Alkalmazott matematikai lapok

1989/1–2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

14. KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XII., Kende u. 13—17.
Kiadóhivatal: 1117 Budapest XI., Prielle Kornélia u. 36.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közül cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztő bizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 192 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1117 Budapest XI., Prielle Kornélia u. 36. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok 14 (1989) 1—25

VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK FELBONTÁSÁRÓL

GYIRES BÉLA

Debrecen

Az értekezésnek célja annak a néhány gondolatnak a továbbfejlesztése, amelyeket az irodalomjegyzékben szereplő [4] és [5] dolgozatában alkalmazott a szerző két speciális esetben valószínűségi eloszlásfüggvényeknek valószínűségi eloszlás függvények lineáris kombinációival történő előállítására. Kiderült, hogy a felhasznált módszerek teljes általánosságban is alkalmazhatók valószínűségi eloszlásfüggvényeknek valószínűségi eloszlásfüggvényekkel való felbontására.

A dolgozat négy fejezetre oszlik. Az elsőben a szükséges definíciók megadása után a kitűzött feladat pontos megfogalmazását adja meg a szerző. A második fejezet „ad hoc" dekompozíciós eljárásokkal foglalkozik. Ezek a konvolúció esete, a momentumok felhasználásával történő felbonthatóság esete, és végül a szűkebb értelemben vett dekompozíciós eljárások rövid ismertetése. A harmadik fejezet a valószínűségi eloszlásfüggvények közti alkalmasan megválasztott távolsági fogalomra építve olyan módszert ismertet, amely tetszés szerinti valószínűségi eloszlásfüggvény felbonthatóságának kérdéskörében alkalmazható. Az előző fejezet eredményeit felhasználva a negyedik fejezet három speciális esetben foglalkozik a felbonthatóság kérdésével. Mégpedig abban az esetben, ha a súlyfüggvények diszkrét eloszlásfüggvények, amelyeknek véges számú rögzített helyen lehet ugrásuk. Ha a súlyfüggvények diszkrét eloszlásfüggvények, amelyeknek végtelen sok adott helyen lehet diszkontinuitásuk. Ha a felbontandó eloszlásfüggvény és a felbontásban szereplő eloszlásfüggvény-család valamely véges vagy végtelen intervallumra koncentrálódik, és a súlyfüggvények négyzetesen integrálható sűrűségfüggvények.

1. A feladat megfogalmazása

Közismert, hogy $F(x)$, $x\in R$ valószínűségi eloszlásfüggvény (röviden eloszlásfüggvény) akkor és csak akkor, ha a) nemcsökkenő, b) jobbról folytonos, c) $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$. Jelölje E az eloszlásfüggvények halmazát.

Ismeretes a LEBESGUE-tól származó következő felbontás: Ha $F\in E$, akkor

$$F(x) = \alpha F_a(x)+\beta F_j(x)+\gamma F_s(x),$$

$$\alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0, \quad \gamma \geqq 0, \quad \alpha+\beta+\gamma = 1,$$

ahol a jobb oldalon álló valamennyi függvény nem-csökkenő. $F_j(x)$ lépcsősfüggvény, amelynek diszkontinuitásai egyben $F(x)$ diszkontinuitásai is és megfordítva. $F_a(x)$ szigorúan monoton növekvő, a *Lebesgue-mértékre* nézve abszolútfolytonos. $F_s(x)$ szinguláris függvény, azaz folytonos, monoton növekvő és $F_s'(x)=0$ majdnem mindenütt.

Ha $\beta=1$, azaz $F(x)=F_j(x)$, akkor $F(x)$ diszkrét eloszlásfüggvény véges vagy megszámlálható végtelen sok diszkontinuitási ponttal. Jelölje ezek halmazát E_j.

[1] A szerző akadémiai székfoglaló előadásának írásos változata.

Ha $\alpha=1$, azaz $F(x)=F_a(x)$, akkor a majdnem mindenütt létező $F'(x)=f(x)$ a *Lebesgue-mértékre* nézve vett sűrűségfüggvény, röviden sűrűségfüggvény. Jelölje ezeknek az eloszlásfüggvényeknek a halmazát E_a.

Az alábbiakban jelentős szerepe lesz az eloszlásfüggvények következő halmazának is. Legyenek $a<b$ valós számok, ahol $a=-\infty$, $b=\infty$ is megengedhető. Jelölje $E(a, b)\subset E$ azt a halmazt, amelynek elemei szigorúan monoton növekedőek az $[a, b]$ intervallumban, az egész számegyenesen folytonosak és az a pontban zérus, a b pontban 1 az értékük. Jelölje F^{-1} az $F\in E(a, b)$ inverzét.

1.1. *Definíció.* A kétváltozós

$$G(z, x); \quad z\in R, \ x\in R$$

függvényt az x paraméterrel bíró eloszlásfüggvények családjának nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek: a) x minden rögzített értékére $G(z, x)\in E$ a z változóban, b) $G(z, x)$ *Borel-mérhető* függvény az x változóban.

Ha $H\in E$, akkor könnyen kimutatható, hogy

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dH(x)\in E. \tag{1.1}$$

1.2. *Definíció.* Az (1.1) kifejezéssel értelmezett eloszlásfüggvény az eloszlásfüggvényeknek az x paramétertől függő $G(z, x)$, $x\in R$ családjának a $H\in E$ súlyfüggvényre vonatkozó keveréke.

Az $F\in E$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad t\in R$$

Fourier transzformáltját az F karakterisztikus függvényének nevezzük.

Jelölje $g(t, x)$ eloszlásfüggvények x paramétertől függő $G(z, x)$, $x\in R$ családjának karakterisztikus függvényét. Nyilvánvalóan

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x)\, dH(x), \quad t\in R \tag{1.2}$$

az (1.1) keverékeloszlás karakterisztikus függvénye.

1.3. *Definíció.* A kétváltozós

$$g(t, x); \quad t\in R, \quad x\in R$$

függvényt a karakterisztikus függvények x paramétertől függő családjának nevezzük, ha a) $g(t, x)$ minden rögzített x mellett karakterisztikus függvény a t változóban, b) $g(t, x)$ *Borel-mérhető* függvény az x változóban.

1.4. *Definíció.* Az (1.2) karakterisztikus függvényt a karakterisztikus függvények x paramétertől függő $g(t, x)$, $x\in R$ családjának a $H\in E$ súlyfüggvényére vonatkozó keverékének nevezzük.

1.2. és 1.4. definíciók ekvivalensek abban az értelemben, hogy (1.1) kifejezésből következik (1.2) és megfordítva.

Alapvető szerepe lesz a következőkben az alábbi definíciónak.

1.5. *Definíció.* Legyen $C \subset E$, $C \neq 0$. Azt mondjuk, hogy $F \in E$ felbontható az eloszlásfüggvényeknek x paramétertől függő $G(z, x)$, $x \in R$ családjával a C halmazon, ha van olyan $H \in C$, amely kielégíti az (1.1), illetve (1.2) integrálegyenletet.

Feladatul tűzzük ki a következő kérdések megválaszolását:

A) Mi annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $F \in E$ a C halmazon felbontható legyen az eloszlásfüggvényeknek x paramétertől függő $G(z, x)$, $x \in R$ családjával?

B) Felbonthatóság esetén mi lesz az eloszlásfüggvények C halmazához tartozó súlyfüggvény?

Más szóval a feladat az, meghatározandó, mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy (1.1), illetve (1.2) integrálegyenlet megoldható legyen a C halmazon, és megoldhatóság esetén mi lesz a megoldás?

A) és B) kérdések megválaszolása szempontjából az (1.1) és (1.2) integrálegyenletek ekvivalensek. Adott esetben a kettő közül annak megoldásával foglalkozunk, amely matematikai szempontból jobban kezelhető.

2. Néhány ismert speciális eset

A következőkben ismert konkrét felbontási problémákkal kapcsolatban arra mutatunk rá, hogy A) és B) kérdésekre adott válaszok „ad hoc” módszerekre épülnek és nem támaszkodnak egységes elméleti alapokra.

2.1. Legyen $C = E$ és az x paramétertől függő eloszlásfüggvény-családot értelmezze az

$$G(z, x) = G(z-x), \quad x \in R$$

előírás, ahol $G \in E$. Ekkor

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z-x)\, dH(x), \quad H \in E \tag{2.1.1}$$

a G és H eloszlásfüggvények konvolúciója. Jelölje rendre f, g, h az F, G, illetve H karakterisztikus függvényét. Ekkor (1.2) alapján

$$f(t) = g(t)h(t), \quad t \in R. \tag{2.1.2}$$

Ebben az esetben az alapfeladat a következőképp fogalmazható meg. Adott f és g karakterisztikus függvényekhez található-e olyan h karakterisztikus függvény, amely kielégíti a (2.1.2) egyenletet? Vagy másképp, két karakterisztikus függvény hányadosa mikor karakterisztikus függvény?

Ha (2.1.2) formulában szereplő karakterisztikus függvények korlátlanul oszthatók, akkor különösebb nehézség nélkül megválaszolható a kérdés ([11], 168—174). Ha ez a feltétel nem teljesül, csak néhány kritérium áll rendelkezésre a kérdés eldöntésére (l. pl. [3], 13). Részletesen foglalkozik e témakörbe tartozó kérdésekkel [9] és [10].

2.2. Legyen $E^{+} \subset E$ azoknak az eloszlásfüggvényeknek a halmaza, amelyeknek végtelen sok növekedési pontjuk van, a zérus pontban zérus értéket vesznek fel és amelyeknek minden momentumuk létezik. Azaz, ha $F \in E^{+}$, akkor

$$M_k(F) = \int_0^\infty x^k \, dF(x) < \infty \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{2.2.1}$$

E^{+} halmaznak jellemzését adta STIELTJES a róla elnevezett momentum-tételben ([13], 76).

STIELTJES-étől eltérő más módon is jellemezhetjük az E^{+} halmazt.

Egy négyzetes mátrixot totálisan pozitívnak (nem-negatívnak) nevezünk, ha mindenrendű aldeterminánsa pozitív (nem-negatív).

2.2.1. *Definíció.* A valós számoknak $\{M_k\}_0^\infty$ sorozatát *Hankel-értelemben totálisan pozitívnak* nevezzük, ha az elemeiből képzett

$$(M_{j+k})_0^n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Hankel-mátrixok totálisan pozitívak.

2.2.1. TÉTEL. $F \in E^{+}$ akkor és csak akkor, ha (2.2.1) sorozat *Hankel-értelemben totálisan pozitív.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége adódik abból, hogy ha

$$0 \leqq j_1 < \ldots < j_m, \quad 0 \leqq k_1 < \ldots < k_m$$

egész számok, akkor érvényes a

$$\operatorname{Det}\left(M_{j_\alpha + k_\beta}(F)\right)_1^m = \int\limits_{0 < x_1 < \ldots < x_m < \infty} \cdots \int \operatorname{Det}(x_k^{j_\alpha})_1^m \operatorname{Det}(x_k^{k_\beta})_1^m \, dF(x_1) \ldots dF(x_m)$$

azonosság ([14], Band I., 48. Problem 68) és

$$0 < x_1 < \ldots < x_m$$

miatt a

$$\operatorname{Det}(x_k^{j_\alpha})_1^m = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} x_1^{j_1} & \ldots & x_m^{j_1} \\ . & \ldots & . \\ x_1^{j_m} & \ldots & x_m^{j_m} \end{pmatrix} > 0$$

egyenlőtlenség ([14], Band II., 48, Problem 75).

A feltétel elegendőségének kimutatásában ugyanazon a módon járhatunk el, amelyet HAMBURGER követ a nevét viselő momentum-tétel bizonyításában ([1], 30. Theorem 2.1.1.). A bizonyításnak a mi szempontunkból lényeges lépése annak megmutatása, ha $\{M_k\}_0^\infty$ *Hankel-értelemben totálisan pozitív sorozat,* akkor a

$$P_n(x) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_{n-1} & 1 \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_n & x \\ . & . & \ldots & . & . \\ M_n & M_{n+1} & \ldots & M_{2n-1} & x^n \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet minden gyöke egyszeres és pozitív. A további lépés diszkrét eloszlásfüggvények olyan $\{G_n(x)\}_0^\infty$ sorozatának megkonstruálása, amelyben a $G_n(x)$ eloszlásfüggvénynek a $P_n(x)=0$ egyenlet gyökeinek megfelelő helyeken vannak ugrásai, és amelyekből kiválasztható olyan részsorozat, amely az eloszlásfüggvények gyenge topológiájában ahhoz az $F \in E^+$ eloszlásfüggvényhez konvergál, amelynek momentumait rendre az $\{M_k\}_0^\infty$ sorozat elemei adják.

2.2.2. TÉTEL. Legyen f, illetve g az $F \in E^+$, illetve $G \in E^+$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvénye. Akkor és csak akkor létezik olyan $H \in E^+$, amelyre a

$$f(t) = \int_0^\infty g(tx)\, dH(x) \tag{2.2.2}$$

felbontás teljesül, ha a

$$\left\{\frac{M_k(F)}{M_k(G)}\right\}_0^\infty$$

sorozat *Hankel-értelemben totálisan pozitív.*

Bizonyítás. Figyelembe véve azt, hogy amennyiben (2.2.2) teljesül, akkor

$$M_k(F) = M_k(G)M_k(H) \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

2.2.1. tétel alapján állításunkat könnyen igazolhatjuk.

2.3. A szűkebb értelemben vett felbonthatóság esete.

Legyen $C \subset E_j$ azoknak a diszkrét eloszlásfüggvényeknek a halmaza, amelyeknek a rögzített

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad n \geqq 2$$

helyeken lehetnek ugrásuk.

Legyen $F \in E$ és legyen $G(z, x)$ adott eloszlásfüggvény-család $x \in R$ paraméterrel. Ha a

$$G(z, x_k) = G_k(z) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.3.1}$$

jelöléssel élünk, akkor (1.1)

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k G_k(z) \tag{2.3.2}$$

alakban írható, ahol most az

$$S_n = \left\{p = (p_k) \in R_n | p_k \geqq 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right\}$$

halmaz lép a C halmaz helyébe.

A felbonthatóság feladata itt annak a megállapítása, mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $F(z)$ előállítható legyen (2.3.1) eloszlásfüggvényekkel (2.3.2) alakban S_n halmazbeli vektorokkal, továbbá meghatározandó az a $p=p_0 \in S_n$ vektor, amely felbonthatóság esetén a (2.3.2) egyenletet kielégíti.

Amíg a 2.1. és 2.2. pontokban tárgyalt speciális eseteknek elsősorban elméleti jelentőségük van, a most szóban forgó kérdéskörnek az alkalmazások szempontjából van fontosságuk. Ezért ezt a kérdéskört nevezik szűkebb értelemben az eloszlásfüggvények felbonthatósági problémájának. Így nem csoda, hogy nem az elméleti háttér kidolgozására fordítottak elsősorban gondot, hanem olyan numerikus eljárások kimunkálására, amelyek a különböző vizsgálati területeken konkrét feladatok megoldásakor jelentkező felbonthatósági kérdések megoldását adták meg.

Ilyen eljárásokat ismertet MEDGYESSY PÁL két monográfiájában ([11], [12]). Ezek lényege az, hogy adott $F \in E$ eloszlásfüggvényre vonatkozó megfigyelésekből következtetnek a felbontásban szereplő eloszlásfüggvények n számára és becslést adnak azokra a paraméterekre, amelyektől a tekintetbe vett normális, *Cauchy, Poisson* vagy egyéb eloszlású (2.3.1) eloszlásfüggvények függhetnek. A közölt módszerek általában „ad hoc" jellegűek, adott problémákra szabottak. Ezeket fogja össze MEDGYESSY PÁL néhány alapvető megjegyzése.

A felbontási eljárások különböző alkalmazásaival foglalkozó igen sok cikk bibliográfiai adatai találhatók meg MEDGYESSY PÁL [12] munkájának irodalomjegyzékében. Felbonthatósági problémák jelentkeznek pl. az abszorbciós spektrum vizsgálatával kapcsolatban, a fehérjéknek elektroforézis útján történő szétválasztásában, így az emberi vérszérum vizsgálata során, a gamma-globulin terápiás célú különválasztásában. De szerepük van ezeknek a matematikai közgazdaságtanban, a biokémiában, a biometriának a már említetteken túl számos más kérdéskörében is.

3. Elméleti alapvetés

A 2. fejezetben közölt három speciális eset azt mutatja, hogy azok a módszerek amelyek a megoldásokban szerepet játszanak, problémaorientáltak. Ebben a fejezetben olyan módszert ismertetünk, amely elvileg tetszés szerinti eloszlásfüggvény felbontásának kérdéskörében alkalmazható.

3.1. A kitűzött cél eléréséhez szükség lesz két eloszlásfüggvény egymástól való eltérésének mérésére. Számos ilyen mérőszám létezik (l. pl. [16]). A következőkben olyan mérőszámot ismertetünk, amely eloszlásfüggvények felbontását illetően céljainknak legjobban megfelel. Erről kiderült, hogy kapcsolatos CSISZÁR IMRE részéről információelméleti célokra alkalmazott mérőszámokkal ([2]).

Legyen $N \geqq 2$ természetes szám. Legyenek az $F \in E(a, b)$ N-edik kvantilisei az

$$x_{N0} < x_{N1} < \ldots < x_{NN}$$

számok, azaz legyen

$$F(x_{Nk}) = \frac{k}{N} \quad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Legyen $G \in E(a, b)$ és képezzük az

$$S_{F,G}(N) = N \sum_{k=1}^{N} [G(x_{Nk}) - G(x_{N,k-1})]^2$$

összeget. Értelmezzük a

$$(G, G)_F = \sup_{N \to \infty} S_{F,G}(N)$$

mennyiséget.

RIESZ FRIGYES egyik tételének ([15], 68. Lemma 1) segítségével kimutatható, hogy $(G, G)_F < \infty$ akkor és csak akkor, ha $G(F^{-1}(x))$, $x \in [0, 1]$ függvény abszolút-folytonos a *Lebesgue mértékre* nézve és

$$\frac{d}{dx} G(F^{-1}(x)) \in L^2(0, 1).$$

Ekkor

$$(G, G)_F = \int_0^1 \left[\frac{d}{dx} G(F^{-1}(x))\right]^2 dx.$$

Könnyen belátható, hogy ha $F \in E(a, b)$, $G \in E(a, b)$ abszolútfolytonos a *Lebesgue mértékre* nézve és sűrűségfüggvényük f és g, akkor

$$(G, G)_F = \int_a^b \frac{g^2}{f} dx.$$

Ez az eredmény adja meg számunkra a lehetőséget arra, hogy tetszés szerinti $F \in E$, $G \in E$ esetén is értelmezzük a $(G, G)_F$ mennyiséget. Ezzel foglalkozunk a következőkben.

Legyen (R, B) az a mérhető tér, amelyben R a valós számok halmaza és B e halmaz *Borel-mérhető* részhalmazainak σ-algebrája.

Legyen adva az eloszlásfüggvényeknek véges vagy megszámlálható végtelen sok elemet tartalmazó $\{F_j\}$ halmaza. Jelölje $\omega(F_j)$ az F_j által a B σ-algebrán generált mértéket. Ekkor van olyan σ-véges λ mérték, amelyre az $\omega(F_j) = \omega_j$ mértékek abszolútfolytonosak és *Radon—Nikodym tétele* értelmében léteznek olyan $f_j \geqq 0$ függvények, hogy

$$\omega_j(A) = \int_A f_j \lambda(dx), \quad A \in B.$$

f_j az $\omega(F_j)$ mértéknek a σ-véges λ mértékre vonatkozó sűrűségfüggvénye vagy *Radon—Nikodym deriváltja.*

3.1.1. *Definíció.* Legyen $F, G \in E$. $\omega(F)$ és $\omega(G)$ mértékek legyenek abszolútfolytonosak a σ-véges λ mértékre nézve, a megfelelő sűrűségfüggvények legyenek f és g. Ekkor a

$$(G, G)_F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2}{f} \lambda(dx)$$

integrált a G eloszlásfüggvénynek az F eloszlásfüggvényre vonatkozó diszkrepanciájának nevezzük.

A $(G, G)_F$ mennyiség jól definiált és független a választott σ-véges λ mértéktől.

3.1.2. *Definíció.* Legyen $F \in E$, $G_j \in E$ $(j=1, 2)$. Az $\omega(F)$, $\omega(G_j)$ $(j=1, 2)$ mértékek legyenek abszolútfolytonosak a σ-véges λ mértékre nézve. A megfelelő sűrűségfüggvények legyenek f, g_j $(j=1, 2)$. Ekkor a

$$(G_1, G_2)_F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1 g_2}{f} \lambda(dx)$$

integrált a G_j $(j=1, 2)$ eloszlásfüggvényeknek az F eloszlásfüggvényre vonatkozó közös diszkrepanciájának nevezzük.

