqq t)$ $\eta_j(t)$ egy realizációját és $\mathbf{E}\{y_j(1), \ldots, y_i(t)\}$ a feltételes várható értéket ezen feltétel mellett. Definíció szerint legyen

$$(1.3) \qquad v(y_j(1), \ldots, y_j(t), \; j = 1, 2, \ldots, n, \; N-t) =$$

$$\min_{\{d_t, \ldots, d_{N-1}\} \in D_{t,N}} \mathbf{E}\{y_j(1), \ldots, y_j(t), \; j = 1, 2, \ldots, n\} \cdot \left[\sum_{\tau=t+1}^{N} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \eta_j(\tau) Y_i(\tau)\right],$$

ahol $D_{t,N}$ jelöli az összes lehetséges *Markov szekvenciális döntési eljárások* halmazát. A $v(y_j(1), \ldots, y_j(t); j=1, 2, \ldots, n; N-t)$ függvény kielégíti az ún. *Bellmann egyenletet:*

$$(1.4) \qquad v(y_j(1), \ldots, y_j(t-1); \; j = 1, 2, \ldots, n; \; N-t+1) =$$

$$= \min_{d_{t-1}} \mathbf{E}\{y_j(1), \ldots, y_j(t-1), \; j = 1, 2, \ldots, n\} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \eta_j(t) Y_i(t) + v(y_j(1), \ldots, y_j(t-1), \eta_j(t); \; j = 1, 2, \ldots, n; \; N-t)\right].$$

Mivel $v(y_i(1), ..., y_i(t); j=1, ..., n; N-t)$ nem függ d_{t-1}-től, minden t lépésnél a következő kifejezést kell minimalizálnunk

$$\min_{d_{t-1}} \mathbf{E}\{y_j(1), ..., y_j(t-1), j=1, ..., n\} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \eta_j(t) Y_i(t) =$$

$$= \min_{d_{t-1}} \mathbf{E}\{y_j(1), ..., y_j(t-1)\}[X_t^{(d_{t-1})}] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{j=2}^{n} \eta_j(t)\right] = (p_2+p_3+\ldots+p_n),$$

ahol $X_t^{d_{t-1}} = \sum_{j\neq d_{t-1}} \eta_j(t)$.

Ez bizonyítja a tételt. A továbbiakban feltesszük, hogy a számítógépek hivatkozási valószínűségei nem ismertek, és ezért használjuk a *Bayes-féle eljárást.* Jelölje w azt a valószínűségi változót, melynek értelmezési tartománya az $1, 2, ..., n$ természetes számok összes permutációjának halmaza; $w(i)$ jelöli a $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz w-vel történő egy-egy értelmű leképezését. A *Bernoulli sorozatok* eloszlásai a következőképpen adottak:

$$P_w\{\eta_j(t) = 1\} = \{P_{j,w}\}_{j=\overline{1,n}} = \{p_{w(i)}\}. \tag{1.5}$$

Feltesszük, hogy a w paraméter apriori eloszlása egyenletes, mivel nincs erről más előzetes információnk:

$$P\{w = k\} = \frac{1}{n!}. \tag{1.6}$$

Ugyanazt a megjegyzést téve, mint fent, minimalizálnunk kell az

$$\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{N} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \eta_j(t) Y_i(t)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{N} X_t^{(d_{t-1})}\right] \tag{1.2'}$$

kifejezést, ahol

$$X_t^{(d_{t-1})} = \eta_1(t)+\ldots+\eta_{d_{t-1}-1}(t)+\eta_{d_{t-1}+1}(t)+\ldots+\eta_n(t) = \sum_{j\neq d_{t-1}} \eta_j(t).$$

Ez esetben

$$P\{w = k | \eta_j(1), ..., \eta_j(t), \; j = 1, 2, ..., n\}$$

függ w apriori eloszlásától és a j számítógépben a file f_j hivatkozási gyakoriságától ($j=1, ..., n$). Ugyanúgy, mint két számítógépes rendszer esetében (lásd ARATÓ [3]) a *Bayes tétel* használatával bebizonyítjuk a következő lemmát (lásd még BENCZÚR, KRÁMLI, PERGEL [8]).

1.1. LEMMA. Ha a w paraméter apriori eloszlása egyenletes és a file f_j hivatkozási gyakorisága az $\{\eta_j(1), ..., \eta_j(t-1)\}$ stringben kisebb, mint f_i az $\{\eta_i(1), ..., \eta_i(t-1)\}$ stringben, akkor

$$P\{\eta_j(t) = 1 | \eta_k(1), ..., \eta_k(t-1), \quad k = 1, 2, ..., n\} <$$

$$P\{\eta_i(t) = 1 | \eta_k(1), ..., \eta_k(t-1), \quad k = 1, 2, ..., n\}.$$

Megjegyzés. A lemma azt állítja, hogy a file hivatkozások aposteriori valószínűségeinek sorrendje az $\{\eta_j(1), \dots, \eta_j(t-1),\ j=1, 2, \dots, n\}$ string megfigyelése után ugyanaz, mint a gyakoriságuk sorrendje a stringjükben. Most már kimondhatjuk a probléma optimalitási kritériumát. Az ún. szeparációs tétel egzakt megoldását kapjuk, mely hasonló WONHAM lineáris *Gauss folyamatokra* vonatkozó szeparációs tételéhez (lásd [19]). Ezt a szeparációs tételt dinamikus file kijelölésre SEGALL kimondta, de nem oldotta meg konkrét esetben.

1.2. TÉTEL. Legyen $p_1 \geqq p_2 \geqq \dots \geqq p_n$ és N rögzített. Az $\eta_j(t)$ $(j=1, 2, \dots, n,$ $t=1, 2, \dots)$ hivatkozási stringek független *Bernoulli sorozatok* (1.5) hivatkozási valószínűségekkel, ahol w egyenletes eloszlású (1.6). Az optimális szekvenciális döntési eljárás, amelyik minimalizálja az átvitelek várható számát (1.2′), a file-t bármelyik időpontban ahhoz a számítógéphez helyezi, amelyik többször kérte, mint a többi.

Bizonyítás. A bizonyítás újból a *Bellmann egyenleten* alapul.

Legyen

$$V(\eta_j(s),\ j = 1, 2, \dots, n,\ s \leqq t,\ N-t,\ \delta^{[t,N]} = (d_t, \dots, d_{N-1})) =$$
$$= \mathbf{E}\{\eta_j(s),\ j = 1, 2, \dots, n,\ s \leqq t\} \left[\sum_{s=t}^{N} X_s^{(d_s-1)} \right],$$
$$V(\eta_j(s),\ j = 1, 2, \dots, n,\ s \leqq t,\ N-t) =$$
$$= \inf_{\delta^{[t,N]}} V(\eta_i(s),\ j = 1, \dots, n,\ s \leqq t,\ N-t,\ \delta^{[t,N]}).$$

Egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$V(\eta_j(s),\ j = 1, \dots, n,\ s \leqq t-1,\ N-t+1) =$$
$$= \inf_{d_{t-1}} \mathbf{E}\{\eta_j(s),\ j = 1, \dots, n,\ s \leqq t-1\} \cdot$$
$$\cdot \left[X_t^{(d_t-1)} + V(\eta_j(s),\ j = 1, \dots, n,\ s \leqq t,\ N-t) \right],$$

ahol $V(\eta_j(s), j=1, \dots, n, s \leqq t, N-t)$ nem függ d_{t-1}-től. Ezután az 1.1. lemmát használva megkapjuk az állítást.

2. Laphelyettesítési algoritmus

Ebben a részben a helyettesítés *(demand-paging)* problémájával foglalkozunk. Ez a feladat azt a döntést jelenti, hogy egy lapolási hiba előfordulása esetén melyik lap legyen kicserélve az ebben az időben a központi memóriában levő lapok közül. Az általában elfogadott optimalitási feltétel az, hogy úgy kell cserélni a lapokat, hogy minimalizáljuk a lapolási hibák (vagy cserék) számát. Ez a politika általában megvalósíthatatlan, mivel a jövőbeli viselkedés pontos ismeretét követeli meg. Az optimális politika valószínűségelméleti kiterjesztése azt jelenti, hogy a hivatkozási string adott eloszlására minimalizáljuk a lapolási hibák várható számát. A laphivatkozási string egy valószínűségeloszlási osztályára optimális helyettesítési algoritmus nem szükségképpen optimális más osztályokra.

Két fő modell ismeretes, az $\eta_1, \eta_2 \dots$ hivatkozási stringekre. Az első a független hivatkozási modell, amikor az η_t hivatkozási string független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatát jelenti. A második az *LRU stack modell,* ahol a D_t ($t=1, 2, \ldots$) távolsági stringben — a legrégebben használt lap kerül cserélésre *(LRU modell)* — a változók független, azonos eloszlású valószínűségi változókat jelentenek. D_t azon különböző lapok száma, melyekre hivatkozunk az utolsó η_t hivatkozás óta. LEWIS és SHEDLER [23] statisztikailag bebizonyították, hogy ezen modellek egyike sem teljesen megfelelő. Ebben a részben a független hivatkozási string modellt használjuk.

Feltesszük, hogy a program n lapból áll és csak $m(m<n)$ lehet ebből az első szinten. A független referencia modell a program viselkedésére a legegyszerűbb, melyet egyszerűsége és az elemzés kényelme miatt leggyakrabban használnak. Az i lap hivatkozásának a valószínűsége t időben p_i, minden t-re ($i=1, 2, \ldots, n$). Jelölje η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_t, \ldots$ a hivatkozási stringet; a feltétel szerint ez egy független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozat:

$$P\{\eta_t = i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bármely laphelyettesítési algoritmusnál a teljesítmény mutatóul hosszantartó futás után a laphiba gyakoriság várható értékét használják sok esetben (lásd pl. AVEN, BOGUSLAVSKY, KOGAN [7], GELENBE [4]).

Korábbi cikkeinkben (ARATÓ [2], [3], BENCZÚR, KRÁMLI, PERGEL [8]) a teljesítmény mutatójául a lapolási hibák várható számát használtuk. Amikor a p_i eloszlás ismert az optimális laphelyettesítési algoritmus a nagy valószínűség értékekhez tartozó lapokat tartja bent. Az erről a problémáról szóló cikkek többségében (lásd pl. AHO ET AL. [1], FRANASZEK, WAGNER [13], AVEN ET AL. [7]) javasolt algoritmusok csak asszimptotikusan lesznek optimálisak, amikor a valószínűségi eloszlások nem ismertek és azokat a program végrehajtása során kell becsülni. Illetve a bizonyítások nem vihetők át triviálisan az ismeretlen paraméter esetére.

Ismeretlen p_i eloszlások esetén a lapolási hibák várható száma minimalizálásának feladatát először ARATÓ fogalmazta meg [2]. A *Bayes módszert* és az ún. „kétkarú bandita problémájának" a megoldását (lásd DE GROOT [12]) használta. A BAYES-I MÓDSZER esetében később bebizonyította [3], [4], hogy két lapból álló egyszerű esetben, a „legritkábban használt lap" kerül ki (az ún. *LFU*) stratégia optimális minden véges időintervallumra, ahol a hivatkozási string független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, ismeretlen eloszlással. BENCZÚR, KRÁMLI, PERGEL [8] a veszteségfüggvény két szélsőséges esetében egy hasonló tételt tetszőleges n-re és m-re bizonyították. Ők szintén a *Bayes-féle módszert* használták, és általánosították a „két karú bandita problémájának" megoldását.

Most feltesszük, hogy a p_i valószínűségek ismertek, és az egyszerűség kedvéért $p_1 \geqq \ldots \geqq p_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Jelentse d_t a t idő után a központi memóriában jelenlevő lapok halmazát (d_t $n-m$ elemből áll). Feltesszük, hogy a d_t döntés csak a d_0 kezdeti döntéstől, és az $\{\eta_1, \ldots, \eta_{t'}\}$ $t' \geqq t$ megfigyelt hivatkozási stringektől függ. Jelöljük $D_{t,N}$-nel minden lehetséges szekvenciális $\{d_t, \ldots, d_{N-1}\}$ *Markov döntési eljárásnak* a halmazát, a véges $[t, N)$ intervallumon. Az első modellünkben, *A)* eset (lásd ARATÓ [2]), a memória átrendezhető minden $\eta_t \in \bar{d}_t$ hivatkozás után különösebb veszteség nélkül, de egy lapolási hiba, azaz $\eta_t \in d_t$, a költséget 1 egységgel növeli. Ez azt jelenti, hogy egy lap a második szintből átadódik az $m+1$ helyre és a lap tartalmának felhasználása után az elsőről egy lapot a második szintre kell helyezni.

A veszteség függvény a következő:

$$X_t^{d_{t-1}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \eta_t \in d_t \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.1}$$

A másik esetet, *B)* eset (lásd ARATÓ [2]), a következő formában vizsgáltuk: egy lapcsere növeli a költséget a t pillanatban 1 egységgel, és η_t-nek a központi memóriában kell lennie. Ez azt jelenti, hogy az igényelt lap a második szintből bekerül egy másik helyére az első szinten, azaz két lapot ki kell cserélni.

A veszteség függvény ekkor a következő:

$$X^{d_t, d_{t-1}} = |d_t \setminus d_{t-1}|, \tag{2.2}$$

ahol $|\cdot|$ egy véges halmaz elemeinek számát jelöli. Megjegyezzük, hogy ha $\eta_t \in d_{t-1}$, akkor $X_t^{d_t, d_{t-1}} \geqq 1$. A célunk az, hogy megtaláljuk a *Markov típusú szekvenciális döntési eljárások*, $d_0, \ldots, d_{N-1}$ halmazát, amely minimalizálja a rizikó függvényt

$$v(N) = \mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{N} X_t^{d_{t-1}}\right],$$

(illetve

$$v(N) = \mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{N} X_t^{d_t, d_{t-1}}\right]\Bigg),$$

az *A)* illetve a B*)* esetnek megfelelően.

Jelöljük a feltételes várható értéket $\eta_1, \ldots, \eta_t$ egy adott $y_1, \ldots, y_t$ realizációja mellett $\mathbf{E}\{y_1, \ldots, y_t\}$-vel, és definiáljuk a rizikó-függvény családot a következő módon:

$$v(y_1, \ldots, y_t, N-t) = \min_{\{d_t, \ldots, d_{N-1}\} \in D_{t,N}} \mathbf{E}\{y_1, \ldots, y_t\} \sum_{\tau=t+1}^{N} X_\tau^{d_{\tau-1}} \tag{2.3}$$

és

$$v(y_1, \ldots, y_t, d_t, N-t) = \min_{\{d_{t+1}, \ldots, d_{N-1}\} \in D_{t+1,N}} \mathbf{E}\{y_1, \ldots, y_t\} \sum_{\tau=t+1}^{N} X_\tau^{d_\tau, d_{\tau-1}} \tag{2.4}$$

az *A)* illetve a *B)* esetben. A (2.3) és (2.4) függvénycsaládok kielégítik a *Bellmann egyenleteket* (lásd pl. [7]).

$$\begin{aligned} v(y_1, \ldots, y_{t-1}, N-t+1) = \min_{d_{t-1}} \mathbf{E}\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}[X_t^{d_{t-1}} + \\ + v\{y_1, \ldots, y_{t-1}, \eta_t, N-t)], \end{aligned} \tag{2.5}$$

illetve

$$\begin{aligned} v(y_1, \ldots, y_{t-1}, d_{t-1}, N-t+1) = \\ = \min_{d_t} \mathbf{E}\{y_2, \ldots, y_{t-1}\}[X_t^{d_t, d_{t-1}} + v(y_1, \ldots, y_{t-1}, \eta_t, N-t)]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ha rekurzive megoldjuk a (2.5) és (2.6) egyenletrendszert, megkapjuk az optimális stratégiákat. Az *A)* esetben $v(y_1, \ldots, y_t, N-t)$ nem függ d_{t-1}-től, ezért elég minimalizálni minden t-re az

$$\mathbf{E}\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}(X_t^{d_{t-1}})$$

feltételes várható értéket. Ugyanez az állítás, csekély módosítással igaz a *B)* esetben. Így

$$\min_{d_{t-1}} \mathrm{E}\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}[X_t^{d_t-1}] = p_n + p_{n-1} + \ldots + p_{m+1} \tag{2.7}$$

és

$$\min_{d_t} \mathrm{E}\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}[X_t^{d_t, d_t-1}] = (p_n + p_{n-1} + \ldots + p_{m+2} + p_l), \tag{2.8}$$

ahol $$1 \leqq l \leqq m+1.$$

Így bebizonyítottuk a következő tételt, amely A. LEW [16] egy tételének az általánosítása.

2.1. TÉTEL. Feltéve, hogy az $\{\eta_t\}$, hivatkozási string független, stacionáris valószínűségi sorozat, a legkisebb hivatkozási valószínűséggel rendelkező lap második szintre helyezése az optimális helyettesítési politika.

Ebben a részben rövid összefoglalóját is adjuk korábbi eredményeinknek és modelljeinknek. Az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ hivatkozási string valószínűségi szempontból független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata; az η_t valószínűségi változók közös, $P_{i,w} = P_w(\eta_t = i)$, valószínűség eloszlása függ a w paramétertől, melynek értéke ismeretlen. A w-től való függés a következőképpen adott: a w paraméter értékkészlete az $\{1, \ldots, n\}$ természetes számok összes permutációjának W halmaza; $w(i)$ az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz w-vel realizált egyértelmű leképezését jelöli. Feltesszük, hogy adott valószínűségek egy fix, csökkenő sorozata: $p_1 > p_2 > \ldots > p_n \geqq 0$ $((p_1 + \ldots + p_n) = 1)$ és

$$\{P_{i,w}\} = P_w(\eta_t = i) = \{P_{w(i)}\}.$$

A döntéselméletben használt *Bayes módszer* alapján feltesszük, hogy w maga is egy valószínűségi változó. Mivel előzetes információnk nincs a $P_w\{\eta_t = i\}$ eloszlásról, feltesszük, hogy a w paraméter *apriori eloszlása* egyenletes.

Az *LFU stratégia* (a legkevésbé használt lap kerül ki) optimalitása a következő lemma következménye (lásd BENCZÚR, KRÁMLI, PERGEL [13]).

2.1. LEMMA. Ha a w paraméter *apriori eloszlása* egyenletes, és az i. lap f_i gyakorisága az $\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}$ stringben kisebb, mint a j. lap f_j gyakorisága, akkor

$$P\{\eta_t = i | y_1, \ldots, y_{t-1}\} < P\{\eta_t = j | y_1, \ldots, y_{t-1}\}, \tag{2.7}$$

azaz a lapok aposteriori valószínűségeinek sorrendje az $\{y_1, \ldots, y_{t-1}\}$ string megfigyelése után ugyanaz, mint a gyakoriságuk sorrendje ebben a stringben.

Bizonyítás. Legyen i és j két olyan lap, hogy $f_i < f_j$. Ha w_1 és w_2 két permutáció a

(i) $$w_1(i) = w_2(j),$$

(ii) $$w_2(i) = w_1(j),$$

(iii) $$w_1(i) < w_1(j) \Leftrightarrow w_2(j) < w_2(i),$$

(iv) $$w_1(k) = w_2(k), \quad k \neq i, j$$

tulajdonságokkal, akkor a *Bayes tételt* használva:

$$P\{w_1|y_1,\dots,y_t\} = \frac{\prod_{k=1}^{n} P_{w_1(k)}^{f_i}}{\sum_{w\in W}\prod_{i=1}^{n} P_{w(i)}^{f_i}}$$

és

$$P\{w_1|y_1,\dots,y_t\} < P\{w_2|y_1,\dots,y_t\}.$$

Összegezve ezeket a valószínűségeket, megkapjuk a kívánt eredményt.

Az 1.1. lemmából és a w paraméter *apriori eloszlásának* egyenletességéből a következő állítást kapjuk.

2.2. TÉTEL. Az *LFU stratégia* minimalizálja az $\mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{N} X_t^{d_{t-1}}\right]$ várható veszteséget az *A)* esetben, ahol d_0 tetszőleges, és a w valószínűségi változó kezdeti ζ eloszlása egyenletes.

A *B)* esetben óvatosabban kell okoskodnunk. Először bebizonyítjuk, hogy az optimális stratégiák a lapoláshelyettesítési *(demand-page)* algoritmusok között vannak, azaz azon algoritmusok között, melyek kielégítik a

$$d_t = d_{t-1}, \quad \text{ha} \quad \eta_t \notin d_{t-1},$$

$$d_{t-1} \setminus d_t = \{\eta_t\}, \quad \text{ha} \quad \eta_t \in d_{t-1}$$

feltételeket.

Az *LFU stratégia* optimalitása a *B)* esetben a 2.3. tételből következik.

2.3. TÉTEL. Ha d_t és d_t' két különböző döntés, melyre

$$d_t \setminus d_t' = \{i\}, \quad d_t' \setminus d_t = \{j\}$$

és a stringben az i-edik lap f_i gyakorisága kisebb, mint a j-edik lap f_j gyakorisága, akkor

$$v(y_1, \dots, y_t, d_t, N-t) < v(y, \dots, y_t, d_t', N-t).$$

A bizonyítás, $Q=N-t$-re indukcióval történhet. A 2.3. tétel állítása $Q=1$-re nyilvánvaló következménye az *A)* esetben használt megfigyeléseknek (1.1. lemma). Az indukciós lépés bizonyítása, a feltételes rizikó függvény

$$V(y_1, \dots, y_t, d_t, N-t)$$

és

$$V(y_1, \dots, y_t, d_t', N-t)$$

összehasonlítása $t<N-1$ esetén nem olyan egyszerű, mint az *A)* esetben. Itt lényegesen kihasználjuk azt a tényt, hogy

$$v(y_1, y_2, \dots, y_t, d_t, N-t)$$

az $\{y_1, y_2, \dots, y_{t'}\}$ stringekben csak a lapok gyakoriságától és d_t-től függ. Részletesebb bizonyítás található [8]-ban.

Megjegyezzük, hogy *LFU stratégia* optimalitása a *Bayes feltétel* nélkül szintén igaz marad (lásd ARATÓ, BENCZÚR, KRÁMLI [5]).

3. Egy modell tranzakciókra adatbázis rendszerben

Egy számítógép által kezelt nagy adatbázis rendszerhez több felhasználó is hozzáférhet, pl. távoli terminálokról. Egy ilyen rendszer viselkedésének leírása és a feldolgozás jellemzése tipikus és központi probléma egy adatbázis rendszer értékelésekor. Egy ilyen rendszert a lehető leggazdaságosabban szeretnénk megszervezni, oly módon, hogy egy kérdésre megfelelően rövid idő alatt kapjunk választ adott felhasználói szám mellett. A feladatnál figyelembe vesszük a várakozási költséget és a számítógép rendszer erőforrásainak kihasználását is. Az adatbázis rendszer ily módon komplex és dinamikus, ezért az értékelés végrehajtása előtt, amely magában foglalhatja a beállítást és az előrejelzést, mérésekre van szükség az adatgyűjtéssel, elemzéssel, modellezéssel és interpretálással kapcsolatban. Ilyen méréseket és statisztikai elemzéseket készített LEWIS és SHEDLER [18], hogy megkapják az *Információ Kezelő Rendszer (IMS)* viselkedésének egy matematikai leírását. Az *IMS*-ben a felhasználók távoli terminálokból léphetnek be az adatbázisba, a belépő közléseket *tranzakcióknak* nevezzük. Egy bizonyos tranzakció egy alkalmazási programot használ, amely feldolgozza a tranzakciót és belép az adatbázisba. Az *IMS* adatkezelő képességét *Adat Nyelv/I*-nek *(DL/I)* nevezzük. Egy alkalmazási program végrehajtása így hívások egy sorozata, az *IMS DL/I* komponenséhez.

LEWIS és SHEDLER [18] cikkükben elemezték a tranzakció kezdés folyamatát. A modellük a következő volt: Az események számát (tranzakció kezdések) $[0, t]$-ben, N_t-vel jelölték, ahol az N_t várható értéke $M(t)=\mathbf{E}(N_t)$.

Az N_t folyamatra feltették, hogy nem-homogén *Poisson-folyamat* (lásd pl. B. GNEDENKO, I. KOVALENKO [11] vagy D. COX, P. LEWIS [10]), mely azt jelenti, hogy

$$P\{N(t)-N(s)=k\} = \frac{e^{-[\Lambda(t)-\Lambda(s)]}[\Lambda(t)-\Lambda(s)]^k}{k!}. \tag{3.1}$$

$$\Lambda(t)-\Lambda(s) = \int_s^t \lambda(u)\,du$$

($\lambda(u) \geqq 0$, a sűrűségfüggvény) és

$$P\{N(t)-N(s)=0\} = 1-\lambda(t)(t-s)+o(t-s),$$

$$P\{N(t)-N(s)=1\} = \lambda(t)(t-s)+o(t-s),$$

$$P\{N(t)-N(s)=2\} = o(t-s).$$

Véges sok, diszjunkt intervallumon az események számai független valószínűség változók. Könnyen látható, hogy

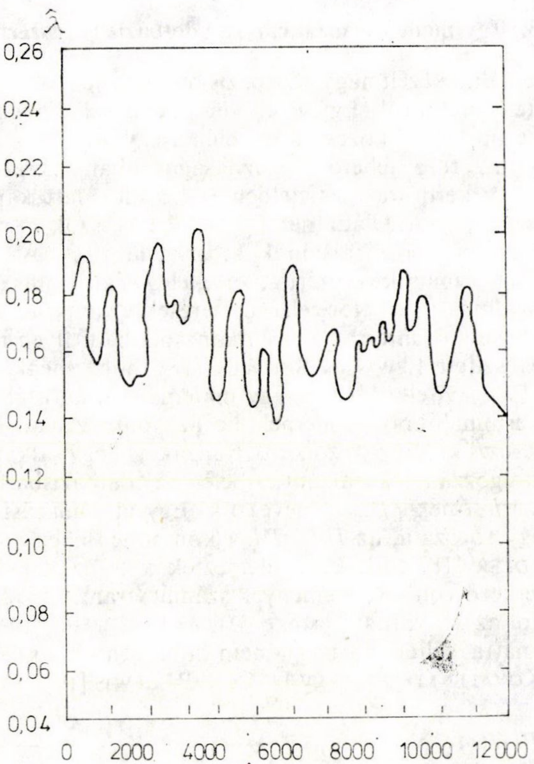
$$\Lambda(t) = \mathbf{E}\{N_t\}.$$

LEWIS és SHEDLER azt találták, hogy az adatok szembetűnő tulajdonsága a beérkezési sűrűség függvény oszcilláló természete volt. A spektrál analízis nem-stacionárius adatokra nem volt alkalmazható.

A $\lambda(t)$ beérkezési sűrűség függvényt egy exponenciális polinomként becsülték, a következőképpen:

$$\lambda(t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{r} \alpha_m t^m\right\}. \tag{3.2}$$

A $\lambda(t)$ függvény tipikus becsléseit az olvasó megtalálhatja az 1., 2. ábrákon.



1. ábra

A determinisztikus beérkezési sűrűség függvény közelítése csak első lépésnek tekinthető. Ha több oszcillációs hatásra számítunk egy nap alatt, hatékonyabbnak tűnik egy duplán sztochasztikus modell használata, melyet ARATÓ, KNUTH, TŐKE [6] (lásd még KNUTH [15]) multiprogramozású rendszerek leírására javasoltak. SNYDER [20] hasonló modellt használt duplán sztochasztikus *Poisson folyamatok* szűrésére és értékelésére. Ezt a folyamatot először COX [9] vezette be és COX és LEWIS [10] írták le.

Az általános matematikai modellben a sebesség függvényt (vagy a paramétereket) a $\lambda(t)=h(t, X(t))$ formában tekintettük, ahol $X(t)$ sztochasztikusan változik időben, pl. mint egy *Markov diffúziós folyamat*. A tranzakció belépéseket számláló folyamat intenzitása sztochasztikusan változik két ok miatt, egyik a napi oszcilláció, a másik a programok (vagy jobok) változása. Feltesszük, hogy az N_t folyamat, $\{\lambda(t), t>t_0\}$ sztochasztikus sűrűségfüggvénnyel, a következő tulajdonságú:

$$N_0 \equiv 0 \quad \text{(1 valószínűséggel)},$$

$$P\{N_t - N_s = k \mid \lambda(\sigma),\ s<\sigma<t\} = \frac{\left[\int_s^t \lambda(\sigma)\,d\sigma\right]^k}{k!}\, e^{-\int_s^t \lambda(\sigma)\,d\sigma} \tag{3.3}$$

és

$$P\{N_{t+\Delta t}-N_t = i|\lambda(\sigma),\ t < \sigma < t+\Delta t\} =$$
$$= (1-\lambda(t)\Delta t)\cdot\delta_{0i}+\lambda(t)\Delta t\delta_{1i}+o(\Delta t),$$

$$m_t = \int_0^t \lambda(\sigma)\,d\sigma = \mathbf{E}\{N_t|\lambda(\sigma),\ 0 < \sigma < t\}.$$

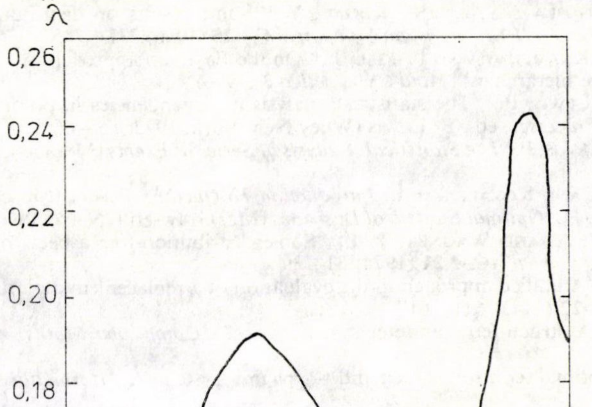
Feltesszük továbbá, hogy a $\xi(t)$ folyamat a következő alakú

(3.4) $$d\xi_t^{(l-1)}+[a_0\xi_t+a_1\xi_t'+\ldots+a_1\xi_t^{(l-1)}]\,dt = dw(t),$$

ahol $l\geqq 1$, $w(t)$ *Brown mozgás folyamat (Wiener-folyamat)*. Legyen

$$\lambda(t) = |\xi_t|$$

és tekintsük a $\lambda(t)$ becslésének problémáját az N_u számláló folyamat megfigyeléséből a $(0, t)$ intervallumon. A becslési probléma megoldása függ a ξ_t *aposteriori eloszlásától* (vagy sűrűségétől). Jelölje $L[\cdot]$ a ξ_t *diffúziós folyamatra* vonatkozó *Kolmogorov féle első differenciál operátort*, továbbá $\hat{\lambda}(t)=\mathbf{E}[\lambda_t(\xi_t)|N_t]$ a $\lambda_t(\xi_t)$ sűrűség négyzetes középben legjobb becslését a determinisztikus esetben, adott N_t esetén.



2. ábra

ξ_t aposteriori $p_t(X_t|N_t)$ sűrűségére a következő differenciálegyenletet kapjuk (lásd SNYDER [20])

$$(3.5)\qquad dp_t(\xi_t|N_t) = L[p_t(\xi_t|N_t)]dt + p_t(\xi_t|N_t)\cdot\{\lambda_t(\xi_t) - \hat{\lambda}_t\}\cdot\lambda_t^{-1}\{dN_t - \hat{\lambda}_t\, dt\}.$$

Az egyenlet megoldását csakis numerikus számolással kaphatjuk meg.

IRODALOM

[1] AHO, A. V., DENNING, P. J. AND ULLMANN, J. D., "Principles of optimal page replacement", *Journal A. C. M.* **18** (1971) 80—93.

[2] ARATÓ, M., „Számítógépek hierarchikus laptárolási eljárásainak optimalizálásáról", *MTA SZTAKI Közlemények* **16** (1976) 7—23.

[3] ARATÓ, M., "Statistical sequential methods in performance evaluation of computer system", *in 2nd International workshop on modelling and performance evalaution of computer systems* (Stresa-Italy, 1976) 1—10.

[4] ARATÓ, M., "A note on optimal performance of page storage", *Acta Cybernetica* **3** (1976) 25—30.

[5] ARATÓ, M., BENCZÚR, A. AND KRÁMLI, A., "On the solution of optimal performance of page storage hierarchies with independent reference string", Banach Center Publications, Mathematical Statistics, **6** (1977), megjelenés alatt.

[6] ARATÓ, M., KNUTH, E. AND TŐKE, P., "On stochastic control of a multiprogrammed computer based on a probability model", *in Preprints of the Stochastic Control Symposium* (IFAC, Budapest, 1974) 305—313.

[7] AVEN, O., BOGUSLAVSKY, L. AND KOGAN, Y., "Some results on distribution-free analysis of paging algorithms", *IEEE Trans. on Computers* **C—25** (1976) 737—745.

[8] BENCZÚR, A., KRÁMLI, A. AND PERGEL, J., "On the Bayesian approach to optimal performance of page storage hierarchies", *Acta Cybernetica* **3** (1976).

[9] COX, D. AND LEWIS, P., "The statistical analysis of dependencies in point processes", *in Stochastic Point Processes*, ed.: P. LEWIS (Wiley New York, 1972) 55—66.

[10] COX, D. AND LEWIS, P., *The Statistical Analysis of Series of Events* (Methuen, London and Wiley, New York, 1966).

[11] GNEDENKO, B. AND KOVALENKO, I., *Introduction To Queuing Theory* (Moscow, 1969).

[12] DE GROOT, M. H., *Optimal Statistical Decisions* (Mc. Graw-Hill, N. Y., 1970).

[13] FRANASZEK, P. A. AND WAGNER, T. J., "Some distribution-free aspects of paging algorithm performance", *Journal ACM* **21** (1974) 31—39.

[14] GELENBE, E., "A unified approach to the evaluation of a replacement algorithms", *IEEE Trans. Computers* **C—22** (1973) 611—617.

[15] KNUTH, E., "A structured computer system model", *Comp. and Maths. With Appl.* **1** (1975) 327—336.

[16] LEW, A., "Optimal control of demand — paging systems", *Information Sciences* **10** (1976) 319—330.

[17] LEWIS, P. AND SHEDLER, G., "Empirically derived micromodels for sequences of page exceptions". *IBM J. Res. Developm.* 1973) 86—100.

[18 LEWIS, P. AND SHEDLER, G., "Statistical analysis of transaction processing in a data base system", Sept. R. J. 1629. *IBM Research*, (1975).

[19] SEGALL, A., "Dynamic file assignment in a computer network", *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC—21** (1976) 161—173.

[20] SNYDER, D., "Filtering and detection for doubly stochastic Poisson processes", *IEEE Trans. on Inform. Theory* **18** [1975) 91—102.

(Beérkezett: 1977. szeptember 16.)

ARATÓ MÁTYÁS
SZÁMÍTÓGÉPALKALMAZÁSI KUTATÓ INTÉZET
1536 BUDAPEST, POSTAFIÓK 227.

STATISTICAL SEQUENTIAL DECISION METHODS IN CASE OF INDEPENDENT STRINGS

M. ARATÓ

The purpose of this paper is to find optimal policies in exact forms for dynamical allocation of files, for page replacement and for estimation of rate parameter of transactions.

In this work relatively simple models are considered to present the main method of solving such problems. We are using the well known method of statistical sequential decision theory. In addition to the application-oriented contribution in analysis of such systems our results contain also theoretical contribution in the theory of sequential methods (or optimal control).

Section 1. presents the basic model used in file assignement in computer networks with independent request strings. The problem is solved in the papers of A. SEGALL, but he did not get simple solutions because his model is more complicated. Section 2. contains our earlier results in paging when the reference string is an independent sequence.

In Section 3. we are giving a new model for transactions in a data base system, the statistical description and analysis of which was done by LEWIS and SHEDLER.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 27—63

ERŐFORRÁS KIOSZTÁSI FELADATOK MEGOLDHATÓSÁGÁRÓL

KNUTH ELŐD
Budapest

Ebben a dolgozatban a számítógépek operációs rendszereiben felmerülő ún. „kizárólagos használatú" erőforrások ciklikus lekötése során keletkező ún. „konkurrencia problémával" foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a később részletezendő, eléggé általános feladatkör keretein belül minden erőforrás kiosztási feladat programozható ún. „szemaforok" segítségével.

A konkurrencia probléma általánosságban a következő szemléletes módon fogalmazható meg. Egyidejűleg működő, előrehaladásuk feltételeiben egymástól kölcsönösen függő folyamatokat tekintünk. A feladat az egyes folyamatok számára olyan algoritmusok készítése, mely felfüggeszti azokat a folyamatokat, amelyek továbbhaladási feltételei nem teljesülnek, majd megfelelő időben külső jelzések útján újraaktivizálja őket.

Az algoritmusok által megvalósított rendszerműködésre vonatkozóan természetesen bizonyos ésszerű feltételezéseket szokás tenni. Az irodalomban legszélesebb körben használt követelmény az ún. „telítettség" melyről a 3. pontban szólunk.

Matematikai szempontból a feladat leginkább a logikai problémák körébe sorolható, bár az eszközök, mint látni fogjuk újkeletűek, egyik régebben kidolgozott matematikai diszciplina sem alkalmazható önmagában.

Lényeges dolog, hogy az erőforrás kiosztás tágabb értelemben vett problémájával szemben a konkurrencia jelenségek szintjén a telítettségen túlmenően nem foglalkozunk a döntések valamilyen pontosabb értelemben vett optimalitásával. Ezen a szinten azt vizsgáljuk, *létezik-e egyáltalán telített kiosztást megvalósító algoritmus?* Mint az a gyakorlatból, és a téma irodalmából ismeretes, ennek eldöntése gyakran súlyos nehézségekbe ütközik. A parallel algoritmusok realizálhatósága és az algoritmusok hatékonyságának vizsgálata azonban egymástól igen távoli matematikai területekre vezetnek.

1. Bevezetés

Az alábbiakban röviden ismertetjük a dolgozatban vizsgált feladatkör előzményeit, és összefoglaljuk a konkurrens folyamatok elméletében korábban kialakult fogalmak közül azokat, melyek ismerete a továbbiakban elengedhetetlen. Nem tekinthető e fejezet a konkurrens folyamatok elméletébe való általános bevezetésnek.

Egyidejűleg működő folyamatokat[1] tekintünk, melyek előrehaladási sebességeire vonatkozóan semmilyen feltételezéssel sem élünk. A folyamatok operációkat hajtanak végre valamilyen, az összes résztvevő folyamat számára közös adathalmazon. A folyamatok bizonyos feltételek nem teljesülése esetén felfüggesztésre kerülhetnek. A felfüggesztett folyamatok külső jelzés segítségével kelthetők ismét életre. Az ilyen tulajdonságú folyamatokból álló rendszereket *konkurrens folyamatrendszereknek* nevezzük.

[1] Nem foglalkozunk e dolgozatban a folyamat fogalmának egzakt értelmezésével. Ez feleslegesen messzire vezetne. A matematikai tárgyalásban egzakt fogalmakról *(Petri-hálókról, path-kifejezésekről)* beszélünk majd folyamatok helyett.

Konkurrens folyamatrendszerekkel kapcsolatosan a következő két alapvető kérdéskört vethetjük fel:

- Melyek egy adott folyamatrendszer azon tulajdonságai, amelyek a rendszert alkotó folyamatok minden lehetséges együttes realizációja, (végrehajtása) esetén teljesülnek? Másszóval: melyek azok a törvényszerűségek, amik az adott rendszerben függetlenek a folyamatok egymáshoz viszonyított előrehaladási sebességétől? A folyamatrendszerek ezen tulajdonságait *parallel invariánsoknak* fogjuk nevezni.
- Milyen módszerekkel lehet olyan konkurrens folyamatrendszereket felépíteni, melyek előre megadott parallel invariánsokkal rendelkeznek? E kérdéskör nem csupán eszközök definiálását, azok matematikai vizsgálatát is tartalmazza.

A konkurrens folyamatrendszerek az élet majd minden területén megtalálhatók. Az ipari üzemek gyártási folyamatainál régóta ismeretes konkurrencia jelenségek a lehetséges realizációk viszonylagos áttekinthetősége miatt korábban nem indokolták a konkurrens folyamatrendszerek általános törvényszerűségeinek elméleti vizsgálatát. Az eszközök hiánya azonban a harmadik generációjú számítógépek, leginkább pedig a real-time rendszerek megjelenésekor súlyos helyzetet teremtett. Számos, az utóbbi tíz évben született jelentős eredmény ellenére a még megoldatlan kérdések ma is nehéz és költséges erőfeszítésekre kényszerítik a számítógépes operációs rendszerek tervezőit és készítőit.

Ezek után rátérünk azoknak az alapfogalmaknak rövid ismertetésére, melyek a konkurrens folyamatok problémakörében korábban is hasznosaknak bizonyultak.

Petri-hálók

Egy *Petri-háló* egy irányított párosgráf, melynek két-típusú szögpontjait *helyeknek* illetve *átmeneteknek* nevezzük. Előbbieket körökkel, utóbbiakat vonással szokás jelölni. Az egyszerűség kedvéért feltételezni fogjuk, hogy a gráf csak egyszeres éleket tartalmaz.

Egy átmenet *bemeneti* ill. *kimeneti* helyeinek azokat a hálóbeli helyeket nevezzük, amelyekből/be élek vezetnek a szóbanforgó átmenetbe/ből.

Egy *Petri-háló pontozása* olyan függvény, mely a háló helyeinek halmazát képezi le a nemnegatív egész számok halmazára.

Egy pontozott *Petri-hálón* (továbbiakban egyszerűen: *Petri-hálón*) egy átmenet *billenőképes*, ha minden bemenetéhez pozitív pontszám van rendelve.

Egy (billenőképes) átmenet *billenése* olyan új pontozást eredményez, melyben az átmenethez tartozó összes bemeneti helyekhez eggyel alacsonyabb, az összes kimeneti helyekhez pedig eggyel magasabb érték tartozik.

Egy *Petri-háló* egy pontozását *elérhetőnek* nevezzük, ha a kezdeti pontozásból kiindulva létezik a billenéseknek olyan sorozata, mely a mondott pontozást eredményezi.

Billenések egy sorozata *folytatható*, ha az általa eredményezett pontozásban van a hálónak billenőképes átmenete.

Egy *Petri-háló gyengén életképes*, ha minden billenéssorozata folytatható. Egy *Petri-háló erősen életképes*, ha minden elérhető pontozásából minden elérhető pontozása elérhető.

A *Petri-hálókkal* kapcsolatos fogalmak részletesebb ismertetése magyar nyelven SZLANKÓ [19] cikkében megtalálható. A *Petri-hálók* általános elméletének legújabb eredményei KELLER [13], CRESPI [5], ARAKI [1] cikkeiben olvashatók.

A *Petri-hálók* többek között konkurrens folyamatrendszerek működésének leírására, bizonyos invariánsaik vizsgálatára alkalmasak. Ez általában az ún. *elérhetőségi fa* megkonstruálása útján történik, ld. pl. KELLER [13]. A folyamatokat leíró *Petri-hálók* előállítására vonatkozóan SZLANKÓ [19]-re utalunk.

Szemaforok

A *szemafor* speciális célú adatszerkezet, mely egy egész értékű változóból, és egy várakozási listából áll. Előbbit a szemafor *értékének* fogjuk nevezni. A várakozási listáról feltételezzük, hogy kezdetben üres.

A szemaforhoz való hozzáférés kizárólag az alábbi két operáció útján van engedélyezve:

- *P-operáció*[2]
  A szemafor értéke eggyel csökken;
  Ha az új érték negatív, az operációt végrehajtó folyamat megszakad és a várakozási listára kerül.

- *V-operáció*[2]
  A szemafor értéke eggyel nő;
  Ha az új érték nempozitív, a várakozási listáról egy folyamat kilép és folytatja működését.

A szemafor operációkról feltételezzük, hogy *oszthatatlanok,* ami alatt azt értjük, hogy ugyanarra a szemaforra vonatkozóan egyidejűleg legfeljebb egy szemafor operáció lehet végrehajtás alatt. Ennek megvalósíthatóságával ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

A szemafor konkurrens folyamatrendszerek vezérlésének egyik legelemibb eszköze. Alapgondolata és első ismertetései DIJKSTRA [8] és [9] cikkeiben találhatók. A szemafor elemi matematikai tulajdonságainak vizsgálata HABERMANN [10] cikkéből ismeretes.

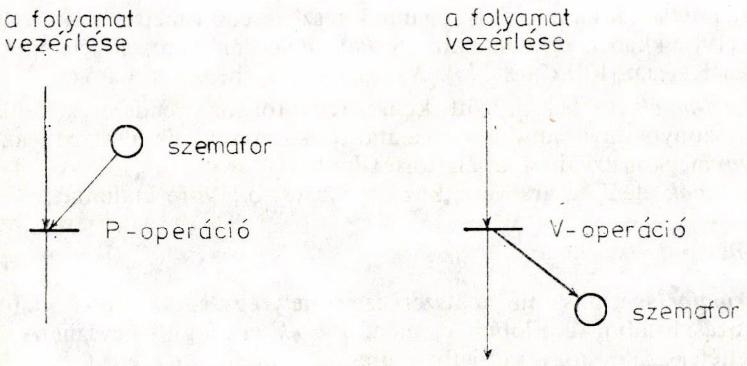
Folyamatrendszerek *Petri-hálóiban* a szemafor operációknak az 1. ábrán látható átmenet típusok feleltethetők meg. (ld. pl. SZLANKÓ [19]).

A szemafor megalkotása a konkurrens folyamatok kutatásának kezdeti időszakában akut nehézségekre nyújtott gyógyító írt. A szemafor alkalmazására és jelentőségére a 4. pontban visszatérünk.

Path-kifejezések

A *path-kifejezések* operációs szabályok leírására szolgáló formális eszközök *ciklikus környezetben.* Ilyen értelemben általánosításai a nemciklikus esetekben parciális rendezési relációkkal leírható operációs szabályoknak, melyeket pl. COFFMAN [4] alkalmaz a konkurrencia jelenségek tárgyalásában.

[2] Az operációk elnevezései holland szavak kezdőbetűi. *Passeren*=áthaladni. *Virjgeven*=szabaddá tenni.



1. ábra

A *path-kifejezések* képzése az alábbi szabályok szerint történik:

- *Pontosvesszővel* elválasztott operációk csakis (a leírás sorrendjében) *egymás után* hajthatók végre.
- *Vesszővel* elválasztott operációk közül (a kifejezés egyszeri végrehajtásakor) mindig *csak az egyik* hajtható végre.
- *Kapcsos zárójelben* levő operáció egyidejűleg többszörösen is végrehajtás alatt állhat.
- A **path** és **end** jelek közé helyezett operációt végrehajtása után *ismét* végre lehet hajtani.

Illusztrációképpen egy egyszerű példát mutatunk. A következő **path** $a;(b, (c; d))$ **end** kifejezi azt, hogy a négy operáció közül elsőként csak a hajtható végre, ezután vagy b vagy c következhet, c-t azonban csak d követheti. Végül b vagy d végrehajtása után elölről kezdődhet az egész.

A *path-kifejezések* megalkotása HABERMANN nevéhez fűződik. Részletes ismertetésük CAMPBELL—HABERMANN [2] cikkében található. Létezik egy olyan formális szabályrendszer, melynek segítségével minden *path-kifejezés,* sőt *path-kifejezések* tetszőleges rendszere *Petri-hálóval* reprezentálható. Ez a szép eredmény CAMPBELL—LAUER [3] cikkében található.

E szükséges alapfogalmak bevezetése után röviden áttekintjük a programok konstruálásával kapcsolatos nehézségeket.

A tárgyalandó téma előzményei

A konkurrens folyamatok vezérlésével kapcsolatos legegyszerűbb, mégis központi jelentőségű feladat az ún. *kölcsönös kizárási* probléma 1962-ben merült fel. Első megoldását 1965-ben sikerült megtalálni. A feladat a következő:

Véges számú ciklikus folyamatot tekintünk, melyek mindegyike tartalmaz egy ún. *kritikus szakaszt.* Feladatunk e szakasz bemenetét és kimenetét úgy programozni, hogy *egyidejűleg legfeljebb egy* folyamat tartózkodhasson kritikus szakaszában (továbbá még néhány más természetes feltétel teljesüljön).

Az első megoldások ún. "*busy waiting*" segítségével (másszóval felfüggesztések alkalmazása nélkül) szervezték meg a folyamatokat. Az ilyen megoldások rendkívül komplikáltak, bár ma sem érdektelenek, ugyanis bizonyos esetekben valóban nem áll más eszköz rendelkezésre. Ezek a nevezetes algoritmusok többek között DIJKSTRA [7], [8] cikkeiben találhatók. A kölcsönös kizárási feladat nehézségeinek részletesebb elemzése pl. VARGA [20] és KNUTH [14] dolgozatában olvasható.

Az első olyan ún. *szinkronizálási primitíva*, a szemafor, mely eszközt adott *passzív várakozás* megvalósítására gyökeresen változtatta meg az egész feladatkör állását. Szemafor alkalmazása esetén ugyanis a kölcsönös kizárás már nem tekinthető problémának, hiszen azt a 2. ábrán látható algoritmussal megvalósíthatjuk, ezzel szemben másfajta, új problémakörök tárultak fel.

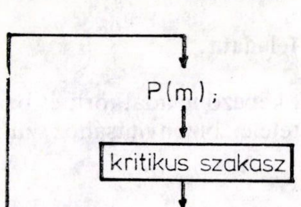
Tisztázatlan az a kérdés, hogyan kell a szemaforok segítségével bonyolultabb folyamatrendszereket programozni, s egyáltalában melyek azok a feladatok, melyeket szemaforok alkalmazásával meg lehet oldani.

Több nevezetes feladat ismeretes, melyekre csak hosszabb idő után sikerült megoldást találni. Ilyenek például a következők: "*Readers, writers*" ld. pl. COURTOIS [6], "*Dining philosophers*" ld. pl. DIJKSTRA [9], "*Cigarette smokers*" ld. pl. PARNAS [17]. E feladatok némelyikéről bizonyítani is vélték szemaforokkal való megoldhatatlanságukat. Ezek hibája nem is a bizonyításokban rejlett, hanem a szemaforokkal való programozás „játékszabályainak" tisztázatlanságában.

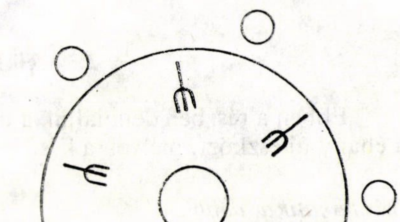
A szemaforok alkalmazásának nehézségét a *P*-operációk egymás utáni használata esetén fellépő ún. „*holtpont*"-veszély okozza. (Ld. pl. COFFMAN [4]). E veszélyt egyes esetekben az operációk „ügyes" elhelyezésével sikerül elhárítani, más esetekben bonyolultabb eljárásokkal, pl. segédfolyamatok bevezetésével remélhetünk megoldást. Általános recept ez idő szerint nem ismeretes.

Példaképpen tekintsük a gyakran idézett *Dining philosophers* feladatot: Egy asztal körül öt filozófus ül, az asztalon öt villa és egy tál spagetti van a 3. ábrán látható elrendezésben.

<u>semaphore</u> m; (kezdőérték:=1)
mindegyik folyamat programja:



2. ábra



3. ábra

A filozófusok gondolkodás közben időnként megéheznek. Az étkezéshez két villára van szükségük, a baloldalira és a jobboldalira egyaránt. A feladat a filozófusok programjának elkészítése.

Kézenfekvő gondolat a következő: Rendeljünk egy-egy szemafort minden egyes villához (erőforráshoz), és legyen az étkezési szakaszba való belépés programrészlete minden filozófus számára a következő:

P (bal villa);
P (jobb villa);

Sajnos ez, mint rögtön látható, holtpontveszélyt tartalmaz. Nincsen ugyanis akadálya annak, hogy akár mindegyik filózófus lefoglalja baloldali villáját, aminek eredményeképpen a második P-operáció már mindegyik filozófusnál felfüggesztést okoz. Világos, hogy ezzel a teljes folyamatrendszer működése egyszer s mindenkorra kátyúba jutott.

Meg lehet mutatni, hogy ez a folyamat vezérlési feladat más, sokkal bonyolultabb módon mégis megoldható szemaforok segítségével. Ilyen megoldást közöl DIJKSTRA [9] dolgozatában.

Ebben a dolgozatban egy olyan általános feladatkört vezetünk be, mely speciális esetként többek között ezt a feladatot is tartalmazza. Erről az általános feladatkörről mutatjuk majd ki, hogy szemaforok segítségével minden esetben programozható. Ilyen módon mellékesen a *Dining philosophers*-feladatra is egy új megoldást nyerünk.

A szemaforok segítségével való programozás nehézségeinek láttán természetesen joggal vethetjük fel a kérdést: Lehet-e a szemafornál alkalmasabb, jobban használható folyamat-koordinációs eszközöket találni? Mint a konkurrens folyamatok elméletében számos más itt nem említett kérdésnek, ma már ennek jelentős irodalma van.

A gordiuszi csomót ez mégsem oldja meg. Bármilyen elegáns eszközt találunk ki, fabatkát sem ér, ha a gyakorlatban nem tudjuk megvalósítani. Ehhez pedig pontosan arra van szükség, hogy a legegyszerűbb eszközökkel, például a szemaforral képesek legyünk az előírt folyamat-koordinációt megvalósítani. Ez az a pont, ahol a kör a szemaforok körül bezárul.

2. A ciklikus allokáció feladata

Ebben a részben definiáljuk a dolgozat tárgyát képező feladatkört, és bevezetünk néhány új eszközt, melyek a később kimondandó tételek bizonyításához szükségesek.

Matematikai definíciók

Halmazrendszernek nevezzük az $(\mathbf{I}, \mathbf{A})$ párt, ahol $\mathbf{I}$ véges halmaz, $\mathbf{A}$ pedig $2^{\mathbf{I}}$ *nem feltétlenül különböző* elemeiből képzett tetszőleges véges halmaz. (E definícióból természetszerűleg az is következik, hogy $\mathbf{A}$ elemei között tetszőleges számban fordulhat elő az üres halmaz is.)

Allokációs feladatnak nevezzük az $(\mathbf{A}, \mathbf{R}, R)$ hármast, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{R}$ véges halmazok, R pedig $\mathbf{A} \to 2^{\mathbf{R}}$ leképezés. $\mathbf{A}$ elemeit *folyamatoknak*, $\mathbf{R}$ elemeit *erőforrásoknak*, R-t pedig *allokációs függvénynek* fogjuk nevezni.

Világos, hogy az allokációs feladatok és a halmazrendszerek között az alábbi kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető:

a) Az (**I**, **A**) halmazrendszerhez rendeljük hozzá az (**A**, **I**, R) allokációs feladatot, ahol

$$R(A) = \{I | I \in A\}, \quad A \in \mathbf{A}.$$

Vagy megfordítva:

b) Az (**A**, **R**, R) allokációs feladathoz rendeljük hozzá az $(\mathbf{R}, \{R(A) | A \in \mathbf{A}\})$ halmazrendszert.

Halmazrendszerek legáltalánosabb elemi tulajdonságairól az előkészületben lévő KNUTH [15] cikkben részletesen olvashatunk. Ezek alkalmazásáról a későbbiekben szólunk.

A számítástechnikai feladat

A ciklikus allokáció alább kitűzött problémája a gyakran idézett „kölcsönös kizárás", továbbá más ismert összetettebb feladatok általános, közös megfogalmazása.

Legyen **A** ciklikus folyamatok, **R** pedig kizárólagos hozzáférésű erőforrások véges halmaza. Nevezzük az $R(A) \subset \mathbf{R}$ halmazt az $A \in \mathbf{A}$ folyamat *erőforrásigényének*.

Bár a kizárólagos hozzáférésű, (más elnevezéssel: kizárólagos elérésű vagy használatú) erőforrás fogalma eléggé egyszerű és közismert, a teljesség kedvéért megadjuk a HOARE-féle ([12]) formális definícióját:

```
monitor resource;
  begin
    process user;
    procedure acquire(caller); process caller;
      if user=none
        then user:=caller
        else error;
    procedure release;
      if user≠none
        then user:=none
        else error;
    initialize:
      user:=none
  end
```

Szavakban: Egy kizárólagos hozzáférésű erőforrás vagy foglalt, vagy szabad. Amenynyiben foglalt, egyidejűleg csak egyetlen folyamatnak lehet a használatában.

Tegyük fel most, hogy **A** folyamatainak mindegyike az alábbi két periódusból áll:

- *szabad periódus,*
- *kötött periódus.*

A szabad periódusba a folyamatok korlátozás nélkül beléphetnek. A kötött periódusba azonban egy $A \in \mathbf{A}$ folyamat csak akkor léphet, ha $R(A)$ elemei mind szabad állapotban vannak. Amennyiben ez teljesül, a folyamat belép a kötött periódusba, és annak teljes időtartamára leköti az $R(A)$ halmazhoz tartozó összes erőforrásokat. Ha azonban az igényelt erőforrások nem mindegyike szabad, a folyamat várakozó (blokkolt) állapotba kerül.

Megjegyezzük, hogy amint az a fenti megfogalmazásból is kitűnik, feladatkörünkön belül nem engedjük meg ún. ekvivalens erőforrások szerepeltetését. Másszóval: az $R(A)$ erőforrásigény esetünkben mindig *egyértelmű*, tehát nem elégíthető ki más, $R(A)$-tól különböző részhalmaz kiosztása útján.

Miként az a konkurrens folyamatok problémakörében szokásos, semmilyen feltételezéssel sem élünk a folyamatok relatív sebességviszonyaira vonatkozóan. A szabad és kötött periódusok időtartamait tehát előrejelezhetetleneknek tekintjük, és így minden lehetséges esemény sorozatra fel kívánunk készülni.

Feladatunk ezek után a folyamatok számára olyan algoritmusok készítése, mely az erőforrások lekötését és felszabadítását a fentiek alapján, a folyamatok várakoztatását és újraindítását pedig a később részletezendő megszorítások mellett megoldják.

A feladat nehézsége abban áll, hogy erőforrások egy halmazának lekötését minden esetben egy (hosszabb-rövidebb) algoritmus végzi, melynek működése közben az egész rendszerben sok más esemény is történhet. Az algoritmusnak olyannak kell lennie, hogy minden lehetséges ilyen esetben az előírt feltételeknek megfelelően működjön. Ennek nem mond ellent az, hogy logikailag, ha tetszik, tekinthetjük az összetett lefoglalásokat is egyetlen primitív utasításnak. Az ilyen primitívákat ugyanis előbb meg kell valósítani. Éppen erről van szó.

Az első természetes gondolat a következő megoldást sugallhatja: Rendeljünk $\mathbf{R}$ minden eleméhez egy szemafort 1-kezdőértékkel, és legyen $R(A)$ lefoglalásának programja egyszerűen:

$$\begin{gathered} P(r_1); \\ P(r_2); \\ \vdots \\ P(r_k); \end{gathered}$$

ahol $r_1, r_2, \ldots, r_k$ az $R(A)$ elemeihez rendelt szemaforok. Sajnos, mint tudjuk, és miként azt az ún. *Dining philosophers* egyszerű példáján láthattuk is, ezen a módon nem tudjuk elhárítani a holtpont keletkezés veszélyét. Más, bonyolultabb utat kell keresni.

3. A telítettség fogalma

Matematikai definíciók

Halmazpredikátumnak nevezünk egy predikátumot, ha egy véges halmaz összes részhalmazán van értelmezve. Egy halmazpredikátumot *monotonnak* nevezünk, ha olyan tulajdonságú, hogy valahányszor egy részhalmazra igaz, akkor e részhalmaz minden részhalmazára is igaz.

Az $\mathbf{X} \subset \mathbf{A}$ részhalmaz $\mathbf{A}$ egy M monoton halmazpredikátumára nézve *maximális*, ha $M(\mathbf{X})$ igaz, de $\mathbf{A} \setminus \mathbf{X}$-nek nincsen olyan eleme, melyet $\mathbf{X}$-hez hozzávéve M igaz maradna a bővített részhalmazra.

Egy véges halmaz különböző elempárjain értelmezett *szimmetrikus reláció által generált predikátumnak* azt a predikátumot nevezzük, mely a szóban forgó halmaz egy részhalmazára akkor igaz, ha annak *bármely két különböző eleme között fennáll a reláció*. Nyilvánvaló, hogy szimmetrikus reláció által generált predikátum monoton halmazpredikátum.

Legyen (**I**, **A**) halmazrendszer. Minthogy a *diszjunktság* szimmetrikus reláció **A**-n, a fentiek alapján beszélhetünk **A** maximális részhalmazairól, melyek ez esetben páronként diszjunkt, (**A**-beli halmazzal tovább már nem bővíthető) **A**-beli halmazokból állanak. Ezeket a maximális halmazokat a halmazrendszer *maximálisan diszjunkt* részrendszereinek nevezzük.

Ha most egy (**A**, **R**, R) allokációs feladatra gondolunk, az előbbiek és a 2. pontban mondott halmazrendszer megfeleltetés alapján a diszjunktság által generált **A** részhalmazain értelmezett predikátum éppen azt fejezi ki: a szóban forgó folyamathalmaz folyamatainak erőforrásigényei között *nincsenek ellentmondók*. Ezt a predikátumot a feladathoz tartozó *allokációs predikátumnak* fogjuk nevezni.

Könnyen látható, hogy különböző allokációs feladatok allokációs predikátumai lehetnek azonosak. A predikátumforma kevesebb információt őriz: nem beszél erőforrásokról, csupán a folyamatok igényeinek ellentmondó voltáról szól. Mint látni fogjuk, a folyamatok vezérlésének megvalósításához ez éppen elegendő.

Az allokációs predikátumok a monotonitás mellett még egy másik, ún. *folytonossági* tulajdonsággal is rendelkeznek. Meg lehet mutatni, hogy e két tulajdonság már *jellemzi* is az allokációs predikátumokat: bebizonyítható, hogy minden folytonos monoton predikátum valamely allokációs feladat allokációs predikátuma. Minthogy e kérdések nem kapcsolódnak szorosan megoldandó feladatunkhoz, másrészt e predikátumok tulajdonságainak elemzése során számos más önmagában is érdekes és alapvető kérdés merül fel, ezért e témával egy külön dolgozatban foglalkozunk, (l. KNUTH [15], [16]).

Számítástechnikai alkalmazás

Tekintsük egy (**A**, **R**, R) allokációs feladat folyamatait. Tegyük fel, hogy a folyamatok együttes működésének bármely pillanatához megadható egy

$$(F) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{S} \cup \mathbf{K} \cup \mathbf{W}$$

felbontás, ahol **S** a szabad-, **K** a kötött periódusokban időző, **W** pedig a kötött periódusba belépni szándékozó várakozásra ítélt folyamatok halmaza.

A folyamatok működését *telítettnek* nevezzük, ha bármely pillanathoz tartozó (F) felbontásra teljesül az, hogy a **K** halmaz a ($\mathbf{K} \cup \mathbf{W}$, **R**, R) allokációs feladatnak megfelelő halmazrendszernek maximálisan diszjunkt részrendszere.

A telítettség szemléletesen azt fejezi ki, hogy soha sem maradhat felfüggesztett állapotban olyan folyamat, melynek erőforrásigénye kielégíthető és így kötött periódusába léphetne. (Azt is mondhatjuk: a telítettség a számítógép üzemeltetőjének érdekét, az erőforrások kihasználását fejezi ki. Ez, mint ismeretes, magában rejti az ún. „individual starvation" veszélyét, ld. pl. DIJKSTRA [8]. Említett dolgozatból egyúttal az is látható, hogy ez utóbbi kérdés vizsgálata más eszközöket igényel, továbbá olyan algoritmusokhoz vezet, melyek ugyan alapíthatók a telített algoritmusokra, de azoknál lényegesen bonyolultabbak. Ezzel a kérdéssel azonban a továbbiakban nem foglalkozunk.)

Fontos dolog annak felismerése, hogy a telítettség teljesüléséhez *nem* szükséges az, hogy egy kielégíthető igényekkel fellépő folyamatot valóban mindig ki is elégítsünk! Nincsen ugyanis akadálya annak, hogy a kiszolgálást lebonyolító algoritmusok működése közben újabb igények merüljenek fel más folyamatok részéről.

A telítettség pontos értelmezésének nehézsége abban áll, hogy a fenti (F) felbontás valójában nem igaz minden pillanatban. A telítettség kérdéséről ezért a következő szakaszban még szólunk.

Petri-hálók regularitása

Legyen H egy Π *Petri-háló* átmeneteinek tetszőleges nem üres halmaza. Π-t *regulárisnak* fogjuk nevezni H-ra nézve, ha bármely elérhető állapotában a H-hoz tartozó átmenetek billenését *megtiltva* a hálón már csak véges sok további billenés lehetséges. Az így elért állapotokat, melyekben már csak a H-hoz tartozó átmenetek lehetnek billenőképesek, *lokális holtpontoknak*, vagy a H által meghatározott *főállapotoknak* fogjuk nevezni.

A hálók regularitása a telítettség pontos értelmezésére és az ún. ciklikus blokkoltság mentesség (ún. "*after-you-blocking*" ld. pl. DIJKSTRA [7]) általános megfogalmazására ad lehetőséget. Az alábbiakban ezt szemléltetjük.

Tekintsünk egy tetszőleges allokációs feladatot. Tegyük fel, hogy a hozzátartozó folyamatok algoritmusait valamilyen módon megadtuk, és tegyük fel azt is, hogy ez *Petri-háló* segítségével leírható. A nyert háló tartalmazni fog egy sereg átmenetet, többek között azokat, melyek a szabad periódusok elhagyásának, ill. amelyek a kötött periódusok elhagyásának felelnek meg. Nevezzük előbbieket S-, utóbbiakat *K-átmeneteknek*.

Tegyük fel, hogy egy adott t_1 pillanatban a folyamatok mindegyike vagy szabad vagy kötött periódusában időzik. Legyen $t_2 > t_1$ az első olyan pillanat, amikor egy a folyamatok közül kilép szabad periódusából. Ekkor működésbe kell lépjen egy algoritmus, melynek feladata eldönteni:

— vagy beléphet a folyamat a kötött periódusba;

— vagy nem, és akkor egyelőre felfüggesztett állapotba kerül.

Természetesen semmi sem garantálja azt, hogy míg ez az algoritmus működik, más folyamatokban nem következnek be olyan fejlemények, melyek a döntést menet közben módosíthatják. Egy azonban bizonyos: Ha más folyamatok S- és K-átmenetei *nem billennek*, akkor azt azért mindenféleképpen elvárjuk, hogy a döntési algoritmus *véges számú lépésen belül* dülőre jusson.

Hasonló megállapítást tehetünk általánosságban is. Legyen a háló adott pillanatban tetszőleges állapotban: Egyes folyamatok vagy szabad vagy kötött periódusokban vannak, mások pedig azokkal az adminisztrációkkal vannak elfoglalva, amelyeket az ezek közti átmenetek igényelnek. Tekintsük ismét azt az esetet, amikor újabb igények nem merülnek fel, azaz S- és K-átmenetek billenése belátható időn belől nem várható. Ekkor ismét azt mondhatjuk: Elvárjuk a köztes állapotban levő folyamatokat adminisztráló algoritmustól, hogy véges számú lépésben minden folyamatra vonatkozóan rendelkezzen valamilyen módon.

Más kérdés az, hogy a döntési algoritmusnak akkor is korrektül kell működnie, ha működése közben újabb igények merülnek fel. E kitüntetett eset, mellyel a regularitást definiáltuk, azért döntő, mert azokat az általános tulajdonságokat, melyeket a folyamatrendszer együttes állapotaira vonatkozóan megkövetelünk, ésszerűen csak az S- és K-átmenetekhez tartozó főállapotokra köthetjük ki.

Ennek fényében most már a telítettség fogalmát is egzaktul megfogalmazhatjuk: Az allokációs feladat egy megoldási algoritmusa akkor *telített*, ha az azt leíró háló

a) az S- és K-átmenetek halmazára nézve reguláris,

b) az előző szakaszbeli (F) felbontás minden *főállapotban* valóban megadható, (másszóval az **S**, **K**, **W** folyamathalmazok egyesítése valóban kiadja a teljes **A** halmazt), végül

c) **K** a ($\mathbf{K} \cup \mathbf{W}$, **R**, R) allokációs feladatnak minden *főállapotban* maximálisan diszjunkt részrendszere.

A fenti definícióban szereplő b) és c) pontok szemléletesen így fogalmazhatók: Minden főállapotra teljesül az, hogy ha egy folyamat nincsen sem a szabad sem pedig a kötött periódusában, akkor annak igénye az erőforrások pillanatnyi foglaltsága alapján nem elégíthető ki.

A telítettség most bevezetett pontos értelmezése már lehetővé teszi, hogy a későbbiekben algoritmusok telítettségét egzaktul bizonyíthassuk.

4. Ciklusok szinkronizáltsága

Ebben a szakaszban ciklikus folyamatokból álló konkurrens folyamatrendszerek legegyszerűbb összefüggéseit vizsgáljuk. Segédeszközöket vezetünk be, melyekkel bonyolultabb folyamatrendszerek fontos tulajdonságait lehet majd bizonyítani.

Helyek invariáns halmazai Petri-hálókban

Egy *Petri-háló* helyeinek valamely részhalmazát *invariáns halmaznak* fogjuk nevezni, ha a hálóban nincsen olyan átmenet, melynek billenése a részhalmazban levő pontok számát megváltoztathatja. Az invariancia a kezdeti pontozástól független tulajdonság. Nyilvánvaló, hogy a háló helyeinek egy H részhalmaza akkor és csak akkor invariáns, ha a háló bármely átmenetének pontosan annyi H-hoz tartozó kimeneti helye van, mint ahány bemeneti helye.

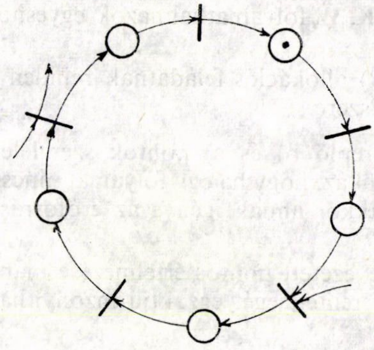
Egy *Petri-háló* egy részgráfját *I-gráfnak* fogjuk nevezni, ha a hozzá tartozó helyek invariáns halmazt alkotnak. Az I-gráfot $I(k)$-gráfnak nevezzük, ha a helyein levő pontok száma éppen k.

Elemi ciklusok

Elemi ciklikus folyamatnak nevezzük az elágazás nélküli ciklikus folyamatokat. Az elemi ciklikus folyamatok tehát megadott, véges számú operáció meghatározott sorrendben való, soha sem befejeződő ciklikus végrehajtását jelentik. A szemlélet számára bármennyire kézenfekvő dologról is van szó, matematikai szigorúsággal nézve a fenti meghatározás több kívánnivalót hagy maga után. Ezzel a kérdéssel azonban nem foglalkozunk, mert folyamatok helyett eleve a nekik megfelelő hálómodelleket fogjuk a bizonyítások alapjaiul választani.

Ennek fényében az alábbi állítást, (ha tetszik), axiómának is tekinthetjük: Egy folyamatrendszerhez tartozó hálón minden elemi ciklikus folyamatnak megfelel egy kör, melyben minden helynek pontosan egy bemenete és egy kimenete van, és a körhöz tartozó helyek közül mindig pontosan egy tartalmaz pontot, (pontosan egyet), l. pl. 4. ábrán.

Az ilyen kört *elemi ciklusnak* fogjuk nevezni. Az elemi ciklus $I(1)$-gráf. A gráfhoz tartozó pontot az $I(1)$-gráf *belső vezérlési pontjának* fogjuk nevezni.

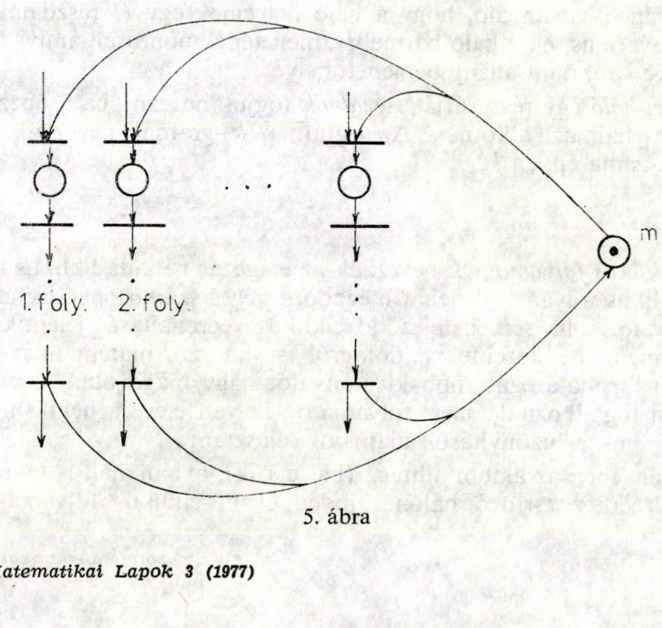


4. ábra

Megjegyezzük, hogy állításunk (axiómánk) az általános, elágazásokat is tartalmazó ciklikus folyamatokra is kimondható lenne, ebben a dolgozatban azonban erre nincsen szükség. Mégis utalunk arra, hogy általános esetben a ciklikusság tényének definiálása is nehézségekbe ütközik.

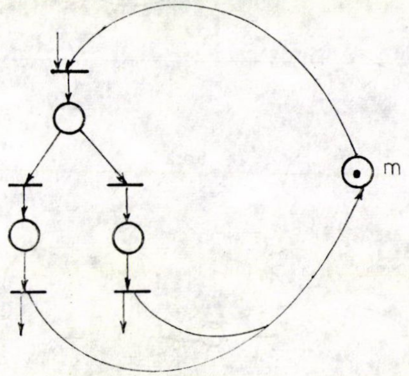
Kritikus szakaszok

Legyen m olyan szemafor, melyet kizárólag kritikus szakaszok megvalósítására használunk. Tekintsük azt a részgráfot, mely m-ből és a hozzá tartozó kritikus szakaszokból áll, (5. ábra).



5. ábra

Ez a részgráf szintén $I(I)$-gráf. Az 5. ábrán a kritikus szakaszok hálórészei nem tartalmaznak konfliktus-helyeket, ez azonban nincsen tiltva. Az invarianciát ugyanis garantálja az a tény, hogy a kritikus szakasznak minden ágon be kell fejeződnie, l. pl. 6. ábra.



6. ábra

Vezérelt elemi ciklusok

Legyenek A és B elemi ciklusok, azaz

$$A = \textbf{path} \quad a_1; a_2; \dots a_n \quad \textbf{end}$$

$$B = \textbf{path} \quad b_1; b_2; \dots b_m \quad \textbf{end}.$$

Az operátorok hovatartozásának jelölésére engedjük meg a szokásos $\in$ jelölést itt is, pl. $a_1 \in A$.

Ha most még elő van írva egy

$$(P) \qquad \textbf{path} \quad \{b; a\} \quad \textbf{end}$$

specifikáció is, ahol $a \in A$ és $b \in B$, akkor azt fogjuk mondani, hogy a B ciklus *vezérli* az A ciklust, és e tényt úgy jelöljük, hogy

$$A \leftarrow B.$$

A (P)-kifejezés szemantikailag azt fejezi ki, hogy a minden egyes billenését meg kell előzze b egy billenése, a b átmenetre azonban nem mond ki korlátozást. Az így definiált vezéreltségi viszony egyszerűen valósítható meg szemafor alkalmazásával, l. 7. ábra.

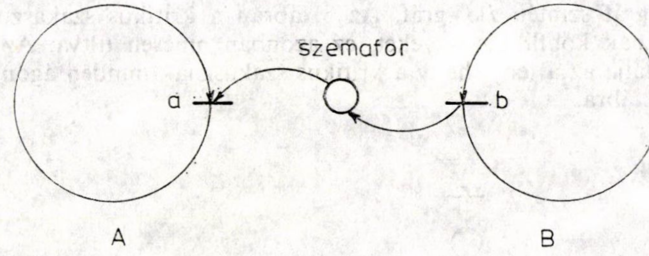
Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ elemi ciklusok. Azt fogjuk mondani, hogy $B_1, \dots, B_m$ *együttesen vezérli* az $A_1, \dots, A_n$ ciklusrendszert, röviden jelölve

$$(A_1, \dots, A_n) \leftarrow (B_1, \dots, B_m),$$

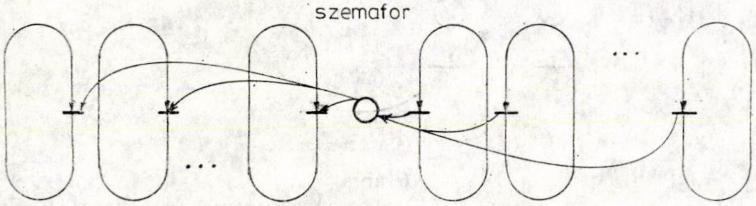
ha egy

$$\textbf{path} \quad \{(b^1, \dots, b^m); (a^1, \dots, a^n)\} \quad \textbf{end}$$

összefüggés teljesül, melyben $a^i \in A$, $b^j \in B$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$. Ez azt fejezi ki, hogy az a^i, $i=1, \dots, n$ átmenetek közül bármelyiknek billenését meg kell előzze a



7. ábra



8. ábra

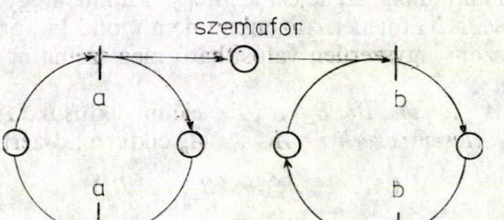
b^j, $j=1, \ldots, m$ átmenetek valamelyikének billenése. Az együttes vezérlés szintén egyetlen szemaforral megvalósítható, mint az a 8. ábrán látható.

Szinkronizált elemi ciklusok

Két elemi ciklusról azt fogjuk mondani, hogy egymással *szinkronizálva* vannak, ha kölcsönösen vezérlik egymást, azaz

$$A \leftarrow B \text{ és } A \rightarrow B$$

egyidejűleg. Mint számunkra érdektelen esettel, nem foglalkozunk azzal, amikor az ezekben a vezérlésekben résztvevő négy átmenet nem mind különböző. A vezérlések szemaforok útján való megvalósítása esetén így a 9. ábrán látható hálószerkezethez jutunk.



9. ábra

Ez a háló kifejezi a

$$\textbf{path}\ \{a';b''\}\ \textbf{end}$$

$$\textbf{path}\ \{b';a''\}\ \textbf{end}$$

vezérléseket, de lehetséges működése függ a ciklusok fent még meg nem adott kezdeti pontozásától. Tekintettel arra, hogy elemi ciklusaink a 9. ábrán látható és a vezérlésekben részt vevő átmenetek mellett tetszés szerinti számú további átmenetet is tartalmazhatnak, kézenfekvőbb lesz kezdeti pontozás helyett itt is *path-kifejezésekkel* szétválasztani az eseteket.

Tekintsük ciklusainknak a vezérlésekben résztvevő, és a 9. ábrán látható két átmenetét. Ezek egyike a *vezérlő*, másika a *vezérelt* átmenet. Azt fogjuk mondani, hogy az elemi ciklus a szinkronizációban *aktív*, ha a cikluson belül e két átmenetre

$$\textbf{path}\ \textit{vezérlő};\ \textit{vezérelt}\ \textbf{end}$$

áll fenn, és *passzív*

$$\textbf{path}\ \textit{vezérelt};\ \textit{vezérlő}\ \textbf{end}$$

esetén. Ciklusról lévén szó, a kezdeti pontozástól függően ezek közül mindig egy és csak egy igaz.

Jelölje $\leftrightarrow$ a szinkronizáltság tényét, és $\bullet$ az aktív ciklusokat. Ezek szerint az alábbi esetek lehetségesek:

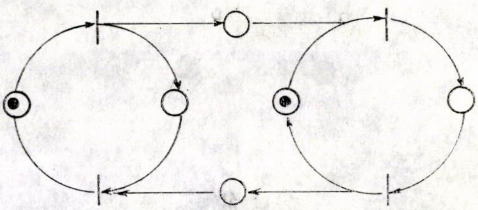
$$A \leftrightarrow B$$

$$A\bullet\!\leftrightarrow B$$

$$A \leftrightarrow\!\bullet B$$

$$A\bullet\!\leftrightarrow\!\bullet B.$$

A 9. ábrának megfelelő sémán példaképpen a második eset a 10. ábrán látható kezdeti pontozásnak felel meg.



10. ábra

A 10. ábrán látható *Petri-háló* tehát az alábbi négy *path-kifejezés* által definiált vezérlési rendszert írja le:

$$\textbf{path}\ \{a';b''\}\ \textbf{end}$$

$$\textbf{path}\ \{b';a''\}\ \textbf{end}$$

$$\textbf{path}\ a';a''\ \textbf{end}$$

$$\textbf{path}\ b'';b'\ \textbf{end}.$$

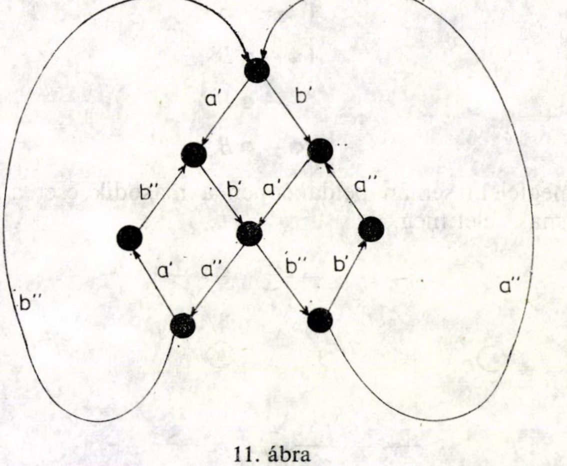
Megjegyezzük, hogy a 10. ábrán látható háló e *path-kifejezésekből* a CAMPBELL—LAUER [3] által megadott konstrukciós szabályok alkalmazásával nem képezhető a többszörösen végrehajtható részek szereplése miatt. Ezt az esetet azonban definiálhatjuk úgy, hogy nem képezünk hozzájuk a hálón teljes kört, — mint azt *path-kifejezéseknél* egyébként szokás — hanem a szokásos konstrukciót csak {-tól }-ig végezzük.

Ezt is figyelembe véve a négy *path-kifejezés* a CAMPBELL—LAUER-féle szabályok alapján pontosan az ábrán látható *Petri-hálót* eredményezi. Elmondhatjuk tehát, hogy egyrészt a szóbanforgó háló által, másrészt a négy path-kifejezés által definiált operációs szabály *azonos*.

Ezek után kimondhatjuk a következő fontos lemmát, mely két szinkronizált elemi ciklusból álló *Petri-hálón* a lehetséges billenéssorozatokat adja meg.

4.1. LEMMA. Két szinkronizált elemi ciklus együttes működése (a 9. ábra jelöléseit alkalmazva)

a) nem életképes, ha mindkét ciklus passzív;
b) $A\bullet\leftrightarrow B$ esetén **path** a'; b''; b'; a'' **end**;
c) $A\bullet\leftrightarrow\bullet B$ esetén pedig a 11. ábrán látható állapotgráfon való bolyongás.



11. ábra

Bizonyítás. Készítsük el az egyes esetekhez tartozó elérhetőségi fákat (l. pl. KELLER [13]). A lemma egyes állításait ezekről közvetlenül leolvashatjuk.

Legyenek most $\mathbf{C}_1$ és $\mathbf{C}_2$ elemi ciklusok halmazai. Közöttük az együttes szinkronizáltságot az előbbiek mintájára értelmezzük:

$$\mathbf{C}_1 \leftarrow \mathbf{C}_2 \quad \text{és} \quad \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2 \quad \text{egyidejűleg.}$$

Csakis olyan esetekkel foglalkozunk, amikor a ciklusokat definiáló *path-kifejezesek* egy halmazon belül az elemek aktivitására vonatkozóan azonosak. Így itt is négy esetről beszélhetünk:

$$C_1 \leftrightarrow C_2$$
$$C_1\bullet\!\leftrightarrow C_2$$
$$C_1 \leftrightarrow\!\bullet C_2$$
$$C_1\bullet\!\leftrightarrow\!\bullet C_2.$$

Előző lemmánk az együttes esetre is igaz, csupán az egyes operációkat kell vagylagos operációhalmazokkal helyettesíteni, miként azt az együttes szinkronizáltságot definiáló path-kifejezésekben is tettük.

5. Telített döntések hálószerkezetei

Ebben a részben az erőforrásoknak csupán egyszeri kiosztására koncentrálunk. Egy tetszőleges ($\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$, R) allokációs feladat folyamatainak olyan együttes állapotát tekintjük, melyben az *összes folyamat kötött periódusába kíván lépni*, és ugyanekkor az összes erőforrás szabad. Ilyen módon olyan megállapításokhoz jutunk, melyek egyúttal minden a működés során előforduló ($\mathbf{K} \cup \mathbf{W}$, $\mathbf{R}$, R) döntésre érvényesek.

Ebben a részben a megfogalmazás áttekinthetőbbé tétele érdekében feltételezzük, hogy nincsen olyan $a \in \mathbf{A}$ folyamat, melyre $R(a)=\emptyset$. Ez a kikötés az elmondottak lényegét nem érinti, hiszen azokkal a folyamatokkal, melyeknek egyáltalán nincsenek erőforrás igényeik, amúgy sem kell törődnünk.

Allokációs háló

Az alább bevezetendő *Petri-háló*, melyet *allokációs hálónak* nevezünk, egy igen egyszerű és természetes lehetőség telített döntések formalizálására.

Rendeljünk $\mathbf{R}$ minden egyes eleméhez egy hálóbeli helyet egy kezdeti ponttal. Rendeljünk továbbá $\mathbf{A}$ minden eleméhez egy pontozás nélküli helyet és egy átmenetet. Vezessük be az összes lehetséges alábbi típusú éleket:

- $a_{\text{átmenet}} \to a_{\text{hely}}$, $\forall a \in \mathbf{A}$;
- $r_{\text{hely}} \to a_{\text{átmenet}}$, valahányszor $r \in R(a)$, ($r \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{A}$).

E most megadott igen kézenfekvő hálókonstrukció jellemző tulajdonságát az alábbi tételben fogalmazhatjuk meg.

5.1. TÉTEL. Az allokációs hálónak nincsen végtelen billenéssorozata. Minden nemfolytatható billenéssorozat olyan pontozást eredményez, melyben a pontozott $\mathbf{A}$-hoz tartozó helyek $\mathbf{X}$ halmaza az ($\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$, R) allokációs feladatnak maximálisan diszjunkt részrendszere.

Bizonyítás.

a) Egyrészt minden átmenetnek van $\mathbf{R}$-hez tartozó bemeneti helye, másrészt $\mathbf{R}$ egyetlen eleme sem kimeneti helye egyetlen átmenetnek sem. Ennélfogva minden billenés csökkenti az $\mathbf{R}$-hez tartozó helyek összpontjainak számát. Mivel e helyek kezdeti pontszáma véges, a hálónak nem lehet végtelen billenéssorozata.

b) Tegyük fel, hogy a hálónak egy billenéssorozat eredményeképpen már nincsen billenőképes átmenete, de a pontozott **A**-beli helyek által meghatározott $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$ részhalmaz mégsem maximálisan diszjunkt részrendszer. Ekkor van olyan $a \in \mathbf{A}$ folyamat, melyre

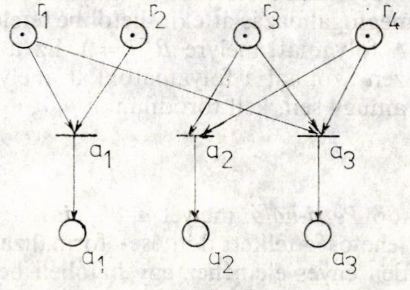
$$\Big(\bigcup_{b \in \mathbf{X}} R(b)\Big) \cap R(a) = \emptyset.$$

Ennélfogva minden $R(a)$-hoz tartozó **R**-beli hely kezdeti pontozása változatlan. Mivel a háló definíciója szerint az **R**-beli helyek kezdeti pontozása mindenhol éppen egy, az a-hoz tartozó átmenet billenőképes.

5.1. PÉLDA. Legyen $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ és az allokációs függvény legyen az alábbi:

$$R(a_1) = \{r_1, r_2\},$$
$$R(a_2) = \{r_3, r_4\},$$
$$R(a_3) = \{r_1, r_3, r_4\}.$$

Ebben az esetben a 12. ábrán látható allokációs hálót nyerjük.



12. ábra

Meg kell jegyezni, hogy az allokációs háló a kiosztási feladatot valóban igen egyszerűen és szemléletesen írja le, gyakorlati szempontból azonban sajnos még nem nyújt megoldást számunkra. A háló átmeneteinek ugyanis tetszőleges számú bemenő éle lehet, így ezeket csak ún. parallel szemafor operációk segítségével lehetne megvalósítani (l. pl. PATIL [18]). A kérdés tulajdonképpen éppen az, hogyan lehet efféle parallel primitívákat meglevő eszközökkel, tehát pl. közönséges szemafor útján megvalósítani, amelynek P-operációja a hálón *pontosan kétbemenetű* átmenet. A többbemenetű átmenetek tényleges gépi megvalósítása éppen az olyan hálórészekkel való helyettesítésüket jelenti, mely már csak legfeljebb kétbemenetű átmeneteket tartalmaz.

PARNAS [17] dolgozatában kimutatja a *Patil-féle parallel operációk* primitívaként való kezelésének abszurd voltát, ugyanakkor úgy véli, hogy azokat „kézenfekvő" módon lehet programozni P, V, és feltételes utasítások segítségével. Nos, ha ez nem is kézenfekvő, de valószínűleg igaz. Ebben a dolgozatban azt mutatjuk majd meg, hogy ez feltételes utasítások nélkül lehetséges. Ennek alapja a következő szakaszban leírandó hálószerkezet lesz.

Kiválasztási háló

A most bevezetendő *Petri-háló,* melyet *kiválasztási hálónak* fogunk nevezni, a telített döntéseket az előzőtől eltérő módon formalizálja. Erőforrásokat nem reprezentál, helyette az allokációs predikátum által leírt diszjunktsági viszonyra épül.

Legyen $(\mathbf{A}, \mathbf{R}, R)$ allokációs feladat, és jelölje Q a hozzá tartozó allokációs predikátumot. Legyen Θ az $\mathbf{A}$ halmaz azon részhalmazainak halmaza, melyekre Q igaz, más szóval amelyeknek az elemeihez tartozó $R(a)$ halmazok páronként diszjunktak. Legyen Γ a maximálisan diszjunkt halmazok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $\Gamma \subset \Theta$. Legyen most

$$\Omega = (\Theta \setminus \Gamma) \cup \{\emptyset\}.$$

Ω tehát a nem maximális Θ-beli halmazok halmaza, hozzávéve az üres halmazt. Ω nem üres, hiszen az üres halmaz biztosan eleme.

Rendeljünk most egy-egy helyet Ω minden eleméhez. Ezeket a helyeket a *háló vezérpontjainak* fogjuk nevezni. Rendeljünk egy-egy további helyet $\mathbf{A}$ elemeihez is. Ez utóbbi helyek ugyanazt a szerepet játsszák majd, mint allokációs hálóbeli megfelelőik.

Legyen Ψ azon (G, a) párok halmaza, melyekre $Q(G \cup \{a\})$ igaz, $G \in \Omega$, $a \in \mathbf{A}$. Rendeljünk egy-egy átmenetet Ψ minden eleméhez. Vezessük be az összes lehetséges alábbi típusú éleket:

- $G_{\text{vezérpont}} \to (G, a)_{\text{átmenet}}$, valahányszor $(G, a) \in \Psi$,
- $(G, a)_{\text{átmenet}} \to a_{\text{hely}}$, valahányszor $(G, a) \in \Psi$,
- $(G, a)_{\text{átmenet}} \to (G \cup \{a\})_{\text{vezérpont}}$, valahányszor $(G, a) \in \Psi$, és $(G \cup \{a\}) \in \Omega$

azaz $(G \cup \{a\})$ még nem maximális halmaz.

Álljon az így definiált *Petri-háló* kezdeti pontozása *egyetlen pontból*, melyet az üres halmazhoz rendelt vezérpontba helyezünk.

A kiválasztási háló működése a következő:

Kezdetben minden $(\{\emptyset\}, a)$ alakú átmenet billenőképes, $a \in \mathbf{A}$. Ilyen átmenet minden $a \in \mathbf{A}$ elemhez létezik, hiszen $Q(\{\emptyset\} \cup \{a\}) = Q(\{a\})$ igaz minden $a \in \mathbf{A}$-ra, egyelemű halmaznak ugyanis soha sem lehet két különböző egymásnak ellentmondó eleme.

Minthogy definíció szerint a hálónak más átmenete nem lehet billenőképes, fenti átmenetek valamelyike billenni fog. Legyen ez $(\{\emptyset\}, a_1)$. A billenés eredményeképpen pont kerül az $a_1 \in \mathbf{A}$-hez tartozó helyre, és ha létezik $\{a_1\}$-hez vezérpont, másszóval ha az $A_1 = \{a_1\}$ halmaz önmagában még nem maximális, akkor e vezérpontba is.

Előbbi esetben a hálón több billenés már nem lehetséges. Utóbbi esetben létezik olyan $(\mathbf{A}_1, a) \in \Psi$ átmenet, melyet az $\mathbf{A}_1 = \{a_1\}$ vezérpontba juttatott pont billenőképessé tett. Ezek valamelyike billenni fog. Legyen ez $(\mathbf{A}_1, a_2)$, $a_2 \in \mathbf{A}$. A billenés eredményeképpen most az $a_2 \in \mathbf{A}$ helyre is pont kerül, továbbá az $\mathbf{A}_2 = \{a_1, a_2\}$ vezérpontba is, amennyiben ilyen még létezik.

Ez az eljárás mindaddig folytatódik, míg a soron következő $\mathbf{A}_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ halmazhoz már nem tartozik vezérpont. Ekkor éppen az $a_1, a_2, \ldots, a_i \in \mathbf{A}$ helyek vannak pontozva, s a hálónak billenőképes átmenete már nincsen.

Az elmondottakból már látható, hogy az 5.1. tétel megfelelőjét a kiválasztási hálóra is megfogalmazhatjuk:

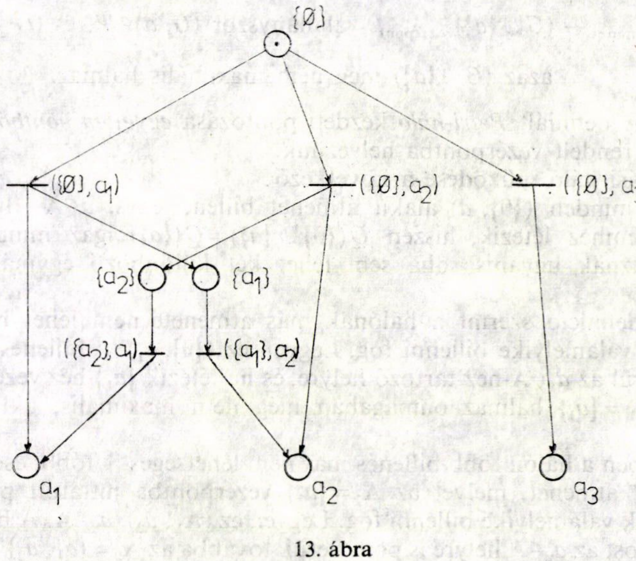
5.2. TÉTEL. A kiválasztási hálónak nincsen végtelen billenéssorozata. Minden nemfolytatható billenéssorozat olyan pontozást eredményez, melyben a pontozott **A**-hoz tartozó helyek **X** halmaza az (**A**, **R**, *R*) allokációs feladatnak maximálisan diszjunkt részrendszere.

Bizonyítás

a) A hálónak akkor és csak akkor van billenőképes átmenete, ha van pontozott vezérpontja. A hálónak mindig legfeljebb egy vezérpontja van pontozva, mert kezdetben egyedül a $\{\emptyset\}$-vezérpont tartalmaz egyetlen pontot, másrészt minden billenés elveszi az éppen pontozott hely pontját, és vagy egy új vezérpontba teszi, vagy még azt sem. Az új vezérpont mindig olyan halmazt reprezentál, melynek az előző vezérponthoz tartozó halmaz valódi része. Véges halmazokról lévén szó, fentiek alapján a háló minden billenéssorozata véges.

b) Legyen a pontozott **A**-beli helyek által meghatározott $\mathbf{X}\subset\mathbf{A}$ halmaz $\mathbf{X}=\{a_1, ..., a_k\}$, és tegyük fel, hogy utolsóként az a_k hely kapott pontot. Ezt szükségképpen az $(\{a_1, ..., a_{k-1}\}, a_k)\in\Psi$ átmenet billenése eredményezte. Ha most **X** nem lenne maximális, akkor létezne $\{a_1, ..., a_k\}$ vezérpont, ennélfogva a hálónak még lenne billenőképes átmenete.

Illusztrációként a 13. ábrán bemutatjuk az 5.1. példához tartozó kiválasztási hálót.



13. ábra

6. Döntések stabilitása

Ebben a szakaszban a fent definiált hálótípusok egy különleges tulajdonságáról szólunk. Ez azt fejezi ki, hogy a döntések kimenetele *érzéketlen* a folyamatok esetleges speciális sebességviszonyaira. Ezt a tulajdonságot *stabilitásnak* fogjuk nevezni. A stabilitás tulajdonságával csak kevés algoritmus rendelkezik. Nem stabil például a DIJKSTRA [9] dolgozatban közölt megoldás az ún. "*dining philosophers*" feladatra, továbbá az összes ehhez hasonló feltételes utasításokon alapuló döntési algoritmus.

A stabilitás fogalmát az alábbiakban döntéseket leíró *Petri-hálókon* definiáljuk.

DEFINÍCIÓK

Legyen $\mathfrak{P}$ olyan *Petri-háló*, melynek nincsen végtelen billenéssorozata egy megadott I kezdeti pontozás mellett. A továbbiakban billenés sorozat alatt I-ből kiinduló sorozatot értünk. Legyen $\mathbf{M}(\mathfrak{P})$ a háló összes nem folytatható billenéssorozatainak halmaza.

Legyen Δ tetszőleges $\mathbf{M}(\mathfrak{P})$-n értelmezett függvény. Δ-t a továbbiakban *döntésfüggvénynek* nevezzük. Jelölje Δ értékkészletét $\mathbf{R}(\mathfrak{P})$. Eszerint a háló minden nem folytatható billenéssorozata kiválasztja $\mathbf{R}(\mathfrak{P})$ egy elemét. A stabilitás fogalmát e választásra vonatkozóan kívánjuk értelmezni.

Legyen most $\mathbf{N}(\mathfrak{P})$ a $\mathfrak{P}$ háló összes véges billenéssorozatainak halmaza. Ezek tehát a folytatható sorozatokat is tartalmazzák. Nyilvánvalóan $\mathbf{M}(\mathfrak{P})\subset\mathbf{N}(\mathfrak{P})$. Legyen $N\in\mathbf{N}(\mathfrak{P})$ és jelölje $\mathbf{M}(\mathfrak{P}, N)$ azoknak az $\mathbf{M}(\mathfrak{P})$-beli billenéssorozatoknak halmazát, melyek N-nel kezdődnek. Legyen $\mathbf{R}(\mathfrak{P}, N)$ a Δ függvény $\mathbf{M}(\mathfrak{P}, N)$-en felvett értékeinek halmaza.

Jelöljön $\mathfrak{P}^+$ olyan hálót, melyet $\mathfrak{P}$-ből úgy képeztünk, hogy egyetlen (tetszőleges) átmenetéhez egy új bemenő élt rendeltünk a háló tetszés szerinti helyéről. Világos, hogy $\mathbf{M}(\mathfrak{P}^+)\subset\mathbf{M}(\mathfrak{P})$.

Ezek után $\mathfrak{P}$-t *stabilnak* nevezzük a Δ döntésre nézve, ha bármely $\mathfrak{P}^+$ kiegészített hálóra

$$(\varphi) \qquad \mathbf{R}(\mathfrak{P}^+) = \mathbf{R}(\mathfrak{P})$$

maga után vonja

$$(\psi) \qquad \mathbf{R}(\mathfrak{P}^+, N^+) = \mathbf{R}(\mathfrak{P}, N^+)$$

teljesülését minden $N^+\in\mathbf{N}(\mathfrak{P}^+)\subset\mathbf{N}(\mathfrak{P})$ sorozatra.

Szavakban: $\mathfrak{P}$ stabil a Δ döntésre nézve, ha semmilyen kiegészített hálón sincsen olyan kezdő billenési sorozat, mely a döntés még lehetséges kimeneteleit $\mathfrak{P}$-hez viszonyítva leszűkíthetné, feltéve hogy eredetileg a kiegészített háló is ugyanazt a döntést reprezentálja. (A hálókiegészítéssel preferenciát lehet ábrázolni.)

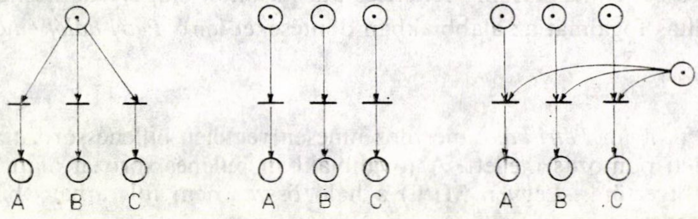
PÉLDÁK

A legegyszerűbb döntés egy véges $\mathbf{S}$ halmazból egy elem kiválasztása. Feleljen meg a $\mathfrak{P}$ hálón $\mathbf{S}$ minden elemének egy kezdetben nem pontozott hely. Legyen $\Delta(M)$, $M\in\mathbf{M}(\mathfrak{P})$ az a hely, mely az M billenéssorozatban *elsőként* kap pontot.

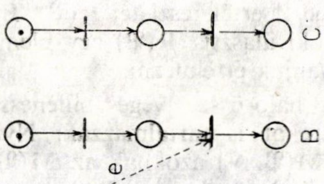
Ilyen hálókra a legegyszerűbb példák a 14. ábrán láthatók, egy háromelemű S= $=\{A, B, C\}$ halmazra vonatkozóan[3].

Ezek a hálók a kiválasztásra nézve mind stabilak. Ha ugyanis valamely átmenethez új bemenetként pontozatlan helyet rendelünk (φ) nem teljesül, amennyiben pedig pontozott helyet rendelünk (φ) is és (ψ) is teljesül.

A 15. ábrán olyan hálót mutatunk, mely ugyanezt a kiválasztást végzi el, de már érzékeny a folyamatok esetleges szisztematikus sebességeltéréseire.



14. ábra



15. ábra

Vezessük be például az új e-élet, mely előnyt jelent az A-t kiválasztó folyamatnak a B-t kiválasztóval szemben. Világos, hogy ez esetben (φ) teljesül, de t billenése után, vagyis abban az esetben, ha az A-t kiválasztó folyamat valamilyen okból „fürgébb" a B-t kiválasztó folyamatnál, a (ψ)-beli halmazok már különbözőek lesznek.

Rendezett maximális halmazok kiválasztása

Legyen P monoton halmazpredikátum egy **A** halmaz részhalmazain, és $\mathfrak{P}$ olyan életképtelen *Petri-háló*, melyben **A** minden eleméhez egy hely van rendelve. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{P}$ kezdeti pontozása olyan, hogy az **A**-hoz tartozó helyek egyikén sincsen pont, továbbá azt is, hogy a háló bármely nem folytatható billenéssorozata olyan pontozást eredményez, melyben a pontozott **A**-hoz tartozó helyek a P predikátumra nézve maximális halmazt alkotnak.

[3] Az ábra harmadik része a stabilitás absztrakt megfogalmazásának indítékára utal. Kifejezi, hogy a szemafor V-operációjakor semelyik várakozó sincsen kitüntetve. Érdektelen, hogy ez gyakorlatban is így van-e, mi ezt csupán a bonyolultabb esetek hasonló logikai szimmetriájának értelmezésére alkalmazzuk.

Miként az 5.1. és 5.2. tételekből tudjuk, az allokációs háló és a kiválasztási háló az allokációs predikátumra nézve éppen a fenti tulajdonságokkal rendelkezik.

A $\mathfrak{P}$ hálóhoz most a definícióval összhangban egy döntésfüggvényt definiálunk. Legyen $\Delta(M)$, $M \in \mathbf{M}(\mathfrak{P})$ értéke $\mathbf{A}$ azon *rendezett* részhalmaza, melyet a megfelelő helyekre került pontok határoznak meg a pontok eljutásának sorrendjében. Feltevéseink értelmében $\Delta(M)$ rendezett P-maximális halmaz. Az így definiált döntést *rendezett*[4] *kiválasztásnak* fogjuk nevezni. Ezek után a következő tételeket mondhatjuk ki:

6.1. TÉTEL. Az allokációs háló bármely rendezett maximálisan diszjunkt részrendszert képes kiválasztani, és e rendezett kiválasztásra nézve stabil.

Bizonyítás.

a) Legyen $\mathbf{X} = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \mathbf{A}$ rendezett maximálisan diszjunkt részhalmaz. Ezt a részhalmazt az $a_1, a_2, ..., a_k$ átmenetek ebben a sorrendben egymás utáni billenésének β sorozata választja ki. A β billenéssorozat létezik, hiszen $R(a_i) \cap R(a_j) = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., k$, és semelyikük billenése sem befolyásolja semelyik másikuk billenőképességét. $\beta \in \mathbf{M}(\mathfrak{P})$, ha ugyanis β folytatható lenne, akkor $\mathbf{X}$ nem volna maximális.

b) Az allokációs háló stabilitása éppen olyan kézenfekvő, mint a 13. ábrán szereplő hálóké. Ha egy új élet pontozatlan helyről indítunk, megváltozik a lehetséges döntések halmaza, azaz (φ) nem teljesül. Ha olyan pontozott helyről indítjuk, mely az allokációs függvényt változatlanul hagyja, (φ) és (ψ) is teljesül, ha pedig az új él két diszjunkt $R(a_i)$, $R(a_j)$ halmaz között létesít közös elemet, akkor (φ) ismét csak nem teljesül.

6.2. TÉTEL. A kiválasztási háló bármely rendezett maximálisan diszjunkt részrendszert képes kiválasztani, és e rendezett kiválaszra nézve stabil.

Bizonyítás

a) Legyen ismét $\mathbf{X} = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \mathbf{A}$ rendezett maximálisan diszjunkt részhalmaz. Ezt az alábbi β billenéssorozat állítja elő: $(\{\emptyset\}, a_1)$, $(\{a_1\}, a_2)$, $(\{a_1, a_2\}, a_3)$, ..., $(\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}, a_k)$. A kapcsos zárójelekben levő halmazok mindegyikéhez létezik vezérpont, hiszen e halmazok mindegyikére igaz az allokációs predikátum és egyik sem maximális. A kerek zárójelben levő párok létező átmeneteket határoznak meg, mert az allokációs predikátum a pár második elemével kibővített halmazra is igaz marad. Végül ezek az átmenetek a fenti sorrendben billenőképesek, mert mindegyikük éppen abba a vezérpontba juttat pontot, amely a sorban következő billenéséhez éppen szükséges. A β billenéssorozat mindezek alapján létezik. β nem folytatható, mert $\mathbf{X}$ maximális, ezért az utolsó billenés már nem juttat pontot egy vezérpontba sem.

[4] Erőforrás kiosztásra gondolva a rendezettség kikötése nem kézenfekvő, hiszen kiosztott erőforrások esetén ez érdektelen. Valójában azonban az erőforrások kiosztása mindig egymás után történik, és mi nem elégszünk meg olyan algoritmussal, mely ezt *csak bizonyos sorrendekben* képes elvégezni. Ezért definiáljuk az összes lehetséges kiválasztást rendezett halmazok segítségével.

b) Fenti rendezett **X** halmazt egyedül a most megadott β billenéssorozat képes kiválasztani. Ez azért igaz, mert minden lépésben a soron következő elem kiválasztásához egyedül a fent megadott átmenetek szerepelnek a hálóban. A kiválasztási háló nem folytatható billenéssorozatai tehát *kölcsönösen egyértelműen* felelnek meg a lehetséges rendezett maximális halmazoknak. Ez azt jelenti, hogy (φ) minden esetben maga után vonja (ψ)-t, ha ugyanis az extra éllel való megszorítás következtében csökken a lehetséges billenéssorozatok halmaza, ez a lehetséges döntések körét is szűkíti, azaz (φ) sem állhat fenn.

A ciklikus allokáció feladatában szereplő folyamatok teljes együttes működése során nem csak az eddig vizsgált törvényszerűségeknek kell teljesülniük, hanem olyan egyéb összefüggéseknek is, melyek az erőforrások felszabadításával, erőforrásigények bejelentésével és ezek kölcsönhatásaival kapcsolatosak. Most ezek vizsgálatára térünk át.

7. Allokációs mező

Ebben a szakaszban egy absztrakt struktúrát vezetünk be, mely az erőforrások kezelésével kapcsolatos összefüggéseket axiomatikusan írja le. Ennek célja kettős: Egyrészt lehetővé teszi a később ráépítendő folyamatstruktúrák tulajdonságainak egzakt bizonyítását, másrészt biztosítja, hogy az utolsó részben megadandó konkrét erőforrás kiosztási modelleket csupán a mezőaxiómákkal kelljen összevetnünk, ezáltal garantálva egy sereg, az általános modellben bizonyított tulajdonságukat.

Formális leírás

Legyen **T** véges halmaz. Nevezzünk egy f leképzést *T-transzformációnak*, ha **T** egy részhalmazát kölcsönösen egyértelműen képezi le **T** valamely másik részhalmazára. Értelemszerűen jelölje $\exists ft$ azt a tényt, hogy f értelmezve van a $t\in\mathbf{T}$ elemen.

Legyen **S** T-transzformációk rendezett hármasainak egy véges halmaza. Jelölje az $S\in\mathbf{S}$ hármas komponenseit rendre $S.f_1, S.f_2, S.f_3$. Adott hármason belül jelölje f_i+ a ciklikusan rákövetkező transzformációt, azaz

$$f_i+ = \begin{cases} f_{i+1} & \text{ha} \quad i = 1, 2 \\ f_1 & \text{ha} \quad i = 3. \end{cases}$$

Legyen **F** az **S** elemeihez tartozó összes komponens transzformációk halmaza. Jelölje **f** az **F** halmaz nem feltétlenül különböző elemeinek egy tetszőleges véges sorozatát. Jelölje **f**.S az **f** sorozat azon részsorozatát, mely kizárólag **f**-nek az $S\in\mathbf{S}$ hármasba tartozó elemeiből áll.

Legyen $\mathfrak{F}$ az összes lehetséges **f** sorozatok halmaza, amelyekre bármely **f**.S részsorozat

- vagy üres,
- vagy $S.f$-fel kezdődik, és tetszőleges f tagja után $f+$ következik.

Nevezzük $\mathfrak{F}$-et az **S** által generált *parallel kombináció* halmaznak. Fontossága miatt e fogalomra egy másik interpretációt is mutatunk. Jelölje $S+$ az $S.f_1, S.f_2, S.f_3, S.f_1, \ldots$ végtelen sorozat egy tetszőleges véges szeletét. Ebben az esetben $\mathfrak{F}$ elemei tetszőleges számú $S \in \mathbf{S}$ elemhez tartozó tetszőleges $S+$ sorozatok parallel kombinációi a szokványos értelemben, l. pl. COFFMAN [4].

Jelölje most $\mathbf{f}.L(S)$ az S hármasnak azt a transzformációját, mely utolsóként fordul elő az $\mathbf{f}$ sorozatban. Legyen definíció szerint $\mathbf{f}.S=\emptyset$ esetén $\mathbf{f}.L(S)=S.\mathbf{f}_3$.

Végezetül értelmezzük egy transzformáció sorozat alkalmazását az alábbi módon: $\mathbf{f}t=f_n(\ldots(f_2(f_1t)\ldots)$ ahol $\mathbf{f}=f_1f_2\ldots f_n$. Ezek után a $(\mathbf{T}, \mathbf{S})$ párt allokációs mezőnek nevezzük, ha a következő axiómák teljesülnek:

GENERÁTOR ELEM AXIÓMÁJA

$$\exists t_0 \in \mathbf{T} \text{ melyre } \exists S.f_1t_0, (\forall S \in \mathbf{S}) \text{ és}$$
$$\mathbf{T} = \{\mathbf{f}t_0 | \mathbf{f} \in \mathfrak{F}, \exists \mathbf{f}t_0\}.$$

Szavakban: Létezik T-nek olyan t_0 generátor eleme, melyen az összes f_1 transzformáció értelmezve van, és amelyből $\mathfrak{F}$ transzformációsorozatait alkalmazva **T** minden eleméhez eljuthatunk.

EGYÉRTELMŰSÉGI AXIÓMA

Ha $\mathbf{f}', \mathbf{f}'' \in \mathfrak{F}$ és $\mathbf{f}'t_0=\mathbf{f}''t_0$ akkor
$\mathbf{f}'.L(S)=\mathbf{f}''.L(S)$, $\forall S \in \mathbf{S}$.

KÖVETKEZMÉNY: **T** minden t elemén is egyértelműen értelmezhető a $t.L(S)$ függvény.

ÉRTELMEZÉSI AXIÓMA

a) Ha $\exists ft$ ahol f az S hármas komponense, akkor $f=t.L(S)+$.
Szavakban: Minden transzformáció végrehajthatóságának szükséges feltétele a saját hármas ciklusában őt megelőző transzformáció végrehajtása.
b) $f=f_1$ és $f=f_3$ esetén e szükséges feltétel elégséges is.
c) Ha $t.L(S)=S.f_1$ és
$t.L(S')=S'.\mathrm{f}_1$ vagy $=S'.f_3$, $\forall S' \in \mathbf{S}, S' \neq S$
akkor $\exists S.f_2t$.
Szavakban: $f=f_2$ esetén *a)* biztosan elégséges olyankor, amikor más f_2 transzformáció még nem került végrehajtásra.

Szemléltetés

Az előző pontban megadott általános mező a ciklikus erőforrás allokáció feladatának legáltalánosabb közös tulajdonságait írja le. Most ezt szemléltetjük.

Legyen **A** egy allokációs feladat folyamatainak halmaza, miként azt a 2. pontban leírtuk. A **T** halmaz ez esetben **A** összes eleme együttes állapotai halmazának felel meg a későbbiekben látható módon.

A minden eleméhez tartozik egy S transzformáció hármas, melynek elemei az alábbi tevékenységeknek felelnek meg:

- f_1 — erőforrásigény bejelentése;
- f_2 — erőforrások lekötése;
- f_3 — erőforrások felszabadítása.

A t_0 generátorelem megfelel a kezdőállapotnak, melyben minden erőforrás szabad, és minden folyamat szabad állapotban van.

Az egyértelműségi axióma kimondja, hogy egy transzformációsorozat által eredményezett rendszerállapot nem függ a transzformációk végrehajtásának sorrendjétől, feltéve hogy azok az adott esetekben mindig értelmezve voltak. Ilyen axióma állapotvektorok esetén nyilvánvalóan teljesül, ha a komponens állapotok éppen azt fejezik ki: mi történt az adott komponenssel utoljára.

Az értelmezési axióma kifejezi azt, hogy a transzformációk csak a megadott ciklikus sorrendben következhetnek egymás után, és ez az erőforrások lekötését jelentő transzformáció kivételével elégséges feltétel is az értelmezettséghez. Az erőforrások leköthetősége azonban természetes módon további megszorítást jelent az f_2 transzformációk értelmezettségére. Az utolsó axióma azonban kimondja, hogy a feladathoz tartozó f_2 transzformációk bármelyike végrehajtható olyankor, amikor minden erőforrás szabad állapotban van.

Fentiek alapján az **A** halmazt alkotó allokációs ciklusoknak három lehetséges állapotát különböztethetjük meg aszerint, hogy a hozzátartozó három transzformáció közül melyik került utoljára végrehajtásra. Ezek szemléletesen a következőknek felelnek meg:

- várakozás az igényelt erőforrásokra,
- kötött periódus,
- szabad periódus.

Ezzel egyúttal a **T** együttes állapot halmazt is szemléltettük. Nyitva maradt még az f_2 transzformációk értelmezési tartományainak megfeleltetése. Ezt a természetes módon adhatjuk meg: Legyen $f_2'=S'.f_2; f_2''=S''.f_2$ és jelölje $f_2' \leftrightarrow f_2''$ azt a tényt, hogy az $S'.S''$ elemekhez tartozó allokációs ciklusok erőforrásigényei ellentmondóak.

Legyen

$$\mathbf{S}^*(t) = \{S | t.L(S) = S.f_2\}, \quad t \in \mathbf{T}.$$

Ezek után tetszőleges f_2-re $\exists f_2 t$ szükséges feltétele, hogy $f_2 \not\leftrightarrow S.f_2$ legyen minden $S \in \mathbf{S}^*(t)$-re, és ez az értelmezési axióma *a)* részével együttesen elégséges is.

Mindezeket figyelembe véve kimondhatjuk, hogy minden $(\mathbf{A}, \mathbf{R}, R)$ allokációs feladathoz rendelhető egy $(\mathbf{T}, \mathbf{S})$ allokációs mező, úgy hogy **A** és **S** elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Ennek alapján értelemszerűen használni fogjuk a következő jelöléseket: $S(A)$, $A(S)$, $\mathbf{S}(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}(\mathbf{S})$.

Könnyen látható, hogy az allokációs feladatok és az allokációs mezők közötti megfeleltetés nem kölcsönösen egyértelmű. Az $R(A)$ allokációs függvény tulajdonságai az f_2 transzformációk értelmezési tartományaiban tükröződnek, de különböző $R(A)$ függvények vezethetnek pontosan ugyanazokhoz az értelmezési tartományokhoz. Ez mint látni fogjuk egyúttal azt is jelenti, hogy különböző erőforrás kiosztási feladatok megoldása eredményezheti pontosan *ugyanazt* a folyamat szinkronizációt.

8. Folyamat mező

Ebben a részben először az absztrakt allokációs mezőkhöz definiálunk egy általános folyamat rendszert, majd a mezőtulajdonságok alapján igazoljuk e rendszer általános tulajdonságait.

Formális leírás

Legyen $(\mathbf{A}, \mathbf{R}, R)$ allokációs feladat és $(\mathbf{T}, \mathbf{S})$ hozzátartozó allokációs mező. Rendeljünk **A** minden eleméhez egy szemafort O-kezdőértékkel. Deklarálja ezt formálisan

semaphore array $H[\mathbf{A}]$; $(:=0)$

ahol H [A] reprezentálja az A $\in$ **A** elemhez rendelt szemafort. E jelölést figyelembe véve deklaráljuk még az alábbiakat:

semaphore array $C[\mathbf{T}]$; $(:=0)$

semaphore X; $(:=0)$

semaphore M; $(:=1)$

var $t:\mathbf{T}$; $(:=t_0)$

ahol az utolsó sorral a következőt szimbolizáltuk: Legyen t olyan változó, melynek értékei **T**-be tartoznak és kezdőértéke t_0 a **T** halmaz generátoreleme. Ezek után vezessük be a következő ciklikus folyamattípusokat:

Jelfogó J

$P(X)$;
$P(M)$;
$V(C[t])$;

Dekóder D(d, A)

$P(C[d])$;
$t:=S.f_2t$;
$V(M)$;
$V(X)$; $\quad d\in\mathbf{T}$
$V(H[A])$; $\quad A\in\mathbf{A},\quad S=S(A).$

Határ-dekóder D^H(d)

$P(C[d])$;
$V(M)$; $\quad d\in\mathbf{T}.$

Allokációs ciklus A^0(A)

szabad periódus
$P(M)$;
$t:=S.f_1t$;
$V(M)$;
$V(X)$;
$P(H[A])$;
kötött periódus;
$P(M)$;
$t:=S.f_3t$;
$V(M)$;
$V(X)$; $\quad A\in\mathbf{A},\quad S=S(A).$

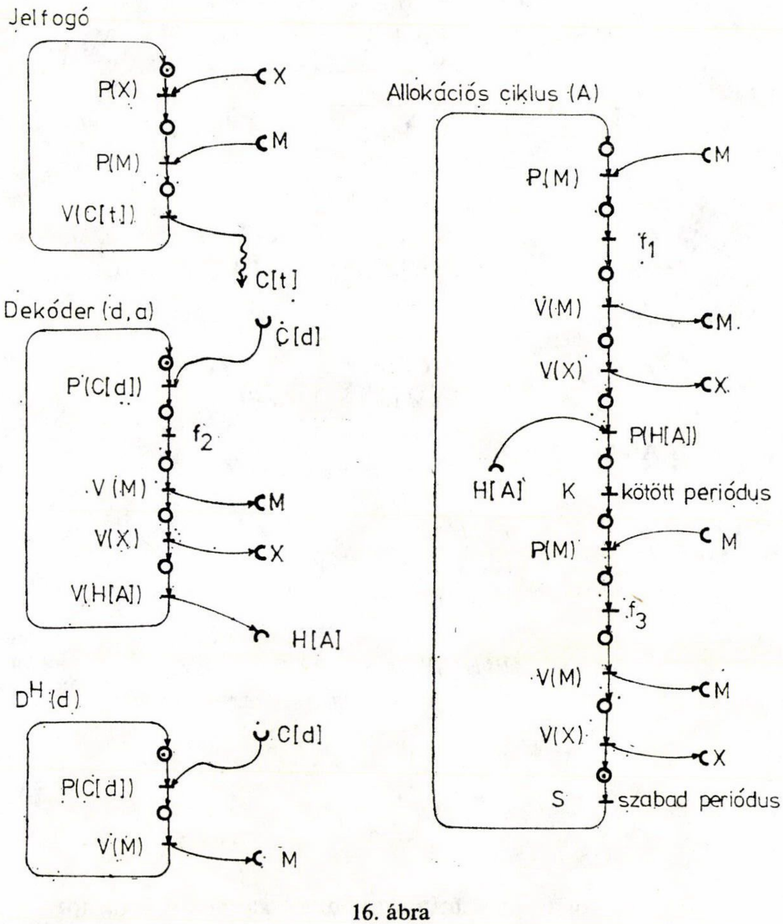
Készítsük el most ezekből a folyamattípusokból az alábbi konstrukciót:

Legyen J jelfogó folyamat.
Legyen **D** *az összes lehetséges D(d, A) dekóder folyamatok halmaza, melyekre* $\exists S(A).f_2 d$; $A \in \mathbf{A}$, $d \in \mathbf{T}$.
Legyen $\mathbf{D}^H$ *az összes lehetséges* $D^H(d)$ *folyamatok halmaza, melyekre a* $d \in \mathbf{T}$ *elemen egyetlen* f_2 *transzformáció sincsen értelmezve.*
Végül legyen A^0 *az* $A \in \mathbf{A}$ *elemekhez készíthető összes* $A^0(A)$ *folyamatok halmaza.*

Ezt a konstrukciót az allokációs feladathoz tartozó szinkronizációs *folyamat mezőnek* fogjuk nevezni.

A folyamatmező hálószerkezete

A jelfogó folyamatban szereplő változó indexű szemafor miatt a szokásos *Petri-háló* modelltől annyiban kell eltérnünk, hogy a hálóban megengedünk egy olyan élet is, melynek bemeneti helye változó. Folyamatrendszerünkhöz így a 16. ábrán látható hálómodell rendelhető.



16. ábra

A működés szemléltetése

Az M szemafor szerepe a t állapotváltozó kizárólagos elérésének biztosítása. Az M szemafor által létesített kritikus szakaszok minden esetben akadálytalanul fejeződhetnek be, ennélfogva a működés további szemléltetésében az M szemaforra vonatkozó összes operációtól eltekinthetünk.

A folyamatrendszer kezdeti állapotában csak az S-átmenetek billenőképesek. Ha egy S-átmenet billen, az allokációs ciklus $V(X)$ átmenete lehetővé teszi a jelfogó folyamat egy ciklusának megtételét.

A jelfogó folyamat újabb jelzést ad a benne szereplő $V(C[t])$ operáció útján. Erre a jelzésre pontosan *azok és csak azok* a dekóder folyamatok várakoznak, melyek olyan allokációs ciklusokhoz tartoznak, amelyek bejelentett és egyúttal a t állapotban kielégíthető erőforrásigényekkel rendelkeznek.

Ezek közül a dekóder folyamatok közül *egy és csak egy* működésbe lép, végrehajtja az erőforrások lekötését, engedélyt ad a hozzá tartozó allokációs ciklusnak a kötött periódusba való belépésre, végül visszajelzést ad a jelfogónak egy újabb ciklust indukálva.

Erre az utóbbira azért van szükség, mert az új rendszerállapotban még elképzelhető, hogy további erőforrás igényeket is ki lehet elégíteni. Amennyiben igen, ez az újabb jelfogó ciklus miatt meg is történik, majd az eljárás tovább ismétlődik, amennyiben pedig nem, akkor a jelfogó ciklus $V(C[t])$ jelzését egy határ-dekóder folyamat veszi, mely nem ad további visszajelzést, szerepe csupán az M-re vonatkozó kritikus szakasz feloldása.

Ez az algoritmus láthatóan pontosan annak az erőforrás kiosztási módnak felel meg, melyet a kiválasztási háló esetében láttunk az 5. pontban. Itt azonban olyan kiválasztási hálóról van szó, mely állandóan *változó*, mindig csak a pillanatnyilag szabad erőforrásokra és az erőforrásigényekkel már fellépett folyamatokra vonatkozik. Ennél azonban többről is szó van: a folyamatmező kiválasztási hálót alkotó része megváltozhat saját működése folyamán is.

Az elmondottak ugyan megvilágítják a folyamat konstrukció együttes működését, de nem bizonyítják azokat, és nem szólnak arról, vajon a folyamatok minden lehetséges véletlen realizációja esetén korrekt-e a folyamat mező működése. Ennek vizsgálatára térünk rá a következő részben.

Folyamat mezőkre vonatkozó tételek

Először megmutatjuk, hogy érvényes az alábbi

8.1. TÉTEL. Minden T-transzformáció, mely a szinkronizációs folyamatmező működése során végrehajtásra kerül értelmezve van.

Bizonyítás

a) Definíció szerint minden $D(d, A)$ folyamat $S(A).f_2$ transzformációja értelmezve van a hozzá tartozó d értéken. Az M szemafor által biztosított kölcsönös kizárás és a t-re biztosított kizárólagos hozzáférés miatt a $P(C[d])$ operáción való továbbhaladás feltétele $t=d$ fennállása és ez még f_2 végrehajtásakor is igaz. A végrehajtásra kerülő f_2 transzformációk tehát mindig értelmezve vannak.

b) Egy f_1 transzformáció axiómáink szerint a kezdeti t_0 értéken értelmezve van, és az egyértelműségi axióma alapján mindaddig értelmezve is marad, míg végrehajtásra nem kerül. A későbbiekre az allokációs cikluson belüli

$$\textbf{path} \quad f_1; f_3 \quad \textbf{end}$$

garantálja az f_3 transzformáció szükséges végrehajtását, az előző a) pont pedig biztosítja, hogy f_3 után és f_1 előtt f_2 nem kerülhet végrehajtásra mivel nem lenne értelmezve. Ez pedig axiómáink szerint f_1 értelmezettségéhez elegendő.

c) Legyen A allokációs ciklus, $\mathbf{D}$ pedig a hozzá tartozó összes dekóder folyamatok halmaza, azaz

$$\mathbf{D} = \{D(d, A')|A' = A\}.$$

Mivel a minden $D \in \mathbf{D}$-ben szereplő $f_2 = S(A).f_2$ transzformáció értelmezésének szükséges feltétele az A-ban szereplő $S(A).f_1$ transzformáció előzetes végrehajtása, másrészt mert a) szerint végrehajtás esetén az f_2 transzformációk mindig értelmezve vannak, fennáll a

$$\textbf{path} \quad \{f_1; f_2\} \quad \textbf{end}$$

szabály, azaz A vezérli $\mathbf{D}$-t a 4. pontbeli definíció értelmében:

$$A \to \mathbf{D}$$

Másrészt a $H[A]$ szemafor útján $\mathbf{D}$ is vezérli A-t:

$$\mathbf{D} \to A$$

A és $\mathbf{D}$ tehát egymással szinkronizálva vannak, mégpedig a kezdeti állapot alapján úgy, hogy A aktív komponens $\mathbf{D}$ elemei pedig passzívak:

$$A \bullet\!\!\leftrightarrow \mathbf{D}$$

A 4.1. lemma szerint az együttes működést ez esetben a

$$\textbf{path} \quad f_1; f_2; V(H[A]); P(H[A]) \quad \textbf{end}$$

kifejezés írja le. Mivel az allokációs ciklusokon belül a

$$\textbf{path} \quad f_1; P(H[A]); f_3 \quad \textbf{end}$$

rend érvényes, e kettőből az alábbi

$$\textbf{path} \quad f_1; f_2; f_3 \quad \textbf{end}$$

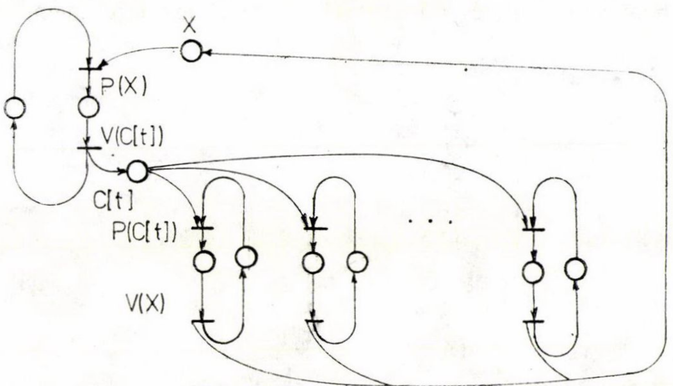
szabály következik. Ez pedig f_3 értelmezettségéhez elégséges.

Ezek után egy lemmát fogunk kimondani. Legyen $t \in \mathbf{T}$ és vezessük be az alábbi jelölést:

$$\mathbf{D}_t = \{D(d, A)|d = t\}.$$

Jelölje $\{J, \mathbf{D}_t\}$ azt a részhálót, mely a jelfogóból és $\mathbf{D}_t$ elemeiből áll. Olyan esetet fogunk vizsgálni, mikor az M szemafor e részhálón kívül nincsen használatban. Ennélfogva blokkolást nem okozhat, így a 17. ábra a $\{J, \mathbf{D}_t\}$ részhálót már az M-re vonatkozó átmenetek nélkül mutatja.

A 4. szakasz alapján J és $\mathbf{D}_t$ szinkronizálva vannak, és $\{J, \mathbf{D}_t\}$ életképes, ha pl. J aktív komponens. Az ábráról az is látható, hogy az életképesség tényén nem változtat az, ha a $\mathbf{D}_t$ halmaz a háló működése közben megváltozik, mivel lehetséges elemei mindig a 17. ábra szerinti hálószerkezetet alkotják.



17. ábra

Vegyük még észre azt is, hogy bárhol legyenek a résztvevő elemi ciklusok belső vezérlési pontjai, ha valamely állapotban X tartalmaz pontot, akkor ettől kezdve J a szinkronizációban aktív. Ezzel a következőt láttuk be

8.1. LEMMA. Ha X tartalmaz pontot és M a $\{J, \mathbf{D}_t\}$ részhálón kívül nincsen használatban, akkor $\{J, \mathbf{D}_t\}$ mindaddig életképes, míg $\mathbf{D}_t$ nem üres.

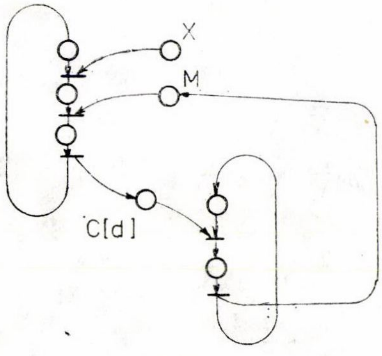
E lemma segítségével most már megmutathatjuk, hogy érvényes a következő

8.2. TÉTEL. A folyamatmező működése a 3. pontban megadott definíció értelmében telített.

Bizonyítás

a) Megmutatjuk, hogy a mező az S- és K-átmenetek halmazára nézve reguláris. Legyen a háló tetszőleges elérhető állapotban, és tiltsuk le az S- és K-átmenetek billenését. Mivel minden allokációs ciklus tartalmaz S- és K-átmenetet, e ciklusokban már csak véges sok további billenés lehetséges. Ebből az is következik, hogy csak véges sok f_1 és f_3 transzformáció kerülhet már végrehajtásra.
Tekintsük most már az ez utáni állapotot. Ettől kezdve már csak f_2 típusú transzformációk kerülhetnek végrehajtásra. Az értelmezési axióma és a 8.1. tétel alapján azonban csak véges sok ilyen, (legfeljebb mindegyik még egyszer) következhet be. Mivel minden dekóder folyamat tartalmaz f_2 átmenetet, véges sok lépés után ezek is mind blokkolt állapotba kerülnek.
Legyen t^* az így kialakult t érték. Ezen már egyetlen f_2 transzformáció sincsen értelmezve, ennélfogva tartozik hozzá egy $D^H(d)$ folyamat, mely a jelfogóval együtt a 18. ábrán látható hálót alkotja.

Ez a háló két szinkronizált ciklust tartalmaz, melyek közül a jelfogó biztosan életképtelen, hiszen az X-szemafor (bármely véges sok lépéssel elért hálóállapotban) csak véges sok pontot tartalmazhat. Ennélfogva az egész fenti hálón már csak véges sok billenés lehetséges.
Nem maradt más hátra, mint a mező többi $D^H(d)$ folyamata. Mivel $t=t^*$ már nem változhat, és mindegyikükre $d \neq t^*$ így $C[d]$ nem kaphat többet



18. ábra

jelzést. Ennélfogva véges sok lépés után ezek is mind blokkolt állapotba kerülnek.

b) Megmutatjuk, hogy egy főállapothoz tartozó t^* értéken nem lehet értelmezve f_2 transzformáció. Erre azért van szükség, mert azt ugyan láttuk, hogy a véges sok lehetséges f_2 transzformáció végrehajthatósága bizonyosan maga után vonja a lokális holtpont létezését, a telítettséghez azonban az is szükséges, hogy e holtpont korábban ne alakulhasson ki.
Tegyük fel tehát, hogy a lokális holtponthoz tartozó t^* értéken értelmezve van egy $f_2=S(A).f_2$ transzformáció. Tekintsük a $\{J, \mathbf{D}_t\}$ részhálót attól az időtől kezdve, mikor az f_2-t szükségképpen megelőző $S(A).f_1$ transzformáció került végrehajtásra. $S(A).f_1$ után az allokációs ciklus $V(X)$ átmenete még biztosan billenhet, így az X helyre bizonyosan eljuthat egy pont akkor, amikor $S(A).f_2$ már értelmezve van. Mivel azonban $S(A).f_2$ még t^*-on is értelmezve van, még D_{t^*} sem lehet üres, így a 8.1. lemma szerint t^*nem tartozhatott a lokális holtponthoz.

Ezek után rátérünk folyamatrendszerünk legfontosabb tulajdonságának, a holtpont mentességnek kimutatására. Ezt így fogalmazzuk meg:

8.3. TÉTEL. A háló bármely elérhető állapotában bármely A allokációs ciklushoz megadható olyan billenés sorozat, melynek eredményeképpen A kötött periódusba kerül.[5]

[5] Az erős értelemben vett életképességhez ezt az állítást tulajdonképpen nem csak a K-átmenetekre, hanem a háló összes átmenetére meg kellene mutatni. Bizonyításunk e célból könnyen kiegészíthető, számunkra azonban ennek most nincs jelentősége.

Bizonyítás

Jelölje $\mathfrak{T}_0$ a hálónak azt a főállapotát, melyben minden allokációs ciklus szabad állapotban van.

a) Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T}_0$ a háló bármely $\mathfrak{T}$ állapotából elérhető. Tiltsuk le az S- és K-átmenetek billenését. Jelölje az ezután kialakult főállapotot $\mathfrak{T}^*$ és tartozzon hozzá a $t=t^*$ érték. Legyen $A \in \mathbf{A}$ tetszőleges allokációs ciklus, és $S=S(A)$. Ekkor az alábbi három eset valamelyike áll fenn:

1) $t^*.L(S) = S.f_1$,

2) $t^*.L(S) = S.f_2$,

3) $t^*.L(S) = S.f_3$.

Vegyük észre, hogy a lokális holtpontban az allokációs ciklusok csak három átmenetnél lehetnek blokkolva, melyek rendre az alábbiak szerint felelnek meg a fenti három esetnek.

1) $P(H[A])$,

2) K,

3) S.

Legyenek $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ rendre azoknak az allokációs ciklusoknak halmazai, melyek a fenti átmeneteknél vannak blokkolva. Először is megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{A}^*$ nem üres, akkor $\mathfrak{B}^*$ sem lehet üres, azaz

(S) $$\mathfrak{A}^* \neq \emptyset \rightarrow \mathfrak{B}^* \neq \emptyset.$$

Nos, ha $\mathfrak{A}^* \neq \emptyset$ és $\mathfrak{B}^* \neq \emptyset$ akkor az értelmezési axióma c) pontja alapján legalább egy f_2 transzformáció értelmezve van t^*-on. Ez azonban a 8.2. tétel szerint lehetetlen.

Tekintsük most $\mathfrak{C}^*$ folyamatait. Ha $\mathfrak{C}^* = \mathbf{A}$, akkor definíció szerint a $\mathfrak{T}_0$ főállapotban vagyunk. Ha nem, akkor (S) szerint $\mathfrak{B}^*$ nem üres. Legyen $A \in \mathfrak{B}^*$ és billentsük az A-beli K átmenetet. Jelölje $\mathfrak{T}^{**}$ az ezután kialakuló új főállapotot, és $\mathfrak{C}^{**}$ a hozzá tartozó $\mathfrak{C}$ folyamathalmazt fentebbi definíciónk értelmében. Ekkor

(Z) $$\mathfrak{C}^{**} = \mathfrak{C}^* \cup \{A\}.$$

Ismételjük meg az egész eljárást. (Z) miatt ez csak véges sokszor lehetséges, (S) alapján pedig az elért végső állapot csak $\mathfrak{T}_0$ lehet.

b) Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T}_0$-ból van olyan billenés sorozat, melynek eredményeképpen tetszés szerinti megadott A folyamat kötött periódusába kerül. Oldjuk fel az A folyamat K átmenetének blokkolását. Kövessük a hálón az így lehetségessé vált billenés sorozatot a szokásos módon, míg az új főállapothoz jutunk. Ekkor A a K átmenetében lesz blokkolva.

9. Mező konstrukciók

Ebben a részben az allokációs feladatokhoz rendelhető, és axiómáinknak eleget tevő konstrukciókat adunk meg. Mindenek előtt bebizonyítjuk dolgozatunk fő állítását:

9.1. TÉTEL. Minden allokációs feladatnak van szemaforokkal megadható, telített, stabil megoldása.

Bizonyítás

Előző tételeink alapján ennek belátásához már csak egyetlen láncszem hiányzik. Meg kell mutatnunk, hogy egy allokációs feladatnak nem csak absztrakt allokációs mezők feleltethetők meg, hanem egy ilyen mezőt a programozás céljára ténylegesen is meg kell adnunk. Bemutatunk hát egy olyan lehetőséget, mely minden esetben keresztül vihető.

Legyen az erőforrások száma n, a ciklikus folyamatoké p. Legyen t_0 az $n+p$ dimenziós csupa 0-ból álló vektor. Legyenek **T** elemei az $n+p$ dimenziós $0-1$ vektorok közül azok, melyekhez t_0-ból a transzformációk segítségével eljuthatunk. A transzformációkat a következőképpen definiáljuk. Legyen $A_k \in \mathbf{A}$ a k-adik folyamat. Ekkor az $S(A_k)$ hármas tarnszformációi:

f_1: Az $n+k$-adik bit 0-ról 1-re változik.

f_2: Az első n helyen az $R(A_k)$ elemeinek megfelelő pozíciókban levő bitek 0-ról 1-re, az $n+k$-adik bit pedig 1-ről 0-ra változik.

f_3: Az $R(A_k)$-nak megfelelő bitek 1-ről 0-ra változnak.

Tekintsünk értelmezettnek egy transzformációt, ha az általa megváltoztatandó bitek mindegyike valóban az eredményezendővel ellentétes állásban van, és szorítsuk ezt még meg az értelmezési axióma *a)* pontjával.

Ezen a módon valóban allokációs mezőhöz jutottunk, amit az axiómák ellenőrzése útján egyszerűen verifikálhatunk.

Tételünk bizonyítása konstruktív, mégis egzisztencia tételről beszélünk, mert az alkalmazott módszer gyakorlati felhasználáshoz túlságosan általános. Általában nagy számú dekóder folyamatot igényel, melyekhez ha külön processzorra nincs is szükség, a számítógép memóriáját bizonyosan terhelik. Tételünk jelentősége így elsősorban a megoldás létezésének kimutatása, az egyedi feladatokat illetően pedig azok adottságai mindig lehetőséget nyújthatnak egyszerűsített megoldásokra.

A következőkben még néhány példát mutatunk arra, hogyan lehet a folyamat mezőket más, bonyolultabb, de hatásosabb allokációs mezők segítségével felépíteni. (Megjegyezzük, hogy összetettebb szerkezetű folyamat mezőket definiálva tovább növelhető a hatékonyság, ilyenek vizsgálata azonban már egy újabb dolgozatot igényelne.)

C-mező

Vezessük be a 9.1. tételben szereplő $n+p$ dimenziós állapot vektorokat most is, **T** elemei azonban nem ezek, hanem olyan p dimenziós vektorok lesznek, melyek előbbiekből a következő g transzformáció segítségével nyerhetők:

$$t(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } R(A_k)\text{-hoz tartozó bitek mindegyike } 0, \\ & \text{az } n+k\text{-adik bit pedig } 1, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

ahol $t(k)$ a $t \in \mathbf{T}$ vektor k-adik bitje. Szavakban: $t(k)=1$ akkor és csak akkor, ha a k-adik folyamatnak bejelentett igénye van és az ki is elégíthető. Legyenek f_1, f_2, f_3 a 9.1. tételbeliek, kiegészítve mindegyiket g végrehajtásával, mely az $n+p$ dimenziós vektorból minden esetben képezi a $\mathbf{T}$-hez tartozó p dimenziós vektort is.

Hasonlítsuk össze most e konstrukciót az előzővel. A $n+p$ dimenziós vektor szerkezete az alábbi:

$$\begin{array}{c|c|} \overbrace{\text{erőforrás bitek}}^{n} & \overbrace{\text{igény bitek}}^{p} \\ \hline \underbrace{00}_{R(A_k)}\ 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ A_k}}{1} \\ \hline \end{array}$$

Az A_k folyamathoz a mező definíciója szerint dekóder folyamatot kellett készíteni minden olyan t kódhoz, melyben az $R(A_k)$ bitek nullák, és az A_k bit 1. Ebből a g-vel transzformált új kód esetén csak egyetlen, az A_k-hoz tartozó, és itt már kielégíthető igényt reprezentáló bitet kell figyelembe venni.

D-mező

Legyenek a szabad erőforrások egy x, az igényelt erőforrások pedig egy y vektorban nyilvántartva. $\mathbf{T}$ elemei legyenek az igényelt, és ugyanakkor szabad erőforrásokat ábrázoló vektorok. x, y, t így n dimenziós vektorok, és kezdetben mind csupa nulla. $S(A_k)$ transzformációi értelem szerint:

f_1: $R(A_k)$ y-beli bitjei 0-ról 1-re változnak.

f_2: $R(A_k)$ x-beli bitjei 0-ról 1-re, az y-beliek pedig 1-ről 0-ra változnak.

f_3: $R(A_k)$ x-beli bitjei 1-ről 0-ra változnak.

Mindegyik transzformációhoz hozzávesszük még az x, y által meghatározott t vektor újraszámítását.

Ezzel a módszerrel a dekóder folyamatok száma a C-mezőhöz viszonyítva is csökkenthető. Nem nehéz azonban észrevenni, hogy a mezőaxiómák csakis abban az esetben fognak teljesülni, ha semelyik három $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{A}$ folyamatra sem áll fenn az alábbi

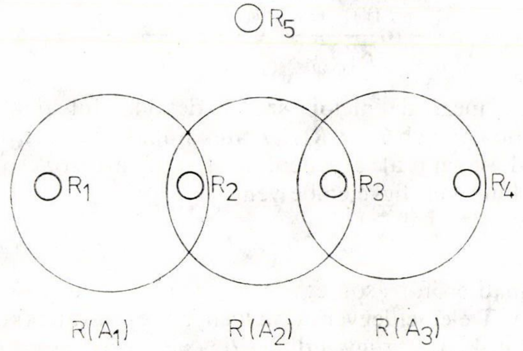
$$R(A_1) \subset R(A_2) \cup R(A_3)$$

reláció. Meg lehet mutatni, hogy fiktív erőforrások hozzávételével e kikötés teljesülése mindig elérhető. Ezt most csak egy példán mutatjuk be. Versengjen 4 erőforrásért 3 folyamat a 19. ábrán látható igényekkel.

Láthatóan $R(A_2) \subset R(A_1) \cup R(A_3)$. Ezt megszüntethetjük úgy, hogy $R(A_2)$-höz egy fiktív R_5 erőforrást hozzáveszünk. Példaképpen e feladatra felírjuk azokat a kódokat, melyekhez a mező definíciója értelmében dekódereket kell rendelni:

(szabad=*0*) x	(igényelt=*1*) y	igénylő folyamat
00000	11000	1
00000	01101	2
00000	00110	3
00000	11101	1,2
00000	01111	2, 3
*00000	11110	1, 3
00000	11111	1, 2, 3
11000	00110	3
00110	11000	1

Észrevehetjük, hogy a fiktív erőforrás a $*$ sorban jut szerephez. Bővítetlen kód esetén az algoritmus hozzárendelhetné az $R(A_2)$ erőforrásokat A_2-höz anélkül, hogy az igényelné.



19. ábra

Végezetül egy megjegyzés. A dolgozatban mindvégig egyszerű szerkezetű ciklikus folyamatokról volt szó. Az elmondottak lényege azonban a három kritikus akció: igénybejelentés, lekötés és felszabadítás kezelésére vonatkozott. Ez hasonlóan valósítható meg általános folyamatrendszerekben is.

IRODALOM

[1] ARAKI, T. AND KASAMI, T., "Some decision problems related to the reachability problem for Petri nets", *Theoretical Computer Science* **3** (1977) 85—104.

[2] CAMPBELL, R. H. AND HABERMANN, A. N., "The specification of process synchronization by path expressions", *Lecture Notes in Computer Science* **16** (1974) 89—101.

[3] CAMPBELL, R. H. AND LAUER, P. E., "Formal semantics of a class of high-level language primitives for coordinating concurrent processes", *Acta Informatica* **5** (1975) 297—332.

[4] COFFMAN, E. G. AND DENNING, P. J., *Operating Systems Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J. 1973).

[5] CRESPI-REGHIZZI, S., "Petri nets and Szilard-languages", *Information and Control* **33** (1977) 177—192.

[6] COURTOIS, P. J., HEYMANS, F. AND PARNAS, D. L., "Concurrent control with readers and writers", *Comm. ACM* **15** (1971) 667—668.

[7] DIJKSTRA, E. W., "Solution of a problem in concurrent programming control", *Comm. ACM* **9** (1965) 569.

[8] DIJKSTRA, E. W., "Cooperating sequential processes", *Programming Languages* (Academic Press, 1968).
[9] DIJKSTRA, E. W., "Hierarchical ordering of sequential processes", *Acta Informatica* **1** (1971) (1971) 115—138.
[10] HABERMANN, A. N., "Synchronization of communicating processes", *Comm. ACM* **15** (1972) 171—176.
[11] HABERMANN, A. N., *On a solution and a generalization of the Cigarette Smoker's problem* (Techn. Rep. Carnegie M. U. 1972).
[12] HOARE, C. A. R., "Monitors: an operating system structuring concept", *Comm. ACM* **17** (1974) 549—557.
[13] KELLER, R. M., *Generalized Petri nets as models for system verification* (Techn. Rep. Princeton U. 1975).
[14] KNUTH, E., "On the load-store type solutions of the mutual exclusion problem", *MTA SZTAKI Közlemények* **15** (1975) 133—140.
[15] KNUTH, E., „Véges halmaz rendszerek", *Alkalmazott Matematikai Lapok* (előkészületben).
[16] KNUTH, E., "Monotone continuous predicates", *Acta Mathematica Hungarica* (előkészületben).
[17] PARNAS, D. L., "On a solution to the cigarette smokers problem", *Comm. ACM* **18** (1972) 181—183.
[18] PATIL, S. S., *Limitations and capabilities of Dijkstra's semaphore primitives for coordination among processes* (Techn. Rep. MIT. 1971).
[19] SZLANKÓ, J., „Parallel folyamatok gráf modelljei", *MTA SZTAKI Közlemények* **18** (1977) 119—130.
[20] VARGA, L., *Rendszerprogramozás III* (Jegyzet, Tankönyvkiadó Budapest 1975).

(Beérkezett: 1977. szeptember 23.)

KNUTH ELŐD
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ON THE SOLVABILITY OF RESOURCE ALLOCATION PROBLEMS

E. KNUTH

The paper deals with the coordination problem of concurrent processes competing for the use of exclusively accessible resources. A general class of problems is given and their solvability using semaphore operations is proved. The class contains most of the widely referenced special cases such as the so called *"dining philosophers"* and the *"cigarette smokers"* problems.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 65—81

ADATBÁZISKEZELŐ RENDSZEREK BIZTONSÁGI PROBLÉMÁI

BENCZÚR ANDRÁS

Budapest

Ebben a dolgozatban az adatbáziskezelő rendszerek biztonsági kérdéseivel kapcsolatos valószínűségelméleti eredményekről számolunk be. Ezek az eredmények [1] dolgozatban kijelölt kutatási feladatok egy részének megoldásai. Az [1] dolgozatban az automataelmélet megközelítésmódjával rokon eszközökkel az adatkezelő rendszereknek olyan matematikai modelljét adtuk meg, amely alkalmas a biztonság kérdésének vizsgálatára. A pontos definíciókból csak azokat ismételjük meg, amelyek a valószínűségszámítási eredmények megértéséhez elengedhetetlenül szükségesek. Az [1]-ben megadott modell segítségével meghatározható a biztosítási eljárások költsége abban az esetben, amikor a meghibásodás a számítógép belső memóriájának elvesztését jelenti. Az irodalomban ([3], [4]) az ilyen hibák elleni védelmi eljárásokat "*quick recovery*"-nek nevezik. A számítógép külső tárolójának *(disk)* tartalmát az adatbázis kezelő rendszer S állapotainak nevezzük. (Az állapot fogalmába beleértjük a disken tárolt kezelő programokat is.) Feltételezzük, hogy a rendszer állapota diszkrét időpontokban változik, tehát az adatbáziskezelő rendszer működése az állapotoknak egy $S_1, \ldots, S_N$ sorozata. Feltételezzük, hogy az S_i $(1 \leqq i \leqq N)$ állapotoknak van olyan $S'_i \subset S_i$ része, amelyből az S_i állapot helyreállítható. Ezek az úgynevezett generátor részállapotok nem változnak meg minden időpontban, hanem csak az $i_1=1, \ldots, i_j, \ldots, \leqq N$ kontrollpontokban. Ha a rendszer egy $i_j < i < i_{j+1}$ időpontban meghibásodik, akkor a hiba kijavítása azt jelenti, hogy S'_{i_j}-ből helyreállítódik S_{i_j}, majd a rendszer újra végigmegy az $S_{i_j+1}, \ldots, S_i$ állapotsorozaton *(recovery)*. A nemzetközi irodalomban (CHANDY [2], GELENBE [5]) vizsgált modellektől eltérően mi feltételezzük, hogy a helyreállítás alatt is bekövetkezhet hiba. A meghibásodás okozta többletidő várható értékének kiszámítása pl. a GELENBE [5] által adott modell alapján a fenti feltevés nélkül is lehetséges, de többletidő eloszlására nem kapunk információt. Dolgozatunk 1. szakaszában a centrális határeloszlástételek alkalmazhatóságát mutatjuk meg, kötegelt feldolgozású rendszerek esetén, míg a 2. szakaszban az adatbázis kezelő rendszert folyamatos tömegkiszolgálási rendszernek tekintve a túlterhelés szükséges és elegendő feltételét adjuk meg.

1. Határeloszlások

Ebben a paragrafusban a t hasznos idő alatt a helyreállításra — újrafuttatásra — fordított idő eloszlásával foglalkozunk. Adott t idő esetén ezt az $F_t(x)$ eloszlásfüggvényt általában nem tudjuk meghatározni.

Az alábbiakban ismertetjük azokat a feltételeket, amelyek mellett $F_t(x)$-et a centrális határeloszlástétel segítségével közelíthetjük.

Jelöljük τ_k-val a $(k-1)$-edik és a k-adik meghibásodás között eltelt időt. A $\{\tau_k\}$ sorozatról a továbbiakban mindig feltesszük, hogy független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata és τ_k-nek léteznek momentumai.

Vezessünk be további két sztochasztikus folyamatot $\{\Theta_k\}$-t és $\{\varepsilon_k\}$-t.

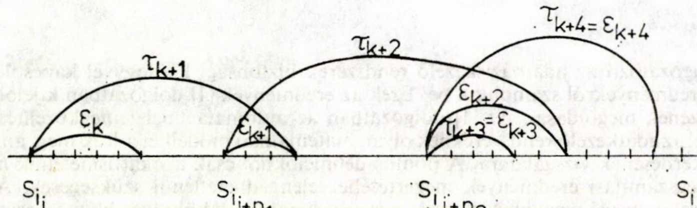
$$\Theta_1 = \max_{i_l < \tau_1} i_l$$

$$\Theta_k = \max_{i_l < \sum_{j=1}^{k-1} \Theta_j + \tau_k} i_l - \sum_{j=1}^{k-1} \Theta_j$$

$$\Theta \varepsilon_k = \tau_k - \Theta_k.$$

A Θ_k jelenti azt az időt, ami két meghibásodás miatti helyreállítás kontrollpontja között eltelt. Feltevésünk miatt Θ_k-nak is léteznek a momentumai. Előfordulhat, hogy Θ_k a 0-t is pozitív valószínűséggel veszi fel (ha két egymásutáni kontrollpont között pozitív valószínűséggel lehet hiba).

Az ε_k pedig a k-adik hiba által okozott időnövekedést jelenti (itt azzal a feltevéssel élünk, hogy az $S'_{ij} \to g(S'_{ij}) = S_{ij}$ helyreállítási eljárás nem igényel időt, az S_{i_j}, $S_{i_j+1}, \ldots, S_{i_j+\varepsilon_k}$ lépések megismétlése pedig ε_k-időt igényel (lásd 1. ábra).



1. ábra

Ha feltesszük, hogy az i_k kontroll pontok közötti távolság állandó, akkor könynyen igazolható, hogy $\{\varepsilon_k\}$ és $\{\Theta_k\}$ független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. (Azonban egymástól nem függetlenek.) Az $\{\varepsilon_k\}$ sorozatra alkalmazható a *centrális határeloszlástétel Anscombe-féle általánosítása*, l. [7]. A tétel kimondása előtt vezessük be a következő jelöléseket:

(1.1) $$m = M(\varepsilon_i), \quad \varepsilon'_i = \varepsilon_i - m$$

(1.2) $$\sigma^2 = M(\varepsilon_i - m)^2$$

(1.3) $$c = \frac{1}{M(\Theta_i)}.$$

(A triviális $M(\Theta_i) = 0$ esetet kizárjuk.)

(1.4) $$\nu_n = \min_{\sum_{j=1}^{k} \Theta_j \geq n} k$$

azaz ν_n azon javítások száma, amelyeket az n-edik lépés lefutásához meg kell tenni.

1.1. Tétel. Ha $M(\Theta_i) \neq 0$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{\nu_n - 1} \varepsilon'_k}{\sigma \sqrt{\nu_n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Bizonyítás. Feltevésünk miatt a $\{\Theta_k\}$ sorozatra alkalmazható a nagy számok gyenge törvénye, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik n_0, hogy

(1.5) $$P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} \Theta_k}{n} - \frac{1}{c}\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0.$$

Az (1.5) összefüggésből következik, hogy bármely $\varepsilon>0$-ra van olyan n_ε, hogy minden $n>n_\varepsilon$-ra

$$P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n}-c\right|>\varepsilon\right\}<\varepsilon. \tag{1.6}$$

Mivel az $\{\varepsilon_k\}$ sorozat független azonos eloszlású korlátos valószínűségi változók sorozata a $P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k-nm}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}$ sorozat a standard normális eloszláshoz tart, és ez (1.6) feltétellel együtt éppen az *Anscombe tétel* alkalmazhatóságának feltétele.

A gyakorlatban a kontrollpontok közötti távolság is függ a véletlentől. Feltehetjük viszont a következőt:

I. Feltétel. Az $\eta_k=i_k-i_{k-1}$ sorozat független, azonos eloszlású, korlátos valószínűségi változók sorozata, sőt az $\{\eta_k\}$, $\{\tau_k\}$ sorozatok tagjai egymástól is teljesen független valószínűségi változók. Ezen feltevések mellett megmutatjuk, hogy az $\{\varepsilon_k\}$ folyamat eleget tesz a *Rosenblatt féle erős keverési feltételnek* és alkalmazható rá a gyengén függő változók sorozatára érvényes centrális határeloszlástétel [6]. A bizonyítás alapgondolata az, hogy az ε_k folyamatot beágyazzuk egy végesállapotú *Markov-láncba.*

Rögzítsük k értékét, és legyen $i_{j(k)}=\sum_{l=1}^{k}\theta_l$ (azaz $i_{j(k)}$ az a kontrollpont, ahová a k-adik meghibásodás után vissza kell térni).

Vezessük be a φ_k segédváltozót, melynek értéke 0 vagy 1 lehet:

$$\varphi_k=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad \tau_k=\varepsilon_k\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Vezessük be a $\bar{\xi}_k=(\varepsilon_k,\varphi_k,i_{j(k)+1}-i_{j(k)})$ vektorfolyamatot. Az $\{\eta_k\}$ és $\{\bar{\tau}_k\}$ folyamatokra tett feltevésekből következik, hogy a $\bar{\xi}_k$ folyamat végesállapotú *Markov-lánc.* Ha az η_k valószínűségi változó az $1, 2, \ldots, \max \eta_k$ értékek mindegyikét pozitív valószínűséggel veszi fel, akkor a $\bar{\xi}_k$ folyamat ergodikus. A $\bar{\xi}_k$ *ergodikus Markov-láncnak* pontosan egy stacionárius eloszlása van. A továbbiakban $\bar{\xi}_k$ ezt a stacionárius folyamatot jelöli.

Megjegyzés: A φ_k segédváltozó bevezetésére a θ_k folyamat vizsgálata céljából volt szükségünk.

1.1. LEMMA. A $\bar{\xi}_k$ folyamat kielégíti a *Rosenblatt-féle erős keverési feltételt*, (l. [39]), $\alpha(n)=K\varrho^n$ keverési együtthatóval (K pozitív, ϱ 1-nél kisebb állandó), azaz $\mathfrak{B}_i^j$-vel jelölve a $\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{i+1}, \ldots, \bar{\xi}_j$ valószínűségi vektor változók által kifeszített σ-algebrát:

$$\sup_{A\in\mathfrak{B}_1^i,\, B\in\mathfrak{B}_{i+n}^{\infty}}|P(AB)-P(A)P(B)|\leqq K\varrho^n. \tag{1.7}$$

A lemma bizonyítása teljesen elemi és megtalálható pl. [6] XIX. fejezetében.

Megjegyzés. Ha a $\bar{\xi}_k$ folyamat kielégíti az erős keverési feltételt, akkor az ε_k folyamat is kielégíti azt. Ehhez elegendő azt észrevenni, hogy ha $\mathfrak{A}_i^j$ jelöli az $\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_j$ valószínűségi változók által kifeszített σ-algebrát, akkor $\mathfrak{A}_i^j\subset\mathfrak{B}_i^j$.

A fenti állítás következik az $\mathfrak{A}_i^j \subset \mathfrak{B}_i^j$ relációból. Az $\sum_{k=1}^{\nu_n} \varepsilon_k$ összeg adja a rendszer biztonságos működéséhez szükséges többletidőt. A költségnövekedés $\sum_{k=1}^{\nu_n} \varepsilon_k$ konvex (általában nem lineáris) függvénye. Ezért a költségnövekedés várható értékének meghatározásához ismerni kell $\sum_{k=1}^{\nu_n} \varepsilon_k$ eloszlását amit a következő tételek szerint közelítünk a normális eloszlással. A következő lemma biztosítja, hogy az ε_k sorozatra általában teljesülnek az erős keverés tulajdonságával rendelkező stacionárius sorozatokra érvényes centrális határeloszlástétel feltételei[1].

1.2. LEMMA. Minden α páros számra van olyan K_α konstans, hogy

$$M\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'\right)^{\alpha}\right\} < K_\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}$$

Bizonyítás. Az 1.1. lemmából és ε_k értékkészletének véges voltából következik, hogy minden K természetes számra van olyan C_K konstans, hogy tetszőleges $0<k_1<\ldots$ $\ldots<k_m$ és $i_1, \ldots, i_m$ természetes számokra

$$\left|M\left\{\prod_{j=1}^{m} (\varepsilon_{k_j}')^{i_j}\right\}\right| < C_K \varrho^{k_m-k_1} \tag{1.8}$$

ha van olyan j, hogy $i_j=1$ és $\sum_{j=1}^{m} i_j \leqq K$.

Az

$$M\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'\right)^{\alpha}\right\} = \sum_{\substack{1\leqq i_j\leqq n \\ j=1,2,\ldots,\alpha}} M\left(\prod_{j=1}^{\alpha} \varepsilon_{i_j}'\right)$$

egyenlőség jobb oldalán az olyan tagok száma amelyben minden ε_i legalább a második hatványon van $\binom{n}{\frac{\alpha}{2}}$ konstansszorzásával becsülhető.

Azoknak a tagoknak a száma pedig, amelyek (1.8) miatt $C_\alpha \varrho^k$-val becsülhetők, kisebb, mint konstansszor nk^α. E két becslés a $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \varrho^k$ sor konvergenciája miatt bizonyítja a lemma állítását.

1.2. TÉTEL. Ha $\sigma_n^2 = M\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'\right)^2$ és $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \infty$, akkor létezik olyan σ pozitív

[1] Ennek a ténynek a bizonyítása szintén megtalálható [6] XIX. fejezetében, mégis részletesen ismertetjük, mert a közben megfogalmazott részeredményekre szükségünk lesz a véletlen tagszámú összegre vonatkozó határeloszlástétel bizonyításához.

szám, hogy

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 n(1+o(1)), \tag{1.9}$$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|>N} x^2\, dF_n(x) = 0, \tag{1.10}$$

ahol $F_n(x)$ a $\zeta_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'$ normált összeg eloszlása.

Bizonyítás. Az (1.9) feltétel teljesülése következik az

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'\right)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) M(\varepsilon_0' \varepsilon_j') \tag{1.11}$$

előállításból és az (1.8) összefüggésből, $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{\infty} M(\varepsilon_0', \varepsilon_j')$ választással, ahol $\sigma^2=0$ esetén σ_n korlátos maradna. Az (1.10) feltétel bizonyításához a *Csebisev egyenlőtlenség* egy változatát alkalmazzuk a $\zeta_n = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'$ valószínűségi változókra:

Ha $M_\alpha^n = M|\zeta_n|^\alpha$, akkor

$$P(\zeta_n > \lambda) < \frac{M_\alpha^n}{\lambda^\alpha}. \tag{1.12}$$

Az 1.2. lemmából következik, hogy M_α^n minden páros α-ra n-től független korlát alatt marad.

Ha α-t 8-nak választjuk, akkor

$$\int_N^\infty x^2\, dF_n(x) \leqq \int_N^\infty \frac{x^2}{x^4} M_8^n\, dx. \tag{1.13}$$

Az (1.10) feltétel teljesülése adódik az (1.12) és (1.13) relációkból. Tehát az $\{\varepsilon_k\}$ valószínűségi változó sorozatra érvényes a centrális határeloszlástétel:

1.3. TÉTEL. Az 1.2. tétel jelöléseivel élve, ha $\sigma_n \to \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k'}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \tag{1.14}$$

Ahhoz, hogy az 1.1. tételnek véletlentől függő felújítási intervallumokra való általánosításához jussunk, a $\{\Theta_k\}$ és $\{v_k\}$ sorozatok viselkedéséről pontosabb információra van szükségünk.

Mindezek előtt vegyük észre a következő összefüggéseket, amelyek a $\{\tau_k\}$ és az $\{\eta_k\}$ valószínűségi változó sorozatok együttes függetlenségének, valamint a $\{\xi_k\}$ *Markov-lánc* és a $\{\Theta_k\}$ sorozat definíciójának közvetlen következményei:

1.3. LEMMA. Tetszőleges $1 < k_1 < \ldots < k_j < \ldots < k_m$ sorozatra

$$P(\Theta_{k_j} | \xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_{j-1}}, \xi_{k_j}, \ldots, \xi_{k_m}) = P(\Theta_{k_j} | \xi_{k_{j-1}}, \xi_{k_j}), \tag{1.15}$$

$$P(\Theta_{k_j} | \xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_{j-1}}) = P(\Theta_{k_j} | \xi_{k_{j-1}}). \tag{1.15'}$$

Az (1.15) összefüggés alapján bebizonyítjuk a következő lemmát.

1.4. LEMMA. Ha $1<k_1<\ldots<k_m$, akkor

$$(1.16)\qquad P(\Theta_{k_1}<x_1,\ldots,\Theta_{k_m}<x_m|\xi_{k_1-1},\xi_{k_1},\ldots,\xi_{k_m-1},\xi_{k_m})=$$
$$=\prod_{i=1}^{m}P(\Theta_{k_i}<x_i|\xi_{k_i-1},\xi_{k_i}).$$

Bizonyítás. Az (1.15) összefüggés miatt

$$(1.17)\quad P(\Theta_{k_1}<x_1|\Theta_{k_2}<x_2,\ldots,\Theta_{k_m}<x_m,\xi_{k-1},\ldots,\xi_{k_m})=P(\Theta_{k_1}<x_1|\xi_{k_1-1},\xi_{k_1}).$$

Az (1.17) egyenlőség ekvivalens az

$$(1.18)\qquad P(\Theta_{k_1}<x_1,\Theta_{k_2}<x_2,\ldots,\Theta_{k_m}<x_m|\xi_{k_1-1},\xi_{k_1},\ldots,\xi_{k_m})=$$
$$=P(\Theta_{k_1}<x_1|\xi_{k_1-1},\xi_{k_1})\cdot P(\Theta_{k_2}<x_2,\ldots,\Theta_{k_m}<x_m|\xi_{k_1-1},\xi_{k_1},\ldots,\xi_{k_m})$$

egyenlőséggel.

A lemma állítása az (1.15) összefüggés további felhasználásával és indukcióval nyerhető az (1.17) egyenlőségből.

1.5. LEMMA. Jelöljük Θ_k'-val a $\Theta_k-M(\Theta_k)$ valószínűségi változót. Legyenek $1<k_1<\ldots<k_m$ és $i_1,\ldots,i_m$ természetes számok. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{m}i_j<K$ és az $i_1,\ldots,i_m$ számok közül legalább egy 1-gyel egyenlő. Ekkor létezik egy — csak a Θ_k-k eloszlásától és K-tól függő — olyan C_K konstans, hogy

$$(1.19)\qquad \left|M\left\{\prod_{j=1}^{m}(\Theta_{k_j}')^{i_j}\right\}\right|<C_K\varrho^{k_m-k_1}.$$

Bizonyítás. Mivel a korábban már bevezetett $\mathfrak{B}_i^j$ σ-algebrák valójában véges eseményalgebrák, és a Θ_k valószínűségi változóknak léteznek az abszolút momentumai, az (1.15) összefüggésből következik

$$(1.20)\qquad \max_{i<K,\,A\in\mathfrak{B}_{k_j-1}^{k_m}}M\{|\Theta_{k_j}'|^i|A\}=\max_{i<K,\,B\in\mathfrak{B}_{k_j-1}^{k_j}}M(|\Theta_{k_j}'|^iB)=C_K'.$$

Az 1.1. lemmából következik olyan C_m'' konstans létezése, hogy tetszőleges $A_1\in\mathfrak{B}_{k_1-1}^{k_1},\ldots,A_m\in\mathfrak{B}_{k_m-1}^{k_m}$ eseménysorozatra

$$(1.21)\qquad \left|P(A_1,\ldots,A_m)-\prod_{i=1}^{m}P(A_i)\right|<C_m''\varrho^{k_m-k_1}.$$

Az (1.20) és (1.21) összefüggésből valamint az 1.4. lemma felhasználásával a feltételes várható érték tételből következik olyan konstans létezése, hogy

$$(1.22)\qquad \left|M\left\{\prod_{j=1}^{m}(\Theta_{k_j}')^{i_j}\right\}-\prod_{j=1}^{m}M\{(\Theta_{k_j}')^{i_j}\}\right|<C_K\varrho^{k_m-k_1},$$

ami $i_j=1$ esetén $M\{\Theta_{k_j}'\}=0$ miatt éppen a bizonyítandó állítás.

Következmény. Tetszőleges páros α-ra létezik olyan K_α konstans, hogy

$$M_\alpha^n = M\left(\sum_{j=1}^{n} \Theta_j\right)^\alpha < K_\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

A bizonyítás az 1.5. lemma felhasználásával az 1.2. lemma bizonyításához hasonló módon történik.

Jelöljük $M^{-1}(\Theta_1)$-et c-vel, és legyen

$$\lambda_n = [c \cdot n].$$

1.6. Lemma. Tetszőleges páros α-ra van olyan C_α konstans, hogy

$$P(|\nu_n - \lambda_n| > \delta\lambda_n) < \frac{C_\alpha}{(\delta\sqrt{n})^\alpha}. \tag{1.23}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a

$$|\nu_n - \lambda_n| > \delta\lambda_n$$

esemény maga után vonja az

$$\sum_{i=1}^{[(1-\delta)\lambda_n]} \Theta_i' > \frac{\delta\lambda_n + 1}{c} \tag{1.24}$$

és az

$$\sum_{i=1}^{[(1+\delta)\lambda_n]+1} \Theta_i' < -\frac{\delta\lambda_n}{c} \tag{1.25}$$

események egyesítését.

Az 1.5. lemma következménye miatt minden páros α-ra a $\dfrac{\sum_{j=1}^{k} \Theta_j'}{\sqrt{k}}$ valószínűségi változó α-adik momentuma egy k-tól független korlát alatt marad, az (1.24) és (1.25) eseményekre alkalmazható a *Csebisev egyenlőtlenség* (az 1.2. lemmában idézett formában), amiből adódik a lemma állítása.

Következmény. Tetszőleges $\vartheta > 0$-ra és $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$-re van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra

$$P(|\nu_n - \lambda_n| > \vartheta\lambda_n^{1-\varepsilon}) < \vartheta. \tag{1.26}$$

Bizonyítás. Az (1.23) egyenlőtlenségben δ helyére $\vartheta\lambda_n^{-\varepsilon}$-t írva és n-nel ∞-be tartva adódik (1.26).

Ezzel előkészítettük az 1.1. tétel általánosításának bizonyítását.

1.4. Tétel. A $\{\tau_n\}$ és $\{\eta_n\}$ folyamatokra tett feltevések mellett, ha teljesülnek az 1.2. lemma feltételei, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n} \varepsilon_i'}{\sigma\sqrt{\nu_n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk a következő két segédtételt (lásd RÉNYI [7])

1. Ha az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változó sorozatnak van határeloszlása és a $\{\gamma_n\}$ valószínűségi változó sorozat sztochasztikusan tart 1-hez, akkor az $\{\eta_n\gamma_n\}$ sorozat határeloszlása megegyezik az $\{\eta_n\}$ sorozat határeloszlásával.
2. Ha az $\{\eta_n\}$ sorozatnak létezik határeloszlása és a $\{\psi_n\}$ sorozat sztochasztikusan 0-hoz tart, akkor az $\{\eta_n+\psi_n\}$ sorozat határeloszlása megegyezik az $\{\eta_n\}$ sorozat határeloszlásával.

E két segédtétel és az 1.3. tétel szerint azt kell igazolnunk, hogy a

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$$

sorozat sztochasztikusan 0-hoz tart.