A $(G_1, G_2)_F$ mennyiség jól definiált és független a választott σ-véges λ mértéktől.

3.1.1. TÉTEL. Legyen F, $G \in E$. Ekkor

$$1 \leqq (G, G)_F \leqq \infty. \tag{3.1.1}$$

A bal oldalon egyenlőség akkor és csak akkor, ha $G = F$.

Bizonyítás. Azt, hogy (3.1.1) jobb oldali egyenlőtlenségében végtelen is állhat, 3.1.1. lemma mutatja.

Legyen λ az a σ-véges mérték, amelyre nézve $\omega(F)$ és $\omega(G)$ mértékek abszolút-folytonosak és legyen f és g a sűrűségfüggvény. Ekkor

$$(G, G)_F - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(g-f)^2}{f} \lambda(dx) \geqq 0,$$

ami (3.1.1) bal oldali egyenlőtlenségét igazolja.

Ha $G=F$, akkor nyilvánvalóan $(G, G)_F=1$. Mivel

$$|F(x)-G(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} (f-g)\lambda(dx) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{x} \frac{f-g}{\sqrt{f}} \sqrt{f}\, \lambda(dx) \right| \leqq \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f-g)^2}{f} \lambda(dx) \right]^{1/2} = ((G, G)_F - 1)^{1/2},$$

a $(G, G)_F=1$ feltétel mellett azt kapjuk, hogy $G(x)=F(x)$, $x\in R$. Ezzel 3.1.1. tételt igazoltuk.

Nyilvánvaló, hogy ha $F\in E(a, b)$, $p>0$, akkor egyben $F^p\in E(a, b)$.

3.1.1. Lemma. Legyen $F\in E(a, b)$ és legyen $p>0$, $q>0$. Ekkor ([4], Theorem 2.6.)

$$(F^p, F^q)_F = \begin{cases} \dfrac{pq}{p+q-1}, & \text{ha} \quad p+q > 1 \\ \infty, & \text{ha} \quad p+q \leqq 1. \end{cases}$$

Legyen $F\in E$. $K(F)$ halmazt értelmezze a

$$K(F) = \{G\in E | (G, G)_F < \infty\}$$

előírás.

Nyilván $F^p\in K(F)$, ha $F\in E(a, b)$ és $p> \frac{1}{2}$. Tehát $K(F)$ legalább kontinuum számosságú, ha $F\in E(a, b)$.

A diszkrepancia tulajdonságai. Legyen $F\in E$ és $G_j\in K(F)$ $(j=1, \dots, n)$. Ekkor

$$(G_1, G_2)_F = (G_2, G_1)_F, \quad (\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2, G)_F = \alpha_1 (G_1, G)_F + \alpha_2 (G_2, G)_F,$$

$$\alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Ha $F\in E$, $G\in K(F)$, akkor $1 \leqq (G, G)_F < \infty$, egyenlőség akkor és csak akkor, ha $G=F$.

Ha $\alpha=(\alpha_j)\in S_n$, akkor ([4], Theorem 2.3.)

$$(3.1.2) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j G_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j G_j\right)_F^{1/2} \leqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (G_j, G_j)_F^{1/2}.$$

Ez a formula a következő állítást tartalmazza:

3.1.2. TÉTEL. A $K(\dot{F})$, $F\in E$ halmaz konvex és $(G, G)_F^{1/2}$ ezen a halmazon értelmezett konvex funkcionál.

Végül igaz a *Schwarz-féle egyenlőtlenség* is, amely szerint ([4], Theorem 2.2.), ha $F\in E$, $G, H\in K(F)$, akkor

$$(G, H)_F \leqq (G, G)_F^{1/2}(H, H)_F^{1/2}, \tag{3.1.3}$$

egyenlőség akkor és csak akkor, ha $G=H$.

3.2. A felbontási kérdések tárgyalásánál alapvető szerepet játszik a következő funkcionál.

3.2.1. *Definíció.* Legyen $F\in E$. Az eloszlásfüggvények $G(z, x)$, $x\in R$ családjának az F eloszlásfüggvényre vonatkozó diszkrepancia függvényén a

$$\Phi_{F,G}(H) = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dH(x),\ \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dH(x)\Big)_F, \quad H\in E$$

funkcionált értjük.

Legyen

$$C_{F,G} = \{H\in E \,|\, \Phi_{F,G}(H) < \infty\}.$$

$C_{F,G}$ halmaz nyilván nem üres, mert pl. elemei a véges sok ugróhellyel rendelkező diszkrét eloszlásfüggvények.

Bevezetjük még a

$$\Phi_{F,G}(H, L) = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dH(x),\ \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dL(x)\Big)_F; \ H, L\in C_{F,G}$$

funkcionált is, ahol $F\in E$ és $G(z, x)\in K(F)$, $x\in R$.

3.2.2. *Definíció.* Az eloszlásfüggvények $G(z, x)$, $x\in R$ családja egyenletesen korlátos az F eloszlásfüggvényre nézve, ha

$$\big(G(z, x),\ G(z, x)\big)_F \leqq k^2 < \infty, \quad x\in R. \tag{3.2.1}$$

Legyenek $a<b$ valós számok. Értelmezze az $E_{a,b}$ halmazt az

$$E_{a,b} = \{H\in E \,|\, H(a) = 0,\quad H(b) = 1\}$$

előírás.

3.2.1. TÉTEL. Ha az eloszlásfüggvények $G(z, x)$, $x\in R$ családja egyenletesen korlátos az F eloszlásfüggvényre nézve, akkor $E_{a,b}\subset C_{F,G}$.

Bizonyítás. Ha az $[a, b]$ intervallum egyik felosztása

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3.2.2}$$

akkor (3.1.2) miatt

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} G(z, x_j)[H(x_j)-H(x_{j-1})],\ \sum_{j=1}^{n} G(z, x_j)[H(x_j)-H(x_{j-1})]\Big)_F^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} [H(x_j)-H(x_{j-1})]\big(G(z, x_j), G(z, x_j)\big)_F^{1/2},$$

ahonnan

$$\Big(\int_a^b G(z,x)\,dH(x),\ \int_a^b G(z,x)\,dH(x)\Big)_F^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \int_a^b (G(z,x), G(z,x))_F^{1/2}\,dH(x) \leqq k < \infty$$

ha teljesül (3.2.1) feltétel, azaz tételünk állításának megfelelően

$$\int_a^b G(z,x)\,dH(x) \in K(F), \quad H \in E_{a,b}.$$

3.2.3. *Definíció.* Legyen $F \in E$ és legyen $G(z, x) \in K(F)$ az eloszlásfüggvényeknek $x \in R$ paramétertől függő családja. Legyen $C \subset C_{F,G}$ nem üres halmaz. Az

$$m_{F,G}(C) = \inf_{H \subset C} \Phi_{F,G}(H) \geqq 1 \tag{3.2.3}$$

mennyiséget F eloszlásfüggvénynek a $G(z, x)$, $x \in R$ eloszlásfüggvény-családdal való felbonthatósága mértékének nevezzük a C halmazon.

Innen adódik az az eredmény, amely módszert ad az 1. fejezetben felvetett A) és B) kérdés megválaszolásához.

Ha $m_{F,G}(C) = 1$, akkor $\Phi_{F,G}(H) = 1$ feltételt kielégítő C halmazbeli H eloszlásfüggvény és csak ez az a súlyfüggvény, amellyel $G(z, x)$, $x \in R$ eloszlásfüggvény-családdal felbontható F a C felett.

A most említett $m_{F,G}(C) = 1$ esetben $\Phi_{F,G}(H) = 1$ feltételt kielégítő H biztosan létezik, ha C zárt az eloszlásfüggvények gyenge topológiájában és ugyanakkor $\Phi_{F,G}(H)$ folytonos funkcionál a C felett.

1. fejezetben említett B) kérdésnek, tehát annak megválaszolásában, felbonthatóság esetén mi lesz az a súlyfüggvény, amellyel az adott eloszlásfüggvény a tekintetbe vett eloszlásfüggvény-családdal felbontható, sokszor segíthet az a módszer, ami a következő tételre épül.

3.2.2. TÉTEL. $C_{F,G}$ konvex halmaz és $\Phi_{F,G}(H)$ ezen a halmazon konvex funkcionál.

Bizonyítás. A (3.1.3) formula értelmében

$$\Phi_{F,G}(H, L) \leqq (\Phi_{F,G}(H)\Phi_{F,G}(L))^{1/2}; \ H, L \in C_{F,G},$$

ahonnan

$$2\Phi_{F,G}(H, L) \leqq \Phi_{F,G}(H) + \Phi_{F,G}(L).$$

Legyen $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Ekkor

$$\Phi_{F,G}(\alpha H + \beta L) = \alpha^2 \Phi_{F,G}(H) + \beta^2 \Phi_{F,G}(L) + 2\alpha\beta\Phi_{F,G}(H, L) \leqq$$

$$\leqq \alpha^2 \Phi_{F,G}(H) + \beta^2 \Phi_{F,G}(L) + \alpha\beta[\Phi_{F,G}(H) + \Phi_{F,G}(L)] =$$

$$= \alpha\Phi_{F,G}(H) + \beta\Phi_{F,G}(L); \ H, L \in C_{F,G},$$

ami mindkét állítást igazolja.

A 3.2.2. tétel bizonyítása erősen épített arra, hogy a szereplő H függvények eloszlásfüggvények. Ha tehát a

$$\Phi_{F,G}(H) = m_{F,G}(C) \tag{3.2.4}$$

egyenletnek a konvex C halmaz feletti megoldását 3.2.2. tételre építjük, az adódó módszernek érzékenynek kell lennie arra, hogy C elemei eloszlásfüggvények. Ez azonban általában nincs így, hanem az eloszlásfüggvényeknek csak a $H(-\infty)=0$, $H(\infty)=1$ tulajdonsága jön számításba a (3.2.4) egyenlet megoldásakor. Ekkor valójában (3.2.4) egyenletet nem a C halmaz felett, hanem olyan függvényhalmazon oldjuk meg, amelynek H elemét csak a $H(-\infty)=0$, $H(\infty)=1$ feltétel köti meg, különben tetszés szerinti. Viszont ekkor már érvényét veszti $\Phi_{F,G}(H)$ funkcionál adott definíciója, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z,x)\,dH(x)$$

ilyen H függvény mellett általában már nem eloszlásfüggvény. Ahhoz tehát, hogy (3.2.4) egyenletet ebben az általánosabb esetben is értelmezni tudjuk, $\Phi_{F,G}(H)$ és $\Phi_{F,G}(H,L)$ funkcionálok kiterjesztésével kell foglalkoznunk. Ezzel és (3.2.4) egyenletnek ebben az általánosabb esetben való megoldásával foglalkozunk a következő 3.3. pontban.

3.3. Legyenek $a<b$ valós számok. Jelen pontban $\Phi_{F,G}(H)$ diszkrepancia függvényt vizsgáljuk az

$$M_{a,b} = \{H(x), x\in R | H(x) = 0, x \leqq a;\ H(x) = 1, x \geqq b\}$$

halmazon. Nyilván $E_{a,b} \subset M_{a,b}$ és $M_{a,b}$ konvex halmaz.

Először $\Phi_{F,G}(H)$ és $\Phi_{F,G}(H,L)$ funkcionáloknak az $M_{a,b}$ halmazon való értelmezésével foglalkozunk.

Legyen $F\in E$, továbbá $G(z,x)\in K(F)$, $x\in R$ az eloszlásfüggvényeknek valamely családja. Legyen $H\in E_{a,b}$, $H\in C_{F,G}$. Legyen továbbá (3.2.2) az $[a,b]$ intervallum valamely felosztása. A

$$p_j = H(x_j) - H(x_{j-1}), \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j) \quad (j=1,\dots,n) \tag{3.3.1}$$

jelölések felhasználásával

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} G(z,\xi_j)p_j,\ \sum_{j=1}^{n} G(z,\xi_j)p_j\Big)_F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (G(z,\xi_j), G(z,\xi_k))_F\, p_j p_k.$$

A felosztásoknak olyan sorozata mellett, amelyekre

$$\max p_k \to 0, \quad n \to \infty$$

teljesül, azt kapjuk, hogy

$$\Phi_{F,G}(H) = \Big(\int_a^b G(z,x)\,dH(x),\ \int_a^b G(z,x)\,dH(x)\Big)_F =$$

$$= \int_a^b \int_a^b (G(z,x), G(z,y))_F\, dH(x)\, dH(y).$$

3.3.1. *Definíció.* $\Phi_{F,G}(H)$, illetve $\Phi_{F,G}(H, L)$ funkcionálokat az $M_{a,b}$ halmazon a

$$\Phi_{F,G}(H) = \int_a^b \int_a^b (G(z, x), G(z, y))_F \, dH(x) \, dH(y),$$

illetve a

$$\Phi_{F,G}(H, L) = \int_a^b \int_a^b (G(z, x), G(z, y))_F \, dH(x) \, dL(y)$$

kifejezéssel értelmezzük, ahol $H, L \in M_{a,b}$, feltéve, hogy a szereplő integrálok léteznek.

Legyen

$$D_{F,G} = \{H \in M_{a,b} | \text{ ha } \Phi_{F,G}(H) \text{ létezik}\}.$$

Nyilvánvalóan $C_{F,G} \subset D_{F,G}$ és $D_{F,G}$ bővebb a $C_{F,G}$ halmaznál. Ugyanis $D_{F,G}$ tartalmazza a véges számú ugróhellyel rendelkező lépcsősfüggvényeket.

3.3.1. TÉTEL. $D_{F,G}$ konvex halmaz és $\Phi_{F,G}(H)$ ezen a halmazon konvex funkcionál.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy

$$\Phi_{F,G}(H, L) \leqq (\Phi_{F,G}(H) \Phi_{F,G}(L))^{1/2}; \; H, L \in D_{F,G}.$$

Induljunk ki evégből az $[a, b]$ intervallumnak (3.2.2) felosztásából és (3.3.1) jelölés mellett legyen még

$$r_k = L(x_k) - L(x_{k-1}) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

ahol

$$q = (q_j) \in Q_n, \quad r = (r_j) \in Q_n,$$

ha

$$Q_n = \{q = (q_j) \in R_n | \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\}.$$

Nyilvánvalóan $S_n \subset Q_n$.

Vezessük be a

$$\Gamma = ((G(z, \xi_j), G(z, \xi_k))_F)_1^n$$

jelölést. Ekkor a

$$q^* \Gamma r, \; q^* \Gamma q, \; r^* \Gamma r$$

mennyiségek rendre közelítő összegei a

$$\Phi_{F,G}(H, L), \quad \Phi_{F,G}(H), \quad \Phi_{F,G}(L)$$

integráloknak. Alkalmazva *Schwarz egyenlőtlenségét,*

$$q^* \Gamma r \leqq (q^* \Gamma q)^{1/2} (r^* \Gamma r)^{1/2}.$$

Ha most olyan beosztási sorozatot veszünk, amelyre

$$\max (x_k - x_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

akkor utolsó egyenlőtlenségünkből következik állításunk.

A bizonyítás többi része szóról szóra megegyezik 3.2.2. tétel bizonyításával.

3.3.1. LEMMA. Legyen $F \in E$, $G_k \in K(F)$ $(k=1, \dots, n)$ és legyen

$$\Gamma = ((G_j, G_k)_F)_1^n.$$

Ekkor

$$q^* \Gamma q \geqq 1, \quad q \in Q_n.$$

Bizonyítás. Legyen λ az a σ-véges mérték, amelyre $\omega(F)$, $\omega(G_k)$ $(k=1, \dots, n)$ mértékek abszolútfolytonosak. Legyenek f, $g_k (k=1, \dots, n)$ a megfelelő *Radon—Nikodym deriváltak.* Ebben az esetben a $g_k - f$ $(k=1, \dots, n)$ függvényeknek

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(g_j-f)(g_k-1)}{f} \lambda(dx) \Big)_1^n = \Gamma - M$$

Gram-mátrixa pozitív definit vagy szemidefinit, ahol M az a mátrix, amelynek minden eleme 1. Innen

$$x^* \Gamma x \geqq (x_1 + \dots + x_n)^2, \quad x = (x_j) \in R_n.$$

Ha történetesen $x = q = (q_j) \in S_n$, megkapjuk 3.3.1. lemma állítását.

3.3.2. TÉTEL. Legyen $F \in E$, $G(z, x) \in K(F)$,x$\in R$. Ekkor

$$\Phi_{F,G}(H) \geqq 1, \quad H \in M_{a,b}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum (3.2.2) felosztását és használjuk a (3.3.1) jelöléseket. Ekkor

$$\Phi_{F,G}(H) = \lim_{\max|q_k| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G(z, \xi_j), G(z, \xi_k))_F q_j q_k. \tag{3.3.2}$$

Mivel $q = (q_j) \in Q_n$, alkalmazhatjuk 3.3.1. lemmát. E szerint

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G(z, \xi_j), G(z, \xi_k))_F q_j q_k \geqq 1.$$

Felhasználva (3.3.2) előállítást, innen 3.3.2. tétel igazolására jutunk.

Nyilvánvalóan $E_{a,b} \subset M_{a,b}$ és így

$$m_{F,G}(E_{a,b}) \geqq m_{F,G}(M_{a,b}) \geqq 1 \tag{3.3.3}$$

alkalmazván (3.2.3) jelölést.

Ha $m_{F,G}(E_{a,b}) = 1$, akkor egyben $m_{F,G}(M_{a,b}) = 1$. Így ha van olyan $H \in M_{ab}$, hogy $\Phi_{F,G}(H) = 1$, akkor egyben $H \in E_{a,b}$. De lehet, hogy $m_{F,G}(M_{a,b}) = 1$, de $m_{F,G}(E_{a,b}) > 1$. Ekkor a $\Phi_{F,G}(H) = 1$ egyenletet kielégítő $H \in M_{a,b}$ esetén $H \notin E_{a,b}$.

4. Alkalmazások

Ebben a fejezetben a 3. fejezet eredményeire támaszkodva foglalkozunk a felbonthatóság kérdésével három speciális esetben.

4.1. Ha a súlyfüggvények diszkrét eloszlásfüggvények, amelyeknek véges számú rögzített helyen lehet ugrásuk.

4.2. Ha a súlyfüggvények diszkrét eloszlásfüggvények, adott helyeken vett diszkontinuitásokkal.

4.3. Ha a felbontandó eloszlásfüggvény és az eloszlásfüggvény-család elemei valamely $E(a, b)$ halmazból valók és a súlyfüggvények négyzetesen integrálható sűrűségfüggvények.

4.1. Amint már a 2.3. pontban tettük, most is feltesszük, hogy $C \subset E_j$ azoknak a diszkrét eloszlásfüggvényeknek a halmaza, amelyeknek a rögzített

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad n \geqq 2$$

helyeken lehet ugrásuk.

Legyen $F \in E$, legyen adva a $G(z, x)$, $x \in R$ eloszlásfüggvény-család. Tegyük fel, hogy a

$$G(z, x_k) = G_k(z) \in K(F) \quad (k = 1, \dots, n) \tag{4.1.1}$$

eloszlásfüggvények lineárisan függetlenek.

Feladatunk annak meghatározása, hogy az adott feltételek mellett A) mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $F \in E$ előállítható legyen a

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k G_k(z) \tag{4.1.2}$$

alakban, ahol $p = (p_k) \in S_n$. B) Felbonthatóság esetén meghatározandó az a $p = p_0 \in S_n$ vektor, amely (4.1.2) egyenletet kielégíti.

Ennek a problémának diszkrepancia függvénye a

$$\Phi_{F,G}(p) = \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k G_k, \sum_{k=1}^{n} p_k G_k\Big)_F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G_j, G_k)_F p_j p_k, \quad p = (p_j) \in S_n$$

kvadratikus forma, amelynek

$$\Gamma = ((G_j, G_k)_F)_1^n \tag{4.1.3}$$

mátrixa — (4.1.1) eloszlásfüggvények *Gram-mátrixa* — ezeknek az eloszlásfüggvényeknek lineáris függetlensége miatt pozitív definit.

Mivel a konvex S_n halmaz az euklideszi metrikában zárt és mivel $\Phi_{F,G}(p)$ ezen a halmazon folytonos funkcionál, van olyan $p = (p_0) = (p_0^{(j)}) \in S_n$, hogy

$$m_{F,G}(S_n) = \Phi_{F,G}(p_0),$$

ahol (3.2.3) értelmezésnek megfelelően

$$m_{F,G}(S_n) = \inf_{p \in S_n} \Phi_{F,G}(p) \geqq 1$$

az F eloszlásfüggvénynek a (4.1.1) eloszlásfüggvényekkel való felbonthatóságának mértéke a súlyfüggvényeket meghatározó S_n halmazra nézve.

Legyen

$$\{i_1, \dots, i_{n-1}, j\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

és legyen

$$\{G_{i_1}, \dots, G_{i_{n-1}}\} = G(j) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $n \geqq 2$ már teljesíti a

$$(4.1.4) \qquad m_{F,G(j)}(S_{n-1}) > m_{F,G}(S_n) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

feltételt. Ekkor p_0 az S_n halmaz belsejébe esik.

A következőkben 3.3. pontban mondottak felhasználásával p_0 kiszámításával foglalkozunk.

3.2.2., illetve 3.3.1. tétel szerint $\Phi_{F,G}(q)$ funkcionál konvex a konvex S_n és a konvex Q_n halmazokon. Mivel ez a függvény változóiban folytonosan differenciálható, S_n, illetve Q_n feletti minimum-hely meghatározása céljából alkalmazhatjuk a *Lagrange-féle multiplikátoros eljárást* a $p=(p_j)\in S_n$, illetve a $q=(q_j)\in Q_n$ halmazok felett a $\sum_{k=1}^{n} p_k=1$, illetve a $\sum_{k=1}^{n} q_k=1$ mellékfeltétellel. Mivel ez az összeg független attól, hogy S_n, illetve Q_n halmazból vett elemekről van szó, 3.3.1. tételből kiindulva kell eljárnunk. Ha tehát

$$\varphi(q) = \Phi_{F,G}(q)-2\lambda \sum_{j=1}^{n} q_j, \quad q = (q_j)\in Q_n,$$

akkor $\Phi_{F,G}(q)$ funkcionálnak a konvex Q_n halmaz belsejében abszolút minimuma van azon a helyen, ahol

$$(4.1.5) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} (G_j, G_k)_F q_k-\lambda = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Ezt az egyenletrendszert

$$(\Gamma-\lambda M)q = 0$$

alakba írva azt kapjuk, hogy (4.1.5) egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$\operatorname{Det}(\Gamma-\lambda M) = 0,$$

ahol M mint már előbb is, az a mátrix, amelynek valamennyi eleme az egység. Innen

$$\lambda = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e},$$

ahol $e\in R_n$ minden komponense az egység. Ezt az értéket (4.1.5) egyenletrendszerbe helyettesítve, majd az így kapott egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$q_0 = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

ahol a_j a Γ^{-1} mátrix j-edik sorában álló elemek összege. q_0 ismeretében

$$m_{F,G}(Q_n) = \Phi_{F,G}(q_0) = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e} \geqq 1.$$

Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt.

4.1.1. TÉTEL. Legyen $F \in E$ és legyen Γ a lineárisan független (4.1.1) eloszlásfüggvényeknek (4.1.3) *Gram-mátrixa.* Ha $n \geqq 2$ kielégíti a (4.1.4) feltételt, akkor F eloszlásfüggvénynek (4.1.1) eloszlásfüggvényekkel való lineáris approximálhatóságának mértéke a Q_n halmaz felett a

$$\frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e} \geqq 1$$

mennyiség. A

$$\Phi_{F,G}(H) = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e}$$

egyenletet az a H lépcsősfüggvény elégíti ki, amelynek $x_1 < \ldots < x_n$ helyeken és csak ezeken a helyeken van ugrása, amelyeknek nagyságát rendre a

$$q_0^{(j)} = \frac{a_j}{e^*\Gamma^{-1}e} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

mennyiségek adják meg, ahol a_j a Γ^{-1} mátrix j-edik sorában álló elemek összege. $p_0 = q_0$ akkor és csak akkor, ha

$$m_{F,G}(S_n) = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e} \geqq 1,$$

amikor is $H = H_0 \in E_j$ az az eloszlásfüggvény, amelynek $x_1 < \ldots < x_n$ helyeken és csak ezeken a helyeken van ugrása, amelyeknek nagyságát rendre a

$$p_0^{(j)} = \frac{a_j}{e^*\Gamma^{-1}e} > 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

mennyiségek adják meg.

4.1.1. és 3.1.1. tételek segítségével adódik e pont fő eredményét jelentő következő tétel.

4.1.2. TÉTEL. F eloszlásfüggvény akkor és csak akkor bontható fel a lineárisan független (4.1.1) eloszlásfüggvényekkel az S_n halmaz felett, ha $e^*\Gamma^{-1}e = 1$, ahol Γ a (4.1.1) eloszlásfüggvényeknek (4.1.3) *Gram-mátrixa.* Ha $n \geqq 2$ kielégíti a

$$m_{F,G(j)}(S_{n-1}) > 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

feltételt, akkor a $\Phi_{F,G}(H) = 1$ egyenletet az a $H_0 \in E_j$ eloszlásfüggvény elégíti ki, amelynek az $x_1 < \ldots < x_n$ helyeken és csak ezeken a helyeken van ugrása és az ugrások nagysága rendre a

$$p_0^{(j)} = a_j > 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

mennyiségekkel egyenlőek, ahol a_j a Γ^{-1} mátrix j-edik sorában álló elemek összege.

4.2. Ebben a pontban azt a speciális esetet tárgyaljuk, amelyben a súlyfüggvények diszkrét eloszlásfüggvények adott helyeken vett diszkontinuitásokkal.

4.2.1. *Definíció.* Legyen $F \in E$, $G_k \in K(F)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Azt mondjuk, hogy $\{G_k\}_1^\infty$ sorozat diszkrepanciában konvergál F eloszlásfüggvényhez, ha

$$(G_n, G_n)_F \to 1, \quad n \to \infty.$$

Legyen $\{x_k\}_1^\infty$ egymástól különböző valós számok sorozata. Az $\{x_k\}_1^n$ sorozat elemei nagyságrendben legyenek

(4.2.1) $$y_1^{(n)} < y_2^{(n)} < \dots < y_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Legyen $F \in E$ és legyen adva az eloszlásfüggvényeknek $G(z, x) \in K(F)$, $x \in R$ családja. Vezessük be a

$$G(n) = \{G(z, y_k^{(n)})\}_1^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

jelölést. Jelölje $p_0^{(n)}$ azt a vektort, amelyre

$$\Phi_{F, G(n)}(p_0^{(n)}) = m_{F, G(n)}(S_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

és $H_{p_0^{(n)}}$ azt a diszkrét eloszlásfüggvényt, amelynek (4.2.1) helyeken lehetnek ugrásai és az ugrások nagyságát rendre a $p_0^{(n)}$ vektor komponensei adják meg. Nyilvánvaló, hogy

$$m_{F, G(n)}(S_n) \searrow m_{F, G} \geqq 1, \quad n \to \infty,$$

ahol

$$G = \{G(z, x_k)\}_1^\infty.$$

4.2.2. *Definíció.* Legyen $F \in E$ és legyen adva az eloszlásfüggvényeknek $G(z, x) \in K(F)$, $x \in R$ családja. Azt mondjuk, hogy F eloszlásfüggvény aszimptotikusan dekomponálható az eloszlásfüggvények $\{G(z, x_k)\}_1^\infty$ sorozatával, ha

$$m_{F, G(n)}(S_n) > 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad m_{F, G} = 1,$$

azaz, ha az eloszlásfüggvényeknek

(4.2.2) $$\Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(z, x)\, dH_{p_0^{(n)}}(x) \Big\}_1^\infty$$

sorozata diszkrepanciában konvergál F eloszlásfüggvényhez.

Megmutatjuk, vannak olyan

$$G(z, x_k) = G_k(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

eloszlásfüggvény-sorozatok, amelyek mellett (4.2.2) diszkrepanciában konvergál F eloszlásfüggvényhez.

4.2.3. *Definíció.* ([4], Definition 3.3.) Legyen $F \in E$. Az eloszlásfüggvények $G_k \in K(F)(k = 1, 2, \dots)$ sorozatát ortogonálisnak nevezzük az F eloszlásfüggvényre nézve, ha

$$c_k = (G_k, G_k)_F > 1, \quad (G_j, G_k) = 1, \quad j \neq k \ (j, k = 1, 2, \dots).$$

Ebben az esetben a

$$\Gamma(n) = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & c_2 \dots & 1 \\ . & . \dots & . \\ 1 & 1 \dots & c_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

matrixok regulárisak ([4], Theorem 3.7.) és ([4], Theorem 4.11.)

$$m_{F,G(n)}(S_n) = \frac{1}{e^*\Gamma^{-1}e} = 1+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k-1}} > 1.$$

Tehát F nem bontható fel $\{G_k\}_1^\infty$ egyetlen véges részsorozatával sem és magával e sorozattal pedig akkor és csak akkor, ha a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{c_k-1}$$

sor divergens. Ekkor a

$$p^*\Gamma(n)p = 1+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k-1}}$$

egyenletet az a $p_0^{(n)}\in S_n$ vektor elégíti ki, amelynek komponenseit rendre a

$$\frac{1}{(c_j-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k-1}} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

mennyiségek szolgáltatják ([4], Theorem 4.17.).

Ha $F\in E(a, b)$, akkor mindig van olyan $\{G_k\}_1^\infty$ eloszlásfüggvény-sorozat, amely ortogonális az F eloszlásfüggvényre nézve.

Legyen ugyanis $F\in E(a, b)$ és tekintsük a

$$\Phi_{k+1}(z) = c_{k+1}\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & F(z) \\ 1 & \frac{4}{3} & \ldots & \frac{2k}{k+1} & F^2_{(z)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{2k}{k+1} & \ldots & \frac{k^2}{2k-1} & F^k_{(z)} \\ 1 & \frac{2(k+1)}{k+2} & \ldots & \frac{k(k+1)}{2k} & F^{k+1}_{(z)} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k+1)}F^j_{(z)} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

függvényt, ahol $k\geqq 2$ esetén

$$c_{k+1}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(a_j^{(k+1)})^2}{\mathrm{Det}\, A_{k+1}^* A_{k+1}},$$

amennyiben

$$A_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \dots & \frac{2k}{k+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \frac{2k}{k+1} & \dots & \frac{k^2}{2k-1} \\ 1 & \frac{2(k+1)}{k+2} & \dots & \frac{k(k+1)}{2k} \end{vmatrix}.$$

Ekkor

(4.2.3) $$G_k(z) = F(z) + \Phi_{k+1}(z) \in \begin{cases} E(a, b) \\ K(F) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

eloszlásfüggvény-sorozat az $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvényre nézve ortogonális ([4], Theorem 3.6.).

4.2.4. *Definíció.* $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvényre nézve ortogonális (4.2.3) eloszlásfüggvény-sorozatot az $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvényhez adjungált ortogonális eloszlásfüggvény-sorozatnak nevezzük.

Ebben az esetben kimutatható, hogy ([4], p. 3.24)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k - 1} > \frac{n(n+2)}{3},$$

azaz igaz ([4], Theorem 4.18) a

4.2.1. TÉTEL. $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvény a hozzá adjungált ortogonális eloszlásfüggvény-sorozattal aszimptotikusan dekomponálható.

Megjegyzés. Érdekes, hogy $a_j^{(k+1)} (j = 1, \dots, k+1)$ együtthatók az A_{k+1} mátrix elemeitől, így c_{k+1} $(k = 1, 2, \dots)$ számok is csak a k természetes számtól függenek, de függetlenek az alapul választott $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvénytől. Ha tehát ezeket a mennyiségeket $k = 1, 2, \dots$ esetben kiszámítjuk, azután ezeket táblázatba foglaljuk, könnyen felírhatjuk az $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvényhez adjungált ortogonális eloszlásfüggvénysorozat első n számú elemét.

4.3. Jelen pontban azzal az esettel foglalkozunk, amelyben $F \in E(a, b)$, ahol a és b rögzítettek, és

(4.3.1) $$G(z, x) \in \begin{cases} E(a, b) \\ K(F) \end{cases}, \quad x \in R,$$

továbbá a súlyfüggvények halmaza az $E(0, 1)$ halmaznak a *Lebesgue-mértékre* abszolútfolytonos, négyzetesen integrálható sűrűségfüggvénnyel bíró eloszlásfüggvényeinek részhalmaza. Ha tehát

$$D = \left\{ h \in L^2(0, 1) \,\middle|\, \int_0^1 h(x)\, dx = 1 \right\},$$

akkor a súlyfüggvények halmazát a

$$D^+ = \{h \in D | h(x) \geqq 0, \quad x \in [0, 1]\}$$

halmaz elemei alkotják.

Nyilvánvaló, hogy D és D^+ halmazok konvexek és D^+ halmaz az $L^2(0, 1)$ tér metrikájában zárt.

Az 1. fejezetben megválaszolásra kitűzött két kérdés most a következőképp fogalmazható meg.

A) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy adott $F \in E(a, b)$ és (4.3.1) feltételt kielégítő $G(z, x)$, $x \in R$ eloszlásfüggvény-család mellett

$$\int_0^1 G(z, x) h(x)\, dx = F(z) \tag{4.3.2}$$

integrálegyenletnek legyen megoldása a D^+ halmazon?

B) Megoldhatóság esetén mivel egyenlő a (4.3.2) integrálegyenletet kielégítő $h_0 \in D^+$ sűrűségfüggvény?

3.1. pont alapján $G(F^{-1}(z), x)$, $x \in [0, 1]$ abszolútfolytonos a *Lebesgue-mértékre* nézve és

$$\frac{d}{dz} G(F^{-1}(z), x) \in L^2(0, 1), \quad z \in [0, 1], \quad x \in [0, 1].$$

Ekkor tehát a jelen problémához tartozó diszkrepanciafüggvényt

$$\Phi_{F,G}(h) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) h(x) h(y)\, dx\, dy, \quad h \in D^+$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$K(x, y) = \left(G(z, x),\ G(z, y)\right)_F = \tag{4.3.3}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dz} G(F^{-1}(z), x)\right] \left[\frac{d}{dz} G(F^{-1}(z), y)\right] dz; \quad x, y \in [0, 1].$$

(4.3.2) integrálegyenletnek matematikai szempontból való jobbkezelhetősége céljából feltesszük, hogy (4.3.3) *Hilbert—Schmidt-féle magfüggvény,* azaz hogy teljesül a

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y)\, dx\, dy < \infty$$

feltétel. E feltétel alapján $\Phi_{F,G}(h)$ diszkrepanciafüggvény folytonos az $L^2(0, 1)$ tér metrikájában zárt D^+ halmazon. De akkor létezik olyan $h_0 \in D^+$, hogy

$$m_{F,G}(D^+) = \inf_{h \in D^+} \Phi_{F,G}(h) = \Phi_{F,G}(h_0) \geqq 1$$

teljesedjék.

Következő feladatunk $m_{F,G}(D^+)$ minimum és a $h_0 \in D^+$ sűrűségfüggvény-kiszámítás.

3.2.2. tétel értelmében $\Phi_{F,G}(h)$ konvex funkcionál a konvex D^+ halmazon. Így — amennyiben erre mód kínálkozik — alkalmazhatjuk a $\Phi_{F,G}(h)$ funkcionál D^+

halmaz feletti minimumának és magának a minimumhelynek a meghatározására a *Lagrange-féle módszert* a

$$\int_0^1 h(x)\,dx = 1$$

feltétel mellett. Viszont ez a feltétel érzéketlen a $h \in D^+$ feltételre nézve. Ezért ez a módszer a D halmaz feletti minimum és minimumhely meghatározására alkalmas csak.

Mivel a súlyfüggvények az $E(0, 1)$ halmazból valók, alkalmazhatjuk 3.3.1 tételt, amelynek értelmében $\Phi_{F,G}(h)$ konvex funkcionál a konvex D halmazon. Ezért a következőkben a *Lagrange-féle multiplikátoros módszerre* építve a

$$m_{F,G}(D) = \inf_{h \in D} \Phi_{F,G}(h) \geqq 1$$

minimumnak és a D belsejébe eső annak a h^* függvénynek a meghatározásával foglalkozunk, amelyre nézve

$$\Phi_{F,G}(h^*) = m_{F,G}(D) \tag{4.3.4}$$

teljesül.

Jelölje a $\{\lambda_k\}_1^\omega$ sorozat a szimmetrikus, pozitív definit *Hilbert—Schmidt-féle* $K(x, y)$ magfüggvény sajátértékeit növekvő sorrendben, továbbá $\{\varphi_k(x)\}_1^\omega$ az ezekhez tartozó ortonormált sajátfüggvények sorozatát. Itt és a következőkben ω egy természetes számot, vagy a végtelent jelenti a szerint, amint $K(x, y)$ magfüggvény degenerált, vagy nem degenerált.

Amint az szokásos, használjuk a

$$(h, k) = \int_0^1 h(x)k(x)\,dx; \quad h, k \in L^2(0, 1)$$

jelölést.

Bebizonyítjuk a következő tételt.

4.3.1. TÉTEL.

$$m_{F,G}(D) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k)^2 \lambda_k} \tag{4.3.5}$$

és a (4.3.4) egyenlet egyetlen

$$h^*(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k)^2 \lambda_k} \sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k) \lambda_k \varphi_k(x) \in D \tag{4.3.6}$$

megoldása a D halmaz belsejébe esik.

Bizonyítás. Állítsuk elő $h \in D$ függvényt

$$h(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\,dy$$

alakban, ahol $f \in L^2(0, 1)$. Ekkor

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \tag{4.3.7}$$

Alkalmazva a *Hilbert—Schmidt-tételt* ([7], p. 227),

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (1, \varphi_k) = 1. \tag{4.3.8}$$

Ebben az esetben

$$\Phi_{F,G}(h) = \int_0^1 \int_0^1 K_3(x, y) f(x) f(y)\,dx\,dy,$$

ahol $K_3(x, y)$ a $K(x, y)$ magfüggvény harmadik iteráltja. MERCER tétele ([7], p. 230) szerint

$$K_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^3}; \quad x, y \in [0, 1]$$

és a konvergencia egyenletes. Innen

$$\Phi_{F,G}(h) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{(f, \varphi_k)^2}{\lambda_k^3}. \tag{4.3.9}$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$l = \left\{x = (x_j) \in R_\omega \,\middle|\, x \in l_2,\ \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \in D\right\},$$

$$l^+ = \left\{x = (x_j) \in l \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \in D^+\right\},$$

ahol l_2 a valós sorozatok *Hilbert-tere*. D és l, továbbá D^+ és l^+ között kölcsönös és egyértelmű vonatkozás van. Már ebből a tényből is következik, hogy l konvex halmaz és l^+ konvex és az l_2 tér metrikájában zárt halmaz.

Legyen most

$$x_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, \dots, \omega).$$

(4.3.7), (4.3.8) és (4.3.9) összefüggések alapján azt mondhatjuk, $\Phi_{F,G}(h)$ diszkrepanciafüggvényt az a

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \in D \tag{4.3.10}$$

függvény fogja minimalizálni, amelyben $x = (x_j) \in l$ vektor az

$$F(x_1, \dots, x_\omega) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k^2}{\lambda_k^3}$$

függvényt az l felett a

$$\sum_{k=1}^{\omega} \frac{(1, \varphi_k)}{\lambda_k} x_k = 1 \tag{4.3.11}$$

mellékfeltétel mellett minimalizálja. Mivel $F(x_1, \ldots, x_\omega)$ függvény konvex a konvex l halmazon, ezért l halmaz belsejébe eső abszolút minimumhelynek ki kell elégítenie

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, \omega) \tag{4.3.12}$$

feltételeket, ahol

$$\Psi(x_1, \ldots, x_\omega) = \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k^2}{\lambda_k^3} - 2\lambda \sum_{k=1}^{\omega} \frac{x_k}{\lambda_k}(1, \varphi_k).$$

A differenciálást végrehajtva (4.3.12) feltételek helyébe a

$$x_k = \lambda(1, \varphi_k)\lambda_k^2 \quad (k = 1, \ldots, \omega) \tag{4.3.13}$$

feltételrendszer lép.

Ha (4.3.13) értékeket (4.3.11) kifejezésbe helyettesítjük, akkor λ meghatározására a

$$\lambda \sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k)^2 \lambda_k = 1 \tag{4.3.14}$$

egyenletre jutunk.

Ha viszont (4.3.13) mennyiségeket (4.3.9) formulába helyettesítjük be, akkor (4.3.5) igazolásához ugyanezeknek a mennyiségeknek (4.3.10) formulába való helyettesítése után (4.3.14) felhasználásával 4.3.1. tétel (4.3.6) állításához jutunk.

Ezzel 4.3.1. tételt igazoltuk.