Az 1.6. lemma következménye miatt van olyan n_0, hogy minden $n>n_0$-ra

$$P(|\nu_n-\lambda_n|>\vartheta\lambda_n^{2/3})<\vartheta. \tag{1.27}$$

Mivel

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right|>\varepsilon\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right|>\varepsilon,\ \nu_n=k\right\},$$

így (1.27)-ből azt kapjuk, hogy

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right|>\varepsilon\right\}\leqq\vartheta+\sum_{|k-\lambda_n|<\vartheta\lambda_n^{2/3}}P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right|>\varepsilon\right\}. \tag{1.28}$$

Az (1.28) egyenlőtlenség jobboldalát a *Csebisev egyenlőtlenséggel* becsülhetjük (összesen $2\vartheta\lambda_n^{2/3}$ tagot adunk össze!)

$$\sum_{|k-\lambda_n|<\vartheta\lambda_n^{2/3}}P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i'-\sum_{i=1}^{\lambda_n}\varepsilon_i'}{\sqrt{\lambda_n}}\right|>\varepsilon\right\}\leqq K_\alpha\sum_{j=1}^{2\vartheta\lambda_n^{2/3}}\frac{j^{\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon\lambda_n^{\alpha/2}}\leqq K\frac{(\lambda_n^{2/3})^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\varepsilon\lambda_n^{\alpha/2}},$$

amely n-nel 0-hoz tart, ha $\alpha\geqq 6$.

2. A kiszolgáló rendszer ergodicitásának feltétele

Az előző szakaszban elemzett biztosítási modellt kiegészítjük GELENBE [5] dolgozatához hasonló módon a legegyszerűbb diszkrét idejű tömegkiszolgálási modellel, és megadjuk a rendszer stacionárius működésének szükséges és elegendő feltételét.

A következő feltevésekkel élünk:

(i) a rendszerben egy kiszolgáló egység van, és tetszőlegesen sok igény várakozására van lehetőség (végtelen sorhossz),

(ii) annak a valószínűsége, hogy a k-adik időpontban új igény lép fel a ζ_j sorhossz korábbi viselkedésétől függetlenül p,

(iii) annak a valószínűsége, hogy a k-adik időpontban egy igény kiszolgálódik, ha a sor nem üres (a k-adik időpontban fellépett igényt már sorbanállónak tekintjük) $q<1$.

Az (ii) és (iii) feltételek a $\{\zeta_k\}$ sorhosszfolyamatra nézve a következő feltételeket jelentik

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1}+1 | \zeta_{k-1} \quad) = p(1-q), \tag{2.1}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1}-1 | \zeta_{k-1} \neq 0) = q(1-p), \tag{2.2}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1}-1 | \zeta_{k-1} = 0) = 0, \tag{2.3}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1} \quad | \zeta_{k-1} \neq 0) = (1-p)(1-q)+pq, \tag{2.4}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1} \quad | \zeta_{k-1} = 0) = 1-p+qp. \tag{2.5}$$

A (2.1)—(2.5) definíció alapján

$$M(\zeta_k - \zeta_{k-1} | \zeta_{k-1} \neq 0) = p-q, \tag{2.6}$$

$$M(\zeta_k - \zeta_{k-1} | \zeta_{k-1} = 0) = p(1-q). \tag{2.7}$$

A következőkben figyelembe vesszük, hogy a rendszerben a véletlenszerűen bekövetkezett hibák miatt bizonyos időszakokban a kiszolgálás szünetel — ilyenkor a kontrollpont és a meghibásodás közötti időben elvégzett műveleteket meg kell ismételni (ε_k „időkiesés"). Azt fogjuk feltételezni, hogy a rendszer csak akkor működik, ha a sor nem üres (azokat az időszakokat amikor $\zeta_k=0$ nem számítjuk bele a rendszer idejébe). Ez a feltételezés hibamentes működési időintervallumban a ζ_k folyamat szerkezetében nem jelent lényeges változást, a (2.2)—(2.5) feltételek a következőképp módosulnak:

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1}-1 | \zeta_{k-1} \neq 1) = q(1-p), \tag{2.2'}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1}-1 | \zeta_{k-1} = 1) = 0, \tag{2.3'}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1} \quad | \zeta_{k-1} \neq 1) = (1-p)(1-q)+pq, \tag{2.4'}$$

$$P(\zeta_k = \zeta_{k-1} \quad | \zeta_{k-1} = 1) = 1-p+qp. \tag{2.5'}$$

Így

$$M(\zeta_k - \zeta_{k-1} | \zeta_{k-1} \neq 1) = p-q, \tag{2.6'}$$

$$M(\zeta_k - \zeta_{k-1} | \zeta_{k-1} = 1) = p(1-q). \tag{2.7'}$$

Ha a meghibásodások miatti ismétlésekkel is számolunk — az ismétlések ideje alatt a rendszer nem szolgál ki igényeket, de újabb igények beérkezhetnek — akkor a sorhossz statisztikus viselkedését a $\{\zeta_k^*\}$ duplán sztochasztikus folyamattal írjuk le (l. SNYDER [42]) azaz a $\{\zeta_k^*\}$ folyamat eloszlását az $\{\varepsilon_j\}$ és $\{\Theta_j\}$ folyamatok minden realizációjára megadjuk.

Ehhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Legyen

$$\beta_1 = \Theta_1+\varepsilon_1$$

$$\gamma_i = \beta_i+\varepsilon_i \tag{1.8}$$

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \gamma_i, & \text{ha} \quad \Theta_{i+1} = 0 \\ \gamma_i+\Theta_{i+1}+\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i^*}, & \text{ha} \quad \Theta_{i+1} \neq 0 \end{cases}$$

ahol

$$i^* = \max_{1\le j\le i,\ \Theta_j\neq 0} j$$

Az (1.8) összefüggésekből adódik, hogy $\gamma_i-\beta_i=\varepsilon_i$ és

$$\beta_{i+1}-\gamma_i = \begin{cases} \Theta_{i+1}, & \text{ha} \quad \Theta_{i+1} = 0 \\ \Theta_{i+1}+\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i^*}, & \text{különben,} \end{cases}$$

ezért

$$\beta_1+\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{i+1}-\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i+\varepsilon_{n^*}. \tag{1.9}$$

A $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$ sorozatok definíciójából következik, hogy a rendszer pontosan a $\beta_i< <k<\gamma_i$ időpontokban nem képes igényeket kiszolgálni.

A $\{\zeta_k^*\}$ folyamat feltételes eloszlása az $\{\varepsilon_j\}$ és $\{\Theta_j\}$ folyamatok rögzített trajektóriáira nézve a $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$ folyamatok segítségével a következőképpen adható meg:

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^*+1 \mid \exists i,\ \beta_i < k \leqq \gamma_i) = p, \tag{2.10}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^*+1 \mid \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}) = p(1-q), \tag{2.11}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^* \quad \mid \exists i,\ \beta_i < k \leqq \gamma_i) = 1-p, \tag{2.12}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^* \quad \mid \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1},\ \zeta_{k-1}^* \neq 1) = 1-p-q+2pq, \tag{2.13}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^* \quad \mid \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1},\ \zeta_{k-1}^* = 1) = 1-p+qp, \tag{2.14}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^*-1 \mid \{\exists i,\ \beta_i < k < \gamma_i\} \text{ vagy } \zeta_{k-1}^* = 1) = 0, \tag{2.15}$$

$$P(\zeta_k^* = \zeta_{k-1}^*-1 \mid \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1},\ \zeta_{k-1}^* \neq 1) = q(1-p). \tag{2.16}$$

A $\{\zeta_k^*\}$ folyamatnak egy a (2.10)—(2.16) feltételekkel ekvivalens definícióját is megadjuk, amely szemléletesebben tükrözi a (i)—(iii) feltételekben rögzítetteket.

Legyen adva a $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ folyamatoknak egy-egy realizációja, továbbá tegyük fel, hogy $\zeta_1^*>0$. Értelmezzük az $\{\omega_k^+\}$ és $\{\omega_k^-\}$ folyamatokat a következőképpen: $\omega_1^+=0$,

$$P\{\omega_k^+ = 1) = p,$$

$$P(\omega_k^+ = 0) = 1-p;$$

és az ω_k^+ valószínűségi változók teljesen függetlenek.

$$P(\omega_1^- = -1 | \zeta_1^* > 1) = q,$$

$$P(\omega_1^- = 0 | \zeta_1^* > 1) = 1-q,$$

$$P(\omega_1^- = 0 | \zeta_1^* = 1) = 1,$$

$$P\left(\omega_k^- = -1 | \zeta_1^* + \sum_{j=1}^{k-1} (\omega_j^+ + \omega_j^-) + \omega_k^+ > 1,\ \exists i, \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}\right) = q,$$

$$P\left(\omega_k^- = 0 | \zeta_1^* + \sum_{j=1}^{k-1} (\omega_j^+ + \omega_j^-) + \omega_k^+ > 1,\ \exists i, \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}\right) = 1-q,$$

$$P\left(\omega_k^- = 0 \middle| \left[\zeta_1^* + \sum_{j=1}^{k-1} (\omega_j^+ + \omega_j^-) + \omega_k^+ = 1\right], \text{ vagy } [\exists i, \beta_i < k \leqq \gamma_i]\right) = 1.$$

A $\zeta_k^* = \zeta_1^* + \sum_{j=1}^{k} (\omega_j^+ + \omega_j^-)$ folyamat feltételes eloszlásai $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ rögzített realizációi esetén megegyeznek a (2.10)—(2.16) képletek által megadottakkal.

Értelmezzük az α_i folyamatot a következőképpen:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists k, \gamma_{i-1} < k \leqq \beta_i, \zeta_k^* = 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.17}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\{\varepsilon_i\}$, $\{\Theta_i\}$ és $\{\xi_i\}$ folyamatok az 1.1. lemma miatt egyértelműen meghatározott stacionárius eloszlást követik.

Végül vezessük be a tanulmányozásunk tulajdonképpeni tárgyát képező $\bar{\zeta}_i$ folyamatot:

$$\bar{\zeta}_i = (\zeta_{\beta_i}^*, \xi_i, \alpha_i).$$

2.1. Lemma. A $\{\bar{\zeta}_i\}$ folyamat megszámlálható állapotterű *Markov-lánc.*

Bizonyítás. Legyenek A, C, D rendre a $\bar{\zeta}_i$, $(\zeta_{\beta_{i-1}}^*, \alpha_{i-1})$ és a ξ_{i-1} valószínűségi változók által definiált események, E pedig a $\bar{\zeta}_{i-1}, \bar{\zeta}_{i-2}, \dots$ változók által definiált esemény, és $\mathfrak{B}$ a $\beta_i - \gamma_{i-1}$ és a $\gamma_{i-1} - \beta_{i-1}$ valószínűségi változók által generált σ-algebra.

Ekkor, feltéve, hogy $P(CDE) \neq 0$

$$P(A|CDE) = \frac{P(ACDE)}{P\{CDE)} = \sum_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ P(BCD) \neq 0 \\ B \text{ elemi esemény}}} \frac{P(ABCDE)}{P(CDE)}. \tag{2.18}$$

A $\{\bar{\zeta}_i\}$ folyamat definíciója miatt

$$\frac{P(ABCDE)}{P(BCDE)} = \frac{P(ABCD)}{P(BCD)} \tag{2.19}$$

és

$$\frac{P(BCDE)}{P(CDE)} = \frac{P(BCD)}{P(CD)}. \tag{2.20}$$

A (2.18), (2.19) és (2.20) egyenlőségek felhasználásával nyerjük, hogy

$$P(A|CDE) = \sum_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ B \text{ elemi esemény} \\ P(BCD) \neq 0}} \frac{P(ABCD)}{P(BCD)} \frac{P(BCD)}{P(CD)} = P(A|CD), \tag{2.21}$$

ami a bizonyítandó volt.

2.2. LEMMA. A $\{\bar{\zeta}_i\}$ *Markov-lánc* irreducibilis és aperiodikus.

Bizonyítás. A lemma állítása következik a $\{\bar{\xi}_i\}$ végesállapotú *Markov-lánc* irreducibilitásából és aperiodicitásából, valamint a $\{\bar{\zeta}_i\}$ *Markov-lánc* konstrukciójából.

A továbbiakban a $\{\bar{\zeta}_i\}$ *Markov-lánc* ergodicitásának feltételét vizsgáljuk. E célból néhány további segédtételre lesz szükségünk. Ezekben a lemmákban feltételezzük, hogy a τ_k valószínűségi változóknak létezik az α-adik momentuma (α páros szám) és K_α egy n-től független konstanst jelöl — az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy valamennyi egyenlőtlenségben ugyanaz a K_α szerepel.

2.3. LEMMA. Ha $M(\Theta_i) = \frac{1}{c}$, akkor

$$P\left\{\left|\beta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_{i+1} - \gamma_i) - \frac{n}{c}\right| > n^{\frac{3}{4}}\right\} < K_\alpha n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.22}$$

Bizonyítás. A (2.22) egyenlőtlenség adódik a (2.9) előállításból, az ε_i valószínűségi változók korlátosságából és az 1.5. lemma következményéből.

2.4. LEMMA. Ha $M(\varepsilon_i) = m$, akkor

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} (\zeta^*_{\gamma_i} - \zeta^*_{\beta_i}) - npm\right| > n^{\frac{3}{4}}\right\} < K_\alpha n^{-\frac{\alpha}{4}}. \tag{2.23}$$

Bizonyítás. Az 1.2. lemmából és a *Csebisev egyenlőtlenségből* következik, hogy

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \beta_i) - nm\right| > n^{\frac{3}{4}}\right\} < K_\alpha n^{-\frac{\alpha}{4}}. \tag{2.24}$$

Értelmezzük a $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$ folyamatok realizációitól függő $\{\omega_k\}$ folyamatot a következőképpen:

$$P(\omega_k = 0) = 1, \quad \text{ha} \quad \beta_i < k \leqq \gamma_i \text{ nem teljesül,}$$

$$\left.\begin{aligned} P(\omega_k = 1) &= p, \\ P(\omega_k = 0) &= 1 - p \end{aligned}\right\} \text{ egyébként,}$$

és az ω_k valószínűségi változók teljesen függetlenek. Az $\{\omega_k\}$ és a $\{\zeta^*_k\}$ folyamatok definíciójából következik, hogy minden l természetes számra

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\gamma_n} \omega_k = l\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} (\zeta^*_{\gamma_i} - \zeta^*_{\beta_i}) = l\right\}. \tag{2.25}$$

Ha teljesül a (2.24) egyenlőtlenség, alkalmazhatjuk az $\{\omega_k\}$ sorozatra is a *Csebisev egyenlőtlenséget:*

(2.26) $$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{\gamma_n}\omega_k - npm\right| > n^{\frac{3}{4}}\right\} < K_\alpha n^{-\frac{\alpha}{4}}.$$

A (2.24), (2.25) és (2.26) összefüggésekből már következik a lemma állítása.

Megjegyzés. A 2.3. és 2.4. lemma állítása nemcsak a stacionárius eloszlásra igaz, hanem tetszőleges rögzített ξ_1 melletti feltételes eloszlásra is.

Jelöljük z_i-vel azt a legkisebb i-nél nagyobb j indexet, amelyre $\alpha_j=1$:

(2.27) $$z_i = \min_{j>i,\,\alpha_j=1} j.$$

Értelmezzük a $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$ folyamatok realizációitól függő $\{\zeta_k^N\}$ sztochasztikus folyamatot a következőképpen:

$$\zeta_1^N = N,$$

(2.28) $$P\{\zeta_k^N = \zeta_{k-1}^N | \exists i,\ \beta_i < k \leqq \gamma_i\} = 1$$

(2.29) $$P\{\zeta_k^N = l_k | \zeta_{k-1}^N = l_{k-1} | \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}\} =$$
$$= P\{\zeta_k^* = l_k | \zeta_{k-1}^* = l_{k-1} | \exists i,\ \gamma_i < k \geqq \beta_{i+1}\}.$$

2.5. LEMMA. Ha

(2.30) $$N = \zeta_1^* + \sum_{i=1}^{n}(\zeta_{\gamma_i}^* - \zeta_{\beta_i}^*)$$

(a javítás alatti beérkezések száma)

(2.31) $$M = \sum_{i=1}^{n}(\beta_{i+1} - \gamma_i)$$

(a hibamentes összidő), akkor

(2.32) $$P\{z_1 > n | M, N\} \leqq P\{\forall k,\ k < \beta_{n+1},\ \zeta_k^N \neq 1\}.$$

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy a (2.32) egyenlőtlenség fennáll, a $\{\beta_j\}$, $\{\gamma_j\}$ és $\{\zeta_{\gamma_i}^* - \zeta_{\beta_i}^*\}$ folyamatok valamint a ζ_1^* valószínűségi változó tetszőleges (2.30) és (2.31) feltételeket kielégítő (nem 0 valószínűségű) $1 \leqq i \leqq n$ értékre rögzített trajektóriáit feltéve.

Értelmezzük a $\hat{\zeta}_k$ folyamatot a fenti feltételek mellett a következőképpen

(2.33) $$\hat{\zeta}_1 = \zeta_1^*,$$

(2.34) $$P(\hat{\zeta}_k = \hat{\zeta}_{k-1} + \zeta_{\gamma_i}^* - \zeta_{\beta_i}^* | k = \beta_i + 1) = 1,$$

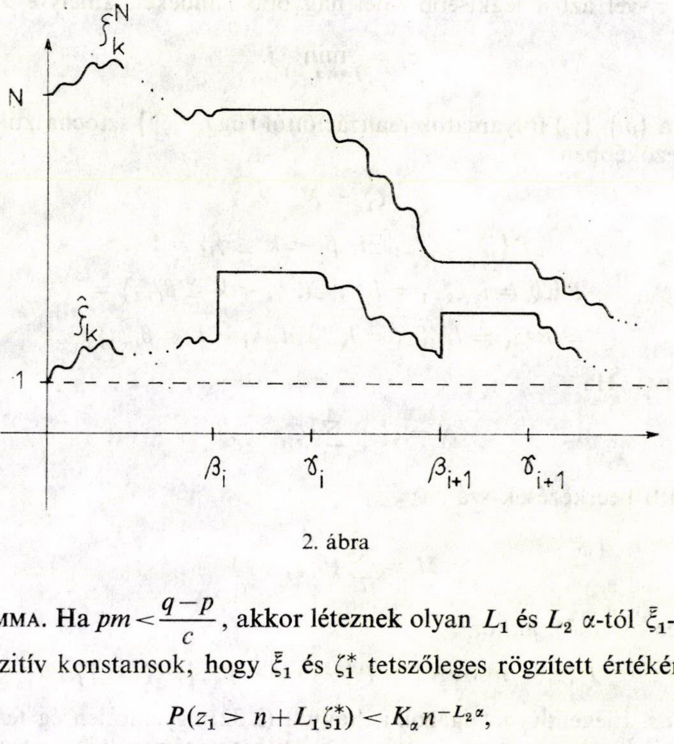
(2.35) $$P(\hat{\zeta}_k = \hat{\zeta}_{k-1} | \beta_i + 1 < k \leqq \gamma_i) = 1,$$

(2.36) $$P(\hat{\zeta}_k = l_k | \hat{\zeta}_{k-1} = l_{k-1} | \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}) =$$
$$= P(\zeta_k^N = l_k | \zeta_k^N = l_{k-1} | \exists i,\ \gamma_i < k \leqq \beta_{i+1}).$$

A $\{\zeta_k^N\}$ és a $\{\hat{\zeta}_k\}$ folyamatok konstrukciójából következik, hogy a $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$ és $\{\zeta_{\gamma_i}^*-\zeta_{\beta_i}^*\}$ folyamatok realizációira tett feltételek mellett

$$P(z_1>n|M,N)=$$
$$=P(\forall k,\ 1<k\leqq\beta_{n+1},\ \hat{\zeta}_k\neq 1)\leqq$$
$$\leqq P(\forall k,\ 1<k\leqq\beta_{n+1},\ \zeta_k^N\neq 1)$$

A 2. ábra mutatja, hogy ζ_k^N trajektóriái mindig $\hat{\zeta}_k$ trajektoriái felett vannak:



2. ábra

2.6. Lemma. Ha $pm<\dfrac{q-p}{c}$, akkor léteznek olyan L_1 és L_2 α-tól ξ_1-től és ζ_1^*-tól független pozitív konstansok, hogy ξ_1 és ζ_1^* tetszőleges rögzített értékére

(2.37) $$P(z_1>n+L_1\zeta_1^*)<K_\alpha n^{-L_2\alpha},$$

ahol K_α független ζ_1^*-től. (A továbbiakban, ahol ennek értelme van $P(.)$ mindig a rögzített ξ_1, ζ_1^* melletti feltételes valószínűséget jelenti.)

Bizonyítás. A 2.3. és 2.4. lemma következménye miatt elegendő azt igazolni, hogy L_1 és L_2 alkalmas választásával tetszőleges N és M értékekre, melyekre

(2.38) $$N<npm+n^{3/4}+\zeta_1^*,$$

(2.39) $$M>\frac{n}{c}-n^{3/4},$$

$$P\{\forall k,\ 1\leqq k\leqq\beta_{n+L_1\zeta_1^*},\ \zeta_k^N\neq 1\}<K_\alpha n^{-L_2\alpha}.$$

Értelmezzük az $\{\omega_k'\}$ sztochasztikus folyamatot a következőképpen:

$$P(\omega_k' = -(p-q)) = 1-p-q+2pq,$$
$$P(\omega_k' = 1-p+q) = p-pq,$$
$$P(\omega_k' = -1-p+q) = q-qp,$$

és az ω_k' valószínűségi változók teljesen függetlenek. Az $\{\omega_k'\}$ folyamat definíciójából adódik, hogy

(2.40)
$$P\{\forall k,\ k \leqq \beta_{n+L_1\zeta_1^*},\ \zeta_k^N \neq 1\} \leqq$$
$$\leqq P\left\{\forall k, k \leqq M,\ \sum_{j=1}^{k} \omega_j' > (q-p)k-N-1\right\}.$$

A $pm<\frac{q-p}{c}$ egyenlőtlenség, valamint a (2.38) és (2.39) feltételek miatt van olyan ζ_1^*-tól független L_1, n_0 és Δ, hogy minden $n>n_0+L_1\zeta_1^*$-ra

$$\frac{N+1}{M}+\Delta_n = q-p,\quad \Delta_n > \Delta.$$

Ezért a (2.40) egyenlőtlenség jobboldala $n>n_0+L_1\zeta_1^*$-ra kisebb, mint

$$P\left(\sum_{j=1}^{M} \omega_j > \Delta_n(q-p)M\right),$$

ami a *Csebisev egyenlőtlenség* miatt $K_\alpha n^{-\frac{1}{2}\alpha}$-val becsülhető $(M(\omega_k'=0))$, és L_2-nek $\frac{1}{4}$-et választva nyerjük a lemma állítását.

2.7. Lemma. Van olyan $\varrho<1$ pozitív szám, hogy $p\{\zeta_{\beta_n}^*>k|\alpha_n=1\}<K\varrho^k$, ahol K és ϱ függetlenek a folyamat múltjától

A lemma állítása következik a klasszikus (p,q) paraméterű végtelen sorhosszúságú modellre $q>p$ esetén érvényes határeloszlás tételből.

Megjegyzés. A 2.6. lemmából következik, hogy tetszőleges rögzített ξ_1 és ξ_1^* értékekre: $M(Z_1)<\infty$, sőt

(2.41)
$$M(Z_1) < L_3+L_1\zeta_1^*,$$

ha a τ_i valószínűségi változóknak létezik $\alpha=10$-edik momentuma. A (2.41) egyenlőtlenségből és a 2.7. lemmából következik, hogy $M(Z_i-Z_{i-1})<\infty$.

Vegyük észre, hogy a klasszikus modellre érvényes határeloszlástételből az is következik, hogy van olyan $s>0$, hogy

(2.42)
$$P\{\zeta_{\beta_n}^* = 1|\alpha_n = 1\} > s,$$

ahol s független a $\bar{\zeta}_i$ folyamat előzményétől. A $\zeta_{\beta_n}^*=1$, $\alpha_n=1$ állapotok száma véges, jelöljük ezen állapotok halmazát A-val. A (2.42) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$M\{\min_{\substack{j>n\\ \bar{\zeta}_j\in A}} j\,|\bar{\zeta}_n\in A\} < \infty.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből, a $\bar{\zeta}_n$ *Markov-lánc* irreducibilitásából és az A halmaz végességéből következik, hogy a $\bar{\zeta}_n$ *Markov-lánc* minden állapota visszatérő és gyakori. Ezzel bebizonyítottuk a következő tétel egyik irányú állítását.

2.1. TÉTEL. Ha a τ_k valószínűségi változóknak létezik a 10-edik momentuma, akkor a $\{\bar{\zeta}_k\}$ *Markov-lánc* ergodicitásának szükséges és elegendő feltétele a

$$pm < \frac{q-p}{c} \tag{2.43}$$

egyenlőtlenség fennállása.

A (2.43) feltétel szükségességének bizonyítása céljából értelmezzük a $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ folyamatok rögzített realizációi mellett a $\{\tilde{\zeta}_k^N\}$ *Markov-láncot* a következőképpen:

$$\tilde{\zeta}_1^N = N$$

$$P(\tilde{\zeta}_k^N = \tilde{\zeta}_{k-1}^N | (\exists j, \beta_j \leqq k < \gamma_j), \quad \text{vagy} \quad \tilde{\zeta}_{k-1}^N = 1) = 1,$$

$$P(\tilde{\zeta}_k^N = \tilde{\zeta}_{k-1}^N | (\exists j, \gamma_j \leqq k < \beta_{j+1}) \quad \text{és} \quad \tilde{\zeta}_{k-1}^N \neq 1) = 1-q,$$

$$P(\tilde{\zeta}_k^N = \tilde{\zeta}_{k-1}^N - 1 | (\exists j, \gamma_j < k < \beta_{j+1}) \quad \text{és} \quad \tilde{\zeta}_{k-1}^N \neq 1) = q.$$

Legyen $N_n = \zeta_1^* + \sum_{k=1}^{\beta_n} \omega_k^+$. A 2.5. lemma bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy a $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ folyamatok rögzített realizációi és ζ_1^* rögzített értéke mellett minden $x > 0$-ra

$$P\{\zeta_{\beta_n}^* > x\} \geqq P\{\tilde{\zeta}_{\beta_n}^{N_n} > x\}. \tag{2.44}$$

Az $\{\omega_k^+\}$ folyamatnak a $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ folyamatoktól való függetlenségéből következik, hogy $pm \geqq \frac{q-p}{c}$ esetén elég nagy n-re

$$P\left\{N_n > q \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_{i+1} - \gamma_i)\right\} > \frac{1}{5}. \tag{2.45}$$

Helyettesítsünk x helyébe $\sqrt{n}$-t. A *Moivre—Laplace tételből* következik, hogy $N_n > q \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_{i+1} - \gamma_i)$ esetén a (2.44) egyenlőtlenség jobboldala egy pozitív korlát fölött marad, ha $n \to \infty$ ami a (2.45) egyenlőtlenséggel együtt ellentmond a $\bar{\zeta}_n$ folyamat ergodicitásának.

IRODALOM

[1] BENCZÚR, A. AND KRÁMLI, A., "Data base integrity", *Acta Cybernetica Szeged* **4** (1978) 181—185.

[2] CHANDY, K. M , "A survey of analytic models of roll-back and recovery strategies", *Computer*, **8** (1975) 40—47.

[3] CODASYL *committee data base task group report*, (Association for Computing Machinery, April 1971.)

[4] FOSSUM, B. M., "Data base integrity as provided for by a particular data base management system", *Proc. of IFIP Working Conference on Data Base Management*, Cargese, Corsica France, 1—5 April 1974.

[5] GELENBE, E., "Existence and uniqueness of stationary distributions in a model of roll-back recovery", *Proc. of the International symposium on new trends in systems analysis*, IRIA 1976, december 13—17.
[6] IBRAGIMOV, I. A., LINNYIK, JU. V., *Független és stacionáriusan függő valószínűségi változók* (NAUKA, Moszkva, 1965).
[7] RÉNYI, A., "On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960) 97—102.

(Beérkezett: 1978. január 25.)

BENCZÚR ANDRÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

INTEGRITY PROBLEMS OF DATA BASE MANAGEMENT SYSTEMS

A. BENCZÚR

In this paper a central limit theorem and an ergodic theorem are proved for stochastic processes related with the integrity problems of data base management systems.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 83—96*

SZÁMOLÓGÉPEK KÖZPONTI EGYSÉGÉNEK KIHASZNÁLTSÁGÁRÓL, II.

TOMKÓ JÓZSEF

Debrecen/Budapest

A dolgozatban, folytatva a [2] dolgozat tematikáját, a multiprogramozású számológépek központi egységének kihasználtsági kérdéseit vizsgáljuk ciklikus *(time sharing)* kiszolgálás és ennek határesete a *"processor sharing"*, majd a prioritásnélküli (FIFO) modellekre. A [2] dolgozat megfelelő algoritmusait kiterjesztjük tetszőleges jobb szám esetére, majd közelítő eljárásokat ismertetünk a központi egység foglaltsági periódushosszának várható értékére.

1. Bevezetés

Számológépek gazdaságos üzemeltetésének egyik fontos tényezője központi feldolgozó egységük kihasználtsága. A [2] dolgozatban multiprogramozású gépekre tanulmányoztuk ezt a karakterisztikát prioritásos és „érkezési-sorrend" szerinti programkiszolgálás esetén. E dolgozatban a ciklikus programkiszolgálás és ennek határesete, a *processor sharing* (a feldolgozó egység közös egyidejű használata) modelleket fogjuk tanulmányozni. A programok, jobok statisztikai jellemzése, leírására a [2] dolgozatban ismertetett modellt vesszük alapul, melyet most külön nem ismertetünk, feltételezzük, hogy az olvasó ismeri e dolgozat alapfogalmait. Az „érkezési-sorrend" szerinti programkiszolgálást a [2] dolgozat csak 3 program esetére tárgyalja. Jelenleg kiterjesztjük a szóban forgó algoritmust tetszőleges számú programra is.

2. Ciklikus (kvantált) programkiszolgálás

Multiprogramozásban együtt futó programok számológép idejei nagymértékben eltérhetnek egymástól. Ennek következtében könnyen előfordulhat, hogy bárha egy program rövid számológépidőt igényel, átfutási ideje mégis elhúzódik, minthogy nagy számológép-idejű programok előzik meg. Ez a probléma főként a távállomások megjelenésével párhuzamosan merült fel, amikoris a távállomásról továbbított rövid programra mielőbb óhajtanánk a válasz megérkezését. Azért, hogy az említett jelenség ne forduljon elő, azaz, hogy rövid programok átfutási ideje is lehetőleg rövid legyen, bevezették a programok ciklikus, másnéven kvantumok szerinti kiszolgálását. Ez a következőt jelenti.

A programok a CPU-t nem használhatják tetszőleges ideig, hanem minden egyes alkalommal legfeljebb egy előre meghatározott q (kvantum) ideig. Ha ezen kvantum idő alatt nem fejeződik be a CPU-t lefoglaló program számolási szakasza, akkor megszakad e program futása, a CPU átadódik a megadott prioritás szerint következő programnak, s a megszakított program a prioritásnak megfelelően beilleszkedik a várakozási sorba. Ha viszont a CPU-t elnyerő program soron következő számolási szakasza rövidebb q-nál, akkor a számolási szakasz végén a CPU átadódik a soron következő programnak, s a CPU-t korábban lefoglaló program I/O fázisba megy át, azaz a CPU-t igénylő programok száma 1-gyel csökken.

Világos, hogy a programok kiszolgálásának ilyen szervezése esetén is az egyes programok lefutási ideje nagymértékben függ az alkalmazandó prioritási szabálytól. Könnyű észrevenni, hogy exponenciális struktúrájú (mind az I/O, mind a számolási szakaszok exponenciális eloszlásúak) homogén programokra a CPU kihasználtság ciklikus kiszolgálás esetén sem függ a prioritási szabálytól. Ezért ilyen esetekben a konkrétség kedvéért feltehetjük, hogy a prioritás a FIFO-val azonos. Ez valójában azt jelenti, hogy a CPU-ra a programok az I/O berendezésekről való visszaérkezés sorrendjében bocsátatnak, s ha egy program elnyerte a CPU-t de a soron következő számolási szakasza a q kvantum idő alatt nem fejeződött be, akkor futásának felfüggesztésével a várakozási sor végére áll be.

Említettük már, hogy a ciklikus kiszolgálás főként azért került előtérbe, hogy rövid programokra aránylag rövid idő alatt kapjunk választ. Durván a ciklikus kiszolgálás azt jelenti, hogy a számológépben jelenlevő jobok megosztoznak a CPU-n, adott időnek a jobok számától függő hányadában halad előre számolási igényeik kielégítése. Az angol irodalomban az ilyen szervezésű rendszereket *time sharing* (idő osztásos) rendszereknek nevezik.

Kevesebb érdeklődés tapasztalható az irányban, hogy hogyan alakul ciklikus kiszolgálás esetén a CPU kihasználtság. Homogén programokra e problémával foglalkozik az [1] dolgozat, melynek módszerét, a *fél-Markov folyamattal* való leírást mi is követni fogjuk.

Meg kell még említeni, hogy amikor a CPU egyik program kiszolgálásáról másik program kiszolgálására tér át, akkor bizonyos „hardware" eljárások a programokat adminisztrálják, sorbaállítják, s meghatározzák melyik program kiszolgálását folytassa a CPU. Ezen eljárások végrehajtása, bárha csekély, de időt igényel. Az angol irodalomban ezen idő neve *„swap time"*. Mi váltási időnek fogjuk nevezni. A váltási idő figyelembevétele gyakran igen elbonyolítja a matematikai modellt, ezért sok esetben említetlenül hagyják, zérusnak tekintik. Ezt tettük mi is az előző dolgozatunkban s tenni fogjuk ezután is néhány helyen. Megemlítjük még, hogy a váltási időt konstansnak szokás tekinteni, hiszen általában mindig egyugyanazon rutinok végrehajtási idejét jelenti.

Az egyszerűség kedvéért most csak a homogén programok esetét tekintjük. Tegyük fel, hogy a programok exponenciális struktúrájúak, s legyen μ a számolási szakaszok, λ az I/O szakaszok paramétere. A kvantum idő legyen q, a váltási idő Δ, $(0<\Delta<q)$. Végül n jelölje a multiprogramozásban együtt futó jobok számát. A továbbiakban feltételezzük, hogy a multiprogramozásban résztvevő jobok száma az idő folyamán nem változik. Ha valamelyiknek befejeződik a futása, akkor azon nyomban másikkal helyettesítjük.

A CPU egy foglaltsági periódusán belül legyenek $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ azok az egymásután következő időpontok, amelyekben a CPU felmondja a soron levő program kiszolgálását miután befejeződött annak számolási szakasza, avagy lejárt a kiszabott kvantum idő. A $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ pontsorozat igen egyszerű szerkezetű, minthogy ha tekintjük a $Z_n=t_n-t_{n-1}$, $(n>1)$, $Z_1=t_1$ változókat, akkor ezek független valószínűségi változók, közös

$$P\{Z_n < t\} = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } \quad t \leqq \Delta, \\ 1-e^{-\mu(t-\Delta)}, & \text{ ha } \quad \Delta < t \leqq q, \\ 1 & , \text{ ha } \quad q < t, \end{cases}$$

eloszlás függvénnyel. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a $t=0$ pillanatban kezdődik el a CPU-nak egy foglaltsági periódusa, melynek hosszát δ-val fogjuk jelölni.

Bevezetjük ezután az $\{y(t), 0 \leqq t < \infty\}$ folyamatot, ahol $y(t), 0 \leqq t < \delta$-ra azon programok száma, amelyek a t pillanatban vagy megszakított, vagy folyamatban levő számolási fázisban vannak, s $t \geqq \delta$-ra $y(t) \equiv 0$. Az $y(t)$ folyamatra a 0-pont elnyelő állapot. Legyenek továbbá $0 \leqq t < \delta$-ra

$$v(t) = \max\{n;\ t_n < t\}, \quad v = \max\{n;\ t_n < \delta\}.$$

Ekkor a $\{\xi_n = y(t_n+0), n \leqq v\}$ sorozat *Markov tulajdonságú* (ún. *beágyazott Markov lánc*), a $\{\xi(t) = \xi_{v(t)}, 0 \leqq t < \delta, \xi(t) = 0, t \geqq \delta\}$ folyamat *fél-Markov folyamat* $\{0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$ állapottérrel (a 0-pont elnyelő állapot), melyben az állapotváltozási pillanatok $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ Felírjuk most ezen *fél-Markov folyamat* átmenet-valószínűségi mátrixát. Legyen $0 < i, j \leqq n$-re

$$A_{ij}(x) = P\{\xi_n = j,\ Z_n < x | \xi_{n-1} = i,\ n \leqq v\}.$$

Feltételezéseink alapján könnyen meghatározhatók ezek az átmenet-valószínűségek. A részletes számítások megtalálhatók [1]-ben, mi most csak a *Laplace—Stieltjes transzformáltjaikat* írjuk fel. Legyen tehát $0 < i, j \leqq n$ és Re $s > 0$-ra

$$\alpha_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dA_{ij}(x).$$

Ekkor $0 < i \leqq n$-re

$$\alpha_{i,i-1}(s) = \int_\Delta^q e^{-sx} \mu e^{-\mu(x-\Delta)-\lambda(n-i)x}\, dx,$$

$0 < i \leqq j \leqq n$-re

$$\alpha_{ij}(s) = \int_\Delta^q e^{-sx} \mu e^{-\mu(x-\Delta)} \binom{n-i}{j-i+1} (1-e^{-\lambda x})^{j-i+1} e^{-\lambda x(n-j-1)} dx +$$

$$+ e^{-\mu(q-\Delta)-sq} \binom{n-i}{j-i} (1-e^{-\lambda q})^{j-i} e^{-\lambda(n-j)q}.$$

Világos, hogy $j < i-1$-re $\alpha_{ij}(s) \equiv 0$.

Tekintsük most a CPU foglaltsági és szabad periódusainak váltakozását. A szabad periódusok időtartamai ez esetben is exponenciális eloszlásúak $n\lambda$ paraméterrel. A foglaltsági periódus hossza pedig ekvivalens (ugyanolyan eloszlású) a $\xi(t)$ folyamatnak az 1-es állapotból a 0-állapotba való első megérkezésének időtartamával.

Jelöljük ezen első megérkezési időtartam *Laplace—Stieltjes transzformáltját* $\Phi_{10}(s)$-sel. [1]-ben meg van adva egy eljárás $-\Phi'_{10}(0)$, azaz a CPU foglaltsági periódus hossza várható értékének kiszámítására. Az eljárás az alábbiak szerint írható le.

Legyenek

$$\beta(s) = Me^{-sZ_n}, \quad \varrho(s) = \frac{\beta(s)}{1-\beta(s)},$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(0), \quad a_1 = \alpha_{10}^{-1}, \quad b_1 = 1,$$

és tetszőleges $1 < i \leqq n$-re

$$a_i = [a_{i-1}(1-\alpha_{i-1,i-1}) - a_{i-2}\alpha_{i-2,i-1} - \ldots - a_1\alpha_{1,i-1}]/\alpha_{i,i-1},$$

$$b_i = [b_{i-1}(1-\alpha_{i-1,i-1}) - b_{i-2}\alpha_{i-2,i-1} - \ldots - b_1\alpha_{1,i-1}]/\alpha_{i,i-1}.$$

Ekkor a CPU foglaltsági periódus hosszának várható értéke

$$M\delta = -\Phi_{10}'(0) = \eta\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) + 1\right], \tag{2.1}$$

ahol

$$\eta = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{1-\beta(s)}{\beta(s)}\right).$$

Ezen eljárás alapján tetszőleges μ, λ, Δ, q, n bemenő paraméterekre elég egyszerű számológépi program segítségével kiszámítható $M\delta$ értéke. Problémák merülhetnek fel α_{ij} effektív kiszámításakor $j > i$-re. Hasonlóan problematikusnak tünhet az eljárás pontosságának becslése. Ezen felmerülhető nehézségekre gondolva felvetődik a kérdés — lehet-e $M\delta$-ra aránylag egyszerű, számítástechnikailag könnyen kezelhető közelítő képletet adni. Tekintsük például azt az esetet, amikor μ igen kicsiny. Ekkor intuitive arra következtethetünk, hogy $M\delta$ igen nagy. S vajon $\mu \to 0$ esetén $M\delta$ milyen nagyságrendben tart végtelenhez? A kérdés megválaszolása céljából vezessük be [1] (14) összefüggésének mintájára az

$$F_{11}^{(k)}(t) = P\{\xi_k = 1,\ t_k < t,\ \xi_l \neq 0;\ l = 1, \ldots, k-1 | \xi_0 = 1\}$$

valószínűségeket, s legyen $f_{11}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dF_{11}^{(k)}(t)$. Világos, hogy a CPU foglaltsági periódushosszának *Laplace—Stieltjes transzformáltja*

$$Me^{-s\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{11}^{(k)}(s)\alpha_{10}(s),$$

$(f_{11}^{(0)}(s) \equiv 1)$. Itt most $\sum_{k=1}^{\infty} f_{11}^{(k)}(s)$ nem más mint az $[\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)]^{-1}$ inverz mátrix bal felső sarkában levő elem, ahol

$$\mathbf{A}(s) = (\alpha_{ij}(s))_{i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots n}.$$

Tetszőleges véges négyzetes $\mathbf{C}$ mátrixra legyen $\langle\mathbf{C}\rangle$ a $\mathbf{C}$ mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsokból álló mátrix transzponáltja. Esetünkben $|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)| = \det(\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)) \neq 0$, ezért

$$[\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)]^{-1} = \frac{\langle\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)\rangle}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)|}.$$

Igazoljuk most az alábbi határeloszlástételt:

$$\lim_{\mu\to 0} P\{\mu^n\delta < x\} = 1 - e^{-px}, \quad (x \geqq 0), \tag{2.2}$$

ahol a jobboldalon szereplő exponenciális eloszlás paramétere

$$p = (q-\Delta)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \int_\Delta^q e^{-\lambda(n-i)x}\,dx\right) \Bigg/ \left(q \prod_{i=1}^{n-1} (1-e^{-\lambda(n-i)q})\right).$$

E célból megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{\mu\to 0} Me^{-\mu^n s\delta} = \dfrac{p}{p+s}$. Legyen $f_{11}(s)$ az $\langle \mathbf{I} - \mathbf{A}(s)\rangle$ mátrix bal felső sarkában levő elem. Ekkor

$$Me^{-\mu^n s\delta} = \frac{f_{11}(\mu^n s)}{|\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mu^n \Delta)|}\alpha_{10}(\mu^n s).$$

Belátjuk most, hogy $\mu \to 0$ esetén

(i) $\dfrac{1}{\mu}\alpha_{10}(\mu^n s) \to \displaystyle\int_\Delta^q e^{-\lambda(n-1)x}\,dx,$

(ii) $\dfrac{1}{\mu^n}|\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mu^n s)| \to q\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(1-e^{-\lambda(n-i)q})s + (q-\Delta)\prod_{i=1}^{n-1}\int_\Delta^q e^{-\lambda n(-i)x}\,dx,$

(iii) $\dfrac{1}{\mu^{n-1}} f_{11}(\mu^n s) \to (q-\Delta)\displaystyle\prod_{i=2}^{n-1}\int_\Delta^q e^{-\lambda(n-i)x}\,dx.$

(i) egyszerű határértékképzés után adódik. A másik két állítás igazolásakor fel fogjuk használni az alábbi zárt előállítást:

$$\sum_{j=i-1}^{n} \alpha_{ij}(s) = \int_\Delta^q \mu e^{-sx} e^{-\mu(x-\Delta)}\,dx + e^{-\mu(q-\Delta)-sq}. \tag{2.3}$$

Tekintsük ezután az $|\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mu^n s)|$ determinánst, s adjuk az utolsó oszlopához rendre az első $n-1$ oszlopát. Ezután alkalmazzuk a kifejtési tételt az első sorra, mely által kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\mu^n}|\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mu^n s)| = (1-\alpha_{11})\frac{1}{\mu^n}C_{11} - \alpha_{12}\frac{1}{\mu^n}C_{12} - \ldots + (1-\alpha_{11}-\alpha_{12}-\ldots-\alpha_{1n})\frac{1}{\mu^n}C_{1n},$$

ahol C_{1j} a megfelelő aldeterminánsok, s α_{1j}-k mellől elhagytuk az argumentum jelölését. A C_{1j}, $1 \leqq j < n$ aldeterminánsok utolsó oszlopát, melynek elemei (2.3)-ra való tekintettel azonosak, osszuk el μ^n-nel, s jelöljük $\tilde{C}_{1j}$-mal az így nyert determinánsokat. Világos, hogy $\dfrac{1}{\mu^n}C_{1j} = \tilde{C}_{1j}$. Célszerű a $\tilde{C}_{1j}$ determinánsok utolsó oszlopában szereplő közös elemet

$$\frac{1}{\mu^n}\left(1 - e^{-\mu(q-\Delta)-\mu^n sq} - \int_\Delta^q e^{-\mu^n sx}\mu e^{-\mu(x-\Delta)}\,dx\right) =$$

$$= e^{-\mu(q-\Delta)}\left(\frac{1-e^{-\mu^n sq}}{\mu^n}\right) + \int_\Delta^q \mu e^{-\mu(x-\Delta)}\left(\frac{1-e^{-\mu^n sx}}{\mu^n}\right)dx$$

alakra hozni, melyből könnyen látható, hogy $\mu \to 0$ esetén a közös elem határértéke sq. Az érthetőség könnyítése céljából vázoljuk az $|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)|$ determinánsnak az említett átalakítás utáni szerkezetét. Az α_{ij}-k mellől megint elhagytuk az argumentum jelölését.

$$|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)| = = \begin{vmatrix} 1-\alpha_{11}-\alpha_{12} & \dots & (1-\alpha_{11}-\dots-\alpha_{1n}) \\ -\alpha_{21}\ 1-\alpha_{22} & \dots & (1-\alpha_{21}-\dots-\alpha_{2n}) \\ \vdots\quad\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\quad\ 0 & \dots & (1-\alpha_{n,n-1}-\alpha_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Ezután már könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\lim_{\mu\to 0} \tilde{C}_{11} = \lim_{\mu\to 0} \prod_{i=2}^{n-1} (1-\alpha_{ii})\, qs = \prod_{i=1}^{n-1} (1-e^{-\lambda(n-i)q})\, qs,$$

$$\lim_{\mu\to 0} \tilde{C}_{1j} = 0, \quad (1 < j < h).$$

Ami a C_{1n} aldeterminánst illeti, látható, hogy annak átló alatti elemei mind zérusok, ezért $C_{1n} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i-1}$. Az (ii) állítás ezek után már elemi számításokból következik. Az utolsó (iii) állítás igazolása céljából tekintsük az $|\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mu^n s)|$ bal felső sarki eleméhez tartozó

$$f_{11}(\mu^n s) = \begin{vmatrix} 1-\alpha_{22} & -\alpha_{23} & \dots & (1-\alpha_{22}-\dots-\alpha_{2n}) \\ -\alpha_{32} & 1-\alpha_{33} & \dots & (1-\alpha_{32}-\dots-\alpha_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & (1-\alpha_{n,n-1}-\alpha_{nn}) \end{vmatrix}$$

aldeterminánst és fejtsük ki első sora szerint

$$\frac{1}{\mu^{n-1}} f_{11}(\mu^n s) = (1-\alpha_{22}) \frac{1}{\mu^{n-1}} C_{11}^* - \alpha_{23} \frac{1}{\mu^{n-1}} C_{12}^* - \dots +$$

$$+ (1-\alpha_{22}-\alpha_{23}-\dots-\alpha_{2n}) \frac{1}{\mu^{n-1}} C_{1,n-1}^*.$$

Ugyanazokkal a determináns átalakításokkal, mint amelyeket korábban alkalmaztunk belátható, hogy

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\mu^{n-1}} C_{1i}^* = 0, \quad (1 \leqq i < n-1).$$

$C_{1,n-1}^*$-ban az átló alatti elemek mind zérusok, ezért végül is kapjuk, hogy

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\mu^{n-1}} f_{11}(\mu^n s) = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\mu} (1-\alpha_{22}-\dots-\alpha_{2n}) \frac{1}{\mu^{n-2}} \alpha_{32} \dots \alpha_{n,n-1} =$$

$$= \lim_{\mu\to 0} \prod_{i=2}^{n} \frac{\alpha_{i,i-1}}{\mu} = (q-\Delta) \prod_{i=2}^{n-1} \int_{\Delta}^{q} e^{-\lambda(n-i)x}\, dx.$$

Ezáltal állításaink igazolást nyertek.

A (2.2) alatti határeloszlástétel egy általánosabb tételnek konkrét esete. Az általánosabb tétel ismertetése hosszabb fejtegetéseket igényelne a *fél-Markov folyamatok* elméletéből, amelyre itt nem szándékozunk kitérni. Ezzel kapcsolatosan az olvasó figyelmébe a [4] monografiát (6. fej. 6.1, 6.3, 6.4 tételek) ajánljuk.

A (2.2) határeloszlástételünk alapján arra gondolhatunk, hogy a CPU foglaltsági periódushosszának várható értékére igaz az

$$M\delta \sim \frac{1}{\mu^n}\frac{1}{p}, \quad (\mu \to 0)$$

aszimptotikus reláció. E sejtésünk jogosságát támasztja alá az [5] dolgozat 2. tételében szereplő aszimptotikus felbontás. Meg kell azonban jegyezni, hogy esetünk kis mértékben eltér az [5] 2. tételétől, s ez az eltérés befolyásolhatja a szóban forgó aszimptotikus felbontás tagjait.

Esetünkben megkísérelhetjük az

$$Me^{-s\delta} = \frac{f_{11}(s)}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)|}\alpha_{10}(s)$$

formula alapján a szokásos módon (0 helyen vett s szerinti deriválttal) meghatározni az $M\delta$ várható értéket. Az $s=0$ helyen vett s szerinti

$$\frac{f'_{11}(0)}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}(0)|}-\frac{\frac{d}{ds}|\mathbf{I}-\mathbf{A}(s)|_{s=0}}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}(0)|}+\frac{\alpha'_{10}(0)}{\alpha_{10}(0)} \qquad \left(\frac{f_{11}(0)}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}(0)|}\alpha_{10}(0)=1\right)$$

derivált felírása után könnyen látható, hogyan fejthető μ ($-n$-től kezdődő) hatványai szerint haladó aszimptotikus sorba az $M\delta$ várható érték. Ennek az aszimptotikus sornak az első tagja valóban $\frac{\mu^{-n}}{p}$ lesz. A következő tag együtthatója még elég egyszerűen leírható, de a további tagok együtthatóinak felírása túlságosan hosszadalmas, bonyolult képleteket igényel.

Most ismertetjük $M\delta$ említett aszimptotikus sorának második tagját. A részletes számításokra nem térünk ki, azok elég hosszadalmasak, fejlett technikát igényelnek, de alapjában elemiek.

Legyenek

$$a = q\prod_{i=1}^{n-1}(1-e^{-\lambda q i}), \quad b=(q-\Delta)\prod_{i=1}^{n-1}\int_{\Delta}^{q}e^{-\lambda(n-i)x}\,dx,$$

$$c = a\left[(q-\Delta)\left(\frac{q+\Delta}{2q}+\frac{e^{-\lambda q}}{1-e^{-\lambda q}}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{r_j}{1-e^{-\lambda(n-j)q}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n-2}(n-j)\frac{(1-e^{-\lambda q})e^{-\lambda(n-j-1)q}\int_{\Delta}^{q}e^{-\lambda(n-j-1)x}\,dx}{(1-e^{-\lambda(n-j-1)q})(1-e^{-\lambda(n-j)q})}\right],$$

ahol

$$r_j = (q-\Delta)e^{-\lambda(n-j)q} - (n-j)\int_{\Delta}^{q}(1-e^{-\lambda x})e^{-\lambda(n-j-1)x}\,dx,$$

$$d = a\left[n\Delta - \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta e^{-j\lambda\Delta}-qe^{-j\lambda q}}{e^{-j\lambda\Delta}-e^{-j\lambda q}}+\frac{1}{j\lambda}\right)-\frac{q+\Delta}{2}+\frac{\int_{\Delta}^{q}e^{-\lambda(n-1)x}\,dx}{(1-e^{-\lambda(n-1)q})}\right].$$

Ekkor $M\delta$ μ hatványai szerint haladó aszimptotikus sorának első tagja

$$\frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{a}{b},$$

második tagja

$$\frac{1}{\mu^{n-1}}\cdot\frac{c-d}{b}.$$

Az aszimptotikus sor első két tagjával való közelítés jóságának érzékeltetésére $\lambda=\mu=0{,}005$, $\Delta=10$ és különböző n és q mellett kiszámítottuk $M\delta$ közelítő értékét, melyet összehasonlíthatunk az [1]-ben közölt, a (2.1) alapján számolt értékekkel. Eredményeinket az alábbi táblázatba foglaltuk össze.

1. táblázat. Átlagos CPU foglaltsági periódushossz

$\lambda=\mu=0{,}005,\ \Delta=10,\ q=110$			
	[1]-ben közölt érték	az aszimptotikus sor első tagja	az aszimptotikus sor első két tagja
$n=2$	487	248	480
$n=3$	1 379	580	1 123
$n=5$	26 809	10 564	20 525

2. táblázat. Átlagos CPU foglaltsági periódushossz

$\lambda=\mu=0{,}005,\ \Delta=10,\ n=3$			
	[1]-ben közölt érték	az aszimptotikus sor első tagja	az aszimptotikus sor első két tagja
$q=60$	1666	749	1391
$q=160$	1298	531	1045
$q=210$	1262	509	1010
$q=260$	1243	497	991

Megemlítjük még, hogy könnyedén meghatározható a CPU egy foglaltsági periódusa alatt a váltásokra fordított összidőnek a várható értéke. Jelölje ugyanis ν a CPU egy foglaltsági periódusa alatti váltások számát. Ekkor

$$\delta = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i,$$

s most lehet alkalmaznia a *Wald-azonosságot,* mely szerint

$$M\delta = Mv\,MZ = Mv\left(\Delta + \frac{1-e^{-\mu(q-\Delta)}}{\mu}\right).$$

Másrészt a CPU egy foglaltsági periódusa alatti váltások összideje

$$\gamma = \sum_{i=1}^{v} \Delta = \Delta v,$$

s így

$$\frac{M\gamma}{M\delta} = \frac{\Delta}{MZ}.$$

3. A „processor sharing" modell

A ciklikus programkiszolgálás modelljét durván a következőképpen jellemezhetjük. Ha egy adott τ időtartam alatt a CPU pontosan k program CPU igényét elégíti ki, akkor ezen k program bármelyikének számolási ideje a τ időtartam alatt közelítőleg τ/k értékkel halad előre. Ez a közelítés annál pontosabb, minél kisebb a Δ váltási idő és a q kvantum idő.

Ezek után természetes a $\Delta=0$, $q=0$ határeset bevezetése. Ezt a modellt az alábbiak szerint jellemezhetjük. A CPU igénnyel rendelkező (számolási fázisban levő) programok kiszolgálása megszakítás nélkül, de változó intenzitással megy végbe, éspedig, ha a τ időtartam alatt a számolási ciklusban levő programok száma mindvégig k, akkor ezen programok számolási ideje a τ időtartam alatt nem τ-val, hanem csak τ/k értékkel halad előre. Az ilyen kiszolgálási szkémára az irodalomban *„processor sharing"* (a központi egység egyidejű használata) modellként szokás hivatkozni.

A *„processor sharing"* modell analitikus vizsgálata lényegesen egyszerűbb mint a ciklikus programkiszolgálásé, s ugyanakkor a programok statisztikai különbözősége sem idéz elő áthidalhatatlannak tűnő nehézségeket. Igaz ugyan, hogy a *„processor-sharing"* modell fiktív szkéma (a váltási idők nem elhanyagolhatók és a központi egység nem hajthat végre egyidejűleg több programra számolási műveleteket) de mint látni fogjuk jó közelítések nyerhetők általa.

Rátérünk most n számú program *„processor-sharing"*-szerinti egyidejű futtatásának analitikus vizsgálatára. Feltételezzük, hogy a joboknak mind a számolási, mind az I/O-szakaszai exponenciális eloszlásúak. A [4] dolgozat jelölésrendszeréhez igazodva az i-edik job számolási szakaszára most λ_i, az I/O szakaszára pedig μ_i legyen az eloszlás paramétere. Mint tudjuk, a CPU-kihasználtság meghatározásához a CPU foglaltsági periódushosszának várható értékét kell kiszámítanunk. Ehhez ugyanúgy, mint [2]-ben, a különböző típusú periódusokat vesszük figyelembe. Tetszőleges $1 \leq k \leq n$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$-re értelmezzük az $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ típusú periódust a CPU olyan foglaltsági periódusaként, amelynek kezdeti pillanatában az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ jobok számolási fázisban vannak, míg a többiekre I/O művelet van folyamatban. Egy ilyen periódus hosszát jelölje $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. A figyelembe veendő különböző periódusok száma $\sum_{k=1}^{n} C_k^n = 2^n - 1$. Ugyanazokkal a meggondolásokkal, mint amilyeneket a [2] 328. oldalán szereplő, a várható értékekre vonatkozó egyenletrendszer bevezetésekor alkalmaztunk, nyerhető az alábbi egyenletrendszer:

$$M\delta_i = \frac{1}{\lambda_i + \sum\limits_{l \neq i} \mu_l} \Big(1 + \sum_{l \neq i} \mu_l M\delta_{il}\Big),$$

$$M\delta_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + 2 \sum\limits_{l \neq i, j} \mu_l} \Big(2 + \lambda_i M\delta_j + \lambda_j M\delta_i + \sum_{r \neq i, j} \mu_r M\delta_{ijr}\Big),$$

$$M\delta_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} + k \sum\limits_{l \neq i_1, \dots, i_k} \mu_l} \Big(k + \sum_{r=1}^{k} \lambda_{i_r} M\delta_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k} + \sum_{s \neq i_1 \dots, i_k} k\mu_s M\delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_k i'_{k+1}}\Big),$$

ahol $i'_1, i'_2, \dots, i'_{k+1}$ az $i_1, i_2, \dots, i_k, s$ egészek nagyság szerinti rendezése;

$$M\delta_{12\dots n} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}} \Big(n + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r M\delta_{12 \dots r-1, r+1 \dots n}\Big).$$

Ez az egyenletrendszer $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^n = 2^n - 1$ ismeretlenes lineáris inhomogén egyenletrendszer, melynek megoldásakor előnyös figyelembe venni az alábbi észrevételt.

Legyen tetszőleges $1 \leqq k \leqq n$-re $\mathbf{Y}^{(k)} C_k^n$-dimenziós vektor, melynek komponensei az $1, 2, \dots, n$ számok k-ad osztályú lexikografikusan rendezett $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ kombinációihoz tartozó $M\delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ várható értékek. Például:

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} M\delta_1 \\ M\delta_2 \\ \vdots \\ M\delta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} M\delta_{12} \\ M\delta_{13} \\ \vdots \\ M\delta_{n-1, n} \end{pmatrix}.$$

Ekkor egyenletrendszerünk a következő rekurzív összefüggésekbe megy át:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(1)} &= \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}^{(2)} + \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{Y}^{(2)} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}^{(1)} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}^{(3)} + \mathbf{C}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{Y}^{(k)} &= \mathbf{A}_k \mathbf{Y}^{(k-1)} + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}^{(k+1)} + \mathbf{C}_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{Y}^{(n)} &= \mathbf{A}_n \mathbf{Y}^{(n-1)} + \mathbf{C}_n. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{B}_k$ $C_k^n \times C_{k-1}^n$ ill. $C_k^n \times C_{k+1}^n$-es mátrixok, a $\mathbf{C}_k$-k $\binom{n}{k}$ dimenziójú vektorok, melyek elemeinek képzési algoritmusa könnyen megállapítható a felírt egyenletrendszerből.

Ha most

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{A}_n, \quad \mathbf{D}_n = \mathbf{C}_n;$$

és $2 \leqq i < n$-re

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_{i+1})^{-1} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{D}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_{i+1})^{-1} (\mathbf{B}_i \mathbf{D}_{i+1} + \mathbf{C}_i),$$

akkor sorozatos behelyettesítések után kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{D}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_1 \mathbf{F}_2)^{-1} (\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 + \mathbf{C}_1).$$

Ezek után a CPU foglaltsági periódushosszának várható értéke a „*processor sharing*" modellre

$$M\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_1 + \ldots + \mu_n} M\delta_i.$$

Annak érzékeltetésére, hogy mennyire előnyös a fenti rekurzív szerkezet megjegyezzük, hogy $n=7$ esetén az eredeti egyenletrendszer mátrixának és a jobboldali konstansok tárolására 16511 terjedelmű számológépi memória szükséges, míg a vázolt rekurzív eljárással az $M\delta_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ várható értékek kiszámítása ügyes programszervezéssel csupán 4970 terjedelmű adatmező lefoglalását teszi szükségessé.

Mielőtt ismertetnénk néhány numerikus eredményt a „*processor sharing*" modellre, megjegyezzük az alábbiakat. Láttuk, hogy a ciklikus programkiszolgálás esetén a CPU egy foglaltsági periódusa alatt a váltásokra fordított összidő várható értéke

$$M\gamma = M\delta^{(c)} \frac{\Delta}{MZ},$$

ahol most $\delta^{(c)}$-vel jelöltük a megfelelő periódushosszt. Következésképpen a CPU, egy foglaltsági periódusa alatt átlagosan

$$m(\Delta, q) = M\delta^{(c)} \frac{MZ - \Delta}{MZ}$$

időtartamot fordít a programok számolási igényeinek kielégítésére. Elég egyszerű belátni, hogy $m(0, q)$ q-tól független, és hogy homogén programokra

$$M\delta = m(0, q),$$

ahol most $M\delta$ a CPU foglaltsági periódushossz várható értéke „*processor sharing*" esetre vonatkozóan. Éppen ez a körülmény sugalja, hogy a ciklikus programkiszolgálás esetén elég nehezen számolható $M\delta^{(c)}$ értéket az

$$(3.1) \qquad M\delta^{(c)} \sim m(0, q) \frac{MZ}{MZ - \Delta} = M\delta \frac{MZ}{MZ - \Delta}$$

formulával közelítsük.

3. táblázat

Átlagos CPU foglaltsági periódushossz				
$\lambda=\mu=0{,}005,\ \Delta=10$				
ciklikus kiszolgálásra			a (3.1) formula alapján	a *"processor sharing"* esetben
$q=110$	$n=2$	487	451	400
	$n=3$	1379	1127	1000
	$n=5$	26 809	14 652	13 000
$n=3$	$q=60$	1666	1226	1000
	$q=160$	1298	1095	1000
	$q=210$	1262	1075	1000

Az alábbi táblázat inhomogén jobokra vonatkozó eredményeket tartalmaz a „*processor sharing*" és a következő pontban tárgyalásra kerülő FIFO kiszolgálási szkéma esetén.

4. táblázat

Átlagos CPU foglaltsági periódushossz			
		„processor sharing"	FIFO
$n=3$	$\lambda_1=0{,}009$ $\mu_1=0{,}005$ $\lambda_2=0{,}007$ $\mu_2=0{,}003$ $\lambda_3=0{,}005$ $\mu_3=0{,}002$	321,90	314,22
$n=3$	$\lambda_i=0{,}007$ $\mu_i=0{,}003$ $i=1, 2, 3$	343,43	343,43
$n=5$	$\lambda_1=0{,}009$ $\mu_1=0{,}005$ $\lambda_2=0{,}008$ $\mu_2=0{,}004$ $\lambda_3=0{,}007$ $\mu_3=0{,}003$ $\lambda_4=0{,}006$ $\mu_4=0{,}002$ $\lambda_5=0{,}005$ $\mu_5=0{,}001$	832,20	788,00
$n=5$	$\lambda_i=0{,}007$ $\mu_i=0{,}003$ $i=1, 2, 3, 4, 5$	1088,18	1088,18

A 4. táblázat 2-es és 4-es rekeszével az volt a célunk, hogy megnézzük, mennyire változik a CPU foglaltsága, ha inhomogén jobok helyett homogén jobokat tekintünk, melyek közös paramétere az inhomogén jobok paramétereinek számtani közepe. Amint látjuk, eltérés mutatkozik, de ez a tekintett esetekben nem tekintélyes. Nyitott továbbra is a kérdés, hogy megadható-e bármely inhomogén job n-eshez olyan homogén job n-es, amelyre a CPU kihasználtság az inhomogénével azonos.

4. Az érkezési sorrend szerinti kiszolgálás tetszőleges program n-esre

A [2] dolgozatban 3 programra tárgyaltuk az ún. FIFO kiszolgálási sorrendet, mely azt jelenti, hogy a CPU lefoglalására annak a jobnak van elsőbbsége, amelynek a legutolsó I/O szakasza a legkorábban fejeződött be. Említettük, hogy tetszőleges jobszámra a helyzet igen bonyolultnak tűnik. Itt is észrevehetünk azonban az előző pontban említettekhez hasonló rekurzív szerkezeteket, mely által a bonyolultság valamivel csökken és mérsékelt n-ekre (jobszám) lehetővé válik a CPU kihasználtság számológépi meghatározása.

Legyen tehát a multiprogramozásban együtt futó jobok száma n. Tegyük fel, hogy a programok CPU és I/O idejei exponenciális eloszlásúak, az i-edik jobra $(i1, 2, \ldots, n)$ λ_i ill. μ_i paraméterrel. A programok CPU igényeinek kiszolgálása történjen a FIFO elv (az I/O berendezésekről való visszaérkezések sorrendje) szerint. A CPU egy foglaltsági periódusának hosszát most jelöljük δ^*-gal Értelmezzük a következő periódushosszakat. Tetszőleges $1 \leqq k \leqq n$-re, és az $1, 2, \ldots, n$ elemeknek tetszőleges k-adosztályú $i_1, i_2, \ldots, i_k$ variációjára legyen $\delta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ a CPU olyan foglaltsági időtartamának hossza, amelynek kezdetén az i_1-edik program foglalja le a CPU-t miközben már az $i_2, i_3, \ldots, i_k$ programok is számolási (CPU) fázisban vannak, s felsorolásuk az I/O berendezésekről való visszaérkezésük sorrendjének felel meg. A korábbi [2]-ben, ill. az előző pontban alkalmazott meggondolásokkal az $M\delta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ várható értékekre az alábbi egyenletrendszert nyerjük:

$$M\delta^*_i = \frac{1}{\lambda_i + \sum\limits_{l \neq i} \mu_l}\Big(1 + \sum_{r \neq i} \mu_r M\delta^*_{ir}\Big),$$

$$M\delta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{ij} + \sum\limits_{l \neq i_1, \ldots, i_k} \mu_l}\Big(1 + \lambda_{i_1} M\delta^*_{i_2 \ldots i_k} + \sum_{r \neq i_1, \ldots, i_k} \mu_r M\delta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k r}\Big),$$

$$M\delta^*_{12 \ldots n} = \frac{1}{\lambda_{i_1}} + M\delta^*_{i_2 i_3 \ldots i_n}.$$

Egyenletrendszerünk most $\sum\limits_{k=1}^{n} V_k^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k!$ ismeretlent (s ugyanennyi egyenletet) tartalmaz. Ha, az előző ponthoz hasonlóan, bevezetjük tetszőleges $1 \leqq k \leqq n$-re a $\mathbf{Z}^{(k)}$ V_k^n-dimenziós vektort, melynek komponensei az $1, 2, \ldots, n$ számok k-ad osztályú lexikografikusan rendezett $i_1, i_2, \ldots, i_k$ variációihoz tartozó $M\delta^*_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ várható értékek, akkor egyenletrendszerünk az alábbi rekurzív összefüggésekbe megy át;

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{B}_1 \mathbf{Z}^{(2)} + \mathbf{C}_1,$$

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{A}_2 \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Z}^{(3)} + \mathbf{C}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{A}_k \mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{B}_k \mathbf{Z}^{(k+1)} + \mathbf{C}_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \mathbf{A}_n \mathbf{Z}^{(n-1)} + \mathbf{C}_n.$$

Most $\mathbf{A}_k$ $V_k^n \times V_{k-1}^n$-es, $\mathbf{B}_k$ $V_k^n \times V_{k+1}^n$-es mátrixok, $\mathbf{C}_k$ V_k^n dimenziójú vektor, melyek elemei könnyen kiolvashatók a felírt egyenletrendszerből. A $\mathbf{Z}^{(1)}$ vektor elemei az előző pont $\mathbf{Y}^{(1)}$-éhez hasonlóan, sorozatos, behelyettesítések után nyerhetők, minekután a CPU foglaltsági periódushosszának várható értéke a FIFO kiszolgálás esetén

$$M\delta^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\mu_1+\ldots+\mu_k} M\delta_k^*.$$

Az $\mathbf{A}_k$ ill. a $\mathbf{B}_k$ mátrixok terjedelme most lényegesen gyorsabban növekszik n-nel mint a „*processor sharing*" esetben. A legnagyobb, $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_{n-1})$ mátrixok terjedelme $n((n-1)!)^2$. Az $\mathbf{A}_k$ ill. a $\mathbf{B}_k$ mátrixok elég ritkák. Az $\mathbf{A}_k$ mátrix mindegyik sorában csak egy elem, a $\mathbf{B}_k$ mátrixában $n-k$ elem különbözik zérustól. Ügyes programszervezéssel ezek a sajátságok kihasználhatók, s így pl. $n=5$ esetén egy 80 CORE (1 CORE=512 szó) operatív memóriájú gépen az $M\delta^*$ várható érték kiszámítható.

Végül megemlítjük, hogy mind az ezen, mind a [2] dolgozatban tárgyalt algoritmusok számológépi programjai ALGOL nyelven készültek, s melyeket a szerző készséggel bocsájt az érdeklődők rendelkezésére. A programozási munkákban az MTA SZTAKI-ban töltött termelési gyakorlatuk alatt részt vettek a *Kossuth Lajos Tudományegyetem* matematikus hallgatói NAGY MAGDOLNA és NYILÁNSZKI MIHÁLY. Közreműködésükért ezúton is szeretném köszönetemet kifejezni.

IRODALOM

[1] BHAT, U. N. AND NANCE, R. E., "Busy period analysis of a time sharing system modeled as a *semi-Markov process*", *JACM* **18** (1971) 221—238.

[2] TOMKÓ, J., „Számológépek központi egységének kihasználtságáról, I.", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **1** (1975) 319—331.

[3] TOMKÓ, J., "Processor utilization study", *Comp. and Maths. with Appl.* **1** (1975) 337—344.

[4] Королюк, В. С. и Турбин, А. Ф. *Полумарковские процессы и их приложения* (Издательство „Наукова думка," Куев, 1976).

[5] Королюк, В. С. и Турбин, А, Ф. «Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний», *Теория вероятностей и математическая статистика*, **2** (1970) 133—143.

(Beérkezett: 1977. október 19.)

TOMKÓ JÓZSEF
KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, POSTAFIÓK 12.
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

CPU UTILIZATION STUDY, II

J. TOMKÓ

As a continuation of [4] the paper deals with the CPU utilization for time sharing, processor sharing and FIFO systems. The procedures for the expected CPU busy period length are extended for arbitrary number of jobs and some questions of approximation and comparison are discussed.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 97—104

GENERATÍV GRAMMATIKAFORMÁK ÉS OPERÁTOROK

CSUHAJ VARJÚ ERZSÉBET
Debrecen

A grammatikaforma fogalmát 1975-ben vezették be a grammatikai hasonlóság elméletének tanulmányozása céljából. A dolgozatban folytatjuk az [1]-ben és a [2]-ben megkezdett vizsgálatokat. Az [1]-ben bevezetett interpretáció fogalmának általánosításaként definiálunk egy ún. interpretáció operátort és speciális változatait; a k-korlátos interpretáció operátort és a k-szoros bővítési operátort, valamint tételeket mondunk ki tulajdonságaikról. A dolgozat fő eredménye annak igazolása, hogy a k-korlátos interpretáció operátorok halmaza félgyűrű álltalánosított értelemben.

1. Bevezetés

A grammatikaforma fogalmát S. GINSBURG és A. CREMERS definiálta 1975-ben strukturálisan hasonló grammatikák tulajdonságainak tanulmányozása céljából [1]. A grammatikaforma egy generatív grammatika, amelyből egy interpretáció mechanizmus alkalmazásával generatív grammatikák, ún. interpretációk halmazát nyerjük. Az interpretáció szabályhalmaza a grammatikaforma néhány szabályából származó halmaz, amelyet úgy hozunk létre, hogy a grammatikaforma tekintett szabályaiban a nemterminálisokat egy rögzített, végtelen halmazból — „az új nemterminálisok halmazából" — vett elemekre, a terminálisokat pedig egy rögzített, végtelen, az előzővel diszjunkt halmaz — „az új terminálisok halmaza" — elemeiből képzett véges sorozatokra cseréljük. Az interpretáció előállításakor felhasználható új terminálisok és új nemterminálisok száma véges.

Az interpretációk halmazának vizsgálatakor érdekes eredményekre jutunk, ha korlátosnak tekintjük az interpretációk létrehozása során felhasználható új nemterminálisok számát. Ez a gondolat RÉVÉSZ GYÖRGYnek S. GINSBURG-gel folytatott beszélgetésekor merült fel.

A dolgozat második része általánosítva ismerteti az [1]-ben és a [2]-ben bevezetett alapfogalmakat. (GINSBURG a környezetfüggetlen grammatikaformát definiálta.)

A harmadik részben — kihasználva az interpretáció leképezés jellegét —, a grammatikaformák interpretáció halmazainak jellemzésére bevezetünk egy ún. interpretáció operátort és egy speciális változatát, a pszeudo-izomorfia operátort. A két operátorról többek között megmutatjuk, hogy egymással felcserélhető és idempotens.

A dolgozat negyedik részében definiáljuk a k-korlátos interpretációt, a k-korlátos interpretáció operátort és egy speciális változatukat, a k-szoros bővítést és a k-szoros bővítési operátort. Különböző tételeket mondunk ki a négy operátor kapcsolatáról, és igazoljuk, hogy a bővítési operátorok kompozícióra mint szorzásra tekintett félcsoportja izomorf a természetes számok multiplikatív félcsoportjával. A dolgozat fő eredménye annak bizonyítása, hogy a korlátos interpretáció operátorok halmaza egy rögzített grammatikaforma halmaz felett félgyűrű általánosított értelemben.

2. Alapfogalmak

2.1. DEFINÍCIÓ. A $G=(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \sigma)$ négyest generatív grammatikának (grammatikának) nevezzük, ha teljesülnek a következők:

(i) $\mathcal{S}$ nem üres, véges halmaz.

(ii) $\mathcal{V}$ véges halmaz és $\mathcal{S}\subset\mathcal{V}$. ($\mathcal{S}$ elemeit terminálisoknak, $(\mathcal{V}-\mathcal{S})$ elemeit nemterminálisoknak mondjuk.)

(iii) $\mathcal{P}\subseteq\{u\to v|u\in\mathcal{V}^+-\mathcal{S}^+,\ v\in\mathcal{V}^*\}$[1, 2] és $\mathcal{P}$ véges halmaz.

(iv) $\sigma\in(\mathcal{V}-\mathcal{S})$. ($\mathcal{P}$ elemeit szabályoknak, σ-t kezdőjelnek hívjuk.)

2.2. DEFINÍCIÓ. Az $F=(V, \Sigma, \mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \sigma)$ hatost generatív grammatikaformának (grammatikaformának) nevezzük, ha teljesülnek a következők:

(i) $G_F=(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \sigma)$ generatív grammatika.

(ii) Σ végtelen halmaz és $\mathcal{S}\subset\Sigma$.

(iii) $\Sigma\subset V$, $(V-\Sigma)$ végtelen halmaz és $(\mathcal{V}-\mathcal{S})\subset(V-\Sigma)$.

A továbbiakban Σ és V olyan rögzített végtelen halmazok, hogy $\Sigma\subset V$ és $(V-\Sigma)$ végtelen.

2.3. DEFINÍCIÓ.

$$\mathcal{F}=\{F|F=(V, \Sigma, \mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \sigma) \text{ generatív grammatikaforma}\}.$$

2.4. DEFINÍCIÓ. Az $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')$ generatív grammatikaformát az $F=(V, \Sigma, \mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \sigma)$ generatív grammatikaforma interpretációjának nevezzük, ha van olyan μ véges helyettesítés[3] $\mathcal{V}^*$-on, hogy teljesülnek a következők:

(i) $\mu(a)\subset\Sigma'^*$ minden $a\in\mathcal{S}$-re.

(ii) $\mu(\xi)\subseteq(V'-\Sigma')$ minden $\xi\in(\mathcal{V}-\mathcal{S})$-re, $\mu(\xi)\cap\mu(\eta)=\emptyset$, ha $\xi, \eta\in(\mathcal{V}-\mathcal{S})$ és $\xi\neq\eta$.

(iii) $P'\subseteq\mu(\mathcal{P})=\{u\to v|u\in\mu(\alpha),\ v\in\mu(\beta),\ \alpha\to\beta\in\mathcal{P}\}$.

(iv) $S'\in\mu(\sigma)$.

A μ-t az F egy F'-höz tartozó interpretáció-helyettesítésének nevezzük.

2.5. DEFINÍCIÓ.

Az $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')$ és az $F''=(V, \Sigma, V'', \Sigma'', P'', S'')$ generatív grammatikaformákat pszeudo-izomorfaknak nevezzük, ha van olyan $(\mu, \tilde{\mu})$ leképezéspár, amelyre teljesülnek a következők:

(i) μ kölcsönösen egyértelmű leképezése $(V'-\Sigma')$-nek $(V''-\Sigma'')$-re, és $\mu(S')=$ $=S''$.

[1] Egy V nem üres, véges halmaz elemeiből képzett véges nem üres sorozatok halmazát V^+-szal jelöljük. Az üres sorozatot ε-nal jelöljük.

[2] $V^*=V^+\cup\{\varepsilon\}$.

[3] Legyen Σ véges, nem üres halmaz. Rendeljünk hozzá Σ minden a eleméhez egy Σ_a nem üres véges halmazt. A μ leképezést véges helyettesítésnek mondjuk Σ^*-on, ha μ Σ minden a eleméhez Σ_a^* véges, nem üres részhalmazát rendeli, $\mu(\varepsilon)=\varepsilon$, $\mu(x_1\ldots x_n)=\mu(x_1)\ldots\mu(x_n)$, ha $x_i\in\Sigma$ $(1\leqq i\leqq n)$

(ii) $\bar{\mu}$ olyan kölcsönösen egyértelmű leképezése P'-nek P''-re, hogy minden $\bar{p}=\bar{x}_0\xi_0\bar{x}_1\ldots\xi_{k(p)}\bar{x}_{k(p)+1}\to\bar{x}_{k(p)+2}\ldots\bar{x}_{n(p)+2}\in P'$-re $(\xi_i\in(V'-\Sigma')\,(0\leqq i\leqq n(p))$, $0\leqq k(p)\leqq n(p)$ $\bar{x}_i\in\Sigma'^*(0\leqq i\leqq n(p)+2))$ $\bar{\mu}(p)=\bar{y}_0\eta_0\bar{y}_1\ldots\eta_{k(p)}\bar{y}_{k(p)+1}\to$ $\to\bar{y}_{k(p)+2}\ldots\bar{y}_{n(p)+2}\in P''$ $(\eta_i\in(V''-\Sigma'')$ $(0\leqq i\leqq n(p))$, $\bar{y}_i\in\Sigma''^*(0\leqq i\leqq n(p)+2))$ és $\eta_i=\mu(\xi_i)$ valamint $\bar{y}_i=\varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $\bar{x}_i=\varepsilon$ $(0\leqq i\leqq n(p)+2)$.

3. Interpretáció operátorok

Az interpretáció és a pszeudo-izomorfia fogalmának ismertetése után bevezetjük az interpretáció operátor és a pszeudo-izomorfia operátor fogalmát.

3.1. DEFINÍCIÓ. Az $\mathscr{I}:2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$ leképezést interpretáció operátornak nevezzük, ha bármely $\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}(\mathscr{F}_1)=\{F'|F\in\mathscr{F}_1,\ F'$ interpretációja F-nek$\}$ és $\mathscr{I}(\emptyset)=\emptyset$. A 2.4. és a 3.1. definícióból triviálisan adódik az alábbi lemma:

3.1. LEMMA. Ha $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$ és $\mathscr{F}_1\neq\emptyset$, akkor $\mathscr{I}(\mathscr{F}_1)\neq\emptyset$ és bármely $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2\subseteq\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}(\mathscr{F}_1)\subseteq\mathscr{I}(\mathscr{F}_2)$. Hasonlóan egyszerű megfontolásokkal látható be, hogy $\mathscr{F}$ $\mathscr{I}$ fixpontja, azaz:

3.2. LEMMA.

$$\mathscr{I}(\mathscr{F})=\mathscr{F}.$$

A következő tétel az [1] 1.1. tételének megfelelője.

3.1. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}^2(F)=\mathscr{I}(F)$. [4]

Bizonyítás. Legyen $F=(V,\Sigma,\mathscr{V},\mathscr{S},\mathscr{P},\sigma)\in\mathscr{F}$. Megmutatjuk, hogy bármely $F'\in\mathscr{I}(F)$-re $\mathscr{I}(F')\subseteq\mathscr{I}(F)$. Legyen

$$F'=(V,\Sigma,V',\Sigma',P',S')\in\mathscr{I}(F),\quad F''=(V,\Sigma,V'',\Sigma'',P'',S'')\in\mathscr{I}(F'),$$

és legyen μ az F F'-höz tartozó egy interpretáció-helyettesítése, valamint μ' az F' F''-höz tartozó egy interpretáció-helyettesítése. A $\mu''=\mu'\circ\mu$ [5] leképezés olyan véges helyettesítés $\mathscr{V}^*$-on, hogy $\mu''(a)\subset\Sigma''^*$ minden $a\in\mathscr{S}$-re, $\mu''(\xi)\subseteq(V''-\Sigma'')$ minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re, és ha $\xi,\eta\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$, de $\xi\neq\eta$, akkor $\mu''(\xi)\neq\mu''(\eta)$, valamint $S''\in\mu''(\sigma)$. Megmutatjuk, hogy $P''\subseteq\mu''(\mathscr{P})$. Ha $\alpha\to\beta\in P''$, akkor van olyan $x\to y\in P'$, amelyre $\alpha\to\beta\in\mu'(x\to y)$, másrészt $x\to y$-hoz létezik olyan $u\to v\in\mathscr{P}$, hogy $x\to y\in\mu(u\to v)$, azaz $\alpha\to\beta\in\mu'(\mu(u\to v))$, vagyis $P''\subseteq\mu''(\mathscr{P})$. Tehát μ'' az F egy F''-höz tartozó interpretáció-helyettesítése, azaz $\mathscr{I}(F')\subseteq\mathscr{I}(F)$, vagyis $\mathscr{I}^2(F)\subseteq\mathscr{I}(F)$. Legyen $F'''=(V,\Sigma,V''',\Sigma''',P''',S''')\in\mathscr{I}(F)$. A 2.4. definícióból könnyen látható, hogy $F\in\mathscr{I}(F)$, ezért $F'''\in\mathscr{I}^2(F)$. Így $\mathscr{I}^2(F)=\mathscr{I}(F)$.

3.2. DEFINÍCIÓ. A $PSE:2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$ leképezést pszeudo-izomorfia operátornak nevezzük, ha bármely $\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$-re $PSE(\mathscr{F}_1)=\{F'|F$ és F' pszeudo-izomorfak, $F\in\mathscr{F}_1\}$ és $PSE(\emptyset)=\emptyset$.

A 2.5. definíció közvetlen következménye, hogy $\mathscr{F}$ a PSE operátornak is fixpontja.

[4] Az $\mathscr{I}$ operátort a következőkben kiterjesztjük $\mathscr{F}$ elemeire az alábbi módon: bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}(F)=\mathscr{I}(\{F\})$.

[5] $\mu'\circ\mu$ a μ és a μ' leképezések kompozícióját jelöli: $\mu'\circ\mu(x)=\mu'(\mu(x))$ $x\in\mathscr{V}$-re.

3.3. LEMMA.

$$PSE(\mathscr{F})=\mathscr{F}.$$

A PSE operátor a $\mathscr{I}$ operátorhoz hasonlóan idempotens:

3.4. LEMMA. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $PSE^2(F)=PSE(F)$.[6]

3.5. LEMMA. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $PSE(F)\subset\mathscr{I}(F)$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$. Igazoljuk, hogy ha $F'=$ $=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')\in PSE(F)$, akkor $F'\in\mathscr{I}(F)$. Legyen $(\mu, \tilde{\mu})$ az F és az F' között pszeudo-izomorfiát létesítő leképezéspár, azaz minden $p=\bar{x}_0\xi_0\bar{x}_1\dots\xi_{k(p)}\bar{x}_{k(p)+1}\to$ $\to\bar{x}_{k(p)+2}\dots\bar{x}_{n(p)+2}\in\mathscr{P}$-re, amelyre $\bar{x}_i\in\mathscr{S}^*(0\leqq i\leqq n(p)+2)$, $\xi_i\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$, $(0\leqq i\leqq n_{(p)})$, $0\leqq k(p)\leqq n(p)\,\tilde{\mu}(p)=\bar{y}_0\eta_0\bar{y}_1\dots\eta_{k(p)}\bar{y}_{k(p)+1}\to\bar{y}_{k(p)+2}\dots\bar{y}_{n(p)+2}\in P', y_i\in\Sigma'^*(0\leqq i\leqq n_{(p)}+2)$, $(V'-\Sigma')\ni\eta_i=\mu(\xi_i)\in V'-\Sigma'(0\leqq i\leqq n_{(p)})$ és $\bar{y}_i=\varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $\bar{x}_i=\varepsilon$ $(0\leqq i\leqq n_{(p)}+2)$. Legyen μ' olyan véges helyettesítés $\mathscr{V}^*$-on, amelyre teljesülnek a következők. $\mu'(\xi)=\mu(\xi)$ minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re és minden $a\in\mathscr{S}$-re pedig $\mu'(a)=$ $=\{\varepsilon\}\cup\{u|u\in S'^*, \lg(u)\leqq\max\limits_{p\in\mathscr{P}}\lg(p)\}$. A μ' véges helyettesítés eleget tesz a 2.4. definíció (i) és (ii) feltételének. A 2.4. definíció (iv) feltétele triviálisan teljesül, és könnyen látható, hogy $P'\subseteqq\mu'(\mathscr{P})$. Így μ' az F egy F'-höz tartozó interpretáció-helyettesítése, azaz $PSE(F)\subseteqq\mathscr{I}(F)$. Másrészt, legyen $P_1=\mathscr{P}-\{p\}$, $p\in\mathscr{P}$. Akkor az $F_1=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, P_1, \sigma)$ grammatikaforma eleme $\mathscr{I}(F)$-nek, de a 2.5. definíció (ii) pontja miatt $F_1\notin PSE(F)$.

3.2. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $PSE(\mathscr{I}(F))=\mathscr{I}(PSE(F))$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{I}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$. Megmutatjuk, hogy $PSE(\mathscr{I}(F))=$ $=\mathscr{I}(F)$. $F\in\mathscr{I}(F)$, ha $F\in\mathscr{F}$, így a 3.1. és a 3.5. lemma alapján $PSE(\mathscr{I}(F))\subseteqq\mathscr{I}(F)$. Másrészt, bármely $F\in\mathscr{F}$-re $F\in PSE(F)$, ezért $\mathscr{I}(F)\subseteqq PSE(\mathscr{I}(F))$. Így $PSE(\mathscr{I}(F))=$ $=\mathscr{I}(F)$. Ugyancsak $F\in PSE(F)$, ha $F\in\mathscr{F}$ miatt $\mathscr{I}(F)\subseteqq\mathscr{I}(PSE(F))$. Minthogy a 3.5. lemma alapján $PSE(F)\subseteqq\mathscr{I}(F)$, ha $F\in\mathscr{F}$, így $\mathscr{I}(PSE(F))=\mathscr{I}(F)$.

4. Korlátos interpretáció operátorok

A grammatikaforma interpretáció halmazának további tulajdonságait tárják fel a korlátos interpretáció operátorok.

4.1. DEFINÍCIÓ.

Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)$ generatív grammatikaforma, és legyen $F'=$ $=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')$ F interpretációja. Legyen μ F egy F'-höz tartozó interpretáció-helyettesítése. F'-t k-korlátos interpretációnak nevezzük, ha $\mu(\xi)$ minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re legfeljebb k elemű halmaz.

4.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)$ generatív grammatikaforma, és legyen $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')$ F interpretációja, valamint legyen μ az F egy F'-höz tartozó interpretáció-helyettesítése. F'-t F k-szoros bővítésének nevezzük, ha teljesülnek a következők:

[6] A PSE operátort az $\mathscr{I}$ operátorhoz hasonlóan kiterjesztjük $\mathscr{F}$ elemeire: bármely $F\in\mathscr{F}$-re $PSE(F)=PSE(\{F\})$.

(i) $\mu(a)=a'\in\Sigma'$ minden $a\in\mathscr{S}$-re. Ha $a, b\in\mathscr{S}$ és $a\neq b$, akkor $\mu(a)\neq\mu(b)$, valamint $\Sigma'=\bigcup_{a\in\mathscr{S}}\mu(a)$.

(ii) $\mu(\xi)$ k elemű halmaz minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re és $(V'-\Sigma')=\bigcup_{\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})}\mu(\xi)$.

(iii) $P'=\mu(\mathscr{P})$.

4.3. DEFINÍCIÓ. A $\mathscr{I}_k: 2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$ leképezést k-korlátos interpretáció operátornak nevezzük, ha bármely $\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_k(\mathscr{F}_1)=\{F'|F'$ k-korlátos interpretációja F-nek, $F\in\mathscr{F}_1\}$ és $\mathscr{I}_k(\emptyset)=\emptyset$.
Az alábbi lemmák triviális következményei a 4.3. definíciónak.

4.1. LEMMA.

$\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$ esetén $\mathscr{I}_k(\mathscr{F}_1)\subseteq\mathscr{I}_l(\mathscr{F}_1)$, ha $k\leqq l$.

4.2. LEMMA.

$\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$ esetén $\bigcup_{k=1}^{s}\mathscr{I}_k(\mathscr{F}_1)=\mathscr{I}_s(\mathscr{F}_1)$.

Az $\mathscr{F}$ az $\mathscr{I}_k$ operátornak is fixpontja:

4.3. LEMMA.

$\mathscr{I}_k(\mathscr{F})=\mathscr{F}$ bármely $k\geqq 1$-re.

4.4. LEMMA. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}(F)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{I}_k(F)$.[7] A következő lemma alapvető jelentőségű.

4.5. LEMMA. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_k(F)=\mathscr{I}_1(\mathscr{I}_k(F))$ $(k\geqq 2)$.

Bizonyítás. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $F\in\mathscr{I}_1(F)$, ezért a 4.1. definíció és a 3.2. lemma alapján $\mathscr{I}_k(F)\subseteq\mathscr{I}_1(\mathscr{I}_k(F))$. A fordított irányú tartalmazás triviális következménye a 4.1. definíciónak.

4.4. DEFINÍCIÓ. A $K: 2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$ leképezést k-szoros bővítési operátornak nevezzük, ha bármely $\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$-re $K(\mathscr{F}_1)=\{F'|F'$ k-szoros bővítése F-nek, $F\in\mathscr{F}_1\}$ és $K(\emptyset)=\emptyset$.
A következő lemma a 4.3. és a 4.4. definícióból adódik:

4.6. LEMMA. Bármely $\emptyset\neq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}$-re $K^8(\mathscr{F}_1)\subset\mathscr{I}_k(\mathscr{F}_1)$.

4.1. TÉTEL. Legyen $F\in\mathscr{F}$ és $F'\in K(F)$. Akkor $K(F)\subseteq PSE(F')$.[8]

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$, és legyen $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma'\ P'S')\in$ $\in K(F)$. Legyen μ' az F egy olyan F'-höz tartozó interpretáció-helyettesítése, amely eleget tesz a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételének. Megmutatjuk, hogy ha $F''=$ $=(V, \Sigma, V'', \Sigma'', P'', S'')\in K(F)$, akkor $F''\in PSE(F')$. Legyen az F F''-höz tartozó, a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételének eleget tevő egy interpretáció-helyettesítése μ''. Legyen μ olyan kölcsönösen egyértelmű leképezése $(V'-\Sigma')$-nek $(V''-\Sigma'')$-re, hogy

[7] A $\mathscr{I}_k$ operátort kiterjesztjük $\mathscr{F}$ elemeire a szokásos módon: legyen bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_k(F)=$ $=\mathscr{I}_k(\{F\})$.

[8] A K operátort kiterjesztjük $\mathscr{F}$ elemeire: legyen bármely $F\in\mathscr{F}$-re $K(F)=K(\{F\})$.

ha $\xi\in(V'-\Sigma')$, akkor $\mu(\xi)\in\mu''(\mu'^{-1}(\xi))$ és $\mu(S')=S''$. (μ a k-szoros bővítés definíciója alapján létezik.) Legyen $\bar{\mu}$ olyan véges helyettesítés V'^*-on, amelyre $\bar{\mu}(\xi)=\mu(\xi)$, ha $\xi\in(V'-\Sigma')$, és $\bar{\mu}(a)=\mu''(\mu'^{-1}(a))$, ha $a\in\Sigma'$. Legyen $\tilde{\mu}$ P' olyan leképezése P''-re, hogy $\tilde{\mu}$ minden $p\in P'$-höz $\bar{\mu}(p)\in P''$-t rendeli. (Ha $p=x\to y\in P'$, akkor $x\to y\in\mu'(\alpha\to\beta)$, ahol $\alpha\to\beta\in\mathscr{P}$, és $\bar{\mu}(x\to y)\in\mu''(\alpha\to\beta)\in P''$.) A $\tilde{\mu}$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű a μ és a $\bar{\mu}$ leképezések tulajdonságai alapján. Így a $(\mu, \tilde{\mu})$ leképezéspár pszeudo-izomorfiát létesít F' és F'' között, azaz $K(F)\subseteq PSE(F')$.

4.2. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_n(PSE(F))=PSE(\mathscr{I}_n(F))$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$, és legyen $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')\in PSE(F)$. A 3.5. lemma alapján $F'\in\mathscr{I}(F)$, és a lemma bizonyításából az is látszik, hogy $F'\in\mathscr{I}_1(F)$. A szimmetria miatt $F\in\mathscr{I}_1(F')$ is fennáll. Akkor $\mathscr{I}_1(F')=\mathscr{I}_1(F)$, és a 4.5. lemma szerint $\mathscr{I}_n(F')=\mathscr{I}_n(F)$. Így $\mathscr{I}_n(PSE(F))=\mathscr{I}_n(F)$. Másrészt, $\mathscr{I}_n(F)\subseteq PSE(\mathscr{I}_n(F))$, mivel bármely $F\in\mathscr{F}$-re $F\in PSE(F)$, és a 3.5. lemma bizonyítása szerint $PSE(\mathscr{I}_n(F))\subseteq\mathscr{I}_n(F)$. Vagyis $\mathscr{I}_n(PSE(F))=\mathscr{I}_n(F)=PSE(\mathscr{I}_n(F))$.

4.3. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_k(F)=\mathscr{I}_1(K(F))$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$. A 3.1. tétel és a 4.1. valamint a 4.2. definíció alapján $\mathscr{I}_1(K(F))\subseteq\mathscr{I}_k(F)$. Megmutatjuk a fordított irányú tartalmazást. Legyen $F_I=(V, \Sigma, V_I, \Sigma_I, P_I, S_I)\in\mathscr{I}_k(F)$, és legyen μ az F egy F_I -hez tartozó interpretáció-helyettesítése. Legyen $F''=(V, \Sigma, V'', \mathscr{S}, P'', S_I)\in K(F)$, és teljesüljenek a μ'' F egy F''-höz tartozó, a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek eleget tevő interpretáció-helyettesítésére a következők: $\mu(\xi)\subseteq\mu''(\xi)$ minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re, $\mu(a)=a$ minden $a\in\mathscr{S}$-re. Ha $\bar{\mu}$ olyan véges helyettesítés V''^*-on, hogy $\bar{\mu}(\xi)=\xi$ minden $\xi\in(V''-\mathscr{S})$-re és $\bar{\mu}(a)=\mu(a)$ minden $a\in\mathscr{S}$-re, akkor $P_I\subseteq\bar{\mu}(P'')$, és így $\bar{\mu}$ az F'' egy F_I-hez tartozó interpretáció-helyettesítése, vagyis $F_I\in\mathscr{I}_1(F'')$.

4.4. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $MN(F)=M(N(F))$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$, és legyen $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')\in MN(F)$. Legyen μ' az F egy F'-höz tartozó olyan interpretáció-helyettesítése, amely eleget tesz a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $F''=(V, \Sigma, V'', \Sigma'', P'', S'')\in N(F)$, hogy $F'\in M(F'')$. Legyen $F''=(V, \Sigma, V'', \mathscr{S}, P'', S')\in N(F)$, és legyen a μ'', az F egy F''-höz tartozó, a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek eleget tevő interpretáció-helyettesítése olyan, hogy $\mu''(\xi)\subset\mu'(\xi)$ minden $\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})$-re, $S'\in\mu''(\sigma)$ és minden $a\in\mathscr{S}$-re $\mu''(a)=a$. Megmutatjuk, hogy $F'\in M(F'')$. Legyen $\bar{F}=(V, \Sigma, \bar{V}, \Sigma', \bar{P}, S')\in M(F'')$, és teljesüljenek a $\bar{\mu}$, egy az F'' $\bar{F}'$-hez tartozó, a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek eleget tevő interpretáció-helyettesítésre a következők. $\bar{\mu}(\xi)\subset\mu'(\mu''^{-1}(\xi))$ minden $\xi\in(V''-\mathscr{S})$-re, $S'\in\bar{\mu}(S')$ és $\bar{\mu}(a)=\mu'(a)$ minden $a\in\mathscr{I}$-re. Látható, hogy $(\bar{V}-\Sigma')=\bigcup_{\xi\in(\mathscr{V}-\mathscr{S})}\bar{\mu}(\xi)=(V'-\Sigma')$. A $\bar{\mu}\circ\mu''$ véges helyettesítés F egy $\bar{F}$-hez tartozó, interpretáció-helyettesítése. Mivel teljesülnek a 4.2. definíció megfelelő feltételei, ezért $\bar{F}\in MN(F)$. Minthogy $\bar{P}=P'$, ezért $\bar{F}'=F$. A tétel állításának igazolásához meg kell még mutatni, hogy ha $F'=(V, \Sigma, V', \Sigma', P', S')\in N(F)$, és $F''=(V, \Sigma, V'', \Sigma'', P'', S'')\in M(F')$, akkor $F''\in MN(F)$. Legyen μ' az F egy F'-höz μ'' az F' egy F''-höz tartozó, a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek eleget tevő interpretáció-helyettesítése. Akkor a $\mu''\circ\mu'$ véges helyettesítés F egy F''-höz tartozó interpretáció-helyettesítése. A 3.1. tétel és a 4.1. definíció alapján $F''\in\mathscr{I}_{mn}(F)$. A $\mu''\circ\mu'$ véges helyettesítés azonban eleget tesz a 4.2. definíció (i) és (ii) feltételeinek, $P'=\mu'(\mathscr{P})$, $P''=\mu''(P')$, ezért $P''=\mu''(\mu'(\mathscr{P}))$, azaz teljesül a 4.2. definíció (iii) feltétele, is vagyis $F''\in MN(F)$.

4.5. TÉTEL. Bármely $F\in\mathscr{F}$-re $\mathscr{I}_{mn}(F)=\mathscr{I}_m(\mathscr{I}_n(F))$.

Bizonyítás. Legyen $F=(V, \Sigma, \mathscr{V}, \mathscr{S}, \mathscr{P}, \sigma)\in\mathscr{F}$. A 3.1. tétel és a 4.1. definíció alapján $\mathscr{I}_m(\mathscr{I}_n(F))\subseteq\mathscr{I}_{mn}(F)$. Megmutatjuk, hogy $\mathscr{I}_{mn}(F)\subseteq\mathscr{I}_m(\mathscr{I}_n(F))$. A 4.3. tétel. szerint $\mathscr{I}_{mn}(F)=\mathscr{I}_1(F')$, ahol $F'\in MN(F)$, és a 4.4. tétel következtében $F'\in M(N(F))$, azaz $F'\in\mathscr{I}_m(\mathscr{I}_n(F))$. Így a 4.5. lemma alapján $\mathscr{I}_{mn}(F)=\mathscr{I}_1(\mathrm{M}(\mathrm{N}(F)))=\mathscr{I}_m(\mathrm{N}(F))=$ $=\mathscr{I}_m\mathscr{I}_1(\mathrm{N}(F))=\mathscr{I}_{mn}(F)$. Az alábbi állítások a 4.4. és a 4.5. tételek következményei:

4.5. DEFINÍCIÓ.

$\tilde{\mathscr{I}}=\{\mathscr{I}_k|\mathscr{I}_k:2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$, $\mathscr{I}_k$ k-korlátos interpretáció operátor, $k=1, 2, \ldots\}$

$\mathscr{B}=\{K|K:2^{\mathscr{F}}\to 2^{\mathscr{F}}$, K k-szoros bővítési operátor, $k=1, 2, \ldots\}$

4.6. TÉTEL. $\mathscr{B}$ a természetes számok multiplikatív félcsoportjával izomorf félcsoport.

Bizonyítás. A 4.4. tétel alapján könnyen belátható, hogy $\mathscr{B}$ a kompozíció műveletére nézve félcsoport. A $\varphi:K\to k$ (k természetes szám) hozzárendelés pedig izomorfizmus, hisz φ egyértelmű és $\varphi(KL)=\varphi(K)\varphi(L)$ teljesül.

4.6. DEFINÍCIÓ:

Legyen $\mathscr{R}$ nem üres halmaz. $\mathscr{R}$-t általánosított értelemben félgyűrűnek nevezzük, ha $\mathscr{R}$-en értelmezve van két $\cdot$, $+$ kétváltozós művelet, amelyekre nézve $\mathscr{R}$ félcsoport és bármely $a, b, c\in\mathscr{R}$-re $(a+b)c=ab+ac$ és $c(a+b)=ca+cb$ teljesül.

4.7. TÉTEL. $\tilde{\mathscr{I}}$ félgyűrű általánosított értelemben.

Bizonyítás. A 4.5. tétel alapján könnyű belátni, hogy $\tilde{\mathscr{I}}$ a kompozícióra nézve félcsoport. Értelmezzük $\tilde{\mathscr{I}}$-n a következő műveletet. Bármely $\mathscr{I}_k$ és $\mathscr{I}_l\in\tilde{\mathscr{I}}$-re legyen $\mathscr{I}_k\cup\mathscr{I}_l=\mathscr{I}_l$, hacsak $k\leqq l$. Könnyű belátni, hogy a művelet asszociatív, hisz bármely k, l, m-re $(\mathscr{I}_k\cup\mathscr{I}_l)\cup\mathscr{I}_m=\mathscr{I}_k\cup(\mathscr{I}_l\cup\mathscr{I}_m)=\mathscr{I}_{\max(k,l,m)}$. Az $\tilde{\mathscr{I}}$ a kompozícióra nézve félcsoport. Teljesülnek továbbá a disztributivitási törvények is:

$$(\mathscr{I}_k\cup\mathscr{I}_l)\mathscr{I}_m(\mathscr{F}_1)=(\mathscr{I}_k\mathscr{I}_m\cup\mathscr{I}_l\mathscr{I}_m)(\mathscr{F}_1),\ \mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F},\ \text{és}$$

$$\mathscr{I}_m(\mathscr{I}_k\cup\mathscr{I}_l)(\mathscr{F}_1)=(\mathscr{I}_m\mathscr{I}_k\cup\mathscr{I}_m\mathscr{I}_l)(\mathscr{F}_1),\ \mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}.$$

Megjegyzés. A szerző köszönetet mond RÉVÉSZ GYÖRGYnek az értékes ötletért.

IRODALOM

[1] CREMERS, A., "Context-free grammar forms", *Journal of Computer and System Sciences* **11** (1975) 86—117.

[2] GINSBURG, S., "On strongly equivalent context-free grammar forms", *Forschungsberichte der Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Informatik und Formale Beschreibungsverfahren, Bericht* **27** (1974).

(Beérkezett: 1977. május 31.)

CSUHAJ VARJÚ ERZSÉBET
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM ÁLTALÁNOS NYELVÉSZETI TANSZÉK
4010 DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.

GENERATIVE GRAMMAR FORMS AND OPERATORS

E. CSUHAJ VARJÚ

The notion of a grammar form was introduced in 1975 in order to study the theory of grammatical similarity. The present paper continues the investigations begun in [1, 2] with introducing the notion of interpretation operator and its special varieties. We define the notion of operator of k-bounded interpretations and that of operator forming k-th enelargements of a grammar form. Some theorems are given on the properties of these operators. The main claim of the paper is that the set of operators of bounded interpretations is semiring in a generalized sense.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 105—110*

AZ OLIGOPOL JÁTÉK r-EGYENSÚLY-PROBLÉMÁJA

SZIDAROVSZKY FERENC

Budapest

A [4] dolgozatban a *Nash-féle egyensúlypont* érdekes általánosítása szerepel. Dolgozatunkban az oligopol problémára vizsgáljuk meg az ott definiált általánosított egyensúlypont létezését és egyértelműségét, valamint megkeresési módszerét.

1. Bevezetés

Jelöljön G egy n személyes játékot, $k=1, 2, \ldots, n$ esetén X_k jelölje a k-adik játékos stratégiahalmazát, φ_k pedig kifizetőfüggvényét. A játékosok szimultán stratégiahalmazát jelöljük az

$$X \subset \mathop{\times}_{k=1}^{n} X_k \tag{1.1}$$

halmazzal.

1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X$ pont r-egyensúlypontja ($1 \leqq r \leqq n$) a G játéknak, hogyha tetszőleges $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n$ indexek és tetszőleges

$$\mathbf{x} = (x_1^*, \ldots, x_{i_1-1}^*, x_{i_1}, x_{i_1+1}^*, \ldots, x_{i_r-1}^*, x_{i_r}, x_{i_r+1}^*, \ldots, x_n^*) \in X$$

vektor mellett

$$\sum_{j=1}^{r} \varphi_{i_j}(\mathbf{x}^*) \geqq \sum_{j=1}^{r} \varphi_{i_j}(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

Az egyensúlypont szemléletes tartalma a következő. Bármilyen r tagú koalíció is alakul a játékosok közül, a koalíciónak mindig érdeke betartani az r-egyensúlypontnak megfelelő stratégiákat, feltéve természetesen, hogy a koalícióba nem tartozó játékosok az r-egyensúlypontnak megfelelő stratégiákat játszák. Természetesen azok a stratégia n-esek különleges fontosságúak, amelyek minden r értékre r-egyensúlypontot adnak, ezek létezésének vizsgálata is szükségessé teszi a rögzített r értékek melletti r-egyensúlypontok létezésének és tulajdonságainak a tárgyalását. Nyilvánvaló, hogy az 1.1. definíció az $r=1$ esetben a *Nash-féle egyensúlypontot* adja, így az r-egyensúlyprobléma a *Nash-féle koncepció* általánosítása.

2. Egzisztencia és unicitás tétel

Az oligopol játék az egyik legismertebb gazdasági játék, közgazdasági tartalma a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy n termelő egység ugyanazt a terméket gyártja, és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje f az árfüggvényt, $k=1, \ldots$ $\ldots, n$ esetén K_k a k-adik termelő költségfüggvényét, x_k pedig az általa termelt áru mennyiségét. Ekkor a k-adik játékos kifizető függvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - K_k(x_k). \tag{2.1}$$

Az oligopol játék egyensúlypontjának létezésére először E. BURGER ([1]) adott feltételt. Az f és K_k függvényekre tett alkalmas deriválási, monotonitási és konvexitási feltételeken kívül a K_k függvények azonosságát feltételezte. E legutóbbi feltételét elengedve sikerült az egyensúlypont egyértelműségét és létezését konstruktív úton belátnom ([5]). Velem egyidőben O. OPITZ ([2]) is foglalkozott az egyensúlypont egyértelműségével, viszont eljárást nem sikerült adnia az egyensúlypont megtalálására. A [6] értekezésemben az [5] dolgozat módszereit sikerült általánosítanom arra az esetre, amikor a játékosok diszjunkt csoportokat alkotnak, és ezek a csoportok veszik át a játékosok szerepét.

Az így adódó ún. csoportegyensúlypont létezését és egyértelműségét láttam be lényegében az [5] dolgozat feltételei mellett, és ugyanakkor numerikus eljárást is sikerült adnom a csoportegyensúly megtalálására. Abban a speciális esetben, amikor valamennyi játékos külön játszik, az 1-egyensúlypontot (azaz a *Nash-féle egyensúlypontot*), amikor pedig a játékosok egyetlen csoportba tömörülnek, az n-egyensúlypontot kapjuk meg, mint a csoportegyensúlypont speciális esetét. A fenti eredményeket a [7] dolgozatban jóval általánosabb feltételek mellett is sikerült bebizonyítanom.

Jelen dolgozatban a [7] tanulmány feltételei mellett vizsgáljuk meg az oligopol játék r-egyensúlypontjainak létezését, egyértelműségét és megtalálásának módját.

Tegyük fel tehát az alábbiakat:

a) $k=1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k \in [0, L_k]$, ahol az L_k számok pozitív állandók.

b) Létezik olyan $\xi > 0$ szám, hogy $x \geqq \xi$ esetén $f(x)=0$.

c) $0 \leqq x \leqq \xi$ esetén f differenciálható, konkáv és szigorúan csökkenő.

d) $0 \leqq x_k \leqq L_k$ és $k=1, 2, \ldots, n$ esetén K_k folytonos, konvex és szigorúan nő.

2.1. LEMMA. Ha $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ r-egyensúlypont, akkor $\sum_{k=1}^{n} x_k^* \leqq \xi$.

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\sum_{k=1}^{n} x_k^* > \xi$. Ekkor valamelyik x_k^* szám pozitív. Tegyük fel, hogy $x_1^* > 0$. Ekkor létezik olyan $x_1 > 0$ szám, hogy $x_1 < x_1^*$ és $x_1 + \sum_{k=1}^{n} x_k^* > \xi$.

Ekkor az $\mathbf{x}=(x_1, x_2^*, \ldots, n_n^*)$, $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jelöléssel

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k(\mathbf{x}^*) = \left(\sum_{k=1}^{r} x_k^*\right) f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*\right) - \sum_{k=1}^{r} K_k(x_k) = -\sum_{k=1}^{r} K_k(x_k^*) < \tag{2.2}$$

$$< -K_1(x_1) - \sum_{k=2}^{r} K_k(x_k^*) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(\mathbf{x}),$$

amely ellentmond (1.2)-nek.

Legyen ezután $L=\min\left\{\xi;\ \sum_{k=1}^{n} L_k\right\}$, és tekintsük az $X_k=[0, L_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ stratégiahalmazokkal, az

$$X = \left\{\mathbf{x}|\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{esetén} \quad 0 \leqq x_k \leqq L_k,\ \sum_{k=1}^{n} x_k \leqq \xi\right\} \tag{2.3}$$

szimultán stratégiahalmazzal és a (2.1) kifizetőfüggvénnyel rendelkező játékot. A 2.1. lemma alapján könnyű belátni, hogy az ily módon redukált játék az r-egyensúlypontok tekintetében ekvivalens az eredeti oligopol játékkal, így elegendő a továbbiakban a (2.3) redukcióval nyert játékkal foglalkoznunk.

Legyen $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}\subset\{1, 2, \ldots, n\}$, és tekintsük az alábbi programozási feladatot:

$$0 \leqq x_{i_k} \leqq L_{i_k}, \quad 1 \leqq k \leqq r,$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i_k} = s_I, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{r} K_{i_k}(x_{i_k}) \to \min,$$

ahol $s_I\in\left[0,\ \sum_{k=1}^{r} L_{i_k}\right]$ a feladat paramétere. A tett feltételek alapján a feladat rendelkezik optimális megoldással. Jelölje $Q_I(s_I)$ az optimális célfüggvényértéket. A konvex programozás elméletéből ismert, hogy a Q_I függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

2.2. LEMMA. A tett feltételek mellett Q_I folytonos, szigorúan monoton növekedő, konvex függvény.

Vezessük most be az $L_I=\min\left\{\xi;\ \sum_{k=1}^{r} L_{i_k}\right\}$ jelölést, és legyen $s\in[0, L]$ esetén

$$S_I(s) = \{s_I|\psi(s, s_I, s_I) = \max_{0\leqq t\leqq L_I} \psi(s, s_I, t),\ s_I\in[0, L_I]\}, \tag{2.5}$$

ahol

$$\psi(s, s_I, t) = tf(s-s_I+t)-Q_I(t). \tag{2.6}$$

A [8] dolgozat segédtételei alapján közvetlenül adódik a következő állítás.

2.3. LEMMA. A tett feltételek mellett $S_I(s)$ nem üres, egyetlen elemet tartalmaz, s-nek folytonos, monoton csökkenő függvénye.

Tekintsük most a (2.4) programozási feladatot abban a speciális esetben, amikor $L_{i_1}=L_{i_2}=\ldots=L_{i_r}$, $K_{i_1}\equiv K_{i_2}\equiv\ldots\equiv K_{i_r}$. Igaz a következő állítás

2.4. LEMMA. A tett feltételek és az L_{i_k}, K_{i_k} függvények azonossága mellett az $x_{i_1}=x_{i_2}=\ldots=x_{i_r}=s_I/r$ pont a (2.4) feladat optimális megoldását szolgáltatja.

Bizonyítás. A K_{i_k} $(1\leqq k\leqq r)$ függvények konvexitása alapján tetszőleges $0\leqq \leqq t_{i_k}\leqq L_{i_k}$, $\sum_{k=1}^{r} t_{i_k}=s_I$ értékek mellett

$$\sum_{k=1}^{r} K_{i_k}(t_{i_k}) = r\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{r}K_{i_k}(t_{i_k}) \geqq rK_{i_k}\left(\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}t_{i_k}\right) = rK_{i_k}\left(\frac{s_I}{r}\right) = \sum_{k=1}^{r}K_{i_k}\left(\frac{s_I}{r}\right).$$

Megjegyzés. Amennyiben a feltételeken kívül még a K_{i_k} függvények szigorúan konvexek, az $x_{i_1}=x_{i_2}=\ldots=x_{i_r}=s_I/r$ pont a (2.4) feladat egyetlen optimumhelye.

A (2.4) feladat, a (2.5) összefüggés és a (2.1) definícói alapján közvetlenül leolvasható az alábbi tétel:

2.1. TÉTEL. A tett feltételek mellett $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ akkor és csak akkor adja a játék r-egyensúlypontját, ha $k=1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k^*\in X_k$, valamint tetszőleges $I= =\{i_1, \ldots, i_r\}\subset\{1, 2, \ldots, n\}$ esetén

a) $\sum_{k=1}^{r} K_{i_k}(x_{i_k}^*) = Q_I(s_I^*)$, ahol $s_I^* = \sum_{k=1}^{r} x_{i_k}^*$;

b) $s_I^* = S_I(s^*)$, ahol $s^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^*$.

Megjegyzés. Amennyiben a tétel feltételein kívül a K_k függvények valamennyien szigorúan konvexek, akkor Q_I definíciója alapján az a) feltételből az $x_{i_k}^*$ számok egyértelműen meghatározhatók, mint s_I^* függvényei. Jelölje ezt a függvénykapcsolatot $x_{i_k}=u_{i_k}^{(I)}(s_I)$.

A szigorúan konvex esetben a 2.1. tétel nagymértékben leegyszerűsödik.

2.2. TÉTEL. Ha a tett feltételeken kívül a K_k függvények szigorúan konvexek, akkor egy $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ vektor akkor és csak akkor adja a játék r-egyensúlypontját, ha $k=1, 2, \ldots, n$ esetén

a) $x_k^*\in X_k$;

b) tetszőleges $I=\{i_1, \ldots, i_r\}$, $k\in I$ esetén

$$x_k^* = u_k^{(I)}(S_I(s^*)), \tag{2.7}$$

ahol $s^*=\sum_{i=1}^{n} x_i^*$.

Tekintsük ezután a szigorúan konvex szimmetrikus esetet.

2.3. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a tett feltételeken kívül $L_1=L_2=\ldots=L_n$, $K_1\equiv \equiv K_2\equiv\ldots\equiv K_n$, valamint a K_k függvények szigorúan konvexek. Ekkor tetszőleges $1\leqq r\leqq n$ esetén a játék pontosan egy r-egyensúlyponttal rendelkezik.

Bizonyítás. A játék szimmetriája alapján S_l független l-től, valamint a 2.2. tétel b) feltétele a 2.4. lemma következtében az

$$x_k^* = \frac{1}{r} S(s^*), \quad 1 \leqq k \leqq n \tag{2.8}$$

alakban is felírható. Ily módon (2.8) ekvivalens az

$$rs^* - nS(s^*) = 0 \tag{2.9}$$

egyenlőséggel. Elegendő tehát azt belátnunk, hogy (2.9) pontosan egy megoldással rendelkezik a $[0, L]$ intervallumon. A (2.5) alapján

$$r0 - nS(0) \leqq 0,$$

valamint $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$ esetén

$$rL - nS(L) \geqq r \sum_{i=1}^{n} L_i - nL_k = (r-1)nL_k \geqq 0,$$

továbbá könnyű kimutatni, hogy $L = \xi$ esetén $S(\xi) = 0$, így ekkor

$$rL - nS(L) = r\xi > 0.$$

Minthogy (2.9) baloldala szigorúan monoton növekedő, nyilvánvaló, hogy az r-egyensúlypont egyértelmű.

2.1. Megjegyzés. Az $r = 1$ esetében E. BURGER [1] eredményét kapjuk, mint speciális esetet.

2.2. Megjegyzés. Az r-egyensúlypontok meghatározására a (2.9) egyenletet kell megoldanunk, ehhez pedig $S(s)$ értékét kell gyorsan számolnunk.

A (2.5) definícióból nyilvánvaló, hogy

$$S_l(s) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad f(s) - K_k'(0) \leqq 0 \\ L_l, & \text{ha} \quad L_l f'(s) + f(s) - K_k'\left(\dfrac{L_l}{r}\right) \geqq 0, \\ 0 < t < L_l, & \text{ha} \quad tf'(s) + f(s) - K_k'\left(\dfrac{t}{r}\right) = 0, \end{cases}$$

amennyiben f és K_k differenciálható függvények.

A fentiek illusztrálására vizsgáljunk meg két példát.

2.1. PÉLDA. Tekintsük először azt az n-személyes játékot, ahol $\xi = 1$, $f(s) = 1 - s$, $L_k = 2$, $K_k(x_k) = x_k^2 + 2x_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Ekkor f és K_k differenciálható, valamint tetszőleges $s \in [0, 1]$ esetén

$$f(s) - K_k'(0) \leqq f(0) - K_k'(0) = 1 - 2 < 0,$$

így tetszőleges r mellett $S_l(s) = 0$, így (2.9) megoldása az $s^* = 0$, így az $\mathbf{x}^* = (0, 0, \ldots, 0)$ tetszőleges $r = 1, 2, \ldots, n$ esetén r-egyensúlypontot szolgáltat.

2.2. PÉLDA. Tekintsük ezután azt az n személyes játékot, ahol $\xi = 1$, $f(s) = 1 - s$, $L_k = 2$, valamint $K_k(x_k) = x_k^2$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Ekkor a 2.2. megjegyzés feltételei teljesülnek és $S_I(s)$ definíciójában a harmadik eset áll fenn, így $S_I(s)$ értékét a t-re vonatkozó

$$t(-1)+1-s-\frac{2t}{r}=0$$

egyenlet megoldásával nyerjük. Tehát

$$S_I(s)=\frac{(1-s)r}{2+r},$$

így a (2.9) egyenlet a következő alakú:

$$rs^*-\frac{(1-s^*)rn}{2+r}=0,$$

amelyből

$$s^*=\frac{n}{2+r+n}.$$

Tehát az

$$x_1^*=\ldots=x_n^*=\frac{1}{2+r+n}$$

vektor r-egyensúlypontot szolgáltat. Vegyük észre, hogy különböző r értékek mellett az r-egyensúlypont különböző, ellentétben az előző példával.

IRODALOM

[1] BURGER, E., *Einführung in die Theorie der Spiele* (de Gruyter, Berlin, 1959).
[2] OPITZ, O., »Spieltheoretische Aussagen in Oligopolproblem«, *Zeitschrift für Nationalökonomie* **30** (1970) 475—482.
[3] SZÉP, J. ÉS FORGÓ, F., *Bevezetés a játékelméletbe* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974).
[4] SZÉP, J. AND HEGEDŰS, M., "On equilibrium systems, II." DM 74—3, Marx Károly Közgazdaság tudományi Egyetem, Budapest.
[5] SZIDAROVSZKY, F., "On the oligopol game", *Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Kiadványai,* 1/1970.
[6] SZIDAROVSZKY, F., „Az oligopol játék csoportegyensúly-problémája", kandidátusi értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1974.
[7] SZIDAROVSZKY, F., „A konkáv oligopol probléma", *ELTE TTK Numerikus és Gépi Matematika Tanszék Numerikus Kiadványa,* 2/1976.
[8] SZIDAROVSZKY, F., „A nem-differenciálható oligopol probléma", *Szigma* (megjelenés alatt).

(Beérkezett: 1976. október 14.)
(Újra beérkezett: 1977. február 11.)

SZIDAROVSZKY FERENC
KERTÉSZETI EGYETEM SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
1114 BUDAPEST, XI., VILLÁNYI ÚT 29—35.

AN r-EQUILIBRIUM PROBLEM OF THE OLIGOPOLY GAME

F. SZIDAROVSZKY

The problem of *r-equilibrium points* of the concave oligopoly game is investigated. In the strictly concave, symmetric case the existence and uniqueness are proven and a numerical algorithm for finding the *r-equilibrium point* is proposed.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 111—129*

HIPERGRÁF ELMÉLETEN ALAPULÓ ÚJ CLUSTER DEFINÍCIÓ ÉS TECHNIKA, I.

FUTÓ PÉTER
Budapest

A cikk első része áttekintést ad a *cluster elemzés* alapvető módszereiről. Ismerteti a *cluster analízis hipergráf modelljeit*, amelyek alkalmazásával a vizsgált objektumok közötti nem bináris relációkat is figyelembe lehet venni, és elkerülhető a hasonlósági mérőszámok megalkotásának nehézkes eljárása.

A cikk második része a szükséges matematikai alapok bemutatása után bevezeti a hipergráf kvázi komponensének fogalmát és ismerteti legfontosabb tulajdonságait. Ezek indokolják a kvázi komponens fogalom alkalmazhatóságát *cluster definícióként*, és ezeken alapul a cikk később megjelenő folytatásában szereplő *cluster technika* is.

1. A cluster analízis gráf és hipergráf modelljei

A *cluster analízis* alapfeladata az, hogy objektumok és jellemzőik bonyolult rendszerének struktúráját feltárja, az objektumokat — előzetes ismeretek, tapasztalatok nélkül — kizárólag a jellemzőikből adódó kapcsolataik alapján természetes csoportokba ún. *clusterekbe* sorolja úgy, hogy az egymáshoz hasonló objektumok azonos *clusterekbe,* az egymáshoz kevésbé hasonló objektumok különböző *clusterekbe* kerüljenek.

A *cluster analízis* feladatkörébe tartozik a jellemzők csoportosítása is, az általuk jellemzett objektumokból adódó kapcsolataik felhasználásával.

A bonyolult rendszerek struktúrájának feltárása nagy jelentőségű és gyakori feladat az orvostudományban, biológiában, a közgazdaságtanban, a mérnöki tudományokban, az információtudományban és még sok más területen.

Tehát a *cluster analízis* modelljeinek, eljárásainak felhasználási területe igen széleskörű. Ezt tükrözi terminológiájának heterogenitása is.

A biológusok, orvosok numerikus taxonomiáról, a mérnökök tanító nélküli tanuló algoritmusokról, a statisztikusok, információtudományi szakemberek *cluster analízisről,* az operációkutatók particionálási feladatról beszélnek, de valamennyien ugyanazon probléma megoldására: egy bonyolult rendszer struktúrájának feltárására törekszenek.

A különböző felhasználási területeken alkalmazott modellek és eljárások összefonódásával a hetvenes évek elejére a *cluster analízisnek* két fő ága alakult ki: a matematikai statisztikai és az információtudományi *cluster elemzés.*

A matematikai statisztikai *cluster analízis* a vizsgált rendszer valamennyi objektumát egy adott rendezett jellemző halmaz felhasználásával írja le. Tehát adott az objektumoknak a $D=\{d_1, ..., d_m\}$ halmaza, és az objektumok mindegyikén megfigyelhető jellemzők $\mathbf{C}=(C_1, ..., C_p)$ vektora.

A jellemzők mérési skálájuk alapján négy fő csoportba sorolhatók.

Jelölje a C jellemzőnek a d_j ill. d_k objektumra jellemző értékét $C(j)$ ill. $C(k)$. Ha C nominális skálájú, akkor csak azt tudjuk, hogy $C(j)=C(k)$, vagy $C(j)\neq C(k)$ (pl. szem színe, születési hely).

Ha C ordinális skálájú, akkor azt tudjuk, hogy $C(j)=C(k)$ vagy $C(j)>C(k)$ vagy $C(j)<C(k)$ (pl. indiai kasztrendszerben elfoglalt hely).

Ha C intervallum skálájú, akkor ismerjük $C(j)-C(k)$ értékét (pl. hőmérséklet C°-ban).

Ha C hányados skálájú, akkor ismerjük $C(j)/C(k)$ értékét (pl. hőmérséklet K°-ban).

Nyilván a hányados, ill. az intervallum skálájú változók esetén nem mellékes a mértékegység megválasztása sem.

A matematikai statisztikai *cluster elemzés* alapvető problémája — a különböző skálájú jellemzők értékeinek felhasználásával — az objektum párokra hasonlósági mérőszám konstruálása. A probléma igen bonyolult, és sikeres megoldása a rendszer struktúra feltárásának szükséges feltétele. Nem véletlen, hogy a *cluster analízissel* foglalkozó cikkek nagy hányada a hasonlósági mérőszám meghatározására szolgáló heurisztikus eljárások konstruálásával és összehasonlításával foglalkozik, szinte háttérbe szorítva a *cluster kereső algoritmusok* kidolgozását is (ANDERBERG [2]).

Az információ tudományi *cluster elemzésnél* adott az objektumoknak (általában dokumentumoknak) a $D=\{d_1, ..., d_m\}$ halmaza, és az objektumok jellemzésére (indexxelésére, leírására) használt tárgyszavaknak a $K=\{k_1, ..., k_n\}$ halmaza.

Az objektumok jellemzésére a K halmaznak egy-egy általában nem rögzített elemszámú részhalmazát használják. Az objektumok közötti hasonlóság és a hasonlósági mérőszám az objektumokat jellemző tárgyszó részhalmazok megegyező és egymástól különböző elemei számának valamilyen függvényén alapul.

A hasonlósági mérőszám konstruálása itt is igen bonyolult és döntő jelentőségű probléma. Ezt tükrözi a gyakorlatban használt mérőszámok széles skálája is.

A *cluster elemzés* mindkét ágában használt hasonlósági mérőszámok $(s(d_i, d_j))$ két objektum között értelmezettek és a legtöbb esetben a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. $0\leqq s(d_i, d_j)\leqq 1 \quad (i,j=1, ..., m)$
2. $s(d_i, d_i)=1 \quad (i=1, ..., m)$
3. $s(d_i, d_j)=s(d_j, d_i) \quad (i,j=1, ..., m)$

Ennek alapján megszerkeszthető a *cluster analízis* súlyozott gráf modellje, amelyen értelmezhető valamennyi a gyakorlatban használt *cluster kereső algoritmus.*

1. *Modell:* Adott a $D=\{d_1, ..., d_m\}$ objektum halmaz, és valamennyi objektumpár esetén a hasonlósági mérőszámuk $s(d_i, d_j)$ $(i,j=1, ..., m)$.

Legyen $X=\{x_1, ..., x_m\}$ egy gráf pontjainak a halmaza. Modelezze az x_i pont a d_i objektumot. Ha $d_i\neq d_j$ és $s(d_i, d_j)>0$, akkor a gráf x_i és x_j pontja között irányítatlan élt (E_k) húzunk, amelyhez súlyként hozzárendeljük a $v(E_k)=s(d_i, d_j)$ értékét. Legyen $\mathcal{E}=\{E_1, ..., E_m\}$. Tehát a $G=(X; \mathcal{E})$ gráf és az élein értelmezett $v(E_j)>0$ $(j=1, ..., n)$ súlyfüggvény modellezi az objektumokat és az objektumpárok hasonlósági mérőszámait.

A *cluster kereső eljárásokat* két nagy csoportba sorolhatjuk:
— hierarchikus eljárások,
— nem hierarchikus eljárások.

A hierarchikus eljárások a $G=(X;\mathscr{E})$ gráf pontjai közül olyan részhalmazokat jelölnek ki, amelyek vagy egymást tartalmazzák, vagy diszjunktak. Minden esetben a kijelölt részhalmazok között lesznek a gráf pontjai is. Ezeket a részhalmazokat a tartalmazási reláció felhasználásával hierarchiába rendezhetjük (innen adódik az eljárások neve is). A hierarchikus eljárásokat két további csoportba sorolhatjuk:

— agglomeratív jellegű eljárások,
— nem agglomeratív jellegű eljárások.

Az agglomeratív jellegű eljárások a gráf pontjainak fokozatos összekapcsolásával alkotják a *clustereket* (pl. *legközelebbi szomszéd módszere, centroid módszer, Ward módszere*) (SIBSON [27], GOWER [15], WARD [31]).

A nem agglomeratív jellegű eljárások a gráf fokozatos szétdarabolásával határozzák meg a *clustereket*. Ezek a hatékony particionálási eljárások hiánya miatt nem nagyon elterjedtek (pl. EDWARDS és CAVALLI—SFORZA eljárása, lásd ANDERBERG [2]).

A nem hierarchikus eljárások a $G=(X;\mathscr{E})$ gráf pontjai közül olyan részhalmazokat *(clustereket)* jelölnek ki, amelyek diszjunktak (tehát a tartalmazás nem megengedett). Általában nem megkötés az, hogy a gráf valamennyi pontja legyen eleme legalább egy részhalmaznak.

A nem hierarchikus eljárásokat további két csoportba oszthatjuk:

— nem strukturális jellegű kritérium alapján osztályozó eljárások,
— strukturális kritérium alapján osztályozó eljárások.

A nem strukturális jellegű kritérium alapján osztályozó eljárásoknál általában előre adott a kívánt *cluster* szám, és valamilyen célfüggvény (pl. csoportokon belüli szórásnégyzetek összege) mint vezérfonal felhasználásával keresik a gráf pontjainak jobb elosztását (MAC QUEEN [24], FORGY [10]).

A strukturális kritériumok alapján működő eljárások nagy hányadánál a súlyozott élű $G=(X;\mathscr{E})$ gráfból ún. *threshold szintek* (pl. $t=0{,}1; 0{,}3$) bevezetésével olyan $G=(X;\mathscr{E}_t)$ gráfokat állítanak elő, amelynél az x_i és x_j pontok között akkor húzódik él, (amelyhez már nem rendelnek súlyt), ha $s(d_i, d_j)>t$.

A $G=(X;\mathscr{E}_t)$ gráf(ok) komponenseit (AUGUSTON, MINKER [3]), vagy maximális teljes részgráfjait (OSTEEN [26]), vagy az ezekből képzett struktúrákat tekintik *clustereknek*. A strukturális kritériumok alapján működő eljárások közé sorolhatók a gráfelmélet particionálási módszerei is (LAWLER [22]).

A *cluster kereső eljárásokkal* szemben a következő észrevételek tehetők:

— a hasonlósági mérőszámok korrekt megalkotása igen nehézkes,
— több elem hasonlóságát csak elempárok hasonlóságával képesek kifejezni,
— az algoritmusok futtatása előtt semmit, vagy csak igen keveset tudnak mondani az eredményként adódó clusterek tulajdonságairól (nincs explicit *cluster definíció*),
— az eljárások között nincs igazán hatékony, bizonyíthatóan az optimumhoz konvergáló algoritmus.

Jelenleg is széleskörű nemzetközi kutatómunka folyik, amelynek célja a gyakorlatban jól használható egzakt *cluster definíció* megszerkesztése, valamint hatékony és konvergens *cluster kereső algoritmusok* kidolgozása. Ez a dolgozat a fenti kutató-munkát szeretné előbbre vinni a *cluster elemzés* hipergráf modelljeinek megszerkesztésével, valamint strukturális kritériumon alapuló *cluster definíció* kidolgozásával.

A szerzőt a hipergráf modellek megalkotására az információtudományi *cluster elemzés* gráf modelljének és eljárásainak kritikája sarkallta, míg a hipergráf kvázi komponense fogalmának megalkotásához — ami az új *cluster definíció* és eljárás alapköve — LAWLER [22] cikke adta az ötletet, aki LUCCIO és SAMI [23] eredményeinek felhasználásával észrevette, hogy vannak a hipergráfoknak olyan ponthalmazai, amelyek a minimális két részre vágás során nem vágódnak el. LAWLER erre a felismerésre alapozva hatékony heurisztikus eljárásokat dolgozott ki hipergráfok több részre vágására, de nem foglalkozott mélyebben az el nem vágódó ponthalmazok tulajdonságaival.

Az információtudományi *cluster elemzésben* két objektumot akkor tartanak hasonlónak, ha a jellemzésükre (indexelésükre) használt deszkriptorok (tárgyszavak) közül legalább egy közös.

Ez a bináris reláció nyilván szimmetrikus, reflexív, de nem tranzitív, tehát tolerancia reláció (SREJDER [29]). Nyilvánvalóan egy olyan több elemű relációból származik, amelynél minden egyes deszkriptor kapcsolatot létesít azon (nem feltétlenül kettő) objektumok között, amelyek jellemzésére az adott deszkriptort felhasználták.

Ezzel teljesen analóg módon értelmezhető egy több elemű reláció a deszkriptorok között is úgy, hogy minden egyes objektum kapcsolatot létesít a jellemzésére használt deszkriptorok között.

A matematikai statisztikai *cluster elemzésben* az objektumok közötti hasonlóság fogalmát általában az objektumokat jellemző vektorok között definiált valamilyen távolság fogalomból vezetik le. Tehát a hasonlósági reláció itt is bináris, mégpedig szimmetrikus, reflexív és általában nem tranzitív (tolerancia) reláció. Ez a tolerancia reláció is nyilván egy olyan több elemű relációból származik, ahol az objektumok közötti hasonlóság alapja az, hogy egy vagy több jellemzőjük értéke nagyon közeli, vagy megegyezik.

Ezen alapul az a gondolat, hogy az objektumok jellemzésére szolgáló mátrix cellái értékeinek felhasználásával itt is deszkriptorokat alakítsunk ki. Például deszkriptor lehet az, hogy egy adott jellemző értéke egy adott intervallumba esik. A feladat természetétől függően deszkriptorokat definiálhatunk úgy is, hogy több jellemző értékét szorítjuk határok közé.

A deszkriptorok definiálásánál nem kikötés az, hogy segítségükkel az objektumoknak egy osztályzását hozzuk létre, tehát megengedhetjük azt is, hogy például a „súly 1" deszkriptor a 10 kp és a 15 kp közötti súlyú objektumok jellemzésére, míg a „súly-hossz" deszkriptor a 14 kp és a 16 kp közötti súlyú és az 1 m és a 2 m közötti hosszúságú objektumok jellemzésére szolgáljon. Természetesen csak olyan deszkriptorokat definiálunk, amelyek legalább egy objektum jellemzésére szolgálnak, és a definiált deszkriptorok között található minden egyes objektumhoz legalább egy, amely az illető objektum jellemzésére szolgál.

Bár jelentősége nem olyan nagy mint az információtudományi *cluster elemzésben*, de itt is definiálható a deszkriptorok között egy több elemű reláció úgy, hogy minden egyes objektum kapcsolatot létesít a jellemzésére használt deszkriptorok között.

A fentiek alapján mind az információtudományi mind a matematikai statisztikai *cluster elemzésben* jól használható a következő két hipergráf modell.

2. Modell: Adott a $D=\{d_1, ..., d_m\}$ objektum halmaz. Jelölje a d_j objektum jellemzésére használt deszkriptorok halmazát E_j $(j=1, ..., m)$. Mivel az objektumok jellemzésére legalább egy de véges sok deszkriptort használnak, ezért

$$1 \leqq |E_j| \leqq K \quad (j = 1, \dots, m). \tag{1.1}$$

Az objektum halmaz objektumainak jellemzésére szolgáló deszkriptorok halmazát jelölje X, melyre

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} E_j. \tag{1.2}$$

Ha $\mathscr{E}$ jelöli az objektumok jellemzésére szolgáló deszkriptor halmazok osztályát: $\mathscr{E}=\{E_1, \dots, E_m\}$, akkor $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráf, ugyanis (vö. 2.1. definíció)

(I) $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ véges halmaz (1.1), (1.2) miatt,

(II) $E_j \neq \emptyset$ $(j=1, \dots, m)$ (1.1) miatt,

(III) $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = X$ (1.2) miatt.

A $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráf pontjai tehát deszkriptorok, élei pedig az egy-egy objektum jellemzésére szolgáló deszkriptor halmazok.

3. Modell: A $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráf duálisa a $H^*=(E; X_1, \dots, X_n)$ hipergráf, amelynek pontjai $(e_1, \dots, e_m)$ a $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráf éleit $(E_1, \dots, E_m)$ reprezentálják, élei pedig $(X_1, \dots, X_n)$ a $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráf pontjainak felelnek meg a következő értelemben:

$$x_i = \{e_j | j \leqq m, \ x_i \in E_j\} \tag{1.3}$$

$H^*=(E; \mathscr{X})$ valóban hipergráf, ugyanis

(I′) $E=\{e_1, \dots, e_m\}$ véges halmaz (I) miatt

(II′) $X_i \neq \emptyset$ $(i=1, \dots, n)$ (III) és (1.3) miatt

(III′) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = E$ (II) és (1.3) miatt.

A $H^*=(E; \mathscr{X})$ hipergráf pontjai objektumok, élei pedig az egyes deszkriptorok által meghatározott olyan objektum halmazok, amelyek objektumai jellemzésére az adott deszkriptort felhasználtuk.

A modellezés mindkét modell esetén az éleken értelmezett pozitív súlyfüggvény $v(E_j)>0$ $(j=1, \dots, m)$, illetve $u(X_i)>0$ $(i=1, \dots, n)$ bevezetésével finomítható. Ha finomításra nincs szükség, vagy nem lehetséges, akkor is bevezetünk egy súlyfüggvényt, mégpedig úgy, hogy minden egyes élhez az 1 súlyt rendeljük hozzá.

2. Matematikai alapok. A hipergráf kvázi komponensének tulajdonságai

A cikkben és később megjelenő folytatásában bemutatott hasonlósági mérőszámot nem használó *cluster technika* a csoportosítandó objektumok és a jellemzésükre használt deszkriptorok kapcsolatait feltáró hipergráf modelleken valamint a *cluster definícióként* alkalmazott kvázi komponens fogalmán alapul.

A dolgozatnak ez a része tartalmazza azokat a matematikai alapokat, amelyek a kvázi komponens definíciójához és a *cluster elemzés* szempontjából fontos tulajdonságainak leírásához szükségesek. A kvázi komponens definícióját követik azok a megjegyzések, lemmák, tételek, amelyek alátámasztják a kvázi komponens fogalom alkalmazhatóságát a *cluster elemzésben.*

2.1. DEFINÍCIÓ. Adott az $X=\{x_1, ..., x_n\}$ véges halmaz és $\mathscr{E}=\{E_1, ..., E_m\}$ az X halmaz részhalmazainak osztálya.

A $H=(X; \mathscr{E})$ pár *hipergráf,* ha

(i) $E_j \neq \emptyset \quad (j=1, ..., m)$

(ii) $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = X$

Az X halmaz elemeit pontoknak, az $\mathscr{E}$ halmaz elemeit éleknek nevezzük. Ha $X=\emptyset$, akkor a hipergráfot üresnek nevezzük.

Értelmezzük a hipergráf ponthalmazai és élhalmazai között az $\mathscr{E}$: $2^X \to 2^{\mathscr{E}}$ és a $\mathscr{H}$: $2^{\mathscr{E}} \to 2^X$ leképezéseket a következőképpen.

2.2. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges S ponthalmaz ($S \subseteqq X$) esetén

$$\mathscr{E}(S) = \{E_j | E_j \in \mathscr{E},\ \exists x_i \in S,\ x_i \in E_j\}$$

2.3. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges $\mathscr{F}$ élhalmaz ($\mathscr{F} \subseteqq \mathscr{E}$) esetén

$$\mathscr{H}(\mathscr{F}) = \{x_i | x_i \in X,\ \exists E_j \in \mathscr{F};\ x_i \in E_j\}$$

2.1. Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy tetszőleges S ponthalmaz ($S \subseteqq X$) és $\mathscr{F}$ élhalmaz ($\mathscr{F} \subseteqq \mathscr{E}$) választása esetén $S \subseteqq \mathscr{H}(\mathscr{E}(S))$ és $\mathscr{F} \subseteqq \mathscr{E}(\mathscr{H}(\mathscr{F}))$, tehát az $\mathscr{E}$: $2^X \to 2^{\mathscr{E}}$ és a $\mathscr{H}$: $2^{\mathscr{E}} \to 2^X$ leképezések egymásnak nem inverzei.

Új fogalmak bevezetését, tételek egyszerűbb bizonyítását és a kvázi komponensek meghatározására szolgáló algoritmus gyorsítását teszi lehetővé az $\mathscr{E}'$: $2^X \times 2^X \to 2^{\mathscr{E}}$ leképezés, amely az $\mathscr{E}$: $2^X \to 2^{\mathscr{E}}$ leképezés általánosítása.

2.4. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges S és T ponthalmazok ($S \subseteqq X$), ($T \subseteqq X$) esetén

$$\mathscr{E}'(S|T) = \{E_j | E_j \in \mathscr{E};\ \exists x_i \in S;\ x_i \in E_j,\ E_j \subseteqq T\}$$

2.2. Megjegyzés. Egyszerű számolással bizonyíthatók az $\mathscr{E}'$: $2^X \times 2^X \to 2^{\mathscr{E}}$ leképezés következő tulajdonságai, amelyeket a továbbiakban gyakran felhasználunk:
Ha $S \subseteqq X$ és $T=X$, akkor $\mathscr{E}'(S|T)=\mathscr{E}(S)$.
Ha $T \subseteqq S \subseteqq X$, akkor $\mathscr{E}'(S|T)=\mathscr{E}'(T|T)$.
Ha $S \subset S' \subseteqq X$ és $T \subseteqq X$, akkor $\mathscr{E}'(S|T) \subseteqq \mathscr{E}'(S'|T)$.
Ha $S \subseteqq X$ és $T \subset T' \subseteqq X$, akkor $\mathscr{E}'(S|T) \subseteqq \mathscr{E}'(S|T')$.
A gráfelméleti szakirodalomban széleskörűen használt az élhalmaz által generált rész hipergráf és a ponthalmaz által generált alhipergráf fogalma.

2.5. DEFINÍCIÓ. A $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráfnak az $\mathscr{F}$ élhalmaz ($\mathscr{F} \subseteqq \mathscr{E}$) által *generált rész hipergráfja:* $H=(\mathscr{H}(\mathscr{F}); \mathscr{F})$

2.6. DEFINÍCIÓ. A $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráfnak az S ponthalmaz ($S \subseteqq X$) által *generált alhipergráfja:* $H=(S; \mathscr{E}_S)$, ahol $\mathscr{E}_S=\{E_i \cap S | E_i \in \mathscr{E}(S)\}$.

A generált rész hipergráf vagy a generált alhipergráf fogalom alkalmazása további munkánkat indokolatlanul elbonyolítaná. Ugyanis a kvázi komponensek tulajdonságainak leírásához, és a megkeresésükre szolgáló eljáráshoz is olyan rész hipergráf fogalom szükséges, amelyet ponthalmaz segítségével definiálunk. A rész hipergráf mindazokat és csak azokat az éleket kell tartalmazza, amelyek a definiáló ponthalmaznak részei.

Ezeket a követelményeket elégíti ki a következő definíció.

2.7. DEFINÍCIÓ: A $H=(X;\mathscr{E})$ hipergráfnak az S ponthalmaz $(S\subseteq X)$ felhasználásával *kifeszített rész hipergráfja:*

$$H = (\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S));\ \mathscr{E}'(S|S)).$$

Nyilvánvaló, hogy az $(S;\mathscr{E}'(S|S))$ pár nem lett volna jó definíció, ugyanis az S halmaznak lehet olyan pontja, amelyet $\mathscr{E}'(S|S)$ halmaz egyetlen éle sem tartalmazza. Ezzel szemben $H=(\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S)), \mathscr{E}'(S|S))$ valóban hipergráf (nincs üres éle és izolált pontja) de ponthalmaza nem feltétlenül egyezik meg S-sel.

2.3. Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy $S\subseteq X$ esetén $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))\subseteq S$. A továbbiakban jelöljük a $H=(\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S));\mathscr{E}'(S\ S))$ hipergráfot röviden H_S-sel.

2.4. Megjegyzés. A H_S kifeszített rész hipergráf megegyezik az $\mathscr{E}'(S|S)$ élhalmaz által generált rész hipergráffal.

Ezzel szemben egyszerűen belátható, hogy akkor és csak akkor található az $\mathscr{F}$ élhalmaz által generált rész hipergráfhoz olyan S ponthalmaz (például $S=\mathscr{H}(\mathscr{F})$), amely által kifeszített rész hipergráf (H_S) megegyezik a $H=(\mathscr{H}(\mathscr{F});\mathscr{F})$ rész hipergráffal, ha $\exists E_j\in\mathscr{E}$, amelyre $E_j\notin\mathscr{F}$ és $\mathscr{H}(\{E_j\})\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{F})$.

Nyilvánvaló, hogy amíg a generált rész hipergráf, ill. alhipergráf csak akkor lehet üres, ha a generáló halmaz üres, addig a H_S kifeszített rész hipergráf üres lehet akkor is, ha az S halmaz nem üres.

Mivel a dolgozat következő részeiben csak ponthalmazok által kifeszített rész hipergráfokkal dolgozunk, ezért ezeket a továbbiakban röviden csak rész hipergráfoknak nevezzük.

2.8. DEFINÍCIÓ. A H_S rész hipergráfban a K ponthalmaz $(K\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$ *hipergráfot kifeszítő* (vagy röviden kifeszítő), ha $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(K|K))=K$.

Az elnevezést indokolja az, hogy a kifeszítő ponthalmaz megegyezik a felhasználásával kifeszített rész hipergráf ponthalmazával, azaz $K=\mathscr{H}(\mathscr{E}'(K|K))$ miatt $H_K=(K;\mathscr{E}'(K|K))$.

2.1. LEMMA. A H_S rész hipergráfban a K ponthalmaz $(K\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S)))$ akkor és csak akkor kifeszítő, ha $\exists\mathscr{F}(\mathscr{F}\subseteq\mathscr{E}'(S|S))$ élhalmaz, amelyre $K=\mathscr{H}(\mathscr{F})$.

Bizonyítás. I. Ha $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(K|K))=K\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$, akkor $\mathscr{F}=\mathscr{E}'(K|K)$, mivel a 2.2. megjegyzés felhasználásával $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{E}'(S|S)$.

II. Ha $\exists\mathscr{F}(\mathscr{F}\subseteq\mathscr{E}'(S|S))$, amelyre $K=\mathscr{H}(\mathscr{F})$, akkor $\mathscr{E}'(K|K)\supseteq\mathscr{F}$. Ebből a 2.2. megjegyzés felhasználásával $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(K|K))\supseteq\mathscr{H}(\mathscr{F})=K$ adódik. A 2.3. megjegyzés alapján tehát $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(K|K))=K$.

2.5. Megjegyzés. A 2.1. lemma egyszerű következménye az, hogy egy K ponthalmaz $(K\subseteq X)$ vagy kifeszítő minden olyan H_S részhipergráfban, amelyre $K\subseteq\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$ vagy egyikben sem kifeszítő.

Ez indokolja, hogy a továbbiakban csak kifeszítő ponthalmazokról fogunk beszélni (nem tesszük hozzá, hogy a $H=(X;\mathscr{E})$ hipergráf melyik rész hipergráfjában), és a K-val jelölt ponthalmazok mindig kifeszítők lesznek.

Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz kifeszítő ponthalmaz.

2.2. LEMMA. Ha $S\subseteq X$, akkor $\exists K$ kifeszítő ponthalmaz, $(K=\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S)))$, amelyre $H_S=H_K$. A $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$ halmaz az S által tartalmazott maximális kifeszítő ponthalmaz.

Bizonyítás. I. Ha S kifeszítő, akkor az állítás triviálisan teljesül. Ha S nem kifeszítő, akkor a $K=\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$ halmaz a 2.1. lemma szerint kifeszítő. $K\subseteq S$ miatt $\mathscr{E}'(K|K)\subseteq\mathscr{E}'(S|S)$. Ha $\mathscr{E}'(S|S)=\emptyset$, akkor nyilván $\mathscr{E}'(K|K)=\emptyset$, tehát az állítás igaz. Ha $\mathscr{E}'(S|S)\neq\emptyset$, akkor $E_j\in\mathscr{E}'(S|S)$ esetén $\mathscr{H}(\{E_j\})\subseteq K$, azaz $E_j\in\mathscr{E}'(K|K)$. Tehát $\mathscr{E}'(S|S)\subseteq\mathscr{E}'(K|K)$. Ezt a 2.2. megjegyzés felhasználásával kapott $\mathscr{E}'(K|K)\subseteq\subseteq\mathscr{E}'(S|S)$ relációval egybevetve $\mathscr{E}'(K|K)=\mathscr{E}'(S|S)$ adódik.

II. Ha K' olyan kifeszítő halmaz, amelyre $K'\subseteq S$, akkor $K'\subseteq\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))=K$. Tehát K' része K-nak.

2.6. Megjegyzés. A 2.2. lemma egyszerű következménye, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük bármelyik kifeszített rész hipergráfról, hogy az egy kifeszítő ponthalmaz felhasználásával keletkezett.

Hasonlóan a $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|S))$ és az S halmaz közötti reláció elemzéséhez (amely a kifeszítő halmaz fogalmának bevezetését eredményezte), $K\supseteq S$ esetén a $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(S|K))$ és az S halmaz kapcsolatának vizsgálata vezet el a komponens fogalmához.

Jelöljük az S halmaz $(S\subseteq X)$ valódi részhalmazainak osztályát $\mathscr{P}_S$-sel.

$$\mathscr{P}_S=\{T|T\neq\emptyset,\,T\subset S\}=2^S-\{S\}-\{\emptyset\}.$$

2.9. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráfban a P ponthalmaz $(\emptyset\neq P\subseteq K)$ *komponens,* ha

(i) $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(P|K))=P$,

(ii) $T\in\mathscr{P}_P$ esetén $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))\supset T$.

2.7. Megjegyzés. Ha a H_K rész hipergráfban a P ponthalmaz komponens, akkor az $\mathscr{E}'(P|K)=\mathscr{F}$ választással a 2.1. lemma alkalmazásával adódik, hogy kifeszítő.

2.8. Megjegyzés. A 2.7. megjegyzés miatt $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(P|P))=P$. Ezért a 2.2. lemma alkalmazásával egyszerűen belátható, hogy ha a P halmaz komponense a H_K rész hipergráfnak, azaz $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(P|K))=P$, akkor $P\subseteq K'\subset K$ esetén $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(P|K'))=P$, azaz komponense a $H_{K'}$ rész hipergráfnak is.

2.10. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráf összefüggő, ha $T\in\mathscr{P}_K$ esetén

$$\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))\supset T.$$

A komponens és az összefüggő rész hipergráf definíciója már mutatja, hogy hasznos volt a hipergráf ponthalmazai és élhalmazai között értelmezett leképezések bevezetése. Ugyanis ezek a definíciók nyilvánvalóan megegyeznek a szakirodalomban használt definíciókkal, amelyek elsősorban az út fogalom bevezetése miatt bonyolultabbak.

A kvázi komponens definíciójához és a kvázi komponensek meghatározó eljáráshoz egyaránt szükségesek a most következő vágás definíciók.

2.11. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráfnak a T *ponthalmaz* ($T \subseteqq K$) *által generált vágása:* (jelölése $C_K(T)$) $C_K(T) = \mathscr{E}'(T|K) \cap \mathscr{E}'((K-T)|K)$.

Nyilvánvaló, hogy az S és a $K-S$ halmazok által generált vágások megegyeznek, és hogy az üres halmaz és a K által generált vágás mindig az üres halmaz.

2.3. LEMMA. $C_K(T) = \mathscr{E}'(T|K) - \mathscr{E}'(T|T)$.

Bizonyítás. Ha $T = \emptyset$, vagy $T = K$, akkor az állítás triviális. Legyen $T \in \mathscr{P}_K$. Ha $E_j \in \mathscr{E}'(T|K) \cap \mathscr{E}'((K-T)|K)$, akkor $\exists x_i \in E_j$: $x_i \in K-T$, azaz $E_j \notin \mathscr{E}'(T|T)$. Tehát $E_j \in \mathscr{E}'(T|K) - \mathscr{E}'(T|T)$. Ha $E_j \in \mathscr{E}'(T|K) - \mathscr{E}'(T|T)$, akkor $\exists x_i \in E_j : x_i \in K-T$, azaz $E_j \in \mathscr{E}'((K-T)|K)$. Tehát $E_j \in \mathscr{E}'(T|K) \cap \mathscr{E}'((K-T)|K)$.

2.4. LEMMA. Legyen $T(T \subseteqq K)$ tetszőleges ponthalmaza a H_K rész hipergráfnak. $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K)) = T$ akkor és csak akkor, ha $C_K(T) = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $T = \emptyset$ akkor az állítás triviálisan teljesül. Ha $T \neq \emptyset$ és $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K)) = T$, akkor az $E_j \in \mathscr{E}'(T|K)$ él valamennyi pontja eleme a T halmaznak, azaz $E_j \in \mathscr{E}'(T|T)$. Tehát a 2.2. megjegyzés felhasználásával $\mathscr{E}'(T|K) = \mathscr{E}'(T|T)$, azaz a 2.3. lemma felhasználásával $C_K(T) = \emptyset$ adódik. Ha $T \neq 0$ és $C_K(T) = \emptyset$, akkor a 2.3. lemma szerint $\mathscr{E}'(T|K) = \mathscr{E}'(T|T)$, és így $E_j \in \mathscr{E}'(T|K)$ esetén $E_j \in \mathscr{E}'(T|T)$, azaz $E_j \subseteqq T$. Tehát $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K) \subseteqq T$. Ha $x_i \in T$, akkor mivel H_K hipergráf $\exists E_j \in \mathscr{E}'(T|K)$: $x_i \in E_j$, azaz $x_i \in \mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))$. Tehát $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K)) \supseteqq T$.

A 2.4. lemma egyszerű következményeként adódik a komponens fogalmának egy alternatív definíciója, amelynek általánosításán alapul a kvázi komponens definíciója.

2.5. KÖVETKEZMÉNY. A P ponthalmaz ($\emptyset \neq P \subseteqq K$) akkor és csak akkor komponens a H_K rész hipergráfban, ha

(i′) $C_K(P) = \emptyset$,

(ii′) $C_K(T) \supset \emptyset$, $T \in \mathscr{P}_P$ esetén.

2.6. LEMMA. A P ponthalmaz ($\emptyset \neq P \subseteqq K$) akkor és csak akkor komponens a H_K rész hipergráfban, ha

(i″) $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(P|K)) = P$,

(ii″) $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K)) \supset T$, ha $T \in \mathscr{P}_P$ és T kifeszítő.

Bizonyítás. A 2.5. következmény alapján elég azt belátni, hogy, ha T nem kifeszítő ponthalmaz a H_K rész hipergráfban és $T \subset P$, akkor $C_K(T) \supset \emptyset$.

Ha $\exists x_i \in T - \mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|T))$, akkor mivel H_K hipergráf, $\exists E_j \in \mathscr{E}'(T|K)$, amelyre $x_i \in E_j$. Tehát $\mathscr{E}'(T|K) \supset \mathscr{E}'(T|T)$, azaz $C_K(T) \supset \emptyset$.

A 2.6. lemma ismeretében élhalmazok felhasználásával is definiálhatjuk a hipergráf komponenseit:

2.7. LEMMA. A P kifeszítő ponthalmaz ($\emptyset \neq P \subseteqq K$) akkor és csak akkor komponens a H_K rész hipergráfban, ha

(i‴) $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(\mathscr{F})|K) = \mathscr{F}$, ha $\mathscr{F} = \mathscr{E}'(P|P)$,

(ii‴) $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(G)|K) \supset G$, ha $\emptyset \neq G \subset \mathscr{F}$.

Bizonyítás: Legyen $T = \mathscr{H}(G)$ ($\emptyset \neq T \subseteqq P$). Ha $\mathscr{E}'(T|T) \subset G$, akkor $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(G)|K) = \mathscr{E}'(T|K) \supseteqq \mathscr{E}'(T|T) \supset G$, tehát (ii‴) mindig teljesül, függetlenül attól, hogy P komponens volt-e.

Ha $\mathscr{E}'(T|T)=G$ akkor a 2.5. következmény és a 2.6. lemma alapján elegendő azt belátni, hogy tetszőleges $T\subseteqq P$ kifeszítő ponthalmaz választása esetén $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))=T$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(G)|K)=G$. Ha $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))=T$, akkor a 2.3. és a 2.4. lemma felhasználásával $\mathscr{E}'(T|K)=\mathscr{E}'(T|T)$, azaz $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(G)|K)=G$ adódik. Ha $\mathscr{E}'(\mathscr{H}(G)|K)=G$, azaz $\mathscr{E}'(T|K)=\mathscr{E}'(T|T)$, akkor a 2.3. és a 2.4. lemma alapján $\mathscr{H}(\mathscr{E}'(T|K))=T$ adódik.

A H_K rész hipergráf T ponthalmaza által generált vágásnál láttuk, hogy a T halmaz és annak K-ra vonatkozó komplementere által generált vágás megegyezik. Tehát a vágás felfogható úgy is, hogy azt a T és a $K-T$ ponthalmazok együttesen generálják. (Nem kötöttük ki, hogy a T, ill. a $K-T$ halmaz nem lehet üres.)

Ez a felfogásmód és az üres halmaz, mint generáló halmaz megtiltása vezetett el az r részre vágás ($r\geqq 2$) fogalmához, ahol a vágást egy r elemű halmazosztály generálja.

2.12. Definíció. Adott a $\mathscr{T}_K^{(r)}=\{T_1, \ldots, T_r\}$ ($|K|\geqq r\geqq 2$) halmazosztály, amelynek elemei a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

(i) $0\neq T_i\subset K \quad (i=1, \ldots, r)$,

(ii) $T_i\cap T_j=\emptyset$, ha $i\neq j$,

(iii) $\bigcup_{i=1}^{r} T_i=K$.

A H_K hipergráfnak a $\mathscr{T}_K^{(r)}$ *halmazosztály által generált r részre vágása* /jelölése $C(\tau_K^{(r)})$/

$$C(\mathscr{T}_K^{(r)})=\mathscr{E}'(K|K)-\bigcup_{i=1}^{r}\mathscr{E}'(T_i|T_i).$$

Tehát az r részre vágás a rész hipergráf azon éleinek halmaza, amelyek legalább két megadott ponthalmazból tartalmaznak pontot.

A következő lemma mutatja meg azt, hogy a ponthalmaz által generált vágás a gyakorlatilag érdektelen szélső esetektől eltekintve ($T\neq\emptyset$, $T=K$), az r részre vágás speciális esete.

2.8. Lemma. Legyen $\emptyset\neq T\subset K\subseteqq X$ és $\mathscr{T}_K^{(2)}=\{T, K-T\}$. Ez esetben $C_K(T)=$ $=C(\mathscr{T}_K^{(2)})$.

Bizonyítás. $C(\mathscr{T}_K^{(2)})=\mathscr{E}'(K|K)-\mathscr{E}'(T|T)-\mathscr{E}'((K-T)|(K-T))$. Az $\mathscr{E}'(K|K)-$ $-\mathscr{E}'((K-T)|(K-T))$ halmaz éleinek valamennyi pontja eleme a K halmaznak és legalább egy pontja eleme a T halmaznak, tehát $\mathscr{E}'(K|K)-\mathscr{E}'((K-T)|(K-T))\subseteqq$ $\subseteqq\mathscr{E}'(T|K)$. A 2.2. megjegyzés miatt $\mathscr{E}'(T|K)\subseteqq\mathscr{E}'(K|K)$. Evidens, hogy $\mathscr{E}'(T|K)\cap$ $\cap\mathscr{E}'((K-T)|(K-T))=\emptyset$. Így $\mathscr{E}'(T|K)\subseteqq\mathscr{E}'(K|K)-\mathscr{E}'((K-T)|(K-T))$. Tehát $C(\mathscr{T}_K^{(2)})=\mathscr{E}'(T|K)-\mathscr{E}'(T|T)=C_K(T)$.

További vizsgálatainkhoz értelmezzük a hipergráf élein a $v(E_j)>0$ ($j=1, \ldots, m$) pozitív függvényt.

Terjesszük ki a függvény értelmezési tartományát élhalmazokra is. Vezessük be a $w:2^{\varepsilon}\to R^+$ leképzést, amelynek révén még diszjunkt élhalmazokat is össze tudunk hasonlítani.

2.13. Definíció. Tetszőleges $\mathscr{F}$ élhalmaz ($\mathscr{F}\subseteqq\varepsilon$) esetén $w(\mathscr{F})=\sum_{E_j\in\mathscr{F}} v(E_j)$.

2.9. Megjegyzés. Egyszerű számolással adódnak a $w: 2^{\varepsilon}\to R^+$ függvény következő tulajdonságai, amelyeket a továbbiakban gyakran felhasználunk:

Ha $\mathcal{F} \subseteq G \subseteq \mathcal{E}$, akkor $w(\mathcal{F}) < w(G)$.
Ha $\mathcal{F} \subseteq G \subseteq \mathcal{E}$, akkor $w(G-F) = w(G) - w(\mathcal{F})$.
Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}, G \subseteq \mathcal{E}$, akkor $w(\mathcal{F} \cup G) = w(\mathcal{F}) + w(G) - w(\mathcal{F} \cap G)$.
Az élhalmazokon értelmezett függvény módot ad a vágások értékének definiálására is.

2.14. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráf T ponthalmaza ($T \subseteq K$) által generált vágásának *értéke:* (jelölése: $\bar{w}_K(T)$): $\bar{w}_K(T) = w[C_K(T)] = w[\mathcal{E}'(T|K) \cap \mathcal{E}'((K-T)|K)]$.

2.15. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráf $\mathcal{T}_K^{(r)} = \{T_1, ..., T_r\}$ ($|K| \geqq r \geqq 2$) halmazosztálya által generált részre vágásának értéke (jelölése $\bar{w}_K(\mathcal{T}_K^{(r)})$): $\bar{w}_K(\mathcal{T}_K^{(r)}) = w[C(\mathcal{T}_K^{(r)})] = w[\mathcal{E}'(K|K) - \bigcup \mathcal{E}'(T_i|T_i)]$.
A továbbiakban, ha $K = X$, akkor a $C_X(T) = C(T)$, a $\bar{w}_X(T) = \bar{w}(T)$, a $\mathcal{T}_X^{(r)} = \mathcal{T}^{(r)}$ és a $\bar{w}_X(\mathcal{T}_X^{(r)}) = \bar{w}(\mathcal{T}^{(r)})$ jelölési egyszerűsítésekkel élünk.

2.10. Megjegyzés. A 2.9. megjegyzésből és a 2.3. lemmából egyszerűen adódik, hogy

$$\bar{w}_K(T) = w[\mathcal{E}'(T|K) - w[\mathcal{E}'(T|T)],$$

$$\bar{w}_K(\tau_K^{(r)}) = w[\mathcal{E}'(K|K)] - \sum_{i=1}^{r} w[\mathcal{E}'(T_i|T_i)].$$

2.11. Megjegyzés. A 2.5. következmény a 2.10. megjegyzés felhasználásával úgy is kimondható, hogy a P ponthalmaz akkor és csak akkor komponense a H_K rész hipergráfnak, ha
(i'''') $\bar{w}_K(P) = 0$,
(ii'''') $T \in \mathcal{P}_P$ esetén $\bar{w}_K(T) \neq \emptyset$.
A kvázi komponens definíciója a komponens utolsó definíciójának általánosítása:

2.16. DEFINÍCIÓ. A H_K rész hipergráfban a Q ponthalmaz ($\emptyset \neq Q \subseteq K$) *kvázi komponens,* ha bármely $T \in \mathcal{P}_Q$ választása esetén $\bar{w}_K(Q) < \bar{w}_K(T)$.

2.12. Megjegyzés. A kvázi komponens fogalom valóban a komponens fogalmának általánosítása, ugyanis a 2.11. megjegyzés felhasználásával triviális, hogy a H_K rész hipergráf valamennyi komponense egyben kvázi komponense is.

2.13. Megjegyzés. A H_K rész hipergráfban a Q ponthalmaz ($Q \subseteq K$) kvázi komponens, ha $|Q| = 1$, ugyanis ez esetben $\mathcal{P}_Q = \emptyset$.
Az egy elemű kvázi komponenseket a továbbiakban *triviális* kvázi komponenseknek nevezzük.

2.9. LEMMA. Ha a H_K rész hipergráfban a Q ponthalmaz nem triviális kvázi komponens ($Q \subseteq K$, $|Q| \geqq 2$), akkor Q kifeszítő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Q nem kifeszítő, azaz $\exists x_i \in Q$, amelyre $x_i \notin \mathcal{H}(\mathcal{E}'(Q|Q))$. Mivel $Q \geqq 2$ ezért $Q - \{x_i\} = T \in \mathcal{P}_Q$.
Hasonlítsuk össze a $C_K(T)$ és a $C_K(Q)$ halmazokat.
Mivel $x_i \notin \mathcal{H}(\mathcal{E}'(Q|Q))$, ezért $E_j \in \mathcal{E}'(Q|Q)$ esetén $E_j \in \mathcal{E}'(T|T)$. Tehát $\mathcal{E}'(Q|Q) \subseteq \mathcal{E}'(T|T)$. A 2.2. megjegyzés felhasználásával $\mathcal{E}'(Q|Q) = \mathcal{E}'(T|T)$ és $\mathcal{E}'(Q|K) \supseteq \mathcal{E}'(T|K)$ adódik.

Tehát $C_K(T) = \mathscr{E}'(T|K) - \mathscr{E}'(T|T) \subseteq \mathscr{E}'(Q|K) - \mathscr{E}'(Q|Q) = C_K(Q)$, azaz $\bar{w}_K(T) \leqq \leqq \bar{w}_K(Q)$, amely ellentmond annak, hogy Q kvázi komponens.

A 2.9. lemma egyszerű, de a továbbiak során gyakran felhasznált következményét ismerteti a következő megjegyzés.

2.14. Megjegyzés. Ha a Q ponthalmaz $(Q \subseteq K)$ nem triviális kvázi komponens H_K-ban, akkor legalább egy élt tartalmaz, és $x_i \in Q$ esetén $\exists E_j \in \mathscr{E}'(Q|Q)$, amelyre $x_i \in E_j$ (ugyanis a Q ponthalmaz kifeszítő).

A következő tétel a kvázi komponenseknek a *cluster elemzés* szempontjából nagyon fontos tulajdonságát fejezi ki. Azt mondja ki, hogy a nem triviális kvázi komponens, bármely valódi részhalmaza „erősebben kapcsolódik" a kvázi komponens többi részéhez, mint a kvázi komponens teljes környezetéhez.

2.10. TÉTEL. A H_K rész hipergráfban a Q ponthalmaz $(Q \subseteq K)$ akkor és csak akkor nem triviális kvázi komponens, ha bármely $T \in \mathscr{P}_Q$ ponthalmaz választása esetén:

$$w[\mathscr{E}'(T|Q)] > w[\mathscr{E}'(T|(K-(Q-T)))].$$

Bizonyítás. $T \in \mathscr{P}_Q$ akkor és csak akkor, ha $Q - T \in \mathscr{P}_Q$. Alakítsuk át a $\bar{w}_K(Q-T) - \bar{w}_K(Q)$ kifejezést!

(i)
$$\bar{w}_K(Q-T) - \bar{w}_K(Q) = w[\mathscr{E}'((Q-T)|K)] -$$
$$- w[\mathscr{E}'((Q-T)|(Q-T))] - w[\mathscr{E}'(Q|K)] + w[\mathscr{E}'(Q|Q)].$$

Az $\mathscr{E}'(Q|K) - \mathscr{E}'((Q-T)|K)$ halmaz azokat és csak azokat az éleket tartalmazza, amelyek részei a $K-(Q-T)$ halmaznak, és T-beli pontot tartalmaznak. Tehát:

(ii)
$$\mathscr{E}'(Q|K) - \mathscr{E}'((Q-T)|K) = \mathscr{E}'(T|(K-(Q-T))).$$

A 2.8. lemma alapján:

(iii
$$\mathscr{E}'(Q|Q) - \mathscr{E}'((Q-T)|(Q-T)) = \mathscr{E}'(T|Q).$$

A (ii) és (iii) halmaz egyenlőségeket a 2.2. és a 2.9. megjegyzést felhasználva az (i) kifejezés a következőképpen alakítható át:

(iv)
$$\bar{w}_K(Q-T) - \bar{w}_K(Q) = w[\mathscr{E}'(T|Q)] -$$
$$- w[\mathscr{E}'(T|(K-(Q-T)))].$$

2.15. Megjegyzés. A 2.10. tétel tovább nem élesíthető, ugyanis $T=Q$ választása esetén a 2.2. és 2.9 megjegyzések felhasználásával triviálisan adódik, hogy $w[\mathscr{E}'(Q|Q)] \leqq w[\mathscr{E}'(Q|K)]$.

2.16. Megjegyzés. A 2.10. tétel felhasználásával egyszerű számolással adódik a kvázi komponensek egyik fontos tulajdonsága. Ha a Q halmaz kvázi komponense a H_K rész hipergráfnak akkor $Q \subseteq K' \subset K$ esetén kvázi komponense a $H_{K'}$ rész hipergráfnak is. Ugyanis a triviális kvázi komponensekre az állítás nyilvánvaló, a nem triviálisakra pedig 2.2. és 2.9. megjegyzést felhasználva $w[\mathscr{E}'(T|Q)] > w[\mathscr{E}'(T|(K - -(Q-T)))] \geqq w[\mathscr{E}'(T|(K'-(Q-T)))]$ adódik.

2.17. Megjegyzés. Ha Q nem triviális kvázi komponense a H_K rész hipergráfnak, akkor a H_Q rész hipergráf összefüggő. Ugyanis a 2.9. lemma alapján Q kifeszítő.

A 2.16. megjegyzést $Q=K'$-re alkalmazva $w[\mathcal{E}'(T|Q)]>[\mathcal{E}'(T|T)]$ adódik tetszőleges $T\in\mathcal{P}_Q$ esetén. Ez pedig a 2.4. lemma alapján pontosan azt jelenti, hogy H_Q összefüggő.

A most következő tétel alapvető jelentőségű a hipergráf összes kvázi komponense meghatározására szolgáló hatékony algoritmus konstruálásához.

2.11. TÉTEL. Legyen adott a $H=(X;\mathcal{E})$ hipergráfnak a K ($K\subseteq X$, $|K|\geqq 2$) kifeszítő ponthalmaza, és az $\mathcal{S}=\{S_1, \dots, S_l\}$ halmazosztály, amelynek elemei a következő tulajdonságokkal rendelkeznek.

a) $\emptyset\neq S_i\subseteq K$ $(i=1, \dots, l)$,
b) $|S_i|\geqq 2$ $(i=1, \dots, l)$.

Jelöljön $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})=\{T_1, \dots, T_r\}(|K|\geqq r\geqq 2, r>l)$ olyan halmazosztályt, amelynek elemei a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

c) $\emptyset\neq T_i\subset K$ $(i=1, \dots, r)$,
d) $T_i\cap T_j=\emptyset$, ha $i\neq j$,
e) $\bigcup_{i=1}^{r} T_i=K$,
f) $T_i\subset S_i$, $(i=1, \dots, l)$.

Legyen $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ az a halmazosztály, amelyre teljesül az, hogy $\bar{w}_K(\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*)\leqq \leqq\bar{w}_K(\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S}))$ tetszőleges $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})$ halmazosztály választása esetén.

Legyen a Q ponthalmaz ($Q\subseteq K$) olyan kvázi komponense a H_K rész hipergráfnak, amelyre teljesül az, hogy

g) $Q\subset S_i$ $(i=1, \dots, l)$.

Ez esetben a következő két állítás valamelyike teljesül:

1. Állítás. A Q ponthalmaz tartalmazza a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmazosztály legalább két elemét, azaz $\exists T_i^*\in\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ és $\exists T_j^*\in\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ $(i\neq j)$ olyan, hogy $T_i^*\subset Q$, $T_j^*\subset Q$.

2. Állítás. A Q ponthalmazt tartalmazza a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmazosztály valamelyik eleme, azaz $\exists T_i^*\in\tau_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$, amelyre $Q\subseteq T_i^*$.

Bizonyítás: Ha Q triviális kvázi komponens H_K-ban, akkor e) miatt a 2. állítás mindig teljesül.

Legyen Q nem triviális kvázi komponense a H_K rész hipergráfnak, amelyre a g) feltétel teljesül. Tegyük fel, hogy a tétel állításával ellentétben sem az 1. állítás, sem a 2. állítás nem teljesül Q-ra. Ez azt jelenti, hogy:

(I) Q legfeljebb egy elemét tartalmazza a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmaz-osztálynak, és

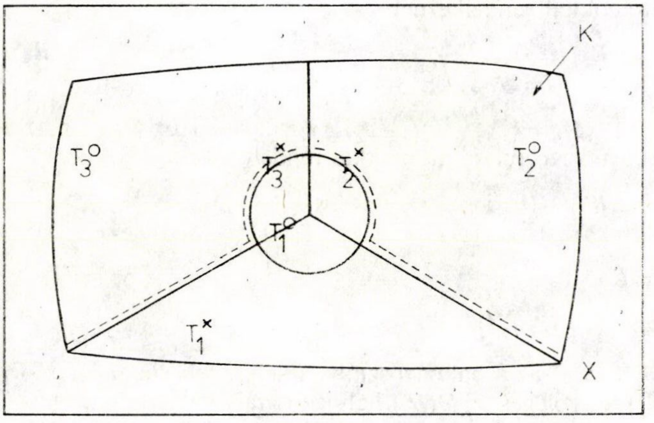
(II) Q-nak a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmazosztály legalább két elemével való metszete nem üres halmaz.

Ha Q tartalmazza a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmazosztály egy elemét, akkor jelölje azt T_1^*, ha nem tartalmazza $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ egy elemét sem, akkor is legyen T_1^* egy olyan halmaz, amelynek Q-val való metszete nem üres. (Ezt nyilván megtehetjük az általánosság megszorítása nélkül.) A $Q_i^*=T_i^*\cap Q$ $(i=1, \dots, r)$ jelölést bevezetve tudjuk, hogy $Q_1^*\neq\emptyset$.

A Q halmaz és a $\mathscr{T}_K^{(r)}(\mathscr{S})^*$ halmazosztály elemeinek felhasználásával képezzük a következő halmazokat:

$$T_1^0 = T_1^* \cup Q,$$
$$T_i^0 = T_i - Q \quad (i = 2, \dots, r)$$

Az így konstruált ponthalmazok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:



1. ábra

c′) $\emptyset \neq T_i^0 \subset K$ $(i=1, \dots, r)$, (I), c) és g) miatt,
d′) $T_i^0 \cap T_j^0 = \emptyset$, ha $i \neq j$ d) miatt,
e′) $\bigcup_{i=1}^{r} T_i^0 = K$, a), e) és g) miatt,

f′ $T_i^0 \subset S_i$ $(i=1, \dots, l)$ f) és g) miatt.
Tehát jogosan alkalmazhatjuk a $\mathscr{T}_K^{(r)}(\mathscr{S})^0 = \{T_1^0, \dots, T_r^0\}$ jelölést.

Tudjuk, hogy $\bar{w}_K(\mathscr{T}_K^{(r)}(\mathscr{S})^*) \leqq \bar{w}_K(\mathscr{T}_K^{(r)}(\mathscr{S})^0)$. Ebből az egyenlőtlenségből a 2.10. megjegyzés felhasználásával kapjuk az (i) egyenlőtlenséget.

(i) $$\sum_{i=1}^{r} w[\mathscr{E}'(T_i^*|T_i^*)] \geqq \sum_{i=1}^{r} w[\mathscr{E}'(T_i^0|T_i^0)].$$

Számítsuk ki $\sum_{i=1}^{r} w[\mathscr{E}'(T_i^0|T_i^0)]$ értékét $\sum_{i=1}^{r} w[\mathscr{E}'(T_i^*|T_i^*)]$ függvényében.

Az $\mathscr{E}'(T_1^0|T_1^0)$ halmaz élei attól függően, hogy tartalmaznak-e pontot a $Q-Q_1^*$ halmazból, két diszjunkt halmazba sorolhatók:

(ii) $$\mathscr{E}'(T_1^0|T_1^0) = \mathscr{E}'(T_1^*|T_1^*) \cap \mathscr{E}'((Q-Q_1^*)|T_1^0).$$

Az $\mathscr{E}'(T_i^*|T_i^*)$ $(i=2, \dots, r)$ halmaz élei attól függően, hogy tartalmaznak-e pontot a Q halmazból, két diszjunkt halmazba sorolhatók:

(iii) $$\mathscr{E}'(T_i^*|T_i^*) = \mathscr{E}'(Q_i^*|T_i^*) \cap \mathscr{E}'(T_i^0|T_i^0) \quad (i = 2, \dots, r).$$

A (ii) és (iii) halmaz egyenlőségek, valamint a 2.2. és a 2.9. megjegyzés felhasználásával

(iv)
$$\sum_{i=1}^{r} w[\mathcal{E}'(T_i^*|T_i^*)] - \sum_{i=1}^{r} w[\mathcal{E}'(T_i^0|T_i^0)] =$$

$$= \sum_{i=2}^{r} w[\mathcal{E}'(Q_i^*|T_i^*)] - w[\mathcal{E}'((Q-Q_1^*)|T_1^0)]$$

egyenlőséget kapjuk.

$\bigcup_{i=2}^{r} T_i^* = K - T_1^* \subseteq K - Q_1^*$ és $T_1^0 \supset Q$, valamint a 2.2. és a 2.9. megjegyzés alkalmazásával a (iv) egyenlőségből azt kapjuk, hogy

(v)
$$\sum_{i=1}^{r} w[\mathcal{E}'(T_i^*|T_i^*)] - \sum_{i=1}^{r} w[\mathcal{E}'(T_i^0|T_i^0)] \leqq$$

$$\leqq w[\mathcal{E}'((Q-Q_1^*)|(K-Q_1^*))] - w[\mathcal{E}'((Q-Q_1^*)|Q)]$$

$Q-Q_1^* \in \mathcal{P}_Q$, ugyanis $Q_1^* \neq \emptyset$ és II. miatt $Q-Q_1^* \neq \emptyset$, tehát alkalmazhatjuk a $Q-Q_1^*$ ponthalmazra a 2.10. tételt. Ebből az adódik, hogy a (v) kifejezés értéke negatív, amely viszont ellentmond az (i) egyenlőtlenségnek. Tehát a tétel nem triviális kvázi komponensekre is igaz.

2.12. Következmény. Legyen adott a $H=(X; \mathcal{E})$ hipergráfnak a $K(K \subseteq X, |K| \geqq 2)$ kifeszítő ponthalmaza és az S ponthalmaz, amelyre teljesül az, hogy $S \subseteq K$ és $|S| \geqq 2$.

Legyen T^* az a ponthalmaz, $(T^* \in \mathcal{P}_S)$ amelyre teljesül az, hogy $\bar{w}_K(T^*) \leqq \bar{w}_K(T)$ tetszőleges $T \in \mathcal{P}_S$ halmaz választása esetén.

Legyen Q $(\emptyset \neq Q \subset K)$ olyan kvázi komponense a H_K hipergráfnak, amelyre teljesül az, hogy $Q \subset S$.

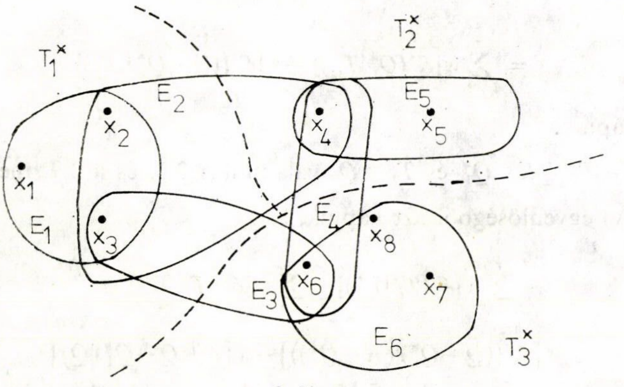
Ez esetben vagy $Q \subseteq T^*$, vagy $Q \subseteq S - T^*$ teljesül.

A 2.8. lemma felhasználásával nyilvánvaló, hogy a 2.12. következmény a 2.11. tétel speciális esete $\mathcal{S} = \{S\}$, $l=1$ és $r=2$ választás mellett.

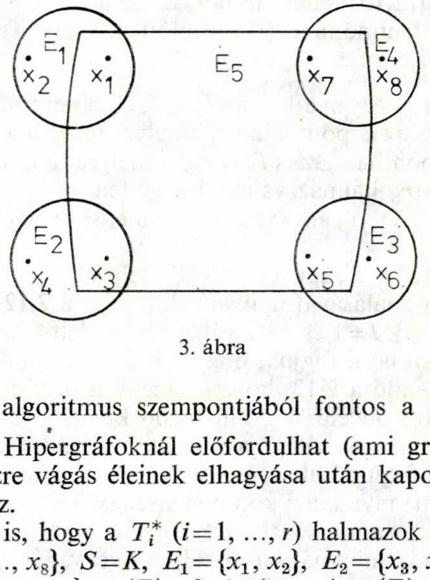
A cikk folytatásában látni fogjuk, hogy a kvázi komponensek meghatározására szolgáló eljáráshoz elegendő a 2.12. következmény ismerete. Ennek ellenére a 2.10. tétel kimondása nem volt öncélú. Ugyanis azon kívül, hogy a kvázi komponensek egy igen érdekes tulajdonságát világítja meg, túl is mutat ennek a dolgozatnak a keretein. Mivel a cikk folytatásában polinommal fedhető lépésszámú algoritmust adunk a hipergráf valamennyi kvázi komponensének meghatározására, ezért a kvázi komponensek ismeretét kamatoztathatjuk olyan algoritmusok konstruálásakor, amelyek célja a hipergráf minimális r $(r \geqq 3)$ részre vágásának meghatározása. Ez annál is inkább hasznos, ugyanis $r \geqq 3$ esetén nem ismert polinommal fedhető lépésszámú algoritmus a minimális r részre vágás meghatározására.

2.18. Megjegyzés. A 2.11. tétel tovább nem élesíthető, ugyanis ha egy kvázi komponens tartalmazza a $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ halmazosztálynak legalább két elemét, akkor még metszheti $\mathcal{T}_K^{(r)}(\mathcal{S})^*$ bármelyik más elemét is. Ugyanis legyen $K=\{x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_8\}$, $\mathcal{S}=\{S_1\}=\{K\}$, $E_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $E_2=\{x_2, x_3, x_4\}$, $E_3=\{x_3, x_6\}$, $E_4=\{x_4, x_6\}$, $E_5=\{x_4, x_5\}$, $E_6=\{x_6, x_6, x_8\}$, $\mathcal{E}'(K|K)=\{E_1, E_2, \ldots, E_6\}$; $w(E_6)=3$, $w(E_1)=w(E_5)=$ $=4$, $w(E_2)=w(E_3)=w(E_4)=2$.

A gráf minimális 3 részre vágását a $\mathcal{T}_K^{(3)}(\mathcal{S})^* = \{T_1^*, T_2^*, T_3^*\}$ halmazosztály generálja, ahol $T_1^* = \{x_1, x_2, x_3\}$, $T_2^* = \{x_4, x_5\}$, $T_3^* = \{x_6, x_7, x_8\}$. A $Q = \{x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_6\}$ ponthalmaz kvázi komponens, amelyre teljesül az, hogy $T_1^* \subset Q$, $T_2^* \subset Q$, $T_3^* \not\subset Q$, $Q \cap T_3^* \neq \emptyset$.



2. ábra



3. ábra

A konstruálandó algoritmus szempontjából fontos a következő megjegyzés.

2.19. Megjegyzés. Hipergráfoknál előfordulhat (ami gráfoknál soha), hogy a minimális értékű r részre vágás éleinek elhagyása után kapott hipergráf több mint r komponenst tartalmaz.

Ez adódhat abból is, hogy a T_i^* $(i=1, \ldots, r)$ halmazok nem feltétlenül kifeszítők. Legyen $K = \{x_1, \ldots, x_8\}$, $S = K$, $E_1 = \{x_1, x_2\}$, $E_2 = \{x_3, x_4\}$, $E_3 = \{x_5, x_6\}$, $E_4 =$ $= \{x_7, x_8\}$, $E_5 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$, $w(E_i) = 2$, $i = 1, \ldots, 4$, $w(E_i) = 1$. Minimális 2 részre vágás esetén: $T_1^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $T_2^* = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $\overline{w}_K(T_1^*) = \overline{w}_K(T_2^*) = 1$.

A vágás élének (E_5) elhagyása után a hipergráf már 4 komponenst tartalmaz.

A kvázi komponensek egyik alapvető tulajdonságát a 2.11. tétel egyszerű következményeként ismerhetjük meg.

2.13. Következmény. Legyenek a Q $(Q \subseteq K)$ és a Q' $(Q' \subseteq K)$ halmazok egymástól különböző kvázi komponensek a H_K rész hipergráfban. Ekkor vagy $Q \subset Q'$, vagy $Q' \subset Q$, vagy $Q \cap Q' = \emptyset$ teljesül.

A 2.13. következmény állítása $l=1, \mathcal{S}=\{Q\cup Q'\}$ $r=2$ választás mellett a 2.11. tétel alkalmazásával adódik.

Tehát a hipergráf kvázi komponensei vagy tartalmazzák egymást vagy diszjunktak.

Mivel a hipergráf valamennyi szögpontja kvázi komponens (2.13. megjegyzés) ezért a kvázi komponensek a hipergráf pontjainak egy fa struktúrájú particióját alkotják.

A fa szögpontjai a H_K hipergráf kvázi komponenseinek felelnek meg, és a Q kvázi komponenst modellező szögpontból akkor és csak akkor indul ív a Q' kvázi komponenst modellező szögpontba, ha $Q\supset Q'$ és nincs olyan Q'' kvázi komponens, amelyre $Q\supset Q''\supset Q'$.

A kvázi komponensek fa struktúrájából egyszerűen következik a kvázi komponensek számának felső becslése:

2.20. Megjegyzés. A H_K rész hipergráf kvázi komponenseinek száma legfeljebb $2|K|-1$.

A következő tétel és két megjegyzés már nem a kvázi komponensek tulajdonságainak feltárására szolgál. A cikk folytatásában szereplő, a kvázi komponensek meghatározására szolgáló eljárás, megszerkesztéséhez használjuk őket.

2.14. TÉTEL. Legyen adott a $H=(X;\mathcal{E})$ hipergráfnak a K $(K\subseteq X, |K\geqq 2)|$ kifeszítő ponthalmaza, és az S ponthalmaz, amelyre teljesül az, hogy $S\subseteq K$ és $|S|\geqq 2$. Legyen $T^*\in\mathcal{P}_S$ az a ponthalmaz, amelyre teljesül az, hogy $\bar{w}_K(T^*)\leqq\bar{w}_K(T)$ tetszőleges $T\in\mathcal{P}_S$ halmaz választása esetén. Ha $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))=\emptyset$, akkor T^* csak triviális kvázi komponenst tartalmaz. Ha $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))\neq\emptyset$ és a P ponthalmaz komponense a H_{T^*} rész hipergráfnak, akkor $C_K(T^*)=C_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))=C_K(P)$, azaz $\bar{w}_K(T^*)=\bar{w}_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))=\bar{w}_K(P)$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))=\emptyset$ akkor a 2.2. és a 2.9. lemma miatt T^* nem tartalmaz nem triviális kvázi komponenst.

Ha $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))\neq\emptyset$, akkor $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))\in\mathcal{P}_S$ és így

$$\text{(i)} \qquad \bar{w}_k(T^*)\leqq\bar{w}_k(\mathcal{H}\{\mathcal{E}'(T^*|T^*))).$$

Ha $E_j\in C_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))$, akkor $E_j\in C_K(T^*)$, ugyanis ellenkező esetben lenne T^*-ban $\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*))$-ot valódi részként tartalmazó kifeszítő halmaz (2.2. lemma). Tehát $C_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))\subseteq C_K(T^*)$.

Az (i) egyenlőtlenség felhasználásával

$$C_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))=C_K(T^*),\ \bar{w}_K(\mathcal{H}(\mathcal{E}'(T^*|T^*)))=\bar{w}_K(T^*)$$

adódik.

Ha P komponense a H_{T^*} rész hipergráfnak, akkor $P\in\mathcal{P}_S$, és így

$$\text{(ii)} \qquad \bar{w}_K(T^*)\leqq\bar{w}_K(P).$$

Ha $E_j\in C_K(P)$, akkor $E_j\in C_K(T^*)$, ugyanis ellenkező esetben $\bar{w}_{T^*}(P)$ értéke nem lenne zérus. Tehát $C_K(P)\subseteq C_K(T^*)$.

A (ii) egyenlőtlenség felhasználásával $C_K(P)=C_K(T^*)$, $\bar{w}_K(P)=\bar{w}_K(T^*)$ adódik.

2.21. Megjegyzés. Itt kell azonban felhívni a figyelmet arra, hogy $S \neq K$ esetén a H_K rész hipergráfnak a H_{S-T^*} rész hipergráf komponensei által generált vágásának értéke általában nem egyezik meg $\bar{w}_K(T^*)$-gal.

2.22. Megjegyzés. Legyen adott a $H=(X; \mathscr{E})$ hipergráfnak a $K(K \subseteq X, |K| \geqq 2)$ kifeszítő ponthalmaza és az S halmaz, amelyre teljesül az, hogy $S \subseteq K$ és $|S| \geqq 2$. Legyen $T^* \in \mathscr{P}_S$ az a ponthalmaz, amelyre teljesül az, hogy $\bar{w}_K(T^*) \leqq \bar{w}_K(T)$ tetszőleges $T \in \mathscr{P}_S$ halmaz választása esetén. Az S halmaz — a kvázi komponens definíciójából és T^* fent említett tulajdonságából következően — akkor és csak akkor kvázi komponens a H_K rész hipergráfban, ha $\bar{w}_K(S) < \bar{w}_K(T^*)$.

Az eddigiek ismeretében már kimondhatjuk a következő definíciót:

2.17. Definíció. Az objektumok *cluster*jei az 1. modell gráfjának illetve a 3. modell hipergráfjának kvázi komponensei. A deszkriptorok *cluster*jei a 2. modell hipergráfjának vkázi komponensei.

Az így definiált *cluster*ek legfontosabb tulajdonságai a következők:

— ha a Q halmaz *cluster*e a H objektum vagy deszkriptor halmaznak, akkor Q-nak bármely valódi részhalmaza „erősebben kapcsolódik" a Q halmazhoz, mint annak környezetéhez (2.10. tétel),

— ha a Q halmaz *cluster*e a H objektum vagy deszkriptor halmaznak, akkor Q *cluster*e H minden olyan részhalmazának is, amely a Q halmazt tartalmazza (2.16. megjegyzés),

— a *cluster*ek vagy diszjunktak vagy tartalmazzák egymást (2.13. következmény),

— a H halmaz valamennyi egy elemű részhalmaza *cluster* (2.13. megjegyzés),

— a H halmaz *cluster*einek száma kisebb, mint a H halmaz elemei számának kétszerese (2.20. megjegyzés).

IRODALOM

[1] Adamson, G. W. and Boreham, J., "The use of an association measure based on character structure to identify semantically related pairs of words and document titles", *Inform. Stor. Retr.* **10** (1974) 253—260.

[2] Anderberg, M. R., *Cluster Analysis for Applications* (Academic Press, 1973).

[3] Augustson, J. G. and Minker, J., "An analysis of some graph theoretical cluster techniques", *Journal of A. C. M.* **17** (1970) 571—588.

[4] Balas, E. and Padberg, M., "On the set covering problem: II. An algorithm for set parittioning", *Op. Res.* **23** (1975) 74—90.

[5] Benedikt, V., Kelemen, K., Pintér, Zs. és Vári P.-né, „Cluster analízis és lényegkiemelő eljárásrendszer terve", SZÁMKI, 1976.

[6] Berge, C., *Graphs and Hypergraphs* (North Holland/American Elsevier, 1973).

[7] Boulton, P. M. and Wallace, C. S., "An information measure for single link classification", *Comp., Journ.* **18** (1975) 236—238.

[8] Diday, E. and Schroeder, A., "A new approach in mixed distributions detection", *IRIA, Rapport de Recherche* **52** (1974).

[9] Edmonds, J. and Karp, R., "Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems", *Journal of A. C. M.* **19** (1972) 248—264.

[10] Forgy, E. W., "Classification so as to relate to outside variables", Final Report, Conf. Cluster Analysis of Multivariate Data (13.01—13.12.), Cath. Univ. America, 1966.

[11] Fritz, J., *Tanuló algoritmusok alkalmazása az alakfelismerésben* (MTA MKI, 1975).

[12] Futó, P., "Computer aided management of industrial research — the method LOGEL", 12. Progr. Op. Res. (North Holland, 1976) 353—371.

[13] Futó, P , „A cluster analízis egy új modellje és algoritmusa", *Szigma* (megjelenés előtt).

[14] FUTÓNÉ SZÁNTÓ ZS., *Számítástechnika az egészségügyért* (ESZTIK, Budapest, 1976).
[15] GOWER, J. C., "A comparison of some methods of cluster analysis", *Biometrika* **23** (1967) 623—637.
[16] HU, T. C., *Integer Programming and Newtork Flows* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969).
[17] KLAFSZKY, E., *Hálózati folyamok* (Bolyai J. Mat. Társ., 1969).
[18] KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming; Vol. 1.: Fundamental Algorithms* (Addison-Wesley, 1968).
[19] KOVÁCS, L. B., *A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei* (Bolyai J. Mat. Társ., 1969).
[20] KUNSZT, GY., *A tudományos kutatás logikai modellezése és tematikai irányítása* (Akadémiai Kiadó, 1975).
[21] LAWLER, E. L., "Cutsets and partitions of hypergraphs", *Networks* **3** (1973) 275—286.
[22] LAWLER, E. L., "Algorithms, graphs and complexity", *Networks* **5** (1975) 89—92.
[23] LUCCIO, F. AND SAMI, M., "On the decomposition of networks into minimally interconnected networks", IEEE Trans. *Circuit Theory*, OT **16** (1969) 184—188.
[24] MACQUEEN, J. B., "Some methods for classification and analysis of multivariate observations", *Proc. Symp. Math. Stat. and Prob.* **1** (1967) 281—297.
[25] MULLIGAN, G. B. AND CORNEIL, P. G., "Corrections to Bierstone's algorithm for generating clique", *Journal of A. C. M.* **19** (1972) 244—247.
[26] OSTEEN, R. E., "Clique detection algorithms based on line addition and line removal", *SIAM Journal Appl. Math.* **26** (1974) 126—135.
[27] SIBSON, R., "SLINK — An optimally efficient algorithm for the single-link cluster method", *Comp. Journ.* **16** (1973) 30—34.
[28] SPARCK-JONES, K., *Automatic Indexing "74"* (Comp. Lab., Univ. of Cambridge, 1974).
[29] SREJDER, JU. A., *Egyenlőség, hasonlóság, rendezés* (Gondolat, 1975).
[30] TANIMOTO, T. T., *An Elementary Mathematical Theory of Classification and Prediction* (IBM 1958).
[31] WARD, J. H., "Hierarchical grouping to optimize an objective function", *Journ. Amer. Statist. Assoc.* **58** (1963) 236—244.
[32] WISHART, D., "An algorithm for hierarchical classifications", *Biometrika* **22** (1969) 165—170.
[33] ZADEH, N., "Theoretical efficiency of the Edmonds Karp algorithm for computing maximal flows", *Journal of A. C. M.* **19** (1972) 184—192.

(Beérkezett: 1977. február 13.)
(Újra beérkezett: 1978. január 3.)

FUTÓ PÉTER
ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI INTÉZET
1113 BUDAPEST, XI., DIÓSZEGI ÚT 37.

CLUSTER DEFINITION AND TECHNIQUE BASED ON HYPERGRAPH THEORY, I.

P. FUTÓ

In Section 1 weighted hypergraph models of cluster analysis are presented. Using these models the calculation of simmilarity coefficients can be avoided.

The cluster definition is based on the concept of quasi component of a weighted hypergraph. The most important properties of quasi components are described in Section 2.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 131—138

MEGSZAKÍTHATÓ ÜTEMEZÉSI FELADATOK VIZSGÁLATA HÁLÓZATI FOLYAM MÓDSZEREKKEL

KAS PÉTER

Budapest

A dolgozatban megszakítható ütemezési (preemptive scheduling) feladattal foglalkozunk. A dolgozat hat részre tagozódik. Az első részben az alapfeladatot fogalmazzuk meg és alapvető definíciókat, jelöléseket vezetünk be. A második és harmadik rész az ütemezési feladat tervütemhálóval való reprezentálását tárgyalja és egy speciális ütemezési feladatot definiál. A dolgozat fő eredménye a negyedik részben közölt algoritmus, melynek segítségével speciális követelményeket kielégítő ütemezési problémák oldhatók meg, amelyeket az ötödik és hatodik részben ismertetünk.

1. Két alapfeladat megfogalmazása

L. R. FORD—D. R. FULKERSON [1] munkájában a következő két rokon problémát veti fel: Tegyük fel, hogy n tevékenységből álló munka szervezése a feladatunk. Legyen adott a tevékenységek között egy $\prec$ részbenrendezés, amely arra utal, hogy bizonyos tevékenységek megkezdése csak más tevékenységek befejezése után történhet. A munka elvégzésére munkások állnak rendelkezésre. Tegyük fel, hogy bármely munkás bármely tevékenységet végezhet, a munkások egyenlő gyorsan, diszkrét időegységekben (napokon) dolgoznak a tevékenységeken.

I. PROBLÉMA. Legyen előírva az egész munka befejezésének határideje (T). Adjunk meg olyan szervezést — mondjuk meg mikor, milyen tevékenységet, hány munkás végezzen — mely a munka adott időre való befejezését biztosítja minimális számú munkás igénybevételével.

II. PROBLÉMA. Legyen előírva a rendelkezésre álló munkások száma (K). Adjunk meg olyan szervezést, mely az egész munka legrövidebb idő alatti megvalósítását eredményezi.

A dolgozatban közölt algoritmus segítségével az I. probléma alábbi speciális esetét oldjuk meg,

— az egész munka előírt határideje az előírható legkorábbi határidő,
— a tevékenységek közötti részbenrendezés által definiált tervütemhálóban a kritikus út minden ponton átmegy.

Jelölések, fogalmak

A dolgozatban hálózati folyam technikával igyekszünk a felvetett problémákat kezelni, folyamon aritmetikai folyamot értünk. A dolgozatban felhasznált, külön nem definiált fogalmak definíciói KLAFSZKY EMIL [4] munkájában találhatók, a jelölések ugyancsak e könyv jelöléseit követik.

2. A modell

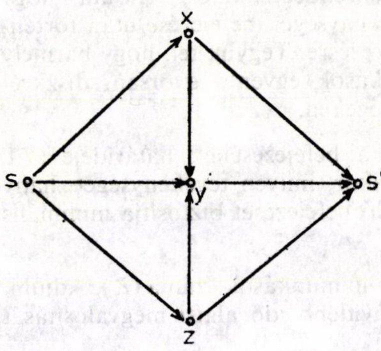
A bevezetésben említett I. és II. problémákat szemléltethetjük egy tervütemháló segítségével, feltételezve, hogy minden tevékenységet csak egyszer kell végrehajtani. Az irányított élek reprezentálják a tevékenységeket, a gráf csúcsai pedig állapotoknak felelnek meg. Az adott $\prec$ részbenrendezési reláció által megszabott elvégzési sorrend betartása a tervütemhálóban a következőt jelenti: egy $(x, y)\in A$ — ahol A az élek halmazát jelenti — tevékenység elkezdésére csak akkor kerülhet sor, ha már minden $(z, x)\in A$ tevékenység befejeződött.

Az 1. ábrán megrajzolt tervütemháló a következő sorrendi megkötéseket mutatja:

az (x, s'), (x, y) tevékenységek csak az (s, x) tevékenység befejezése után kezdődhetnek,
a (z, s'), (z, y) tevékenységek csak az (s, z) tevékenység befejezése után kezdődhetnek,
az (y, s') tevékenység csak az (x, y), (s, y), (z, y) tevékenységek befejezése után kezdődhet.

Rendeljük a tervütemháló éleihez a következő nemnegatív egész számokat:
— $d(x, y)$, $(x, y)\in A$ azt mutatja, hogy az (x, y) tevékenység elvégzéséhez egy munkásnak hány időegységnyi — napi — munkája szükséges.
— $k(x, y)$, $(x, y)\in A$ azt mutatja, hogy az (x, y) tevékenységen egyazon napon hány munkás dolgozhat egyszerre.

Definiáljunk a tervütemháló pontjain egy $r(x)$, $x\in N$ — ahol N a pontok halmazát jelenti — nemnegatív egész értékű függvényt, mely arra utal, hogy a munka végzése során hányadik napon kell az x állapotba jutnunk. Az $r(x)$, $x\in N$ függvényt ütemezésnek hívjuk ha:



1. ábra

$$r(y)-\big(r(x)+1\big)\geqq\left\lceil\frac{d(x, y)}{k(x, y)}\right\rceil^{1}$$

teljesül minden $(x, y)\in A$ esetén. Természetesen $r(s)=0$, $r(s')=T$ a munka befejezésének időpontja. Az ütemezés megadása azt jelenti, hogy az $(x, y)\in A$ tevékenységet az $[r(x)+1, r(y)]$ időintervallumban kell elvégezni.

A modell módosításai

Az I. és II. problémák felvetésénél nem szóltunk arról, hogy az egyes tevékenységek végrehajtását fel lehet-e függeszteni majd egy későbbi időpontban folytatni. E kérdésre adott válasz szerint a feladatokat két osztályba soroljuk.

a) Megoldandó I. és II. probléma azon pótlólagos megszorítással élve, hogy ha egy munkás hozzákezdett valamely tevékenység végrehajtásához, azon kell dolgoznia a tevékenység befejezéséig.

[1] Itt és a továbbiakban $\lceil x\rceil$ az x valós szám felső egész részét jelöli.

b) Megoldandó I. és II. probléma az előző pontban tett megszorítás nélkül, azaz a tevékenység végrehajtását fel lehet függeszteni és csak egy későbbi időpontban folytatni.

Az a) pontban mondott módon felvetett problémák ölelik fel a szakirodalomban jelentős részét *„nonpreemptive scheduling”* címszó alatt. A dolgozat további részében a b) módon felvetett problémával fogunk foglalkozni, melyet az angol nyelvű irodalomban *„preemtive scheduling”* néven ismernek.

A tárgyalt ütemezési probléma definiálása

2.1. PROBLÉMA. Tekintsük az elvégzendő munkát alkotó tevékenységek halmazát. A tevékenységek közötti részbenrendezést reprezentáljuk egy tervütemhálón. Adott $d(x, y)$, $k(x, y)$, $(x, y) \in A$ és $r(x)$, $x \in N$ értékek mellett határozzuk meg, hány munkásra van szükség a teljes munka elvégzéséhez.

A most kitűzött feladat az I. probléma speciális esete: ugyanis az I. problémában csupán $r(s') = T$ a munka befejezésének határideje adott, mi viszont $r(x)$, $x \in N$ ütemezés megadását követeljük meg. Még egy a továbbiakban mindenütt érvényes feltételt teszünk:

az (x, y) tevékenységet az $[r(x)+1, r(y)]$ időintervallumban kell elvégeznünk, itt azonban bármikor végezhetjük, a végrehajtást félbe is szakíthatjuk.

A 2.1. probléma matematikai programozásban megszokott formába öntve a következő:

Számozzuk meg a tevékenységeket 1-től m-ig. Jelölje d_i az i-edik tevékenység időigényét, azaz hogy egy munkás hány napi munkával képes elvégezni, k_i azt, hogy egyazon napon hány munkás dolgozhat egyszerre az i-edik tevékenységen, $r_i^{(1)}$ és $r_i^{(2)}$ azon időintervallum alsó és felső határát, melyben az i-edik tevékenységen dolgozhatunk. Jelöljék ekkor $\{x_{it}\}$, $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$ diszkrét változók azt, hogy az i-edik tevékenységen hány munkás dolgozik a t-edik napon. A 2.1. probléma megoldása a következő diszkrét programozási feladat megoldását követeli:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = d_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leqq x_{it} \leqq k_i, & \text{ha} \quad r_i^{(1)} \leqq t \leqq r_i^{(2)} \\ x_{it} = 0, & \text{máskor} \end{array}\right\} \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{it} \quad \text{egész}$$

$$\min_{(x)} \left(\max_{1 \leqq t \leqq T} \sum_{i=1}^{m} x_{it} \right)$$

3. Szükséges és elégséges feltétel 2.1. probléma *K* munkással való megoldhatóságára

Tegyük fel, hogy az $r(x)$, $x \in N$ ütemezés az $[1, T]$ időintervallumot jelöli ki az egész munka végrehajtására. Tekintsük a tevékenységek egy tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq A$ részhalmazát és egy tetszőleges $t \in [1, T]$ napot. Vizsgáljuk meg, hogy a választott t-edik napon a $\mathcal{P}$ halmazba eső tevékenységeken hány munkás dolgozhat. A t-edik napon bevethető munkások számának egyrészt felső korlátja az egész munka elvégzésére rendelkezésre álló munkások száma (K). Másrészt ugyancsak felső korlát a

$$\sum_{\substack{(x,y)\in\mathcal{P} \\ r(x)+1\leqq t\leqq r(y)}} k(x,y)$$

szám. Nyilvánvalóan szükséges feltétel tehát, hogy minden $\mathcal{P}\subseteqq A$ esetén fennálljon:

$$\text{(3.1)}\quad \sum_{(x,y)\in\mathcal{P}} d(x,y) \leqq \sum_{t=1}^{T} \gamma_{\mathcal{P}}(t), \quad \text{ahol} \quad \gamma_{\mathcal{P}}(t) = \min\Big\{K, \sum_{\substack{(x,y)\in\mathcal{P} \\ r(x)+1\leqq t\leqq r(y)}} k(x,y)\Big\}$$

D. GALE [2] cikkében és H. J. RYSER [7] cikkében bizonyított 0—1 mátrixokra vonatkozó eredmény csekély általánosításával adódik, hogy a fenti feltétel elégséges is, azaz

3.1. TÉTEL. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[N, A, d, k]$ tervütemháló által reprezentált munka az $r(x)$, $x\in N$ ütemezés mellett elvégezhető legyen K munkás felhasználásával az, hogy (3.1.) feltétel fennálljon minden $\mathcal{P}\subseteqq A$ esetén.

4. Egy folyamprobléma algoritmikus megoldása

E részben a 2.1. probléma algoritmikus megoldását előkészítendő egy hálózati folyamproblémát tárgyalunk, melyet a 2.1. probléma megoldásához szükséges mértéknél kicsit általánosabban vetünk fel.

Legyen $[N, A]$ tetszőleges digráf s forrás és s' nyelő pontokkal. Legyen $H\subseteqq A$ tetszőleges élhalmaz. Legyen a digráf élein értelmezve egy $k_H(x, y)\geqq 0$ egész értékű kapacitásfüggvény, melyre:

$$k_H(x,y) = +\infty, \quad \text{ha} \quad (x,y)\in H.$$

Jelöljük az így kapott hálózatot $[N, A, k_H]$-val. Tegyük fel, hogy $[N, A, k_H]$-ban létezik s-ből s'-be irányuló v_0 értékű folyam. Ekkor a következő kérdés vethető fel:

4.1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi tulajdonságú K számot

$$K = \min_{\{f:v(f)=v_0\}} \big(\max_{(x,y)\in H} f(x,y)\big).$$

Szemléletesen szólva keressünk olyan v_0 értékű folyamot $[N, A, k_H]$-ban mely a H-beli éleken a „legegyenletesebben" oszlik el.

A most kitűzött 4.1. feladat megoldásra a következő algoritmus javasolható:

4.2. Algoritmus. Legyen $F_1(x, y)$, $(x, y)\in A$ v_0 értékű folyam az $[N, A, k_H]$ hálózatban.

A1. Legyen $K_1 = \max_{(x,y)\in H} (f_1(x, y)) = f_1(x_1, y_1)$ és $H_1 = \{(x, y):(x, y)\in H, f_1(x, y)\geqq \geqq K_1 - 1\}$. Természetesen $(x_1, y_1)\in H_1$. Módosítsuk a kapacitásokat az alábbi módon:

$$\tilde{k}_H(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad (x,y)\in H_1,\ f_1(y,x) = 0 \\ 0, & \text{ha} \quad f_1(x,y) = k_H(x,y),\ f_1(y,x) = 0, \\ f_1(y,x) & \text{ha} \quad f_1(y,x) > 0, \\ k_H(x,y) & \text{máskor.} \end{cases}$$

Menjünk $A2$-re.

A2. Keressünk az $[N, A, \tilde{k}_H]$ hálózatban szabad kapacitású utat x_1-ből y_1-be. Ha ilyet nem találunk, akkor kész vagyunk és

$$K_1 = \min_{\{f: v(f)=v_0\}} \left(\max_{(x,y)\in H} f(x, y) \right)$$

Ha találtunk szabadkapacitású utat, legyen ez $\mathscr{P}$, menjünk *A3*-ra.

A3. Módosítsuk az f_1 folyamot $\mathscr{P}$ mentén:

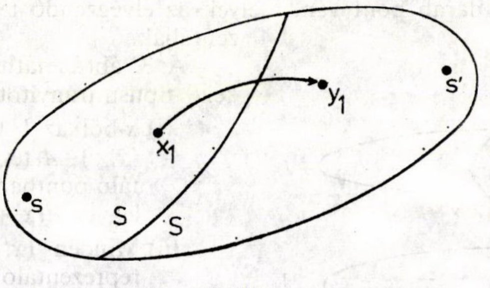
$$f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y)+1, & \text{ha } (x, y)\in\mathscr{P}, \\ f_1(x, y)-1, & \text{ha } (y, x)\in\mathscr{P}, \\ f_1(x, y)-1, & \text{ha } (x, y) = (x_1, y_1), \\ f_1(x, y), & \text{máskor.} \end{cases}$$

Menjünk *A4*-re.

A4. Legyen $f_1(x, y)=f_2(x, y)$ minden $(x, y)\in A$ esetén és menjünk *A1*-re.

Megjegyezzük, hogy az algoritmus során a folyam értéke nem változik.

4.1. TÉTEL. A 4.2. algoritmus valóban a 4.1. probléma megoldását szolgáltatja.



2. ábra

Bizonyítás: Az nyilvánvaló, hogy ha *A2* pontban találunk x_1-ből y_1-be vezető szabadkapacitású utat az $[N, A, \tilde{k}_H]$ hálózatban, akkor a megkonstruált f_2 folyamra fennáll:

$$|\{(x, y)\colon (x, y)\in H,\ f_2(x, y) = K_1\}| < |\{(x, y)\colon (x, y)\in H,\ f_1(x, y) = K_1\}|.$$

Így algoritmusunk véges sok lépésben véget ér.

Tegyük fel, hogy *A2* pontban nem találunk x_1-ből y_1-be vezető szabadkapacitású utat. Ez azt jelenti, hogy létezik (S, S') telített vágás $[N, A, k_H]$-ban, mely az s és s' pontokat elválasztja. Soroljuk az (S, S') vágás éleit a következő három osztályba:

$$E_1 = \{(x, y)\colon (x, y)\in H,\ (x, y)\in(S, S'),\ f_1(x, y) = K_1\}$$

$$E_2 = \{(x, y)\colon (x, y)\in H,\ (x, y)\in(S, S'),\ f_1(x, y) = K_1-1\}$$

$$E_3 = \{(x, y)\colon (x, y)\in(S, S'),\ (x, y)\notin H\}.$$

Így

(4.3)
$$v_0 = v(f_1) = \sum_{(x,y)\in E_3} k_H(x, y)+|E_1|\,K_1+|E_2|(K_1-1).$$

Ha létezne olyan v_0 értékű g folyam $[N, A, k_H]$-ban, melyre

$$K_g = \max_{(x,y)\in H} \{g(x, y)\} < K_1$$

volna, az azt jelentené, hogy

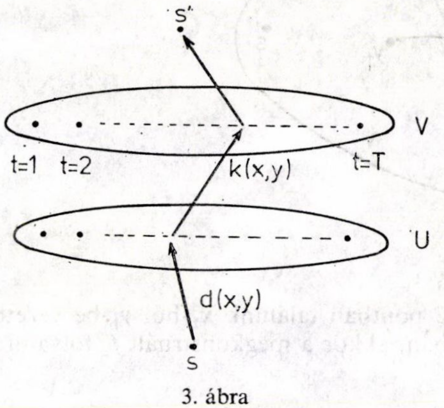
$$v_0 = v(g) \leqq \sum_{(x,y)\in E_3} k_H(x, y) + (|E_1| + |E_2|)(K_1 - 1). \tag{4.4}$$

(4.3) és (4.4) egybevetéséből $|E_1| = 0$ következne, ami ellentmondás, hiszen $(x_1, y_1) \in \in E_1$. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

5. A 4.2. algoritmus alkalmazása a 2.1. probléma megoldására

A 2.1 problémában adott $[N, A, d, k]$ tervütemhálóhoz és $r(x)$, $x \in N$ ütemezéshez konstruáljuk meg a következő hálózatot:
A 3. ábrán látható hálózat csúcsai — s és s' pontoktól eltekintve — két halmazba, U-ba és V-be sorolhatók.

V-ben T darab pont van, a munka elvégzéséhez felhasználható napokat reprezentálják. U-ban m darab pont van, melyek az elvégzendő tevékenységeket reprezentálják.



3. ábra

A 3. ábrán látható hálózat a következő típusú irányított éleket tartalmazza:

(i) s-ből az U halmaz pontjaiba, az $(x, y) \in A$ tevékenységet reprezentáló pontbamutató él kapacitása legyen $d(x, y)$.

(ii) Minden $(x, y) \in A$ tevékenységet reprezentáló pontból olyan $1 \leqq t \leqq T$ napot reprezentáló pontokba, melyekre $r(x)+1 \leqq t \leqq r(y)$, az ilyen élek kapacitása legyen $k(x, y)$.

(iii) V halmaz pontjaiból s'-be, $+\infty$ kapacitással.

Az így definiált hálózatban létezik

$$v_0 = \sum_{(x,y)\in A} d(x, y)$$

értékű folyam. Ehhez csak annyit kell belátni, hogy olyan (S, S') vágás, melyre $S \cap V = \emptyset$, $S \cap U \neq \emptyset$ nem lehet minimális a hálózatban. Egy ilyen (S, S') vágás értéke $(S \cap V = \emptyset,\ S \cap U = P)$

$$\sum_{(x,y)\notin P} d(x, y) - \sum_{(x,y)\in P} k(x, y)\big(r(y) - r(x) - 1\big),$$

és mivel $r(x)$, $x \in N$ ütemezés, a

$$k(x, y)\big(r(y) - r(x) - 1\big) \geqq d(x, y)$$

reláció fennállásából következik, hogy a vágás értéke legalább

$$v_0 = \sum_{(x,y)\in A} d(x, y).$$

Nyilvánvaló, hogy a hálózatban minden v_0 értékű f folyam, az elvégzendő munka egy megvalósítását adja, $\max_{t\in V} \{f(t, s')\}$ munkás felhasználásával. Ha tehát a hálózatban a $H = \{(t, s') : t \in V\}$ definíciót választjuk, a 2.1. probléma megoldása a 3. ábrán látható hálózatra alkalmazott 4.2. algoritmus segítségével történhet.

6. Az I. probléma megoldása egy speciális esetben

Mint azt már a 2. szakaszban hangsúlyoztuk a 2.1. probléma feltételeiben az $r(x)$, $x\in N$ ütemezés megadása szerepel. Az általános I. probléma megoldásához úgy jutnánk el, ha meg tudnánk határozni azt az $r_0(x)$, $x\in N$ ütemezést, mely mellett az adódó minimális munkásszám a legkisebb.

Tekintsük az $[N, A, d, k]$ tervütemhálót, mellyel egy adott munkát reprezentálunk. Legyen feladatunk olyan szervezést megadni, mely — a részberendezés betartásával — a legrövidebb T_0 idő alatt, minimális számú munkás felhasználásával biztosítja a munka elvégzését. Foglalkozzunk először azon T_0 idő meghatározásával, mely minimálisan szükséges a munka elvégzéséhez. Egy $(x, y)\in A$ tevékenység elvégzése legkevesebb $\left[\frac{d(x, y)}{k(x, y)}\right]$ napot igényel. Definiáljuk minden $(x, y)\in A$ élhez a $h(x, y) = \left[\frac{d(x, y)}{k(x, y)}\right]$ számot és tekintsük az $[N, A, h]$ tervütemhálót.

Ekkor az adott munka elvégzéséhez minimálisan szükséges időt az $[N, A, h]$ tervütemhálóban meghatározott kritikus (leghosszabb) út adja.

Tegyük fel, hogy ezen kritikus út átmegy a tervütemháló minden pontján. Ez azt jelenti, hogy az $r_0(x)$, $x\in N$ ütemezésen — melyet a kritikus út definiál — nem változtathatnak anélkül, hogy a végrehajtásra kijelölt időintervallumot ne nyújtanánk meg. Így az esetben a legrövidebb idő alatti végrehajtás egyetlen $r_0(x)$, $x\in N$ ütemezéssel valósítható meg és ezen ütemezés mellett 2.1. probléma megoldása szolgáltatja a minimálisan szükséges munkások számát.

IRODALOM

[1] FORD, L. R. AND FULKERSON, D. R., *Flows in Networks* (Princeton University Press, Princeton. 1962).

[2] GALE, D., "A theorem of flows in networks", *Pacific J. Math.* 7 (1957), 1073—1082.

[3] HU, T. C., "Parallel sequencing and assembly line problems", *Op. Res.* 2 (1961), 841—848.

[4] KLAFSZKY, E., *Hálózati folyamok* (Bolyai János Mat. Társ., Budapest, 1969).

[5] KOMÁROMI, É. ÉS ARANY, I., *Hálózati feladatok*, (MTA SZK, Szemináriumi füzetek, 3/1971).

[6] RAMAMOORTHY, C. V., CHANDY, K. M. AND GONZALEZ, M. J., "Optimal scheduling strategics in a multiprocessor system", *IEEE Transaction on Computers* 2 (1972).

[7] RYSER, H. J., "Combinatorial properties of matrices of zeros and ones", *Canad. J. Math.* **9** (1957) 371—377.

[8] Енмольев, Ю. М. и Меьник, И. М., *Экстремакьные задачи на графах* (Наукова Дуика, Киев, 1968).

(Beérkezett: 1977. október 17.)

KAS PÉTER
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI UTCA 49.

ON PROBLEMS OF PREEMPTIVE SCHEDULING INTERPRETED BY NETWORK FLOW PROBLEMS

P. KAS

In the present paper some problems of preemtive scheduling with additional restrictions are represented as a special type network flow problem. The main result of the paper is an efficient algorithm which is used to solve a "bottleneck" type flowproblem prеsenting a method to solve the corresponding scheduling problem at the same time.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 139—150*

DISZKRÉT PROGRAMOZÁSI FELADATOK OPTIMÁLIS MEGOLDÁSAIRÓL

VIZVÁRI BÉLA
Budapest

A dolgozat célja, hogy megvizsgáljuk a diszkrét programozási feladatokban a megengedett megoldások illetve az optimális pontok halmazának struktúráját. Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges nulla-egyes diszkrét programozási feladathoz van egy vele elég szigorú értelemben ekvivalens általánosított hátizsákfeladat (csupa nemnegatív együtthatót tartalmazó probléma). Végül a feltételek összevonásának néhány kérdését érintjük.

1. Bevezetés

A diszkrét programozás alapfeladata a

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \tag{1.2}$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1, \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

típusú probléma, ahol $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{b} \in R^m$ és $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix. Különböző variánsokat kapunk, ha (1.3) helyett az alábbi feltételek valamelyikét követeljük meg:

$$0 \leqq x_j \leqq d_j, \quad x_j \text{ egész}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

vagy

$$x_j \geqq 0 \text{ és egész}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Ezekre a feladatokra számos megoldási módszer ismeretes, melyek közül a probléma diszkrétségét kifejező feltételnek megfelelően választhatunk a rendelkezésre álló algoritmusok közül. Közös jellemzője ezeknek az eljárásoknak, hogy csak implicit módon használják fel a megengedett tartomány szerkezetét.

Az itt ismertetésre kerülő vizsgálatok célja a feladatok struktúrájának pontosabb megismerése.

Kezdetben a

$$\begin{gathered} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \\ x_j = 0 \text{ vagy } 1, \quad j = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{1.6}$$

és a

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\text{(1.7)} \qquad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$$

$$0 \leqq x_j \leqq d_j \quad \text{és} \quad x_j \text{ egész}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

valamint a

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

$$\text{(1.8)} \qquad \mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}$$

$$x_j \geqq 0 \quad \text{és} \quad x_j \text{ egész}, \quad j = 1, \ldots, n$$

alakú feladatokkal fogunk foglalkozni és feltesszük, hogy valamennyi együttható nemnegatív. Könnyen látható, hogy (1.6) és (1.7) esetében $\mathbf{c} \geqq \mathbf{0}$ nem jelent tényleges megszorítást. Ezeket a problémákat általánosított hátizsák feladatoknak nevezzük. A név az egyfeltételes (hátizsák) problémából származik, amely egyszerűen visszavezethető a nemnegatív együtthatós esetre. A továbbiakban a következő szóhasználattal élünk: *megoldásnak* nevezzük a feladat típusainak megfelelő egész komponensű vektorokat. Ezek közül a *megengedett megoldások* azok, amelyek még a kívánt egyenlőtlenségeket is kielégítik.

Vezessük be a megoldásokon az „$\cup$" és a „$\cap$" műveleteket:

$$\text{(1.9)} \qquad \mathbf{x} \cup \mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad \text{ahol} \quad z_j = \max\{x_j, y_j\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

és

$$\text{(1.10)} \qquad \mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \mathbf{w}, \quad \text{ahol} \quad w_j = \min\{x_j, y_j\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ismeretes, hogy az így definiált műveletekre nézve az (1.7) és (1.8) feladatok megoldásai egy hálót alkotnak, melyet $\mathcal{L}$-lel fogunk jelölni. Az (1.6) probléma esetén egy *Boole-algebrához* jutunk, melyet $\mathcal{B}$ jelöl. Ha a feladat dimenzióját hangsúlyozni akarjuk, akkor az $\mathcal{L}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$ szimbólumokat használjuk. Az algebrai műveletekkel értelmezett rendezés megegyezik az ún. parciális rendezéssel, ahol

$$\mathbf{x} \leqq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_j \leqq y_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

A dolgozatban $\mathcal{L}$ és $\mathcal{B}$ egyszerre jelöli az algebrai struktúrát és a struktúra elemeinek halmazát. $\mathcal{L}$-t és $\mathcal{B}$-t az n-dimenziós tér egy-egy részhalmazán definiáltuk, ezért elemeik kettős természetűek: az algebrai tulajdonságokon felül megtartják vektor jellegüket is (amit a jelölésben továbbra is hangsúlyozunk). Mivel az (1.6) feladat speciális esete (1.7)-nek, ezért $\mathcal{L}$ egy általánosabb struktúra $\mathcal{B}$-nél. Így amikor az állításainkat csak az $\mathcal{L}$ hálóra fogalmazzuk meg, akkor azok természetszerűleg vonatkoznak $\mathcal{B}$-re is.

1.1. Definíció. Az $\mathbf{y}$ pont az $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ halmazban maximális (minimális), ha nincs olyan $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, hogy $\mathbf{y} \leqq \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}$).

Az (1.6) és az (1.7) (ill. az (1.8)) feladatok esetében az optimális megoldások között van olyan, amelyik a megengedett tartományban maximális (ill. minimális). Ha $\mathbf{c}$ csupa pozitív elemet tartalmaz, akkor minden optimális megoldás ilyen. Ha az $\mathbf{x}$ vektor megengedett pont, akkor ugyancsak megengedett lesz az (1.6) és (1.7) feladatok esetén minden x-nél kisebb, (1.8) esetén minden x-nél nagyobb megoldás is.

Nyilván igaz az

1.1. TÉTEL. Legyen $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$. $\mathcal{P}$ (ill. $\mathcal{R}$) alkossa az $\mathcal{S}$-ben maximális (ill. minimális) pontok halmazát. Ekkor $\mathcal{P}$ (ill. $\mathcal{R}$) páronként összehasonlíthatatlan elemeket tartalmaz.

A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathcal{S}$ nem üres, akkor $\mathcal{R}$ sem az és az (1.7) feladathoz tartozó háló esetén $\mathcal{P}$ sem.

Így tehát az optimális megoldások (vagy bizonyosak ezek közül) benne vannak a megengedett tartományban maximális (ill. minimális) elemekből alkotott, páronként összehasonlíthatatlan pontokat tartalmazó halmazban.

2. Lefogó rendszerek

2.1. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}$ halmazt lefogó rendszernek nevezzük, ha $\forall \mathbf{x}\in\mathcal{L}$-re az alábbi három eset közül legalább egy teljesül:

$$\exists \mathbf{z}\in\mathcal{F} \quad \mathbf{x}<\mathbf{z} \tag{2.1}$$

$$\exists \mathbf{z}\in\mathcal{F} \quad \mathbf{x}=\mathbf{z} \tag{2.2}$$

$$\exists \mathbf{z}\in\mathcal{F} \quad \mathbf{x}>\mathbf{z}. \tag{2.3}$$

Mi a továbbiakban a lefogó rendszerek egy speciális csoportjával foglalkozunk elsősorban. Ezért bevezetjük a következő fogalmat.

2.2. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathcal{F}\subset\mathcal{L}$ halmazt minimális lefogó rendszernek nevezzük, ha

a) lefogó rendszer és

b) nincs olyan $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}\in\mathcal{F}$, hogy a $\mathbf{z}<\mathbf{w}$ reláció igaz legyen.

2.1. TÉTEL. Egy $\mathcal{F}$ lefogó rendszer minimális akkor és csak akkor, ha $\forall \mathbf{x}\in\mathcal{L}$-re a (2.1)—(2.3) esetek közül pontosan egy következik be.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}\in\mathcal{L}$-re a (2.1) és a (2.2) eset is bekövetkezik. Tehát $\exists \mathbf{w}, \mathbf{z}\in\mathcal{F}$, hogy

$$\mathbf{x}<\mathbf{w} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}=\mathbf{z},$$

amiből látható, hogy

$$\mathbf{z}<\mathbf{w}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{F}$ nem minimális lefogó rendszer. Hasonlóan járhatunk el, ha egy x-re a (2.1) és (2.3) vagy a (2.2) és a (2.3) eset áll fenn.

Megfordítva ha $\exists \mathbf{z}, \mathbf{w}\in\mathcal{F}$, hogy $\mathbf{z}<\mathbf{w}$, akkor $\mathbf{x}=\mathbf{z}$-re a (2.1) és a (2.2) eset is teljesül.

Szemléletesen azt lehetne gondolni, hogy a minimális lefogó rendszerek úgy keletkeznek, hogy kiindulva egy tetszőleges $\mathcal{F}$ lefogó rendszerből addig hagyunk el elemeket $\mathscr{F}$-ből, amíg az csupa összehasonlíthatatlan pontot nem tartalmaz. Valójában nem ez a helyzet. Tekintsük például a

$$z'_1 = (1, 1, 1, 0, 0), \quad z'_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$z'_3 = (0, 0, 0, 1, 1), \quad z'_4 = (0, 1, 0, 1, 0)$$

$$z'_5 = (0, 1, 0, 0, 1), \quad z'_6 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

$$z'_7 = (0, 0, 1, 0, 1)$$

vektorokat. Az

$$\mathscr{F} = \{\mathbf{z}_i,\ i = 1, \dots, 7\}$$

halmaz lefogó rendszert alkot $\mathscr{B}^{(5)}$-ben.

Továbbá

$$\mathbf{z}_2 < \mathbf{z}_1.$$

Azonban $\mathbf{z}_2$ elhagyása esetén például az

$$(1, 0, 0, 0, 1)'$$

vektor összehasonlíthatatlan lesz $\mathscr{F}$ megmaradt elemeivel. Tehát pontok elhagyásával halmazunk elvesztheti lefogó rendszeri mivoltát.

2.2. Tétel. Legyen $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}$ páronként összehasonlíthatatlan pontok nem üres halmaza. Ekkor létezik olyan $\mathscr{K} \subset \mathscr{L}$ halmaz, hogy

(2.4) $$\mathscr{H} \cap \mathscr{K} = \emptyset$$

(2.5) $$\mathscr{F} = \mathscr{H} \cup \mathscr{K} \quad \text{minimális lefogó rendszer}$$

(2.6) ha egy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$-re $\exists \mathbf{k} \in \mathscr{K}$ hogy $\mathbf{x} < \mathbf{k}$, akkor $\exists \mathbf{h} \in \mathscr{H}$, hogy $\mathbf{x} < \mathbf{h}$.

Bizonyítás. Ha $\mathscr{H}$ lefogó rendszer, akkor kész vagyunk. Különben jelölje $\mathscr{N}$ a $\mathscr{H}$-beliekkel összehasonlíthatatlanok nem üres halmazát.

Egy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ elem esetén $\mathscr{L}$-ben véges sok $\mathbf{x}$-nél kisebb elem van. Ezért egy tetszőleges nem üres $\mathscr{M}$ halmazban van minimális elem. Továbbá bármely $\mathbf{x} \in \mathscr{M}$ esetén az alábbi két eset közül pontosan egy igaz:

a) $\mathbf{x}$ minimális $\mathscr{M}$-ben

b) $\exists \mathbf{m} \in \mathscr{M}$, $\mathbf{m}$ minimális $\mathscr{M}$-ben és $\mathbf{m} < \mathbf{x}$.

Legyen $\mathscr{K}$ az $\mathscr{N}$-ben levő vektorok közül a minimálisok halmaza. Ekkor $\mathscr{K}$ összehasonlíthatatlan elemeket tartalmaz az 1.1. tétel szerint.

Nyilván

$$\mathscr{H} \cap \mathscr{K} = \emptyset.$$

Tekintsük az

$$\mathscr{F} = \mathscr{H} \cup \mathscr{K}$$

vektorrendszert. Legyen $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ egy tetszőleges pont. Ekkor vagy $\mathbf{x} \notin \mathscr{N}$ és így összehasonlítható valamelyik $\mathscr{H}$-beli elemmel, vagy $\mathbf{x} \in \mathscr{N}$. Az utóbbi esetben $\mathbf{x}$ vagy minimális $\mathscr{N}$-ben és akkor $\mathbf{x} \in \mathscr{K}$, vagy van olyan $\mathbf{k} \in \mathscr{K}$, hogy $\mathbf{k} < \mathbf{x}$. Tehát az $\mathscr{F}$ halmaz lefogó rendszer.

$\mathscr{F}$ összehasonlíthatatlan elemeket tartalmaz, mert a $\mathscr{H}$-beliek egymás között, a $\mathscr{K}$ halmaz definíciója szerint a $\mathscr{H}$-beliek a $\mathscr{K}$-beliekkel és mint láttuk a $\mathscr{K}$-beliek egymás között összehasonlíthatatlanok. Az eddigi eredményeket összefoglalva a (2.4) és a (2.5) követelményeket teljesítettük.

Ha egy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$-re $\exists \mathbf{k} \in \mathscr{K}$, hogy $\mathbf{x} < \mathbf{k}$, akkor $\mathbf{x}$ biztosan összehasonlítható egy $\mathbf{h} \in \mathscr{H}$ elemmel. Ellenkező esetben ugyanis $\mathbf{x} \in \mathscr{N}$ is igaz volna és így $\mathbf{k}$ nem lehetne minimális $\mathscr{N}$-ben, ami ellentmond $\mathscr{K}$ definíciójának. Továbbá

$$\mathbf{h} \leqq \mathbf{x}$$

nem állhat fent, mert ez maga után vonná a

$$\mathbf{h} < \mathbf{k}$$

egyenlőtlenséget is. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{k} \notin \mathscr{N}$, ami lehetetlen.

Felmerül a kérdés, hogy egy páronként összehasonlíthatatlan elemeket tartalmazó $\mathscr{H}$ halmaz mikor lesz minimális lefogó rendszer.

A nulla-egyes esetre vonatkozik SPERNER híres tétele:

2.3. TÉTEL. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ egy véges halmaz. Legyen $\mathscr{A}$ A részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy $A_i, A_j \in \mathscr{A}$ $(i \neq j)$ esetén

$$A_i \not\subset A_j. \tag{2.7}$$

Ekkor $\mathscr{A}$ elemeinek száma legfeljebb

$$\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Az $A_i \subset A$ halmazok reprezentálhatók $0-1$ komponensű vektorokkal annak megfelelően, hogy egy a_k elem benne van-e A_i-ben vagy sem. Ezen vektorok összehasonlíthatatlanságát biztosítja a (2.7) feltétel. A tételben említett felső becslés nem javítható. Legyen ugyanis $\mathscr{A}$ az A halmaz összes olyan részhalmazának rendszere, mely részhalmazok mind pontosan $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemet tartalmazzanak. Ekkor $\mathscr{A}$ kielégíti a tétel feltételeit és elemeinek száma pontosan megegyezik a megadott korláttal.

Az (1.6) feladat esetén azonban nem várható, hogy a megengedett megoldások közül a maximálisak mind $\left[\frac{n}{2}\right]$ egyest tartalmaznak. Az általános esetre vonatkozik a következő, LUBELL-től származó

2.4. TÉTEL. Legyen A egy véges halmaz, elemeinek száma n. Legyen továbbá $\mathscr{A}$ az A halmaz olyan részhalmazaiból alkotott rendszer, amelyek kielégítik a (2.7) követelményt. Jelölje $|A_i|$ az $A_i \subset A$ halmaz elemeinek számát. Ekkor igaz a

$$\sum_{A_i \in \mathscr{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leqq 1 \tag{2.8}$$

egyenlőtlenség.

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{h}\in\mathscr{B}$ vektort. Azoknak az $\mathbf{x}$ pontoknak, amelyek nem összehasonlíthatóak $\mathbf{h}$-val, két feltételt kell kielégíteniük. Egyrészt legalább egy koordinátában nullát kell tartalmazniuk ott, ahol $\mathbf{h}$ egyest tartalmaz. Ezt a

$$\mathbf{h}'\mathbf{x} \leqq \sum_{j=1}^{n} h_j - 1 \tag{2.9}$$

feltétel fejezi ki, ahol h_j a $\mathbf{h}$ vektor j komponense ($j=1, \dots, n$). Másrészt $\mathbf{x}$-nek legalább egy komponensben egyest kell tartalmaznia ott, ahol $\mathbf{h}$-ban 0 áll. Vagyis teljesülnie kell a

$$(\mathbf{e}-\mathbf{h})'\mathbf{x} \geqq 1 \tag{2.10}$$

egyenlőtlenségnek, ahol $\mathbf{e}$ minden komponense 1.

Így tehát igaz a következő két tétel

2.5. TÉTEL. A $\mathscr{H}\subset\mathscr{B}$ halmaz páronként összehasonlíthatatlan pontokat tartalmaz. Tekintsük azt a $Q(\mathscr{H})\subset R^n$ konvex poliédert, amelynek minden $\mathbf{x}$ pontjára és minden $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$ vektorra (2.9) és (2.10) teljesül, továbbá

$$0 \leqq x_j \leqq 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ha

$$Q(\mathscr{H}) = \emptyset,$$

akkor $\mathscr{H}$ minimális jelfogó rendszer.

2.6. TÉTEL. A $\mathscr{H}\subset\mathscr{B}$ halmaz páronként összehasonlíthatatlan pontokat tartalmaz. Jelölje $\mathscr{K}$ a $\mathscr{B}$ azon pontjainak halmazát, melyek minden $\mathbf{h}\in\mathscr{H}$-ra kielégítik a (2.9) és (2.10) egyenlőtlenségeket. $\mathscr{H}$ akkor és csak akkor minimális lefogó rendszer, ha

$$\mathscr{K} = \emptyset.$$

Az utóbbi két tétel felhasználásának módja az (1.6) feladat megoldása során az, hogy ha sikerült találnunk egy a megengedett pontok között maximális vektort, akkor az eljárás további részében a (2.9) és a (2.10) egyenlőtlenségekkel kiegészítjük a probléma feltételi rendszerét. Ha $\mathscr{H}$ jelöli a már ismert maximális megengedett vektorok halmazát, akkor a

$$\begin{gathered} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}\in Q(\mathscr{H}) \end{gathered} \tag{2.11}$$

lineáris programozási feladat optimális célfüggvényértéke felső becslés a még nem vizsgált pontok célfüggvényértékeire.

3. Nulla-egyes diszkrétprogramozási feladatok optimális megoldásai

Ebben a szakaszban

$$\begin{gathered} \max \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}\in\mathscr{B} \end{gathered} \tag{3.1}$$

feladattal foglalkozunk, ahol az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\mathbf{c} \geqq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{A}$ mátrix elemeire és a $\mathbf{b}$ vektor komponenseire nincs nemnegativitási követelmény. A (3.1) problémát fogjuk összevetni a többdimenziós hátizsákfeladattal

3.1. TÉTEL. Legyen $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ egy minimális lefogó rendszer és

$$\mathscr{F} = \mathscr{H} \cup \mathscr{K}; \quad \mathscr{H} \cap \mathscr{K} = \emptyset; \quad \mathscr{H} \neq \emptyset.$$

Ekkor van olyan többdimenziós hátizsák feladat, amelyre a következők igazak: Jelölje $\mathscr{M}$ a feladat megengedett megoldásainak halmazát. Ekkor

(3.2) $\forall \mathbf{h} \in \mathscr{H}$ esetén $\mathbf{h} \in \mathscr{M}$,

(3.3) nincs olyan $\mathbf{m} \in \mathscr{M}$, amelyre létezne $\mathbf{h} \in \mathscr{H}$, hogy $\mathbf{h} < \mathbf{m}$,

(3.4) $\forall \mathbf{k} \in \mathscr{K}$ esetén $\mathbf{k} \notin \mathscr{M}$,

(3.5) $\forall \mathbf{k} \in \mathscr{K}$ és $\forall \mathbf{m} < \mathbf{k}$ esetén $\mathbf{m} \in \mathscr{M}$.

Bizonyítás. Minden $\mathbf{g} \in \mathscr{F}$-re generálunk egy

$$\mathbf{a}'(\mathbf{g})\mathbf{x} \leqq b(\mathbf{g}) \tag{3.6}$$

lineáris egyenlőtlenséget, ahol $\mathbf{a}(\mathbf{g}) \in R^n$; $b(\mathbf{g}) \in R$ és minden együttható nemnegatív. Így

$$\mathscr{M} = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \mathscr{B};\ \mathbf{a}'(\mathbf{g})\mathbf{x} \leqq b(\mathbf{g}),\ \forall \mathbf{g} \in \mathscr{F} \text{ esetén}\},$$

vagyis $\mathscr{M}$ valóban egy többdimenziós hátizsákfeladat megengedett megoldásainak halmaza lesz.

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. g_i jelöli a $\mathbf{g}$ vektor i-edik komponensét, $i = 1, \ldots, n$.

1. $\mathbf{g} \in \mathscr{H}$ esetén az $\mathbf{a}(\mathbf{g})$ vektor komponenseit az

$$a_i(\mathbf{g}) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad g_i = 1, \\ \varepsilon, & \text{ha} \quad g_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

formula adja meg, továbbá

$$b(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Most a (3.6) feltétel kizár minden $\mathbf{w} > \mathbf{g}$ pontot. Viszont (3.6)-ot kielégíti $\mathbf{g}$, a parciális rendezésben nála kisebb vektorok, valamint az összes vele összehasonlíthatatlan $\mathbf{y}$ pont. Ugyanis

$$\mathbf{a}'(\mathbf{g})\mathbf{g} = b(\mathbf{g}). \tag{3.7}$$

A nemnegativitás miatt $\mathbf{z} < \mathbf{g}$ esetén

$$\mathbf{a}'(\mathbf{g})\mathbf{z} < \mathbf{a}'(\mathbf{g})\mathbf{g}.$$

Végül

$$\mathbf{a}'(\mathbf{g})(\mathbf{g} - \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{g})(g_i - y_i) = \sum_{\substack{i \\ g_i = 1,\, y_i = 0}} 1 - \sum_{\substack{i \\ g_i = 0,\, y_i = 1}} \varepsilon.$$

Itt az első tagot 1-gyel alulról, a másodikat $(n-1)\,\varepsilon$-nal felülről becsülve kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}'(\mathbf{g})(\mathbf{g}-\mathbf{y}) \geqq 1-\frac{n-1}{n+1} > 0,$$

ami (3.7) alapján azt jelenti, hogy $\mathbf{y}$ kielégíti (3.6)-ot.

2. $\mathbf{g}\in\mathscr{K}$ esetén legyen

$$a_i(\mathbf{g}) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad g_i = 1, \\ \varepsilon, & \text{ha} \quad g_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

továbbá

$$b(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{n} g_i - \varepsilon.$$

Mivel $\mathscr{H} \neq \emptyset$ ezért $\mathbf{0} \notin \mathscr{K}$ és így $b(\mathbf{g}) > 0$.

Most a (3.6) egyenlőtlenséget $\mathbf{g}$ és a rendezésben minden nála nagyobb vektor megsérti. Ismét könnyen megmutatható, hogy (3.6) nem zár ki egyetlen $\mathbf{g}$-nél kisebb vagy $\mathbf{g}$-vel összehasonlíthatatlan pontot sem.

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{m} < \mathbf{g}$ vektort. Ekkor léteznek olyan $\mathbf{f}\in\mathscr{F}$ elemek, hogy $\mathbf{m}$ összehasonlítható $\mathbf{f}$-fel. Nyilván maga $\mathbf{g}$ is ilyen. Most

$$\mathbf{f} \leqq \mathbf{m}$$

nem teljesülhet, mert ekkor

$$\mathbf{f} < \mathbf{g}$$

is igaz, ami $\mathscr{F}$ minimális volta miatt lehetetlen. Tehát csak az

$$\mathbf{m} < \mathbf{f}$$

reláció állhat fent. Mivel azonban a (3.6) feltétel, akár $\mathscr{H}$-beli akár $\mathscr{K}$-beli vektorra vonatkozik, nem zárja ki az őt generáló pontnál kisebbeket, ezért $\mathbf{m}\in\mathscr{M}$ is teljesül.

Eddigi eredményeinket felhasználva megmutatjuk, hogy a (3.1) feladatok osztálya egy elég szigorú értelemben ekvivalens az általánosított hátizsákfeladatok osztályával.

3.1. Definíció. Legyen $\mathscr{M}, \mathscr{N} \subset \mathscr{B}$ két tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{M}$ és $\mathscr{N}$ diszkrét programozási szempontból ekvivalens (a későbbiekben egyszerűen ekvivalens), ha bármely $\mathbf{c} \geqq \mathbf{0}$ célfüggvényvektor esetén a

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}\in\mathscr{M}$$

illetve a

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}\in\mathscr{M}$$

feladatoknak van azonos optimális megoldása.

3.2. Tétel. Egy tetszőleges, megengedett megoldással rendelkező (3.1) alakú feladathoz van olyan általánosított hátizsákfeladat, hogy az egyes problémákhoz tartozó megengedett megoldások halmazai ekvivalensek egymással.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{M}$ a (3.1) feladat megengedett megoldásainak halmazát. A célfüggvényvektor nemnegativitása miatt van olyan optimális megoldás, amely $\mathcal{M}$-ben maximális. Legyen

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{h}\colon \mathbf{h} \in \mathcal{M};\ \text{nincs olyan } \mathbf{m} \in \mathcal{M},\ \mathbf{h} < \mathbf{m}\}.$$

Mivel $\mathcal{M}$ véges sok elemet tartalmaz, ezért egy tetszőleges $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$ pont vagy maximális $\mathcal{M}$-ben, vagy van ott nála nagyobb maximális pont. Így elég annyit bizonyítani, hogy előállítható egy általánosított hátizsákfeladat, ahol a megengedett megoldások közül a maximálisok halmaza megegyezik $\mathcal{H}$-val.

Tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ páronként összehasonlíthatatlan elemeket tartalmaz. Ekkor $\mathcal{H}$ kiegészíthető egy $\mathcal{K}$ halmazzal a 2.2. tételnek megfelelően egy minimális lefogó rendszerré. A 3.1. tételt alkalmazzuk az

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$$

halmazra úgy, hogy $\mathcal{H}$ az ottani $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ pedig az ottani $\mathcal{K}$ szerepét játsza. A (2.6) feltétel biztosítja, hogy a most kapott általánosított hátizsákfeladat megengedett megoldásainak halmazában csak a $\mathcal{H}$-beli pontok lesznek maximálisak.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás során nem használtuk fel, hogy az $\mathcal{M}$ halmazt lineáris feltételekkel definiáltuk. Ezért a tételt általánosabb formában is ki lehet mondani. Ennek jelentőségére később még visszatérünk.

2. A 3.2. tétel nem szolgáltat eljárást egy adott feladattal ekvivalens általánosított hátizsákfeladat meghatározására. A bizonyítás látszólagos konstruktivitása ellenére is csak egy egzisztenciatételről van szó. Jelentősége egy konkrét gépi algoritmus során a stratégia illetve a felhasználandó heurisztikus eljárások megválasztásában lehet.

3. Felmerül a kérdés, hogy jelentene-e valamilyen számítástechnikai előnyt, ha egy adott problémát általánosított hátizsákfeladattá tudnánk transzformálni. Nemnegatív célfüggvény együtthatókat feltételezve az optimális megoldások a maximális megengedett megoldások között vannak. ($\mathbf{x}$ maximális megengedett megoldás, ha eleget tesz a (3.2) és (3.3) feltételeknek.) Az általánosított hátizsákfeladat esetében igen egyszerű ellenőrizni, hogy egy adott pont maximális megengedett-e vagy sem. Ugyanis egy megengedett megoldás esetén csak azt kell vizsgálni, hogy van-e olyan változó, amelyiknek értéke 0-ról 1-re változtatható a megengedettség elrontása nélkül. Így egy megengedett megoldásból egy n lépéses algoritmussal egy bizonyítottan maximális megengedett megoldást lehet csinálni. Egy általános feladat esetén, ha k változó rögzítése után kaptunk egy maximális megengedett megoldást, akkor ezt a tényt egy $n-k$ dimenziós feladat megoldásával kell bizonyítani. Mivel ennek az utóbbi problémának nincs megengedett megoldása, ezért mint az az irodalomból is ismeretes, ez egy relative időigényes feladat. Mégis a leszámlálási algoritmusok végrehajtása során megtörténik. Mindebből egyrészt az következik, hogy az általánosított hátizsákfeladatok esetében a leszámlálási algoritmusok jelentősen gyorsíthatók, másrészt pedig ezek végig megengedett megoldásokon haladhatnak. További jelentős előny, amit már tulajdonképpen említettünk, hogy nagyon könnyen generálhatók jó megengedett megoldások. Ez mind algoritmikus, mind felhasználói szempontból igen hasznos.

Felmerül a kérdés, hogy a tétel igaz-e abban az élesebb formában, hogy egy tetszőleges (3.1) alakú probléma megengedett megoldásainak halmaza ekvivalens egy alkalmas hátizsákfeladat megengedett megoldásainak halmazával. A kérdésnek elméleti érdekességén túl nagy gyakorlati jelentősége van. Régótá ismeretesek a módszerek arra, hogy az

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$$

alakú feltételekben az egyenlőségeket egyetlen egyenletté vonjuk össze. A kapott

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = d$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

feltételrendszer ekvivalens lesz az eredetivel. Itt természetesen a $\mathcal{D}$ halmaz nem lehet akármilyen, de például $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ esetén $\mathcal{D}$ rendelkezik az eljárás során megkívánt tulajdonságokkal. Az egyenletek összevonása számítógépes szempontból fontos, mert így az egyes konkrét feladatok megoldásához szükséges számítási idő jelentősen csökkenhet.

Mindeddig nem ismertük az

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b} \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{3.8}$$

rendszerek hasonló tulajdonságait. A gyakorlati problémák többségének feltételei (3.8) alakúak. Ha a 3.2. tétel igaz lenne az élesebb formában is, az azt jelentené, hogy (3.8) átírható volna.

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} \leqq d$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}$$

alakba.

A feltett kérdésre azonban a válasz nemleges, mint azt példánk bizonyítja.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &\leqq 1 \\ x_3 + x_4 &\leqq 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

egyenlőtlenségeket. Könnyen látható, hogy a megengedett pontok közül a maximálisok:

$$\mathcal{H} = \{(1, 0, 1, 0)', (1, 0, 0, 1)', (0, 1, 1, 0)', (0, 1, 0, 1)'\}.$$

A $\mathcal{H}$ vektorrendszert a

$$\mathcal{K} = \{(1, 1, 0, 0)', (0, 0, 1, 1)'\}$$

halmaz egészíti ki minimális lefogó rendszerré.

A $\mathcal{H}$-beliekkel összehasonlíthatatlan pontok éppen $\mathcal{K}$ elemei. Tegyük fel, hogy létezik a (3.9)-cel ekvivalens

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \leqq e$$

alakú egyenlőtlenség. Helyettesítsük ide be a $\mathcal{H}$ és a $\mathcal{K}$ halmaz pontjait. Ekkor létezik $\varepsilon>0$, hogy a $\mathscr{K}$-beliek legalább ennyivel megsértik az egyenlőtlenséget. Végül az

$$\begin{aligned}
a \quad +c \quad &\leqq e \\
a \quad\quad +d &\leqq e \\
b+c \quad &\leqq e \\
b \quad +d &\leqq e \\
a+b \quad\quad &\geqq e+\varepsilon \\
c+d &\geqq e+\varepsilon
\end{aligned}$$

feltételrendszert nyerjük. Az első és az utolsó egyenlőtlenségből nyerhetjük, hogy

$$a-d \leqq -\varepsilon$$

míg a negyedik és az ötödik a

$$-a+d \leqq -\varepsilon$$

összefüggést adja, ami ellentmondás.[1]

A 3.2. tétel azonban továbbfejleszthető egy másik irányban. E. BALAS és R. JEROSLOW mutatta meg, hogy igaz a

3.3. TÉTEL. Minden

$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \leqq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$
$$\mathbf{x} \in \mathscr{B}$$

alakú feltétel átírható az alábbi alakba, ahol minden egyenlőtlenséget egy külön feltételrendszerbe transzformálunk:

$$\sum_{j\in S_{ik}^+} y_j + \sum_{j\in S_{ik}^-} x_j \geqq 1, \quad S_{ik} = \{S_{ik}^+, S_{ik}^-\} \in \mathscr{S}_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.10}$$

$$x_j + y_j = 1 \tag{3.11}$$

$$x_j, y_j = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \tag{3.12}$$

ahol $S_{ik}^+, S_{ik}^- \subset \{1, \ldots, n\}$; $a_{ij} \geqq 0$ esetén $j \notin S_{ik}^-$ és $a_{ij} < 0$ esetén $j \notin S_{ik}^+$ minden $S_{ik} \in \mathscr{S}_i$-re, $i = 1, \ldots, m$; $\mathscr{S}_i$ pedig az $\{S_{ik}^+, S_{ik}^-\}$ párok alkalmasan megválasztott rendszere.

Mint már fent említettük, a 3.2. tétel bizonyítása során nem használtuk fel, hogy a megengedett megoldások halmazát lineáris egyenlőtlenségek határozták meg. Ezért a tétel vonatkozik tetszőleges feltételek megengedett megoldásainak $\mathscr{M}$ halmazára, azaz van olyan

$$\mathbf{D}\mathbf{x} \leqq \mathbf{g} \tag{3.13}$$
$$\mathbf{x} \in \mathscr{B}$$

általánosított hátizsákfeladat, hogy megengedett megoldásainak $\mathscr{N}$ halmaza a 3.1. definíció értelmében ekvivalens az $\mathscr{M}$ halmazzal. A (3.13) rendszerre alkalmazva a

[1] Dolgozatom nyomdába adása után jelent meg **V. Chvàtal** és **P. L. Hammer** [10] dolgozata. Ott szerepel egy, az általam közölttel ekvivalens példa is. Ezen felül a szerzők az egyenlőtlenségek összevonásával kapcsolatban további érdekes kérdéseket tárgyalnak.

3.3. tételt egy azonos dimenziós halmazlefedési problémát kapunk. Ugyanis a nemnegativitás miatt a (3.10)-nek megfelelő feltételekben minden i-re és k-ra $S_{ik}^{-}=\emptyset$, és így az x_j változók nem szerepelnek ténylegesen a feltételekben.

Igaz tehát a

3.4. TÉTEL. Egy tetszőleges nulla-egyes diszkrét programozási problémához van olyan azonos dimenziós halmazlefedési feladat, hogy a megengedett megoldások halmazai ekvivalensek.

Némileg hasonló eredményt ért el F. GRANOT és P. L. HAMMER.

Köszönetet mondok FORGÓ FERENC lektornak értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] BALAS, E. AND JEROSLOW, R., "Canonical cuts on the unit hypercube", *SIAM J. Appl. Math.* **23** (1972) 61—69.

[2] BRADLEY, G. H., "Transformation of integer programs to knapsack problems", *Discrete Mathematics* **1** (1971) 29—45.

[3] GLOVER, F., AND WOLOSEY, R. E. D., "Aggregating diophantine equations" *Zeitschrift für Operations Research* **16** (1972) 1—10.

[4] GRANOT, F. AND HAMMER, P. L., "On the role of generalized covering problems", *Centre de Recherches Math. Universite de Montreal, CRM* **220**, 1972.

[5] KATONA, G. O. H., "Extremal problems for hypergraphs", *Mathematical Centre Tracts* **56**, 1974, 13—42.

[6] KOVÁCS, L. B., *A diszkrét programozási problémák kombinatorikus módszerei* (Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969.)

[7] LUBELL, D., "A short proof of Sperner's lemma", *J. Combinatorial Theory* **1** (1969).

[8] ROSENBERG, I. G., "Aggregation of equations in integer programming", *Discrete Mathematics* **10** (1974) 325—341.

[9] SPERNER, E., "Ein Satz über Untermenge einer endlichen Menge", *Math. Z.* **27** (1928) 544—548.

[10] **Chvàtal, V. and Hammer, P. L.**, „Aggregation of inequalities in integer programming", *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 145—162.

(Beérkezett: 1977. szeptember 5.)

VIZVÁRI BÉLA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, XI., KENDE U. 13—17.

ON THE OPTIMAL SOLUTIONS OF DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS

B. VIZVÁRI

The aim of this paper is to investigate the algebric structure of integer programming problems (IPP). We show the connection of special subsets of the elements of Boolean algebras and the optimal solutions of generalized knapsack problems (GKP). Our main theorem states that every IPP is equivalent with a same dimensional GKP in a very strict sense. From this statement it is very easy to prove that every IPP is equivalent with a set covering problem, too. We give an example where the number of the inequalities cannot be reduced without the change of the set of the feasible solutions.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 151—159*

A MULTIPLIKÁTORMÓDSZER EGY ÚJ TÁRGYALÁSA

GERENCSÉR LÁSZLÓ
Budapest

A dolgozatban a multiplikátormódszer egy előismeretekre nem támaszkodó tárgyalását adjuk. A multiplikátormódszerrel egyenlőségfeltételek mellett történő optimalizálási feladatokat lehet megoldani. A módszer az utóbbi években népszerűségre tett szert, hazai környezetben azonban kevéssé ismert. A dolgozat célja egy igen egyszerű, mátrixfaktorizációra épülő tárgyalás bemutatása.

1. Bevezetés

A multiplikátor módszer kialakulását megelőzően az egyenlőség feltételek mellett történő optimalizálásra két megoldási kísérlet volt ismert. Az első módszer egy régi elméleti eredményre épül. A

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \tag{1.2}$$

feladat $\mathbf{x}^*$ megoldása ugyanis jellemezhető a következőképpen.

Vezessük be az

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

ún. *Lagrange-függvényt*. Ekkor alkalmas feltételek mellett léteznek olyan λ_i^* multiplikátorok, hogy

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}. \tag{1.4}$$

Ezen elméleti ismeret birtokában az $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ vektort az (1.2), (1.4) nemlineáris egyenletrendszerből lehet meghatározni. Ez utóbbi feladatra számos iteratív eljárást dolgoztak ki. Ezek hatékonysága sok tényezőtől függ, többek között egy alkalmas első közelítőmegoldás ismeretétől.

A feladat megoldásának egy másik szellemes útja az ún. szekvenciális (angol rövidítésben SUMT) módszer. Ennek alapgondolata az, hogy a feltételeket a célfüggvénybe építjük bele. Az eredeti feladatot a következővel közelítjük:

$$\min\left(f(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{p} h_j^2(\mathbf{x})\right). \tag{1.5}$$

Az ε paraméterrel nullához tartva biztosítható, hogy az (1.5) feladat $\mathbf{x}^*(\varepsilon)$ megoldása egyre jobban kielégíti az (1.2) feltételeket. Megmutatható, hogy bizonyos feltételek mellett $\mathbf{x}^*(\varepsilon) \to \mathbf{x}^*$. A szekvenciális módszer numerikus megvalósítása során különös nehézség az, hogy kis ε esetén az (1.5) feladat rosszul kondicionált. Ezen azt értjük, hogy a szokásos megoldási módszerek a kerekítési hibákra nagyon érzékenyek.

A multiplikátor módszer mindkét előbbi módszerhez kapcsolódik. Az első módszerrel szembeni előnye úgy fogalmazható, hogy az $L_{\mathbf{x}}=0$ feltétel helyett egy ennél erősebb:

$$Q_{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{és} \quad Q_{\mathbf{xx}} \quad \text{pozitív definit} \tag{1.6}$$

feltételt kapunk. A SUMT módszerrel szemben pedig a határátmenet elkerülhető.

A multiplikátor módszer alapgondolata HESTENEStől származik. Később POWELL függetlenül, egy más alakban újra megtalálta a módszert. A módszer tökéletesítésébe sokan bekapcsolódtak, többek között FLETCHER, ROCKEFELLAR. FLETCHER és BERTSEKAS kezdték meg a numerikus kérdések rendszeres vizsgálatát. Lényeges elméleti előrelépést jelent a szerző [6] dolgozatában közölt módszer. Újabban a módszert irányítástechnikai feladatok megoldására is alkalmazzák.

2. Optimalitási feltételek

Tekintsük a

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \tag{2.2}$$

feladatot. Itt $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ egy n dimenziós vektor. Ilyen feladatot kapunk pl. ha két különböző típusú darabból álló görbét akarunk illeszteni egy adatrendszerre. Legyenek a szóban forgó görbék $F(\mathbf{x}, \Theta)$ illetve $G(\mathbf{x}, \Theta)$, ahol Θ az ismeretlen paraméter, $\mathbf{x}$ pedig a kontroll változó. Egy előre rögzített $\mathbf{x}_0$ ponttól balra az $F(\mathbf{x}, \Theta)$ görbét, jobbra pedig a $G(\mathbf{x}, \Theta)$ görbét illesztjük. Az $\mathbf{x}_0$ pontban

$$F^{(i)}(\mathbf{x}_0, \Theta) = G^{(i)}(\mathbf{x}_0, \Theta) \tag{2.3}$$

típusú feltételekkel garantáljuk a két görbe rész sima illeszkedését. A felső (i) index i-edik deriváltat jelent, i (2.3)-ban szereplő értékeit a feladat alapján esetenként külön-külön magunknak kell megadni.

Visszatérve a (2.1), (2.2) feladatra azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{x}^*$ pont a feladat izolált lokális optimuma, ha minden az $\mathbf{x}^*$ pont egy kis környezetébe eső és a feltételeket kielégítő $\mathbf{x}$ pontra $f(\mathbf{x})$ szigorúan nagyobb, mint $f(\mathbf{x}^*)$. A feltételeknek eleget tevő pontok halmazát megengedett halmaznak nevezzük. Feltesszük, hogy f, h_j kétszer folytonosan differenciálhatók az $\mathbf{x}^*$ egy kis környezetében. Feltesszük továbbá hogy a $h_{1\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*), \dots, h_{p\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$ gradiens vektorok lineárisan függetlenek. A mondott feltételek mellett létezik egy $\mathbf{w}^*=(w_1^*, \dots, w_p^*)$ multiplikátorvektor, amellyel teljesül a *Lagrange-féle szükséges feltétel:*

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} w_j^* h_{j\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{2.4}$$

A *Lagrange-függvényt* az

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} w_j h_j(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

képlettel definiáljuk. Ekkor az (1.4) feltétel így is írható:

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) = 0. \tag{2.6}$$

A (2.6) feltétel elsőrendű feltétel. Szükségünk lesz másodrendű feltételre is, most ezt ismertetjük.

Vegyünk egy, a megengedett felületen fekvő $\mathbf{x}(t)$ kétszer differenciálható görbeívet, amelyre $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^*$. Számítsuk ki az $f(\mathbf{x}(t))$, $h_j(\mathbf{x}(t))$ függvény deriváltjait:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{ha} \quad t = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt} h_j(\mathbf{x}(t)) = h_{j\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{minden } t\text{-re}. \tag{2.8}$$

A második deriváltakra a $t=0$ pontban a

$$\frac{d}{dt^2} f(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}' f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{x}} + f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\ddot{\mathbf{x}} \geqq 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt^2} h_j(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}} h_{j\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{x}} + h_{j\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\ddot{\mathbf{x}} = 0 \tag{2.10}$$

összefüggéseket kapjuk. A (2.10) összefüggések közül a j-ediket szorozzuk meg w_j^*-gal és adjuk hozzá (2.9)-hez. Így az $\ddot{\mathbf{x}}$-t tartalmazó tagok kiesnek és kapjuk az

$$\dot{\mathbf{x}}' \left(f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} w_j^* h_{j\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) \right) \dot{\mathbf{x}} \geqq 0 \tag{2.11}$$

feltételt.

Az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ vektor a megengedett felület tetszőleges érintővektora lehet, vagyis tetszőleges, a

$$h_{j\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} = 0, \quad j = 1, \ldots, p \tag{2.12}$$

egyenlőségeknek eleget tevő vektor. (Nem nehéz megmutatni, hogy az általunk adott feltételek mellett bármely a (2.12) egyenletnek eleget tevő $\mathbf{v}$ vektorhoz létezik olyan $\mathbf{x}(t)$ felületi görbe, amelynek $\mathbf{v}$ az érintő vektora.)

Bebizonyítottuk tehát a következőt: bármely a (2.12) egyenlőségrendszernek eleget tevő $\mathbf{v}$ vektorra

$$\mathbf{v}' L_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)\mathbf{v} \geqq 0. \tag{2.13}$$

((2.13) a (2.11) egyenlőtlenség tömörebb alakja.)

Azt mondjuk, hogy egy (2.6)-nak eleget tevő $\mathbf{x}^*$ pontban teljesül a másodrendű elégséges feltétel, ha bármely (2.12)-nek eleget tevő $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$\mathbf{v}' L_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)\, \mathbf{v} > 0. \tag{2.14}$$

A (2.2), (2.4) feltételek együttesen úgy tekinthetők, mint egy az $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$ ismeretlenekre vonatkozó ($n+p$ ismeretlenes) nemlineáris egyenletrendszer. Nem nehéz megmutatni, hogy ezen egyenletrendszer *Jacobi-mátrixa* az általunk megkívánt feltételek mellett nem-szinguláris, ha teljesül a másodrendű elégséges feltétel, (amit a következőkben felteszünk). Így a feladat megoldásának legalábbis elméletileg járható útja volna pl. a *Newton-módszer* alkalmazása. Ez azonban nem mindig célravezető, mivel ehhez egyrészt jó kezdeti közelítésre van szükség, másrészt a számításokhoz a feladatban szereplő függvények deriváltjai kellenek. Ezeket a hátrányokat próbálja elkerülni a multiplikátormódszer.

3. A multiplikátormódszer elméleti alapjai

A multiplikátormódszer bevezetéséhez első lépésként bevezetjük a *bővített Lagrange-függvény* fogalmát. Ezt a

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{w}, k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} w_j h_j(\mathbf{x}) + k \sum_{j=1}^{p} h_j^2(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

képlet definiálja, ahol k egy pozitív szám. Bebizonyítjuk a következő tételt:

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, k) = 0, \quad \text{minden } k\text{-ra}, \tag{3.2}$$

és

$$Q_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, k) \tag{3.3}$$

pozitív definit, ha k elég nagy.

A bizonyítás egy egyszerű mátrix elméleti eredményen alapul, amely *Finsler-lemma* néven ismert:

Finsler lemma: Legyen adott az n dimenziós euklideszi tér egy lineáris altere, amelyet az

$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.4}$$

feltételrendszer definiál, és egy olyan $\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrix, hogy bármely (3.4)-nek eleget tevő $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} > 0. \tag{3.5}$$

Legyen adott továbbá egy $\mathbf{D}$ szimmetrikus mátrix, amelyre teljesülnek a következő feltételek: ha $\mathbf{x}$ kielégíti (3.4)-et, akkor

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Továbbá bármely

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i \neq \mathbf{0} \tag{3.7}$$

vektorra

$$\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y} > 0. \tag{3.8}$$

Állítjuk, hogy ekkor bármely elegendő nagy k pozitív számra az

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} + k\mathbf{D} \tag{3.9}$$

mátrix pozitív definit.

A bizonyításhoz számítsuk ki tetszőleges $\mathbf{z}$ vektorra a $\mathbf{z}'\mathbf{F}\mathbf{z}$ kvadratikus alak értékét. A $\mathbf{z}$ vektort állítsuk elő a

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \tag{3.10}$$

alakban, ahol $\mathbf{x}$-re teljesül (3.4), $\mathbf{y}$ pedig (3.7) alakú. Ekkor

$$\mathbf{z}'\mathbf{F}\mathbf{z} = (\mathbf{x}+\mathbf{y})'(\mathbf{C}+k\mathbf{D})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} + 2\mathbf{y}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{C}\mathbf{y} + k\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y}. \tag{3.11}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (3.6) alapján és hogy $\mathbf{D}$, illetve $\mathbf{C}$ szimmetrikusak.

A lemma feltételei alapján léteznek olyan λ, μ pozitív számok, hogy

$$\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq \lambda \|\mathbf{x}\|^2, \tag{3.12}$$

ha $\mathbf{x}$ eleget tesz (3.4)-nek és

$$\mathbf{y}'\mathbf{D}\mathbf{y} \geqq \mu \|\mathbf{y}\|^2, \tag{3.13}$$

ha $\mathbf{y}$ (3.7) alakú. Így kapjuk, hogy

$$\mathbf{z}'\mathbf{F}\mathbf{z} \geqq \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (-\eta + k\mu)\|\mathbf{y}\|^2 - 2\varrho\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \tag{3.14}$$

ahol ϱ, η a $\mathbf{C}$ illetve $\mathbf{D}$ mátrix normája.

A (3.14) becslés jobboldalán egy kvadratikus forma áll, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\varrho \\ -\varrho & -\eta + k\mu \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Mivel λ, μ pozitívak, azért ez a kvadratikus alak pozitív definit lesz, hacsak k elég nagy. Így pedig ugyanez érvényes $\mathbf{z}'\mathbf{F}\mathbf{z}$-re is.

Visszatérve a (3.2), (3.3) állításokra számítsuk ki a Q függvény gradiensét:

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, k) = L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + 2k\mathbf{H}\mathbf{h}, \tag{3.16}$$

ahol

$$\mathbf{H} = \left(h'_{1\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \ldots, h'_{p\mathbf{x}}(\mathbf{x})\right) \tag{3.17}$$

egy $n \times p$-s mátrix. A *Hesse-mátrixra* pedig a

$$Q_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, k) = L_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + 2k\mathbf{H}\mathbf{H}' \tag{3.18}$$

eredményt kapjuk.

A *Finsler-lemmában* szereplő (3.4) feltételnek most a

$$\mathbf{h}_{i\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0 \tag{3.19}$$

feltétel felel meg, a $\mathbf{C}$ illetve $\mathbf{D}$ mátrix a jelen esetben

$$\mathbf{C} = L_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) \tag{3.20}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{H}\mathbf{H}'. \tag{3.21}$$

A *Finsler-lemma* állítása szerint $Q_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, k)$ pozitív definit, hacsak k elég nagy.

4. A multiplikátormódszer levezetése

A multiplikátormódszer alapgondolata az, hogy ha $\mathbf{w}^*$ ismert lenne, akkor $\mathbf{x}^*$-ot egyetlen feltételnélküli minimalizálással meg tudjuk határozni. Sajnos $\mathbf{w}^*$ közvetlenül nem ismert, ezért azt iteratív úton kell meghatározni.

Ha $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}^*$ multiplikátor egy elég jó közelítése, akkor a

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, k) = 0 \tag{4.1}$$

egyenletnek $\mathbf{x}^*$ egy kis környezetében egyetlen $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ megoldása van. Ez következik az implicit függvényekre vonatkozó tételekből, mivel $Q_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, k)$ nemszinguláris. Az f, h_j függvények kétszer folytonosan differenciálhatók, ezért a $Q_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}(\mathbf{w}), \mathbf{w}, k)$ mátrix is pozitív definit, hacsak $\mathbf{w}$ elég közel van $\mathbf{w}^*$-hoz. Ezért $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ megoldása a

$$\min_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \mathbf{w}, k) \tag{4.2}$$

feltétel nélküli minimalizálási problémának is. Ez az észrevétel döntő abból a szempontból, hogy $\mathbf{x}(\mathbf{w})$-t csupán az f, h_j függvényértékek alapján kiszámíthatjuk.

A $\mathbf{w}^*$ vektort az jellemzi, hogy a

$$h_j(\mathbf{x}(\mathbf{w})) = 0 \tag{4.3}$$

egyenlőség teljesül. Valóban, ha teljesül a (4.3) egyenlőség, akkor $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{w}^*)$ megengedett pont, továbbá kielégíti a *Lagrange-féle szükséges feltételt* is:

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) = Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, k) = 0.$$

A $\mathbf{w}^*$ vektor meghatározásának feladatát tehát a (4.3) nemlineáris egyenletrendszer megoldására vezettük vissza. Sajnos, ebben szerepel egy $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ implicit módon definiált függvény, ezért a *Newton-módszer* helyett annak egy közelítését fogjuk kidolgozni.

Mielőtt erre rátérnénk, a $\mathbf{w}^*$ vektor egy további jellemzését fogjuk adni. Vezessük be a

$$\psi(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{x}(\mathbf{w}), \mathbf{w}, k) \tag{4.4}$$

függvényt. Tekintsük a

$$\max_{\mathbf{w}} \psi(\mathbf{w}) \tag{4.5}$$

feltétel nélküli maximalizálási feladatot. ROCKAFELLARtól származik a következő tétel:

4.1. TÉTEL. Az 1. szakaszban leírt feltételek mellett $\mathbf{w}^*$ a (4.5) feladat egy izolált lokális maximuma.

Ennek a tételnek az a jelentősége, hogy a $\mathbf{w}^*$ meghatározására alkalmazhatók a korszerű függvényminimalizálási módszerek.

A tétel bizonyításához számítsuk ki az $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ függvény parciális deriváltjait. A

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{w}), \mathbf{w}, k) = 0$$

egyenlet $\mathbf{w}$ szerinti differenciálásával a

$$Q_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} + Q_{\mathbf{xw}} = 0$$

egyenletet kapjuk. A

(4.6) $$\mathbf{H} = (h'_{1\mathbf{x}}, \dots, h'_{p\mathbf{x}})$$

jelölés felhasználásával kapjuk, hogy

(4.7) $$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{H}.$$

A jobboldalt értelemszerűen a $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ pontban kell kiértékelni.
Számítsuk most ki a $\psi(\mathbf{w})$ függvény deriváltjait a $\mathbf{w}=\mathbf{w}^*$ pontban:

(4.8) $$\psi_{\mathbf{w}} = Q_{\mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}} + Q_{\mathbf{w}} = 0$$

mivel $Q_{\mathbf{x}}=0$ és $Q_{\mathbf{w}}=h(\mathbf{x}(\mathbf{w}^*))=0$. A második deriváltakra pedig a

(4.9) $$\psi_{\mathbf{ww}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\right)' Q_{\mathbf{xx}}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\right) + 2\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{w}}\right)' Q_{\mathbf{wx}}$$

kifejezést kapjuk. A deriválásból adódó egyéb tagok 0-val egyenlők.
A (4.7) összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy

(4.10) $$\psi_{\mathbf{ww}} = -\mathbf{H}'(Q_{\mathbf{xx}})^{-1}\mathbf{H}$$

ez a mátrix pedig negatív definit.
Visszatérve a

(4.11) $$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{w})) = 0$$

egyenlet numerikus megoldására megmutatjuk, hogy a Newton-módszernek igen jó approximációja a

(4.12) $$\delta \mathbf{w} = 2k\mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{w}))$$

iterációval definiált módszer. Ezen az iteráción alapuló megoldást nevezzük multiplikátormódszernek.
A (4.11) iteráció levezetéséhez alkalmazzuk előbb a *Newton-módszert* a (4.11) egyenlet megoldására. A baloldal *Jacobi-mátrixára* a

(4.13) $$\mathbf{G} = -\mathbf{H}'\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{H}$$

mátrixot kapjuk.
A (4.13) egyenlőség jobboldalán a

(4.14) $$(2k)^{-1}Q_{\mathbf{xx}} = \mathbf{E}+\mathbf{HH}'$$

átalakítást végezzük. Itt az

(4.15) $$\mathbf{E} = (2k)^{-1}L_{\mathbf{xx}}$$

mátrix elemei $O(k^{-1})$ nagyságrendűek. Így a

(4.16) $$2k\mathbf{G} = -\mathbf{H}'(\mathbf{E}+\mathbf{HH}')^{-1}\mathbf{H}$$

összefüggést kapjuk.

A **H** mátrixra alkalmazzunk egy *Householder-triangularizációt*. Ez azt jelenti, hogy egy olyan **T** ortogonális mátrixot határozunk meg, amelyre a

$$\mathbf{TH} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

összefüggés érvényes, ahol **R** nemszinguláris felső háromszög mátrix. Mivel **T** ortogonális, érvényes a

$$\mathbf{T'T} = \mathbf{TT'} = \mathbf{I}$$

egyenlőség, ahol **I** egységmátrix. A (4.16) egyenlőségben iktassunk be a zárójel elé és a zárójel után egy **T'T** szorzatot. Ekkor átalakítás után a

$$2k\mathbf{G} = -\mathbf{H'T'}(\mathbf{TET'}+\mathbf{THH'T'})^{-1}\mathbf{TH} \tag{4.17}$$

egyenlőséget kapjuk.

A zárójelben álló mátrixra természetes módon kínálkozik egy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{RR'} & \varepsilon\mathbf{B} \\ \varepsilon\mathbf{C} & \varepsilon\mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

felosztás, ahol $\varepsilon = k^{-1}$. A (4.17) kifejezés szempontjából csak annak van jelentősége, hogy mi áll invertálás után **RR'** helyén. Általában tekintsük az

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

particionált mátrixot, ahol **A**, **D** négyzetesek. Könnyű belátni, hogy $\mathbf{F}^{-1}$ particionált alakjában **A** helyén

$$(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$$

áll.

A (4.19) mátrixra alkalmazva ezt az eredményt, adódik, hogy **RR'** helyén az inverz mátrixban

$$(\mathbf{RR'}+\mathbf{E}_1)^{-1}$$

áll, ahol $\mathbf{E}_1$ $O(k^{-1})$ nagyságrendű elemekből áll. Így végül is a

$$2k\mathbf{G} = -\mathbf{R'}(\mathbf{E}_1+\mathbf{RR'})^{-1}\mathbf{R} = -\mathbf{I}+O(k^{-1})$$

eredményt kapjuk. Összefoglalva a következő tételt kapjuk:

4.2. TÉTEL. Az 1. szakasz feltételei mellett ha **w** elég közel van $\mathbf{w}^*$-hoz és $k > k_0$ akkor

$$|-\mathbf{G}_{st}-\delta_{st}/2k| < ck^{-2}, \tag{4.19}$$

ahol c konstans, δ_{st} pedig a *Kronecker-szimbólumot* jelöli.

Invertálással

$$(2k\mathbf{G})^{-1} = -\mathbf{I}+O(k^{-1}),$$

innen pedig

$$-\mathbf{G}^{-1} = 2k\mathbf{I}+O(1) \tag{4.20}$$

adódik. A közelítés hibája tehát nem tart 0-hoz, amint $k \to \infty$, de a relatív hiba 0-hoz tart. A (4.20) közelítés levezetésével most már megalapoztuk a (4.12) multiplikátor-módszert.

Összefoglalva a módszer a következő: kiindulunk a $\mathbf{w}^*$ multiplikátor egy $\mathbf{w}^0$ közelítéséből. Az általános k-adik lépésben a már ismert $\mathbf{w}^k$ mellett meghatározzuk $\mathbf{x}(\mathbf{w}^k)$-t, majd kiszámítjuk $\mathbf{w}^{k+1}$-et a (4.12) képlet felhasználásával. Az eljárás véget ér, ha $h'(\mathbf{x}(\mathbf{w}))h(\mathbf{x}(\mathbf{w}))$ kisebb egy előre adott kicsiny számnál.

IRODALOM

[1] BERTSEKAS, D. P., "On penalty and multiplier methods for constrained optimization", in: Mangasarian, O. L., Meyer, R. R. and Robinson, S. M., *Nonlinear programming* (Academic Press, 1975.)

[2] ELSTER, K. H. ÉS GROSSMAN, CH., „Nemlineáris optimumszámítási feladatok megoldása büntető- és akadályfüggvényekkel", a *Közgazdasági Operációkutatási alkalmazások* c. kötetben. (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1976.)

[3] FIACCO, A. V. AND MCCORMICK, G. P., "*Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques* (Wiley, 1968.)

[4] FLETCHER, R., "An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities", *Mathematical Programming* **5** (1973) 129—150.

[5] FLETCHER, R., "An ideal penalty function for constrained optimization", in: Mangasarian, O. L., Meyer, R. R. and Robinson, S. M., *Nonlinear Programming* (Academic Press, 1975.)

[6] GERENCSÉR, L., Nemlineáris programozási feladatok megoldása szekvenciális módszerekkel (Kandidátusi értekezés) MTA SZTAKI Tanulmányok **49** (1976).

[7] GERENCSÉR, L., *Optimalizálás* (Jegyzet. Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete, 1978.)

[8] GERENCSÉR, L., "On the use of stability theory in the design of algorithms for structured nonlinear optimization problems", *Problems of Control and Information Theory*, 1978.

[9] HAMALA, M., *Nelinearne programovanie* (Bratislava, 1976).

[10] LOOTSMA, F. A., Boundary properties of penalty functions for constrained minimization (Doctoral thesis. Math. Inst. of Techn. Univ of Delft, 1974.)

[11] MANGASARIAN, O. L., "Unconstrained Lagrangians in nonlinear programming", *Comp. Sci. Tech. Rep.* **201**., University of Wisconsin, Madison, 1974.

[12] MIELE, A., MOSELEY, P. E., LEVY, A. V. AND COGGINS, G. M., "On the method of multipliers for nonlinear programming problems", *J. Opt. Theory and Appl.* **10** (1972) 1—33.

[13] POWELL, M. J. D., "A method for nonlinear optimization in minimization problems", in: Fletcher, R., *Optimization* (Academic Press, 1969.)

[14] ROCKAFELLAR, R. T., "A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization", *Mathematical Programming* **5** (1973) 354—374.

(Beérkezett: 1978. január 25.)

GERENCSÉR LÁSZLÓ
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST, XI., KENDE U. 13—17.

NEW DERIVATION OF THE MULTIPLIER METHOD

L. GERENCSÉR

The purpose of the paper is to give a self-contained derivation of the multiplier method. The first part of the paper discusses optimality conditions. The correction formula of the multiplier method is obtained by applying a factorization method on the *Hessian* of the augmented *Lagrangian function*.

Alkalmazott Matematikai Lapok **3** *(1977) 161—170*

FELSŐ KORLÁT TECHNIKÁK A KVADRATIKUS PROGRAMOZÁSHOZ

BERNAU HEINZ
Budapest

A cikk tartalmazza a *Wolfe-, Jagannathan és Beale módszerek* bővítését olyan kvadratikus programozási feladatok megoldására, amelyekben a változók felülről korlátosak. Megmutatjuk, hogy a lineáris programozási felső korlát technika ezekbe a módszerekbe könnyen átvezethető.

1. Bevezetés

A cikkben tárgyaljuk a *Wolfe-, Jagannathan- és Beale-módszerek* modifikációját olyan kvadratikus programozási feladatok megoldására, amelyekben a változók felülről korlátosak. Ehhez megmutatjuk, hogy a lineáris programozási felső korlát technikát könnyen be lehet illeszteni ezekbe a kvadratikus programozási módszerekbe. A második rész tartalmaz néhány összefüggést a felső korlát technika és a szimplex módszer között, amelyek a további részek alapjait képezik. A 3—5. részekben ismertetjük a modifikált *Wolfe-, Jagannathan- és Beale-módszereket* a

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f},$$

($\mathbf{x}^T$-vel az $\mathbf{x}$ oszlopvektor transzponáltját jelöljük), probléma megoldására, ahol $\mathbf{C}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit $(n\times n)$-mátrix, $\mathbf{A}$ $(m\times n)$-mátrix és $\mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{p}$ m-, illetve n-dimenziós vektorok. Az utolsó rész néhány számítástechnikai eredményt tartalmaz.

2. A felső korlát technika a lineáris programozásban

Ez a technika a szimplex módszernek egy módosítása (lásd [1]) a

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f},$$

probléma megoldására, ahol $\mathbf{A}$ $(m\times n)$-mátrix és $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{f}$ m-, illetve n-dimenziós vektorok. Ez a probléma a következőképpen írható át

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ &\mathbf{E}\mathbf{x}+\mathbf{z} = \mathbf{f}, \\ &\mathbf{0} \leqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ahol $\mathbf{E}$ az n-dimenziós egységmátrix. Ha a szimplex módszert erre az ekvivalens (2.2) problémára alkalmazzuk, a következő összefüggéseket kapjuk a (2.1) problémára alkalmazott felső korlát technika és a szimplex módszer között:

(i) $\mathbf{x}^0$ a (2.1) problémára a felső korlát technika megengedett bázismegoldása, akkor és csak akkor, ha az $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0)$ pár, ahol $\mathbf{z}^0=\mathbf{f}-\mathbf{x}^0$, a (2.2) problémára a szimplex módszer megengedett bázismegoldása,

(ii) ha x_i nembázis változó a felső korlát technika megengedett bázismegoldásában, akkor a következő két eset lehetséges:
   α) $x_i=0$, akkor x_i is nembázis változó az ehhez tartozó szimplex módszer bázismegoldásában;
   β) $x_i=f_i$, akkor $z_i=f_i-x_i=0$ nembázis változó az ehhez tartozó szimplex módszer bázismegoldásában,

(iii) a felső korlát technika táblájában a redukált költségek értékeire a következő összefüggések állnak fenn:
   α) ha $x_i=0$, akkor az x_i-hez tartozó érték megegyezik az x_i-hez tartozó értékkel a szimplex módszer táblájában,
   β) ha $x_i=f_i$ akkor az x_i-hez tartozó érték egyenlő a z_i-hez tartozó negatív értékkel a szimplextáblában (megemlítjük, hogy ha $x_i=f_i$, akkor ahhoz, hogy a meglevő bázismegoldás optimális legyen, ennek az értéknek nempozitívnak kell lennie a felső korlát technikában.)

(iv) x_i kiválasztása belépő változóként a felső korlát technikában ekvivalens az x_i választásával a szimplex módszerben, ha $x_i=0$ és ekvivalens a z_i választásával ha $x_i=f_i$.

Ezekből az összefüggésekből kiderül, hogy a két módszer teljesen ekvivalens, és a felső korlát technika fő előnye a szimplex módszerrel szemben az, hogy itt a bázismátrix mérete m, míg a szimplex módszert alkalmazva a (2.2) problémára a bázismátrix mérete $m+n$.

A következő fejezetekben ezt az ekvivalenciát a két módszer között felhasználjuk a kvadratikus programozási módszerek pivotálási szabályainak megfogalmazására.

3. A Wolfe-módszer

Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{p}^T\mathbf{x}, \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \\ &\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f}, \quad (\mathbf{f} > \mathbf{0}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

ahol $\mathbf{C}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit $(n\times n)$-mátrix, $\mathbf{A}(m\times n)$-mátrix és $\mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{p}$ m-, illetve n-dimenziós vektorok.

A probléma a következő formába átírva

$$\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{p}^T\mathbf{x}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{E}\mathbf{x}+\mathbf{z} = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z},$$

ahol $\mathbf{E}$ n-dimenziós egységmátrix, szükséges és elégséges *Kuhn—Tucker optimalitási feltételei* következőképpen adhatók meg ([2]):

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{b},\\ &\mathbf{E}\mathbf{x}+\mathbf{z} = \mathbf{f},\\ &-\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{A}^T\mathbf{s}-\mathbf{E}^T\mathbf{t}+\mathbf{r} = \mathbf{p},\\ &\mathbf{0} \leqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z},\\ &\mathbf{0} \leqq \mathbf{r}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{s}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{t}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

és a komplementaritási feltétel

$$\mathbf{r}^T\mathbf{x}+\mathbf{s}^T\mathbf{y}+\mathbf{t}^T\mathbf{z} = 0. \tag{3.4}$$

A *Wolfe-módszer* [3] a (3.3) lineáris rendszert három fázisban oly módon oldja meg, hogy a (3.4) komplementaritási feltétel mindig teljesüljön. Minden fázis egy lineáris programozási feladat megoldásából áll és az utolsó két fázisban a komplementaritási feltétel teljesítésére a következő pivotálási szabályt kell alkalmazni:

Pivotszabály. Egy x_i, y_j, z_i primál nembázis változó belépőváltozóként csak akkor választható, ha az r_i, s_j, t_i duális változója szintén nembázis változó és viszont. A (3.3) lineáris rendszer a következőképpen írható át

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{b},\\ &-\mathbf{C}\mathbf{x}-\mathbf{A}^T\mathbf{s}+\mathbf{v} = \mathbf{p}, \quad (\mathbf{v} = -\mathbf{t}+\mathbf{r}),\\ &\mathbf{0} \geqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{s}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

amelyre $\mathbf{x}$-re vonatkozólag a felső korlát technikát alkalmazhatjuk. Tehát csak a pivotszabályt kell még átfogalmaznunk. Elsőként (3.3)-ból következik, hogy minden (x_i, z_i) párban legalább egy változó pozitív. Ez azt jelenti, hogy

$$r_i t_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.6}$$

ha a (3.4) komplementaritási feltétel teljesül.

A 2. részben megadott összefüggésekből és (3.6)-ból következik, hogy ha $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{v}^0)$ a (3.5) rendszernek egy megengedett bázismegoldása, akkor $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{f}-\mathbf{x}^0, \mathbf{v}^{0+}, \mathbf{s}^0, \mathbf{v}^{0-})$ az ehhez tartozó (3.3) rendszer megengedett bázismegoldása a szimplex módszerben, ahol a v^{0+} és v^{0-} vektorokra $(v^{0+})_i = \max\{0, v_i^0\}$ és $(v^{0-})_i = \max\{0, -v_i^0\}$ teljesül.

Most a második rész összefüggéseit kihasználva a (3.5) rendszerre a pivotszabályok könnyen megadhatók:

a) ha x_i nembázis változó, két eset lehetséges:

α) $x_i = 0$, akkor a megfelelő bázismegoldásban (3.3)-ra x_i szintén nulla és $z_i = f_i - x_i > 0$. A komplementaritási feltételből következik, hogy $t_i = v_i^- = 0$, és ahhoz, hogy x_i belépő változóként kiválasztható legyen, szükséges, hogy $r_i = v_i^+$ nembázis változó legyen a pivotszabály alapján. Tehát abban az esetben x_i csak akkor választható belépő változóként, ha a duál változója $v_i = v_i^+ - v_i^-$ is nulla, vagy másképp kifejezve, szintén nembázis változó.

β) $x_i = f_i$, ebben az esetben $x_i > 0$ és $z_i = f_i - x_i = 0$ (3.3)-ban. A komplementaritási feltételből következik, hogy $r_i = v_i^+ = 0$ és z_i kiválasztásához — ami ekvivalens x_i kiválasztásával a felső korlát technikában — $t_i = v_i^-$ nembázis változó kell, hogy legyen. Így ebben az esetben is ugyanezt a feltételt kaptuk mint az α)-esetben, azaz hogy x_i kiválasztásához v_i nembázis változó kell, hogy legyen.

b) Ha v_i nembázis változó, akkor v_i^+-t vagy v_i^--t lehet belépő változóként választani és ennek megfelelően v_i nő vagy csökken, mivel v_i-re nincs nemnegativitási kikötés (3.35)-ben.

α) v_i^+ kiválasztása: Ez ekvivalens az r_i választásával (3.3)-ban. De a pivotszabály alapján ehhez szükséges, hogy (3.3)-ban x_i nembázis változó legyen, $x_i = 0$, ami azt jelenti, hogy x_i nembázis változó (3.5)-re a felső korlát technikában sem.

β) v_i^- kiválasztás: Ez ekvivalens t_i kiválasztásával (3.3)-ban. De a pivotszabály alapján ehhez szükséges, hogy z_i nembázis változó legyen (3.3)-ban, ami azt jelenti, hogy $x_i = f_i$ és ezért x_i nembázis változó (3.5)-re a felső korlát technikában.

Az y_j és s_j változók közötti reláció nyilvánvalóan ugyanaz marad, mint a (3.3) rendszerre. Így a felső korlát technika alkalmazásához a (3.5) rendszerre a következő módosított pivotszabályt nyertük.

Módosított pivotszabály.

i) Egy primál nembázis változó x_i, y_j belépő változóként csak akkor választható, ha a duál változója v_i, s_j szintén nembázis változó és fordítva.

ii) ha v_i belépő változó, akkor v_i értékét növelni kell, ha $x_i = 0$, és csökkenteni, ha $x_i = f_i$.

Megjegyzés. Ebből a módosított pivotszabályból következik, hogy v_i-t kell a bázisból kicserélni, ha v_i nulla lesz, mert a (3.4) komplementaritási feltétel betartásához a v_i^+ és v_i^- komponenseket külön kell kezelni.

4. Jagannathan parametrikus módszere

Tekintsük újra a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x},$$

$$(4.1) \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f}.$$

Az előző fejezetből tudjuk, hogy a *Kuhn—Tucker feltételek* a következőképpen adhatók meg:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{f},$$

$$(4.2) \qquad -\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{s} - \mathbf{E}^T\mathbf{t} + \mathbf{r} = \mathbf{p},$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \geqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z},$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{r}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{s}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{t},$$

és a komplementaritási feltétel

$$(4.3) \qquad \mathbf{x}^T\mathbf{r} + \mathbf{y}^T\mathbf{s} + \mathbf{z}^T\mathbf{t} = 0.$$

Ebben a módszerben (lásd [4]) a (4.2) linearitás rendszert bővítjük a következőre:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} + \lambda \mathbf{1}_b$$

$$\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{f}$$

$$(4.4) \qquad -\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{s} - \mathbf{E}^T\mathbf{t} + \mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{1}_p$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{y}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z},$$

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{r}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{s}, \quad \mathbf{0} \geqq \mathbf{t},$$

ahol λ egy paraméter és az $\mathbf{1}_b$ és $\mathbf{1}_p$ vektorok definíciója a következő

$$(4.5) \qquad (\mathbf{1}_b)_i = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad b_i < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad b_i \geqq 0, \end{cases}$$

$$(\mathbf{1}_p)_i = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad p_i < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad p_i \geqq 0. \end{cases}$$

Legyen

$$\lambda_0 = \max_{p_i < 0,\, b_j < 0} \{0, -p_i, -b_j\}.$$

Ha $\lambda_0=0$, akkor $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}=\mathbf{b}$, $\mathbf{z}=\mathbf{f}$, $\mathbf{r}=\mathbf{p}$, $\mathbf{s}=\mathbf{0}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ a (4.2) rendszer megoldása, amelyre a (4.3) komplementaritási feltétel teljesül, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ a (4.1) probléma optimális megoldása. Ha $\lambda_0>0$, mondjuk $\lambda_0=-p_K$, akkor $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}==\mathbf{b}+\lambda\mathbf{1}_b$, $\mathbf{r}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{1}_p$, $\mathbf{s}=\mathbf{0}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$, $\lambda\geqq\lambda_0$-ra a bővített (4.4) rendszer megengedett megoldása és $\lambda=\lambda_0$-ra egy megengedett bázis megoldása. Ebben a bázis megoldásban az (x_i, r_i), (y_j, s_j), (z_i, t_i) komplementaritási változópárok közül pontosan egyben mind a két változó nembázis változó. (Feltételezzük, hogy a (4.2) rendszer minden megengedett bázismegoldása nem degenerált.) Minden más párban az egyik változó bázis változó és a másik nembázis változó. Így erre a bázismegoldásra a (4.3) komplementaritási feltétel teljesül. Ezt a kezdő bázismegoldást úgy állíthatjuk elő, hogy az $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}=\mathbf{b}$, $\mathbf{z}=\mathbf{f}$, $\mathbf{r}=\mathbf{p}$, $\mathbf{s}=\mathbf{0}$, $\mathbf{t}=\mathbf{0}$, $\lambda=0$ nem megengedett bázismegoldásban a λ paramétert azzal a bázisváltozóval cseréljük ki, amelynek az értéke a legkisebb. (A mi $\lambda_0=-p_K$ esetünkben ez az r_K változó lenne.) Az ehhez tartozó komplementáris változó (a mi esetünkben x_K) lesz az új belépő változó és a következő három eset egyike lehetséges:

i) a λ paraméter a „*blokking*”*-változó*, azaz a bázisváltozók közül elsőként lesz nulla és kilép a bázisból. Ebben az esetben az új bázismegoldás a (4.2) *Kuhn—Tucker rendszer* egy megoldása, mivel $\lambda=0$ és a (4.3) komplementaritási feltétel is teljesül. Ennek a bázismegoldásnak az x-része ezért a (4.1) probléma optimális megoldása;

ii) λ-tól különböző változó a „*blokking*”*-változó*, ebben az esetben egy új pár komplementáris változó lesz nembázis, és a „*blokking*”*-változó* komplementáris változója lesz az új belépő változó;

iii) nincs „*blokking*”*-változó*, a lineáris komplementaritási elméletéből tudjuk ([5], [6]), hogy ebben az esetben a *Kuhn—Tucker feltételeknek* nincsen megoldása és ezért külön ellenőrizni kell, hogy vagy a célfüggvény (4.1)-ben alulról nem korlátos, vagy a (4.1) problémának nincs megengedett megoldása.

Ebből a leírásból következik, hogy az eljárás minden bázismegoldásában a komplementaritási feltétel teljesül. A (4.4) rendszert átírhatjuk

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}+\lambda\mathbf{1}_b,\\ -\mathbf{C}\mathbf{x}-\mathbf{A}^T\mathbf{s}+\mathbf{v}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{1}_p,\\ \mathbf{0}\leqq\mathbf{x}\leqq\mathbf{f},\quad \mathbf{0}\leqq\mathbf{y},\quad 0\leqq\lambda,\quad \mathbf{0}\leqq\mathbf{s}\end{gathered}\tag{4.7}$$

alakba, ahol

$$\mathbf{v}=-\mathbf{t}+\mathbf{r}.$$

Erre a rendszerre $\mathbf{x}$-re vonatkozólag a felső korlát technikát alkalmazhatjuk. Így már csak a belépő változó kiválasztási szabályát kell a (4.7) rendszer változóira átfogalmazni.

Az előző fejezetből tudjuk, hogy ha $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \lambda)$ a (4.4) rendszer olyan megoldása, amelyre a (4.3) komplementaritási feltétel teljesül, akkor az $\mathbf{r}^T\mathbf{t}=0$ reláció áll fenn és $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{v}, \lambda)$ a (4.7) rendszer megfelelő megoldása, ahol

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^+-\mathbf{v}^-,$$

$$\mathbf{v}^+=\mathbf{r},\quad \mathbf{v}^-=\mathbf{t},$$

($\mathbf{v}^+$ és $\mathbf{v}^-$ definícióját megadtuk az előző fejezetben.) Ebből könnyen belátható, hogy

i) $x_i = r_i = 0$ (4.4)-ben megfelel $x_i = v_i = 0$-nak (4.7)-ben és mivel ebben az esetben $z_i = f_i - x_i > 0$, a komplementaritási feltételből következik, hogy $v_i = t_i$ szintén nulla, azaz (4.7)-ben $x_i = v_i = 0$ igaz, vagyis x_i és v_i nembázis változók.

ii) $z_i = t_i = 0$ (4.4)-ben megfelel $x_i = f_i$, $v_i^- = 0$-nak (4.7)-ben, és mivel $x_i = f_i > 0$ a komplementaritási feltétel miatt, $r_i = v_i^+ = 0$ ebben az esetben, és ezért x_i és v_i nembázis változók a felső korlát technikában.

iii) $y_j = s_j = 0$ (4.4)-ben megfelel $y_j = s_j = 0$-nak (4.7)-ben.

Ezekből az összefüggésekből a belépő változó kiválasztására a következő szabályt kapjuk:

i) ha x_i *„blokking"-változó*, akkor v_i^+ a következő belépő változó, ha x_i nulla lett, és v_i^- a belépő változó, ha x_i a felső korlátját, f_i-t vette fel,

ii) ha v_i *„blokking"-változó*, akkor x_i a következő belépő változó (x_i-t növelni kell, ha $x_i = 0$, és csökkenteni, ha $x_i = f_i$),

iii) az y_j és s_j változókra a szabály változatlan marad; ha y_j *„blokking" változó*, akkor s_j a belépő változó és fordítva.

Megjegyzés. v_i *„blokking" változó* lesz, ha v_i bázis változó és valamelyik nembázis változó bevételénél v_i a bázis változók közül elsőként lesz nulla (lásd a *Wolfe-módszer* leírását is).

5. A Beale-módszer

Itt ennek a módszernek egy LAND és MORTON [7] által adott változatát fogjuk használni. Tekintsük a következő problémát

$$
\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{x}, \\
(5.1)\qquad &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
&\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f}.
\end{aligned}
$$

A következőben $g(\mathbf{x})$-szel az (5.1) probléma célfüggvényét jelöljük és a $\mathbf{q}$ vektor legyen a célfüggvény gradiense egy adott pontban. Ha az (5.1) problémát átírjuk

$$
\begin{aligned}
&\min g(\mathbf{x}), \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{f}, \\
&\mathbf{0} \leqq \mathbf{x},
\end{aligned}
$$

és a hozzátartozó

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T[\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}] + \boldsymbol{\mu}^T[\mathbf{x} - \mathbf{f}]$$

Lagrange-függvényt felhasználjuk, a *Kuhn—Tucker optimalitási feltételek* a következők lesznek ([8]):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = q_i + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_i + \mu_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_i = [q_i + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_i + \mu_i] x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.3}$$

$$x_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = \mathbf{a}^j \mathbf{x} - b_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} = x_i - f_i \leqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} \mu_i = [x_i - f_i] \cdot \mu_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.7}$$

$$\mu_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.8}$$

ahol a $\boldsymbol{\lambda}$ és $\boldsymbol{\mu}$ vektorok a *Lagrange-szorzók* és $\mathbf{a}_i$ az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik oszlopvektora, míg $\mathbf{a}^j$ az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik sorvektora.

A *Belae-módszer* egy megengedett bázismegoldásból indul ki, ezért $\mathbf{x}^0$ legyen a felső korlát technika megengedett bázismegoldása az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} \leqq \mathbf{f}$ rendszerre, és

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_{NB} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [\mathbf{p}, \mathbf{Q}], \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_{NB} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{f}_{NB} \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

legyen az $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{f}$ bázis és nembázis komponensekre való felbontása. Akkor $\mathbf{x}^0$-ra a következő lemmában megfogalmazott optimalitási feltétel igaz.

5.1. LEMMA. Az $\mathbf{x}^0$ megengedett bázismegoldás az (5.1) probléma optimális megoldása, ha a nembázis változókra a következő egyenlőtlenségek igazak

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &\geqq \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k, \quad \text{ha} \quad x_k = 0, \\ \mathbf{q}_k &\leqq \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k, \quad \text{ha} \quad x_k = f_k. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Bizonyítás. Az (5.9) felbontásból következik, hogy az (5.1)-es problémának minden megengedett pontjára igaz

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}_{NB}. \tag{5.11}$$

A $g(\mathbf{x})$ célfüggvényben $\mathbf{x}_B$-t helyettesítve az (5.11) jobboldalával egy $\hat{g}(\mathbf{x}_{NB})$ függvényt kapunk, amely csak az $\mathbf{x}_{NB}$ nembázis változóktól függ. Továbbá (5.11)-ből következik, hogy

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_k} = -\mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k + \mathbf{q}_k, \tag{5.12}$$

azaz az (5.10) feltétel azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_k} \geqq 0, \quad \text{ha} \quad x_k = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_k} \leqq 0, \quad \text{ha} \quad x_k = f_k.$$

Így a $\hat{g}(\mathbf{x}_{NB})$ függvény nem csökken növekvő x_K-ra az első esetben, és csökkenő x_K-ra a második esetben és így $\hat{g}(\mathbf{x}_{NB})$ konvexitása miatt a lemmát bebizonyítottuk.

(Ha a *Lagrange-függvényben*

$$\lambda = -\mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1}$$

választjuk, akkor könnyen megmutatható, hogy az (5.2)—(5.8) *Kuhn—Tucker feltételek* teljesülnek, ha (5.10) igaz. Mivel

$$q_i = \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_i = -\lambda^T \mathbf{a}_i$$

minden x_i bázis változóra az (5.2), (5.3) és (5.7) relációk teljesülnek $\mu_i = 0$ mellett. Ha $x_i = 0$, akkor $q_i \geqq \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_i = -\lambda^T \mathbf{a}_i$, és ebből következik, hogy (5.2), (5.3) és (5.7) $\mu_i = 0$-ra igazak. Az $x_i = f_i$ esetében (5.10)-ből következik $q_i + \lambda^T \mathbf{a}_i \leqq 0$ és $\mu_i = -[q_i + \lambda^T \mathbf{a}_i] \geqq 0$-ra (5.2), (5.3) és (5.7) igazak. A többi reláció teljesül, mert $\mu_i \geqq 0$ minden i-re és $\mathbf{x}^0$ megengedett pont.)

Ha az (5.9) optimalitási feltétel nem teljesül, azaz $q_k < \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k$ valamelyik $x_k = 0$-ra, vagy $q_k > \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k$ valamelyik $x_K = f_K$-ra, ezek közül a változók közül új belépő változót kell kiválasztani. De ahhoz az (5.1) feltételrendszert egy további feltétellel kell bővíteni, mégpedig

(5.14)
$$q_k - \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k \leqq 0, \quad \text{ha} \quad x_k = 0,$$
$$-q_k + \mathbf{q}_B^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k \leqq 0, \quad \text{ha} \quad x_k = f_k.$$

Ez egy $\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leqq \alpha$ lineáris feltétel, mert a gradiens $\mathbf{x}$ lineáris függvénye. Az $\mathbf{x}^0$ pontra ez a feltétel teljesül. A szimplex lépéshez a bázismátrix inverzét $\mathbf{P}^{-1}$-et a következőképpen kell transzformálni.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ \bar{\mathbf{h}}^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ -\bar{\mathbf{h}}^T \mathbf{P}^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $\bar{\mathbf{h}}$ a $\mathbf{h}$-vektornak a bázisváltozókhoz tartozó része. Ha a pivotlépésben a $\mathbf{h}^T \mathbf{x} + u = \alpha$ feltétel u segédváltozója nembázis változó lesz, akkor arra a nembázis változóra az optimalitási kritérium $q_k = \mathbf{q}_B^N \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_k$ lesz, mivel a pivotlépés után erre a változóra már nem követeljük, hogy $u \geqq 0$. Ha pedig ez az a változó bázis változó marad, vagy egy előbb így bevezetett változó bázisváltozó lesz, akkor az ehhez tartozó feltételt a feltételrendszerből és a bázismátrix inverzéből ki lehet törölni.

6. Számítástechnikai eredmények

Mind a három módosított módszerre FORTRAN-program készült. Ezeket leteszteltük a CDC 3300 számítógépen. Kilenc véletlenszerűen generált feladat megoldásánál (mindegyik 20 változóval és 30 egyenlőtlenségi feltétellel) megmutatkozott, hogy a felhasznált idő a módosított algoritmusoknál csak 50—60 százaléka volt a számolási időnek a nem módosított algoritmusoknál, ha a felső korlát feltételeket bevettük az egyenlőtlenségi feltételek közé.

A hosszabb számolási idő oka a nem-módosított algoritmusnál az inverz bázis mátrix nagyobb dimenziója, amit minden lépésnél transzformálni kell. De a rövidebb gépidő esetleg nem is a legfontosabb szempont a módosított algoritmusok használatánál, talán még lényegesebb, hogy a szükséges memória kisebb a módosított algoritmusoknál, mint a nemmódosítottaknál.

IRODALOM

[1] NOZICKA, F., GUDDAT, J. UND HOLLATZ, H., *Theorie der linearen Optimierung* (Akademie-Verlag, Berlin, 1972).
[2] BARANKIN, W. W. AND DORFMAN, J., "On quadratic programming", *University of California Publications in Statistics* **2** (1958) 285—317.
[3] WOLFE, P., "The simplex method for quadratic programming" *Econometria* **27** (1959) 382—389.
[4] JAGANNATHAN, R., "A simplex-type algorithm for linear and quadratic programming — A parametric procedure", *Econometria* **34** (1966) 460—471.
[5] LEMKE, C. E., "Bimatrix equilibrium points and mathematical programming", *Management Sci.* **11** (1965) 681—689.
[6] COTTLE, R. W. AND DANTZIG, G. B., "Complementary pivot theory of mathematical programming", in: *Mathematics of the decision sciences, Part I*, Ed. G. B. Dantzig and A. F. Veinott (Amer, Math. Soc. Providence R. I. 1968).
[7] LAND, A. H. AND MORTON, G., "An inverse-basis method for Beale's quadratic programming algorithm" *Management Sci.* **19** (1973) 510—519.
[8] KÜNZI, H. P. UND KRELLE, W., *Nichtlineare Programmierung* (Berlin, Göttingen-Heidelberg, 1962).

(Beérkezett: 1977. december 12.)

BERNAU HEINZ
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, XI. KENDE U. 13—17.

UPPER BOUND TECHNIQUES FOR QUADRATIC PROGRAMMING

H. BERNAU

An extension of the methods of WOLFE, JAGANNATHAN and BEALE is presented for quadratic programming problems with upper bounds for the variables. It is shown that the upper bound technique for linear programming problems can be very easily incorporated in these methods.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 171—183

STATIKAILAG HATÁROZATLAN RÁCSOS TARTÓK MINIMÁLIS SÚLYRA TÖRTÉNŐ MÉRETEZÉSE

HALMOS EMIL

Győr

RAPCSÁK TAMÁS

Budapest

Ebben a dolgozatban a statikailag határozatlan, minimális súlyú rácsos tartók méretezésére szolgáló optimalizálási probléma explicit alakját adjuk meg. Ez síkbeli rácsos tartó esetén, rögzített geometria mellett, olyan nemlineáris programozási feladatot eredményez, ahol a célfüggvény lineáris és a feltételek vagy egy lineáris és egy kvadratikus vagy pedig egy harmadfokú és egy negyedfokú tag összegéből állnak elő és a feladatban csak egyenlőtlenségi feltételek szerepelnek.

Az optimalizálási feladat explicit alakját megadjuk térbeli rácsos tartók esetén is, sőt abban az esetben is, ha a geometria is változik.

Ezeknek a problémáknak a megoldására, a P. HUARD által kidolgozott linearizált centrum módszert javasoljuk.

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a statikailag határozatlan rácsos tartók optimális méretezésével foglalkozunk. Ilyen szerkezeteket gyakran találunk a gyakorlati életben pl. bizonyos típusú hidak, daruk, járművek vázszerkezetei.

Általában a rúdszerkezetek tervezésekor, a külső igénybevételek ismeretében több, a funkcionális követelményeknek jól megfelelő szerkezet közül választhatunk. Ezért érdemes valamilyen gazdaságossági kritérium alapján kiválasztani a legmegfelelőbbet. Ez a kritérium a különböző típusú szerkezeteknél más és más lehet.

Mi a következőkben csak azzal az esettel foglalkozunk, mikor ez a kritérium a szerkezet súlya lesz. Megjegyezzük, hogy ilyen módon bizonyos esetekben funkcionálisan is jobban működő szerkezeteket kapunk (pl. ha az önsúly befolyásolja a szerkezet működését).

Ezzel a témakörrel L. A. SCHMIT [16], [17], [18], K. F. REINSHMIDT, F. MOSES [13] kezdtek el legelőször foglalkozni a 60-as évek elején. A felmerülő problémák megfogalmazására és megoldására több különböző kísérlet történt. Igen sokan közelítették az eredeti, általában nemlineáris feladatot valamilyen lineáris modellel. Ennek egyik fő oka a szimplex módszer széleskörű elterjedése volt. Másrészt viszont komoly nehézséget jelentett az, hogy az eredeti nemlineáris feladat feltételei implicit módon voltak megadva, azaz a feltételi függvények ismeretlenek voltak.

Ebben a cikkben mi, egy speciális szerkezettípus, a rácsos tartók esetén adjuk meg az optimalizálási feladat explicit alakját síkbeli, térbeli esetben, sőt változó geometria esetén is. Ehhez a megadott szerkezetet megfelelő kisebb darabokra vágjuk, úgy hogy ezek a kisebb egységek maguk is rácsos tartók legyenek, azaz az eredetivel megegyező módon analizálhatók legyenek. Így az eredeti szerkezet helyett elegendő csak a részstruktúrákat vizsgálni, amelyek matematikai és számítástechnikai szempontból kedvezőbb tulajdonságúak. Ezzel a szerkezetet optimalizálás és analízis szempontjából célszerűen dekomponáljuk.

Megemlítjük, hogy a szerkezet analízisben használt erőmódszer, illetve véges elem módszer is felfogható dekomponálásként. Az első esetben a szerkezetet két részre bontjuk, a törzstartóra és ami marad, míg a második esetben minden rudat külön tekintünk. A kapott optimalizálási feladat síkbeli rácsos tartó esetén, rögzített geometria mellett, olyan nemlineáris programozási feladatot eredményez, ahol a célfüggvény lineáris és a feltételek vagy egy lineáris és egy kvadratikus vagy pedig egy harmadfokú és egy negyedfokú tag összegéből állnak elő és a feladatban csak egyenlőtlenségi feltételek szerepelnek.

Az optimalizálási feladat explicit alakját megadjuk térbeli rácsos tartók esetén is, sőt abban az esetben is, ha a geometria változik. Ha a geometria állandó, akkor a feltételi egyenlőtlenségek minden esetben lineáris és logkonkáv függvényekből képezhetők.

Ezeknek a problémáknak a megoldására a P. HUARD által kidolgozott linearizált centrum módszert javasoljuk. Ennél a módszernél ugyanis az optimalizálás során minden lépésben csak egy szimplex módszert és egy szakasz menti minimalizálást hajtunk végre, így nagy változószám esetén is jól alkalmazható, másrészt a feladatok matematikai tulajdonságaik alapján is jól illeszkednek a módszerhez.

A dolgozat végén a megközelítésünket a más szerzők által is gyakran használt három rúdból álló szerkezeten mutatjuk be.

2. Az optimalizálási probléma

Jelölje $t_1, \ldots, t_n$ azokat a változókat, amelyek egyértelműen meghatározzák a szerkezetet. A kérdés az, hogyan válasszuk meg ezeknek a változóknak az értékeit a tervezés folyamán.

Először azt az esetet vizsgáljuk, mikor a szerkezet geometriáját a tervezés folyamán nem változtatjuk, azaz a tervezési változók a rudak keresztmetszeti területei.

Legyen $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}} = [\sigma_{\mathbf{t}}^1, \ldots, \sigma_{\mathbf{t}}^n]$ a $\mathbf{t}$ vektor által meghatározott szerkezet rúdjaiban ébredő feszültségek vektora, amelyek egy külső terhelésrendszer hatására jönnek létre. Tudjuk azt, hogy ezek a feszültségek nem haladhatnak meg egy, a rúd anyaga által meghatározott feszültség értéket. Mivel mi csak kis csomóponti elmozdulásokat vizsgálunk, ezért ezek a feltételek egyben elegendőek is a szerkezet stabilitásához.

Jelölje a határfeszültségek vektorát $\boldsymbol{\sigma}_0$. Egy általánosabb tárgyalásnál ezt is valtozónak lehet tekinteni, mi azonban nem foglalkozunk ezzel az esettel.

Jól ismert tény az, hogy

$$\sigma_{\mathbf{t}}^i t_i = Y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

ahol Y_i, $i = 1, \ldots, n$ jelöli az i-edik rúdban ébredő ismeretlen rúderőket.

Így az optimalizálási feladat feltételei a következők:

$$\frac{Y_i}{t_i} = \sigma_{\mathbf{t}}^i \leqq \sigma_0^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{t} \geqq \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Ha elhagynánk a (2.3) feltételeket, akkor az optimalizálás folyamán statikailag határozott szerkezetet is kaphatnánk, azaz a szerkezet geometriája változhatna.

Az optimalizálási feladat célfüggvénye a szerkezet súlya, ami esetünkben lineáris függvény.

Azonban a (2.2) feltételek nincsenek explicit alakban megadva. Ahhoz, hogy ezt megkapjuk, az alábbi mátrixegyenletet használjuk.

3. A mátrix egyenlet

Legyen N a csomópontok száma. Ahhoz, hogy meghatározzuk a rúderőket és a csomóponti elmozdulásokat a következő mátrixegyenletet írjuk fel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ -\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

ahol

$\mathbf{A}$ — $n\times(2N-N_1)$ típusú mátrix, amely a csomóponti elmozdulásokra vonatkozik,
$\mathbf{A}^T$ — az $\mathbf{A}$ transzponáltja,
$\mathbf{R}$ — $n\times n$ típusú rugalmassági mátrix,
$\mathbf{X}$ — a csomóponti elmozdulások $(2N-N_1)$ dimenziós vektora,
$\mathbf{Y}$ — a rúderők n dimenziós vektora,
$\mathbf{q}$ — a külső igénybevételek $(2N-N_1)$ dimenziós vektora.

A (3.1) egyenletrendszer a kompatibilitási egyenleteket és az egyensúlyi egyenletek egy független részrendszerét tartalmazza. N_1 jelenti azoknak a lineárisan összefüggő egyenleteknek a számát, amelyeket az egyensúlyi egyenletek közül elhagytunk.

Mivel rugalmas rácsos tartót vizsgálunk, ezért az $\mathbf{R}$ mátrix determinánsa (amelyet az $|\mathbf{R}|$ szimbólum jelöl) nem nulla, azaz $|\mathbf{R}|\neq 0$. Definiáljuk most a következő $(2N-N_1)\times(2N-N_1)$ típusú mátrixot:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}. \tag{3.2}$$

Ez egy szimmetrikus, négyzetes mátrix, amelynek a determinánsa nem nulla, azaz $|\mathbf{C}|\neq 0$. Ahhoz, hogy ezt belássuk vegyük észre azt, hogy (3.1) *Kuhn—Tucker rendszere* a következő kvadratikus programozási problémának:

$$\min \frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{R}\mathbf{Y} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} = \mathbf{q},$$

ahol az $\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{R}\mathbf{Y}$ függvény szigorúan konvex. (Az $\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{R}\mathbf{Y}$ függvény pozitivitása a szerkezetanalízisből ismert.) Így az $\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}$ függvény is szigorúan konvex és mivel az $\mathbf{A}^T$ sorai lineárisan függetlenek, a $\mathbf{C}$ mátrix is pozitív definit és $|\mathbf{C}|>0$. Mivel $|\mathbf{R}|\neq 0$, $|\mathbf{C}|\neq 0$, így a (3.1) egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Megjegyezzük, hogy a (3.1) és (3.3) feladatok ekvivalenciája igen lényeges állítás a szerkezetanalízisben, ugyanis a (3.3) feladat összhangban van CASTIGLIANO tételével.

A (3.1) rendszert más alakban írva

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} = \mathbf{q} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{RY} - \mathbf{AX} = \mathbf{0}$$

és felhasználva az előbbieket kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{SAC}^{-1}\mathbf{q} \tag{3.5}$$

ahol $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}$. A $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix meghatározásához felhasználjuk a $\mathbf{C}$ mátrix determinánsát is, ezért bebizonyítjuk a következő állítást:

3.1. Lemma. Legyen $K \subset R^n$ egy konvex halmaz és $h(\mathbf{t}) = |\mathbf{C}(\mathbf{t})| : K \to R^1$. Ha a $\mathbf{C}(\mathbf{t})$ mátrix elemei a $\mathbf{t}$ változó lineáris függvényei és a $\mathbf{C}(\mathbf{t})$ mátrix minden $\mathbf{t} \in K$ esetén pozitív definit, akkor $h(\mathbf{t})$ logkonkáv függvény.

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy egy nemnegatív $h(\mathbf{t})$ függvény, amely definiálva van egy K konvex halmazon logkonkáv akkor és csak akkor, ha bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ és $0 < \lambda < 1$ esetén a

$$h(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geqq [h(\mathbf{x}_1)]^\lambda [h(\mathbf{x}_2)]^{1-\lambda} \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Mivel tudjuk, hogy a $\mathbf{C}(\mathbf{t})$ mátrix pozitív definit a tervezési tér minden pontjában és a rácsos tartóra csak húzó-nyomó igénybevételek hatnak, ezért a $\mathbf{C}(\mathbf{t})$ mátrix elemei a $\mathbf{t}$ változók lineáris függvényei. Így elegendő azt megmutatni, hogy ha $\mathbf{C}(\mathbf{t}_1)$, $\mathbf{C}(\mathbf{t}_2)$ pozitív definit mátrixok, akkor a

$$|\lambda\mathbf{C}(\mathbf{t}_1) + (1-\lambda)\mathbf{C}(\mathbf{t}_2)| \geqq |\mathbf{C}(\mathbf{t}_1)|^\lambda |\mathbf{C}(\mathbf{t}_2)|^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{3.7}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ez azonban igaz, mivel

$$\frac{\Pi^{(2N-N_1)/2}}{|\lambda\mathbf{C}(\mathbf{t}_1) + (1-\lambda)\mathbf{C}(\mathbf{t}_2)|^{1/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{C}(\mathbf{t}_1)\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}^T\mathbf{C}(\mathbf{t}_2)\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \tag{3.8}$$

és a *Hölder egyenlőtlenséget* alkalmazva $P = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{1-\lambda}$ értékekkel megkapjuk a (3.7) egyenlőtlenséget ([3]).

Ez a lemma mutatja, hogy a $h(\mathbf{t}) = |\mathbf{C}(\mathbf{t})|$ függvény az optimalizálás szempontjából jó tulajdonságokkal rendelkezik.

Azonban a (3.5) formula számítástechnikailag elég nehezen kezelhető. A gradiens típusú módszerek alkalmazása a feltételi függvények ismeretét követeli meg, gradiensmentes módszerekkel dolgozva pedig a (3.5) képletet alkalmazva, nagyobb méretek esetén a mátrixinvertálás jelent nehézséget.

4. Az optimalizálási probléma explicit alakja

Tegyük fel, hogy a rácsos tartó csak húzó-nyomó igénybevételekkel van terhelve. Az optimalizálási probléma explicit alakját úgy kapjuk meg, hogy az eredeti szerkezet vizsgálatát visszavezetjük részszerkezetek összességének vizsgálatára, azaz az eredeti szerkezetet felbontjuk matematikailag és számítástechnikailag előnyösebb tulajdonságokkal rendelkező részekre. Megjegyezzük, hogy esetünkben ezek a részstruktúrák is rácsos tartók, tehát az eredeti szerkezettel teljesen analóg módon vizsgálhatók.

Tekintsük az eredeti szerkezet helyett az egy csomópontból és a csomópontba befutó rudakból álló részszerkezetek összességét. Mivel az eredeti szerkezetre ható külső igénybevételek adottak, ezért az egyértelműen meghatározható **X** csomóponti elmozdulások ismeretében a csomóponti rendszerekre alkalmazva a mozgásmódszer alapösszefüggését, minden csomóponti rendszerhez egyértelműen egy külső, fiktív igénybevételt rendelhetünk.

A következőkben majd belátjuk, hogy az eredeti rácsos tartó vizsgálatát helyettesíthetjük ezen részstruktúrák vizsgálatával.

Nézzük meg először, hogyan kapjuk meg ilyen csomóponti rendszerek esetén az optimalizálási feladat explicit alakját. Mivel a csomóponti rendszerek a matematikai tárgyalásmód szempontjából ekvivalensek, így elegendő közülük egyet vizsgálni.

a) *Az optimalizálási feladat explicit alakja síkbeli, egy csomópontot tartalmazó rácsos tartók esetén*

Tekintsük azt a csomóponti rendszert, amely a δ-adik csúcsot és az $1, 2, \ldots, m$ számú rudakat tartalmazza. Rögzítsünk egy koordinátarendszert a szerkezet síkjában, majd toljuk el úgy, hogy a kezdőpontja egybeessen a szerkezet csomópontjával. Jelölje α_i, $i=1, \ldots, m$ az i-edik rúd és a vízszintes tengely szögét, β_i, $i=1, \ldots, m$ az i-edik rúd és a függőleges tengely szögét. Így

$$\mathbf{A}_\delta^T = [\mathbf{a}_1^\delta, \ldots, \mathbf{a}_m^\delta], \tag{4.1}$$

ahol $\mathbf{a}_i^\delta = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \end{bmatrix}$, $i = 1, \ldots, m$ és

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} k_1 t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_2 t_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_m t_m \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

ahol $k_i = \frac{E}{l_i} > 0$. (Itt E a rugalmassági együttható, l_i, $i=1, \ldots, m$ pedig a rudak hosszát jelenti.)

Számítsuk ki a

$$\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta = \mathbf{A}_\delta^T \mathbf{S}(\mathbf{t})_\delta \mathbf{A}_\delta \tag{4.3}$$

mátrix determinánsát a $\mathbf{t}$ pontban. Könnyen látható, hogy

$$|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta| = \sum_{(i,j)\in I} k_i k_j t_i t_j (\cos\alpha_i \cos\beta_j - \cos\alpha_j \cos\beta_i)^2, \tag{4.4}$$

ahol $I=\{i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, m,\ i \neq j,\ (i, j)=(j, i)\}$, vagy $I=\{(i, j)\colon i=1, 2, \ldots, m;$ $j=1, 2, \ldots, m;\ i \neq j,\ (i, j) \in I \Leftrightarrow (j, i) \notin I\}$. Legyen

$$\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta = \begin{pmatrix} c_1^\delta(\mathbf{t}) & c_2^\delta(\mathbf{t}) \\ c_2^\delta(\mathbf{t}) & c_3^\delta(\mathbf{t}) \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

így

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{t})_\delta \mathbf{q}^\delta = \frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta|} \begin{bmatrix} c_3^\delta(\mathbf{t}) & -c_2^\delta(\mathbf{t}) \\ -c_2^\delta(\mathbf{t}) & c_1^\delta(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x^\delta \\ q_y^\delta \end{bmatrix} = \tag{4.6}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta|} \begin{bmatrix} c_3^\delta(\mathbf{t})\, q_x^\delta - c_2^\delta(\mathbf{t})\, q_y^\delta \\ -c_2^\delta(\mathbf{t})\, q_x^\delta + c_1^\delta(\mathbf{t})\, q_y^\delta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t})_\delta \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} k_1 t_1 \cos\alpha_1 & k_1 t_1 \cos\beta_1 \\ k_2 t_2 \cos\alpha_2 & k_2 t_2 \cos\beta_2 \\ \vdots & \\ k_m t_m \cos\alpha_m & k_m t_m \cos\beta_m \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

ahol a q_x^δ, q_y^δ jelölik a δ-adik csúcsban ható fiktív erők komponenseit.

Végül a csomópontirendszer rúdjaiban ható erőkre azt kapjuk, hogy

$$Y_i(\mathbf{t}) = \frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta|} \big[k_i t_i \cos\alpha_i [c_3^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta - c_2^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta] + \tag{4.8}$$
$$+ k_i t_i \cos\beta_i [-c_2^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta + c_1^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta]\big], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Mivel az optimalizálási probléma feltételei

$$\sigma_t^i = \frac{Y_i}{t_i} \leqq \sigma_0^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{t} \geqq \varepsilon > 0,$$

így a következő feladatot kapjuk:

$$\min \frac{W(\mathbf{t})}{p} = \sum_{i=1}^{m} l_i t_i \tag{4.10}$$

$$k_i \cos\alpha_i \big(c_3^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta - c_2^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta\big) + k_i \cos\beta_i \big(-c_2^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta + c_1^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta\big) - \delta_0^i |\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta| \leqq 0,$$
$$i = 1, \ldots, m,$$
$$\mathbf{t} \geqq \varepsilon > \mathbf{0},$$

ahol $W(\mathbf{t})$ a csomóponti rendszer lineáris súlyfüggvénye, p pedig a fajsúly. A feltételi függvények első része lineáris, a $|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta|$ pedig egy kvadratikus, logkonkáv függvény.

b) *Az optimalizálási feladat explicit alakja síkbeli, több csomópontot tartalmazó rácsos tartók esetén*

Tekintsük mindazokat a csomóponti rendszereket, amelyeknél az eredeti szerkezet csomópontjai elmozdultak a külső igénybevétel hatására. Láttuk, hogy minden ilyen részstruktúra rúdjaiban ható erők a (4.8) összefüggés alapján meghatározhatók. Most belátjuk, hogy ezeknek az erőknek a segítségével az eredeti szerkezet rúdjaiban ható erők is egyértelműen meghatározhatók.

Osszuk az eredeti szerkezet rúdjait két csoportba: az első csoportba tartozzanak azok a rudak, amelyeknek a külső erő hatására csak az egyik vége mozdul el, s a másik helyben marad;

a második csoportba tartozzanak azok a rudak, amelyek két mozgó csomópontot kötnek össze.

Ha egy rúd az első csoportba tartozik, akkor a rúdban ható erő a (4.8) képlet alapján kiszámítható, így az optimalizálási feladatban szereplő feltétel (4.10) alakú.

Ha az i-edik rúd a második csoportba tartozik és a j-edik és a k-adik csomópontot köti össze, akkor

$$Y_i = Y_{ji}^j + Y_{ki}^k, \tag{4.11}$$

ahol Y_{ji}^j, Y_{ki}^k jelenti a j-edik és k-adik csomóponti rendszer megfelelő rúderőit. Így

$$Y_i = \frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_j|}[k_i t_i \cos\alpha_i Z_1^j(\mathbf{t}) + k_i t_i \cos\beta_i Z_2^j(\mathbf{t})] + \tag{4.12}$$

$$+\frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_k|}[-k_i t_i \cos\alpha_i Z_1^k(\mathbf{t}) - k_i t_i \cos\beta_i Z_2^k(\mathbf{t})],$$

ahol

$$Z_1^j(\mathbf{t}) = c_3^j(\mathbf{t})q_x^j - c_2^j(\mathbf{t})q_y^j; \quad Z_2^j(\mathbf{t}) = -c_2^j(\mathbf{t})q_x^j + c_1^j(\mathbf{t})q_y^j.$$

(Itt az Y_i rúderőt a j-edik csomóponti rendszerben számoltuk ki.)

Következésképpen az i-edik rúdra vonatkozó feltétel az alábbi lesz:

$$k_i \cos\alpha_i \left(Z_1^j(\mathbf{t})|\mathbf{C}(\mathbf{t})_k| - Z_1^k(\mathbf{t})|\mathbf{C}(\mathbf{t})_j|\right) + \tag{4.13}$$

$$+k_i \cos\beta_i \left(Z_2^j(\mathbf{t})|\mathbf{C}(\mathbf{t})_k| - Z_2^k(\mathbf{t})|\mathbf{C}(\mathbf{t})_j|\right) - \sigma_0^i |\mathbf{C}(\mathbf{t})_k|\,|\mathbf{C}(\mathbf{t})_j| \leqq 0.$$

Ha az eredeti szerkezet minden rúdjának esetében a megfelelő egyenlőtlenséget tekintjük és célfüggvénynek az egész szerkezet súlyfüggvényét választjuk, akkor megkapjuk az optimalizálási feladat explicit alakját.

c) *Az optimalizálási feladat explicit alakja három dimenziós rácsos tartó esetén*

Ha egy három dimenziós rácsos tartót tekintünk, akkor ugyanazt a módszert használhatjuk mint a síkbeli esetben, azaz a problémát redukálhatjuk a korábban már definiált csomóponti rendszerek vizsgálatára.

Tekintsük azt a csomóponti rendszert, amelyik tartalmazza a δ-adik csomópontot és az $1, 2, \ldots, m$ számú rudakat. Így

$$\mathbf{A}_\delta^T = [\mathbf{a}_1^\delta, \ldots, \mathbf{a}_m^\delta], \tag{4.14}$$

ahol

$$\mathbf{a}_i^\delta = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

és $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i=1, 2, \ldots, m$ jelölik az i-edik rúd és a megfelelő tengelyek szögét és

$$\mathbf{S}(\mathbf{t})_\delta \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} k_1 t_1 \cos\alpha_1 & k_1 t_1 \cos\beta_1 & k_1 t_1 \cos\gamma_1 \\ k_2 t_2 \cos\alpha_2 & k_2 t_2 \cos\beta_2 & k_2 t_2 \cos\gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_m t_m \cos\alpha_m & k_m t_m \cos\beta_m & k_m t_m \cos\gamma_m \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

(4.16)

$$\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta = \mathbf{A}_\delta^T \mathbf{S}(\mathbf{t})_\delta \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos^2\alpha_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\alpha_i \cos\beta_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\alpha_i \cos\gamma_i \\ \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\alpha_i \cos\beta_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos^2\beta_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\beta_i \cos\gamma_i \\ \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\alpha_i \cos\gamma_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos\beta_i \cos\gamma_i & \sum\limits_{i=1}^m t_i k_i \cos^2\gamma_i \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta = \begin{bmatrix} c_1^\delta(t) & c_4^\delta(t) & c_5^\delta(t) \\ c_4^\delta(t) & c_2^\delta(t) & c_6^\delta(t) \\ c_5^\delta(t) & c_2^\delta(t) & c_3^\delta(t) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

és

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{t})_\delta = \frac{1}{|\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta|} \begin{bmatrix} \bar{c}_1^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_4^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_5^\delta(\mathbf{t}) \\ \bar{c}_4^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_2^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_6^\delta(\mathbf{t}) \\ \bar{c}_6^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_6^\delta(\mathbf{t}) & \bar{c}_3^\delta(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

(ahol $\bar{c}_i^\delta(\mathbf{t})$ jelöli a $c_i^\delta(\mathbf{t})$-hez tartozó adjungált aldeterminánst), akkor a következő feltételi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$k_i \cos\alpha_i [\bar{c}_1^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta + \bar{c}_4^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta + \bar{c}_5^\delta(\mathbf{t}) q_z^\delta] + k_i \cos\beta_i [\bar{c}_4^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta + \bar{c}_2^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta + \bar{c}_6^\delta(\mathbf{t}) q_z^\delta] +$$
$$k_i \cos\gamma_i [\bar{c}_5^\delta(\mathbf{t}) q_x^\delta + \bar{c}_6^\delta(\mathbf{t}) q_y^\delta + \bar{c}_3^\delta(\mathbf{t}) q_z^\delta] - \sigma_0^i |\mathbf{C}(\mathbf{t})_\delta| \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ahol most $\bar{c}_i(\mathbf{t})$, $i=1, \ldots, m$ kvadratikus és a $|\mathbf{C}(\mathbf{t})|$ kifejezés harmadfokú tagokat tartalmaz, de maga a kifejezés ismét logkonkáv.

d) *Az optimalizálási feladat explicit alakja abban az esetben, mikor a szerkezet geometriája is változik*

Vizsgáljuk meg síkbeli szerkezet esetén, hogyan kapjuk meg az optimalizálási probléma explicit alakját, ugyanis ez három dimenziós rácsos tartó esetén teljesen hasonlóan megy.

Először csak olyan változásokat engedünk meg a geometriánál, amelynél a rudak száma nem változik és az $\mathbf{A}^T$ mátrix rangja is ugyanaz marad. Ezt úgy érhetjük el, hogy megfelelő alsó és felső korlátokat adunk meg a $\cos\alpha_k$, $\cos\beta_k$, l_k értékekre minden k esetén. Ezen a módon tehát elérhetjük azt, hogy sem csomópont, sem rúd nem tűnik el.

Vezessük be az N csomópont $2N$ koordinátáját új változóknak és jelölje ezeket u_i, v_i, $i=1, \ldots, N$. Ezen változók segítségével azt kapjuk, hogy

$$l_k = \sqrt{(u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2}, \tag{4.20}$$

ahol l_k jelenti a k-adik rúd hosszúságát, amelyik az i-edik és a j-edik csomópontot köti össze. Ha most tekintjük azt a csomóponti rendszert, amelyik az i-edik csomópontot tartalmazza, akkor

$$\cos\alpha_k = \frac{u_j - u_i}{l_k}, \quad \cos\beta_k = \frac{v_j - v_i}{l_k}. \tag{4.21}$$

Ezeket a kifejezéseket a korábban kapott optimalizálási problémába behelyettesítve explicit alakokat kapunk. Oldjuk meg az így kapott feladatot! Ha az optimális megoldásnál a $\cos\alpha_k$, $\cos\beta_k$, l_k vagy t_k értékek közül valamelyek megegyeznek vagy az alsó vagy a felső korlátjukkal, akkor döntünk, hogy mely rudakat hagyjuk el vagy vesszük hozzá a szerkezethez és mely csomópontokat szüntetjük meg. Ezután újból megoldjuk az optimalizálási feladatot és ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a geometriát érdemben változtatni tudjuk.

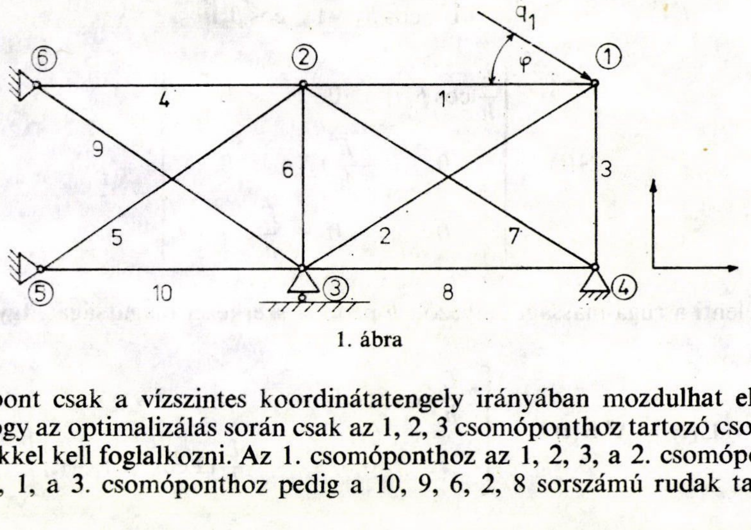
Ezeknél a problémáknál az optimalizálási eljárás folyamán minden lépésben meg kell határozni a csomóponti rendszerekhez tartozó fiktív erőket. Mivel csak kis csomóponti elmozdulásokat vizsgálunk, ezért az eredeti probléma egy jó közelítését kapjuk.

Ezeknek a feladatoknak a megoldására a P. HUARD [9] által kidolgozott linearizált centrum módszert javasoljuk. Ennél a módszernél az optimalizálás során minden lépésben csak egy szimplex módszert és egy szakasz menti minimalizálást hajtunk végre, így nagy változószám esetén is jól alkalmazható, másrészt a feladatok matematikai tulajdonságaik alapján is jól illeszkednek a módszerhez.

5. Egy konkrét szerkezet dekomponálása

Ebben a részben megmutatjuk, hogy az előzőekben leírt dekomponálást hogyan hajtjuk végre az alábbi szerkezetnél.

Látjuk, hogy ennek a szerkezetnek 6 csomópontja és 10 rúdja van. A 4, 5, 6 csomópontok rögzítettek, tehát a $\mathbf{q}_1$ külső erő hatására nem mozdulnak el, míg a



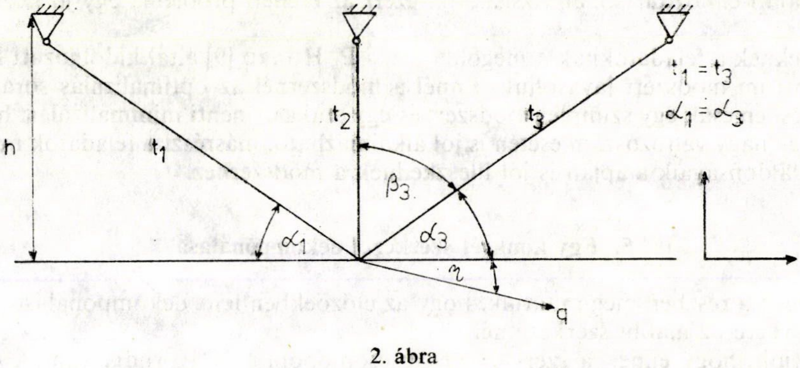
1. ábra

3 csomópont csak a vízszintes koordinátatengely irányában mozdulhat el. Ez azt jelenti, hogy az optimalizálás során csak az 1, 2, 3 csomóponthoz tartozó csomóponti rendszerekkel kell foglalkozni. Az 1. csomóponthoz az 1, 2, 3, a 2. csomóponthoz a 4, 5, 6, 7, 1, a 3. csomóponthoz pedig a 10, 9, 6, 2, 8 sorszámú rudak tartoznak.

Végezzük most el a szerkezet rúdjainak a csoportosítását a 4. szakasz b) pontjában leírt szempontok szerint. Így az első csoportba a 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 rudak tartoznak, míg a második csoportba az 1, 2, 6 rudak. Ha most meghatározzuk az 1, 2, 3 csomópontban ható fiktív erőket, akkor az előző csoportosítás alapján a (4.10), (4.13) összefüggéseket alkalmazva azonnal megkapjuk az optimalizálási feladat explicit alakját.

6. Példa

Az alábbiakban a három rúdból álló rácsos tartó optimalizálását végezzük el a cikkben leírt módszerrel. Azért választottuk ezt a szerkezetet, mert korábban már több szerző ezen mutatta be az általa javasolt optimalizálási eljárást, pl. SCHMIT [18], MOSES [13], LIPSON és AGRAWAL [14]. A három rúdból álló rácsos tartót a 2. ábrán látjuk.



2. ábra

Itt

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_3 & 0 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 & 1 & \cos\beta_3 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \frac{E}{h}\cos\beta_3 t_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{h} t_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{h}\cos\beta_3 t_1 \end{bmatrix},$$

ahol E jelenti a rugalmassági tényezőt, h pedig a szerkezet magasságát. Így

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(\mathbf{t})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\frac{E}{h}\cos\beta_3\cos^2\alpha_3 t_1 & 0 \\ 0 & \frac{E}{h}(2\cos^3\beta_3 t_1 + t_2) \end{bmatrix}.$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva az optimalizálási feladat a következő:

$$\min \frac{W(\mathbf{t})}{ph} = \frac{1}{\cos \beta_3} t_1 + t_2$$

$$g_1(\mathbf{t}) = A_1 t_1 + A_3 t_2 - t_1^2 - A_2 t_1 t_2 \leqq 0$$

$$g_2(\mathbf{t}) = -t_1 - A_2 t_2 + A_2 A_4 \leqq 0$$

$$0 < \varepsilon \leqq t_1, \quad 0 < \varepsilon \leqq t_2,$$

α_3	30	45	60	30	45	60	30	45	60
η	30	30	30	45	45	45	60	60	60
A_1	1	0,966	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1,115	1	1,115	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	0,966	1
A_2	4	$\sqrt{2}$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	4	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	4	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$
A_3	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
A_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{A_3}{A_2}$	$\frac{1}{2}$	0,612	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$
$t_{1,F}^{\text{opt}}$	$\frac{2}{3}$	0,408	—	0,393	≈ 1	0,404	0,384	0,517	—
$t_{2,F}^{\text{opt}}$	$\frac{1}{3}$	0,211	—	0,608	ε	0,182	0,770	0,499	—
$\frac{W^F}{hp}$	$\frac{5}{3}$	0,788	—	1,394	$\approx \frac{2}{\sqrt{2}}$	0,648	1,538	1,232	—
t_1^{opt}	0,689	—	—	—	—	—	—	—	—
t_2^{opt}	0,283	—	ε	—	—	—	—	—	ε
$\frac{W}{hp}$	1,662	—	—	—	—	—	—	—	—

ahol $\sigma_0^i = \sigma$ $(i=1, 2)$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_x^2+q_y^2}$ és

$$A_1 = \frac{|\mathbf{q}|\cos(\beta_3-\eta)}{\sigma\sin 2\alpha_3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2\cos^3\beta_3},$$

$$A_3 = \frac{|\mathbf{q}|\cos\eta}{2\sigma\sin 2\alpha_3\cos^2\beta_3},$$

$$A_4 = \frac{|\mathbf{q}|}{\sigma}\sin\eta.$$

Az optimalizálási feladat *Kuhn—Tucker rendszerét* vizsgálva az alábbi táblázatban található eredményeket kaptuk. A táblázatban $t_{1,F}^{opt}$, $t_{2,F}^{opt}$ az egyenszilárdságú szerkezetet, a $t_2^{opt}=\varepsilon$ pedig a geometria változását jelenti. A számolásoknál a $\frac{|\mathbf{q}|}{\sigma}=1$ feltevéssel éltünk.

IRODALOM

[1] Alspaugh, D. W. and Kunoo, K., "Optimum configurational and dimensional design of truss structures", *Computers and Structures* **4** (1974) 755—770.

[2] Baldur, R., "Structural optimization by inscribed hyperspheres", *Journal of the Engineering Mechanics Division,* **6** (1972).

[3] Bellmann, R., *Introduction to matrix analysis* (McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1960).

[4] Brown, D. M., Ang, A. H. S., "Structural optimization by nonlinear programming", *Journal of the Structural Division,* **12** (1966).

[5] Farshi, B., Schmit, L. A., "Minimum weight design of stress limited trusses", *Journal of the Structural Division,* **1** (1974).

[6] Gellatly, R. A., Gallagher, R. H., "A procedure for automated minimum weight structural design" *Aeronautical Quarterly* **17** (1966).

[7] Halmos, E., Jávorszky, G., „Határozatlan gépjárművázszerkezetek minimális slúyra történő méretezése", *Autóközlekedés* **12** (1974) 17—21.

[8] Huard, P., "Programmation mathématique convexe", *Revue Francaise d'Information et de Recherche Operationnelle* **7** (1968) 43—59.

[9] Huard, P., "A method of centers by upper-bounding functions with applications", *in Mangasarian, Ritter and Rosen, ed. Nonlinear programming* (Academic Press, New York, 1970) 1—30.

[10] Kavlie, D. and Moe, J., "Automated design of frame structures", *Journal of the Structural Division* **1** (1971).

[11] Kicher, T. P., "Optimum design minimum weight versus fully stressed," *Journal of the Structural Division* **12** (1966).

[12] Lipson, S. L. and Agrawal, K. M., "Weight optimization of plane trusses", *Journal of the Structural Division* **5** (1974).

[13] Moses, F., "Optimum structural design using linear programming", *Journal of the Structural Division* **12** (1964).

[14] Reinschmidt, K. F. and Russel, A. D., "Application of linear programming in structural layout and optimization", *Computers and Structures* **4** (1974) 855—869.

[15] Romstad, K. M. and Wang, Chu-Kia., "Optimimum design of framed structures", *Journal of the Structural Division* **12** (1968).

[16] Schmit, L. A. and Mallett, H., "Structural synthesis and design paramter hierarchy", *Journal of the Structural Division* **8** (1963).

[17] Schmit, L. A. and Fox, R. L., "An integrated approach to structural synthesis and analysis", *AIAA Journal* **6** (1965).

[18] Schmit, L. A. and Fox, R. L., "Advances in the integrated approach to structural synthesis" *Journal of Spacecraft and Rockets* 6 (1966).

[19] SZABÓ, J. ÉS ROLLER, B., *Rúdszerkezetek elmélete és számítása* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971).
[20] VANDERPLAATS, G. N. AND MOSES, F., "Automated design of trusses for optimum geometry", *Journal of the Structural Division* **3** (1972).

(Beérkezett: 1977. szeptember 22.)

RAPCSÁK TAMÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, XI., KENDE U. 13—17.

HALMOS EMIL
KÖZLEKEDÉSI ÉS TÁVKÖZLÉSI FŐISKOLA
9026 GYŐR, SÁGVÁRI E. ÚT 25.