(3.3.3) egyenlőtlenségből a mi esetünkben az

$$m_{F,G}(D^+) \geqq m_{F,G}(D) \geqq 1$$

egyenlőtlenség érvényes. Ennek alapján 4.3.1. tételből kiindulva kapjuk a következő állítást:

4.3.1. KÖVETKEZMÉNY. 4.3.1. tételben szereplő jelöléseket megtartva $h^*(x) \in D^+$ akkor és csak akkor, ha

$$m_{F,G}(D^+) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k)^2 \lambda_k} \geqq 1.$$

Ez a mennyiség $F \in E(a, b)$ eloszlásfüggvénynek (4.3.1) eloszlásfüggvény-család segítségével a D^+ halmaz súlyfüggvényeivel történő felbonthatóságának mértéke, $h^* \in D^+$ pedig az a súlyfüggvény, amely mellett

$$\Phi_{F,G}(h^*) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\omega} (1, \varphi_k)^2 \lambda_k}.$$

Végül e pont főeredményét jelentő tétel a következőképp fogalmazható meg.

4.3.2. TÉTEL. Legyenek a szimmetrikus és pozitív definit *Hilbert—Schmidt* (4.3.3) magfüggvény sajátértékei növekvő sorrendben a $\{\lambda_k\}_1^\omega$ sorozat elemei és e sajátértékekhez tartozó ortonormált sajátfüggvények sorozata legyen $\{\varphi_k(x)\}_1^\omega$, $x \in [0, 1]$.

$F\in E(a, b)$ akkor és csak akkor bontható fel (4.3.1) eloszlásfüggvény-családdal a D^+ halmaz felett, ha

$$\sum_{k=1}^{\omega}(1, \varphi_k)^2\lambda_k = 1.$$

Ebben az esetben érvényes az

$$F(z) = \int_0^1 G(z, x)h(x)\,dx$$

felbontás, ahol

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\omega}(1, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k(x)\in D^+, \quad x\in[0, 1]. \tag{4.3.15}$$

Érvényes továbbá az

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\omega}(1, \varphi_k)\lambda_k \int_0^1 G(z, x)\varphi_k(x)\,dx, \quad z\in R \tag{4.3.16}$$

előállítás, ahol a konvergencia az $[a, b]$ intervallumon egyenletes.

Bizonyítás. A tétel állításai a (4.3.16) kivételével 4.3.1. tételből és 4.3.1. következményből adódnak.

(4.3.16) állítás igazolása céljából legyen

$$G(z) = \int_0^1 G(z, x)h(x)\,dx,$$

ahol $h(x)$ (4.3.15) formulával értelmezett súlyfüggvény. Így tehát

$$\left|G(z) - \sum_{k=1}^{n}(1, \varphi_k)\lambda_k \int_0^1 G(z, x)\varphi_k(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 G(z, x)\sum_{k=n+1}^{\omega}(1, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k(x)\,dx\right| \leqq$$

$$\leqq \left(\int_0^1 G^2(z, x)\,dx\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\omega}(1, \varphi_k)^2\lambda_k^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{k=n+1}^{\omega}(1, \varphi_k)^2\lambda_k^2\right)^{1/2}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\sum_{k=1}^{\omega}(1, \varphi_k)^2\lambda_k^2 = \int_0^1 h^2(x)\,dx,$$

egyenlőtlenségünk jobb oldala $z\in[a, b]$ értékektől függetlenül nullához konvergál, ha $n\to\infty$. És ezt kellett igazolnunk.

IRODALOM

[1] Akhiezer, N. J., *The Classical Moment Problems* (Hafner Publ. Co., New York, 1965).

[2] Csiszár, I., "Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations", *Studia Sci. Math. Hung.* 3 (1967) 2 9—318.

[3] Girault, M., "Les fonctions caractéristiques et leurs transformations", *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* 4 (1945) 223—229.

[4] Gyires, B., "Contributions to the theory of linear combinations of probability distribution functions", *Studia Math. Hung.* 16 (1981) 297—324.

[5] GYIRES, B.,"The mixture of probability distributions by absolutely continuous weight functions", *Acta Sci. Math. Szeged* **48** (1985) 173—186.
[6] GYIRES, B., "An application of the mixture theory to the decomposition problem of characteristic functions", *Contribution to Stochastics* (Physica Verlag, Heidelberg, 1987) 137—144.
[7] GYIRES, B., „Egy mátrixegyenlet megoldása és ennek alkalmazása valószínűségi eloszlásfüggvények lineáris kombinációinak elméletében", *Alk. Mat. Lapok* **9** (1983) 137—141.
[8] GYIRES, B., "On the superponability of the strictly monotone increasing continuous probability distribution functions", *Proc. of the third Pannonian Symposium of Math. Stat.* (Akad. Kiadó, Budapest, 1982) 89—104.
[9] LINNIK, YU. V., *Decompositions of Probability Distributions* (Oliver and Boyd, Edinburgh—London, 1964).
[10] LUKÁCS, E., *Fonctions caractéristiques* (Dunod, Paris, 1964).
[11] MEDGYESSY, P., *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions* (Akad. Kiadó, Budapest, 1961).
[12] MEDGYESSY, P., *Decompositions and Superpositions of Density Functions and Discrete Distributions* (Akad. Kiadó, Budapest, 1977).
[13] PÓLYA, GY., "Remarks on characteristic functions." *Proc. of the Berkeley Simposium of Math. Stat. and Probab.* (Univ. of California Press, 1949) 115—122.
[14] PÓLYA, G. and SZEGŐ, G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band I., II.* (Springer Verlag, 1925).
[15] RIESZ, F. und SZ. NAGY, B., *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956).
[16] SAHLER, W. A., "A survey on distribution-free statistics based on distances between distribution functions", *Metrika* **13** (1968) 149—169.

(Beérkezett: 1988. április 6.)

GYIRES BÉLA
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZETE
4010 DEBRECEN

ON THE DECOMPOSABILITY OF PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTIONS

GYIRES B.

The aim of the paper is the further development of some ideas, which were applied by the author in his papers [4] and [5], respectively, to the representability of a probability distribution function by the mixture of a given family of probability distribution functions. It appeared, that the used method can be applied in general to the decomposition of a probability distribution function by given ones.

The paper contains four chapters. In the first one the author gives the exact formulation of the question. — In the second one it can be found "ad hoc" decomposition procedures. These are the case of the convolution, the case of making use of the moments to the decompositions, and the case of the decompositions in a narrow sense. — The third chapter makes known such a general method for the decomposition of probability distribution functions by a family of ones, which is based on a suitable chosen distance concept between two probability distribution functions. — Chapter four deals with decomposition problems in three special cases using the results of the previous chapter. Namely in the case if the weight functions are discrete probability distribution functions with a finite number of discontinuities. If the weight functions are discrete probability distribution functions with infinite number of discontinuities. If the probability distribution functions in question are continuous, moreover strictly monotone increasing in a finite or infinite interval, and the weight functions are square integrable density functions.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 27—35

HIPOTÉZISVIZSGÁLAT KÖZEL NEMSTACIONÁRIUS AR (1) ESETÉN

KORMOS JÁNOS

Debrecen

A cikkben diszkrét elsőrendű lineáris folyamatok esetében végzünk hipotézisvizsgálatot; a véletlen bolyongást vizsgáljuk közel nemstacionárius AR(1) folyamat, mint alternatíva mellett. Ez utóbbin az

$$x_n - \alpha x_{n-1} = u_n$$

folyamatot értjük, mikor α közel van 1-hez. Esetünkben $\alpha = 1 - 1/N$, ahol N a minta elemszáma. Megadjuk a likelihood hányadosok aszimptotikus viselkedését, eloszlását, és megmutatjuk, azok milyen kapcsolatban vannak a folytonos folyamatok vizsgálata során nyert ismert eredményekkel.

1. Bevezetés és összegzés

Tekintsük az

$$x_n - \alpha x_{n-1} = u_n; \quad n = 0, 1, 2 \dots N \tag{1.1}$$

lineáris folyamatot, ahol

$$x_0 = 0; \quad |\alpha| \leqq 1$$

u_n független, azonos — $N(0, 1)$ — eloszlású valószínűségi változók sorozata. Így

$$Ex_n = 0; \quad Ex_n^2 = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}, & \alpha \neq 1 \\ n, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

és az eloszlásuk normális $n = 1, 2, \dots N$.

Az (1.1) folyamatra vonatkozó vizsgálatok MANN és WALD (1943), WHITE (1958), ANDERSON (1959) eredményeivel kezdődtek, és egészen napjainkig követhetően jelentős mennyiségű irodalmat tesznek ki.

A vizsgálatok központi kérdése az α paraméter

$$\hat{\alpha} = \sum x_n x_{n-1} / \sum x_{n-1}^2$$

legkisebb négyzetes becslése esetén (ha a zaj normális $\hat{\alpha}$ egybeesik a maximum-likelihood becsléssel) megadni a határeloszlást, illetve véges esetben jó közelítő eloszlásokat találni; PHILLIPS (1977), AHTOLA és TIAO (1984). Külön figyelmet érdemelnek az $\alpha = 1$ és az „α közel van 1-hez" esetek; RAO (1978), DICKEY és FULLER (1979, 1981), EVANS és SAVIN (1981, 1984), PHILLIPS (1987). ARATÓ M. (1982) mutatta meg, hogy α-ra konfidencia intervallum csak a $(-1, 1)$ nyílt intervallumban konstruálható. CHAN és WEI cikkében (1987) találkoztunk először az (1.1) folyamat olyan típusú átparaméterezésével, amikor az 1-hez közeli α a minta nagyságának N-nek a függvénye.

A szerző folyamatok diszkriminancia analízisével foglalkozva került kapcsolatba a problémával.

Szétválasztható-e egy véletlen bolyongás egy hozzá hasonló, közel nemstacionárius AR(1) folyamattól?

Az (1.1) folyamatra vonatkozóan az alábbi hipotéziseket vizsgáljuk:

H: $\alpha=1$, azaz x_n egyszerű véletlen bolyongás;

A: $\alpha=1-\frac{1}{N}$, azaz x_n idővel stacionáriussá váló, de „közel nemstacionárius" viselkedésű folyamat.

TÉTEL. Tekintsük az (1.1) folyamatot, a fent megfogalmazott feltételek mellett. Akkor a likelihood hányadosok logaritmusára teljesül

$$\ln \frac{p_A}{p_H}(x|H) \to \frac{1}{2}\left(1-w^2(1)-\int_0^1 w^2(t)\,dt\right), \tag{1.3}$$

ahol $w(t)$ a *standard Wiener-folyamat* $[0, 1]$-en;

$$\ln \frac{p_A}{p_H}(x|A) \to \frac{1}{2}\left(1-x^2(1)-\int_0^1 x^2(t)\,dt\right), \tag{1.4}$$

ahol $x(t)$ kielégíti a

$$dx(t)+x(t)\,dt = dw(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. A konvergencia eloszlásban való konvergenciát jelent. $(|H)$ és $(|A)$ a hipotézis illetve az alternatíva teljesülését jelöli.

1. *Megjegyzés.* Ha $\alpha=1-\lambda/N$ akkor (1.4) jobb oldalán álló határ funkcionál

$$\frac{\lambda}{2}\left(1-x^2(1)-\lambda\int_0^1 x^2(t)\,dt\right) \tag{ii}$$

alakú, és az $x(t)$ folyamat a

$$dx(t)+\lambda x(t)\,dt = dw(t) \tag{i}$$

egyenletet elégíti ki. A λ paraméter maximum likelihood becslésének eloszlása tetszőleges λ esetén ismert; NOVIKOV (1972), ARATÓ (1982), ARATÓ és BENCZUR (1970, 1986), EVANS és SAVIN (1981) — csak $\lambda=0$ esetén.

2. *Megjegyzés.* Ha az (1.1) folyamat stacionárius indítású, azaz

$$x(0)\sim N\left(0, \frac{1}{1-\alpha^2}\right)$$

akkor (1.4) jobb oldalán $x^2(1)$ helyett $x^2(1)+x^2(0)$ szerepel.

3. *Megjegyzés.* CHAN és WEI (1987) megmutatta, hogy az (1.1) folyamat esetén

$$\left(\sum_{n=1}^{N} x_{n-1}^2\right)^{1/2}(\hat{\alpha}-\alpha)$$

határeloszlása megegyezik

$$\text{(iii)} \qquad \int_0^1 (1+bt)^{-1} w(t)\, dw(t) \Big/ \left(\int_0^1 (1+bt)^{-2} w^2(t)\, dt\right)^{1/2}$$

eloszlásával, ahol

$$\alpha = 1-\frac{\lambda}{N}; \quad b = e^{2\lambda}-1;$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{n=1}^{N} x_{n-1}x_n \Big/ \sum_{n=1}^{N} x_{n-1}^2;$$

$w(t)$ a *standard Wiener-folyamat,* továbbá u_n martingál differencia sorozat, amely eleget tesz bizonyos, a határeloszlást garantáló feltételeknek. Ismert, hogy az

$$x(t) = \exp(-\lambda t) w(\exp(2\lambda t))$$

transzformációval a *standard Wiener-folyamatból* eljuthatunk az 1. megjegyzés (i) egyenletének eleget tevő *stacionárius Gauss—Markov folyamathoz.* Ennek ellenére sem triviális (ii) és (iii) kapcsolatának megmutatása.

2. Bizonyítás

A szerző célja különböző közeli stacionárius folyamatok esetén hatékony eljárást adni azok diszkriminanciaanalízisére. Ilyenek lehetnek a jelen dolgozatban tárgyalt hipotézisvizsgálat általánosításaként tekinthető AR (p) folyamatokra vonatkozó eredmények. Ekkor a

H': az AR(p) folyamat esetén a karakterisztikus polinom zérushelyei közül q az egységkörön van:

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_q| = 1; \quad (p \geqq 2; \; q \leqq p)$$

A': minden zérushely az egységkörön kívül helyezkedik el (stacionárius eset), de $|z_1| \to 1, \ldots, |z_q| \to 1$ a mintanagyság növelése esetén;

hipotézis, ill. alternatíva esetén jutunk a tételben megfogalmazott állítások megfelelőihez.

Az általános tárgyalásmód megvilágítására használjuk a tétel bizonyításának első részében azt a mátrixos írásmódot — ami önmagában szükségtelen bonyolítás —, amely p-edrendű AR folyamatok esetén is alkalmas a probléma kezelésére, például a szórás-mátrix inverzének meghatározására.

Tekintsük a likelihood hányadost a véletlen bolyongás és az AR (1) folyamat esetén

$$\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}) = \frac{\left(\det\left(\mathbf{R}^{-1}(1)\right)\right)^{1/2}}{\left\{\det\left[\mathbf{R}^{-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]\right\}^{1/2}}\cdot$$

$$\tag{2.1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}(1)\mathbf{x}\right),$$

ahol $\mathbf{x}'=(x_1, x_2, ..., x_N)$; $\mathbf{R}(\alpha)$ pedig az $x_1, x_2, ..., x_N$ kovariancia mátrixa α paraméter mellett.

Az (1.1) lineáris folyamat

$$\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{u}$$

alakba írható, ahol

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}' = (u_1, u_2, ..., u_N).$$

Így

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\alpha)\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}(\alpha)\mathbf{u}\mathbf{u}'\left(\mathbf{A}^{-1}(\alpha)\right)'.$$

Mivel

$$E\mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{R}(\alpha) = E\mathbf{x}\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}(\alpha)\left(\mathbf{A}^{-1}(\alpha)\right)'.$$

Innen

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{A}'(\alpha)\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & -\alpha & & & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha^2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1+\alpha^2 & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy stacionárius indítás esetén

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha^2 & & & \\ & -\alpha & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1+\alpha^2 & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det\left(\mathbf{R}^{-1}(\alpha)\right)=1$, ezért (2.1) esetében elég foglalkozni csak a kitevővel.

Legyen

$$-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\left(\mathbf{R}^{-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)-\mathbf{R}^{-1}(1)\right)\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x},$$

ahol

$$\Delta = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}\right) & -\frac{1}{N} & & 0 \\ -\frac{1}{N} & \left(\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}\right) & \ddots & \\ & \ddots & \left(\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}\right) & -\frac{1}{N} \\ 0 & & -\frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x} = \left(\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}\right)\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x_{i+1}^2 - \frac{1}{N}x_N^2 + \frac{1}{N}x_1^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{1}{N}x_1^2 - \frac{1}{N}x_N^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{N}x_N^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2.$$

Így kapjuk

$$\ln\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{N}x_N^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right). \tag{2.2}$$

Nézzük meg, hogyan viselkedik a likelihood hányados logaritmusa H, ill. A esetén.

A) A hipotézis teljesülése mellett

$$(x_i - x_{i-1})^2 = u_i^2, \quad \text{azaz}$$

$$u_i^2 \sim \chi_1^2 \quad \text{minden } i\text{-re}, \quad (i = 1, 2, \dots N).$$

Ezért az első tag $N \to \infty$ esetén tart 1-hez

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1})^2 \xrightarrow{st} 1. \tag{2.3}$$

A második tag írható

$$\frac{1}{N}x_N^2 = \left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 \quad \text{alakba.}$$

Vegyük észre, hogy a *Donsker—Prohorov invariancia elvet* a $\left(\frac{k}{N}, N^{-1/2}\sum_{i=1}^{k} u_i\right)$ véletlen töréspontokkal rendelkező lépcsős függvény esetében az $f(u)=u^2$ választással alkalmazva, $D[0, 1]$-en

$$\frac{1}{N}x_N^2 \to w^2(1), \tag{2.4}$$

ahol $w(t)$ a standard *Wiener folyamat* [0, 1]-en. A harmadik tagra hasonlóan, az

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} x_k^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{k} u_i)^2$$

átalakítást figyelembe véve adódik

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \to \int_0^1 w^2(t)\,dt; \quad (N\to\infty). \tag{2.5}$$

Így (2.3)—(2.5)-ből kapjuk, hogy a hipotézis teljesülése esetén; $(N\to\infty)$

$$\ln\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}|H) \to \frac{1}{2}\Big(1-w^2(1)-\int_0^1 w^2(t)\,dt\Big). \tag{2.6}$$

B) Az alternatíva teljesülése mellett:

A (2.2)-ben szereplő tagokat ismét egyenként vizsgálva, az első tag esetében igaz

$$x_i = \sum_{j=1}^{i}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{i-j} u_j;$$

$$(x_i-x_{i-1})^2 = ((\alpha-1)x_{i-1}+u_i)^2; \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Ezért

$$E(x_i-x_{i-1})^2 = E\left(u_i^2-\frac{2}{N}u_i x_{i-1}+\frac{1}{N^2}x_{i-1}^2\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{N^2}Ex_{i-1}^2 = 1+\frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{i-2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2j} = 1-\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2(i-1)}-1}{2N-1}.$$

Így kapjuk

$$E(x_i-x_{i-1})^2 \to 1, \quad (N\to\infty),$$

$$\frac{1}{N}\sum (x_i-x_{i-1})^2 \xrightarrow{st} 1, \quad (N\to\infty). \tag{2.7}$$

A második és a harmadik tagnál vegyük figyelembe a következőket

$$Ex_k^2 = N^2\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}-1}{1-2N}.$$

Legyen

$$k < m; \quad (k, m = 1, 2, \ldots, N).$$

Akkor

$$Ex_k x_m = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{m-k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\right)^i =$$

$$= \left(1-\frac{1}{N}\right)^{m-k} N^2\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}-1}{1-2N}.$$

Jelölje

$$y_k = N^{-1/2}x_k = N^{-1/2}\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-i}u_i; \quad (k=1, 2, ..., N).$$

Ekkor y_k normális eloszlású

$$Ey_k = 0; \quad Ey_k^2 = \frac{N}{2N-1}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}\right)$$

paraméterekkel.

Továbbá $k<m$ esetén

$$\operatorname{cov}(y_k, y_m) = \frac{N}{2N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{m-k}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}\right);$$

$$(k, m = 1, 2, ..., N).$$

Így

$$D^2 y_k \to \frac{1-e^{-2t}}{2};$$

$$\operatorname{cov}(y_k, y_m) \to \frac{e^{-s+t}-e^{-s-t}}{2} = B(t, s)$$

$N\to\infty$ esetén, ahol $t=\frac{k}{N}$; $s=\frac{m}{N}$; $(k, m=1, 2, ..., N)$.

Ezért

(2.8)
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \to \int_0^1 \varphi_t^2\, dt,$$

ahol φ_t *Gauss-folyamat* 0 középpel és $B(t, s)$ kovariancia függvénnyel,

(2.9)
$$y_N^2 \xrightarrow{w} \varphi^2,$$

ahol φ normális eloszlású valószínűségi változó, 0, $\frac{1-e^{-2}}{2}$ paraméterekkel.

Adódik, hogy az alternatíva teljesülése esetén (2.7)—(2.9)-et figyelembe véve

(2.10)
$$\ln\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}|A) \to \frac{1}{2}\left(1-\varphi^2-\int_0^1 \varphi_t^2\, dt\right).$$

Tudunk-e többet mondani a (2.10)-ben szereplő φ_t folyamatról és a φ valószínűségi változóról?