MINIMUM WEIGHT DESIGN OF THE STATISTICALLY INDETERMINATE TRUSSES

E. HALMOS and T. RAPCSÁK

In this paper, the optimization problem of minimum weight design of a statically indeterminate truss is formulated in explicit form. In case of a planar truss (if the geometry is fixed) there is a problem where the objective function is linear and the constraints are composed by a linear and a quadratique part or by a third degree and a fourth degree part, moreover the problem does not contain any equation.

It is also given the explicit form of the optimization problem in case of a three-dimensional truss as well as when the geometry changes.

To solve these problems, the linearized method of centers, elaborated by P. HUARD is proposed·

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 185—191

HOMOGÉN FILE KULCSAIRÓL

DEMETROVICS JÁNOS
Budapest

A dolgozatban bebizonyítjuk, hogy az n-változós R reláció kulcsjelöltjeinek a száma legfeljebb $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Olyan n-változós R relációt is konstruálunk, amelyre a kulcsjelöltek száma ezt a felső határt el is éri. Konstruálunk továbbá egy olyan relációt, amelyben a kulcsjelöltek és a funkcionális függőségek száma egyidőben van közel a lehetséges maximumhoz.

1. Bevezetés

Az E. F. CODD [1—3] által javasolt relációs adatmodell [4] egyike a legigéretesebb adatbáziskezelő [5] rendszernek. Ebben az adatmodellben a felhasználók adatai relációkkal vagyis két dimenziós táblázatokkal vannak kifejezve, ahol a sorok jelölik a relációk konkrét előfordulásait vagy rekordjait, az oszlopok pedig a tartományokat vagy attributomokat. A reláció sorainak azonosítására bizonyos tartományok halmazának az értéke szolgál. Ez az érték meghatározza a további tartományok konkrét értékeit is. Ezeket a tartományokat kulcsnak nevezzük. Az olyan kulcsot, melynek valódi részhalmaza nem azonosítja a relációt, kulcsjelöltnek nevezzük. C. DELOBEL, R. G. CASEY [6] és R. FADOUS, J. FORSYSTH [7] két különböző algoritmust adtak meg az összes kulcsjelölt megtalálására, ha adottak a relációban levő funkcionális függőségek. C. T. YU és D. T. JOHNSON [8] bebizonyították, hogy ezek az algoritmusok nem „gyorsak", mivel létezik olyan reláció, amelyben legalább $\sqrt{n}!$ kulcsjelölt van, még akkor is ha funkcionális függések száma $\leqq \sqrt{n}$.

Jelen dolgozatunkban bebizonyítjuk, hogy az n-változós R reláció kulcsjelöltjeinek a lehetséges felső határa legfeljebb $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ lehet, és konstruálunk egy olyan n-változós R relációt, melyben ezt a számot el is érjük.

Továbbá konstruálunk egy relációt, melyben a kulcsjelöltek és a funkcionális függőségek száma egyidőben közel van a lehetséges maximumhoz. Pontosabban, konstruálunk egy olyan $(n+1)$-változós T relációt, melyben a funkcionális függőségek és kulcsjelöltek száma egyenlő k-val, ahol $k=\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

2. Definíciók

2.1. DEFINÍCIÓ. Adottak a nem feltétlenül különböző $D_1, D_2, \ldots, D_n$ halmazok. Az n-változós R reláció a $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ *Descartes szorzatnak* egy részhalmaza, azaz az R reláció olyan elemek részhalmaza, amelyek $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ alakúak és $d_i \in D_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Azt a $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ elemet, amely az R reláció eleme R elemnek nevezzük. A D_i halmazt értelmezési tartománynak, vagy egyszerűen csak tartománynak nevezzük.

2.2. DEFINÍCIÓ. A reláció tartományaihoz kapcsolt nevet attributumnak nevezzük. Bármely értéket, ami egy attributummal kapcsolatos attributum értéknek nevezzük.

2.1. Megjegyzés. A relációk tartományaihoz kapcsolt attributumnak különbözőknek kell lenni, míg az értelmezési tartományok azonosak is lehetnek.
Jelen dolgozatunkban minden tartomány ugyanaz a halmaz, mégpedig a pozitív egész számok halmaza, az attributumok pedig a tartományok sorszámai. N-nel jelöljük az n-fokú R reláció attributumainak a halmazát, azaz $N=\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

2.3. DEFINÍCIÓ. A B attributumok halmaza az R relációban függ az A attributumok halmazától, ha minden R elemre igaz, hogy az A attributum értékei egyértelműen meghatározzák a B attributum értékeit ($A, B \subseteq N$). Ebben az esetben azt írjuk, hogy $A \to B$, és azt mondjuk, hogy A generálja B-t. Az $A \to B$ összefüggést az R reláció funkcionális függőségének nevezzük.

2.4. DEFINÍCIÓ. Legyen $A \subseteq N$, $A \neq \emptyset$ és $A \to N$. Azt mondjuk, hogy A egy kulcsjelölt az R relációban, ha nincs olyan B valódi részhalmaza az A-nak, hogy $B \to N$.

2.5. DEFINÍCIÓ. Legyenek A_i és B_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ nem üres részhalmazai az N-nek, akkor az $A_i \to B_i$ halmazt az R reláció funkcionális függőségei halmazának nevezzük.

2.6. DEFINÍCIÓ. Az $A_i \to B_i$ funkcionális függőséget triviálisnak nevezzük, ha
(i) A_i kulcsjelölt az adott R relációban;
(ii) $A_i \to A_i$;
(iii) $A_i \to B_i$ és létezik olyan $A_i' \subset A_i$, hogy $A_i' \to B_i$;
(iv) $A_i \to B_i$ és létezik olyan $B_i' \supset B_i$, hogy $A_i \to B_i'$.
G-vel jelöljük az R reláció nem triviális funkcionális függőségeinek a halmazát.

2.2. Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy $0 \leq |G| < n \cdot 2^{n-1}$.

3. A kulcsjelöltek száma

A jelen fejezetben bebizonyítjuk, hogy létezik olyan n-változós R reláció, amelyben a kulcsjelöltek száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ és nem létezik olyan n-változós reláció, amelyben ennél több kulcsjelölt lehetne.

3.1. Lemma. Egy tetszőleges n-változós R relációban maximum $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ kulcsjelölt lehet.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért mindegyik tartományt jelöljük a sorszámával. Így egy tetszőleges kulcsjelölt nem más, mint az $\{1, 2, \dots, n\} = N$ halmaz egy bizonyos részhalmaza. Jelöljük $\mathcal{N}$-el a kulcsjelöltek halmazát. Nyilvánvaló, hogy egy R relációnak legalább egy kulcsjelöltje van — $1, 2, \dots, n$ — és maximum $2^n - 1$ kulcsa (kulcsjelöltje) lehet. A kulcsjelölt definíciójából következik, hogy a kulcsjelöltek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha

$$(3.1) \qquad (n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_h}) \in \mathcal{N} \text{ és } (n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_m}) \in \mathcal{N}$$

az R reláció kulcsai, akkor igaz, hogy

$$\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_h}\} \subsetneqq \{n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_m}\}$$

és

$$\{n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_m}\} \subsetneqq \{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_h}\}.$$

Ez azt jelenti, hogy nekünk az N halmaz azon részhalmazainak a halmazát kell kiválasztani, amelyek együttesen rendelkeznek a (3.1) tulajdonsággal. Pontosabban, ezen részhalmazok halmaza közül azt, amelyiknek a számossága a legnagyobb.

Könnyű belátni, hogy $n = 2m$ esetén a (3.1) feltételnek eleget tesz például az az S_1 halmaz, amely nem más, mint az N halmaz összes m hosszúságú $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}\}$ részhalmaza.

Ha $n = 2m + 1$, akkor a (3.1) feltételt például kielégíti az a S_2 ill. S_3 halmaz, amelynek minden eleme m ill. $m + 1$ hosszúságú.

Az S_i $(i = 1, 2, 3)$ halmazok olyan halmazok, amelyek kielégítik a (3.1) tulajdonságot. Nekünk az ilyen tulajdonságúak közül azt kell kiválasztani, amelynek a számossága a legnagyobb.

Könnyű bebizonyítani — és a *Sperner-tétel*ből is következik [9] —, hogy a legnagyobb számosságú éppen az általunk megjelölt S_i halmaz. Ismert tény [9], hogy az S_i halmaz számossága $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ pontosabban, ha $n = 2m$, akkor $\binom{2m}{m}$; ha pedig $n = 2m + 1$, akkor

$$\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}.$$

A 3.1. lemmát bebizonyítottuk.

A 3.2. lemmában bebizonyítjuk, hogy létezik olyan n fokú R reláció, amelyben éppen annyi kulcsjelölt van, mint amennyit a 3.1. lemma kimond.

3.2. Lemma. Létezik olyan R reláció, amelyben $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ kulcsjelölt van.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy $n=2m$. Ebben az esetben olyan példát kell konstruálnunk, hogy az S_1 halmaz minden $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}\} \subset N$ eleme generálja az N halmazt, de az $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}\}$ egyetlen $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_t}\}$ valódi részhalmaza se generálja az N halmazt $(t<m)$.

Az n-változós R reláció minden tartományának minden értéke legyen pozitív egész szám a következő módon: Az i $(i=1, 2, \dots, m)$ tartományba egy x_i változó kerüljön, amelynek az értékkészlete pozitív egész szám.

Az $m+i$ $(i=1, 2, \dots, m)$ tartományokat pedig az $1, 2, \dots, m$ tartományok értékei adják meg. Az $m+i$ tartomány értéket a

$$2^i x_1 + 2^{2i} x_2 + 2^{3i} x_3 + \dots + 2^{(m-1)i} x_{m-1} + 2^{mi} x_m$$

lineáris függvény adja meg. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy minden R elemet úgy adunk meg, hogy előbb $1, 2, \dots$ majd végül az n attributum értéket adjuk meg.

Így tehát az R reláció a következő $2m$ lineáris függvényből áll:

$$\mathcal{F} = \left\{ x_i, \ \sum_{j=1}^{m} 2^{ji} x_j, \ i = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az állításunk érdekében elégséges bebizonyítani azt, hogy az $\mathcal{F}$ függvényrendszer bármely tagja lineárisan függ az $\mathcal{F}$ rendszer bármely m tagjától, és egyetlen tagja sem függ egyetlen $t(t<m)$ tagból álló függvényrendszertől sem. Ennek érdekében be kell bizonyítani azt, hogy bármely m egyenlet megoldása megadja a többi m egyenlet értékét, és egyetlenegy egyenletrendszer, melynek számossága kisebb, mint m nem adja meg egyetlen egyenletnek sem az értéket.

Ennek igazolására elég bebizonyítani, hogy egyetlenegy m számosságú egyenletrendszernek sem 0 a determinánsa. Könnyű belátni, hogy ennek érdekében elég megmutatni azt, hogy a $\sum_{j=1}^{m} 2^{ji} x_j$ $(i=1, 2, \dots, m)$ egyenletrendszer által meghatározott D determináns egyetlen D_k részdeterminánsának sem 0 az értéke. Ez egyszerűen következik az $\mathcal{F}$ lineáris függvényrendszer tetszőleges m függvénye által meghatározott determináns kifejtési szabályából.

Legyen

$$D = \begin{vmatrix} 2^{11} & 2^{21} & 2^{31} & \dots & 2^{(m-1)1} & 2^{m1} \\ 2^{12} & 2^{22} & 2^{32} & \dots & 2^{(m-1)2} & 2^{m2} \\ 2^{13} & 2^{23} & 2^{33} & \dots & 2^{(m-1)3} & 2^{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2^{1(m-1)} & 2^{2(m-1)} & 2^{3(m-1)} & \dots & 2^{(m-1)(m-1)} & 2^{m(m-1)} \\ 2^{1m} & 2^{2m} & 2^{3m} & \dots & 2^{(m-1)m} & 2^{mm} \end{vmatrix}$$

A D determináns sorait i-vel, oszlopait pedig j-vel jelöljük, $i, j=1, 2, \dots, m$.

Be kell bizonyítani, hogy a D determináns tetszőleges D_k $(1 \leqq k \leqq m)$ részdeterminánsának az értéke nem 0, azaz

$$D_k = \begin{vmatrix} 2^{j_1 i_1} & 2^{j_2 i_1} & \dots & 2^{j_k i_1} \\ 2^{j_1 i_2} & 2^{j_2 i_2} & \dots & 2^{j_k i_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2^{j_1 i_k} & 2^{j_2 i_k} & \dots & 2^{j_k i_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

ahol $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq m$ és $1 \leqq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqq m$.

Megjegyzés. A D_k részdetermináns értelemszerűen azt jelenti, hogy ismerjük az n-változós R relációnk l-edik és h-adik értelmezési tartományainak az értéket, ahol $1 \leqq l \leqq m$ és $l \neq j_1, j_2, \ldots, j_k$, valamint a $h = m + i_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$. A D_k determináns kifejtéséből következik, hogy a D_k $k!$ összegből áll, amelyek mindegyike

$$2^{i_1 j_{l_k} + i_2 j_{l_{k-1}} + \ldots + i_k j_{l_1}}$$

alakú hatvány, ahol $j_{l_s} \neq j_{l_t}$, ha $s \neq t$ és $\{j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots, j_{l_k}\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$.

Bizonyítsuk be, hogy ezek közül a hatványok közül létezik egyetlenegy legkisebb hatvány, mégpedig a

$$2^{i_1 j_k + i_2 j_{k-1} + \ldots + i_{k-1} j_2 + i_k j_1} = M.$$

Elég bebizonyítani, hogy az

$$i_1 j_k + i_2 j_{k-1} + \ldots + i_{k-1} j_2 + i_k j_1 < i_1 j_{l_k} + i_2 j_{l_{k-1}} + \ldots + i_{k-1} j_{l_2} + i_k \cdot j_{l_1} \tag{3.2}$$

egyenlőtlenség fennáll, ha legalább egy $i_s j_{k-s+1} \neq i_s \cdot j_{l_{k-s+1}}$. Valóban, bontsuk fel a (3.2) egyenlőtlenséget k darab egyenlőtlenség összegére a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&i_1(j_k + j_{k-1} + \ldots + j_2 + j_1) \leqq i_1(j_{l_k} + j_{l_{k-1}} + \ldots + j_{l_2} + j_{l_1}) \\
&(i_2 - i_1) \cdot (j_{k-1} + \ldots + j_2 + j_1) \leqq (i_2 - i_1) \cdot (j_{l_{k-1}} + \ldots + j_{l_2} + j_{l_1}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(i_{k-1} - i_{k-2}) \cdot (j_2 + j_1) \leqq (i_{k-1} - i_{k-2}) \cdot (j_{l_2} + j_{l_1}) \\
&(i_k - i_{k-1}) \cdot j_1 \qquad\qquad \leqq (i_k - i_{k-1}) \cdot j_1.
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy legalább egy egyenlőtlenség szigorú.

Így sikerült bebizonyítani, hogy a D_k determináns mindegyik összeadandójából ki lehet emelni $2^{i_1 j_k + i_1 j_{k-1} + \ldots + i_k j_1} = M$, s mellette a 2 valamilyen pozitív hatványa szerepel és az 1 is csak egyszer, azaz

$$D_k = M(1 \pm 2^{A_1} \pm 2^{A_2} \pm \ldots \pm 2^{A_{k!-1}}),$$

ahol
$$A_j \geqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, k! - 1).$$

Ez azt jelenti, hogy $D_k \neq 0$.

A lemmát bebizonyítottuk.

A 3.1. és 3.2. lemmából következik az alábbi tétel.

3.1. TÉTEL. Létezik olyan n-változós R reláció amelyben a lehetséges kulcsjelöltek száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ és nem létezik olyan reláció, amelyben a kulcsjelöltek száma ennél több lenne.

3.1. Megjegyzés. A 3.2. lemmában szereplő R reláció konstrukciójából következik, hogy nincs benne egyetlen nem triviális funkcionális függőség sem.

A [8] dolgozatban a szerzők bebizonyították, hogy ha a nem triviális függőségek száma $k \leqq \sqrt{n}$, akkor létezik olyan n-változós R reláció, amelyben a lehetséges kulcsok száma $\sqrt{n}!$.

A második tételben egyrészt adunk a nem triviális funkcionális függőségek számára egy lehetséges becslést. Másrészt pedig példát konstruálunk annak a ténynek az illusztrálására, hogy a nem triviális funkcionális függőségek magas száma „lényegében” nem csökkenti a lehetséges kulcsjelöltek számát.

3.2. TÉTEL. Legyen $k=\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Létezik olyan $n+1$ fokú T reláció, amelyben legalább k funkcionális függőség van és a kulcsjelöltek száma is k.

Bizonyítás. Vegyük a 3.2. lemmában szereplő n-változós R relációt és bővítsük ki $(n+1)$-változós T relációvá, úgy hogy az $n+1$ attributumértéke ne függjön az előző n attributum egyetlen részhalmazának az értékétől sem. Vagyis az $n+1$ attributum legyen teljesen független.

Nyilvánvaló, hogy az R reláció minden kulcsjelöltje ebben a T relációban egy nem triviális funkcionális függőséget jelent és a nem triviális funkcionális függőségek száma $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ a T relációban.

A T reláció kulcsa pedig nem más, mint az $1, 2, \ldots, m, \ldots, n$ halmaz tetszőleges m elemű részhalmaza és az $n+1$ attributum $(n=2m)$.

Könnyű belátni, hogy az $(n+1)$-változós T reláció kulcsjelöltjeinek a számossága is $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

A tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] CODD, E. F., "A relational model of data for large shared data banks", *CACM* 13 (1970) 377—387.

[2] CODD, E. F., "Normalized data base structure: A brief tutorial", *Proc. 1971 ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control.*

[3] CODD, E. F., "Further normalization of the data base relational model", *Courant Computer Science Symposia 6 "Data Base System"*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971) 33—64.

[4] HALASSY, B., *Adatbázis-kezelő rendszerek* (Statisztikai Kiadó, 1978).

[5] GYÜRKI, J., *Adatfeldolgozás* (Tankönyvkiadó, BME, 1977).

[6] DELOBEL, C.—GASEY, R. G., "Decomposition of a data base and the theory of boolean switching functions", *IBM J. Res. and Dev. 17. Sept.* (1973) 374—386.

[7] FADOUS, R.—FORSYTH, J., "Finding candidate keys for relational data bases", *Proc. 1975 ACM SIGMOD*, 203—210.

[8] YU, C. T.—JOHNSON, D. T., "On the complexity of finding the set of candidate keys for a given set of functional dependencies", *Information Processing Letters*, **5** (1976) 100—101.

[9] SPERNER, E., „Eine Satz über Untermengen einer endlichen Menge", *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928) 544—548.

(Beérkezett: 1978. január 25.)

DEMETROVICS JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST, XI. KENDE U. 13—17.

ON THE NUMBER OF CANDIDATE KEYS

J. DEMETROVICS

The relational model of data structures proposed by E. F. CODD is one of the most promising ones for handling data. In this model the users' data are represented by two-dimensional tables with rows representing records, i. e. manifestations of a relation and with coloumns representing attributes, i. e. domains. Rows are identified by theire values taken on a set of attributes, these not being identical for two different rows. These sets of attributes are called keys and those keys which contain no further keys as subsets are called candidate keys.

In the present the author gives upper bound for the number of candidate keys and a relation where this bound is reached. Then he gives another relation with the number of candidate keys and that of the functional dependencies both close to the possible maximum, i. e. a relation T of degree $n+1$ with k nontrivial functional dependencies and k candidate keys, k being equal to $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 193—197*

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA RENDSZÁMNÖVELÉSSEL

GERGELY JÓZSEF

Budapest

Az [1] dolgozatban bebizonyítottuk, hogy a mátrixinvertálásra használt rendszámnöveléses módszer és a *Gauss—Jordan elimináció* megegyezik. Minden mátrixinvertálási módszerből nyerhető lineáris egyenletrendszer megoldására szolgáló módszer. A dolgozatban olyan lineáris egyenletrendszer megoldó módszert vizsgálunk, amely a rendszámnöveléses eljáráson alapul.

1. A módszer ismertetése

Az

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.1}$$

lineáris egyenletrendszer rendszámnöveléssel való megoldása a következőképpen fogalmazható meg. Legyen a nulladik közelítés $x^0=0$, és jelölje a k-adik közelítést $x^k=(x_1^k, \dots, x_k^k, 0, \dots, 0)^T$, $0<k\leqq n$.

Tegyük fel, hogy az (1.1) egyenletrendszerünk $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$, $i,j=1, \dots, n$ mátrixának minden bal felső minormátrixa nemszinguláris. Tekintsük először az (1.1) egyenletrendszer első egyenletét csak az x_1 ismeretlen függvényeként, azaz a δx_1^0 változásában $a_{11}\delta x_1^0=b_1$, ahonnan $\delta x_1^0=\dfrac{b_1}{a_{11}}$ és legyen $x_1^1=\delta x_1^0$. Második lépésként az (1.1) egyenletrendszer második egyenletét oldjuk majd meg a δx_1^1 és δx_2^1 változására nézve, de figyelembe vesszük, hogy az első egyenletet az x^1 kielégíti, ami δx_1^1 és δx_2^1 megváltozásokra a következő feltétel teljesülését rója ki:

$$a_{11}\delta x_1^1+a_{12}\delta x_2^1 = 0.$$

Ebből következik a $\delta x_1^1=c_1^1\delta x_2^1$ összefüggés, ahol

$$c_1^1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Ennek figyelembevételével az (1.1) egyenletrendszer második egyenlete csak az x_1 és x_2 változásában a következő alakú

$$a_{21}(x_1^1+c_1^1\delta x_2^1)+a_{22}\delta x_2^1 = b_2,$$

amiből δx_2^1 kiszámítható (mintegy c_1^1 már ismert),

$$\delta x_2^1 = \frac{b_2-a_{21}x_1^1}{a_{22}+a_{21}c_1^1}.$$

Ezután legyen

$$x_1^2 = x_1^1 + c_1^1 \delta x_2^1, \quad x_2^2 = \delta x_2^1.$$

Az eljárást folytatva a $k+1$-edik lépés a következőképpen fogalmazható meg:

Az eljárás szerint x^k kielégítette az (1.1) egyenletrendszer első k egyenletét. Az x^{k+1} vektor x_j^{k+1} ($j=1, \dots, k+1$) komponenseit most úgy akarjuk megválasztani, hogy x^{k+1} az (1.1) egyenletrendszer első $k+1$ egyenletét elégítse ki és x^{k+1} az x^k vektorból

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k$$

alakban álljon elő. Ez a követelmény az alábbi egyenletek kielégítését jelenti:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \delta x_j^k + a_{i,k+1} \delta x_{k+1}^k = 0, \quad i = 1, \dots, k \\ &\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}(x_j^k + \delta x_j^k) + a_{k+1,k+1} \delta x_{k+1}^k = b_{k+1}. \end{aligned}$$

Feltettük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix bal felső szeletei nemszingulárisak. Így nyilvánvaló, hogy az (1.2) egyenleteknek a $b_{k+1}=0$ esetén csak a $\delta x_j^k=0$ ($j=1, \dots, k+1$) triviális megoldása van, viszont $b_{k+1} \neq 0$ esetén $\delta x_{k+1}^k \neq 0$. Ennek figyelembevételével látható, hogy $\delta x_j^k = c_j^k \delta x_{k+1}^k$ alakú, tehát az (1.2) egyenlet a következő egyenletekkel ekvivalens:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j^k = -a_{i,k+1}, \quad i = 1, \dots, k \\ &\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} x_j^k + \delta x_{k+1}^k \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} c_j^k + a_{k+1,k+1} \right) = b_{k+1}. \end{aligned}$$

Az (1.3) egyenletrendszer első k egyenletéből kiszámítható a $\mathbf{c}^k = (c_1^k, \dots, c_k^k)^T$ vektor

$$(1.4) \quad \begin{bmatrix} c_1^k \\ \vdots \\ c_k^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \dots \\ a_{k1} \dots a_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{bmatrix}.$$

Ezt az (1.3) egyenletrendszer $k+1$-edik egyenletébe helyettesítve, az a δx_{k+1}-re lineáris egyenlet lesz, aminek megoldása

$$(1.5) \quad \delta x_{k+1}^k = \frac{b_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} x_j^k}{\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j} c_j^k + a_{k+1,k+1}}.$$

Ezután legyen

$$(1.6) \quad x_j^{k+1} = x_j^k + \delta x_{k+1}^k c_j^k, \ j \leqq k; \quad \text{és} \quad x_{k+1}^{k+1} = \delta x_{k+1}^k.$$

A számolásokat elvégezve $k=0, 1, \dots, n-1$-re x^n a keresett megoldás.

A módszernek nagyon jó szemléletes jelentés adható meg: A $\hat{\mathbf{c}}^k = (c_1^k, \dots, c_k^k, 1, 0, \dots, 0)^T$ vektor egy $k+1$ dimenziós irányt jelöl ki a térben. Ennek az iránynak a mentén kell megoldani a $k+1$-edik egyenletet.

2. A módszer számolási algoritmusa

A módszer fent megfogalmazott lépései szerint a számolás az $\mathbf{A}$ mátrix rendszámnöveléssel való invertálását igényli. Ennek műveletigénye n^3. Azonban az [1] dolgozat eredményeit felhasználva ennél lényegesen kedvezőbb számolási algoritmus adható meg. Jelöljük az $\mathbf{A}$ mátrix k-adrendű bal felső minormátrixát $\mathbf{A}_k$-val, az $\mathbf{A}$ $k+1$-edik sorának első k elemét tartalmazó sorvektort $\mathbf{q}_k^T$-vel az $\mathbf{A}$ $k+1$-edik oszlopának első k elemét tartalmazó vektort $\mathbf{h}_k$-val. Akkor az (1.4) és az (1.5) összefüggés a következőképpen fogalmazható meg

$$\mathbf{c}^k = -\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{h}_k$$

$$\delta x_{k+1}^k = \frac{b_{k+1} - \mathbf{q}_k^T \hat{\mathbf{x}}^k}{a_{k+1,k+1} - \mathbf{q}_k^T \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{h}_k}, \tag{2.1}$$

ahol $\hat{\mathbf{x}}^k = (x_1^k, \ldots, x_k^k)^T$ az $\mathbf{x}^k$ első k komponenséből álló vektor.

Hajtsuk végre az $\mathbf{A}$ mátrixon a *Gauss—Jordan eliminációt*, azaz $i=1, \ldots, n$-re végezzük el a következő számolásokat:

$$a_{ii} := \frac{1}{a_{ii}}; \tag{2.2}$$

$$a_{ij} := a_{ii}a_{ij}, \quad j > i;$$

$$a_{kl} := a_{kl} - a_{ki}a_{il}, \quad k \neq i, \quad l > i.$$

(A $:=$ jel azt jelenti, hogy kiszámítjuk a jel jobb oldalán álló kifejezés értékét és ez lesz a baloldali változó értéke. A mátrixelemeket az elimináció közben és után is ugyanúgy jelöljük mint az elimináció előtt.) Az [1] dolgozatban kimutattuk, hogy az elimináció befejezése után a mátrix $k+1$-edik oszlopának első k helyén éppen a $\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{h}_k$ azaz a $-\mathbf{c}^k$ vektor jelenik meg. Másrészt az [1] dolgozat alapján belátható, hogy a mátrix főátlójában kapott elemekre

$$a_{k+1,k+1} := \frac{1}{a_{k+1,k+1} - \mathbf{q}_k^T \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{h}_k};$$

(a jobb oldalon $a_{k+1,k+1}$ a kiindulási mátrix eleme), ezért a (2.1) egyenlőségből

$$\delta x_{k+1}^k = a_{k+1,k+1}(b_{k+1} - \mathbf{q}_k^T \hat{\mathbf{x}}^k). \tag{2.3}$$

Ezek után az (1.1) egyenletrendszer megoldásának számolási algoritmusa a következő lesz.

1. Végrehajtjuk az $\mathbf{A}$ mátrixon a *Gauss—Jordan eliminációt* a (2.2) formulák szerint, a főátló alatti részbe beírjuk az eredeti mátrixelemeket;
2. $k=0, 1, \ldots, n-1$-re kiszámítjuk:
   a) a δx_{k+1}^k mennyiséget a (2.3) képlet alapján;
   b) az $\mathbf{x}^{k+1}$ vektort az (1.6) képletek alapján.

Az így kapott $\mathbf{x}^n$ az (1.1) egyenletrendszer megoldása.

Példaként oldjuk meg az algoritmus használatával a következő lineáris egyenletrendszert

$$2x+\ y+\ z=3$$

$$-x+2y+2z=1$$

$$x-\ y+\ z=-2.$$

Az egyenletrendszer mátrixa

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

Végezzük el a *Gauss—Jordan eliminációt* a (2.2) formulák szerint és a főátló alatti részbe írjuk be az eredeti mátrixelemeket:

$$\begin{bmatrix}\cdot 5 & \cdot 5 & 0\\ -1 & \cdot 4 & 1\\ 1 & -1 & \cdot 5\end{bmatrix}.$$

Hajtsuk végre $k=0,1,2$-re az algoritmus 2. pontját

$$x_1^1=\delta x_1^0=a_{11}(b_1-\mathbf{q}_0\mathbf{x}^0)=1\cdot 5,\quad \mathbf{x}^1=\begin{bmatrix}1\cdot 5\\ 0\\ 0\end{bmatrix};$$

$$x_2^2=\delta x_2^1=a_{22}(b_2-\mathbf{q}_1\mathbf{x}^1)=0\cdot 4(1+1\cdot 5)=1,$$

$$x_1^2=x_1^1+\delta x_2^1c_1^1=1\cdot 5+1(-0\cdot 5)=1,\quad \mathbf{x}^2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix};$$

$$x_3^3=\delta x_3^2=a_{33}(b_3-\mathbf{q}_2\mathbf{x}^2)=0\cdot 5(-2-1+1)=-1,$$

$$x_1^3=x_1^2+\delta x_3^2c_1^2=1+(-1)\times 0=1,\quad x_2^3=x_2^2+\delta x_3^2c_2^2=1+(-1)(-1)=2.$$

Így a megoldás $\mathbf{x}^3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$.

3. A módszer műveleti igénye

Számoljuk össze, hogy egy n ismeretlenes egyenletrendszer megoldásához hány szorzás és osztás szükséges. A (2.2) képlet i-edik lépéséhez $n(n-i)+1$ szorzás illetve osztás kell. Így a *Gauss—Jordan elimináció*

$$\sum_{i=1}^{n}[n(n-i)+1]=\frac{n(n^2-n+2)}{2}$$

szorzást illetve osztást igényel. A (2.3) illetve az (1.6) képletek számolásához a $k+1$-edik lépésben összesen $2k+1$ szorzás kell. A (2.3) és az (1.6) kifejezésekben kijelölt számolásokat $k=0, 1, n, \dots, n-1$-re végrehajtva n^2 szorzás kell. Így a számolási eljárásunk teljes műveleti igénye $\frac{n}{2}(n^2+n+2)$.

Megjegyzések.

1. A *Gauss—Jordan eliminációt* elvégezhetjük főelem kiválasztással. Ebben az esetben jegyezzük meg az elimináció utáni mátrixban a sorok és az oszlopok sorrendjét. A (2.3) és az (1.6) képletek számolásánál vegyük figyelembe, hogy az elimináció közbeni sorcserék az egyenletek cseréjét, míg az oszlopcserék a változók cseréjét vonja maga után.

2. A lineáris egyenletrendszerek fent ismertetett módszere könnyen általánosítható nemlineáris egyenletrendszerek megoldására. Ezzel egy későbbi dolgozatban foglalkozunk.

3. A dolgozatból látható a lineáris egyenletrendszerek rendszámnöveléses módszerrel való megoldásának kapcsolata a *Gauss—Jordan eliminációs módszerrel* való megoldásával. A [2] könyvben V. V. VOJEVOGYIN a lineáris egyenletrendszerek rendszámnöveléses módszerrel való megoldásának és a *Gauss eliminációval* való megoldásának kapcsolatát elemzi.

IRODALOM

[1] GERGELY, J., „Mátrixinvertáló módszerekről", *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976).
[2] ВОЕВОДИН, В. В., *Численные методы алгебра* (Наука, Москва, 1966).

(Beérkezett: 1977. június 30.)
(Újra beérkezett: 1978. január 4.)

DR. GERGELY JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST, I., ÚRI U. 49.

SOLUTION OF A LINEAR SYSTEM BY METHOD OF BORDERING

J. GERGELY

The paper [1] proves that the method of the *Gauss—Jordan elimination* and the method of bordering for inversion of a matrix are the same. The method for the solution of a linear system can generally be connected with the method for matrix inversion. In this paper we investigate the method for the solution of the linear equations which can be connected with the method of matrix inversion by method of bordering.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 199—205

A NEWTON MÓDSZER MÓDOSÍTÁSA NEMLINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

GERGELY JÓZSEF

Budapest

Az [1] dolgozatban ismertettünk egy nemlineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáói-módszert. Erről most megmutatjuk, hogy az a *Newton módszer* egy javított módosításának teknlthető. Megvizsgáljuk a módszer néhány további módosítását, használatát pedig számpéldákon illusztráljuk.

1. Bevezetés

Oldjuk meg az

(1.1)
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n$$

nemlineáris egyenletrendszert először *Newton módszerrel.* Legyen ismeretes a megoldás egy $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ közelítése. Az $\mathbf{x}^{(1)}$ közelítést $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{u}$ alakban keressük. Az (1.1) egyenletrendszer *Newton módszerrel* való megoldásának egy lépése az

(1.2)
$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$$

lineáris egyenletrendszer megoldását igényli, ahol

(1.3)
$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}.$$

Az (1.2) lineáris egyenletrendszer megoldásához válasszuk a rendszámnöveléses módszert (lásd [2]). Ezért feltesszük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix minden bal felső minormátrixa invertálható.

Legyen az $\mathbf{u}$ nulladik közelítése $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ és jelöljük az $\mathbf{u}$ k-adik közelítését $\mathbf{u}^k = (u_1^k, \dots, u_k^k, 0, \dots, 0)^T$ vektorral. A rendszámnöveléses módszer alkalmazása a következő lépésekből áll (lásd [2]):

(a) Elvégezzük az $\mathbf{A}$ mátrixon a *Gauss—Jordan eliminációt* a következő képletekkel:

$$a_{ii} := 1/a_{ii};$$
$$a_{ij} := a_{ii} \cdot a_{ij}, \quad j > i;$$
$$a_{kl} := a_{kl} - a_{ki} a_{il}, \quad k \neq i, \quad l > i.$$

(A $=:$ jel azt jelenti, hogy kiszámítjuk a jel jobb oldalán álló kifejezés értékét és az lesz a baloldali változó értéke. Az elimináció közben és után a mátrixelemek jelölése legyen ugyanaz, mint az elimináció megkezdése előtt volt.);

(b) az A eliminációja utáni mátrix $k+1$-edik oszlopának első k eleme alkossa a $\mathbf{c}^k=(c_1^k, \ldots, c_k^k)$ vektort és legyen $\hat{c}^k=(c_1^k, \ldots, c_k^k, 1, 0, \ldots, 0)^T$;

(c) kiszámítjuk a

$$\delta u_{k+1}^k = a_{k+1,k+1}\left(b_{k+1}-\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}u_j^k\right) \tag{1.4}$$

mennyiséget, ahol

$$\mathbf{b} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n);$$

(d) legyen

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k+\delta u_{k+1}^k\hat{\mathbf{c}}^k. \tag{1.5}$$

Ha az (a) lépés elvégzése után a (b), (c) és (d) lépéseket végigszámoljuk $k=0, \ldots$ $\ldots, n-1$-re, akkor az $\mathbf{u}^n=\mathbf{u}$ adja az (1.2) egyenletrendszer megoldását, illetve $\mathbf{x}^{(1)}=$ $=\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{u}$ az (1.1) egyenletrendszer egy új közelítését.

Megjegyezzük, hogy a [2] és [3] dolgozat alapján igaz az, hogy az (1.2) fent leírt megoldási módja megegyezik a *Gauss elimináció* alkalmazásával.

2. A módszer módosítása

Módosítsuk az (1.1) nemlineáris egyenletrendszer *Newton módszerrel* történő fentiekben leírt megoldási algoritmusát úgy, hogy a δu_{k+1}^k mennyiséget nem az (1.4) képletből számoljuk, hanem az $\mathbf{u}^k$ vektor helyett bevezetjük a $\mathbf{v}^k=(v_1^k, \ldots, v_k^k, 0, \ldots, 0)$ vektort és legyen $\delta v_{k+1}^k=v_{k+1}^{k+1}-v_{k+1}^k$ az

$$f_{k+1}(\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{v}^k+\hat{\mathbf{c}}^k\delta_{k+1}^k) = 0 \tag{2.1}$$

nemlineáris egyenlet megoldása. A $\mathbf{c}^k$ vektort most is a (b) alapján választjuk ki az eliminált mátrixból, így a $\hat{\mathbf{c}}^k$ vektor ismertnek tekinthető a (2.1) egyenletben és az egyetlen δv_{k+1}^k ismeretlenre megoldható. Természetesen az (1.5) helyett most a

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k+\delta v_{k+1}^k\hat{\mathbf{c}}^k \tag{2.2}$$

képletet kell használni. A módosított algoritmus tehát a következő:

Az (a) és (b) lépések megegyeznek az 1. pontban leírtakkal;

(c) megoldjuk a (2.1) nemlineáris egyenletet, a megoldás δv_{k+1}^k;

(d) alkalmazzuk a (2.2) képletet.

Ha az (a) lépés elvégzése után a (b), (c) és (d) lépéseket végigszámoljuk $k=0, \ldots, n-1$-re kapjuk a megoldás egy újabb $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{v}^n$ közelítését.

Az (1.1) egyenletrendszernek *módosított Newton módszerrel* való megoldásához meg kell oldanunk n darab egyismeretlenes nemlineáris egyenletet és egy n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert rendszámnöveléses módszerrel, aminek műveleti igénye $n^3/2$, (lásd [2]).

3. A módszer konvergenciája

Az (1.1) egyenletrendszer megoldására a *Newton módszer* 1. pontban ismertetett algoritmusa a következőképpen is megfogalmazható. Oldjuk meg $k=0, 1, ..., n-1$-re a következő egyenletrendszert

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j^k \delta u_{k+1}^k + a_{i,k+1} \delta u_{k+1}^k = 0, \quad i \leqq k, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}(u_j^k + c_j^k \delta u_{k+1}^k) + a_{k+1,k+1} \delta u_{k+1}^k = -f_{k+1}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

amíg a 2. pontban ismertetett *módosított Newton módszer* algoritmusa a következő. Oldjuk meg $k=0, 1, ..., n-1$-re a következő egyenletrendszert

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j^k \delta v_{k+1}^k + a_{i,k+1} \delta v_{k+1}^k = 0, \quad i \leqq k,$$

$$f_{k+1}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{v}^k + \hat{\mathbf{c}}^k \delta v_{k+1}^k) = 0. \tag{3.2}$$

A (3.1) és (3.2) egyenletrendszerek első k egyenlete ugyanaz és egy $\hat{\mathbf{c}}^k$ $k+1$ dimenziós irányt határoz meg a térben. Ennek az iránynak a mentén kell megoldani a (3.2) alkalmazása esetén az $f_{k+1}=0$ nemlineáris egyenletet, míg (3.1) alkalmazása esetén az f_{k+1} lineáris közelítéséből adódó lineáris egyenletet. Nyilvánvaló, hogy a gyöknek a nemlineáris egyenlet megoldásával kapott közelítése nem rosszabb (általában jobb) mint az egyenlet lineáris közelítéséből kapott lineáris egyenlet megoldásával való közelítése. Ezért a (3.2) képletek segítségével azaz a *módosított Newton módszerrel* számolt $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{v}^n$ közelítés nem rosszabb (általában jobb) közelítése az (1.1) egyenletrendszer gyökének, mint a (3.1)-ből — tehát a *közönséges Newton módszer* alkalmazásából — kapott $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{u}^n$ közelítés. Minthogy a *Newton módszer* másodrendben konvertál, ezért a fenti meggondolások alapján a *módosított Newton módszer* is legalább másodrendben konvergál.

4. Megjegyzés

Az [1] dolgozatban ismertetett iterációs módszerről könnyű belátni, hogy az megegyezik a most ismertetett *módosított Newton módszerrel.* Ezért a 3. pontban végzett elemzés meggondolásai alapján az [1] dolgozatban ismertetett iterációs módszer adott nemlineáris egyenletrendszerre adott $\mathbf{x}^{(0)}$-ból kiindulva legalább másodrendben konvergál.

5. Példák

A *módosított Newton módszer* használatát a következő számpéldákon szemléltetjük.

1. PÉLDA. Oldjuk meg az

$$f_1(x, y) \equiv x^2+y^2-2 = 0, \quad f_2(x, y) \equiv x^2-y^2-1 = 0 \tag{5.1}$$

egyenletrendszert az

$$x_0 = 1.25, \quad y_0 = 0.75$$

kiindulásból a *Newton*, majd *a módosított Newton módszer segítségével.*

A Newton módszerből adódó közelítések:

$$x_1 = 1{,}2250, \quad y_1 = 0{,}7083,$$

$$x_2 = 1{,}2247, \quad y_2 = 0{,}7071.$$

A *módosított Newton módszerrel* számolva a következő számolásokat kell elvégezni:

a) Megoldjuk az

$$(1{,}25+\delta v_1^0)^2+0{,}75^2-2 = 0$$

egyenletet δv_1^0-re

$$\delta v_1^0 = -0{,}05104 \quad \text{és} \quad v_1^1 = \delta v_1^0.$$

b) $df_1 = 2x_0 c_1^1 \delta v_2^1 + 2y_0 \delta v_2^1$-ból $c_1^1 = -0{,}6$,

és megoldjuk az

$$f_2(x_0+v_1^1+c_1^1\delta v_2^1, y_0+\delta v_2^1) \equiv (1{,}19896-0{,}6\delta v_2^1)^2-(0{,}75+\delta v_2^1)^2-1 = 0$$

egyenletet δv_2^1-re

$$v_2^2 = \delta v_2^1 = -0{,}04294$$

és így

$$x_1 = x_0+v_1^1+c_1^1\delta v_2^1 = 1{,}22472, \quad y_1 = y_0+v_2^2 = 0{,}70706.$$

Az (5.1) egyenletrendszer pontos megoldása

$$x = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707\,107, \quad y = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}224\,745.$$

A példából látható, hogy a *módosított Newton módszerrel* egy lépésben olyan jó közelítést kaptunk, mint a *Newton módszerrel* két lépésben.

2. PÉLDA. Oldjuk meg az

$$f_1(x, y) = 4x^2+y^2+2xy-y-2 = 0 \tag{5.2}$$

$$f_2(x, y) = 2x^2+y^2+3xy-3 = 0$$

egyenletrendszert az $x_0=0{,}4, y_0=0{,}9$ közelítésből kiindulva. *Newton módszerrel* számolva kapjuk:

$$x_1 = 0{,}514, \quad y_1 = 1{,}000,$$

$$x_2 = 0{,}50017, \quad y_2 = 0{,}99986,$$

míg a javasolt *módosított Newton módszerrel* számolva az első közelítés — a részletes számolásokat ezúttal mellőzve —:

$$x_1 = 0{,}50009, \quad y_1 = 1{,}00013.$$

Az (5.2) pontos megoldása $x=0{,}5$, $y=1$. Látható, hogy ebben az esetben a *módosított Newton módszer* egy iterációs lépésben jobb eredményt szolgáltatott mint a *Newton módszer* két iterációs lépés után.

6. A módszer további változatai

Lehetőség van a 2. pontban leírt *módosított Newton módszer* algoritmusának további változtatásaira is.

a) A számolási algoritmus szerint az egyenletrendszer egyenleteinek és változóinak kitüntetett szerepe van. Azonban, mint ahogy azt a [2] dolgozatban megmutattuk, lehetőségünk van a sorrend felcserélésére és így például az algoritmus (a) pontjában a *Gauss—Jordan eliminációt* főelemválasztással is elvégezhetjük, ha erre szükség van.

b) A 2. pontban leírt módszer úgy alkalmazandó, hogy $\mathbf{x}^{(0)}$-ból kiindulva számoljuk az

$$\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m-1)} + \mathbf{v}^n, \quad m = 1, 2, \dots \tag{6.1}$$

közelítéseket. Minden iterációs lépésben a $\mathbf{v}$ vektor nem 0 komponenseinek száma 0-tól kezdődően lépésről lépésre 1-gyel növekedve n-ig nő. Ez kitüntetett szerepet ad az egyenletek sorrendjének, ami sokszor nagyon előnyös lehet. Például az [1] dolgozatban tárgyalt nemlineáris peremértékfeladat esetén az f_k csak az x_k-tól függ nemlineárisan, a többi x_i-től lineárisan.

Lehetőség van azonban a következő módosításra is. Oldjuk meg az (1.1) egyenletrendszert úgy, hogy megoldjuk az $f_k=0$ egyenletet csak az x_k változásában (azaz az $f_k=0$ a δx_k-ra nézve egyismeretlenes nemlineáris egyenletet) feltételezve, hogy a többi egyenlet baloldala lineárisan változatlan marad, azaz

$$df_i \equiv 0, \quad i \neq k. \tag{6.2}$$

A (6.2) egyenletrendszer meghatároz egy irányt az n dimenziós térben és ennek az iránynak a mentén kell megoldanunk az $f_k=0$ nemlineáris, de csak egy ismeretlent tartalmazó egyenletet.

A (6.2) egyenletek által meghatározott irány számolása minden k-ra egy $n-1$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Legyen ennek mátrixa $\mathbf{B}_k$, akkor a (6.2) egyenletrendszer

$$\mathbf{B}_k \mathbf{c}^k = \mathbf{d}_k \tag{6.3}$$

alakú, ahol $\mathbf{B}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrixnak az $\mathbf{a}_{kk}$ eleméhez tartozó minormátrixa, ami az $\mathbf{A}$-ból úgy áll elő, hogy elhagyjuk az $\mathbf{A}$ k-adik sorát és oszlopát, míg k-adik oszlopból a k-adik elem törlésével alakul ki a $\mathbf{d}_k$ az egyenletrendszer jobb oldala. Két különböző $k=k_1$ és $k=k_2$ esetén viszont a $\mathbf{B}_k$ mátrix annyiban különbözik egymástól, hogy $k=k_1$ esetben az $\mathbf{A}$ mátrix k_1-edik sorát és oszlopát $k=k_2$ esetén pedig az $\mathbf{A}$ k_2-edik sorát és oszlopát hagyjuk el. Ez viszont azt jelenti, hogy speciálisan $k_1=k$ és $k_2=$ $=k+1$ esetén úgy egyszerűsödnek a viszonyok, hogy $\mathbf{B}_{k+1}$ a $\mathbf{B}_k$ mátrixtól csak a k-adik sorában és oszlopában különbözik. Ezt a megállapítást felhasználhatjuk a $\mathbf{B}_k$ mátrixok invertálásánál. Ugyanis nem kell az invertálást minden k-ra elvégezni, mert a $\mathbf{B}_k$ inverzének ismeretében a $\mathbf{B}_{k+1}$ inverze már könnyen meghatározható, ha alkalmazzuk az inverz módosításának ismert képletét:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{q}\mathbf{p}^T)^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \frac{1}{1+\mathbf{p}^T D^{-1}\mathbf{q}} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}\mathbf{p}^T\mathbf{D}^{-1}. \tag{6.4}$$

Könnyű belátni, hogy $\mathbf{B}_k$-ból $\mathbf{B}_{k+1}$ a következőképpen nyerhető:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \mathbf{e}_k(\mathbf{p}_k^T - \hat{\mathbf{p}}_{k+1}^T) + (\mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_{k+1})\mathbf{e}_k^T \tag{6.5}$$

ahol $\mathbf{e}_k$ a k-adik $n-1$ komponensű egységvektor, továbbá

$$\mathbf{p}_k^T = \left(a_{k,1}, \ldots, a_{k,k-1}, \frac{1}{2} a_{kk}, a_{k,k+2}, \ldots, a_{kn}\right)^T.$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1}^T = \left(a_{k+1,1}, \ldots, a_{k+1,k-1}, \frac{1}{2} a_{k+1,k+1}, a_{k+1,k+2}, \ldots, a_{k+1,n}\right)^T,$$

$$\mathbf{q}_k = \left(a_{1k}, \ldots, a_{k-1,k}, \frac{1}{2} a_{kk}, a_{k+2,k}, \ldots, a_{nk}\right),$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \left(a_{1,k+1}, \ldots, a_{k-1,k+1}, \frac{1}{2} a_{k+1,k+1}, a_{k+2,k+1}, \ldots, a_{n,k+1}\right).$$

Így a $\mathbf{B}_{k+1}$ mátrix inverzét a $\mathbf{B}_k$ inverzéből a (6.4) képlet kétszeri alkalmazásával kaphatjuk meg. Az első lépésben

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{q} = \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}_k^T - \mathbf{p}_{k+1}^T \tag{6.6}$$

majd a másodikban pedig

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_k + \mathbf{e}_k(\mathbf{p}_k^T - \mathbf{p}_{k+1}^T), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_k - \hat{\mathbf{q}}_{k+1}, \quad \mathbf{p}^T = \mathbf{e}_k^T \tag{6.7}$$

szereposztásban.

Az algoritmusunk 6. szakasz b) pontjában módosított alakja ezek után a következő lesz. Felvesszük az $\mathbf{x}^{(0)}$ kezdeti közelítést. Invertáljuk a $\mathbf{B}_1$ mátrixot és kiszámítjuk a $\mathbf{c}^1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{d}_1$ vektort. Legyen $\hat{\mathbf{c}}^1$ n dimenziós vektor első komponense 1, a többi rendre egyezzen meg a $\mathbf{c}^1$ komponenseivel. Oldjuk meg a δv_1^0 változóra nézve egyismeretlenes nemlineáris

$$f_1(\mathbf{x}^{(0)} + \hat{\mathbf{c}}^1 \delta v_1^0) = 0$$

egyenletet. Ennek megoldása δv_1^0 és legyen $v_1^1 = \delta v_1^0$, $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, 0, \ldots, 0)$. Ezután $k = 1, \ldots, n-1$-re a $\mathbf{B}_k$ mátrixok inverzének kiszámítására alkalmazzuk a (6.4) képletet. A (6.4) képletet minden lépésben kétszer kell alkalmaznunk, először a (6.6) majd a (6.7) szereposztásban (a (6.5) képletek jelöléseinek figyelembevételével). Közben mindenegyes k-ra ($k=2, \ldots, n$-re) a (6.3) képletből kiszámítjuk a

$$\mathbf{c}^k = \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{d}_k$$

vektort. Legyen a $\hat{\mathbf{c}}^k$ olyan n dimenziós irányvektor, amelynek a k-adik komponense 1, a többi pedig rendre megegyezik a $\mathbf{c}^k$ komponenseivel. Minden k-ra ($k=2, \ldots, n$-re) a $\hat{\mathbf{c}}^k$ irány mentén megoldjuk a δv_k^{k-1} változókra nézve egyismeretlenes nemlineáris

$$f_k(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{v}^{k-1} + \hat{\mathbf{c}}^k \delta v_k^{k-1}) = 0$$

egyenletet. Ennek megoldása δv_k^{k-1} és legyen $v_k^k = \delta v_k^{k-1}$, $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^{k-1} + \hat{\mathbf{c}}^k \delta v_k^{k-1}$.

Az $\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{v}^n$ vektor adja az (1.1) egyenletrendszer $\mathbf{x}^{(1)}$ közelítését. Ezután ismételjük a (6.1) iterációs képlet lépéseit.

Számítsuk ki a módosított mátrix invertálása segítségével az (1.1) egyenletrendszernek a fent leírt eljárással való megoldásához szükséges műveleti igényt. Az n ismeretlenes egyenletrendszer megoldásához a $\mathbf{B}_k$ mátrixok $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixok. Egyszer invertálnunk kell a $\mathbf{B}_1$ mátrixot, ami $(n-1)^3$ műveletet jelent. Azután a (6.4)-ben szereplő törtfaktorok számolásához (6.6) és (6.7) figyelembevételével $n-1$

szorzás és egy reciprokképzés kell, majd $n-1$ újabb szorzás a (6.4) jobboldalán szereplő diád egyik tényezőjének beszorzásához és $(n-1)^2$ szorzás a diádképzéshez. Így (6.4) kétszeri alkalmazásához (azaz egy k esetén való számolásához) $2n^2$ szorzási (illetve osztási) művelet kell. Ennek $k=1, \ldots, n-1$-re való alkalmazásához (azaz az iteráció egy teljes végigszámolásához) $2n^3-2n^2$ szorzási (illetve osztási) művelet kell. Ehhez jön még az invertálás n^3-3n^2+3n-1 művelete. Így a módszer ily módon való alkalmazásának műveletigénye n darab egyismeretlenes nemlineáris egyenlet megoldása és $3n^3-5n^2+3n-1$ multiplikatív művelet. Az utóbbiak száma hatszor több szorzási (illetve osztási) műveletet jelent, mint a 2. pontban leírt algoritmus szerinti számolás. Minthogy azonban a $\hat{c}^k$ irány megválasztásánál a teljes n dimenziós térben dolgozunk, várható, hogy gyorsabb a konvergenciája mint a 2. pont algoritmusáé.

c) A módszer tovább módosítható azáltal, hogy menet közben az a_{ij} mátrixelemeket pontosabban számoljuk ki. Nevezetesen, hogy a 2. pont alatti algoritmus $k+1$-edik lépéséhez kiszámoljuk a következő mátrixelemeket

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x^{(0)}+v^k,\ i\leq k,\ j\leq k+1}. \tag{6.8}$$

A módszer konvergenciája esetén az ily módon számolt mátrixelemek pontosabb közelítései a gyökhelyen számolt mátrixelemeknek. Ezért várható, hogy a konvergencia meggyorsul. Viszont a (6.8) mátrixelemek számolása minden k esetén sok munkával jár és minden k-ra a megfelelő lineáris egyenletrendszer megoldásának teljes végigszámolását jelentené, így alkalmazása nem látszik célszerűnek. De ha (6.8) képletet csak $i=k, j=k+1$-re alkalmazzuk, $i<k, j\leq k$ esetben a már kiszámolt mátrixelemeket használjuk a számolás nem nagyon bonyolódik, de a konvergencia javulhat.

A 6. szakasz b) és c) pontjaiban vizsgált módosítások pontosabb elemzésére, az azokban vázolt lehetőségek (például konvergencia bizonyítás, javítás) további vizsgálatára egy későbbi dolgozatban kívánunk foglalkozni.

IRODALOM

[1] GERGELY, J., „Nemlineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása", *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976) 127—134.

[2] GERGELY, J., „Lineáris egyenletrendszerek megoldása rendszámnöveléssel", *Alkalmazott Matematikai Lapok* 3 (1977) 193—197.

[3] GERGELY, J., „Mátrixinvertáló módszerekről", *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2 (1976) 359—362.

(Beérkezett: 1977. július 11.)
(Újra beérkezett: 1978. január 4.)

DR. GERGELY JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST, I., ÚRI U. 49.

MODIFICATION OF THE NEWTON'S METHOD OF THE NONLINEAR SYSTEMS

J. GERGELY

A method for the solution of the nonlinear systems was discussed in paper [1]. Now we show that this method is a modification of the *Newton's method*. Different versions are discussed and we illustrate the use of it in two examples.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 207—211

A SPINORELMÉLET ALGEBRAI ALAPJAIRÓL[1]

VESCAN ÁGNES

IASI

Pár év előtt megjelent cikkünkben [9], RASEVSZKItől eltérő úton, definiáltuk a spinorokat és összefoglaltuk a spinoralgebra fontosabb tulajdonságait. Mindezeket egy n dimenziós komplex vektortérből kiindulva végeztük el és a spinoralgebra egy $m=2^n$ dimenziós *Cliffor-féle algebra* volt.

Ezúttal egy olyan n dimenziós vektorteret tekintünk, amelynek operátortartománya egy tetszésszerinti test és ebben a vektortérben fogjuk felépíteni a spinoralgebrát. Amint később meg fogjuk állapítani, az említett cikkben felsorolt tulajdonságoknak csak egy részét tudjuk bebizonyítani ebben az általános esetben.

Legyen tehát K egy (kommutatív) test, amelynek a karakterisztikája nem egyenlő kettővel, V_n egy n dimenziós K vektortér, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pedig ennek bázisvektorai. A spinornak a már említett cikkben adott definíciója érvényes marad, azzal a különbséggel, hogy komponensei nem komplex számok, hanem a K test tetszőleges elemei. Tehát egy spinort ebben az esetben is a következő alakban írhatunk fel:

$$\varphi = \varphi^0 + \sum \varphi^{i_1} e_{i_1} + \sum \varphi^{i_1 i_2} e_{i_1 i_2} + \ldots + \sum \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \\ + \ldots + \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

ahol $e_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $k=0, 1, \ldots, n$ bázis k-vektorok és minden összeg az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló annyiad rendű kombinációra terjed ki, ahány indexet tartalmaz. Az indexeket minden kombinációban nagyságrendbe tehetjük.

Érvényes marad a spinorok összeadási és az operátorokkal való szorzási szabálya is és a spinorok halmaza egy $m=2^n$ dimenziós K-vektorteret alkot.

A következőkben a spinorszorzatot is definiálni fogjuk. Ezen célból tekintsünk egy biliniáris, szimmetrikus, nem elfajult függvényt, $f\colon V_n \times V_n \to K$. Legyen továbbá az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis ortogonális ezzel a biliniáris függvénnyel szemben. Két spinor szorzata teljesen meg lesz határozva, ha definiáljuk két bázis multi-vektor szorzatát.

DEFINÍCIÓ. Adott $f\colon V_n \times V_n \to K$ biliniáris, nem elfajuló, szimmetrikus függvény esetén, ha $e_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $e_{j_1 j_2 \ldots j_l}$ egy-egy tetszőleges multi-vetkor, akkor szorzatukat az alábbi szabály értelmezi:

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_k} e_{j_1 j_2 \ldots j_l} = (-1)^r e_{q_1 q_2 \ldots q_s} \prod_{k \in A \cap B} f(e_k, e_k),$$

ahol $q_1, q_2, \ldots, q_s$ az $A=\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ és $B=\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ természetes számokból alkotott sorozatok összege, melyet az $\{1, 2, \ldots, n\}$ természetes számok részsokaságai-

[1] A dolgozat a szerző azonos című [9] dolgozatának a folytatása.

nak *Boole gyűrűjében* számítunk ki; r az $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l$ sorozat inverzióinak száma. Ha az A és B halmazok metszete üres, akkor $\prod\limits_{k \in A \cap B} f(e_k, e_k) = 1$.

Az így bevezetett műveletek tulajdonságait vizsgálva könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a spinorok halmaza egy $m = 2^n$ dimenziós K-algebrát alkot, melyet szintén C_n-nel jelölünk.

A szorzat definíciójából következik, hogy

$$e_{i_1} e_{i_2} = e_{i_1 i_2} = -e_{i_2 i_1} = -e_{i_2} e_{i_1}, \quad \text{ha} \quad i_1 \neq i_2$$

és

$$e_{i_1} e_{i_1} = (e_{i_1})^2 = f(e_{i_1}, e_{i_1}).$$

Ha φ és ψ két vektor: $\varphi = \sum\limits_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1} e_{i_1}$, $\psi = \sum\limits_{i_1=1}^{n} \psi^{i_1} e_{i_1}$, akkor a spinorszorzatuk

$$\varphi\psi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (\varphi^{i_1}\psi^{i_2} - \varphi^{i_2}\psi^{i_1}) e_{i_1 i_2} + \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1})$$

lesz. Ugyanezen esetben pedig

$$\psi\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (\varphi^{i_2}\psi^{i_1} - \psi^{i_2}\varphi^{i_1}) e_{i_1 i_2} + \sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1}),$$

tehát

$$\varphi\psi + \psi\varphi = 2\sum_{i_1=1}^{n} \varphi^{i_1}\psi^{i_1} f(e_{i_1}, e_{i_1}) = 2f(\varphi, \psi).$$

Ha φ és ψ ortogonális vektorok, azaz $f(\varphi, \psi) = 0$, akkor $\varphi\psi = -\psi\varphi$ és megfordítva. Ha $\varphi = \psi$, akkor

$$\varphi\varphi = \varphi^2 = \sum_{i_1=1}^{n} (\varphi^{i_1})^2 f(e_{i_1}, e_{i_1}).$$

Az itt említett tulajdonságok érvényesek maradnak bármely, az f biliniáris függvénnyel szemben ortogonális bázis esetében, tehát bázisinvariánsok.

Ha egy valós euklideszi teret tekintünk, akkor az f biliniáris formát a skaláris szorzattal helyettesíthetjük, az ortogonális bázist pedig egy ortonormált bázissal cseréljük fel.

A C_n spinoralgebrának komplex alaptest esetén bebizonyított tulajdonságai (lásd a már fent említett cikket) nagyrészben érvényesek maradnak, így: definiálhatjuk a páros és páratlan félspinorokat, bebizonyíthatjuk, hogy a páros félspinorok sokasága, C_n', részalgebrát, a páratlanoké, C_n'', pedig részvektorteret alkot C_n-ben; C_n' és C_n'' dimenziója 2^{n-1}; a spinoralgebra bármely spinora pedig egy páros és egy páratlan félspinor direkt összege.

A spinoralgebra centrumával kapcsolatos, [9]-ben bizonyított tétel érvényes marad. Ez a tétel így szól:

1. TÉTEL. Ha n páros szám, akkor a C_n spinoralgebra centruma egybe esik a K alaptesttel, ha pedig n páratlan szám, akkor a $\gamma = \gamma^0 + \gamma^{12\ldots n} e_{12\ldots n}$ alakú elemeket tartalmazza.

Bizonyítás. E tétel bizonyítása során a mi esetünkben a következő lineáris transzformációkat kell tekinteni

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + e_k\varphi e_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Egy spinor akkor és csakis akkor tartozik a centrumhoz, ha invariáns ezekkel a lineáris transzformációkkal szemben. Valóban, ha φ centrumelem, akkor

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + \varphi f(e_k, e_k)] = \varphi;$$

fordítva, $f_k(\varphi) = \varphi$ azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2f(e_k, e_k)}[f(e_k, e_k)\varphi + e_k\varphi e_k] = \varphi,$$

innen pedig az $e_k\varphi e_k = f(e_k, e_k)\varphi$ egyenlőség következik, amelyet jobbról e_k-val szorozva: $\varphi e_k = e_k\varphi$, tehát φ minden bázisvektorral kommutál. Innen természetesen következik, hogy φ minden spinorral kommutál, tehát a C_n centrumeleme.

A bizonyítás folytatása hasonló a [9]-ben bizonyított megfelelő tételével.

Határozzuk most meg a páros spinorok részalgebrájának centrumát. Ebben az esetben a következő érdekes eredményt kapjuk:

2. Tétel. Ha n páratlan szám, akkor a páros félspinorok algebrájának centruma egybeesik a K alaptesttel, ha pedig n páros szám, akkor a $\gamma = \gamma^0 + \gamma^{12\ldots n} e_{12\ldots n}$ alakú elemeket tartalmazza.

Bizonyítás. Tekintsük a következő lineáris transzformációkat:

$$f_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)}[f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)\varphi + e_j e_i \varphi e_i e_j],$$

ahol i, j befutja az összes, az $1, 2, \ldots, n$ elemből alkotható másodrendű kombinációkat. Egy páros spinor akkor és csakis akkor tartozik a centrumhoz, ha ezekkel a transzformációkkal invariáns. Legyen tehát φ centrumelem, akkor

$$f_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)}[f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)\varphi + \varphi f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)] = \varphi.$$

Fordítva, ha $f_{ij}(\varphi) = \varphi$ minden i, j esetén, akkor

$$\frac{1}{2f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)}[f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)\varphi + e_j e_i \varphi e_i e_j] = \varphi,$$

tehát

$$f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)\varphi = e_j e_i \varphi e_i e_j.$$

Ha most ezt az egyenlőséget balról rendre e_j és e_i-vel beszorozzuk, akkor az $f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)e_i e_j \varphi = f(e_i, e_i)f(e_j, e_j)\varphi e_i e_j$ egyenlőséget kapjuk, ami azt jelenti, hogy φ kommutál az összes bázis bivektorral, tehát bármely páros spinorral.

Ezek szerint tehát meg kell határoznunk az olyan páros spinorokat, amelyek invariánsak az összes f_{ij} lineáris transzformációval szemben, vagy pedig egyszerűen az $F=f_{n,n-1}\circ f_{n,n-2}\circ\ldots\circ f_{ij}\circ\ldots\circ f_{12}$ lineáris transzformációval szemben. A probléma még egyszerűsíthető, ugyanis elegendő meghatározni az F-fel szembeni invariáns páros bázis k-vektorokat, mert ezeknek a lineáris kombinációi megadják az összes keresett páros spinorokat. A következő eredményekre jutunk:

ha $n=2h$, akkor $F(1)=1$, $F(e_{12\ldots n})=e_{12\ldots n}$

és minden többi $F(e_{i_1 i_2\ldots i_k})=0$;

ha $n=2h+1$, akkor $F(1)=1$ és minden $F(e_{i_1 i_2\ldots i_k})=0$.

Ebből pedig mindjárt következik a tétel.

Egyéb érdekes tulajdonságokat kaphatunk, ha feltételezzük, hogy a K *alaptest algebrailag zárt.*

Tekintsük a következő spinorokat:

$$\omega=\frac{1}{2}(1+\beta e_{12\ldots n});\quad \omega'=\frac{1}{2}(1-\beta e_{12\ldots n}),$$

ahol

$$\beta^2=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\alpha^2}\quad\text{és}\quad \alpha^2=\prod_{i=1}^{n} f(e_i, e_i),$$

tehát az f bilineáris forma mátrixának a determinánsa. ω és ω'-nek a következő tulajdonságai vannak:

1. $\omega+\omega'=1$.

2. $\omega^2=\frac{1}{4}[1+2\beta e_{12\ldots n}+\beta^2(e_{12\ldots n})^2]$,

de

$$(e_{12\ldots n})^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} f(e_i, e_i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha^2,$$

tehát $\omega^2=\omega$. Hasonlóképpen kiszámíthatjuk, hogy $\omega'^2=\omega'$.

3. $\omega\omega'=\frac{1}{4}[1-\beta^2(e_{12\ldots n})^2]=0$, tehát ω és ω' zérusosztók.

4. Ha n páros szám, akkor ω és ω' páros centrumspinorok, mivel a 2. tételben megadott formával egyeznek meg. Ha pedig n páratlan szám, akkor ω és ω' páratlan spinorok és a 3. tétel értelmében a C_n spinoralgebra centrumához tartoznak.

Tekintsük most a

$$\varphi^{(1)}=\omega\varphi'\quad\text{és}\quad \varphi^{(2)}=\omega'\varphi',\quad \varphi'\in C_n'$$

formájú spinorok sokaságát. Könnyen beláthatjuk, hogy ezek C_n-nek részalgebrái, melyeket A_n^1 és A_n^2-vel fogunk jelölni. Ezen részalgebráknak zérón kívül nincsenek közös elemei. Ha n páros, akkor A_n^1 és A_n^2 csak páros spinorokat tartalmaznak, tehát részei C_n'-nek is. Általában C_n' homomorf A_n^1 és A_n^2-vel és ez a homomorfizmus szürjektív, mert ha φ' befutja az összes páros spinort, akkor előállítottuk A_n^1 és A_n^2 összes elemét.

3. TÉTEL. Ha $n=2h+1$, akkor a C_n spinoralgebra az A_n^1 és A_n^2 részalgebrák direkt összege és ezek a részalgebrák izomorfak a páros spinorok részalgebrájával, C_n'-vel.

E tétel bizonyítása hasonló a P. K. RASEVSZKI által adott bizonyítással (lásd [3]), csak az itt bevezetett ω és ω' spinorokat kell felhasználni.

Hasonlóképpen, ami a spinoralgebra ideáljait illeti a [3] és [7]-ben bebizonyítottak érvényesek maradnak, csak a bizonyítások során az itt definiált ω és ω' spinorokat, valamint az f_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ lineáris transzformációkat kell felhasználni.

(Beérkezett: 1976. október 14.)

IRODALOM

[1] CHEVALLEY, CL., *The Algebraic Theory of Spinors* (New York, Columbia Univ. Press, 1955).
[2] DIEUDONNÉ, J., *La géometrie des groupes classiques.* (Berlin, Springer, 1955.)
[3] RASEVSZKI, P. K., «Teoria spinorov» *U. M. N.* **64** (1955).
[4] VESCAN, A., «Contribuţiuni la generalizarea noţiunii de spinor», *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat. T. IV,* (1960).
[5] VESCAN, A., «Contribuţiuni la precizarea şi generalizarea noţiunii de spinor», Doktori értekezés, Iaşi, 1963.
[6] VESCAN, A., «Contribuţiuni la studiul proprietăţilor algebrice ale spinorilor», *Anal. şt. Univ. Iasi, S. Ia. Mat. T. XI,* (1965).
[7] VESCAN, A., «Noi proprietăţi a le algebrei spinorilor», *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat. T. XII,* (1966).
[8] VESCAN, A., «Algebra spinorilor peste un corp oarecare», *Anal. şt. Univ. Iaşi, S. Ia. Mat. T. XVIII,* (1972).
[9] VESCAN, A., „A spinorelmélet algebrai alapjairól”, *MTA III. Osztály Közleményei* **21** (1972)

A külföldi szakirodalomból

A KONTRAKCIÓS LEKÉPEZÉSEK KÜLÖNBÖZŐ DEFINÍCIÓINAK[1] ÖSSZEHASONLÍTÁSA[2]

B. E. RHOADES

Számos szerző a kontrakciós típusú leképezéseket az X metrikus, teljes térben definiálta. Ezek a leképezések a jól ismert *Banach-féle* kontrakció általánosításai[3], és megvan az a tulajdonságuk, hogy minden leképezésnek egy fixpontja van. A fixpont mindig megtalálható a *Picard-féle* iteráció alkalmazásával, valamilyen $x_0 \in X$ kezdetiértékből kiindulva. Ebben a dolgozatban a különféle definíciók összehasonlítását végezzük el. X jelöli a teljes metrikus teret, ahol d a távolságfüggvény, f pedig az X-et önmagára leképező függvény.

1. A kontrakciós típusú leképezések definíciói

(1) (BANACH) Legyen a olyan szám, $0 \leqq a < 1$, melyre minden x, $y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a d(x, y).$$

(2) (RAKOTCH [21]) Legyen α olyan monoton csökkenő függvény $\alpha:(0, \infty) \to [0, 1)$, melyre minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(x, y).$$

(3) (EDELSTEIN [10]) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

(4) (KANNAN [18]) Legyen a olyan szám, $0 < a < \frac{1}{2}$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a\left[d(x, f(x)) + d(y, f(y))\right].$$

[1] E dolgozat "A comparison of various definitions of contractive mappings" címmel a *Trans. Amer. Math. Soc.*, **226** (1977) 257—290 oldalain jelent meg. A magyar nyelvű fordítás közléséhez mind a folyóirat szerkesztősége, mind pedig a szerző hozzájárult.

[2] A szerző nemcsak a címben, de később a szövegben is mindig a „definíció" szót használja. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy nemcsak a definíciók összehasonlításáról van szó, hanem e definíciókra alapuló fixpont-tételek összehasonlításáról is. (Ford. megj.)

[3] A későbbiekben ki fog derülni, hogy néhány definíció nem tekinthető a *Banach-féle* kontrakció általánosításának, hanem csak speciális esetről, vagy a *Banach-féle* kontrakció definíciójának módosításáról van szó. (Ford. megj.)

(5) (BIANCHINI [3]) Legyen h olyan szám, $0 \leqq h < 1$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq h \max\{d(x, f(x)),\ d(y, f(y))\}.$$

(6) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(x)),\ d(y, f(y))\}.$$

(7) (REICH [24]) Legyenek a, b, c olyan nemnegatív számok, $a+b+c<1$, melyekre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(x, y).$$

(8) (REICH [25]) Legyenek a, b, c olyan monoton csökkenő függvények; a, b, c: $(0, \infty) \to [0, 1)$ és $a(t)+b(t)+c(t)<1$, melyekre minden $x, y \in X$ és $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a(d(x, y))d(x, f(x)) + b(d(x, y))d(y, f(y)) + c(d(x, y))d(x, y).$$

(9) Legyenek a, b, c olyan nemnegatív függvények, melyek kielégítik a

$$\sup_{x, y \in X} \{a(x, y) + b(x, y) + c(x, y)\} \leqq \lambda < 1$$

egyenlőtlenséget úgy, hogy minden x, $y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a(x, y)d(x, f(x)) + b(x, y)d(y, f(y)) + c(x, y)d(x, y).$$

(10) (SEHGAL [31]) Minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ d(x, y)\}.$$

(11) (CHATTERJEA [5]) Legyen a olyan szám, $0 < a < \frac{1}{2}$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}.$$

(12) Legyen h olyan szám, $0 \leqq h < 1$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq h \max\{d(x, f(y)),\ d(y, f(x))\}.$$

(13) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(y)),\ d(y, f(x))\}.$$

(14) Legyenek a, b, c olyan nemnegatív számok, melyek kielégítik az $a+b+c<1$ egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq ad(x, f(y)) + bd(y, f(x)) + cd(x, y).$$

(15) Legyenek a, b, c olyan monoton csökkenő függvények; a, b, c:$(0, \infty) \to$ $\to [0, 1)$, melyek kielégítik az $a(t)+b(t)+c(t)<1$ egyenlőtlenséget úgy, hogy minden x, $y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a(d(x, y))d(x, f(y)) + b(d(x, y))d(y, f(x)) + c(d(x, y))d(x, y).$$

(16) Legyenek a, b, c olyan nemnegatív függvények, melyek kielégítik a

$$\sup_{x, y \in X} \{a(x, y)+b(x, y)+c(x, y)\} \leqq \lambda < 1$$

egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a(x, y) d(x, f(y))+b(x, y) d(y, f(x))+c(x, y) d(x, y).$$

(17) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, f(y)),\ d(y, f(x)),\ d(x, y)\}.$$

(18) (HARDY ÉS ROGERS [15]) Legyenek a_i-k olyan nemnegatív konstansok, melyek kielégítik a $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq a_1 d(x, y)+a_2 d(x, f(x))+a_3 d(y, f(y))+a_4 d(x, f(y))+a_5 d(y, f(x)).$$

(19) (ZAMFIRESCU [37]) Legyenek α, β, γ olyan valós számok, melyek kielégítik a $0 \leqq \alpha < 1$, $0 \leqq \beta$, $\gamma < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségeket úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén a következő állítások közül legalább egy igaz:

(I) $d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(x, y)$,

(II) $d(f(x), f(y)) \leqq \beta[d(x, f(x))+d(y, f(y))]$,

(III) $d(f(x), f(y)) \leqq \gamma[d(x, f(y))+d(y, f(x))]$.

(20) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y),\ [d(x, f(x))+d(y, f(y))]/2,\ [d(x, f(y))+d(y, f(x))]/2\}.$$

(21) (CIRIC [17]) Legyenek q, r, s, t olyan nemnegatív függvények, melyek kielégítik a

$$\sup_{x, y \in X} \{q(x, y)+r(x, y)+s(x, y)+2t(x, y)\} \leqq \lambda < 1$$

egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq q(x, y) d(x, y)+r(x, y) d(x, f(x))+s(x, y) d(y, f(y))+ \\ +t(x, y)[d(x, f(y))+d(y, f(x))].$$

(22) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y),\ d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ [d(x, f(y))+d(y, f(x))]/2\}.$$

(23) Legyenek α_i-k olyan monoton csökkenő függvények; $\alpha_i:(0, \infty) \to [0, 1)$, melyek kielégítik a $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i(t) < 1$ egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y \in X$, $x \neq y$

esetén

$$d(f(x),f(y)) \leqq \alpha_1(d(x,y))d(x,f(x))+\alpha_2(d(x,y))d(y,f(y))+$$
$$+\alpha_3(d(x,y))d(x,f(y))+\alpha_4(d(x,y))d(y,f(x))+$$
$$+\alpha_5(d(x,y))d(x,y).$$

(24) (CIRIC [8]) Legyen h olyan konstans, $0 \leqq h < 1$, hogy minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x),f(y)) \leqq h \max\{d(x,y),\ d(x,f(x)),\ d(y,f(y)),\ d(x,f(y)),\ d(y,f(x))\}.$$

(25) Minden $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén

$$d(f(x),f(y)) < \max\{d(x,y) d(x,f(x)),\ d(y,f(y)),\ d(x,f(y)),\ d(y,f(x))\}.$$

Megjegyezzük, hogy ROUX és SARDI definíciója [28] a (9) speciális esete, míg MASSA definíciója [19] a (19) speciális esete.

Vannak olyan tulajdonságú f függvények is, melyeknek valamelyik iteráltjuk elégíti ki a fenti definíciók egyikét. Emiatt definícióink száma további huszonöttel nő; az így adódó definíciókat 26-tól 50-ig fogjuk számozni.

Például

(29) (SINGH [32]) Legyen p olyan pozitív egész szám, továbbá a olyan $0 < a < \frac{1}{2}$-et kielégítő szám, melyekre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f^p(x),f^p(y)) \leqq a\left[d(x,f^p(x))+d(y,f^p(y))\right].$$

CHATTERJEA [5] művének 729. oldalán a (36) definíció szerepel; a (48) és (49) definíció pedig CIRIC [7] művének 23. oldalán és a [8] mű 271. oldalán jelenik meg.

Legyen p, q rögzített pozitív egész szám. Az 51 és 75 közé eső számokkal azokat a definíciókat fogjuk azonosítani, mely definíciókat kielégítő függvények a következő tulajdonságúak: $f^p(x)$ és $f^q(x)$ kielégíti a kontrakciós feltételek egyikét.

Például

(51) (YEN [35]) Legyen p, q olyan pozitív egész szám, továbbá α olyan $0 < \alpha < 1$-et kielégítő szám, melyekre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f^p(x),f^q(y)) \leqq \alpha d(x,y).$$

GUPTA és SRIVISTAVA definíciója [12] 94. old. a (64) definíciónak felel meg, $c=0$ esetén.

Előfordulhat, hogy f partikuláris iterációja függ a térben levő ponttól. Ezek lesznek a 76—100 számú definíciók.

Például

(76) (GUSEMAN [14]) Legyen α olyan szám, $0 < \alpha < 1$, melyhez minden $x \in X$ esetén létezik olyan egész $p(x)$ függvény, hogy minden $y \in X$ esetén

$$d(f^{p(x)}(x),f^{p(x)}(y)) \leqq \alpha d(x,y).$$

Az f függvény iterációja függhet x-től és y-tól is, ami további definíciókat jelent, számozzuk őket 101-től 125-ig.

Például

(103) (BAILEY [1]) Minden $x, y \in X$, $0 < d(x, y)$ magába foglalja azt is, hogy létezik olyan $p = p(x, y)$ egész szám, melyre

$$d(f^p(x), f^p(y)) < d(x, y).$$

2. A definíciók összehasonlítása

A fenti definíciók némelyike — a szerzők eredeti megfogalmazása szerint — további feltételeket is kiszab, mint pl. f folytonosságának megkövetelése vagy pl. az X-en való strukturális tulajdonságok, így a kompaktság vagy azonos konvexitás megkövetelése.

Ebben a fejezetben ilyen korlátozásokat nem teszünk. A fejezet végén viszont teszünk bizonyos megszorításokat, amennyiben a fixpont egzisztenciájának megállapítása ezt szükségessé teszi.

Az (a)$\Rightarrow$(b) jelölés jelentse azt, hogy amennyiben valamely függvény az (a) feltételnek eleget tesz, akkor a (b) feltételnek is eleget tesz.

A definíciók számozásából nyilvánvaló, hogy $1 \leqq m \leqq 25$ esetén

$$(m) \Rightarrow (25+m) \Rightarrow (50+m) \quad \text{és} \quad (25+m) \Rightarrow (75+m) \Rightarrow (100+m)$$

igaz.

Elsőként az (1)—(25) definíciók közötti sorrendet állapítjuk meg, ezáltal közvetlenül kapjuk meg a (26)—(50), (51)—(75), (76)—(100) és a (101)—(125) definíciók közti sorrendet is.

1. TÉTEL

(I) (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(10); (2)$\not\Rightarrow$(1), (3)$\not\Rightarrow$(1) és (10)$\not\Rightarrow$(3).

(II) (2)$\Rightarrow$(8)$\Rightarrow$(23); (8)$\not\Rightarrow$(2).

(III) (4) és (n) független, ha $n=1, 2, 3$.

(IV) (4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(6)$\Rightarrow$(10), fordítva nem igaz.

(V) (4)$\Rightarrow$(7)$\Rightarrow$(8)$\Rightarrow$(10); 7$\not\Rightarrow$(4).

(VI) (7)$\Rightarrow$(9)$\Rightarrow$(10); (10)$\not\Rightarrow$(9).

(VII) (6) és (n) *független*, ha $n=7, 8, 9$.

(VIII) (5)$\Rightarrow$(9); *fordítva nem igaz.*

(IX) (n)$\not\Rightarrow$(5), *ha* $n=7, 8$.

(X) (11)$\Rightarrow$(12)$\Rightarrow$(13)$\Rightarrow$(17); *fordítva nem igaz.*

(XI) (11)$\Rightarrow$(14)$\Rightarrow$(15)$\Rightarrow$(17); (14)$\not\Rightarrow$(11).

(XII) (14)$\Rightarrow$(16)$\Rightarrow$(17); (17)$\not\Rightarrow$(16).

(XIII) (6) *és* (13) *független.*

(XIV) (1)$\Rightarrow$(18), (4)$\Rightarrow$(18) és (11)$\Rightarrow$(18), *fordítva nem igaz.*

(XV) (12)$\Rightarrow$(16), *fordítva nem igaz.*

(XVI) (13) *és* (14) *független.*

(XVII) (13)$\not\Rightarrow$(n), *ha* $n=16$, 18—21, 24.

(XVIII) (10) *és* (13) *független.*

(XIX) (10)$\not\Rightarrow$(n), *ha* $n=11$, 12.

(XX) (10)$\Rightarrow$(25) *és* (13)$\Rightarrow$(25), *fordítva nem igaz.*

(XXI) (9)$\Rightarrow$(21) *és* (6)$\Rightarrow$(22).

(XXII) (15)$\Rightarrow$(23) *és* (16)$\Rightarrow$(24).

(XXIII) (16) *és* (21) *független.*
(XXIV) (17)$\Rightarrow$(25), *fordítva nem igaz.*
(XXV) (18)$\Rightarrow$(19)$\Rightarrow$(20)$\Rightarrow$(22)$\Rightarrow$(25); (20)$\not\Rightarrow$(19) *és* (25)$\not\Rightarrow$(22).
(XXVI) (19)$\Rightarrow$(21)$\Rightarrow$(24)$\Rightarrow$(25); (24)$\not\Rightarrow$(21) *és* (25)$\not\Rightarrow$(24).
(XXVII) (18)$\Rightarrow$(23)$\Rightarrow$(25).
(XXVIII) (21)$\Rightarrow$(22), *fordítva nem igaz.*
(XXIX) $(m)\Rightarrow(25+m)$, *fordítva nem igaz,* $1\leqq m\leqq 25$.
(XXX) $(25+m)\Rightarrow(75+m)$, *fordítva nem igaz,* $1\leqq m\leqq 25$.

A „bennfoglalások" nagy része magától értetődik a definíciók alapján. A nem kézenfekvőeket be fogjuk bizonyítani.

(I) A [10] mű 8. oldalán szereplő példa megmutatja, hogy (3)$\not\Rightarrow$(1).

(2)$\not\Rightarrow$(1) igazolásához definiáljuk α-t a következőképpen; α: $(0,\infty)\to[0,1)$ az $\alpha(d)=1/(d+1)$ függvénykapcsolattal. Legyen $f(x)=1/(x+1)$, $0\leqq x<1$. Ekkor f: $[0,1]\to[0,1]$ és fixpontja van a $(\sqrt{5}-1)/2$ helyen. Tetszőleges, rögzített a-hoz, $0<<a<1$, válasszuk y-t a következőképpen: $y<-1+1/a$ és $y\in(0,(\sqrt{5}-1)/2)$. Ekkor

$$d(f(0),f(y)) = y/(y+1) > ay = ad(0,y),$$

és ez nem tesz eleget (1)-nek.

Másrészt viszont $0\leqq x<y\leqq 1$ esetén

$$d(f(x),f(y)) = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leqq \frac{y-x}{y-x+1} = \alpha(d)d(x,y),$$

és f kielégíti (2)-t.

A [31] mű 574. oldalán szereplő 2. példa megmutatja, hogy (10)$\not\Rightarrow$(3).

(II) Legyen $f(x)=x/3$, $0\leqq x<1$, $f(1)=1/6$. Ekkor f eleget tesz (8)-nak, de nem elégíti ki (2)-t.

(III) Legyen $f(x)=1/2$, $0\leqq x<1$, $f(1)=1/4$. $f\in(4)$, de $d(f(x),f(1))=1/4>>d(x,1)$ bármely $x\in(3/4,1)$ esetén, tehát f nem tesz eleget (1)—(3)-nak.

$f(x)=x/3$, $0\leqq x\leqq 1$, mellett $f\in(1)$, tehát $f\in(2)$ és $f\in(3)$, de $f\notin(4)$.

(IV) $f(x)=x/3$, $0\leqq x\leqq 1$, $f\in(5)$, de f nem tesz eleget (4)-nek.

Legyen $f(x)=x^2/2(x+1)$, $0\leqq x<\infty$, $0\leqq x<y$ esetén

$$d(f(x),f(y)) = (xy+x+y)(y-x)/2(x+1)(y+1) < y(y+2)/2(y+1) =$$

$$= \max\{d(x,f(x)),\ d(y,f(y))\},$$

tehát $f\in(6)$. Következésképpen $d(f(0),f(y))=y^2/2(y+1)$. Tetszőleges rögzített h esetén, $0<h<1$, találhatók olyan elég nagy y értékek, melyekre $y/(y+2)>h$, és így $f\notin(5)$.

A [31] mű 574. oldalán szereplő 2. példa segítségével megmutatjuk, hogy (10)$\not\Rightarrow$(6). Pl. legyen $f(x)=x/2$, ha $0\leqq x\leqq 4$ és $f(x)=-2x+10$, ha $4<x\leqq 5$. Amennyiben $0<y\leqq 4$

$$d(f(0),f(y)) = y/2 = \max\{d(0,f(0)),\ d(y,f(y))\},$$

tehát $f\notin(6)$.

(V) A [24] mű 122. oldalán szereplő példa megmutatja, hogy (7)$\not\Rightarrow$(4).

(VI) Megjegyezzük, hogy (9) a következővel ekvivalens:

(9′) Legyen h olyan konstans, $0<h<1$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq h \max\{d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ d(x, y)\}.$$

A $(9) \Rightarrow (9')$ reláció igazolásához legyen

$$M(x, y) = \max\{d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ d(x, y)\}.$$

Tegyük fel, hogy $f \in (9)$. Ekkor

$$d(f(x), f(y)) \leqq a(x, y) d(x, f(x)) + b(x, y) d(y, f(y)) + c(x, y) d(x, y) \leqq$$
$$\leqq (a(x, y) + b(x, y) + c(x, y)) M(x, y) \leqq \lambda M(x, y),$$

és f, $h=\lambda$ esetén, eleget tesz (9′)-nek.

Fordítva, tegyük fel, hogy $f \in (9')$. Minden olyan pontban, ahol $M(x, y) = d(x, f(x))$, legyen $a(x, y)=h$, $b(x, y)=c(x, y)=0$. Minden olyan pontban, ahol $M(x, y)=d(y, f(y))$, legyen $b(x, y)=\lambda$, $a(x, y)=c(x, y)=0$, és ha $M(x, y)=d(x, y)$, akkor legyen $c(x, y)=\lambda$, $a(x, y)=b(x, y)=0$. Ekkor $f \in (9)$.

A $(10) \not\Rightarrow (9)$ reláció igazolásához megmutatjuk, hogy $(10) \not\Rightarrow (9')$. Legyen $f(x) = x^2/(x+1)$, $0 \leqq x < \infty$. Ekkor

$$d(f(x), f(y)) = (xy + x + y)(y - x)/(x+1)(y+1) < y - x$$

és $f \in (10)$. Viszont $d(f(0), f(y)) = y^2(y+1)^{-1} > hy$ bármely tetszőlegesen rögzített 1-nél kisebb h és elég nagy y esetén.

(VII) Az $(n) \not\Rightarrow (6)$, $n=7, 8, 9$, igazolásához válasszuk $f(x)$-et a következőképpen: $f(x)=x/2$, $0 \leqq x \leqq 1$. Ekkor $f \in (7)$, de

$$d(f(0), f(y)) = y/2 = \max\{d(0, f(0)),\ d(y, f(y))\}.$$

A $(6) \not\Rightarrow (n)$ igazolásához legyen $f(x)=1/2$, ha $0 \leqq x \leqq 1/2$ és $f(x)=0$, ha $1/2 < x \leqq 1$, valamint $f \in (6)$. Az $1/2 \leqq x \leqq 1$ esetben $d(f(1/2), f(x)) = 1/2$. Legyen

$$g(x) = ad(1/2, f(1/2)) + bd(x, f(x)) + cd(1/2, x) = bx + c(x - 1/2).$$

Midőn $x \to \frac{1}{2}+$, $g(x) \to b/2 \leqq \lambda/2 < 1/2$ és $f \notin (9)$.

(VIII) A (9) és (9′) között fennálló ekvivalencia (VI)-ban bemutatott bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy bármely $f \in (5)$ függvénynek létezik (9)-nek megfelelő reprezentánsa, hacsak $c \equiv 0$.

Legyen $f(x)=x/2$, $0 \leqq x \leqq 1$. Ekkor $f \in (9)$, de

$$d(f(0), f(y)) = y/2 = \max\{d(0, f(0)),\ d(y, f(y))\} > hy/2$$

bármely $0 \leqq h < 1$ esetén.

(IX) Legyen $n=7, 8$. $(n) \not\Rightarrow (5)$ igazolásához használjuk fel a (VII) példáját, mely szerint $(n) \not\Rightarrow (6)$.

(X) Legyen $f(x)=0$, ha $0 \leqq x < 1$ és $f(1)=1/2$. Ekkor $f \in (12)$, de

$$d(f(1/2), f(1)) = \frac{1}{2} = \left[d\left(\frac{1}{2}, f(1)\right) + d(1, f(1/2))\right] \Big/ 2,$$

és $f \notin (11)$.

(13)$\not\Rightarrow$(12) igazolásához definiáljuk f-et a következőképpen:

$f(x) = x^2/(x+1)$, $x \geqq 0$. $f\in(13)$. $d(f(x), f(2x)) = x^2(2x+3)/(2x+1)(x+1)$. $x > 1$ esetén

$$\max\{d(x, f(2x)),\ d(2x, f(x))\} = x(x+2)/(x+1).$$

Tehát, bármely adott $0<h<1$ esetén léteznek olyan elég nagy x értékek, melyekre $x(2x+3)/(2x+1)(x+2)>h$.

Legyen $f(x)=1-x/2$, $0\leqq x\leqq 1$. Ekkor $f\in(17)$, de $f\notin(13)$, ha $x=0$ és $y=1$.

(XI) (14)$\not\Rightarrow$(11) igazolásához használjuk fel a (X)-beli f-et, melyre (12)$\not\Rightarrow$(11). Tehát $f\in(14)$.

(XII) A (VI)-ban alkalmazott eljárást követve, mely kimutatta (9) és (9') ekvivalenciáját, belátható, hogy (16) ekvivalens (16')-vel.

(16') Legyen h olyan konstans, $0\leqq h<1$, melyre minden $x, y\in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq h\max\{d(x, f(y)),\ d(y, f(x)),\ d(x, y)\}.$$

(17)$\not\Rightarrow$(16) igazolásához válasszuk a (X)-ben szereplő f-et, melyre (13)$\not\Rightarrow$(12). Ekkor $f\in(17)$. Viszont

$$\max\{d(x, f(2x)),\ d(2x, f(x)),\ d(x, 2x)\} = x(x+2)/(x+1),$$

és elegendően nagy x esetén $f\notin(16')$.

(XIII) Legyen $f(x)=\alpha(1-x)$, $1/2<\alpha<1$, $0\leqq x\leqq 1$. Ekkor $f\in(6)$, de f nem tesz eleget (13)-nak, ha $x=0$ és $y=1$.

A (X)-ben szereplő f, melyre (17)$\not\Rightarrow$(13), eleget tesz (6)-nak.

(XIV) (18)$\not\Rightarrow$(1) igazolásához használjuk fel a (III)-ban szereplő f-et, melyre (4)$\not\Rightarrow$(1).

(18)$\not\Rightarrow$(4) igazolásához használjuk fel az (V)-ben szereplő f-et, melyre (7)$\not\Rightarrow$(4).

.(18)$\not\Rightarrow$(11)-hez használjuk fel a (X)-ben szereplő f-et, melyre (12)$\not\Rightarrow$(11).

(XV) A (X)-ben szereplő f, melyre (17)$\not\Rightarrow$(13), kielégíti (16)-ot.

(XVI) (13)$\not\Rightarrow$(14) igazolásához használjuk fel a (XII)-ben szereplő f-et, melyre (17)$\not\Rightarrow$(16). Ez az f eleget tesz (13)-nak, de (16)-ot és (14)-et nem elégíti ki.

(XIII)-ból adódik, hogy a (X)-ben szereplő f, melyre (17)$\not\Rightarrow$(13), eleget tesz (14)-nek.

(XVII),(XXV) és (XXVI) felhasználásával elegendő, ha igazoljuk, hogy (13)$\not\Rightarrow$ $\not\Rightarrow$(16), (13)$\not\Rightarrow$(22) és (13)$\not\Rightarrow$(24). (XI)-ből az adódik, hogy f nem tesz eleget (16)-nak.

$$\max\{d(x, 2x),\ d(x, f(x)),\ d(2x, f(2x)),\ d(x, f(2x)),\ d(2x, f(x))\} = x(x+2)/(x+1)$$

tehát elég nagy x-ek esetén $f\notin(24)$. (13)$\not\Rightarrow$(22) igazolásához a (XVIII)-ban szereplő f-et használjuk fel, mely eleget tesz (13)-nak, de (10)-nek nem.

(XVIII) (10)$\not\Rightarrow$(13) igazolásához használjuk fel a (XII)-ben szereplő f-et, melyre (6)$\not\Rightarrow$(13). Ez az f eleget tesz (10)-nek.

Legyen $f(x)=0$, ha $0\leqq x\leqq 1/2$ és $f(x)=1/2$, ha $1/2<x\leqq 1$. Ekkor $f\in(13)$, de f nem tesz eleget (10)-nek, ha $x=1/2$ és $y=1$.

(XIX) (X)-ből adódóan elegendő, ha (10)$\not\Rightarrow$(13)-at igazoljuk, ami viszont (XVIII)-ból következik.

(XX) Legyen $f(x)=0$, ha $0\leqq x\leqq 1/2$ és $f(x)=1/2$, ha $1/2<x\leqq 1$. Ekkor f eleget tesz (25)-nek, de (10)-nek nem. A (25)$\not\Rightarrow$(13) reláció (XVIII)-ból következik.

(XXIII) Legyen $f(x)=\varepsilon$, ha $0\leqq x\leqq 1/2$ és $f(x)=0$, ha $1/2<x\leqq 1$, ahol $1/4<\varepsilon<$ $<1/2$. Ekkor $x=\varepsilon$ és $y=2\varepsilon$ mellett f nem tesz eleget (16)-nak.

Legyen $f(x)=0$, ha $0\leqq x<1$ és $f(1)=1/2$. Ekkor $f\in(16)$, de $x=1/2$ és $y=1$ mellett f nem tesz eleget (21)-nek.

(XXIV) Legyen $f(x)=1/2$, ha $0\leqq x\leqq 1/2$ és $f(x)=0$, ha $1/2<x\leqq 1$. f nem tesz eleget (17)-nek, ha $x=1/2$ és $y=1$, de $f\in(22)$.

(XXV) A [15] mű 202. oldalán található az a bizonyítás, mely szerint (18) tartalmazza (18′)-t.

(18′) Legyenek az a, b, c nemnegatív konstansok olyanok, melyek kielégítik az $a+2b+2c<1$ egyenlőtlenséget úgy, hogy minden $x, y\in X$ esetén

$$d(f(x),f(y)) \leqq ad(x,y)+bd(x,f(x))+d(y,f(y))+c[d(x,f(y))+d(y,f(y))].$$

Nyilvánvaló, hogy $(18')\Rightarrow(18)$.

Most bizonyítsuk be azt, hogy (19) ekvivalens (19′)-vel.

(19′) Legyenek az a, b, c nemnegatív függvények olyanok, melyek kielégítik a

$$\sup_{x,y\in X}\{a(x,y)+2b(x,y)+2c(x,y)\} \leqq \lambda < 1$$

egyenlőtlenséget úgy, hogy $x, y\in X$ esetén

$$d(f(x),f(y)) \leqq a(x,y)d(x,y)+b(x,y)[d(x,f(x))+d(y,f(y))]+$$
$$+c(x,y)[d(x,f(y))+d(y,f(x))],$$

és

(19″) Legyen h olyan konstans, $0\leqq h<1$, melyre minden $x, y\in X$ esetén

$$d(f(x),f(y)) \leqq h\max\{d(x,y),\ [d(x,f(x))+d(y,f(y))]/2,$$
$$[d(x,f(y))+d(y,f(x))]/2\}.$$

$(19)\Rightarrow(19')$. Minden olyan x, y pontpárra, melyre f eleget tesz (19) (I)-nek, legyen $a(x,y)=\alpha$, $b=c=0$. Minden olyan x, y pontpárra, melyre f eleget tesz (19) (II)-nek, legyen $b(x,y)=\beta$, $a=c=0$; és ugyanígy (III)-ra is.

$(19')\Rightarrow(19'')$. Legyen

$$M(x,y) = \max\{d(x,y),\ [d(x,f(x))+d(y,f(y))]/2,\ [d(x,f(y))+d(y,f(x))]/2\}.$$

Legyen $f\in(19')$. Ekkor

$$d(f(x),f(y)) \leqq [a(x,y)+2b(x,y)+2c(x,y)]M(x,y) \leqq \lambda M(x,y),$$

és $f\in(19'')$.

$(19'')\Rightarrow(19)$. Minden olyan x, y pontpárra, melyre $M(x,y)=d(x,y)$, f eleget tesz (19) (I)-nek, hacsak $\alpha=h$. Amikor $M(x,y)=[d(x,f(x))+d(y,f(y))]/2$, akkor f kielégíti (19) (II)-t, hacsak $\beta=h/2$, végül f kielégíti a (19) (III)-at $\gamma=h/2$ mellett, hacsak $M(x,y)=[d(x,f(y))+d(y,f(x))]/2$.

$(20)\not\Rightarrow(19)$. Legyen $f(x)=x^2/(x+1)$, $x\geqq 0$. Ekkor $d(f(x),f(y))<d(x,y)$ és $f\in(20)$. $x\geqq 1$ esetén $d(f(x),f(2x))=x^2(2x+3)/(x+1)(2x+1)$ és $\max\{d(x,2x),$ $[d(x,f(x))+d(2x,f(2x))]/2,\ [d(x,f(2x))+d(2x,f(x))]/2\}=x$. Bármely, a $0<h<1$ egyenlőtlenséget kielégítő, h-hoz találhatók olyan elég nagy x értékek, melyekre $x(2x+3)/(x+1)(2x+1)>h$ és $f\notin(19'')$.

$(25) \not\Rightarrow (22)$. Használjuk fel a (XX)-ban szereplő f-et.

(XXVI) A (XXV) bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy (21) ekvivalens (21′)-vel.

(21′) Legyen h olyan konstans, $0 \leqq h < 1$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leqq h \max\{d(x, y),\ d(x, f(x)),\ d(y, f(y)),\ [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]/2\},$$

és

(21″) (ZAMFIRESCU [36]) Legyen α olyan konstans, $0 \leqq \alpha < 1$, hogy minden különböző $x, y \in X$ esetén a következő egyenlőtlenségek közül legalább egy teljesüljön:

(I) $d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(x, y)$,

(II) $d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(x, f(x))$,

(III) $d(f(x), f(y)) \leqq \alpha d(y, f(y))$,

(IV) $d(f(x), f(y)) \leqq (\alpha/2)[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

$(24) \not\Rightarrow (21)$. Használjuk fel a (X)-ben szereplő f-et, melyre $(12) \not\Rightarrow (11)$. Ekkor $f \in (24)$, de $f \notin (21)$.

$(25) \not\Rightarrow (24)$. Használjuk fel a (XX)-ban szereplő f-et.

(XXVIII) Legyen $f(x) = 1/2$, ha $0 \leqq x \leqq 1/2$ és $f(x) = 0$, ha $1/2 < x \leqq 1$. Ekkor $f \in (22)$, de f nem elégíti ki (21)-et, hacsak $x = 1/2$, $y > 1/2$, de közel van 1/2-hez.

(XXIX) A „bennfoglalások" nyilvánvalóak. (Az (a)$\Rightarrow$(b) relációk igaz volta nyilvánvaló.) $(25+m) \not\Rightarrow (m)$ igazolásához $(1 \leqq m \leqq 25)$ legyen $f(x) = 0$, ha $0 \leqq x \leqq 1$ és $x \neq 1/2$, és $f(1/2) = 1$. Ekkor $f \notin (25)$, ezért $f \notin (m)$, hacsak $1 \leqq m \leqq 25$, de $f^2 \equiv 0$ miatt $f \in (n)$, hacsak $n > 25$.

(XXX) $(75+m) \not\Rightarrow (25+m)$ igazolásához használjuk fel az [1] mű 105. oldalán levő példában szereplő f-et. f nem elégíti ki (50)-et, mivel minden n-hez megválasztható x és y a következőképpen: $x = (1/n + 1, 0)$, $y = (1/n, 0)$. Bizonyítható, hogy minden x-hez található olyan egész $p(x)$, melyre $f \in (76)$, (80) és (97), következésképp $f \in (75+m)$, hacsak $1 \leqq m \leqq 25$.

Bár az 1. tétel nem tartalmazza az összes lehetséges összehasonlítást, ahhoz elegendően teljes, hogy a (124) és (125) definíciók legáltalánosabb volta kitűnjék. Érdemes felfigyelni arra is, hogy a 125 definíció mindegyike olyan, hogyha létezik f-nek fixpontja, akkor csak egy van. Ezt a tényt a (124) és (125) definíció esetére fogjuk bebizonyítani.

LEMMA. Tegyen eleget az f függvény a (124)-es vagy a (125)-ös definíciónak. Amennyiben létezik az f függvénynek fixpontja, akkor csak egy fixpontja van.

Tegyük fel, hogy u és v az f függvény fixpontjai és $u \neq v$. Ekkor, (124)-ből adódóan, létezik olyan $p = p(u, v)$ egész, melyre a

$$\begin{aligned} d(u, v) = d(f^p(u), f^p(v)) &\leqq h \max\{d(u, v),\ d(u, f^p(u)), \\ &d(v, f^p(v)),\ d(u, f^p(v)),\ d(v, f^p(u))\} \leqq h d(u, v) \end{aligned}$$

egyenlőtlenség fennáll, ami viszont ellentmondásos. A (125)-re vonatkozó bizonyítás hasonlóan történik.

A továbbiakban azt bizonyítjuk be, hogy a definíciók valamelyikét kielégítő f függvénynek akkor van fixpontja, ha f folytonos és az $\{f^n(x_0)\}$ sorozatnak létezik torlódási pontja.

2. TÉTEL. Az f függvény tegyen eleget a (3), (10), (13), (17), (22) vagy a (25) definíciók valamelyikének (vagy a fenti definícióknak megfelelő, a (26)—(125) definíciók közé eső, definíciónak). Ekkor f folytonossága ((I) feltétel) és az $\{f^n(x_0)\}$ sorozat torlódási pontjának létezése valamely $x_0 \in X$ esetén ((II) feltétel) szükséges ahhoz, hogy f rendelkezzék fixponttal.

Bizonyítás. Az 1. tétel (I), (IV), (X), (XXI) és (XXV) szakaszának eredményeként a 2. tétel (I) feltételének kielégítéséhez elegendő, ha olyan függvényt konstruálunk, mely eleget tesz (3)-nak, (6)-nak vagy (13)-nak.

(3) esetében legyen $X=\{x_n=n\sqrt{2}+2^n|n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, továbbá definiáljuk f-et a következőképpen: $f(x_n)=x_{n-1}$. Ekkor $f\in(3)$, de f-nek nincs fixpontja. (Ez a példa a [4] műben szerepel.)

(6) esetében legyen $X=\{x_n=1-2^{-n-1}|n\geqq 0\}\cup\{1\}$, $f(1)=1/2$, $f(x_n)=x_{n+1}$. Ekkor $f\in(6)$, de f-nek nincs fixpontja.

(13) esetében legyen $X=[0, \infty)$, $f(x)=[x]+1$. Ekkor $f\in(13)$, de f-nek nincs fixpontja.

A (II) feltétel szükségessége.

Legyen $X=[1, \infty)$, $f(x)=x+x^{-1}$. Ekkor $f\in(3)$ és (13). $f^n(x)$ n-ben monoton növekszik. Mivel $f^{k+1}(x)-f^k(x)=1/f^k(x)$, a következő adódik:

$$f^{n+1}(x)-f(x) = \sum_{k=1}^{n} 1/f^k(x) > n/f^n(x).$$

$f^{n+1}(x)$ helyére írjunk $f^n(x)+1/f^n(x)$-et, ekkor viszont

$$n-1 < (f^n(x))^2[f^n(x)-f(x)] < (f^n(x))^3.$$

Tehát $f^n(x)>(n-1)^{1/3}$, vagyis f-nek nincs fixpontja.

Ha f kielégíti (6)-ot, akkor $\{f^n(x)\}$ korlátos minden $x\in X$ esetén. Amennyiben $f^{N+1}(x)=f(x)$ valamely egész N esetén fennáll, akkor $f^n(x)=f(x)$ is igaz minden $n\geqq N$ esetén és $\{f^n(x)\}$ konvergens, következésképp korlátos. Tegyük fel, hogy $f^m(x)\neq f^n(x)$ minden $m, n\geqq 0$, $m\neq n$ esetén. Ekkor

$$d(f^{n+1}(x),f^{n+2}(x)) < d(f^n(x),f^{n+1}(x)) < \dots < d(x,f(x)),$$

így $d(f(x),f^n(x))<d(x,f(x))$, tehát $\{f^n(x)\}$ korlátos. Tehát, bármely véges dimenziójú térben $\{f^n(x)\}$ automatikusan rendelkezik torlódási ponttal.

A dolgozat további részében feltételezzük, hogy bármely — a 2. tételben felsorolt definíciók valamelyikét kielégítő — f folytonos X-en és $\{f^n(x_0)\}$-nak létezik torlódási pontja valamely $x_0\in X$ esetén.

3. Fixpont-tételek

Mivel a (25) definícióhoz egyetlen fixpont-tételünk sincs, ezért azokat a legjobb fixponttételeket fogjuk felsorolni, melyek az (1)—(25), (26)—(50), stb. definíciósorozatokhoz külön-külön tartoznak.

3. TÉTEL. Legyen f folytonos és elégítse ki (22)-t. Ha z az $\{f^n(x_0)\}$ torlódási pontja valamely $x_0\in X$ esetén, akkor z az f egyetlen fixpontja és $f^n(x_0)\to z$.

A 3. tétel a 6. tétel speciális esete $p=1$ mellett. A 3. tétel speciális esetei pedig a [10] és a [31] műben szerepelnek.

4. TÉTEL. Legyen $f\in(23)$, $x_0\in X$. Ekkor f-nek létezik z fixpontja, és $f^n(x_0)\to z$.

Bizonyítás. Definiáljuk a következő sorozatot: $\{x_0, x_1=f(x_0), \dots, x_{n+1}= =f(x_n), \dots\}$. Mivel $f\in(23)$, ezért

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqq \alpha_1 d(x_{n-1}, x_n)+\alpha_2 d(x_n, x_{n+1})+ +\alpha_3 d(x_{n-1}, x_{n+1})+\alpha_5 d(x_{n-1}, x_n),$$

ahol, a rövidség kedvéért, $\alpha_i=\alpha_i(d(x_{n-1}, x_n))$. A (23) definíció szimmetriája miatt

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqq \alpha_1 d(x_n, x_{n+1})+\alpha_2 d(x_{n-1}, x_n)+\alpha_4 d(x_{n-1}, x_{n+1})+\alpha_5 d(x_n, x_{n-1}).$$

A két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$2d(x_n, x_{n+1}) \leqq (\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_5)\, d(x_{n-1}, x_n)+(\alpha_2+\alpha_1)\, d(x_n, x_{n+1})+ +(\alpha_3+\alpha_4)\, d(x_{n-1}, x_{n+1}).$$

Viszont $d(x_{n-1}, x_{n+1})\leqq d(x_{n-1}, x_n)+d(x_n, x_{n+1})$, tehát

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqq (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+2\alpha_5)\, d(x_{n-1}, x_n)/(2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) < d(x_{n-1}, x_n),$$

mivel $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i(t)<1$.

Tehát $\{d(x_n, x_{n+1}\}$ n-ben monoton csökkenő. Jelölje a korlátot p és tegyük fel, hogy $p>0$.

Legyen

$$q(t) = \frac{\alpha_1(t)+\alpha_2(t)+\alpha_3(t)+\alpha_4(t)+2\alpha_5(t)}{2-\alpha_1(t)-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)-\alpha_4(t)}.$$

Ekkor a $b_n=d(x_n, x_{n+1})\geqq p$ egyenlőtlenség magába foglalja a $q(b_n)\leqq q(p)<1$ egyenlőtlenség teljesülését is minden n esetén, így

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqq q(p)\, d(x_n, x_{n-1}) \leqq \dots \leqq (q(p))^n d(x_1, x_0) \to 0,$$

midőn $n\to\infty$.

Most azt fogjuk igazolni, hogy az $\{x_n\}$ sorozat *Cauchy-sorozat*. Minden m, n egész számpár esetén — $d(x_{m-1}, x_{n-1})\neq 0$ feltételezése mellett — adódik, hogy

$$d(x_m, x_n) \leqq \alpha_1 d(x_{m-1}, x_m)+\alpha_2 d(x_{n-1}, x_n)+\alpha_3 d(x_{m-1}, x_n)+ +\alpha_4 d(x_{n-1}, x_m)+\alpha_5 d(x_{m-1}, x_{n-1}),$$

mely az alábbi formában is felírható:

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)\, d(x_{m-1}, x_m)+(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)\, d(x_{n-1}, x_n)}{1-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}.$$

Legyen $r(t)=\beta(t)/\xi(t)$, $s(t)=\gamma(t)/\xi(t)$, ahol $\beta(t)=\alpha_1(t)+\alpha_3(t)+\alpha_5(t)$, $\gamma(t)=\alpha_2(t)+ +\alpha_4(t)+\alpha_5(t)$ és $\xi(t)=1-\alpha_3(t)-\alpha_4(t)-\alpha_5(t)$. Vegyük figyelembe, hogy r és s t-ben monoton csökkenő függvények.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $\beta(\varepsilon) \neq 0$ és $\gamma(\varepsilon) \neq 0$, akkor létezik olyan N szám, melyre $m, n \geqq N$ esetén

$$d(x_{m-1}, x_m) < 1/2 \min \{\varepsilon/r(\varepsilon/2), \varepsilon\},$$

és $d(x_{n-1}, x_n) < 1/2 \min \{\varepsilon/s(\varepsilon/2), \varepsilon\}$. Ha például $r(\varepsilon) = 0$, akkor válasszuk N-et úgy, hogy $m \geqq N$ egyben a $d(x_{m-1}, x_m) < \varepsilon/2$ egyenlőtlenség teljesülését is jelentse.

Minden olyan m, n esetén, melyre $d(x_{m-1}, x_{n-1}) \geqq \varepsilon/2$, következik, hogy

$$d(x_m, x_n) \leqq r(\varepsilon/2) d(x_{m-1}, x_m) + s(\varepsilon/2) d(x_{n-1}, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Minden olyan m, n esetén, melyre $d(x_{m-1}, x_{n-1}) < \varepsilon/2$, az α_i-k szimmetria-tulajdonságát és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)[d(x_{m-1}, x_m) + d(x_{n-1}, x_n)] +$$

$$+ (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) d(x_{m-1}, x_{n-1}) < (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5)\varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Legyen $z = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Már csak azt kell belátnunk, hogy z az f fixpontja. Elsőként megmutatjuk, hogy $x_{n+1} \to f(z)$.

Feltételezve, hogy $z \neq x_n$ bármely n esetén; $f \in (23)$ egyben azt is jelenti, hogy

$$d(x_{n+1}, f(z)) \leqq \frac{(\alpha_1 + \alpha_3) d(x_n, x_{n+1}) + (\alpha_2 + \alpha_4) d(z, x_{n+1}) + \alpha_5 d(x_n, z)}{1 - \alpha_2 - \alpha_3}.$$

Az α_i-k szimmetriája miatt tehát

$$d(f(z), x_{n+1}) \leqq \frac{(\alpha_1 + \alpha_3) d(z, x_{n+1}) + (\alpha_2 + \alpha_4) d(x_n, x_{n+1}) + \alpha_5 d(z, x_n)}{1 - \alpha_1 - \alpha_4}.$$

Mivel az $\alpha_2 + \alpha_3$ és az $\alpha_1 + \alpha_4$ összegek értékét a $d(x_n, z)$ helyen kell venni és mivel $\sum\limits_{i=1}^{5} \alpha_i(t) < 1$ minden $t > 0$ mellett, következik, hogy a két összeg közül legalább az egyik, mondjuk az $\alpha_2 + \alpha_3$ összeg, kisebb kell legyen, mint 1/2, hacsak n-ből végtelen számú n_i-t választunk ki. Tehát $\lim\limits_{i \to \infty} d(f(z), x_{n_i} + 1) = 0$. Mivel a $d(x_n, x_{n+1})$ függvény n-ben monoton csökkenő, arra a következtetésre jutunk, hogy $x_{n+1} \to f(z)$. Mivel $x_n \to z$, ezért $z = f(z)$. Az egyértelműség (z-ből csak egy van) a lemmából adódik.

A 4. tétel speciális eseteit lásd az [5], [10], [15], [18], [21], [24] és a [25], [31] művekben.

5. TÉTEL. Legyen $f \in (24)$, $x_0 \in X$. Ekkor f-nek egyetlen z fixpontja van és $f^n(x_0) \to z$.

Az 5. tétel, mely [8]-ban szerepel, a 8. tétel speciális esete $p = 1$ mellett. Az 5. tétel speciális eseteit lásd a [3], [5], [7], [15], [18], [24] és a [37] művekben.

A (26)—(50) definíciókról a következőket mondhatjuk.

6. TÉTEL. Legyen $f \in (47)$ és f folytonos. Ha z az $\{f^n(x_0)\}$ sorozat torlódási pontja valamely $x_0 \in X$ esetén, akkor z az f függvény egyetlen fixpontja és $f^n(x_0) \to z$.

A 6. tétel közvetlenül származtatható a 9. tételből a $q = p$ helyettesítéssel.

7. TÉTEL. Legyen $f \in (48)$, $x_0 \in X$. Ekkor z az f függvény egyetlen fixpontja és $f^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ és definiáljuk az $\{x_n\}$ sorozatot a következőképpen: $x_{n+1}=f(x_n)$, $n \geqq 0$. Legyen w olyan tetszőleges rögzített egész, mely eleget tesz a $0 \leqq w < p$ egyenlőtlenségnek, és tekintsük az $\{x_w, x_{w+p}, \ldots, x_{w+np}, \ldots\}$ részsorozatot. Alkalmazzuk a 4. tétel bizonyítási módszerét erre a részsorozatra. Ha f-et f^p-vel helyettesítjük, akkor az alábbi következtetésre jutunk: $f^{np}(x_w) \to z_w$ és z_w az f^p fixpontja. Jelölje y és z a z_w két különböző w-hez tartozó értékeit. Tegyük fel, hogy $y \neq z$. Ekkor a

$$d(y, z) = d(f^p(y), f^p(z)) \leqq \alpha_1 d(y, f^p(y)) + \alpha_2 d(z, f^p(z)) +$$
$$+ \alpha_3 d(y, f^p(z)) + \alpha_4 d(z, f^p(y)) + \alpha_5 d(y, z) = (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) d(y, z) < d(y, z)$$

ellentmondásra jutunk. Következésképp a $\{z_{w+np}\}_{n=0}^{\infty}$ részsorozatok mindegyike ugyanahhoz a határértékhez konvergál. Jelölje ezt a határértéket z. Tehát $\{x_n\}$ z-hez konvergál és z az f^p fixpontja. $f^p(f(z)) = f(f^p(z)) = f(z)$, tehát $f(z)$ is fixpontja f^p-nek. A fenti bizonyítás szerint f^p-nek van fixpontja. Tehát $f(z) = z$ és z f-nek is fixpontja. Az egyértelműség a lemmából következik.

8. TÉTEL. Legyen $f \in (49)$, $x_0 \in X$. Ekkor f-nek egyetlen z fixpontja van és $f^n(x_0) \to z$. A 8. tétel a 11. tétel speciális esete $p=q$ mellett.

9. TÉTEL. Legyen f folytonos és elégítse ki (72)-t. Ha z az $\{f^{(p+q)n}(x_0)\}$ sorozat torlódási pontja, valamely $x_0 \in X$ esetén, akkor z az f egyetlen fixpontja és $f^n(x_0) \to z$

Bizonyítás. A 15. tételből, f-et f^p-vel és g-t f^q-val helyettesítve, kapjuk, hogy z az f egyetlen fixpontja, és $f^{(p+q)n}(x_0) \to z$, bármely $m > p+q$, $m = r(p+q)+s$ esetén, ahol $r \geqq 1$, $0 \leqq s < p+q$.

Mivel f folytonos, ezért

$$d(f^m(x_0), z) = d(f^{r(p+q)+s}(x_0), z) \to d(f^s(z), z) = 0.$$

Az (51)—(75) definíciókban szereplő — különböző p és q értékhez tartozó — f^p és f^q jelenléte elrontja a pl. (18)-ban és (23)-ban előforduló összefüggések szimmetriáját. Következésképpen, a 10. tételnek erősebbek a feltételei és gyengébbek az eredményei, mint a 7. tételnek.

10. TÉTEL. Legyen $f \in (73)$ a következő megszorításokkal együtt: α_i-k tegyenek eleget az

$$\text{(I)} \qquad r(t)s(t) = \frac{\alpha_1(t)+\alpha_3(t)+\alpha_5(t)}{1-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)} \cdot \frac{\alpha_2(t)+\alpha_4(t)+\alpha_5(t)}{1-\alpha_1(t)-\alpha_4(t)} < 1$$

feltételnek minden $t > 0$ esetben. Ekkor vagy f^p-nek vagy f^q-nak létezik fixpontja. Ha még a

$$\text{(II)} \qquad \lim_{t \to 0+} \alpha_2(t)+\alpha_3(t) < 1 \quad \text{és} \quad \lim_{t \to 0+} \alpha_1(t)+\alpha_4(t) < 1$$

feltétel is teljesül, akkor f-nek van egyetlen z fixpontja és $f^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Definiáljuk a következő sorozatot: $\{x_0, x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots\}$, és tekintsük az $\{x_w, x_{w+q}, \ldots, x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+q+w}, \ldots\}$ részsorozatot, ahol w tetszőleges rögzített egész, mely eleget tesz a $0 \leqq w < p+q$ egyenlőtlenségnek.

Tegyük fel, hogy $x_n \neq x_m$ minden $n \neq m$ esetben. Mivel $f \in (73)$, ezért

$$d(x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+q+w}) =$$
$$= d\left(f^p(x_{(n-1)(p+q)+q+w}), f^q(x_{n(p+q)+w})\right) \leqq$$
$$\leqq \alpha_1 d(x_{(n-1)(p+q)+q+w}, x_{n(p+q)+w}) +$$
$$+ \alpha_2 d(x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+q+w}) +$$
$$+ \alpha_3 d(x_{(n-1)(p+q)+q+w}, x_{q+n(p+q)+w}) +$$
$$+ \alpha_5 d(x_{(n-1)(p+q)+q+w}, x_{n(p+q)+w}).$$

Tehát

$$d(x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+q+w}) \leqq r(b_n)\, d(x_{(n-1)(p+q)+q+w}, x_{n(p+q)+w}),$$

ahol $b_n = d(x_{(n-1)(p+q)+w}, x_{n(p+q)+w})$. Hasonlóan,

$$d(x_{(n-1)(p+q)+q+w}, x_{n(p+q)+w}) \leqq s(b_n)\, d(x_{(n-1)(p+q)+w}, x_{(n-1)(p+q)+q+w}).$$

E két egyenlőtlenséget egyesítve és az (I) feltételt figyelembe véve az adódik, hogy a $\{c_n\}$ sorozat, ahol $c_n = d(x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+q+w})$, n-ben monoton csökkenő. Jelölje u e sorozat korlátját és tegyük fel, hogy $u > 0$.

Legyen $v = r(u)s(u)$. Ekkor a $c_n \geqq u$ egyenlőtlenség teljesülése magába foglalja az $r(c_n)s(c_n) \leqq q$ egyenlőtlenség teljesülését is minden n esetén. Tehát $c_n \leqq v c_{n-1} \leqq \ldots$ $\ldots \leqq v^n c_0 \to 0$.

Kihasználva azt a tényt, hogy $f \in (73)$, a háromszögegyenlőtlenség segítségével írhatjuk, hogy

$$d(x_{n(p+q)+q+w}, x_{m(p+q)+w}) \leqq [\beta(d_{mn}) b_m + \gamma(d_{mn}) c_n] / \xi(d_{mn}),$$

ahol $d_{mn} = d(x_{(m-1)(p+q)+q+w}, x_{n(p+q)+w})$ és β, γ, ξ ugyanazt jelenti, mint a 4. tétel bizonyításában.

Rögzítsük $\varepsilon > 0$-t és tegyük fel, hogy $d_{mn} \neq 0$ minden m-re és n-re. Ekkor, mint a 4. tétel bizonyításában, most is található olyan N egész szám, melyre $n, m \geqq N$ teljesülése egyben azt is jelenti, hogy $c_n < \varepsilon$ és $d(x_{n(p+q)+q+w}, x_{m(p+q)+w}) < \varepsilon$ is teljesül. Tehát $d(x_{n(p+q)+w}, x_{m(p+q)+w}) < 2\varepsilon$.

$$d(x_{n(p+q)+q+w}, x_{m(p+q)+q+w}) \leqq d(x_{n(p+q)+q+w}, x_{m(p+q)+w}) + c_m < 2\varepsilon.$$

Ugyanúgy $d(x_{n(p+q)+w}, x_{m(p+q)+q+w}) < 2\varepsilon$. Tehát az $\{x_w, x_{q+w}, x_{p+q+w}, \ldots\}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, következésképp konvergens. Jelölje a határértéket z_w.

Hasonló módon belátható, hogy az $\{x_w, x_{p+w}, x_{p+q+w}, \ldots, x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+p+w}, \ldots\}$ sorozat is *Cauchy-sorozat*, következésképp konvergens. Jelölje a határértéket y_w. Vegyük észre, hogy e két sorozatnak az $\{x_w, x_{q+w}, x_{p+q+w}, \ldots\}$ sorozatnak és az $\{x_w, x_{p+w}, x_{p+q+w}, \ldots\}$ sorozatnak, az $\{x_{n(p+q)+w}\}$ sorozat közös részsorozata, vagyis $y_w = z_w$.

(73) és a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával, valamint a $z_w \neq x_{n(p+q)+w}$ kikötésével bármely n-re, írhatjuk, hogy

$$(251) \qquad d\big(f^p(z_w), f^q(x_{n(p+q)+w})\big) \leqq$$

$$\leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_3)d(z, x_{n(p+q)+q+w})+(\alpha_2+\alpha_4)c_n+\alpha_5 d(z_w, x_{n(p+q)+w})}{1-\alpha_1-\alpha_4}$$

és

$$(252) \qquad d\big(f^p(x_{n(p+q)+w}, f^q(z_w)\big) \leqq$$

$$\leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_3)d(x_{n(p+q)+w}, x_{n(p+q)+p+w})+(\alpha_2+\alpha_4)d(z_w, x_{n(p+q)+p+w})+\alpha_5 d(x_{n(p+q)+w}, z_w)}{1-\alpha_2-\alpha_3},$$

ahol az α_i-ket a $d(z_w, x_{n(p+q)+w})$ helyen kell kiszámítani. Ebből következik, mint azt a 4. tételben is láttuk, hogy az $\alpha_1+\alpha_4$ vagy az $\alpha_2+\alpha_3$ összegek közül legalább az egyik kisebb vagy egyenlő mint 1/2, hacsak n-ből végtelen számú n_i értéket választunk ki.

Tehát, (251) és (252) alapján vagy $x_{n(p+q)+q+w} \to f^p(z_w)$ vagy $x_{n(p+q)+p+w} \to f^q(z_w)$, ezért z_w vagy f^p-nek vagy f^q-nak fixpontja.

Ha a (II) feltételnek is eleget teszünk, akkor (251)-ből és (252)-ből adódik, hogy z_w úgy f^p-nek mint f^q-nak fixpontja.

Legyen y, z a z_w két értéke különböző w értékek esetén, és tegyük fel, hogy $y \neq z$.

Ekkor

$$d(y, z) = d\big(f^p(y), f^q(z)\big) \leqq \alpha_1 d\big(y, f^p(y)\big)+\alpha_2 d\big(z, f^q(z)\big)+$$

$$+\alpha_3 d\big(y, f^q(z)\big)+\alpha_4 d\big(z, f^p(y)\big)+\alpha_5 d(y, z) = (\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)d(y, z) < d(y, z)$$

ellentmondásra jutunk. Tehát $\{x_n\}$ minden részsorozatának ugyanaz a határértéke és $\{x_n\}$ is ehhez a határértékhez konvergál. Jelöljük ezt z-vel. Ezenkívül z az f^p egyetlen fixpontja. Ekkor $f^p(z)=z$, tehát $f^p\big(f(z)\big)=f(z)$, ami azt jelenti, hogy $f(z)=z$. Az egyértelműség a lemmából következik.

Legyen $O(x, n)=\{x, f(x), \ldots, f^n(x)\}$. Bármely A halmaz esetén legyen

$$\delta(A) = \sup\,\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

11. TÉTEL. Legyen $f \in (74)$, $x_0 \in X$. Ekkor f-nek egyetlen z fixpontja van és $f^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Definiáljuk a következő sorozatot: $\{x_0, x_1=f(x_0), \ldots, x_{n+1}=$ $=f(x_n), \ldots\}$. Legyen j, k pozitív egész, $j>k \geqq p+q$. Ekkor léteznek olyan m, n, r, s egészek, hogy a $0 \leqq r, s < p+q$ egyenlőtlenségeket kielégítsék úgy, hogy a $j=m(p+q)+$

$+r$ és $k=n(p+q)+s$ egyenletek fennálljanak. Mivel $f\in(74)$, ezért

$$(253)\qquad \begin{aligned} d(x_j, x_k) \leqq h \max \{ & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}),\\ & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{m(p+q)+r}),\\ & d(x_{(n-1)(p+q)+p+s}, x_{n(p+q)+s}),\\ & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{n(p+q)+s}),\\ & d(x_{(n-1)(p+q)+p+s}, x_{m(p+q)+r})\}, \end{aligned}$$

$$(254)\qquad \begin{aligned} & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}) \leqq \\ & \leqq h \max \{ d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(m-1)(p+q)+r}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{(m-1)(p+q)+q+r}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(m-1)(p+q)+q+r}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{(n-1)(p+q)+p+s})\}, \end{aligned}$$

$$(255)\qquad \begin{aligned} & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{m(p+q)+r} \leqq \\ & \leqq h \max \{ d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{(m-1)(p+q)+r}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{m(p+q)+r}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{(m-1)(p+q)+q+r}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{(p+q)m+r})\}, \end{aligned}$$

$$(256)\qquad \begin{aligned} & d(x_{(n-1)(p+q)+p+s}, x_{n(p+q)+s}) \leqq \\ & \leqq h \max \{ d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+p+s}, x_{n(p+q)+s}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{n(p+q)+s})\}, \end{aligned}$$

$$(257)\qquad \begin{aligned} & d(x_{(m-1)(p+q)+q+r}, x_{n(p+q)+s}) \leqq \\ & \leqq h \max \{ d(x_{(n-1)(p+q)+q+s}, x_{(m-1)(p+q)+r}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+q+s}, x_{n(p+q)+s}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{(m-1)(p+q)+q+r}),\\ & \qquad d(x_{(n-1)(p+q)+q+s}, x_{(m-1)(p+q)+q+r}),\\ & \qquad d(x_{(m-1)(p+q)+r}, x_{n(p+q)+s})\}, \end{aligned}$$

és

(258)
$$d\{x_{(n-1)(p+q)+p+s}, x_{m(p+q)+r}) \leqq$$
$$\leqq h \max \{d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(m-1)(p+q)+p+r}),$$
$$d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{(n-1)(p+q)+p+s}),$$
$$d(x_{(m-1)(p+q)+p+r}, x_{m(p+q)+r}),$$
$$d(x_{(n-1)(p+q)+s}, x_{m(p+q)+r}),$$
$$d(x_{(m-1)(p+q)+p+r}, x_{(n-1)(p+q)+p+s})\}.$$

A (254)—(258) egyenlőtlenségek jobb oldalát vizsgálva kitűnik, hogy az előforduló legkisebb ill. legnagyobb index az $(n-1)(p+q)+s$ ill. az $m(p+q)+r$. Ezért (253) úgy is írható, hogy

$$d(x_j, x_k) \leqq h^2\delta(O(x_{(n-1)(p+q)+s}, (m-n+1)(p+q)+r-s)).$$

Legyenek a és b olyan egészek, melyek kielégítik az $(n-1)(p+q)+s \leqq a < b \leqq$ $\leqq m(p+q)+r$ egyenlőtlenséget úgy, hogy

$$\delta(O(x_{(n-1)(p+q)+s}, (m-n+1)(p+q)+r-s)) = d(x_a, x_b) = d(x_{t(p+q)+u}, x_{v(p+q)+w})$$

fennálljon, ahol $a=t(p+q)+u$, $b=v(p+q)+w$.

A (253)—(258) egyenlőtlenségeknél alkalmazott bizonyítási módszert megismételve nyerjük, hogy

$$d(x_{t(p+q)+u}, x_{v(p+q)+w}) \leqq h^2\delta(O(x_{(t-1)(p+q)+u}, (v-t+1)(p+q)+w-u)).$$

Viszont $(t-1)(p+q)+u \geqq (n-2)(p+q)+s$ és $(v-t+1)(p+q)+w-u \leqq$ $\leqq (m-n+2)(p+q)+r-s$, ezért

$$\delta(O(x_{(t-1)(p+q)+u}, (v-t+1)+(p+q)+w-u)) \leqq$$
$$\leqq \delta(O(x_{(n-2)(p+q)+s}, (m-n+2)(p+q)+r-s)).$$

Következésképpen

$$d(x_j, x_k) \leqq h^{2n}\delta(O(x_s, m(p+q)+r-s)) \leqq h^{2n}\delta(O(x_0, (m+1)(p+q)).$$

Tekintsük a $\delta(O(x_0, n))$ függvényt valamely egész n mellett. Léteznek olyan c és d egészek, melyekre $\delta(O(x_0, n))=d(x_c, x_d)$, ahol $0 \leqq c < d \leqq n$. A $c \geqq \max(p, q)$ esetben a (253)-hoz hasonlóan belátható, hogy $d(x_c, x_d) \leqq h\delta(O(x_e, m))$, ahol e eleget tesz a $0 \leqq e < \max(p, q)$ egyenlőtlenségnek és $m-e \leqq d-c$. Következésképp $\delta(O(x_0, n))=d(x_c, x_d)$, ahol most c a $0 \leqq c < \max(p, q)$ egyenlőtlenséget elégíti ki.

Tételezzük fel, hogy $d > \max(p, q)$. Ha $q \leqq p$, akkor

$$d(x_c, x_d) \leqq d(x_c, x_p)+d(x_p, x_d).$$
$$d(x_p, x_d) = d(f^p(x_0), f^q(x_{d-q})) \leqq$$
$$\leqq h \max \{d(x_0, x_{d-q}), d(x_0, x_p), d(x_{d-q}, x_d), d(x_0, x_d),$$
$$d(x_{d-q}, x_p)\} \leqq h\delta(O(x_0, d)) \leqq h\delta(O(x_0, n)) = hd(x_c, x_d).$$

Ezért $d(x_c, x_d) \leqq d(x_c, x_p)/(1-h)$ és $\delta(O(x_0, n)) \leqq d(x_c, x_p)/(1-h)$ bármely egész n-re.

Ha $q>p$, akkor a $\delta(O(x_0, n)) \leqq d(x_c, x_q)/(1-h)$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mindkét esetben $\delta(O(x_0, n)) \leqq d(x_c, x_r)/(1-h)$, ahol $r = \max(p, q)$.

Ezért az $\{n_n\}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, tehát konvergens. Jelölje a határértéket z. Először megmutatjuk, hogy z fixpontja f^p-nek.

$$d(f^p(z), z) \leqq d(f^p(z), f^q(x_{n(p+q)})) + d(x_{n(p+q)+q}, z),$$

$$d(f^p(z), f^q(x_{n(p+q)})) \leqq h \max\{d(z, x_{n(p+q)}),\ d(z, f^p(z)),$$
$$d(x_{n(p+q)}, x_{n(p+q)+q}),$$
$$d(z, x_{n(p+q)+q}),\ d(x_{n(p+q)}, f^p(z))\}.$$

Vegyük mindkét egyenlőtlenség határértékét midőn $n \to \infty$. Ekkor a $d(f^p(z), z) \leqq \leqq hd(z, f^p(z))$ ellentmondásra jutunk, kivéve, ha $f^p(z) = z$. Ehhez hasonló úton mutatható ki, hogy z f^q-nak is fixpontja.

Legyen z és w f^p két fixpontja. Ekkor $d(z, w) = d(f^p(z), f^q(w)) \leqq hd(z, w)$, tehát a $z = w$ pont az f^p egyetlen fixpontja. Viszont $f^p(f(z)) = f(f^p(z))$, tehát $f(z) = z$. Az egyértelműség a lemmából következik.

A (76)—(100) definíciókról a következőket mondhatjuk el: (76) a [14] műben szerepel, (78) pedig az [1]-ben szereplő (103) speciális esete.

12. TÉTEL. Legyen $f \in (91)$ vagy (94) továbbá $B \subset X$ az $f(B) \subset B$ teljesülésével együtt. Ha létezik olyan $z \in B$ szám, továbbá olyan $n = n(z)$ pozitív egész, melyek teljesülése esetén $f^n(z) = z$ fennáll, akkor z az f egyetlen, B-beli fixpontja és $f^n(x_0) \to z$ minden $x_0 \in B$ esetén.

Bizonyítás. Az egyértelműség a lemmából következik.

Legyen $r(x_0) = \max\{d(z, f^p(x_0)) | 1 \leqq p < n\}$. Minden $m > n$ esetén $m = qn + s$, ahol $q \geqq 1$, $0 \leqq s < n$. Legyen $x_0 \in B$ és tegyük fel, hogy $f^m(x_0) \neq z$ minden m-re. Legyen $f \in (91)$. Ekkor

$$d(f^m(x_0), z) \leqq h \max\{d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z),\ d(f^{(q-1)n+s}(x_0), f^n(z)),\ d(z, f^m(x_0))\}.$$

Mivel $f^m(x_0) \neq z$ bármely m esetén, ezért

$$d(f^m(x_0), z) \leqq hd(f^{(q-1)n+s}(x_0), z) \leqq h^q r(x_0) \to 0 \quad \text{midőn} \quad q \to \infty.$$

Ha $f \in (94)$, akkor

$$d(f^m(x_0), z) = d(f^{qn+s}(x_0), f^n(z)) \leqq$$
$$\leqq h \max\{d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z),$$
$$[d(f^{(q-1)n+s}(x_0), f^m(x_0)) + 0]/2,$$
$$[d(f^{(q-1)n+s}(x_0), f^n(z)) + d(z, f^m(x_0))]/2\} = hM(x_0, m, z).$$

Vegyük észre, hogy

$$d(f^{(q-1)n+s}(x_0), f^m(x_0))/2 \leqq [d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z) + d(z, f^m(x_0))]/2.$$

Ha

$$M(x_0, m, z) = [d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z) + d(z, f^m(x_0))]/2,$$

akkor

$$d(f^m(x_0), z) < d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z) \leqq M(x_0, m, z),$$

ami a $d(f^m(x_0), z) < d(f^m(x_0), z)$ ellentmondásra vezet. Ezért $M(x_0, m, z) = = d(f^{(q-1)n+s}(x_0), z)$, tehát $d(f^m(x_0), z) \leqq h^q r(x_0) \to 0$ midőn $q \to \infty$.

Ez a lemma — $f \in (76)$-ra vonatkozó speciális esete — a [14] műben található. A (101)—(125) definíciókra vonatkozó eredmények legjobbika a (103)-ra vonatkozik és [1]-ben található.

4. Lokálisan kontrakciós leképezések

Egy leképezést lokálisan kontrakciósnak nevezünk, ha a definíciókban szereplő feltételek mellett még azt is megköveteljük, hogy x és y elég közel legyenek egymáshoz. Például a (3) definíciót (lásd [9]) így értelmezzük: legyen $\varepsilon > 0$ olyan, melyre a $0 < < d(x, y) < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesülése a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ egyenlőtlenség teljesülését is magában foglalja.

13. TÉTEL. A (3) és a neki megfelelő (28), (53), (78) és (103) definíciókon kívüli definíciókra — valószínűleg a (11), (36), (61), (86) és a (111) definíciók kivételével — a „lokálisan kontrakciós" fogalma nem terjeszthető ki.

Bizonyítás. REICH ([8] 25. oldal) kimutatja, hogy a (4) definíció nem terjeszthető ki lokálisan kontrakciós leképezésekre.

Legyen $f: R \to R$, $f(x) = x + \varepsilon$. Ekkor $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \varepsilon = d(x, f(x)) = = d(y, f(y))$ és $f \in (6)$, de nincs fixpontja.

Most legyen $f(x) = x + \lambda$, $x \in R$, $\lambda = 2\varepsilon(1-h)/h$, valamely h esetén, amely eleget tesz a $2/3 < h < 1$ egyenlőtlenségnek. Ekkor $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Igazolni fogjuk, hogy

$$d(x, y) < h \max\{d(x, f(y)),\ d(y, f(x))\} = h(d(x, y) + \lambda);$$

azaz, $(1-h)d(x, y) < h\lambda$. Mivel $d(x, y) < \varepsilon$, ezért elég, ha az $(1-h)\varepsilon < \lambda h$ egyenlőtlenség igaz voltát belátjuk. Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, ha λ-t a fenti módon választjuk. Tehát $f \in (12)$. f ezenkívül kielégíti még a (13), (14) és a (18) definíciókat, de nincs fixpontja. Az 1. tételből kitűnik, hogy az előbb elmondottakból a többi definícióra vonatkozó állítások közvetlenül adódnak.

5. Leképezés párok

A szakirodalomban szereplő definíciók egy része a kontrakciós típusú feltételeket függvénypárra definiálja: $f, g: X \to X$. Ezt az elvet alkalmazva a (126)—(250) definíciókhoz jutunk. Például (129) (lásd [17]) a következő alakú.

(129) Legyen a olyan szám, $0 < a < 1/2$, melyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), g(y)) \leqq a[d(x, f(x)) + d(y, g(y))].$$

(126) a [23], (136) az [5], (140) a [26], (143′) a [29], (148) a [34], (182] a [35], míg (182) $c = 0$ mellett a [12] műben fordul elő.

A következőkben a (126)—(150), etc. definíciócsoportokhoz tartozó legáltalánosabb fixpont-tételeket soroljuk fel.

14. TÉTEL. Legyen $f, g \in (146)$, $x_0 \in X$. Ekkor f-nek és g-nek egyetlen közös z fixpontja létezik és $(fg)^n(x_0) \to z$ és $(gf)^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$. Definiáljuk az $\{x_n\}$ sorozatot az $x_{2n+1}=f(x_{2n})$, $x_{2n+2}=g(x_{2n+1})$ formulákkal. Tegyük fel, hogy $x_n \neq x_{n+1}$ minden n-re.

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d\big(f(x_{2n}), g(x_{2n+1})\big) \leqq \\ &\leqq h \max\Big\{d(x_{2n}, x_{2n+1}),\ d(x_{2n}, x_{2n+1}), \\ &\qquad d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{1}{2}[d(x_{2n}, x_{2n+2})+0]\Big\} = \\ &= hM(x_{2n}, x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Ha az $M(x_{2n}, x_{2n+1})=d(x_{2n}, x_{2n+2})/2$ fennáll, akkor a $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqq hd(x_{2n+1}, x_{2n+2})$ ellentmondáshoz jutunk. Ezért $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqq hd(x_{2n}, x_{2n+1})$. Ugyanígy $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqq hd(x_{2n-1}, x_{2n})$ és ezért $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqq h^2 d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqq \dots \dots \leqq h^{2n} d(x_1, x_2)$ és $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqq h^{2n} d(x_0, x_1)$.

Legyen $r(x_0)=\max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}$. Bármely $m>n$ esetén

$$d(x_m, x_n) = \sum_{k=0}^{m-n-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leqq \sum_{k=0}^{m-n-1} h^{2(n+k)} r(x_0) \leqq h^{2n} r(x_0)(1-h^2)^{-1}.$$

Az $\{x_n\}$ sorozat *Cauchy-sorozat,* következésképp konvergens. Jelölje a határértéket z, ekkor

$$\begin{aligned} d\big(f(z), z\big) &\leqq d\big(f(z), x_{2n+2}\big)+d(x_{2n+2}, z), \\ d\big(f(z), x_{2n+2}\big) &\leqq h \max\Big\{d(z, x_{2n+1}),\ d(z, f(z)),\ d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \\ &\qquad \frac{1}{2}\big[d(z, x_{2n+2})+d(x_{2n+1}, f(z))\big]\Big\}. \end{aligned}$$

Az $n \to \infty$ határértéket képezve azt kapjuk, hogy $d\big(f(z), z\big) \leqq hd\big(f(z), z\big)$, ami egyben azt is jelenti, hogy az $f(z)=z$ egyenlőség is igaz. Ugyanígy adódik, hogy $g(z)=z$. Tételezzük fel, hogy z és w az f és g két fixpontja. Ekkor

$$d(z, w) = d\big(f(z), g(w)\big) \leqq h \max\Big\{d(z, w), 0, 0, \frac{1}{2}[d(z, w)+d(w, z)]\Big\},$$

és $d(z, w) \leqq hd(z, w)$ adódik, amiből a $z=w$ egyenlőségre jutunk.

Definiáljuk az $\{y_n\}$ sorozatot a következőképpen: $y_0=x_0$, $y_{2n+1}=g(x_{2n})$, $y_{2n+2}=f(x_{2n+1})$. Ekkor kimutatható, hogy $\{y_n\}$ *Cauchy-sorozat,* tehát konvergens. $y_n \to z$ a fixpont egyértelműsége miatt.

15. TÉTEL. Legyen az f és g függvény folytonos és tegyenek eleget a (147) definíciónak. Ha akár az $\{(fg)^n(x_0)\}$ akár a $\{(gf)^n(x_0)\}$ sorozatnak létezik z fixpontja, akkor z az f és g egyetlen fixpontja, és $(fg)^n(x_0) \to z$ vagy $(gf)^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Minden $x \neq f(x)$ esetén

$$\begin{aligned} d\big(f(x), g(f(x))\big) < \max\Big\{& d\big(x, f(x)\big),\ d\big(x, f(x)\big),\ d\big(f(x), g(f(x))\big), \\ & \big[d\big(x, g(f(x))\big)+d\big(f(x), f(x)\big)\big]/2\Big\}. \end{aligned}$$

Ha a jobboldal maximuma $d(x, g(f(x)))/2$, akkor a $d(f(x), g(f(x)))<d(f(x), g(f(x)))$ ellentmondásra jutunk. Ezért $d(f(x), g(f(x)))<d(x,f(x))$. Ugyanígy $x\neq \neq g(x)$ egyben azt is jelenti, hogy a $d(f(g(x)), g(x))<d(x, g(x))$ egyenlőtlenség is igaz. Tehát

$$d(f(g(f(x))), g(f(x))) < d(f(x), g(f(x))) < d(x,f(x)). \tag{259}$$

Legyen z a $\{(gf)^n(x_0)\}$ sorozat torlódási pontja. Tételezzük fel, hogy $(gf)^n(x_0)\neq \neq(gf)^{n+1}(x_0)$ minden $n\geqq 0$ esetben és $z\neq f(z)$, $z\neq g(z)$, $z\neq g(f(z))$. Ha $V(x)= =d(x,f(x))$, akkor (259)-ből adódóan $V(g(f(x)))\leqq V(x)$, mely reláció az $x\neq z$ esetben szigorú egyenlőtlenséggé válik. A [31] mű 1. lemmája szerint $g(f(z))=z$. Tegyük fel, hogy $f(z)\neq z$. Ekkor a $d(f(z), z)=d(f(z), g(f(z))<d(z,f(z))$ ellentmondás adódik. Ugyanígy $g(z)=z$. z egyértelműségének belátása egyszerű.

Tegyük fel, hogy $(gf)^n(x_0)\neq z$ bármely n esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} d((gf)^n(x_0), z) &= d(g(f(gf)^{n-1}(x_0)),f(z)) < \\ &< \max\{d(z,f((gf)^{n-1}(x_0))),\ d(z,f(z)),\\ &\qquad d(f((gf)^{n-1}(x_0)), (gf)^n(x_0)),\\ &\qquad [d(z, (gf)^n(x_0))+d(f((gf)^{n-1}(x_0))), z]/2\},\end{aligned}$$

vagy

$$d((gf)^n(x_0), z) < \max\{d(z,f((gf)^{n-1}(x_0))),\ d(f((gf)^{n-1}(x_0), (gf)^n(x_0))\},$$

$$\begin{aligned} d(z,f((gf)^{n-1}(x_0))) < \max\{&d((gf)^{n-1}(x_0), z),\\ &d((gf)^{n-1}(x_0),f((gf)^{n-1}(x_0))), 0,\\ &[d((gf)^{n-1}(x_0), z)+d(z,f((gf)^{n-1}(x_0)))]/2\},\end{aligned}$$

ami a következőhöz vezet:

$$d(z,f((gf)^{n-1}(x_0))) < \max\{d(z, (gf)^{n-1}(x_0)),\ d((gf)^{n-1}(x_0),f((gf)^{n-1}(x_0)))\}.$$

Mivel

$$d(f((gf)^{n-1}(x_0)), (gf)^n(x_0)) < d((gf)^{n-1}(x_0),f((gf)^{n-1}(x_0))),$$

azt kapjuk, hogy

$$d(z, (gf)^n(x_0)) < \max\{d(z, (gf)^{n-1}(x_0)),\ d((gf)^{n-1}(x_0),f((gf)^{n-1}(x_0)))\}.$$

Mivel $(gf)^{n_i}(x_0)\to z$, továbbá f és g folytonossága miatt

$$d((gf)^{n_i}(x_0),f((gf)^{n_i}(x_0))) \to d(z,f(z)) = 0.$$

Rögzítsük $\varepsilon>0$-t és n_j-t válasszuk meg úgy, hogy $d(z, (gf)^{n_j}(x_0))<\varepsilon$ és $d((gf)^{n_j}(x_0),f((gf)^{n_j}(x_0)))<\varepsilon$ teljesüljön. Ekkor $n>n_j$ esetén

$$\begin{aligned} d(z, (gf)^n(x_0)) &< \max\{d(z, (gf)^{n-2}(x_0)),\ d((gf)^{n-2}(x_0), f((gf)^{n-2}(x_0))),\\ &\qquad d((gf)^{n-1}(x_0),f((gf)^{n-1}(x_0)))\} =\\ &= \max\{d(z, (gf)^{n-2}(x_0)),\ d((gf)^{n-2}(x_0),f((gf)^{n-2}\{x_0)))\} <\ldots<\\ &< \max\{d(z, (gf)^{n_j}(x_0)),\ d((gf)^{n_j}(x_0),f((gf)^{n_j}(x_0)))\} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Hasonló a bizonyítás, ha az $\{(fg)^n(x_0)\}$ sorozat rendelkezik torlódási ponttal.

16. TÉTEL. Legyen $f \in (148)$ és az α_i függvények elégítsék ki a 10. tétel (I) feltételét. Legyen $x_0 \in X$. Ekkor az $(fg)^n(x_0)$ és a $(gf)^n(x_0)$ konvergens. Ha a 10. tétel (II) feltétele is teljesül, akkor f és g egyetlen közös z fixponttal rendelkezik és $(fg)^n(x_0) \to z$, $(gf)^n(x_0) \to z$.

Bizonyítás. Definiáljuk az $\{x_n\}$ sorozatot a következőképpen: $x_0 \in X$, $x_{2n+1} = f(x_{2n})$, $x_{2n+2} = g(x_{2n+1})$, $n \geqq 0$. Legyen $b_n = d(x_n, x_{n+1})$ minden n-re, és tegyük fel, hogy $b_n > 0$ minden n-re.

Mint a 10. tétel bizonyításában, most is az adódik, hogy $b_{2n+1} \leqq r(b_{2n}) b_{2n}$ és $b_{2n+2} \leqq s(b_{2n+1}) b_{2n+1}$. Tehát a $\{b_{2n+1}\}$ és a $\{b_{2n}\}$ monoton csökken, következésképpen konvergens. Jelölje a megfelelő határértékeket c_1 ill. c_2. Tegyük fel, hogy $c_1 > 0$ és legyen $q = r(c_1)s(c_1)$. Ekkor a $b_{2n+1} \geqq c_1$ egyenlőtlenség teljesülése magába foglalja az $r(b_{2n+1}) \leqq q$ teljesülését is minden n-re, továbbá $b_{2n+1} \leqq q b_{2n-1} \leqq \ldots \leqq q^n b_1 \to 0$. Ugyanígy adódik $c_2 = 0$ is.

A 4. tétel bizonyításához hasonló módon itt is kimutatható, hogy az $\{x_n\}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, tehát konvergens. Jelölje a határértéket z. Ugyanígy konvergens az $\{y_n\}$ sorozat is, ahol $y_0 = x_0$, $y_{2n+1} = g(y_{2n})$, $y_{2n+2} = f(y_{2n+1})$, $n \geqq 0$.

Ha a (II) feltételnek is eleget teszünk — amint azt (251)-ben tettük —, feltételezve, hogy $x_n \neq z$ bármely n esetén, akkor

$$d(f(z), x_{2n+2}) \leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_3)d(z, x_{2n+2}) + (\alpha_2+\alpha_4)d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + \alpha_5 d(z, x_{2n+1})}{1-\alpha_1-\alpha_4}.$$

Az $n \to \infty$ határértéket képezve adódik, hogy $z = f(z)$. Ugyanígy $d(x_{2n+1}, g(z)) \to 0$ midőn $n \to \infty$, tehát $z = g(z)$.

Tegyük fel, hogy $z = f(z)$, $w = g(w)$, $z \neq w$. Ekkor, (148) felhasználásával, a $d(z, w) \leqq (\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) d(z, w) < d(z, w)$ ellentmondásra jutunk.

Következésképpen f és g ugyanazzal a fixponttal rendelkezik. Tételezzük fel, hogy z és w az f két különböző fixpontja. Ekkor a $d(z, w) = d(f(z), g(w)) \leqq (\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) d(z, w) < d(z, w)$ ellentmondásra jutunk.

Hasonló bizonyítás alkalmazható $\{y_n\}$-re is.

A 16. tétel a [34] műben szereplő 2. tétel javított formája.

17. TÉTEL. Legyen $f, g \in (171)$. Ekkor f és g rendelkezik közös z fixponttal, továbbá $(f^p g^q)^n(x_0) \to z$, $(g^q f^p)^n(x_0) \to z$ minden $x_0 \in X$ esetén.

18. TÉTEL. Legyen $f, g \in (172)$, valamint f és g folytonos függvény. Ha z az $\{(f^p g^q)^n(x_0)\}$ vagy a $\{(g^q f^p)^n(x_0)\}$ sorozat torlódási pontja, valamely $x_0 \in X$-re, akkor z az f és g egyetlen fixpontja, továbbá $(f^p g^q)^n(x_0) \to z$ vagy $(g^q f^p)^n(x_0) \to z$.

19. TÉTEL. Legyen $f, g \in (173)$, valamint az α_i-k elégítsék ki a 10. tétel feltételét. Ekkor $(f^p g^q)^n(x_0)$ és $(g^q f^p)^n(x_0)$ konvergens. Ha a 10. tétel (II) feltétele is teljesül, akkor az f-nek és a g-nek közös z fixpontja, továbbá $(f^p g^q)^n(x_0) \to z$, $(g^q f^p)^n(x_0) \to z$.

Az utóbbi három tétel bizonyítása a 14—16. tételek bizonyításával analóg módon történik, amennyiben f-et f^p-vel és g-t g^q-val helyettesítjük.

6. Leképezés sorozatok

A leképezés sorozatokra vonatkozó tételeknek három fő típusuk van. Az első azt feltételezi, hogy minden f_i, f_j pár ugyanazon kontrakciós feltételnek tesz eleget, eredményül pedig az adódik, hogy az $\{f_n\}$ rendelkezik közös fixponttal. A második azt feltételezi, hogy minden f_n ugyanazon kontrakciós feltételnek tesz eleget, továbbá az $\{f_n\}$ pontonként tart az f határfüggvényhez. Eredményül az adódik, hogy f-nek létezik z fixpontja, mely az összes f_n függvény z_n fixpontjainak határértéke. A harmadik pedig azt feltételezi, hogy minden f_n-nek van z_n fixpontja, továbbá $\{f_n\}$ egyenletesen konvergál egy olyan f függvényhez, mely partikulárisan kontrakciós feltételt elégít ki. Eredményül az adódik, hogy $z_n \to z$, amennyiben z-vel jelöljük az f fixpontját.

20. TÉTEL. Legyen $0 \leqq h < 1$. Legyen $\{f_n\}$ olyan függvénysorozat, mely eleget tesz a

$$d(f_i^p(x), f_j^p(y)) \leqq h \max\{d(x,y),\ d(x, f_i^p(x)),\ d(y, f_j^p(y)),$$
$$[d(x, f_j^p(y)) + d(y, f_i^p(x))]/2\}$$

feltételnek minden $x, y \in X$ esetén és valamely egész p mellett. Ekkor az $\{f_n\}$ egyetlen közös z fixponttal rendelkezik.

Bizonyítás. Legyen $S = f_i^p$, $T = f_j^p$. Ekkor S és T eleget tesz a 14. tételnek, tehát S és T egyetlen közös z fixponttal rendelkezik. Mivel minden f_i^p, f_j^p függvénypárnak van egyetlen közös z fixpontja, ezért az $\{f_n^p\}$ sorozat is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Az a tény viszont, hogy z fixpontja f_n^p-nek, egyben azt is jelenti, hogy z fixpontja f_n-nek, tehát z az egyetlen közös fixpont.

A [6] mű 1. tétele a 20. tétel speciális esete. A 20. tételből kitűnik, hogy f_i és f_j folytonossága és páronkénti felcserélhetőségének feltevése a [6] mű 1. tételéből mellőzhető.

A [22] mű 1. tétele és a [16] mű 1. tétele szintén a 20. tétel speciális esete.

21. TÉTEL. Legyenek az $\alpha_i(t)$ függvények csökkenőek, $\alpha_i: (0, \infty) \to [0, 1)$ és tegyenek eleget a $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i(t) < 1$ egyenlőtlenségnek minden $t > 0$ esetben, továbbá teljesítsék a 10. tétel (I) és (II) feltételét. Legyen az $\{f_n\}$ függvénysorozat olyan, hogy elégítse ki a

$$d(f_i^p(x), f_j^p(y)) \leqq \alpha_1 d(x, f_i^p(x)) + \alpha_2 d(y, f_j^p(y)) +$$
$$+ \alpha_3 d(x, f_j^p(y)) + \alpha_4 d(y, f_i^p(x)) + \alpha_5 d(x, y)$$

egyenlőtlenséget $x, y \in X$, $x \neq y$ párra, ahol $\alpha_i = \alpha_i(d(x,y))$. Ekkor az $\{f_n\}$-nek egy közös fixpontja van.

Legyen $S = f_i^p$, $T = f_j^p$. Ekkor S és T eleget tesz a 16. tétel feltételeinek. A bizonyítás további része a 20. tétel bizonyításával megegyező módon történik.

A [25] mű 4. tétele a 21. tétel speciális esete.

22. TÉTEL. Legyen az $\{f_n\}$ a (23)-at minden n-re és a nevezett $\alpha_i(t)$-kre kielégítő függvénysorozat olyan, hogy $\{f_n\}$ pontonként tartson egy f függvényhez. Ekkor létezik f-nek egyetlen z fixpontja és $z_n \to z$, ahol z_n az f_n fixpontja.

Bizonyítás. Mivel $f \in (23)$ minden $x, y \in X$, $x \neq y$ értékpárra, ezért

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leqq \alpha_1 d(x, f_n(x)) + \alpha_2 d(y, f_n(y)) + \alpha_3 d(x, f_n(y)) +$$
$$+ \alpha_4 d(y, f_n(x)) + \alpha_5 d(x, y),$$

ahol $\alpha_i = \alpha_i(d(x, y))$. Az $n \to \infty$ határértéket képezve kapjuk, hogy $f \in (23)$. A 4. tétel szerint f-nek egy z fixpontja van. Azt kell még megmutatnunk, hogy $z_n \to z$.

$z_n \neq z$ egyben azt is jelenti, hogy $d(z_n, z) = d(f_n(z_n), f(z)) \leqq (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) d(z_n, z) < d(z_n, z)$ fennáll, ez az egyenlőtlenség azonban ellentmondásos.

A [15] mű 3. tétele és a [24] mű 6. tétele a 22. tétel speciális esete.

23. TÉTEL. Legyen az $\{f_n\}$ a (24)-et minden n-re és a nevezett h-ra kielégítő függvénysorozat olyan, hogy $\{f_n\}$ pontonként tartson egy f függvényhez. Ekkor f-nek létezik egy z fixpontja, és $z_n \to z$, ahol z_n az f_n fixpontja.

Bizonyítás. Minden $x, y \in X$ és minden n esetén

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leqq h \max\{d(x, y),\ d(x, f_n(x)),\ d(y, f_n(y)),\ d(x, f_n(y)),\ d(y, f_n(x))\}.$$

Az $n \to \infty$ határértéket képezve és d folytonosságát figyelembe véve következik, hogy $f \in (24)$, tehát van egy fixpontja. Jelöljük ezt z-vel.

$$d(z_n, z) = d(f_n(z_n), f(z)) \leqq d(f_n(z_n), f_n(z)) + d(f_n(z), f(z)).$$

Viszont $d(f_n(z_n), f_n(z)) \leqq h \max\{d(z_n, z), d(z, f_n(z))\}$. Ezért

$$d(z_n, z) \leqq \max\{(1-h)^{-1}, 1+h\} d(z, f_n(z)) \to 0 \quad \text{midőn} \quad n \to \infty.$$

24. TÉTEL. ([15] mű 4. tétel). Legyen az $\{f_n\}$ az X-et a z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ fixpontokkal önmagára leképező függvénysorozat olyan, hogy $f_n \to f$ egyenletesen, ahol $f: X \to X$ és eleget tesz (23)-nak, fixpontja pedig z. Ekkor $z_n \to z$.

A [24] mű 4. tétele a 24. tétel speciális esete.

25. TÉTEL. Legyen az $\{f_n\}$ az X-et a z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ fixpontokkal önmagára leképező függvénysorozat olyan, hogy $f_n \to f$ egyenletesen, ahol $f: X \to X$ és kielégíti (24)-et, fixpontja pedig z. Ekkor $z_n \to z$.

Bizonyítás. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ értéket. $\{f_n\}$ egyenletes konvergenciájából következik olyan N egész létezése, hogy minden $n \geqq N$ esetén $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon / M$ minden $x \in X$-re, ahol $M = \max\{1+h, (1-h)^{-1}\}$.

$$d(z_n, z) = d(f_n(z_n), f(z)) \leqq d(f_n(z_n), f(z_n)) + d(f(z_n), f(z)).$$

Mivel $f \in (24)$, ezért

$$d(f(z_n), f(z)) \leqq h \max\{d(z_n, f(z_n)),\ d(z_n, z)\}.$$

Minden olyan n esetén, melynél ez a maximum $d(z_n, f(z_n))$-nel egyezik meg, következik, hogy $d(z_n, z) \leqq (1+h) d(z_n, f(z_n))$. Minden olyan n-re, melyre a maximum $d(z_n, z)$-vel egyezik meg, következik, hogy $d(z_n, z) \leqq d(z_n, f(z_n))/(1-h)$. Más esetben az $n \geqq N$ egyenlőtlenség teljesülése magába foglalja a $d(z_n, z) < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesülését is.

Az [5] mű 7. tétele, a [16] mű 2. tétele, a [20] mű 2. tétele és a [32] mű 3. tétele a 24. és a 25. tétel speciális esetei.

7. További általánosítások

Egyes esetekben a kontrakciós definíciók kiterjeszthetők úgy, hogy az egyenlőséget is megengedjük. Például KANNAN [17] a (4)-et az $a=1/2$ megengedésével terjesztette ki. f folytonosságának és X kompaktságának feltételezése mellett kimutatta, hogy f-nek létezik fixpontja. REICH [27] és SOARDI [28] pedig azt bizonyította be, hogy a folytonosság megkövetelése nem szükséges. Az ilyen típusú tételek legáltalánosabbika a következő tétel, mely speciális esetként a nem-expanziós leképezéseket is tartalmazza.

27. TÉTEL. Legyen X egyenletesen konvex *Banach-tér*, K olyan nem üres, zárt, konvex részhalmaza X-nek, hogy $f: K\to K, f\in(21)$ $\lambda=1$ mellett. Ha létezik egy $x\in X$ pont korlátos görbével (*with bounded orbit*), továbbá ha $\sup\limits_{x,y\in K} s(x,y)<1$, akkor f-nek van fixpontja.

Bizonyítás. Legyen $O(x)=\{x, f(x), ..., f^n(x), ...\}$. Elsőként megmutatjuk, hogy

$$\delta(O(x)) = \sup_n d(x, f^n(x)) = g(x).$$

Minden $n>0$ esetén

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leqq qd(f^{n-1}(x), f^n(x)) + rd(f^{n-1}(x), f^n(x)) +$$
$$+ sd(f^n(x), f^{n+1}(x)) + t[d(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)) + 0],$$

tehát

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leqq (q+r+t)(1-s-t)^{-1} d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leqq d(f^{n-1}(x), f^n(x)),$$

ahonnan $\sup\limits_{x,y\in K}(s+t)<1$.

Ha $\sup\{s(x,y)+t(x,y)|x,y\in X\}=1$, akkor található olyan $x_n, y_n\in X$ minden $n\in N$ esetén, melyre $s(x_n, y_n)+t(x_n, y_n)\to 1$ midőn $n\to\infty$. Tehát $r(x_n, y_n)+q(x_n, y_n)+ + t(x_n, y_n)\to 0$ vagyis $t(x_n, y_n)\to 0$. Ekkor viszont az $s(x_n, y_n)-1\to 0$ ellentmondásra jutunk.

Indukciós úton kimutatható, hogy $d(f(x), f^{n+1}(x))\leqq g(x)$ és ekkor

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leqq g(x)$$

minden $n>0$, $m>n$ esetben.

Legyen $C_0(x)=O(x)$, $C_n(x)=\overline{co}\, f(C_{n-1}(x))$, $n>0$.

Azt akarjuk belátni, hogy minden $n\geqq 0$ esetben $\delta(C_n(x)\cup C_{n+1}(x))\leqq g(x)$. A bizonyítás indukciós úton történhet. Az $n=0$ esethez tartozó bizonyítás eltér kissé az általános n-re vonatkozó bizonyítástól, ezért elhagyjuk. Tételezzük fel az indukciós hipotézist.

Legyen $z\in C_n(x)$, $y\in C_n(x)\cup C_{n+1}(x)$. Rögzítsük $\varepsilon>0$-t. Ha $y\in C_n(x)$, akkor léteznek olyan $y_1, y_2, \dots, y_N\in C_{n-1}(x)$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sorozatok $\left(\lambda_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^N \lambda_i=1\right)$, melyekre $d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i f(y_i), y\right)<\varepsilon$.

$$d(y,f(z)) \leqq \varepsilon+d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i f(y_i), f(z)\right) \leqq \varepsilon+d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i f(y_i),\ \sum_{i=1}^N \lambda_i f(z)\right) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon+\max_{1\leqq i\leqq N} d(f(y_i),f(z)) \leqq \varepsilon+d(f(y_j),f(z)) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon+qd(y_j, z)+rd(y_j,f(y_j))+sd(z,f(z))+t[d(y_j,f(z))+d(z,f(y_j))],$$

ahol q, r, s és t értékét az (y_j, z) helyen vesszük.

$$d(y,f(z)) \leqq \varepsilon+(q+r+t)g(x)+s\sup_{y\in C_n(x)} d(y,f(z))+t\sup_{y\in C_n(x)} d(y,f(z)).$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala y-tól független, úgyhogy ε tetszőleges volta miatt írhatjuk, hogy

$$\sup_{y\in C_n(x)} d(y,f(z)) \leqq (q+r+t)(1-s-t)^{-1}g(x) \leqq g(x).$$

Ha $y\in C_{n+1}(x)$, akkor minden $\varepsilon>0$ esetén létezik olyan $y_1, \dots, y_N\in C_n(x)$ sorozat, melyre $\lambda_i\geqq 0$ és $\sum_{i=1}^N \lambda_i=1$ mellett $d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i f(y_i), y\right)<\varepsilon$.

$$d(y,f(z)) \leqq \varepsilon+d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i f(y_i), f(z)\right) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon+qd(y_j, z)+rd(y_j,f(y_j))+sd(z,f(z))+t[d(y_j,f(z))+d(z,f(y_j))].$$

$d(z,f(y_j))\leqq g(x)$, amint ezt az előbb igazoltuk. Tehát

$$d(y,f(z)) \leqq \varepsilon+(q+r+t)g(x)+(s+t)\sup_{y\in C_{n+1}(x)} d(y,f(z)),$$

$$\sup_{y\in C_{n+1}(x)} d(y,f(z)) \leqq (q+r+t)(1-s-t)^{-1}g(x) \leqq g(x).$$

Ezért

$$\sup_{\substack{y\in C_n(x)\cup C_{n+1}(x)\\ z\in C_n(x)}} d(y,f(z)) \leqq g(x).$$

Most legyen $z\in\overline{\mathrm{co}}\, f(C_n(x))$, $y\in C_n(x)\cup C_{n+1}(x)$. Minden $\varepsilon>0$ mellett létezik olyan $z_1, \dots, z_N\in C_{n+1}(x)$ sorozat, és $\lambda_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i=1$ skalárok, melyre $d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i z_i, z\right)<\varepsilon$. Ekkor

$$d(y,z) \leqq \varepsilon+d\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i z_i, y\right) \leqq \varepsilon+d(z_j, y) \leqq \varepsilon+g(x).$$

ε tetszőleges volta miatt a fenti eredmény bizonyított.

Legyen $x_0 \in K$ korlátos pályájú *(with bounded orbit)*. Mint a [28] mű 1. tételének bizonyításában, úgy itt is lehetséges egy $\{x_n\}$ *Cauchy-sorozatot* konstruálni. Jelölje a határértéket z. Ekkor [28]-ból következik, hogy $f(x_n) \to z$.

$$d(z,f(z)) \leqq d(z,f(x_n))+d(f(x_n),f(z)) \leqq$$

$$\leqq d(z,f(x_n))+qd(x_n, z)+rd(x_n,f(x_n))+sd(z,f(z))+t[d(x_n,f(z))+d(z,f(x_n))].$$

Az $n \to \infty$ határértéket képezve kapjuk, hogy $d(z,f(z)) \leqq (s+t)d(z,f(z))$, ami egyben a $z=f(z)$ teljesülését is jelenti.

A 27. tétel $r=s$ esetén a [19] műben szerepel. $t=0$, $r=s$, q, r, $s=$állandó esetén a 27. tétel a [11] mű 2. tételére redukálódik, s egyben az is kiderül, hogy f folytonosságát az [1] műben felesleges megkövetelni. K korlátosságának megkövetelése is enyhítő, ha van K-ban korlátos görbéjű *(bounded orbit)* pontunk.

A tétel párja a következő.

28. TÉTEL. Legyen X *Banach-tér*, K gyengén kompakt, f pedig folytonos, a K-t önmagára leképező, a (21)-et $\lambda=1$ mellett kielégítő függvény, legyen továbbá

$$\sup_{x,y \in K} q(x, y) < 1, \quad \sup_{x,y \in K} s(x, y) < 1.$$

Ekkor f-nek van fixpontja.

A tétel bizonyítása azonos a [28] mű 2. tételének bizonyításával.

29. TÉTEL. Legyen X szigorúan konvex tér, $f: K \to K, f \in (19')$ $\lambda=1$ mellett, legyen továbbá $\inf_{x,y \in K} a(x, y) > 0$. Ekkor f fixpontjainak halmaza zárt és konvex.

Bizonyítás. Legyen U a K-beli f fixpontjainak halmaza, legyen az $\{x_n\}$ sorozat U-ban *Cauchy-sorozat*, x határértékkel. $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan n_0 egész, melyre $n > n_0$ teljesülése esetén a

$$d(x,f(x)) \leqq \varepsilon+d(f(x_n),f(x)) \leqq \varepsilon+ad(x_n, x)+b[d(x_n,f(x_n))+d(x,f(x))]+$$

$$+c[d(x_n,f(x))+d(x,f(x_n))] \leqq 2\varepsilon+(b+c)d(x,f(x))$$

egyenlőtlenség is teljesül. Ezért $(1-b-c)d(x,f(x)) \leqq 2\varepsilon$ és $x=f(x)$.

Legyen $x_1, x_2 \in U$, $x=(x_1+x_2)/2$.

$$d(x,f(x)) \leqq 1/2[d(f(x_1),f(x))+d(f(x_2),f(x))] \leqq$$

$$\leqq 1/2[a_1 d(x_1, x)+b_1\{d(x_1,f(x_1))+d(x,f(x))\}+$$

$$+c_1\{d(x_1,f(x))+d(x,f(x_1))\}+a_2 d(x_2, x)+$$

$$+b_2\{d(x_2,f(x_2))+d(x,f(x))\}+c_2\{d(x_2,f(x))+d(x,f(x_2))\}.$$

Ezért

$$d(x,f(x)) \leqq \frac{(a_1+c_1)d(x, x_1)+c_1 d(x_1,f(x))+(a_2+c_2)d(x, x_2)+c_2 d(x_2,f(x))}{2-b_1-b_2}.$$

Kimutatható, hogy $d(x_i,f(x)) \leqq d(x_1, x_2)/2$, tehát $d(x,f(x)) \leqq d(x_1, x_2)/2$.

Viszont $d(x_1, x_2) \leqq d(x_1,f(x))+d(x_2,f(x)) \leqq d(x_1, x_2)$. Mivel X szigorúan konvex, $x_i - f(x)$, következésképpen $f(x)$-nek az x_1-et x_2-vel összekötő zárt intervallumba kell esnie. A $d(x_i, f(x)) \leqq d(x_1, x_2)/2$ egyenlőtlenségek teljesülése egyben azt is jelenti, hogy $f(x)$ a középpont. Ezért $x=f(x)$.

A [28] mű 3. tétele ezen tétel speciális esete $c=0$ mellett.

A 26—28. tételekben f helyére f^p-t téve a (46) és (34) leképezéseknek megfelelő eredményeket kapjuk.

A 26. tételhez hasonlít az a tétel [30], mely a (129)-et az $a=1/2$ esetben kielégítő folytonos leképezés-párokra vonatkozik.

8. Következtetések

Ezt a tanulmányt a még nyitva maradt kérdések felvetésével és a további munka irányát kijelölő megjegyzésekkel fejezzük be.

1. Ha $f \in (25)$ és folytonos X-en, továbbá $\{f^n(x_0)\}$-nak létezik torlódási pontja valamely $x_0 \in X$ esetén, akkor van-e f-nek fixpontja?

2. Ha az első kérdésre „nem" a válasz, akkor milyen további feltételek szükségesek (25)-ben f-re vagy X-re ahhoz, hogy f-nek legyen fixpontja?

3. Ha f a (95)—(100) definíciók valamelyikének eleget tesz, akkor van- e fixpontja?

4. Ha f a (104)—(125) definíciók valamelyikének eleget tesz, akkor van-e fixpontja?

5. Kiterjeszthető-e a lokálisan konstrakciós leképezés fogalma a (11), (36), (61), (86) vagy a (111) definíciókra?

6. Mi a válasz az 1—4. kérdésre, ha az f, g leképezéspárokra, ill. ha a leképezéssorozatokra vonatkozó megfelelő definíciókat vizsgáljuk?

Megjegyzések a bizonyításhoz.

1. L. KHAZANCHI [*Math. Japon.* **19** (1974) 283—289] a (89)-et, $2(a+b)+c<1$ mellett, kielégítő függvényekre bebizonyította a fixponttételt. A szerző, jelenleg publikálás alatt álló művében, kiterjesztette eredményét a (94)-et kielégítő függvényekre is.

2. Ezen dolgozat kefelevonatát a kiadás előtt közreadtuk. M. MAITI azt az észrevételt tette, hogy a 2. tételben említett definíciók esetén nem szükséges f folytonosságát az X téren mindenütt megkövetelni. Elegendő azt megkívánni f-től, és f valamely iteráltjától, hogy az $\{f^n(x_0)\}$ sorozat torlódási pontjában legyen folytonos.

IRODALOM

[1] BAILEY, D. F., "Some theorems on contractive mappings", *J. London Math. Soc.* **41** (1966), 101—106 MR 32#6434.

[2] BELLUCE, L. P. AND W. A. KIRK, "Fixed-point theorems for certain classes of nonexpansive mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 141—146. MR 38#1663.

[3] BIANCHINI, R. M. T., „Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi", *Boll. Un. Mat. Ital.* **5** (1972), 103—108.

[4] BOYD, D. W. AND J. S. W. WONG, "On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 458—464. MR 39#916.

[5] CHATTERJEA, S. K., "Fixed-point theorems, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* **25** (9172), 727—730. MR 48#2845.

[6] —, "Fixed point theorems for a sequence of mappings with contractive iterates, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **14** (28) (1972), 15—18.

[7] Ciric, L. B., "Generalized contractions and fixed-point theorems," *Publ. Inst. Math. (Beograd)* (N. S.) **12** (26) (1971), 19—26. MR 46 # 8203.

[8] —, "A generalization of Banach's contraction principle", *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974), 267—273. MR 50 # 8484.

[9] Edelstein, M., "An extension of Banach's contraction principle", *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 7—10. MR 22 # 11 375.

[10] —, "On fixed and periodic points under contractive mappings", *J. London Math. Soc.* **37** (1962), 74—79. MR 24 # A2936.

[11] Goebel, K., W. A. Kirk and T. N. Shimi, "A fixed point theorem in uniformy convex spaces, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **7** (1973), 67—75. MR 47 # 9367.

[12] Gupta, V. K. and P. Srivastava, "A note on common fixed points", *Yokohama Math. J.* **19** (1971), 91—95.

[13] —, "On common fixed points", *Rev. Roumaine Marh. Appl.* **17** (1972), 531—538. MR 46 # 4287.

[14] Guseman, L. F., Jr., "Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point", *Proc. Amer. Math. Soc.* **26** (1970), 615—618. MR 42 # 919.

[15[Hardy, G. E. and T. D. Rogers, "A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.* **16** (1973), 201—206. MR 48 # 2847.

[16] Iseki, K., "On common fixed points of mappings," *Bull. Austral. Math. Soc.* **10** (1974), 365—370. MR 50 # 8487.

[17] Kanna, R., "Some results on fixed points," *Bull. Calcutta Math. Soc.* **60** (1968), 71—76. MR 41 # 2486.

[18] —, "Some results on fixed points, II". *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 405—408. MR 41 # 2487.

[19] Massa, S., „Un'osservazione su un teorema di Browder-Roux-Soardi", *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **7** (1973), 151—155. MR 47 # 4080.

[20] Muresan, N., "Familii de applicati si puncte fixe (Families of mappings and fixed points)", *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math.-Mech.* **19** (1974), 13—15. MR 49 # 6214.

[21] Rakotch, E., "A note on contractive mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 459—465. MR 26 # 5555.

[22] Ray, B., "Some results on fixed and their continuity, *Colloq. Math.* **27** (1973), 41—48. MR 49 # 1501.

[23] Ray, B. K., "On non-expansive mappings in a metric space," *Nanta Math.* **7** (1974), 86—92.

[24] Reich, S., "Some remarks concerning contraction mappings," *Canad. Math. Bull.* **14** (1971) 121—124. MR 45 # 1145.

[25] —, "Kannan's fixed point theorem", *Boll. Un. Mat. Ital* (4) **4** (1971), 1—11. MR 46 # 4293.

[26] —, "Fixed points of contractive functions", *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **5** (1972), 26—42. MR 46 # 8206.

[27] —, "Remarks on fixed points", *Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) **52** (1972), 689—697. MR 48 # 9473.

[28] Roux, D. and P. Soardi, "Alcune generalizziazioni del teorema di Browder-Göhde-Kirk," *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fix. Mat. Natur* (8) **52** (1972), 682—688. MR 48 # 4856.

[29] Rus, I. A., "On common fixed points", *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math.-Mech.* **18** (1973), 31—33. MR 49 # 1502.

[30] Seelbach, M., "Some common fixed theorems for compact metric spaces", *Notices Amer. Math. Soc.* **21** (1974), A-179. Abstract # 711—46—23.

[31] Sehgal, V. M., "On fixed and periodic points for a class of mappings", *J. London Math. Soc.* (2) **5** (1972), 571—576. MR 47 # 7722.

[32] Singh, S. P., "Some results on fixed point theorems", *Yokohama Math. J.* **17** (1969), 61—64. MR 41 # 2488.

[33] Soardi, P., „Su un problema di punto unito di S. Reich", *Boll. Un. Mat, Ital.* (4) **4** (1971), 841—845. MR 46 # 741.

[34] WONG, C. S., "Common fixed points of two mappings", *Pacific J. Math.* **48** (1973), 299—312. MR 48 # 7245.

[35] YEN, C.-L., "Remark on common fixed points", *Tamkang J. Math.* **3** (1972), 95—96. MR 48 # 1206.

[36] ZAMFIRESCU, T., "A theorem on fixed points", *Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) **52** (1972), 832—834 (1973). MR 48 # 7246.

[37] —, "Fix point theorems in metric spaces", *Arch. Math. (Basel)* **23** (1972), 292—298. MR46 # 9957.

FORDÍTOTTA:

TÓTHNÉ TUZSON ÁGNES
NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC-EGYETEMVÁROS

1828—1978

MEGJELENT AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS 150. ÉVÉBEN

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1978. IV. 1. — Terjedelem: 21,85 (A/5 ív)
78-1591 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban a felelős szerkesztő címére kell beküldeni:

Prékopa András, felelős szerkesztő, MTA SZTAKI
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., »Über die Theorie der einfachen Ungelichungen«, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1—27.
[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.
[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 48,— Ft

INDEX: 26498
ISSN 0133—3399

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Alkalmazott matematikai lapok

1977/3-4

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

3. KÖTET

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPJA

III. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

Kéziratok a következő címre küldendők:

Prékopa András, felelős szerkesztő
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 84 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (*1977*) *245—255*

AZ INFORMATIKA SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI ÉS MATEMATIKAI PROBLÉMÁIRÓL[1]

ARATÓ MÁTYÁS
Budapest

ARCHIMEDES szerint egy, a földünkön kívüli fix pont elegendő lenne a föld kimozdításához. Ugyanilyen alaptétel — mely azonban kimondatlan —, hogy az irányítás elvégezhető lenne, ha megfelelő időpontban rendelkezésre állnának a szükséges adatok. Archimedes óta a világkép megváltozott, az általa kimondott tétel lényegében igaz maradt, a megvalósítás érdekében természetesen azóta sem történt egyetlen lépés sem, azonban jelentősen fejlődtek világunk változtatásának lehetőségei. Az irányításhoz szükséges adatok biztosításával kapcsolatban alaptételünk alapvetően nem változott, csak az igények nőnek beláthatatlanul. Példaként említhető, hogy tudományos publikációkban abból az alapvető feltevésből indulnak ki, hogy ha adva lennének a népgazdasági tervezéshez szükséges éves adatok, vagy egy vállalaton belül az irányításhoz szükséges műszakonként kész adatok, vagy a folyamatirányításban a másodpercnyi kiértékeléshez szükséges adatok, akkor a népgazdasági optimális terv kidolgozása, a vállalati optimális irányítás vagy termelésirányítás feladata, a folyamatirányítás feladata egyértelműen és jól lenne megoldható. A megoldás alapvetően helytelen feltételezésből indul ki, így tulajdonképpen mind a népgazdasági optimális tervezésben, mind az optimális irányításban addig nincsenek megoldásaink, amíg az adatok megfelelő szintű biztosítása meg nem történik.

Az optimális irányítással, az optimális tervek kidolgozásával kapcsolatos matematikai vizsgálatok gyakran olyan feltételezéseken alapulnak, amelyek majdnem ekvivalensek a földön kívüli fix pont biztosításával. Nincsen legtöbbször kimondva és megfogalmazva, hogy milyen típusú adatok, milyen gyorsan és milyen feltételek mellett biztosíthatók az optimális irányítás megoldásához. Emellett nem kevés gondot okoz, hogy az adatállomány legkisebb változása alapvetően megváltoztatja a tervet is. Erre vonatkozóan rengeteg példa, illusztráció látott napvilágot, emlékeztetünk itt a dinamikus programozás, a nem korrekt kitűzésű feladatok megoldásaira, vagy a sztochasztikus kitűzésű feladatok megoldásaira, vagy a sztochasztikus folyamatok átmeneti függvényeiben történő apró változtatásokra, melyek kétségessé teszik megbízható matematikai megoldások biztosítását.

A felsorolt negatívumok arra mutatnak, hogy nagyobb kutatói és tudományos igényességgel kell foglalkozni az adatbiztosítás, a megbízhatóság, a stabilis megoldások kérdéseivel, melyek alapvetőek a számítástechnikai megoldások esetén. Az adatok és adatkezelés feladatai az informatikában új módon vetődnek fel, olyan újfajta feladatmegfogalmazások kerültek előtérbe, amelyek korábbi vizsgálatainkban nem szerepeltek.

1. A hiba megjelenése

Annak illusztrálását, hogy a számítástudomány új feladatok elé állította a kutatásokat, csak egyetlen példán kívánom elvégezni. A hibás feldolgozási problémákkal, a hiba megjelenési formáival kívánok foglalkozni. A hiba megjelenését matematikailag először a mérések kiértékelésében, majd a híradástechnikában kezelték és kezeljük ma is. A számítástechnikában, a számítástechnikai alkalmazásokban ma már

[1] Elhangzott az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának a *Magyar Tudományos Akadémia* 1978. évi közgyűlése keretében 1978. május 11-én megtartott ülésén.

megszokottá vált a sajátos hibakezelés, a megfelelő matematikai modell azonban még hiányzik. A hibák időbeli megjelenésének leírása, a különböző hibák osztályozása és felismerése, a működő rendszerekre kifejtett hatásuk vizsgálata úgy érezzük érdekes és új matematikai modelleket igényel.

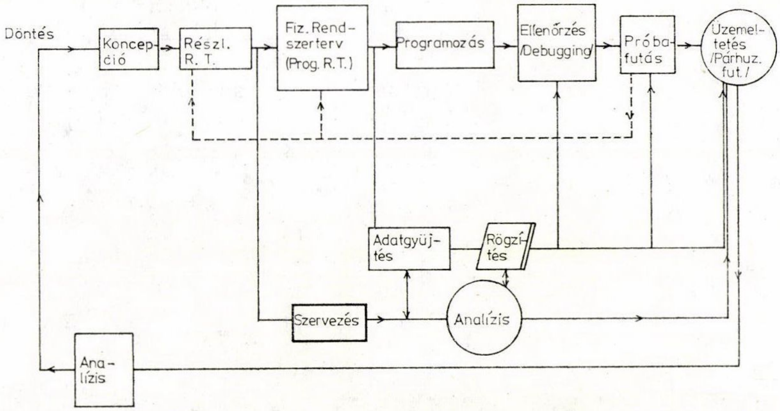
Azoknak a matematikai modelleknek a kialakítása, amelyek az ún. egyenes feladatokkal foglalkoznak, ahol adott feltételek mellett, adott adatok alapján optimális megoldásokat keresünk, ma is jelentős helyet foglal el a kutatásokban. Az ellentétes, vagy a matematika nyelvén fogalmazva inverz feladat az, amikor is azt vizsgáljuk, hogy hogyan biztosíthatók az adatok a modell működéséhez, hogyan biztosíthatók a modell feltételei és hogyan látható be bizonyos körülmények között (pl. időben) változó adatok mellett a megoldások megbízhatósága. A számítástechnikában a megbízhatóság és stabilitás fogalma, ami azt jelenti, hogy az adatokban bekövetkező kis változtatások esetén a megoldásnak az eredetihez közeli megoldást kell biztosítani, alapvető kategória. Jelentősége nem kisebb, mint az optimális üzemeltetésé, vagy az optimális működtetésé. Az optimális üzemeltetés, az optimális működtetés feltételeit minden esetben a megbízható megoldás biztosítása után vizsgáljuk. A valószínűségelmélet feladatmegfogalmazásával szemben a matematikai statisztika feladatmegfogalmazásai jelentik az inverz feladatot. A valószínűségelméletben abból indulunk ki, hogy adott eloszlások esetén esemény vagy eseménysorozatok tulajdonságait határozzuk meg. Ezzel szemben a statisztikában a megfigyelési adatok alapján kell meghatározni az eloszlások tulajdonságait, majd ennek alapján következtetéseket levonni. Az adatok összegyűjtése, a feltételek megvizsgálása jóval több munkát, a gyakorlattal való szoros kapcsolatot jelenti. Ehhez járul bizonyos események valószínűségeinek vizsgálata, és azok megbízhatóságának figyelembe vétele is.

Másik példaként a jóval egyszerűbben megfogalmazható, lineáris egyenletrendszer megoldhatósága feltételének vizsgálata említhető. A matematikai megoldással szemben, a determináns nulla értékének a meghatározása a gyakorlat számára nem ad használható megoldást. A számítástechnikai megoldások az ilyen és hasonló kérdések elvi tisztázását igénylik.

Nagyon sok rendszer, „elvileg" jól felépített számítógépes rendszer bukásának szemtanúi lehettünk amiatt, hogy a rendszer készítői nem számoltak az adathibákkal, vagy műszaki hibákkal, vagy a programrendszer készítői által elkövetett hibákkal. A hibák analízise éppúgy hozzá tartozik a rendszer készítéséhez, mint a rendszer logikai struktúrájának felépítése.

A továbbiakban a rendszer szót általában olyan információs rendszerekre fogom használni, amelyekbe a számítástechnikai eszközök alapvetően beépültek, amikor az információ-feldolgozás rendjében részt vesznek az adatrögzítő és feldolgozó berendezések, a kiértékelő berendezések, software-rendszerek is. Ilyen rendszer pl. népgazdasági szinten egy tervezési rendszer, vállalatoknál egy termelésirányítási, pénzgazdálkodási, állóeszköz-gazdálkodási, vagy bér- és munkaügyi rendszer stb. Ezeknek a rendszereknek a legfontosabb jellemzője, hogy a számítástechnika megjelenése előtt is működő rendszerek voltak, az információszolgáltatás akkori rendje alapján is történtek döntések és folyt termelésirányítás is. Éppen ezért a számítástechnikai eszközök bevonulása a rendszerek jelentős mértékű megváltozását, a rendszerek jobbá tételét kell hogy szolgálja. Ennek a jobbá tételnek a hatékonyság szempontjából egyik legfontosabb feltétele, hogy a rendszer bevezetésének átfutási ideje megfelelő módon alakuljon. Éppen ennek az átfutási időnek a megvizsgálását tekintsük most alapvető feladatunknak.

Vizsgáljuk meg az 1. ábrát, amely egy számítógépes irányítási rendszer időbeni kialakítását mutatja be. A rendszert visszacsatolásosnak képzeljük, mert ez



1. ábra

felel meg leginkább a gyakorlatnak. Időben először a már működő rendszer működésének vizsgálata szerepel, ami után a számítógépes rendszer működésére, üzemeltetésére vonatkozó alapkoncepció elkészítésére kerül sor. A régi rendszer kiváltása újabb és jobb, esetleg más típusú szolgáltatásokkal együtt történik. Az alapkoncepció elkészülte után rendszerterv, majd részletes rendszerterv készül. Közben elkezdődik a szervezési munka a régi rendszer átalakítására. Ez a szervezési munka kiterjed az oktatásra, a felkészülésre, az új rendszer üzemeltetésére és így tovább. A részletes rendszerterv megvalósítása után szokott elkezdődni az adatelőkészítés, a feladat megvalósításához szükséges adatok biztosítása, mely a későbbiekben a folyamatos adatszolgáltatássá alakul. Fizikai rendszerterv vagy programrendszerterv készül, amely után a programrendszer készítésére kerül sor. Az adatelőkészítés és a szervezési munka alapján adatbiztosítás is történik a programrendszer próbájához. Ekkor lényeges visszacsatolás történik, egyrészt a programrendszer javítására, másrészt a rendszertervek helyességének ellenőrzésére. A programrendszer és a próbaadatok biztosítása után kerülhet sor próbaüzemre, majd a párhuzamos üzemeltetésére és az új rendszer bevezetésére, értékelésére. Jellemzője a rendszerek készítésének, hogy az üzemeltetés tapasztalatai alapján, idővel a rendszer koncepciójának megvizsgálására, a rendszer hatékonyságának értékelésére újból vissza kell térni, és esetleg a rendszert újra kell alakítani. Felvetődik a kérdés, hogy a hiba megjelenés, a hiba javítás mennyiben változtatja a rendszer működését és mennyiben módosítja a rendszer kialakítását. A részletes rendszertervben, előzőleg a rendszerkoncepcióban is, a számítástechnikai eszközök lehetőségeire és a rendelkezésre álló erőforrásokra bizonyos becslések szerepelnek. Erre épül a részletes rendszerterv logikai felépítése. A több kötet, néha több száz oldalas rendszerterv logikai felépítésében adódhatnak hibák, téves elképzelések, amelyek pl. a csoportmunka nehézségeiből keletkeznek;

vagy abból, hogy az egyes készítők nem értik a feladat megoldását teljes mértékben. Előfordulnak olyan hibák is, amelyek elírásból vagy nem világos fogalmazásból adódnak.

A fizikai rendszerterv (programrendszerterv) elkészítése a részletes rendszerterv félreértéseiből adódó hibákat és a programtervezésből adódó hibákat is tartalmazhat. A programrendszer-készítés speciális hibáit a számítástechnikában már régen észrevették, itt alakult ki először a hibák kezelése. A „debugging" a programozásban, a programban jelenlevő hibák keresését, javítását jelenti. A bevezetendő rendszerek megbízható működésével és átfutási idejének csökkentésével kapcsolatban a debugging tanulmányozása bizonyult a leghasznosabbnak. Ezt mutatja a debugging idejének jelentős csökkentése. Ismertek software-eszközök a debugging támogatására és software-eszközök a debugging idő lecsökkentésére. Az interaktivitásos eszközök kialakítása az egyik legszebb és legjobb példája a praktikus alkalmazkodásnak az elméleti kutatásokhoz és egyben a gyakorlathoz. A debugging idő dinamikus vizsgálata természetes módon függ a rendelkezésre álló hardware- és software-eszközök milyenségétől.

Az adatbiztosítás hasonló módon hibákkal jár együtt. Az adatbiztosítást a programrendszer debugging ideje szempontjából vizsgálva azt találjuk, hogy amenynyiben az adatok nem bizonyulnak megbízhatónak, a programrendszer javítása többszörösét is kiteheti annak az időnek, mint ami a megbízható adatok biztosítása esetén adódik. Az adatbiztosítás megfelelő szintjét a programozók és a rendszer készítői természetesnek tekintik, de nem fogalmazzák meg. A programrendszer működőképes állapotba kerülése, ami nem ekvivalens azzal a megfogalmazással, hogy a programrendszerben nincs hiba, azt jelenti, hogy az adott adatszolgáltatás mellett a programrendszer jól működik. Az összes lehetőség teljes kipróbálására egy programon belül általában nincs mód, mivel ez meghaladja a jelenlegi számítógépes rendszerek lehetőségeit.

A próbaüzemeltetés lehetővé teszi a rendszer működésének elemzését, mind a hatékonyság, mind a megfelelő feldolgozási idők, a szervezéshez való kapcsolódás szempontjából is. Itt kapcsolódnak a szervezés eredményei, ekkor derül ki, hogy valójában a rendszer működőképes állapotba hozható-e, hiszen a megfelelő időben történő szolgáltatások biztosítása elsősorban a szervezés milyenségétől függ.

A párhuzamos üzemeltetés alatt a régi rendszer értékelése ismételten megtörténik, és az új rendszer lehetőségei kiderülnek. Mind a próbaüzemeltetés, mind a párhuzamos üzemeltetés alatt kiderülnek további adathibák, programrendszerbeli hibák, előfordulnak a számítógépes rendszer üzemeltetésében is hibák. A programrendszer és a szervezés kapcsolatában előforduló ellentmondások visszacsatolása a rendszertervbe nem mindig megoldható. Az 1. ábrán látható rendszer kialakításával kapcsolatos problémáknak szavakban megadott leírását a gyakorlati rendszerek bevezetésében járatos ember ismeri, a rendszer ilyen leegyszerűsített vázát természetes módon kezeli, a jelenségekben fellelhető módszeres és véletlen hibák megjelenését tovább pontosítja. A mintegy 2-3 éves átfutási időben kialakuló rendszernek a megfelelő matematikai modelljét megadni ma még nem tudjuk, mert nem állnak pl. rendelkezésre a becslésekhez szükséges empirikus adatok. További nehézség, hogy a programrendszerbeli hibák lényegesen különböznek az adathibáktól, nemcsak jellegüknél, hanem a rendszerre kifejtett hatásuknál fogva is. Egy programrendszeren belül részprogramok kapcsolódási hibái, az input-output félreértelmezéséből, vagy pontatlanságaiból adódó hibák lényegesen más jellegűek, mint azok a hibák, amelyek logikaiak, vagy az olyan hibák, amelyek csak bizonyos kezdeti feltételek teljesülése esetén jelennek meg.

Az 1. ábrához még két gyakorlati megjegyzést helyes fűznünk. Az első megjegyzésben két alapvető hibát szeretnénk megemlíteni, amely rendszerek bukásához vezethet. Az első hiba az, amikor a részletes rendszerterv hiányosságai csak az üzemi próbáknál derülnek ki. A javítás olyan több éves késést okozhat — hiszen a részletes rendszertervtől a próbaüzemig 1-2 év telt el —, hogy ennek a periódusnak a megismétlésére már nincs lehetőség. Másik hiba: feltételezve, hogy a rendszer készítői képesek a feladatok megoldására, előfordulhat, hogy az adatelőkészítés és az adatellenőrzés között olyan hosszú idő telik el, hogy közben a változó adatok száma nagyságrendben túlhaladja az előkészített alapadatokat. Ez a jelenség különösen a nagynyilvántartási rendszereknél léphet fel.

Másik gyakorlati megjegyzés az, hogy a rendszer kialakításának, átfutási idejének már említett becslését kell megadnunk. Az 1-2 vagy 3-4 éves terminusok megállapítása a rendszer egyes elemeinek becsléséből és az elemek összeadásából történik. Megkérdezve a programrendszer készítőit debugging időben, hogy mennyi idő alatt tudják a programrendszert működőképes állapotba hozni, legtöbbször 2-3-szorosát mondják annak a becslésnek, mint amit a rendszer készítésekor adtak. Mielőtt egy statisztikai modell kialakítását elkezdenénk, vizsgáljuk meg, hogy a hibák megjelenésére és javítására, szűrésére vonatkozóan milyen korábbi vizsgálatokra támaszkodhatunk.

2. A hibák és a hibás feldolgozás matematikai modelljeiről

A híradástechnikában, a távközlésben és a mérésekben legtöbbször a hasznos jelre egy időben és nagyságban véletlen additív zaj rakódik. A vett jel ξ_t a t időpillanatban $\xi_t = \zeta_t + \varepsilon_t$ alakú, ahol ε_t jelenti a zajt. Mind a ζ_t időben lejátszódó folyamat természetére vonatkozóan, mind az ε_t zajfolyamat természetére vonatkozóan különböző statisztikai feltevésekkel szokás élni és ennek alapján szokás megoldani a filtráció, az előrejelzés változatos feladatait attól függően, hogy ismereteink milyenek.

A híradástechnikában és távközléselméletben mind a ζ_t, mind az ε_t folyamat természetének vizsgálatára vonatkozóan kidolgozódtak azok a módszerek, amelyek lehetővé teszik a paraméterek meghatározását, a paraméterek becslését, azok megbízhatóságának vizsgálatát is.

Az informatikai rendszerek kialakításánál az előbbi típusú zajok ritkán fordulnak elő, még akkor is, hogyha az additivitás mellett a multiplikatív hibák megjelenését is tekintetbe vesszük.

A hibás elemekből álló, de mégis megbízhatóan működő rendszerek működésének kérdésében az első érdekes számítások SHANNONnál szerepelnek, aki nagy valószínűséggel hibásan működő logikai kapcsoló elemekből felépített, megbízhatóan működő rendszereket vizsgált. Hasonló típusú kérdéskör megoldásával állunk szemben az informatikai rendszerek felépítésénél is. A hibák megjelenése, illetve a meghibásodás vizsgálata azonban más formában vetődik fel. A SHANNON által vizsgált rendszerekben ugyanis csak egyszerű *Boole-függvényekkel* leírható elemek hibás működéséről, duplázásáról, illetve párhuzamosításáról volt szó. Az informatikában nem két- vagy többértékű logikai függvények kapcsolását, hanem időben és állapotban is változó rendszerek felépítését kell vizsgálnunk.

Tudva azt, hogy a rendszerterv, a szervezés hibái lényegesen befolyásolják a rendszer megbízható működését, ezt egyelőre figyelmen kívül hagyjuk, és csak a számítástechnikai rendszer hibáival, majd az adatok, az adatrendszerek hibáival foglalkozunk.

A programrendszerek zavaraira vonatkozóan legjellemzőbb példaként az operációs rendszerekben tapasztalható hibákat vizsgáljuk. Egy már több éve működő operációs rendszer működésében tapasztalható hibákról rendszerint a gyártó vállalatok hibajegyzéket és hibajavításokat nyújtanak. Ezek a hibajavító rendszerek köteteket szokta kitenni. Általában a hosszabb idő után felgyülemlett hibák ismeretében egy, a lehetőségekben is új programrendszer vagy operációs rendszer bevezetésére, ún. új „release" bevezetésére kerül sor. A hibák javítása azonban egy nagy hiányossággal rendelkezik, mégpedig az addig hibás rendszerben működő alkalmazói programrendszerek az új „release"-ben meghibásodhatnak. Ez a „rendezés" esetleg működő rendszereket tehet tönkre, tehát egy új „release" bevezetése, annak ellenére, hogy jobb és nagyobb lehetőségekkel rendelkezik, mégis nagy gazdasági károkat okozhat. Miből adódik ez a zavar? A programozók rendszerint az új „release" előtt észreveszik, hogy az operációs rendszer nem azt csinálja, mint ami a leírásban szerepel. Ezt kikerülendő, a valódi működő rendszert használják programjaik megírásánál, és ily módon a programok alkalmazási szempontból jól működnek. A megváltoztatott operációs rendszer kijavítja az eredeti, valóban hibás megoldást és a leírásnak megfelelővé teszi a rendszert, de egyúttal a korábban kialakult alkalmazói rendszereket tönkre teszi. Itt most nem soroljuk fel az operációs rendszerekben, a hibalistákon szereplő hibákat. Adattömegeket gyakran feldolgozó programrendszerek működésével kapcsolatban „érdekes" hibajelenség az, amelyik a ritkán változó, vagy ritkán az adatbázisba bekerülő adatok esetén még „emberi szemmel" sem észrevehető eltérést okoz a programban. A programrendszer hibás működésének észrevételére csak a rendszer-feldolgozás után néhány hónappal, esetleg 1-2 évvel kerül sor, amikor a hibás adatokban történő összesítés egy meghatározott szint fölé kerül. A zavar oka általában az, hogy a programrendszer egy olyan ága kerül felhasználásra, amelyik csak az esetek tíz- vagy százezred részében ad hibás eredményt.

Jelentős zavart okoz nagy adattömegben való konvertálás közben az adatokban létrehozott olyan módszeres hiba, amelyik nem állítható vissza. Például egy adatcsoport olyan más adatcsoportba történő konvertálása, amely más módon is előállítható. A hibás tétel előállítása egyértelmű, de a visszaállítása lehetetlen, csak az eredeti adatok felhasználásával és helyes újrakonvertálásával állítható vissza az eredeti állapot. Ha egy ilyen hiba felfedezésére csak néhány hónap múlva, a rendszeres feldolgozások elvégzése után kerül sor, kritikus helyzet alakulhat ki. A zavar kiküszöbölése ugyanis vagy az egész adatfeldolgozási folyamat megismétlését jelentené, ami majdnem megvalósíthatatlan, vagy a hiba kiszűrését egy nagy biztonságú, különböző szintű logikai, esetleg nyelvi próbákon alapuló javító rendszer beépítésével lehet megvalósítani.

Nagy adatrendszerek feldolgozásánál gyakran használt gyorsító eljárás a szótárak bevezetése. Segítségükkel a keresés, a visszakeresés folyamata felgyorsítható és a feldolgozás folyamata jóval rövidebbé tehető. A szótárak bevezetésének azonban nagy hátránya, hogy a bennük előforduló hibák vagy pontatlanságok az adatrendszer jó adatainak hibáit jelentik. A szótárak állhatnak családnevekből, utcanevekből, utónevekből, vagy a termelésben a különböző fajta eszközök elnevezéseiből. A szótárakba olyan beírások vagy leírások is kerülhetnek, amelyek nem felelnek meg a magyar nyelvtan szabályainak. Ezeknek a hibáknak a kihatása alapvető az adatfeldolgozásban.

Nagy adatrendszerek feldolgozásában jelentős problémát okoz a következő típusú zavar. Többlépcsős feldolgozás második lépcsőjében ellenőrzött adatok feldolgozását tételezi fel a programrendszer (maga már nem ellenőriz). Az első lépcsőben véletlenszerűen fellépő adathiba a második lépcső feldolgozási programrendszerét teszi tönkre.

Az adatrendszerek előállításával, a feldolgozás színvonalával kapcsolatban tett megjegyzések azt jelentik, hogy az adatok rögzítése, az adatok ellenőrzése nagy mértékben függ a feldolgozók emberi tulajdonságaitól. A szubjektív elemekkel, azok statisztikai értékelésével az adatfeldolgozásnál ugyanúgy kell foglalkozni, mint ahogyan azt a mindennapi munkában, a termelésben tesszük.

Az adatforgalom szempontjából ma Magyarországon három rendszert szoktunk megkülönböztetni:

— A nagy, de elég statikusan viselkedő rendszereket, ami azt jelenti, hogy mintegy 10^6—10^7 nagyságrendű rekordtömeg kezelése folyik gépen. Erre a rekordtömegre és annak file-jaira vonatkozó kérdések általában elég stabilak, illetve a kérdések rendszere könnyen kialakítható;

— A kisebb, 10^4—10^5 nagyságrendű rekord, illetve adattömeg, amely viszonylag gyorsan változó és összetételében is bonyolult lekérdezési rendszernek van alávetve;

— A mérés- és adatgyűjtéssel, vagy a hiradástechnikában ismeretes rendszerekkel kapcsolatos a harmadik típus, ahol az $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n$, ($\mathbf{x}_i$ vektort jelent), alakú leírásokkal kapcsolatos, ahol az index azt jelenti, hogy az időben, esetleg térben, vagy más paraméterben változó sorozat kezeléséről van szó. Ebben az esetben azonban a vektorok dimenziója nem nagyon nagy.

A tudományos kutatások középpontjában elsősorban a harmadik típusú rendszerek vizsgálata szerepelt, hiszen itt álltak rendelkezésre a fizikai és műszaki alkalmazások szempontjából fontos matematikai modellek. Ez a rendszer nagyobb figyelmet érdemel a számítástechnikai feldolgozás szempontjából.

Az első két típus vizsgálata mindeddig empirikus úton történt, a továbblépés módszeres tanulmányozást és modellalkotást igényel. Ehhez figyelembe kell venni, hogy az adatok gépbe kerülése emberi munkához kapcsolódik és ez befolyásolja az adatok milyenségét, és ellenőrzésük automatizálhatóságát. Nagyon hosszú a feldolgozás átfutási ideje és hosszadalmas a bekerülő adatok ellenőrzése. Az adatok az információs rendszerbe legtöbbször bizonylatokról, formátumokról kerülnek, de nem automatikus módon. Az ellenőrzött adatoknak a számítógépbe kerülése felgyorsítása az egyik legfontosabb feladat. Az egy-két hetes, sőt néha hónapos előzetes ellenőrzési, karbantartási folyamatnak 1—2 órára történő lecsökkentése alapvetően változtathatja meg a működő alkalmazási rendszerek hatékonyságát. Különösen a vállalati alkalmazások terén van erre szükség, ahol a csoportos adatrögzítés kérdése nem megoldott.

Az adatok, adatrendszerek biztonságos kezelésével, tehát alkalmazási működő rendszerek biztonságos kezelésével kapcsolatban igen sok értékes eredmény és matematikai modell került már kidolgozásra, megemlíthető pl. GELENBE, CHANDI neve, de magyar kutatók nevéhez is fűződnek sikeres vizsgálatok. Tekintsük a következő példát, amikor az adatbázis állapotát az ún. „módosító tranzakciók egymásutánja" váltja ki. A tranzakciók beérkezése között véletlen idő telik el, a tranzakció végrehajtásához szükséges idő is általában véletlen. A módosítást kiváltó információk egy meghatározott ideig tárolóban maradnak azért, hogy az esetlegesen bekövetkező hiba esetén megismételhetők legyenek. Ezek a hibák adódhatnak az adatok helytelen kezeléséből, a hardware- és software-hibákból. Az adatbázis meghatározott időpontokban kimentésre kerül és a következő kimentésig tárolódik. A kimentő eljárást szokás kontrollpont-képzésnek nevezni. A különböző kontrollpont-képzési időpontok közötti távolság általában valószínűségi mennyiség, véletlen változó. A kimentés időtartamát tekinthetjük fixnek, vagy ugyancsak véletlen mennyiségnek. Hiba bekövetkezése esetén a legutolsó kontrollpont-képzésnél kimentett adatbázis-állapotból a tárolt módosítások segítségével újrafeldolgozás kezdődik. Az egyes hibák előfordulása közötti intervallum ugyancsak véletlen mennyiség. A visszaállítási időt hibajavítási periódusnak nevezzük. Abban az esetben, hogyha a hiba észrevétele 1 valószínűséggel történik, a rendszer működésével kapcsolatban a következő feltevésekkel szokás élni. Kontrollpontképzés, a tranzakció-sorozat tárolása, valamint a hibajavítás költsége mérhető. A hibák bekövetkezése a kontrollpont-képzés időszakában nem lehetséges, a tárgyalás egyszerűsítése céljából sokszor azt is feltételezik, hogy a hibajavítás periódusa is hibamentes. A különböző valószínűségi változókra vonatkozóan exponenciális eloszlású feltevéssel, illetve determinisztikus feltevéssel szokás élni.

A kérdéskör vizsgálatában alapvető feladat a fent leírt tranzakciókat kiszolgáló rendszernek mint sztochasztikus rendszernek a vizsgálata, hogy mennyiben biztosítható a hibamentes működés a meghatározott időkeretek között. Ebbe a feladatkörbe tartozik a megbízhatóság vizsgálatának kérdése és a különböző állapotokban (mint a kiszolgálás, visszaállítás, kontrollpont-képzés állapotaiban) való tartózkodás stacionér valószínűségeinek meghatározása.

Annak vizsgálatához, hogy milyen ingadozások történhetnek a feldolgozásban — meglepő módon —, nem független valószínűségi változók sorozataira, illetve sztochasztikus folyamatokra vonatkozó centrális határeloszlás tétel felhasználása szükséges. A különböző közelítéseknél és megbízható számításoknál — ma már nem meglepő módon — az időléptékek megválasztása, éppen a felmerülő nagy költségek miatt, igen jelentős gyakorlati felhasználással is bír. Mint érdekes és lényeges következményt említem meg, hogy az időléptékek megválasztása útján a feldolgozási folyamatoknál a diffúziós folyamatok, amelyek a fizikában és a híradástechnikában természetes módon vetődnek fel, az informatikai feldolgozásban is előtérbe kerülnek.

Az adatbázis-kezelő rendszerek biztonságos kezelésének fenti példája mutatja, hogy az informatikai rendszerben a matematikai eszközök, a matematikai módszerek felhasználása terén lényeges előrehaladás történt.

Visszatérve eredeti feladatunkra, ha formális valószínűségszámítási meggondolásokat használnánk, azt tapasztalnánk, hogy az 1. ábrán leírt rendszer hibátlan működésének valószínűségére egyszerű feltételezések alapján a következőt kapjuk:

— A rendszerterv hibátlanságának valószínűsége 10^{-3}—10^{-4} nagyságrendű (egy 5-600 oldalas rendszerterv elkészítése esetén).

— A programrendszerterv hibátlanságának valószínűsége egy több programból, tízezer utasításból álló rendszer esetén ugyancsak 10^{-3}—10^{-4} körüli érték.

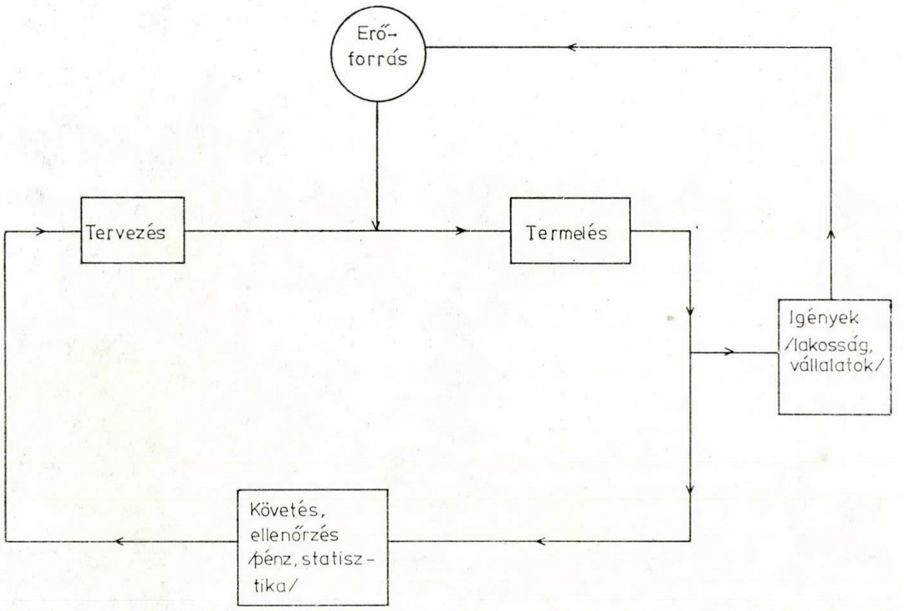
— A programrendszer hibátlansága, mivel utasításokról van szó, mintegy 10^{-4}—10^{-5} nagyságrendű és 10^5 nagyságrendű adatrendszer esetén az adatok hibátlanságának valószínűsége ugyancsak 10^{-4}—10^{-5} nagyságrendűnek tételezhető fel. Feltételezve, hogy a különböző rendszerek egymástól függetlenül valósulnak meg, az egész rendszer hibátlan megvalósításának valószínűsége 10^{-13} nagyságrendű. Ez pedig azt jelenti, hogy gyakorlatilag hibátlan rendszer nem alakítható ki. Ennek ellenére pár hónapos együttes hibakereséssel, a rendszer javításával, ha nem is hibátlan, de működő rendszerek alakulnak ki. Egy ilyen jól (stabilisan) működő rendszer kialakulásának (ami nem a hibátlansággal azonos) vizsgálata az, ami matematikai szempontból modellezhető és alapvető fontossággal bír. A modell kialakítása csak a hibák megjelenésére vonatkozó feltételezések alapján képzelhető el. Ma még az egész rendszerre vonatkozóan ez nem várható, azonban egyes részekre, mint ahogyan az adatbázis-kezelő rendszerekkel kapcsolatban a fentiekben szerepelt, eredmények várhatók.

3. A körülmények változásai

A rendszerek működésével kapcsolatban a következőt kell még figyelembe venni. Mivel a rendszerek kialakítása több éves munka eredménye, a kialakítás folyamata alatt (pl. olyan rendszereknél, mint a bér- és munkaerő-gazdálkodás) megjelennek vállalaton belüli és országos rendelkezések, változások. Ezek a változások az egész rendszer működése szempontjából mint perturbáló tényezők jelennek meg. A rendszer kialakításakor legtöbbször lehetőség van a rendszer változtatására és a rendszer átalakítására. Amikor bevezetett rendszerről van szó, ezeknek a perturbáló tényezőknek a megjelenése a követés és karbantartás problémáját érinti. Tapasztalataink szerint még az elnevezések, az ún. szótárak rögzítésében jelentkező új rendelkezések is évente több lényeges változtatást eredményeznek. A most említett perturbáló hibatényezőknek a figyelembevétele a rendszereknél úgy értendő, hogy azoknak rugalmasaknak kell lenniük a külső behatásokkal szemben.

Egy vállalati, illetve népgazdasági szintű irányítási rendszer leegyszerűsített modelljének a vizsgálata, amint az a 2. ábrából látható, a rendszert időben változónak tekinti. Kiindulva a tervezési rendszerből, előbb figyelembe vesszük a lehetséges erőforrásokat, majd a végrehajtás, szervezés egy döntési rendszerbe jut. A munka eredménye a lakosság és más intézmények rendeléseinek, igényeinek kielégítése.

Mind a végrehajtásról, mind a termelés folyamatáról, mind az igényekről, az igényeknek az erőforrásokra való visszahatásáról elszámolási rendszerek készülnek, amelyek lehetnek statisztikai, pénzügyi, munkaügyi, beruházási típusúak. A visszacsatolás a tervezési rendszerhez rendszeres időközökben megtörténik, ahol a tervek módosítására kerül sor. Így alakul ki egy időben dinamikusan változó rendszer, amelyben a tervezés végrehajtása az elszámolási rendszerek, a teljesítési rendszerek figyelembevételével történik. Vállalatoknál a visszacsatolást a termékgyártás vagy termékkövetés, a pénzügyi, statisztikai elszámolási rendszerek szerves beépülése jelenti. A visszacsatolási periódus — ami a híradástechnikában másodpercek, esetleg percek alatt történik — népgazdasági, vagy vállalati szinten havi, éves, ötéves szin-



2. ábra

ten valósul meg. Amennyiben az adatszolgáltatás felgyorsulása lehetővé teszi a sűrűbb visszacsatolást, operatív irányítás megvalósítása válik lehetségessé. A vállalati elszámolási és irányítási rendszerekben a napi, illetve a műszakra vonatkozó operativitás jelenti a legfontosabb megoldandó feladatot ma *Magyarországon*.

A népgazdasági és vállalati irányítási rendszereknek egy ilyen leegyszerűsített modellje feltételezi, hogy a tervezési rendszer és irányítási rendszer részére az adatok biztosítása megfelelő időben történik. Ebben a rendszerben nem engedhető meg nagy elcsúszás, hiszen 1 hónapos késés az adatok biztosításában a rendszer stabilis működését akadályozza meg. A hónapra, vagy naprakész adatok biztosítása jelenti az informatika egyik alapvető feladatát. Vállalati irányítási rendszereinkben jelenleg még csak a hónapos, illetve negyedéves követési, elszámolási, gazdálkodási rendszerekben gondolkozunk.

Összehasonlításként említem, hogy a számítógépek lehetőségei az aritmetikai, műszaki számítások, a közgazdasági számítások végzésében jelentősen megnőttek; 10^8 nagyságrendű másodpercenkénti műveletszám elvégzésére is alkalmasak. Ez azonban az adatfeldolgozás, az informatika szempontjából még keveset nyújt, annyit, hogy bizonyos leszámlálásokat gyorsabban tudunk végezni. Az informatikai feldolgozásokban a különböző sorrendek meghatározása fontos és egy 100 elemből álló halmaz különböző lehetséges leszámlálásainak, különböző sorrendben történő előállításainak száma mintegy $3 \cdot 10^{100}$ nagyságrendű műveletet igényelne másodpercenként. Ezeket a nagyságrendeket még a legújabb gépek sem tudják produkálni.

Befejezésül egy gyakorlatból vett példát mutatok számításaink, becsléseink megbízhatóságára. Egy automatizált bér- és munkaerő-gazdálkodási rendszert vizsgáltunk meg, melyet több éves munkával alakítottak ki. Egy 5—10 ezer embert foglalkoztató üzem bérszámfejtésében dolgozók száma mintegy 20 fő, havi bérük 50—60 ezer Ft. A feldolgozási gépidő mintegy 20—24 óra havonta, melynek ára 200—240 ezer Ft. Ugyanez a gépóra egy másik országban 5 ezer pénzegységbe kerül, és 2 bérszámfejtő havi illetménye ugyanott 4500—4800 pénzegység. Magyarországon, úgy tűnik, még 20 bérszámfejtő esetén sem gazdaságos a gépi igénybevétel, viszont a kézi feldolgozásra emberi kapacitást már ma sem lehet biztosítani, így a gépi feldolgozás mindenképpen előremutató és hasznosnak ítélendő.

A rendszer mintegy másfél-kétéves üzemeltetésének tapasztalatai alapján kb. 2-3 hónapos ráfordítással sikerült a 20—24 órás feldolgozási időt a felére csökkenteni. Ez a példa mutatja, hogy egyetlen rendszer eredményeit az országra kivetíteni, statisztikai adatként kezelni nem szabad. Másrészt felvetődik a kérdés, hogyan kezdjük az ilyen rendszerek bevezetését? Előre lefektetett 8—10 órás célkitűzéssel, vagy egy lassabban működő, esetleg 20—24 órát is felhasználó rendszer bevezetésének kipróbálásával? Mindenképpen az utóbbi megoldást kell választani, hiszen a rendszer megbízható üzemeltetése még 20—24 órában is elképzelhető, és a későbbiekben kell betervezni a rendszer működési idejének a lerövidítését.

Alapvető tanulság, hogy a jelenlegi periódusban az információs folyamatok milyenségéről, bonyolultsági fokáról, mechanizmusáról, automatizálható elemeiről csak működő rendszerek mélyreható vizsgálata alapján győződhetünk meg, ekkor ismerhetjük meg a fellépő hibákat is. Az informatika számítástudományi és matematikai kérdéseinek egyetlen, konkrét oldalát vizsgáltam meg. Egy előadás keretében nincs lehetőség annak megmutatására, hogy milyen matematikai módszerek használhatók általában, mindezt speciális szakmai munkák kell, hogy elvégezzék. A felvetődő feladatok mély analitikus eredményeket, logikai-algebrai meggondolásokat, számelméleti vizsgálatokat és nem utolsósorban statisztikai szemléletet igényelnek. Az eredmények sokszor hardware és software megoldásokként jelentkeznek, így segítve az információs folyamatok vitelében az egyre javuló számítástechnikai szolgáltatásokat.

(Beérkezett: 1978. május 11.)

ARATÓ MÁTYÁS
SZÁMÍTÓGÉPALKALMAZÁSI KUTATÓ INTÉZET
1536 BUDAPEST, POSTAFIÓK 227.

ON COMPUTATIONAL AND MATHEMATICAL PROBLEMS OF INFORMATICS

M. ARATÓ

This is a survay paper. It was presented on the general meeting of the *Hungarian Academy of Sciences* at 11th May, 1978.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 257—265*

VÁLLALATI INFORMÁCIÓS RENDSZEREKRŐL[1]

NÉMETH LÓRÁNT
Budapest

A számítástechnika elterjedésében világszerte a vállalati alkalmazások képviselik a legmagasabb — 65—75%-os részarányt. Hazánkban 1977-ben a rendszeresen üzemeltetett univerzális számítógép-állománynak kereken 70%-a főként vállalati feladatokon dolgozott. Ez a magas részesedési arány nálunk sem átmeneti jelenség; erre utalnak a fejlődésben jóval előttünk álló országokban kialakult, egybeesően magas arányok, amelyek többé-kevésbé a jövőt prognosztizálják számunkra. A vállalati számítógép-alkalmazások túlnyomó többsége pedig *információ*feldolgozásból és -szolgáltatásból áll, amely, *magas* szervezettségi fokon, a *vállalati integrált információs rendszerben* ölt testet. Előadásomban kizárólag ez utóbbi tárgykörre szorítkozva áttekintést adok a vállalati alkalmazásokról, miközben néhány gondolatot vetek fel a számítógépesítés hatékonyságának, korszerűségének és fejlődési irányainak külön-külön is igen nagy tárgyköréből.

1. Helyzetismertetés és -elemzés

A vállalati számítástechnikai alkalmazások mai helyzetéről egy rövid előadásban csak meglehetősen elnagyolt képet lehet felvázolni. Leghelyesebbnek látszik, ha néhány átfogó, számszerű adat ismertetése után az alkalmazások fejlettségi, minőségi színvonalát jellemző fontosabb ismérvek alapján osztályokat képezünk, és a valóság tarka sokféleségét besoroljuk ezekbe az osztályokba.

a) *Átfogó adatok*

A számítástechnika számottevő megjelenése a vállalatok életében az SZKFP jóváhagyása óta eltelt mintegy 6-7 esztendőre esik.

A számítógépek és a számítóközpontok működésére vonatkozó statisztikák, más vizsgálati eredményekkel egybevetve elég jól megítélhetővé teszik a helyzetet és eddigi növekedési dinamikáját.

1977 végén az ország számítógép-állománya 521 kis és annál nagyobb kategóriájú számítógépből és 329 miniből, összesen tehát 850 egységből állt, szemben az SZKFP 1971 elejei 120 darabos induló állományával. A számítástechnikai *potenciál* azonban a darabszámnál gyorsabban nőtt, amit az is mutat, hogy a gépenkénti *operatív tárkapacitás* (minigépek nélkül) 38,3 Kbyte-ről 79,5 Kbyte átlagra emelkedett, ami az érintett nagyságkategóriák teljes állományára számítva *kilencszeres* növekedést jelent. Érdemes tudni, hogy az összes számítástechnikai eszköz bruttó

[1] Elhangzott az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának a *Magyar Tudományos Akadémia* 1978. évi közgyűlése keretében 1978. május 11-én megtartott ülésén.

értéke 1975-ben *8,5* milliárd, 1977-ben *12,5* milliárd forintot tett ki, és 1970 végétől mintegy meghatszorozódott.

A hasznos gépidő 1970-ben 206 ezer óra, 1975-ben 817 ezer óra, 1977-ben pedig 1 millió 212 ezer óra volt, vagyis 7 év alatt a produktív gépidő közel *meghatszorozódott* és az utóbbi két éven belül is mintegy 48%-kal nőtt. A gépóra-elszámolás egyébként csak 407 kis és annál nagyobb kategóriájú gépre készült 1977-ben, mivel a többi más üzemeltetésű volt, ill. fel- vagy leszerelés alatt állt. E 407 gép közül kb. 70% a felhasználó vállalatoknál, vagy ágazati és egyéb intézetekben, bérmunka-szervezeteknél túlnyomóan ugyancsak vállalati alkalmazásokon dolgozott. Mindez alátámasztja a bevezetőben tett megállapítást, hogy hazánkban is a vállalati alkalmazások részaránya *magas* és az elmúlt időszakban gyorsan fejlődött.

b) *A vállalatok számítógépesítettségére vonatkozó adatok*

Az eddigi számok és megállapítások azonban még nem mutatják meg, hogy a számítástechnika milyen mértékben hatolt be a hazai vállalatok életébe. Erről többet megtudunk azokból a nemkevésbé statisztikai adatokra támaszkodó vizsgálatokból, amelyeket szakembereink az 1981—85. évi tervidőszak fejlesztési koncepciójának és 1990-ig terjedő prognózisának kialakítására folytattak.

A *termelő* ágazatokban *1976* végén — vállalati telephelyek, bolti hálózat, kutató és tervező intézmények nélkül — kereken 4400 vállalat és szövetkezet működött. Közülük — 1976 végén — mindössze 97 vállalat rendelkezett saját gépparkkal — összesen 205 géppel, illetve 147 minigéppel —, amihez a gazdasági szolgáltatási ágazat 89 gépét és 8 minigépét lehet még hozzávenni.

Részletes elemzések, amelyek ismertetése meghaladja az előadás időkorlátait, egyértelműen a vállalati alkalmazások nagyfokú egyenetlenségét mutatják. Néhány fontosabb megállapítás:

(i) Az összes vállalat és szövetkezet közül 2,2% rendelkezik saját gépparkkal. Ezen belül azonban az évi 2 milliárd termelési érték feletti 145 vállalatból 42-nek: 29%-nak van saját számítóközpontja. Az 1-2 milliárd közötti 225 vállalatnál ez 8%-ot, a 0,5 és 1 milliárd közöttieknél pedig 6,1%-ot tesz ki. E vállalati nagyságkategóriák alatt a számítógéppel rendelkező vállalatok száma 1%, illetve az alatt áll.

(ii) A 97 vállalat gépparkjában levő összesen *261* számítógépből is csak *68* gép tartozik a közepes vagy nagy gépek osztályába, vagyis a kapacitások aláméretezetteknek tekinthetők.

(iii) A vállalati alkalmazásokban jelentős az idegen gépen végzett munkák aránya. Ez a termelő ágazatok és a gazdasági szolgáltatási ágazatok együttes gépórafelhasználásából 29%-ot tett ki.

(iv) További adatok szerint a termelő ágazatok 4400 vállalatából (szövetkezetéből) kereken *1400* — vagyis közel *32%* — valamilyen mértékben felhasználta a számítástechnikát 1976-ban. A saját géppel rendelkező vállalatok 2,2%-os arányához képest ez viszonylag magas arányszám. Magyarázata abban van, hogy míg a saját gépparkkal rendelkező vállalatok átlagosan közel évi *3000 órát* dolgoztak, a bérmunkát igénybe vevő többi vállalat éves átlagos gépóra-felhasználása csak *209 óra* volt, s ezen belül is tetemes szóródás mutatkozik.

Összehasonlításképpen álljon itt egy másik vizsgálat megállapítása: az iparilag fejlett *európai* országokban a számítástechnika elemi szintű alkalmazása behatolt már a 10 fős kereskedelmi és 20 fős iparvállalatok 100%-ába. Az 1000 fős vállalatoknál pedig a feldolgozások komplett lefedik a számítógépesíthető területeket. Más forrás szerint az amerikai *Egyesült Államokban* 1985-re minden 50 főnél nagyobb létszámmal dolgozó vállalatnak saját gépparkja lesz.

Az eddig elmondottak azonban csak a számítógépesítettség extenzív mértékét és arányait mutatják. Az alkalmazások *minőségi* szintjének közelítő értékelését már nem a kapacitásokból és azok extenzív felhasználásából, hanem az alkalmazási rendszerek *funkcionális* jellemzőiből, felhasználói szemléletet kifejező ismertetőjegyeiből, kell elvégeznünk.

c) *A vállalati alkalmazások minőségi értékelése*

A vállalati alkalmazások gazdasági hatékonysága

Ma már *közhelynek* tűnhet annak hangoztatása, hogy a számítástechnika behatolását a vállalat irányítási és működési folyamataiba *végső soron a vállalati működésben elérhető gazdasági hatékonyság-növekedés* motiválhatja és igazolja. Mégsem triviális ez a megállapítás, mert ha visszatekintünk az eddigi számítógépesítési elhatározásokra, akkor a *motivációk sokféleségével* találkozunk, amelyeknek egy része csak áttételesen vagy ösztönösen kapcsolódott gazdaságossági megfontolásokhoz. Meg vagyok győződve, hogy a vállalati vezetők általános beállítottsága és számítástechnikai kultúrája van azon a szinten, semhogy a számítógépesítési döntéseik divaton, vagy presztizskérdéseken múlhatnának. Egyébként nézetem szerint ez soha, korábban sem volt jellemző. Ennyi azonban ma már nem elégséges. A számítógépesítési vállalkozásokat — legyen szó akár új alkalmazási rendszer létesítéséről, akár meglevő rekonstrukciójáról vagy jelentősebb kibővítéseiről — konkrét és módszeres gazdasági hatékonysági elemzésre kell alapozni. Amihez viszont kettő kell:

— alkalmas módszertani elvek, értékelési eljárások és eszközök, továbbá

— az elemzések következetes, időben való elvégzése és felhasználása a döntéselőkészítésben.

Ami a módszertant illeti, az utóbbi időben megindultak azok a kutatások, amelyektől elvárjuk, hogy a gazdasági hatékonyságvizsgálat általános módszertani elveit és eszközeit, amelyek épp a közelmúltban kerültek közzétételre a KSH, az OT és a PM közös munkája nyomán, a számítástechnikai alkalmazási rendszerek sajátosságaira lefordítsák és konkretizálják.

Ide tartozónak kell tekinteni e témát, mert a számítástechnikai alkalmazások gazdasági hatékonysága az alkalmazások minőségének egyik lényeges ismérve.

Az információrendszerek fejlesztési módszertanának azonban — mint ismeretes — két *probléma-megközelítése* alakult ki.

Mindkettőben egyébként közös elv, hogy a vállalati információellátással szemben a vállalati működés az elsődleges és a meghatározó.

(i) Az átfogóból a *részletek felé haladó — ún. top-down közelítés módszere* a teljes rendszer konzisztenciáját hivatott biztosítani. Úgy vélem erre szükség van, mert az átfogó fejlesztési koncepció, vagy, ha úgy tetszik, a *stratégiai célok* kialakítása ilyen nagy vállalkozásban nélkülözhetetlen. A nagyvonalú, átfogó rendszerterv alkalmas a rendszerfejlesztés inherens logikai-sorrendi kötöttségeit is feltárni, és így kijelöli a részletes rendszer tervezés és megvalósítás néhány konkrét induló feltételét is. Ennek ellenére a *nagyléptékű rendszerterv* még jelentős szabadságfokot hagy a részletes tervezés és a fokozatos megvalósítás alternatíváinak, sorrendjének megválasztásában.

(ii) Másfelől a vállalati vezetés és szervező szakemberek feladata — miként erre az 1046/1978. Mt. h. kötelezi is őket —, hogy a vállalat működését *folyamatosan* vizsgálják, rendszeresen tárják fel a kisebb-nagyobb belső tartalékokat és veszteségforrásokat. Ez a rendszertervezésnek és -fejlesztésnek a *részletekből kiinduló, alulról felfelé közelítő másik iránya.* A vállalati működés javítására törekedve a vállalatok konkrét *szervezési*, ésszerűsítési *feladatokat, programokat* jelölnek ki, amelyek többnyire a hozzá tartozó információs folyamatok korszerű szervezésével, átalakításával járnak. E különféle léptékű szervezési, fejlesztési feladatok külön-külön gazdasági hatékonysági megítélést kívánnak, mielőtt megvalósításuk mellett dönt a vezetés. Úgy vélem, hogy a vállalati információs rendszer fejlesztésének *taktikai céljait, feladatait, ezek prioritási sorrendjét* a vállalati működés és irányítás korszerűsítésére irányuló vezetői szervező munkának alárendelve kell meghatározni, természetesen az *átfogó rendszerterv* stratégiai irányaival és konzisztencia-követelményeivel összhangban.

Az a gazdasági előny, ami a működés és az információellátás különféle léptékű fejlesztésével elérhető, az érintett vállalati funkciótól függően más és más formában jelentkezik. Az élő munkával való takarékosság, a munkatermelékenység növelése, a vezetői döntések minőségének megjavítása, a gyártmányminőség javítása, a piaci-környezeti adottságokban való jobb alkalmazkodás, az értékesítésben, a termelésirányításban és a készletgazdálkodás terén kiaknázható tartalékok, az állóeszközök intenzívebb kihasználása, a külső és belső kooperáció javulása, az ügyviteli tömegmunkák gépesítése ennek olyan lehetséges megjelenési formái, amelyek *konkrét esetben* több-kevesebb pontossággal *számszerűsíthetők* és szembeállíthatók a ráfordításokkal. A számítógépes rendszer gazdaságilag értékelhető *aktív hatásait* ugyanis az információszolgáltatást igénybe vevő *végfelhasználóknál*, és azok különböző gazdasági értékrendjében kell mérnünk. Az információrendszer hatékonysága — eredmény, illetve hozam oldalon — ugyanis lényegében a végfelhasználóknál mért aktív hatások összegeként jelenik meg. Ennek érdekében egy tervezett vagy kiépült vállalati információs rendszer gazdasági hatékonysági értékeléséhez, amennyire erre mód van, ezeket a különböző aktív hatásokat *pénzérték formában* kell kifejezni és összegezni.

Mindmáig sajnos nem rendelkezünk ennek a részletekre is kidolgozott tudományos módszereivel, amiben a számítástechnikai kutatások sürgető feladatát kell látnunk.

A makroszintű gazdasági hatékonyság közvetett megítélése

Gyakori és jogos igény, hogy a *vállalatok számítógépesítésének gazdasági hatékonyságáról makroszinten* is képet alkossunk.

Úgy hiszem, ma átfogó, számszerűsített értékelést adni nem tudunk és a rendelkezésünkre álló adatok, illetve ismereteink alapján ma nem is vállalkozhatunk rá. Ha ismernénk a megvalósított valamennyi részrendszer vagy azok megfelelő reprezentációjára vonatkozó egyedi — ex post — értékelést, összegezésük és általánosításuk technikailag lehetséges volna. Ámde nem ismerjük, és ami — nem kevés — monografikusan rendelkezésünkre áll, az alig hozható közös nevezőre, sok bennük a bizonytalanság, pontatlanság és feltevés.

E *negatív* megállapításnál azonban valamivel *több* mondható. A vállalati számítógépesítések mintegy 20—25 éves nemzetközi fejlődéstörténetében ugyanis igen tetemes tapasztalatanyag, ismeret gyűlt fel az idők során.

Megkockáztatható az az állítás, hogy a gazdasági és a számítástechnikai fejlettség magas fokán álló országok vállalatainak gyakorlatában *beigazolódott fejlődési tendenciák* tulajdonképpen *nagyszámú hatékonysági* értékítélet általánosítható következtetéseit testesítik meg, ezért *e tendenciák érvényesülésének mértéke a minőségi fejlettség színvonalát jelzi.*

A fejlesztési irányzatok elemzéséből megkísérelhető olyan *minőségi fokozatok, rangsorolási skálák* felállítása, amelyek — bár áttételesen — az alkalmazások hatékonyságát is nagymértékben kifejezik.

Úgy vélem, hogy szakembereink úttörő munkát végeznek, amikor a VI. ötéves terv fejlesztési koncepcióján dolgozva kísérletet tesznek ilyen minőségi metrika kialakítására. Mindez nem pótolja azonban a makroszintű hatékonyságvizsgálat módszertanát, amelyet kutatóinknak ki kell még dolgozniuk.

A minőségi fokozatképzés néhány ismérve

Az alkalmazások minőségi osztályozása azon a feltételezésen alapul, hogy a vállalati számítógépes rendszerek *fejlettségét, minőségét* bizonyos tulajdonságok, ismérvek mércéjén mérhetjük le. Ezek a rendszertulajdonságok a történeti fejlődés során több *fejlettségi fokozaton* áthaladva alakultak ki a manapság legfejlettebbnek, leghatékonyabbnak tekintett színvonalig. Ezt, persze, minden ismérvben csak az alkalmazók szűk élmezőnye érte el, míg az alkalmazók többsége a fejlődés valamely korábbi fokozatáig jutott el.

A teljesség igénye nélkül megemlítek néhány olyan ismérvet, amelyben határozott irányú fejlődési tendenciát lehet felismerni:

(i) A számítógépes információrendszer *komplettsége:* a vállalati informatikai folyamatok számítógépesítése hosszabb idő alatt tendenciálisan kiterjed. Nagyfokú egyezés mutatkozik meg abban, hogy teljes kiépítés esetén milyen vállalati funkciók információellátását foglalja magában.

(ii) Az információellátás *operativitása:* Egyértelmű fejlődési tendencia, hogy a kezdetben havi, negyedéves adatszolgáltatást nyújtó rendszer „válaszideje" több fokozaton át napi, illetve valós idős párbeszédes módú információellátássá fejlődik.

(iii) Az információellátás *tartalmi komplexitása:* Összetett elemzések, előrejelzések, optimumszámításon alapuló tervvariánsok, ütemtervek szolgáltatására válik alkalmassá a vállalati hierarchia minden szintje számára.

A rendszert az *eredmény* oldaláról jellemző ismérvek mellett markáns irányzatok figyelhetők meg az *erőforrásráfordítások* hatékonyságának fokozásában. Ilyenek *például:*

(i) Az informatika szervezeti-hatásköri *centralizációja:* Az adatgyűjtés, -kezelés, -feldolgozás fokozatosan elkülönül az irányító és végrehajtó folyamatoktól, szervezetektől, és vállalati szinten önállósul. Az információtechnológiában újszerű szakosodás, munkamegosztás alakul ki.

(ii) A rendszer *integrációja:* A feldolgozások és az adatszervezés integráltsága egyre növekszik: kiterjed az on-line adatelőkészítésre és interaktív eredményközlésre; a részrendszerek együttműködésére; adatszervezésben: előbb különálló, majd összehangolt adattárak, utána központi, majd decentralizált adatbázisok.

(iii) *Adattechnika decentralizációja:* A feldolgozó központban koncentrált számítástechnikai kapacitás TAF rendszerre decentralizálódik, helyenként teljesen elosztott, decentralizált feldolgozó hálózat alakul ki.

Utóbbi fejlődési tendenciák, mint említettem, inkább az információellátás *fajlagos ráfordításainak* hatékonyságát — vagyis a hatékonysági tényezők erőforrás oldalán mutatkozó fejlődését — fejezik ki.

E csupán *részlegesen* ismertetett ismérvrendszer ésszerű kombinációjával alakult ki az a minőségi osztályozás, amelynek segítségével valamivel behatóbban elemezhetők a vállalati számítógépes alkalmazások.

2. A hazai alkalmazások minőségi értékelése és továbbfejlesztése

Engedjék meg, hogy az elmondottak alapján a hazai alkalmazások értékelését a szakembereink által többé-kevésbé egybevágóan kialakított minőségi fokozatokhoz kapcsolva folytassam. Egyben a fejlesztési koncepción dolgozók korántsem végleges, ezért fenntartással kezelendő néhány javaslatát is érintsem a reálisan kitűzhető fejlesztés mértékéről és arányairól.

1. fokozat: Jellemzői: a számítógépesítés *egy vagy több* különálló nyilvántartásra, számításra terjed ki, többnyire bérmunkában folyik; az adattár feladatonként soros szervezésű, az adatelőkészítés off-line, a feldolgozás legfeljebb havi gyakoriságú nyilvántartások készítését biztosítja.

A gazdasági ágazatba tartozó 4400 vállalat közül mintegy *1300—1400* ebbe az osztályba tartozik. Ma döntő többségük: kb. 1000 vállalat még csak 1-2 rendszeres nyilvántartást és esetenkénti számítást végeztet, bérmunkában. Nyugat-Európában a 10—20 fő feletti vállalatok zöme már elérte, illetve túlhaladta ezt a szintet.

Hazai adottságaink mellett is ez a fokozat csak *kezdeti, átmeneti* állapot lehet, amelyet a vállalatok mintegy 25%-ának 1985-ig, többségüknek pedig 1990-ig el kell térniük.

2. fokozat: Az előző fokozattal szemben annyival fejlettebb, hogy itt a nyilvántartások száma megnő, de még nem teljes körű; az adattár centrálisan szervezett, összefüggő, többségében soros, ritkábban közvetlen elérésű, de csak havi feldolgozásokat nyújt. Főként bérmunkában folyik; minimálisan R—10 nagyságú gépet kíván.

Mintegy 100 vállalat kezdte meg vagy érte el e fokozat kiépítését. A következő 5 éves terv időszakában azt kell elérni, hogy legalább ezt a színvonalat elérjék a számítástechnikát már most alkalmazó vagy az alkalmazásba bekapcsolódó vállalatok, és összességükben arányszámuk érje el 1985-ig a vállalatok, szövetkezetek 10%-át. Nyugat-Európában az 1000 fő feletti vállalatok nagyobb része már elérte ezt a szintet.

3. fokozat: Lényegében teljes komplexitást jelent. A rendszerben számottevő irányítási elemek is megjelennek, főleg a tervezés számítógépesítésével; a nyilvántartásokat centrális, összefüggő, közvetlen elérésű adattár-szervezés (DBOMP, PICS) és — részben irodai gépekről — on-line adatelőkészítés támogatja; kötegelt üzemmódú lekérdezéssel, havi vagy dekádfeldolgozások jellemzik.

E fejlődési szintet nálunk még csak mintegy tucatnyi nagyvállalat érte el. Ezek egy része tőkés eredetű nagyobb gépet használ. Közülük a *Magyar Vagon és Gépgyár* komplexitása teljes körű, most kezdi meg az operatív irányítás kiszolgálásának kiépítését. A *Dunai Kőolajipari Vállalat*nál napi operativitású szolgáltatások vannak. A *Csepel Művek*et nagyszámú részrendszer jellemzi. A *Videoton* főleg az alapnyilvántartások gépesítését végezte el széles körben.

Kiemelhető a *Dunai Vasmű* rendszere, amely R gépével az operatív irányítást is támogatja. Magas komplexitású az *Egyesült Izzó* értékesítéscentrikus rendszere, a *Ganz-MÁVAG* és a *Chinoin* havi operativitású rendszere. Az ÁFOR, a VEIKI R—40-es gépén napi operativitást ért el. A tejipari feldolgozórendszer telexhálózatot épített ki. Ide számíthatók a *Hajdúsági Iparművek* és a VSZFT által kifejlesztés alatt álló rendszerek.

Nyugat-Európában a 2000 fős vállalatoknál teljessé vált a komplexitás, de még nem valósult meg náluk sem teljesen az adatbázisok integrációja.

Hazánkban *1985-ig* azt lehet célul tűzni, hogy a mintegy 50 legnagyobb vállalat élvonala elérje, vagy jelentős mértékben építse ki ezt a fokozatot, majd 1990-ig a következő fokozatba fejlődjenek át. Meg kell kezdeni ezenfelül a vállalatok 10%-ánál e fokozat alapozó munkáit.

4. fokozat: A rendszer, teljes komplexitás mellett, már kifejezetten irányítási jellegű, napi operatív beavatkozást biztosító funkciókkal, valós idős, párbeszédes lekérdezéssel. Adatszervezésben — az integráció fenntartása mellett — decentralizált, közvetlen elérésű adatbázisok jelennek meg, főleg csillag alakú hálózatra alapozva. Megfelel a COPICS koncepciójának.

Hazánkban e fokozatnak megfelelő információs és irányítási rendszer még nincsen.

A VI. ötéves terv alatt azt kell elérni, hogy az 50 legnagyobb vállalat közül a hosszabb (évtizedes) számítástechnikai tapasztalatokkal rendelkezők, illetve a 3. fokozatot már teljesen megvalósító *néhány* nagyvállalat ezt a fokozatot építse ki. Zömük e fokozatot 1990-ig érheti el. Nyugat-Európában a 2000 fő feletti vállalatok köréből a legnagyobbak kiépítették ezt a rendszert, a többi közül azoknál folyik kifejlesztése, amelyek már vagy 5 éve elérték az előző fokozatot.

5. fokozat: Jellemző: tervezéssel egybekötött, magas fogalmi sémákban megadható, igen nagy méretű, osztott adatbáziskezelés, párbeszédes, reálidős lekérdezés, on-line adatelőkészítés és -bevitel, legalább R—45-ös nagyságú gépre alapozott hálózaton.

Nyugat-Európában csupán a legnagyobb, 2 évtizedes gyakorlattal rendelkező vállalatoknál épült ki, illetve kezdődött meg e rendszerek kialakítása.

Hazánkban e fokozatot elérő vállalati információs rendszerrel valószínűleg csak a VII. ötéves terv időszakában lehet számolni.

3. Összefoglalás

Előadásom tárgykörének átfogó jellege és a makroszintű értékelés mai módszertani gyengeségei miatt ez volt az, amit *sommásan*, a számítástechnika vállalati alkalmazásairól elmondani ideillőnek véltem. Persze, az egyes alkalmazási rendszerekről sokkal részletesebb ismeretek vannak. Ezek módszeres rendezése és a tapasztalatok általánosítása fontos feladatunk, mert szükség lesz rá, hogy a VI. ötéves tervidőszak fejlesztési elképzelései a következő években fejlesztési programokká konkretizálódjanak.

Anélkül, hogy e helyzetképből túl messze következtetnénk, azt hiszem megállapíthatjuk, hogy a fejlődést három síkon kell megalapozni, számot vetve anyagi és szellemi erőforrásainkkal:

Először: A hosszabb számítástechnikai múlttal rendelkező *legnagyobb vállalatainknál* az alkalmazásoknak tovább kell haladniuk a fejlettebb, harmadik és negyedik fokozat kiépítésében.

Másodszor: azok a *nagyvállalatok*, amelyek viszonylagosan lemaradtak, rá kell lépjenek az integrált rendszerfejlesztés útjára, hogy vezetési rendszerük korszerűségét ezzel is alátámasszák. A legnagyobb vállalatok alkalmazási színvonalát tehát közelíteni kell az élmezőnyhöz.

Végezetül feltehetőleg tovább folytatódik a számítástechnikát alkalmazó vállalatok körének bővülése, ezzel a vállalati alkalmazások terjedelmének gyors növekedése.

Nem érintettem e fejlődés igen összetett *feltételrendszerét.* Ezeknek *egy* része társadalmunk és népgazdaságunk egészének fejlődésétől függ. *Más* része a vállalatokon múlik; közülük is külön alá kell húzni azokat a tennivalókat, amelyeket a vállalati szervezőmunka fejlesztéséről a 1046/1977. Mt. sz. határozat világosan megfogalmaz. *További* feltételeket a központi és ágazati irányítás hivatott megteremteni, miként erről itt és ma már szó volt.

Mindössze *egy* idetartozó követelményt említek meg befejezésképpen: Az előttünk álló fejlesztési feladatokat a vállalatok aligha lesznek képesek elvégezni, ha csupán saját belső szellemi erőforrásaikra támaszkodnak. Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy a feladatok nagyságával és munkaigényével csak úgy lehet megbirkózni ésszerű időn belül, ha a vállalatok maximálisan igénybe veszik a *nemzetközileg bevált típusmegoldásokat és a korszerű rendszertervezési-szervezési módszereket.* Az a múltban uralkodó alternatíva, hogy — az információs rendszert — külső vagy belső szakemberek — *egyedi* megoldásokkal és a szokásos nyelveken írt egyedi gépi programokkal valósították meg — *egyszerűen túlhaladott inadekvát, korszerűtlen.* Az ismételt alkalmazásra kidolgozott, tipizált, nagymértékben moduláris rendszerek „kínálata" világszerte óriásivá nőtt, hazánkban pedig a hozzáférhetővé váló választékuk, még a legszelektívebb honosítási politika esetén is, gyorsan túlhaladja azt a mértéket, amit a legtöbb vállalat saját szakapparátusa át tud tekinteni. A megválasztásban tehát kockázat van, amit úgy lehet csökkenteni, ha a módszerek, eszközök teljes spektrumát professzionista módon ismerő külső *tanácsadó* szerveket vesznek igénybe a vállalatok.

Úgy vélem, ez a feladat nem azonos a még ugyancsak nem kellően kijegecesedett software-házak szolgáltatásaival; a kutatóintézetek is legfeljebb mellékprofilként foglalkoznak vele. A következő időszak lényeges központi feladatát látom abban, hogy a típusmegoldások alkalmazása széles körben elterjedjen és azt hivatásuk magaslatán álló tanácsadó-szervező intézetek támogassák. Csakis így érhetjük el a szellemi erőink nélkülözhetetlen koncentrációját és szervezett szakmai munkamegosztáson alapuló hatékony felhasználását.

(Beérkezett: 1978. május 11.)

NÉMETH LÓRÁNT
KSH ORSZÁGOS SZÁMÍTÁSTECHNIKA ALKALMAZÁSI IRODA
1525 BUDAPEST, POSTAFIÓK 51.

ON BUSINESS INFORMATION SYSTEMS

L. NÉMETH

This is a survay paper. It was presented on the general meeting of the *Hungarian Academy of Sciences* at 11th May, 1978.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 267—273*

A FOLYAMATOK MEGOSZTÁSA EGY INFORMÁCIÓS RENDSZERBEN

TELBISZ FERENC—VARGA LÁSZLÓ
Budapest

Az *MTA Központi Fizikai Kutató Intézet*ében egy számítógép-hálózatot hoztunk létre, elsősorban interaktív programfejlesztési feladatok megoldása céljából. Ebben a tanulmányban arra kívánunk rámutatni, hogyan lehet ebben a rendszerben megoldani az információs rendszerek legfontosabb feladatait, a felújító és a lekérdező folyamatok párhuzamos vezérlését, az adatbázis használatánál a kölcsönös kizárást és a folyamatok megosztását a hálózaton belül.

1. Bevezetés

Egy információs rendszer létrehozásának az a célja, hogy egységes adatbank alapján információt szolgáltasson sok felhasználó számára. Az információs rendszer jellemzői általában a következők:

1. A forrásadatok rendszerint különböző helyeken, egy vállalaton belül különböző szervezeti egységeknél, gyakran egymástól földrajzilag is távol eső pontokon keletkeznek.

2. Nagy mennyiségű adat tárolásáról kell gondoskodni, amelyet gyakran kell felújítani.

3. Az adatbankon általában kevés műveletet igénylő lekérdezéseket, összesítéseket kell végrehajtani, különböző felhasználók igényeinek megfelelően.

4. Az adatbank lekérdezésére gyakran kerül sor, és a feldolgozás eredményét rövid idő alatt el kell juttatni a felhasználóhoz.

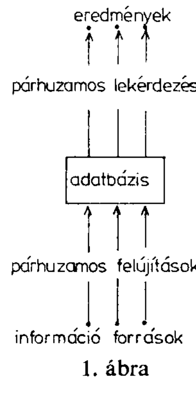
Az információs rendszerekben lejátszódó folyamatokat az 1. ábra mutatja. Az információs rendszerben két alapvető folyamattípus létezik:

az adatbank felújítását végző folyamat, és
az adatbank lekérdezését végző folyamat.

Ezek közül a folyamatok közül egy időben több is jelen lehet a rendszerben. Az információs rendszer vezérlésének problémája tehát általában a párhuzamos folyamatokból álló rendszerek vezérlésének problémakörébe [1] tartozik.

Ezekben a rendszerekben a nagy mennyiségű adattal a különböző felhasználók saját igényeiknek megfelelően manipulálnak. Ezt konzisztensen, megbízhatóan és hatékonyan lehet végezni, ha az adatokat egy egységes rendszerbe integrálják.

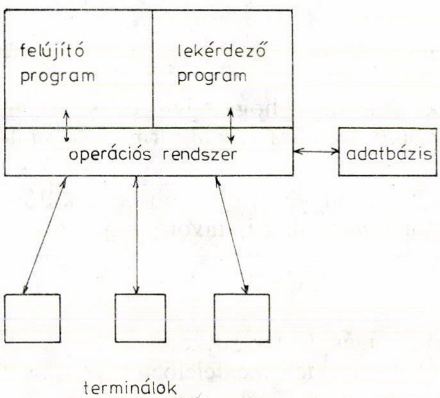
Az adatbázis felújítása gyakran a rendszer és a felhasználó közötti párbeszédes formában valósul meg.



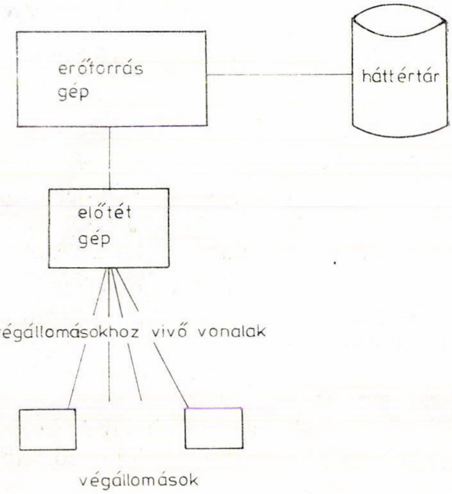
1. ábra

A fenti követelmények alapján a szokásos információs rendszer vázlatát a 2. ábrán szereplő sémával adhatjuk meg. A számítógépen lényegében két feldolgozó program fut: a felújító program és a lekérdező program. A programok bemenő adatai a végállomásokról érkeznek, amelyek interaktív végállomások. A bemenő adatok felújító, illetve lekérdező folyamatokat indítanak el. Az ilyen folyamatokból álló rendszer vezérlését az operációs rendszer végzi. A feldolgozó programok és az adatbázis közötti kapcsolatot az operációs rendszer teremti meg. A lekérdezések eredménye, a kérdésre adott válasz a kérdező végállomásán jelenik meg. Az eredmények eljuttatása a megfelelő végállomásra az operációs rendszer feladata.

A korszerű információs rendszerek létrehozását ma a számítógép-hálózatok teszik lehetővé. Az információs rendszerek céljára létrehozott számítógép-hálózatok nagy része csillag-hálózat [2]. Egy ilyen csillag-hálózat elvi vázlatát a 3. ábra mutatja.



2. ábra



3. ábra

Az adatbázis egy központi helyen elhelyezett nagyszámítógép háttértárolójában kap helyet. A feldolgozó programok és az operációs rendszer funkciója megoszlik a nagygép és az előtét (front-end) számítógép között. A felhasználók termináljai az előtét gépen keresztül — amely egy kisgép — csatlakoznak a nagygéphez.

Intézetünkben egy ilyen rendszert dolgoztunk ki programfejlesztésre, amelyet ebben az évben állítunk üzembe. Ez képezi az intézetünkben megvalósítandó információs rendszerek alapját.

A következőkben a megvalósított rendszert és annak tervezési alapjait ismertetjük, majd a folyamatok hálózaton belüli megosztásának néhány, gyakorlati szempontból fontos esetét elemezzük.

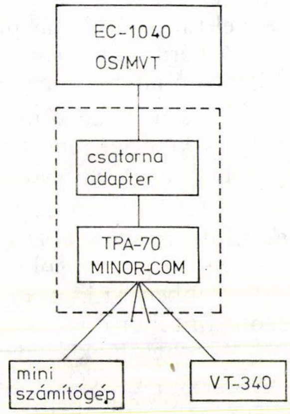
2. A CEDRUS rendszer, mint egy információs rendszer alapja

A rendszer vázlatát a 4. ábra mutatja. A nagyszámítógép egy R40-es típusú számítógép, amely 1024K byte-os központi tárolóval rendelkezik. A mágneslemezes háttértárolók együttes kapacitása 500 M byte. Az R40-es gépen az OS/MVT operációs rendszer üzemel. Ez az operációs rendszer kötegelt (batch) operációs rendszer.

Az előtét számítógép egy TPA70-es kisszámítógép. Ezt a kisgépet intézetünkben fejlesztettük ki. A TPA70-es gép byte szervezésű, általános célú kisgép, amelynél a periferiális egységek, háttértárak stb. egy közös buszra csatlakoznak. Az R40-es gép és a TPA70-es gép közötti kapcsolatot csatorna-busz illesztő valósítja meg. Ezt az illesztőt ugyancsak az intézetünkben fejlesztettük ki.

Az előtét számítógép egy real-time operációs rendszer felügyelete alatt működik. Ez az operációs rendszer rögzített számú (maximum 64) tászk párhuzamos vezérlésére képes.

Az előtét számítógéphez terminálok csatlakoznak. A terminálok lehetnek intelligens terminálok, vagy alfanumerikus display berendezések. Az intelligens terminálok ugyancsak intézetünkben kifejlesztett általános célú kisszámítógépek.



4. ábra

Erre a számítógép-hálózatra dolgoztuk ki a CEDRUS (*Conversational EDitor and Remote User's Support*) rendszert, amely elsősorban programfejlesztésre szolgál. A rendszer kidolgozásánál elsősorban a *Stanford Egyetem* WYLBUR rendszere [3] és a CERN ORION rendszere [4] szolgált alapul.

Ennek a rendszernek a főbb jellemzői a következők:

1. A különböző nyelvű és célú programokat forrásnyelven — általában az adatokat szöveges formában —, a nagygép háttértárolójában tároljuk.
2. A rendszerben egy több-felhasználós szövegszerkesztő program működik, amely lényegében három fő szolgáltatást nyújt:
   — Lehetővé teszi a forrásnyelvű programok javítását, általában a nagygép háttértárában tárolt adatbank felújítását.
   — Lehetővé teszi job-ok összeállítását és azoknak a kötegelt operációs rendszer felügyelete alatt való feldolgozását.
   — Lehetővé teszi a programok eredményeinek a terminálról való lekérdezését.
3. A rendszerben egy olyan file-kezelő program működik, amely a nagygép háttértárolója és az intelligens terminálok között a file-ok továbbítását elvégzi.

Ez a rendszer a fenti szolgáltatásokat egyszerre több felhasználónak interaktív módon nyújtja.

3. A folyamatok megosztása a hálózaton belül

Nézzük először a folyamatok párhuzamos vezérlésének egyszerű megoldását a CEDRUS rendszerben.

Az információs rendszerben egy-egy feldolgozási utasítás végrehajtása rendszerint rövid ideig tart. Ezért a feldolgozó programok vezérlésének egy lehetséges megoldása a következő:

A feldolgozó programok olyan végtelenített programok, amelyek a hozzájuk érkező „utasításokat", adatokat szekvenciálisan dolgozzák fel. Ez azt jelenti, hogy minden egyes parancs a feldolgozó program egy lefuttatását eredményezi, és a parancsokat a megérkezés sorrendjében hajtja végre. A feldolgozó utasítások lehetnek akár információt visszakereső, lekérdező utasítások, akár az adatbázis információtartalmát módosító utasítások.

Ebben az esetben az információs rendszer két végtelenített programjának, a felújítást végző programnak és a lekérdező programnak a párhuzamos végrehajtását kell vezérelni. Ezt a feladatot a prioritástáblával vezérelt kötegelt operációs rendszer el tudja látni más programok futtatásával együtt is.

A kérdés azonban az, hogy a felhasználó megkapja-e megfelelően rövid idő alatt a bemenő adatokra az eredményt? Nyilvánvaló, hogy ha

— a feldolgozó program egy futtatása elég rövid ideig tart, és

— kötegelt rendszerben a program prioritása elég magas,

akkor a válasz elfogadható időn belül megérkezik a felhasználóhoz.

A fenti módon szervezett információs rendszerben a nagygépen két olyan program fut, amelyek közös erőforrást használnak. Ez a közös erőforrás az adatbázis. Ha ezek a programok az adatbázisnak nem megosztható részén is manipulálnak, akkor ebben az esetben meg kell valósítani közöttük a kölcsönös kizárást. Ennél azonban többről van szó:

A programok általában különböző felhasználók parancsát hajtják végre. Minden egyes parancs végrehajtása egy folyamat lefutását eredményezi. A felhasználó véges számú folyamattal (egy folyamatsorozattal) hajt végre egy felújítást vagy lekérdezést. A folyamatsorozatok párhuzamosan futnak le. Ezért a kölcsönös kizárást

1. a felújító folyamatsorozatok között, valamint
2. a felújító és a lekérdező folyamatsorozatok között

kell megvalósítani. Ennek nagyon egyszerű módja a következő:

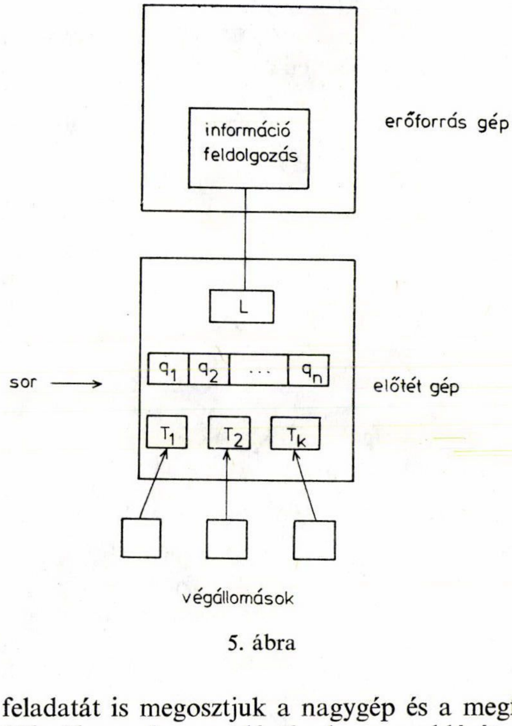
Az adatbázist logikailag összetartozó egységekre osztjuk fel. A logikai egység file-t alkot. A folyamatsorozat indítása egy file átmásoló folyamattal kezdődik. Ennek eredményeként a file tartalma a folyamatsorozathoz (felhasználóhoz) rendelt munkafile-ba kerül. Lekérdező folyamatsorozat indításakor az eredeti file más folyamatok részére hozzáférhetővé válik. Tehát közben más is lekérdezheti vagy felújíthatja azt. Felújító folyamatsorozat indításakor az eredeti file csak lekérdező folyamatok számára marad hozzáférhető. A felújítás végén egy file visszamásoló folyamat indul meg, amely a munkafile tartalmát az eredeti file-ba másolja vissza. Mivel a file párhuzamos felújítását nem engedjük meg, ezért nem történhet meg, hogy felülírás folytán valamely felújítás eredménye elvész.

Nézzük a bemenő adatok, azaz az utasítások sorbaállításának kérdését. Ezt a feladatot viszonylag könnyű megoldani az előtét számítógépen egy egyszerű MFT *(Multiprogramming with Fixed number of Tasks)* monitor segítségével. Ezt szemlélteti egy leegyszerűsített esetben az 5. ábra.

Minden egyes terminálhoz egy terminálkezelő (T_i) tászkot rendelünk. Ez valósítja meg a felhasználóval való interaktív kapcsolatot. Ez a tászk a felhasználó q_i utasítását egy várakozó sorba állítja be. A várakozó sorból ezeket az utasításokat az adott stratégiának megfelelő sorrendben egy *L (link)* tászk továbbítja a nagygépen futó feldolgozó programhoz. A CEDRUS rendszerben az *L* tászk a *„first in first out"* stratégia szerint dolgozik.

Ekkor egy egyszerű termelő—fogyasztó problémát kell megoldani, amelyben a termelők a terminálkezelő T_i tászkok, a fogyasztó pedig az L tászk. A futások eredményeinek visszajuttatása a felhasználókhoz hasonló egyszerű termelő—fogyasztó problémát vet fel.

Ez a rendszer akkor működik kielégítően, ha a felhasználó az eredményét rövid időn belül megkapja. Ha ez nem áll fenn, akkor ezen úgy segíthetünk, hogy a fel-



5. ábra

használó program feladatát is megosztjuk a nagygép és a megfelelően gyors előtét számítógép között. Nézzük ennek a problémának a megoldását a CEDRUS rendszer editor programjának példáján.

Ebben a rendszerben a felhasználó mindig a saját file-ját javítja. A file rekordokból épül fel. A file tartalmát javíthatjuk egyrészt rekord szinten, másrészt a rekordon belül karakter szinten.

Rekord szinten három alapvető műveletre van szükségünk:

— egy rekord azonosítása,

— az azonosított rekord törlése,

— az azonosított rekord elé új rekord beírása.

A rekord azonosítása a tartalma alapján műveletigényes feladat. A nagygépen a javítás idejét tehát lerövidíthetjük, ha a rekord azonosítását leegyszerűsítjük, például úgy, hogy minden rekordhoz hozzárendelünk egy logikai címet, amellyel az a file-ból kiválasztható. Ha a logikai címeket helyesen választjuk meg, akkor a rekord kiválasztását a logaritmikus keresési stratégia alkalmazásával gyorsíthatjuk meg.

Természetesen a rekord tartalma alapján való keresésről nem célszerű lemondani. Ennek a feladatnak a megoldását az előtét kisszámítógépre bízhatjuk. Ez történhet úgy, hogy a kisgépen futó tászk a file tartalmát rögzített egységekben, blokkokban lekéri, és a rekordokat a tartalmuk alapján szekvenciálisan megvizsgálja. Ha a rekordban elhelyezzük annak logikai címét is, akkor ez a tászk a rekord tartalmát annak logikai címére le tudja képezni. Ilyenkor például a kijavított rekord visszaírása a file-ba már a logikai cím felhasználásával történhet meg. A rekordon belüli manipuláció az előtét gépen történik.

Ennél a megoldásnál szűk kapacitás jelentkezhet a nagy adatforgalom miatt a két gép között. Sok felhasználó esetén az előtét gép sebessége is kicsinek bizonyulhat.

Vannak olyan feladatok, amikor egy file felújításán több felhasználó viszonylag hosszú ideig folyamatosan dolgozik. Ilyen esetben a CEDRUS rendszer lehetővé teszi azt is, hogy a file-t lekérjük valamelyik intelligens terminálra, és ott annak felújítását több felhasználó interaktív módon végezze el. Végül a felújított file a nagygép háttértárolójába visszaküldhető.

4. Következtetések

A CEDRUS rendszer elsősorban programfejlesztési munkák támogatására készült. Ezért elsősorban szövegszerű adatbázisok feldolgozására készült fel. A file felújítását támogató egyéb szolgáltatások, például formátumellenőrzések, kontrollszámok vizsgálata stb. az intelligens terminálon elvégezhetők. A rendszer utasításformái kötetlenek és könnyen megjegyezhető szavak, amelyeknek csak az első néhány karaktere szignifikáns.

A létrehozott rendszer centralizált rendszer, amelyben az adatbázist központi helyen tároljuk. Ezen az adatbázison sok felhasználó manipulál. Ennek a feladatnak az elvégzéséhez jelentős software támogatásra van szükségünk. Ez a bonyolult rendszersoftware jelentős processzor időt igényel. Ezen úgy lehet segíteni, hogy a folyamatokat a rendszerben működő több processzor között megosztjuk. Ennek egy lehetséges megoldására kívántunk rámutatni ebben a tanulmányban.

IRODALOM

[1] DIJKSTRA, E. W.: *Cooperating Sequential Processes, Programming Languages*, ed. *F. Genuys* (Academic Press, 1968).

[2] DAVIES, D. W. and BARBER, D. L. A.: *Számítógép-hálózatok* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978).

[3] FAJMAN, F. and BORGELT, J., "WYLBUR: an interactive text editing and remote job entry system", *CACM* **16** (1973) 314.

[4] RUSSEL, R. D., SPARMAN, P. and KRIEGER, M.: "ORION — The Omega Remote Interactive On-line System", (Proc. Int. Computing Symp. 1973, North Holland Publ., 1974), 143.

(Beérkezett: 1978. június 19.)

TELBISZ FERENC ÉS VARGA LÁSZLÓ
MTA KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET
1525 BUDAPEST, PF. 49.

DISTRIBUTION OF PROCESSES IN AN INFORMATION SYSTEM BASED ON COMPUTER NETWORK

F. TELBISZ and L. VARGA

In the *Central Research Institute for Physics* a computer network has been built up primarily for the support of software development. In this paper it is demonstrated, how this system can be used to solve the basic tasks of the information systems, i. e. the synchronisation and mutual exclusion of the parallel processes realising the updating and retrieval of data respectively. The possible distribution of the different tasks among the processors of the network is discussed.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 275—300*

VEGYES TÍPUSÚ PEREMFELTÉTEL NEM SIMA HATÁRÚ TARTOMÁNYOKON

I. ELLIPTIKUS ESET

LIPCSEY ZSOLT

Budapest

Legyenek $\Omega \subset \Omega_1 \subset R^n$ nyílt halmazok. Legyen $\partial_{\Omega_1}\Omega$ az Ω halmaz Ω_1-beli határa. Egy $\tau \in R^n$ egységvektor az $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban teljesen Ω-ba mutat, ha megadható olyan $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$, hogy $|t| < \delta$ és $\|\tau - \tau'\| < \varepsilon$ mellett az

$$x + \tau' t \in \Omega, \quad \text{ha} \quad t > 0, \quad \text{és}$$

$$x + \tau' t \in \mathrm{ext}_{\Omega_1}\Omega, \quad \text{ha} \quad t < 0,$$

ahol $\mathrm{ext}_{\Omega_1}(\Omega)$ az Ω halmaz Ω_1-re vett külsejét jelenti. Az Ω halmaz $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határát irányíthatónak nevezzük, ha megadható egy $\tau : \partial_{\Omega_1}\Omega \to R^n$, $\|\tau\| = 1$ *lokális Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő leképezés úgy, hogy minden $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban $\tau(x)$ teljesen Ω-ba mutat.

A dolgozatban bebizonyítjuk (a dolgozat 2.1 tétele), hogy ha az Ω halmaz $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határára teljesül az irányíthatóság fent megfogalmazott feltétele, akkor megadható Ω_1-en egy olyan sokaságstruktúra, hogy ebben a határ $n-1$ dimenziós C^∞ részsokaság.

Alkalmazásként az alábbi két, az elliptikus típusú parciális differenciálegyenletek vegyes típusú peremértékfeladatainak megoldásánál alapvető szerepet játszó tételt mondjuk ki dolgozatunkban.

Bevezethetjük a fenti C^∞ sokaságstruktúra segítségével a $C^l(\Omega, \tau)$, $C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ tereket, ahol τ jelzi, hogy a differenciálhatóságot a 2.1 tétel által biztosított sokaságra nézve értjük.

Legyenek $h, \varphi, \psi \in C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$-beli függvények. Ekkor megadható olyan $u \in C^l(\Omega_1, \tau)$-beli függvény, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + hu = \varphi,$$

$$u|_{\partial_{\Omega_1}\Omega} = \psi.$$

A $(\varphi, \psi) \to u$ hozzárendelés megadható folytonos lineáris leképezés formájában. (Ez a dolgozat 3.1 tétele.)

A lokális koordinátakörnyezetek segítségével korlátos Ω esetén (e feltétel nem szükséges, csupán a dolgozatban ezt mutattuk alkalmazásként) $\Omega_1 = R^n$ mellett definiálhatjuk a $H^s(\Omega, \tau)$, $H^s(\partial\Omega, \tau)$, $s \in R$ *Szoboljev tereket*, és ezekre igazak az alábbi állítások:

Megadható az

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^i u}{\partial \tau^i} \right|_{\partial\Omega}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \right\}$$

$$H^s(\Omega, \tau) \to \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau)$$

leképezés, amely folytonos, és szuperjektív.

Megadható továbbá egy $g\colon \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau) \to H^{s}(\Omega, \tau)$ folytonos lineáris leképezés úgy, hogy az $(u_0, u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau)$ képére teljesül a

$$\left.\frac{\partial^i g(u_0, u_1, \dots, u_k)}{\partial\tau^i}\right|_{\partial\Omega} = u_i, \quad \text{m. m.}$$

egyenlőség. (A dolgozat 3.2 tétele.)

Ezek az eredmények ismertek sima határ esetében, ezekkel csupán az alaptétel alkalmazásainak lehetőségét akartuk megmutatni.

1. Bevezetés

Termelési folyamatok irányítási feladatai könnyen vezetnek parciális differenciálegyenletekkel leírható problémákhoz. Ezen belül is igyen gyakori jelenség a rendszer peremfeltételeken keresztüli irányítása, beleértve az anyag deformációját is. Az utóbbinak — gyakran nem simán — változó határ felel meg. A nem sima határra megadott nem sima peremfeltételeket az is indokolja, hogy az optimumfeladatok megoldása könnyen vezet nem sima — általánosított — megoldásfüggvényhez (l. [5]).

A nem sima határú tartományok esetében a vegyes típusú peremértékfeladat megfogalmazásának legszembetűnőbb problémája az, hogy ha a felület nem szakaszonként sima, úgy általában nincsen felületi normális. Emellett, mint a [9], [8] dolgozatok mutatják, még szakaszonként sima határ esetén is problémák lépnek fel a megoldások létezése és simaságával kapcsolatban.

Az optimális megoldások gyakran csupán általánosított értelemben léteznek. Ezért az ilyen problémák vizsgálatához szükségesek az általánosított — legtöbbször *Szoboljev-féle — függvényterek* (l. [5]). Ezek felépítése azonban (l. [12], [4], [5]) a tartományok határának simaságán alapszik.

Az idézett monográfiáknak egy másik problémája az, hogy parabolikus és hiperbolikus egyenletek esetében csupán $\Omega \times [0, T]$ alakú tartományokkal foglalkoznak, ami kizárja az Ω deformációjához kapcsolódó problémák vizsgálatát.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából igen fontos numerikus módszerek kézikönyveiben (l. [10], [11], [15]) szintén $Q \times [0, T]$ alakú tartományokat vizsgálnak, ahol Q egy vagy többdimenziós intervallum.

A numerikus módszerek alkalmasak peremértékfeladatokra vonatkozó exisztenciatételek bizonyítására. I. G. Petrovszkij [14] könyvében igen szép általános exisztenciatételeket bizonyít be ilyen úton elliptikus és parabolikus egyenletek esetében. Mindkét tétel érdekessége abban rejlik, hogy a tartomány peremét nem sima, hanem csupán *Lipschitz-féle feltételeknek* eleget tevő függvényekkel adja meg. A *Lipschitz-féle feltétel* a határpontok regularitásának biztosításához szükséges. (Egy határpontot regulárisnak nevezünk, ha a közelítő megoldások e pontban az itt előírt peremfeltételhez tartanak.) Megmutatja ugyanis, hogy egy határpont reguláris akkor, ha megadható a ponttal mint csúccsal egy olyan konvex kúp és a pont körül egy olyan környezet, hogy e kettő metszete a tartomány külsejébe esik. Ilyen határú tartományokra az említett [12], [4] és [5] könyvek módszerei nem alkalmazhatók.

Érdekes lehetőséget kínál vegyes típusú peremérték-problémák megfogalmazására a [3] könyv elliptikus és parabolikus egyenletekkel foglalkozó része. Szerzői,

V. LAKSHMIKANTAM és S. LEELA megmutatják ugyanis, hogy az elliptikus illetve parabolikus egyenletek peremfeladatainak unicitását biztosító maximum—minimum tételek érvényben maradnak olyan vegyes típusú peremfeltételek mellett, ahol az $\Omega\subset R^n$ tartomány $x\in\partial\Omega$ határpontjában előírt peremfeltételben szereplő $\frac{\partial u(x)}{\partial\tau}$ iránymenti deriváltat meghatározó $\tau(x)$ vektor az Ω-ba mutat. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az $x+t\tau(x)$, $t\in(0,\delta)\subset R$ szakasz minden pontja Ω-ban van alkalmas $\delta>0$-val.

Dolgozatunkban annak lehetőségét vizsgáljuk, hogy miképpen lehetne nem sima határú tartományok esetében a [12], [4], [5] könyvek optimalizálás szempontjából igen kívánatos módszereinek alkalmazási lehetőségét megteremteni. Olyan határfogalmat próbálunk definiálni, ami elég általános a gyakorlati problémák szempontjából, de elkerüli a túl vad eseteket.

A peremre vonatkozó feltevések megfogalmazásában alapvető szerepet játszó teljesen Ω-ba mutató vektor definíciója két fogalmat egyesít (l. a 2.1 definíciót): Egyrészt PETROVSZKIJ említett regularitási feltételét, másrészt kissé finomítva a [3]-ban használt befele mutató vektor fogalmát.

A tartományra tett feltevéseknél az $\Omega\subset\Omega_1\subset R^n$ feltételben szereplő, talán feleslegesnek tűnő Ω_1-re azért van szükségünk, mert dolgozatunk folytatásában parabolikus egyenletek peremfeltételeit vizsgáljuk majd. Ezeknél az Ω tartományra természetes és szokásos az a feltevés, hogy $\Omega\subset[0,\infty)\times R^n$, és $\Omega\cap\{0\}\times R^n\neq\emptyset$. Ugyanakkor a peremfeltételeket a határ $(0,\infty)\times R^n$-be eső részén adjuk meg. Ezért vezetjük be dolgozatunkban az Ω_1 nyílt halmazt. Az Ω_1 mint topologikus térbeli lezárási operációt a halmaz fölé tett $-\Omega_1$ jellel, a határképzést pedig ∂_{Ω_1}-gyel fogjuk jelölni.

A 2. pontban megmutatjuk, hogy az I. feltétel teljesülése mellett megteremthetők a szükséges koordinátakörnyezetek, a 3. pontban pedig alkalmazásként belátjuk a klasszikus illetve *Szoboljev terekkel* megfogalmazott nyom tételeket.

2. Irányítható határ koordinátázása

Ebben a pontban először is definiáljuk az általános értelemben vett vegyes típusú peremérték-feladatnak megfelelő irányítható határú tartományt, majd belátjuk, hogy megadható R^n-en olyan n-dimenziós C^∞ sokaság, hogy erre nézve a tartomány határa $n-1$ dimenziós C^∞ részsokaság.

Legyenek az Ω, Ω_1 halmazok az R^n tér nyílt részhalmazai, és legyen $\Omega\subset\Omega_1$. Legyen továbbá Γ_{Ω_1} az Ω halmaz Ω_1-beli $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határa.

2.1. DEFINÍCIÓ. Egy τ egységvektor az $x\in\Gamma_{\Omega_1}$ pontban teljesen Ω-ba mutat, ha megadható olyan $\varepsilon>0$ és $\delta>0$, hogy $|t|<\delta$ és $\|\tau-\tau'\|<\varepsilon$ esetén

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &x+\tau' t\in\Omega, && t>0 \text{ mellett},\\ &x+\tau' t\in \operatorname{ext}_{\Omega_1}\Omega, && t<0 \text{ mellett}.\end{aligned}$$

2.2. DEFINÍCIÓ. Az $\Omega\subset\Omega_1\subset R^n$ nyílt halmaz Γ_{Ω_1} határát irányíthatónak nevezzük, ha megadható egy $\tau\colon\Gamma_{\Omega_1}\to R^n$, $\|\tau\|=1$ *Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő leképezés úgy, hogy minden $x\in\Gamma_{\Omega_1}$ pontban $\tau(x)$ teljesen Ω-ba mutat.

2.1. FELTEVÉS. Legyen az Ω halmaz Γ_{Ω_1} határa irányítható.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az Ω halmazra teljesül a 2.1. feltevésben foglalt követelmény. Ekkor a függelék F1.2 tétele biztosítja, hogy τ kiterjeszthető az

Ω_1 halmazra a *lokális Lipschitz-tulajdonság* megtartásával, sőt a kiterjesztés az $\Omega_1 \setminus \Gamma_{\Omega_1}$ nyílt halmazon végtelenszer differenciálható. Jelöljük e kiterjesztést f-fel.

2.1. LEMMA. Az $y=f(y)$ differenciálegyenletnek nincs olyan $y\colon I \to \Omega_1$ megoldása, amelyre $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ esetén $y(t_1) \in \Gamma_{\Omega_1}$, $y(t_2) \in \Gamma_{\Omega_1}$ teljesülne, ha I intervallum (véges vagy végtelen).

Bizonyítás. Legyen $t_1 < t_2$. Belátjuk, hogy ha feltevésünk szerint $y(t_1) \in \Gamma_{\Omega_1}$, akkor megadható olyan $\delta > 0$, hogy minden $t \in (t_1, t_1+\delta)$ mellett az $y(t) \in \Omega$ teljesül.

Miután az y megoldása a fenti differenciálegyenletnek, előáll

$$(2.2) \qquad y(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(y(s))\,ds, \quad t \in I$$

alakban.

Az $f\big(y(t_1)\big)$ teljesen az Ω-ba mutat, ezért megadható a 2.1 definíció értelmében olyan $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$, hogy ha $\big\|\tau' - f(y(t_1))\big\| < \varepsilon$, és $0 < h \leqq \delta$, akkor

$$(2.3) \qquad y(t_1) + h\tau' \in \Omega.$$

Válasszuk meg most δ_0-t olyan kicsinek, hogy ha $|s-t_1| < \delta_0$, akkor $\big\|f\big(y(s)\big) - f\big(y(t_1)\big)\big\| < \varepsilon$ fennálljon. Könnyen beláthatjuk, hogy ekkor a (2.2) előállítás alapján

$$(2.4) \qquad y(t) \in \Omega, \quad \text{ha} \quad t - t_1 < \delta_0$$

Legyen most $t' > t_1$ olyan pont, melyre $y(t') \in \Gamma_{\Omega_1}$ teljesül. A fenti gondolatmenet megismétlésével beláthatjuk — a 2.1 definícióban szereplő második tartalmazási feltételt alkalmazva —, hogy megadható olyan $\delta_1^{t'} > 0$, melyre minden $t \in (t' - \delta_1^{t'}, t')$ mellett $y(t) \in \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}^{\Omega_1}$.

Képezzük ezután a

$$t^* = \sup\{t \mid y(s) \in \Omega,\ s \in (t_1, t),\ t > t_1\}$$

számot. A fentiek miatt a feltételnek eleget tevő t-k halmaza nem üres t^* definíciójában, ezért t^* véges vagy $+\infty$ érték. Ha $+\infty$, úgy készen vagyunk. Ha véges érték, akkor $y(t^*)$ lehet az Ω belső pontja, vagy határpontja, feltéve, hogy $t^* \in I$. Ha belső pont, akkor t^* szükségképpen az I intervallum végpontja, mert különben t^* definíciójával jutunk ellentmondásra. Ezzel azonban ezt az esetet is lezárhatjuk. Ha határpont, úgy az vezet ellentmondáshoz, hogy megmutattuk, hogy t^* jobbvégpontú kis intervallumon a megoldás Ω külsejében halad. Végül ha $t^* \notin I$, úgy annak csak jobb végpontja lehet, ami így szükségképpen nyílt jobbról, és t^* definíciója folytán a tétel állítását kapjuk erre a részesetre. Ezzel a tételt teljesen beláttuk.

2.2. LEMMA. Legyen $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ tetszőleges pont. Megadható ennek egy olyan $U(x) \subset \Omega_1$ környezete, amelynek minden Ω-beli ($\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}^{\Omega_1}$-beli) pontján halad át Γ_{Ω_1}-en átmenő, $y\colon I \to \Omega_1$ megoldásgörbe.

Bizonyítás. Az $y(x)$ az x határpontban teljesen Ω-ba mutat. Ez a 2.1 definíció értelmében azt jelenti, hogy megadható egy x csúcsú $K^+(x) \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda\big\{y(x) + G_\varepsilon(0)\big\} + x$ alakú kúp, $\big(1 > \varepsilon > 0,\ G_\varepsilon(0)$ a 0 körüli ε sugarú gömb$\big)$, amelynek alkalmas $G_{\delta_1}(x)$

környezettel vett metszete Ω-ba esik, $(-(K^+(x)-x)+x)\cap G_{\delta_1}(x)\subset\Omega_1\setminus\bar{\Omega}^{\Omega_1}$. Jelöljük a $-(K^+(x)-x)+x$ kúpot $K^-(x)$-szel.

Megadható az f folytonossága következtében olyan $\delta_2>0$, hogy

$$\|f(z)-f(x)\| < \varepsilon/4, \quad \text{ha} \quad z\in G_{\delta_2}(x). \tag{2.5}$$

Legyen

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2) \tag{2.6}$$

Jelöljük $K_t^+(x)$-szel a

$$K_t^+(x) := \left\{y \mid y = x+tf(x)-\lambda z, \quad \text{ahol} \quad \lambda > 0, \ \|z-f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{2.7}$$

kúpot, $K_t^-(x)$-szel pedig a

$$K_t^-(x) := -(K_t^+(x)-x)+x \tag{2.8}$$

kúpot.

Megadható olyan t_0, hogy a

$$\begin{aligned} V^+ &:= K_{t_0}^+(x)\cap(\Omega_1\setminus K^-(x)) \subset G_\delta(x), \quad \text{illetve} \\ V^- &:= K_{t_0}^-(x)\cap(\Omega_1\setminus K^+(x)) \subset G_\delta(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

tartalmazások fennállnak.

Vegyünk egy tetszőleges $z\in V^+\cap\Omega$ pontot, és vizsgáljuk meg a differenciálegyenletnek e ponton áthaladó megoldását. Megmutatjuk, hogy ha $y(t_0)=z$, akkor van olyan $t_1<t_0<t_2$, hogy $y(t_1), y(t_2)\in\partial(V^+\cap\Omega)$, míg $t\in(t_1, t_2)$ esetén $y(t)\in\in\mathrm{int}(V^+\cap\Omega)$. Ezután belátjuk, hogy $y(t_1)\notin\partial V^+$ (fentiek szerint $t_1<t_2$). Így ez csak $\partial_{\Omega_1}\Omega$-beli pont lehet. Ez pedig lemmánkat bizonyítja, mert a $V^-\cap(\Omega_1\setminus\bar{\Omega}^{\Omega_1})$-re az alább bemutatandó bizonyítás szóról szóra átvihető.

A megoldásgörbe előáll

$$y(t) = z+\int_{t_0}^{t} f(y(s))\,ds \tag{2.10}$$

alakban. Becsüljük meg az $y(t)-z$ távolságot alulról. Az $f(y(s))$ felírható

$$[f(y(s))-f(x)]+f(x) \tag{2.11}$$

alakban. Ezért a távolság ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned} \|y(t)-z\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(y(s)-f(x))\,ds+(t-t_0)f(x) \right\| \geqq \\ &\geqq |t-t_0|\cdot\|f(x)\| - \left\| \int_{t_0}^{t} (f(y(s))-f(x))\,ds \right\| \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vegyük figyelembe, hogy $\|f(x)\|=1$ és hogy $\left\|\int_{t_0}^{t} (f(y(s))-f(x))\,ds\right\|\leqq\frac{\varepsilon}{4}|t-t_0|$, ahol $\varepsilon/4<1$ ε választása folytán, ezért a távolság alsó becslése t növekedtével tetszőlegesen nagy lehet, így meghaladhatja $V^+ \cap \Omega$ átmérőjét. Ez azt jelenti, hogy valóban léteznek a $t_1 < t_0 < t_2$ értékek, melyekre a megoldásgörbe a szóban forgó halmaz határán van.

Mostmár csupán azt kell megmutatnunk, hogy $y(t_1) \notin K_{t_0}^+(x)$-nek. Ehhez elegendő belátnunk, hogy ha $y(t^*) \in K_{t_0}^+(x)$, akkor megadható olyan $\delta_0 > 0$, hogy $x(s) \in \operatorname{ext} K_{t_0}^+(x)$, ha $s \in (t^*, t^* + \delta_0)$.

Legyen $G_\varrho(y(t^*)) \subset G_{\delta_2}(x)$. Megadható y folytonossága következtében olyan $\delta_0 > 0$, hogy $y(s) \in G_\varrho(y(t^*))$, ha $|s - t^*| < \delta_0$. A megoldást előállíthatjuk

$$y(s) = y(t^*) + \int_{t^*}^{s} f(y(\eta))\, d\eta = y(t^*) + (s - t^*) f(x) + \tag{2.13}$$

$$+ \int_{t^*}^{s} (f(y(\eta)) - f(x))\, d\eta$$

alakban. Vegyük most figyelembe a $G_\varrho(y(t^*)) \subset G_{\delta_2}(x)$ tartalmazást, és a (2.5) feltételt:

$$\left\| \int_{t^*}^{s} (f(y(\eta)) - f(x))\, d\eta \right\| < \frac{\varepsilon}{4}(s - t) \tag{2.14}$$

azaz $s \in (t^*, t^* + \delta_0)$ mellett $y(s)$ eleme az $x + \bigcup_{\lambda > 0} \lambda\{f(x) + G_{\varepsilon/4}(0)\}$ kúpnak, amelynek, mint ez könnyen belátható, a $K_{t_0}^+(x)$-szel nincsen közös pontja (l. a (2.7) definiáló egyenlőséget).

Ez pedig lemmánkat bizonyítja, hisz $y(t_1) \in \partial(K_{t_0}^+ \cap \Omega)$, és így csupán a $\partial_{\Omega_1}\Omega$ eleme lehet.

A kérdéses $U(x)$ környezetnek tehát a $K_{t_0}^+(x) \cap K_{t_0}^-(x)$ zárt környezet megfelel. Ezzel a lemmát beláttuk.

Legyen most $G^\Gamma(x) := \Gamma_{\Omega_1} \cap (K_{t_0}^+(x)) \cup (K_{t_0}^-(x)) \subset G_{\delta_2}(x)$ az $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ pontnak Γ_{Ω_1} relatív topológiájában egy zárt környezete.

Képezzük a $[-1, 1] \times G^\Gamma(x)$ kompakt teret és legyen

$$\varphi\colon \quad [-1, 1] \times G^\Gamma(x) \to \Omega_1 \tag{2.15}$$

a következő leképezés:

$$\varphi(t, z) := y(t, 0, z), \tag{2.16}$$

ahol

$$z \in G^\Gamma(x)$$

és $y(t, 0, z)$ az $\dot{y} = f(y)$ differenciálegyenletre vonatkozó $y(0) = z$ kezdetiértékprobléma megoldása. Lehetséges, hogy a megoldás valamely $z \in G^\Gamma(x)$-re csupán egy $-1 < t_1 < t_2 < 1$ intervallumon van értelmezve. Miután $G^\Gamma(x) \subset G_{\delta_2}(x)$, és a (2.12) becslés szerint biztosan kilép $G_{\delta_2}(x)$-ből, minden belső pontból kiinduló megoldás, és $G^\Gamma(x)$ kompakt, így olyan univerzális $\delta > 0$ biztosan megadható, hogy a (2.16) definíció a $[-\delta, \delta] \times G^\Gamma(x)$ halmazon értelmes.

2.1. Következmény. Megadható az x pontnak egy $G_0^\Gamma(x) \subset G^\Gamma(x)$ kompakt Γ_{Ω_1}-beli környezete, és egy pozitív $1 > \delta > 0$ szám, hogy a φ leképezés a $[-\delta, \delta] \times$

$\times G_0^\Gamma(x) \to V(x)$ homeomorfizmus, ahol $V(x)$ az x pontnak egy alkalmas kompakt Ω_1-beli környezete.

Bizonyítás.

a) Az f kiterjesztés eleget tesz a *Lipschitz-féle fetlételnek*, ezért a kezdetiérték-feladatok megoldása egyértelmű.

b) A 2.1. lemma értelmében egy megoldásgörbén csak egyetlen Γ_{Ω_1}-beli pont lehet.

c) A 2.2. lemma szerint az $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ pontnak van olyan $U(x)$ környezete, amelynek minden pontján halad át Γ_{Ω_1}-en is átmenő megoldásgörbe.

d) Az $U(x)$ környezet minden v pontjához tartozik az a), b) és c) pontok alapján olyan $z \in \Gamma_{\Omega_1}$ és olyan t, hogy

$$v = y(t, 0, z) \tag{2.17}$$

ahol az $y(t, 0, z)$ a (2.16)-ban szereplő megoldás. Ez azt jelenti, hogy az $U(x)$ környezet pontjai és a (t, z) párok között kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat.

f) Az y mint (t, z) függvénye folytonos, a differenciálegyenletek folytonos kezdetiértkéfüggésére vonatkozó alaptétel következtében. Ez azt jelenti, hogy a (2.16) képlettel definiált leképezéssel a

$$\varphi^{-1}(U(x)) \subset R \times G_0^\Gamma(x) \tag{2.18}$$

kompakt környezet, és így alkalmas $\delta > 0$-lal

$$\varphi^{-1}(U(x)) \supset [-\delta, \delta] \times G_0^\Gamma(x)$$

ahol a tartalmazás jobb oldalán a szorzat tér egy kompakt báziskörnyezete áll. Ámde φ ezen kompakt $[-\delta, \delta] \times G_0^\Gamma(x)$ halmazon kölcsönösen egyértelmű és folytonos, így homeomorfizmus, és e kompakt környezet homeomorf képét, amely az x pont egy környezete, jelöljük $V(x)$-szel, és így beláttuk a következményt.

Legyen $V(x) \subset G_{\delta_2}(x)$ az $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ ponthoz a 2.1 következményben biztosított környezet, ahol $G_{\delta_2}(x)$ a 2.2. lemma bizonyításában szereplő környezetet jelenti.

Legyen $t \in (0, \delta)$, ahol $\delta > 0$ a 2.1. következményben szereplő szám. A 2.1 következmény szerint $y(t, 0, x) \in U(x) \cap \Omega$, e halmaz belső pontja.

Jelöljük H_t-vel a

$$H_t := \{u | \langle f(x), u - y(t, 0, x) \rangle = 0\}, \tag{2.19}$$

$f(x)$ normálvektorral megadott $y(t, 0, x)$-en áthaladó $n-1$-dimenziós hipersíkot. Ez, mint ismeretes, R^n egy $n-1$-dimenziós C^∞ részsokasága.

2.3. Lemma. Legyen y: $I \to G_{\delta_2}(x)$ egy megoldása az $\dot{y} = f(y)$ differenciálegyenletnek, ahol $I \subset R$ egy intervallum. Ekkor csupán egyetlen olyan $s \in I$ létezhet, amelyre

$$y(s) \in H_t \tag{2.20}$$

Bizonyítás. 1. Miután $f(x)$ a hipersík normálvektora, $\|f(x)\| = 1$, ha $\varepsilon < 1$, $u \in H_t$ mellett a

$$K_\varepsilon(u) := \bigcup_{\lambda \in R \setminus \{0\}} \lambda \{f(x) + G_\varepsilon(0)\} + u \tag{2.21}$$

kúpnak H_t-vel nincsen közös pontja.

2. Azonban a (2.5) feltétel teljesülése folytán $G_{\delta_2}(x)$-ben igaz az, hogy $w \in G_{\delta_2}(x)$ mellett $s \neq 0$-ra az $y(s, 0, \mathrm{w})$ a $K_{\varepsilon/4}(\mathrm{w})$-ben halad.

Ha ármost valamely s_0-ra $y(s_0) \in H_t \cap G_{\delta_2}(x)$, akkor az $y(s, s_0, y(s_0)) \in \in K_{\varepsilon/4}(y(s_0))$, ami az 1. miatt a lemmát bizonyítja.

2.2. KÖVETKEZMÉNY. A 2.2. Lemma által biztosított $V(x)$ környezetben minden $H_t \cap V(x)$-beli pontot megoldásgörbe köt össze valamely határponttal. Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű, és a folytonos kezdetiértékfüggés következtében folytonos is, oda, vissza. (Valójában e folytonosságot úgy láthatjuk be a legkönynyebben, hogy vesszük a H_t képét a φ^{-1} homeomorfizmussal.) Mint folytonos felületnek, képe is folytonos felület, így a képtér szorzat lévén, a komponens leképezésének szükségképpen folytonosak. Ez pedig (2.15) miatt a fenti folytonosságot jelenti.

2.4. LEMMA: Legyen $p \in H_t \cap \operatorname{int}(G_{\delta_2}(x)) \cap \Omega$. Megadható olyan $G(p) \subset G_{\delta_2}(x) \cap \Omega$, hogy ebben minden $v \in G(p)$ ponthoz megadható olyan $w \in G(p) \cap H_t$, hogy a

$$v = y(s, 0, w) \tag{2.22}$$

teljesül.

Bizonyítás. Miután $p \in \Omega$, itt f C^∞-függvény. Ezért a megoldás a kezdetiértékprobléma szerint végtelen sokszor differenciálható. Vegyük az

$$\dot{y} = f(y) \tag{2.23}$$

egyenletnek az

$$y(s, 0, w)\colon (\alpha, \beta) \times [H_t \cap G_{\delta_2}(x)] \to G_{\delta_2}(x) \tag{2.24}$$

$\alpha < 0 < \beta$ megoldásából képezett leképezést alkalmas α, β-val. Ez a leképezés a p pont egy alkalmas környezetben az inverz függvénytétel szerint C^∞ homeomorfizmus. Ez pedig éppen a tétel állítása.

2.3. KÖVETKEZMÉNY. Megadható az $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ pont körül egy olyan $\tilde{G}(x) \subset G_0^\Gamma(x)$ Γ_{Ω_1}-beli környezet, hogy az $U_0(x) := \varphi\big((-\delta, \delta) \times \tilde{G}(x)\big) \subset V(x)$ (a $V(x)$ a 2.1. követelményben biztosított környezet) környezet minden $v \in U_0(x)$ pontjához is megadható kölcsönösen egyértelműen olyan $w \in H_t \cap U_0(x)$-beli pont és $s \in R$, hogy

$$v = y(s, 0, w) =: \psi_0(s, w) \tag{2.25}$$

teljesül. Ráadásul a definiált leképezés homeomorfizmus, a $v \in \Omega$-beli pontok alkalmas környezetében végtelenszer differenciálható is.

A H_t $n-1$-dimenziós hipersík, ezért természetes módon koordinátázható az R^{n-1} pontjaival, és ez a koordinátázás egyúttal megfelel a H_t mint $n-1$-dimenziós részsokaság koordinátázásának is. Ha a pontok e koordinátáit ξ-vel jelöljük, felírhatjuk a (2.25)-ben szereplő v-t

$$v = \psi_0(s, w) =: \psi(s, \xi) \tag{2.26}$$

formában is.

2.5. LEMMA. Legyen az $x \in \Gamma_{\Omega_1}$ ponthoz $V(x) \subset G_{\delta_2}(x)$ a 2.1. következményben biztosított környezet. Legyenek H_1, H_2 $n-1$-dimenziós hipersíkok, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

1. A H_1 és H_2 hipersíkokat az $\dot{y}=f(y)$ megoldásainak $G_{\delta_2}(x)$-beli szakaszai legfeljebb egyetlen pontban metszik át.

2. Tegyük fel, hogy van olyan $p \in H_1 \cap U(x) \cap \Omega$ és ennek egy $G(p) \subset H_1$ környezete, hogy minden $v \in G(p)$-n áthaladó megoldásgörbe metszi a $H_2 \cap U(x) \cap \Omega$-t is.

Ekkor az összekötéssel megadott $H_1 \to H_2$ leképezés C^∞ homeomorfizmus.

Bizonyítás. A lemma 1. feltétele biztosítja, hogy a szóban forgó leképezés kölcsönösen egyértelmű. A 2.1. lemma következtében a megoldásgörbe Ω-ból nem léphet ki, és Ω-ban a differenciálegyenlet jobb oldala C^∞ leképezés. Ezért a megoldás a kezdetiérték szerint végtelen sokszor differenciálható. Ez pedig biztosítja, hogy az összekötéssel megadott leképezés is végtelen sokszor differenciálható.

2.4. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $x \in \Gamma_{\Omega_1}$, legyenek H_1, H_2 olyan hipersíkok, amelyeket átmetsz $\delta > t_1 > 0$, illetve $\delta > t_2 > 0$ időpontokban az $y(t, 0, x)$ megoldásgörbe, és megadható egy $\tilde{G}(x) \subset G_0(x)$ környezet, hogy az $U_0(x) = \varphi((-\delta, \delta) \times \tilde{G}(x)) \subset U(x)$ környezetben megadhatjuk a H_1-hez, illetve H_2-höz a (2.25)-nek megfelelően hozzárendelt ψ_{01}, ψ_{02}, illetve a (2.26)-nak megfelelően definiált ψ_1, ψ_2 leképezéseket. Ha az egyes hipersíkok koodinátáit indexeinek megfelelően $\xi_1 \in R^{n-1}$, illetve $\xi_2 \in R^{n-1}$-gyel jelöljük, akkor az összekötéssel meghatározott

$$H_2 \ni v = \psi_1(s(v), w(v)), \quad w(v) \in H_1 \tag{2.27}$$

leképezés végtelenszer differenciálható, amelyet koordinátákkal úgy fejezhetünk ki, hogy a

$$\xi_1 = \xi_1(w(v(\xi_2))) \tag{2.28}$$

$R^{n-1} \to R^{n-1}$ leképezés végtelenszer differenciálható, ahol ξ_1 az egyenlőség jobb oldalán a w ponthoz annak koordinátáját rendelő függvény.

Az $\dot{y} = f(y)$ autonom rendszer lévén, ha az $u \in U_0(x)$, és

$$\psi_1(s_1, w(\xi_1)) = \psi_2(s_2, v(\xi_2)) = u \tag{2.29}$$

akkor is az így kapott $\xi_2 \to \xi_1$ hozzárendelés megegyezik a (2.28) hozzárendeléssel, azaz

$$\xi_1 = \xi_1(w(v(\xi_2))) \tag{2.30}$$

2.1. TÉTEL. Megadható Γ_{Ω_1}-nek egy $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nyílt Ω_1-beli környezetekből álló fedőrendszere, és minden $\alpha \in A$-hoz egy $V_\alpha \subset R^{n-1}$ nyílt halmaz, és egy

$$\psi_\alpha \colon (0,2) \times V_\alpha \to U_\alpha \tag{2.31}$$

homeomorfizmus úgy, hogy ha $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, akkor a

$$\psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \psi_{\alpha_2} \colon (0,2) \times V_{\alpha_2} \to (0,2) \times V_{\alpha_1} \tag{2.31a}$$

leképezés végtelen sokszor differenciálható. Teljesülnek még az alábbi állítások:

1. $\psi_\alpha(1, V_\alpha) = U_\alpha \cap \Gamma_{\Omega_1}$, minden $\alpha \in A$ mellett,

2. ψ_α: $((0,1)\cup(1,2))\times V_\alpha\to U_\alpha\setminus\Gamma_{\Omega_1}$ leképezés végtelen sokszor differenciálható minden $\alpha\in A$ mellett.

Bizonyítás:

Legyen az $A:=\Gamma_{\Omega_1}$. Minden $x\in A$-hoz rendeljük a 2.3 következményben biztosított $U_0(x)=:U_x^0$ környezetet.

A 2.2. következmény értelmében a

$$w\in H_t\cap U_x^\circ\to z\in\tilde{G}(x) \tag{2.32}$$

hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű folytonos leképezés. Ezért a ψ leképezés (l. (2.26)) alkalmas $\xi\in R^{n-1}$-hez egyértelműen rendel olyan $s(\xi)$-t, amelyre

$$z(\xi)=\psi(s(\xi),\xi) \tag{2.33}$$

(Alkalmas ξ alatt annyi megszorítást értünk, hogy ξ tartozzék ψ értelmezési tartományának e komponensre való vetületéhez.) ψ homeomorfizmus volta miatt még az is igaz, hogy $s(\xi)$ folytonos, kompakt $V_x^0\subset R^{n-1}$ környezeten értelmezett függvény, $s(\xi)<0$, és így $s(\xi)\leqq c<0$. Ha továbbá az x-nek ξ_0 felel meg, miután az x pont az U_x^0 belső pontja, ξ_0 a V_x^0-nak belső pontja lesz.

A $-s$: $V_x^0\to R$ leképezésre teljesülnek a függelék F2.1 tételének feltételei, ezért megadható a ξ_0 egy $V_x\subset V_x^0$ kompakt környezetében egy olyan

$$g\colon [0,1]\times V_x\to R^+ \tag{2.34}$$

leképezés, amely teljesíti az alábbiakat:

1. $g\in C^\infty([0,1)\times V_x)\cap C([0,1]\times V_x)$,
2. $g(1,u)=-s(u)$, $g(0,u)=0$, minden $u\in V_x$ mellett,
3. A $g(t,u)$ függvény a $t\in[0,1]$ változó szigorúan monoton növő végtelenszer differenciálható függvénye minden $u\in V_x$ mellett,
4. Minden $u\in V_x$-re az $(1,u)$ pontban

$$\frac{\partial g}{\partial t}(1,u)=1,\quad \frac{\partial^i g}{\partial t^i}(1,u)=0,\quad i\geqq 2. \tag{2.35}$$

E függvény segítségével képezhetjük a

$$\begin{gathered}\psi_x\colon [0,1]\times V_x\to\bar{\Omega}^{\Omega_1}\cap U_x^\circ\\ \psi_x(t,\xi):=\psi(-g(t,\xi),\xi)\end{gathered} \tag{2.36}$$

leképezést, $(t,\xi)\in[0,1]\times V_x$.

Hasonló eljárással adhatjuk meg ugyancsak a függelék F2.1 tételének felhasználásával a ψ_x leképezést az $[1,2]\times V_x$ halmazon, egy hasonló feltételeknek eleget tevő g: $[1,2]\times V_x\to R^+$ segítségével, és az $(1,u)$ pontokban a deriváltakra előírt feltétel biztosítani fogja, hogy a két függvény összekapcsolása útján nyert leképezésben az új $[0,2]$-beli paraméter a differenciálegyenlet eredeti paraméterével C^∞ kapcsolatban lesz. Így tehát megadtuk a

$$\psi_x\colon [0,2]\times V_x\to U_x^\circ \tag{2.37}$$

leképezést, amely konstrukciója folytán

i) $t<1$, illetve $t>1$ mellett C^∞ leképezés,

ii) $\psi_x([0,2]\times V_x)=:U_x$-re teljesül a

$$\psi_x(1, V_x) = \Gamma_{\Omega_1}\cap U_x, \tag{2.38}$$

iii) A g tulajdonságai folytán a t szerinti parciális deriváltak mind folytonosak. (Úgy értve ezt, hogy a differenciálegyenlet megoldásának eredeti paraméterével való kapcsolat ilyen.)

Ha továbbá minden $x\in A$ mellett képezzük ilyenformán a V_x, U_x környezeteket és az ψ_x leképezést, akkor megkapjuk a tétel bizonyítását jelentő koordinátakörnyezeteket, amelyeknek a (2.31a)-val kifejezett tulajdonsága az iii) és a 2.4 következmény miatt teljesül.

2.1. Megjegyzés. Ha egy $\varphi\colon \bar{\Omega}^{\Omega_1}\to R$ függvényre az $x_0\in\Gamma_{\Omega_1}$-beli pontban minden sima, $\tau(x_0)$ x_0-beli érintőjű x görbe mentén létezett a

$$\frac{\partial^k\varphi}{\partial\tau^k}(x_0) \quad (1\leqq k\leqq n_0,\quad 0<n_0 \text{ egész}) \tag{2.39}$$

derivált, úgy a bevezetett koordinátakörnyezetben a

$$\frac{\partial^k\varphi}{\partial\tau^k}(x_0) = \frac{\partial^k\varphi\circ\psi_{x_0}}{\partial t^k}(1, \xi_0) \tag{2.40}$$

egyenlőség fennáll. Ez a ψ_x konstrukciójának, közvetlenül pedig a g függvény 4. tulajdonságának a következménye.

2.2. Megjegyzés. Ha kiegészítjük az $\{U_\alpha, V_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ fedőrendszert az $\tilde{\Omega}$ és az $\tilde{\Omega}_1$ nyílt halmazokkal és ezeken $V_1=\tilde{\Omega}$, a $V_2=\tilde{\Omega}_1$, $\psi_1=\mathrm{id}_{\tilde{\Omega}}$, $\psi_2=\mathrm{id}_{\tilde{\Omega}_1}$, ahol $\bar{\tilde{\Omega}}^{\Omega_1}\subset\Omega$, $\bar{\tilde{\Omega}}^{\Omega_1}\subset\mathrm{ext}_{\Omega_1}\Omega$, úgy hogy

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\Big)\cup\tilde{\Omega}_1\cup\tilde{\Omega} = \Omega_1, \tag{2.41}$$

akkor ezzel olyan sokaság struktúrát definiáltunk Ω_1-en, amelyre nézve $\partial_{\Omega_1}\Omega$ $n-1$-dimenziós C^∞ részsokaság lesz.

A következő pontban megmutatjuk, hogy a bevezetett struktúra segítségével tényleg alkalmazhatjuk a parciális differenciálegyenletek modern módszereit az általánosított peremfeltételek kezelésére.

3. Kiterjesztési tételek

E pont első részében megvizsgáljuk azt a problémát, hogy ha az előző pont jelölései mellett az $\Omega\subset\Omega_1\subset R^n$ halmaz Γ_{Ω_1} határa irányítható (l. a 2.2. definíciót), és τ a határ irányítása, akkor milyen $\varphi\in C(\Gamma_{\Omega_1})$ függvényhez adható meg olyan $u\in C(\bar{\Omega}^{\Omega_1})\cap C^k(\Omega)$-beli függvény, amely teljesíti a $\partial u/\partial\tau+hu=\varphi$ peremfeltételt, ahol h adott $C(\Gamma_{\Omega_1})$-beli függvény.

A második részben ugyanezt a problémát vizsgáljuk meg *Szoboljev-féle általánosított deriváltak* mellett, és megmutatjuk, hogy a sima határok esetében ismert nyom vagy trace tétel az általunk vizsgált esetben is érvényes.

1. Klasszikus kiterjesztési tétel

A 2.1 tétellel és a 2.2 megjegyzéssel bevezettünk az Ω_1-en egy sokaságstruktúrát, amelyben a Γ_{Ω_1} $n-1$-dimenziós C^∞ részsokaság lesz. A Γ_{Ω_1}-et lefedhetjük olyan $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ koordiántakörnyezetekkel, hogy a $\Gamma_{\Omega_1}\cap U_\alpha$ éppen a ψ_α: $[0,2]\times V_\alpha\to U_\alpha$ $(V_\alpha\subset R^{n-1})$ koordinátázó homeomorfizmussal képezett $\psi_\alpha(1, V_\alpha)$ felület, és teljesülnek a 2.1 megjegyzésben foglaltak.

Miután a határ C^∞ részsokaság, a $C(\Gamma_{\Omega_1})$ függvénytérnek definiálhatjuk differenciálható függvényekből álló altereit. Az Ω_1-en értelmezett függvényeknek is definiáljuk a bevezetett sokaságra nézve differenciálható függvényosztályait.

3.1. DEFINÍCIÓ.

1. $C^k(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)=\{u|u\colon \Gamma_{\Omega_1}\to R$ és a fenti sokaság struktúrában k-szor folyt. diff.-ható$\}$

2. $C_0^k(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)=\{u|u\in C^k(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$, supp (u) kompakt$\}$

3. $C^\infty(\Gamma_{\Omega_1}, \tau) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C^i(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$

4. $C_0^\infty(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)=\{u|u\in C^\infty(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$, supp (u) kompakt$\}$

5. $C^k(\Omega_1, \tau)=\{u|u\colon \Omega_1\to R$, és a fenti sokaság struktúrában k-szor folyt. diff.$\}$

6. $C_0^k(\Omega_1, \tau)=\{u|u\in C^k(\Omega_1, \tau)$, supp (u) kompakt$\}$

7. $C^\infty(\Omega_1, \tau)= \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C^i(\Omega_1, \tau)$

8. $C_0^\infty(\Omega_1, \tau)=\{u|u\in C^\infty(\Omega_1, \tau)$, supp (u) kompakt$\}$

Megjegyezzük, hogy a τ azért szerepel a jelölésekben, mert a sokaságstruktúra felépítésében meghatározó szerepet játszik. Ez jelzi, hogy a differenciálhatóság a bevezetett sokaságstruktúrában értendő.

3.1. TÉTEL. Legyenek h, φ, $\psi\in C^l(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$-beli függvények. Ezekhez megadható olyan $u\in C^l(\Omega_1, \tau)$-beli függvény, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+hu = \varphi \tag{3.1}$$

$$u|_{\Gamma_{\Omega_1}} = \psi.$$

A $(\varphi, \psi)\to u$ hozzárendelés megadható folytonos lineáris leképezés formájában. A $C^l(\Omega_1, \tau)\to C^l(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$, $u\to(\varphi, \psi)$ (3.1)-el megadott leképezés nyilvánvalóan folytonos lineáris leképezés.

Bizonyítás:

a) Vegyük az Ω_1-nek egy a 2.2. megjegyzésben biztosított koordinátakörnyezetekkel való fedését.

Ez indukálja Γ_{Ω_1}-nek egy fedőrendszerét, amelyek R^n nyílt halmazaiból állnak ezért feltehetjük, hogy az A indexhalmaz megszámlálható. (Szeparábilis metrikus téren ugyanis nyílt fedőrendszer helyettesíthető megszámlálhatóval.) Indexeljük e halmazrendszert az alábbiak szerint: $U_0=\tilde{\Omega}$, $U_1=\tilde{\Omega}_1$, az $U_2, U_3, \dots, U_j, \dots$ pedig a Γ_{Ω_1} fedőrendszere.

A Γ_{Ω_1} metrikus teret lefedik a $\Gamma_{\Omega_1}\cap U_j=U_j'$, $j=2, \dots, m, \dots$ nyílt halmazok. A fedőrendszer azonban a tér parakompaktsága miatt finomítható lokálisan véges U_j' fedőrendszerré. Hagyjuk el az $\{U_j'\}_{j=2}^{\infty}$ fedőrendszerből az üres halmazokat, az így kapott halmazrendszert átindexelve, az egyszerűség kedvéért jelöljük továbbra is $\{U_j'\}_{j=2}^{\infty}$-gel.

A 2.1. tétel ψ_j leképezése $2\leqq j<\infty$ mellett megfeleltet az U_j' nyílt halmaznak egy $(0, 2)\times V_j'\subset R\times R^{n-1}$ környezetet, amelyre igaz, hogy

$$\psi_j(1, V_j') = U_j' \tag{3.2}$$

és a $\{\psi_j\}_{j=2}^{\infty}$ leképezések 2.1. tételbeli konstrukciójából következik, hogy az

$$\tilde{U}_j\colon\ \psi_j((0,2)\times V_j'),\quad j = 2, \dots, p, \dots \tag{3.3}$$

nyílt halmazok az U_0, U_1-gyel kiegészítve Ω_1-nek egy lokális véges nyílt fedőrendszerét adják.

b) A Γ_{Ω_1} halmazon mint C^∞ sokaságon az U_j' lokálisan véges fedőrendszerhez tartozik egy $\{g_j\}_{j=2}^{\infty}\subset C_0^\infty(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$ függvényekből álló egységfelbontás, amelyre teljesül, hogy $\operatorname{supp}(g_j)\subset \tilde{U}_j'$, $j=2, \dots, m, \dots$

c) Legyen j, $2\leqq j<\infty$ rögzített index, és legyen H_j az alábbi halmaz:

$$H_j:= \tilde{U}_j\setminus\left(U_0\cup U_1\cup\left(\bigcup_{\substack{p=2\\ p\neq j}}^{\infty} U_p\right)\right). \tag{3.4}$$

Legyen (α_j, β_j) az alábbi számpár:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \min(a_j, 1/2), \quad \text{ahol} \\ a_j &= \inf\{t|(t, x)\in 0{,}2)\times V_j',\quad \psi_j(t, x)\in H_j\}, \\ \beta_j &= \max(b_j, 3/2), \\ b_j &= \sup\{t|(t, x)\in(0{,}2)\times V_j',\quad \psi_j(t, x)\in H_j\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A $0\leqq\alpha_j<1<\beta_j\leqq 2$ mellett képezhető olyan $s_j\in C_0^\infty((0, 2))$-beli nemnegatív függvény, amelyre teljesül az alábbi:

$$s_j(t) = 1,\quad t\in(\alpha_j, \beta_j). \tag{3.6}$$

d) Képezhetjük Ω_1-en az alábbi speciális egységfelbontást:

Legyen j, $2\leqq j<\infty$ egy rögzített index.

Képezzük az U_j' nyílt halmazon definiált g_j függvénnyel a V_j'-n értelmezett

$$\tilde{g}_j:= g_j\circ\psi_j \tag{3.7}$$

C^∞ függvényt. Ennek segítségével megadhatjuk az

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_j&\colon\ (0{,}2)\times V_j' \to R \\ \tilde{\eta}_j(t, x)&:= s_j(t)\cdot g_j(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

függvényt. Legyen ezután az $\eta_j\colon \tilde{U}_j \to R$ függvény az alábbi:

$$\eta_j := \tilde{\eta}_j \circ \psi_j^{-1} \in C_0^\infty(\tilde{U}_j, \tau) \subset C_0^\infty(\Omega_1, \tau) \tag{3.9}$$

Az így nyert függvényrendszer teljesíti az alábbiakat:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \eta_j \leqq 1, \quad \sum_{j=2}^{\infty} \eta_j = 1, \quad x \in \Gamma_{\Omega_1}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial t}(s, x) = 0, \quad \text{ha} \quad (s, x) \in (0{,}2) \times V_j', \quad \text{és} \quad s \in (\alpha_j, \beta_j). \tag{3.11}$$

Az utóbbi a (3.5), az előbbi a (3.6) következménye.

e) Ezzel előkészítettük az u függvény koordinátakörnyezetenkénti megadását. Legyen j, $2 \leqq j < \infty$ egy rögzített érték. Vegyük az $\tilde{U}_j$ koordinátakörnyezeten a φ és h függvények alábbi kiterjesztését:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j(t, x) &:= (\varphi \circ \psi_j)(1, x), \ (t, x) \in (0{,}2) \times V_j', \\ \tilde{h}_j(t, x) &:= (h \circ \psi_j)(1, x), \ (t, x) \in (0{,}2) \times V_j'. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A szóban forgó $\varphi_j, h_j \in C^l(\tilde{U}_j, \tau)$ kiterjesztéseket a

$$\begin{aligned} \varphi_j &:= \tilde{\varphi}_j \circ \psi_j^{-1}, \\ h_j &:= h_j \circ \psi_j^{-1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

definiáló egyenlőségek adják meg.

Vegyük ezután rögzített $x \in V_j'$ mellett a

$$\frac{\partial \tilde{u}_j(t, x)}{\partial t} + \tilde{h}_j(t, x) \cdot \tilde{u}_j(t, x) = \tilde{\varphi}_j(t, x) \tag{3.14}$$

differenciálegyenlet megoldását, amelyet explicit formában is előállíthatunk:

$$\tilde{u}_j(t, 1, x) = \left(\tilde{u}_{j_0}(x) + \int_1^t \tilde{\varphi}_j(s, x) e^{\int_1^t \tilde{h}_j(s', x)\, ds'} ds\right) e^{-\int_1^t \tilde{h}_j(s'', x)\, ds''} \tag{3.15}$$

alakban, $t \in (0, 2)$ mellett. Válasszuk meg az $\tilde{u}_{j_0}$ függvényt $\tilde{u}_{j_0} := \psi \circ \psi_j$-nek, ezzel az $\tilde{u}_j$ függvényt megadtuk. Látható, hogy a $(\varphi, \psi) \to \tilde{u}_j$ kapcsolat lineáris, sőt folytonos is. A kapott függvényre teljesül az

$$\tilde{u}_j \in C^l((0, 2) \times V_j') \tag{3.16}$$

tartalmazás, mert az egyenletünkben szereplő függvények l-szer differenciálhatók, és így a megoldás is a kezdetiérték szerint l-szer differenciálható. Így az

$$u_j := \tilde{u}_j \circ \psi_j^{-1} \in C^l(\tilde{U}_j, \tau) \tag{3.17}$$

is teljesül, és u_j teljesíti a (3.1) peremfeltételt (ez utóbbi kijelentéshez felhasználtuk a

2.1. megjegyzésben foglaltakat). Képezzük mármost a fenti speciális egységfelbontással az

$$u := \sum_{j=0}^{\infty} u_j \eta_j \tag{3.18}$$

összeget, amely összeg minden pont egy környezetében véges összeg, továbbá $u_0=0$, $u_1=0$. Könnyen belátható, hogy az η_j függvények (3.10), (3.11) tulajdonságainak a felhasználásával u teljesíti a kívánt peremfeltételt. Az egész leképezés említett folytonossága pedig a megfelelő C^l terek topológiájának figyelembevételével azonnal adódik. Ezzel a tételt beláttuk.

3.1. MEGJEGYZÉS. Hasonlóan megvizsgálhatók a

$$h_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} + h_2 u = \varphi, \tag{3.19}$$

illetve a

$$\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}(x), u(x), x\right) = \varphi(x), x \in \Gamma_{\Omega_1} \tag{3.20}$$

alakú vegyes típusú peremfeltételek, ahol $h_1, h_2 \in C^l(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$ adott függvények, illetve Φ adott $R^2 \times \Gamma_{\Omega_1}$-en értelmezett l-szer folytonosan differenciálható függvény (ahol Φ adott további feltételeknek tesz eleget).

3.2. MEGJEGYZÉS. Miután az $u \in C^l(\Gamma_{\Omega_1}, \tau)$, a 2.1. tétel 2. állítása értelmében az u Ω-ra vett megszorítása l-szer folytonosan differenciálható az eredeti koordinátákban is. Az azonban nem igaz ezekre a deriváltakra ellentétben a sokaság lokális koordinátái szerinti deriváltakkal, hogy az Ω-n korlátosak lennének.

2. *Nyom-tétel*

A nyom-tétel bizonyításának részleteivel e dolgozatunkban nem foglalkozunk, csupán azt mutatjuk meg, hogy azok a fogalmak és eszközök, amelyek a bizonyításához szükségesek, előállnak a 2.1. tételben bevezetett koordinátakörnyezetek segítségével. Ennél a [4]-ben megadott utat követjük, és az érdeklődők a részleteket ott megtalálhatják. A most következő fogalmak, állítások az idézett könyv 48—55. oldalán találhatók, illetve visszautalások miatt a megelőzőkön. A dolgozat további részében a precíz definíciók hosszadalmassága és bonyolultsága miatt inkább szemléletességre törekszünk, kihasználva, hogy a részleteket bárki pontosan megtalálja.

Legyen a 2. pontban szereplő Ω_1 halmaz ezúttal R^n. Legyen továbbá $\Omega \subset R^n$ egy korlátos nyílt halmaz, amelyre teljesül az előző pont 2.1 feltevése.

Miután Ω korlátos, ezért a 2.1 tétel által biztosított koordinátakörnyezetekből kiválasztható véges fedőrendszer is, legyen e véges fedőrendszer $\{U_i, V_i, \psi_j\}_{i=1}^m$, ahol $\bigcup_{i=1}^m U_i \supset \Gamma$, ahol $\Gamma := \partial\Omega$, $V_i \subset R^{n-1}$ alkalmas nyílt halmaz, gömbi környezet, és ψ_i a 2.1 tételbeni (2.31) leképezés. Az, hogy a V_i nyílt halmazt gömbi környezetnek választjuk, nem jelenti az általánosság csorbítását.

Legyen $\{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset C_0^\infty(R^n, \tau)$ a Γ halmazra megszorítva egy egységfelbontás, melyre teljesül még, hogy supp $(\varphi_i) \subset U_i$. Ezt a rendszert az Ω-n belül kiegészíthetjük egységfelbontássá, alkalmas normálás és φ_0 hozzávételével.

Egy $f\colon \Omega \to R$ mérhető függvény integrálján az alábbit értjük:
Legyen Ω_i a következő halmaz:

$$(3.21)\qquad \Omega_i = \begin{cases} \Omega \cap U_i, & i = 1, \dots, m \\ \{\varphi_0 > 0\} \cap \Omega, & i = 0 \end{cases}$$

és legyen $\psi_0 := \mathrm{id}_{\Omega_0}$, $V_0 := \Omega_0$.

3.2. DEFINÍCIÓ. Az f függvénynek az integrálján a bevezetett sokaságra nézve az alábbi kifejezést értjük, és ezt $\int\limits_\Omega f dv$-vel jelöljük:

$$(3.22)\qquad \int\limits_\Omega f\, dv := \sum_{i=0}^{m} \int\limits_{\Omega_i} (f\varphi_i) \circ \psi_i \, dx^i,$$

ahol dx^i az i-edik koordinátakörnyezet koordinátái szerinti integrálást jelöli. Ha ez az összeg értelmes, akkor létezik az integrál, ha véges, akkor az f integrálható.

3.3. DEFINÍCIÓ: az $f\colon \partial\Omega \to R$ mérhető függvény $\partial\Omega$-ra vett integrálján értjük, és $\int\limits_{\partial\Omega} f d\varrho$-val jelöljük az

$$(3.23)\qquad \int\limits_{\partial\Omega} f\, d\varrho := \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i \cap \Gamma} (f\varphi_i) \circ \psi_i \, d\xi^i$$

ahol $\xi_i \in V_i \subset R^{n-1}$ koordinátákat jelöli. Az f a határon integrálható, ha a (3.23) kifejezés véges érték.

A bevezetett integrálhatósági fogalom segítségével definiálhatók az integrálható függvényterek.

Mi most a számunkra fontos *Szoboljev-féle tereket* vezetjük be. A részletek az említett [4] könyv első fejezetének tárgyát képezik. Itt, mint már jeleztük, a részletekbe nem megyünk bele, csupán az alapelvre világítunk rá, bizonyítás igénye nélkül.

Ismertnek tételezzük fel a $H^s(R^n)$ tér definícióját, ahol $s \in R$ tetszőleges. Ha $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, és $u \in H^s(R^n)$, akkor ebből következik, hogy $\varphi u \in H^s(R^n)$ is teljesül. Sőt

$$(3.24)\qquad \|\varphi u\|_{H^s} \leqq c_0 \cdot \|u\|_{H^s}$$

Vegyük most az $R^+ \times R^{n-1}$ zárt félteret. Itt $H^s(R^+ \times R^{n-1})$ téren azon u függvények összességét értjük, amelyekhez megadható olyan $\tilde{u} \in H^s(R^n)$, hogy

$$(3.25)\qquad \tilde{u}|_{R^+ \times R^{n-1}} = u \quad \text{m. m.}$$

teljesül.

Vegyünk most egy $x \in R^{n-1}$ pontot, és ennek egy $G_\delta(x)$ környezetét. Legyen a $[0, 1] \times G_\delta(x)$ halmazon megadva egy olyan

$$(3.26)\qquad s\colon [0, 1] \times G_\delta(x) \to R^+$$

végtelenszer differenciálható függvény, amely a $([0, 1] \times \partial G_\delta(x)) \cup (1 \times G_\delta(x))$ halmazon minden deriváltjával együtt eltűnik. Ekkor ez a függvény az $R^+ \times R^{n-1}$ halmazra kiterjeszthető a C^∞ tulajdonság megtartásával, méghozzá az eredeti értelmezési tartomány komplementerében azonosan 0 értelmezéssel.

Ismét igaz az, hogy ha egy $u \in H^s(R^+ \times R^{n-1})$, akkor su is oda tartozik, sőt e leképezés a (3.24)-hez hasonlóan folytonos lesz.

Ez adja a lehetőséget arra, hogy definiáljuk a számunkra szükséges függvények $H^s([0,1] \times G_\delta(x))$-be tartozását a következőképpen:

Egy

$$u: [0,1] \times G_\delta(x) \to R \tag{3.27}$$

mérhető függvénnyel képezett us függvény akkor lesz $H^s([0,1] \times G)$-beli, ha az

$$\widetilde{us}(z) = \begin{cases} (us)(z), & z \in [0,1] \times G_\delta(x) \\ 0, & z \in R^+ \times R^{n-1} \setminus [0,1] \times G_\delta(x) \end{cases} \tag{3.28}$$

függvény $H^s(R^+ \times R^{n-1})$-beli.

E definíciók megalapozását az említett fejezet részletesen tárgyalja.

3.4. Definíció. $H^s(\Omega, \tau)$ függvénytéren azon u: $\bar{\Omega} \to R$ mérhető függvények összességét értjük, amelyekre a fenn bevezetett $(\varphi_i)_{i=0}^m$ egységfelbontással teljesül, hogy

$$\begin{aligned} &1.\ u\varphi_0 \in H^s(R^n) \\ &2.\ (u\varphi_i) \circ \psi_i \in H^s([0,1] \times V_i), \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Az u függvény $H^s(\Omega, \tau)$ normája pedig

$$\|u\|_{H^s} = \left(\sum_{i=1}^m \|(u\varphi_i) \circ \psi_i\|^2_{H^s([0,1] \times V_i)} + \|u\varphi_0\|^2_{H^s(R^n)} \right)^{1/2}. \tag{3.30}$$

3.5. Definíció. A $H^s(\partial\Omega, \tau)$ függvénytér azon u: $\partial\Omega \to R$ mérhető függvények összességét jelenti, amelyekre teljesül, ahogy $i = 1, 2, \ldots, m$ mellett

$$(u\varphi_i) \circ \psi_i \in H^s(R^{n-1}). \tag{3.31}$$

Az u függvény $H^s(\partial\Omega, \tau)$ normája pedig

$$\|u\|_{H^s(\partial\Omega, \tau)} = \left(\sum_{i=1}^m \|(u\varphi_i) \circ \psi_i\|^2_{H^s(R^{n-1})} \right)^{1/2} \tag{3.32}$$

lesz.

A klasszikus kiterjesztési tételben szereplő (3.1)-gyel megadott leképezés értelmezhető a most bevezetett *Szoboljev tereken* is, méghozzá a $H^s(\Omega, \tau)$-ból $H^{s'}(\partial\Omega, \tau)$-ba, ahol s' valamilyen alkalmas valós szám. E leképezés pontos megadása szintén megtalálható az említett [4] irodalom első fejezetében és ugyancsak a határnak (2.31) alakú környezetekkel való lefedésén múlik. Érvényes rá a 3.1. tétellel analóg nyom tétel.

3.2. Tétel. Megadható a

$$\begin{aligned} &H^s(\Omega, \tau) \to \prod_{i=0}^k H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau) \\ &u \to \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial \tau^i} \bigg|_{\partial\Omega} \,\bigg|\, i = 0, 1, \ldots, k \right\} \end{aligned} \tag{3.33}$$

folytonos ráképzés. Megadható továbbá egy $g\colon \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau) \to H^s(\Omega, \tau)$ folytonos lineáris leképezés, úgy, hogy $(u_0, u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau)$ esetén teljesül a

$$\left.\frac{\partial^i g(u_0, u_1, \dots, u_k)}{\partial\tau^i}\right|_{\partial\Omega} = u_i \text{ m. m.} \tag{3.34}$$

azonosság.

Függelék

F1. Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvények kiterjesztése

a) *Kiterjesztés metrikus tereken.*

Legyen X egy metrikus tér, és legyen $A \subset X$ egy zárt részhalmaz.

F1.1. TÉTEL. Ha az $f\colon A \to R$ függvény eleget tesz a *lokális Lipschitz-féle feltételnek*, akkor megadható egy $\tilde{f}\colon X \to R$ függvény, amely úgyszintén eleget tesz a *lokális Lipschitz-féle feltételnek*, és az f kiterjesztése az X-re azaz teljesül az

$$\tilde{f}|_A = f \tag{F1}$$

egyenlőség.

F1.1. MEGJEGYZÉS. Ha $A \subset X$ tetszőleges részhalmaz, (azaz nem szükségképpen zárt) és az $F\colon A \to R$ eleget tesz a *globális Lipschitz-féle feltételnek*, akkor megadható olyan $f\colon X \to R$ leképezés, hogy eleget tesz a *globális Lipschitz-féle feltételnek*, és az (F1) teljesül.

Bizonyítás. A fenti állítások bizonyítása megtalálható az [1], [4], [12], [16] irodalomban.

b) *Kiterjesztés R^n-en*

Az a) pont eredményeit annyiban élesítjük e pontban, hogy olyan $\tilde{f}\colon \Omega \subset R^n \to R$ kiterjesztés létezését bizonyítjuk be $A \subset \Omega$, A Ω-ban zárt részhalmaz esetében, amely az $\Omega \setminus A$ halmazon C^∞ függvény, természetesen a *Lipschitz-tulajdonság* megtartása mellett.

Ennek bizonyításához belátunk egy lemmát.

F1.1. LEMMA. Tetszőleges $\Omega \subset R^n$ nyílt halmaz esetén megadható olyan $\varepsilon(y) > 0$, $y \in \Omega$ végtelenszer differenciálható függvény, amelyre $\varepsilon(y) \leq d(y, \Gamma)/2$, ahol Γ az Ω halmaz határa, a d pedig az $y \in \Omega$ pontnak ettől való távolsága.

Bizonyítás.

Ismeretes, hogy Ω-hoz megadható olyan kompakt halmazok $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ monoton növő sorozata, amely teljesíti az alábbiakat:

1. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$,

2. $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$,

3. Létezik olyan $0 \leqq \varphi_i \in C^\infty(\Omega)$ minden K_i-hez $i=1,2,\ldots$, hogy

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in K_i \\ 0, & \text{ha} \quad x \notin K_{i+1} \end{cases},$$

4. $d(K_i, \partial\Omega) \leqq 1/i$.

Képezzük minden φ_i-hez az

$$M_i = \sup_{x\in\Omega} \sup_{|p|\leqq i} \left| \frac{\partial^{|p|} \varphi_i(x)}{\partial x^p} \right| \tag{F2}$$

számot. Minden $i=1,2,\ldots$ mellett $M_i \geqq 1$, ezért képezhetjük a

$$C_n = \frac{1}{M_n(n+1)2^{n+1}} \tag{F3}$$

számsorozatot is. A kapott számsorozattal képezzük most az

$$\varepsilon(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(x) \tag{F4}$$

függvényt. Megmutatjuk, hogy eleget tesz tételünk követelményeinek.

1. ε sora és valamennyi deriválással nyert sor C_i megadása folytán (lásd (F3)) egyenletesen konvergens az egész Ω-n, ezért $\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$.

2. $x \in \Omega$-hoz megadható olyan i index, hogy $x \in K_i$. De e ponthoz $\varphi_i(x)$ értéke 1, $C_i \neq 0$, a sor nemnegatív tagú, ezért $\varepsilon(x) > 0$, tetszőleges Ω-beli pontra.

3. Legyen $x \in \Omega$ egy tetszőleges pont, és legyen $d(x, \partial\Omega) = h$. Ekkor található olyan legkisebb i index, hogy $1/(i+1) \leqq h$. Ez azt jelenti, hogy ε sorában az x helyen az i-edik tag adhat először 0-tól különböző járulékot, a 3. miatt. Ennek eredménye az alábbi becslés:

$$\varepsilon(x) \leqq \frac{1}{2} \sum_{j=i}^{\infty} C_j \varphi_j(x) \leqq \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(j+1)2^{j+1}} \leqq \frac{1}{(i+1)\cdot 2^i} \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} h \tag{F5}$$

F1.2. Megjegyzés. Az (F5) becslés érvényben marad az ε függvény valamennyi deriváltjára is, a határ közelében. Ez azt jelenti, hogy az ε leképezés valamennyi deriváltja a határhoz tartva 0-hoz tart.

Legyen $y \in \Omega$ tetszőleges pont, definiáljuk a $c\colon \Omega \to R^+ \setminus \{0\}$ C^∞ leképezést az alábbi paraméteres integrál sgeítségével:

$$c(y) := \int_{G_{\varepsilon(y)}(y)} \exp\left(- \frac{1}{1 - \dfrac{\|x-y\|^2}{(\varepsilon(y))^2}} \right) dx, \tag{F6}$$

ahol $G_{\varepsilon(y)}(y)$ az y körüli $\varepsilon(y)$ sugarú környezetet jelenti, amely az F1.1. lemma következtében Ω-beli.

A bevezetett c függvény segítségével adhatjuk meg a bizonyításban közvetlenül felhasználásra kerülő ψ: $\Omega\times\Omega\to R^+$ alábbi leképezést:

$$\text{(F7)}\qquad \psi(x, y):=\begin{cases} c(y)^{-1}\cdot\exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\|x-y\|}{\varepsilon(y)}\right)^2}\right), & \text{ha}\quad \|x-y\|\leqq\varepsilon(y)\\ 0, & \text{ha}\quad \|x-y\|\geqq\varepsilon(y)\end{cases}$$

ahol a $c(y)$ és $\varepsilon(y)$ az (F6), illetve (F4)-gyel definiált függvények.

Az (F6) miatt minden $y\in\Omega$ mellett igaz, hogy

$$\text{(F8)}\qquad \int_\Omega \psi(x, y)\,dx = 1.$$

Ezután kimondjuk és bebizonyítjuk az élesített kiterjesztési tételt:

F1.2. TÉTEL. Legyen $A\subset\Omega\subset R^n$, ahol A az Ω nyílt halmazra nézve zárt részhalmaz. Legyen f: $A\to R$ *lokális Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő függvény. Ekkor f-hez megadható egy $\tilde{f}$: $\Omega\to R$ *lokális Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő függvény, amely

1. Kiterjesztése az f-nek Ω-ra.
2. $\Omega\setminus A$-n végtelen sokszor differenciálható.

Bizonyítás:

Az F1.1. tétel szerint megadható az f-nek egy kiterjesztése a *Lipschitz-tulajdonság* megtartásával az egész Ω-ra. Jelöljük e kiterjesztést f_1-gyel.

Miután az A az Ω nyílt halmaz relatív topológiájában zárt, így az $\Omega\setminus A\subset R^n$ nyílt részhalmaza R^n-nek. Jelöljük ezt a halmazt $\tilde{\Omega}$-mal, és képezhetjük $\tilde{\Omega}$-hoz az (F7.)-tel megadott ψ: $\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}\to R^n$ leképezést. Ennek segítségével felírhatjuk az alábbi $\tilde{f}$: $\Omega\to R$ függvényt:

$$\text{(F9)}\qquad \tilde{f}(y)=\begin{cases}\int_\Omega \psi(x, y)f_1(x)\,dx, & y\in\tilde{\Omega}\\ f_1(y), & y\in A\end{cases}$$

Belátjuk, hogy az $\tilde{f}$ eleget tesz az F1.2. tétel feltételeinek.

a) A paraméteres integrálok differenciálhatósági feltételei és a ψ és f_1 tulajdonságai miatt $\tilde{f}$ az $\tilde{\Omega}$-on végtelenszer differenciálható.

b) Belátjuk, hogy $\tilde{f}$ eleget tesz a *lokális Lipschitz feltételnek.* Miután beláttuk, hogy az $\tilde{f}$ az $\tilde{\Omega}$ halmazon differenciálható, így itt eleget tesz a mondott feltételnek. Ezért elegendő megmutatnunk, hogy minden A-beli pontnak van olyan Ω-beli környezete, hogy ott az $\tilde{f}$ eleget tesz a kívánt feltételnek.

Legyen tehát $x\in A$. Miután a kiterjesztett f_1 függvény itt eleget tesz a *lokális Lipschitz-féle feltételnek,* ezért van olyan $\delta>0$, hogy a $G_\delta(x)$-ben A-beli pontokra $L(x)=:L$ *Lipschitz-féle állandóval* eleget tesz a függvény a kívánt feltételnek. Vegyük a $G_{\delta_1}(x)\subset\Omega$, $\delta_1\leqq\delta/2$ környezetet, belátjuk, hogy ebben teljesül a szóban-forgó feltétel.

Legyenek $x_1, x_2 \in G_{\delta_1}(x)$, tetszőleges pontok. Megmutatjuk, hogy megadható olyan $\tilde{L}$ állandó, amellyel teljesül az

$$|\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)| \leqq \tilde{L} \cdot \|x_1-x_2\|$$

egyenlőtlenség. Három eset lehetséges:

a) $x_1, x_2 \in \tilde{\Omega}$,

b) $x_1 \in \tilde{\Omega}$, $x_2 \in A$,

c) $x_1, x_2 \in A$.

A c) esetet elintéztük a fenti megjegyzésünkkel.

Az *a)* esetben elegendő azt az esetet nézni, amikor az x_1, x_2 pontokat összekötő szakasz is $\tilde{\Omega}$-ban van, különben e szakasz felbomlik három részre, amelyek a második, illetve a harmadik esetekhez tartoznak.

Marad tehát a módosított a) és a b) eset bizonyítása.

A b) eset bizonyítása.

Legyen tehát $x_1 \in G_{\delta_1}(x) \cap \tilde{\Omega} \subset G_{\delta/2}(x)$ és $x_2 \in G_{\delta_1}(x) \cap A \subset G_{\delta/2}(x)$. Becsüljük meg ekkor az alábbi különbséget:

$$\text{(F10)}\quad \begin{aligned} |\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)| &\leqq \Big|\int_{\Omega} \psi(y, x_1)(f_1(x)-f_1(x_2))\,dy\Big| \leqq \int_{\Omega} \psi(y, x_1)\,|f_1(x_1)- \\ &-f_1(x_2)|+\int_{\Omega} \psi(y, x_1)\,|f_1(y)-f_1(x_1)| \leqq L \cdot \|x_1-x_2\|+L\varepsilon(x_1), \end{aligned}$$

amelynél figyelembe vettük δ_1 definícióját, az (F8)-at, és az (F7)-et. Vegyük most tekintetbe az

$$\text{(F11)}\quad \varepsilon(x_1) \leqq \frac{1}{2}\, d(x_1, \partial A) \leqq \frac{1}{2}\,\|x_1-x_2\|$$

becslést, amelynek első részét az F1.1. lemma biztosítja, a másodikat pedig a pontnak halmaztól mért távolsága teljesíti, ezért

$$\text{(F12)}\quad |\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)| \leqq \frac{3}{2}\, L\|x_1-x_2\|$$

ami a b) esetet bizonyítja.

Az a) eset bizonyítása.

Legyen mondjuk $\varepsilon(x_2)<\varepsilon(x_1)$. Állítsuk elő az $\tilde{f}(x_2)$ függvényértéket úgy, hogy az (F9.) integrált a

$$\text{(F13)}\quad z \in G_{\varepsilon(x_2)}(x_2) \to x_1+(z-x_2)\frac{\varepsilon(x_1)}{\varepsilon(x_2)} \in G_{\varepsilon(x_1)}(x_1)$$

hasonlósági transzformáció segítségével számítjuk ki. Könnyen belátható e transzformációra az alábbi azonosság:

$$\text{(F14)}\quad \int_{G_{\varepsilon(x_2)}(x_2)} \psi(y, x_2) f_1(y)\,dy = \int_{G_{\varepsilon(x_1)}(x_1)} \psi(z, x_1) f_1\left(x_2+(z-x_1)\frac{\varepsilon(x_2)}{\varepsilon(x_1)}\right) dz$$

Megbecsülhetjük ezután a *Lipschitz-féle feltételhez* szükséges különbség abszolút értéket:

$$\text{(F15)}\qquad \begin{aligned} |\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)| &= \left| \int\limits_{G_{\delta(x_1)}(x_1)} \psi(y, x_1)\left(f_1(y)-f_1\left(x_2+(y-x_1)\right)\frac{\varepsilon(x_2)}{\varepsilon(x_1)}\right) dy \right| \leqq \\ &\leqq \int\limits_{G_{\delta(x_1)}(x_1)} \psi(y, x_1)\left(L\|y-x_1\| \frac{|\varepsilon(x_1)-\varepsilon(x_2)|}{\varepsilon(x_2)}\right) dy + L\|x_1-x_2\|. \end{aligned}$$

Felhasználjuk az $\|y-x_1\| \leqq \varepsilon(x_1)$ és az ε függvény deriváltjainak korlátosságát, amely a függvény előállításának következménye,

$$\text{(F16)}\qquad |\tilde{f}(x_1)-\tilde{f}(x_2)| \leqq (L+\tilde{L})\|x_1-x_2\|$$

ahol $\tilde{L}$ az ε függvény *univerzális Lipschitz-féle állandója.*

Az a), b) és c) esetekre kapott *Lipschitz-féle állandók* maximuma a $G_{\delta_1}(x)$ környezetben megfelel az $\tilde{f}$ *Lipschitz-féle állandójának.* Ezzel a tételt beláttuk.

F2. Folytonos függvények egy kiterjesztési problémája

Legyen f: $G \to R$, ahol $G \subset R^n$ nyílt halmaz, $f \geqq c > 0$ folytonos függvény. Legyen. $K \subset G$ kompakt részhalmaz. Bebizonyítjuk, az alábbi ψ függvény létezését:

F2.1. Tétel. Megadható egy ψ: $[0, 1] \times K \to R$ leképezés, amely teljesíti az alábbiakat:

1. $\psi \in C^\infty([0, 1) \times K) \cap C([0, 1] \times K)$,
2. $\psi(1, x) = f(x)$, $\psi(0, x) = 0$, minden $x \in K$ mellett,
3. $\psi(t, x)$ a t változójának minden rögzített $x \in K$ mellett szigorúan monoton növő végtelenszer differenciálható függvénye.
4. Minden $x \in K$-ra léteznek $(1, x)$-ben a t szerinti alábbi deriváltak, és teljesítik a

$$\text{(F17)}\qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(1, x) = 1, \quad \frac{\partial^i \psi}{\partial t^i}(1, x) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots$$

feltételeket.

A tétel bizonyítása előtt belátunk egy lemmát:

F2.1. Lemma. Megadható olyan ψ^0: $[0, 1] \times K \to R$ leképezés, amely teljesíti az alábbiakat:

1. $\psi^0 \in C^\infty([0, 1) \times K) \cap C([0, 1] \times K)$,
2. $\psi^0(1, x) = f(x)$, minden $x \in K$ mellett,
3. $\psi^0(t, x)$ nem csökken rögzített $x \in K$ mellett t-ben,
4. minden $x \in K$ mellett $(1, x)$-ben léteznek a t szerinti deriváltak, és teljesítik a

$$\text{(F18)}\qquad \frac{\partial \psi^0}{\partial t}(1, x) = 1, \quad \frac{\partial^i \psi^0}{\partial t^i}(1, x) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots$$

feltételeket.

F2.1. Megjegyzés. Valójában többet látunk be, nevezetesen hogy $\psi(\cdot, x) \in C^\infty([0, 1])$, minden rögzített $x \in K$ mellett.