Térjünk vissza a (2.1)-ben már korábban is vizsgált kitevőhöz, és legyen $\alpha=1-\frac{\lambda}{N}$, azaz

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{2\lambda}{N}x_i x_{i-1}+\left(\frac{\lambda^2}{N^2}-\frac{2\lambda}{N}\right)x_{i-1}^2\right).$$

Keressük meg az (1.1) folyamat folytonos megfelelőjét. Legyen

$$u_n = w(t_n)-w(t_{n-1}),$$

akkor

$$\sigma_u^2 = \sigma_w^2 \Delta t,$$

ahol

$$\Delta t = t_n - t_{n-1}.$$

Válasszuk most Δt-t $\frac{1}{N}$-nel megegyezőnek, akkor kapjuk

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x} = -\frac{1}{2\sigma_w^2 \Delta t}\sum_{i=1}^{N}(2\lambda\Delta t x_i x_{i-1} + \lambda^2 \Delta t^2 x_{i-1}^2 - 2\lambda\Delta t x_{i-1}^2) =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=1}^{N}(2\lambda x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \lambda^2 \Delta t x_{i-1}^2).$$

Vegyük észre, hogy a fenti kifejezésben szereplő összegek, integrálközelítő összegként tekinthetők. Így $\Delta t \to 0$ esetén

$$\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}) \to \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_w^2}\left(2\lambda\int_0^1 x(t)\,dx(t) + \lambda^2\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)\right). \tag{2.11}$$

Ez viszont épp a

$$dx(t) + \lambda x(t)\,dt = dw(t), \quad x(0) = 0 \tag{2.12}$$

elsőrendű *Gauss—Markov folyamat*

$$\frac{dp_x}{dp_w}(x(t))$$

Radon—Nikodym deriváltja.

Amennyiben $\sigma_w^2 = 1$, és figyelembe vesszük, hogy

$$\int_0^1 x(t)\,dx(t) = \frac{1}{2}(x^2(1) - x^2(0) - 1), \tag{2.13}$$

kapjuk

$$\frac{p_A}{p_H}(\mathbf{x}) \to \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left((x^2(1) - 1) + \lambda\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)\right).$$

Összevetve ezt az $N \to \infty$ esetén kapott (2.10)-zel mondhatjuk — figyelembe véve, hogy az $N \to \infty$ határátmenet azonos a $\Delta t \to 0$ határátmenettel — az abban szereplő *Gauss folyamat* pontosan az (1.1) diszkrét *Gauss—Markov folyamat* folytonos megfelelője, azaz megoldása a (2.12) egyenletnek, továbbá a φ valószínűségi változó pontosan $x(1)$-gyel egyezik meg.

Az utóbbi technikát alkalmazva megoldható a feladat abban az esetben is, mikor eltekintünk az u_n sorozat normalitásától. Elegendő u_n-ektől alkalmas martingál differenciasorozat-tulajdonságokat megkövetelni.

Köszönetet mondok Arató M. (Debrecen) és V. I. Piterbarg (Moszkva) professzoroknak, hogy a problémára figyelmemet ráirányították, és munkám során ötleteikkel, javaslataikkal az eredmény elérését segítették.

IRODALOM

[1] AHTOLA, J. A. and TIAO, G. C., "Parametric inference for a nearly nonstationary first-order autoregressive model", *Biometrica* **71** (1984) 263—272.
[2] ANDERSON, T. W., "On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations", *Annals of Mathematical Statistics* **30** (1959) 676—687.
[3] ARATÓ, M., *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients*, (Springer Verlag, Berlin, 1982).
[4] ARATÓ, M. és BENCZUR, A., „Gauss—Markov-folyamatok maximumlikelihood becslésének egzakt eloszlása", *Idősorok analizise*, szerk. *Tusnády, G. és Ziermann, M.*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1986, 85—117.
[5] CHAN, N. H. and WEI, C. Z., "Asymptotic inference for nearly nonstationary AR(1) processes", *Annals of Statistics* **15** (1987) 1050—1063.
[6] DICKEY, D. A. and FULLER, W. A., "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of the American Statistical Association* **74** (1979) 427—431.
[7] DICKEY, D. A. and FULLER, W. A., "Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root", *Econometrica* **49** (1981) 1057—1072.
[8] EVANS, G. B. A. and SAVIN, N. E., "The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model", *Annals of Statistics* **9** (1981) 1114—1118.
[9] EVANS, G. B. A. and SAVIN, N. E., "Testing for unit roots: 1", *Econometrica* **49** (1981) 753—779.
[10] EVANS, G. B. A. and SAVIN, N. E. "Testing for unit roots: 2", *Econometrica* **52** (1984) 1241—1269.
[11] LAI, T. L. and SIEGMUND, D., "Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter", *Annals of Statistics* **11** (1983) 478—485.
[12] MANN, H. B. and WALD, A., "On the statistical treatment of linear stochastic difference equations", *Econometrica* **11** (1943) 173—220.
[13] PHILLIPS, P. C. B., "Approximations to some finite sample distributions associated with a first-order stochastic difference equation", *Econometrica* **45** (1977) 463—485.
[14] PHILLIPS, P. C. B., "Time series regression with unit roots", *Econometrica* **55** (1987) 277—301.
[15] PRIESTLY, M. B., *Spectral Analysis and Time Series, Vol.* **1**. (Academic Press, London, 1981),
[16] RAO, M. M., "Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process", *Annals of Statistics* **6** (1978) 185—190.
[17] WHITE J. S., "The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case", *Annals of Mathematical Statistics* **29** (1958) 1188—1197.
[18] Арато, М. и Бенцур, А., "Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского-марковского процесса", *Studia Sci. Math. Hungarica* **5** (1970) 445—456.
[19] Липцер, Р. Ш. и Ширяев, А. Н., *Статистика случайных процессов* (Наука, Москва, 1974).

(Beérkezett: 1988. április 6.)

DR. KORMOS JÁNOS
KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.

HYPOTHESIS TESTING FOR NEARLY NONSTATIONARY AR(1) PROCESSES

J. KORMOS

In this paper tests of hypotheses for discrete linear processes of first order are dealt with. Random walk is tested against a nearby nonstationary AR(1) process as the alternative hypothesis. The asymptotic distribution of likelihood ratios is found and the relationship of this distribution to earlier results concerning continuous processes is pointed out.

Alkalmazott Matematikai Lapok 14 (1989) 37—43

A FUZZY σ-ALGEBRÁK GENERÁLTSÁGÁRÓL

BENCZÚR ANDRÁS
Budapest

JÓZSEF SÁNDOR
Budapest

A hagyományos és fuzzy valószínűségi mezők kapcsolatának kérdése általánosan még nyitott, a válasz csak generált fuzzy σ-algebrák esetén ismert. Ezért lényeges kérdés a fuzzy σ-algebrák ezen tulajdonságának megfelelő jellemzése. Az alábbiakban olyan, a generáltságot biztosító (szükséges és elégséges) feltételeket tárgyalunk, amelyek az adott fuzzy σ-algebrának a különböző fuzzy halmazműveletekre vonatkozó „zártságán" alapulnak.

Bevezetés

A fuzzy elmélet valószínűségszámítási irányú továbbfejlesztése az $(X, \mathscr{A}, P)$ klasszikus valószínűségi mezőn értelmezett „fuzzy esemény" fogalommal indult el [11]. Fuzzy eseményen L. A. ZADEH olyan X-en értelmezett

$$A = \{(x, f_A(x)) \colon f_A \colon X \to [0, 1]\}$$

fuzzy halmazt értett, melyre az f_A $\mathscr{A}$-mérhető függvény és az A fuzzy esemény valószínűségét a

$$P(A) = \int_X f_A \, dP$$

formulával (az f_A valószínűségi változó várható értékével) definiálta. Erre a fogalomra építve már olyan eredményeket lehetett elérni [2—5], amelyeket konkrét modellszámításoknál (a termésátlag-ingadozás törvényszerűségeinek vizsgálatakor [5]) is hasznosítani lehetett. Az igazi matematikai alapot a fuzzy valószínűségi mező — és az ehhez elengedhetetlen fuzzy σ-algebra és fuzzy valószínűségi mérték — kidolgozása adta meg [6, 8]. Ennek kapcsán tárgyalták a hagyományos és fuzzy fogalmak viszonyát is, amelyet (elsősorban generált fuzzy σ-algebra esetén) fontos tételek világítanak meg [7, 8, 10]. Nem találkoztunk azonban még azokkal a fuzzy σ-algebrák generáltságát jellemző szükséges és elégséges feltételekkel, melyekkel az alapfogalmak ismertetése után foglalkozunk. Végül utalunk az említett tételekre.

1. Alapfogalmak

A továbbiakban jelöljön X tetszőleges rögzített alaphalmazt, $H(X)$ az X részhalmazainak halmazát, χ_A az $A\subset X$ karakterisztikus függvényét, $FH(X)=\{f: f\colon X\to[0,1]\}$ pedig az X halmaz fuzzy részhalmazait definiáló tartalmazási függvények halmazát. A következő (tartalmazási függvények közötti) relációk fuzzy halmazműveleteket határoznak meg [1]:

$f, g\in FH(X)$ esetén az

$$f\wedge g = \min(f, g) \qquad f\vee g = \max(f, g)$$

$$f\bullet g = f\cdot g \qquad f\oplus g = f+g-f\cdot g$$

$$f\cap g = \max(f+g-1, 0) \qquad f\cup g = \min(f+g, 1)$$

függvények is $FH(X)$-hez tartoznak és (más-más tulajdonságokat megtartva) páronként a halmazelméleti metszet és egyesítés műveletnek a fuzzy-megfelelői.

$\mathcal{F}\subset FH(X)$ esetén hivatkozunk az alábbi tulajdonságokra:
(A továbbiakban $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$)

(i) $\chi_\emptyset, \chi_X\in\mathcal{F}$

(ii) $\exists f\in\mathcal{F}$, melyre $0<f(x)<1$ $\forall x\in X$-re

(iii) $f_c\colon X\to[0,1]$, $f_c(x)\equiv c\in[0,1]$ esetén $f_c\in\mathcal{F}$

(iv) $f\in F$ esetén $\bar{f}=(1-f)\in\mathcal{F}$

(v) $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$ esetén $\bigvee\limits_{n\in N} f_n\in\mathcal{F}$

(vi) $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$ esetén $\bigcup\limits_{n\in N} f_n\in\mathcal{F}$

(vii) $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$ esetén $\bigoplus\limits_{n\in N} f_n\in\mathcal{F}$

(viii) $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$ esetén $\{\bigvee\limits_{n\in N} f_n, \bigcup\limits_{n\in N} f_n, \bigoplus\limits_{n\in N} f_n\}\cap\mathcal{F}\neq\emptyset$.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{A}$ σ-algebra X-en, akkor a karakterisztikus függvények $\mathcal{F}=\{\chi_A : A\in\mathcal{A}\}\subset FH(X)$ rendszerére (ii), (iii) kivételével igazak a fentiek.

1.1. *Definíció.* Az $\mathcal{F}\subset FH(X)$ rendszer fuzzy σ-algebra, ha $\mathcal{F}$-re (iii), (iv), (v) teljesül. Az $(X, \mathcal{F})$ párt fuzzy mérhető térnek nevezzük.

1.2. *Definíció.* Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}\subset FH(X)$ rendszer generált fuzzy σ-algebra, ha $\exists\mathcal{A}$ σ-algebra X-en úgy, hogy $f\in\mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha $f\in FH(X)$ és f $\mathcal{A}$-mérhető függvény. Ekkor $\mathcal{F}$-et $\xi(\mathcal{A})$-val is jelöljük.

A fenti definíciók [6]-ban találhatóak, [6—8]-ban pedig példák is szerepelnek ezekre a fuzzy rendszerekre.

Megjegyzések. Legyen $\mathscr{A}$ σ-algebra, $\mathscr{F}$ fuzzy σ-algebra X-en. Ekkor:

1.1. A generált fuzzy σ-algebrákra (i)—(viii) teljesül, ezért azok fuzzy σ-algebrák is.
1.2. Jelölje $k(\mathscr{F})\subset H(X)$ azt a legszűkebb σ-algebrát, melyre minden $f\in\mathscr{F}$ mérhető. Nyilvánvalóan $k(\mathscr{F})=\sigma(\{f^{-1}([0,a)):f\in\mathscr{F},\ a\in[0,1]\})$.
1.3. $k(\xi(\mathscr{A}))=\mathscr{A}$.
1.4. Az $\mathscr{F}$ fuzzy σ-algebra akkor és csak akkor generált, ha $\mathscr{F}=\xi(k(\mathscr{F}))$.
1.5. $\mathscr{F}\subset\xi(k(\mathscr{F}))$ és ez a legszűkebb $\mathscr{F}$-et tartalmazó generált fuzzy σ-algebra.

(Az 1.1.—1.4. és $\mathscr{F}\subset\xi(k(\mathscr{F}))$ nyilvánvaló, míg $\mathscr{F}\subset\xi(\mathscr{A})$ esetén $\forall f\in\mathscr{F}$ $\mathscr{A}$-mérhető, tehát $k(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}$, következésképpen $\xi(k(\mathscr{F}))\subset\xi(\mathscr{A})$).

Példa. Legyen $|X|\geqq 2$ és $0\leqq a\leqq 0,5$ rögzített. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ekkor az

$$\mathscr{F}=\{f: f\colon X\to[a,1-a]\}\cup\{f_c:\ c\in[0,1]\}$$

rendszer fuzzy σ-algebra. Ez a fuzzy σ-algebra akkor és csak akkor generált, ha $a=0$ (ekkor $\mathscr{F}=FH(X)$), vagy ha $a=0,5$ (ekkor $\mathscr{F}=\{f_c:\ c\in[0,1]\}$).

2. A generált fuzzy σ-algebrák jellemzéséről

Az 1.5. megjegyzés megadta az $\mathscr{F}$ fuzzy σ-algebrát tartalmazó legszűkebb generált fuzzy σ-algebrát. A következő két lemma az $\mathscr{F}$ által tartalmazott legbővebb generált fuzzy σ-algebra meghatározását készíti elő.

2.1. Lemma. Tegyük fel, hogy az $\mathscr{F}\subset FH(X)$ rendszerre (i), (iv) és (viii) teljesül. Ekkor az $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}=\{A\subset X\colon \chi_A\in\mathscr{F}\}$ halmazrendszer σ-algebra az X-en.

Bizonyítás. (i) miatt $\emptyset,\ X\in\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, (iv) miatt $A\in\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ esetén $\bar{A}\in\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, valamint $(A_n)_{n\in N}\subset\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ esetén (viii) alapján az $A=\bigcup_{n\in N}A_n\in\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$, mert $\chi_A=\bigvee_{n\in N}\chi_n=\bigcup_{n\in N}\chi_n=\bigoplus_{n\in N}\chi_n$ (ahol χ_n az A_n karakterisztikus függvénye).

2.2. Lemma. Ha $\emptyset\neq\mathscr{F}\subset FH(X)$ esetén (iv) teljesül, akkor $\forall f,g\in\mathscr{F}$, $(f_n)_{n\in N}\subset\mathscr{F}$-re

(v) esetén $f\vee g,\ f\wedge g,\ \bigwedge_{n\in N}f_n\in\mathscr{F}$;
(vi) esetén $f\cup g, f\cap g,\ \bigcap_{n\in N}f_n\in\mathscr{F}$ és (i) is teljesül;
(vii) esetén $f\oplus g,\ f\bullet g,\ \bullet_{n\in N}f_n\in\mathscr{F}$ és (i) is teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f,g\in\mathscr{F}$, $g_1=f$, $g_n=1-f$ $(n\geqq 2)$. Ekkor $\chi_X=\bigcup_{n\in N}g_n=\bigoplus_{n\in N}g_n$, $(\chi_\emptyset=1-\chi_X)$, így (vi)-ból és (vii)-ből következik (i). Az állítás többi része (v), (vi) és (vii)-nek a $(h_n)_{n\in N}$, $(1-h_n)_{n\in N}$, $(1-f_n)_{n\in N}\subset\mathscr{F}$ $(h_1=f,\ h_2=g$, és $n\geqq 3$-ra (v) esetén $h_n\equiv g$, (vi) és (vii) esetén $h_n\equiv\chi_X)$ sorozatokra való alkalmazásából adódik.

2.1. TÉTEL. Legyen $\mathcal{F}$ fuzzy σ-algebra. Ekkor $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}\subset k(\mathcal{F})$, $\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})\subset\mathcal{F}\subset$ $\subset\xi(k(\mathcal{F}))$ és $\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ az $\mathcal{F}$ legbővebb generált fuzzy rész-σ-algebrája. Az $\mathcal{F}$ akkor és csak akkor generált, ha $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}=k(\mathcal{F})$.

Bizonyítás. A 2.1. lemma alapján $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ σ-algebra. $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}\subset k(\mathcal{F})$ nyilvánvaló. Ha $f\in\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$, azaz f $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$-mérhető, akkor nívóhalmazainak karakterisztikus függvényei $\mathcal{F}$-hez tartoznak, így $f=(\bigvee_{n\in N}(\bigvee_{k=0}^{n}((k/n)\wedge\chi_{\{k/n\leq f<(k+1)/n\}})))\in\mathcal{F}$. Ha $\mathcal{A}$ σ-algebra és $\xi(\mathcal{A})\subset\mathcal{F}$, akkor $\{\chi_A: A\in\mathcal{A}\}\subset\xi(\mathcal{A})\subset\mathcal{F}$, ezért $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, így $\xi(\mathcal{A})\subset\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$. Az állítás utolsó része az eddigiek következménye.

2.3. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\emptyset\neq\mathcal{F}\subset FH(X)$-re (iv) és (vi) teljesül. Ekkor teljesül (v) is.

Bizonyítás. Ha $f,g\in\mathcal{F}$, akkor $f\setminus g=\max(f-g,0)=f\cap\bar{g}\in\mathcal{F}$ és $f\vee g=$ $=g\cup(f\setminus g)\in\mathcal{F}$, ezért $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$, $f_0=\chi_\emptyset$ esetén $\bigvee_{n\in N}f_n=\bigcup_{k\in N}((\bigvee_{n=0}^{k}f_n)\setminus(\bigvee_{n=0}^{k-1}f_n))\in\mathcal{F}$.

2.4. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\emptyset\neq\mathcal{F}\subset FH(X)$-re (iv) és (vi) teljesül. Ekkor $\mathcal{F}\subset\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$.

Bizonyítás. $\forall f\in\mathcal{F}$-re $\chi_{\{f\leq 0\}}=\bigcap_{n\in N}g_n\in\mathcal{F}$, $\chi_{\{f\leq 1/2\}}=\bigcap_{n\in N}h_n\in\mathcal{F}$ (ahol $g_n\equiv 1-f$, $h_n\equiv(1-f)\cup(1-f)$ $\forall n\in N$-re) és $\chi_{\{f\leq 1\}}=\chi_X\in\mathcal{F}$, így $\{f\leq 0\}$, $\{f\leq 1/2\}$, $\{f\leq 1\}\in$ $\in\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Tegyük fel, hogy $\forall f\in\mathcal{F}$; $m=1,\dots,n$; $k=1,\dots,2^n$ esetén már $\{f\leq k/2^n\}\in$ $\in\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Legyen $m=n+1$. Ekkor $k=1,\dots,2^n$-re $\{f\leq k/2^{n+1}\}=\{2f\leq k/2^n\}=\{f\cup f\leq$ $\leq k/2^n\}\in\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, $k=2^n+1,\dots,2^{n+1}$-re $\{f\leq k/2^{n+1}\}=\{2f-1\leq k/2^n-1\}=\{f\cap f\leq$ $\leq(k-2^n)/2^n\}\in\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. $\forall c\in[0,1]$-hez választható $c_n\searrow c$, c_n $k/2^n$ alakú sorozat, ezért $\{f\leq c\}=\bigcap_{n\in N}\{f\leq c_n\}$. A 2.1. lemma miatt $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ σ-algebra, tehát $\{f\leq c\}\in\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, azaz $\forall f\in\mathcal{F}$ $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$-mérhető, így $\mathcal{F}\subset\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$.

2.2. TÉTEL. Az $\mathcal{F}\subset FH(X)$ rendszer akkor és csak akkor generált fuzzy σ-algebra, ha (iii), (iv), (vi) teljesül.

Bizonyítás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Megfordítva: (iii) biztosítja, hogy a konstansfüggvények $\mathcal{F}$-beliek; a 2.3. lemma miatt teljesül (v) is, tehát $\mathcal{F}$ fuzzy σ-algebra. Ekkor a 2.4. lemma alapján $\mathcal{F}\subset\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$, így a 2.1. tétel szerint $\mathcal{F}=$ $=\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$, azaz $\mathcal{F}$ generált.

Ez a tétel azt jelenti, hogy ha a fuzzy σ-algebra definíciójában a zártságot az $\cup$ műveletre követeltük volna meg, akkor a generált fuzzy σ-algebra fogalmát kaptuk volna. A következő lemma a (iii) feltétel helyettesítését készíti elő. Ehhez használni fogjuk az alábbi tulajdonságot is:

(vii)* $\qquad\{f_1,\dots,f_n\}\subset\mathcal{F}$ esetén $\bigoplus_{k=1}^{n}f_k\in\mathcal{F}$.

2.5. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\emptyset\neq\mathcal{F}\subset FH(X)$-re (iv), (vi) és (vii)* is teljesül. Ekkor $\forall f\in\mathcal{F}$ és $c\in[0,1]$ esetén $c_f=c\cdot\chi_{\{0<f<1\}}\in\mathcal{F}$.

Bizonyítás. Legyen $f\in\mathcal{F}$, $F=\{x: 0<f(x)<1,\ x\in X\}$, $f_{n,k}=\min(1, n\cdot f^k)$. Ekkor $f_{n,k}=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}\left(\overset{k}{\underset{j=1}{\bullet}} f\right)$ alakba is írható, ezért $\forall k,\ n\in N$-re $f_{n,k}\in\mathcal{F}$, továbbá $\forall x\in F$ esetén

$$f_{n,k}(x)\to 1,\quad \text{ha}\quad n\to\infty\quad \text{és}\quad k\quad \text{rögzített},$$

$$f_{n,k}(x)\to 0,\quad \text{ha}\quad k\to\infty\quad \text{és}\quad n\quad \text{rögzített}.$$

Ebből adódóan tetszőleges $c\in[0, 1]$ és $\delta>0$ esetén $\forall x\in F$ valamely $F(n, k, \delta)=$ $=\{x: x\in F, c-\delta<f_{n,k}(x)<c+\delta\}$ nívóhalmazhoz tartozik, ezért $\bigcup_{n\in N}\bigcup_{k\in N} F(n, k, \delta)=$ $=F$. A 2.4. lemma szerint $\mathcal{F}\subset\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$, tehát az f nívóhalmazai $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$-hez tartoznak, így $g_{n,k}=f_{n,k}\cdot\chi_{F(n,k,\delta)}\in\mathcal{F}$ $(\forall n, k\in N)$. Mivel $c(f, \delta)=\bigvee_{n\in N}\left(\bigvee_{k\in N} g_{n,k}\right)\in\mathcal{F}$ (a 2.3. lemma szerint) és $c-\delta<c(f, \delta)(x)<c+\delta\ \forall x\in F$ ($c(f, \delta)$ konstrukciója miatt), ezért $c_f=\bigvee_{n\in N}\left(\bigwedge_{k\geq n} c(f, 1/k)\right)\in\mathcal{F}$.

2.3. TÉTEL. Az $\mathcal{F}\subset FH(X)$ rendszer akkor és csak akkor generált fuzzy σ-algebra, ha $\mathcal{F}$-re (ii), (iv), (vi) és (viii)* teljesül.

Bizonyítás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Megfordítva, (ii) miatt $\mathcal{F}\neq\emptyset$, a 2.3. lemma miatt igaz (v) is; a 2.5. lemma és a feltételek miatt teljesül (iii) is, tehát $\mathcal{F}$ fuzzy σ-algebra. A generáltság a 2.2. Tétel következménye.

2.1. *Megjegyzés.* A 2.3. tételben (ii) helyett elegendő a

$$\text{(ii)*}\qquad \exists (f_n)_{n\in N}\subset F,\quad \text{melyre}\quad X=\bigcup_{n\in N}\{x\in X\colon 0<f_n(x)<1\}$$

feltételezése. A (vii) tulajdonság teljesüléséből pedig nyilvánvalóan adódik (vii)*.

3. Fuzzy valószínűségi mezők

Ebben a szakaszban [7, 8]-ban megtalálható eredményeket ismertetünk. Ennek kapcsán $\mathcal{F}\subset FH(X)$, $m\colon\mathcal{F}\to[0, \infty]$ esetén szükségünk lesz még az alábbi tulajdonságokra:

(ix) $m(\chi_\emptyset)=0$

(x) $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$, $f_n\nearrow f$ esetén $m(f_n)\nearrow m(f)$

(xi) $f, g\in\mathcal{F}$ esetén $m(f\vee g)+m(f\wedge g)=m(f)+m(g)$

(xii) $f, g\in\mathcal{F}$ esetén $m(f\cup g)+m(f\cap g)=m(f)+m(g)$.

3.1. *Definíció.* Legyen $(X, \mathcal{F})$ fuzzy mérhető tér. Azt mondjuk, hogy az $m\colon\mathcal{F}\to$ $\to[0, \infty)$ fuzzy mérték $(X, \mathcal{F})$-en, ha m-re (ix), (x), (xi) teljesül. m véges fuzzy mérték, ha $m(\chi_X)<\infty$. m fuzzy valószínűségi mérték, ha $m(\chi_X)=1$ és ekkor $(X, \mathcal{F}, m)$-et fuzzy valószínűségi mezőnek hívjuk.

3.1. TÉTEL. Legyen $(X, \mathcal{F}, m)$ fuzzy valószínűségi mező, ahol $\mathcal{F}=\xi(\mathcal{A})$ generált fuzzy σ-algebra X-en. Akkor és csak akkor létezik P valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren úgy, hogy $\forall f\in\xi(\mathcal{A})$-ra $m(f)=\int_X f\,dP$, ha m lineáris, azaz $a, b\in R$, $f, g\in\mathcal{F}$ és $(a\cdot f+b\cdot g)\in\mathcal{F}$ esetén $m(a\cdot f+b\cdot g)=a\cdot m(f)+b\cdot m(g)$.

3.1. *Megjegyzés.* A tétel általánosabban igaz, m-re nézve a linearitás, az additivitás és a homogenitás ekvivalens tulajdonságok. Ezek bizonyítása [8]-ban található.

3.2. TÉTEL. Legyen $\emptyset\neq\mathcal{F}\subset FH(X)$, valamint $m\colon\mathcal{F}\to[0, \infty]$. Akkor és csak akkor $\exists(X, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, úgy, hogy $\mathcal{F}=\xi(\mathcal{A})$ és $\forall f\in\mathcal{F}$-re $m(f)=$ $=\int_X f\,dP$, ha $m(x_X)=1$ és (iii), (iv), (vi) mellett (ix), (x), (xii) is teljesül.

Bizonyítás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Megfordítva a 2.3. tétel alapján ekkor $\mathcal{F}(=\xi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}))$ generált fuzzy σ-algebra. $f, g, (f+g)\in\mathcal{F}$ esetén $f\cup g=f+g$, $f\cap g=x_\emptyset$, ezért (xii) m additivitását jelenti, így a tétel a 3.1. megjegyzés és a 3.1. tétel következménye.

Tehát ha az 1.1. és 3.1. definíciókban az $(\vee, \wedge)$ műveletpárost a $(\cup, \cap)$ párral helyettesítjük, akkor szükségképpen generált fuzzy σ-algebra és integrálként felírható fuzzy valószínűségi mérték adódik és a bevezetőben említett *Zadeh-féle fuzzy esemény-* és valószínűségfogalmat kapjuk meg. A (véges) hagyományos és fuzzy mértékek kapcsolata (lásd: [7]) az alábbiakban foglalható össze:

3.3. TÉTEL. Legyen $\mathcal{F}=\xi(\mathcal{A})$ generált fuzzy σ-algebra X-en, $m\colon\mathcal{F}\to[0, \infty)$ és $\mathcal{A}=\{B\colon B\subset[0, 1),\ B \text{ Borel halmaz}\}$. m akkor és csak akkor véges fuzzy mérték $(X, \xi(\mathcal{A}))$-n, ha $\exists!\, M$ véges mérték $(X\times[0, 1))$-en úgy, hogy $\forall f\in\xi(\mathcal{A})$ esetén $m(f)=$ $=M(\{(x, y)\colon x\in X, 0\leq y<f(x)\})$, valamint

— $m(1)=1$ pontosan akkor, ha $M(X\times[0, 1))=1$;
— $\forall f_c\equiv c\in[0, 1]$-re $m(f_c)=c$ pontosan akkor, ha $M(X\times B)=\lambda(B)$ (ahol λ a *Lebesgue-mérték*);
— $\forall (f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{F}$, $f_n\searrow f$ esetén $m(f_n)\searrow m(f)$ pontosan akkor, ha $\forall f\in\xi(\mathcal{A})$-re $M(\{(x, f(x))\colon x\in X\})=0$;
— $\forall f\in\mathcal{F}$-re $m(1-f)=m(1)-m(f)$ pontosan akkor, ha $\forall f\in\xi(\mathcal{A})$ esetén $M(\{(x, f(x))\colon x\in X\})=0$, továbbá $A^*=\{(x, y)\colon (x; 1-y)\in A\subset X\times[0, 1)\}$ esetén $M(A)=M(A^*)$.

IRODALOM

[1] DUBOIS, D.—PRADE, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications* (Academic Press, New York, 1980).

[2] JÓZSEF, S., „Fuzzy esemény, valószínűség, fuzzy állapotok közti átmenetek," Előadás a XVI. Operációkutatási Konferencián, Balatonföldvár, 1986.

[3] JÓZSEF, S., „Über die Übergänge zwischen Fuzzy-Mengen," Előadás, XI. International Conference on Mathematical Optimization, Eisenach, DDR, 1986. 11. 10—14.

[4] JÓZSEF, S., „A bizonytalan (fuzzy) halmazok alapjaitól a fuzzy állapotok közötti átmenetvalószínűségekig," AKI tanulmány Budapest, 1987.

[5] JÓZSEF, S.—KOVÁCS, M.—M. DOBOS, K.—ZSIGMOND, I. „Termésátlagingadozás törvényszerűségeinek matematikai elemzése," *SZIGMA* 19 (1986) 307—323.

[6] KLEMENT, E. P., „Fuzzy-σ-algebras and fuzzy-measurable functions," *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 83—93.

[7] KLEMENT, E. P.—SCHWYHLA, W., „Correspondence between fuzzy measures and classical measures," *Fuzzy Sets and Systems* **7** (1982) 57—70.
[8] KLEMENT, E. P.—SCHWYHLA, W.—LÖWEN, R., „Fuzzy probability measures," *Fuzzy Sets and Systems* **5** (1981) 21—30.
[9] NAGY, CS., „Bevezetés a fuzzy halmazok elméletébe," *SZIGMA* XIV (1981) 53—70.
[10] SMETS, PH., "Probability of a fuzzy event: an axiomatic approach," *Fuzzy Sets and Systems* **7** (1982) 152—164.
[11] ZADEH, L. A., "Probability measures of fuzzy events," *J. Math. Anal. Appl.* **23** (1968) 421—427.

(Beérkezett: 1987. július 20.)

BENCZÚR ANDRÁS
ELTE SZAMÍTÓKÖZPONT
BUDAPEST XI.
BOGDÁNFY U. 10/A

JÓZSEF SÁNDOR
AGRÁRGAZDASÁGI KUT. INT.
BUDAPEST IX.
ZSIL U. 3—5.

FUZZY σ-ALGEBRAS TO BE GENERATED

A. BENCZÚR and S. JÓZSEF

The connection of the classical and fuzzy probability fields is known only in the case of the generated fuzzy σ-algebras. So it is important to characterize this property of the fuzzy σ-algebras. We give necessary and sufficient conditions for the fuzzy σ-algebras to be generated. These conditions are based on the closeness of fuzzy σ-algebras according to different fuzzy set operations.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 45—55

A KUMULÁNS MÓDSZER ÉS HASZNÁLATA VILLAMOSENERGIA-RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGI SZÁMÍTÁSAIBAN

HOFFER JÁNOS ÉS DÖRFNER PÉTER

Budapest

A dolgozat villamosenergia-rendszerek megbízhatósági jellegű számításaival foglalkozik. Bemutatunk egy modellt, mely alkalmas a hazai villamosenergia-rendszer szimulálásával a fogyasztói kiesés és a várható nemszolgáltatott energia kiszámítására, továbbá leírjuk az irodalomból átvett úgynevezett kumuláns módszert ([2], [3], [4], [5]).

Dolgozatunk jellegét tekintve esettanulmány, ezen túlmenően azonban népszerűsíteni szeretnénk a felhasznált kumuláns módszert is egyszerű használata, gyorsasága, és pontossága miatt.

1. Bevezetés

A villamosenergia-rendszerek alapvető feladata minden időpillanatban a villamosenergia-igények biztonságos kielégítése. Természetesen egyetlen villamosenergia-rendszerben sem érhető el az ellátás teljes biztonsága, tehát még a legjobban üzemelő villamosenergia-rendszerekben is számítani kell egyes időszakokban fogyasztói kiesésre, hiszen a villamosenergia-szolgáltató rendszer elemeinek megbízhatósága 100%-nál kisebb, és a villamos energia nem tárolható tetszőleges méretekben. A villamosenergia-rendszereket úgy kell üzemeltetni, a beruházásokat úgy kell ütemezni, hogy hosszabb távon a beruházási költség, az üzemeltetési költség és a nemszolgáltatott energia miatt fellépő kár összege minimális legyen.

A villamosenergia-szolgáltató rendszer egyes elemeinek létesítési ideje meghaladja a 10 évet, és rendkívül magasak a beruházási költségek. A villamosenergia-igények előrejelzése ilyen hosszú távra sok bizonytalansági elemet tartalmaz. A villamosenergia-rendszer üzemeltetési költsége jelentősen eltérhet különböző bővítési változatok esetén. A villamosenergia-igény és a villamosenergia-szolgáltatás hosszú távú egyensúlyának biztosításához szükséges legkisebb költségű beruházási változat meghatározása rendkívül sok számítást igényel.

Ezen hosszadalmas számítás eredményeként lehet azt is meghatározni, hogy egy adott villamosenergia-rendszerben, adott időszakban a jelentkező maximális teljesítményigény felett mekkora tartalék-teljesítményre van szükség a villamosenergia-igények gazdaságos kielégíthetőségéhez megfelelő üzembiztonság mellett. Ilyen számításokat természetesen csak a jövőre vonatkozólag lehetséges elvégezni, hiszen új villamosenergia-termelő kapacitás minimális létesítési ideje több mint két év. Az üzem-

[1] Készült: részben az MTA Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA) támogatásával (szerződés száma: 1049).

biztonsági szint új kapacitások létesítésével történő növelése, az operatív jellegű egy-két éves távlatnál rövidebb időszakra végrehajtott tervezésnél, nem lehetséges.

Rövidebb időszakokra a maximális teljesítmény és az igénybevehető teljesítőképesség ismeretében lehet meghatározni az elérhető üzembiztonsági szintet. Szükség és lehetőség esetén csak a karbantartások átütemezésével növelhetjük az üzembiztonságot.

A 80-as évek elején a számítástechnika robbanásszerű fejlődésének következtében a kumuláns módszer használata népszerűvé vált a villamosenergia-ipar megbízhatósági számításaiban, különösen a termeléskiosztás, a fogyasztói kiesés valószínűségének és a nemszolgáltatott energia várható értékének kiszámításában, melyek igen fontos feladatok mind a tervezés, mind a rendszer működtetése szempontjából.

A második fejezetben a magyar villamosenergia-rendszer specialitásait is figyelembe vevő modellt ismertetjük.

A harmadik fejezetben bemutatjuk a kumuláns módszert, mely alkalmas a második fejezetben kitűzött feladatok közelítő megoldására.

A negyedik fejezetben számítástechnikai tapasztalatainkról számolunk be.

2. A modell ismertetése

A magyar villamosenergia-rendszerben a villamosenergia-igények kielégítésében több különböző jellegű forrásra támaszkodhatunk: a szabályozható, kondenzációs blokkokra, az időnként csak részben szabályozható gyűjtősínes erőművekben levő kondenzációs turbinákra (kazánszűk helyzetben nem terhelhetőek ki maximálisan), a minimális mértékben szabályozható ellennyomású turbinákra (a hőigények függvényében terhelhetőek) és vízturbinákra, továbbá az államközi megállapodás szerint fix menetrend szerint vételezett, import villamos energiára.

Mindegyik berendezés, illetve berendezéscsoport üzembiztonsága statisztikai adatokból meghatározható, illetve bizonyos feltételezésekkel leírható. Egy adott időpontban az igénybevehető (nem karbantartáson levő) kapacitások és üzembiztonságuk ismeretében meg akarjuk határozni a teljesítménykiesés valószínűségét és a nemszolgáltatott villamos energia várható értékét a teljesítményigény tetszőleges (determinisztikus) értékéhez, illetve a teljesítményigény eloszlásának ismeretében.

A kényszerkiesések okozta véletlen bizonytalanság miatt az igénybevehető (nem nagyjavításon levő) erőművi összkapacitásnak nagyobbnak kell lennie, mint az előforduló legnagyobb igény. Az igénybevehető összes kapacitás és a villamosenergia-igény különbségét kapacitástartaléknak nevezzük. Az a kérdés merül fel, hogy mekkora kapacitástartalék nyújt kellő biztonságot az energiaigények kielégítésére. A szükséges (vagy előírt) megbízhatósági szint elérése befolyásolhatja a meglevő egységek nagyjavításainak ütemezését, esetleg kényszerintézkedéseket tehet szükségessé.

Modellünkben a fogyasztói igényt vagy biztosnak (determinisztikusnak), vagy véletlen mennyiségnek (valószínűségi változónak) tekintjük.

Az első eset gyors döntésekhez nyújt támogatást azáltal, hogy több erősen valószínűsíthető csúcsigény megadásával, illetve a rendelkezésre állások és a kényszerkiesések valószínűségeinek változtatásával a számítások megismételhetők, és így különböző szituációk szimulálhatók.

A második esetben a (csúcs)igény eloszlását egy eloszlásfüggvény írja le. Modellünkben normális eloszlást használtunk, de a fogyasztói terhelés természetét jól követő más olyan eloszlások is használhatók, melyek momentumai léteznek és kiszámíthatók. Ez az eset is alkalmas megbízhatósági szint kiszámítására, sőt ebben az esetben figyelembe tudjuk venni a teljesítményigény becslésének bizonytalanságát.

Az első esetben tehát csupán az energiatermelő egységek rendelkezésre állását tekintjük véletlennek. Azt akarjuk meghatározni, hogy mekkora a megbízhatóság szintje adott (determinisztikus) teljesítményigény esetén, az erőművek, az import és az egyéb források üzemelése esetén. A második esetben a teljesítményigényt egy eloszlással adjuk meg.

Az erőművi egységek kényszerkiesését kétértékű valószínűségi változóval írjuk le. Mivel a jelen vizsgálatban a villamosenergia-termelő rendszernek csak egy időpontra vonatkozó állapotát akarjuk vizsgálni, ezért a szabályozható blokkokat elegendő a blokk maximális teljesítményével és a megbízhatóság szintjével jellemezni.

Legyen Y_i az i-edik egység kényszerkiesését mérő valószínűségi változó és c_i az i-edik egység maximális teljesítményszintje. Ekkor Y_i lehetséges értékei: 0, c_i, és

$$P(Y_i = 0) = p_i$$

(a rendelkezésre állás valószínűsége),

$$P(Y_i = c_i) = q_i = 1-p_i$$

(a kiesés valószínűsége). Az import rendelkezésre állását háromértékű változóval (C) modellezzük, és itt a rendelkezésre állási valószínűségeket adjuk meg:

$$P(C = b_1) = p^1,$$

$$P(C = b_2) = p^2,$$

$$P(C = b_3) = 1-p^1-p^2.$$

ahol $b_1 > b_2 > b_3$. Ebből a kényszerkiesési valószínűségek könnyen megadhatók.

$$P(B = b_1-b_3) = 1-p^1-p^2,$$

$$P(B = b_1-b_2) = p^2,$$

$$P(B = 0) = p^1.$$

Az importhoz hasonlóan egyetlen három lehetséges értékű valószínűségi változóval írjuk le az „egyéb” villamosenergia-forrásokat (vízerőművek és a hőszolgáltatással kapcsolt villamosenergia-termelés aggregált változója), bár sem modellezési, sem számítástechnikai akadálya nincs a több változóval történő modellezésnek.

Az „egyéb” energiaforrás kényszerkieséseit mérő valószínűségi változót E-vel jelöljük, kapacitásszintjeit: e_1, e_2, e_3-mal ($e_1 > e_2 > e_3$). Legyen a rendelkezésre álló kondenzációs erőművi blokkok, illetve turbinák száma b és a megadott igény L.

Felmerül a kérdés, hogy a nem szabályozható források esetén miért van szükség három állapotú reprezentációra. Miért nem felel meg a blokkoknál megszokott kétállapotú reprezentáció?