A lemma bizonyítása:

Megadható olyan monoton nem csökkenő függvények egy $C^\infty([0, 1])$-beli $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ családja, melyek teljesítik az alábbi feltételeket:

(F19) $$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1-1/i] \\ 0 \leqq \varphi_i(x) \leqq 1, & x \in [1-1/i,\ 1-1/(i+1)] \\ 1, & x \in [1-1/(i+1),\ 1] \end{cases}$$

Legyen C_i az alábbi nemnegatív szám:

(F20) $$C_i = \max_{x\in[0,1]} \max_{0\leqq k\leqq i} |\varphi_i^{(k)}(x)|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Képezzük az f_i: $K \to R$, $i=1, 2, \dots$ folytonos függvények egy családját a következőképpen:

(F21) $$f_i := f - \varepsilon_i,$$

ahol

(F22) $$\varepsilon_i := \min\left\{\frac{1}{C_i 2^i},\quad c,\quad \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}\right\}$$

Az $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ sorozat definíciójának a következménye, hogy az $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ függvényrendszer szigorúan monoton növekedő, és $n \to \infty$ mellett f-hez tart.

Megadható az f_i függvényhez és $\varepsilon_i/4$-hez olyan $\tilde{f}_i \in C^\infty(K)$ függvény, hogy teljesül az

(F23) $$|f_i - \tilde{f}_i| < \frac{\varepsilon_i}{4}$$

feltétel.

Megbecsüljük az $\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1}$ különbséget alulról és felülről:

(F24) $$\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1} \leqq \tilde{f}_i - f_i + f_i - f_{i-1} + f_{i-1} - \tilde{f}_{i-1} \leqq \frac{\varepsilon_{i-1}}{4} + \varepsilon_{i-1} + \frac{\varepsilon_{i-1}}{4} \leqq \frac{6}{C_{i-1} 2^{i+2}}$$

Az alsó becslés:

(F25)

$$\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1} = \tilde{f}_i - f_i + f_i - f_{i-1} + f_{i-1} - \tilde{f}_{i-1} \geqq f_i - f_{i-1} - |\tilde{f}_i - f_i| - |\tilde{f}_{i-1} - f_{i-1}| \geqq \frac{\varepsilon_{i-1}}{8} > 0.$$

Képezzük ezután a

(F26) $$h_i := \tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

függvénysorozatot. Ennek segítségével legyen

(F27) $$\psi_1(t, x) := \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(t) \cdot h_i(x) + \tilde{f}_1(x), \quad (t, x) \in [0, 1] \times K$$

leképezést. A sor konvergenciáját az (F24) és (F20) alapján nyerhető

(F28) $$|\varphi_i h_i| \leqq \frac{6}{2^{n+2}}$$

becslés biztosítja. A sornak minden rögzített $x \in K$ mellett valamennyi t szerinti deriváltja az említett (F20)-as definíció miatt egyenletesen konvergál a zárt $[0, 1]$ intervallumon, és így rögzített $x \in K$ mellett a $\psi_1(\cdot, x) \in C^\infty([0, 1])$, sőt szabad a sort tagonként deriválni, amiből következik $\frac{\partial^i \psi_1}{\partial t^i}(1, x) = 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ mellett.

Ha továbbá $t < 1$, minden rögzített $x \in K$ mellett valamennyi derivált sor ezen (t, x) egy alkalmas környezetében sima függvények véges összege, a $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ függvényrendszer (F19) tulajdonsága következtében. Ezért a $\psi_1 \in C^\infty([0, 1) \times K) \cap C([0, 1] \times K)$.

A h_i függvények (F26) definíciója és a $\varphi_i(1) = 1$ feltételek biztosítják, hogy a ψ_1 teljesíti a lemma 2. állítását is. Az is igaz, hogy a ψ_1 monoton nem csökkenő, hiszen ilyen függvények összege.

A ψ_1-ből könnyen megkaphatjuk most már a keresett függvényt:

(F29) $$\psi^0(t, x) := \psi_1(t, x) + (t - 1).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez a függvény tényleg teljesíti a lemma állításait.

Az F2.1 tétel bizonyítása:

Legyen ψ^0 az F2.1 lemmában biztosított függvény. Megadható ψ^0-hoz olyan $1/2 \geqq \delta > 0$, hogy minden $x \in K$ mellett a $\psi^0(t, x) \geqq c/2$, a $\partial\psi^0(t, x)/\partial t > 1/2$, $t \in [1 - \delta, 1]$ mellett. Ezt a ψ^0 és deriváltjának folytonossága, a lemma 2. és 4. feltételei és K kompaktsága biztosítják. Legyen ψ^1 az alábbi függvény:

(F30) $$\psi^1(t, x) = \alpha t, \quad (t, x) \in [0, 1] \times K,$$

ahol az

(F31) $$\alpha := \min\left\{\frac{c}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Vegyük most a $[0, 1]$ intervallum következő fedését:

(F32) $$[0, 1] = [0, 1 - \delta/2) \cup (1 - \delta, 1].$$

Ezen intervallumokhoz megadható két függvényből álló $C^\infty([0, 1])$-egységfelbontás, amelynek függvényei legyenek β_1, illetve β_2, ahol

(F33) $$\begin{aligned} \beta_1(x) &= 0, \quad \text{ha} \quad x \in [1 - \delta/2, 1] \\ \beta_2(x) &= 0, \quad \text{ha} \quad x \in [0, 1 - \delta] \end{aligned}$$

és $\beta_i \geqq 0$, $i = 1, 2$, és

(F34) $$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

továbbá β_1 monoton fogyó, míg β_2 monoton növő függvények.

Képezzük a

(F35) $$\psi(t, x) := \beta_1(t) \cdot \psi^1(t, x) + \beta_2(t) \cdot \psi^0(t, x)$$

függvényt. Belátjuk, hogy ez eleget tesz tételünk feltételeinek.

Ehhez csupán a monotonitás feltételeit kell leellenőriznünk. Ezt is csupán az $[1 - \delta, 1 - \delta/2]$ intervallumon. Legyenek $t_1, t_2 \in [1 - \delta, 1 - \delta/2]$ rögzített pontok, és gyen $x \in K$ szintén rögzített. Ha

$$t_2 > t_1, \quad \text{akkor} \quad \beta_2(t_2) \geqq \beta_2(t_1). \tag{F36}$$

Ezért

$$\beta_2(t_2)\cdot\psi^0(t_2, x)+\big(1-\beta_2(t_2)\big)\psi^1(t_2, x) > \beta_2(t_2)\cdot\psi^0(t_1, x)+\big(1-\beta_2(t_2)\big)\cdot\psi^1(t_1, x) \geqq$$

$$\geqq \beta_2(t_1)\psi^0(t_1, x)+\big(1-\beta_2(t_1)\big)\cdot\psi^1(t_1, x), \tag{F37}$$

ahol az első egyenlőtlenség a ψ^0, ψ^1 függvények monotonitásából adódott, a második pedig az (F36) és amiatt teljesül, hogy $\psi^1(t, x) \leqq c/2 \leqq \psi^0(t, x)$ teljesül δ választása és a ψ^1 (F30)-as definíciója következtében a $(t, x) \in [1-\delta, 1] \times K$ pontokra. A többi állítás automatikusan a ψ^0 és ψ^1 tulajdonságai alapján teljesül, ezzel a tételt beláttuk.

IRODALOM

[1] BANACH, S., *Theory of Functions fo Real Variables* (Monografie Matematiczne, Warszawa, 1951).

[2] CIPSZER, J. and GEHÉR, L., "Extension of function satisfying a Lipschitz conditions", *Acta Math. Acad. Sci. Hun.* **6** (1955) 213—220.

[3] LAKSHMIKANTAM, V. and LEELA, S., *Differential and Integral Inequalities, II.* (Academic Press, New York, London, 1969).

[4] LIONS, J. L. and MANGENES, E., *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications* (orosz fordítás: Mir, Moszkva, 1971).

[5] LIONS, J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

[6] MCSHANE, E. J., "Extension of range of functions", *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934) 837—842.

[7] VALENTINE, F. A., "On the extension of vector function so as to preserve a Lipschitz condition", *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943).

[8] Бержбинский, Г. М., «Об индексе дефекта второй и третей краевых задач в области кусочногладкой границей», *Вестник Л. Г. У.* **7** (1964) 161—162.

[9] Бирман, М. Ш. и Скворцов, Г. Е., «О квадратичной суммируемости старших производных решений задачи Dirichlet в областях с кусочногладкой границей», *Известия Уч. Зав. Мат.* **5** (1962) 12—21.

[10] Годунов, С. К. и Рябенький, Б. С., *Разностные схемы* (Наука, Москва, 1975).

[11] Годунов, С. К. и Рябенький, Б. С., *Введение в теорию разностных схем* (Наука, Москва, 1971).

[12] Ладыженская, О. А., *Краевые задачи математической физики* (Наука, Москва, 1973).

[13] Ладыженская, О. А., «Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными», *Успехи Мат. Наук* **5** (1977) 123—148.

[14] Петровский, И. Г., *Лекции об уравнения с настными производными* (Наука, Москва, 1961).

[15] Самарский, А. А., *Введение в теорию разностных схем* (Наука, Москва, 1971).

(Beérkezett: 1978. január 25.)

LIPCSEY ZSOLT
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1137 BUDAPEST XIII., VICTOR HUGO U. 18.

MIXED TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH NON-SMOOTH BOUNDARIES I. ELLIPTIC CASE

ZS. LIPCSEY

Let $\Omega \subset \Omega_1 \subset R^n$ be open sets. Let us denote by $\partial_{\Omega_1}\Omega$ the boundary of Ω in Ω_1.

A unit vector $\tau \in R^n$ is said to point into Ω at $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ if there exist real numbers $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that the conditions

$$x + \tau' t \in \Omega \text{ for } \delta > t > 0 \text{ and}$$

$$x + \tau' t \in \operatorname{ext}_{\Omega_1}\Omega \text{ for } -\delta < t < 0$$

are satisfied with $\tau' \in R^n$, $\|\tau' - \tau\| < \varepsilon$ where $\operatorname{ext}_{\Omega_1}\Omega$ means the exterior of Ω with respect to Ω_1.

The boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ of the set Ω is called to be orientable if a *locally Lipschitzian mapping* $\tau: \partial_{\Omega_1}\Omega \to R^n$, $\|\tau\| = 1$ can be given with the vector $\tau(x)$ pointing into Ω at x for each $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$.

In the present paper the following theorem (Theorem 2.1) is proved:

Theorem: If $\partial_{\Omega_1}\Omega$ is orientable then it has a covering family $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ of open subsets in Ω_1 and there exists an open set $V_\alpha \subset R^{n-1}$ and a homeomorphism $\psi_\alpha: (0, 2) \times V_\alpha \to U_\alpha$ for each U_α, $\alpha \in A$ such that if $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, then the mapping $\psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \psi_{\alpha_2}$: $(0, 2) \times V_{\alpha_2} \to (0, 2) \times V_{\alpha_1}$ is infinitely differentiable, and the following properties are satisfied:

1. $\psi_\alpha(1, V_\alpha) = U_\alpha \cap \partial_{\Omega_1}\Omega$ for each $\alpha \in A$.
2. The restriction of the mapping of ψ_α to the set $[(0, 1) \cup (1, 2) \times V_\alpha$ is C^∞ for each $\alpha \in A$.

Hence, if the open set Ω has an orientable boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ in the above sense, than there exists a C^∞ manifold structure on Ω_1 with respect to wich $\partial_{\Omega_1}\Omega$ is an $n-1$ dimensional C^∞ submanifold.

Applications of this theorem presented in our paper concern two important questions of mixed type boundary value problems.

Using the C^∞ manifold introduced above we can define the function spaces $C^l(\Omega, \tau)$ and $C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ (The letter τ emphasizes the dependence on the orientation.) Then the following theorem holds (Theorem 3.1)

Theorem: Let $h, \varphi, \psi \in C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ be arbitrary functions. Then there is a $U \in C^l(\Omega, \tau)$ satisfying the equations

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + h \cdot U = \varphi$$

$$U|_{\partial_{\Omega_1}\Omega} = \psi$$

For fixed function h the mapping $(\varphi, \psi) \to U$ can be given in continuous linear form.

In the case of bounded Ω and $\Omega_1 = R^n$ we could define the *Sobolev spaces* $H^s(\Omega, \tau)$ and $H^s(\partial\Omega, \tau)$, $s \in R$, and the following trace theorem holds (Theorem 3.2)

Theorem: There exists a continuous surjective mapping

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^i u}{\partial \tau^i} \right|_{\partial\Omega}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k \right\}$$

$$H^s(\Omega, \tau) \to \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau)$$

There exists a continuous linear mapping

$$g: \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau) \to H^s(\Omega, \tau) \text{ satisfying the condition}$$

$$\left. \frac{\partial^i g(u_0, u_1, \dots, u_k)}{\partial \tau^i} \right|_{\partial\Omega} = u_i \text{ a.e.}$$

for each $(u_0, u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial\Omega, \tau)$.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 301—331

VEGYES TÍPUSÚ PEREMFELTÉTEL NEM SIMA HATÁRÚ TARTOMÁNYOKON

II. PARABOLIKUS ESET

LIPCSEY ZSOLT

Budapest

Dolgozatunkban parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekre vonatkozó vegyes típusú peremérték-feladatot vizsgálunk olyan $\Omega \subset (t_0, \infty) \times R^n \subset R^{n+1}$ nyílt tartomány esetében, amelynek határára mindössze az alábbi simasági megszorítást tesszük.

Megadható egy $\tau\colon \partial_{\Omega_1}\Omega \to R^{n+1}$ *lokális Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő $\|\tau\| = 1$ irányítás úgy, hogy tetszőleges $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban teljesül a következő feltétel: $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ alkalmas pozitív számok mellett $|t| < \delta$, $\|\tau - \tau'\| < \varepsilon$ esetében az

$$x + t\tau' \in \Omega, \quad t > 0 \text{ mellett,}$$

$$x + t\tau' \in (t_0, \infty) \times R^n \setminus \bar{\Omega}, \quad \text{ha} \quad t < 0.$$

Az ilyen tartományt nevezzük irányíthatónak, ha lokálisan univerzálisan teljesülnek a fenti feltételek, akkor mondjuk, hogy a határ egyenletesen irányítható.

A peremfeltétel megfogalmazásához szükséges simasági feltevések mellett a megoldások unicitását biztosító maximum—minimum tételek teljesüléséhez szükséges további megszorításokat teszünk a tartományra, így kapjuk az általános értelemben vett henger alakú tartományt. Ez alatt azt értjük, hogy a tartomány minden $[t_1, t_2] \times R^n \subset (t_0, \infty) \times R^n$ sávja korlátos, $t > t_0$ mellett a $t \times R^n \cap \Omega$ nem üres, és a τ irányítás sehol sem e_t irányú.

Dolgozatunk alapvető eredménye az, hogy megmutatjuk, hogy ha Ω egyenletesen irányítható határú áltlános értelemben vett henger alakú tartomány, amelynek irányításra vonatkozó feltétele teljesül a $\overline{\partial_{\Omega_1}\Omega}$-ra is, akkor az $\Omega_{t_0} := \bar{\Omega} \cap \{t_0\} \times R^n$ halmazon megadható egy C^∞ sokaságstruktúra úgy, hogy Ω_{t_0} R^n-beli határa egy $n-1$ dimenziós C^∞ részsokaság, és egy

$$\mathscr{H}\colon [t_0, \infty) \times \bar{\Omega}_{t_0} \to \bar{\Omega}$$

homeomorfizmus, amely meghatároz $\bar{\Omega}$-on egy olyan C^∞ sokaságstruktúrát, hogy a határ egy n-dimenziós C^∞ részsokaság lesz. Teljesül továbbá $\mathscr{H}$-ra az alábbi tulajdonság: Jelöljük S_h-val az $\bar{\Omega}$ alábbi C^∞ transzformációját:

$$S_h(u) := \mathscr{H}(e_t h + \mathscr{H}^{-1}(u)), \quad u \in \bar{\Omega}, \ h \geqq 0.$$

Legyen g egy $\bar{\Omega}$-ban haladó olyan sima görbe, amelyre teljesül, hogy $g(s_0) \in \partial_{\Omega_1}\Omega$, és $g'(s_0) = \tau(g(s_0))$. Ekkor teljesül az

$$[S_h(g(s_0))]' = \tau(S_h(g(s_0)))$$

egyenlőség. Ez az eredmény a dolgozat 1.2. tétele, illetve ennek egy másik változatát mondja ki az 1.3. tétel.

Az alaperedmény alkalmazásaként egy egzisztenciatételt látunk be, amelynek feltételeiből kiderül, hogy a határ törései feltételeket szabnak a parabolikus egyenlet másodrendű részének mátrixára azáltal, hogy a megoldás létezéséhez fel kell tennünk, hogy mind a τ, mind pedig az $A^*\tau$ vektorok teljesen Ω-ba mutatnak. (Itt A a differenciálegyenlet másodrendű részének együtthatómátrixát jelöli.) Ez valójában azt jelenti, hogy a peremoperátor és a differenciáloperátor kompatibilitásánál jelentkezik a töréses perem mint megszorítás.

Az egzisztenciabizonyítás a fenti S_h félcsoport egy ábrázolásán alapszik, amelyet az S_h által az $\bar{\Omega}$-on értelmezett függvények transzformációjával valósítunk meg. Az itt felépített ábrázolás annyival bonyolultabb, hogy a $\frac{\partial u}{\partial \tau}+\varphi u=0$ feltételnek eleget tevő folytonosan differenciálható függvényosztályon valósítjuk meg, ahol φ egy alkalmas sima korlátos függvény. Ez ad lehetőséget arra, hogy a fenti egzisztenciatételt viszonylag könnyen megkapjuk.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban parabolikus típusú differenciálegyenletekre vonatkozó vegyes típusú peremérték-feladatot vizsgálunk olyan tartomány esetében, ahol a perem simaságára enyhe, de numerikus megoldások és unicitás szempontjából jól kezelhető feltételeknek tesz eleget. E dolgozat a [7] dolgozatunk folytatása. A [7] dolgozatban arra próbáltunk lehetőséget mutatni, hogy hogyan lehet sima határú tartományok esetére megfogalmazott vegyes típusú peremérték-problémák kezelésére kialakított — igen hatékony — módszerek alkalmazásához (l. [5], [15], [6]) a szükséges eszközöket felépíteni olyan tartományok esetében, amikor a határ esetleg nem is differenciálható, és így esetleg felületi normálisról sem beszélhetünk. Ez a probléma azért is érdekes, mert a gyakorlatban a folyamatok optimális irányítása gyakran vezet időben nem sima változásokhoz, ami könnyen eredményez nem simán változó vagy nem sima peremeket, melyeknek optimális irányítása kívánatos lenne. A parciális differenciálegyenletekkel leírható folyamatok irányítása azonban szintén sima határú tartományok esetében a leghatékonyabb (l. [4]).

A parabolikus típusú differenciálegyenletek megoldhatóságának elméleti kérdései között ott szerepelnek az olyan kérdések, hogy mit mondhatunk akkor, ha a határ ugyan sima, de a vizsgált peremfeltételben nem a felületi normális szerepel. (l. [5], I. fejezet, 18. Problems 18.5 problémája). Dolgozatunk módszere nem érzékeny arra, ha felületi normális helyett más irányvektor szerepel a peremfeltételben. Ezért ez az idézett probléma egy megközelítési lehetőségét adja.

A határra vonatkozó feltételeket a [7]-hez hasonlóan úgy adtuk meg, hogy a túlságosan vad általánosításokat elkerüljük. Itt is a [16], és a [3] feltételeit vettük alapul feltételeink megválasztásánál. A [7] dolgozat irányítható határú tartományán annyit élesítettünk az általános értelemben vett henger alakú tartomány bevezetésével, hogy a parabolikus típusú differenciáloperátorokra vonatkozó maximum—minimum tételek érvényben maradjanak (l. [3]).

A dolgozat bevezetőjének második felében összefoglaltuk a [7] dolgozatnak azokat az eredményeit, amelyeket e dolgozatban is felhasználunk. A 2. pontban bizonyítjuk be dolgozatunk alaperedményét. A 3. pontban alkalmazásként egy egzisztenciatételt látunk be.

A bevezető további részében röviden összefoglaljuk azokat az eredémnyeket, amelyeket e dolgozatban a [7]-ből felhasználunk.

Előzmények összefoglalása

Mint ezt a bevezetőben már írtuk, e dolgozatunk a [7] dolgozat folytatását képezi. Annak érdekében, hogy e dolgozat önállóan is érthető legyen, röviden összefoglaljuk bizonyítás nélkül azokat az eredményeket, melyeket itt felhasználunk.

Legyenek az $\Omega\subset\Omega_1\subset R^n$ halmazok nyíltak, $\partial_{\Omega_1}\Omega$ pedig jelölje az Ω halmaz Ω_1-beli határát.

Legyen $\tau \in R^n$ egységvektor.

1.1. DEFINÍCIÓ. A τ egységvektor az $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban teljesen Ω-ba mutat, ha megadhatók olyan $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számok, hogy $|t| < \delta$ és $\|\tau - \tau'\| < \varepsilon$ mellett

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &x + t\tau' \in \Omega, \quad \text{ha} \quad t > 0, \\ &x + t\tau' \in \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}^{\Omega_1}, \quad \text{ha} \quad t < 0. \end{aligned}$$

1.2. DEFINÍCIÓ. Az $\Omega \subset \Omega_1 \subset R^n$ nyílt halmaz $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határát irányíthatónak nevezzük, ha megadható egy $\tau\colon \partial_{\Omega_1}\Omega \to R^n$, $\|\tau\| = 1$ *Lipschitz-féle feltételnek* eleget tevő leképezés úgy, hogy minden $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban $\tau(x)$ teljesen Ω-ba mutat.

Logikailag ide kívánkozik az irányíthatóság fogalmának egy finomítása, amely nem szerepel a szóban forgó [7] dolgozatban. E fogalom az alábbi:

1.3. DEFINÍCIÓ. Az $\Omega \subset \Omega_1 \subset R^n$ halmaz $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határát egyenletesen irányíthatónak nevezzük, ha irányítható, és minden $p \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ határpontnak megadható olyan $W(p)$ környezete, és $\varepsilon(p)$, $\delta(p) > 0$ számok, hogy minden $x \in \partial_{\Omega_1}\Omega \cap W(p)$-re $\tau(x)$-re az 1.1. definíció (1.1) feltétele $\delta = \delta(p)$ és $\varepsilon = \varepsilon(p)$-vel teljesül.

Tegyük fel, hogy a $\partial_{\Omega_1}\Omega$ irányítható. Ekkor a [7] dolgozat függelékének F1.2. tétele biztosítja, hogy τ kiterjeszthető Ω_1-re a *Lipschitz-féle feltétel* megtartásával, sőt e kiterjesztés az $\Omega_1 \setminus \partial_{\Omega_1}\Omega$ halmazon végtelenszer differenciálható. Jelöljük e kiterjesztést f-fel. Az

$$(1.2)\qquad \dot{y} = f(y)$$

differenciálegyenlet megoldásainak vizsgálata alapján beláttuk az alábbi tételt:

1.1. TÉTEL. Ha $\partial_{\Omega_1}\Omega$ irányítható, akkor megadható egy $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A egy indexhalmaz) Ω_1-beli nyílt környezetekből álló fedőrendszere, és minden $\alpha \in A$-hoz egy $V_\alpha \subset R^{n-1}$ nyílt halmaz és egy

$$(1.3)\qquad \psi_\alpha\colon (0, 2) \times V_\alpha \to U_\alpha$$

homeomorfizmus úgy, hogy ha $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, akkor a

$$(1.4)\qquad \psi_{\alpha_1}^{-1} \circ \psi_{\alpha_2}\colon (0, 2) \times V_{\alpha_2} \to (0, 2) \times V_{\alpha_1}$$

R^n-ből R^n-be ható leképezés végtelen sokszor differenciálható.

Teljesülnek továbbá az alábbi állítások:

1. $\psi_\alpha(1, V_\alpha) = U_\alpha \cap \partial_{\Omega_1}\Omega$ minden $\alpha \in A$ mellett.

2. A $\psi_\alpha\colon \{(0, 1) \cup (1, 2)\} \times V_\alpha \to U_\alpha$

leképezés végtelen sokszor differenciálható tetszőleges $\alpha \in A$ esetén.

Ez a tétel a szóban forgó [7] dolgozat 2.1. tétele. A 2.1. tétel ottani bizonyításából kiderül továbbá, hogy minden $\alpha \in A$ mellett tetszőleges rögzített $x \in V_\alpha$-ra a

$$(1.5)\qquad \psi_\alpha\colon (0, 2) \times \{x\} \to R^n$$

leképezés felírható

$$(1.6)\qquad \psi_\alpha(\cdot) = y(g_\alpha(\cdot, x), 0, \psi_\alpha(1, x))$$

alakban, ahol g_α egy alkalmas, x rögzítése mellett végtelenszer differenciálható

$$g_\alpha(\cdot, x)\colon (0,2) \to R \tag{1.7}$$

függvény, amely teljesíti a $\dfrac{\partial g_\alpha(1,x)}{\partial t}=1, \dfrac{\partial^k g_\alpha(1,x)}{\partial t^k}=0$, $k=2, 3, \dots$ feltételeket. A függvény megadása megtalálható a [7] dolgozat 2.1. tételének bizonyításánál, az $y(\cdot, 0, p)$, $p\in\Omega_1$ függvény pedig az (1.2) egyenlet

$$y(0) = p \tag{1.8}$$

kezdetiérték-problémájának a megoldását jelenti. Dolgozatunkban felhasználjuk még a [7]-ben szereplő g függvénynek azt az előállításából eredő tulajdonságát, hogy 1-hez elég közeli pontokban egy sor alakjában állítható elő. Ennek részleteit a dolgozatnak abban a részében idézzük majd, ahol ez lényeges szerepet játszik.

A [7] dolgozat számunkra fontos eredményeinek összefoglalása után rátérhetünk a dolgozat kiindulási feltevéseinek összefoglalására, és a dolgozat fő eredményét jelentő transzformáció megadásának előkészítésére.

2. Általános értelemben vett henger alakú tartományok

Legyen az alapterünk a továbbiakban az R^{n+1} tér. Ezt $R\times R^n$ alakú felbontásban használjuk, pontjait szükség esetén (t, x) alakú párokkal jelöljük, ahol $t\in R$, $x\in R^n$. Használjuk emellett az $(x_0, x_1, \dots, x_n)\in R\times R^n$ jelölést is.

Legyen a bevezetőben szereplő Ω_1 halmaz az $\Omega_1:=(t_0, \infty)\times R^n\subset R^{n+1}$ nyílt halmaz, $(t_0, \infty)\subset R$.

Most megadjuk az általános értelemben vett henger alakú tartomány definícióját:

2.1. Definíció: Az $\Omega\subset\Omega_1\subset R^{n+1}$ nyílt halmazt általános értelemben vett henger alakú tartománynak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. A $[t_1, t_2]\times R^n\cap\bar\Omega$ halmaz kompakt minden $[t_1, t_2]\subset(t_0, \infty)$ intervallum esetén.
2. Tetszőleges $t\in(t_0, \infty)$ mellett a $\{t\}\times R^n\cap\Omega\neq\emptyset$, R^n-ben nyílt halmaz.
3. Az $\mathrm{int}_{R^n}(\{t_0\}\times R^n\cap\bar\Omega)\neq\emptyset$.
4. A $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határ irányítható az 1.2. definíció szerinti, értelemben, és a határon megadható τ teljesen Ω-ba mutató irányítás teljesíti minden $x\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban az $e_t:=(1, 0)=(1, 0, \dots, 0)$ egységvektorral az

$$|\langle\tau(x), e_t\rangle| < 1 \tag{2.1}$$

feltételt.

A dolgozatban használni fogjuk az alábbi jelöléseket: Legyen $H\subset R^{n+1}$

$$H_t:= H\cap\{t\}\times R^n, \quad t\in R^1 \tag{2.2}$$

$$H_{[t_1,t_2]}:= H\cap[t_1, t_2]\times R^n, \quad [t_1, t_2]\subset R^1 \tag{2.3}$$

$$H_{(t_1,t_2)}:= H\cap(t_1, t_2)\times R^n, \quad (t_1, t_2)\subset R^1 \tag{2.4}$$

Dolgozatunk további részében feltételezzük, hogy az Ω a fenti Ω_1 halmazhoz egy általános értelemben vett henger alakú tartományt jelöl.

A most következő előkészítő részben három alapvető kérdéssel foglalkozunk, amelyeket felhasználunk majd a konstrukciónkban. E három részt formailag három pontban tárgyaljuk.

Első probléma:

Legyen $p\in\Omega_1$ tetszlőeges pont. Megadható az f függvény *lokális Lipschitz-féle tulajdonsága* következtében a p pontnak olyan $G(p)$ környezete, amelyben az f eleget tesz $L(p)=L$ *Lipschitz-féle állandóval a Lipschitz-féle feltételnek.*

A megoldás folytonos kezdetiértékfüggése következtében megadható a p pontnak olyan $G_1(p)\subset G(p)$ környezete, és olyan $1>\delta>0$ intervallum, hogy minden $p'\in G_1(p)$ pontra az $y(s_0)=p'$, $s_0\in R$-rel megadott (1.2) egyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának létezik az $(s_0-\delta,\ s_0+\delta)$ intervallumon $G(p)$-ben haladó megoldása.

A $G_1(p)$ nyíltsága következtében tetszőleges $p'\in G_1(p)$ ponthoz van olyan $h>0$, hogy $p_1=p'+he_t\in G_1(p)$. Célunk, hogy megbecsüljük, az $(s_0-\delta,\ s_0+\delta)$ intervallumon az $y_0(s, s_0, p_1)-y_0(s, s_0, p')$ különbséget, ahol az y_0 függvény az $y(s, s_0, p)$ megoldásfüggvény 0-dik komponense.

2.1. LEMMA. Legyenek $p_1, p'\in G_1(p)$ a fent megadott pontok. Legyenek az $y_0(\cdot, s_0, p_1)$ és $y_0(\cdot, s_0, p')$ függvények az (1.2) egyenlet $y(s_0)=p_1$, $y(s_0)=p'$ kezdetiérték-problémáihoz tartozó megoldásainak 0 indexű komponensei. Ekkor az $(s_0-\delta,\ s_0+\delta)$ intervallumon érvényes az alábbi becslés:

(2.5)
$$y_0(s, s_0, p_1)-y_0(s, s_0, p') \geqq h[1-(e^{L(s-s_0)}-1)] \geqq \begin{cases} h[1-L(s-s_0)e], & \text{ha } L<1 \\ h[1-L(s-s_0)e^L], & \text{ha } L\geqq 1. \end{cases}$$

Bizonyítás: Ha f_0 jelöli az f első, 0 indexű, t irányú komponensét, akkor érvényes az

$$y_0(s, s_0, p_1)-y_0(s, s_0, p') = h+\int_{s_0}^{s} [f_0(y(u, s_0, p_1))-f_0(y(u, s_0, p'))]\,du \tag{2.6}$$

előállítás. Az f függvény eleget tesz a $G(p)$-ben L *Lipschitz-féle állandóval a Lipschitz-féle feltételnek*, ezért a jobboldalt alulról megbecsülhetjük

(2.7)
$$h+\int_{s_0}^{s} [f_0(y(u, s_0, p_1))-f_0(y(u, s_0, p'))]\,du \geqq h-\int_{s_0}^{s} L\|y(u, s_0, p_1)-y(u, s_0, p')\|\,du$$

formában.

Ismeretes a megoldások kezdetiérték-függésére vonatkozó

$$\|y(s, s_0, p_1)-y(s, s_0, p')\| \leqq he^{L|s-s_0|} \tag{2.8}$$

becslés, amelyet a (2.7)-be beírva megkapjuk a bizonyítandó becslés

$$y_0(s, s_0, p_1)-y_0(s, s_0, p') \geqq h\left[1-\int_{s_0}^{s} Le^{L|u-s_0|}\,du\right] = h[1-(e^{L|s-s_0|}-1)] \tag{2.9}$$

első felét. A második feléhez elég az alábbit figyelembe venni:

$$\begin{aligned}e^{L|s-s_0|}-1 &= L|s-s_0|\left(\frac{1}{1!}+\frac{L|s-s_0|}{2!}+\frac{(L|s-s_0|)^2}{3!}+\dots\right) \leqq \\ &\leqq L|s-s_0|\left(\frac{1}{1!}+\frac{L}{2!}+\frac{L^2}{3!}+\dots\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Az egyenlőséget adó második lépésben figyelembe vettük, hogy δ választása miatt $|s-s_0|<1$. A (2.10)-ben szereplő sort pedig éppen e^L-lel, illetve e-vel becsülhetjük, attól függően, hogy L egynél kisebb vagy legalább 1. Ezzel a lemmát beláttuk.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Megadható a $G_1(p)$-ben tetszőleges $1>\alpha>0$-hoz olyan $\tilde{\delta}>0$, hogy ha $|s-s_0|<\tilde{\delta}$, akkor

$$y_0(s, s_0, p_1)-y_0(s, s_0, p') \geqq \alpha(y_0(s_0, s_0, p_1)-y_0(s_0, s_0, p')) \tag{2.11}$$

ha p_1 és p' a fenti alakúak.

Második probléma:

Legyen most $x\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ egy tetszőleges pont. Ennek van olyan $G_{\delta_0}(x)$ környezete, amelyre igaz az, hogy az x csúcspontú $K^+(x):=x+\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{f(x)+G_\varepsilon(0)\}$ és a $K^-(x):=x-$ $-\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{f(x)+G_\varepsilon(0)\}$ kúpokkal képezett metszetei teljesítik a

$$G_{\delta_0}(x)\cap K^+(x)\subset\Omega \tag{2.12}$$

$$G_{\delta_0}(x)\cap K^-(x)\subset\Omega_1\diagdown\bar{\Omega}^{\Omega_1} \tag{2.13}$$

feltételeket. Ez $f(x)$ befele mutatásának következménye, éppen annak egy átfogalmazása.

Megadható f folytonossága miatt olyan $G_{\delta_1}(x)\subset G_{\delta_0}(x)$ környezet $\varepsilon>\varepsilon_0>0$-hoz, hogy minden $z\in G_{\delta_1}(x)$-re teljesül az

$$\|f(z)-f(x)\|<\varepsilon_0 \tag{2.14}$$

feltétel.

Legyen $z\in G_{\delta_1}(x)$ egy tetszőleges pont. Képezzük a $K_0^-(z):=z-\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{f(x)+$ $+G_{\varepsilon_0}(0)\}$ kúpot.

2.2. LEMMA. Az x körüli

$$\varrho=\delta_1\left(\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,\varepsilon-\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\varepsilon_0\right) \tag{2.15}$$

sugarú $G_\varrho(x)$ környezet valamennyi z pontjára teljesül, hogy

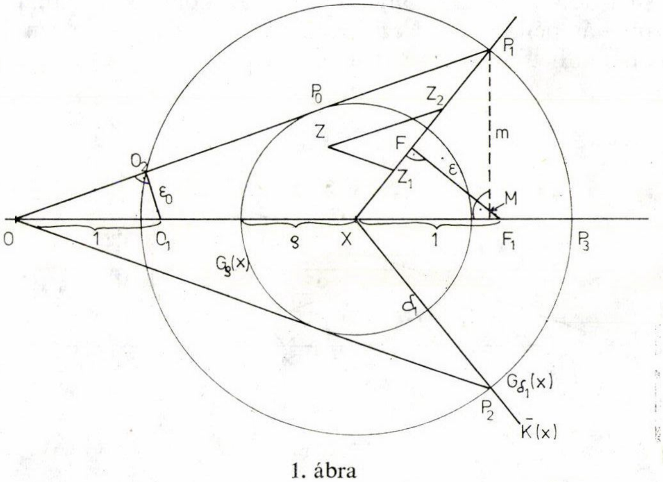
$$H(z):=K_0^-(z)\cap\operatorname{ext}(K^-(x))\subset G_{\delta_1}(x). \tag{2.16}$$

Jelöljük a $H(z)$ halmaz átmérőjét $d(H(z))$-vel. Egy $\varrho>r>0$ sugarú $G_r(x)$ gömb felületén a

$$\max_{z\in\partial G_r(x)} d(H(z))=\frac{r}{\varepsilon\cdot\sqrt{1-\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{2.17}$$

összefüggés igaz, ha ε_0 elég kicsi. ($\varepsilon_0 < \varepsilon$ mindig igaz.) A (2.17)-ben szereplő maximumot vehetjük az egész $G_r(x)$-re is.

Bizonyítás: Tekintettel arra, hogy a lemmában szereplő $K^-(x)$ és $K_0^-(z)$ kúpok gömbkúpok, a probléma mindig egy hiperfelületre szimmetrikus, így könnyen belátható, hogy elegendő a tételt síkban bizonyítani, ahol egy egyszerű geometriaifeladathoz jutunk. A (2.16)-ban szereplő metszet csupán akkor nem üres, ha $z \in \text{ext}\, K^-(x)$. Vegyük ekkor a $z-x\neq 0$, $z-x\in R^{n+1}$ és az $f(x)\in R^{n+1}$ két vektor által kifeszített síkot (ha nem határoznak meg síkot, akkor egy tetszőleges tőlük lineárisan független másik vektort vehetünk a sík megadásához). E síkkal képezett metszéssel kapott síkbeli problémát fogjuk megoldani, elfogadva azt a könnyen bizonyítható tényt, hogy ez egyúttal a teljes probléma megoldását is szolgáltatja.



1. ábra

A bizonyítandó szituációt az 1. ábra mutatja. Az ábra szerint az olyan pontok halmaza, amelyekre teljesül a (2.16) feltétel, pontosan az O, p_1, p_2 pontokkal megadott kúp pontjainak halmaza lesz. Ez a kúp az O ponthoz rendelt $K_0^-(O)$ kúp, amelynek bármely belső z pontjához tartozó $K_0^-(z)$ kúphoz a $K_0^-(O)$ kúp $z-O$-val való eltolása útján kapunk. Elegendő tehát meghatározni azt a maximális ϱ sugarú $G_\varrho(x)$ gömböt, amely benne van a $K_0^-(O)$-ban. Ez éppen érinti a kúppalástot. A 2.1. ábra metszetében az egyik érintési pontot P_0 jelöli. Feladatunk tehát a $\|P_0-x\|=\varrho$ távolság meghatározása.

Ennek érdekében állítsunk merőlegest P_1-ből az $\overline{O, x}$ egyenesre, ennek talppontját jelöljük M-mel. Az (x, M, P_1) háromszög hasonló az (x, F, F_1) háromszöghöz, hisz mindkettő derékszögű, és x-nél fekvő szögük közös. E hasonlóság alapján, tekintetbe véve, hogy $\|x-F_1\|=1$, és $\|x-P_1\|=\delta_1$,

$$m = \|P_1-M\| = \varepsilon\delta_1. \tag{2.18}$$

Ugyanezen hasonlóság alapján

$$\|x-M\| = \delta_1\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{2.19}$$

Az (O, O_1, O_2) háromszög hasonló az (O, P_1, M) háromszöghöz, ezért

(2.20) $$\|O-M\| = \sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,\frac{\varepsilon\delta_1}{\varepsilon_0}.$$

A (2.19) és (2.20) alapján

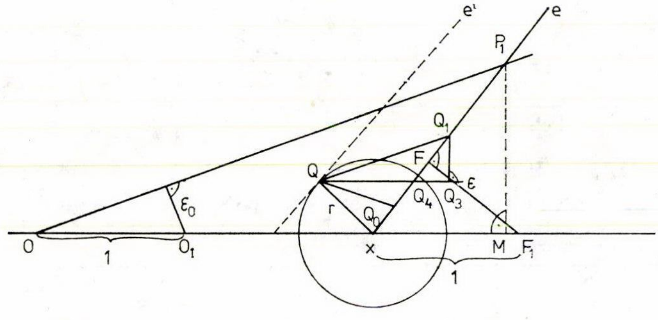
(2.21) $$\|O-x\| = \frac{\delta_1}{\varepsilon_0}\left(\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,\varepsilon-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}\right).$$

Végül felhasználva az (O, O_1, O_2) és az (O, x, P_0) háromszögek hasonlóságát

(2.22) $$\varrho = \delta_1\left(\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,\varepsilon-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$$

kifejezéssel az állítás első felét beláttuk.

A lemma második felének bizonyításához azt a könnyen belátható állítást használjuk fel bizonyítás nélkül, hogy ez éppen az 1. ábra metszetében számítható ki. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a bizonyítás főbb lépéseit a 2. ábra alapján írjuk le.



2. ábra

Húzzunk a $K^-(x)$ kúp e határolóegyenesével párhuzamos e' érintőt a $G_r(x)$ gömbhöz. Legyen ennek érintési pontja Q. A 2. ábrán látható, de könnyen igazolható is, hogy az e' és e egyenesek közti sávban a sáv pontjaira nézve maximális átmérőjű $H(z)$ halmazt, azaz a $d(H(z))$ függvény maximumát az e' pontjain veszi fel. Ezért a $G_r(x)$-re vett maximum az e' egyenes és a $G_r(x)$ közös pontja lesz, ami éppen Q. A $d(H(Q))$ pedig éppen $\|Q-O_1\|$, feltéve, hogy az ε_0 elég kicsi. Célunk tehát e távolság meghatározása.

A $\|Q-O_4\|$ távolságot könnyen meghatározhatjuk: A (Q, Q_0, Q_4) háromszög hasonló az (x, F, F_1) háromszöghöz. Ezért

(2.23) $$\|Q-Q_4\| = \frac{r}{\varepsilon}.$$

Az (Q, P_1, x) hasonló a (Q, Q_1, Q_4) háromszöghöz. A keresett távolság ennek alapján

(2.24) $$\|Q_1-Q\| = \|O-P_1\|\,\frac{r\varepsilon_0}{\varepsilon\delta_1}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\cdot\varepsilon-\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\varepsilon_0}.$$

Ha kiszámítjuk az $\|O-P_1\|$ távolságot, a (2.18) és (2.20) felhasználásával, akkor megkapjuk, hogy

$$\|O-P_1\| = \frac{\varepsilon\delta_1}{\varepsilon_0} \tag{2.25}$$

amelyet a (2.24)-be beírva épp a

$$\|Q_1-Q\| = \frac{r}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{2.26}$$

bizonyítandó állítást kapjuk, és ezzel a tételt beláttuk.

2.2. Következmény. Legyen $x\in\partial_{\Omega_1}\Omega$, és legyenek $G_{\delta_0}(x)\supset G_{\delta_1}(x)$, $G_\varrho(x)$ a fentiekben definiált, illetve a 2.2. lemmabeli (2.15)-tel megadott környezetek. Legyen $z\in G_\varrho(x)$ tetszőleges pont. Ekkor az (1.2) egyenlet $y(\cdot, s_0, z)$ megoldásgörbéjére valamely

$$s_0 > s^* \geqq s_0 - \frac{\|z-x\|}{(1-\varepsilon_0)(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2})} \tag{2.27}$$

s^* értékre teljesíti az

$$y(s^*, s_0, z)\in\partial_{\Omega_1}\Omega \tag{2.28}$$

feltételt, ahol az ε_0 jelentése a (2.14)-ből látható, ε pedig a $\tau(x)$ egységvektor x-beli Ω-ba mutatásának definíciójában szereplő pozitív szám (l. az 1.1. definíciót).

Bizonyítás: Megbecsüljük alulról az $\|y(s_0, s_0, z)-y(s, s_0, z)\|$ távolságot a (2.14) felhasználásával. A $z\in G_{\delta_1}(x)$, ezért megadható olyan (s', s_0) intervallum, hogy $y(s, s_0, z)\in G_{\delta_1}(x)$, ha $s\in(s', s_0]$. Tartozzék s' a maximális ilyen intervallumhoz. Érvényes ezen az intervallumon az alábbi becslés:

$$\begin{aligned}\|y(s, s_0, z)-z\| &= \left\|\int_{s_0}^{s} f(y(u, s_0, z))\,du\right\| = \left\|\int_{s_0}^{s} [f(x)+(f(y(u, s_0, z))-f(x))]\,du\right\| \geqq \\ &\geqq \big|\|f(x)\|\,|s-s_0|-\varepsilon_0|s-s_0|\big| = |s-s_0|(1-\varepsilon_0).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Könnyen belátható továbbá, hogy az

$$\|f(x)(s-s_0)-y(s, s_0, z)\| = \left\|\int_{s_0}^{s} [f(x)-f(y(u, s_0, z))]\,du\right\| \leqq \varepsilon_0|s-s_0| \tag{2.30}$$

becslés teljesülése miatt az y megoldásgörbe az egész $(s', s_0]$ intervallumon a $K_0^-(z)$-ben halad. A z választása miatt pedig a $K_0^-(z)$ kúp ext $K^-(x)$-be eső része $G_{\delta_1}(x)$-ben van. Ámde a $K_0^-(z)\cap\text{ext}\,K^-(x)$ átmérőjét a (2.17) formula adja meg. Ezért felhasználva a (2.29) becslést, és azt a tényt, hogy $z\in\partial G_{\|z-x\|}(x)$, legfeljebb a

$$\frac{\|z-x\|}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}} = (1-\varepsilon_0)|s-s_0| \tag{2.31}$$

egyenlet $s-s_0<0$ megoldásával kapott időtartamon lehetséges, hogy a megoldás az ext $K^-(x)$ halmazban maradjon. A $G_{\delta_0}(x)$ megválasztása miatt pedig a $K^-(x)$ pontjai az halmaz külső pontjai, ez pedig az állítást bizonyítja.

A 2.2. következménynek egy számunkra igen fontos újabb következményét fogjuk most megmutatni. A [7]-ben bebizonyított 1.1. tétel biztosít az $x\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ körül egy olyan $U(x)$ környezetet, amelynek minden pontján áthalad $\partial_{\Omega_1}\Omega\cap U(x)$-beli ponton is áthaladó megoldása az (1.2) egyenletnek. Megadható $U(x)$ úgy is, hogy teljes egészében $G_\varrho(x)$-ben feküdjék, ahol $G_\varrho(x)\subset G_{\delta_1}(x)\subset G_{\delta_0}(x)$, előző következménybeli környezetek.

2.3. Következmény. Legyen a tartományunk $\partial_{\Omega_1}\Omega$ határa egyenletesen irányítható (l. 1.2. definíció). Ekkor az $x\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ ponthoz a fenti úton megadható $U(x)$ környezetben értelmezhető s^*: $U(x)\to R$, $p\in U(x)$ esetén

$$y(s^*(p), s_0, p)\in\partial_{\Omega_1}\Omega \tag{2.32}$$

függvény eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek.

Bizonyítás. Az 1.1. tételből következik, hogy az s^* függvényt az $U(x)$ környezetben egyértelműen definiálja a (2.32) feltétel.

Legyen $p, p'\in U(x)$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $s^*(p)<$ $<s^*(p')$. Vegyük ekkor a $q:=y(s^*(p'), s_0, p')$ pontot. Ebben érvényes az

$$\|y(s^*(p'), s_0, p)-y(s^*(p'), s_0, p')\| \leqq \|p-p'\| e^{L\cdot|s^*(p')-s_0|} \tag{2.33}$$

becslés.

Miután a határ egyenletesen irányítható, a $G_{\delta_1}(x)$ korlátos környezet, amelynek lezártja is Ω_1-beli, megadhatók olyan univerzális $\tilde\delta(x)$ és $\tilde\varepsilon(x)$ pozitív számok, hogy ezekkel teljesül az egész $G_{\delta_1}(x)\cap\partial_{\Omega_1}\Omega$ környezetben az Ω-ba mutatás feltétele. Ezért a q körül megadható egy a $G_{\delta_0}(x)$-beli $\tilde\delta(x)$ és $\tilde\varepsilon(x)$-hez a 2.2 lemma által biztosított $G_{\varrho(q)}(q)$ környezet.

A (2.33) becslés biztosítja, hogy ha a $p-p'$ távolság elég kicsi, akkor az $y(s^*(p'), s_0, p)\in G_{\varrho(q)}(q)$.

A 2.2. következmény (2.27) becslése biztosítja, hogy

$$s^*(p') > s^*(p) \geqq s^*(p') - \frac{\|y(s^*(p'), s_0, p)-y(s^*(p'), s_0, p')\|}{(1-\varepsilon_0)(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^1}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2})} \tag{2.34}$$

A (2.34)-et a (2.33)-mal összekapcsolva megkapjuk a kívánt

$$|s^*(p')-s^*(p)| \leqq \|p-p'\| \frac{e^{L\cdot(\sup\limits_{p''\in U(x)}|s^*(p'')-s_0|)}}{(1-\varepsilon_0)(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^2}-\varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2})} \tag{2.35}$$

ahol a sup végességét az $U(x)\subset G_\varrho(x)$ biztosítja. A (2.35)-ben szereplő ε, ε_0 az egyenletes irányíthatóságból adódó fenti $\tilde\varepsilon(x)$ és $\tilde\delta(x)$-nek megfelelő értékek, melyek univerzálisak a környezetben. Az L szintén univerzális az egész $G_{\delta_0}(x)$ környezetben, és ezzel a következményben foglalt állítást beláttuk.

2.4. Következmény. Ha a $\partial_{\Omega_1}\Omega$ egyenletesen irányítható, akkor a [7]-ben megkonstruált 1.1. tételben szereplő g_α, $\alpha\in A$ függvény felépíthető úgy, hogy rögzített $t\in[0, 1]$ mellett mint

$$g_\alpha(t, \cdot)\colon V_\alpha \to U_\alpha \tag{2.36}$$

függvény teljesíti a *Lipschitz-féle feltételt*, és ha $1 \geqq t \geqq \beta > 0$, ahol β alkalmas szám, akkor a *Lipschitz-féle állandó* éppen a (2.35)-ben kapott állandó.

Bizonyítás: A g_α függvény konstrukciója a [7] dolgozat F2.1. lemmáján alapszik. Röviden felidézzük a konstrukció főbb lépéseit.

Legyen $K \subset G \subset R^n$ kompakt környezet, G nyílt. Az f: $G \to R$ — a lemmában folytonos — függvényhez előállítunk egy

$$(2.37) \qquad \psi\colon [0, 1] \times K \to R$$

függvényt, amely

$$(2.38) \qquad \psi(t, x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) h_k(x) + f_1(x) + (1-t)$$

alakú, ahol $(t, x) \in [0, 1] \times K$. Az előállítábsan a

$$(2.39) \qquad \varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t \in [0, 1-1/k] \\ 0 \leqq \varphi_k(t) \leqq 1, & \text{ha} \quad t \in [1-1/k, 1-1/(k+1)] \\ 1, & \text{ha} \quad t \in [1-1/(k+1), 1] \end{cases}$$

$C^\infty([0, 1])$-beli függvény, a h_k függvény pedig

$$(2.40) \qquad h_k = f_{k+1} - f_k$$

alakú, ahol az f_k függvény egy tetszőleges olyan $C^\infty(K)$-beli függvény, amely $\varepsilon_k/4$ mértékben approximálja az $f - \varepsilon_k$ függvényt, ahol ε_k a φ_k függvénytől függő állandó, és $\varepsilon_k \to 0$, midőn $k \to \infty$.

Miután az f függvény a G nyílt halmazon van értelmezve, előállíthatjuk az f_k approximáló függvényt az alábbi formában:

$$(2.41) \qquad f_k(x) = \int_{G_\omega(x)} c(\omega) \exp\left\{ -\frac{1}{1 - \dfrac{\|x-y\|^2}{\omega^2}} \right\} (f(y) - \varepsilon_k)\, dy, \; x \in K,$$

ahol ω alkalmas elég kis pozitív szám, a $c(\omega)$ pedig az

$$(2.42) \qquad \frac{1}{c(\omega)} = \int_{G_\omega(0)} e^{-\frac{1}{1-\frac{\|x\|^2}{\omega^2}}} dx$$

alakban áll elő.

Ha továbbá f eleget tett $G-n$ *Lipschitz-féle feltételnek*, akkor f_k is eleget tesz, méghozzá ugyanazzal a *Lipschitz-féle állandóval.* Ez könnyen belátható a (2.41) előállítás alapján.

Felhasználva e megjegyzést belátjuk, hogy rögzített t-re a ψ függvény is eleget tesz a *Lipschitz-féle feltételnek.* Vegyük rögzített $i > 1$ mellett az $[1-1/i, 1-1/(i+1)]$ intervallumot. Itt $1 \leqq k < i$ esetén a φ_k függvények azonosan 1 értéket vesznek fel, $k = i$ esetén $0 \leqq \varphi_i \leqq 1$ teljesül, végül pedig $k > i$ mellett a $\varphi_k = 0$. Az összeg tehát

$$(2.43) \qquad \psi(t, x) = \sum_{k=1}^{i=1} \varphi_k(t)(f_{k+1} - f_k)(x) + \varphi_i(t)(f_{i+1} - f_i)(x) + f_1(x) + (1-t)$$

alakú lesz, ahol figyelembe véve a $\varphi_k(t)=1$-et,

$$\psi(t,x)=f_i(x)\cdot(1-\varphi_i(t))+f_{i+1}(x)\cdot\varphi_i(t)+(1-t) \tag{2.44}$$

A (2.44) előállításból azonnal látszik, hogy két *Lipschitz-féle feltételnek* azonos *Lipschitz-féle állandóval* eleget tevő függvény konvex kombinációja minden rögzített t mellett a ψ, így ugyanazon *Lipschitz-féle állandóval* eleget tesz a kívánt feltételnek.

Ámde láttuk, hogy ha a $\partial_{\Omega_1}\Omega$ egyenletesen irányítható, akkor a 2.3. következmény alapján az ott szereplő $\acute{U}(x)$ környezetben az $s^*(p)$ eleget tesz a *Lipschitz-féle* feltételnek. A [7] dolgozat 2.1. tételének bizonyításában az f függvény szerepét az s^* függvénynek egy alkalmas hipersíkra való megszorítása tölti be, és a g_α függvény egy alkalmas $[1-\beta, 1]$ intervallumon éppen az s^*-hoz a fenti módon rendelt ψ függvénnyel egyezik meg. Ezzel pedig a következményt beláttuk.

Harmadik probléma:

Legyen $p\in\partial_{\Omega_1}\Omega$. Miután a tartományról feltettük, hogy általános értelemben henger alakú, a 2.1. definíció 4. feltétele szerint a $\tau(p)=f(p)$-re teljesül az

$$\alpha(p):=\langle e_t, f(p)\rangle<1 \tag{$*$}$$

feltétel. Jelöljük P_t-vel, illetve P_n-nel a

$$\begin{aligned} &P_t\colon\ R^1\times R^n\to R^1\times\{0\}\\ &P_n\colon\ R^1\times R^n\to\{0\}\times R^n \end{aligned} \tag{2.45}$$

projekciókat. Az $\|f(p)\|=1$ és $(*)$ miatt

$$\|P_n(f(p))\|\neq 0 \tag{2.46}$$

Az f folytonossága következtében van a p-nek olyan $O(p)$ környezete, melynek minden q pontjára a

$$\|P_n(f(q))\|\neq 0 \tag{2.47}$$

feltétel teljesül.

Legyen $q\in O(p)\cap\Omega$ tetszőleges pont. Képezzük a

$$\begin{aligned} &\Phi\colon\ R^{n+1}\to R\\ &\Phi(x):=\left\langle x-q,\ \frac{P_n(f(q))}{\|P_n(f(q))\|}\right\rangle \end{aligned} \tag{2.48}$$

funkcionált. Jelöljük H_q-val az alábbi hipersíkot:

$$H_q:=\{y\mid\Phi(y)=0\}. \tag{2.49}$$

A definíció alapján világos, hogy $q\in H_q$.

2.3. LEMMA. Legyen $q \in \Omega \cap O(p)$. Megadható q-nak olyan $G_{\eta(q)}(q)$ környezete, hogy itt az (1.2) egyenlet megoldásával definiált

$$u: (s_0-\xi, s_0+\xi)\times(H_q \cap G_{\eta(q)}(q)) \to O(p) \tag{2.50}$$
$$u(s, z) := y(s, s_0, z)$$

leképezés C^∞ homeomorfizmus. A ξ alkalmas pozitív szám.

Bizonyítás: Képezzük q-ban $z \in H_q$ mellett a

$$\left.\frac{\partial y(s, s_0, z)}{\partial(s, z)}\right|_{(s_0, q)} = \left(\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial z}\right) \tag{2.51}$$

Jakobi mátrixot. A (2.47) és (2.48) miatt a $\frac{\partial y}{\partial s}(s_0, q) = f(q)$ vektor nem $H_q - q$-beli. Ha a H_q-n egy a $H_q - q$-beli bázisválasztással kapott koordinátázat mellett kiszámítjuk a $\frac{\partial y}{\partial s}$-t, e mátrix oszlopvektorai a $H_q - q$ altér egy bázisát szolgáltatják az (s_0, q) pontban. Ez azonban azt jelenti, hogy a (2.51)-ben szereplő *Jakobi mátrix* nem elfaujló. Ezért a lemma u leképezésére teljesülnek az inverz függvény tétel feltételei, ez pedig biztosítja a q pont keresett $G_{\eta(q)}(q)$ környezetének létezését, és azt, hogy az u homeomorfizmus, mely az f simasága következtében végtelenszer differenciálható is.

Ezzel eljutottunk ahhoz a ponthoz, hogy dolgozatunk alapkonstrukcióját felépíthessük. A konstrukció eredményét az alábbi lemma formájában fogalmazzuk meg:

2.4. LEMMA. Legyen az $\Omega \subset (t_0, \infty)\times R^n \subset R^{n+1}$ tartomány általános értelemben vett henger, amelynek határa legyen egyenletesen irányítható. Teljesüljön továbbá minden $p \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ pontban az egyenletes irányíthatóság 1.2. definíciója értelmében p-hez tartozó $\varepsilon(p) > 0$-val az

$$1 > \frac{|f_0(p)|}{\varepsilon(p)} \tag{2.52}$$

feltétel, ahol f_0 az (1.2) egyenlet jobb oldalának 0 indexű komponense. Ekkor megadható minden $p \in \partial_{\Omega_1}\Omega$-hoz egy p körüli U_p környezet, egy I_p nyílt intervallum, egy $V_p \subset R^{n-1}$ nyílt halmaz, egy $0 < \alpha(p) < 1 < \beta(p) < 2$ számpár és egy

$$u: I_p \times (\alpha(p), \beta(p)) \times V_p \to U_p \tag{2.53}$$

homeomorfizmus, hogy teljesülnek az alábbi állítások:

1. $p_1, p_2 \in \partial_{\Omega_1}\Omega$, $U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ esetén

$$u_{p_2}^{-1} \circ u_{p_1}: I_{p_1}\times(\alpha(p_1), \beta(p_1))\times V_{p_1} \to I_{p_2}\times(\alpha(p_2), \beta(p_2))\times V_{p_2} \tag{2.54}$$

C^∞ homeomorfizmus.

2. Tetszőleges $p \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ esetén

$$u_p(I_p, 1, V_p) = \partial_{\Omega_1}\Omega \cap U_p. \tag{2.55}$$

3. Minden $p \in \partial_{\Omega_1} \Omega$ esetén az

$$u_p\colon I_p \times [(\alpha(p), 1) \cup (1, \beta(p))] \times V_p \to U_p \tag{2.56}$$

megszorítás C^∞ homeomorfizmus.

4. Tetszőleges $y \in I_p$, $x \in V_p$, és $s \in (\alpha(p), \beta(p))$ mellett

$$\frac{\partial u_p}{\partial s}(y, 1, x) = \tau(u_p(y, 1, x)). \tag{2.57}$$

5. Minden $y \in I_p$, $x \in V_p$ mellett az

$$u_p(y, \cdot, x) \tag{2.58}$$

görbe az (1.2) egyenlet megoldásának egy C^∞ átparaméterezése.

6. Minden $p \in \partial_{\Omega_1} \Omega$ mellett tetszőleges rögzített $(s, x) \in (\alpha(p), 1) \times V_p$-re $y \in I_p$ mellett teljesül a

$$\frac{\partial u_p(y, s, x)}{\partial y} \geqq c(p) > 0 \tag{$**$}$$

feltétel.

Bizonyítás: Legyen $p \in \partial_{\Omega_1} \Omega$ egy tetszőleges pont. Megadható az f függvény *lokális Lipschitz-féle tulajdonsága* alapján p-nek egy olyan $G_{\delta_0}(p)$ környezete, ahol f *Lipschitz-féle feltételnek* tesz eleget egy *L Lipschitz-féle állandóval.*

Az egyenletes irányíthatóság feltételéből következik egy $W(p)$ környezet létezése, ahol a τ befele mutatásának feltételében szereplő $\varepsilon(p)$ és $\delta(p)$ állandók univerzálisak.

Megadható olyan $G_{\delta_1}(p) \subset W(p) \cap G_{\delta_0}(p)$ p körüli környezet, amelyben teljesül

$$1 - h := \frac{|f_0(p)|}{\varepsilon(p)} < 1 \tag{2.59}$$

egyenlőséggel definiált h-val az

$$\frac{|f_0(q)|}{\varepsilon(p)} < 1 - (h/2), \; q \in G_{\delta_1}(p) \tag{2.60}$$

egyenlőtlenség.

Megadható olyan $\alpha_0(p) > 0$ és $\varepsilon_0 > 0$, hogy teljesül az

$$\frac{e^{L|\alpha_0(p)-1|}}{(1-\varepsilon_0)\left(\varepsilon(p)\sqrt{1-\varepsilon_0^2} - \varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon(p)^2}\right)} |f_0(q)| < 1 - \frac{h}{4} \tag{2.61}$$

egyenlőtlenség minden $q \in G_{\delta_1}(p)$ mellett.

Megadható f folytonossága folytán olyan $G_{\delta_2}(p) \subset G_{\delta_1}(p)$ környezet, hogy ennek minden q pontjára teljesül az

$$\|f(q) - f(p)\| < \varepsilon_0 \tag{2.62}$$

egyenlőtlenség.

Létezik az 1.1. tétel értelmében a p ponthoz egy olyan $(U_\alpha, V_\alpha, \psi_\alpha)$ hármas, hogy $p \in U_\alpha$ belső pont. Megadhatók ψ_α homeomorfizmus volta miatt olyan $V'_\alpha \subset V_\alpha$

nyílt környezet, $0<\alpha_1(p)<1<\beta_1(p)<2$ számok, hogy a

$$\psi_\alpha\big((\alpha_1(p), \beta_1(p))\times V_\alpha'\big) \subset G_{\delta_2}(p) \tag{2.63}$$

halmaz nyílt környezete p-nek.

Megadható továbbá olyan $\big(\alpha_2(p), \beta_2(p)\big)$, $\alpha_1(p)<\alpha_2(p)<1<\beta_2(p)<\beta_1(p)$ intervallum, hogy minden $q\in V_\alpha'$ mellett

$$g_\alpha\big(\alpha_2(p), q\big)-g_\alpha(1, q)Le^L < h/8. \tag{2.64}$$

Megadható olyan $V_\alpha''\subset V_\alpha'\subset V_\alpha$ nyílt környezet és $\alpha_2(p)<\alpha_3(p)<1<\beta_3(p)<\beta_2(p)$ nyílt környezet, hogy teljesül a

$$\psi_\alpha\big((\alpha_3(p), \beta_3(p))\times V_\alpha''\big) \subset G_\varrho(p), \tag{2.65}$$

ahol ϱ $G_{\delta_0}(p)\supset G_{\delta_2}(p)$ környezetekhez a 2.2. lemma által hozzárendelt sugár.

Legyen $\alpha_3(p)\leqq\alpha_4(p)<1<\beta_4(p)<\beta_3(p)$ az az intervallum, ahol a g_α a 2.4. következményben foglaltak szerint áll elő, és teljesíti a *Lipschitz-féle feltételt,* azaz ahol a (2.38) előállítás érvényes. Ilyen számok megadhatók.

Legyen $G_{\delta_3}(p)\subset\psi_\alpha\big((\alpha_4(p), \beta_4(p))\times V_\alpha''\big)$ az a p körüli környezet, ahol a 2.3. lemma feltételei teljesülnek, azaz ahol $\|P_n(f)\|>c/2$, ahol $\big\|c:=P_n\big(f(p)\big)\big\|$.

Legyen $(1, x)\in\big((\alpha_4(p), \beta_4(p))\times V_\alpha''\big)$ az a pont, amelyre $\psi_\alpha(1, x)=p$. Ha $s\in\big(\alpha_4(p), 1\big)$, megadható a $\psi_\alpha(s, x)$ pontnak egy

$$G_4\big(\psi_\alpha(s, x)\big) \subset \psi_\alpha\big((\alpha_4(p), \beta_4(p))\times V_\alpha''\big) \tag{2.66}$$

környezete, ahol a 2.3. lemma állítása teljesül. Megadható a $G_4\big(\psi_\alpha(s, x)\big)$ környezet

$$G_4\big(\psi_\alpha(s, x)\big):= \psi_\alpha\big((s-\xi_0, s+\xi_0)\times V_\alpha'''\big) \tag{2.67}$$

formában is, ahol $V_\alpha'''\subset V_\alpha''$ továbbá

$$\alpha_4(p) \leqq \alpha(p) \leqq s-\xi_0 < s+\xi_0 \leqq 1 < \beta(p) \leqq \beta_4(p),$$

ahol

$$\psi_\alpha\big((\alpha(p), \beta(p))\times V_\alpha'''\big) \subset G_{\delta_3}(p) \tag{2.68}$$

teljesül. A (2.67) felírásában felhasználtuk az 1.1. tételhez fűzött megjegyzésünket, amely szerint a ψ_α leképezés a 2.3. lemma u leképezésének egy C^∞ átparaméterezése.

Legyen most $s'\in\big(\alpha(p), 1\big)$ tetszőleges rögzített érték. Képezzük le a 2.3. lemma jelöléseivel felírt

$$\begin{aligned}\tilde V_{(s,x)} &:= H_{\psi_\alpha}(s, x)\cap \psi_\alpha\big((s-\xi_0, s+\xi_0)\times V_\alpha'''\big) = \\ &= H_{\psi\alpha(s,x)}\cap \psi_\alpha\big((\alpha(p), \beta(p))\times V_\alpha'''\big)\end{aligned} \tag{2.69}$$

halmazt a $\psi_\alpha(s, V_\alpha''')$ halmazra a következőképpen: Ha $q\in\tilde V_{(s,x)}$ előáll

$$q = \psi_\alpha\big(s(q), x(q)\big) \tag{2.70}$$

alakban, akkor q képe legyen

$$w(s, q):= \psi_\alpha\big(s, x(q)\big). \tag{2.71}$$

Miután a $\tilde V_{(s,x)}$ C^∞ részsokaság, így $x(p)$ C^∞ leképezés, a 2.3. lemma pedig biztosítja a kölcsönös egyértelműséget, továbbá azt, hogy e leképezés ráképezés.

Belátjuk, hogy a (2.71)-el definiált w leképezésre teljesül az alábbi tulajdonság: Legyen $q, q' \in \tilde{V}_{(s,x)}$ olyan pontpár, amelyre teljesül a $q'-q=me_t$, ahol $e_t = (1, 0)$, ahol $0 \in R^n$, null-vektor. Ekkor van olyan $c_0 > 0$, hogy

$$w_0(s', q') - w_0(s', q) \geqq c_0 m. \tag{2.72}$$

Tudjuk, hogy a (2.64) teljesülése miatt az 1.1. lemma biztosítja, hogy ha az

$$y(s_q^*, s_0, q) = w(s', q) \tag{2.73}$$

definiáljuk az s_q^*-t, akkor

$$y_0(s_q^*, s_0, q') - y_0(s_q^*, s_0, q) \geqq \big(1-(h/8)\big)m. \tag{2.74}$$

Becsüljük meg ezután az

$$y(s_{q'}^*, s_0, q') = w(s', q') \tag{2.75}$$

egyenlettel megadott s_q^*-nak az s_q^*-tól való eltérését, méghozzá a 2.4. következmény felhasználásával és az $\alpha_4(p) < \alpha(p) < 1$ figyelembevételével:

$$\begin{aligned} s_{q'}^* &= g_\alpha(s', x(q')) \\ s_q^* &= g_\alpha(s', x(q)) \end{aligned} \tag{2.76}$$

ezért

$$|s_q^* - s_{q'}^*| \leqq \frac{me^{L|\alpha(p)-1|}}{(1-\varepsilon_0)\left(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon_0^2} - \varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)}. \tag{2.77}$$

Az így nyert becsléssel az alábbi eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} y_0(s_{q'}^*, s_0, q') - y_0(s_q^*, s_0, q) &\geqq y_0(s_{q'}^*, s_0, q') - y_0(s_q^*, s_0, q') + \big(1-(h/8)\big)m \geqq \\ &\geqq \big(1-(h/8)\big)m - \frac{m|f_0(\tilde{q})|e^{L|\alpha(p)-1|}}{(1-\varepsilon_0)\left(\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon_0\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)} \end{aligned} \tag{2.78}$$

ahol az $y_0(s_q^*, s_0, q')$ hozzáadása és levonása után alkalmaztuk a (2.74) becslést, majd az $y(s_q^*, s_0, q')$ és $y(s_q^*, s_0, q)$ pontokat összekötő szakaszon alkalmaztuk a *Lagrange-féle középértéktételt*, így $\tilde{q}$ e szakasz egy közbenső pontja. Ámde m második tagbeli szorzója a (2.61) figyelembevételével a $-h/4$-gyel becsülhető felülről. Ezért

$$w_0(s', q) - w_0(s', q') \geqq \frac{h}{8} m. \tag{2.79}$$

Vegyük most a $H_{\psi_\alpha(s,x)}$-beli $\tilde{V}_{(s,x)}$ nyílt halmaz $\psi_\alpha(s, x)$ pontja körül az alábbi környezetet:

A $H_{\psi_\alpha(s,x)}$ előáll az e_t által generált R egyenes és egy $\hat{H}_{(s,x)}$ $(n-1)$-dimenziós hipersík direkt szorzataként. Legyen ezen előállításnak megfelelő koordinátás írásmód $(t, z) \in R \times \tilde{H}_{(s,x)} = H_{\psi_\alpha(s,x)}$. Megadható a $\tilde{H}_{(s,x)}$-ben egy olyan V_3 nyílt halmaz, és egy olyan $I \subset R$ intervallum, hogy

$$\psi_\alpha(s, x) \in I \times V_3 \subset \tilde{V}_{(s,x)}. \tag{2.80}$$

Ennek megfelelően bevezethetjük a

(2.81) $$\tilde{w}\colon (\alpha(p), \beta(p)) \times I \times V_3 \to U_\alpha$$

leképezést az alábbi definícióval:

(2.82) $$\tilde{w}(s, t, z) = w(s(t, z)).$$

A (2.79) alapján

(2.83) $$\frac{\partial \tilde{w}_0(s, t, z)}{\partial t} \geqq \frac{h}{8}, \quad \alpha(p) \leqq s \leqq 1, \quad t \in I,\ z \in V_3.$$

Világos, hogy $\tilde{w}$-ra teljesülnek a lemma állításai, ha u_p-nek választjuk. Az 1, 2, 3, 4. és 5. állítások a konstrukció következményei, a 6. állítást a (2.83) biztosítja.

2.1. Tétel. Legyen az $\Omega \subset (t_0, \infty) \times R^n \subset R^{n+1}$ tartomány általános értelemben vett henger, amelynek határa egyenletesen irányítható. Teljesüljön minden $p \in \partial_{\Omega_1} \Omega$ pontban az egyenletes irányíthatóság 2.2. definíciója értelmében p-hez tartozó $\varepsilon(p) > 0$-val az

(2.84) $$1 > f_0(p)/\varepsilon(p)$$

feltétel, ahol f_0 az (1.2) jobb oldalának 0 indexű komponense.

Legyen $[t_1, t_2] \subset (t_0, \infty)$ egy zárt intervallum. Megadható ekkor az

(2.85) $$\Omega_{[t_1, t_2]} = \Omega \cap [t_1, t_2] \times R^n$$

sávban egy

(2.86) $$\xi\colon \Omega_{[t_1, t_2]} \to R^{n+1}$$

C^∞ vektormező, amely teljesíti az alábbiakat:

(2.87) 1. $\xi_0(z) > C_{[t_1, t_2]} > 0, \quad z \in \Omega_{[t_1, t_2]}$,

ahol ξ_0 a ξ e_t irányú komponense.

2. Megadható olyan $\eta > 0$, hogy ha $\varrho(\cdot, \partial_{\Omega_1} \Omega)$ jelöli a $\partial_{\Omega_1} \Omega$-tól való távolságot, és $z \in \Omega_{[t_1, t_2]}$-re teljesül a $\varrho(z, \partial_{\Omega_1} \Omega) < \eta$, akkor van olyan $s^*(z)$, hogy az (1.2) egyenlet megoldására teljesül az

(2.88) $$y(s^*(z), s_0, z) \in \partial_{\Omega_1} \Omega$$

feltétel.

3. Megadható olyan $\eta > \eta' > 0$, hogy ha $z \in \Omega_{[t_1, t_2]}$ és $\varrho(z, \partial_{\Omega_1} \Omega) < \eta' < \eta$, akkor az

(2.89) $$\begin{aligned} \dot{Y} &= \xi(Y) \\ Y(t^*) &= z \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladat megoldására, mely a H_{t_1}-től a H_{t_2}-ig halad, teljesül a

(2.90) $$\varrho(Y(t, t^*, z), \partial_{\Omega_1} \Omega) < \eta$$

feltétel. Teljesül továbbá az (1.2) megoldásaira az alábbi:

Képezzük a

(2.91) $$\Phi_{(t^*,s,z)}(t,s):=Y\big(t,t^*,y(s,s_0,z)\big)$$

függvényt a fenti z-vel. Ha $s\in\big(s^*(z),s_0\big)$ (l. a (2.88)-at) akkor tetszőleges $t\neq t^*$, Y értelmezési tartományába eső t-re, melyre minden fenti s mellett a Φ értelmes, a

(2.92) $$\tilde{\Phi}_t(s):=\Phi_{(t^*,s_0,z)}(t,s)$$

s-sel paraméterezett görbe az $y\big(\cdot,s_0,Y(t,t^*,z)\big)$ megoldás olyan átparaméterezéseként kapható meg, amelyre $\Phi_t(s^*)\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ továbbá a

(2.93) $$\left.\frac{\partial Y\big(t,t^*,y(s,s_0,z)\big)}{\partial s}\right|_{s=s^*(z)}=f\big(\Phi_t(s^*(z))\big)$$

feltétel teljesül.

Bizonyítás: Az általános értelemben vett henger 2.1. definíciója értelmében a $(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ sáv kompakt. Fedjük le e sávot az 1.1. tétel által biztosított $\{U_\alpha\}_{\alpha\in B}$ $B\subset A$ alkalmas környezetekkel. Az említett kompaktság folytán kiválasztható egy véges $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ indexhalmaz úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^m U_{\alpha_i}\supset(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ tejlesül. Megadunk az $\left(\bigcup_{i=1}^m U_{\alpha_i}\right)\cap(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ halmazon egy $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ egységfelbontást úgy, hogy $\operatorname{supp}\varphi_i\subset$ $\subset U'_{\alpha_i}\subset U_{\alpha_i}$, ahol $\overline{U'_{\alpha_i}}\subset U_{\alpha_i}$, és U'_{α_i} nyílt, továbbá $\bigcup_{i=1}^m U'_{\alpha_i}\supset\partial_{\Omega_1}\Omega_{[t_1,t_2]}$. Kiegészíthetjük ezt az egységfelbontást az $\bigcup_{i=1}^m U_{\alpha_i}$ halmaz egységfelbontásává egy φ_0 nemnegatív függvény bevezetésével. E függvény természetesen az egész $(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ halmazon 0 értékeket vesz fel.

Legyen η: $[0,1]\to R^+$ $C^\infty([0,1])$-beli függvény, mely teljesíti az alábbiakat:

(2.94) $$\eta(s)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad s\in[0,1/3]\\ 0\leqq\eta(s)\leqq 1, & \text{ha}\quad s\in[1/3,1/2].\\ 1, & \text{ha}\quad s\in[1/2,1]\end{cases}$$

Képezzük ezután $i=1,2,\dots,m$ mellett az alábbi függvényeket:

(2.95) $$\tilde{\varphi}_i(z):=\eta(s)\cdot\varphi_i(x),\quad\text{ahol}\quad z=\psi_{\alpha_i}(s,z),\quad\text{ahol}\quad x=\psi_{\alpha_i}(1,z).$$

Könnyen belátható, hogy a $\tilde{\varphi}_i$ függvények az $\Omega_{[t_1,t_2]}$ sávban végtelenszer differenciálhatók, továbbá

(2.96) $$0\leqq\sum_{i=1}^m\tilde{\varphi}_i(z)\leqq 1,\quad z\in\Omega_{[t_1,t_2]}$$

esetén. Tulajdonképpen az egész sávra a (2.95)-el definiált függvényeket ki kell terjeszteni, de ezt könnyen megtehetjük úgy, hogy a tartón kívül minden ponthoz a 0 függvényértéket rendeljük. Megadható továbbá olyan $\eta>0$, hogy minden $\varrho(z,\partial_{\Omega_1}\Omega)<\eta$ mellett teljesül a

(2.97) $$\sum_{i=1}^m\tilde{\varphi}_i(z)=1$$

egyenlőség.

Megadunk minden kiválasztott U_{α_i} koordinátakörnyezetben egy C^∞ függvényt úgy, hogy $z\in U_{\alpha_i}$ mellett vesszük a

(2.98) $$z=\psi_{\alpha_i}(s(z),x(z)),\quad x(z)\in V_{\alpha_i},\quad s(z)\in[0,2]$$

egyenlet $s(z)$ C^∞ megoldását, melyet jelöljünk a továbbiakban $s_{\alpha_i}(z)$-vel. E definíció egy koordinátakörnyezet esetén egyértelmű.

Képezzük ezután az

(2.99) $$s\colon \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}\to R$$
$$s(z):=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\varphi}_i(z)\cdot s_{\alpha_i}(z)$$

C^∞ függvényt. Ez teljesíti az alábbiakat:

Ha $z\in(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ tetszőleges határpont, melynek 0 indexű koordinátájára teljesül a $t_1<z_0<t_2$ feltétel, akkor alkalmas $\delta>0$ mellett $\tau\in[s_0,s_0+\delta]$ esetén teljesül a $\varrho(y(\tau,s_0,z),\partial_{\Omega_1}\Omega)$ feltétel, és az

(2.100) $$s(y(\tau,s_0,z))$$

függvény mint τ függvénye szigorúan monoton, és a $\tau=s_0$-beli derivált 1. Ezt a feltételt teljesíti az s_{α_i} is, alkalmas α_i mellett. Ha továbbá az s_{α_i} függvények eleget tettek a *Lipschitz-féle feltételnek*, akkor ugyanez érvényes s-re is. Ezért a $(V_{\alpha_i},\psi_{\alpha_i},U_{\alpha_i})$ koordinátakörnyezetet megadó hármasban az s_{α_i} koordináta helyett az 1-et tartalmazó alkalmas intervallumon bevezethetjük az s függvény U_{α_i}-re vett megszorítását koordinátaként. Jelöljük az így nyert paraméterezéshez tartozó koordinátázó leképezést $\tilde{\psi}_{\alpha_i}$-vel

A $(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ sáv $\{(V_{\alpha_i},\tilde{\psi}_{\alpha_i}U_{\alpha_i})\}_{i=1}^m$ fedésével készítsük el a 2.4. lemma által biztosított koordinátakörnyezeteket. A lemma minden $p\in(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$ ponthoz biztosít egy $(I_p\times(\alpha(p),\beta(p))\times V_p,u_p,U_p)$ koordinátakörnyezetet, méghozzá úgy hogy az

(2.101) $$\bigcup_{p\in(\partial\Omega_1\Omega)_{[t_1,t_2]}} U_p\supset(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}$$

teljesül.

A sáv már említett kompaktsága miatt kiválaszthatunk e fedőrendszerből véges fedőrendszert is, mely teljesíti a $(\partial_{\Omega_1}\Omega)_{[t_1,t_2]}\subset\bigcup_{j=1}^{r}U_{p_j}$ feltételt. Megadható ezen újabb fedőrendszerhez is egy a (2.95)-nek megfelelő egységfelbontás, melyet jelöljünk $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_j\}_{j=1}^r$-rel. A $\tilde{\tilde{\varphi}}_j$ leképezés (2.95)-höz hasonló megadásában szereplő $\tilde{\eta}_j$ (2.94)-nek megfelelő függvény azonban az alábbi feltételnek tesz eleget:

(2.102) $$\tilde{\eta}_j(t)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad t\in\left[0,\ 1-\dfrac{1-\alpha(p)}{2}\right]\\[2ex] 0\leqq\tilde{\eta}_j(t)\leqq 1, & \text{ha}\quad t\in\left[1-\dfrac{1-\alpha(p)}{2},\ 1-\dfrac{1-\alpha(p)}{3}\right].\\[2ex] 1, & \text{ha}\quad t\in\left[1-\dfrac{1-\alpha(p)}{3},\ 1\right]\end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a (2.102)-ben a $p=p_j$, melyet egyszerűség kedvéért nem írtunk ki.

Képezhetjük ezután a 2.4. lemma által biztosított

$$u_{p_j}\colon I_{p_j}\times(\alpha(p_j), 1)\times V_{p_j} \to U_{p_j} \tag{2.103}$$

leképezéssel az

$$Y_{p_j}(u) := \left.\frac{\partial u_{p_j}(y, s, z)}{\partial y}\right|_{(y,s,z)=u_{p_j}^{-1}(u)} \tag{2.104}$$

vektormezőt, mely teljesíti az alábbiakat:

1. Az $Y_{p_j}(u)$ érinti az $s=s(u)$ állandó felületet, ha $\varrho(u, \partial_{\Omega_1}\Omega)<\eta$, alkalmas $\eta>0$-val. Ugyanis a (2.89)-cel definiált függvény nívófelülete egyúttal konstans s koordinátájú felületek is

2. Teljesül az

$$Y^0_{p_j}(u) > h_{p_j} > 0, \quad u\in U_{p_j}\cap\Omega, \tag{2.105}$$

ahol $Y^0_{p_j}$ a vektormező 0 indexű koordinátáját jelöli. A (2.105) egyenlőtlenség pedig a 2.4. lemma 5. állításának a következménye.

Legyen $\tilde{\tilde{\varphi}}_0$ az alábbi definiált $\Omega_{[t_1,t_2]}$-n értelmezett függvény:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_0 := 1-\sum_{j=1}^{r}\tilde{\tilde{\varphi}}_j. \tag{2.106}$$

Definiálunk egy vektormezőt az $\Omega_{[t_1,t_2]}$ sávban az alábbi úton:

$$Y_0(u) := e_t = (1, 0, \ldots, 0), \quad u\in\Omega_{[t_1,t_2]}. \tag{2.107}$$

Ezzel pedig megadhatjuk a tételünk állításában szereplő keresett vektormezőt

$$Y(u) := \sum_{j=1}^{p} Y_{p_j}(u)\cdot\tilde{\tilde{\varphi}}_j(u)+Y_0(u)\tilde{\tilde{\varphi}}_0(u) \tag{2.108}$$

alakban. A (2.105)-ből és a $\tilde{\tilde{\varphi}}_j$ függvények tulajdonságaiból azonnal következik, hogy a (2.108)-cal előállított vektormező teljesíti a tételünk (2.87)-tel megfogalmazott állítását.

Minden $u\in\Omega_{[t_1,t_2]}$, $\varrho(u, \partial_{\Omega_1}\Omega)<\eta_0$ mellett az $Y(u)$ érintővektora lesz az $s= =s(u)=$állandó felületnek. Ez a jelen bizonyítás 1. pontjának következménye, ahol $\eta_0>0$ alkalmas szám. Ha továbbá $\eta_0'>0$ elég kicsi, akkor $u\in\Omega_{[t_1,t_2]}$, $\varrho(u, \partial_{\Omega_1}\Omega)<\eta_0'$ tetszőleges pont mellett az

$$S_{s(u)} := \{v|s(v) = s(u),\ v\in\Omega_{[t_1,t_2]}\} \tag{2.109}$$

teljes egészében a $\partial_{\Omega_1}\Omega$ halmaz körüli η_0 sugarú környezetben van. Miután továbbá az Y minden $S_{s(u)}$-beli pontban érintője az $S_{s(u)}$-nak, így a $\dot{Z}=Y(Z)$ egyenlet megoldásai végig e felületen haladnak, és sohasem jutnak el belső pontból $\partial_{\Omega_1}\Omega$-beli ponthoz az $\Omega_{[t_1,t_2]}$ sávban, hisz minden belső pontban, ahol s értelmezve van, és a határhoz elég közeli a pont, a függvény határozottan kisebb értéket vesz fel, mint 1, amely a határpontokon felvett függvényérték.

A vektormező 3. tulajdonságát legegyszerűbben úgy mutathatjuk meg, ha kifejezzük az Y-t egy u határhoz elég közeli pontban őt lefedő U_{p_i} környezethez tartozó $I_{p_i}\times(\alpha(p_i), 1)\times V_{p_i}$ környezet koordinátáival. Ha $\tilde{Y}(y, s, x)$ jelöli az $(y, s, x)\in$

$\in I_{p_i}\times(\alpha(p_i), 1)\times V_{p_i}$ pontban az $Y(u_{p_i}(y, s, x))$ vektor transzformáltját, ez mint az $I_{p_i}\times(\alpha(p_i), 1)\times V_{p_i}$ halmazon értelmezett függvény, mint s függvénye konstans, ha s elég kicsi. Ugyanis ez a tulajdonsága megvolt a (2.104)-gyel definiált vektormezők mindegyikének, a (2.102) továbbá $\tilde{\varphi}_j$ definíciója miatt a (2.108) alapján $\tilde{Y}$ örökli ezt a tulajdonságot. Ezzel pedig tételünket beláttuk, $\xi := Y$.

A bizonyításunk konstrukcióját valójában egy $[t_1, t_2]\subset[t_0, \infty)$, $[t_1, t_2]$ intervallumra kellett volna elvégezni, és az itt kapott vektormező megszorítása teljesíti tételünk feltételeit.

Bebizonyított tételünk segítségével beláthatjuk dolgozatunk alaptételét:

2.2. TÉTEL. Legyen az $\Omega\subset(t_0, \infty)\times R^n\subset R^{n+1}$ egy általános értelemben vett henger alakú tartomány. Legyen a τ irányítás a $\overline{\partial_{\Omega_1}\Omega}^{R^{n+1}}$ lezárásra kiterjeszthető úgy, hogy ezen a halmazon teljesüljön az egyenletes irányíthatóság feltétele, továbbá a (2.84) feltétel. Ekkor megadható az $\bar{\Omega}_{t_0}$ halmazon egy olyan C^∞ sokaságstruktúra, hogy $\partial_{R^n}\Omega_{t_0}$ $(n-1)$-dimenziós C^∞ részsokaság, és egy

$$\mathscr{H}\colon [t_0, \infty)\times\bar{\Omega}_{t_0} \to \bar{\Omega} \tag{2.112}$$

homeomorfizmus, amely a szorzattér szorzatsokaságstruktúrája és az $\bar{\Omega}$-on az 1.1. tétel által biztosított sokaságstruktúra mellett diffeomorfizmus (azaz végtelenszer differenciálható).

Ha továbbá $p\in\partial_{\Omega_1}\Omega$, és $y(\cdot, s_0, p)$ az (1.2) egyenlet $y(s_0)=p$ kezdetiérték-probléma megoldása, akkor a $(t(\cdot, s_0, p), x(\cdot, s_0, p)) := \mathscr{H}^{-1}(y(\cdot, s_0, p))$ görbére igaz, hogy tetszőleges $h>0$ mellett van olyan $\delta(h)>0$, hogy a

$$z(\cdot, s_0, \mathscr{H}(\mathscr{H}^{-1}(p)+he_t)) := \mathscr{H}(h+t(\cdot, s_0, p), x(\cdot, s_0, p)) \tag{2.113}$$

az $(s_0+\delta(h), s_0)$ szakaszon az (1.2) egyenlet $y(\cdot, s_0, \mathscr{H}(\mathscr{H}^{-1}(p)+he_t))$ megoldásának olyan átparaméterezése útján nyerhető, amely teljesíti a

$$\left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=s_0} = \tau(\mathscr{H}(\mathscr{H}^{-1}(p)+he_t)) \tag{2.114}$$

feltételt.

Bizonyítás: 1. Könnyen belátható, hogy tetszőleges rögzített $\eta>0$-hoz az

$$\Omega_\eta := \Omega\cup(t_0-\eta, t_0]\times\Omega_{t_0} \tag{2.115}$$

nyílt halmaz általános értelemben vett henger alakú tartomány a $(t_0-\eta, \infty)\times R^n$ halmazban, ha a $(t_0-\eta, t_0]\times\Omega_{t_0}$ sávban a τ irányítást az alábbi módon adjuk meg: $t_0-\eta<t<t_0$ és a $p\in\partial_{R^n}\Omega_{t_0}$ párnak megfelelő (t, p) határpontban legyen a

$$\tau(t, p) := \tau(p). \tag{2.116}$$

A (2.84) feltétel teljesülése biztosítja, hogy teljesülnek az Ω_η tartományon az általános értelemben vett henger definíciójának kritériumai, továbbá az egyenletes irányíthatóság feltétele.

2. Minden $k\geq 0$ egész számhoz megadható az $\Omega[t_0+2k, t_0+2(k+1)+1]$ sávon a 2.1. tételben biztosított vektormező.

3. Jelöljük s_k-val a 2.1. tétel bizonyításában szereplő $\Omega_{[t_0+2k, t_0+2(k+1)+1]}$-en értelmezett $s \in C^\infty$ függvényt. A 2.1. tétel bizonyításában szereplő módszerrel sorra összekapcsolhatjuk az $s_1, s_2, \dots$ függvényeket, méghozzá úgy, hogy ha $\tilde{s}_i$ jelenti az első i függvény összekapcsolását, ehhez kapcsoljuk az s_{i+1} függvényt. Az is világos, hogy az így nyert s összefűzött függvény minden kompakt sávban teljesíti a 2.1. tétel bizonyításában szereplő s függvény tulajdonságait.

Ezután ismét a szóban forgó tétel bizonyítási módszerével megadható az Ω minden $[t_0, t_0+2k+1]$ sávján egy a 2.1. tételnek eleget tevő vektormező, méghozzá úgy, hogy az $\Omega_{[t_0, t_0+2(k+1)+1]}$-en megadott vektormező megszorítása az $\Omega_{[t_0, t_0+2k]}$-ra megegyezik az $\Omega_{[t_0, t_0+2k+1]}$-en megadott vektormező megszorításával ugyanoda. Ilyenformán $k \to \infty$ mellett megadtunk az egész Ω-n egy olyan vektormezőt, amelynek bármely $[t_1, t_2] \subset (t_0, \infty)$ sávjára teljesülnek a 2.1. tétel állításai, és az 1.1. tétel bizonyításában szereplő s függvény e bizonyítás 3. pontjában összefűzött s függvény $[t_1, t_2]$ sávra vett megszorítása lesz. Jelöljük az így kapott vektormezőt Y-nal.

4. Definiáljuk ezután az alábbi leképezést: A $p \in \Omega_{t_0}$ és $t \in [t_0, \infty)$ párhoz rendeljük hozzá a

$$\mathscr{H}(t, p) := u(t, t_0, p) \tag{2.117}$$

pontot, ahol az u az

$$\begin{gathered} \dot{u} = Y(u) \\ u(t_0) = p \end{gathered} \tag{2.116}$$

kezdetiérték-feladat megoldása.

E leképezésre teljesülnek a 2.1. tétel állításai, és a 2.1. tétel 3. állításából következik, hogy $\mathscr{H}$ Ω-ba képez, az 1. állításból pedig az, hogy ráképez Ω-ra. A (2.118) jobb oldalának simasága biztosítja, hogy $\mathscr{H}$ C^∞ homeomorfizmus. A tétetel (2.113), illetve (2.114) görbékre vonatkozó állításai a 2.1. tétel 3. állításából következnek. Ugyanez az állítás biztosítja, hogy a $\mathscr{H}$ kiterjeszthető homeomorfizmus voltának megtartása mellett a (2.112)-nek megfelelő leképezéssé.

Végezetül pedig a 2.1. tétel konstrukciójának felhasználásával minden határpont u_p környezetében, amely homeomorf képe az $I_p \times (\alpha(p), 1] \times V_p \subset R^{n+1}$ nyílt halmaznak, az I_p koordináta helyett bevezethetjük a $\mathscr{H}$ homeomorfizmus t paraméterét koordinátaként. Ez egy egyszerű C^∞ átparaméterezést jelent. Az így bevezetett paraméterezés segítségével látszik az is, hogy az $\bar{\Omega}_t$ halmaz az $\bar{\Omega}$ fenti módon koordinátázott C^∞ sokaság n-dimenziós C^∞ részsokasága, a határt lefedő koordinátakörnyezetekben pedig az $s=1$ rögzítéssel kapjuk meg a határt, ami így egy $(n-1)$-dimenziós C^∞ részsokasága lesz az $(n+1)$-dimenziós $\bar{\Omega}$ C^∞ sokaságnak. Ezzel a tételt teljes egészében beláttuk.

Végül a 2.2. tételnek egy fontos változatát mondjuk ki.

2.3. TÉTEL. Legyen az Ω $(t_0, \infty) \times R^n \subset R^{n+1}$ egy általános értelemben vett henger alakú tartomány. Legyen a τ irányítás a $\partial_{\Omega_1} \Omega^{R^{n+1}}$-re az egyenletes irányíthatóság és *Lipschitz-féle feltétel* megtartásával kiterjeszthető. Teljesüljön továbbá a

$$\tau^0(p) = 0, \quad p \in \partial_{\Omega_1} \Omega \tag{2.119}$$

feltétel.

Ekkor érvényes a 2.2. tétel állítása azzal a többlettel, hogy

$$\mathscr{H}_0(t, p) = t, \tag{2.120}$$

ahol $\mathscr{H}_0$ a $\mathscr{H}$ 0 indexű koordinátafüggvénye.

Bizonyítás: Vegyük τ-nak azt a kiterjesztését, amelynél $f_0=0$ az egész Ω_1-en. Ez biztosítja a tétel teljesülését, méghozzá az egyenletes irányíthatóság követelménye nélkül.

3. Alkalmazások

A 2.2. és 2.3. tételek alkalmazásaként e két egymással szoros kapcsolatban levő problémával foglalkozunk. Az egyik az általános értelemben vett henger alakú tartomány egyparaméteres eltolási félcsoportja, és ennek ábrázolása a vegyes típusú homogén peremfeltételt kielégítő függvényekből képezett függvénytereken. A másik probléma ezen ábrázolás infinitezimális generátorával felírt parabolikus típusú differenciálegyenlet megoldásának exisztenciaproblémája vegyes típusú peremfeltétel mellett, továbbá a teljesség kedvéért megvizsgáljuk a megoldások simaságának kérdését is.

Általános értelemben vett henger eltolási félcsoportjai

E pont során végig feltételezzük, hogy vagy a 2.2. tételnek, vagy a 2.3. tételnek a feltételei teljesülnek, és az említett tételek jelöléseit használjuk.

Legyen $\Omega \subset (t_0, \infty) \times R^n \subset R^{n+1}$ általános értelemben vett henger alakú tartomány, amely teljesíti a 2.2. tétel (a 2.3. tétel) feltételeit. Legyen $\mathscr{H}$ a 2.2. tételben biztosított homeomorfizmus. Megadunk a $\mathscr{H}$ segítségével egy $\{S_h\}_{h\in[0,\infty)}$ egyparaméteres eltolási félcsoportot a következőképpen:

$$\begin{aligned} &S_h\colon \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}, \quad S_h \ C^\infty \text{ homeomorfizmus}, \ h\in[0, \infty) \\ &S_h(z) := \mathscr{H}(\mathscr{H}^{-1}(z) + he_t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha $z\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ határpont, és $y(\cdot, s_0, z)$ az (1.2) egyenlet megoldása, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\left.\frac{\partial S_h(y(s, s_0, z))}{\partial s}\right|_{s=s_0} = \tau(S_h(z)), \quad S_h(z)\in\partial_{\Omega_1}\Omega \tag{3.2}$$

Bizonyítás: Ez az állítás egyszerű átírása a 2.2. tétel (2.114) állításának.

A bevezetett félcsoport az $\bar{\Omega}$-on értelmezett függvénytereken további félcsoportot indukál. Az említett alkalmazás szempontjából különösen fontos számunkra az olyan függvénytereken az ábrázolás, amelyek függvényei kielégítik hagyományos vagy általános értelemben az alábbi vegyes típusú peremfeltételt:

Legyen $\varphi\in C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega)$. Jelöljük $C^l_{0,\varphi}(\bar{\Omega})$-sal az alábbi függvényteret:

$$C^l_{0,\varphi}(\bar{\Omega}) := \left\{u \,\middle|\, \Phi(u) := \left.\frac{\partial u}{\partial\tau} + \varphi u\right|_{\partial_{\Omega_1}\Omega} = 0, \ \left.u\right|_{\Omega_{t_0}} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Omega_{t_0}} = 0, \ u\in C^l(\bar{\Omega})\cap H^l(\bar{\Omega})\right\} \tag{3.3}$$

ahol $H^l(\bar{\Omega})$ jelöli az Ω-n *Szoboljev értelemben l-szer differenciálható* függvényteret.

Hogy a (3.2)-vel megadott halmaz nem üres, következik abból is, hogy az Ω-n kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények tere oda tartozik. Ez biztostíja egyúttal, hogy elég sok függvényt is tartalmaz e tér.

A homogén peremfeltételt hagyományos értelemben teljesítő függvények osztályának bevezetése után előkészítjük a feltételt általános értelemben teljesítő függvények osztályának definícióját.

A [7] dolgozatban definiáltuk a $H^s(\Omega, \tau)$, illetve a $H^s(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ függvénytereket, ahol $s \in R$ tetszőleges. Beláttuk, hogy értelmezhető és folytonos $H^s(\Omega, \tau)$-beli u függvényekre az

$$
(3.4) \qquad \begin{gathered} u \to \left\{ \frac{\partial^i u}{\partial \tau^i} \,\middle|\, i = 0, 1, \dots, k \right\} \\ H^s(\Omega, \tau) \to \prod_{i=0}^{k} H^{s-i-1/2}(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau) \end{gathered}
$$

határra való megszorítás leképezése, amelynek definíciója a fenti *Szoboljev terek* esetében nem nyilvánvaló, és megtalálható a [7]-ben.

Legyen a (3.2) peremfeltételben szereplő $\varphi \in C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ leképezés valamennyi elsőrendű parciális deriváltjával együtt $L_\infty(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$-beli. Ez esetben belátható, hogy a (3.2)-ben szereplő Φ: $C^l(\bar{\Omega}) \to C^l(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ leképezés kiterjeszthető a $H^1(\Omega, \tau) \to H^{-1/2}(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ leképezéssé, a folytonosság megtartásával. Ám ekkor a $H^1(\Omega, \tau)$-ban zárt alteret képez a kiterjesztett leképezés 0-tere, és ezt tartalmazza a $C^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$ teret. A $C^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$ $H^1(\Omega)$-beli lezárása ilyenformán része a 0-térnek. Könnyen meggondolható, hogy bármely u elemére a $\left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\partial_{\Omega_1}\Omega} \in H^{1/2}(\partial_{\Omega_1}\Omega, \tau)$ azaz a leképezés e téren függvények segítségével megadható. Jelöljük $H^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$-val a $C^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$ fenti lezárását.

Célunk most egy $\{Q_h\}_{h \in R_+}$, Q_h: $H^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau) \to H^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$ korlátos egyparaméteres félcsoport megadása, méghozzá a fent bevezetett S_h eltolási félcsoport segítségével.

Definiálunk először egy $Q_{0,h}$: $C^1_{0,\varphi}(\Omega) \to C^1(\Omega)$ leképezéssereget az S_h segítségével: Legyen $u \in C^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$

$$
(3.5) \qquad Q_{0,h}(u)(t, z) = \begin{cases} u(t', z'), & (t', z') \in \bar{\Omega}, \quad (t, z) = S_h(t', z') \\ 0 & \nexists (t', z') \in \bar{\Omega}, \quad (t, z) = S_h(t', z') \end{cases}.
$$

Könnyen látható, hogy $Q_{0,h}$ nem $C^1_{0,\varphi} \to C^1_{0,\varphi}$ leképezés. Belátjuk az alábbi lemmát.

3.1. Lemma. Megadható a $Q_{0,h}$ leképezéssereghez egy $Q_{1,h}$: $\bar{\Omega} \to R$, a bevezetett sokaságra nézve végtelenszer differenciálható függvénysereg, amellyel képezett

$$
(3.6) \qquad Q_h(u)(t, x) := Q_{1,h}(t, x) Q_{0,h}(u)(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}
$$

leképezéssereg folytonos egyparaméteres félcsoportot képez $C^1_{0,\varphi} \to C^1_{0,\varphi}$.

Bizonyítás: Legyen $u \in C^1_{0,\varphi}(\Omega)$ egy tetszőleges függvény. Ennek a (3.6)-tal definiált $Q_h(u)$ képére teljesülnie kell a (3.2)-ben szereplő peremfeltételnek. Ez azt jelenti, hogy ha $z \in \partial_{\Omega_1}\Omega$, és $y(\cdot, s_0, z)$ az (1.2) egyenlet megoldása, akkor teljesülnie kell az alábbi feltételnek:

$$
\begin{aligned}
(3.7) \qquad & \frac{\partial}{\partial s}\{Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z)))Q_{0,h}(u)(S_h(y(s, s_0, z)))\} + \varphi(S_h(y(s, s_0, z)))\times \\
& \times Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z)))Q_{0,h}(u)(S_h(y(s, s_0, z)))\big|_{s=s_0} = 0.
\end{aligned}
$$

A (3.7) egyenlőség felírásánál feltételeztük φ-nek egy $C^l(\bar{\Omega}, \tau)$-beli kiterjesztését. Ilyen az 1.1. tétel koordinátakörnyezetei segítségével könnyen megadható. A (3.5) definíció következtében a (3.7) feltétel valóban elegendő arra, hogy az u képe C_0^1-beli legyen, természetesen felhasználtuk azt is, hogy $\mathscr{H}$ teljesíti a (2.114)-et.

Vegyük most tekintetbe az alábbi két összefüggést:

$$
(3.8) \qquad Q_{0,h}(u)(S_h(y)) = u(y)
$$

ami a (3.5) következménye, és hogy

$$
(3.9) \qquad \frac{\partial u}{\partial s}(y(s, s_0, z)) + \varphi(y(s, s_0, z))u(y(s, s_0, z))\big|_{s=s_0} = 0
$$

ami pedig a z-beli peremfeltétel, melyet teljesít u.

Írjuk be a (3.8) és (3.9) összefüggéseket a (3.7)-be, a kijelölt differenciálás elvégzése után $s=s_0$ mellett az alábbit kapjuk:

(3.10)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s}(Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z)))) \cdot u(y(s, s_0, z)) - Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z))) \cdot \varphi(y(s, s_0, z))\times \\
& \times u(y(s, s_0, z)) + \varphi(S_h(y(s, s_0, z))) \cdot Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z))) \cdot u(y(s, s_0, z))\big|_{s=s_0} = 0.
\end{aligned}
$$

A (3.10) kifejezést rendezve és beírva a (3.5) alapján a $\varphi\,(y(s, s_0, z)) = Q_{0,h}(\varphi)\,(S\,(y(s, s_0, z)))$ egyenlőséget, $s=s_0$ mellett az alábbit kapjuk:

$$
\begin{aligned}
(3.11) \qquad & \left\{\frac{\partial}{\partial s}(Q_{1,h}(S_h(y(s, s_h, z)))) - Q_{1,h}(S_h(y(s, s_0, z)))[\varphi(S_h(y(s, s_0, z))) - \right. \\
& \left. - Q_{0,h}(\varphi)(S_h(y(s, s_0, z)))]\right\} u(y(s, s_0, z)) = 0.
\end{aligned}
$$

A (3.11) összefüggés érvényes tetszőleges $C^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega}, \tau)$ függvény mellett, így csak akkor teljesülhet, ha a $Q_{1,h}$ az $s=0$ mellett teljesíti u nélkül a (3.11) feltételt. Megadhatjuk a $Q_{1,h}$-t ennek alapján úgy, hogy először az 1.1. tétel által biztosított koordinátakörnyezetenként adjuk meg rögzített h-hoz, majd a dolgozatban már többször alkalmazott speciális egységfelbontással összekapcsoljuk egyetlen függvénnyé. Ez utóbbit az olvasóra bízzuk.

Egy rögzített környezetben rögzített z mellett adjuk meg úgy a $Q_{1,h}$ függvényt, hogy a $Q_{1,h}$-ra a (3.11)-gyel felírt feltétel egy s-ben egy intervallumon teljesüljön. Így egy differenciálegyenlet adódik $Q_{1,h}$-ra, melyet megoldva

$$(3.12)\qquad Q_{1,h}(y(s, s_0, z)) = c(z, h)\cdot e^{-\int_0^s (\varphi(y(v, s_0, z)) - Q_{0,h}(\varphi)(y(v, s_0, z))\,dv}.$$

Definiáljuk a

$$(3.13)\qquad \Phi(s, z) := \int_0^s \varphi(y(u, s, z))\,du$$

függvényt, amely a határ egy kis nyílt sávján van értelmezve. Ezt kiterjeszthetjük az egész $\bar{\Omega}$-ra, megtartva a függvény eredeti korlátját. A φ és deriváltjának korlátossága maga után vonja e függvénynek és deriváltjának korlátosságát is, pontosabban a lehetőséget ilyen korlátos kiterjesztésre. Ezután a $c(z, h)$ függvényt így adjuk meg:

$$(3.14)\qquad c(z, h) = e^{-Lh}$$

ahol az L a Φ függvény $\bar{\Omega}$-ra vett C^1 normája. Végezetül tehát

$$(3.15)\qquad Q_{1,h}(t, x) = e^{-L\cdot h}\cdot e^{-\{\Phi(t, x) - Q_{0,h}(\Phi)(t, x)\}}$$

alakú lesz.

A Q_h leképezés

$$(3.16)\qquad Q_h = Q_{1,h}\circ Q_{0,h}$$

mint ez könnyen látható, félcsoport lesz, méghozzá $C^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega})\to C^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega})$. Könnyű belátni, hogy az így definiált félcsoport H^1 normában is folytonos leképezés, sőt az S_h segítségével bevezethető egy az eredeti *Lebesgue-mértékkel* ekvivalens olyan mérték, amelyben 1-nél kisebb normájú lesz a félcsoport valamennyi eleme. Így létezik éspedig egyértelmű kiterjesztése a $H^1_{0,\varphi}$-re úgy, hogy a kiterjesztés értékkészlete is $H^1_{0,\varphi}$-beli.

Ez azt is jelenti, hogy a $H^1_{0,\varphi}$ duálisán is megadható a Q transzponálásával egy folytonos félcsoport, amely kiterjesztése a $H^1_{0,\varphi}$-belinek.

Végül felírhatjuk a fenti félcsoport infinitezimális generátorát, mely a következő:

$$(3.17)\qquad AU = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\cdot\frac{\partial U}{\partial\mathcal{H}} + U\left(-L + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)$$

illetve

$$(3.17a)\qquad AU = \frac{\partial U}{\partial t} + U\left(-L + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)$$

akkor, ha a 2.3. tétel esete áll fenn.

A fentiekből következik, hogy a (3.17), illetve (3.17a) generátorok értelmezési tartománya $H^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega}, \tau)$-ban mindenütt sűrű, a korlátosságból pedig az, hogy a spektrum a pozitív féltengelyre esik.

Parabolikus egyenletekre vonatkozó vegyes típusú peremértékfeladat egzisztenciája általános értelemben vett henger alakú tartomány esetében

E pontban korlátozzuk magunkat a 2.3. tétel esetére. Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{H}$ értelmezési tartományán szereplő t paraméter megegyezik az R^{n+1} első koordinátájával.

Bevezetünk először is egy függvényteret az alábbi definícióval:

$$L_2\Big(\prod_{t>t_0} H^1_{0,\varphi}(\Omega_t,\tau)\Big):=\{u|u\colon \bar{\Omega}\to R,\ u_t(\cdot):=u(t,\ \cdot)\in H^1_{0,\varphi}(\Omega_t,\tau)\}, \tag{3.18}$$

u erős értelemben mérhető és négyzetesen integrálható, ahol a négyzetesen integrálhatóság alatt azt értjük, hogy mint a $H^1_{0,\varphi}(\Omega_t,\tau)$ *Hilbert térbe* ható mérhető leképezésből $\|u_t\|$ *Hilbert tér* normával kapott leképezés legyen négyzetesen integrálható. Ha bevezetjük e téren az alábbi skalár-szorzatot:

$$\int_{t_0}^{\infty}(u_t,v_t)_t\,dt=:\ [u,v], \tag{3.19}$$

ahol u, v a (3.18)-cal definiált tér két eleme, a $(\cdot,\ \cdot)_t$ pedig a $H^1_{0,\varphi}(\Omega_t,\tau)$ tér skalárszorzata, akkor belátható, hogy a kapott tér *Hilbert tér* lesz.

Bevezethetjük e térnek azt az alterét, amelyre még az is teljesül, hogy $u\in\in L_2\big(\prod_{t>t_0} H^1_{0,\varphi}(\Omega_t,\tau)\big)$ esetén

$$\frac{du}{dt}\circ\mathscr{H}\in L_2\big[[t_0,\infty)\colon\ L_2(\Omega_{t_0},\tau)\big] \tag{3.20}$$

ahol a (3.20) úgy értendő, hogy az u mint mérhető függvény legyen *Szoboljev értelemben t szerint differenciálható*, és a derivált a $[t_0,\infty)\times\Omega_{t_0}$ alaphalmazon vizsgálva minden rögzített t mellett mint Ω_{t_0} pontjainak függvénye, legyen négyzetesen integrálható, és mint ide képező $L_2(\Omega_{t_0},\tau)$-beli értékkészletű függvény, legyen a fenti értelemben négyzetesen integrálható. A *Fubini tétel* segítségével belátható, hogy ez az utóbbi függvénytér megegyezik a $H^1_{0,\varphi}(\Omega,\tau)$ térrel. E bizonyítás részleteihez l. az [5] I. fejezetének 1.3. tételénél írottakat.

Megjegyezzük, hogy a kapott téren az előző pontbeli (3.16)-tal definiált félcsoport folytonos egyparaméteres félcsoport lesz.

Megadunk minden $t\in(t_0,\infty)$ mellett egy a $H^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega},\tau)$ *Hilbert téren* értelmezett bilineáris funkcionált, amely szigorúan pozitív definit, és bármely rögzített $u, v\in\in H^1_{0,\varphi}(\bar{\Omega},\tau)$ pár mellett mint t függvénye, mérhető. Jelöljük ezt $a(t;u,v)$-vel. Az $a(t;u,v)$ funkcionált az

$$\begin{aligned} a(t;u,v):=\int_{\Omega}\Big\{\Big(A(t)D_xu,D_xv\Big)-\Big(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t},D_xu\Big)v+\Big[C(t)+\Big(L-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathscr{H}}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}\Big)\Big]\times\\ \times uv\Big\}\,dv+\int_{\partial\Omega_t}\varphi(t)uv\,dv_{\partial_{\Omega_t}}\end{aligned} \tag{3.21}$$

ahol a D_x az $R\times R^n$ tér R^n koordiántái szerinti *Szoboljev értelemben vett parciális deriválás* operátorát jelöli, L, $\mathscr{H}$, φ és Φ az előző pontban megadott függvények, $A(t)$ az Ω_t halmaz pontjaitól függő szigorúan pozitív definit mátrix, amely minden $x\in\Omega_t$-ben teljesíti az

$$\begin{aligned}\big(A(t,x)\xi,\xi\big)&\geqq\alpha\cdot\|\xi\|^2\\ \big(A(t,x)\xi,\eta\big)&\leqq\bar{\alpha}\cdot\|\xi\|\cdot\|\eta\|,\ \xi,\eta\in R^n\end{aligned} \tag{3.22}$$

egyenlőtlenségeket, a $C(t)$ az Ω_t-n értelmezett függvény, végül pedig a v és $v_{\partial\Omega_t}$ mértékek a [7]-ben definiált mértékek, melyeket a bevezetett lokális koordináták segítségével adtunk meg. Természetesen feltesszük, hogy valamennyi szereplő függvény korlátos, és mérhető.

Vizsgáljuk meg most a (3.21)-gyel megadott bilineáris funkcionált egy rögzített $[t_0, T]$ sávban. Érvényes először is a (3.22) utolsó, felületi tagjára az

$$|\int_{\partial\Omega} \varphi(t)uv\,dv_{\partial\Omega}| \leqq \|\varphi\|_{L_\infty} c\cdot\|u\|_{L_2}\|V\|_{L_2} \tag{3.23}$$

becslés. Az L egy elég nagyra önkényesen megválasztott konstans, mint ezt az előző pontban láthattuk. Megválasztható ezért L úgy is, hogy teljesüljön a

$$C(t, x)+L-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathscr{H}}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t} > (\varepsilon+c)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(t_0, T)}\cdot\left\|\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}\right\|_{L_\infty(t_0, T)} \tag{3.24}$$

egyenlőtlenség.

Ekkor könnyen belátható az alábbi lemma:

3.2. Lemma. Ha az $a(t; u, v)$ bilineáris funkcionálban szereplő A mátrixfüggvény α alsó korlátja teljesíti az

$$\alpha > \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}\right\|_{L_\infty(t_0, T)} \tag{3.25}$$

feltételt, akkor a (3.21)-gyel megadott bilineáris funkcionál folytonos lesz, mint $H^1_{0,\varphi}(\Omega_t, \tau)\times H^1_{0,\varphi}(\Omega_t, \tau)\to R$, és teljesíti az

$$a(t; u, v) \geqq \alpha_0\|u\|^2_{H^1_{0,\varphi}(\Omega_t, \tau)} \tag{3.26}$$

becslést, ahol $\alpha_0>0$, $u\in H^1_{0,\varphi}(\Omega, \tau)$.

A lemma igen könnyen belátható, bizonyításával nem foglalkozunk itt, mert e rész csupán a dolgozat eredményének egy alkalmazását illusztrálja.

Az így megadott $a(t; u, v)$ és a (3.17a)-val megadott Λ segítségével képezhetünk egy szigorúan pozitív definit bilineáris formát a $H^1(\prod_{t>t_0} H^1_{0,\varphi}(\Omega_t))$ tér elemeiből képezett párok halmazán az alábbi definícióval: Legyenek u és v e tér két eleme. Legyen

$$\int_{t_0}^{T} a(t; u, v)\,dt+(\Lambda u, v)=:\ B(u, v) \tag{3.27}$$

a szigorúan pozitív definit bilineáris funkcionál. A szigorúan pozitív definitséget a 3.2. lemma (3.26) állítása és a Λ pozitív szemidefinitsége biztosítja.

Az [5] könyv 1.1. tételének bizonyítása biztosítja a

$$B(u, v) = (f, v) \tag{3.28}$$

egyenlet egyértelmű megoldhatóságát, tetszőleges $f\in L_2([t_0, \infty);\ L_2(\Omega_{t_0}, \tau))$ mellett. Ez azt jelenti, hogy az egyenlőség fennáll tetszőleges $v\in C_0^\infty(\bar{\Omega}_{[0,T]})$ mellett (azaz minden v végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú zárt $\bar{\Omega}_{[0,T]}$-n értelmezett függvény mellett).

Tegyük fel most, hogy az A mátrixfüggvény a bevezetett differenciálható sokaságra nézve folytonosan differenciálható az $\bar{\Omega}$-on, tételezzük fel továbbá, hogy ugyanez teljesül az u megoldásra a $[t_0, T]$ sávban. Ekkor a bevezetett lokális koordináták segítségével, parciális integrálás útján az alábbi eredményhez juthatunk a (3.27) előállítás alapján:

$$\int\limits_{\Omega_{[t_0,T]}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \partial_i (AD_x U)_i + C \cdot U\right) v \, dv_\Omega + \int\limits_{\partial\Omega_{[t_0,T]}} ((AD_x U, \tau) + \varphi \cdot U) v \, dv_{\partial\Omega} =$$

$$(3.29) \qquad = \int\limits_{\Omega_{[t_0,T]}} f \cdot v \, dv_\Omega .$$

A parciális integrálásnál figyelembe vettük, hogy v tartója a $[t_0, T]$ sávban van, az u pedig deriváltjával együtt eltűnik a t_0 hipersíkon (l. a (3.3)-at).

A fenti átalakításból jól látható, hogy parabolikus típusú egyenlet megáldását akkor szolgáltatja a (3.28) egyenlet, ha az u eleget tesz a

$$(3.30) \qquad (Du, A^*\tau) + \varphi \cdot u = 0$$

peremfeltételnek. E peremfeltétel vizsgálatához azonban, mint ez a [7] dolgozatból és részben e dolgozatból kiderült, az szükséges, hogy az $A^*\tau$ teljesen Ω-ba mutató legyen. A fenti átalakítások alapját pedig τ Ω-ba mutatása adta, tehát úgy tűnik, hogy e két feltételnek együtt kell teljesülnie. Ez geometriailag azt jelenti, hogy nem elegendő A-nak a határpontokban pozitív definitnek lennie, azaz $A\xi$-nek ξ-vel hegyes szöget bezárnia, hanem a határ törései korlátot szabnak az $A\xi$ és ξ szögére. Az is világosan látható, hogy ha a határ sima, akkor ez a probléma nem lép fel, ha τ egy pontban a felületi normális, akkor az $A^*\tau$ is természetesen befelé mutató vektor marad.

A fentiek összefoglalásaképpen kimondunk egy tételt, amely az általános értelemben vett megoldáosk egy egzisztencia-tétele parabolikus egyenletekre vonatkozó homogén peremérték-feladatoknak ilyen nem sima határú tartományok esetében:

3.1. TÉTEL. Legyen az A szigorúan pozitív definit korlátos mátrixfüggvény az Ω általános értelemben vett henger alakú tartományon, mely teljesíti a 2.3. tétel feltételeit. Legyen A folytonosan differenciálható az $\bar{\Omega}$-n megadott sokaságra nézve. Legyen továbbá a határ irányítását jelentő τ vektorfüggvényből képezett $A^*\tau$ „irányítás" teljesen Ω-ba mutató.

Ekkor, ha A teljesíti a (3.22) feltételeket, úgy létezik éspedig egyetlen $u \in H^1(\prod_{t > t_0} H^1_{0,\varphi}(\Omega_t, A^*\tau))$ megoldása a

$$(3.31) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \partial_i (A \cdot Du)_i + Cu = f$$

parabolikus típusú differenciálegyenletnek tetszőleges $f \in L_2([t_0, \infty); L_2(\Omega_{t_0}, \tau))$ mellett. Az egyenletben szereplő C teljesíti a 2.1. lemmabeli C-re kirótt feltételeket.

A [5], illetve [6] könyvekben kialakított módszerek alkalmazásának a lehetősége ugyanúgy megvan a megoldások simaságának vizsgálatára, mint ezt a [7]-ban megmutattuk. Ugyancsak megvizsgálható a teljes inhomogén peremérték-probléma megoldhatósága is. Mi a fenti példát csupán azért szemeltük ki alkalmazásként, mert ebből látható, hogy a peremérték-feladat érzékeny a perem töréseire, és ez az érzékenység a peremoperátor és a differenciáloperátor kompatibilitásánál jelentkezik.

IRODALOM

[1] BANACH, S., *Theory of Functions of Real Variables* (Monografie Mathematiczne, Warsawa, 1951).
[2] CIPSZER, J. and GEHÉR, L., "Extension of functions satisfying a Lipschitz condition", *Acta, Math. Acad. Sci. Hun.* **6** (1955) 213—220.
[3] LAKSHMIKANTAM, V. and LEELA, S., *Differential and Integral Inequalities, II.* (Academic Press, New York, London, 1969).
[4] LIONS, J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).
[5] LIONS, J. L. and MANGENES, E., *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications* (orosz fordítás: Mir, Moszkva, 1971).
[6] LIONS, J. L. and MANGENES, E., *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, II.* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972).
[7] LIPCSEY ZS., „Vegyes típusú peremfeltétel nem sima határú tartományokon, I. Elliptikus eset", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **3** (1977).
[8] MCSHANE, E. J., "Extension of range of functions", *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934) 837—842.
[9] VALENTINE, F. A., "On the extension of vector-functions so as to preserve a Lipschitz condition", *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943).
[10] Бержбинский, Г. М., Об индексе дефекта второй и третей краевых задач в области кусочногладкой границей, *Вестник Л. Г. У.* **7** (1964) 161—162.
[11] Бирман, М. Ш. и Сворцов, Г. Е., О двадратичной суммируемости старших производных решений задачи Dirichlet в областях с кусочногладкой границей, *Известия Уч. Зав. Мат.* **5** (1962) 12—21.
[12] Годунов, С. К. и Рябенький, Б. С., *Разностные схемы* (Наука, Москва, 1973).
[13] Годунов, С. К. и Рябенький, Б. С. *Введение в теорию разностных схем* (Наука, Москва, 1971).
[14] Ладыженская, О. А., Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, *Успехи Мат. Наук* **32** (1977) 123—148.
[15] Ладыженская, О. А., *Краевые задачи математической физики* (Наука, Москва, 1973).
[16] Петровский, И. Г., *Лекции об уравнениях с частными производными* (Наука, Москва, 1961).
[17] Самарский, А. А., *Введение в теорию разностных схем* (Наука, Москва, 1971).

(Beérkezett: 1978. január 25.)

LIPCSEY ZSOLT
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1137 BUDAPEST XIII., VICTOR HUGO U. 18.

MIXED TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH NON-SMOOTH BOUNDARIES II. PARABOLIC CASE

ZS. LIPCSEY

In the first part of our paper we consider the open set $\Omega\subset(t_0, \infty)\times R^n\subset R^{n+1}$, $t_0\in R$, having non-smooth boundary and satisfying some additional properties as will be seen below.

The boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ of the set Ω is called orientable if a locally *Lipschitzian mapping* $\tau\colon \partial_{\Omega_1}\Omega\to R^{n+1}$, $\|\tau\|=1$ can be given and the vector $\tau(t, x)$ satisfies the conditions

$$(t, x)+\tau' s\in\Omega \quad \text{for} \quad \delta > s > 0, \quad \|\tau'-\tau\| < \varepsilon$$

and

$$(t, x)+\tau' s\in \operatorname{ext}_{\Omega_1}\Omega \quad \text{for} \quad -\delta < s < 0, \quad \|\tau'-\tau\| < \varepsilon$$

with suitable $\varepsilon>0$ and $\delta>0$ for each $(t, x)\in\partial_{\Omega_1}\Omega$ where $\partial_{\Omega_1}\Omega$ and $\operatorname{ext}_{\Omega_1}\Omega$ denote the boundary and the exterior of Ω in $(t_0, \infty)\times R^n$ respectively.

The boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ is called uniformly orientable, if it orientable and the conditions for orientability are satisfied locally uniformly.

In order to deal with parabolic maximum—minimum theorems some additional restrictions will have to be imposed on Ω:

a) For arbitrary $[t_1, t_2] \subset (t_0, \infty)$ the set $\Omega \cap [t_1, t_2] \times R^n \subset (t_0, \infty) \times R^n$ is bounded.

b) The set $(t \times R^n) \cap \Omega$, $t > t_0$ is nonempty.

c) For arbitrary $(t, x) \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ the orientation vector $\tau(t, x)$ is not paralell with e_t.

The open set Ω satisfying the restrictions *a)*, *b)* and *c)* will be called a generalized cylinder.

The main result of our paper can be stated as follows (Theorem 1.2.):

If the generalized cylinder Ω has uniformly orientable boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ satisfying the orientability conditions with universal $\varepsilon(t_1) > 0$, $\delta(t_1) > 0$ in the interval $[t_0, t_1] \times R^n$ for arbitrary $t_0 < t_1 < \infty$ and the set $\operatorname{int}_{R^n}(\bar{\Omega} \cap \{t_0\} \times R^n)$ is non-empty then an n-dimensional C^∞ manifold structure on the set $\Omega_{t_0} := \bar{\Omega} \cap \{t_0\} \times R^n$ and a homeomorphysm $\mathscr{H}$: $[t_0, \infty) \times \bar{\Omega}_{t_0} \to \bar{\Omega}$ exist with the following properties:

1. The boundary of Ω_{t_0} in $\{t_0\} \times R^n$ is an $(n-1)$-dimensional C^∞ submanifold.

2. The boundary $\partial_{\Omega_1}\Omega$ of Ω is an n-dimensional C^∞ submanifold of the image of the product manifold $[t_0, \infty) \times \bar{\Omega}_{t_0}$ with the map $\mathscr{H}$.

3. Let us denote by $S_h(U)$ the C^∞ transformation of $\bar{\Omega}$ for arbitrary $h \geqq 0$ defined as follows:

$$S_h(U) := \mathscr{H}(e_t h + \mathscr{H}^{-1}(U)), \quad U \in \bar{\Omega}.$$

If g denotes a smooth curve in $\bar{\Omega}$ satisfying the conditions $g(s_0) \in \partial_{\Omega_1}\Omega$ and $g'(s_0) = \tau(g(s_0))$ then

$$[S_h(g(s_0))]^1 = \tau(S_h(g(s_0)))$$

holds for $h \geqq 0$.

The theorem 1.3. is a variant of the theorem 1.2.

To show the power of our main result we prove an existence-theorem for the boundary-value problem $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \varphi u = \psi$ for linear parabolic equations. Let the matrix function A: $\bar{\Omega} \to R^{n^2}$ be the quotient matrix of the second order part of the equation. For the existence of solution it turned out to be necessary for both $\tau(t, x)$ and $(A^*\tau)(t, x)$ to point into Ω at each $(t, x) \in \partial_{\Omega_1}\Omega$.

The proof of the existence theorem mentioned above is based on a representation of the transformation semigroup $\{S_h\}_{h \geqq 0}$ by continuous linear endomorphisms of the space of smooth functions satisfying the condition $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \varphi u = 0$ along the boundary.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 333—347*

AZ IRÁNYÍTÁSELMÉLET NÉHÁNY NUMERIKUS MÓDSZERE

GERENCSÉR LÁSZLÓ

Budapest

A dolgozatban az irányításelméletben jelentős szerepet játszó numerikus módszereket tekintünk át. Az első két pontban a MIELE-*féle redukált gradiens módszert* ismertetjük. A harmadik pontban peremfeltételekkel kiegészített feladatra ismertetjük BRYSON és DEHHAM módszerét. A negyedik pontban nemlineáris peremérték problémák numerikus megoldását ismertetjük: a *"shooting method"* elnevezésű módszert és a kvázilinearizáció módszerét. Az ötödik pontban lineáris peremérték problémák megoldására mutatjuk be a *Ricatti-transzformáció* módszerét. Végül vázoljuk a multiplikátormódszert.

1. Bevezetés

Az irányításelmélet kifejlődésének a háborús években a katonai alkalmazások adtak döntő lökést. A repülés-, ill. a rakétatechnikában az irányításelmélet később is megőrizte jelentőségét. Az elmélet egyik fő eredménye, a *Pontrjagin-féle maximumelv* 1962-ből való. A kidolgozott matematikai apparátus később ipari alkalmazásokra is talált, különösen a folytonos üzemű iparágakban (pl. vegyipar, kohászat).

Viszonylag későn, a matematikai programozás kifejlődésével párhuzamosan került sor a numerikus módszerek kidolgozására. Az idevonatkozó eredmények egyik érdekes és a szerzőt inspiráló összefoglalása MOJSZEJEV könyve [13], amely nem kis vitát szült. Sokan kifogásolták, hogy a hagyományos matematikai előadásmóddal szakítva a módszereket kellő precízség nélkül adja elő.

Véleményem szerint az alkalmazott matematika elődásmódja nem követheti a tiszta matematikában kialakult mintákat. Egy alkalmazott matematikai eredmény tételben való összefoglalása általában nehézkes. A gondolatok kiemelésére a heurisztikus előadásmód több lehetőséget ad, de ugyanakkor a szerzőtől több munkát kíván. MOJSZEJEV könyvében, különösen annak korábbi változataiban jól kirajzolódnak azok a gondolatok, amelyek egy eredmény elérésében döntőek. Igaz ugyan, hogy az algoritmusok teljes részletességgel nincsenek kidolgozva. Azt hiszem azonban, hogy a módszerek ebben a formában a programtervező matematikus számára többet nyújtanak, mint egy részletes, de merev algoritmus.

Ebben a dolgozatban kísérletképpen az idézett mű szellemében bemutatunk néhány numerikus módszert. Ezeket MOJSZEJEV, POLAK, ill. TOLLE könyvéből, valamint MIELE dolgozataiból gyűjtöttük össze. Bár a dolgozat terjedelme rövid, úgy tűnik az összefoglalt anyaggal a módszerek egy igen tág körét sikerült látótávolságba hozni.

Az idézett irodalomban a tárgyhoz szorosan kapcsolódó [2], [10], [9], [13], [12] munkák mellett megemlítünk néhány művet, amely az irányításelmélet alapjait tárgyalja ([7], [11]).

A többi idézett mű egy-egy numerikus kérdés részletesebb tárgyalását adja ([4], [5], [6]).

Végül szükségesnek látjuk megjegyezni, hogy az irányításelméletnek a dolgozatban bemutatott matematikai modelljei mellett a matematikai és a műszaki irodalom sok más modellel is foglalkozik. A *Pontrjagin-féle feladatkörbe* nem férnek bele pl. az ún. elosztott paraméterű rendszerek vagy a sztohasztikus irányítás problémái. Erre vonatkozóan l. [1], [8].

Az irányításelmélet fő alkalmazási területei közé tartoznak: nukleáris technológia, kohászat, vegyipar. Hazai alkalmazásra is sor került a kohászat területén, hevítési folyamatokkal kapcsolatban. Ezt a munkát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen végezték. Ugyanitt folytak olyan alkalmazási munkák is, amelyek lényegüket tekintve nem irányításelméleti feladatok, de a matematikai apparátus az irányításelmélet körébe tartozik. Ilyen feladatra vezet a föld rétegződésének a meghatározása robbantások hangjának terjedése alapján.

2. A differenciálfeltételek eliminációja a Lagrange-feladat esetén

Az optimális irányítási problémák numerikus megoldására vonatkozó eredmények igen szerteágazók. Úgy gondoljuk, hogy a tárgyalás legcélravezetőbb módja az, ha egyszerű részfeladatok megoldását ismertetjük. Ezekből azután összetettebb feladatokra vonatkozó speciális algoritmusok szerkeszthetők.

Tekintsük először a következő egyszerű *Lagrange feladatot:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x^0, \tag{2.1}$$

$$\min \int_0^T F(x, u)\, dt. \tag{2.2}$$

Itt x egy n dimenziós vektorváltozót jelent, az u irányítási vektor m-dimenziós.

Ezt a feladatot a végesdimenziós feladatok analógiájára oldjuk meg. A (2.1) feltételekhez vezessünk be egy $\lambda(t)$ multiplikátorfüggvényt. $\lambda(t)$ egy n-dimenziós vektort jelent, mondjuk $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))'$. (A transzponálást $'$ jelöli.)

Vezessük be továbbá az

$$I = \int_0^T \{F(x, u) - \lambda'(\dot{x} - f(x, u))\}\, dt \tag{2.3}$$

ún. bővített funkcionált. Legyen $x^0(t)$, $u^0(t)$ egy (2.1)-et kielégítő kezdeti megoldás. I variációja egyszerűen kiszámítható:

$$\delta I = \int_0^T (F_x \delta x + F_u \delta u - \lambda' \delta \dot{x} + \lambda' f_x \delta x + \lambda' f_u \delta u)\, dt. \tag{2.4}$$

Megjegyezzük, hogy egy r változós és s dimenziós térbe képező vektorfüggvény deriváltja mindig egy $s \times r$ méretű mátrix. Így pl. egy függvény gradiense mindig sorvektor.

A δx variációra a $\delta x(0)=0$ feltétel kell, hogy teljesüljön. Tegyük fel még, hogy $\lambda(T)=0$, akkor

$$\int_0^T -\lambda' \delta \dot{x}\, dt = \int_0^T \dot{\lambda}' \delta x\, dt.$$

A δx-et tartalmazó tagok eltűnnek, ha

$$F_x + \dot{\lambda}' + \lambda' f_x = 0. \tag{2.5}$$

Ekkor

$$\delta I = \int_0^T (F_u + \lambda' f_u)\, \delta u\, dt. \tag{2.6}$$

Bevezetve a

$$H = H(x, u, \lambda) = F(x, u) + \lambda' f(x, u) \tag{2.7}$$

ún. *Hamilton-függvényt*, (2.5), ill. (2.7) a

$$\dot{\lambda}' = -H_x,$$

ill. a

$$\delta I = \int_0^T H_u \delta u\, dt \tag{2.8}$$

alakban írható.

Ily módon a differenciálfeltételeket sikerült eliminálni.

A differenciálfeltételek eliminációjából továbbindulva a (2.1), (2.2) feladatokra elsőrendű módszer dolgozható ki. Elsőrendűnek nevezzük a módszert, mivel a célfunkcionál első variációját vesszük csak tekintetbe.

A differenciálfeltételek eliminációját szokás más úton is levezetni. A (2.1) differenciálegyenlet x-et mint u függvényét meghatározza. A variációk között pedig a

$$\delta \dot{x} = f_x \delta x + f_u \delta u \tag{2.9}$$

egyenlet áll fenn. Innen δx explicit módon eliminálható.

Legyen ugyanis $\Phi(t)$ a (2.9) differenciálegyenlet fundamentális mátrixa. Tehát $\Phi(t)$ kielégíti a

$$\dot{\Phi} = f_x \Phi, \quad \Phi(0) = I \tag{2.10}$$

mátrix-differenciálegyenletet. Az f_x együtthatómátrix az $f_x(x^0(t), u^0(t))$ mátrix egy tömör jelölése, I az egységmátrixot jelöli. Ekkor

$$\delta x(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) f_u \delta u\, ds. \tag{2.11}$$

Írjuk fel a célfüggvény variációját a

$$\delta J = \int_0^T (F_x \delta x + F_u \delta u)\, dt \tag{2.12}$$

alakban. Ha behelyettesítjük δx (2.11)-beli értékét egy csak δu-tól függő kifejezést kapunk:

$$\delta J = \int_0^T \int_0^t F_x(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(s)(f_u\delta u)(s)\,ds\,dt + \int_0^T F_u\delta u\,dt. \tag{2.13}$$

(Itt $F_x(t)$ egy pontatlan, de rövid jelölése $F_x(x^0(t), u^0(t))$-nek.) A kettős integrálban az integrálás sorrendjét felcseréljük és bevezetjük a

$$\lambda'(s) = \left(\int_s^T F_x(t)\Phi(t)\,dt\right)\Phi^{-1}(s) \tag{2.14}$$

függvényt. Ekkor a

$$\delta J = \int_0^T (\lambda' f_u + F_u)\,\delta u\,dt = \int_0^T H_u\delta u\,dt \tag{2.15}$$

kifejezést kapjuk.

A $\Phi^{-1}(s)$ mátrix fundamentális mátrixa a

$$\dot\lambda = -f_x'\lambda$$

ún. konjugált egyenletnek. Ezért az (2.14) alatt értelmezett $\lambda(s)$ függvény kielégíti a

$$\dot\lambda = -f_x'\lambda - F_x = -H_x, \quad \lambda(T) = 0 \tag{2.16}$$

differenciálegyenletet (l. [10]).

Most megmutatjuk, hogyan lehet eliminálni a differenciálfeltételeket a *Mayer-feladat* esetén. A feladatot fogalmazzuk meg az

$$\dot x = f(x, u), \quad x(0) = x^0 \tag{2.17}$$

$$\min G(x(T)) \tag{2.18}$$

alakban.

Most is abból induljunk ki, hogy a δx, δu variációk kielégítik a

$$\delta\dot x = f_x\delta x + f_u\delta u \tag{2.19}$$

lineáris differenciálegyenletet. A célfüggvény variációját pedig a

$$\delta J = G_x(T)\delta x(T) \tag{2.20}$$

képlet adja meg. Ennek a variációnak egy csak u-tól függő alakját akarjuk megtalálni.

Tekintsük (2.19)-cel párhuzamosan a

$$\dot\lambda = -f_x'\lambda, \quad \lambda(T) = G_x(T) \tag{2.21}$$

ún. konjugált egyenletet. A $z = \lambda'\delta x$ függvény kielégíti a

$$\dot z = \frac{d}{dt}(\lambda'\delta x) = \dot\lambda'\delta x + \lambda'\delta\dot x = \lambda' f_u\delta u, \quad z(0) = 0 \tag{2.22}$$

differenciálegyenletet. Ebből integrálással a

$$\delta J = \lambda'(T)\delta x(T) = z(T) = \int_0^T \lambda' f_u\delta u\,dt \tag{2.23}$$

előállítást kapjuk (l. [13]).

3. A redukált gradiens módszer

Az eddigi eredmények alapján a (2.1), (2.2) *Lagrange-feladat*ra egy numerikus eljárás dolgozható ki. A célfunkcionál variációját sikerült csak mint u függvényét kifejezni.

Legyen $u^0(t)$ egy első közelítő megoldás. Az $u(t)$ megoldást $\delta u^0(t)$ korrekcióval módosítjuk úgy, hogy a célfunkcional értéke csökkenjen. A célfunkcionál variációjának redukált alakja:

$$\delta J = \int_0^T H_u \delta u \, dt. \tag{3.1}$$

A H_u függvény úgy értelmezhető, mint az I funkcionál redukált gradiense. A δu^0 korrekció kézenfekvő választása tehát

$$\delta u^0 = -H_u. \tag{3.2}$$

Az iteráció egy lépéséhez tehát meg kell oldanunk a (2.1) és (2.5) differenciálegyenleteket. Az $u(t)$ közelítő megoldást ezután az

$$u^1(t) = u^0(t) + \alpha \delta u^0(t) \tag{3.3}$$

képlettel definiáljuk. Hangsúlyozni kell, hogy a megfelelő α lépéshossz megválasztása a matematikailag legkevésbé tisztázott kérdés.

A redukált gradiens módszer bemutatott alakjában a legnehezebb feladat az új u^1 irányításhoz tartozó fázistrajektória meghatározása. Ez egy nemlineáris differenciálegyenlet megoldását jelenti az $x(0)=x^0$ kezdetiérték mellett. Ennek elkerülésére MIELE egy új eljárást javasolt, most ezt ismertetjük (l. [9]).

A differenciálfeltételek a δu^0 korrekció alkalmazása után már nem teljesülnek. A fázistrejektória δx^0 korrekcióját első közelítésben meghatározhatjuk a differenciálfeltételek linearizálásával. Vagyis úgy, hogy megoldjuk a

$$\delta \dot{x}^0 = f_x \delta x^0 + f_u \delta u^0, \quad \delta x^0(0) = 0 \tag{3.4}$$

lineáris differenciálegyenletet.

Ez a korrekció a differenciálfeltételek nemlinearitása miatt még mindig nem biztosítja azok teljesülését. Az eltérés nagyságát az

$$L = \int_0^T (\dot{x} - f(x, u))'(\dot{x} - f(x, u)\, dt \tag{3.5}$$

kifejezéssel mérjük. Ez a négyzetes hiba kifejezése. Az L funkcionál első variációját fix u mellett a

$$\delta L = \int_0^T 2(\dot{x} - f(x, u))'(\delta \dot{x} - f_x \delta x)\, dt \tag{3.6}$$

kifejezés adja meg. A négyzetes hiba csökkenésére számíthatunk tehát, ha egy újabb δx^1 korrekciót a

$$\delta \dot{x}^1 = f_x \delta x^1 - \dot{x}^0 + f(x^0, u^0), \quad \delta x^1(0) = 0 \tag{3.7}$$

lineáris differenciálegyenletből határozzuk meg.

Az eljárás két lépése egyesíthető egyetlen lépéssé a következő észrevétel alapján: a (3.4) és (3.7) lineáris differenciálegyenletek összeadásával a $\delta x=\delta x^1+\delta x^0$ korrekcióra a

$$\delta\dot{x}=f_x\delta x+f_u\delta u^0-\dot{x}^0+f \tag{3.8}$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk.

Bár a δx korrekció (3.8) alatti értéke sem biztosítja a differenciafeltételek pontos teljesülését, az eljárás következő lépése a δu korrekció újabb értékének a meghatározása. Az eljárás helyességének megalapozásául egy végesdimenziós esetben bizonyítható stabilizálási módszer kiterjesztése szolgál [3].

Megjegyezzük, hogy az I funkcionál második variációja is könnyen kiszámítható:

$$\delta^2 I=\int_0^T(\delta u' H_{uu}\delta u+2\delta u' H_{ux}\delta x+\delta x' H_{xx}\delta x)\,dt. \tag{3.9}$$

Ennek a kifejezésnek a hasznosítása azonban igen körülményes.

4. A differenciálfeltételek eliminációja peremfeltételek mellett

A következőkben az

$$\dot{x}=f(x,u) \tag{4.1}$$

$$x(0)=x^0,\quad g\big(x(T)\big)=x^1 \tag{4.2}$$

$$\min\int_0^T F(x,u)\,dt \tag{4.3}$$

típusú feladattal foglalkozunk. A 2. szakaszhoz hasonlóan azt a kérdést vizsgáljuk meg, milyen módon lehet a funkcionál variációját csak mint δu függvényét kifejezni. A (4.1), (4.2), (4.3) feladat megfogalmazásakor természetszerű követelmény az, hogy a végpontban kirótt feltételek száma m (vagyis a g vektor dimenziója) kisebb, mint n, ahol n az x fázisvektor dimenziója.

A korábbi sikeres módszerekre támaszkodva vezessük be ismét az

$$I=\int_0^T\{F(x,u)-\lambda'(\dot{x}-f(x,u))\,dt \tag{4.4}$$

bővített funkcionált. Az I funkcionál variációjára a már ismert

$$\delta I=\int_0^T(F_x\delta x+F_u\delta u-\lambda'\delta\dot{x}+\lambda' f_x\delta x+\lambda' f_u\delta u)\,dt \tag{4.5}$$

kifejezést kapjuk. A $-\lambda'\delta\dot{x}$ tag átalakítása parciális integrálással történik;

$$\int_0^T-\lambda'\delta\dot{x}\,dt=[-\lambda'\delta x]_0^T+\int_0^T\dot{\lambda}'\delta x\,dt.$$

A jobb oldalon álló összeg első tagja nullává válik, ha

$$\lambda(T)'\delta x(T) = 0. \tag{4.6}$$

Az alsó határon számított érték ugyanis $\delta x(0)=0$ miatt 0.

A $\delta x(T)$ elmozdulás nem lehet tetszőleges. A végpontban kirótt peremfeltételek alapján ugyanis a

$$g_x(x(T))\delta x(T) = 0 \tag{4.7}$$

lineáris egyenletrendszernek kell, hogy eleget tegyen. A g függvény komponenseit $g_1, \ldots, g_m$-mel jelölve (4.7) helyett a következő m db lineáris egyenlőséget írhatjuk fel:

$$g_{ix}(x(T))\delta x(T) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.8}$$

A $\lambda(T)$ vektort úgy akarjuk megválasztani, hogy minden, a (4.8) lineáris egyenlőségrendszernek eleget tevő $\delta x(T)$ vektorra (4.6) is teljesüljön. Ez csak úgy lehetséges, ha $\lambda(T)$ a következő alakú:

$$\lambda'(T) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_{ix}(x(T)), \tag{4.9}$$

ahol $\mu_1, \ldots, \mu_m$ egyelőre ismeretlen valós számok. A $\lambda(T)$ multiplikátorvektorra vonatkozó (4.9) előállítást nevezik *transzverzalitási feltételnek*.

A transzverzalitási feltétel teljesülése mellett a δI variációban a $-\lambda'\delta\dot{x}$ tag a már ismert módon $\dot{\lambda}'\delta x$-ba megy át. A δx-et tartalmazó tagok megsemmisítését ismét az

$$F_x + \dot{\lambda}' + \lambda' f_x = 0 \tag{4.10}$$

feltétel teljesítésével érjük el. A δI variációra pedig a már ismert

$$\delta I = \int_0^T H_u \delta u \, dt \tag{4.11}$$

kifejezést kapjuk.

A kapott kifejezés csak olyan közelítő megoldás esetén alkalmazható, amelyre $x(t)$ kielégíti a peremfeltételeket. További nehézség az, hogy az x, λ függvénypárra adott (4.1), (4.10) differenciálegyenletrendszerben a (4.2) peremfeltételek eloszlása kedvezőtlen, amennyiben a jobb végponton vegyesen szerepelnek az x, ill. λ változókra vonatkozó peremfeltételek. A kapott összefüggések elméletileg érdekesek, de numerikus módszer közvetlenül nem adódik.

A (4.1), (4.2), (4.3) feladat numerikus megoldásának egy útja a peremfeltételek iteratív módon való kielégítése. Ezt a módszert, amelynek realizációja BRYSON, DENHAM és KELLEY nevéhez fűződik a *Mayer-feladat* esetén ismertetjük (l. [12]).

Legyen adott tehát az

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.12}$$

$$x(0) = x^0, \quad g(x(T)) = x^1 \tag{4.13}$$

$$\min g_0(x(T)) \tag{4.14}$$

feladat. A δu variáció a $g_0(x(T)), \ldots, g_m(x(T))$ értékeket $\delta g_0, \delta g_1, \ldots, \delta g_m$-mel változtatja meg. Ezeket a megváltozásokat korábban már kifejeztük. A jelen esetben a

$$\delta g_i = \int_0^T \lambda^{i\prime} f_u \delta u \, dt \tag{4.15}$$

előállítást kapjuk, ahol $\lambda^i = \lambda^i(t)$ megoldása a

$$\dot{\lambda}_i = -f_x' \lambda \tag{4.16}$$

lineáris differenciálegyenletnek, a végpontban megadott $\lambda_i(T) = g_{ix}(x(T))$ feltétel mellett.

A δu variációt a $\mu_i' = \lambda_i' f_\mu$ függvények alkalmas lineáris kombinációjaként akarjuk előállítani, mondjuk

$$\delta u = \sum_{i=0}^m c_i \mu^i. \tag{4.17}$$

A $(c_0, \ldots, c_m)$ vektort röviden c-vel jelöljük. A δu (4.17) kifejezését (4.15)-be helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\delta g_i = a_i' c \tag{4.18}$$

ahol az $a_i = (a_{i0}, \ldots, a_{im})$ vektort az

$$a_{ij} = \int_0^T \mu^i \mu^j \, dt \tag{4.19}$$

kifejezés definiálja.

A c vektor meghatározása úgy történik, hogy egyrészt a peremfeltételeket nagyobb pontossággal elégítsük ki, másrészt azzal egyidejűleg csökkenjen a célfüggvény értéke.

Célszerű továbbá a c vektor normáját felülről korlátozni. Így a következő feladatot fogalmazhatjuk meg:

$$\min a_0' c, \tag{4.20}$$

$$a_i' c = -g_i, \tag{4.21}$$

$$c' c \leqq \delta. \tag{4.22}$$

Ez a feladat lényegében egyenértékű azzal, hogy az a_0 vektort a (4.21) feltételek által meghatározott hipersíkra kell vetíteni. Erre számos hatékony és stabil eljárás ismert.

Sajnos az ismertetett eljárás nem alkalmazható akkor, ha u-ra vonatkozólag korlátozó feltételeink vannak.

5. Peremérték-problémák numerikus megoldása

Jól ismert, és a már bemutatott gondolatok alapján könnyen bizonyítható, hogy az optimális x^*, λ^*, u^* megoldás kielégíti az

$$\dot{x} = \dot{H}_\lambda \quad \dot{\lambda} = -H_x \tag{5.1}$$

és

$$H_u = 0 \tag{5.2}$$

feltételrendszert.

A peremfeltételek a feladat típusától függnek. Ez a *Pontrjagin-féle maximumelv* egy kevesebbet mondó formája. Egyes feladatok esetén (5.2)-ből u egyértelműen kifejezhető, mint x és λ függvénye, mondjuk $u=u(x, \lambda)$. Ezt (5.1)-be helyettesítve egy

$$\dot{x} = h(x, \lambda, t) \tag{5.3}$$

$$\dot{\lambda} = k(x, \lambda, t) \tag{5.4}$$

differenciálegyenletrendszert kapunk. A peremfeltételek legyenek

$$x(0) = a, \quad \lambda(T) = b. \tag{5.5}$$

A feladatot az ún. *"shooting method"* segítségével oldjuk meg [13], [10]. A módszer magyar elnevezése: a kezdeti érték variációjának módszere. Vezessünk be egy z vektorváltozót, amely λ-val azonos méretű és tekintsük a (5.3), (5.4) differenciálegyenletrendszert az

$$x(0) = a, \quad \lambda(0) = z \tag{5.6}$$

kezdeti érték mellett. A megoldásokat jelölje $x(t, z)$, ill. $\lambda(t, z)$. A z értékét úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön a

$$\lambda(T, z) = b \tag{5.7}$$

peremfeltétel. Az (5.7) egyenlet egy z-re vonatkozó nemlineáris algebrai egyenlet.

A bal oldal *Jacobi-mátrix*át az (5.3), (5.4) egyenlet variációjából kaphatjuk meg. A

$$\delta x = \frac{\partial x(t, z)}{\partial z}, \quad \delta \lambda = \frac{\partial \lambda(t, z)}{\partial z}$$

jelölésekkel teljesül a

$$\delta \dot{x} = h_x \delta x + h_\lambda \delta \lambda \tag{5.8}$$

$$\delta \dot{\lambda} = k_x \delta x + k_\lambda \delta \lambda \tag{5.9}$$

mátrix-differenciálegyenletrendszer, a

$$\delta x(0) = 0, \quad \delta \lambda(0) = I \tag{5.10}$$

kezdetiértékkel. Az (5.8), (5.9) differenciálegyenletrendszer közelítő megoldása után a (5.7) egyenletrendszerre alkalmazhatunk egy *kvázi-Newton módszer*t. („Kvázi" abban az értelemben, hogy a *Jacobi-mátrix*ot közelítőleg számítjuk ki.)

A *Newton-módszer* egy másirányú alkalmazása az ún. kvázilinearizáció [2], [13], [10]. A peremfeltételek teljesülését mindvégig megköveteljük, magát a differenciálegyenletet azonban iteratív úton elégítjük ki.

A módszer alapgondolata az, hogy a peremérték problémát egy végtelen dimenziós térben $F(x)=0$ alakban ábrázoljuk, majd erre az egyenletre alkalmazzuk a *Newton módszert.*

Az

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{5.11}$$

alakban felírt differenciálegyenletet írjuk át az

$$F = x(t) - x(0) - \int_0^t f(x(s), s)\, ds = 0 \tag{5.12}$$

integrálalakba. A baloldali kifejezés variációjára a

$$\delta F = \delta x(t) - \delta x(0) - \int_0^t f_x(x(s), s)\delta x(s)\, ds \tag{5.13}$$

képletet kapjuk. A *Newton-módszer* általánosítása jelen esetben a következőt jelenti. Kiindulunk egy $x^0(t)$ kezdeti közelítésből, amelyre a peremfeltételek teljesülnek. Ezután meghatározzuk a $\delta x^0(t)$ elmozdulásokat úgy, hogy teljesüljön az

$$F + \delta F = 0 \tag{5.14}$$

egyenlőség. Az

$$x^1(t) = x^0(t) + \delta x^0(t)$$

új közelítésre így (5.12) és (5.13) összeadásával, majd differenciálalakra való hozásával az

$$\dot{x}^1 = f_x(x^0(t), t)(x^1(t) - x^0(t)) + f(x^0(t)) \tag{5.15}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A peremfeltételek teljesülését pedig változatlanul megköveteljük.

A (5.15) egyenlet egy $x^1(t)$-re vonatkozó lineáris peremrétékprobléma. Előállítható lett volna úgy is, hogy a jobb oldalt $x^0(t)$ körül sorbafejtjük. A fenti körülményesebb meggondolás azonban útmutatás is a módszer részletesebb vizsgálatára. A módszer realizációjához szükséges lineáris peremérték-problémák megoldása is, ezt egy másik szakaszban külön tárgyaljuk.

6. Lineáris peremérték-probléma

Lineáris peremérték-problémák megoldására hatékony eljárás adható az ún. *Ricatti transzformáció* segítségével. Ez a következőkben áll. Legyen adott egy

$$\dot{x} = Ax + Bp - v \tag{6.1}$$

$$\dot{p} = Cx + Dp - w \tag{6.2}$$

lineáris differenciálegyenlet. Az x, p vektorok dimenziója legyen n. A 0 kezdőpontban legyen adott az $x(0)$ kezdeti érték. A feltételek másik csoportja a $t = T$ végpontban van megadva. Ezek a feltételek is lineárisak, számuk n. Ezeknek a feltételeknek az alakja sokféle lehet, de numerikus lineáris algebrából ismert eljárásokkal minden esetben

(6.3) $$Lx(T)+r = p(T)$$

alakra hozhatók. A *Ricatti-transzformáció*val az $x(t), p(t)$ függvények közötti kapcsolatot írjuk le. Pontosabban keressük a $p(t)$ függvénynek a

(6.4) $$p = Kx+q$$

alakban való előállítását, ahol K, q maguk is függnek t-től. A jobb végpontban adott (6.3) feltételek így az egész trajektóriára kiterjeszthetők.

A K, q függvények meghatározása céljából a (6.2) differenciálegyenletbe helyettesítsük be (6.4)-et:

(6.5) $$\dot{p} = Cx+D(Kx+q)-w.$$

Másrészt (6.4) differenciálása és $\dot{x}$ (6.1)-beli értékének behelyettesítése után

(6.6) $$\dot{p} = \dot{K}x+K\dot{x}+\dot{q} = \dot{K}x+KAx+KB(Kx+q)-Kv+\dot{q}$$

adódik.

Az (6.5), illetve (6.6) egyenletek jobb oldalai egyenlők kell, hogy legyenek. Az x-et tartalmazó tagok együtthatóját egyenlővé téve a

(6.7) $$\dot{K} = -KA-KBK+DK+C$$

ún. *Ricatti-féle differenciálegyenletet* kapjuk. Az x-et nem tartalmazó tagokat egyenlővé téve a

(6.8) $$\dot{q} = (-KB+D)q+Kv-w$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk. Ha tehát x, K, ill. q kielégítik az (6.1), (6.7), (6.8) differenciálegyenleteket, akkor p kielégíti a (6.2) differenciálegyenletet. Az eredmény érdekessége abban áll, hogy a peremfeltételektől függetlenül sikerült megfogalmazni.

A végpontban adott (6.3) feltételeket legegyszerűbben úgy elégíthetjük ki, hogy a

(6.9) $$K(T) = L, \quad q(T) = r$$

feltételeket írjuk elő. Ezeknek a kezdeti feltételeknek az előírásával a $K(t)$, ill. $q(t)$ függvények (6.7), illetve (6.8) alapján kiszámíthatók.

A K, ill. q ismeretében a (6.1) differenciálegyenlet a $p=Kx+q$ helyettesítés után az ismert kezdeti érték mellett egyértelműen megoldható. Végül p-t a $p=Kx+q$ képlet ismételt alkalmazásával számítjuk ki.

Vizsgáljuk meg, mint mond a *"shooting method"* lineáris esetben.

Legyen adott az

(6.10) $$\dot{x} = Ax+b$$

lineáris differenciálegyenlet. A kezdeti értékekre vonatkozóan legyen adott egy

(6.11) $$Qx(0) = q$$

alakú feltétel. Az x vektor dimenziója legyen n. A $t=0$ helyen adott feltételek száma

k, vagyis a Q mátrix mérete $k \times n$. A hiányzó $n-k$ feltétel a $t=T$ pontban van megadva.

Annak érdekében, hogy a feladatot kezdeti érték probléma megoldására vezessük vissza, a $t=0$ pontban adott feltételeket átvisszük a $t=T$ pontba. Ez a következőképpen történik. Meg fogunk határozni egy $G(t)$ $k \times n$-es mátrixfüggvényt és egy $z(t)$ vektorfüggvényt úgy, hogy minden t-re

$$G(t)x(t) = z(t) \tag{6.12}$$

fennálljon. A $G(0)$, ill. $z(0)$ pedig azonos Q-val, ill. q-val. Mind a G, mind pedig a z függvény meghatározása egy kezdeti érték probléma megoldásával történik.

Tekintsük a (6.10) egyenlettel párhuzamosan a

$$\dot{\lambda} = -A^* \lambda \tag{6.13}$$

ún. konjugált egyenletet. A (6.10) és (6.13) egyenletek között a következő hasznos összefüggés van. Legyenek a (6.10), ill. (6.13) egyenletek megoldásai. Ekkor a

$$v = \lambda' x \tag{6.14}$$

függvényre a következőt kapjuk:

$$\dot{v} = \dot{\lambda}' x + \lambda' \dot{x} = -\lambda' A x + \lambda'(Ax+b) = \lambda' b. \tag{6.15}$$

Határozzuk meg már most a (6.13) differenciálegyenlet k db független megoldását $G=(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$-t oly módon, hogy teljesüljön a

$$G(0) = \left(\lambda^1(0), \dots, \lambda^k(0)\right) = Q \tag{6.16}$$

kezdeti feltétel. Ekkor (6.14) és (6.15) így alakul: a v skalár helyett egy z vektort definiálunk a

$$z = Gx \tag{6.17}$$

egyenlőséggel. Erre teljesül, hogy

$$\dot{z} = G'b \tag{6.18}$$

A $G(t)$ mátrixfüggvény ismeretében a (6.18) differenciálegyenlet a $z(0)=q$ kezdeti érték ismeretében integrálható. Ezzel a kívánt átvitelt elértük (l. [13]).

Az eljárás eredményeképpen a jobb végpontban kapunk egy lineáris algebrai egyenletet $x(T)$-re. Ezt megoldva egy kezdeti érték problémára vezettük vissza az eredeti feladatot.

Megeshet, hogy az $x(T)$-re kapott lineáris algebrai egyenlet rosszul kondicionált. (Ez a veszély még inkább fennáll a nemlineáris *"shooting method"* esetén.) Ilyenkor célszerű az időintervallumot felosztani részekre. Ez lényegében azt eredményezi, hogy egy

$$Sx = b \tag{6.19}$$

egyenletet egy

$$S^1 x^1 = x^2, \dots, S^j x^j = b \tag{6.20}$$

egyenletrendszerrel helyettesítünk, ahol az S^i-k jól kondicionáltak, és

$$S = S^j \dots S^1.$$

7. Multiplikátor módszer

A differenciálfeltételek kezelésének egy újabban elterjedt útja az ún. multiplikátor módszer. Legyen adott az

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{7.1}$$

$$x(0) = x^0, \tag{7.2}$$

$$\min \int_0^T F(x, u)\, dt \tag{7.3}$$

probléma. Definiáljuk az ún. *bővített Lagrange-féle funkcionál*t a

$$Q = Q(x, u, \lambda) = \int_0^T \{F(x, u) - \lambda'(\dot{x} - f(x, u)) + k(\dot{x} - f(x, u))'(\dot{x} - f(x, u))\}\, dt \tag{7.4}$$

kifejezéssel. Ez a funkcionál egy olyan tagot is tartalmaz, amely a differenciálfeltételek nemteljesülését bünteti.

A végesdimenziós esetben kidolgozott multiplikátor módszert a jelen esetben is alkalmazhatjuk. Előrebocsátjuk azonban, hogy amit bemutatunk, az az eredmények formális átvitele. Az egzakt megalapozás, ill. a módszer hatékonyságának a vizsgálata még tisztázatlanok. A végesdimenziós esetet illetően l. [4].

Az eljárás alapgondolata az, hogy az optimális multiplikátor ismerete esetén a (7.1), (7.2), (7.3) feladatok visszavezethetők a

$$\min Q(x, u, \lambda^*) \tag{7.5}$$

variációs feladatra. Ebben a feladatban már differenciálfeltételek nem szerepelnek. A λ^* multiplikátor meghatározása iteratív úton történik. A

$$\min Q(x, u, \lambda) \tag{7.6}$$

feladat megoldását jelöljük x_λ, u_λ-val. Ekkor a multiplikátorokat a

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - 2k(\dot{x}^j - f(x^j, u^j)) \tag{7.7}$$

iteráció alapján választjuk, ahol $x^j = x_{\lambda_j}$, $u^j = u_{\lambda_j}$.

Ezt a gondolatmenetet részletezve a következőt kapjuk. Először is vizsgáljuk a (7.6) feladatot. Az *Euler—Lagrange egyenlet*et az x, u változóknak megfelelően két részre bontva kapjuk a következőt:

$$F_x + \lambda' f_x - 2k(\dot{x} - f)' f_x - \frac{d}{dt}(2k(\dot{x} - f)' - \lambda') = 0, \tag{7.8}$$

$$F_u + \lambda' f_u - 2k(\dot{x} - f) f_u = 0. \tag{7.9}$$

A peremfeltételek pedig

$$x(0) = x^0 \quad \text{és} \quad [-\lambda + 2k(\dot{x} - f)]_T = 0. \tag{7.10}$$

Bevezetve a

$$p = p(t) = +\lambda - 2k(\dot{x} - f) \tag{7.11}$$

jelölést a következő tömör alakot kapjuk:

$$H_x(x, u, p) - \dot{p} = 0, \quad H_u(x, u, p) = 0. \tag{7.12}$$

A peremfeltételeket pedig

$$x(0) = x^0 \quad \text{és} \quad p(T) = 0. \tag{7.13}$$

A multiplikátor módszer egyik nevezetes tulajdonsága az, hogy stabilabb, mint egyéb módszerek. Ez a vonás azonban az *Euler—Lagrange egyenletek*re való áttéréssel nem aknázható ki. Adott λ mellett ugyanis a fenti egyenletrendszer iteratív úton való megoldásakor a kézenfekvő sorrend: p, u, x meghatározása. Ez eltér a multiplikátor módszernél szokásos x, u, p sorrendtől (l. [4]).

A megoldás útja az volna, ha a (7.6) feladatra hatékony direkt módszereket tudnánk kidolgozni, mint ahogy ez végesdimenziós feladatok esetén már megtörtént.

IRODALOM

[1] ASTRÖM, K. J., *Introduction to Stochastic Control Theory* (Academic Press, New York, 1970).

[2] FALB, P. L. and JONG, J. L., *Some Successive Approximation Methods in Control and Oscillation Theory* (Academic Press, New York, London, 1969).

[3] GERENCSÉR, L., "On the use of stability theory in the design of algorithms for structured nonlinear optimization problems", *Problems of Control and Information Theory* (1978).

[4] GERENCSÉR, L., *Optimalizálás* (BME Továbbképző Intézete, Budapest, 1977).

[5] KÓSA, A., *Variációszámítás* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1970).

[6] KÓSA, A., *Optimalizálás* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978).

[7] LEE, E. B. and MARKUS, L., *Foundations of Optimal Control Theory* (Wiley, New York, London).

[8] LIONS, J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

[9] MIELE, A., "Recent advances in gradient algorithms for optimal control problems", *J. Opt. Theory and Appl.* **17** (1975) 361—430.

[10] POLAK, E., *Computational Methods in Optimization* (Academic Press, New York, London, 1971).

[11] PONTRJAGIN, L. SZ., BOLTYANSZKIJ, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. és MISCSENKO, E. F., *Optimális folyamatok elmélete* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968).

[12] TOLLE, H., *Optimization Method* (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1975).

[13] Моисеев, Н. Н., *Численные методы в теории оптимальных систем* (Наука, Москва, 1971).

(Beérkezett: 1978. március 13.)

GERENCSÉR LÁSZLÓ
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1137 BUDAPEST, XIII., VICTOR HUGO U. 18—22.

NUMERICAL METHODS IN OPTIMAL CONTROL THEORY

L. GERENCSÉR

In this paper we try to give an insight to some basic ideas which repeatedly appear in papers on numerical methods in optimal control theory. The author was inspired by a book of N. N. MOISEEV and some papers of A. MIELE.

The second and third sections of the paper describe an improved version of the reduced gradient method due to A. MIELE. The fourth section extends the previous results for the case when boundary conditions are present. An alternative approach, the iterative fulfilment of boundary conditions is also presented. The fifth section explains the basic ideas of shoothing method and that of the quasi-linearization method, both of which were developed for the solution of nonlinear tuo-point boundary value problems. The sixth section contains an analysis of linear two-point boundary value problems. The method of *Ricatti-transformation* is presented. Finally the seventh section exposes the method of multipliers.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 (1977) 349—353

SZINGULÁRIS SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK HASONLÓSÁGI REDUKCIÓJA

VARGA GYULA

Budapest

A dolgozat egy véges eljárást ad meg, amely valós elemű, szimmetrikus szinguláris mátrixok sajátértékproblémáját alacsonyabb rendű nemszinguláris mátrix sajátértékfeladatára vezeti vissza

1. Bevezetés

A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha az $\mathbf{A}\in C^{n\times n}$ tetszőleges komplex elemű mátrixnak egy sajátértéke λ a hozzá tartozó $\mathbf{x}\in C^n(\mathbf{x}\neq\mathbf{0})$ sajátvektorral, akkor az $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ sajátértékfeladat rendszáma alkalmas hasonlósági transzformáció segítségével eggyel redukálható. Legyen ugyanis $x_n=1$ (ez az $\mathbf{x}=(x_1, ..., x_n)^T$ vektor alkalmas normálásával és egy alkalmas $\mathbf{P}$ permutációs mátrixszal végrehajtott hasonlósági transzformációval mindig biztosítható) és $\mathbf{y}=(x_1, ..., x_{n-1})^T$, ennek megfelelően particionáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{c}\\ \mathbf{d}^T & f\end{bmatrix}$$

alakban, végül legyen

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{y}\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}-\mathbf{yd}^T & \mathbf{0}\\ \mathbf{d}^T & \lambda\end{bmatrix}.$$

Tehát az eredeti sajátértékfeladatot a bal felső blokkra vonatkozó sajátértékfeladatra redukáltuk (l. [1]). Ha az eljárást valós elemű szimmetrikus mátrixokra alkalmazzuk — a továbbiakban csak ilyenekkel foglalkozunk — a hasonlósági transzformáció eredményeként kapott mátrix bal felső blokkja általában nem lesz szimmetrikus. Ha azonban a hasonlósági transzformációt az $\mathbf{x}$ vektorra vonatkozó előbbi feltevések mellett alkalmasan megválasztott ortogonális mátrixszal hajtjuk végre, az eredmény is szimmetrikus mátrix lesz, és a sajátértékfeladat eggyel alacsonyabb rendű szimmetrikus mátrixra vonatkozó sajátértékfeladatra redukálódik.

Válasszuk meg e célból a hasonlósági transzformáció végrehajtásához az $\mathbf{O}$ ortogonális mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{O}=\mathbf{E}-\frac{1}{h}(\mathbf{x}-\sigma\mathbf{e}_n)\cdot(\mathbf{x}-\sigma\mathbf{e}_n)^T,$$

ahol $\sigma=\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$, $h=\sigma(\sigma-1)$ és $\mathbf{e}_n=(0, \ldots, 0, 1)^T$. Ekkor

$$\mathbf{OAO} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

és látható, hogy $\bar{\mathbf{A}}$ szimmetrikus.

Az ismertetett eljárásokat természetesen csak akkor alkalmazhatjuk, ha a szóban forgó mátrix egy sajátértékét már ismerjük. A továbbiakban a második eljárást fogjuk alkalmazni szinguláris szimmetrikus mátrixokra, amelyeknek a $\lambda=0$ sajátértékét ismerjük.

Célunk az, hogy alkalmas hasonlósági transzformációk segítségével olyan szimmetrikus mátrixot állítsunk elő, amelynek sajátértékei az eredeti mátrix nemzérus sajátértékeivel egyeznek meg. A 2. fejezetben ismertetett módszer hasonlít a [2]-ben általános mátrixokra leírt direkt eljáráshoz. A 3. fejezetben a módszer alkalmazhatóságát vizsgáljuk.

2. A redukció hasonlósági transzformációs algoritmusának leírása

A továbbiakban legyen $\mathbf{A}\in R^{n\times n}$ valós elemű szimmetrikus mátrix. Az algoritmus az alábbi lépésekből áll:

1) A rangszám meghatározása céljából hajtsunk végre az $\mathbf{A}$ mátrixon *Gauss-eliminációt* teljes főelemkiválasztással. A rangszámot a sikeresen végrehajtott eliminációs lépések száma adja meg. Ezután a mátrixot a [2]-ben leírt eljárással megegyezően *Hermite-féle normál alakra* hozzuk. Az eddigieket az alábbi mátrixegyenlőséggel írhatjuk le:

$$\mathbf{H} = \mathbf{DVFAQ}^T, \tag{2.1}$$

ahol

$\mathbf{F}=\mathbf{T}_r\mathbf{P}_r\mathbf{T}_{r-1}\ldots\mathbf{T}_1\mathbf{P}_1$, $\mathbf{T}_i$ az i-edik eliminációs lépés alsó háromszög mátrixa,
$\mathbf{P}_i$ az i-edik eliminációs lépéshez szükséges sorcsere permutációs mátrixa,

$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_r\mathbf{Q}_{r-1}\ldots\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_i$ az i-edik eliminációs lépéshez szükséges oszlopcsere permutációs mátrixa,
$\mathbf{V}$ a *Hermite-féle normál alakra* hozáshoz szükséges felső háromszög mátrix,
$\mathbf{D}$ sornormáló átlós mátrix.

A $\mathbf{P}_i$ és $\mathbf{Q}_i$ permutációs mátrixok bármelyike megegyezhet az egységmátrixszal is. A képletekben szereplő r az $\mathbf{A}$ mátrix rangja.

2) Párhuzamosan a *Gauss-eliminációval* képezzük az $\mathbf{A}$ mátrixból az alábbi $\mathbf{B}$ mátrixot is:

$$\mathbf{B} = \mathbf{QAQ}^T. \tag{2.2}$$

A $\mathbf{B}$ mátrix tehát az $\mathbf{A}$-ból úgy keletkezett, hogy a *Gauss-eliminációhoz* szükséges összes oszlopcserét és a nekik megfelelő sorcserét végrehajtottuk rajta. Tehát $\mathbf{B}$ szimmetrikus, hasonló $\mathbf{A}$-hoz, és a bal felső $r\times r$-es szelete nem szinguláris.

3) A $\mathbf{H}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok előállításából látható, hogy a $\mathbf{HX}=\mathbf{0}$ és a $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$ egyenletek megoldása megegyezik. A $\mathbf{H}$ mátrix particionált

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

alakú felírásából látható, hogy a $\mathbf{HX}=\mathbf{0}$ egy teljes megoldásrendszere

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\mathbf{W}_0 \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

tehát a $\mathbf{B}$ mátrixot a $\mathbf{H}$-val azonos módon particionálva nyilvánvaló a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_0\mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_0^T\mathbf{R}_0 & \mathbf{W}_0^T\mathbf{R}_0\mathbf{W}_0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

alak, ahol az $\mathbf{R}_0 \in \mathrm{R}^{r\times r}$ szimmetrikus, nemszinguláris.

4) Legyen $\mathbf{B}_0=\mathbf{B}$. Az $i=0, 1, \ldots, s$ $(s=n-r-1)$ értékekre hajtsuk végre az alábbi lépéseket:

a) A $\mathbf{W}_i \in \mathrm{R}^{r\times s-i+1}$ particionálása $\mathbf{W}_i=[\mathbf{Z}_i, \mathbf{z}_i]$ alakban, ahol $\mathbf{Z}_i \in \mathrm{R}^{r\times s-i}$, $\mathbf{z}_i \in \mathrm{R}^r$.

b) A $\mathbf{B}_i$ particionálása az alábbi alakban:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_i\mathbf{Z}_i & \mathbf{R}_i\mathbf{z}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_i^T\mathbf{R}_i & \mathbf{Z}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{z}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_i^T\mathbf{R}_i & \mathbf{z}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{Z}_i & \mathbf{z}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{z}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

ahol $\mathbf{R}_i \in \mathrm{R}^{r\times r}$, és a jobb alsó zérus mátrix i-edrendű négyzetes, tehát az $i=0$ értéknél a felbontásban az utolsó sor és oszlop nem szerepel.

c) Képezzük a

$$\sigma^2 = 1+\mathbf{z}_i^T\mathbf{z}_i, \tag{2.7}$$

$$h = \sigma(\sigma-1) \tag{2.8}$$

mennyiségeket és a

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z}_i \\ (1-\sigma)\mathbf{e}_{s-i+1} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

vektort, ahol $\mathbf{e}_{s-i+1} \in$, R^{s+1} az $(s-i+1)$-edik egységvektor.

d) Ezután állítsuk elő a

$$\mathbf{O} = \mathbf{E}-\frac{1}{h}\mathbf{d}\mathbf{d}^T \tag{2.10}$$

ortogonális mátrixot (amely nyilvánvalóan szimmetrikus), majd a

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{O}\mathbf{B}_i\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i+1} & \mathbf{R}_{i+1}\mathbf{W}_{i+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_{i+1}^T\mathbf{R}_{i+1} & \mathbf{W}_{i+1}^T\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{W}_{i+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

mátrixot, ahol

$$\mathbf{R}_{i+1}=\left(\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right)\mathbf{R}_i\left(\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right),$$

$$\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{W}_{i+1}=\left(\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right)\mathbf{R}_i\mathbf{Z}_i, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{W}_{i+1}^T\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{W}_{i+1}=\mathbf{Z}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{Z}_i.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{B}_{i+1}$ (2.11) előállításában a jobb alsó zérusmátrix $(i+1)$-edrendű négyzetes, tehát $\mathbf{B}_{i+1}$ már $i+1$ zérus sort és oszlopot tartalmaz.

e) Képezzük a

$$\mathbf{W}_{i+1}=\left(\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right)^{-1}\mathbf{Z}_i \tag{2.13}$$

blokkot, ahol $\left(\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right)^{-1}=\mathbf{E}-\frac{1}{h}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T.$

2.1. TÉTEL. A fent leírt algoritmus végeredményeként előálló $\mathbf{B}_{n-r}$ mátrix az alábbi alakban particionálható:

$$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}_{n-r}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{n-r} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{R}_{n-r}$ nemszinguláris szimmetrikus mátrix.

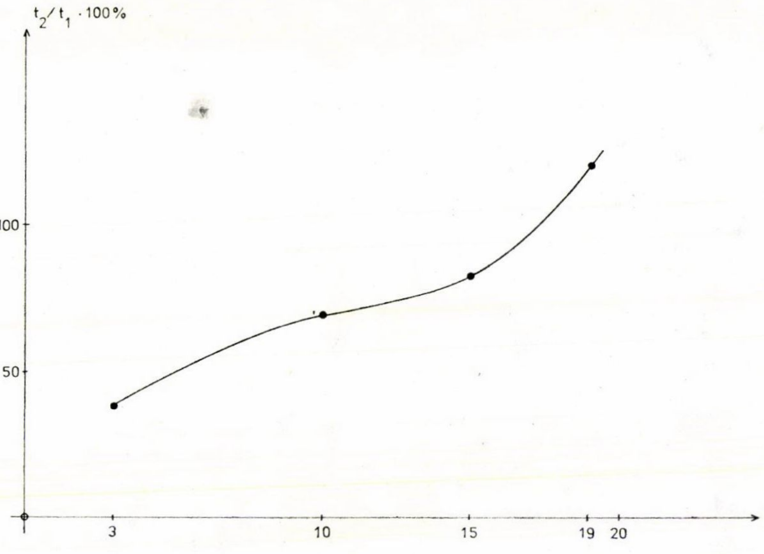
Bizonyítás.

Az $\mathbf{R}_{i+1}$ transzformációs képletéből látható, hogy valamennyi $\mathbf{R}_{i+1}$ nemszinguláris és szimmetrikus. Ui. az $\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T$ mátrix invertálható és szimmetrikus, így $\mathbf{R}_{i+1}$ kongruencia transzformációval áll elő az $\mathbf{R}_i$ blokkból. A $\mathbf{W}_i$ blokk $s-i+1$ oszlopból áll, tehát a ciklus $s=n-r-1$-edik lépése után ez a blokk már nem szerepel.

Beláttuk tehát, hogy a hasonlósági transzformációs algoritmus eredményeként egy $n-r$-rel alacsonyabb rendű nemszinguláris szimmetrikus mátrixot kaptunk az eredeti mátrix nemzérus sajátértékeinek kiszámítására.

3. A módszer alkalmazhatósága

Az előző fejezetben ismertetett eljárás célszerűen alkalmazható szimmetrikus mátrixok zérus sajátértékeinek a leválasztására, ha a szingularitásról a priori információnk van. Az adott mátrix összes sajátértékének a kiszámításánál főként többszörösen szinguláris mátrixok esetén számottevő gépi munkát takaríthatunk meg, ha pl. a *Jacobi-féle eljárást* csak az algoritmus végeredményeként adódó szimmetrikus nemszinguláris mátrixra alkalmazzuk. Gépi futtatásaink során 20×20-as szinguláris szimmetrikus mátrixokra alkalmaztuk az eljárást. Összehasonlítottuk az egyes mátrixokra alkalmazott *Jacobi-eljárás* t_1 gépidejét a rendszámredukció és a redukált mátrixokra alkalmazott *Jacobi-eljárás* gépidejének összegével, t_2-vel. Az 1. ábrán a rangszám függvényében ábrázoltuk a t_2/t_1 gépidő arányt %-ban kifejezve. A futtatásokat az MTA CDC 3300-as gépén végeztük.



1. ábra

IRODALOM

[1] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem* (Oxford University Press, London, 1965).

[2] Varga Gy., „Szinguláris mátrixok zérus sajátértékeinek leválasztása, mátrixok Jordan-féle normál alakra hozása", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **2** (1976).

(Beérkezett: 1978. május 11.)

VARGA GYULA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1250 BUDAPEST I., ÚRI U. 49.

SIMILARITY REDUCTION OF SINGULAR SYMMETRIC MATRICES

GY. VARGA

The paper gives a finite procedure to reduce the eigenvalue problem of real symmetric singular matrices to the eigenvalue problem of lower order nonsingular symmetric matrices.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 355—378*

A LATIN NÉGYZET MÓDSZER EGY ÁLTALÁNOSÍTOTT MODELLJE

TAR LÁSZLÓ

Debrecen

Ebben a dolgozatban a latin négyzet módszernek egy olyan általánosított modelljét adjuk meg, amelyben bizonyíthatók a közönséges modellben érvényes tételek általánosításai. Az általánosított mátrixos modellt azért konstruáltuk meg, hogy megvizsgáljuk annak a jól ismert tételnek a „megfordíthatóságát", amely szerint a véletlen hibák várható értékei zérussal egyenlők, amennyiben a mintaelemek várható értékei felbomlanak a sor-, az oszlop- és a kezelés hatásának megfelelően három-három mennyiség összegére.

1. Bevezetés

GYIRES BÉLA [2] dolgozatában a véletlen blokkok módszerére igazolta a következő kritériumot ([2] 285. oldal Theorem 2.).

A mintaelemek várható értékei akkor és csak akkor bomlanak fel a blokk- és kezeléshatásnak megfelelő mennyiségek összegére, ha a véletlen hibák várható értékei zérussal egyenlők.

A bizonyításhoz a szerző felhasználta [2] 278. oldal 1. tételét (Theorem 1.), amit először [4] egyik korolláriuma (213. oldal Corollary I.) alapján, majd [3] dolgozatában más módszerrel ([7] 401. oldal Satz 233.) is igazolt.

A kapott eredmények alapján GYIRES BÉLA professzor felhívta a figyelmet a megfelelő problémának latin négyzet módszer esetén való megvizsgálására, amiért ezúton fejezem ki neki köszönetemet.

Ebben a dolgozatban az alábbi jelöléseket alkalmazzuk.

ξ, ε (ξ_{ijh}, ε_{ijh}) valószínűségi változók;

$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_h$, $\boldsymbol{\zeta}$, ... valószínűségi változókból álló m-edrendű kvadratikus mát rixok, mátrixértékű valószínűségi változók;

$\mathbf{I}$, $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, ... m-edrendű kvadratikus mátrixok;

$\mathbf{O}$ zéró-, $\mathbf{E}$ egység-, $\boldsymbol{\Omega}$ primitív ciklikus mátrix (általában m rendűek);

$\mathbf{A}$ transzponáltja $\mathbf{A}^*$, inverze $\mathbf{A}^{-1}$;

$M(\xi)$, illetve $M(\boldsymbol{\xi})$ a ξ, illetve $\boldsymbol{\xi}$ várható értéke $\big(M(\boldsymbol{\xi})$ a $\boldsymbol{\xi}$ elemeinek várható értékeiből álló mátrix$\big)$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

elemeivel adott mátrix,

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{m\times m}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m}$$

általános elemével adott m-edrendű kvadratikus mátrix;

A, B, ... hipermátrixok;

$\otimes$ a direkt szorzat műveleti jele (az

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \|b_{kl}\|_{k,l=1,\dots,n}$$

mátrixok direkt szorzatát az

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \|\mathbf{A}b_{kl}\|_{k,l=1,\dots,n} \tag{1.1}$$

egyenlőséggel értelmezzük);
Det $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa;
Hipdet $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ hipermátrix hiperdeterminánsa, amely a hipermátrix blokkjaiból, mint elemekből, álló mátrixnak a determinánsát jelenti (pl. Hipdet $\mathbf{F}=\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{33}+$ $+\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{31}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{32}-\mathbf{A}_{13}\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{31}-\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{23}\mathbf{A}_{32}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{33}$, ha $\mathbf{F}=\|\mathbf{A}_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$, $\mathbf{A}_{ij}$ m-edrendű kvadratikus mátrix);
$\mathbf{a}_0$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{0}$, ... m-dimenziós oszlopvektorok ($\mathbf{0}$ a nulloszlopvektor);
$\mathbf{a}_0^*$ m-dimenziós sorvektor.

A 2. pontban összefoglaljuk a latin négyzet elrendezésre (módszerre) vonatkozó — számunkra legfontosabb — ismereteket. A 3. pontban megadjuk a latin négyzet elrendezés modelljének egy természetes általánosítását a (3.6), illetve a (3.35) formulákkal, amelyekből $m=1$ esetén az $M(\xi_{ijh})$, illetve a ξ_{ijh} latin négyzet módszernél szokásos felbontása adódik. A 3. pontban igen lényeges még a (3.4) képlettel definiált $\boldsymbol{\eta}_h$ mátrixnak a $\boldsymbol{\xi}$ mátrixszal és bizonyos ortogonális mátrixokkal való előállítása (lásd a (3.25)—(3.28) formulákat) speciális latin négyzetek alkalmazása esetén, hiszen a 3.2. és 3.5. tételek bizonyítása ezeken a felbontásokon alapszik. A 3.1., 3.1'. és 3.2. tételek a közönséges modellben érvényes tételek általánosításai. A 3.3., 3.4. és 3.5. tételek (kritériumok) a hipotézisvizsgálattal vannak kapcsolatban. (Lásd a 3.6. megjegyzést!) Míg a 3.1., 3.1'., 3.3. és 3.4. tételek tetszőleges latin négyzet elrendezésre igazak, addig a 3.2. és 3.5. tételek csak speciális latin négyzet elrendezések esetén állnak fenn. A 3.2. és 3.5. tételekben tulajdonképpen 3—3 tételt foglaltunk egybe.

A 3.2., 3.3., 3.4. és 3.5. tételek bizonyításait lineáris algebrai eszközökkel hajtottuk végre felhasználva a ciklikus és ortogonális mátrixok és a latin négyzet által egyértelműen meghatározott $\mathbf{\Gamma}$ mátrix tulajdonságait ($\mathbf{\Gamma}$ definícióját lásd a (3.6) formulánál), továbbá a sztochasztikus mátrixra vonatkozó azon tételt, amely szerint 1 sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektorának minden komponense 1.

A 3. pontban megfogalmazott és igazolt tételekből látszik, hogy a latin négyzet módszernél szokásos alapfeltevésnek általánosított megfelelője a (3.6) felbontás, ami mindegyik tételnél lényeges feltétel. Ezért a 4. pontban kísérletet tettünk arra, hogy a 3.2. tételnek megadjuk a megfordítását, azaz azt akartuk igazolni, hogy speciális latin négyzetek esetén abból, hogy a véletlen hibamátrix várható értéke nullmátrix, következik a várható érték mátrix (3.6) alakú felbontása. A 3.2. tétel megfordítását nem sikerült igazolni, sőt $m=3$ esetén ellenpéldát adtunk meg ciklikus latin négyzet elrendezésnél. A példánál elsősorban EGERVÁRY [6] dolgozatában található minimális diadikus előállítási módszert alkalmaztuk a (3.30) mátrixegyenlet általános megoldásának meghatározására. A 4. pontban igen lényeges dolog a (3.30) mátrixegyenlet speciális latin négyzet elrendezésekhez tartozó alakjainak átrendezése, direkt szorzattal való felírása, ugyanis az átrendezett direkt szorzatos együttható-mátrix diadikus felbontásával határozzuk meg a mátrixegyenlet általános megoldását.

Míg a véletlen blokkok módszerénél a második bekezdésben megfogalmazott kritérium bizonyítása egyenértékű az $\mathbf{AXB}^*=\mathbf{O}$ alakú homogén mátrixegyenlet általános megoldásának meghatározásával ([2] 278. oldal, Theorem 1. és 285. oldal Theorem 2.), addig latin négyzet módszernél, amint az a (3.31)—(3.34) képletekből kitűnik, a kritérium megfelelőjének igazolása egyenértékű az

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{PXP}-\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{F}^l\mathbf{XG}^l=\mathbf{O}$$

homogén mátrixegyenlet általános megoldásának meghatározásával, ahol $\mathbf{F}$ és $\mathbf{G}$ általában nem-szimmetrikus ortogonális mátrixok, amelyekre $\sum_{l=1}^{m}\mathbf{F}^l=\sum_{l=1}^{m}\mathbf{G}^l=\mathbf{I}$, $\mathbf{F}^m=\mathbf{G}^m=\mathbf{E}$ ($\mathbf{I}$ és $\mathbf{P}$ definíciója (3.1) alatt). Ez a bonyolult mátrixegyenlet is csak speciális — teljesen szimmetrikus, ciklikus, szimmetrikus és szimmetrikus standard alakra hozható — latin négyzetek esetén adódik. Definícióik negyedrendű latin négyzetekre a (3.19)—(3.24) formulákkal adottak. Nem speciális latin négyzet alkalmazásánál a homogén mátrixegyenlet $\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{F}^l\mathbf{XG}^l$ kifejezésének megfelelője már igen bonyolult lesz.

2. A latin négyzet módszer

Latin négyzet elrendezésnél egyrészt azt tételezik fel, hogy 3 tényező — a sor-, az oszlop- és a kezeléshatás — játszik szerepet a valószínűségi változó kialakításában, másrészt feltételezik, hogy mindegyik tényező azonos számú szinten fordul elő (a szintek száma legyen m) és a tényezők között nincsenek kölcsönhatások (interakciók).

Ezért bármely (i, j, h) szinthármas, ahol i a sorhatásnak, j az oszlophatásnak valamely szintje, h pedig a kezeléshatásnak az a szintje, amely az i-edik sorhatásnak és a j-edik oszlophatásnak felel meg, kielégít bizonyos feltételeket. ([9] 229. oldal.) Az (i, j, h) szinthármast cellának is nevezik.

Valamely m szintű latin négyzet elrendezésnél, ahol a cellák száma m^2, legyen az (i, j, h) cellához tartozó kísérlet eredménye ξ_{ijh}. A mondottak szerint

$$\xi_{ijh}=\mu+\lambda_i+\nu_j+\gamma_h+\varepsilon_{ijh}, \tag{2.1}$$

ahol μ egy konstans; λ_i az i-edik sorhatásnak, ν_j a j-edik oszlophatásnak és γ_h a h-adik kezelés hatásának megfelelő mennyiségek.
Az ε_{ijh} $(1\leqq i, j, h=h(i,j)\leqq m)$ független, azonos normális eloszlású valószínűségi változók 0 és σ^2 paraméterekkel. Feltesszük, hogy a ξ_{ijh} valószínűségi változóknak $(1\leqq i, j, h\leqq m)$ létezik a várható értékük. A ξ_{ijh} valószínűségi változók teljes átlaga

$$\bar{\xi}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_{ijh}. \tag{2.2}$$

Az i-edik sor-, a j-edik oszlop- és a h-adik kezelések átlagára vezessük be rendre a

$$\bar{\xi}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_{ijh}, \tag{2.3}$$

$$\bar{\xi}_{\cdot j\cdot} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_{ijh} \tag{2.4}$$

és a

$$\bar{\xi}_{\cdot\cdot h} = \frac{1}{m}\sum_{\substack{(i,j)\\ h=h(i,j)}}\xi_{ijh} \tag{2.5}$$

jelöléseket. (2.5) jobb oldalán mindazon (i,j) párokra kell összegezni, amelyekre $h=h(i,j)$. A $\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}$ $(i=1,\dots,m)$, $\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}$ $(j=1,\dots,m)$ és a $\bar{\xi}_{\cdot\cdot h}-\bar{\xi}$ $(h=1,\dots,m)$ különbségeket rendre a sorok-, az oszlopok- és a kezelések közötti eltéréseknek nevezzük. A $\xi_{ijh}-\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot\cdot h}+2\bar{\xi}$ mennyiség pedig a véletlen hiba.

Könnyen igazolható a

$$\xi_{ijh}-\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot\cdot h}+2\bar{\xi} = \varepsilon_{ijh}-\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot}-\bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot}-\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot h}+2\bar{\varepsilon} \tag{2.6}$$

egyenlőség, ahol a jobb oldali „mennyiségek" az ε_{ijh} változókból ugyanúgy határozhatók meg, mint ahogyan a bal oldaliak a ξ_{ijh} valószínűségi változókból ([9], 229—231. oldal).

(2.6)-ból látható, hogy latin négyzet elrendezésnél, azaz, ha ξ_{ijh} (2.1) alakban állítható elő,

$$M(\xi_{ijh}-\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot\cdot h}+2\bar{\xi}) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy latin négyzet elrendezésnél a véletlen hibák várható értékei nullával egyenlők.

3. A latin négyzet elrendezés általánosított modellje

Legyen $\boldsymbol{\xi}=\|\xi_{ijh}\|$ $i,j=1,\dots,m$ a (2.1) formulával definiált, várható értékkel rendelkező ξ_{ijh} valószínűségi változókból álló mátrix. Jelölje

$$\mathbf{I} = \|1\|_{m\times m}, \quad \mathbf{P} = \|m^{-1}\|_{m\times m} \tag{3.1}$$

az 1, illetve m^{-1} azonos konstans elemekből álló mátrixokat. ($\mathbf{P}$ sztochasztikus mátrix.) Definiáljuk az

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}\mathbf{P} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}\mathbf{P} \tag{3.2}$$

mátrix-értékű valószínűségi változókat. Ezek az i-edik soruk és a j-edik oszlopuk metszetében álló elemeikkel

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \|\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}\|, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \|\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}\| \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\zeta} = \|\bar{\xi}\| \tag{3.3}$$

formában írhatók fel. A kezelések átlagaiból álló $\boldsymbol{\eta}_h$ mátrixot az

$$\boldsymbol{\eta}_h = \|\bar{\xi}_{\cdot\cdot h(i,j)}\|_{i,j=1,\dots,m} \tag{3.4}$$

egyenlőség definiálja.

3.1. Megjegyzés. $\boldsymbol{\eta}_h$ — a véletlenül kiválasztott m-szintű latin négyzetnek megfelelően — tartalmazza az m különböző kezelési átlagot minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer.

Az

$$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\zeta} = \|\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}\|_{m\times m},$$

$$(3.5) \qquad \boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta} = \|\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}\|_{m\times m},$$

$$\boldsymbol{\eta}_h-\boldsymbol{\zeta} = \|\bar{\xi}_{\cdot\cdot h(i,j)}-\bar{\xi}\|_{m\times m},$$

$$\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_h+2\boldsymbol{\zeta} = \|\xi_{ijh}-\bar{\xi}_{i\cdot\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot j\cdot}-\bar{\xi}_{\cdot\cdot h}+2\bar{\xi}\|_{m\times m}$$

mátrixokat — elemeik alapján — rendre az *oszlopok közötti* —, a *sorok közötti* — és a *kezelések közötti eltérések mátrixainak*, az utolsó mátrixot pedig *véltlen hibamátrix*nak nevezzük.

A (2.1) előállítás miatt igaz a következő:

$$(3.6) \qquad M(\boldsymbol{\xi}) = \mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\boldsymbol{\Gamma},$$

ahol $\mathbf{a}_0$ az 1 elemekből álló oszlopvektor,

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

a sorhatások oszlopvektora, $\mathbf{v}^*=(v_1, v_2, ..., v_m)$ *az oszlophatások sorvektora,* $\boldsymbol{\Gamma}$ *a kezeléshatások mátrixa.*

Mivel a $\mathbf{P}$ sztochasztikus mátrixra

$$(3.7) \qquad \mathbf{P}\mathbf{a}_0 = 1\cdot\mathbf{a}_0$$

ezért a (3.6)-ban szereplő $\mathbf{a}_0$ vektor tekinthető a $\mathbf{P}$ 1 sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektornak ([1] II. 73).

3.2. Megjegyzés. (3.6)-ból $m=1$ esetén a $\boldsymbol{\xi}$ mátrix minden elemére az

$$M(\xi_{ijh}) = \mu+\lambda_i+v_j+\gamma_h$$

alakú formula adódik, amit latin négyzet elrendezésnél fel szoktak tételezni. Emiatt a (3.6) felbontással megadott modellt tekinthetjük a (2.1) képlettel meghatározott modell általánosításnak.

Most a (3.5)-ben szereplő véletlen hibamátrixot akarjuk felírni a $\mathbf{P}$ és $\boldsymbol{\xi}$ mátrixok, valamint bizonyos ortogonális mátrixok segítségével abban az esetben, amikor a véletlenül kiválasztott latin négyzet standard alakja szimmetrikus, azaz amikor a latin négyzet ciklikus, szimmetrikus és teljesen szimmetrikus. A 2-, 3- és 4-szintű latin négyzetek eseteit kimerítően tárgyaljuk.

A véletlen hibamátrix (3.5) alakja és a (3.2) képletek egybevetéséből látható, hogy a véletlen hibamátrix fent említett felírásához csupán az $\boldsymbol{\eta}_h$ mátrixot kell megadnunk a $\boldsymbol{\xi}$ mátrixszal és ortogonális mátrixokkal.

Legyen $m=2$. Tegyük fel, hogy a h_1, h_2 kezeléseket a

$$\begin{matrix} h_1 h_2 \\ h_2 h_1 \end{matrix} \quad \text{és} \quad \begin{matrix} h_2 h_1 \\ h_1 h_2 \end{matrix}$$

2-szintű latin négyzetek szerint alkalmazzuk.

Az előbbi latin négyzeteket adjuk meg az

$$\begin{matrix} i_1 i_2 \\ i_2 i_1 \end{matrix} \tag{3.8}$$

jelöléssel, ha (i_1, i_2) az 1, 2 számok (a h_1 és h_2 kezelések indexei) egyik vagy másik permutációját jelenti. (3.8) szimmetrikus és ciklikus. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben

$$\boldsymbol{\eta}_h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\Omega}), \tag{3.9}$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Omega}^2=\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ másodrendű egységmátrix), azaz $\boldsymbol{\Omega}$ primitív ciklikus mátrix.

A (3.9) összefüggés levezetése: A $\boldsymbol{\xi}$ mátrix definíciója szerint

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{11i_1} & \xi_{12i_2} \\ \xi_{21i_2} & \xi_{22i_1} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

(3.4) alapján

$$\boldsymbol{\eta}_h = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{\cdot\cdot i_1} & \bar{\xi}_{\cdot\cdot i_2} \\ \bar{\xi}_{\cdot\cdot i_2} & \bar{\xi}_{\cdot\cdot i_1} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

(2.5) szerint beírva $\boldsymbol{\eta}_h$-ba a kezelési átlagokat, és a valószínűségi változóknak csak az indexeit hagyva meg

$$\boldsymbol{\eta}_h = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11i_1+22i_1 & 12i_2+21i_2 \\ 21i_2+12i_2 & 22i_1+11i_1 \end{pmatrix},$$

azaz $2\boldsymbol{\eta}_h$ előállítható a

$$\begin{pmatrix} 11i_1 & 12i_2 \\ 21i_2 & 22i_1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

és

$$\begin{pmatrix} 22i_1 & 21i_2 \\ 12i_2 & 11i_1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

mátrixok összegeként. De (3.12) azonos (3.10)-zel és (3.13)-nak $\boldsymbol{\Omega}$-val balról és jobbról való szorzásával is (3.10) adódik, azaz

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega}\begin{pmatrix} 22i_1 & 21i_2 \\ 12i_2 & 11i_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}.$$

Ebből pedig, mivel $\mathbf{\Omega}$ ortogonális mátrix, azaz $\mathbf{\Omega}^{-1}=\Omega^*$,

$$\begin{pmatrix} 22i_1 & 21i_2 \\ 12i_2 & 11i_1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega}\xi\mathbf{\Omega}.$$

Végül is (3.11) valóban (3.9) alakba írható.

Legyen most $m=3$. Ekkor, mint közismert, egy standard latin négyzet létezik, amit

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \tag{3.14}$$

formában adhatunk meg. Az ilyen szimmetrikus latin négyzetet *önkonjugált*nak nevezzük. (3.14)-ből a sorok és oszlopok permutálásával megkaphatjuk az összes háromszintű latin négyzetet. Ezek azonban két csoportba oszthatók.

1. Ha a latin négyzet szimmetrikus, azaz

$$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_2 & i_3 & i_1 \\ i_3 & i_1 & i_2 \end{matrix} \tag{3.15}$$

alakú, akkor az $m=2$ esetben követett eljárással $\mathbf{\eta}_h$-ra az

$$\mathbf{\eta}_h = \frac{1}{3}\left(\sum_{l=1}^{3} \mathbf{\Omega}^l\xi\mathbf{\Omega}^l\right) \tag{3.16}$$

formula nyerhető, ahol $\mathbf{\Omega}$ a harmadrendű primitív ciklikus mátrix, amelyre $\mathbf{\Omega}^3=\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ harmadrendű egységmátrix), $\mathbf{\Omega}^2=\mathbf{\Omega}^*$, $\mathbf{\Omega}^*=\mathbf{\Omega}^{-1}$ és a két utolsó egyenlőségből $\mathbf{\Omega}^2=\mathbf{\Omega}^{-1}$.

2. A 3-szintű latin négyzet lehet még ciklikus:

$$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_3 & i_1 & i_2 \\ i_2 & i_3 & i_1. \end{matrix} \tag{3.17}$$

Ez (3.15)-ből a 2. és 3. sorok felcserélésével adódik. Ekkor

$$\mathbf{\eta}_h = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} \mathbf{\Omega}^l\xi(\mathbf{\Omega}^l)^*. \tag{3.18}$$

Vizsgáljuk az $m=4$ esetet! Ekkor 4 standard latin négyzet van, amelyek két transzformációs halmazba sorolhatók ([8] 108—109. oldal).

A standard alakok alapján felírt

(3.19) $$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_2 & i_1 & i_4 & i_3 \\ i_3 & i_4 & i_2 & i_1 \\ i_4 & i_3 & i_1 & i_2 \end{matrix}$$ (szimmetrikus eset);

(3.20) $$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_2 & i_3 & i_4 & i_1 \\ i_3 & i_4 & i_1 & i_2 \\ i_4 & i_1 & i_2 & i_3 \end{matrix}$$ (teljesen szimmetrikus eset);

(3.21) $$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_4 & i_1 & i_2 & i_3 \\ i_3 & i_4 & i_1 & i_2 \\ i_2 & i_3 & i_4 & i_1 \end{matrix}$$ (ciklikus eset);

(3.22) $$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_2 & i_4 & i_1 & i_3 \\ i_3 & i_1 & i_4 & i_2 \\ i_4 & i_3 & i_2 & i_1 \end{matrix}$$ (szimmetrikus eset);

(3.23) $$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_2 & i_1 & i_4 & i_3 \\ i_3 & i_4 & i_1 & i_2 \\ i_4 & i_3 & i_2 & i_1 \end{matrix}$$ („kétszeresen" szimmetrikus eset);

latin négyzetekhez tartozó $\boldsymbol{\eta}_h$ mátrixok felbontásai rendre

(3.19′) $$\boldsymbol{\eta}_h = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{4} \mathbf{C}^l \boldsymbol{\xi} \mathbf{C}^l\right),$$

ahol $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^4 = \mathbf{E},$$ $\mathbf{E}$ negyedrendű egységmátrix;

(3.20′) $$\boldsymbol{\eta}_h = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{4} \boldsymbol{\Omega}^l \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\Omega}^l\right),$$ $\boldsymbol{\Omega}$ negyedrendű primitív ciklikus mátrix;

(3.21') $\eta_h = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{4} \Omega^l \xi (\Omega^l)^*\right)$, Ω negyedrendű primitíci klikus mátrix;

(3.22') $\eta_h = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{4} \mathbf{B}^l \xi \mathbf{B}^l\right)$, a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonális mátrixra $\mathbf{B}^4 = \mathbf{E}$;

(3.23')
$$\eta_h = \frac{1}{4}\left(\xi + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

és az itt szereplő konstans mátrixok ortogonálisak és involutorikusak.

Az

(3.24)
$$\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_4 & i_2 & i_1 & i_3 \\ i_2 & i_3 & i_4 & i_1 \\ i_3 & i_1 & i_2 & i_4 \end{matrix}$$

általános latin négyzet standard alakja (3.19). A (3.24) latin négyzethez tartozó η_h felbontása

(3.24')
$$\eta_h = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{4} \Omega^l \xi \mathbf{B}^l\right),$$

ahol $\mathbf{B}$ a (3.22')-ben szereplő mátrix.

$m=5$ esetén a standard latin négyzetek száma 56 ([8] 110—111. oldal). Az első transzformációs halmazban nincsenek önkonjugált (szimmetrikus) standard latin négyzetek. Az ilyen latin négyzetekhez tartozó η_h mátrixok nem állíthatók elő az eddigi módon. A második transzformációs halmazbeli önkonjugált standard latin négyzetek esetén az η_h mátrixok ismét előállíthatók a ξ mátrixszal és ortogonális mátrixokkal.

Általában m-szintű teljesen szimmetrikus latin négyzetre

(3.25)
$$\eta_h = \frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \Omega^l \xi \Omega^l\right);$$

ciklikus latin négyzet esetén

(3.26) $\eta_h = \frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \Omega^l \xi (\Omega^l)^*\right)$, Ω m-edrendű primitív ciklikus mátrix;

szimmetrikus (önkonjugált) latin négyzetre

$$\eta_h = \frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l \xi \mathbf{A}^l\right), \tag{3.27}$$

ahol $\mathbf{A}$ olyan m-edrendű ortogonális mátrix, amelyre $\mathbf{A}^m=\mathbf{E}$, $\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l=\mathbf{I}$, $\mathbf{E}$ az m-edrendű egység-, $\mathbf{I}$ az m-edrendű csupa 1 elemekből álló mátrix; szimmetrikus standard alakra hozható latin négyzetnél

$$\eta_h = \frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l \xi \mathbf{D}^l\right), \tag{3.28}$$

$\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ m-edrendű ortogonális mátrixok, amelyekre $\mathbf{A}^m=\mathbf{D}^m=\mathbf{E}$, továbbá $\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l= =\sum_{l=1}^{m} \mathbf{D}^l=\mathbf{I}$. (3.2) és (3.5) utolsó képlete szerint a véletlen hibamátrix

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\xi(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}\xi\mathbf{P}-\eta_h \tag{3.29}$$

formába írható, ahol $\mathbf{P}$ a (3.1) alatti mátrix. Így a

$$M(\xi-\eta_1-\eta_2-\eta_h+2\zeta) = \mathbf{O} \tag{3.30}$$

mátrixegyenlet, ami a 2. pont utolsó formulájának megfelelője az általánosított modellben, a (3.25)—(3.28) képletek felhasználásával rendre a következő formákba írható át:

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m} \Omega^l M(\xi)\Omega^l\right] = \mathbf{O} \tag{3.31}$$

(teljesen szimmetrikus latin négyzetnél);

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m} \Omega^l M(\xi)(\Omega^l)^*\right] = \mathbf{O} \tag{3.32}$$

(ciklikus latin négyzetre);

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l M(\xi)\mathbf{A}^l\right] = \mathbf{O} \tag{3.33}$$

(a latin négyzet szimmetrikus);

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l M(\xi)\mathbf{D}^l\right] = \mathbf{O} \tag{3.34}$$

(a latin négyzet szimmetrikus standard alakra hozható).

3.1. TÉTEL. Ha a $\xi=\|\xi_{ijh}\|_{i,j=1,\dots,m}$ kvadratikus mátrix minden eleme (2.1) alakban adható meg, és az ε_{ijh} valószínűségi változók 0 várható értékűek, akkor a véletlen hibamátrix várható értéke nullmátrix.

Bizonyítás. A tétel állításának igaz volta (3.5) utolsó képletéből és (2.6)-ból triviálisan következik.

3.3. Megjegyzés. Ha (2.1) ξ minden elemére érvényes és $M(\varepsilon_{ijh})=0$ $(i, j=1, \dots, m)$, akkor

$$\xi = \mu \mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\lambda\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\Gamma+\varepsilon, \tag{3.35}$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}=\|\varepsilon_{ijh}\|_{i,j=1,\ldots,m}$ és $M(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{O}$. (A (3.35)-ben szereplő mennyiségek pontos jelentése (3.6)-nál található meg.)

Fordítva, (3.35)-ből következnek a 3.1. tétel feltevései. Így a 3.1. tétel feltevései és (3.35) egyenértékűek. Ezért a 3.1. tétel megfogalmazható a következő módon is.

3.1'. TÉTEL. Ha a $\boldsymbol{\xi}$ mátrixra érvényes a (3.35) felbontás, akkor a véletlen hibamátrix várható értéke nullmátrix.

A most megfogalmazásra kerülő tétel szerint a latin négyzet módszer általánosított modelljében — bizonyos speciális latin négyzetek esetén — a 3.1. tétel feltevései helyettesíthetők az $M(\boldsymbol{\xi})$-re vonatkozó (3.6) feltevéssel.

3.2. TÉTEL. Ha a latin négyzet teljesen szimmetrikus, ciklikus vagy szimmetrikus, továbbá létezik $M(\boldsymbol{\xi})$ és $M(\boldsymbol{\xi})=\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\boldsymbol{\Gamma}$, akkor

$$M(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_h+2\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{O}.$$

Bizonyítás. I. Teljesen szimmetrikus latin négyzetre (3.30) felírható (3.31) alakban. Erre az esetre a tételt úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk azt, hogy az $M(\boldsymbol{\xi})$ felbontásában szereplő $\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$, $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$, $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$ és $\boldsymbol{\Gamma}$ mátrixok kielégítik (3.31)-et.

(3.31) bal oldala $\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$ helyettesítése után, figyelembe véve a (3.7) formulát, valamint a

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{a}_0 = 0\cdot\mathbf{a}_0, \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^l\mathbf{a}_0 = 1\cdot\mathbf{a}_0 \quad (l=1,\ldots,m-1), \tag{3.37}$$

$$\mathbf{a}_0^*\boldsymbol{\Omega}^l = \mathbf{a}_0^* \quad (l=1,\ldots,m-1) \tag{3.38}$$

sajátérték-egyenleteket

$$\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*-\frac{\mu}{m}\left(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\sum_{l=1}^{m}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*\right)$$

egyszerű alakra hozható, és ez nyilván egyenlő a nullmátrixszal. Tehát $\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$ megoldása (3.30)-nak.

$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$ is kielégíti (3.31)-et ((3.30)-at). Ugyanis $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$-nak (3.31) bal oldalába való helyettesítése, valamint (3.7), (3.36) és (3.38) figyelembe vétele után (3.31) bal oldala az alábbi lesz:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*-\frac{1}{m}\left[\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\sum_{l=1}^{m-1}\boldsymbol{\Omega}^l\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*\right].$$

Ez a kifejezés $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$ kiemelésével

$$\left[\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left(\mathbf{E}+\sum_{l=1}^{m-1}\boldsymbol{\Omega}^l\right)\right]\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$$

formába írható. Ez pedig a nullmátrixszal egyenlő, mert

$$\frac{1}{m}\left(\mathbf{E}+\sum_{l=1}^{m-1}\boldsymbol{\Omega}^l\right) = \mathbf{P}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$ megoldása (3.31)-nek. $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$ is megoldása a (3.30) mátrixegyenlet (3.31) alakjának. $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$-nak (3.31) bal oldalába való helyettesítése után adódó kifejezés (3.7), (3.36) és (3.37) miatt és $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$ kiemelésével

$$\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\left[\mathbf{P}-\frac{1}{m}\left(\mathbf{E}+\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{\Omega}^l\right)\right]$$

formába írható, ami egyenlő a nullmátrixszal, mert a szögletes zárójelben levő mátrix nullmátrix.

Még csak azt mutatjuk meg, hogy a teljesen szimmetrikus

$$(3.39)\qquad \mathbf{\Gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_{i_1} & \gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_m}\\ \gamma_{i_2} & \gamma_{i_3}\cdots\gamma_{i_1}\\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots\\ \gamma_{i_m} & \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{m-1}}\end{pmatrix}$$

mátrix megoldása (3.31)-nek. $\mathbf{\Gamma}$-nak (3.31) bal oldalába való helyettesítésével, valamint a könnyen igazolható

$$(3.40)\qquad \mathbf{\Gamma}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{\Gamma};$$

$$(3.41)\qquad \mathbf{P}^2=\mathbf{P}\quad (\mathbf{P}\text{ projektor mátrix});$$

$$(3.42)\qquad \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Omega}^l=(\mathbf{\Omega}^l)^*\mathbf{\Gamma}\quad (l=1,\dots,m-1);$$

$$(3.43)\qquad \mathbf{\Omega}^l(\mathbf{\Omega}^l)^*=\mathbf{E}\quad (l=1,\dots,m-1)$$

(az $\mathbf{\Omega}^l$ mátrixok ortogonálisak) relációk figyelembevételével belátható, hogy (3.31) bal oldala egyenlő a nullmátrixszal.

Ezzel a 3.2. tételt teljesen szimmetrikus latin négyzetre igazoltuk.

II. A 3.2. tétel bizonyítása ciklikus latin négyzetre. Azt kell megmutatnunk, hogy a

$$(3.44)\qquad \mathbf{\Gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_{i_1} & \gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_m}\\ \gamma_{i_m} & \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{m-1}}\\ \vdots & \\ \gamma_{i_2} & \gamma_{i_3}\cdots\gamma_{i_1}\end{pmatrix},$$

$\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$, $\lambda\mathbf{a}_0^*$ és $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$ mátrixok megoldásai a (3.30) egyenlet (3.32) alakjának. A bizonyítások során kihasználjuk a ciklikus mátrixok szorzásának kommutatív voltát. Mivel $\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$ és $\mathbf{\Gamma}$ is ciklikus mátrixok, ezért a két eset közül elegendő csupán az egyiket tekinteni.

$\mathbf{\Gamma}$-t (3.32) bal oldalába helyettesítve és a kommutativitást kihasználva a bal oldalra

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})^2\mathbf{\Gamma}+\mathbf{P}^2\mathbf{\Gamma}-\frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l(\mathbf{\Omega}^l)^*\mathbf{\Gamma}\right]$$

adódik. $\mathbf{\Gamma}$ kiemelése után vegyük figyelembe a (3.41) és (3.43) relációkat. Ekkor (3.32) bal oldala

$$(\mathbf{E}-2\mathbf{P}+\mathbf{P}+\mathbf{P}-\mathbf{E})\mathbf{\Gamma}$$

lesz, ami egyenlő a nullmátrixszal. Tehát $\mathbf{\Gamma}$ megoldása (3.32)-nek. (3.32) bal oldala $\lambda \mathbf{a}_0^*$ helyettesítése után

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\lambda[(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{a}_0]^* + \mathbf{P}\lambda(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^* - \frac{1}{m}\left[\sum_{l=1}^{m} \mathbf{\Omega}^l \lambda (\mathbf{\Omega}^l \mathbf{a}_0)^*\right].$$

Ebből (3.7), (3.36), (3.37) miatt és $\lambda \mathbf{a}_0^*$ kiemelésével

$$\left(\mathbf{P} - \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \mathbf{\Omega}^l\right)\lambda \mathbf{a}_0^*$$

adódik, ami egyenlő a nullmátrixszal. Ezért $\lambda \mathbf{a}_0^*$ megoldása (3.32)-nek.

Hasonló módon látható be az is, hogy $\mathbf{a}_0 \mathbf{v}^*$ kielégíti (3.32)-t.

3.4. Megjegyzés. A (3.40) és (3.42) megfelelői érvényesek ciklikus $\mathbf{\Gamma}$ mátrixra. A ciklikus latin négyzethez tartozó $\mathbf{\Gamma}$ mátrixot jelölje $\mathbf{\Gamma}_c$. Erre tehát fennállnak a

$$\mathbf{\Gamma}_c \mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_c, \tag{3.45}$$

$$\mathbf{\Gamma}_c \mathbf{\Omega}^l = \mathbf{\Omega}^l \mathbf{\Gamma}_c \quad (l = 1, \dots, m-1) \tag{3.46}$$

relációk. A teljesen szimmetrikus latin négyzet esetén adódó $\mathbf{\Gamma}$ mátrix legyen $\mathbf{\Gamma}_{ts}$. Mivel

$$\mathbf{\Gamma}_{ts} = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_c, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P} \tag{3.48}$$

és

$$\mathbf{\Omega}^l \mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{\Omega}^l)^* \quad (l = 1, \dots, m-1), \tag{3.49}$$

ezért (3.45)-nek és (3.46)-nak $\mathbf{C}$-vel balról való szorzásával, (3.47), (3.48) és (3.49) figyelembevételével épp a (3.40) és (3.42) egyenlőségek nyerhetők $\mathbf{\Gamma}_{ts}$-re is.

3.5. Megjegyzés. A (3.40) tetszőleges latin négyzethez tartozó Γ mátrixra igaz. (3.42) biztosan fennáll még szimmetrikus latin négyzetre, ugyanis a (3.27)-ben szereplő $\mathbf{A}^l$ $(l=1, \dots, m-1)$ ortogonális mátrixok permutáló mátrixoknak tekinthetők, amelyeknek szimmetrikus mátrixokkal való szorzására

$$\mathbf{\Gamma}_s \mathbf{A}^l = (\mathbf{A}^l)^* \mathbf{\Gamma}_s \quad (l = 1, \dots, m-1) \tag{3.50}$$

($\mathbf{\Gamma}_s$ szimmetrikus latin négyzethez tartozik).

III. A 3.2. tétel bizonyítása szimmetrikus latin négyzetre. Ebben az esetben (3.30) átírható (3.33) alakba. Megmutatjuk, hogy $\mu \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^*$, $\lambda \mathbf{a}_0^*$, $\mathbf{a}_0 \mathbf{v}^*$ és $\mathbf{\Gamma}_s$ megoldásai (3.33)-nak. Mivel $\mu \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_0^*$ és $\mathbf{\Gamma}_s$ is szimmetrikusak, ezért elegendő például azt igazolni, hogy $\mathbf{\Gamma}_s$ kielégíti a (3.33) egyenletet.

Helyettesítsük $\mathbf{\Gamma}_s$-et (3.33) bal oldalába és használjuk ki a (3.40) relációt a 3.5. megjegyzés alapján, valamint a (3.50) formulát. Mivel (3.40) szerint $(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{\Gamma}=$

$=\mathbf{\Gamma}(\mathbf{E}-\mathbf{P})$ is igaz, ezért (3.33) bal oldala

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})^2\mathbf{\Gamma}_s+\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_s-\frac{1}{m}\left[\mathbf{\Gamma}_s+\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{A}^l\mathbf{\Gamma}_s\mathbf{A}^l\right],$$

illetve $\mathbf{\Gamma}_s-\frac{1}{m}\left[\mathbf{\Gamma}_s+\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{A}^l(\mathbf{A}^l)^*\mathbf{\Gamma}_s\right]$ lesz, és ez nyilván egyenlő a zérusmátrixszal.

Megmutatjuk, hogy $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$ megoldása (3.33)-nak. $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$-ot (3.33) bal oldalán helyettesítve

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\lambda}[(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{a}_0]^*+\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*-\frac{1}{m}\left\{\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{A}^l\boldsymbol{\lambda}[(\mathbf{A}^l)^*\mathbf{a}_0]^*\right\}$$

adódik. Ebből (3.7), (3.36) és

$$(\mathbf{A}^l)^*\mathbf{a}_0 = 1\cdot\mathbf{a}_0 \quad (l=1,\dots,m-1) \tag{3.51}$$

miatt $\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*-\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\sum_{l=1}^{m-1}\dot{\mathbf{A}}^l\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*\right)$ nyerhető. Így (3.33) bal oldala $\left(\mathbf{P}-\frac{1}{m}\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*$, ami egyenlő a nullmátrixszal.

Hasonlóan látható be az is, hogy a (3.33)-nak megoldása $\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$.

Ezzel a 3.2. tétel igazolását befejeztük.

Általánosított modellünkben érvényes a következő kritérium.

3.3. Tétel. Ha a $\boldsymbol{\xi}$ mátrixnak létezik a várható értéke és $M(\boldsymbol{\xi})=\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\mathbf{\Gamma}$, továbbá a $\mathbf{P}$ mátrixnak $\mathbf{a}_0$ az 1 sajátértékhez tartozó jobb oldali sajátvektora, akkor $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$ ($\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta}$ a (3.5) alatt definiált sorok közötti eltérések mátrixa) *akkor és csak akkor* teljesül, ha $\boldsymbol{\lambda}=c\mathbf{a}_0$, ahol c egy konstans és $\boldsymbol{\lambda}$ a sorhatások oszlopvektora.

Bizonyítás. 1. Először azt igazoljuk, hogy $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$-ból — a tétel feltételei mellett — következik $\boldsymbol{\lambda}=c\mathbf{a}_0$.

(3.2) miatt $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\boldsymbol{\xi})\mathbf{P}$. Tételünk feltételeiből (lásd a (3.6) és (3.7) egyenlőségeket) és (3.36)-ból adódik az $(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\boldsymbol{\xi})\mathbf{P}=\mathbf{O}$ egyenlet

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{\Gamma}\mathbf{P} = \mathbf{O} \tag{3.52}$$

alakja. (3.40), a 3.5. megjegyzés és $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$ miatt (3.52)-ből

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^* = \mathbf{O}.$$

Mivel $\mathbf{a}_0$ nem nullvektor, az utolsó egyenlet akkor és csak akkor igaz, ha

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

($\mathbf{0}$ m-dimenziós null-oszlopvektor). Ebből $\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}$. Ezt (3.7)-tel összehasonlítva látjuk, hogy $\boldsymbol{\lambda}$ a $\mathbf{P}$ sztochasztikus mátrixnak egy másik $\mathbf{a}_0$-tól különböző jobb oldali sajátvektora lenne, ami szintén az 1 sajátértékhez tartozna. De ismert, hogy $\mathbf{P}$-nek az 1 egyszeres sajátértéke, amely az $\mathbf{a}_0$ jobb oldali sajátvektorhoz tartozik. Ezért $\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}$ csak úgy állhat fenn, ha $\boldsymbol{\lambda}=c\mathbf{a}_0$, ahol c egy konstans.

2. $\boldsymbol{\lambda}=c\mathbf{a}_0$-ból is következik, hogy $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$. $\boldsymbol{\lambda}=c\mathbf{a}_0$ miatt $M(\boldsymbol{\xi})==(\mu+c)\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\mathbf{\Gamma}$. Ezt $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\boldsymbol{\xi})\mathbf{P}$-be helyettesítve és (3.36)-ot

tekintetbe véve $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}$ adódik. (3.40) és a 3.5. megjegyzés miatt $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}$. Mivel $\mathbf{P}=\mathbf{P}^2$, ezért $M(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$.

A 3.3. tételhez hasonlóan bizonyítható a

3.4. TÉTEL. A $\boldsymbol{\xi}$ mátrixnak létezzék

$$M(\boldsymbol{\xi}) = \mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^* + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^* + \mathbf{a}_0\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\Gamma}$$

alakban előállítható várható értéke és legyen $\mathbf{P}\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_0$. Ekkor $M(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$ *akkor és csak akkor* teljesül, ha $\mathbf{v}=d\mathbf{a}_0$, ahol d egy numerikus paraméter, $\mathbf{v}$ az oszlophatások oszlopvektora.

($\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\zeta}$ definíciója (3.5)-nél található.)

A következő tétel csak speciális alakú latin négyzetek esetén érvényes.

3.5. TÉTEL. Ha a latin négyzet teljes szimmetrikus, ciklikus vagy szimmetrikus, továbbá a $\boldsymbol{\xi}$ mátrixnak létezik a várható értéke, amelyre $M(\boldsymbol{\xi})=\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\boldsymbol{\Gamma}$ és $\mathbf{P}\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_0$, akkor a $M(\boldsymbol{\eta}_h-\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{O}$ *akkor és csak akkor* teljesül, ha $\boldsymbol{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$, ahol $\boldsymbol{\eta}_h-\boldsymbol{\zeta}$ a (3.5) alatt definiált mátrix,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\gamma_i$$

(γ_i az i-edik kezelés hatása).

Bizonyítás.

I. *Teljesen szimmetrikus eset.*

1. A feltétel szükséges. Helyettesítsük az $M(\boldsymbol{\eta}_h-\boldsymbol{\zeta})=0$ egyenletbe (3.25) alapján az $\boldsymbol{\eta}_h$ és (3.2) alapján a $\boldsymbol{\zeta}$ mátrixokat. Ekkor az

$$\frac{1}{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l M(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^l\right)-\mathbf{P}M(\boldsymbol{\xi})\mathbf{P} = \mathbf{O} \tag{3.53}$$

egyenlet adódik, amiből (3.6) figyelembevételével

$$\mu\sum_{l=1}^{m}(\boldsymbol{\Omega}^l\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_0^*\boldsymbol{\Omega}^l)+\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{a}_0^*\boldsymbol{\Omega}^l)+\sum_{l=1}^{m}(\boldsymbol{\Omega}^l\mathbf{a}_0)\mathbf{v}^*\boldsymbol{\Omega}^l+\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Omega}^l-m[\mu\mathbf{P}\mathbf{a}_0)(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*+$$
$$+\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*+\mathbf{P}\mathbf{a}_0(\mathbf{P}\mathbf{v})^*+\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}] = \mathbf{O}.$$

Az egyenlet egyszerűsíthető (3.7), (3.37), (3.38), (3.40), (3.41), (3.42) és (3.43) felhasználásával:

$$\left(\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l-m\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\left(\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l-m\mathbf{P}\right)+(m\mathbf{E}-m\mathbf{P})\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{O}.$$

Ebből pedig $\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{\Omega}^l=m\mathbf{P}$ miatt $m(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\Gamma}=\mathbf{O}$, azaz $\boldsymbol{\Gamma}=\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}$. Mivel $\mathbf{P}=\frac{1}{m}\mathbf{I}$, ezért $\boldsymbol{\Gamma}=\frac{1}{m}\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}$. Ahonnan a $\boldsymbol{\Gamma}$ definíciója és $\bar{\gamma}=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\gamma_i$ alapján $\boldsymbol{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{I}$, vagy $\boldsymbol{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$.

2. A feltétel elégséges. Erről úgy győződhetünk meg, hogy $\mathbf{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$-ot (3.6)-ba helyettesítjük. Az így nyert $M(\xi)$-ről megmutathatjuk, hogy kielégíti a (3.53) egyenletet, ha alkalmazzuk a (3.7), (3.37) és (3.38) formulákat.

II. *A ciklikus latin négyzet esete*

1. Helyettesítsük η_h (3.26) alakját és ζ-t (3.2) alapján $M(\eta_h-\zeta)=\mathbf{O}$-ba és vegyük figyelembe $M(\xi)$ (3.6) felbontását. Ekkor az $M(\eta_h-\zeta)=\mathbf{O}$ egyenlet

$$\mu\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)^*+\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)^*+\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)\mathbf{v}^*(\mathbf{\Omega}^l)^*+\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l\mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Omega}^l)^*-$$
$$(3.54)\qquad -m[\mu\mathbf{P}\mathbf{a}_0(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*+\mathbf{P}\mathbf{a}_0(\mathbf{P}\mathbf{v})^*+\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*+\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}]=\mathbf{O}$$

formába írható. (3.54) a (3.7), (3.37), (3.43), (3.45) és (3.46) felhasználásával és kiemelésekkel a következő képpen is megadható:

$$\left(\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l-m\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\left(\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l)^*-m\mathbf{P}\right)+m(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{\Gamma}=\mathbf{O}.$$

Mivel a bal oldal első két kifejezése nullmátrix, a (3.54) egyenlet legegyszerűbb alakja

$$m(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{\Gamma}=\mathbf{O}.$$

Ebből, mint teljesen szimmetrikus esetben már láttuk, következik a $\mathbf{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$, azaz a feltétel szükséges.

2. $\mathbf{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$-nak (3.6)-ba való helyettesítésével $M(\xi)=(\mu+\bar{\gamma})\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*$. Ezért (3.35) bal oldala

$$(\mu+\bar{\gamma})\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)^*+\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)^*+\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{a}_0)(\mathbf{\Omega}^l\mathbf{v})^*-$$
$$-m[(\mu+\bar{\gamma})\mathbf{P}\mathbf{a}_0(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*+\mathbf{P}\mathbf{a}_0(\mathbf{P}\mathbf{v})^*+\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{P}\mathbf{a}_0)^*]$$

Ez az összeg (3.7) és (3.37) miatt

$$\left(\sum_{l=1}^{m}\mathbf{\Omega}^l-m\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\left(\sum_{l=1}^{m}(\mathbf{\Omega}^l)^*-m\mathbf{P}\right)$$

formába írható, és ez nyilván egyenlő a nullmátrixszal.

III. *A szimmetrikus latin négyzet esete*

1. Ekkor η_h-nak ξ-vel való előállítását (3.27) adja. (3.27) és (3.2) miatt $M(\eta_h-$ $-\zeta)=\mathbf{O}$ átírható

$$(3.55)\qquad \sum_{l=1}^{m}\mathbf{A}^l M(\xi)\mathbf{A}^l-m\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}=\mathbf{O}$$

alakba, ami (3.53) megfelelője szimmetrikus latin négyzet esetén. (3.55)-be behelyettesítve $M(\xi)$ (3.6) alakját, továbbá felhasználva a (3.7), (3.40), (3.41), (3.50), (3.51) és az $\mathbf{A}^l(\mathbf{A}^l)^*=\mathbf{E}$ $(l=1, \ldots, m)$ relációkat

$$\mu \sum_{l=1}^{m} \mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^* + \sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^* + \sum_{l=1}^{m} \mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\mathbf{A}^l + \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{\Gamma} - m(\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^* + \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^* + \mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{O}$$

adódik, azaz

$$\left(\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l - m\mathbf{P}\right)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}_0^* + \mathbf{a}_0\mathbf{v}^*\left(\sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}^l - m\mathbf{P}\right) + m(\boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{O}.$$

Mivel a bal oldali kifejezés első két tagja egyenlő a nullmátrixszal, ezért az utolsó egyenletből $(\mathbf{E}-\mathbf{P})\boldsymbol{\Gamma}=\mathbf{O}$. Ebből pedig $\boldsymbol{\Gamma}=\bar{\gamma}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*$ nyerhető.

2. A feltétel elégségességének igazolása szimmetrikus latin négyzet elrendezés esetén is hasonlóan történhet, mint a teljesen szimmetrikus és ciklikus esetekben.

3.6. Megjegyzés. A 3.3., 3.4. és 3.5. tételek a hipotézisvizsgálattal vannak kapcsolatban. A 3.3. tétel szerint az a $H_{\lambda 0}$ nullhipotézis, hogy a sorhatások $\boldsymbol{\lambda}$ oszlopvektora egyenlő komponensekkel rendelkezik ekvivalens azzal a $H'_{\lambda 0}$ nullhipotézissel, hogy a sorok közötti eltérések mátrixának várható értéke nullmátrix. A 3.4. tétel az oszlophatások oszlopvektora komponensei egyenlőségére vonatkozó $H_{\nu 0}$ nullhipotézissel ekvivalens $H'_{\nu 0}$ hipotézist ad meg.

A 3.5. tétel azt állítja teljesen szimmetrikus, ciklikus és szimmetrikus latin négyzetre, hogy az a H_{Γ^0} hipotézis, hogy a kezeléshatások $\boldsymbol{\Gamma}$ mátrixa egyenlő elemekből álljon ekvivalens azzal a H'_{Γ^0} hipotézissel, hogy a kezelések közötti eltérések mátrixának várható értéke nullmátrix.

4. Az $M(\xi)$ felbonthatósága

Az általánosított modellben igazolt tételek (3.1.—3.5. tételek) mindegyikénél lényeges feltétel az $M(\xi)$ (3.6) alakú előállíthatósága. Ebben a pontban azt a problémát fogjuk megvizsgálni, hogy $M(\xi)$ (3.6) alakú felbontása nem következik-e abból a feltételből, hogy latin négyzet módszernél a véletlen hibamátrix várható értéke nullmátrix, azaz nem igaz-e például az általunk legegyszerűbbnek ítélt 3.2. tétel megfordítása. EGERVÁRY [4], [5] és [6] dolgozatai bizonyos eredményeinek felhasználásával megmutatjuk, hogy általánosított modellünkben a 3.2. tétel állításának megfordítása nem igaz már $m=3$ esetén sem, ha a latin négyzet ciklikus, azaz (3.17) alakú.

A továbbiakban először a (3.30) mátrixegyenlet speciális latin négyzetekhez (teljesen szimmetrikus, ciklikus és szimmetrikus) tartozó (3.31)—(3.33) alakjait fogjuk felírni a mátrixok direkt szorzatai segítségével, felhasználva a következő jól ismert tételt.

A

$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\mu\nu}\mathbf{A}^{\mu}\mathbf{X}\mathbf{B}^{\nu} = \mathbf{F}$$

mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ m-edrendű-, $\mathbf{B}$ n-edrendű kvadratikus mátrixok, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{F}$ m sorból és n oszlopból álló téglalap alakú mátrixok, a $c_{\mu\nu}$ mennyiségek pedig konstansok, ekvivalens a

$$[\sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\mu\nu}\mathbf{A}^{\mu}\otimes(\mathbf{B}^*)^{\nu}]\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{4.1}$$

direkt polinom együtthatójú egyenletrendszerrel, ahol **x**, illetve **f** az **X**, illetve **F** mátrixok oszlopvektoraiból álló *mn* dimenziós oszlopvektorok, úgynevezett hipervektorok.

A tétel alkalmazása előtt a (3.31), (3.32) és (3.33) mátrixegyenleteket átírjuk számunkra kedvezőbb alakba, éspedig mindegyiket szorozzuk *m*-mel és figyelembe vesszük az

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P} = M(\xi)-\mathbf{P}M(\xi)-M(\xi)\mathbf{P}+\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P},$$

$$\mathbf{\Omega}^m = \mathbf{A}^m = \mathbf{E}$$

egyenlőségeket. Így a (3.31)—(3.33) egyenletek más felírásai rendre a következők a

$$\mathbf{K}[M(\xi)] = 2m\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}-m\mathbf{P}M(\xi)-mM(\xi)\mathbf{P}+(m-1)M(\xi)$$

jelölés bevezetése után:

$$\mathbf{K}[M(\xi)]-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{\Omega}^l M(\xi)\mathbf{\Omega}^l = \mathbf{O}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{K}[M(\xi)]-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{\Omega}^l M(\xi)(\mathbf{\Omega}^*)^l = \mathbf{O}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{K}[M(\xi)]-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{A}^l M(\xi)\mathbf{A}^l = \mathbf{O}. \tag{4.4}$$

Amennyiben $M(\xi)$ *m*-dimenziós oszlopvektorait $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_m$ jelöli és az *m*-dimenziós nulloszlopvektort $\mathbf{0}$, akkor a (4.2)—(4.4) egyenletek a (4.1) képlet alapján a

$$\mathbf{K}(\otimes) = 2m\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}-m\mathbf{P}\otimes\mathbf{E}-m\mathbf{E}\otimes\mathbf{P}+(m-1)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}$$

jelöléssel felírhatók direkt szorzattal:

$$\left[\mathbf{K}(\otimes)-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{\Omega}^l\otimes(\mathbf{\Omega}^*)^l\right]\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\\ \vdots\\ \mathbf{m}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, \tag{4.2'}$$

$$\left[\mathbf{K}(\otimes)-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{\Omega}^l\otimes\mathbf{\Omega}^l\right]\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\\ \vdots\\ \mathbf{m}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, \tag{4.3'}$$

$$\left[\mathbf{K}(\otimes)-\sum_{l=1}^{m-1}\mathbf{A}^l\otimes(\mathbf{A}^*)^l\right]\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\\ \vdots\\ \mathbf{m}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}. \tag{4.4'}$$

Legyen most $m=2$. Ekkor a (3.8) latin négyzeteket kell tekinteni, amelyek teljesen szimmetrikusak (ciklikusak). Ekkor $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}^*$ és a (4.2') vagy (4.3') szerint a

$$[4\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}-2(\mathbf{P}\otimes\mathbf{E}+\mathbf{E}\otimes\mathbf{P})+\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{\Omega}]\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

egyenletrendszer adódik, ahol minden mátrix másodrendű kvadratikus mátrix és az oszlopvektorok kétdimenziósak. A (4.5) egyenletrendszer együttható-mátrixa a mátrixok direkt szorzatának (1.1) definíciója, (3.1), $\mathbf{E}$ és $\mathbf{\Omega}$ értelmezése alapján

$$\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{O}$ másodrendű nullmtárix. Ebből az következik, hogy a (4.5) egyenletrendszert, amelyben az ismeretlenek a $M(\xi)$ mátrix elemei, bármely $\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\end{pmatrix}$ hipervektor kielégíti.

Ezért (3.32) $m=2$ esethez tartozó alakját bármely $M(\xi)$ mátrix kielégíti, nemcsak az

$$M(\xi)=\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\lambda\mathbf{a}_0^*+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\mathbf{\Gamma}_{2\times 2}$$

mátrix. (Minden vektor kétdimenziós, $\mathbf{\Gamma}_{2\times 2}$ másodrendű mátrix.) Tehát $m=2$ esetén (3.30)-ból nem következik az $M(\xi)$ (3.6) formában való előállíthatósága.

Legyen $m=3$ és a latin négyzet (3.17) alakú ciklikus. Ekkor a (3.32) mátrixegyenlet direkt szorzatos alakja (4.3')-ből

$$[6\mathbf{P}\otimes\mathbf{P}-3(\mathbf{P}\otimes\mathbf{E}+\mathbf{E}\otimes\mathbf{P})+2\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}-\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}^2\otimes\mathbf{\Omega}^2]\begin{pmatrix}\mathbf{m}_1\\ \mathbf{m}_2\\ \mathbf{m}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

(a mátrixok harmadrendűek, az oszlopvektorok háromdimenziósak). A (4.6) egyenletrendszer $\mathbf{B}$ együttható-mátrixa a

$$\mathbf{B}_1=\mathbf{E}-\mathbf{P},\quad \mathbf{B}_2=2\mathbf{P}-\mathbf{E}-\mathbf{\Omega}\quad \text{és}\quad \mathbf{B}_3=2\mathbf{P}-\mathbf{E}-\mathbf{\Omega}^2$$

harmadrendű kvadratikus mátrixokból ciklikusan felépülő hipermátrix:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3\\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2\\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{B}_2^*=\mathbf{B}_3$ miatt a $\mathbf{B}$ ciklikus hipermátrix szimmetrikus, azaz $\mathbf{B}=\mathbf{B}^*$. Nyilvánvaló, hogy a (4.6) homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális lineárisan független megoldásai a $\mathbf{B}$ mátrix zéró sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektorai. Az egyenletrendszer általános megoldása viszont a jobb oldali sajátvektorok lineáris kombinációja. Az eredeti (3.32) mátrixegyenlet általános megoldását (4.6) általános megoldásából a hipervektoroknak kvadratikus mátrixokként való visszaírásával nyerjük.

A (4.6) egyenletrendszer $\mathbf{B}$ együttható-mátrixának szimmetrikus volta megkönnyíti sajátvektorainak meghatározását, mert ilyen esetben figyelembe vehetjük a következő jól ismert tételeket.

I. TÉTEL. Egy valós szimmetrikus **A** mátrix kanonikus előállítása

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\mathbf{u}_{k1}\mathbf{u}^*_{k1} + \ldots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{u}^*_{k\alpha_k}),$$

ahol λ_k az **A**-nak az a sajátértéke, amelyhez az $\mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2}, \ldots, \mathbf{u}_{k\alpha_k}$ jobb oldali sajátvektorok, illetve az $\mathbf{u}^*_{k1}, \mathbf{u}^*_{k2}, \ldots, \mathbf{u}^*_{k\alpha_k}$ bal oldali sajátvektorok tartoznak.

II. TÉTEL. Valós szimmetrikus mátrix minimálegyenletének csupa egyszeres valós gyökei vannak.

Valamely **A** mátrix kanonikus alakjának tényleges előállítása három lépésben történik.

1. Először kiszámítjuk $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sajátértékeit a $\mathrm{Det}(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldása útján. Ha többszörös gyökök is előfordulnának, akkor megvizsgáljuk, hogy a minimálegyenletnek csupa egyszeres gyökei vannak-e.

2. Másodszor megadjuk a minimálegyenlet egyszeres gyökeihez tartozó, azaz a $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ helyeken interpoláló $L_1(z), L_2(z), \ldots, L_s(z)$ *Lagrange-féle polinomokat*, illetve az $L_1(\mathbf{A}), \ldots, L_s(\mathbf{A})$ Lagrange-féle mátrixpolinomokat. Ezekkel az **A** mátrix $\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k L_k(\mathbf{A})$ alakban állítható elő.

3. Harmadszor az $L_k(\mathbf{A})$ mátrixok diadikus felbontásával megállapítjuk a λ_k sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat. Az $L_k(\mathbf{A})$ diadikus felbontása éppen annyi sajátvektort szolgáltat, amennyi a λ_k multiplicitása.

4.1. Megjegyzés. A diád fogalma és a diadikus előállítás [6]-ban szerepelnek ([6], 14. oldal (1), (2) képletek).

4.2. Megjegyzés. **B** sajátértékeit [4] 3. pontjában a 214. oldalon levő, a hipermátrix determinánsa kiszámítására vonatkozó tétel alapján határozzuk meg. **B** szimmetriájából a II. tétel szerint következik, hogy a minimálegyenletnek csupa egyszeres gyökei vannak. Ezért ezzel a problémával nem kell külön foglalkoznunk.

4.3. Megjegyzés. [5]-ben EGERVÁRY általánosította egy mátrixnak a sajátértékeivel és a *Lagrange-féle mátrixpolinomokkal* való felírását mátrixfüggvény esetére.

4.4. Megjegyzés. Az $L_k(\mathbf{A})$ mátrix minimális számú diáddal való előállítására vonatkozó módszer EGERVÁRY [6] dolgozatában található meg részletesen (Lásd a (9.1) és (1.1) képleteket!) A sajátvektorokat ezzel a módszerrel fogjuk meghatározni.

1'. Először számítsuk ki a **B** sajátértékeit a $\mathrm{Det}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda - \mathbf{B}) = 0$ karakterisztikus egyenletből. Könnyű látni, hogy az $\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda - \mathbf{B}$ hipermátrix az $\mathbf{A}_1 = (\lambda - 1)\mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} - 2\mathbf{P}$ és $\mathbf{A}_3 = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^2 - 2\mathbf{P}$ harmadrendű blokkokból ciklikusan felépülő (kilencedrendű) kvadratikus mátrix, ahol **E** az egységmátrix, $\mathbf{\Omega}$ harmadrendű primitív ciklikus mátrix, $\mathbf{E}_{9\times 9}$ kilencedrendű egységmátrix, **P** (3.1)-gyel adott.

Az $\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda - \mathbf{B}$ szimmetrikus mátrix tehát

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

alakú. Mivel $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ és $\mathbf{A}_3$ ciklikus mátrixok, ezért az $\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda - \mathbf{B}$ hipermátrix páronként felcserélhető blokkokból áll. Az ilyen blokkokból álló mátrix determinánsát a

[4] 3. pontjában szereplő tétel szerint a következő formulák alapján célszerű kiszámítani:

$$\mathrm{Det}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda-\mathbf{B}) = \mathrm{Det}\,[\mathrm{Hipdet}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda-\mathbf{B})],$$

$$\mathrm{Hipdet}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda-\mathbf{B}) = \mathbf{A}_1^3+\mathbf{A}_2^3+\mathbf{A}_3^3-3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3.$$

Könnyű látni, hogy $\mathbf{A}_1^3=(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1)\mathbf{E}+(3\lambda^2-3\lambda+1)\mathbf{P}$, vagy $a_1=\lambda^3-2\lambda^2+$ $+2\lambda-\frac{2}{3}$ és $a_2=\lambda^2-\lambda+\frac{1}{3}$ jelölésekkel

$$\mathbf{A}_1^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2^3 = 2\mathbf{E}+3\mathbf{\Omega}+3\mathbf{\Omega}^2-8\mathbf{P},$$

azaz

$$\mathbf{A}_2^3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3^3 = \mathbf{A}_2^3;$$

$$-3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = -3(\lambda-1)(2\mathbf{E}-4\mathbf{P}+\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}^2),$$

azaz

$$-3\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

és itt $b_1=2-2\lambda$, $b_2=\lambda-1$. Ezek felhasználásával

$$\mathrm{Hipdet}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda-\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \lambda^3-2\lambda^2, \quad c_2 = \lambda^2.$$

Végül is $\mathrm{Det}\,(\mathbf{E}_{9\times 9}\lambda-\mathbf{B})=\lambda^7(\lambda^2-6\lambda+9)$. Ebből látszik, hogy a **B** mátrixnak $\lambda_1=0$ hétszeres, $\lambda_2=3$ pedig kétszeres sajátértéke. **B** minimálegyenletének csupa egyszeres gyökei vannak, mert **B** szimmetrikus (II. tétel).

2'. A $\triangle(\lambda)=(\lambda-3)\lambda$ minimálpolinomból a $\lambda_1=0$ sajátértékhez tarozó *Lagrange-féle polinom*

$$L_1(z) = 1-\frac{z}{3}$$

és a $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó *Lagrange-féle mátrixpolinom*

$$L_1(\mathbf{B}) = \mathbf{E}_{9\times 9}-\frac{1}{3}\mathbf{B}.$$

A $\lambda_2=3$ sajátértékhez tartozó *Lagrange-féle mátrixpolinom* pedig

$$L_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{3}\mathbf{B}.$$

Végül is a $\mathbf{B}$ mátrix a *Lagrange-féle mátrixpolinomokkal*

$$\mathbf{B} = 0\cdot\left(\mathrm{E}_{9\times 9}-\frac{1}{3}\mathbf{B}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\mathbf{B} \tag{4.7}$$

formában írható fel.

3'. $\mathbf{B}$ kanonikus előállításához meg kell még adnunk a 0 és 3 sajátrétékekhez tartozó sajátvektorokat. Bár a (4.6) egyenletrendszer nemtriviális megoldásai csak a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, a teljesség kedvéért mégis kiszámítottuk a 3 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat is. (Az utóbbi sajtávektorok nem megoldásai a (4.6) egyenletrendszernek.) A sajátértékekhez tartozó sajtávektorokat az $L_1(\mathbf{B})$ és $L_2(\mathbf{B})$ mátrixpolinomok diadikus felbontásával nyertük ([6], (9.1) és (1.1) formulák).

$L_1(\mathbf{B})$ diadikus felbontása: $L_1(\mathbf{B})=\sum\limits_{p=1}^{7}\mathbf{u}_{1p}\mathbf{u}_{1p}^{*}$, ahol

$$\mathbf{u}_{11}=\frac{\sqrt{7}}{21}\left(\begin{array}{r}7\\1\\1\\\hline 1\\1\\-2\\\hline 1\\-2\\1\end{array}\right),\quad \mathbf{u}_{12}=\frac{\sqrt{21}}{84}\left(\begin{array}{r}0\\16\\2\\\hline -5\\2\\3\\\hline 2\\3\\-5\end{array}\right),\quad \mathbf{u}_{13}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\begin{array}{r}0\\0\\6\\\hline 1\\-2\\1\\\hline -2\\1\\1\end{array}\right), \tag{4.8}$$

$$\mathbf{u}_{14}=\frac{\sqrt{6}}{12}\left(\begin{array}{r}0\\0\\0\\\hline 4\\1\\1\\\hline 1\\1\\-2\end{array}\right),\quad \mathbf{u}_{15}=\frac{\sqrt{10}}{20}\left(\begin{array}{r}0\\0\\0\\\hline 0\\5\\1\\\hline -3\\1\\2\end{array}\right),\quad \mathbf{u}_{16}=\frac{\sqrt{15}}{15}\left(\begin{array}{r}0\\0\\0\\\hline 0\\0\\3\\\hline 1\\-2\\1\end{array}\right),\quad \mathbf{u}_{17}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\begin{array}{r}0\\0\\0\\\hline 0\\0\\0\\\hline 1\\1\\1\end{array}\right).$$

Az $L_2(\mathbf{B})$ diadikus felbontása viszont — összhangban azzal, hogy $\lambda_2=3$ kétszeres sajátérték —

$$L_2(\mathbf{B}) = \mathbf{u}_{21}\mathbf{u}_{21}^* + \mathbf{u}_{22}\mathbf{u}_{22}^*,$$

(4.9)
$$\mathbf{u}_{21} = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ 2 \\ \hline -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{22} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \hline 1 \\ -1 \\ 0 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezeket (4.7)-be helyettesítve a $\mathbf{B}$ kanonikus előállítása

$$\mathbf{B} = 0\cdot\sum_{p=1}^{7}\mathbf{u}_{1p}\mathbf{u}_{1p}^* + 3\cdot\sum_{q=1}^{2}\mathbf{u}_{2q}\mathbf{u}_{2q}^*$$

a (4.8) és (4.9) sajátvektorokkal.

Az eddigiekből következik, hogy a (4.6) egyenletrendszer általános megoldása

(4.10)
$$\mathbf{m} = \sum_{p=1}^{7}\varrho_p\mathbf{u}_{1p},$$

ahol a ϱ_p mennyiségek $(p=1,\ldots,7)$ konstansok, az $\mathbf{u}_{1p}$ $(p=1,\ldots,7)$ vektorok (4.8) alatt adottak, $\mathbf{m}$ kilencdimenziós oszlopvektor, amely az $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$ vektorokból áll.

Amennyiben a (4.6) egyenletet visszaírjuk (4.3) (vagy (3.32)) alakba $(m=3)$, akkor a

(4.11)
$$3(\mathbf{E}-\mathbf{P})M(\xi)(\mathbf{E}-\mathbf{P})+3\mathbf{P}M(\xi)\mathbf{P}+M(\xi)+$$
$$+\mathbf{\Omega}M(\xi)\mathbf{\Omega}^2+\mathbf{\Omega}^2M(\xi)\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}$$

egyenlet adódik, amelyben minden mátrix harmadrendű és kvadratikus. A (4.6) egyenlet (4.10) általános megoldásából az átrendezés révén (4.11) általános megoldása

(4.12)
$$M(\xi) = \sum_{p=1}^{7}\delta_p\mathbf{M}_p,$$

a δ_p mennyiségek konstansok, az $\mathbf{M}_p$ mátrixok pedig a (4.8)-ból

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 16 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5. Megjegyzés. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az $\mathbf{M}_p$ mátrixok valóban megoldásai a (4.11) egyenletnek.

A (4.11) mátrixegyenlet általános megoldása eltér a várt $M(\xi)=\mu\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^*+\lambda\mathbf{a}_0^*+$ $+\mathbf{a}_0\mathbf{v}^*+\mathbf{\Gamma}$ megoldástól, amelyről a 3.2. tételben igazoltuk, hogy megoldása a (3.30) egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy $m=3$ esetén ciklikus latin négyzetnél a (3.30) egyenlet ciklikus esetre vonatkozó (3.32) alakjából nem következik $M(\xi)$ (3.6) alatti előállítása, azaz (3.32)-ből (4.12) alakú felbontás adódik. Tehát a 3.2. tétel megfordítása már $m=3$ esetén — ciklikus latin négyzet elrendezésnél — sem igaz, pedig általánosított modellünk — a 3. pontban igazolt tételek alapján — a közönséges modell természetes általánosításának látszik.

IRODALOM

[1] GANTMACHER, F. R., *Matrizenrechnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958—1959).
[2] GYIRES, B., "A question about the randomised blocks", Colloquium Mathematicum Societatis János Bolyai. 9. European Meeting of Statisticians. **1** (1974) 277—288.
[3] GYIRES, B., "On a matrix equation defined over a commutative Euclidean ring", *Publicationes Mathematicae, Debrecen* **23** (1976) 11—13.
[4] EGERVÁRY, J., "On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice dynamics", *Acta Scientiarium Mathematicarum, Szeged* **15** (1954) 211—222.
[5] EGERVÁRY, J., "On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions", *Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged* **15** (1953/54) 1—6.
[6] EGERVÁRY, J., „Mátrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására". *Az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11—32.
[7] RÉDEY, L., *Algebra I.* (Akademische Verlagsgesellschaft Geest Portig K.-G., Leipzig, 1959.)
[8] OGAWA, J., *Statistical Theory of the Analysis of Experimental Designs.* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.)
[9] VINCZE, I., *Mathematische Statistik mit industriellen Anwendungen* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971).

(Beérkezett: 1977. július 7.)
(Rövidítve újra beérkezett: 1978. május 25.)

TAR LÁSZLÓ
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZOTT MATEMATIKAI TANSZÉK
4010 DEBRECEN, 10.

A GENERALIZED MODEL OF THE LATIN SQUARE DESIGN

L. TAR

In this paper such a generalized model of the *Latin square method* is given in which the generalizations of the theorems valid in the usual model can be demonstrated. We constructed a generalized matricial model to examine the reversibility of the well-known theorem by which the expectations of the random errors are zero, if the expectations of the sample elements decompose into the sum of three quantities corresponding to the row-effect, the column-effect and the effect of treatment, respectively.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 379—388*

AZ AUTOREGRESSZIÓS MEZŐ MOZGÓ ÁTLAG ELŐÁLLÍTÁSA ÉS EGYÜTTHATÓINAK MAXIMUM LIKELIHOOD BECSLÉSE

TERDIK GYÖRGY

Debrecen

Az autoregressziós mező természetes általánosítása az autoregressziós folyamatnak, amikor paramétertér nem az egész számok halmaza, hanem a k-dimenziós euklideszi tér rácspontjai. A dolgozatban megmutatjuk, hogy az autoregressziós mezők mozgó átlag előállításának feltételei hasonlóak a folyamatokéhoz. Az állítások bizonyítása viszont nem végezhető el analóg módon. Nehézséget jelent többek között a felmerülő parciális differencia egyetlenrendszer megoldása. A mozgóátlag előállítás lehetővé teszi az együtthatók maximum likelihood becslésének megkonstruálását. Megvizsgáljuk a mező kovarianciájának a szerkezetét, majd elemezzük azt az egyszerű esetet, amikor a paraméter a sík rácspontjait futja be, és az autóregresszió csak három pontra támaszkodik.

1. A feladat megfogalmazása

Az (1.1) egyenletnek elegettevő autoregressziós folyamat fontos szerepet játszik az idősorok elméletében:

$$y_t = -\sum_{r=1}^{R} a_r y_{t-r} + u_t, \quad (t \in \mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}). \tag{1.1}$$

Az ilyen típusú folyamatoknak kiterjedt irodalma van (l. pl. a [2], [6] monográfiák irodalomjegyzékét), és elég részletesen ismertek a folyamat tulajdonságai, valamint statisztikája.

Az autoregressziós folyamat természetes általánosítása az autoregressziós mező, amikor a $\mathbf{t}$ paraméter nem az egész számok halmaza, hanem a $k\,(\geqq 2)$ dimenziós *Euklideszi tér* Z^k rácspontjai. Az $\{y_\mathbf{t}, \mathbf{t} \in \mathrm{Z}^k\}$ másodrendben véges $(My_\mathbf{t}^2 < \infty)$ véletlen mezőt autoregressziós mezőnek nevezzük, ha tetszőleges $\mathbf{t} \in \mathrm{Z}^k$-ra, eleget tesz az

$$y_\mathbf{t} = -\sum_{\mathbf{0} < \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_\mathbf{r} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} + u_\mathbf{t} \tag{1.2}$$

parciális sztochasztikus differencia egyenletrendszernek, ahol az $u_\mathbf{t}$ $(\mathbf{t} \in \mathrm{Z}^k)$ korrelálatlan valószínűségi változók nulla várható értékkel és σ^2 szórással. Az összegzést meghatározó $<$, $\leqq$ relációkat a következőképpen kell érteni: $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$-ra $\mathbf{s} \leqq \mathbf{t}$, ha $s_i \leqq t_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$, $\mathbf{s} < \mathbf{t}$, ha $\mathbf{s} \leqq \mathbf{t}$ és $\sum_{i=1}^{k} (s_i - t_i)^2 > 0$.

Az (1.2) parciális sztochasztikus differencia egyenletrendszernek keresendő az $y_\mathbf{t}$ megoldása, adott peremfeltétel esetén. Ezenkívül a paramétereinek maximum likelihood becslését fogjuk kiszámítani, ha ismerjük a mező bizonyos pontokban felvett értékeit és rendelkezésünkre áll egy minta. Ehhez a becsléshez szükségünk lesz a mező mozgó átlag előállítására is.

2. A mozgó átlag előállítása

Az első kérdés, amit megvizsgálunk az, hogy milyen esetekben lehet az (1.2) autoregressziós mezőt

$$y_{\mathbf{t}} = \sum_{0 \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} \quad (\mathbf{t} \in \mathbf{Z}^k)$$

mozgóátlagként előállítani (a konvergencia négyzetes középben értendő).

Tételezzük fel, hogy a mezőnk homogén, vagyis: $My_{\mathbf{t}}=0$ és $My_{\mathbf{t}}y_{\mathbf{s}}=C(\mathbf{t}-\mathbf{s})$ minden $\mathbf{t}$, $\mathbf{s} \in \mathbf{Z}^k$-ra.

Tekintsük az $\{y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbf{Z}^k\}$ mező által kifeszített $\mathscr{H}$ *Hilbert teret*. Az $\{y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \mathbf{Z}^k\} \subset \mathscr{H}$ halmazt tartalmazó sokaságon értelmezzük az $\mathscr{L}_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ lineáris operátorokat az

$$\mathscr{L}_j y_{(t_1, t_2, \ldots, t_k)} = y_{(t_1, t_2, \ldots, t_j - 1, \ldots, t_k)}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

egyenlőségekkel. A mező homogenitása miatt $\mathscr{L}_j - k$ unitér operátorok, s mint ilyenek kiterjeszthetők az egész $\mathscr{H}$-ra (l. [4], 4.1. lemma) unitér operátorokká. Az $\mathscr{L}_j$ operátorok segítségével az (1.2) egyenlet a

$$(2.1) \qquad \Big(\sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} \mathscr{L}_1^{r_1} \mathscr{L}_2^{r_2} \ldots \mathscr{L}_k^{r_k}\Big) y_{\mathbf{t}} = u_{\mathbf{t}}, \quad (a_0 = 1)$$

alakban írható fel.

Tekintsük az $\mathscr{L}_j$ unitér operátorok spektrál előállítását (l. [3] 62. pont):

$$\mathscr{L}_j = \int_0^{2\pi} e^{ix_j} \, dE_{x_j}^{(j)}, \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Ezek segítségével

$$\mathscr{L}^{\mathbf{r}} = \mathscr{L}_1^{r_1} \mathscr{L}_2^{r_2} \ldots \mathscr{L}_k^{r_k} = \int_{[0,2\pi]^k} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{k} r_j x_j\Big) \, d \prod_{j=1}^{k} E_{x_j}^{(j)},$$

s a (2.1) egyenlet pedig a következő alakba megy át:

$$(2.2) \qquad \left[\int_{[0,2\pi]^k} \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})} \, d \prod_{j=1}^{k} E_{x_j}^{(j)}\right] y_{\mathbf{t}} = u_{\mathbf{t}}.$$

A kérdésünk ezek után a következő:

a) Milyen $a_{\mathbf{r}}$ együtthatók esetén létezik a (2.2) bal oldalán álló operátornak olyan inverze, amely az $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_k$ operátorok

$$\sum_{0 \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} \mathscr{L}^{\mathbf{r}}$$

alakú polinomja? Vagy ami ugyanaz,

b) Mikor létezik a

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}$$

trigonometrikus polinomnak

$$T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{0 \leq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}$$

alakú inverze, ahol a $\sum_{0\leqq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}}$ sor abszolút konvergens? A *Wiener lemma* szerint (l. [5], 11.6) ha minden $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R^k$ esetén $T(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$, akkor

$$T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{\mathbf{r} \in Z^k} f_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}$$

és

$$\sum_{\mathbf{r} \in Z^k} |f_{\mathbf{r}}| < \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy az (1.2) autoregressziós mező előállítható

$$y_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{r} \in Z^k} f_{\mathbf{r}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} \tag{2.3}$$

alakban. Csakhogy (2.3) nem mozgóátlag mező. Legyen $\mathscr{A}$ azon függvények halmaza, amelyek előállnak

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{0 \leqq \mathbf{r}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})} \tag{2.4}$$

alakban, ahol $\sum_{0\leqq \mathbf{r}} |a_{\mathbf{r}}| < \infty$. *$\mathscr{A}$ kommutatív Banach algebra* $\|F\| = \sum_{0\leqq \mathbf{r}} |a_{\mathbf{r}}|$ normával. Ezen algebra egysége az azonosan 1 függvény.

Legyen

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})} = 1 + \sum_{0 < \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})},$$

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1 + T_1(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Az *$\mathscr{A}$ Banach algebrában* az $1 + T_1$ elemnek létezik az inverze, hacsak $\|T_1\| < 1$ ([5] 10.7), azaz, ha $\sum_{0<\mathbf{r}\leqq \mathbf{R}} |a_{\mathbf{r}}| < 1$. Ilyenkor a $T^{-1} = (1 + T_1)^{-1}$ természetesen eleme $\mathscr{A}$-nak, tehát

$$T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{0 \leqq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}$$

és

$$\sum_{0 \leqq \mathbf{r}} |f_{\mathbf{r}}| < \infty.$$

Ezek alapján az (1.2) autoregressziós mezőre megállapíthatjuk:

2.1. TÉTEL. Ha az (1.2) autoregressziós mező homogén és

$$\sum_{0 < \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} |a_{\mathbf{r}}| < 1, \tag{2.5}$$

akkor mozgóátlag mező:

$$y_{\mathbf{t}} = \sum_{0 \leqq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{r}}.$$

Megjegyezzük, hogy a tétel állítása igaz tetszlőeges $\mathbf{R}$ esetén, amelynek lehetnek végtelen komponensei is.

$$\Big(\sum_{\substack{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R} \\ a_0 = 1}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}\Big)\Big(\sum_{0 \leqq \mathbf{r}} f_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}\Big) = 1$$

feltétel azt jelenti, hogy az $f_{\mathbf{r}}$ együtthatók kielégítik a

$$\sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{q}-\mathbf{r}} = \delta_0^{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{q} \in \mathrm{Z}^k) \tag{2.6}$$

parciális differencia egyenletrendszert az

$$f_{\mathbf{q}} = 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{q} \in \mathrm{Z}^k \quad \text{és} \quad \mathbf{0} \not\leqq \mathbf{q} \tag{2.7}$$

($\delta_0^{\mathbf{q}}$ a *Kronecker-féle szimbólum*) peremfeltétel mellett.

Nem nehéz belátni, hogy a (2.6) parciális differencia egyenletrendszernek a (2.7) peremfeltétel mellett egyetlen $f_{\mathbf{q}}$ $(\mathbf{q} \in \mathrm{Z}^k)$ megoldása van és ez a következő alakú:

$$f_{(q_1, q_2, \ldots, q_k)} = \sum_{\left\{\begin{array}{l|l} \alpha_{\mathbf{r}} \in \mathrm{Z} & \sum\limits_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} r_j \alpha_{\mathbf{r}} = q_j \\ \alpha_{\mathbf{r}} \geqq 0 & j = 1, 2, \ldots, k \end{array}\right\}} \frac{\left(\sum\limits_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \alpha_{\mathbf{r}}\right)!}{\prod\limits_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} \alpha_{\mathbf{r}}!} \prod_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} (-a_{\mathbf{r}})^{\alpha_{\mathbf{r}}}. \tag{2.8}$$

A (2.5) feltétel mellett a $\sum\limits_{0 \leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}$ sort könnyen kiszámíthatjuk,

$$\sum_{0 \leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sum_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}}\right)^n = \frac{1}{1 + \sum\limits_{0 < \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}}}$$

mivel a $\sum\limits_{0 \leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}$ sor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum a_{\mathbf{r}})^n$ sor egy átrendezett sora (az átrendezést az abszolút konvergencia miatt mindig elvégezhetjük).

A (2.5) feltétel teljesülése esetén az (1.2) autoregressziós mező mozgóátlag mező, de még sok más esetben is, mert (2.5) az invertálhatóságnak nem szükséges feltétele. Megvizsgáljuk most a b) kérdésünket komplex függvénytani eszközökkel. Jelölje C^k és R_+^k a komplex, ill. a nemnegatív koordinátájú valós k-dimenziós tereket. Tudjuk, hogy a $G(z) = 1/z$ $(z \in \mathrm{C}^1)$ függvény a $\{\mathrm{C}^1 \setminus 0\}$ tartományon analitikus, illetve a

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} \mathbf{z}^{\mathbf{r}} = \sum_{0 \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}} a_{(r_1, r_2, \ldots, r_k)} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \ldots z_k^{r_k}$$

polinom egész függvény. Ezért

$$(G \circ P)(\mathbf{z}) = \frac{1}{P(\mathbf{z})}$$

analitikus a $\mathrm{C}^k \setminus T_0$ tartományon (l. [1]), ahol

$$T_0 = \{\mathbf{z} \in \mathrm{C}^k | P(\mathbf{z}) = 0\}$$

Legyen τ a C^k leképezése az abszolút terére (R_+^k-ra), azaz

$$\tau(\mathbf{z}) = \tau(z_1, z_2, \ldots, z_k) = (|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_k|)$$

és K egy policilinder és egy tórusz egyesítése, azaz

$$K = \{\mathbf{z} \in \mathrm{C}^k | \tau(\mathbf{z}) < (1, 1, \ldots, 1)\} \cup \{\mathbf{z} \in \mathrm{C}^k | \tau(\mathbf{z}) = (1, 1, \ldots, 1)\}.$$

Ha a $P(\mathbf{z})$ polinomnak nincs gyöke a K-ban, azaz,

$$K \cap T_0 = \emptyset$$

akkor a $G\circ P$-nek a H holomorfitási tartománya bővebb, mint K. Így a $G\circ P$ origó körüli *Taylor sora*

$$(G\circ P)(\mathbf{z}) = \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} \mathbf{z}^{\mathbf{q}}$$

egyenletesen konvergens, speciálisan a $\tau^{-1}(1, 1, \ldots, 1)$ tóruszon is. Tehát, tetszőleges $\mathbf{x}\in[0, 2\Pi]^k$ esetén

$$T^{-1}(x_1, \ldots, x_k) = (G\circ P)(e^{ix_1}, e^{ix_2}, \ldots, e^{ix_k}) = \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q},\mathbf{x})}.$$

Az $f_{\mathbf{q}}$ *Taylor együtthatókat* a már korábban kiszámított (2.8) képletből is megkaphatjuk. Mivel létezik olyan $\mathbf{z}\in H$, hogy $\tau(\mathbf{z})>(1, 1, \ldots, 1)$, ezért

$$\sum_{0\leq \mathbf{q}} |f_{\mathbf{q}}| < \infty$$

és így a

(2.10) $$\sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}^2 < \infty$$

feltétel is teljesül.

2.2. TÉTEL. Ha az (1.2) autoregressziós mező homogén, és

(2.11) $$K\cap T_0 = \emptyset,$$

akkor mozgóátlag mező.

Könnyű belátni, hogy (2.5)-ből következik (2.11). Az eddigi állításainkban mindig feltételeztük, hogy (1.2) homogén mező. Induljunk most ki az (1.2) autoregressziós mezőből, amelyről csak azt tudjuk, hogy együtthatói kielégítik a (2.11) feltételt. A (2.8) formula segítségével definiáljuk az $f_{\mathbf{q}}$, ($\mathbf{q}\in Z^k$) együtthatókat, és készítsük el az

$$y_{\mathbf{t}}^* = \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{q}}$$

mezőt. Az $y_{\mathbf{t}}^*$ minden $\mathbf{t}(\in Z^k)$-ra értelmezve van, mert (2.10) miatt a jobb oldalon álló sor négyzetes középben konvergál. Az $\{y_{\mathbf{t}}^*, \mathbf{t}\in Z^k\}$ mező kielégíti az (1.2) egyenletet ui.:

$$-\sum_{0<\mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}}^* + u_{\mathbf{t}} = \sum_{0<\mathbf{r}\leq \mathbf{R}} -a_{\mathbf{r}} \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{r}-\mathbf{q}} + u_{\mathbf{t}} = \sum_{0<\mathbf{r}\leq \mathbf{R}} -a_{\mathbf{r}} \sum_{0\leq \mathbf{p}} f_{\mathbf{p}-\mathbf{r}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}} + u_{\mathbf{t}} =$$

$$= \sum_{0\leq \mathbf{p}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}} \sum_{0<\mathbf{r}\leq \mathbf{R}} -a_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{p}-\mathbf{r}} + u_{\mathbf{t}} = \sum_{0<\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}} + u_{\mathbf{t}} = \sum_{0\leq \mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}} = y_{\mathbf{t}}^*.$$

Közben felhasználtuk, hogy $f_{\mathbf{q}}$-ra fennáll a (2.6) differencia egyenletrendszer és a (2.7) peremfeltétel. Az $\{y_{\mathbf{t}}^*, \mathbf{t}\in Z^k\}$ homogén mezőt alkot és

(2.9) $$C(\mathbf{t}-\mathbf{s}) = \sigma^2 \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}+(\mathbf{t}-\mathbf{s})} f_{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{t}, \mathbf{s}\in Z^k).$$

Összefoglalva a következő eredményt kapjuk:

2.3. TÉTEL. Ha $K\cap T_0=\emptyset$, akkor az (1.2)-nek létezik homogén mozgóátlag mező megoldása.

2.1. LEMMA. Legyen $N_{\mathbf{t}}$ az $\{\mathbf{s}\in Z^k | \mathbf{s} \not\geq \mathbf{t}\}$ halmaz, $\{u_{\mathbf{s}}, \mathbf{s}\in Z^k\}$ teljesen független valószínűségi változók serege, $K\cap T_0=\emptyset$. Ekkor $y_{\mathbf{t}}^*$ és $u_{\mathbf{s}}$ függetlenek, hacsak $\mathbf{s}\in N_{\mathbf{t}}$.

A lemma állítása az $y_{\mathbf{t}}^*$ mozgóátlag előállításából következik.

3. A kovarianciák, és a parciális sztochasztikus differencia egyenletrendszer egy megoldása

A továbbiakban olyan (1.2) autoregressziós homogén mezővel foglalkozunk, amelynek együtthatói kielégítik a (2.11) feltételt. Az (12.) egyenletet szorozzuk össze az

$$y_{\mathbf{t}-\mathbf{s}} = \sum_{0 \leqq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{s}-\mathbf{q}}$$

mozgóátlag előállítással, ekkor kapjuk, hogy

$$\sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{s}} = \sum_{0 \leqq \mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{s}-\mathbf{q}} u_{\mathbf{t}}.$$

Mindkét oldal várható értékét képezve, nyerjük az ún. *Youle—Walker parciális differencia egyenleteket:*

$$\sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} C(\mathbf{s}-\mathbf{r}) = \begin{cases} \sigma^2 f_{-\mathbf{s}}, & \text{ha} \quad -\mathbf{s} \geqq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{ha} \quad -\mathbf{s} \not\geqq \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.1}$$

A mező kovariancia függvényére a (2.9) előállítás mellett még érvényes a (3.1) egyenletrendszer. Tételezzük fel, hogy a $C(\mathbf{s})$ kovarianciák adottak a

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} \{\mathbf{s} \in \mathbf{Z}^k | -R_i \leqq s_i < 0;\ -R_j \leqq s_j,\ i \neq j\} \tag{3.2}$$

halmazon. Ezen peremfeltétel mellett meghatározzuk a (3.1) egyenletrendszer megoldását a $\{\mathbf{s} \geqq \mathbf{0}\}$ halmazon. Ha $\mathbf{s}=\mathbf{0}$, akkor (3.1)-ből

$$C(\mathbf{0}) = \sigma^2 - \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} C(-\mathbf{r}).$$

Ha $\mathbf{s} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ akkor (3.1) megoldása

$$C(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in S} C(\mathbf{t}) \sum_{-\mathbf{t} < \mathbf{p} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{s}-\mathbf{t}-\mathbf{p}} + f_{\mathbf{s}} \sigma^2. \tag{3.3}$$

Definíció szerint az $a_{\mathbf{r}}$ együtthatók legyenek nullák, ha $\mathbf{r} \notin [\mathbf{0}, \mathbf{R}]$. Ellenőrizzük, hogy (3.3) valóban kielégíti a (3.2) összefüggést.

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} C(\mathbf{s}-\mathbf{r}) &= \sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{t} \in S} C(\mathbf{t}) \sum_{-\mathbf{t} \leqq \mathbf{p} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{s}-\mathbf{r}-\mathbf{t}-\mathbf{p}} = \\ &= \sum_{\mathbf{t} \in S} C(\mathbf{t}) \sum_{-\mathbf{t} \leqq \mathbf{p} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} \sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{s}-\mathbf{t}-\mathbf{p}-\mathbf{r}} = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

közben felhasználtuk, hogy $f_{\mathbf{q}}$-ra fennáll (2.6).

A $C(\mathbf{s}_0)$, $(\mathbf{s}_0 \geqq \mathbf{0})$ kovariancia meghatározásához, amint ez a (3.3) képletből is kitűnik, nem az egész S-en, hanem csak az $S_{\mathbf{s}_0} = \{\mathbf{t} | \mathbf{t} \in S,\ \mathbf{t} \leqq \mathbf{s}_0\}$ halmazon kell ismerni a kovarianciákat.

Eddigi tapasztalatainkat felhasználva nézzük meg mit tudunk mondani az (1.2)-nél általánosabb

$$\sum_{0 \leqq \mathbf{r} \leqq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} = \sum_{0 \leqq \mathbf{p} \leqq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}} \quad (\mathbf{t} \in \mathbf{Z}^k,\ a_0 = 1) \tag{3.5}$$

sztochasztikus parciális differencia egyenletrendszer megoldásáról.

3.1. TÉTEL. Ha tetszőleges $\mathbf{x}\in[0, 2\Pi]^k$ esetén

$$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})} \neq 0,$$

akkor a (3.5) egyenletrendszernek a megoldása adott $\{y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t}\in S\}$ mellett, minden $\mathbf{t}\geq \mathbf{0}$-ra

$$y_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{s}\in S} y_{\mathbf{s}} \sum_{-\mathbf{s}\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{t}-\mathbf{s}-\mathbf{p}} + \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}\in Z^k} f_{\mathbf{t}-\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}.$$

Ha még (2.11) is teljesül, akkor

$$y_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{s}\in S} y_{\mathbf{s}} \sum_{-\mathbf{s}\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{t}-\mathbf{s}-\mathbf{p}} + \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} \sum_{0\leq \mathbf{q}} f_{\mathbf{t}-\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}$$

(az S halmazt (3.2) definiálja).

Bizonyítás. A (3.4) számolást megismételve kapjuk, hogy

$$y_{\mathbf{t}}^{(1)} = \sum_{\mathbf{s}\in S} y_{\mathbf{s}} \sum_{-\mathbf{s}\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{t}-\mathbf{s}-\mathbf{p}}$$

megoldása a

$$\sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}} = 0$$

homogén sztochasztikus parciális differencia egyenletrendszernek. Azt kell még belátnunk, hogy

$$y_{\mathbf{t}}^{(2)} = \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}\in Z^k} f_{\mathbf{t}-\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}$$

megoldása (3.5)-nek. Valóban

$$\sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}}^{(2)} = \sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}\in Z^k} f_{\mathbf{t}-\mathbf{q}-\mathbf{r}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} =$$

$$= \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}\in Z^k} u_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} f_{\mathbf{t}-\mathbf{q}-\mathbf{r}} = \sum_{0\leq \mathbf{p}\leq \mathbf{P}} b_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{t}-\mathbf{p}}.$$

4. Az együtthatók maximum likelihood becslése

Az (1.2) autoregressziós mező együtthatóinak becsléséhez tételezzük fel, hogy az $u_{\mathbf{t}}$ ($\mathbf{t}\in \mathbf{Z}^k$) korrelálatlan valószínűségi változók normális eloszlásúak $(0, \sigma^2)$ paraméterekkel, az $\{y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t}\in \mathbf{Z}^k\}$ homogén mező, és a $K\cap T_0=\emptyset$. Ekkor az $\{u_{\mathbf{t}}, \mathbf{0}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T}\}$ valószínűségi változók együttes feltételes sűrűségfüggvénye az $\{y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t}\in S_{\mathbf{T}}\}$ változókra nézve

$$f(u_{\mathbf{t}}, \mathbf{0}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T}) = \prod_{0\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T}} f(u_{\mathbf{t}} | y_{\mathbf{s}}, \mathbf{s}\in S_{\mathbf{t}}) = \prod_{0\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u_{\mathbf{t}}^2}{2\sigma^2}}$$

ugyanis a 2.1. lemma szerint $u_{\mathbf{t}}$, $(\mathbf{0}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T})$ független $y_{\mathbf{s}}$ $(\mathbf{s}\in S_{\mathbf{t}})$-től. Ha adottnak tételezzük fel az $\{y_{\mathbf{t}}; \mathbf{t}\in S_{\mathbf{T}}\}$ értékeket, és az $u_{\mathbf{t}}$, $(\mathbf{0}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{T})$ valószínűségi változók helyett az

$$u_{\mathbf{t}} = \sum_{0\leq \mathbf{r}\leq \mathbf{R}} a_{\mathbf{r}} y_{\mathbf{t}-\mathbf{r}}$$

transzformációval áttérünk az y_t, ($t \in [0, T]$) valószínűségi változókra, akkor az $\{y_t,\ 0 \leqq t \leqq T\}$ együttes sűrűségfüggvénye

$$f(y_t,\ 0 \leqq t \leqq T | y_s;\ s \in S_T) = \prod_{0 \leqq t \leqq T} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{0 \leqq r \leqq R} a_r y_{t-r}\Big)^2\right\}.$$

Az a_r együtthatók maximum likelihood becsléséhez tehát meg kell keresnünk a

$$\sum_{0 \leqq t \leqq T}\Big(\sum_{0 \leqq r \leqq R} a_r y_{t-r}\Big)^2$$

kifejezés minimumát.

Vezessük be a következő jelölést:

$$A_q^r = \sum_{0 \leqq t \leqq T} y_{t-r} y_{t-q}, \quad (0 \leqq r, q \leqq R).$$

Ekkor az a_r-re vonatkozó egyenletrendszer:

$$\sum_{0 < r \leqq R} a_r A_q^r = -A_q^0, \quad (0 < q \leqq R). \tag{4.1}$$

A (4.1) lineáris egyenletrendszer $\prod_{j=1}^{k} (R_j+1)-1$ egyenletből áll és ugyanannyi a_r ismeretlent tartalmaz. A (4.1) $\hat{a}_r$ megoldásai jelentik az a együtthatók maximum likelihood becslését. A σ^2 becslésére a következő statisztikát használhatjuk

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(T_j+1)} \sum_{0 \leqq t \leqq T} \Big(y_t + \sum_{0 \leqq r \leqq R} \hat{a}_r y_{t-r}\Big)^2.$$

Mivel szerencsére $\hat{a}_r$-ben nem szerepel $\hat{\sigma}^2$.

5. A három pontra támaszkodó két paraméteres autoregressziós mező

Az (1.2) autoregressziós mező $k=2$ és $\mathbf{R}=(1, 1)$ esetben a következő egyszerű alakot ölti (a_{ij} helyett $-a_{ij}$-t írva):

$$y_{k,l} = a_{01} y_{k,l-1} + a_{10} y_{k-1,l} + a_{11} y_{k-1,l-1} + u_{k,l}. \tag{5.1}$$

Ez a sztochasztikus parciális differencia egyenletrendszer azt fejezi ki, hogy a mező értékét egy négyzet jobb felső csúcsában meghatározza a másik három csúcspontban felvett értéke, plusz még egy független hiba.

Mindenekelőtt nézzük meg, hogy a mozgóátlag előállítás (2.11) feltétele mit jelent:

5.1. Feltétel:

a) ha $-a_{01}a_{10} = a_{11}$, akkor $|a_{10}| < 1$ és $|a_{01}| < 1$

b) ha $-a_{01}a_{10} \neq a_{11}$, akkor írjuk át az $1-(a_{01}w + a_{10}z + a_{11}wz) = 0$ egyenletet a $z = f(w) = \dfrac{1-a_{01}w}{a_{10}+a_{11}w}$, ($w \in C^1$) alakba. A $z = f(w)$ komplex lineáris tört függvényre megköveteljük, hogy:

ha $|w|<1$, akkor $|f(w)|\geqq 1$ és
ha $|w|=1$, akkor $|f(w)|\neq 1$.

A mozgóátlag mező együtthatóit is egyszerűbben tudjuk most számítani. A (2.8) képlet szerint

$$f_{(q_1,q_2)} = \sum_{\substack{p_{m,n}\in Z \\ p_{01}+p_{11}=q_2 \\ p_{10}+p_{11}=q_1}} \frac{(p_{01}+p_{10}+p_{11})!}{p_{01}!\,p_{10}!\,p_{11}!} a_{01}^{p_{01}} a_{10}^{p_{10}} a_{11}^{p_{11}} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\min(q_1,q_2)} \frac{(q_1+q_2-p)!}{(q_1-p)!\,(q_2-p)!\,p!} a_{01}^{q_2-p} a_{10}^{q_1-p} a_{11}^{p}.$$

Az 5.1. feltétel teljesülése esetén tehát $y_{k,l}$ mozgóátlag előállítása:

$$y_{k,l} = \sum_{(i,j)\geqq 0} \sum_{p=0}^{\min(i,j)} \frac{(i+j-p)!}{(i-p)!\,(j-p)!\,p!} a_{01}^{j-p} a_{10}^{i-p} a_{11}^{p} u_{k-i,l-j}.$$

A kovarianciák kiszámítására (3.1) ad egy rekurzív eljárást, ha $(k,l)\geqq \mathbf{0}$:

A kiindulásul szolgáló paraméterek (3.2) halmaza:

$$S = \{(-1,l),\ l\geqq -1 \text{ és } (k,-1),\ k>-1\}.$$

Ha például a $C(2,3)$ értékét akarjuk kiszámítani, akkor gyorsabban eredményre vezet a (3.3) képlet alkalmazása, mert eszerint lehetséges a peremértékekből közvetlenül számolni:

$$C(2,3) = \sum_{k=0}^{2} C(k,-1)(a_{01}f_{2-k,3}+a_{11}f_{2-k-1,3})+$$

$$+\sum_{l=0}^{3} C(-1,l)(a_{10}f_{2,3-l}+a_{11}f_{2,3-l-1})+C(-1,-1)a_{11}f_{23}+$$

$$+\sigma^2 f_{2,3} = a_{01}^4 C(2,-1)+(4a_{01}^3 a_{11}+4a_{10}a_{01}^4)C(1,-1)+$$

$$+(6a_{01}^2 a_{11}+16a_{01}^3 a_{10}a_{11}+10a_{01}^4 a_{10}^2)C(0,-1)+$$

$$+(3a_{01}a_{11}^2+12a_{10}a_{01}^2 a_{11}+10a_{01}^3 a_{10}^2)\left(a_{11}C(-1,-1)+\sigma^2\right)+$$

$$+(a_{11}^3+9a_{10}a_{01}a_{11}^2+18a_{10}^2 a_{01}^2 a_{11}+10a_{10}^3 a_{01}^3)C(-1,0)+$$

$$+(3a_{10}a_{11}^2+9a_{10}^2 a_{01}a_{11}+6a_{10}^3 a_{01}^2)C(-1,1)+$$

$$+(3a_{10}^2 a_{11}+3a_{10}^3 a_{01})C(-1,2)+a_{10}^3 C(-1,3).$$

Kétségkívül a legfontosabb probléma az a_{ij} együtthatók becslése. A 4. fejezet feltevései mellett az a_{01}, a_{10}, a_{11} paraméterek maximum likelihood becslését a következő lineáris egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$a_{01}A_{01}^{01}+a_{10}A_{01}^{10}+a_{11}A_{01}^{11} = -A_{01}^{00},$$

$$a_{01}A_{10}^{01}+a_{10}A_{10}^{10}+a_{11}A_{10}^{11} = -A_{10}^{00},$$

$$a_{01}A_{11}^{01}+a_{10}A_{11}^{10}+a_{11}A_{11}^{11} = -A_{11}^{00},$$

ahol

$$A_{k,l}^{i,j} = \sum_{t_1=0}^{T_1}\sum_{t_2=0}^{T_2} y_{t_1-i,t_2-j}\,y_{t_1-k,t_2-l}.$$

IRODALOM

[1] GRAUERT, H. and FRITZSCHE., *Several Complex Variables* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976).
[2] Андерсон, Т., *Статистический анализ временных рядов* (Издательство МИР, Москва, 1976).
[3] Ахиезер, Н. И. и Глазман, И. М., *Теория линейных опраторов* (Москва, Ленинград, 1950).
[4] Розанов, Ю. А., *Стационарные случайные процессы* (ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1963).
[5] Рудин, У., *Функциональный анализ* (Издательство МИР, Москва, 1975).
[6] Хеннан, Э., *Многомерные временные ряды* (Издательство МИР, Москва, 1974).

(Beérkezett: 1978. február 2.)

TERDIK GYÖRGY
KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, PF. 12.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО И ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ЕГО КОЭФФИЦИЕНТОВ

Г. Тэрдик

В этой работе мы изучили поле авторегресии с параметрами в много мерном евклидом пространсве. Получили условия при которых поле авторегрессии является полем скользящего среднио. Структура ковариации в связи с частным разностным уравнением и оценка максимального правдоподобия коеффициентов поля авторегрессии были изучены. В конце как пример рассмотрели простейщее поле авторегрессии.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 389—398*

KÖZELÍTŐ ALGORITMUS A HÁROM GÉP PROBLÉMÁRA

FIALA TIBOR

Budapest

Geometriai ötleten alapuló közelítő algoritmust ismertetünk a három gép problémára, mely az NP-teljes problémák közé tartozik. Megmutatjuk, hogy a javasolt algoritmus hibája nagy számú munkadarab esetén is (egy munkadarab maximális megmunkálási idejétől függő) pozitív konstans alatt marad.

1. Bevezetés

JOHNSON 1954-ben egyszerű algoritmust közölt a két gép probléma optimális megoldására [7]. Azóta számos kísérlet történt olyan algoritmus konstruálására, amely *nagyszámú munkadarab esetén* is *belátható időn belül* biztosítja a három gép probléma optimális megoldását, ezek a próbálkozások azonban mind a mai napig eredménytelenek maradtak. A három gép esete azért is különösen érdekes, mert ennél az optimum megkeresésekor elegendő egy permutáció keresésére szorítkozni. (I. 1. Áll.)

A legfőbb nehézség abban áll, hogy az optimális sorrend megkonstruálására alkalmas algoritmusok műveletigénye az alkatrészek számának növelésekor olyan gyors ütemben emelkedik, hogy ezt a műveletigényt még nagy teljesítményű számítógépekkel sem lehet kielégíteni. Ma már tudjuk, hogy a probléma NP-teljes [4], tehát nem várható, hogy *polinomiális algoritmussal* a *pontos optimumot* meg lehessen keresni.

Természetes módon merült fel az igény olyan heurisztikus, illetve közelítő eljárások iránt, melyek *nagyszámú alkatrész esetén* is viszonylag *gyorsan* elvezetnek egy olyan megoldáshoz, amelyik *nem sokkal rosszabb* az optimálisnál. Ebben az irányban számos jelentős eredmény született; l. például ASHOUR [1], CAMPBELL [2], FEJES [3], GIGLIO és WAGNER [5], GUPTA [6], NICHOLSON [8] és PALMER [9] munkáit. Az említett dolgozatokban számos heurisztikus módszer kerül ismertetésre, és a szerzők tekintélyes kísérletekkel bizonyítják módszerük hatékonyságát. Annak ellenére, hogy az említett számítógépes kísérletek rendkívül jó eredményeket adtak, mégsem mondhatjuk, hogy a probléma megnyugtató módon meg van oldva.

Az a helyzet ugyanis, hogy egy heurisztikus eljárás alkalmazása leginkább akkor indokolt, amikor a *pontos optimumot semmilyen gyakorlatilag kivitelezhető módszerrel nem tudjuk meghatározni* (az alkatrészek nagy száma miatt). Ilyen esetben viszont a közelítő algoritmussal kapott eredményt nem tudjuk összevetni az optimummal, tehát számítógépes kísérlet esetén nincs biztosítékunk arra, hogy egyik vagy másik heurisztikus algoritmus *nagyszámú munkadarab esetén is minden esetben* kis hibát követ el. Megemlítjük például, hogy az egyik legismertebb és legegyszerűbb heurisztikus módszer, a *Campbell, Dudek—Smith-féle algoritmus* alkalmazásakor előfordulhat, hogy az eredményül kapott ütemezési idő az elérhető minimumnak majdnem duplája (l. 5. rész).

Kívánatos tehát, hogy a már meglevő hatékony heurisztikus eljárások hibájára nézve, minél pontosabb becsléseket sikerüljön végezni, indokoltnak tűnik továbbá olyan módszerek kidolgozása, melyeknek hibájára nézve pontos felső korlátot tudunk felállítani.

Dolgozatunkban egy olyan közelítő algoritmust ismertetünk, melynek végrehajtásakor a szükséges lépések száma n első hatványával arányos (n az alkatrészek száma). Az algoritmus hibájára nézve egzakt felső becslést állítottunk fel, amely azt mutatja, hogy módszerünk elsősorban *nagy n értékek esetén* ad minden esteben jó közelítést.

2. A probléma megfogalmazása, előzetes megjegyzések

Adott n munkadarab (alkatrész) és három gép. A munkadarabok mindegyikén három munkafolyamatot kell végrehajtani; egyet az I., egyet a II. és egyet a III. gépen. Az egyes munkafolyamatok elvégzéséhez szükséges időértékek adottak. Mindegyik munkadarabot először az I. gépen kell megmunkálni, csak utána kerülhet a II., és végül a III. gépre. Egy gép egy időben csak egy munkadarab megmunkálására alkalmas. Egy adott munkadarab megmunkálását megszakítani nem szabad, ha az már megkeződött. Feltesszük végül, hogy egy alkatrész egyik gépről a másik gépre történő áthelyezéséhez szükséges idő elhanyagolható, és az egész folyamat kezdetén az összes munkadarab rendelkezésre áll.

Feladat: Úgy kell megszabni az egyes munkálatok sorrendjét, hogy az egész folyamat végrehajtásához szükséges idő minimális legyen.

Ismeretes (l. pl. [10]), hogy a probléma az $1, 2, \ldots, n$ természetes számok egy permutációjának megkeresésére vezethető vissza. Igaz ugyanis a következő:

2.1. ÁLLÍTÁS [10].

Van olyan optimális ütemezés, melynél mindhárom gépre azonos sorrendben kerülnek a munkadarabok, tehát ha az i-edik munkadarab előbb kerül az I. gépre, mint a j-edik, akkor a II. és III. gépen is előbb kerül megmunkálásra, mint a j-edik. (Ez az állítás már nem érvényes abban az esetben, ha a gépek száma 3-nál nagyobb).

Ezért feladatunk abból áll, hogy az n munkadarab számára indulósorrendet konstruáljunk (mely a megmunkálás közben változatlan marad).

Jelölések: Az n munkadarabot egyszerűen az $1, 2, \ldots, n$ természetes számokkal jelöljük. Az i-vel jelölt munkadarab I., II., illetve III. gépen történő megmunkálásához szükséges idő jelölésére az a_i, b_i, c_i $(1 \leqq i \leqq n)$ számokat használjuk. Ez a $3n$ szám természetesen nemnegatív, együttes maximumukat K-val jelöljük.

A munkadarabok gépre kerülésének sorrendjét egy $\Pi(i)$ permutációval adjuk meg, ahol Π az 1-től n-ig terjedő természetes számok halmazának önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése. $\Pi(i)$ értéke annak a munkadarabnak a számát adja meg, amelyik sorrendben i-edikként kerül megmunkálásra. Használni fogjuk még a következő jelöléseket:

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

továbbá

$$M = \max(A, B, C).$$

T-vel jelöljük, és átfutási időnek nevezzük a legelső munkafolyamat megkezdésétől a legutolsó befejezéséig szükséges időt. Ez nyilván függ a Π permutációtól, feladatunk tehát olyan Π permutáció megadása, melynél a T_Π átfutási idő minimális. Ezt a minimális időt $T_{\min}$-nel jelöljük.

Ezek után megemlítünk néhány egyszerű állítást, melyek algoritmusunk hibájának megbecsléséhez nyújtanak támpontot.

2.2. Állítás.

Nyilvánvalóan akármelyik permutáció esetén

$$T_\Pi \geqq M \tag{2.1}$$

hiszen egy gép egy időben csak egy munkadarab megmunkálására alkalmas.

2.3. Állítás. Ismert (l. [10]), hogy adott Π permutáció esetén az átfutási időre nézve a következő összefüggés érvényes

$$T_\Pi = \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} \left(\sum_{t=1}^{i} a_{\Pi(t)} + \sum_{t=i}^{j} b_{\Pi(t)} + \sum_{t=j}^{n} c_{\Pi(t)} \right). \tag{2.2}$$

2.4. Állítás. Akármilyen Π permutáció esetén

$$T_\Pi \leqq 3M.$$

Ez azért igaz, mert a 2.3. állításban szereplő mindhárom összegnek felső korlátja az M érték. A 2.2. és 2.4. állításokból látható, hogy minden átfutási idő M és $3M$ között van, tehát a lehető legrosszabb sorrend esetén is legfeljebb háromszorosa lehet az átfutási idő a szükségesnek. Könnyű belátni, hogy ez a felső becslés tetszőleges sorrendre nézve tovább nem javítható, tehát *nagy n értéke esetén is* előfordulhat, hogy „ügyetlen" sorrend esetén az átfutási idő a szükségesnek majdnem háromszorosa.

Természetes módon annál értékesebb egy közelítő algoritmus, minél közelebb van az algoritmus által biztosított átfutási idő a minimális átfutási időhöz. Az általunk javasolt algoritmusra nézve meg fogjuk mutatni, hogy ennek a két időnek a hányadosa nem haladhatja meg az $1 + \frac{5K}{M}$ értéket, ami 1-hez tart, ha $n \to \infty$ esetén $\frac{K}{M} \to 0$.

3. A javasolt algoritmus

Az algoritmus lépéseinek precíz leírása céljából bevezetjük a *sorrendcsere* fogalmát.

3.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy a Π permutáció i-től j-edikig terjedő szakaszán sorrendcserét hajtottunk végre, ha olyan új σ permutációt konstruáltunk, melyre

$$1 \leqq t \leqq i-1 \quad \text{vagy} \quad j+1 \leqq t \leqq n \quad \text{esetén} \quad \sigma(t) = \Pi(t),$$

$$i \leqq t \leqq j \text{ esetén pedig } \sigma(t) = \Pi(i+j-t) \text{ teljesül.}$$

Ez azt jelenti, hogy 1-től $i-1$-ig a sorrend változatlan, az i-től j-ig terjedő számok sorrendjét felcseréljük, $(j+1)$-től n-ig a sorrenden nem változtatunk. Ezek után rátérünk az algoritmus ismertetésére:

Az algoritmus első része:

1. Úgy módosítjuk az a_i, b_i, c_i értékeket, hogy az új a_i', b_i', c_i' értékekre teljesüljenek az

$$a_i \leqq a_i' \leqq K, \quad b_i \leqq b_i' \leqq K, \quad c_i \leqq c_i' \leqq K, \tag{3.1}$$

továbbá a

$$\sum_{i+1}^{n} a_i' = \sum_{i=1}^{n} b_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i' = M \tag{3.2}$$

összefüggések.

Erre a lépésre nincs szükség, ha az A, B és C számok eleve egyenlőek voltak.

2. Bevezetjük (kiszámítjuk) az

$$x_i = a_i' - b_i', \quad \text{illetve} \quad y_i = c_i' - b_i' \quad \text{értékeket.} \tag{3.3}$$

Az algoritmus második részének célja olyan Π permutáció konstruálása, melynél

$$\left| \sum_{t=1}^{j} y_{\Pi(t)} \right| \leqq K, \quad \text{minden} \quad 1 \leqq j \leqq n\text{-re teljesül.} \tag{3.4}$$

Ezt a Π permutációt rekurzív módon határozhatjuk meg a következőképpen:

3. Sorra vesszük az n munkadarabot, és külön csoportba gyűjtjük azokat, melyekre $y_i > 0$, külön pedig azokat, melyekre $y_i \leqq 0$.

4a. $\Pi(1)$ értékének olyan számot választunk, melyre $y_{\Pi(1)} > 0$. Ha ilyen nincsen, akkor mindegyik y_i 0-val egyenlő, hiszen (3.3) és (3.2) miatt az y_i számok öszszege 0. Ebben az esetben az algoritmus második részének a célját bármilyen sorrenddel elértük, maradhat tehát az indexezés szerinti sorrend, s ilyenkor az algoritmus második részére nincs szükség.

4b. Tegyük fel, hogy a Π permutációra nézve $\Pi(1), \Pi(2), \ldots, \Pi(i)$ értékét már meghatároztuk. Ekkor $\Pi(i+1)$-nek egy olyan még be nem sorolt munkadarabot választunk, melyre

$$\sum_{t=1}^{i} y_{\Pi(t)} > 0 \quad \text{esetén} \quad y_{\Pi(i+1)} < 0, \tag{3.5}$$

$$\sum_{t=1}^{i} y_{\Pi(t)} \leqq 0 \quad \text{esetén pedig} \quad y_{\Pi(i+1)} \geqq 0. \tag{3.6}$$

A $\Pi(i+1)$-re tett kikötésnek azért tudunk mindkét esetben eleget tenni, mert az y_i értékek összege 0. Miután ezt minden i-re megtettük, az algoritmus második része befejeződött.

Az algoritmus harmadik részének célja olyan Π permutáció konstruálása, melynél minden $1 \leqq i \leqq n$ és $1 \leqq j \leqq n$ esetén teljesülnek a

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\Pi(t)} \leqq 0 \tag{3.7}$$

és

$$\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)} \leqq 3K \tag{3.8}$$

egyenlőtlenségek. Ez a következőképpen érhető el:

5. A jelölés egyszerűsítése céljából indexcserét hajtunk végre. Az a munkadarab kapja az i indexet, amelyik az algoritmus második részének befejezésekor a $\Pi(i)$ indexet viselte. Ezzel elérjük azt, hogy a második részben konstruált új sorrendet $1, 2, \dots, n$-nel jelölhessük.

6. Ha az új indexezés szerint

$$\sum_{t=1}^{i} x_t \leqq 0 \tag{3.9}$$

minden i-re teljesül, akkor a meglevő sorrenden már nem változtatunk, az algoritmust befejeztük.

Egyébként legyen i_1 a legkisebb olyan index, melyre (3.9) nem teljesül, továbbá az i_1-nél nagyobb indexek közül j_1 legyen az első, melyre (3.9) ismét teljesül. Továbbmenve a j_2-nél nagyobb indexek közül legyen i_2 a legkisebb, melyre (3.9) nem teljesül, utána j_2 az első olyan, melyre (3.9) ismét teljesül, és így tovább. Az eljárást folytatva az $1, 2, 3, \dots, n$ permutáción belül diszjunkt $[i_1; j_1], [i_2; j_2], \dots, [i_k; j_k]$ szakaszokat jelölhetünk ki, úgy, hogy csak ezen szakaszok valamelyikébe tartozó s értékekre nem teljesül a

$$\sum_{t=1}^{s} x_t \leqq 0 \tag{3.10}$$

egyenlőtlenség. Pontosan fogalmazva azt mondhatjuk, hogy ha $i_p \leqq s \leqq j_p - 1$ valamilyen $1 \leqq p \leqq k$-ra, akkor (3.10) nem igaz, egyébként pedig igaz. (Azért tudunk találni minden i_p-hez egy j_p-t, mert (3.2) és (3.3) miatt az x_i-k összege is 0.) Hajtsunk most végre sorrendcserét (l. 3.1. Def.) az $[i_1; j_1], [i_2; j_2], \dots, [i_k; j_k]$ szakaszokon! (l. 3.1. Def.) Jelöljük Π-vel a kapott permutációt! Ez lesz a munkadarabok végleges sorrendje, s ezzel az algoritmus ismertetését befejeztük.

A javasolt algoritmus szemléletes tartalma. Ennek ismertetése érdekében átalakítjuk az átfutási idő pontos értékére vonatkozó (2.2) összefüggést. A (3.1) egyenlőtlenségekből következik, hogy az a'_i, b'_i és c'_i számok által meghatározott három gép probléma átfutási ideje változatlan sorrend esetén legalább akkora, mint az eredetié, tehát

$$(3.11)\quad \begin{aligned} T_\Pi \leqq T'_\Pi &= \max_{1\leqq i\leqq j\leqq n}\left(\sum_{t=1}^{i} a'_{\Pi(t)}+\sum_{t=i}^{j} b'_{\Pi(t)}+\sum_{t=j}^{n} c'_{\Pi(t)}\right) = \\ &= M+\max_{1\leqq i\leqq j\leqq n}\left(\sum_{t=1}^{i} x_{\Pi(t)}+\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)}+b'_{\Pi(i)}+b'_{\Pi(j)}\right). \end{aligned}$$

Ebből, és a (2.1), (2.2), valamint (3.1) formulákból T_Π-re nézve az

$$(3.12)\quad M\leqq T_\Pi\leqq T'_\Pi\leqq M+2K+\max_{1\leqq i\leqq n}\left(\sum_{t=1}^{i} x_{\Pi(t)}\right)+\max_{1\leqq j\leqq n}\left(\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)}\right)$$

becslés adódik.

A becslés jobb oldalán álló

$$d = \max_{1\leqq i\leqq n}\left(\sum_{t=1}^{i} x_{\Pi(t)}\right)$$

és

$$h = \max_{1\leqq j\leqq n}\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)}$$

kifejezéseknek a következő szemléletes jelentés adható.

Tekintsük az $(x_i; y_i)$ síkbeli vektorokat! (3.2) és (3.3) miatt $\sum_{i=1}^{n} x_i=0$ és $\sum_{i=1}^{n} y_i=0$, tehát ezeknek a vektoroknak az összege a 0-vektor.

Ez azt jelenti, hogy ha az origóból kiindulva a vektorok összeadási szabályának megfelelően vektorpoligont képezünk ezekből a vektorokból, akkor olyan töröttvonalhoz jutunk, amelyik az origóba érkezik vissza. d értéke azt mutatja, hogy ez a töröttvonal az $x>0$ félsíkban mennyire távolodik el az Y tengelytől, h értéke pedig azt mutatja, hogy az $y<0$ félsíkban mennyire távolodik el ez a töröttvonal az X tengelytől. Ezért célunk olyan sorrend megállapítása, hogy az adott sorrend esetén ez a töröttvonal ne kerüljön túlságosan az X tengely alá, illetve ne távolodjon el jobbra az Y tengelytől.

Az algoritmus II. részében olyan sorrendet konstruáltunk, hogy összeadás közben az egész töröttvonal a $-K\leqq y\leqq K$ egyenlőtlenséggel jellemzett vízszintes sávban haladjon. A harmadik részben végrehajtott sorrendcseréknek pedig az a célja, hogy a vízszintes sávban haladó töröttvonalnak az $x\geqq 0$ félsíkban haladó szakaszait áttükrözzük az $x\leqq 0$ félsíkba. Egy ilyen tükrözésnek a középpontja nem más, mint a szakaszhoz tartozó legelső vektor kezdőpontját a legutolsó vektor végpontjával összekötő szakasz felezőpontja. A vektorok összeadására vonatkozó paralelogrammaszabály közvetlen következménye, hogy az ilyen tükrözés éppen az érintett vektorok sorrendcseréjének felel meg. Az eredményképpen kapott töröttvonal teljes egészében az $x\leqq 0$ és $-3K\leqq y\leqq 3K$ egyenlőtlenségekkel jellemzett tartományon belül halad.

4. Az algoritmus pontosságának becslése

Erre vonatkozólag az alábbi tételt mondhatjuk ki.

4.1. TÉTEL. Az előbb ismertetett algoritmussal konstruált sorrendhez tartozó átfutási időre nézve érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$M \leqq T_{min} \leqq T_{\Pi} \leqq M+5K.$$

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy csak a legutolsó egyenlőtlenséget kell igazolni. Ez pedig visszavezethető a (3.7) és (3.8) egyenlőtlenségekre. (l. (3.12)) Ezek szerint elegendő azt belátnunk, hogy az algoritmus második és harmadik része is eléri célját.

A 2. rész céljaként kitűzött (3.4) egyenlőtlenség azért fog teljesülni minden j-re, mert a (3.5) és (3.6) képzési szabálynak megfelelően konstrukció közben a már meglevő összeghez mindig olyan tagot adtunk hozzá, melynek előjele a meglevő összeg előjelével ellentétes, továbbá mindegyik tagnak az abszolút értéke legfeljebb K (l. (3.1) és (3.3)). Az algoritmus harmadik részével kapcsolatban először bebizonyítjuk a következő segédtételt, mely az algoritmus leglényegesebb részét támasztja alá.

4.2. SEGÉDTÉTEL. Legyen i a legkisebb olyan index, melyre

$$\sum_{t=1}^{i} x_t > 0 \tag{4.1}$$

teljesül, legyen továbbá az i-nél nagyobb indexek közül j a legkisebb, melyre

$$\sum_{t=1}^{j} x_t \leqq 0$$

(ilyen j létezik, pl. $j=n$).

Ekkor az $1, 2, 3, \ldots, n$ identikus permutáció i-től j-ig terjedő szakaszának sorrendcseréjével kapott Π permutáció esetén

$$\sum_{t=1}^{s} x_{\Pi(t)} \leqq 0 \tag{4.2}$$

minden $s \leqq j$-re érvényes.

A segédtétel állítása $s<i$ esetén i minimalitása miatt teljesül. Tegyük fel, most indirekt módon, hogy $i \leqq s \leqq j$, és (4.2) mégsem teljesül. Ekkor

$$\sum_{t=1}^{j} x_{\Pi(t)} = \sum_{t=1}^{j} x_t \leqq 0$$

miatt $s<j$, tehát

$$\sum_{t=1}^{s} x_{\Pi(t)} + \sum_{t=s+1}^{j} x_{\Pi(t)} = \sum_{t=1}^{j} x_{\Pi(t)} \leqq 0.$$

Mivel erre az s-re (4.2) nem teljesül, szükségképpen

$$\sum_{t=s+1}^{j} x_{\Pi(t)} < 0.$$

Viszont

$$\sum_{t=s+1}^{j} x_{\Pi(t)} = \sum_{t=i}^{i+j-s-1} x_t < 0,$$

s így i minimalitása, valamint (4.1) miatt

$$\sum_{t=1}^{i+j-s-1} x_t = \sum_{t=1}^{i-1} x_t + \sum_{t=i}^{i+j-s-1} x_t < 0$$

lenne, ami $s+1>i$ miatt ellentmond j minimalitásának. Ezzel a segédtételt indirekt módon bebizonyítottuk.

A segédtétel ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy az algoritmus harmadik részében ismertetett sorrendcserékkel (3.7) érvényességét rendre kiterjesztjük i_1-től j_1-ig, i_2-től j_2-ig és így tovább egészen n-ig, tehát az új sorrend esetén (3.7) teljesül.

Ami a (3.8) egyenlőtlenséget illeti az is triviálisan teljesül, ha j nincs benne egyik $[i_1; j_1] \dots [i_k; j_k]$ szakaszban sem. Ilyenkor ugyanis

$$\left|\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)}\right| = \left|\sum_{t=j}^{n} y_t\right| = \left|-\sum_{t=1}^{j-1} y_t\right| \leqq K,$$

mint azt az algoritmus második részében (illetve az indexcsere után) megállapíthattuk. Ha viszont $i_m \leqq j \leqq j_m$, akkor (3.4) miatt

$$\sum_{t=j}^{n} y_{\Pi(t)} = \sum_{t=j}^{j_m} y_{\Pi(t)} + \sum_{t=j_m+1}^{n} y_{\Pi(t)} = \sum_{t=i_m}^{i_m+j_m-j} y_t + \sum_{t=j_m+1}^{n} y_t \leqq$$

$$\leqq \sum_{t=1}^{i_m+j_m-j} y_t - \sum_{t=1}^{i_m-1} y_t - \sum_{t=1}^{j_m} y_t \leqq K+K+K = 3K$$

s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

5. Az eredmény értékelése

A javasolt algoritmus által nyújtott T_Π átfutási idő, és a legjobb sorrend esetén érvényes $T_{\min}$ átfutási idő hányadosára a 4.1. tétel alapján a következő becslést állíthatjuk fel:

$$\frac{T_\Pi}{T_{min}} \leqq 1 + \frac{5K}{M}.$$

A bevezetésben említettük, hogy a lehető legrosszabb sorrend esetén is érvényes

$$\frac{T_\Pi}{T_{min}} \leqq 3 \text{ becslés.}$$

A kettőt összevetve megállapíthatjuk, hogy algoritmusunk elsősorban akkor nyújt jó közelítést, ha az alkatrészek száma elegendően nagy. Az, hogy milyen nagy n értékekről van szó, erősen függ a maximális megmunkálási idő, és az átlagos megmunkálási idő hányadosától. Természetes feltevés, hogy az M mennyiség n-nel arányos, $M \sim cn$, ahol c valamilyen értelemben átlagos megmunkálási időként fogható fel. Ha a K/c hányados nem túl nagy (tehát nincsenek nagyon kicsi, vagy nagyon nagy megmunkálási idők), akkor az $1+5K/M$ érték közel van 1-hez. *Rögzített K és c esetén* $1+5K/M$ határértéke 1, tehát nagyszámú munkadarab esetén az algoritmus által nyújtott átfutási idő *aszimptotikusan* megegyezik az optimálissal.

Összehasonlításként megemlítjük, hogy a közismert PALMER [9], illetve CAMPBELL, DUDEK és SMITH-féle [2] közelítő algoritmusok alkalmazásakor rögzített K és c esetén akármilyen nagy n értéknél is előfordulhat, hogy az eredményül kapott átfutási idő a minimálisnak majdnem kétszerese. Ezt mutatja a következő:

Példa: Legyen adott $n/2$ darab A-típusú alkatrész, melyek mindegyikére $a_i=\varepsilon$, $b_i=1$ és $c_i=2\varepsilon$.

Legyen továbbá adva $n/2$ darab B-típusú alkatrész, melyek mindegyikére

$$a_i = 1+\varepsilon, \quad b_i = 2\varepsilon \quad \text{és} \quad c_i = 1.$$

Ekkor $M=A=B=C=n/2+n\cdot\varepsilon$.

Az A típusú alkatrészekre nézve $x_i=\varepsilon-1$ és $y_i=2\varepsilon-1$. A B típusú alkatrészekre nézve pedig $x_i=1-\varepsilon$ és $y_i=1-2\varepsilon$.

Az általunk javasolt algoritmus első részére nincs szükség. A második részben olyan sorrend alakul ki, hogy egy B-típusú alkatrészt egy A típusú követ, utána megint felváltva következik egy B típusú és egy A típusú. A harmadik részben sorrendcserét hajtunk végre az első kettő, a harmadik és negyedik, és így tovább a szomszédos párok között, s így eredményül olyan sorrendet kapunk, mely B típusúval kezdődik, és utána felváltva következik egy A, illetve B típusú munkadarab.

A kapott átfutási idő értéke a 4.1. tétel szerint $n/2+n\varepsilon$ és $5+n/2+(n+5)\varepsilon$ között van.

PALMER módszerének 3 gépre alkalmazott változata abból áll, hogy az alkatrészeket a c_i-a_i értékek csökkenő sorrendjébe rendezi. Ezek szerint először az összes A típusú alkatrész kerül megmunkálásra (ehhez kell legalább $n/2$ idő a II. gép miatt) és utána kerülnek sorra a B típusúak ($n/2$-nél nagyobb műveleti idővel). Így az átfutási idő értéke n-et meghaladja, ami kis ε esetén a szükségesnek majdnem kétszerese.

CAMPBELL, DUDEK és SMITH algoritmusának három gépes változata abból áll, hogy előre viszi az $a_i<c_i$ egyenlőtlenséggel jellemzett alkatrészeket, és ezeket a_i, illetve a_i+b_i szerint növekvő sorrendbe rendezi. Utána következnek az $a_i>c_i$ egyenlőtlenséggel jellemzett munkadarabok c_i vagy b_i+c_i szerint csökkenő sorrendben (l. [9] és [2]).

A mi esetünkben ez ugyanahhoz a sorrendhez vezet, mint PALMER módszere, tehát ennek az algoritmusnak az alkalmazásával sem lehet a $T/T_{\min}$ hányadost 2-nél kisebb konstans alatt tartani.

Megemlítjük még, hogy az általunk javasolt algoritmus alkalmazásakor a sorrendcsere minden munkadarabot legfeljebb egyszer érint, tehát az algoritmus lépéseinek száma n első hatványával arányos.

IRODALOM

[1] ASHOUR, S., "An experimental investigation and comparative evaluation of flow-shop scheduling techniques" *Operations Research* **18** (1970) 541—549.

[2] CAMPBELL, H. G., DUDEK, R. A. and SMITH, M. L., "A heuristic algorithm for the n job, m machine sequencing problem" *Management Science.* **16** (1970) 630—637.

[3] FEJES KATALIN, "Flow-shop ütemezések közelítő megoldási módszereinek összehasonlítása" *Számológép* **2** (1974) 5—15.

[4] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. and SETHI, R., "The complexity of flow-shop and job-shop scheduling", Technical Report No. 168, Comput. Sci. Dept., Penssylvania State University, 1975.

[5] GIGLIO, R. J. and WAGNER, H. M., "Approximative solutions to the three-machine sequencing problems", *Operations Research* **12** (1964) 305—324.

[6] GUPTA, J. N. D., "A functional heuristic algorithm for the flow-shop scheduling problem", *Operational Res. Quart.* **22** (1971) 39—47.

[7] JOHNSON, S. M., "Optimal two- and three-stage production schedules", *Naval Research and Logistics Quarterly,* **1** (1954) 61—68.

[8] NICHOLSON, T. A. J., "A sequential method for discrete optimisation problems and its application to the assignment, travelling salesmen and three machine scheduling problems" *J. Institute Math. Appl.* **3** (1967) 362—375.

[9] PALMER, D. S., "Sequencing jobs through a multi-stage process in the minimum total time-A quick method of obtaining a near optimum", *Operational Research Quarterly* **16** (1965) 101—107.

[10] В. С. Танаев, В. В. Щкурба, *Введение в теорию расписаний* (Издательство, «Наука», Москва, 1975).

(Beérkezett: 1977. október 1.)
(Újra beérkezett: 1978. január 11.)

FIALA TIBOR
BÁNKI DONÁT GMF
1428 BUDAPEST, PF. 31.

NEAR OPTIMAL ALGORITHM FOR THE THREE MACHINE PROBLEM

T. FIALA

On the basis of a geometrical idea we give a near optimal algorithm for the three machine problem, which is known to be NP-complete. It is shown, that the error of the algorithm cannot exceed a positive constant (depending on the maximal execution time of jobs) even for large number of jobs.

Alkalmazott Matematikai Lapok 3 *(1977) 399—403*

A JÁTÉKELMÉLET NÉHÁNY MÓDSZERÉNEK KAPCSOLATÁRÓL

SZIDAROVSZKY FERENC

Budapest

A dolgozatban a konvex—konkáv játékokra vonatkozó *Kuhn—Tucker elméletre* alapuló módszer általánosítása szerepel. Az általános módszer speciális eseteként több olyan eljárást is tartalmaz, amelyek kapcsolatát a konvex—konkáv játékokkal az irodalomban eddig még nem mutatták meg.

Egy $\Gamma=(n; S_1, ..., S_n; \varphi_1, ..., \varphi_n)$ szimbólumot n-személyes játéknak nevezünk, ha az S_k halmazok tetszőlegesek, a φ_k függvények pedig az $S_1\times...\times S_n$ halmazon értelmezett valós értékű függvények. Az S_k halmazokat stratégiahalmazoknak, a φ_k függvényeket pedig kifizetőfüggvényeknek nevezzük. A játék *Nash-féle egyensúlypontján* olyan $(\mathbf{x}_1^*, ..., \mathbf{x}_n^*)=\mathbf{x}^*$ vektort értünk, amelyre $k=1, 2, ..., n$ esetén $\mathbf{x}_k^*\in S_k$ és tetszőleges $\mathbf{x}_k\in S_k$ mellett

$$\varphi_k(\mathbf{x}_1^*, ..., \mathbf{x}_k^*, ..., \mathbf{x}_n^*) \geqq \varphi_k(\mathbf{x}_1^*, ..., \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_n^*).$$

Játékok numerikus megoldásának leghatékonyabb módja az, hogy a játék egyensúlypont-problémájával ekvivalens, valamilyen, általában nemlineáris programozási feladatot konstruálunk és azt oldjuk meg. Azonban nem ismerünk olyan általános elvet, amely segítségével tetszőleges játék matematikai programozási feladattá alakítható. A konkrét eljárásokban felhasználják mindig a játékok speciális tulajdonságait. Az [5] könyvben szép számmal találhatók ilyen módszerek.

Dolgozatomban két módszerosztály kapcsolatát mutatom be. A poliéder játékok általánosításának tekinthető ún. konvex—konkáv játékok megoldására Canon adott eljárást ([1]). Ebben lényeges szerepet játszik az, hogy zérusösszegű, kétszemélyes, speciális kifizető függvénnyel rendelkező játékot vizsgál.

A poliéder játékokra vonatkozó lineáris programozási feladat (l. [5] 199. oldal) Canon eljárásából speciális esetként nyerhető. Véges játékok kevert bővítésének megoldására Mills ([4]) javasolt eljárást, amelynek speciális eseteként közvetlenül nyerhető a bimátrixjátékra vonatkozó kvadratikus programozási feladat és a mátrixjátékok megoldására használt lineáris programozási feladatpár. A jelen dolgozatban bemutatásra kerülő eljárás közös általánosítása Canon és Mills módszerének.

Tegyük fel, hogy $k=1, 2, ..., n$ esetén

$$S_k = \{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_k\in R^{m_k}, \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \geqq \mathbf{0}\},$$

ahol $\mathbf{h}_k$ az R^{m_k}-ból R^{l_k}-ba képező folytonosan differenciálható függvény, valamint S_k minden pontjában teljesül a *Kuhn—Tucker-féle regularitási feltétel* (l. például [2]). Tegyük fel továbbá, hogy φ_k $\mathbf{x}_k$ szerint folytonosan differenciálható. Jelölje

$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*)$ a játék egy egyensúlypontját, ekkor $k=1, \ldots, n$ esetén $\mathbf{x}_k^*$ nyilvánvalóan a

$$(1) \qquad \frac{\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \geqq \mathbf{0}}{\varphi_k(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots, \mathbf{x}_n^*) \to \max}$$

programozási feladatnak optimális megoldása, így a *Kuhn—Tucker tétel* alapján léteznek olyan $\mathbf{u}_k \in R^{l_k}$ vektorok, amelyekre

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathbf{u}_k &\geqq \mathbf{0} \\ \psi_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k) &= \nabla_k \varphi_k(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}_k^T \nabla_k \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{0}^T \\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k^*) &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_k^T \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k^*) &= 0. \end{aligned}$$

Itt $\nabla_k \varphi_k$ a φ_k $\mathbf{x}_k$-szerinti gradiensét, $\nabla_k \mathbf{h}_k$ pedig $\mathbf{h}_k$ *Jacobi-mátrixát* jelenti. Tekintsük ezután a következő programozási feladatot:

$$(3) \qquad \frac{\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_k &\geqq \mathbf{0} \\ \psi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k) &= \mathbf{0}^T \\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots, n}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^T \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \to \min.}$$

Megjegyezzük, hogy az $n=2$, $\varphi_2 = -\varphi_1$ esetben (3) CANON módszerével azonos.

1. LEMMA. Legyen $\mathbf{x}^*$ a játék egyensúlypontja. Ekkor alkalmas $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorok mellett $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ optimális megoldása (3)-nak.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy bármilyen lehetséges megoldás esetén a célfüggvény nemnegatív, egyensúlypont esetén pedig (2) következtében zérus.

2. LEMMA. Ha $k=1, 2, \ldots, n$ esetén $\mathbf{h}_k$ komponensei konkávak, S_k korlátos, φ_k folytonos és $\mathbf{x}_k$-ban konkáv, akkor (3) bármely optimális megoldásának $\mathbf{x}$ része a játék egyensúlypontját adja.

Bizonyítás. A *Nikaido—Isoda tétel* alapján a játéknak van egyensúlypontja (l. [5], 34. oldal), amely (3) lehetséges megoldása és a (2) alapján a célfüggvényérték zérus. Minthogy bármely lehetséges megoldás esetén a célfüggvény nemnegatív, tetszőleges optimális megoldás esetén a célfüggvény zérus értékű. Ekkor pedig (2) fennáll és a *Kuhn—Tucker feltételek* elégségessége következtében (3) optimális megoldásának $\mathbf{x}$ része (1) optimális megoldása is $k=1, 2, \ldots, n$ esetén, így egyensúlypont.

TÉTEL. A 2. lemma feltételei mellett a játék egyensúlypont problémája és a (3) programozási feladat ekvivalensek.

Bizonyítás. Az állítás az előző két lemmából közvetlenül adódik.

Megjegyzés. A tétel feltételei mellett nem várható, hogy (3) lehetséges megoldásainak halmaza konvex legyen általában. Nyilvánvaló, hogy ekkor (3) ekvivalens az

$$(4)\qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{u}_k \geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \geqq \mathbf{0}\end{array}}{\sum_{k=1}^{n} \{\mathbf{u}_k^T \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \|\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k)\|^2\} \to \min}$$

feladattal, amelynek lehetséges tartománya már konvex, így például a gradiens típusú eljárásokat alkalmazni tudjuk.

Vizsgáljuk meg ezután a poliéder játékok általánosításának tekinthető

$$(5)\qquad S_k = \{\mathbf{x}_k | \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \leqq \mathbf{b}_k\} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n} a_{i_1 \ldots i_n}^{(k)} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_n}^{(n)}$$

esetet, ahol $\mathbf{x}_l$ komponenseit $x_1^{(l)}, \ldots, x_{m_l}^{(l)}$ jelöli, valamint $a_{i_1 \ldots i_n}^{(k)}$ adott számok. Legyen továbbá

$$a_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{i_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \sum_{i_{k+1}=1}^{m_{k+1}} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n} a_{i_1 \ldots i_{k-1} i i_{k+1} \ldots i_n}^{(k)} \cdot x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_{k-1}}^{(k-1)} x_{i_{k+1}}^{(k+1)} \ldots x_{i_n}^{(n)}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$(6)\qquad \varphi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_k(\mathbf{x})^T \mathbf{x}_k$$

ahol $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}) = (a_1^{(k)}(\mathbf{x}), \ldots, a_{m_k}^{(k)}(\mathbf{x}))^T$ és $\mathbf{a}_k$ nem függ $\mathbf{x}_k$-tól. Vegyük észre, hogy a tétel minden feltétele teljesül, így az így nyert játék egyensúlyproblémája ekvivalens a (3)-ból adódó

$$(7)\qquad \frac{\left.\begin{array}{r}\mathbf{u}_k \geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{a}_k(\mathbf{x})^T - \mathbf{u}_k^T \mathbf{A}_k = \mathbf{0}^T\\ \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \geqq \mathbf{0}\end{array}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots, n}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k^T (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k) \to \min}$$

feladattal. Minthogy a második feltételrendszerből $\mathbf{u}_k^T \mathbf{A}_k = \mathbf{a}_k(\mathbf{x})^T$, a (6) alapján a célfüggvény alakja:

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}_k - \varphi_k(\mathbf{x})) \to \min,$$

amelynek különösen konstansösszegű (speciálisan zérusösszegű) esetben van jelentősége, hiszen ekkor a második tag elhagyható, így a célfüggvény lineáris. Ha ezenkívül még $n=2$, akkor $\mathbf{a}_k(\mathbf{x})$ is lineáris, így (7) a poliéder játékra vonatkozó lineáris programozási feladatot adja meg. Az $n=3$ konstansösszegű esetben (7) második feltételrendszere kvadratikus.

Tegyük fel ezután, hogy a játék véges játék kevert bővítése. Ekkor

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{1}^T \\ -\mathbf{1}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{I}$ az m_k-adrendű egységmátrixot, $\mathbf{1}$ és $\mathbf{0}$ az m_k dimenziós összegező és zérusvektort jelöli. Bontsuk fel ennek megfelelően az $\mathbf{u}_k$ vektort is:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{v}_k \in R^{m_k}$, α_k, β_k skalárok. Ebben az esteben a (7) a

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_k \geqq \mathbf{0} \\ \alpha_k \geqq 0 \\ \beta_k \geqq 0 \\ \mathbf{a}_k(\mathbf{x})^T + \mathbf{v}_k^T - \alpha_k \mathbf{1}^T + \beta_k \mathbf{1}^T = \mathbf{0}^T \\ \mathbf{x}_k \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_k^T \mathbf{1} = 1 \\ \hline \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k(\mathbf{x}) - \alpha_k + \beta_k) \to \max \end{gathered}$$

alakban is felírható. Vezessük be ezután a $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$ jelölést és vegyük észre, hogy a feltételrendszerben $\mathbf{v}_k$ elhagyható, ekkor a programozási feladat a következő alakú:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_k \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_k^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{a}_k(\mathbf{x})^T \leqq \gamma_k \mathbf{1}^T \\ \hline \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k(\mathbf{x}) - \gamma_k) \to \max, \end{gathered} \tag{9}$$

amellyel MILLS módszere adódott (lásd [4], [5] 239. oldal).

Tekintsük befejezésül az $n=2$ bimátrix játéknak megfelelő speciális esetet és vezessük be az

$$\mathbf{A}_1 = (a_{i_1 i_2}^{(1)}), \quad \mathbf{A}_2 = (a_{i_1 i_2}^{(2)})$$

jelölést, ekkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{a}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_2^T \mathbf{x}_1,$$

így a (9) feladat az

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{1} = \mathbf{x}_2^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_2 \leqq \gamma_1 \mathbf{1} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{x}_1 \leqq \gamma_2 \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{x}_1^T (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{x}_2 - \gamma_1 - \gamma_2 \to \max \end{gathered} \tag{10}$$

alakban írható, amely MANGASARIAN és STONE eljárásával ([3], [5] 122. oldal) azonos.

IRODALOM

[1] CANON, M. D., "Monoextremal representation of a class of minimax problems", *Man. Sci.* **15** (1969).
[2] HADLEY, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*. (Addison—Wesley, Reading, Mass, 1964).
[3] MANGASARIAN, O. L. and STONE, H., "Two-person nonzero-sum games and quadratic programming", *J. Math. Anal. Appl.* **9** (1964) 348—355.
[4] MILLS, H., "Equilibrium points in finite games", *J. SIAM* **8** (1960) 397—402.
[5] SZÉP J. és FORGÓ F., *Bevezetés a játékelméletbe* (Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974).
[6] SZIDAROVSZKY, F., „A konkáv oligopol probléma", *ELTE TTK Numerikus és Gépi Mat. Tsz. Tech. Rep.* 1976—2.

(Beérkezett 1978. március 3.)

SZIDAROVSZKY FERENC
KERTÉSZETI EGYETEM SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK
1113 BUDAPEST XI., VILLÁNYI ÚT 29—35.

ON THE CONNECTION BETWEEN CERTAIN METHODS OF GAME THEORY

F. SZIDAROVSZKY

In this paper a general method for solving concave n-person games is introduced. The method is based on the *Kuhn—Tucker theory* and the equivalence of the equilibrium problem and a certain nonlinear programming problem is proven. As special cases well known algorithms for the numerical solution of mixed extension of finite games, bimatrix and matrix games can be reduced from the general method.

MÓDSZEREK LJAPUNOV-FÜGGVÉNYEK MEGALKOTÁSÁRA[1]

L. JU. ANAPOLSZKIJ, V. D. IRTYEGOV, V. M. MATROSZOV

Bevezetés

A *Ljapunov-függvények módszere* (LJAPUNOV (1)) a stabilitás vizsgálatának jól felhasználható, alapvető precíz módszere. A módszer központi problémája a konkrét rendszerhez szükséges tulajdonságokkal rendelkező *Ljapunov-függvény* előállítása.

Amint azt N. G. CSETAJEV (2) és iskolájának (G. V. KAMENKOV (1), I. G. MALKIN (1—8), M. S. AMINOV (1), P. A. KUZMIN (1—6), V. V. RUMJANCEV (1—10)) alapvető jelentőségű munkái megmutatták, LJAPUNOV második közvetlen módszere igen rugalmasan alkalmazható konkrét mechanikai stabilitási feladatok megoldására. N. N. KRASZOVSZKIJ (5), A. M. LETOV (2), A. I. LURJE (1), V. A. JAKUBOVICS (1—10) és más szerzők (M. A. AJZERMAN és F. R. GANTMAHER (1), S. LEFSCHETZ (2), P. V. BROMBERG (1), E. A. BARBASIN (6, 7)) kutatásaikban kiterjesztették a módszer alkalmazhatóságát az automata irányítási rendszerek stabilitására és szintézisére. A *Ljapunov-függvények módszere* jelentős továbbfejlesztés után K. P. PERSZIDSZKIJ (1—5), E. A. BARBASIN (7), N. N. KRASZOVSZKIJ (5), V. V. RUMJANCEV (8), V. I. ZUBOV (5), T. YOSHIZAWA (2) és sok más szerző (V. A. PLISSZ (1), M. A. KRASZNOSZELSZKIJ (2), JU. L. DALECKIJ és M. G. KREJN (1), T. K. SZIRAZETGYINOV (1), J. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (1), J. L. MASSERA és J. J. SCHÄFFER (1), W. HAHN (1), N. P. BHATIA és G. P. SZEGŐ (1), V. LAKSHMIKATHAM és S. LEELA (1)) munkáiban mind szélesebb alkalmazásra talál az alkalmazott matematika különböző ágaiban, rendszerek különböző dinamikus tulajdonságainak vizsgálatánál (lásd még a következő könyveket: D. R. MERKIN (1, 2), K. A. KARACSAROV és A. G. PILJUTYIK (1), L. E. ELSZGOLC (1, 2), V. V. BELECKIJ (2), B. P. GYEMIDOVICS (1), R. E. HASZMINSZKIJ (1), E. A. BARBASIN és V. A. TABUJEVA (1), V. M. KUNCEVICS és JU. N. CSEHOVOJ (1), A. A. MARTINYUK (3), S. LEFSCHETZ (1), A. HALANAY (1), R. REISSIG, G. SANSONE és R. CONTI (1), H. LEIPHOLZ (1), C. T. LEONDES (1), A. HALANAY és D. WEXLER (1), S. BARNETT és C. STOREY (4)).

Emiatt megnőtt az érdeklődés a szükséges tulajdonságokkal rendelkező *Ljapunov-függvények* (LF) előállítása iránt. Gyorsan növekedik a dolgozatok száma, különösen külföldi szerzőké, melyekben tökéletesítik a még LJAPUNOV által javasolt módszereket a függvények megalkotására, vagy új, más hozzáállással közelítenek a feladatok megoldásához. Az LF előállításának legfontosabb eredményeit tartalmazó áttekintések jelentek meg (E. A. BARBASIN (4), V. A. KOROTKOV (1), V. V. RUMJANCEV (9), O. GUREL és L. LAPIDUS (1)).

[1] A fordítás a szerzők hozzájárulásával a Способы построения функций Ляпунова (Итоги Науки и Техники, Серия Общая Механика, Том 2, Москва, 1975) dolgozat alapján készült.

A létező módszerek sokfélesége megköveteli valamilyen meghatározott szempontok szerinti osztályozásukat. A következő elvek lehetségesek:

a) A *Ljapunov-függvény*, a *Ljapunov-függvény* gradiensének vagy a vizsgált rendszerre vonatkozó deriváltjának az alakja, struktúrája alapján (E. A. BARBASIN (5));

b) A rendszer típusa, differenciálegyenlete alapján (lineáris, holomorf, autonom, meghatározott fajta nemlinearitást tartalmazó, konzervatív stb.) (O. GUREL és L. LAPIDUS (1));

c) A rendszer vizsgált tulajdonsága alapján (stabilitás, instabilitás, aszimptotikus, exponenciális stabilitás, vonzás stb.) (N. N. KRASZOVSZKIJ (5));

d) A rendszer tulajdonságainak ismerete alapján (pontos megoldások, első integrálok léte, információ a pályák kvalitatív viselkedéséről stb.);

e) A módszerek szerzőinek neve szerint, időrendben stb.

Az ismétlések minimalizálása érdekében, figyelembe véve a szerzők érdeklődési körét, ez az áttekintés három fejezetre oszlik. Amennyire lehetséges minden fejezetben a *Ljapunov-függvények* előállítási módszereit az LF, deriváltja, gradiense alakja, struktúrája alapján osztottuk csoportokba ((a) szempont.) Az egyes csoportokon belül az osztályozást a rendszer típusa (b) szerint végeztük, a továbbiakban pedig a (c—e) elveket alkalmaztuk.

A szerzők a gyakorlatban sok konkrét rendszer *Ljapunov-függvényét* állították elő, és e kutatások eredményeként született ez az áttekintés.

Az áttekintés célja — bemutatni a kérdés jelenlegi állását, osztályozni a LF előállítási módszereit és megfogalmazni néhány, az LF előállítása algoritmusához és a módszer alkalmazásához fontos, még megoldatlan feladatot. Az olvasót ne lepje meg, hogy az LF előállításának konkrét algoritmusai mellett az áttekintésben szerepelnek olyan állítások is, melyek az adott alakban nem tartalmaznak konkrét javaslatokat a szükséges függvények meghatározásához, de a szerzők véleménye szerint a későbbiekben alapul szolgálhatnak ilyen feladat megoldásánál.

A gyűjteményt a szerzők az általuk elérhető irodalom alapján állították össze. Felhasználták a „*Mechanika*", „*Matematika*" referáló folyóiratokat, E. A. BARBASIN (7), A. M. LJAPUNOV (2) könyveit. Az első fejezetet V. D. IRTYEGOV írta, a másodikat — L. JU. ANAPOLSZKIJ, a harmadikat írta és az egész kéziratot szerkesztette V. M. MATROSZOV. Az áttekintés alapján előadás hangzott el a „*Kvalitatív differenciálegyenletek II. Össz-szövetségi Konferenciáján*". (*Rjazany*, 1971.)

A szerzők kifejezik köszönetüket V. V. RUMJANCEVnek, akinek támogatása és ösztönző hatása nélkül ez a mű aligha készülhetett vonla el. A szerzők hálásak G. K. MIHAJLOVnak, SZ. JA. SZTYEPANOVnak és A. I. GYERSAVINÁnak a kéziratot jelentősen megjavító alapos ellenőrzésért, szerkesztésért.

ELSŐ FEJEZET

A LJAPUNOV-FÜGGVÉNYEK ELŐÁLLÍTÁSÁNAK KLASSZIKUS MÓDSZEREI ÉS E MÓDSZEREK TOVÁBBFEJLESZTÉSE

A mozgás stabilitásának vizsgálata tekinthető a következő differenciálegyenlet-rendszer triviális megoldása vizsgálatának

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1.1}$$

ahol $t \in T = [0, +\infty)$ — idő, $x \in R^n$, $X(t, x) = (X^1(t, x^1, ..., x^n), ..., X^n(t, x^1, ..., x^n))$ — n-dimenziós vektorfüggvény, $X(t, 0) = 0$. X, az egyenlet jobb oldala értelmezve van és folytonosan deriválható az $\Omega = \{(t, x): t \geqq 0, \|x\| < \eta\}$, $(0 < \eta \leqq +\infty)$ tartományban. Emellett általában felteszik minden $x(t, t_0, x_0)$ megoldás nem lokális folytathatóságát jobbra.

A v *Ljapunov-függvények* a klasszikus elméletben valós, folytonosan differenciálható függvények az

$$\Omega_v = \{(t, x): t \geqq t_v, \|x\| < \eta_v\} \quad (t_v \geqq 0, \; 0 < \eta_v \leqq \eta)$$

tartományban, és eltűnnek az $x = 0$ egyensúlyi helyzetben, vagyis $v(t, 0) = 0$. A v LF-nek az egyenletre vonatkozó idő szerinti deriváltja

$$\dot{v}(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} X(t, x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v X(t, x)$$

szintén folytonos Ω_v-ben.

Az 1. fejezetben olyan LF előállítási módszerek szerepelnek, melyek kielégítik LJAPUNOV klasszikus tételeinek (LJAPUNOV (1)), illetve ezek módosításainak feltételeit.

Először a módszerek olyan csoportjával foglalkozunk, ahol a *Ljapunov-függvényt* deriváltja alapján állítjuk elő.

Mint ismeretes, LJAPUNOV stabilitási tétele (K. P. PERSZIDSZKIJ megfordításával) így fogalmazható meg: Az (1.1) rendszer $x = 0$ triviális megoldása stabilitásához szükséges és elégséges, hogy létezzen egy v pozitív definit függvény (Ω_v tartományban), melynek az (1.1) rendszerre vonatkozó deriváltja negatív szemidefinit vagy azonosan 0.

Az első lehetséges és természetes esetet tekintve, amelyben $\dot{v}(t, x) \equiv 0$, a *Ljapunov-függvényt* a rendszer pozitív definit integráljának formájában előállító klasszikus módszerek csoportját kapjuk.

1. Ljapunov-függvények előállítása első integrálokból

Ismeretes, hogy az eredeti rendszer első integráljainak meghatározása nagyon nagy, helyenként megoldhatatlan nehézségekkel jár. Annak a bizonyítása, hogy a rendszernek nincsen megfelelő simaságú integrálja szintén nem egyszerűbb (lásd pl. H. POINCARE (1), C. SIEGEL (1)). Általában akkor találhatók első integrálok, ha ismert a rendszer valamilyen szimmetriája (megengedhető transzformációk csoportja). Így találhatók meg a mechanikai rendszerek ciklikus integráljai stb. (C. D. COLLINSON (1)).

Az LF meghatározása az adott esetben a

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}X(t, x) = 0, \quad v(t, 0) = 0 \tag{1.2}$$

parciális differenciálegyenlet rendszer definit megoldásának megkeresésére vezet.

A feladat legegyszerűbben lineáris rendszerek esetén oldható meg. A lineáris rendszerek kvadratikus integráljainak létezésével és azok tulajdonságaival nagyszámú dolgozat foglalkozik (lásd pl.: N. G. CSETÁJEV (2), P. A. KUZMIN (3), V. I. ARNOLD (1)). A. D. GORBUNOV bebizonyította (1), hogy az $\dot{x}=P(t)x$, ahol $P(t)$ időtől függő $(n\times n)$-es mátrix, lineáris rendszer stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, egy $v(t, x)=x^T A(t)x\gg 0$ kvadratikus pozitív definit integrál létezése, ahol az $A(t)$ mátrix kielégíti az

$$\dot{A}(t)+P^T(t)A(t)+A(t)P(t) = 0 \quad \left(A(t_0) = I\right)$$

egyenletet.

VAN DAN-CSI megmutatta (1), hogy a GORBUNOV tételében szereplő kvadratikus alak meghatározása visszavezethető $n(n-1)/2$ integro-differenciálegyenlet megoldására, olyan feltétellel, hogy a megoldások kielégítenek bizonyos egyenlőtlenségeket.

Jóval korábban K. P. PERSZIDSZKIJ (2, 3) sikerrel alkalmazta az (1.1) nemlineáris rendszerhez tartozó (1.2) egyenlet megoldásának előállítását

$$v(t^0, x^0) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i(0, t^0, x^0)\right)^2 = \|x(0, t^0, x^0)\|^2$$

alakban, ahol $x^i(t, t^0, x^0)$ az (1.1) egyenlet partikuláris megoldása.

A. M. LJAPUNOV (1), G. BIRKHOFF (1) és sok más szerző kereste a szükséges integrálokat hatványsor (általában nem konvergens) alakban. Ilyen alakú pozitív definit integrálok létezéséből következik az ún. „formális stabilitás". Különösen sokan kísérleteztek evvel a módszerrel *Hamilton-típusú rendszerek* esetében (A. D. BRJUNO (1), J. MOSER (1), I. GLIMM (1)).

A. M. LJAPUNOV (1) a konzervatív rendszer egyensúlyi helyzete stabilitásának vizsgálatára sikeresen alkalmazta az energia integrált. Konkrét esetekben most is ezt az integrált választják legtöbbször *Ljapunov-függvénynek*. Azokra a stabilitás vizsgálati módszerekre, amikor a *Ljapunov-függvény* a rendszer teljes (mechanikai) energiája külön elnevezés született: „energetikus módszer" (lásd pl.: M. G. PORTNOJ (1)).

Abban az esetben, amikor egyik ismert integrál sem definit a rendszer paramétereinek szükséges tartományában N. G. CSETAJEV javasolta a *Ljapunov-függvény* keresését integrálköteg alakban *(Csetajev integrálköteg módszere)*.

Általában az integrálköteg a következő alakú:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i^2, \tag{1.3}$$

ahol $v_i(t, x)$ — az (1.1) rendszer első integráljai, λ_i — úgy megválasztott állandók, hogy v kifejezésében az x-ben lineáris tagok kiessenek, a μ_i állandókat pedig a v definitségének biztosítására használják.

A *Ljapunov-függvények* ezen előállítási módját a nehéz szilárd test stabilitásával kapcsolatos feladatokban N. G. CSETAJEV (2), V. V. RUMJANCEV (2, 4), P. A. KUZMIN (2) használta. G. K. POZSARICKIJ (2) bebizonyította, hogy néhány ismert integrál teljes integrálkötege egyenlő a négyzetük összegével.

Integrálokból álló *Ljapunov-függvények* különböző konkrét előállítási módszereivel igen sok dolgozat foglalkozik. V. N. SZKIMEL (1), V. V. BELECKIJ (2) és mások változó együtthatós $\lambda(t)$ integrálköteget tekintettek. V. D. IRTYEGOV (5) az integrálköteg segítségével a Sz. V. KOVALEVSZKAJA által vizsgált pörgettyű ingalengéseinek stabilitásáról kapott eredményeket.

A mechanika sok érdekes feladatában sikerült vizsgálni a stabilitást az (1.1) rendszer integráljaiból álló LF segítségével (lásd: V.V. RUMJANCEV (2, 4, 5), P. A. KUZMIN (2), K. MAGNUS (1), A. ANCSEV (1), V. G. GYEMIN (1)).

Disszipatív esetben V. M. MATROSZOV rámutatott a mechanikai rendszer ciklikus integráljainak kiterjeszthetőségére. Teljes disszipációjú giroszkopikus rendszerekre megvizsgálta a teljes energiából és az adott alakú kiterjesztett integrálokból álló integrálköteg esetét. V. V. KREMENTULO (1) felhasználta az integrálköteg elvét a száraz súrlódású pörgettyű stabilitásának vizsgálatánál.

N. G. CSETAJEV (2), V. V. RUMJANCEV (1) és mások integrálköteg segítségével tanulmányozták a folyadékkal töltött szilárd test mozgásának stabilitását.

CSETAJEV integrálköteg módszerével szorosan összefügg a ROUTH (1)—LJAPUNOV (3)-tétel, ami nemcsak lehetővé teszi az ilyen típusú *Ljapunov-függvények* effektívebb meghatározását, de sok esetben adódik belőle az összes stacionárius mozgás, melyek stabilitása vizsgálható a kapott LF segítségével.

Sok fontos alkalmazott feladat stabilitását vizsgálták ennek az eljárásnak a segítségével. P. A. KUZMIN a *Routh—Ljapunov-tétel*lel tanulmányozta a szilárd test stacionárius mozgásának stabilitását centrális erőtérben. A tétel alkalmazásának e dolgozatban megmutatott módszerei a későbbiekben sok szerzőnek lehetővé tette jelentős eredmények elérését a szilárd testek dinamikájában, a giroszkópoknál stb. fellépő stacionárius mozgások stabilitásában (L. A. BURLAKOVA (1, 2), E. I. DRUZSINYIN (1. 2), V. D. IRTYEGOV (1—4, 6), JU. M. KOVALJOV (1), V. M. SZKIMEL (2, 3)).

V. V. RUMJANCEV monográfiájában (8) szerepel a *Routh—Ljapunov-tétel* több megfogalmazása és ezek összehasonlítása. A kifejlesztett módszerek szisztematikusan alkalmazzák a szputnyik-girosztát stacionárius mozgásának vizsgálatánál. Ez az irány tovább fejlődött Sz. JA. SZTYEPANOV (1), M. K. NABIULLIN (1) és mások cikkeiben. V. V. RUMJANCEV (10), V. N. RUBANOVSZKIJ és Sz. JA. SZTYEPANOV (1), N. N. MOJSZEJEV és V. V. RUMJANCEV (1) és mások alkalmazták a *Routh—Ljapunov-tételt* a folyadékkal töltött test stacionárius mozgása stabilitás vizsgálatánál. Megnézték a tétel általánosításának néhány lehetőségét. L. M. SZEMJONOVA (1) tárgyalja a *Routh—Ljapunov-tétel* alkalmazhatóságát nemholonom rendszerekre.

A tétel lényege a következő: ha a

$$\frac{dy}{dt} = Y(y) \quad (y \in R^n) \tag{1.4}$$

autonóm differenciálegyenlet-rendszernek van m számú első integrálja

$$v_j = v_j(y) = c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.5}$$

akkor, először: egy az (1.5)-ben szereplő integrál szélsőértékének szükséges feltételét megadó egyenletek a többi integrál állandó értéke mellett,

$$\frac{\partial K}{\partial y} = z = 0 \quad (z \in R^n) \tag{1.6}$$

$$K = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$$

(ahol λ_j-k állandó *Lagrange-féle multiplikátorok*), meghatározzák az (1.4) rendszer stacionárius mozgásainak integrálsokaságát (lásd pl.: M. F. SULGIN (1)), és, másodszor: a K függvény variációjának definitsége a stacionárius mozgások integrálsokaságának környezetében, vagy e sokaság a változók egy csoportja által meghatározott

$$\Delta v_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, k \leqq m-1) \tag{1.7}$$

részsokasága környezetében, garantálja az adott változócsoport szerinti integrálsokaság feltételes stabilitását.

A *Routh-tétel*ben a konstansok rögzítésével az integrálok variálásánál adódó stabilitás feltételességét A. M. LJAPUNOV (3) bizonyos folytonossági feltételek megkövetelésével elhagyta. LJAPUNOV ROUTH tételének kiegészítésével kapcsolatos bizonyítása, és útmutatása azon esetekre, amikor LJAPUNOV feltételeit nem kell ellenőrizni megtalálhatók V. V. RUMJANCEV (8), G. K. POZSARICKIJ (2), A. L. KUNYICIN (1), E. I. DRUZSINYIN (1) és mások közleményeiben.

Sokan összehasonlították a stacionárius mozgások stabilitására az integrálköteg, illetve a *Routh—Ljapunov-tétel* segítségével kapott eredményeket (V. N. RUBANOVSZKIJ és SZ. JA. SZTYEPANOV (1), E. I. DRUZSINYIN (1)). Így abban az esetben, amikor a triviális megoldás stabilitása a *Ljapunov-függvény* másodrendű tagjaival megoldható, a *Routh—Ljapunov-tétel* elégséges feltételei egybeesnek a teljes integrálkötegből (1.3) adódó feltételekkel.

V. V. RUMJANCEV (7) és tanítványai (lásd: VAN CSAO LIN (1)) megvizsgálták a *Routh—Ljapunov-tétel* megfordításának kérdését.

A giroszkopikusan nem összefüggő rendszerekre alkalmazhatók LJAPUNOV (1), illetve CSETAJEV (2) tételei a *Lagrange-tétel* megfordításáról. (Lásd még: P. HAGEDORN (1).)

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a *Routh—Ljapunov-tétel* (1.6) formuláját célszerű úgy tekinteni, mint y-t z-be K primitív függvénnyel transzformáló *Legendre-transzformáció* egyenleteit. A z változók természetes használata elfajuló transzformációk esetén jól látszik a példákban (V. D. IRTYEGOV (2, 3)).

V. V. RUMJANCEV (7, 9), L. SALVADORI (1), G. K. POZSARICKIJ (1, 3) megvizsgálták a *Routh-tétel* kiterjeszthetőségének kérdését disszipatív rendszerekre, paraméterektől függő *Ljapunov-függvények* felhasználását. V. I. ARNOLD (2) a parciális differenciálegyenletek esetével foglalkozott.

A *Routh-tétel* LJAPUNOV által adott változata (3), úgy tűnik, általánosabb, mint a ciklikus koordináták mellőzésének módszere. Ez következik L. P. EISENHART (1), I. ILIJEV (1) példáiból, miszerint léteznek a transzformációk nemkommutatív részcsoportjának megfelelő rejtett ciklikus változók, melyek lineáris integrálokhoz vezetnek. Az időtől explicit függő integrálok tárgyalása megtalálható V. V. RUMJANCEV (9), V. D. IRTYEGOV (7) és mások munkáiban.