A nem szabályozható források üzemelési körülményeinek leírására, első lépésként, meg kell adnunk a maximális igénybevehető teljesítményszintet és a minimálisan kihasználandó teljesítmény szintjét (speciális esetben ez lehet 0 is). Ez utóbbi a szabályozható blokkoknál nem szerepelt. A maximális teljesítménynek természetesen itt is van egy megbízhatósági szintje, de ez most nem azt jelenti, hogy a teljes forrás kiesik, hanem azt, hogy csökken az igénybevehető maximum. A maximális szint üzemzavar esetén csökkent értékét is megadjuk, annak megbízhatóságával együtt.

A jelen modellben a minimum megadott értékét 100 százalékos biztonságúnak tekintjük, tehát nem számítunk a forrás teljes kiesésére. Természetesen a konkrét vizsgálatoknál ezek az értékek változtathatóak, és szélső esetben megfelelnek a blokkos reprezentációnak.

A biztonsági szint kiszámítása a valószínűségszámítás nyelvén a következőt jelenti. Kiszámítandó, hogy mi a valószínűsége annak az eseménynek, hogy a kényszerkiesések meghaladják a kapacitástartalékot. Más szavakkal: a fogyasztói hiány fellépésének valószínűségét kell meghatározni.

A feladat formulákkal megfogalmazva a

$$\mathrm{LOLP} = P\Big(\sum_{i=1}^{b} Y_i + B + E > \sum_{i=1}^{b} c_i + b_1 + e_1 - L\Big)$$

(LOLP=L*oss* O*f* L*oad* P*robability*) valószínűség kiszámolását jelenti. Ha a terhelés is véletlen mennyiség, azaz L is valószínűségi változó, akkor a LOLP értékét a fentihez hasonlóan a

$$\mathrm{LOLP} = P\Big(\sum_{i=1}^{b} Y_i + B + E + L > \sum_{i=1}^{b} c_i + b_1 + e_1\Big)$$

valószínűség adja meg.

A cikk további részeiben nem különböztetjük meg e két esetet, mindig az utóbbi formulát fogjuk használni, függetlenül attól, hogy a fogyasztói igény véletlen mennyiség-e vagy egy determinisztikus érték.

Az eddigiekben csupán a fogyasztói hiány valószínűségének megfogalmazását ismertettük, de ezzel még semmiféle felvilágosítást nem adtunk a hiány várható nagyságáról. Minthogy az erőművi blokkok kényszerkiesései (és esetlegesen a fogyasztói igény is) véletlen mennyiségek, így azt a kérdést tehetjük föl, hogy mekkora a kielégítetlen fogyasztói igény várható értéke, vagyis a nemszolgáltatott energia nagysága.

Jelölje most Y a rendszerszintű kiesés és a fogyasztói igény összegét mérő valószínűségi változót:

$$Y = \sum_{i=1}^{b} Y_i + B + E + L.$$

Fogyasztói hiány akkor jelentkezik, ha az igény és a kiesések együttesen meghaladják a rendelkezésre álló teljesítményt. Vagyis a nemszolgáltatott energiát (1 órára vonatkoztatva) az:

$$\mathrm{ENS} = M\Big(\Big(Y - \Big(\sum_{i=1}^{b} c_i + b_1 + e_1\Big)\Big)^+\Big)$$

(ENS=E*nergy* N*ot* S*erved*) várható érték adja. A kitevőben szereplő $^+$ jel a mennyiség pozitív részét jelöli.

Az energiatermelő egységek termeléskiosztására szolgáló modellben — melyet 1980-ban publikált RAU, TOY és SCHENK [2] — az igény eloszlását a fogyasztói tartamfüggvény (tartamdiagram) írja le. Az erőművi egységek rendelkezésre állását reprezentáló valószínűségi változókat egy értékelési sorrend (pl. az átlagos növekmény költség szerinti növekvő sorrend) alapján egyesével, egymás után vagy csoportosan adjuk hozzá az igény változóhoz. Az összegeloszlás sűrűségfüggvényét a *Hermite polinomok* szerinti sorfejtéssel állítjuk elő. Ily módon minden egyes lépésben megkapjuk a látszólagos igény (a fogyasztói igény és a figyelembe vett energiatermelő egységek kényszerkieséseinek összege) eloszlásfüggvényét, azaz az ekvivalens tartamfüggvényt (ELDC = *Equivalent Load Duration Curve, Equivalent Load Distribution Curve*), a kielégítetlen igény fellépésének valószínűségét (LOLP) és a várható nemszolgáltatott energia mennyiségét (ENS) a tekintett energiatermelő egységek véletlenszerű rendelkezésre állását és kényszerkiesését figyelembe véve.

Az i-edik energiatermelő egység várható termelését az alábbi módon számítjuk ki. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az import és az egyéb energiaforrásokat reprezentáló B és E változók az értékelési sorrend elején állnak, és az energiatermelő egységek sorrendezése éppen a növekvő költség szerinti sorrend. Ekkor az i-edik egység várható termelése (EEG = *Expected Energy Generation*):

$$\mathrm{EEG}_i = \mathrm{ENS}_{i-1} - \mathrm{ENS}_i,$$

$$\mathrm{EEG}_i = M\Big(\Big(\sum_{j=1}^{i-1} Y_j + B + E + L - \sum_{j=1}^{i-1} c_j - b_1 - e_1\Big)^+\Big) - M\Big(\Big(\sum_{j=1}^{i} Y_j + B + E + L - \sum_{j=1}^{i} c_j - b_1 - e_1\Big)^+\Big).$$

3. A kumuláns módszer

Mint azt az előző fejezetben bemutattuk több diszkrét (két vagy három lehetséges értékkel bíró) és egy folytonos valószínűségi változó összegének (konvolúciójának) eloszlására vagyunk kíváncsiak. Ehhez a kumuláns módszert ([2], [3], [5]) hívjuk segítségül.

A kumuláns módszer lényege az, hogy tetszőleges valószínűségi változó standardizáltjának sűrűségfüggvénye közelíthető a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének deriváltjaiból álló sorfejtéssel. A sorfejtésben szereplő együtthatók a szóban forgó valószínűségi változó momentumaiból és centrális momentumaiból képzett ún. kumulánsok ([1]) segítségével megadhatók.

Nekünk tehát az egységek kényszerkiesését mérő valószínűségi változók összegének kumulánsait kell előállítanunk, Ezek — mivel az egyes erőművi egységek kieséseit függetleneknek tekinthetjük egymástól és a terheléstől — az összeget alkotó egyes változók kumulánsainak összegzésével kaphatók meg.

Ha az összeg sűrűségfüggvényét a *Hermite-polinomok* segítségével, sorfejtéssel előállítjuk, akkor a keresett valószínűség és várható értékek integrálással kiszámíthatók. Mindkét esetben az integrálás tagonként végezhető, és az első tagot kivéve csupán behelyettesítést igényel.

A *Hermite polinomokkal* történő sorfejtés formulákkal a következőképpen fest. Legyen Y egy tetszőleges valószínűségi változó, m_i az i-edik momentuma, M_i az i-

edik centrális momentuma, k_i az i-edik kumulánsa, σ a szórása, azaz

$$m_i = M(Y^i),$$

$$M_i = M((Y-m_1)^i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} m_{i-j}(-m_1)^j$$

$$\sigma^2 = M_2.$$

A számításokhoz szükséges kumulánsokat az alábbi kifejezések adják:

$$\begin{aligned}
k_1 &= m_1\\
k_2 &= M_2,\\
k_3 &= M_3,\\
k_4 &= M_4-3M_2^2,\\
k_5 &= M_5-10M_3M_2,\\
k_6 &= M_6-15M_4M_2-10M_3^2+30M_2^3,\\
k_7 &= M_7-21M_5M_2-35M_4M_3+210M_3M_2^2,\\
k_8 &= M_8-28M_6M_2-56M_5M_3-35M_4^2+420M_4M_2^2+\\
&\quad +560M_3^2M_2-630M_2^4.
\end{aligned}$$

A sorfejtésben szereplő G_i együtthatók:

$$G_i = k_{i+2}/\sigma^{i+2}.$$

Jelöljük a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét $N(z)$-vel; annak k-adik deriváltját $N^{(k)}(z)$-vel. Sorfejtésből mely — az $(Y-m_1)/\sigma$ változó sűrűségfüggvényét $(f(z))$ állítja elő — kétfélét is használnak. A *Gram—Charlier sorfejtést* (az első nyolc momentum felhasználásával):

$$\begin{aligned}
f(z) = {} & N(z)-G_1N^{(3)}(z)/3!+G_2N^{(4)}(z)/4!-G_3N^{(5)}(z)/5!+\\
& +(G_4+10G_1^2)N^{(6)}(z)/6!+(G_5+35G_1G_2)N^{(7)}(z)/7!+\\
& +(G_6+56G_1G_3+35G_2^2)N^{(8)}(z)/8!,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

és az *Edgeworth-féle sorfejtést* (az első hat momentum felhasználásával):

$$\begin{aligned}
f(z) = {} & N(z)-G_1N^{(3)}(z)/3!+G_2N^{(4)}(z)/4!-G_3N^{(5)}(z)/5!+\\
& +(G_4+10G_1^2)N^{(6)}(z)/6!-35G_1G_2N^{(7)}(z)/7!+\\
& +(56G_1G_3+35G_2^2)N^{(8)}(z)/8!-\\
& -280G_1^3N^{(9)}(z)/9!+\\
& +2100G_1^2G_2N^{(10)}(z)/10!+\\
& +15400G_1^4N^{(12)}(z)/12!.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ha Y most az alábbi összeg

$$Y = \sum_{j=1}^{i} Y_j + B + E + L,$$

akkor

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{i} M(Y_j) + M(B) + M(E) + M(L),$$

$$D^2(Y) = \sum_{j=1}^{i} D^2(Y_j) + D^2(B) + D^2(E) + D^2(L).$$

Legyen

$$r = \sum_{j=1}^{i} c_j + b_1 + e_1,$$

és $f(z)$ most is az Y valószínűségi változó standardizáltjának sűrűségfüggvénye. Ekkor:

$$\mathrm{LOLP}_i = P(Y > r) = P\big((Y - M(Y))/D(Y) > (r - M(Y))/D(Y)\big) =$$

$$= \int_{\frac{r-M(Y)}{D(Y)}}^{+\infty} f(z)\,dz.$$

Bevezetve a

$$z_0 = \big(r - M(Y)\big)/D(Y)$$

jelölést és felhasználva az improprius integrálokra érvényes primitív függvény szabályt az *Edgeworth sorfejtés* esetében a következőt kapjuk:

$$\mathrm{LOLP}_i = P(Y > r) = \int_{z_0}^{+\infty} f(z)\,dz =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{z_0}^{+\infty} N(z)\,dz + G_1 N^{(2)}(z_0)/3! - G_2 N^{(3)}(z_0)/4! + \\ &+ G_3 N^{(4)}(z_0)/5! - \\ &-(G_4 + 10G_1^2) N^{(5)}(z_0)/6! + \\ &+ 35 G_1 G_2 N^{(6)}(z_0)/7! - \\ &-(56 G_1 G_3 + 35 G_2^2) N^{(7)}(z_0)/8! + \\ &+ 280 G_1^3 N^{(8)}(z_0)/9! - \\ &- 2100 G_1^2 G_2 N^{(9)}(z_0)/10! - \\ &- 15400 G_1^4 N^{(11)}(z_0)/12!. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének deriváltjait előállító rekurziós formula teljes indukcióval bizonyítható:

$$N(z) = N^{(0)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

(3.4)
$$N^{(1)}(z) = -zN^{(0)}(z),$$

$$N^{(k)}(z) = -(k-1)N^{(k-2)}(z) - zN^{(k-1)}(z) \quad (k \geqq 2).$$

A (3.3) integrál első tagjának kiszámolásához az alábbi numerikus közelítést használjuk:

$$t = 1/(1+0.2316419|z_0|),$$

$$Q(z_0) = N(z_0)[0{,}319\,381\,53\, t - 0{,}356\,563\,782\, t^2 +$$

$$+ 1{,}781\,477\,937\, t^3 - 1{,}821\,255\,978\, t^4 + 1{,}330\,274\,429\, t^5]$$

(3.5)
$$\int_{z_0}^{+\infty} N(z)\,dz = \begin{cases} Q(z_0), & \text{ha} \quad z_0 \geqq 0 \\ 1-Q(z_0), & \text{ha} \quad z_0 < 0. \end{cases}$$

Röviden összefoglaljuk az eljárás főbb lépéseit:

1. Meghatározzuk a rendelkezésre álló (figyelembe veendő) összkapacitást, azaz az r értéket.
2. Meghatározzuk az egyes egységek, az import, az egyéb forrás, valamint a fogyasztói terhelés momentumait, centrális momentumait, kumulánsait.
3. A kumulánsokat, a várható értékeket, a szórásnégyzeteket összeadjuk, ily módon megkapjuk a szimulált rendszer kiesésének várható értékét, szórásnégyzetét, kumulánsait.
4. A kumulánsokból kiszámítjuk a sorfejtéshez szükséges G_l együtthatókat; a várható értékből és a szórásból meghatározzuk az integrálás határát képező z_0 értéket.
5. A (3.3) integrált a (3.4)—(3.5) képletek alapján számoljuk ki.

A nemszolgáltatott energia várható értéknek kiszámítását is az *Edgeworth sorfejtés* segítségével mutatjuk be. Legyen $G(t)$ az Y eloszlásfüggvénye, $g(t)$ a sűrűségfüggvénye, valamint $F(t)$ az Y valószínűségi változó standardizáltjának eloszlásfüggvénye, $f(t)$ a standardizált változó sűrűségfüggvénye.

$$\text{ENS}_i = M((Y - \sum_{j=1}^{i} c_j - b_1 - e_1)^+) =$$

$$= \int_{\sum_{j=1}^{i} c_j + b_1 + e_1}^{+\infty} g(t)(t - \sum_{j=1}^{i} c_j - b_1 - e_1)\,dt.$$

Bevezetve az

$$m = M(Y),$$

$$\sigma = D(Y)$$

jelöléseket, valamint felhasználva a $g(t)$ és az $f(t)$ függvények között fennálló:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma} f((t-m)/\sigma)$$

összefüggést,

$$\mathrm{ENS}_i = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \int\limits_{\sum_{j=1}^{i} c_j+b_1+e_1}^{+\infty} f((t-m)/\sigma)\left(t-\sum_{j=1}^{i} c_j-b_1-e_1\right) dt.$$

Az

$$y = (t-m)/\sigma$$

új változót és a

$$z_0 = \left(\sum_{j=1}^{i} c_j+b_1+e_1-m\right)/\sigma$$

jelölést bevezetve a következőt kapjuk:

$$\mathrm{ENS}_i = \sigma \int\limits_{z_0}^{+\infty} f(y)(y-z_0)\, dy.$$

Parciális integrálással, és az eloszlásfüggvény tulajdonságainak felhasználásával:

$$\mathrm{ENS}_i = \sigma \int\limits_{z_0}^{+\infty} \int\limits_{y}^{+\infty} f(x)\, dx\, dy.$$

Ezen a ponton $f(x)$-et az *Edgeworth-féle* (3.2) *sorfejtéssel* helyettesítjük, és felhasználjuk a primitív függvény szabályt.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ENS}_i = \sigma\big[& -G_1 N^{(1)}(z_0)/3!+ \\
& +G_2 N^{(2)}(z_0)/4!- \\
& -G_3 N^{(3)}(z_0)/5!+ \\
& +(G_4+10G_1^2) N^{(4)}(z_0)/6!- \\
& -35G_1G_2 N^{(5)}(z_0)/7!+ \\
& +(56G_1G_3+35G_2^2) N^{(6)}(z_0)/8!- \\
& -280G_1^3 N^{(7)}(z_0)/9!+ \\
& +2100G_1^2G_2 N^{(8)}(z_0)/10!+ \\
& +15\,400G_1^4 N^{(10)}(z_0)/12!+ \\
& + \int\limits_{z_0}^{+\infty} \int\limits_{y}^{+\infty} N^{(0)}(x)\, dx\, dy\big].
\end{aligned}$$

Az utolsó tag némi átalakításával az ENS végső formája a következő:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ENS}_i = \sigma[&-G_1N^{(1)}(z_0)/3!+\\
&+G_2N^{(2)}(z_0)/4!-\\
&-G_3N^{(3)}(z_0)/5!+\\
&+(G_4+10G_1^2)N^{(4)}(z_0)/6!-\\
&-35G_1G_2N^{(5)}(z_0)/7!+\\
&+(56G_1G_3+35G_2^2)N^{(6)}(z_0)/8!-\\
&-280G_1^3N^{(7)}(z_0)/9!+\\
&+2100G_1^2G_2N^{(8)}(z_0)/10!+\\
&+15\,400G_1^4N^{(10)}(z_0)/12!+\\
&+N^{(0)}(z_0)-z_0\int_{z_0}^{+\infty} N^{(0)}(y)\,dy].
\end{aligned}
$$

Az utolsó formulában szereplő integrál értéke a (3.5) numerikus közelítéssel kiszámolható. A standard normális sűrűségfüggvény deriváltjainak értékét a (3.4) rekurziós formula segítségével számoljuk ki. Így a nemszolgáltatott energia nagysága a LOLP kiszámításához hasonlóan történik.

4. Számítástechnikai tapasztalatok

Számítógépes programunkban mind a *Gram—Charlier*, mind az *Edgeworth sorfejtés* szerinti eljárást implementáltuk, és kísérleteket folytattunk velük. A várakozásnak megfelelően az előbbi sorfejtés alkalmazása lényegesen gyorsabb, hiszen a faktoriálisok és a standard normális sűrűségfüggvény deriváltjainak rendje kisebb, mint az utóbbiban.

A számítógépes program gyakorlati célokra történő alkalmazását nagymértékben leegyszerűsíti, hogy a rendszerszintű megbízhatóság számunkra lényeges tartományában, tehát a teljesítménykiesés 0,5—1,5 százalékos valószínűsége között, a tartalékteljesítmény függvényében a LOLP értéke gyorsan változik. Nagyobb megbízhatósági szint esetén, tehát ha a tartalékteljesítmény nagyobb a szükségesnél, a LOLP értéke rendkívül lassan változik a 0,0—0,5 %-os tartományban. Ebben a tartományban egyébként már nem tekinthetünk el a közelítő számítás esetleges pontatlanságától sem. A szükségesnél kisebb tartalékteljesítmény esetén a LOLP értéke rohamosan növekszik a tartalékteljesítmény értékének csökkenésével.

Az elvégzett számítások alapján megállapítható, hogy a magyar villamosenergiarendszerben a meghatározható megbízhatóság szintje legnagyobb mértékben az import villamos energia reprezentációjának módjától függ. A blokkos reprezentáció esetén a szükséges tartalékteljesítmény 400—500 MW-tal nagyobb, mint a javasolt háromértékű valószínűségi változóval történő reprezentáció esetén. A reprezentáció megfelelő formájának eldönthetőségéhez elméleti jellegű meggondolásokra, további számításokra és elsősorban a gyakorlati tapasztalatok felhasználására van szükség.

A kumuláns módszer ezen első, viszonylag egyszerű feladatra történő alkalmazásával szerettük volna mind számítástechnikai, mind reprezentációs lehetőségek szempontjából a felmerülő problémák egy részét feltárni, és ezt a módszert a hazai tervezési gyakorlathoz közelebb vinni.

IRODALOM

[1] Kendall, M., Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics, Distribution Theory, Vol. 1.* (Charles Griffin & Company Limited, London, 1977).

[2] Rau, N. S., Toy, P., Schenk, K. F., "Expected Energy Production Costing by the Method of Moments", *IEEE Trans. PAS—99* 5 (1980) 1908—1915.

[3] Schenk, K. F., "Cumulant Method in Production Cost Evaluation", *IAEA Lecture 30.5.6* (Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois, 1985).

[4] Stremel, J. P., Jenkins, R. J., Babb, R. A., Bayless, W. D., "Production Costing Using the Cumulant Method of Representing the Equivalent Load Curve", *IEEE Trans. PAS—99* 5 (1980) 1947—1956.

[5] *Wien Automatic System Planning Package* (WASP), *User's Manual* (IAEA, Vienna, 1980).

(Beérkezett: 1988. február 12.)

HOFFER JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1518 BUDAPEST, XI. KENDE UTCA 13—17.

DÖRFNER PÉTER
MAGYAR VILLAMOS MŰVEK TRÖSZT
1251 BUDAPEST, I. VÁM UTCA 5—7. PF. 43.