Az eddig vizsgált *Ljapunov-függvény* előállítási módszerek jellemzője, hogy rendszerint a szükségeshez közeli elégséges feltételeket adnak.

JA. L. LUNC és H. L. SZMOLICKIJ (1) megmutatták, hogy a ciklikus koordináták mellőzésének módszere egy darab nem ciklikus koordinátával rendelkező mechanikai rendszer esetén olyan elégséges feltételt ad a stabilitásra, amely a határtól eltekintve szükséges is. Ez az eredmény következő formában kiterjeszthető több pozíciós koordináta esetére: a stabilitás utóbbi elégséges feltétele, amely a megváltoztatott potenciális energia mátrixa maximális determinánsának pozitivitása, alakra egybeesik (egy pozitív szorzó erejéig) a karakterisztikus egyenlet szabad tagjával.

A stacionárius mozgások stabilitásának vizsgálatánál mostanáig meglevő nehéz feladatként megemlíthető azon változók kiválasztása, melyekre stabilitás áll fenn.

Érdekes még a nemlineáris rendszerek egész azon osztálya tulajdonságainak vizsgálata, melyre az első közelítés alapján kvadratikus LF segítségével (pl.: integrálköteg) olyan elégséges feltételek kaphatók, melyek közeliek a szükségeshez a kritikus esetekben (mint: N. G. CSETAJEV (1), V. V. RUMJANCEV (1)). Ez a kérdés szoros kapcsolatban áll a nemlineáris rendszerek integráljainak folytathatóságával (N. G. CSETAJEV (2)).

2. Ljapunov-függvények előállítása a $\dot{v}(t, x) \neq 0$ derivált adott alakja alapján

LJAPUNOV tétele az aszimptotikus stabilitásról I. G. MALKIN (8) kiegészítésével és megfordításával így fogalmazható meg:

Az $x=0$ triviális megoldás t_0, x_0 szerinti egyenletes aszimptotikus stabilitásához szükséges és elégséges, hogy létezzen egy pozitív definit végtelen kicsi felső határú v függvény, melynek az (1.1) rendszerre vonatkozó deriváltja negatív definit.

Ebben az esetben az (1.1) *Ljapunov-függvényé*nek megalkotása a

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}X(t, x) = u(t, x), \quad v(t, 0) = 0 \tag{1.8}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer v definit és végtelen kicsi felső határú partikuláris megoldásának kereséséhez vezet, u-t adott definit függvénynek tekintik. Az (1.8) egyenlet megoldásának egzisztenciáját és unicitását K. P. PERSZIDSZKIJ (5) igazolta.

Ebben az irányban az első eredményt maga LJAPUNOV (1) érte el. Belátta, ha az $\dot{x}=Px$ lineáris autonóm rendszer (P állandó $(n\times n)$-es mátrix) karakterisztikus egyenlete minden $\varkappa_s$ gyökének valós része negatív és az (1.8) egyenletben $u(x)$ definit, x-ben páros m-fokszámú, t-től nem függő forma, akkor ezt az egyenletet kielégíti egy m-fokszámú $v(x)$ forma, ami szintén definit, ellentétesen az u-val. Így az (1.8) egyenlet megoldásának létezése definit forma alakjában, adott definit forma deriváltással a lineáris autonóm rendszer aszimptotikus stabilitásának szükséges és elégséges feltétele (a rendszer ebben az esetben exponenciálisan stabilis).

Ha $u(x)=x^TCx$ állandó együtthatós kvadratikus forma, akkor a v függvény x^TAx kvadratikus alakban keresése a

$$P^TA+AP=C \tag{1.9}$$

Ljapunov mátrix-egyenlet megoldásához vezet. Nagyon sok dolgozat foglalkozik ezen egyenlet tulajdonságainak vizsgálatával (lásd: H. M. POWER (1—3), S. BARNETT és C. STOREY (1—4), CAI SUI-LIN (1), S. BARNETT (1), R. A. SMITH (1) és mások). E. A. BARBASIN (6) explicit alakban felírta a *Ljapunov-függvény* A mátrixát C és P mátrixokkal. Ezen mátrix felépítését érdekesen interpretálja R. BELLMAN (1). JU. I. ALIMOV (3) bebizonyította LJAPUNOV itt közölt tételének analógját lineáris autonóm rendszerekre szemidefinit $\dot{v}$-ra a BARBASIN—KRASZOVSZKIJ (1) tétel feltételei mellett (lásd még: E. A. BARBASIN (6, 7)).

A

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x \tag{1.10}$$

lineáris rendszerre (ahol $P(t)$ folytonos, korlátos, $(n\times n)$-es mátrix) a $v=x^TA(t)x$ kvadratikus alak meghatározása $C(t)$ adott derivált mátrixa alapján a

$$\frac{dA(t)}{dt}+P^T(t)A(t)+A(t)P(t)=C(t) \tag{1.11}$$

mátrix differenciálegyenlet megoldásához vezet.

K. P. PERSZIDSZKIJ (1), I. G. MALKIN (8), N. N. KRASZOVSZKIJ (5) megmutatták, hogy az (1.11) egyenlet adott $C(t)$ definit mátrixhoz tartozó definit, korlátos megoldásának létezése az (1.10) rendszer triviális megoldása exponenciális stabilitásának szükséges és elégséges feltétele.

Kvázilineáris rendszer esetén az első közelítés exponenciális stabilitásából következik egy v pozitív definit függvény létezése, amely végtelen kicsi felső határú és kielégíti az (1.8) egyenletet $u(t,x)=-\|x\|^m$, $m>0$-val (L. K. BULASEVA (1)).

N. N. KRASZOVSZKIJ bebizonyította (5), hogy az (1.10) egyenlet aszimptotikus stabilitásához szükséges és elégséges, hogy létezzen egy $v=x^TA(t)x$ pozitív definit kvadratikus alak, melynek az (1.10) rendszerre vonatkozó deriváltja kielégíti a

$$\dot{v}(t,x)\leqq\lambda(t)v(t,x),\qquad\int_0^\infty\lambda(t)\,dt=-\infty$$

egyenlőtlenséget.

Érdemes megemlíteni V. M. SZTARZSINSZKIJ (1) és V. I. ZSUKOVSZKIJ (1) lineáris rendszerek stabilitásával foglalkozó áttekintéseit. E témához tartoznak JA. N. ROJTENBERG (1) és N. D. MOJSZEJEV (1) munkái is.

Holomorf jobb oldalú nemlineáris autonóm rendszerek (1.1) esetében sok szerző vizsgálta a $\dot{v}$ különböző előállításait sor alakban

$$\dot{v}(x,v)=W^0(x)+W^1(x)v+W^2(x)v^2+\dots$$

A. M. LJAPUNOV (1) bebizonyította, hogy a

$$\frac{\partial v}{\partial x} X(x) = \dot{v}(x, v) \tag{1.12}$$

egyenletnek létezik holomorf megoldása, és megmutatta a megoldás meghatározásának szukcesszív aproximációs módszerét, ha az aszimptotikus stabilitás az első közelítés alapján áll fenn (még néhány „belső rezonancia hiányát” garantáló feltétel mellett).

V. I. ZUBOV (5) feltéve, hogy

$$W^1(x) = W^0(x) = \varphi(x)\sqrt{1+X^2}, \quad W^S(x) = 0 \quad (s = 2, 3, \ldots),$$

bebizonyította az (1.12) megoldásának analitikus folytathatóságát tetszőleges félegyenes mentén a vonzási tartomány határáig. Így ZUBOV módszere lehetőséget ad a vonzási tartomány becslésére. G. P. SZEGŐ (1) megvizsgálta a lokális feladatra a $\dot{v} = \psi(x)/\beta(v)$ esetet, V. A. KOROTKOV (1) és D. YU (1)—ZUBOV módszerének realizálását számítógépre.

Megoldatlan feladatok: a fent említett eredmények átvitelének lehetősége nemholomorf v függvények esetére, további effektív módszerek kidolgozása (1.12) partikuláris megoldásainak meghatározására a $\dot{v}$, illetve v függvények konkrét strukturális korlátozása esetén.

3. Adott alakú Ljapunov-függvény előállítása

Ezen módszereknél általában törekednek a *Ljapunov-függvények* olyan megválasztására, hogy könnyen ellenőrizhető legyen a definitség és a felhasznált tételek többi feltétele, az elégséges feltételek a lehetőség szerint közel legyenek a szükségesekhez, és végül a stabilitási tartomány a paraméterek és a változók terében legyen elég nagy. Segítségül szolgálhatnak fizikai elképzelések és a kutató intuíciója. Így disszipációval rendelkező vagy anélküli mechanikai rendszerek esetében célszerű teljes mechanikai energia alakú *Ljapunov-függvényt* választani (A. M. LJAPUNOV (1), I. G. MALKIN (8) és mások)). A maga a v *Ljapunov-függvény* megadásából kiinduló módszerek, összehasonlítva a $\dot{v}$ derivált megadásával kezdődő módszerekkel, minden egyszerűségük ellenére a kutató ilyen jellegű feladatok megoldásánál szerzett elég nagy tapasztalatát követelik meg.

A definitség ellenőrzése szempontjából legkényelmesebb a v kvadratikus alak állandó A mátrixszal. De már a lineáris autonóm rendszerek esetében is a *Ljapunov-függvény* előállításának első részében célszerű néhány szabad paraméterrel rendelkezni az A mátrixban, ami a mi osztályozásunk szerinti vegyes módszerekhez vezet, melyeket a következő pontban fogunk áttekinteni. A v függvény jó megválasztásával kapcsolatos nehézségeket igen szemléletesen világítja meg a *Routh—Hurwitz kritérium* LJAPUNOV második módszerével történő levezetésének egyszerű feladata (P. A. KUZMIN (4), P. C. PARKS (1)).

B. SZ. RAZUMIHIN (1) megvizsgálta a $v = x^T A x$ (A állandó mátrix) esetét az (1.10) egyenletre. Bebizonyította, hogy a rendszer paramétereinek terében (n^2 dimenziós) a tartomány, ahol $\dot{v}$ v-vel ellentétes előjellel szemidefinit, egy kúp felülete által határolt. Feltételeket adott a kúp nem ürességére.

Nemlineáris (1.1) rendszerek esetében K. P. PERSZIDSZKIJ és tanítványainak munkáitól kezdve különböző szempontokból vizsgálják a pszeudokvadratikus alakú *Ljapunov-függvények* használhatóságát. Ajánlható a *Ljapunov-függvény* megválasztása

$$v = z^T A(t, x) z \tag{1.13}$$

pszeudokvadratikus alakban, ahol $z = z(x)$-t célszerűen választjuk meg és az egyenlet jobb oldalát

$$X(t, x) = K(t, x) z \tag{1.14}$$

alakban állítjuk elő.

(1.13) formula (1.1) rendszerre vonatkozó deriváltja (1.14) figyelembevételével

$$\dot{v} = z^T \left[K^T \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^T A + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} X + A \frac{\partial z}{\partial x} K \right] z.$$

A z változók szerinti stabilitás (nem elfajuló $z = z(x)$ transzformáció esetén pedig az x szerinti is) a v, illetve $\dot{v}$ definitségének vizsgálatához vezet.

Autonóm rendszerek esetén, amikor z-t $X(x)$-nek választjuk, $v = X^T A X$, és nemautonóm rendszerekre is, amikor az A állandó, pozitív definit mátrix N. N. KRASZOVSZKIJ (5) által javasolt *Ljapunov-függvény*eket kapunk.

Az $A = E$, $z = x$ esetek a

$$v = z^T z, \quad v = x^T A(x) x$$

függvényekhez vezetnek, melyeket V. I. ZUBOV (1) vizsgálta.

Több a $v = x^T A(x) x$ pszeudokvadratikus alakot felhasználó dolgozatot írt Y. H. KU (1, 2), Y. H. KU, R. MEKEL és C. C. SU (1), Y. H. KU és N. PURI (1). Itt a nem túl magas rendű differenciálegyenlet-rendszerekre leírták az $A(x)$ mátrix struktúráját, ami a szerzők szavait idézve, elég egyszerű az egyenletrendszerre vonatkozó $\dot{v}$ derivált mátrixot ad.

Polinomiális jobb oldalak esetében G. P. SZEGŐ (1) javasolja az A mátrixot csak $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ függvényének választani. Ha x^n csak lineárisan szerepel a rendszerben, akkor a $\dot{v}$ függvény x^n-nek másodfokú függvénye lesz és az $A(x)$ mátrixot úgy választjuk, hogy e függvény diszkriminánsa nulla legyen, ami garantálja $\dot{v}$ szemifinitségét.

SZ. K. PERSZIDSZKIJ (1), M. B. KUDAJEV (1), I. P. MAKAROV és L. SZ. SAMILINA (1) és mások a

$$v = \Sigma\, a_i |x_i|$$

*Ljapunov-függvény*t használták a rendszerek kvalitatív vizsgálatához.

Kísérletek történtek szakadásos *Ljapunov-függvények* konstruálására (E. I. GERASCSENKO és SZ. T. ZAVALISCSIN (1), G. P. SZEGŐ és G. TRECCANI (1)).

Úgy tűnik, hogy a *Ljapunov-függvények* előállításának e csoportjában az alapproblémák a következők: elég általános szempontok kidolgozása a függvény alakjának kiválasztásához, melyek biztosítják a konkrét esetekben a stabilitás szükségeshez közeli elégséges feltételeit, effektív módszerek a vonzási tartomány becslésére a kezdeti értékek, illetve a stabilitási tartomány becslésére a paraméterek terében.

4. Vegyes módszerek Ljapunov-függvények meghatározására

Ebben az irányban az első eredményt A. M. LJAPUNOV (1) érte el. A stabilitást a lineáris közelítés alapján eldöntő tételek bizonyításánál felhasználta a lineáris rendszerre meghatároztot v kvadratikus alakot (megadva az $u(x)=x^TCx$ deriváltját) az

$$\dot{x} = Px+\tilde{X}(x)$$

teljes nemlineáris rendszer triviális megoldása stabilitásának megállapításához.

Sok szerző használta különböző variációkban a szükséges v függvény előállításához ezt a gondolatot, lineáris vagy nemlineáris segéd differenciálegyenletrendszer bevezetését.

N. G. CSETAJEV (2) bebizonyította, hogy ha az (1.10) rendszer korlátos együtthatóinak létezik határértéke

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0 = \text{const},$$

akkor az

$$\dot{x} = P_0 x$$

„határ egyenletre" előállított, LJAPUNOV aszimptotikus stabilitási tételének feltételeit kielégítő *Ljapunov-függvény* alkalmas az eredeti, változó együtthatós rendszer triviális megoldása stabilitásának eldöntésére is. Analóg módon vizsgálták a kevéssé változó $(P(t)=P_0+\Delta P,\ \Delta P\text{-kicsi})$ és a lassan változó $(\dot{P}(t)\text{-kicsi})$ együtthatók esetét is.

N. N. KRASZOVSZKIJ (5) sok ilyen típusú *Ljapunov-függvény* előállítását mutatta meg. Hasonló módszereket használt I. G. MALKIN (8), V. I. ZUBOV (5), M. A. AJZERMAN (1—4), V. V. RUMJANCEV (3), V. M. STARZSINSZKIJ (2, 3), A. P. TUZOV (1), S. SZ. NUGMANOVA (1), H. A. ANTOSIEWICZ (1), W. HAHN (1), M. S. AMINOV monográfiájában (1) az LF előállításának ezt az elvét használta változó tömegű test stabilitásának vizsgálatára.

A LJAPUNOV értelemben (LJAPUNOV (1)) kritikus esetekben a stabilitás vizsgálatánál az LF gyakran keresik két függvény összegeként $v=v_1+v_2$ (változók szétválasztása), ahol v_2 — az áttranszformált rendszer nem-kritikus részére szokásos módon *(Ljapunov mátrix egyenlete)* előállított kvadratikus alak, v_1 pedig a rendszer kritikus részére megfelelő módon megválasztott függvény (itt felhasználhatók az első integrálok, $\sum r_i^2 \exp[-ku(x)]$ alakú függvények, ahol k — konstans, $u(x^1, ..., x^n)$ — folytonos, korlátos függvény). Az ilyen típusú feladatoknál nagy jelentőségűek az egyenlettranszformálási tételek, amelyek lehetővé teszik a stabilitás vizsgálatának visszavezetését csak a rendszer kritikus részének vizsgálatára (lásd: G. V. KAMENKOV (1), I. G. MALKIN (8)).

E. A. BARBASIN (7) általános alakban ismerteti az általa változók szétválasztási módszerének nevezett módszert a *Ljapunov-függvények* meghatározására. A linearizált rendszerre felépített segédfüggvénnyel megvizsgálta olyan LF előállítási módszerét speciális típusú nemlineáris rendszerekre (lásd még: A. K. NEWMAN (1)), melyek lehetővé teszik a stabilitás olyan elégséges feltételeinek felírását, melyek a rendszer linearizálásánál (a határ kivételével) szükségessé válnak. Ez e módszer alapvető előnye. Érdemes megjegyezni, hogy ilyen tulajdonságokkal rendelkeznek a klasszikus módszerekből kapott elégséges feltételek is (a v kvadratikus formából és a rendszerre vonatkozó deriváltjából adódóak). Az említett két módszer összehasonlításánál figyelembe kell vennünk a paramétertérben a stabilitási tartományokra kapott becslések pontosságát. A gyakorlat azt mutatja, hogy ebből a szempontból E. A. BARBASIN módszere előnyösebb.

A *Ljapunov-függvények* előállításának e módszereit felhasználhatjuk elég magas dimenziós differenciálegyenlet-rendszer triviális megoldása stabilitásvizsgálatára

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x^j), \quad (f_{ij}(0) = 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az e közben elkerülhetetlen nehézkes számítások számológépen végezhetők el (V. V. VORONOVA és V. D. IRTYEGOV (1)).

A linealizált rendszer klasszikus stabilitásvizsgálatának léteznek még más változatai is (lásd: V. E. GERMAIDZE (1) és mások). Hasonló módszerekkel vizsgálják a stabilitást állandóan ható perturbációk esetén is (I. G. MALKIN (3), N. N. KRASZOVSZKIJ (5)).

V. E. GERMAIDZE és N. N. KRASZOVSZKIJ állandóan ható korlátos integrálközepű perturbációk esetén

$$v = e^{\beta(t)} v_1(t, x)$$

függvényt használtak a stabilitásvizsgálatra, ahol $v_1(t, x)$ a perturbálatlan egyenlet aszimptotikus stabilitását megoldó függvény, a $\beta(t)$-t pedig úgy választjuk meg, hogy biztosítsa v, $\dot{v}$ definitségét és hogy v kielégítse a végtelen kicsi felső határ feltételét a szükséges tartományban.

Az állandóan ható perturbációk módszeréhez kapcsolódik az a módszer (lásd: Z. OPIAL (1), T. YOSHIZAWA (2), R. NESBIT (1) és mások), amelynél a $g(t, x)$ perturbáló függvényre olyan feltételeket tesznek fel, hogy az $\dot{x}=f(x)$ perturbálatlan rendszer *Ljapunov-függvénye* megoldja az

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x)$$

rendszer stabilitásának problémáját is.

N. A. PUSZTOVOJTOV (1, 2) kis paraméterrel rendelkező lineáris rendszer *Ljapunov-függvény* előállítására adott módszert,

$$\dot{x} = [P_0 + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + \ldots] x,$$

$$v(x, t, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, t) + \ldots = x^T H(t, \varepsilon) x,$$

ahol $v_0(x)$-t az $\dot{x} = P_0 x$ egyenlet alapján határozzuk meg, ...

M. M. HAPAJEV (1—3, 5) dolgozataiban a perturbálatlan rendszer megoldásainak mentén vett közepek segítségével határozza meg a *Ljapunov-függvényeket*. E módszerrel M. M. HAPAJEV (4) vizsgálta a stabilitást a három test problémában. B. M. BOGATIRJEV, O. B. LIKOVA, JU. A. MITROPOLSZKIJ (1) cikkükben LF előállítási módszert adnak gyengén nemautonóm rendszerekre. V. VUJIČIČ (1) a stacionárius mozgások vizsgálatára ciklikus koordináták létezése esetén javasolja a

$$v = \frac{1}{2} \Sigma\, a_{rs} p^r p^s + W(q^1, \ldots, q^m)$$

függvény felhasználását, ahol p^s — a ciklikus koordinátáknak megfelelő impulzusok, W-t pedig a speciális módszerrel a feladat egyszerűsítése céljából választja.

E. F. INFANTE és L. G. CLARK (1) integrálokból állítja elő a *Ljapunov-függvényt*, a szükséges integrál meghatározásához egy speciálisan kidolgozott módszerrel kell megváltoztatni a jobb oldalt.

D. K. INGWERSON (1), D. G. SCHULTZ és I. E. GIBSON (1), D. G. SCHULTZ (1) dolgozták ki, az utóbbi években elterjedt, gradiens módszert autonóm rendszerek LF előállítására. E módszernél a $v(x)$ *Ljapunov-függvény* előállítását a gradiensének megadásával kezdik

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x^1}, \frac{\partial v}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x^n}\right).$$

v deriváltja a

$$\dot{v}(x) = \nabla v(x) X(x)$$

formula alpján határozható meg, maga a v függvény pedig integrálással adódik.

$$v(x) = \int_0^x \nabla v(x)\, dx.$$

Amiatt, hogy az utóbbi integrál effektíven számítható legyen, a ∇v gradiensre további, a potenciálosság feltételeihez hasonló feltételeket kell tenni.

Így például az

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -x^1 f(x^1) - x^2$$

rendszerre a

$$\frac{\partial v}{\partial x^1} = (1+f(x^1))x^1 + x^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x^2} = x^1 + x^2$$

választva azt kapjuk

$$\dot{v}(x) = \frac{\partial v}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \frac{\partial v}{\partial x^2}\dot{x}^2 = -(x^1)^2 f(x^1),$$

és figyelembe véve, hogy a potenciálosság

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial x^1} = 1$$

feltételei teljesülnek, a v függvény egy tetszőleges út mentén vett integrálással adódik

$$v = \int_0^{x^1} \frac{\partial v}{\partial y^1} dy^1 + \int_0^{x^2} \frac{\partial v}{\partial y^2} dy^2 = \frac{1}{2}(x^1+x^2)^2 + \int_0^{x^1} f(y^1) y^1\, dy^1.$$

Néhány változata e módszernek, amely a *Ljapunov-függvényt* a gradiense megadásával állítja elő, szerepel E. A. BARBASIN (4,7), V. A. KOROTKOV (1), I. L. PECZKOWSKI és R. W. LIU (1) dolgozataiban.

J. A. WALKER és L. G. CLARK (1) az

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = 0, \quad x^{i+1} = \frac{dx^i}{dt}$$

egyenlet *Ljapunov-függvényét*

$$v = \int_0^{x^{n-1}} f(x^1, \dots, x^{n-1})\, dx^{n-1} + \frac{(x^n)^2}{2} + F(x^1, \dots, x^n)$$

alakban állítják elő, ahol $F(x^1, \dots, x^n)$ speciálisan a $\dot{v}$ egyszerűsítésére van megválasztva.

CHEN CHION-SHIUM és E. KINNEN (1) az

$$\dot{x} = f(x)$$

nemlineáris autonóm rendszer *Ljapunov-függvényének* meghatározását visszavezeti egy $h(x)$ segédvektor előállítására. Utalnak rá, hogy sok korábban ismert módszer levezethető ebből a gondolatból. Megadnak egy g vektort

$$g_i = f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1} - f_{i+1} - \dots - f_n$$

komponensekkel, itt $(g^T f) = 0$. Aztán egy olyan $h(x)$ vektort keresnek, hogy

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = g(x) + h(x) \quad \left(\text{vagy} \quad \frac{\partial(g_i + h_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial(g_j + h_j)}{\partial x^i}\right).$$

Maga a függvény integrálással adódik

$$v(x) = \int_0^x (g(y) + h(y))^T\, dy.$$

E. T. WALL (1), E. T. WALL és L. MACMAYNARD (1) és mások segéd differenciálegyenlet-rendszereket vezetnek be (pl.: egzakt differenciálegyenletek), amelyeket később a szükséges *Ljapunov-függvény* előállításának egyszerűsítésére használnak. A szerzők topologikusnak nevezik ezt a módszert (példájukban ugyanahhoz az eredményhez vezet, mint az energetikus módszer).

A *Ljapunov-függvények* különböző módszerekkel való megalkotásának mély gondolatait és eredményeit tartalmazzák a *Ljapunov-tételek* megfordításával kapcsolatos kutatások. Itt megjegyzendők I. G. MALKIN (1, 2, 7), K. P. PERSZIDSZKIJ (1—4), N. N. KRASZOVSZKIJ (3, 4), E. A. BARBASIN (1, 2), E. A. BARBASIN és E. N. KRASZOVSZKIJ (1, 2), J. KURZWEIL (1, 2), V. I. ZUBOV (2, 3, 4), J. L. MASSERA (1—3), T. YOSHIZAWA (1) munkái. Ebben az irányban a legtöbb erőfeszítést LJAPUNOV alapvető stabilitási, labilitási és aszimptotikus stabilitási tételeinek megfordítására, illetve az (1.1) differenciálegyenlet jobb oldalának és a keresett *Ljapunov-függvények* simaságának viszonyára fordították.

Sajnos egyenlőre még nincs, de az itt rendelkezésre álló alapokra épülve kidolgozandó egy olyan konstruktív módszer, amely effektíven alkalmazható lenne a gyakorlatban szereplő konkrét esetekben a stabilitás eldöntésére.

Megemlítendők a nagyszámú dolgozatban előállított *Ljapunov-függvények* kisdimenziós nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek globális aszimptotikus stabilitása vizsgálatára (E. A. BARBASIN (3), N. N. KRASZOVSZKIJ (2), E. I. ZSELEZNOV (1), V. A. PLISSZ (1, 2), A. M. OGURCOV (1), A. SKIDMORE (1), P. J. PONZO (1), I. V. GAJSUN (1), SZ. N. SIMANOV (1) és mások). E feladatnál néhány dolgozatban (N. N.

KRASZOVSZKIJ (5), J. P. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (1), J. L. WILLEMS (1)) kísérletet tettek a *Ljapunov-függvények* zárt szintfelületeit darabokból összeállítani.

D. BOYANOVITCH (1) kétdimenziós rendszerek stabilitása vizsgálatánál *Ljapunov-függvény*nek az áramfüggvényt és a hidrodinamikai potenciált választotta, melyek sor alakban effektíven meghatározhatók.

Az utóbbi időben nagy erőfeszítéseket tettek arra, hogy számítógépek segítségével megoldják a *Ljapunov-függvények* optimális (a vonzási tartomány becslése értelmében) megválasztásának kérdését. J. J. RODDEN (1, 2) javasolt egy számolási módszert, amely lehetővé teszi számológépen „kipróbálni" a *Ljapunov-függvényt,* meghatározni a stabilitási tartományt, becsülni és összehasonlítani a különböző függvényeket. A V. I. ZUBOV (5) és D. K. INGWERSON (1) módszerei alapján másod- és harmadrendű rendszerekre képezett függvényekre szerepelnek példák (lásd még: V. A. KOROTKOV (1), G. M. ADAMENKO és I. V. GAJSUN (1), ST. WEISSENBERGER (1—3), D. YU (1), T. H. GEORGE (1, 2, 3), W. WILSON (1), S. G. MARGOLIS, W. G. VOGT (1), G. R. GEISS, V. COHEN és D. ROTSCHILD (1), E. J. DAVISON és K. COWAN (1), A. BERGER és L. LAPIDUS (1), E. J. DAVISON és E. M. KURAK (1), J. R. HEWIT és C. STOREY (1)). J. R. HEWIT és C. STOREY (1, 2) felhasználták és továbbfejlesztették J. J. RODDEN (1), ZUBOV és INGWERSON módszerére kidolgozott *Ljapunov-függvények* optimális kiválasztási algoritmusát. Az optimális vonzási tartomány becslésének eljárása a szimplex módszeren alapul (J. A. NELDER és R. MEAD (1)).

Mindezen, a *Ljapunov-függvények* optimális kiválasztásával és a számítógépek alkalmazásával kapcsolatos kérdések a LJAPUNOV második módszerének vizsgálata előtt álló alapvető problémákat képviselik. Véleményünk szerint e témakörben találhatók a fejlődés legvalószínűbb lehetőségei, hogy siker esetén a LJAPUNOV-függvényeket felhasználhassák, mint apparátust konkrét gyakorlati feladatok stabilitása és kvalitatív analízise megoldására.

MÁSODIK FEJEZET

LJAPUNOV-FÜGGVÉNYEK SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREKRE

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a *Ljapunov-függvények* előállítási módszereit a szabályozási rendszerek (SzR) dinamikájával kapcsolatos különböző kérdések vizsgálatára. Olyan SzR-t tekintünk, melyeket egy vagy több nemlineáris tagot tartalmazó közönséges differenciálegyenletek írnak le. Tárgyalásunkban a legnagyobb figyelmet az abszolút stabilitás vizsgálatára szolgáló *Ljapunov-függvény*ekre fordítjuk, de kitérünk az SzR más tulajdonságait (vonzási tartomány becslése, disszipativitás stb.) vizsgáló Ljapunov-függvényekre is.

Az LF módszere szabályozási rendszerek elméletében történő alkalmazásának igen nagy az irodalma, több száz közlemény, közöttük egy egész sor kitűnő áttekintés (A. I. LURJE és E. N. ROSENWASSER (1), F. R. GANTMAHER és V. A. JAKUBVOICS (1), V. V. RUMJANCEV (9), E. SZ. PJATNYICKIJ (1), M. A. AJZERMAN (5), R. W. BROCKETT (2), R. REISSING (1)) és monográfia (A. I. LURJE (1), A. M. LETOV (2), M. A. AJZERMAN, F. R. GANTMAHER (1), S. LEFSCHETZ (2), V. M. POPOV (1), J. L. WILLEMS (2)). Közeli kérdéseket vizsgáltak P. V. BROMBERG (1), V. I. ZUBOV (6), G. V. KAMENKOV

(1), V. M. KUNCEVICS és JU. N. CSEHOVOJ (1), T. K. SZIRAZETGYINOV (1), S. BARNETT és C. STOREY (1), W. HAHN (2), A. HALANAY (1), A. HALANAY és D. WEXLER (1), J. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (1), C. T. LEONDES (1), T. YOSHIZAWA (2). Nekünk mégis úgy tűnik, hogy szükséges egy olyan áttekintést készíteni, ami leírja a *Ljapunov-függvények* különböző előállítási módszereit szabályozási rendszerekre.

A továbbiakban olyan szabályozási rendszereket vizsgálunk, amelyek állapotvektora tetszőlegesen magas dimenziójú. Alacsony dimenziós SzR esetére a módszerek megtalálhatók A. I. LURJE (1) és E. A. BARBASIN (7) könyveiben és nagyszámú cikkben, melyek egy részének listáját E. A. BARBASIN (7) közli. A továbbiakban ismertetendő LF előállítási módszerek elsősorban ahhoz a csoporthoz tartoznak, melyben a *Ljapunov-függvények* struktúráját adják meg (a paraméterek néha a derivált megadásával határozhatók meg), ezért a módszerek osztályozása a rendszer típusa, pontosabban a nemlinearitások száma, illetve osztálya szerint történik.

1. Szabályozási rendszerek egy folytonos nemlinearitással

Vizsgáljuk az egy nemlineáris tagot tartalmazó

$$\frac{dx}{dt} = Px + b \cdot \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \tag{2.1}$$

szabályozási rendszert, ahol x n-dimenziós megoldás vektor, b, c állandó, n-dimenziós vektorok, P állandó $(n \times n)$-es mátrix, $\varphi(\sigma)$ a σ skalár argumentum nemlineáris skalár függvénye. A $\varphi(\sigma)$ függvényt általában nemlineáris karakterisztikának, vagy egyszerűen nemlinearitásnak nevezik, és felteszik, hogy tetszőleges, a $-\infty < \sigma < +\infty$ intervallumon egyértékű, folytonos, valós függvény, melyre

$$0 \leqq \varphi(\sigma)\sigma \leqq k\sigma^2 \quad (k = \text{konst.} \leqq +\infty). \tag{2.2}$$

Ezen kívül felteszik, hogy a (2.1) rendszerre teljesül az $x(t)$ megoldások valamilyen folytathatósági feltétele minden $t \geqq 0$-ra, és minden $x(0) \in R^n$ kezdeti feltételre.

A legfontosabb kérdés a (2.1) rendszerről az $x=0$ nulla megoldásának abszolút stabilitása, vagy egyszerűen a rendszer abszolút stabilitása. Az utóbbi azt jelenti, hogy az $x=0$ megoldás globálisan aszimptotikusan stabilis az R^n-ben tetszőleges $\varphi(\sigma)$ nemlinearitásra, amely kielégíti a fenti feltételeket. (Az abszolút stabilitás definíciója a (2.1) típusúnál általánosabb rendszerekre analóg módon történik.)

A (2.1) rendszer alapesete — amikor a P mátrix *Hurwitz-típusú*, kritikus esetek — amikor a $|P - \lambda I| = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek $(\lambda_s(P))$ egy része a képzetes tengelyen van, a többi gyök pedig ettől a tengelytől balra helyezkedik el. Kiválasztjuk a legegyszerűbb kritikus esetet, amikor a képzetes tengelyen csak egy nulla gyök van. A kritikus esetekben a $\varphi(\sigma)$ függvény (2.2) helyett a következő feltételeket elégíti ki:

$$0 < \varphi(\sigma)\sigma \leqq k\sigma^2 \quad (k = \text{konst.} \leqq +\infty), \tag{2.3}$$

vagy

$$0 < \varepsilon\sigma^2 \leqq \varphi(\sigma)\sigma \leqq k\sigma^2 \quad (\varepsilon = \text{konst.},\ k = \text{konst.} \leqq +\infty). \tag{2.3'}$$

A *Ljapunov-függvények módszere* egyike az abszolút stabilitási feladat megoldására használt legfontosabb eszközöknek, és alkalmazása legtöbbször a következő ismert (E. A. BARBASIN és N. N. KRASZOVSZKIJ (1), A. P. TUZOV (1)) tételen alapul, melyet a hivatkozás megkönnyítése céljából elnevezünk

A. Tétel.

Ha minden (2.2) vagy (2.3) feltételt kielégítő $\varphi(\sigma)$-ra létezik olyan $v(x)$ az egész R^n-ben differenciálható skalár függvény, melyre

1° $v(0)=0, \quad v(x)>0 \quad \forall x \neq 0,$

2° $\dot{v}(x)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}(Px+b\varphi(\sigma))\right)<0, \quad \forall x \neq 0,$

3° $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} v(x)=+\infty, \quad \|x\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2},$

akkor a (2.1) rendszer nulla megoldása abszolút stabilis.

A tétel igaz marad, ha a 2° feltételt a következőre cseréljük:

$$\dot{v}(x) \leqq 0, \quad \forall x \in R^n,$$

$\{x \in R^n;\ \dot{v}(x)=0\}$ halmaz nem tartalmazza a (2.1) rendszer egyetlen teljes félpályáját sem.

A. I. LURJE és V. N. POSZTNYIKOV (1) munkáitól kezdve a (2.1) rendszer triviális megoldásának abszolút stabilitásához *Ljapunov-függvény*nek a következő (kvadratikus alak plusz a nemlinearitás integrálja) függvényt használjuk.

$$v(x)=x^TAx+\beta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma, \tag{2.4}$$

ahol $A=A^T$ állandó $(n\times n)$-es mátrix, β valós szám, melyet úgy választunk meg, hogy a $v(x)$ kielégítse az A. tétel feltételeit. A (2.4) alakú LF előállításának alapvető módszereit A. I. LURJE (1) és I. G. MALKIN (4, 5, 6) javasolták.

A. I. LURJE (1) könyvében $k=+\infty$, a P mátrix sajátértékei különbözőek, $\beta=0$ az alap, $\beta=1$ a legegyszerűbb kritikus esetre, az A mátrix pedig n paramétertől, $a_1, \ldots, a_n$ függ. Az A. tétel 2° feltételeinek teljesüléséhez az a_i paramétereknek ki kell elégítenie egy kvadratikus algebrai egyenletekből álló egyenletrendszert (*Lurje-féle megoldó egyenleteket* M. A. AJZERMAN és F. R. GANTMAHER (1) terminológiája szerint).

Ha létezik valós megoldása a rendszernek, akkor ez elégséges a (2.1) rendszer $x=0$ megoldása abszolút stabilitásához az alap, illetve a legegyszerűbb kritikus esetben. Ilyen formán LURJE (2.4) típusú LF előállítási módszere a megoldó egyenletek vizsgálatához vezet, és a mi osztályozásunkban azon módszerek közé tartozik, ahol a függvény alakja adott.

I. G. MALKIN (2.4) típusú *Ljapunov-függvényeket* használ, $\beta=1$, de A. I. LURJE-től eltérően a $\dot{v}(x)$ definitsége nem a megoldó egyenletekhez vezet nála, hanem a *Sylvester-kritérium* alkalmazásához a $\dot{v}(x)$-re, mint x^i és φ-től függő kvadratikus alakra. Ez a módszer a legegyszerűbb kritikus esetben az abszolút stabilitás effektív elégséges feltételét adja egy egyenlőtlenség alakjában, de az alapesetre ez az egyenlőtlenség nem teljesülhet, vagyis a paraméterek terében üres halmazt határoz meg. Mégis I. G. MALKIN módszerét az E. M. ROSENWASSER (1) által javasolt S-procedúra végrehajtása alkalmassá teszi az alapeset vizsgálatára is. A *Malkin-féle A* mátrix meghatározása a lineáris stacionárius egyenletre felírt *Ljapunov-féle mátrixegyenlet* alapján történik, ezért I. G. MALKIN módszere az LF kombinált előállítási módszerei közé sorolható.

A. I. LURJE LF előállítási módszerét a (2.1) rendszerre különböző irányokba továbbfejlesztették. A. M. LETOV (2), A. K. BEGYELBAJEV (1), O. I. KOMARNICKAJA (1), JU. I. ALIMOV (1) és más szerzők közleményeikben, I. G. MALKIN módszere pedig alapul szolgált különböző egyszerűsített abszolút stabilitási kritériumok előállításához (A. M. LETOV (2), S. LEFSCHETZ (2), A. K. BEGYELBAJEV (1)), vagyis olyan kritériumokhoz, ahol a (2.4) *Ljapunov-függvényt* speciális alakban választják (pl. *A-diagonális mátrix*, a (2.4)-ben szereplő integrált az $\alpha\sigma^2$ (α=konst.) taggal helyettesítik stb.).

E. N. ROSENWASSER (2) felhasználva a (2.4) típusú LF tetszőleges β-val az integrál előtt és az S-procedúrát az alapesetre A. I. LURJE módszerének az alap-, illetve kritikus esetekben a leginkább általános és végleges formát adta, az (1) cikkében pedig egy olyan általános (2.4) típusú LF előállítási eljárást javasolt az alapesetre, ami magában foglalja speciális esetként A. I. LURJE megoldó egyenletek módszerét és I. G. MALKIN módszerét. Ez az eljárás ROSENWASSER következő tételén alapul:

Ahhoz, hogy a $v(x)$ (2.4) típusú függvény kielégítse az A. tétel feltételeit és biztosítsa az abszolút stabilitást a $[0, k]$ szögben, az alapesetben szükséges és elégséges:

a) a (2.1)-ből $\varphi(\sigma)=k\sigma$ helyettesítéssel kapott lienáris rendszer aszimptotikusan stabilis legyen,

b) $\dot{v}(x)$ teljes derivált $\varphi(\sigma)=h\sigma$ helyettesítés után negatív legyen minden $h\in[0, k]$-ra.

Első ránézésre úgy tűnik, hogy a ROSENWASSER tételét kielégítő (2.4) típusú *Ljapunov-függvények* osztálya szélesebb, mint az S-procedúra alkalmazásával a *Lurje-féle megoldó egyenletek*ből kapott függvények osztálya. Azonban ez a következtetés nem igaz.

M. A. AJZERMAN és F. R. GANTMAHER (1), V. A. JABUKOVICS (1, 3) közleményeikben megmutatták, hogy az alapesetben a (2.4) típusú, az A. tételt kielégítő LF létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a *Popov-egyenlőtlenség* (V. M. POPOV (1))

$$\pi(\omega) = k^{-1}+\mathrm{Re}(1+i\omega\theta)c^T(P-i\omega I)^{-1}b > 0, \tag{2.5}$$
$$\forall\omega\in[0, +\infty),$$

igaz legyen valamilyen valós θ-ra, és ezenkívül megmutatták, hogy a *Lurje módszer*rel (vagyis a megoldó egyenletek felhasználásával) meghatározott (2.4) függvények osztálya ugyanolyan abszolút stabilitási tartományt ad a rendszer paramétereinek terében, mint az összes lehetséges (2.4) típusú függvény. Analóg következtetések igazak a legegyszerűbb kritikus esetre (lásd: R. E. KALMAN (1), V. A. JAKUBOVICS (1, 3), K. R. MEJER (1, 2)).

M. A. AJZERMAN és F. R. GANTMAHER (1, 2), V. A. JAKUBOVICS (2) vizsgálták az általános kritikus eseteket az abszolút stabilitási feladatban feltéve, hogy $\varphi(\sigma)$ eleget tesz a (2.3) vagy (2.3') egyenlőtlenségeknek. Megmutatták, hogy a (2.5) *Popov-*

feltétel $\geqq$ jellel és még néhány másodrendű korlátozás szükséges és elégséges a (2.4) típusú pozitív definit és szemidefinit deriváltú LF létezéséhez (a derivált minimális vagy gyenge kifejezése).

Legyen a (2.1) rendszerben a $\varphi(\sigma)$ nemlinearitás a szokásos folytonossági és (2.2), illetve (2.3) „szektorhoz tartozási" feltétel mellett még differenciálható is minden $\sigma \in (-\infty, +\infty)$-re és

$$\begin{gathered} \varphi'(\sigma) \leqq \alpha_1, \quad \varphi'(\sigma) \geqq -\alpha_2 \\ (k \leqq \alpha_1 \leqq +\infty, \quad -\infty \leqq -\alpha_2 \leqq 0). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Az ilyen rendszer abszolút stabilitási feladatára V. A. JAKUBOVICS (5) a *Ljapunov-függvények* egy általánosabb osztályát javasolja

$$v(x) = x^T A x + 2x^T h\varphi + \gamma\varphi^2 + \beta \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma \tag{2.7}$$

(h állandó n-vektor, γ, β konst.). Az A. tétel feltételeit kielégítő (2.7) típusú függvények létezésének feltételei az alap-, illetve kritikus esetekben mátrix egyenlőtlenségekhez vezetnek, melyek megoldása a POPOV (2.5) feltételénél általánosabb frekvencia tételekhez vezet.

R. W. BROCKETT és J. L. WILLEMS (1) a (2.1) rendszerre, ahol $\varphi(\sigma)$ eleget tesz a

$$0 < \varphi(\sigma)\sigma < b, \quad \varphi'(\sigma) > -c \quad (b, c = \text{konst.} > 0)$$

feltételeknek, az abszolút stabilitás V. A. JAKUBOVICS által megnevezett feltételétől eltérő frekvencia feltételt kaptak. Bebizonyították egy új, az A. tétel feltételeit kielégítő LF létezését egy bizonyos görbe vonalú integrál alakjában. V. A. JAKUBOVICS (8) azonban bebizonyította, hogy amikor az ő frekvencia feltételeik teljesülnek a (2.1) rendszerre, akkor előállítható egy *Ljapunov-függvény*

$$v(x) = x^T A x + \beta \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi(\sigma_j)\,d\sigma_j \tag{2.8}$$

alakban, ahol k tetszőleges pozitív egész szám, $\theta_j \geqq 0$ valós állandók, σ_j pedig új fázis változók, amelyeket az x-hez kiegészítésként vezetünk be a (2.1) rendszerben, és melyek kielégítik a

$$\begin{gathered} \frac{d\sigma_j}{dt} + \tau_j^0 \sigma_j = \alpha_j \sigma, \quad (j = 1, \ldots, k) \\ (\tau_j^0 \geqq \alpha_j \geqq 0, \quad \tau_j^0, \alpha_j = \text{konst.}) \end{gathered} \tag{2.9}$$

egyenleteket és a (2.8) függvény eleget tesz az A. tétel feltételeinek.

M. A. L. THATHACHAR és M. D. SRINATH (1) M. A. L. THATHACHAR és M. D. SRINATH és H. K. RAMAPRIYAN (1) megvizsgálták a (2.1) rendszert folytonos, páratlan, monoton $\varphi(\sigma)$ nemlinearitással és *Hurwitz-típusú A* mátrix-szal. Az abszolút stabilitás bizonyítására a következő, az A. tétel feltételeit kielégítő, *Ljapunov-függvényt* használják:

$$v(x) = x^T Ax + \beta_0 \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma + \sum_{i=1}^{\nu_2} \left[\beta_i \int_0^{\theta_i} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \beta_i' \int_0^{\theta_i'} \varphi(\sigma)\, d\sigma\right] + \tag{2.10}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu_2} \left[\beta_k \int_0^{\theta_k} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \beta_k' \int_0^{\theta_k'} \varphi(\sigma)\, d\sigma\right],$$

ahol $A = A^T$ $(n\times n)$-es mátrix, $\beta_0, \beta_i, \beta_i', \beta_k, \beta_k' = \text{konst.} \geqq 0$, ν_1, ν_2 tetszőleges nemnegatív számok,

$$\theta_i = c^T R_i x; \quad \theta_i' = c^T g_i x; \quad \theta_k = c^T \tilde{R}_k x; \quad \theta_k' = c^T \tilde{g}_k x,$$

$R_i, \tilde{R}_k, g_i, \tilde{g}_k$ mátrixok. M. A. L. THATHACHAR, M. D. SRINATH és H. K. RAMAPRIYAN (1), D. D. SILJAK és C. K. SUN (2) megnézték azokat az LF-eket is, amelyek megoldják az abszolút stabilitás kérdését a (2.1) rendszerre, amikor $\varphi(\sigma)$ eleget tesz a

(a) $|\varphi(\sigma)/\varphi(-\sigma)| \leqq c, \quad \forall \sigma \in (-\infty, +\infty) \quad (c = \text{konst});$

(b) $|\sigma_1/\sigma_2|^{1/m} \leqq |\varphi(\sigma_1)/\varphi(\sigma_2)| \leqq |\sigma_1/\sigma_2|^m, \ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in (-\infty, +\infty),$ m — egész szám;

(c) $\frac{1}{2}\sigma\varphi(\sigma) - \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma \geqq 0, \quad \forall \sigma \in (-\infty, +\infty)$

feltételeknek.

A (2.7), (2.8), (2.10) alakú *Ljapunov-függvények* előállítási módszerei a mi osztályozásunk szerint kombinált LF meghatározási módszernek számítanak. Az itt leírt LF meghatározási módszerek alapvető nehézsége a kifejezésekben szereplő nagyszámú konstans helyes megválasztásában és a $v(x)$, ill. $\dot{v}(x)$ definitségének ellenőrzésében rejlik. Ezért a (2.1) szabályozási rendszer *Ljapunov-függvény*ével kapcsolatos fontos feladatok között említhető meg a kutatások szükségessége az optimalizálási kritériumok és az LF konstansai kiválasztására szolgáló számítógépes algoritmusok kidolgozása.

Érdekes feladat még A. I. LURJE módszerével meghatározni az optimális *Ljapunov-függvényt*, vagyis az olyan függvényt, amely az SzR paramétereinek terében azt az abszolút stabilitási tartományt adja, amit az összes lehetséges (2.4) függvény segítségével kapott tartományok egyesítésével kapnánk, vagyis olyat, mint a (2.5) *Popov-féle frekvencia feltétel* az abszolút stabilitásra. Az alkalmazások szempontjából fontos probléma az LF előállítása meghatározott osztályban levő nemlinearitással rendelkező (2.1) rendszerre pl. a szabályozás elmélet szokásos nemlinearitásaira „általánosított relé", „telítés" stb.

V. A. JAKUBOVICS (2) megfogalmaz néhány bevezető elképzelést e probléma megoldására, de úgy tűnik, hogy kielégítő eredmények az LF előállításánál csak nemlinearitás jellegzetességeinek maximálisan teljes figyelembevételével adódnak.

2. Szabályozási rendszerek egy szakadásos hiszterézis jellegű vagy nemstacionárius nemlinearitással

Tekintsük a (2.1) rendszert, ahol $\varphi(\sigma)$ — olyan szakaszonként folytonos függvény, hogy minden σ_0 szakadási pontjában léteznek véges határértékek

$$\varphi_-(\sigma_0) = \lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} \varphi(\sigma) \quad \varphi_+(\sigma_0) = \lim_{\sigma \to \sigma_0 + 0} \varphi(\sigma).$$

A szakaszonként folytonos karakterisztikájú rendszerek különlegessége (relé rendszerek, rendszerek száraz súrlódással stb.), hogy lehetségesek csúszó mozgások a $\varphi(\sigma)$ függvény szakadásainak felületén. Ezen kívül e rendszereknek nemcsak egy nyugalmi helyzete lehet.

D. V. ANOSZOV (1) vizsgálta a (2.1) relé rendszer $(\varphi(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma))$ $x=0$ egyensúlyi helyzetének stabilitását kicsiben a

$$v(x) = E(x) - \alpha(x) \tag{2.11}$$

Ljapunov-függvény segítségével, ahol $E(x)$ a relé rendszer teljes energiája, $\alpha(x)$ pedig valamilyen kvadratikus alak. JU. I. ALIMOV (2) megnézte (2.1) globális stabilitását

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} -(1-\varphi_0), & \sigma < 0 \\ \xi, & \sigma = 0, \quad \varphi_0 = \text{konst.}, \ |\varphi_0| < 1, \quad \xi \in [-(1-\varphi_0), 1+\varphi_0] \\ 1+\varphi_0, & \sigma > 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

nemlinearitással az alapesetben, ill. a legegyszerűbb kritikus esetben. A (2.1), (2.12) rendszer $v(x)$ *Ljapunov-függvény*e „összevarrás" útján készül a $\{x \in R^n;\ \sigma=0\}$ felületen az $\{x \in R^n;\ \sigma=0\}$ és $\{x \in R^n;\ \sigma<0\}$ részterekre külön-külön felépített kvadratikus *Ljapunov-függvény*ekből a folytonosság biztosításával.

E. I. GERASCSENKO és SZ. T. ZAVALISCSIN (1) közleményeikben megvizsgálták az $\dot{x} = Px - b \operatorname{sign} c^T x$ relé rendszert szakadásos *Ljapunov-függvény* segítségével

$$v(x) = x^T A x + 2 l^T x \operatorname{sign} c^T x \tag{2.13}$$

$(A = A^T$ állandó $(n \times n)$-es mátrix, l állandó n-vektor$)$, és megfogalmazták az $x=0$ egyensúlyi helyzet globális stabilitásának feltételeit. A (2.13) függvény használata kiszélesíti a stabilitási tartományt JU. I. ALIMOV függvényéhez képest. Szakadásos *Ljapunov-függvények* alkalmazásával foglalkozik E. L. ORKINA (1) cikke is.

V. A. JAKUBOVICS (2, 4) megvizsgálta az abszolút stabilitás kérdését olyan (2.1) rendszerre, melynek egyetlen egyensúlyi helyzete van és a $\varphi(\sigma)$ tetszőleges szakaszonként folytonos függvény, amely kielégíti az alapesetben a (2.2) a kritikus esetben a (2.3), (2.3′) feltételeket. Olyan (2.4) típusú LF-t használt, ahol $\varphi(\sigma)$ helyett egy a (2.2) vagy (2.3) összefüggést kielégítő $\psi(\sigma(t))$ folytonos függvény állt, amely a (2.1) rendszer A. F. FILIPPOV (1) szerint értelmezett megoldásánál keletkezik.

A. H. GELIG (1) olyan $\sigma=0$-ra szakadásos $\varphi(\sigma)$-ra analizálja a (2.1) rendszert, ahol $\sigma\varphi(\sigma) \geqq 0$ az alap, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ a kritikus esetekben és

$$\varphi(\sigma) \geqq \varphi(+0) - \mu\sigma, \qquad 0 < \sigma \leqq \varepsilon,$$

$$\varphi(\sigma) \leqq \varphi(-0) - \mu\sigma, \qquad -\varepsilon \leqq \sigma < 0.$$

Felteszi, hogy a (2.1) rendszer rendelkezik egy korlátos, összefüggő, zárt Λ stacionárius halmazzal (nyugalmi szakasz). Felhasználva a

$$\begin{gathered} \dot{v}(x) = (x-c)^T A(x-c) + \beta \int_0^\sigma \varphi_1 \, d\sigma \\ c \in \Lambda, \quad \Lambda = \{x \in R^n\colon\ x = P^{-1}\sigma\psi, \\ \psi \in [\varphi(-0), \quad \varphi(+0)]\}, \quad \varphi_1 = \varphi(\sigma) - \psi + \mu\sigma \end{gathered} \tag{2.14}$$

Ljapunov-függvényt az alapesetben a mátrix egyenlőtlenségről szóló tételek segítségével bebizonyított egy tételt a Λ pontonkénti stabilitásáról. A (2.14) *Ljapunov-függvény* tulajdonságai egy kevéssé eltérőek az A. tételben szereplő *Ljapunov-függvényétől.* A kritikus eseteket A. H. GELIG és O. I. KOMARNYICKAJA (1) szintén a (2.14) függvény segítségével vizsgálták. G. A. LEONOV (1) az előzőhöz közeli feladatokat oldott meg.

V. A. JAKUBOVICS (6) megvizsgálta a

$$\frac{dx}{dt} = Px + b\varphi[\sigma, \varphi_0]_t, \quad \sigma = c^T x$$

szabályozási rendszert hiszterézis jellegű $\varphi = \varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ nemlinearitással. Ha nem teszünk fel semmilyen további feltételt (a „szektorhoz tartozáson" kívül) a hiszterézis függvényre, akkor az ilyen rendszer abszolút stabilitásának kérdése az A. tételt kielégítő

$$v(x) = x^T A x, \quad A^T = A \tag{2.15}$$

kvadratikus alak segítségével oldható meg. Ha feltesszük, hogy a $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ hiszterézis függvény eleget tesz a pozitivitás feltételének is, akkor az abszolút stabilitás bizonyítására a következő funkcionált alkalmazzák

$$\begin{aligned} v(t) = {} & x^T(t) A x(t) + \beta \int_0^t \varphi[\sigma, \varphi_0]_\tau \, d\sigma(\tau) + \\ & + \int_0^t \left[\sigma(\tau) - \varphi[\sigma, \varphi_0]_{\tau/k}\right] \varphi[\sigma, \varphi_0]_\tau \, d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ez a funkcionál valamelyest gyengébb tulajdonságokkal rendelkezik, mint az A. tétel *Ljapunov-függvénye.*

Tegyük fel most, hogy a (2.1) rendszerben a nemlineáris φ függvény nemcsak a σ-tól, hanem a t időtől is függ, vagyis $\varphi = \varphi(\sigma, t)$ és

$$0 \leqq \varphi(\sigma, t)\sigma \leqq k\sigma^2, \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad \sigma \in (-\infty, +\infty). \tag{2.17}$$

A nemlinearitások osztályának szélesítése természetesen vezet az abszolút stabilitás feltételeinek szigorításához. Úgy tűnik E. M. ROSENWASSER (3) érintette először az abszolút stabilitás kérdését a (2.1) rendszerre, de mindkét argumentuma szerint folytonos $\varphi(\sigma, t)$ függvény esetében. Megmutatott olyan feltételeket, melyekre a (2.15) kvadratikus alak kielégíti az A. tétel feltételeit. R. V. BROCKETT és L. J. FORYS

(1) hasonló állításokat kaptak. V. A. JAKUBOVICS (4) megmuttata, hogy ugyanez az állítás igaz, amikor $\varphi(\sigma, t)$ folytonos σ szerint és mérhető t szerint.

J. A. WALKER (1) a (2.15)-nél egy kicsit általánosabb *Ljapunov-függvényt* ajánlott a (2.1) rendszer vizsgálatára, a φ-re a (2.17)-től eltérő korlátozások mellett. Legyen $\Phi(\sigma, t)$ minden argumentuma szerint folytonosan differenciálható függvény, olyan, hogy

$$\Phi_\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = \varphi(\sigma, t), \quad \Phi(0, t) \equiv 0,$$

és $\psi(\sigma)$ olyan függvény, amely kielégíti a

$$0 \leqq \Phi(\sigma, t) \leqq \psi(\sigma), \quad \psi(0) = 0,$$

$$\Phi_\sigma^2 \leqq k(\sigma\Phi_\sigma - q\Phi_t)$$

$$\left(\Phi_t = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad k, q = \text{konst.}, \quad k > 0, \quad q \geqq 0\right),$$

akkor a (2.1) rendszerre a

$$v(t, x) = x^T A x + q\Phi(\sigma, t) \tag{2.18}$$

alakú *Ljapunov-függvény* megoldja az abszolút stabilitás kérdését. M. A. L. THATHACHAR, M. D. SRINATH, H. K. RAMAPRIYAN (2) megvizsgálták a (2.1) rendszert, amikor $\varphi(\sigma, t)$ folytonos σ szerint, és differenciálható t szerint, és monoton, páratlan, egy sor más tulajdonsággal rendelkezik. Ezen nemlinearitási osztályokra léteznek, a (2.17)-en kívül, további kvadratikus kapcsolatok a φ és a σ között, és az autonóm esettel való analógia alapján (2.10) alakú *Ljapunov-függvény*eket használnak, ahol $\varphi(\sigma)$ helyett $\varphi(\sigma, t)$ áll. Megjegyezzük még a következő érdekes munkákat (K. S. NARENDRA és J. H. TAYLOR (1, 2), J. L. WILLEMS (2), K. S. NARENDRA és R. M. GOLDWYN (1), R. W. BROCKETT (2), M. GRUBER és J. L. WILLEMS (1), Z. V. REKASIUS és J. R. ROWLAND (1), Y. S. CHO és K. S. NARENDRA (1), E. NOLDUS (1), JA. V. VENKATYES (1)), melyek szintén a (2.1) rendszerre különböző $\varphi(\sigma, t)$ mellett felírható *Ljapunov-függvény*ekkel foglalkoznak.

Az ebben a pontban szereplő *Ljapunov-függvény* előállítási módszerek összehasonlító analízisével az irodalomban lényegében nem foglalkoztak, ez a kérdés további vizsgálatokat igényel.

3. Több nemlineáris tagot tartalmazó szabályozási rendszerek

Írja le a szabályozási rendszert a

$$\frac{dx}{dt} = Px + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Cx \tag{2.19}$$

ahol P, B, C állandó, valós $n \times n$-es, $n \times m$-es, $m \times n$-es mátrixok, x n-dimenziós vektor, $\varphi(\sigma)$, σ m-dimenziós vektorok.

Az első eredményeket a (2.19) rendszer nulla megoldásának abszolút stabilitásáról $m \geqq 2$ és $\varphi(\sigma) = [\varphi_1(\sigma_1), \ldots, \varphi_m(\sigma_m)]^T$-re a következő alakú *Ljapunov-függvény* segítségével

$$v(x) = x^T Ax + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \int_0^{\sigma_i} \varphi_i(\sigma_i)\, d\sigma_i \tag{2.20}$$

$$(\beta_i = \text{konst.} \geqq 0)$$

kapták ismert közleményeikben A. M. LETOV (1), V. V. RUMJANCEV (2), A. M. LETOV és A. P. DUVAKIN (1), R. A. SZPASSZKIJ (1), A. I. LURJE és I. G. MALKIN módszerének módosításával. Ebben a folytonos $\varphi(\sigma)$ vektor komponensei kielégítették a

$$\varphi_i(0) = 0, \quad 0 < \varphi_i(\sigma_i) < k_i \sigma_i^2 \quad (k_i = \text{const}) \tag{2.21}$$

feltételeket.

Később F. R. GANTMAHER és V. A. JAKUBOVICS (1), K. S. NARENDRA és R. M. GOLDWYN (2), K. S. NARENDRA és C. P. NEWMAN (1) és mások bebizonyították, hogy POPOV frekvencia feltétele több nemlinearitás esetén szükséges és elégséges az A. tételt kielégítő (2.20) alakú, (β_i=konst., tetszőleges) *Ljapunov-függvény* létezéséhez az alap- és a kritikus esetekben a (2.21) osztályba tartozó nemlinearitásokra. B. D. O. ANDERSON (1) a $\varphi(\sigma)$ vektort

$$\varphi^T(\sigma)\sigma \geqq \varphi^T(\sigma) K \varphi(\sigma) \quad \forall \sigma_i \in (-\infty, +\infty) \tag{2.22}$$

alakúnak tételezi fel, ahol a K mátrix $\geqq 0$. Az alapesetben

$$v(x) = x^T Ax + 2\beta \int_0^{Cx} \varphi^T(\sigma)\, d\sigma \tag{2.23}$$

választja és leírja a feltételeket, amikor ez a függvény kielégíti az A. tétel feltételeit.

M. B. KUDAJEV (1) vizsgálja a

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} [p_{ij} x^j + b_{ij} \varphi_{ij}(x^j)], \quad (i = 1, \ldots, n;\ p_{ij},\quad b_{ij} = \text{konst.}) \tag{2.24}$$

rendszert n^2 szabályozóval, ahol $\varphi_{ij}(x^j)$ folytonos nemlineáris függvények, melyekre

$$\underline{h}_{ij} \leqq \varphi_{ij}(x^j)/x^j \leqq \bar{h}_{ij} \quad (\underline{h}_{ij}, \bar{h}_{ij} = \text{konst.}) \tag{2.25}$$

A következő típusú *Ljapunov-függvény*eket ajánlja

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x^i| \quad (a_i = \text{konst.}), \tag{2.26}$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i |x^i| + \sum_{j=n_1+1}^{n} \bar{a}_j (x^j)^2, \tag{2.27}$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i |x^i| + \sum_{j=n_1+1}^{n} \bar{a}_j (x^j)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \bar{b}_{ij} \int_0^{x_j} \varphi_{ij}(x^j)\, dx^j \tag{2.28}$$

és leírja a feltételeket, melyeknél az adott *Ljapunov-függvény* kielégíti az A. tételt. (2.26) alakú függvényt használ Sz. K. PERSZIDSZKIJ (1) is. I. V. GAJSUN (2) új *Ljapunov-függvény*eket javasol a (2.19) rendszerre, melyben φ skalárfüggvény két bemenettel.

Ha a (2.19) rendszerben a $\varphi(\sigma)$ nemlinearitás a (2.21) feltételek mellett még monoton és páratlan, akkor mint a skaláris $\varphi(\sigma)$ esetben a (2.20)-nál egy szélesebb osztálybeli *Ljapunov-függvény*eket alkalmaznak (K. S. NARENDRA és C. P. NEWMAN (1)). Például ha

$$(\sigma_i-\theta_i)[\varphi_i(\varphi_i(\sigma_i)-\varphi_i(\theta_i))]+\frac{1}{k}>0, \quad (i=1, \dots, m),$$

akkor célszerű választani a

$$v(x)=x^TAx+2\sum_{j=1}^{m}\beta_{0j}\int_0^{\sigma_j}\varphi_j(\sigma_j)\,d\sigma_j+2\sum_{i=1}^{v_1}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\int_0^{\theta_{ij}}\varphi_j(\theta_{ij})\,d\theta_{ij}, \tag{2.29}$$

ahol v_1 — tetszőleges egész szám, β_{0j}, β_{ij}=konstans, θ_{ij} — kiegészítő fázisváltozók.

A. H. GELIG (2) cikkében (2.19) alakú szabályozási rendszert tekint, melyben a $\varphi(\sigma)$ függvény szakaszonként folytonos, a lineáris rész karakterisztikus egyenletének pedig a bal oldali félsíkon levő gyökei mellett lehet egy nulla és egy pár tiszta képzetes gyöke. A stacionárius halmaz (amely a nemlinearitások szakadási hipersíkjainak metszetén fekszik) globális pontonkénti stabilitásának bizonyítására a következő alakú *Ljapunov-függvény*t használja

$$\begin{aligned} v(z,c)&=(y-y_\infty)^TA(y-y_\infty)+0{,}5(\zeta_1-\zeta_{1\infty})^2+0{,}5(\zeta_2-\zeta_{2\infty})^2+0{,}5\mu_1(\xi-\xi_\infty)^2+\\ &\quad+\mu_2\sum_{i=1}^{m}\theta_i\int_0^{\sigma_i}[\varphi_i(\lambda)-\varphi_{i\infty}]\,d\lambda, \end{aligned}\tag{2.30}$$

itt $z^T=(y, \zeta_1, \zeta_2, \xi)^T$, z n-dimenziós vektora a fázisváltozóknak, y $(n-3)$-dimenziós vektor, ζ_1, ζ_2, ξ-skalárok, y_∞, $\zeta_{1\infty}$, $\zeta_{2\infty}$, ξ_∞, $\varphi_{1\infty}$=konst., c — vektor a stacionárius halmazból

$$c^T=(y_\infty, \zeta_{1\infty}, \zeta_{2\infty}, \xi_\infty)^T, \quad \mu_1, \mu_2, \quad \theta_i=\text{konst.}$$

A mátrix egyenlőtlenségekről szóló tételek alapján megadja a (2.30) típusú, az A. tétel feltételeihez hasonló feltételeknek eleget tevő függvény létezésének feltételeit.

V. A. JAKUBOVICS (8) közölt a (2.19) rendszer egyensúlyi helyzetének abszolút stabilitására egy általános kritériumot, melyben a φ vektor-függvény lehet nemstacionárius, szakaszonként folytonos, hiszterézis jellegű stb. A nemlineáris tagok $\sigma_1, \dots, \dots, \sigma_m$ bemenő jelei és a $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ kimenő jelei között bizonyos kvadratikus kapcsolatot tételez fel

$$W_j=0, \quad j=1, \dots, k_1; \quad W_j\geqq 0, \quad j=k_1+1, \dots, k_1+k_2=k, \tag{2.31}$$

ahol W_j-k kvadratikus alakok $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, $\varphi_1, \dots, \varphi_s$-re nézve, a hiszterézis jellegű nemlinearitások pedig eleget tehetnek a pozitivitási feltételnek

$$\int_0^t\varphi_j\,d\sigma_h\geqq-\gamma, \quad \forall t\geqq 0 \quad (\gamma=\text{konst.}\geqq 0) \tag{2.32}$$

alakú bemenő jelek egy részére.

V. A. JAKUBOVICS tétele bizonyításához saját mátrix egyenlőtlenségi tételeit és a *Ljapunov-funkcionált*

$$v(t) = x^T(t)Ax(t) + \int_0^t \varphi_\tau \theta_d \varepsilon d\sigma(\tau) + \int_0^t W(\varphi_\tau \sigma(\tau))\, d\tau \tag{2.33}$$

használja, ahol $A^T = A$, $\theta_d = \mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\varepsilon = \|\varepsilon_{hi}\|$ mátrix, ahol $\varepsilon_{hi} = 0$ ha $i \neq q_h$ és $\varepsilon_{hq_h} = 1$ (q_h — azon bemenő jelek indexe, melyekre φ_j kielégíti a (2.32) feltételeket), $\theta_h \geqq 0$, ha φ_h kielégíti a (2.32) feltételt σ_{q_h}-ra, $\theta_h \leqq 0$, ha a σ_{q_h} bemenő jelre a $-\varphi_h$ elégíti ki a pozitivitási feltételt és $\theta_h = 0$, ha se a φ_h, se a $-\varphi_h$ nem tesz eleget a pozitivitási feltételnek, $W(\varphi, \sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j W_j$, a τ_j konstansok tetszőlegesek $j = 1, \ldots, k_1$-re, $\tau_j \geqq 0$, $j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2 = k$-ra.

A (2.33) funkcionál kielégíti a következő feltételeket:

1) $v(t)$ — alulról korlátos,

2) $\dot{v}(t) < 0$, ha $x(t) \neq 0$.

Ez a funkcionál biztosítja az abszolút stabilitást. Megvizsgálták az alap és a kritikus eseteket is. A (2.33) a legáltalánosabb az irodalomból ismertekből a (2.19) szabályozási rendszer abszolút stabilitásának analízisére.

B. D. O. ANDERSON és J. B. MOORE (1) vizsgálták a *Ljapunov-függvény*ek előállítását olyan (2.19) típusú rendszerekre, ahol P, B, C időtől függő mátrixok.

Az ebben a pontban vizsgált *Ljapunov-függvények* felhasználásának alapvető nehézsége az A. tételben vagy annak változataiban szereplő 1°, 2° definitségi feltételekhez kiválasztandó állandók nagy számában van. Ezért a legfontosabbnak a számítógépes algoritmusok kidolgozása tűnik a *Ljapunov-függvények* paramétereinek kiválasztására az optimalizálási kritériumoknak megfelelően. Ilyen kritériumoknak vehetők például a stabilitási tartomány méretei, valamilyen feltételek az átmeneti folyamat minőségéről stb.

4. Disszipatív szabályozási rendszerek. A vonzási tartományok becslése

Az 1—3 pontokban elsősorban a szabályozási rendszerek abszolút stabilitási kérdésének megoldására szolgáló *Ljapunov-függvény*eket tekintettük. Foglalkozzunk a kvalitatív analízis más feladataival is, melyek a *Ljapunov-függvény*ek segítségével oldhatók meg. Az SzR analízisével foglalkozó irodalom elsősorban az abszolút stabilitással foglalkozó cikkekben fellelhető megjegyzésekből áll, így itt csak a legérdekesebb eredményeken időzünk el.

Az SzR disszipativitási kritériumai közvetlenül, vagy nem jelentős módosítással adódnak az ismert disszipativitásról szóló tételekből (lásd B. P. GYEMIDOVICS (1), V. A. PLISSZ (2), J. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (1) T. YOSHIZAWA (1)).

V. A. JAKUBOVICS cikkében (4) külső hatással vizsgál szabályozási rendszereket

$$\frac{dx}{dt} = Px + \sigma\varphi(\sigma) + f(t), \quad \sigma = c^T x, \tag{2.34}$$

ahol $f(t)$ korlátos a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, *Lebesque szerint lokálisan integrálható* függvény, a további mennyiségeknek ugyanaz az értelmük, mint a (2.1) rendszerben. Legyen $\varphi(\sigma)$ függvény szakaszonként folytonos, a P mátrix pedig *Hurwitz-típusú.*

A *Popov feltétel* (2.5), és még néhány nem lényeges korlátozás teljesülése esetén a (2.34) rendszer disszipatív az olyan $\varphi(\sigma)$ nemlinearitások osztályában, melyekre

$$(2.35) \qquad \lim_{|\sigma|\to+\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}\left(1-k^{-1}\varphi(\sigma)/\sigma\right) \geqq 0.$$

Az eredményt (2.4) típusú *Ljapunov-függvény* segítségével bizonyítják, mely eleget tesz a 3° és a

$$2°\text{a.} \quad \dot v(x,t)<0, \quad \text{ha} \quad \|x\| \geqq R=\text{konst.}$$

feltételeknek.

Analóg következtetés igaz a

$$(2.36) \qquad \frac{dx}{dt} = Px+\sigma\varphi(c^Tx)+f(t,x)$$

rendszerre is, ahol $f(t,x)/\|x\|\to 0$, ha $\|x\|\to+\infty$ egyenletesen t szerint, $f(t,x)$ t és x-ben folytonos, korlátos függvény.

Megjegyzendő, hogy a (2.35) feltételt kielégítő nemlinearitások osztálya jelentősen szélesebb a (2.2) osztálynál, a (2.4) típusú *Ljapunov-függvény* e közben lehet nemdefinit. Ha a (2.34) rendszerben $f(t)$ — korlátos a $[0, +\infty)$-n, $\varphi(\sigma)$ — (2.2) és (2.6)-nak eleget tevő differenciálható függvény, akkor a (2.7) *Ljapunov-függvény* segítségével bebizonyítható (F. R. GANTMAHER és V. A. JAKUBOVICS (1)), hogy a (2.34) rendszer disszipatív. Hasonló állítások könnyen általánosíthatók több nemlinearitás esetére.

A közlemények egész sorában vizsgálják a periodikus, majdnem periodikus, és korlátos határ állapotok kérdését a (2.34) típusú szabályozási rendszerre vektor nemlinearitással. V. A. JAKUBOVICS (7, 9) bebizonyította, hogy ha *P Hurwitz-típusú* mátrix, $\varphi^T(\sigma)=[\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)]^T$ nemlinearitás monoton σ szerint

$$0 \leqq \frac{\varphi_j(\sigma_j^1)-\varphi_j(\sigma_j^2)}{\sigma_j^1-\sigma_j^2} \leqq k_j, \quad (j=1,\dots,m;\ k_j=\text{konst.} \leqq +\infty),$$

akkor bizonyos feltételek mellett létezik kvadratikus alakú *Ljapunov-függvény*, ami megoldja az exponenciális konvergencia kérdését az SzR határ állapotára. Hasonló eredmény igaz (V. A. JAKUBOVICS (9)) a nemstacionárius $\varphi(\sigma, t)$ függvényekre is a

$$0 \leqq \frac{\partial\varphi_j(\sigma_j,t)}{\partial\sigma_j} \leqq k_j$$

feltétel esetén.

Ha $f(t)$ periodikus, majdnem periodikus vagy korlátos függvény, akkor ugyanilyen tulajdonságú a határ állapot is.

M. A. KRASZNOSZELSZKIJ, V. S. BURD és JU. SZ. KOLESZOV (1) könyvében a (2.34) rendszert vizsgálják majdnem periodikus $f(t)$ és kétszer folytonosan differenciálható $\varphi(\sigma)$ skalár függvénnyel. Feltéve hogy a rendszernek létezik invariáns kúpfelülete, belátnak néhány stabilitási és labilitási tételt a határ állapotokra kvadratikus alakban megadott *Ljapunov-függvények* segítségével. I. V. JOFFE és G. A. LEONOV (1) általánosabb eredményeket kaptak.

Az alkalmazásokban nagy jelentőségű a véges vonzási tartomány kvantitatív becslésének feladata az SzR abszolút stabilitása vizsgálatánál.

Tekintsük a (2.1) rendszert az alapesetben, a folytonos $\varphi(\sigma)$ függvény pedig elégítse ki a (2.2) egyenlőtlenséget nem minden $\sigma \in (-\infty, +\infty)$-re, hanem csak $\sigma \in (-\sigma_1, \sigma_2)$-re ($\sigma_1, \sigma_2 = \text{konst.} > 0$). Ebben az esetben van értelme beszélni abszolút stabilitásról véges vonzási tartományban. ST. WEISSENBERGER (1, 2, 3), N. NELSON és ST. WEISSENBERGER (1), J. A. WALKER és N. H. MCCLAMROCH (1), E. NOLDUS, A. GALLE és L. JONSSON (1), J. L. WILLEMS (3, 4) az SzR vonzási tartományára *Ljapunov-függvények* segítségével adnak becslést. (2.4) típusú *Ljapunov-függvény*eket használnak, és rámutatnak a keresett tartományok meghatározására irányuló számítási eljárásokra.

A szabályozási rendszerek közelítő megoldásainak *Csetajev-típusú* becsléseit *Ljapunov-függvények* segítségével L. JU. ANAPOLSZKIJ (1) kapta meg.

Megjegyezzük még V. A. JAKUBOVICS (10), G. A. LEONOV (2) utóbbi időben megjelent munkáit, melyekben kvadratikus *Ljapunov-függvények* segítségével oldják meg általános alakú szabályozási rendszerek abszolút instabilitási feladatait.

A megoldatlan problémák közül kiemelhető, hogy lényegében még nem dolgozták ki a *Ljapunov-függvény* előállítási módszereket az SzR vonzási és korlátossági tulajdonságaira; és az ebben a pontban vizsgált dinamikus tulajdonságokra sincsenek elég részletesen kidolgozva.

HARMADIK FEJEZET

TÖBB LJAPUNOV-FÜGGVÉNY ÉS LJAPUNOV VEKTOR-FÜGGVÉNYEK

A *Ljapunov-függvények* megalkotásának további fejlődése kapcsolatos a több skalár *Ljapunov-függvény* alkalmazásának elvével a stabilitási tételekben. E közben az egyes függvényekre sokkal gyengébb megkötéseket teszünk, mint a megfelelő tételekben egy *Ljapunov-függvénnyel,* ami jelentősen kiszélesíti a felhasználható függvények osztályát, és így megkönnyíti a függvények előállításának problémáját.

1. Kettő vagy több Ljapunov-függvény előállítása instabilitási és aszimptotikus stabilitási feladatokban

Az említett módszert először N. G. CSETAJEV (2) alkalmazta nevezetesen instabilitási tételében két v és W *Ljapunov-függvénnyel,* ahol a W segédfüggvény bevezetésének gondolata egy K. P. PERSZIDSZKIJ (3) értelmében vett szektor létezésének biztosításával kapcsolatos. K. P. PERSZIDSZKIJ (3), N. P. JERUGIN (1), V. M. MATROSZOV (3—7), E. DALBERG (1), J. L. MASSERA (3), R. W. GUNDERSON (1) CSETÁJEV tételének különböző változatait kapták kettő, három és több *Ljapunov-függvénnyel,* illetve a *Ljapunov-függvény* második deriváltja felhasználásával

$$W = \dot{v}, \quad \dot{W} = \ddot{v}.$$

A tételt N. G. CSETÁJEV alkalmazta egy klasszikus feladat megoldására, *Lagrange—Dirichlet konzervatív rendszerek* egyensúlyi helyzetének stabilitásáról szóló tételének megfordítására. A *Ljapunov-függvények* megválasztása intuitív módon, fizikai elképzelések felhasználásával történt. Például az e kérdésről szóló első cikkben

$$v(x) = \frac{1}{2} U(q)^2, \quad W(x) = \dot{v}(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial q} \dot{q}\right) U(q),$$

ahol $x=(q, \dot{q})$, $q \in R^k$, $\dot{q} \in R^k$, U — a rendszer erőfüggvénye.

E. DALBERG (1) egy hatodrendű rendszer instabilitási feltételeit kapta meg a három nulla és egy pár képzetes gyök kritikus esetében három *Ljapunov-függvény* segítségével:

$$v^1(y) = y^1, \quad v^2(y) = \max_{s=1,\dots,6} z_s, \quad (z^1_{s,0} > 0), \quad v^3(y) = \max_{s=1,\dots,6} z_s, \quad (z^1_{s,0} < 0),$$

ahol y^s fázis koordináták egy speciális lineáris transzformáció után $z_s = y^s \bar{y}^s - c_s^2 (y')^{2+2\gamma}$, z'_{s0} a $\dot{z}_s$ értéke azokban a pontokban, ahol $z_s=0$.

A W segédfüggvény bevezetésének elve legszélesebb alkalmazásra E. A. BARBASIN és N. N. KRASZOVSZKIJ (1, 2) autonóm rendszerek aszimptotikus stabilitásáról szóló ismert tételében, és N. N. KRASZOVSZKIJ megfelelő instabilitási tételében talált, amikor a $v(x)$ alapfüggvény deriváltja szemidefinit $\dot{v} \leqq 0$, és nullává válik az $E(\dot{v}=0) \subset \subset R^n$ halmazon, amely az $x=0$-t kivéve nem tartalmaz teljes pályákat. E közben a legegyszerűbb esetben W-nek célszerű olyan függvényt választani, amely leírja az $E(\dot{v}=0)$ sokaságot, e sokaságon $W=0$, és $\dot{W} \neq 0$, mikor $x \neq 0$. Két *Ljapunov-függvényt* tartalmazó tételek formájában V. M. MATROSZOV (3, 6, 7) kiterjesztette BARBASIN és KRASZOVSZKIJ tételeit a nemautonóm rendszerek általános esetére (1.1) korlátos jobb oldalakkal, és a halmaz aszimptotikus stabilitási és instabilitási feladatára.

Az első ilyen vizsgálatokat másodrendű nemlineáris rendszerekre I. G. MALKIN (5), N. P. JERUGIN (2), E. A. BARBASIN és N. N. KRASZOVSZKIJ (1) végezték. E közben v *Lurje-függvény* (2.4), vagy egy, az energetikus módszer alapján előállított függvény volt, W pedig lineáris forma.

A másod-, harmad- és negyedrendű rendszerek vizsgálatának további eredményeit sok könyv és cikk ismerteti (N. N. KRASZOVSZKIJ (5), E. A. BARBASIN (6, 7), E. A. BARBASIN és V. A. TABUJEVA (1), V. A. PLISSZ (1, 2), W. HAHN (2), J. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (1), T. YOSHIZAWA (2), N. ROUCHE és T. MAWHIN (1)).

A disszipatív, k szabadsági fokú, mechanikai rendszerek stabilitásának vizsgálatára az energetikus módszert alkalmazták (G. K. POZSARICKIJ (3), A. SZ. OZIRANER (1), N. ROUCHE (1) — autonóm rendszerek; G. K. POZSARICKIJ (3) — periodikus rendszerek, V. M. MATROSZOV — nemperiodikus rendszerek). v-nek az energiát választották, a W segédfüggvények választása pedig az $E(\dot{v}=0)$ sokaság leírásához kapcsolódott.

A $q=0$, $\dot{q}=0$ izolált egyensúlyi helyzetre teljes disszipációjú nemstacionárius giroszkopikus rendszer esetén

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = G(t, q)\dot{q} - \frac{\partial \pi(q)}{\partial q} - \frac{\partial R(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}},$$

$$q \in R^K, \quad \dot{q} \in R^K, \quad -G^T(t, q) = G(t, q),$$

$$R(t, q, 0) = 0, \quad R(t, q, \dot{q}) > 0, \quad \dot{q} \neq 0\text{-ra},$$

a lokális feladatnál az említett módszer a következő függvényekhez vezet

$$v = T(q, \dot{q}) + \pi(q), \quad \dot{v} = -2R(t, q, \dot{q}),$$

$$W = -\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial q}\right), \quad \dot{W} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial q} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial q}\right) > 0, \quad \dot{q} = 0, \quad q \neq 0\text{-ra},$$

melyek lehetővé teszik megállapítani az

1) aszimptotikus stabilitást, ha $\pi(q)$ pozitív definit q-ra nézve,

2) instabilitást, ha a $q=0$ egyensúlyi helyzet tetszőlegesen kicsiny környezetében $\pi(q)$ felvehet negatív értékeket.

Amikor az $E(\dot{v}=0)$ sokaságot vektor-egyenlet írja le, akkor W vektor segédfüggvény vezethető be, például az utolsó feladatban az általánosított impulzus-vektor (N. ROUCHE (1), L. SALVADORI (1), J. L. CORNE (1)). A globális aszimptotikus stabilitás vizsgálatánál további W^s függvényeket lehet használni, melyek megadását azon halmazok leírásával lehet összefüggésbe hozni, ahol az előző függvények deriváltja nullává válik.

A. P. TUZOV (1), JU. I. ALIMOV (1—3), V. A. JAKUBOVICS (2), V. M. KUNCEVICS és JU. N. CSEHOVOJ (1), L. JU. ANAPOLSZKIJ (2), R. KALMAN (1), J. LA SALLE és S. LEFSCHETZ (2) és néhány más szerző, akikről a második fejezetben szó volt lényegében két *Ljapunov-függvény* segítségével vizsgálták a globális aszimptotikus stabilitást, és a több dimenziós szabályozási rendszerek stabilitását állandóan ható perturbációk mellett. Itt a v-t általában egy kvadratikus alak plusz a nemlinearitásoktól függő integrálokként állították elő, W-ként pedig, ha ez explicite nem is hangzott el, lineáris, vagy kvadratikus alakokat használtak (néha kettőt vagy hármat). L. JU. ANAPOLSZKIJ (1) két pozitív definit kvadratikus alakot, $v(x)$-et és $W(x)$-et, melyekre

$$\dot{v}(x) \leqq 0, \quad \dot{W}(x) < 0, \quad \text{mikor} \quad x \in E(\dot{v} = 0) \setminus 0$$

használt a nemlineáris szabályozási rendszerek közelítő megoldásának *Csetájev-típusú becslése* előállításához.

A klasszikus *Ljapunov-függvény* előállítási módszerek analóg állításait kaphatjuk az 1. fejezetben ismertetett megadott alakú *Ljapunov-függvények*, vagy kombinált módszerekből kiindulva a $\dot{v} \ll 0$ feltétel $\dot{v} \leqq 0$ feltételre való kicserélésével és W segédfüggvények bevezetésével.

Felhívjuk még a figyelmet a több *Ljapunov-függvény* olyan lineáris formák alakjában történő előállítására, melyek kielégítik P. A. KUZMIN (1) lineáris rendszerekről szóló tételének általánosításait. Ilyen módszereket alkalmazott a stabilitás együtthatós feltételeinek meghatározására V. I. ZSUKOVSZKIJ (1, 2) és SZ. K. PERSZIDSZKIJ (1, 2).

Összességükben a kettő és több *Ljapunov-függvény* előállítási módszerek még további kidolgozást kívánnak. Különösen kevés ismert egyenlőre a differenciálegyenletek globális kvalitatív vizsgálatára és más a differenciálegyenletek kvalitatív elméletével kapcsolatos feladat megoldására eőlállított több *Ljapunov-függvény* megalkotásáról és alkalmazhatóságáról, habár V. V. NYEMICKIJ (1), M. A. KRASZNOSZELSZKIJ (1), T. YOSHIZAWA (2) és mások elismerik az ilyen módszer perspektivikusságát.

2. Ljapunov vektor-függvény előállítása

A *Ljapunov-függvény*ekről a stabilitási tételekben tett feltételek további jelentős gyengítése (C. CORDUNEANU (1)) SZ. A. CSAPLIGIN (1) típusú egyenlőtlenségek alkalmazásával érhető el. Ennek a módszernek az egyesítése a több *Ljapunov-függvény*t használó módszerekkel vezetett a *Ljapunov-féle vektor-függvények* gondolatához (R. BELLMAN (2), V. M. MATROSZOV (4)), és e módszerek az elmúlt évtizedben való fejlődéséhez (V. M. MATROSZOV (5, 7—11), SZ. K. PERSZIDSZKIJ (2, 4, 5), A. A. MARTINYUK (4), V. LAKSHMIKANTHAM és S. LEELA (1) és mások, amelyek már érdekes alkalmazásra találtak a többszörösen összefüggő és bonyolult rendszereknél. (Lásd: A. M. LETOV (3), E. A. BARBASIN (7)).

A legjobban a következő exponenciális stabilitási tételt kielégítő *Ljapunov-féle vektor-függvényeket* dolgozták ki (V. M. MATROSZOV (7, 9, 10)):

Az (1.1), ahol $\partial X/\partial x$ Ω-ban korlátos, rendszer $x=0$ megoldásának exponenciális stabilitásához szükséges és elégséges, hogy létezzen egy $v(t, x)=(v^1(t, x), \dots, v^k(t, x))$ *Ljapunov-féle vektor-függvény*, amely a triviális megoldás valamilyen környezetében rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$1^\circ.\quad \|v(t, x)\| < \gamma\|x\|^{\xi}, \quad \sum_{s=1}^{l} v^s(t, x) \geqq \delta\|x\|^{\xi}, \quad (\gamma, \delta, \xi > 0, \quad 1 \leqq l \leqq k)$$

$$2^\circ.\quad \dot{v}(t, x) \leqq \tilde{P}v(t, x)+\tilde{f}(t, v(t, x)),$$

ahol a vektor egyenlőtlenség komponensenként értendő, $\tilde{P}$ — állandó, pozitív ($\tilde{p}_{sj}\geqq 0$ ha $j\neq s$), *Hurwitz-típusú* ($\operatorname{Re}\lambda_s(\tilde{P})<0$), $k\times k$-s mátrix a

$$(3.1)\qquad \frac{dy}{dt} = \tilde{P}y+\tilde{f}(t, y), \quad (y\in R^k),$$

összehasonlító rendszer lineáris része, $\tilde{f}$ kielégíti a *Vazsevszkij-feltételt* ($\tilde{f}^s(t, v) \prec$ $\prec \tilde{f}^s(t, y)$, bármely $v^s=y^s$, $v^\nu\leqq y^\nu$ $\nu\neq s$-re,

$$(3.2)\qquad \frac{\|\tilde{f}(t, y)\|}{\|y\|} \underset{t\in T}{\rightrightarrows} 0, \quad \text{ha} \quad \|y\| \to 0.$$

Az ilyen *Ljapunov-féle vektor-függvények* előállításának első csoportjában a $\dot{v}^s=\varkappa_s v^s(\tilde{f}=0)$, $\xi=2$ deriváltakat adják meg (G. SZ. VAHONYINA, A. SZ. ZEMLJAKOV és V. M. MATROSZOV (2)).

A

$$(3.3)\qquad \frac{dx}{dt} = Px, \quad x\in R^n$$

lineáris autonóm rendszerre kvadratikus *Ljapunov-féle vektor-függvény*t állítanak elő

$$v^s(x) = x^T V^s x \geqq 0, \quad \sum_{s=1}^{K} v^s(x) = x^T V x \gg 0, \quad V^s = (V^s)^T,$$

$$\dot{v}^s(x) = \varkappa_s v^s(x), \quad (s = 1, \dots, k_1, \quad k \leqq n),$$

$$(\varkappa_s-\varepsilon_s)v^s(x) \leqq \dot{v}^s(x) \leqq (\varkappa_s+\varepsilon_s)v^s(x), \quad (s = k_1+1, \dots, k),$$

ahol $\varkappa_s=2\operatorname{Re}\lambda_s(P)$, $(s=1,\dots,k)$, $|P-\lambda I|=0$ karakterisztikus egyenlet $\lambda_1(P),\dots$ $\dots,\lambda_{k_1}(P)$ gyökei különbözők, nem konjugáltak, csak egyszerű elementáris osztók felelnek meg nekik, ε_s tetszőlegesen kicsi pozitív számok, V, V^s $(n\times m)$-es mátrixok. A kvadratikus vektorfüggvény az $x(t)$ megoldások mentén kielégíti a következő pontos exponenciális becsléseket: minden $\varepsilon_s>0$-ra

$$v^s(x(t_0))e^{(\varkappa_s-\varepsilon_s)(t-t_0)}\leqq v^s(x(t))\leqq v^s(x(t_0))e^{(\varkappa_s+\varepsilon_s)(t-t_0)},$$
$$(s=1,\dots,k).$$

Arra az esetre, amikor $\lambda_1(P),\dots,\lambda_n(P)$ gyökök mind különbözőek ($k_1=k$, $\varepsilon_s=0$) kidolgozták az ilyen kvadratikus *Ljapunov-féle vektor-függvény* számítógépes algoritmusát.

Javasoltak még egy módszert $v^s(x)=z^s(x)\bar{z}^s(x)$ alakú holomorf *Ljapunov-féle vektor-függvények* előállítására, melyek kielégítik az (1.1) nemlineáris $X(x)=Px+$ $+\tilde{X}^{(2)}(x)$ holomorf jobb oldalú autonóm rendszerre felírt pontos exponenciális becsléseket. E módszer a

$$\nabla z^s(x)X(x)=\lambda_s(P)z^s(x),\quad (s=1,2,\dots,n)$$

parciális differenciálegyenletek megoldásán alapul.

Ezen egyenletek holomorf megoldásának létezése az $x=0$ elég kis környezetében és meghatározásának szukcesszív approkszimácóis módszere különböző $\lambda_s(P)$ értékek esetén adódik,

$$\operatorname{Re}\lambda_s(P)<0,\quad \lambda\neq\sum_{j=1}^{n}m_j\lambda_j,\quad m_j\in N,$$
$$\sum_{j=1}^{n}m_j>1,\quad (s=1,2,\dots,n)$$

ahol N — a nem negatív egész számok halmaza.

Az ilyen *Ljapunov-féle vektor-függvény*ek megadják a rendszer izokrónjait, melyek az átmeneti folyamatban a triviális megoldás valamely környezetének (cilindrikus típusú) evolúcióját írják le.

A módszer rugalmasságát jellemzi, hogy különböző negatív $\varkappa_s$ esetén, az előállított *Ljapunov-féle vektor-függvény*ekről át lehet térni tetszőleges kisebb dimenziós *Ljapunov-féle vektor-függvény*ekre (vagy skalár *Ljapunov-függvény*re), melyek szintén kielégítik a pontos exponenciális becsléseket, a v^s komponensek bármilyen halmazának egyesítésével egy skalár-függvénybe

$$W(x)=\Sigma\big(a_s v^s(x)\big)^{\varkappa/\varkappa_s},\quad \dot{W}(x)=\varkappa W(x),\quad (\varkappa\leqq\varkappa_s),$$

vagy

$$W(t,x)=\Sigma v^s(x)e^{(\varkappa-\varkappa_s)t},\quad \dot{W}(t,x)=\varkappa W(t,x),\quad (\varkappa_s\leqq\varkappa<0).$$

K. G. VALEJEV (1) tanulmányozta a *Ljapunov-féle vektor-függvény*ek előállításának egy perturbációs (kis paraméterek) módszerét, melyben a függvények kielégítenek egy nemlineáris összehasonlító differenciálegyenlet-rendszert.

A *Ljapunov-féle vektor-függvény*ek második csoportjában maga a $v(t,x)$ függvény felépítését adják meg. R. BELLMAN (2) és F. N. BAILEY (1, 2) alkották meg az első ilyen módszereket. Ebben a csoportban a legfontosabb BAILEY-módszere a többszörösen összefüggő rendszerekre, ami a rendszer dekompozícióján (összefüggő részrendszerei kiválasztásán), és az egyes részrendszerekre különböző *Ljapunov-függvények* előállításán alapul.

E módszer effektív alkalmazhatóságát többszörösen összefüggő nemlineáris szabályozási rendszerekre vizsgálta meg F. N. BAILEY (1, 2) és E. A. BARBASIN (7), A. A. PIONTKOVSZKIJ (1), A. A. PIONTKOVSZKIJ és L. D. RUTKOVSZKAJA (1), I. A. BORODAVKO és A. A. PIONTKOVSZKIJ (1), B. A. GUDIMENKO és V. V. UGYILOV (1, 2), K. B. BUKENBAJEV (1), D. W. PORTER és A. N. MICHEL (1), D. D. ŠILJAK és C. K. SUN (1) és mások.

E módszert valamelyest általánosabb a nemlineáris összefüggő részrendszerek esetét is magában foglaló, alakban ismertetjük (E. A. BARBASIN (7), I. A. BORODAVKO és A. A. PIONTKOVSZKIJ (1), A. SZ. ZEMLJAKOV és V. M. MATROSZOV (9)).

Legyen az (1.1) többszörösen összefüggő rendszer a dekompozíciós eljárás eredményeképpen a következő alakra hozva

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i^0(t, x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} X_{ij}(t, x)x_j, \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.4}$$

$$x_i \in R^{n_i}, \quad x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_m) \in R^n, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = n,$$

ahol az $X_{ij}(t, x)$ mátrixok fejezik ki az összefüggést a

$$\frac{dx_i^0}{dt} = X_i^0(t, x_i^0) \quad \left(X_i^0(t, 0) \equiv 0\right) \tag{3.5}$$

részrendszerek között. Feltesszük, hogy $X_{ij}(t, x)$ korlátosak $\left(\sup\limits_{(t, x) \in \Omega} \|X_{ij}(t, x)\| = \right.$ $\left. = \bar{c}_{ij} \right)$.

Ha mindegyik izolált (3.5) részrendszer nulla megoldása exponenciálisan stabilis, akkor N. N. KRASZOVSZKIJ (5) eredményeiből következik, hogy létezik $v^i(t, x_i)$ *Ljapunov-függvény* (előállításához alkalmazhatók az 1., illetve 2. fejezetben leírt módszerek), mely kielégíti a következő, kvadratikus formákra jellemző becsléseket:

$$\begin{gathered} c_{i1}\|x_i\|^2 \leqq v^i(t, x_i) \leqq c_{i2}\|x_i\|^2, \\ \dot{v}^i(t, x_i) \leqq -c_{i3}\|x_i\|^2, \quad \|\nabla v^i\| \leqq c_{i4}\|x_i\|, \end{gathered} \tag{3.6}$$

és így a

$$\dot{v}^i(t, x_i) \leqq -\zeta_i v^i(t, x_i) \quad (\zeta_i > 0, \, c_{ij} > 0) \tag{3.6a}$$

lineáris egyenlőtlenséget a deriváltra. A $v(t, x) = \left(v^1(t, x_1), \ldots, v^m(t, x_m)\right)$ függvényt ezekkel a komponensekkel választják az egész (3.4) rendszer *Ljapunov-féle vektor-függvény*ének.

A részrendszerek összefüggésének figyelembevételével a $\tilde{P}$ pozitív *Hurwitz-típusú* mátrixot a következő feltételekből kell megválasztani:

$$(\tilde{j} = 0, \; i = 1, \ldots, m)$$

$$\dot{v}^i(t, x) \leqq -\zeta_i v^i(t, x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{m} \nabla v^i(t, x_i) X_{ij}(t, x) x_j \leqq \sum_{j=1}^{m} \tilde{P}_{ij} v^j(t, x_j). \tag{3.7}$$

F. N. BAILEY (1) megmutatta, hogy e feltételeket kielégíti a $\tilde{P}$ pozitív mátrix

$$\tilde{P}_{ii} = -\frac{c_{i3}}{2c_{i2}}, \quad \tilde{P}_{ij} = \frac{c_{i4}^2}{2c_{i3}c_{j1}} \sum_{\substack{j=1\\(j \neq i)}}^{m} \bar{c}_{ij}^2 \quad (j \neq i) \tag{3.8}$$

A *Hurwitz-kritérium* feltételeinek teljesülése az előállított mátrixra elégséges a rendszer exponenciális stabilitásához *(Bailey tétele)*.

A. SZ. ZEMLJAKOV (1) és V. D. FURASZOV (1) általánosította a lineáris összehasonlító rendszer mátrixát BAILEY módszerében.

Az összehasonlító rendszer $\tilde{P}$ mátrixának optimális megválasztása holomorf v^i, $\dot{v}^i$ esetén a (3.7) kifejezések pszeudo kvadratikus alakban való előállításával történik (G. SZ. VAHONYINA, A. SZ. ZEMLJAKOV és V. M. MATROSZOV (2), A. SZ. ZEMLJAKOV (1—3))

$$x^T D^i(\tilde{P}, t, x)x = \sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_{ij} v^j(t, x_j) - \dot{v}^i(t, x) \geqq 0, \quad (i = 1, \dots, m). \tag{3.9}$$

Abban az esetben, amikor a rendszer autonóm, a szimmetrizált $D^i(\tilde{P}, x)$ minden főminorja nemnegatív és teljesül a pozitivitás ($\tilde{p}_{ij} \geqq 0, j \neq i$) a $\tilde{P}$ mátrix megválasztása a

$$1) \ \min_P \lambda_{\max}(\tilde{P}) \text{ vagy } 2) \ \max_P |\det \tilde{P}|$$

kritériumokból történik.

Kidolgozták és számítógépre realizálták egy ilyen nemlineáris programozási feladat megoldását a lokális esetben, amikor $\tilde{P}$-t az „első közelítésben" optimalizáljuk, vagyis $D^i(\tilde{P}, x)$ helyett a $D^i(\tilde{P}, 0)$-t tekintjük.

A $\tilde{P}$ mátrix lineáris közelítéssel történő meghatározása után, ha $v^i(x_i) \geqq 0$, akkor az $\tilde{f}_i$ függvényeket kvadratikus alakban keressük (A. SZ. ZEMLJAKOV és V. M. MATROSZOV (1))

$$\tilde{f}^i(v) = \sum_{\nu, j=1}^{m} q_{\nu j}^{(i)} v^\nu v^j \quad (q_{\nu j}^{(i)} \geqq 0, \quad \text{ha} \quad \nu \text{ vagy } j \neq i). \tag{3.10}$$

A (3.1) nemlineáris összehasonlító rendszer ebben az esetben a *Riccati vektor-egyenlet.* A $q_{\nu j}^{(i)}$ együtthatókat célszerű a „mért térfogat" maximumának feltételéből (vagy az összehasonlító rendszer stabilitási tartományának „közepes rádiuszából") meghatározni. Közbeeső kritériumokként használják a következőket

$$\min_{Q^{(i)}} \lambda_{\max}(Q^{(i)}) \quad \text{vagy} \quad \min_{Q^{(i)}} \|Q^{(i)}\|.$$

A (3.1), (3.10) összehasonlító rendszer fázisterében a „nyeregpont" (vagy néhány „nyeregpont" típusú szinguláris pont) a tipikus az első negyedben. A „bemenő" szeparatrix felületek az összehasonlító rendszer vonzási tartományának határai, amelyből numerikus integrálással és más módszerekkel kapott információkat felhasználhatjuk az eredeti (3.4) rendszer vonzási tartományának meghatározására.

LJAPUNOV első közelítés alapján történő klasszikus stabilitásvizsgálati módszerének analógja a (3.1) rendszer linearizálásával kapcsolatos módszer (R. BELLMAN (2)). E módszer általánosításával foglalkozott V. F. ZADOROZSNIJ (1), V. F. ZADOROZSNIJ és A. A. MARTINYUK (1).

SZ. K. PERSZIDSZKIJ (4, 1) a fázis koordináták abszolút értékétől függő lineáris formák osztályában

$$v^i(t, x_i) = \sum_{j=1}^{n_i} a_j^{(i)}(t)|x_i^j|, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

keresi a *Ljapunov-féle vektor-függvény*eket, D. D. ŠILJAK (1, 2), L. T. GRUJIČ és D. D. ŠILJAK (1) pedig azon függvények osztályában, melyek a (3.5) izolált részrendszerein kielégítik az

$$\alpha_i\|x_i\| \leqq v^i(t, x_i) \leqq \beta_i\|x_i\|,$$

$$\dot{v}^i(t, x_i) \leqq -\gamma_i\|x_i\|, \quad \|\nabla v^i\| \leqq \tilde{\beta}_i$$

lineáris egyenlőtlenségeket. (Például a (3.6) függvény négyzetgyöke; lásd még V. D. FURASZOV (1)). D. D. ŠILJAK, ST. WEISSENBERGER és S. M. CUK (1) e módszer érdekes alkalmazását adták az orbitális laboratórium stabilitására.

BAILEY módszerét értékelve, A. A. PIONTKOVSZKIJ és L. D. RUTKOVSZKAJA (1) megjegyzik, hogy lehetségesek olyan esetek, amikor a módszer „túlságosan elégséges" stabilitási feltételekhez vezet. Ez azzal magyarázható, hogy az eredmény jelentősen függ attól, mennyire szerencsésen végezték el a rendszer dekompozícióját, illetve választották meg a részrendszerek *Ljapunov-függvény*ét. A dekompozíció jónak számít, többek között, ha a részrendszerek gyengén összefüggők. Így bizonyos több változós rendszerekre a visszacsatolásokat az egyes hurkok optimalizálás-kritériumai alapján szintetizálják. A szabályozók analitikus konstruálásánál, vagy az izolált részrendszerek stabilizálásánál előállított megfelelő *Ljapunov—Bellman-függvény*ek alkothatnak teljesen elfogadható *Ljapunov vektor-függvény*t az egész több változós rendszerre (B. A. GUDIMENKO és V. V. UGYILOV (1, 2)). A módszerek e csoportjának alapvető előnye — ami nő a·rész rendszerek számával — rendkívüli egyszerűségük. A pontos exponenciális becsléseket kielégítő *Ljapunov-féle vektor-függvények* módszerével, amely igen nagyméretű számítással jár, összehasonlítva, könnyen látható, hogy a módszerek e két csoportja az adott értelemben a két végletnek tekinthetők.

Tekintsük át a *Ljapunov-féle vektor-függvények* vegyes módszereit. A. SZ. ZEMLJAKOV (2) és V. M. MATROSZOV (9) felvetették egy véges iterációs eljárás gondolatát Ljapunov-függévnyek előállítására. Az eljárás magában foglalja az (1.1) rendszer dekompozícióját és a részrendszerek hierarchiájának bevezetésén alapul.

A (3.5) m rész rendszerét és a $v_1(t, x) = (v_1^1(t, x_1), \dots, v_1^m(t, x_m))$ *módosított Bailey módszer*rel kapott függvényt tekintjük az első szintű részrendszereknek, illetve a *Ljapunov-féle vektor-függvény* első közelítésének.

Ha a (3.5) i-edik részrendszere (mint izoláltat tekintve) autonóm és a jobb oldala holomorf, akkor a karakterisztikus egyenlet λ_i^s gyökeiből kiszámítjuk a $\varkappa_i^s = \lambda_i^s + \bar{\lambda}_i^s$ számokat és megbecsüljük $-\zeta_i$-hez való közelségüket. Megvizsgáljuk célszerű-e felcserélni a $\dot{v}_1^i(x_i) \leqq -\zeta_i v_1^i(x_i)$ egyenlőtlenséget közelebbi pontos exponenciális becslésre, vagy magukra ezekre a becslésekre a *Ljapunov-féle vektor-függvény* komponenseinek esetleges növelésével. Előállítva a (3.5) összes részrendszerére, ahol ez célszerű az új komponenseket, képeznek belőlük egy új k' dimenziós *Ljapunov-féle vektor-függvény*t második közelítésnek ($k' \geqq m$) az összehasonlító rendszerrel, amelyet a (3.4) összefüggéseinek majorálása után kapunk az egyik már előbb említett módszer segítségével.

A közelítések folytathatók az összehasonlító rendszer rendjének további növelésével k_1-ig. Ha az összehasonlító rendszer legnagyobb rendje esetén, amely a (3.5) izolált részrendszerei pontos exponenciális becslésének felel meg, nem kapunk megfelelő pontosságot a (3.4) részrendszerei közötti összefüggések majorálására, akkor a $\tilde{p}_{ij}$ $(j \neq i)$ segítségével megbecsüljük az intenzitásukat és hatásukat az összehasonlító rendszerre.

E hatások figyelembevételével képezzük a második szint k_2 részrendszerét $(k_2 < k_1)$, melyek közül néhány egyesíti az első szint erősen összefüggő részrendszereit, vagy ezek blokkjait, melyek a közelítések segítségével keletkeztek. A fent említett módszerrel készülnek a *Ljapunov-féle vektor-függvények* az első

$$v_2(t, x) = \left(v_2^1(t, x_1'), \ldots, v_2^{k_2}(t, x_{k_2}')\right), \quad x = (x_1', \ldots, x_{k_2}'),$$

a második és a további közelítésekre.

Hasonló módon történő vizsgálat után az eljárás befejeződik, vagy kiválasztjuk a harmadik szint rész rendszereit, és a hozzájuk tartozó $v_3(t, x)$ *Ljapunov-féle vektor-függvény*eket állítjuk elő stb.

A. Sz. Zemljakov (2), A. M. Danyilov, L. Z. Dulkin, A. Sz. Zemljakov, V. M. Matroszov és V. A. Sztrezsnyev (1) megvizsgálták az említett eljárás alkalmazhatóságát a sztratoszférai obszervatorium dinamikájára, melyet egy 23-ad rendű nemlineáris rendszer ír le (kis teljesítményű számítógép segítségével). Három iteráció eredményeként az első szint tizennégy részrendszeréről áttértek a harmadik szint öt részrendszerére és előállítottak egy ötdimenziós kvadratikus *Ljapunov-féle vektor-függvény*t, ami a gyakorlatban elfogadható becslést adott a vonzási tartományra.

A megoldatlan feladatok között elsőként említendő a *Ljapunov-féle vektor-függvények* előállítási módszereinek kidolgozása nem exponenciális stabilitás esetére, mind a konkrét esetekben (például a kritikus esetekben), mind pedig a rendszerek elég általános osztályaira. A nemlineáris rendszerek dinamikus tulajdonságainak vizsgálatára, mint például a korlátosság, disszipativitás, konvergencia, egyértelműség, korrektség ez a problémakör még teljesen nyílt (lásd V. M. Matroszov (10, 11)).

Globális probléma még a számítógépes technika alkalmazása a *Ljapunov-függvények* előállítására, a számítógépekkel realizálható *Ljapunov-féle vektor-függvény* meghatározási algoritmusok kidolgozása. Az e pontban leírt *Ljapunov-féle vektor-függvény* előállítási módszerek fejlesztésében igen sok kérdés aktuális. A módszerek első csoportjában — a holomorf *Ljapunov-féle vektor-függvények* analitikus folytathatóságának lehetősége, amely kielégíti a pontos exponenciális becsléseket, a vonzási tartomány határáig bármely a koordináta rendszer középpontjából induló félegyenes mentén (V. I. Zubov (5) tételének analogonja). A módszerek második csoportjában — algoritmus kidolgozása a vonzási tartomány becslésére *Riccati típusú* összehasonlító rendszer esetére. A harmadik csoportban — a véges iterációs eljárás formális leírása.

IRODALOM

Адаменко Г. М., Гайшун И. В. (1) О численном методе построения функции Ляпунова. *Автоматика и телемеханика*, 1972, № 10, 197—199.

Айзерман М. А. (1) О сходимости процесса регулирования после больших начальных отклонений. *Автоматика и телемеханика*, 1946, № 7, 2—3.

Айзерман М. А. (2) Об учёте нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости систем автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика*, 1947, **8**, № 1 20—29.

Айзерман М. А. (3) Достаточные условия устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. *Прик. мат. и мех.*, 1951, **15**, № 3, 382—389.

Айзерман М. А. (4) *Теория автоматического регулирования двигателей*. М., Гостехиздат, 1952.

Айзерман М. А. (5) Проблема абсолютной устойчивости в гурвицевом угле. *Тр. 5-й Междунар. конференции по нелин. колебаниям*, 1969. Т. 2. Киев, 1970, 601 — РЖМех, 1971, 10А198.

Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. (1) *Абсолютная устойчивость регулируемых систем*. М., АН СССР, 1963 — РЖМех, 1964, 7А135К.

Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. (2) О критических случаях в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. *Автоматика и телемеханика*, 1963, **24**, № 6, 732—737— РЖМех, 1964, 3А104.

Алимов Ю. И. (1) Об устойчивости в целом равновесного состояния релейных систем автоматического регулирования. *Изд. высш. учебн. заведений. Радиофизика*, 1959, **2**, № 6, 957—966.

Алимов Ю. И. (2) О построении функций Ляпуного для релейных систем регулирования. *Автоматика и телемеханика*, 1960, **21**, № 6, 720—728 — РЖМех, 1960, 10А114.

Алимов Ю. И. (3) К вопросу о построении функций Ляпуного для линейных дифференциалных уравнений с постоянными коэффициентами. *Сиб. мат. журнал*, 1961, **2**, № 1, 3—6.

Аминов М. Ш. (1) Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы, *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1959, вып. 48, 3—117.

Анапольский Л. Ю. (1) Четаевские оценки приближенных решений регулируемых систем. *Автоматика и телемеханика*, 1970, № 10, 5—13.

Анапольский Л. Ю. (2) Об устойчивости множеств при постоянно действующих возмущениях. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1970, вып. 125, 3—13.

Аносов Д. В. (1) Об устойчивости положения равновесия релейных систем. *Автоматика и телемеханика*, 1959, **20**, № 2, 135—149 — РЖМех, 1962, 3А119.

Анчев А. (1) О перманентных вращениях твердого тела с одной закрепленной точкой и их устойчивости. *Прикл. мат. и мех.*, 1965, **29**, № 2, 380—386 — РЖМех, 1965, 10А53.

Арнольд В. И. (1) Вариационный принцип для трехмерных стационорных течений идеальной жидкости. *Прикл. мат и мех.*, 1965, **29**, № 5, 847—851 — РЖМех, 1966, 4Б396.

Арнольд В. И. (2) Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений жидкости. *Докл. АН СССР*, 1965, **162**, № 5, 975—978.

Барбашин Е. А. (1) О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными. *Докл. АН СССР*, 1950, **72**, № 3, 445—448.

Барбашин Е. А. (2) Метод сечений в теории динамических систем. *Матем. сб.*, 1951, **29**, № 2, 233—280.

Барбашин Е. А. (3) Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. *Прикл. мат. и мех.*, 1952, **16**, № 5, 629—632.

Барбашин Е. А. (4) О построении функций Ляпунова для нелинейных систем. *Тр. 1-го Междунар. конгр. Междунар. федерации по автомат. управл. Т. 1, М., АН СССР*, 1961, 742—751.

Барбашин Е. А. (5) О построении функций Ляпунова. *Дифференц. уравнения*, 1968, **4**, № 12, 2127—2158.

Барбашин Е. А. (6) *Введение в теорию устойчивости*. М., «Наука», 1967 — РЖМех, 1968, 8А97К.

Барбашин Е. А. (7) *Функции Ляпунова*. М., «Наука», 1970.

Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. (1) Об устойчивости движения в целом. *Докл. АН СССР*, 1952, **86**, № 3, 453—456.

Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. (2) О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 3, 345—350.

Барбашин Е. А., Табуева В. А. (1) *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством*. М., «Наука», 1969 — РЖМех, 1970, 3А100К.

Бедельбаев А. К. (1) *Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования*. Алма-Ата, АН Каз.ССР, 1960 — РЖМех, 1960, 4А117К.

Белецкий В. В. (1) Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. *Прикл. мат. и мех.* 1957, **21**, № 6, 749—758 — РЖМех, 1958, 10А769.

Белецкий В. В. (2) *Движение искусственного спутника относительно центра масс.* М., «Наука», 1965 — РЖМех, 1966, 5А47К.

Богатырев Б. М., Лыкова О. Б., Митропольский Ю. А. (1) Об одном способе построения функции Ляпунова для слабо неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений. *VI Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Познань,* 1972. Варшава, 1972, 19—20 — РЖМех, 1973, 2А151.

Бородавко И. А., Пионтковский А. А. (1) Исследование устойчивости нелинейных систем методом векторной функции Ляпунова. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., *Вопр. автоматики и телемеханики,* 1971, вып. 341, 59—69.

Бромберг П. В. (1) *Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования.* М., «Наука», 1967.

Брюно А. Д. (1) О формальной устойчивости системы Гамильтона. *Матем. заметки,* 1967, **1**, № 3, 325—330.

Букенбаев К. Б. (1) Исследование устойчивости регулируемых систем с нелинейностью вида $\varphi(\sigma)=\sigma^2$. *Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат.,* 1972, **1**, 14—18.

Булашева Л. К. (1) Об одном построении функции Ляпунова. В сб.: *Тр. I-й Казах. межвуз. научн. конф. по матем. и механ. Алма-Ата,* КазССР, «Наука», 1965, 44—46.

Бурлакова Л. А. (1) Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1968, вып. 97, 17—19 — РЖМех, 1969, 10А92.

Бурлакова Л. А. (2) О стационарных движениях одной механической системы. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1970, вып. 119, 54—62 — РЖМех, 1971, 2А98.

Валеев К. Г. (1) Использование нескольких функций Ляпунова. В сб.: *Всес. конф. по качеств. теории дифф. уравн. Тезисы докл.* Свердловск, 1971, 26—28.

Ван Дань Чжи (1) Об устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. *Вестн. Моск. ун-та, мат., мех.,* 1969, № 2, 86—94 — РЖМех 1969, 7А68.

Ван Чжао—Лин (1) Об обращении теоремы Рауса. *Прикл. мат. и мех.,* 1963, **27**, № 5, 890—893 — РЖМех, 1964, 5А93.

Вахонина Г. С., Земляков А. С., Матросов В. М. (1) О способах построения вектор-функций Ляпунова. В сб.: *Всес. конф. по качеств. теории дифф. уравн. Тезисы докл.* Свердловск, 1971, 28—29.

Вахонина Г. С., Земляков А. С., Матросов В. М. (2) О способах построения квадратичных вектор-функций Ляпунова для линейных систем. *Автоматика и телемеханика,* 1973, № 2, 5—16.

Венкатеш Я. В. (1) Новые функции Ляпунова для анализа устойчивости. *Автоматика и телемеханика,* 1971, № 4, 37—45.

Воронова В. В., Иртегов В. Д. (1) Об одном способе построения функции Ляпунова на ЦВМ. *III. Всес. конф. по качеств. теории дифф. уравн. Самарканд. октябрь 1973. Тезисы докл.* Самарканд, 1973, 53—54.

Володин В. П., Радченко И. Ф. Про матричне рівняння Ляпунова. *Автоматика,* 1970, № 6, 13—19 — РЖМех, 1971, 5А152.

Гайшун И. В. (1) Об устойчивости в целом движения, определяемого одной нелинейной системой третьего порядка. *Дифференц. уравнения,* 1969, **5**, № 12, 2156—2164.

Гайшун И. В. (2) Об устойчивости в целом решений системы прямого управления с двумя входами. *Автоматика и телемеханика,* 1970, № 11, 5—10.

Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А. (1) Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. *Тр. II-го Всес. съезда по теор. и прикл. мех., Обзорные докл. Вып. I,* М., «Наука», 1965, 30—63 — РЖМех, 1966, 7А69.

Гелиг А. Х. (1) Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным состоянием равновесия. *Автоматика и телемеханика,* 1964, **25**, № 2, 153—160 — РЖМех, 1964, 9А106.

Гелиг А. Х. (2) Устойчивость многосвязных нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия. *Автоматика и телемеханика,* 1970, № 1, 16—23.

Гелиг А. Х., Комарницкая О. И. (1) Абсолютная устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия в критических случаях. *Автоматика и телемеханика,* 1966, № 8, 5—14 — РЖМех, 1967, 2А95.

Геращенко Е. И., Завалищин С. Т. (1) Исследование релейных систем с помощью разрывных функций Ляпунова. В сб.: *Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике. Тр. семинара-симпозиума.* Новосибирск, «Наука», 1966, **1**, 73—104.

Гермаидзе В. Е. (1) Об асимптотической устойчивости по первому приближению. *Прикл. мат. и мех.*, 1957, **21**, № 1, 133—135 — РЖМех, 1958, № 3, 2600.

Горбунов А. Д. (1) Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. *Уч. зап. Моск. ун-та,* 1954, № 7, 165.

Гудыменко Б. А., Удилов В. В. (1) Применение векторной функции Ляпунова в задаче стабилизации многомерных систем. В сб.: *Сложные системы управления. Тр. семинара ин-та киберн. АН УССР. Вып. I.* Киев, 1968, 41—56.

Гудыменко Б. А., Удилов В. В. (2) Об одной задаче стабилизации многомерных систем. В сб.: *Кибернетика и вычисл. техн. Респ. межвед. сб. Киев,* «Наук, думка», 1969, 134—150.

Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. (1) *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М., «Наука», 1970.

Дальберг Э. (1) О некотором видоизмененном критерии неустойчивости движения. *Прикл. мат. и мех.,* 1969, **33**, № 2, 261—268 — РЖМех, 1969, 10А82.

Данилов А. М., Дулькин Л. З., Земляков А. С., Матросов В. М., Стрежнев В. А. (1) Динамика стратосферной обсерватории. В сб.: *Вторая Четаевск. конф. по аналит. мех., устойчивости движения и оптимальн. управл., 1973, Аннотации докл.* Казань, 1972, 7.

Демидович Б. П. (1) О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений. I, II. *Вест. Моск. ун-та,* 1961, № 6, 19—27; 1962, № 1, 3—8.

Демидович Б. П. (2) *Лекции по математической теории устойчивости.* М., «Наука», 1967.

Демин В. Г. (1) *Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения.* М., «Наука», 1968 — РЖМех, 1969, 3А53К.

Дружинин Э. И. (1) Устойчивость стационарных движений гиростатов в центральном поле тяготения. Казань, диссертация, 1967.

Дружинин Э. И. (2) Об устойчивости гиростатов в вырожденных случаях. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1968, вып. 97, 30—37 — РЖМех, 1969, 10А90.

Еругин Н. П. (1) Теоремы о неустойчивости. *Прикл. мат. и мех.,* 1952, **16**, № 3, 355—361.

Еругин Н. П. (2) Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. *Прикл. мат. и мех.,* 1952, **16**, № 5, 520—528.

Железнов Е. И. (1) Об устойчивости в целом решений одной нелинейной системы трех уравнений. *Тр. Уральск. политехн. ин-та,* 1958, **74**, 41—45 — РЖМех, 1960, 1А125.

Жуковский В. И. (1) Обзор работ об устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. *Уч. зап. Пед. ин-та (Орехово—Зуево),* 1964, **22**, № 3, 12—25.

Задорожный В. Ф. (1) Исследование асимптотической устойчивости многомерных систем с помощью метода векторной функции Ляпунова. В сб.: *Кибернетика и вылисл. техн. Респ. межвед. сб.,* Киев, «Наук. думка», 1969, 92—97.

Задорожный В. Ф., Мартынюк А. А. (1) Оценка влияния связей между подсистемами на устойчивость линейной нестационарной системы. *Прикл. механика,* 1972, **8**, № 9, 65—71 — РЖМех, 2А159, 1973.

Земляков А. С. (1) К вопросу построения системы сравнения. *Тр. Казанск. авиац. ин-та,* 1972, вып. 144, 46—54.

Земляков А. С. (2) О способах построения вектор-функций Ляпунова. Казань, диссертация, 1973.

Земляков А. С. (3) О способах построения вектор функций Ляпунова для нелинейных систем и получение некоторых оценок. В сб.: *II Четаевск. конф. по аналит. мех., устойчивости движения и оптимальн. управл. 1973. Аннотации докл.* Казань, 1972, 30—31 — РЖМех, 1973, 5А193.

Земляков А. С., Матросов В. М. (1) О способах построения вектор—функций Ляпунова для нелинейных систем. *Тр. I школы-семинара по оптимальн. и адаптивн. управл.* Саратов, Поволжск. изд., 1974.

Зубов В. И. (1) Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений. *Прикл. мат. и мех.,* 1953, *17*, № 4, 506—508 — РЖМех, 1954, № 4, 2839.

Зубов В. И. (2) К теории второго метода А. М. Ляпунова. *Докл. АН СССР*, 1954, **99**, № 3, 341—344.

Зубов В. И. (4) Вопросы теории второго метода Ляпунова построения общего решения в области асимптотической устойчивости. *Прикл. мат. и мех.*, 1955, **19**, № 2, 179—210.

Зубов В. И. (5) Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., Изд. Ленингр. ун-та, 1957.

Зубов В. И. (6) *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*. Л., Судпромгиз, 1959.

Илиев И. (1) Классификация линейных интегралов голономной механической системы с *n* степенями свободы. *Прикл. мат. и мех.*, 1972, **36**, № 1, 125—129 — РЖМех, 1972, 7А78.

Иоффе И. В., Леонов Г. А. (1) О существовании трех периодических решений в одной многомерной неавтономной системе. *III. Всес. конф. по качеств. теории дифф. уравн., Самарканд, октябрь 1973. Тезисы докл.* Самарканд, 1973, 97.

Иртегов В. Д. (1) Частные задачи устойчивости движений твердого тела в центральном поле сил. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1963, вып. 80, 12—21 — РЖМех, 1965, 2А102.

Иртегов В. Д. (2) Стационарные движения уравновешенного твердого тела и их устойчивость в центральном поле сил. тяготения. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1964, вып. 83, 3—15 — РЖМех, 1965, 4А75.

Иртегов В. Д. (3) К вопросу об устойчивости стационарных движений твердого тела с одной закрепленной точкой в центральном поле сил. Казань, диссертация, 1964.

Иртегов В. Д. (4) К вопросу об устойчивости стационарных движений твердого тела в потенциальном силовом поле. *Прикл. мат. и мех.*, 1966, **30**, № 5, 939—942 — РЖМех, 1967, 5А100.

Иртегов В. Д. (5) Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С. В. Ковалевской. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1968, вып. 97, 38—40 — РЖМех, 1969, 10А94.

Иртегов В. Д. (6) Об устойчивости одной регулярной прецессии. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1969, вып. 109, 33—39 — РЖМех, 1970, 9А112.

Иртегов В. Д. (7) О теореме Рауса—Ляпунова. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1972, вып. 149, 28—34.

Исаев Л. С. (1) О достаточных условиях устойчивости вращения волчка «тип—топ», находящегося на абсолютно шереховатой горизонтальной плоскости. *Прикл. мат. и мех.*, 1959, *23*, № 4, 403—406 — РЖМех, 1960, № 6, 6883.

Каменков Г. В. (1) *Избранные труды*. Т. I, II. М., «Наука», 1971 — РЖМех, 1972, 5А95К.

Карачаров К. А., Пилютик А. Г. (1) *Введение в техническую теорию устойчивости движения*. М., Физматгиз, 1962 — РЖМех, 1963, 6А88К.

Ковалев Ю. М. (1) Об устойчивости постоянных винтовых движений в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. *Прикл. мат. и мех.*, 1968, **32**, № 2, 282—285 — РЖМех, 1969, 1А91.

Комарницкая О. Н. (1) Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. *Прикл. мат. и мех.* 1959, **23**, № 3, 505—514 — РМЖех, 1960, № 6, 6885.

Коротков В. А. (1) Возможные методы построения функций Ляпунова для электроенергетических систем. *Тр. II семинара-симпозиума по применению метода функций Ляпунова*. Новосибирск, «Наука», 1970, 73—95.

Красносельский М. А. (1) *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*. М., «Наука», 1965.

Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. (1) *Нелинейные почти периодически колебания*. М., «Наука», 1970.

Красовский Н. Н. (1) Об обращении теорем Ляпунова и Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 5, 513—532 — РЖМех, 1955, 2838.

Красовский Н. Н. (2) Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 1, 95—102 — РЖМех, 1955, 113.

Красовский Н. Н. (3) Обобщение теории второго метода А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. *Прикл. мат. и мех.*, 1965, **20**, № 2, 255—265 — РЖМех, 1957, № 5, 5170.

Красовский Н. Н. (4) К теории второго метода Ляпунова для исследования устойчивости. *Матем. сб.* 1956, **40**, № 1, 57—64 — РЖМех, 1957, № 7, 7515.

Красовский Н. Н. (5) *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. М., Физматгиз, 1959—РЖМех, 1960, № 4, 4303К.

Крементуло В. В. (1) Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось вращения внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса. *Прикл. мат. и мех.* 1960, **24**, № 3, 568—571 — РЖМех, 1961, 8А94.

Кудаев М. Б. (1) Абсолютная устойчивость регулируемых систем. *Уч. Зап. Кабардино-Балкарского ун-та. Сер. физ.-мат.*, 1965, **24**, 144—145.

Кудаев М. Б. (2) О применении одного класса функций Ляпунова. *Уч. зап. Кабардино-Балкарского ун-та. Сер. физ.-мат.*, 1965, **24**, 141—143.

Кузьмин П. А. (1) К теории устойчивости движения. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 1, 125—127.

Кузмин П. А. (2) К теории перманентных вращений. Изв. Высш. учебн. заведений. *Авиац. техника*, 1958, № 2, 16—19 — РЖМех, 1959, № 5, 4706.

Кузьмин П. А. (3) Квадратичные интегралы линейных механических систем. *Прикл. мат. и мех.*, 1960, **24**, № 3, 575—577.

Кузмин П. А. (4) Теорема Гурвица в прямом методе Ляпунова. *Тр. Казанск. авиац. ин-т*, 1962, вып. 71, 3—11.

Кузьмин П. А. (5) Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. *Тр. Межвуз. конференции по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механ., 1962.* Казань, 1964, 93—98 — РЖМех, 1965, 12А93.

Кузьмин П. А. (6) *Малые колебания и устойчивость движения.* М., «Наука», 1973 — РЖМех, 1973, 12А130К.

Куницын А. Л. (1) Качественное исследование движений в одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров. *Тр. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы*, 1966, **17**, 32—52 — РЖМех, 1967, 6А61.

Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н. (1) *Нелинейные системы управления с частотно и широтно-импульсной модуляцией.* Киев, «Техника», 1970.

Курцвейль Я. (1) К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. *Чехословацкий мат. ж.*, 1955, **5**, № 3, 382—398.

Курцвейль Я. (2) Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. *Чехословацкий мат. ж.*, 1956, **6**, № 2, 217—259; № 4, 455—484.

Курцвейль Я., Вркоч И. (1) Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. *Чехословацкий мат.* ж., 1957, **7**, № 2, 254—272.

Леонов Г. А. (1) Об устойчивости нелинейных регулируемых систем с неединственным положением равновесия. *Автоматика и телемеханика*, 1971, № 10, 23—28.

Леонов Г. А. (2) Неустойчивость в целом нелинейных систем управления. *Автоматика и телемеханика*, 1971, № 11, 164—166.

Летов А. М. (1) Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами. *Прикл. мат. и мех.*, 1953, **17**, № 4, 401—410 — РЖМех, 1954, 3959.

Летов А. М. (2) *Устойчивость нелинейных регулируемых систем.* М., Гостехиздат, 1955 (2-е изд. 1962) — РЖМех, 1956, № 6, 7224К.

Летов А. М. (3) Проблематика научных исследований в области автоматического управления. *Автоматика и телемеханика*, 1966, № 8, 167—173.

Летов А. М. (4) *Динамика полета и управление.* М., «Наука», 1969 — РЖМех, 1970, 2А166К.

Летов А. М., Дувакин А. П. (1) Об устойчивости регулируемых систем с двумя органами управления. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 2, 163—166 — РЖМех, 1955, 2842.

Лунц Я. Л., Смолицкий Х. Л. (1) Об одном классе движений консервативных систем с одной нециклической координатой. *Прикл. мат. и мех.*, 1966, **30**, № 4, 617—624 — РЖМех, 1966, 12А82.

Лурье А. И. (1) *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.* М.,—Л., ГИИТЛ, 1951.

Лурье А. И., Постников В. Н. (1) К теории устойчивости регулируемых систем· *Прикл. мат. и мех.*, 1944, **8**, № 3, 246—248.

Лурье А. И., Розенвассер Е. Н. (1) О методах построения функций Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. *Тр. 1-го Междунар. конгресса Междунар. Федерации по автоматич. управл. Т. I. М.*, АН СССР, 1961, 709—722.

Любимцев Я. К. (1) О способе Н. Н. Красовского построения функций Ляпунова. В. сб.: *II. Четаевская конф. по аналит. механ., устойчивости движения и оптимальн. упр., 1973. Аннотации докл.* Казань, 1972 РЖМех, 1973, 5А194.

Ляпунов А. М. (1) *Собрание сочинений. Т. II.* М.—Л., АН СССР, 1956.

Ляпунов А. М. (2) *Библиография.* М.—Л., АН СССР, 1953.

Ляпунов А. М. (3) О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. *Собрание сочинен й. Т. I.* М., АН СССР, 1954.

Макаров И. П., Шамилина Л. С. (1) Кусочно-гладкая функция в качестве функции Ляпунова. *Уч. зап. Рязанск. пед. ин-та,* 1966, **41**, 29—37.

Малкин И. Г. (1), Проблема существования функций Ляпунова. *Изв. Казанского физ.-матем. об-ва,* 1931, **5**, 63—84.

Малкин И. Г. (2) Об устойчивости по первому приближению. *Тр. Казанск. авиац. ин-та,* 1935, вып. 3, 7—17.

Малкин И. Г. (3) Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. *Прикл. мат. и мех.,* 1944, **8**, № 4, 241—245.

Малкин И. Г. (4) К теории устойчивости регулируемых систем. *Прикл. мат. и мех.,* 1951, **15**, № 1, 53—66.

Малкин И. Г. (5) Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. *Прикл. мат. и мех.,* 1952, **16**, № 3, 365—368.

Малкин И. Г. (6) Об устойчивости систем азтоматического регулирования. *Прикл. мат. и мех.,* 1952, **16**, № 4, 495—498.

Малкин И. Г. (7) К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Прикл. мат. и мех.,* 1954, **18**, № 2, 129—138.

Малкин И. Г. (8) *Теория устойчивости движения.* М., «Наука» 1965.

Мартынюк А. А. (1) О построении функций Ляпунова. *Доповiдi АН УССР,* 1972, А, № 7, 623—626.

Мартынюк А. А. (2) Об одной итерационной формуле построения функции Ляпунова. *Укр. мат. ж.,* 1972, **24**, № 2, 255—259.

Мартынюк А. А. (3) *Техническая устойчивость в динамике.* Киев, «Техника», 1973 — РЖМех, 1973, 6А119.

Мартынюк А. А. (4) О качественном и численно-аналитическом исследовании устойчивости по Ляпунову и Четаеву сложных систем, систем с последствием и со случайными параметрами. Киев, диссертация, 1973.

Матросов В. М. (1) Некоторые вопросы устойчивости гироскопических систем. Казань, диссертация, 1959.

Матросов В. М. (2) К вопросу устойчивости гироскопических систем. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1959, вып. 49, 3—24 — РЖМех, 1961, 5А135К.

Матросов В. М. (3) Об устойчивости движения. *Прикл. мат. и мех.,* 1962, **26**, № 5, 885—895 — РЖМех, 1963, 4А97.

Матросов В. М. (4) К теории устойчивости движения. *Прикл. мат. и мех.,* 1962, **26**, № 6, 992—1002 — РЖМех, 1964, 5А86.

Матросов В. М. (5) К теории устойчивости движения. II. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1963, вып. 80, 22—23.

Матросов В. М. (6) Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавторомных систем. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1965, вып. 89, 20—32 — РЖМех, 1966, 12А76.

Матросов В. М. (7) Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости. *Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. мех. вып. I.* М., «Наука», 1965, 112—125 — РЖМех, 1966, 8А86.

Матросов В. М. (8) Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова, I—IУ. *Дифференц. уравнения,* 1968, **4**, № 8, 1374—1386; 1968, **4**, № 10, 1739—1752; 1969, **5**, № 7, 1171—1185; 1969, **5**, № 12, 2129—2143—РЖМех, 1968, 10А103.

Матросов В. М. Matrosov V. M. Vector Lyapunov functions in the analysis of nonlinear interconnected systems. *Symp. math., Roma,* New York—London, Acad. Press, 1971, 209—242.

Матросов В. М. (10) Метод векторных функций Ляпунова в системах с обратной связью. *Автоматика и телемеханика,* 1972, № 9, 63—75.

Матросов В. М. (11) Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределёнными параметрами. *Автоматика и телемеханика,* 1973, № 1, 5—22.

Меркин Д. Р. (1) *Гироскопические системы.* М., ГИТТЛ, 1956.

Меркин Д. Р. (2) *Введение в теорию устойчивости движения.* М., «Наука», 1971 — РЖМех, 1972, 5А107К.

Моисеев Н. Д. (1) Квазиинтегральный вывод прямого коэффициентного критерия асимптотической устойчивости движения. *Зап. семин. по теории устойч. движ.,* 1948, вып. 3.

Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. (1) *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.* М., «Наука», 1967, — РЖМех, 1967, 11А154К.

Набиуллин М. К. (1) Об устойчивости стационарных движений гиростата в силовом поле двух неподвижных центров. *Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела,* 1971, № 1, 156—164 — РЖМех, 1971, 7А142.

Нугманова Ш. С. (1) Об устойчивости периодических движений. *Докл. АН СССР,* 1944, **92**, № 5, 206—207.

Немыцкий В. В. (1) О проблеме качественново исследования в целом методами функций Ляпунова. *Вестн. Моск. ун-та. Мат. Мех., сер. I,* 1962, № 6, 26—28.

Огурцов А. И. (1) Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Изв. высш. учебн. заведений. Математика,* 1959, **10**, № 3, 200—209.

Озиранер А. С. (1) Об асимптотической устойчивости движения относительно части переменных. В сб.: *Вторая Четаевск. конф. по аналит. мех., устойчивости движения и оптимальн. управл., 1973, Аннотации докл.,* Казань, 1972, 41—41 — РЖМех, 1973, 5А192.

Оркина Е. Л. (1) Применение разрывных функций Ляпунова для анализа устойчивости нелинейных следящих систем. *Автоматика и телемеханика,* 1965, **26**, № 12, 2107—2112.

Персидский. К. П. (1) К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. *Изв. физ.-мат. общ. при Казанском Гос. ун-те,* 1936—1937, **8**, 29—45.

Персидский К. П. (2) Об одной теореме Ляпунова. *Докл. АН СССР,* 1937, **14**, № 9, 541—544.

Персидский К. П. (3) К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. Диссертация, 1946.

Персидский К. П. (4) Об устойчивости решений дифференциальных уравнений. *Изв. АН КазССР, Сер. мат. и мех.,* 1950, **97**, № 4, 3—18.

Персидский К. П. (5) Решение задачи Коши для некоторых бесконечных систем функциональных уравнений. *Изв. АН КазССР. физ.-мат.,* 1967, № 1, 17—24.

Персидский С. К. (1) О применении линейных форм в качестве функций Ляпунова. *Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.,* 1968, № 3, 39—46.

Персидский С. К. (2) О некоторых теоремах второго метода Ляпунова. *Дифференциальные уравнения,* 1969, **5**, № 4, 678—687.

Персидский С. К. (3) К исследованию устойчивости сложных систем дифференциальных уравнений, когда подсистемы нелинейно связаны между собой. В сб.: *IV Казахск. научн. конф. по матем. и механ., Тезисы докл.* Алма-Ата, 1971.

Персидский С. К. (4) О развитии метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Алма-Ата, диссертация, 1971.

Пионтковский А. А. (1) К исследованию устойчивости нестационарных нелинейных систем. *Автоматика и телемеханика,* 1970, **11**, 179—181.

Пионтковский А. А., Рутковская Л. Д. (1) Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью метода векторной функции Ляпунова. *Автоматика и телемеханика,* 1967, № 10, 23—31 — РЖМех, 1968, 7А133.

Плисс В. А. (1) Исследование одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. *Докл. АН СССР,* 1956, **111**, 1078—1080.

Плисс В. А. (2) *Нелокальные проблемы теории колебаний.* М.—Л., «Наука», 1964 — РЖМех, 1965, 7А126К.

Пожарицкий Г. К. (1) Об устойчивости диссипативных систем. *Прикл. мат. и мех.,* 1957, **21**, № 4, 503—512 — РЖМех, 1958, 7354.

Пожарицкий Г. К. (2) О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. *Прикл. мат. и мех.,* 1958, **22**, № 2, 145—154 — РЖМех, 1959, № 4, 3483.

Пожарицкий Г. К. (3) Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. *Прикл. мат. и мех.,* 1961, **25**, № 4, 657—667.

Портной М. Г. (1) Применение интеграла энергии, как функции Ляпунова, для анализа устойчивости синхронной машины при периодических возмущениях. В сб.: *Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике. (Тр. семинара-симпозиума).* Новосибирск, «Наука», 1966, **1**, 31—51.

Пустовойтов В. А. (1) К построению функций Ляпунова методом малого параметра. *Тр. семин. по мат. физике и нелинейн. колеб.* Киев, «Наук. думка», 1968, 186—193.

Пустовойтов В. А. (2) Приближенный метод построения функции Ляпунова. *УI Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, Познань, 1972.* Варшава, 1972, 103 — РЖМех, 2А153.

Пятницкий Е. С. (1) Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического управления (оброз). *Автоматика и телемеханика,* 1968, № 6, 5—36.

Разумихин Б. С. (1) О применении метода Ляпунова к задачам устойчивости. *Прикл. мат. и мех.,* 1958, **22**, № 3, 338—349 — РЖМех, 1959, № 11, 12 987.

Розенвассер Е. Н. (1) Замечания об одном способе построения функций Ляпунова. *Прикл. мат. и мех.,* 1960, **24**, № 4, 746—749.

Розенвассер Е. Н. (2) О построении функций Ляпунова для нелинейных систем. *Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр.,* 1960, № 2, 7—16 — РЖМех, 1961, 5А99.

Розенвассер Е. Н. (3) Об асолютной устойчивости нелинейных систем. *Автоматика и телемеханика,* 1963, **24**, № 3, 304—313 — РЖМех, 1964, 2А105.

Ройтенберг Я. Н. (1) Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. *Прикл. мат. и мех.,* 1958, **22**, № 2, 167—172.

Рубановский В. Н., Степанов С. Я. (1) О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения. *Прикл. мат. и мех.,* 1969, **33**, № 5, 904—912 — РЖМех, 1970, 3А106.

Румянцев В. В. (1) Об устойчивости вращения тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской. *Прикл. мат. и мех.,* 1954, **18**, № 4, 457—458 — РЖМех, 1955, № 2, 614.

Румянцев В. В. (2) Устойчивость перманентных вращений тяжёлого твёрдого тела. *Прикл. мат. и мех.,* 1956, **20**, № 1, 51—66 — РЖМех, 1956, № 12, 8040.

Румянцев В. В. (3) К теории устойчивости регулируемых систем. *Прикл. мат. и мех.,* 1956, **20**, № 6, 714—722 — РЖМех, 1957, № 10, 11 265.

Румянцев В. В. (4) К задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с одной неподвижной точкой. *Докл. АН СССР,* 1957, **116**, № 2, 185—188 — РЖМех, 1959, № 1, 64.

Румянцев В. В. (5) Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. *Прикл. мат. и мех.,* 1958, **22**, № 4, 499—503 — РЖМех, 1959, № 8, 8418.

Румянцев В. В. (6) Жизнь и деятельность Н. Г. Четаева в московский период. *Тр. Межвуз. конференции по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механ., 1962.* Казань, 1964, 10—17 — РЖМех, 1965, 4А5.

Румянцев В. В. (7) Исследование устойчивости движения твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью. *Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. мех., вып. I,* «Наука», 1965, 153—169 — РЖМех, 1966, 8А87.

Румянцев В. В. (8) *Об устойчивости стационарных движений спутников.* М., ВЦ АН СССР, 1967 — РЖМех, 1968, 9А31К.

Румянцев В. В. (9) Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В сб.: *Механика в СССР за 50 лет. Т. I.* М., «Наука», 1968, 7—66 — РЖМех, 1969, 4А84.

Румянцев В. В. (10) О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. *Прикл. мат. и мех.,* 1969, **33**, № 6, 946—957 — РЖМех, 1970, 2В309.

Семёнова Л. Н. (1) О теореме Рауса для неголономных систем. *Прикл. мат. и мех.,* 1965, **29**, № 1, 156—157 — РЖМех, 1965, 9А96.

Сиразетдинов Т. К. (1) *Устойчивость систем с распределёнными параметрами.* Казань, 1971.

Скимель В. Н. (1) К задачам устойчивости движения тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки. *Прикл. мат. и мех.,* 1956, **20**, № 1, 130—132 — РЖМех, 1957, № 6, 6309.

Скимель В. Н. (2) Об устойчивости некоторого типа гироскопов. *Тр. Казанск. авиац. ин-т,* 1965, вып. 89, 33—40 — РЖМех, 1966, 12А83.

Скимель В. Н. (3) О движении гироскопа, подвешенного на струне. *Тр. межвуз. конференции по прикл. теории устойчивости и аналит. механ., 1962.* Казань, 1964, 118—122 — РЖМех, 1965, 8А99.

Спасский Р. А. (1) Об одном классе регулируемых систем. *Прикл. мат. и мех.,* 1954, **18**, № 3, 329—344 — РЖМех, 1955, № 1, 32.

Старжинский В. М. (1) Обзор работ по условиям устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. *Прикл. мат. и мех.,* 1954, **18**, № 4, 469—510 — РЖМех, 1955, № 7, 3500.

Старжинский В. М. (2) Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. *Прикл. мат. и мех.,* 1952, **16**, № 3, 368—374.

Старжинский В. М. (3) Об устойчивости неустановившихся движений в одном специальном случае. *Прикл. мат. и мех.*, 1955, **19**, № 4, 471—480 — РЖМех, 1956, № 4, 1936.

Степанов С. Я. (1) О множестве стационарных движений спутника гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивость. *Прикл. мат. и мех.*, 1969, **33**, № 4, 737—744 — РЖМех, 1970, 3А107.

Тузов А. П. (1) Вопросы устойчивости для одной системы регулирования. *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1955, **2**, 43—70 — РЖМех, 1956, № 3, 1295.

Филиппов А. Ф. (1) Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Матем. сб.*, 1960, **51**, (93), № 1, 99—128.

Фурасов В. Д. (1) Стабилизация взаимосвязанных систем. *Тр. II Межвуз. научно-технич. конференции. Достижения и перспективы развития технич. киберн.*, М., 1972.

Хапаев М. М. (1) Об одной теореме типа Ляпунова. *Докл. АН СССР*, 1967, **176**, № 6, 1262—1265.

Хапаев М. М. (2) Об исследовании на устойчивость в теории нелинейных колебаний. *Матем. заметки*, 1968, **3**, № 3, 307—318.

Хапаев М. М. (3) Обобщение второго метода Ляпунова и исследование некоторых резонансных задач, *Докл. АН СССР*, 1970, **193**, № 1, 46—49.

Хапаев М. М. (4) Об устойчивости в задаче трёх тел. *Докл. АН СССР*, 1970, **195**, № 2, 300—302 — РЖМех, 1971, 4А208.

Хапаев М. М. (5) Об устойчивости положения равновесия систем дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения*, 1969, **5**, № 5, 848—855.

Хасьминский Р. З. (1) *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*. М., «Наука», 1969.

Чаплыгин С. А. (1) Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. *Избр. тр. по механ. и матем.* М., ГИТТЛ, 1954, 490—538.

Четаев Н. Г. (1) Об устойчивости вращения твёрдого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. *Прикл. мат. и мех.*, 1954, **18**, № 1, 123—124 — РЖМех, 1954, № 6, 3594.

Четаев Н. Г. (2) Устойчивость движения. *Работы по аналитической механике*. М., АН СССР, 1962 — РЖМех, 1963, 10А139К.

Шиманов С. Н. (1) Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего проядка. *Прикл. мат. и мех.*, 1953, **17**, № 3, 369—372.

Шульгин М. Ф. (1) К вопросу о частных решениях канонических уравнений динамики. *Научн. тр. Ташкентск. ун-та*, 1968, вып. 316, 104—111 — РЖМех, 1969, 6А66.

Эльсгольц Л. Э. (1) *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющими аргументами*. М., «Наука», 1964.

Эльсгольц Л. Э. (2) *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М., «Наука», 1965.

Яковлев М. К. (1) Об одном способе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. *Дифференц. уравнения*, 1965, **1**, № 11, 1488—1492.

Якубович В. А. (1) Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. *Докл. АН СССР*, 1962, **143**, № 6, 1304—1308.

Якубович В. А. (2) Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. I—III. *Автоматика и телемеханика*, 1963, **24**, № 3, 293—303; № 6, 717—731; 1964, **25**, № 5, 601—612 — РЖМех, 10А113;, 11А93; 1964, 12А90.

Якубович В. А. (3) Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования. *Докл. АН СССР*, 1964, **156**, № 2, 278—281 — РЖМех, 1965, 6А74.

Якубович В. А. (4) Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний. *Автоматика и телемеханика*, 1964, **25**, № 7, 1017—1029 — РЖМех, 1965, 3А110.

Якубович В. А. (5) Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную. *Автоматика и телемеханика*, 1965, **26**, № 4, 577—590 — РЖМех, 1965, 11А84.

Якубович В. А. (6) Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. *Автоматика и телемеханика*, 1965, **26**, № 5, 753—763.

Якубович В. А. (7) Частнотные условия абсолютной устойчивости стационарных режимов и вынужденных колебаний нелинейных систем регулирования. *Тр. Междун. конф. по многомерным и дискретным системам автом. упр., Секция А*, Прага, 1965.

Якубович В. А. (8) Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. *Автоматика и телемеханика,* 1967, № 6, 5—30 — РЖМех, 1967, 12А100.

Якубович В. А. (9) Частотные условия существования абсолютно устойчивых периодических и почти периодических предельных режимов систем автоматического регулирования со многими нестационарными нелинейностями. *Тр. III Междунар. конгресса Междунар. федерации по автом. упр., Лондон, 1966. Теория непрерывных автоматических систем и вопросы идентификации.* М., «Наука», 1971, 171—181.

Якубович В. А. (10) Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I, II. *Автоматика и телемеханика,* 1970, № 12, 5—14; 1971, № 6, 25—34 — РЖМех, 1971, 4А203.

Anderson B. D. O. (1) Stability of control systems with multiple nonlinearities. *J. Franklin Inst.* 1966. **282,** № 3.

Anderson B. D. O., Moore J. B. (1) Андерсон Б. Д. О., Мур Дж. Б. Посроение функций Ляпунова для нестационарных систем, сожержащих безынерционные нелинейности. *Автоматика и телемеханика,* 1972. № 5. 14—21.

Antosiewicz H. A. (1) Stable systems of differential equations with inttegrable perturbation terms. *J. London Math. Soc.,* 1956, **31,** № 122, 208—212.

Bailey F. N. (1) The Application of Lyapunov's second method to interconnected systems. *J. Soc. Industr. and Appl. Math., Ser. A. Control,* 1965 (1966) **3,** № 3, 443—462.

Bailey F. N. (2) Vector Lyapunov functions for a class of interconnected systems. *Proc. Nat. Electron. Conf.,* 1965, **21,** 593—598.

Barnett S. (1) Algebraic methods in Liapunov theory. *Control,* 1968, **12,** № 120, 545—549.

Barnett S., Storey C. (1) Analysis and synthesis of stability matrices. *J. Different. Equat.* 1967, **3,** № 3, 414—422.

Barnett S., Storey C. (2) Comments on the Lyapunov matrix. *Electron. Lett.,* 1967, **3,** № 3, 122—123.

Barnett S., Storey C. (3) Further remarks on the Lyapunov matrix equation and Schwarz's form. *IEEE Trans. Automat. Control,* 1968, **13,** № 2, 204—205.

Barnett S., Storey C. (4) *Matrix methods in stability theory.* London, Nelson, 1970.

Bellman R. (1) Kronecker products and the second method of Lyapunov. *Math. Nachrichten,* 1959, **20,** № 1—2, 17—19.

Bellman R. (2) Vector Lyapunov functions. *J. Soc. Industr. and Appl. Math, Ser. A. Control,* 1962. **1,** № 1.

Berger A., Lapidus L. (1) Stability of high dimensional non-linear systems using Krasovskij's theorem. *A. I. Ch. E. Journal,* 1969, **15,** № 2, 171—177 — РЖМех. 1970, 2А85.

Bhatia N. P., Szegő G. P. (1) *Dynamical systems: stability theory and applications.* Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1967.

Birkhoff G. D. (1) *Dynamical systems.* New York, 1927. Ch. 7. Orosz fordítás: Биркгоф ДЖ. Д. *Динамические системы.* М.—Л., ОГИЗ, 1941.

Boyanovitch D. (1) On the applications of hydrodynamics to the study of the stability of singular points of differential equations: autonomous systems. *Joint Automat. Control Conf. Rensselaer Polytechn. Inst.* (Troy, N. Y.), 1965, Preprints conf. papers. S. l., s. a.

Brockett R. W. (1) On the stability of nonlinear feedback systems. *IEEE Trans. Appl. and Ind.,* 1964, **83,** 443—449.

Brockett R. W. (2) The status of stability theory for deterministic systems. *IEEE Trans. Automat. Control,* 1966, **AC—11,** 596—606.

Brockett R. W., Forys L. J. (1) On the stability of systems containing a time-varying gain. *Proc. 2-nd Ann. Allerton Conf. Circuit and Systems Theory,* 1964, 413—430.

Brockett R. W., Willems J. L. (1) Frequency domain stability criteria I, II. *IEEE Trans. Automat. Control,* 1965. **AC—10,** 255—261, 407—413.

Cai Sui-Lin (1) A formula for the Lyapunov function of a system of linear differential equations with constant coefficients. *Chinese Math.,* 1967, **9,** № 6.

Chen Chion-Shiun, Kinnen E. (1) Construction of Liapunov functions. *J. Franklin Inst.,* 1970, **286,** № 2, 133—146. Orosz fordítás: Чень Чу-Шень, Киннен Э. Построение функций Ляпунова. *Механика. Период. сб. перев. ин статей,* 1971, № 6. 3—15 — РЖМех, 1972, 6А123.

Cho L. S., Narendra K. S. (1) Stability of nonlinear time-varying systems. *Automatica,* 1968, № 4, 309.

COLLINSON C. D. (1) Integrals of dynamical systems linear in the velocities. *Proc. Edinburgh. Math. Soc.*, 1971, **17**, № 3, 241—244.

CORDUNEANU C. (1) Кордуняну К. Применение дифференциальных неравенств в теории устойчивости. *An. şti. Univ. A. I. Cusa, Iaşi, sec. Y*, 1960, **6**, № 1, 47—58; 1961, **7**, № 2, 247—252.

CORNE J. L. (1) Study of the attractivity of sets by Liapunov's direct method. *6th Int. Conf. Nonlinear Oscillations, Poznan*, **1972**. Warszawa, 1972. 33. Корне Ж. Л. Исследование притяжения множествами прямым методом Ляпунова. *УI Междунар. Конф. по нелинейным колебаниям. Познань, 1972*. Варшава, 1972, 73 — РЖМех, 1973, 3А148; 3А149.

DAVISON E. J., COWAN K. (1) A computational method for determining the stability region of a second- order non-linear autonomous system *Int. J. Control*, 1969, **9**, 349—357.

DAVISON E. J., KURAK E. M. (1) A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems. *Automatica*, 1971, **7**, № 5, 627—636.

EISENHART L. P. (1) *Continuous groups of transformations*. Princeton, 1933. Orosz fordítás: Эйзенхарт Л. П. *Непрерывные группы преобразований*. М., ИЛ, 1947.

GEISS G. R., COHEN V., ROTSCHILD D. (1) Development of an algorithm for the non-linear stability of the orbiting astronomical observatory control system. *Grumman Res. Department Rept*, 1967, № RE—307.

GEORGE J. H. (1) A method for the interpretation of results obtained by Liapunov's method. *Joint Automat. Control Conf., Seattle, Wash., 1956*, Preprints Conf. papers. S. 1., s. a. 841—847.

GEORGE J. H. (2) Interpretation of Liapunov stability regions. *AIAA Journal*, 1967, **5**, № 5, 959—961 — РЖМех, 1968, 3А146.

GEORGE J. H. (3) On the construction and interpretation of Liapunov functions. Doct. diss. Univ. Ala, 1966.

GLIMM J. (1) Formal stability of Hamiltonian systems. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1964, **17**, № 4, 509—526.

GRUBER M., WILLEMS J. L. (1) On a generalisation of the cicle criterion. *Proc. Fourth Allerton Conf.*, 1966.

GRUJIČ L. T., ŠILJAK D. D. (1) Stability of large-scale systems with stable and unstable subsystems. *IACC Conf., Stanford*, August 1972, 550—555.

GRUJIČ L. T., ŠILJAK D. D. (2) On stability of discrete composite systems. *Proc. 6th Princeton Cong. Inf. Sci. Systems*, **1972**. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1973, **AC—18**, № 5, 522—524.

GUNDERSON R. W. (1) Comparison method for higher derivatives along systems trajectory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, **27**, № 3, 543—548. Orosz fordítás: Гундерсон Р. У. Метод сравнения для производных высших порядков, взятых вдоль траекторий системы. *Механика. Период. сб. перев. ин. статей*, 1972, **1**, 10—14 — РЖМех, 1972, 7А110.

GUREL O., LAPIDUS L. (1) A guide to the generation of Liapunov functions. *Ind. and Eng. Chem.*, 1969, **61**, № 3, 30—41 — РЖМех, 1969, 9А98.

HAGEDORN P. (1) Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange-Dirichlet und Routh. *Arch. Ration. Mech. and Anat.*, 1971, **42**, № 4. 281—316 — РЖМех, 1972, 6А122.

HAHN W. (1) Über Stabilität bei nichtlinearen Systemen. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1955, **35**, № 12, 459—462.

HAHN W. (2) *Theory of stability of motion*. Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1967.

HALANAY A. (1) *Teoria calitativă a equaţiilor diferentiale*. Edit. Acad. RPR, 1963.

HALANAY A., WEXLER D. (1) *Theoria calitativă a sistemelor en impulsuri*. Bucureşti, Ed. Acad. RSR, 1968. Orosz fordítás: Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем*. М., «Мир», 1971.

HEWIT J. R., STOREY C. (1) Optimisation of the Zubov and Ingwerson methods for constructing Lyapunov functions. *Electron. Lett.*, 1967, **3**, № 5. 211—213.

HEWIT J. R., STOREY C. (2) Comparison of numberical methods in stability analysis. *Int. J. Control*, 1969, **10**, № 6, 637.

INFANTE E. F., CLARK L. G. (1) A method for the determination of the domain of second-order nonlinear autonomous systems. *Trans. ASME*, 1969, **E36**,

INGWERSON D. K. (1) A modified Lyapunov method for nonlinear stability analysis. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1961, **AC—6**, № 2, 199—210.

KALMAN R. E. (1) Liapunov functions for problem of Lurie in automat control. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1963, **49**, № 2, 201—205.

KU Y. H. (1) Lyapunov function of a fourth-order system. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1964, **9**, № 3, 276—278.

KU Y. H. (2) Lyapunov function of a high order system. *Proc. IEEE*. 1966, **54**, № 11, 1620—1622.

Ku Y. H., Mekel R., Su C. C. (1) Stability and design of non-linear control systems via Lyapunov's criterion. *IEEE Internat. Convent. Rec.*, 1964, **12,** № 1, 154—170.

Ku Y. H., Puri N. N. (1) On Lyapunov functions of high order nonlinear systems. *J Franklin Inst.*, 9163, **276,** № 5, 349—364.

Lakshmikantham V., Leela S. (1) *Differential and integral inequalities. Theory and applications. T. 1, 2.* New York—London, Acad. Press, 1969.

La Salle J., Lefschetz S. (1) *Stability by Liapunov's direct method.* New York—London, Acad. Press, 1961. Orosz fordítás: Да-Салль Ж., Лефшец С. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова,* М., «Мир», 1964 — РЖМех, 1964, 2А124К.

Leipholz H. (1) *Stabilitätstheorie. Eine Einführung in die Theorie der Stabilität dynamischer Systeme und fester Körper.* Stuttgart, B. G. Tauber, 1968, РЖМех, 1969, 4А95.

Leondes C. T. (Ed) (1) *Modern control systems theory.* New York, McGraw-Hill, 1968. Orosz fordítás: Современная теория управления. М., «Наука», 1970.

Lefschetz S. (1) *Differential equations: geometric theory.* New York, Intersci. Publ. 1957. Orosz fordítás: Лефшец С. *Геометрическая теория дифференциальных уравнений.* М., ИЛ, 1961.

Lefschetz S. (2) *Stability of nonlinear control systems,* New York—London, Acad. Press. 1965. Orosz fordítás: Лефшец С. *Устойчивость нелинейных систем автоматического управления.* М., «Мир», 1967.

Magnus K. (1) Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметрического гироскопа в кардановом подвесе. *Прикл. мат. и мех.*, 1958, **22,** № 2, 173—178 — РЖМех, 1959, № 10, 11210.

Margolis S. G., Vogt W. G. (1) Control engineering applications of V. I. Zubov's construction procedure for Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Control,* 1963, **AC—8,** № 2, 104—113.

Massera J. L. (1) On Liapunoff's condition of stability. *Ann. Math.*, 1949, **50,** № 3, 705—721.

Massera J. L. (2) Estabilidad total y vibraciones aproximadamente periodicas. *Publs Inst. mat. y estadica. Fac. ingr.*, 1954, **2,** № 7, 135—145.

Massera J. L. (3) Contributions to stability theory. *Ann. Math.* 1956, **64,** № 1, 182—206. Orosz fordítás: Массера Х. Л. К теории устойчивости. Математика. *Период. сб. перевод. ин. статей,* 1957, **1,**№ 4, 81—104 — РЖМех, 1959, № 6, 5982, 5883.

Massera J. L., Schäffer J. J. (1) *Linear differential equations and function spaces.* New York—London, Acad. Press. 1966. Orosz fordítás: Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства,* М., «Мир», 1970.

Meyer K. R. (1) Liapunov functions for the problems of Lur'e. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* 1965, **53,** № 3, 501—503.

Meyer K. R. (2) On the existence of Liapunov functions for the probleme of Lur'e. *J. SIAM. Ser. A. Control,* 1966, **3,** № 3, 373—383.

Moser J (1) New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. *Comm. pure and Appl. Math.*, 1958, **11,** № 1, 81—114 — РЖМех, 1959. № 5, 4704.

Narendra K. S., Goldwyn R. M. (1) A geometrical criterion for the stability of certain nonlinear nonautonomous systems. *IEEE Trans. Circuit Theory,* 1964, **11,** № 3, 406—408.

Narendra K. S., Goldwyn R. M. (2) Existence of quadratic type Lyapunov functions for a class of nonlinear systems. *Int. J. Eng. Sci.*, 1964. **2,** № 4, 367—377 · РЖМех, 1969, 2А99,

Narendra K. S., Neuman C. P. (1) Stability of continuous time dynamical systems with m-feed back nonlinearities. *Joint Automatic control conference.* Seattle, Wash., 1966.

Narendra K. S., Taylor J. G. (1) Stability of nonlinear time varying systems. *IEEE Trans. Automat. Control,* 1967, **AC—12,** № 5, 628—629.

Narendra K. S., Taylor J. H. (2) Lyapunov functions for nonlinear time-varying feedback systems. *Inform. and Control,* 1968, **12,** № 5—6.

Nelder J. A., Mead R. (1) A simplex method for function minimisation *Comput. J.*, 1965, **7,** № 4, 308—313.

Nelson N., Weissenberger St. (1) Effective determination of stability domains. *First. Annual Princeton Conf. Information Science and Systems,* 1967.

Nesbit R. A. (1) *Several applications of the direct method of Liapunov. Adv. Control Syst. Vol.* 2. New York—London, Acad. Press, 1965, 269.

Newman A. K. (1) New Liapunov function for nonlinear time-varying systems. *Pap. Amer. Soc. Mech. Eng.*, 1967. NWA/Aut—3,5.

Noldus E. (1) Asymptotic behaviour of time-varying and non-linear differential-difference equation. *Int. J. Control,* 1971, **14,** № 1, 73—81.

NOLDUS E., GALLE A., JONSSON L. (1) The computation of stability regions for systems with many singular points. *Int. J. Control*, 1973, **17**, № 3, 641—653.

OPIAL Z. (1) Sur l'lalure asymtotique des solutions de certaines équations differentielles de la mécanique non linéaire. *Ann. Polon. Math.*, 1960, **8**, № 3, 105—124.

PARKS P. C. (1) A new proof of the Routh—Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov, *Proc. Cambr. Phil. Soc., Math. and Phys. Sci.*, 1962, **58**, № 4, 694—702, Orosz fordítás: Паркс П. Новое доказательство критерия устойчивости Рауса—Гурвитца, основанное на применении второго метода Ляпунова. Механика. *Период. сб. перев. ин. статей*, 1964. № 4, 22—31.

PECZKOWSKI I. L., LIU R. W. (1) A formal method for generation Liapunov functions. *J. Basic Engineering*, 1967, **D—89**, № 2, 222—230. Orosz fordítás: Печковский П. Л., Ли Р. В. Матричный метод построения функций Ляпунова. *Тр. Амер. общ. инж. мех., Теор. осн. инж. расч.*, 1967, № 2, 222—230.

POINCARÉ H. (1) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris, 1892. Orosz fordítás: Пуанкаре А. *Избранные труды. I. Новые методы небесной механики*. М., «Наука», 1971 — РЖМех, 1972, 2А123.

PONZO P. J. (1) On the stability of certain nonlinear differential equations. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1965, **10**, № 4, 470—472.

POPOV V. M. (1) *Hiperstabilitatea sistemelor automate*. Ed. Acad. Rep. Bucureşti, Ed. Acad. RSR, 1966. Orosz fordítás: Попов В. М. *Гиперустойчивость автоматических систем*. М., «Наука», 1970.

PORTER D. W., MICHEL A. N. (1) Stability analysis of composite systems with nonlinear interconnecctions. *Proc. 14th Midwest Symp. Circuit Theory, 1971*. Denver, Colo., 1971, 6.6/1—6.6/10. Orosz fordítás: Портер Д. В., Миешель А. Устойчивость сложных систем с нелинейными связами. *Экспресс. информ. САУ*, 1972, **31**, 39—45.

POWER H. M. (1) Solution of Lyapunov matrix equation for continuous systems vie Schwarz and Routh canonical forms. *Electron. Lett.*, 1967, **3**, № 2, 81—82.

POWER H. M. (2) Equivalence of Lyapunov matrix equations for continuous and discrete systems. *Electron. Lett.*, 1967, **3**, № 2, 83.

POWER H. M. (3) Further comments on the Lyapunov matrix equations. *Electron. Lett.*, 1967, **3**, № 4, 153—154.

ROUTH E. J. (1) *The advanced part of a treatise on the dynamics of a systems of rigid bodies*, London, 1884.

REISSIG R. (1) Stabilitätsuntersuchungen bei gewissen nichtlinearen Regelungssystemen. *Regelungstechn. und Prozess Datenverarb.*, 1970, **18**, № 5, 201—206 — РЖМех, 1970, 11А109.

REISSIG R., SANSONE G., CONTI R. (1) *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen*. Rome, Ed. Cremonese, 1963.

REKASIUS Z. V., ROWLAND J. R. (1) A stability criterion for feedback systems containing a single time-varying nonlinear element. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1965, **10**, 352—354.

RODDEN J. J. (1) Applications of Lyapunov stability theory. Doct. diss., Stanford Univ., 1964.

RODDEN J. J. (2) Numerical applications of Liapunov stability theory. *Jonit Autom. Control. Conf.*, Stanford Univ. 1964, 261.

ROUCHE N. (1) On the stability of motion. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1968, **3**, № 3, 295—306 — РЖМех, 1969. 10А84.

ROUCHE N., MAWHIN T. (1) *Equations differentielles ordinaires*. **T. 2:** *Stabilité et solution périodiques*, Paris, Masson et Co. 1973.

SALVADORI L. (1) Sulla stabilita del movimento. *Mathematiche*, 1969, **24**, № 1, 218—239. Orosz fordítás: Салтвадори Л. Об устойчичивости движения. *Механика. Период. сб. перев. ин. статей*, 1970, № 6, 3—19 — РЖМех, 1970, 8А103.

SCHULTZ D. G. (1) The generation of Lyapunov functions. *Advances in control systems. Vol. 2*. New York—London, Acad. Press, 1965, 1—64.

SCHULTZ D. G., GIBSON I. E. (1) The variable gradient method for generating Liapunov functions. *Trans. AIEE* 1962, **81**, Part 2. 203—210.

SIEGEL C. L. (1) *Vorlesungen uber Himmelsmechanik*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1956. Orosz fordítás: Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике*. М., ИЛ, 1959 — РЖМех, 1960, № 5, 5535К.

SIEGEL C. L. (2) On the integrals of canonical systems. *Ann. Math.*, 1941, **42**, № 3, 806—822. Orosz fordítás: Зигель К. Л. Об интегралах канонических систем. *Математика. Период. сб. перев. ин. статей*, 1961, № 5, № 2, 103—117.

Šiljak D. D. (1) The large scale system stability. *Proc. 9th Allerton Conf. Circuit and System Theory*, Univ. Illinois, 1971, 731—741.

Šiljak D. D. (2) Stability of large-scale systems. *Proc. Fifth IFAC Congress. Commentator paper session: Theory-Nonlinear System*. Paris 1972, C32. 1—11; *Papers Intern. Colloquium on Stability of Large-scale Systems*, Liège, Belgium, 1972. C1—C12.

Šiljak D. D., Sun C. K. (1) Exponential absolute stability of discrete systems. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1971, **51**, № 4, 271—275.

Šiljak D. D., Sun C. K. (2) On exponential absolute stability. *Int. J. Control*, 1972, **16**, № 5, 1003—1008.

Siljak D. D., Weissenberger St, Cuk S. M. (1) Decomposition-aggregation stability analisis. *Final Rept. NASA CR—2196, Univ. Santa Clara*, Calif., 1973, 1—89.

Skidmore A. S. (1) On the stability of solutions of a differential equation of fourth order. *J. London Math. Soc.*, 1966, **41**, № 4, 649—661.

Smith R. A. (1) Matrix calculations for Liapunov quadratic forms. *J. Different Equat.*, 1966, **2**, № 2, 208—217.

Srivastava S., Musa S. A. (1) Generation of Liapunov functions using auxiliary invariant systems. *J. Franklin Inst.* 1971, **292**, № 5, 357—368.

Szegő G. P. (1) Сегё Дж. П. Новые методы построения функций Ляпунова для автономных систем с постоянными коэффициентами. *Тр. II Междунар. Конгресса IFAC. Теория непрерывных автомат. систем.* М., «Наука» 1965, 127—136.

Szegő G. P. (2) A contribution of Lyapunov's second method in nonlinear autonomous systems. *International symposium in nonlinear differential equations and nonlinear mechanics*. New York, Acad. Press, 1968, 421—430.

Szegő G. P., Treccani G. (1) Non continuous Liapunov functions. *Ann. mat. pura ed appl.*, 1969, **82**, 1—15.

Thathachar M. A. L., Srinath M. D. (1) Some aspects of the Lur'e problem. *IEEE Trans Automat. Control*, 1967, **AC—12**, № 4, 451—453.

Thathachar M. A. L., Srinath M. D., Ramapriyan H. K. (1) On the modified Lur'e problem. *IEEE Trans Automat. Control*, 1967, **AC—12**, № 6, 731—739.

Thathachar M. A. L., Srinath M. D., Ramapryian H. K. (2) Stability of a class of nonlinear time-varying non-linearity. *Int. J. Control*, 1968, **7**, № 2, 117—132.

Vujičič V. A. (1) Über die Stabilität der stationäre Bewegunden. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1968. **48**, № 8, 291—293, РЖМех, 1969, 9A100.

Wall E. T. (1) A topological approach to the generation of Liapunov function. *Actta techn. CSAV*, 1968, **13**, № 2, 159—177.

Wall E. T., Mac Maynard L. (1) An energy mdtric algorithm for generation of Liapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Controt*, 1968. **13**, № 1, 121—122.

Walker J. A. (1) Liapunov functions for feedback systems containing a single time-varying non-linearity. *Int. J. Controll*, 1968, **7**, № 2, 171—174.

Walker J. A., McClamroch N. H. (1) Finite regions of attraction for feedback systems containing a single time-varying non-linearity. *IEEE Trans. Automdt. Control*, 1968, **AC—13**, № 5, 587.

Walker J. A., Clark L. G. (1) An integral method of Liapunov function generation for nonlinear autonomous systems. *Trans. ASME*. 1965, **E—32**, № 3, 569—575. Orosz fordítás: Уокер Д. А., Кларк Л. Г. Интегральный метод построения функций Ляпунова для нелинейных автономных систем. *Тр. Амер. общ. Инж. мех., Прикл. Мех.*, 1965, № 3, 101—108 — РЖМех, 1966, 3A86.

Weissenberger St. (1) Stabilityboundary approximations for relay-control systems via a steepest ascent construction of Lyapunov functions. *Trans. ASME.*, 1966, **D—88**, № 2, 419—428. — РЖМех, 1967, 3A97.

Weissenberger St. (2) Piecewise-quadratic and piecewise-linear Lyapunov functions for discontiuous systems. *Int. J. Control*, 1969, **10**, № 2, 171—180.

Weissenberger St. (3) Control synthesis for stability region improvement. *Int. J. Control*. 1970, **12**, № 3, 479—486.

Willems J. L. (1) The computation of finite stability regions by means of open Liapunov surfaces. *Int. J. Control*, 1969, **10**, № 5, 538—544.

Willems J. L. (2) *Stability theory of dynamical systems*. New York, Wiley-Interscience, 1970 — РЖМех, 1971, 8A141.

WILLEMS J. L. (3) A general stability criterion for non-linear time-varying feedback systems. *Int. J. Control,* 1970, **11,** № 4, 625—631.

WILLEMS J. L. (4) The computation of finite stability regions by means of open Liapunov surfaces. *Int. J. Control,* 1969, **10,** № 5, 538—544.

WILSON W. (1) The structure of level surfaces of a Lyapunov functions. *J. Different. Equat.,* 1967, **3,** № 3, 323—329.

YOSHIZAWA T. (1) On the stability of solutions of a system of the differential equations. *Mem. College Sci. Univ. Kyoto,* 1955, **29,** № 1, Ser. A. Math., 27—33.

YOSHIZAWA T. (2) *Stability theory by Liapunov's second method.* Math. Soc. Japan, 1966.

YU D. (1) Coupled spatial discretization and Zubov's method in the construction of domain of stability for a nonlinear distributed system. *Joint Autom. Control Conf.,* 1971.

FORDÍTOTTA:

MOSON PÉTER
BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST, STOCZEK U. H ÉP. IV. EM.

TARTALOMJEGYZÉK

L. Ju. Anapolszkij, V. D. Irtyegov, V. M. Matroszov:
MÓDSZEREK LJAPUNOV-FÜGGVÉNYEK MEGALKOTÁSÁRA

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1978. VIII. 9. — Terjedelem: 18,55 (A/5) ív
78-3731 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban a felelős szerkesztő címére kell beküldeni:

Prékopa András, felelős szerkesztő, MTA SZTAKI
1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., »Über die Theorie der einfachen Ungelichungen«, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1—27.

[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.

[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.

[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 42,— Ft

INDEX: 26498
ISSN 0133—3399

TARTALOMJEGYZÉK

A külföldi szakirodalomból

INDEX

From the foreign literature