THE CUMULANT METHOD USED FOR RELIABILITY COMPUTATION IN POWER SYSTEMS

J. Hoffer, P. Dörfner

In the 1980's the cumulant method became popular in reliability type algorithms for production cost evaluation, particularly in the evaluation of loss of load probability (LOLP), energy not served (ENS) and expected energy generation (EEG) of units.

In the paper we give a short description of the cumulant method ([2], [3], [4], [5]) and the probabilistic model adapted to the Hungarian power system. Some computational experience are joined as well.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 57—83

AZ ÉLETBIZTOSÍTÁS EGY ÁLTALÁNOS MODELLJE ÉS FELSŐ BECSLÉSEK A TÖNKREMENÉS VALÓSZÍNŰSÉGÉRE

CSERE KÁLMÁN

Budapest

Egy általános modellben összegyűjtjük az ismert életbiztosítási formákat, és egy számítógépes program segítségével mindegyikre kiszámítunk egy konkrét példát.

Felső becsléseket adunk a biztosító tönkremenésének a valószínűségére, és eredményeinket szimulációval kapott példákkal illusztráljuk.

0. Bevezetés

Néhány éve újra fejlődésnek indult Magyarországon a biztosítási matematika tudománya. Az Állami Biztosító kettéválása, a verseny kiéleződése a gazdaság különböző területein szükségessé tették a biztosítótársaságok számára, hogy felélesszék ezt a régen virágzó tudományágat, és fokozottan alkalmazzák a számítástechnika eredményeit.

A biztosítási matematika alapfeladata a különböző típusú biztosítások díjainak meghatározása. E feladat első lépése egy matematikai modell felállítása. Világos, hogy különböző típusú biztosításokhoz különböző modellek tartoznak, mégis az életbiztosítások modellje alapvetően különbözik a többitől. A nem-életbiztosítások esetén ugyanis feltesszük általában, hogy a káresetek minden időpontban egyforma valószínűséggel következnek be. Ez a feltevés azonban az életbiztosítások esetében tarthatatlan, hiszen a halandóság nem lehet az életkortól független.

A biztosítási matematika egy másik klasszikus feladata a biztosítótársaság tönkremenése valószínűségének becslése, illetve kiszámítása. E két feladattal foglalkozik ez a dolgozat. Az első fejezetben [3] nyomán az életbiztosítások egy általános modelljét mutatjuk be, definiáljuk a biztosító szempontjából lényeges valószínűségi változókat, és ezeknek egy martingálelméleti összefoglalását adjuk. A második fejezetben a [2]-ben található életbiztosítási formákra felírjuk a megismert valószínűségi változókat, a teljes veszteséget, a jövőbeli veszteséget, a bruttó és a nettó díjat stb. Mindegyik típusnál bemutatunk egy konkrét példát, amelyet egy IBM PC-re írt BASIC-programmal számoltunk ki. A példákban Magyarország 1974. évi halandósági táblázatát használtuk. A harmadik fejezet az első folytatása, ebben a tönkremenés valószínűségének felső becslésére adunk tételeket szintén [3] nyomán. A negyedik fejezetben az előbbi konkrét példákon illusztráljuk az előző fejezet eredményeit. Mivel a kiszámítható feladatok köre szűk, azért a szimuláció módszerét használtuk szintén IBM PC-n. A függelékben találhatjuk a felhasznált programok listáit.

1. Általános modell

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

Jelöljék az $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ valószínűségi változók a készpénzfolyamatot, azaz X_n az n-edik évben a kifizetések és a befizetések különbsége.

Jelöljék az $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ rész σ-algebrák a biztosítótársaság információját, azaz $\mathcal{A}_n$ a társaság teljes információja az n-edik évig. Feltesszük, hogy $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ $(n \geqq 0)$ és $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.

Jelöljék a $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ valószínűségi változók a leszámítolási együtthatókat. Feltesszük, hogy $D_0 = 1$ és $D_n > 0$ $(n \geqq 0)$. Feltesszük még, hogy X_n és D_n $\mathcal{A}_n$-mérhető $(n \geqq 0)$.

1.1. *Definíció.* Legyen M a biztosítótársaság teljes leszámítolt vesztesége, azaz

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} X_n D_n.$$

Jegyezzük meg a következőket: a fenti összeg tulajdonképpen véges; és nettó díj esetén $E(M) = 0$.

1.2. *Definíció.* Legyen az n-edik évre leszámítolt n-edik évre vonatkozó jövőbeli veszteség V_n, azaz

$$V_n = D_n^{-1} \cdot E\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k D_k | \mathcal{A}_n \Big) \quad \text{m.m.} \quad (n \geqq 0).$$

1.3. *Definíció.* Legyen a leszámítolt n-edik évre vonatkozó veszteség M_n, azaz

$$M_n = E(M | \mathcal{A}_n) \quad \text{m.m.} \quad (n \geqq 0).$$

Legyen a leszámítolt éves veszteség az $(n-1, n]$ időszakra L_n, azaz

$$L_n = M_n - M_{n-1} \quad (n \geqq 1).$$

Végül legyen $L_0 = M_0$.

Megjegyzés. Könnyen láthatóan teljesülnek a következő egyenlőségek

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} L_k$$

és

$$L_n = X_n D_n + V_n D_n - V_{n-1} D_{n-1}. \tag{1.1}$$

ÁLLÍTÁS

(i) $(M_n, \mathcal{A}_n)_{n=0}^{\infty}$ martingál.

(ii) $E(M_0) = E(M_1) = \dots = E(M)$.

(iii) $E(L_{n+k} | \mathcal{A}_n) = 0$, ha $n \geqq 0$, $k \geqq 1$.

(iv) $E(L_n \cdot L_{n+k}) = 0$, ha $n \geqq 0$, $k \geqq 1$.

(v) $D^2(M_n) = \sum_{k=0}^{n} D^2(L_k) = \sum_{k=0}^{n} E(L_k^2) - E^2(M)$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ m.m.

Bizonyítás. Lásd [1].

2. Életbiztosítási formák

Ebben a fejezetben összegyűjtjük a megszokott életbiztosítási formákat: az egyszerű életbiztosítást, a halálozási biztosítást, a vegyes biztosítást, az évjáradékot és a felhalmozást. Mindegyiket felírjuk az általános modellünkben, meghatározzuk a nettó és a bruttó díjukat; a várható értéküket; a teljes, a jövőbeli és az éves veszteségüket. Ezenkívül minden biztosítási formára kiszámolunk egy konkrét példát, és adunk egy táblázatot, amely a kifizetések lehetséges évének valószínűségét és a biztosítótársaságok veszteségét tartalmazza.

A továbbiakban a megszokott jelöléseket használjuk, de azért a jobb érthetőség kedvéért felsoroljuk őket. A-val jelöljük a nettó díjat, P-vel a bruttó díjat, I-vel a kötvény megkötésének kezdeti költségét, és a befizetett díj K-szorosa a díjjal arányos költség. l_x-szel jelöljük a halandósági táblázat elemeit, továbbá

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nq_x = 1 - {}_np_x, \quad p_x = {}_1p_x \text{ és } q_x = 1 - p_x. $$

Jelöljük azt az eseményt, hogy a most x éves egyén az n-edik év végén él, E_n-nel, azt az eseményt pedig, hogy az n-edik évben hal meg, H_n-nel. Legyen továbbá $E_0 = \Omega$, $H_0 = \emptyset$, $\Omega \setminus E_n = \bar{E}_n$ és $\Omega \setminus H_n = \bar{H}_n$. Világos, hogy $P(E_n) = {}_np_x$ és $P(H_n) = q_{x+n-1}$. A továbbiakban feltesszük, hogy

$$ D_n = \frac{1}{(1+i)^n}, $$

ahol i (a kamatláb) változatlan az időben, és $\mathcal{A}_n = \sigma(E_0, E_1, \dots, E_n)$ $(n \geqq 0)$.

(i) *Egyszerű életbiztosítás.*

Ebben a biztosítási formában az x éves egyén P bruttó díj befizetésével egy olyan biztosítást köt, hogy ha az n-edik év végén él, akkor 1 egységnyi pénzt kap. Tehát

$$X_0 = -P$$

$$X_k = 0 \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$X_n = \begin{cases} 1 & E_n\text{-en} \\ 0 & \bar{E}_n\text{-en} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} -P + \dfrac{1}{(1+i)^n} & E_n\text{-en} \\ -P & \bar{E}_n\text{-en} \end{cases}$$

$$E(M) = M_0 = -P + \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{n+x}}{l_x}.$$

Tehát a nettó díj:

$$A = A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{n+x}}{l_x},$$

a bruttó díj pedig:

$$P = \frac{A+I}{1-K}$$

hiszen $P = A + KP + I$.

Világos, hogy $V_k = 0$ $\bar{E}_k$-n $(0 \leqq k \leqq n-1)$; most nézzük E_k-n:

$$V_k = D_k^{-1} E(X_n D_n | E_k) = \frac{1}{(1+i)^{n-k}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+k}} = A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\;\;1}.$$

Tehát

$$V_k = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\;\;1} & E_k - n \\ 0 & \bar{E}_k - n \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0.$$

Most nézzük a k-adik éves veszteséget $(1 \leqq k \leqq n-1)$ E_k-n:

$$L_k = V_k D_k - V_{k-1} D_{k-1} = \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_{x+k}} - \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_{x+k-1}} =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_{x+k}} \left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\right) = \frac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1} A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\;\;1};$$

H_k-n:

$$L_k = -V_{k-1} D_{k-1} = -\frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_{x+k-1}} = -\frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+k}} \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}} =$$

$$= -\frac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1} A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\;\;1},$$

Hasonlóan E_n-en:

$$L_n = D_n - V_{n-1}D_{n-1} = \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n}\left(1-\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}\right) = \frac{1}{(1+i)^n}q_{x+n-1},$$

és H_n-en:

$$L_n = -V_{n-1}D_{n-1} = -\frac{1}{(1+i)^n}\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = -\frac{1}{(1+i)^n}p_{x+n-1}.$$

Tehát

$$L_0 = -P + A_{\underset{x:\,\overline{n|}}{\ 1}}$$

$$L_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^k}q_{x+k-1}A_{\underset{x+k:\,\overline{n-k|}}{\ 1}} & E_k\text{-n} \\ -\dfrac{1}{(1+i)^k}P_{x+k-1}A_{\underset{x+k:\,\overline{n-k|}}{\ 1}} & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^n}q_{x+n-1} & E_n\text{-en} \\ -\dfrac{1}{(1+i)^n}p_{x+n-1} & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2.1. *Példa.* Tegyük fel, hogy egy 43 éves férfi olyan biztosítást köt, hogy amennyiben nyugdíjazásakor még él, akkor 1 egységnyi pénzt kap. A többi adatot a táblázat mellett láthatjuk. A táblázat első oszlopa mutatja a kifizetés lehetséges éveit. A második oszlop annak a valószínűségét adja, hogy ebben az évben történt a kifizetés, a harmadik oszlop az eddigi valószínűségek összege. A negyedik oszlop a biztosító vesztesége, feltéve, hogy ebben az évben volt a kifizetés. Ebben a fejezetben az összes táblázat ezt tartalmazza, ezért írtuk le itt ilyen részletesen.

FERFI

ELETKOR: X=43
TARTAM: N=17
KAMATLAB: I=,09
ARANYOS KOLTSEG: KK=,06
KEZDETI KOLTSÉG: IK=,002
EGYSZERU ELETBIZTOSITAS
NETTO DIJ: A= 0,19362
BRUTTO DIJ: P= 0,20811
VARHATO ERTEK: M0= −0,01449
SZORASNEGYZET: D2= 0,00725

n	${}_nP_x$	${}_nP_x$	$-P+\frac{1}{(1+i)^n}$
17	0,8379	0,8379	0,023

(ii) *Halálozási biztosítás.*

(a) *n évre.* A kötvénytulajdonos P bruttó díjat fizet, és ha n éven belül meghal, akkor halála évének végén a biztosító 1 egységnyi pénzt fizet. Könnyen láthatóak az alábbiak:

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & H_k\text{-n} \\ 0 & \bar{H}_k\text{-n} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

$$M = \begin{cases} \frac{1}{(1+i)^k} - P & H_k\text{-n} \\ -P & E_n\text{-en} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

$$E(M) = M_0 = -P + \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1}).$$

Tehát a nettó díj:

$$A = A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1});$$

a bruttó díj pedig: $P=(A+I)/(1-K)$. E_k-n $(0 \leqq k \leqq n-1)$:

$$V_k = D_k^{-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n} X_l D_l | E_k\Big) = \frac{1}{l_{x+k}} \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} (l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1}) =$$

$$= A^1_{x+k:\overline{n-k|}}.$$

Tehát

$$V_k = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k|}} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-on} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0.$$

E_k-n $(1 \leqq k \leqq n-1)$:

$$L_k = V_k D_k - V_{k-1} D_{k-1} = \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{k+l+1}} \left(\frac{l_{x+k+l}}{l_{x+k}} - \frac{l_{x+k+l+1}}{l_{x+k}} \right) -$$

$$- \sum_{l=0}^{n-k} \frac{1}{(1+i)^{k+l}} \left(\frac{l_{x+k+l-1}}{l_{x+k-1}} - \frac{l_{x+k+l}}{l_{x+k-1}} \right) = \frac{-1}{(1+i)^k} \left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\right) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} \left(\frac{l_{x+k+l}}{l_{x+k}} - \frac{l_{x+k+l+1}}{l_{x+k}} \right) - \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} \left(\frac{l_{x+k+l}}{l_{x+k-1}} - \frac{l_{x+k+l+1}}{l_{x+k-1}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{(1+i)^k} \left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\right) \left(1 - \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} \frac{l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1}}{l_{x+k}}\right).$$

Hasonlóan H_k-n:

$$L_k = \frac{1}{(1+i)^k} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}} \left(1 - \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} \frac{l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1}}{l_{x+k}}\right);$$

továbbá E_n-en

$$L_n = -\frac{1}{(1+i)^n}\left(1-\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}\right)$$

és H_n-en

$$L_n = \frac{1}{(1+i)^n}\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}.$$

Tehát

$$L_0 = -P+A^1_{x:\overline{n|}}$$

$$L_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+i)^k}\, q_{x+k-1}(1-A^1_{x+k:\overline{n-k|}}) & E_k\text{-n} \\ \dfrac{1}{(1+i)^k}\, p_{x+k-1}(1-A^1_{x+k:\overline{n-k|}}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+i)^n}\, q_{x+n-1} & E_n\text{-en} \\ \dfrac{1}{(1+i)^n}\, p_{x+n-1} & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.2. *Példa.* Egy 23 éves nő, tegyük fel, hogy az egyetem után most lép munkába, olyan biztosítást köt, hogy ha nyugdíjazása előtt meghal, akkor halála évének végén családja 1 egységnyi pénzt kap. A táblázat jelentését lásd a 21. példában!

NO	k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-p+\frac{1}{(1+i)^k}$	k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-p+\frac{1}{(1+i)^k}$
ELETKOR: X=23	1	0,0005	0,0005	0,905	17	0,0018	0,0170	0.250
	2	0,0005	0,0010	0,837	18	0,0020	0,0190	0,230
TARTAM: N=32	3	0,0005	0,0015	0,773	19	0,0022	0,0211	0,211
	4	0,0006	0,0021	0,714	20	0,0024	0,0235	0,194
KAMATLAB: I=,08	5	0.0006	0,0028	0,660	21	0,0026	0,0261	0,178
	6	0,0007	0,0034	0,610	22	0,0028	0,0288	0,163
ARANYOS KOLTSEG:								
KK=,05	7	0,0008	0,0042	0,563	23	0,0030	0,0318	0,150
	8	0,0008	0,0051	0,520	24	0,0032	0,0350	0,137
KEZDETI KOLTSEG:								
IK=,004	9	0,0009	0,0060	0,480	25	0,0035	0,0385	0,125
	10	0,0010	0,0070	0,443	26	0,0038	0,0423	0,115
HALALOZASI BIZTOSITAS	11	0,0011	0,0081	0,408	27	0,0042	0,0465	0,105
	12	0,0012	0,0093	0,377	28	0,0046	0,0511	0,095
NETTO DIJ: A=0,01558	13	0,0013	0,0106	0,347	29	0,0050	0,0561	0.087
	14	0,0014	0,0120	0,320	30	0,0054	0,0615	0.079
BRUTTO DIJ: P=0,02061	15	0,0015	0,0135	0,295	31	0,0059	0,0674	0,071
	16	0,0016	0,0152	0,271	32	0,0063	0,0737	0,065

VARHATO ERTEK:
M0: = −0,00503
SZORASNEGYZET:
D2=0,00508

(b) *Halálozásig.* A kötvénytulajdonos halála évének végén a biztosító 1 egységnyi pénzt fizet. Az előzőkhöz hasonlóan:

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & H_k\text{-n} \\ 0 & \bar{H}_k\text{-on} \end{cases} \quad (1 \leqq k)$$

$$M = \frac{1}{(1+i)^k} - P \quad H_k\text{-n} \quad (1 \leqq k)$$

$$E(M) = M_0 = -P + \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1})$$

$$A = A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1})$$

$$P = \frac{A+I}{1-K}$$

$$V_k = \begin{cases} \frac{1}{l_{x+k}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} (l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1}) = A_{x+k} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-n} \end{cases} \quad (0 \leqq k)$$

$$L_0 = -P + A_x$$

$$L_k = \begin{cases} -\frac{1}{(1+i)^k}\left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{l_{x+k}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} (l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1})\right) = \\ \qquad = -\frac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1}(1 - A_{x+k}) & E_k\text{-n} \\ \frac{1}{(1+i)^k} \frac{l_{x+k}}{l_{x+k-1}}\left(1 - \frac{1}{l_{x+k}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} (l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1})\right) = \\ \qquad = \frac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1}(1 - A_{x+k}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1 \leqq k)$$

(iii) *Vegyes biztosítás.*

Ez tulajdonképpen az előbbi két forma keveréke. Ha a kötvénytulajdonos n éven belül meghal, akkor halála évének végén, különben pedig az n-edik év végén fizet 1 egységnyi pénzt a biztosítótársaság. Látható, hogy

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & H_k\text{-n} \\ 0 & \bar{H}_k\text{-on} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$X_n = \begin{cases} 1 & E_{n-1}\text{-en} \\ 0 & \bar{E}_{n-1}\text{-en} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^k} - P & H_k\text{-n} \\ \dfrac{1}{(1+i)^n} - P & E_n\text{-en} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

$$E(M) = M_0 = -P + \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1}) + \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Tehát

$$A = A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{\underset{x:\overline{n}|}{\ \ 1}} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1}) + \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_x};$$

és $P=(A+I)/(1-K)$. Az előző két rész után könnyen látható, hogy

$$V_k = \begin{cases} \dfrac{1}{l_{x+k}} \displaystyle\sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1+i)^{l+1}} (l_{x+k+l} - l_{x+k+l+1}) + \\ \qquad + \dfrac{1}{(1+i)^{n-k}} \dfrac{l_{x+n}}{l_{x+k}} = A_{x+k:\overline{n-k}|} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-n} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0$$

$$L_0 = -P + A_{x:\overline{n}|}$$

$$L_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1} (1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}) & E_k\text{-n} \\ \dfrac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1} (1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = 0$$

2.3. *Példa.* Egy 35 éves férfi 25 éves vegyes biztosítást köt. A költségeket azért választottuk 0-nak, mert ezt a példát használjuk a negyedik fejezetben is. Vegyük észre, hogy a 25. évben ${}_{35}p_x$ valószínűséggel történik a kifizetés, és ekkor a valószínűségek összege 1.

FERFI

ELETKOR: X=35

TARTAM: N=25

KAMATLAB: I=,11

ARANYOS KOLTSEG:
KK=0

KEZDETI KOLTSEG: IK=0

VEGYES BIZTOSITAS

NETTO DIJ: A=0,10211
BRUTTO DIJ: P=0,10211
VARHATO ERTEK: M0=0,00000
SZORASNEGYZET: D2=0,01001

k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-p+\frac{1}{(1+i)^k}$	k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-p+\frac{1}{(1+i)^k}$
1	0,0025	0,0025	0,799	13	0,0067	0,0558	0,155
2	0,0026	0,0051	0,710	14	0,0071	0.0629	0,130
3	0,0028	0.0079	0,629	15	0,0077	0,0706	0,107
4	0,0031	0,0110	0,557	16	0,0083	0,0789	0.086
5	0,0034	0,0144	0,491	17	0,0089	0,0878	0,068
6	0,0038	0,0182	0,433	18	0,0095	0,0973	0,051
7	0,0042	0,0223	0,380	19	0,0102	0,1074	0,036
8	0,0046	0,0269	0,332	20	0,0108	0,1182	0,022
9	0.0049	0,0318	0,289	21	0,0115	0,1297	0,010
10	0,0053	0,0372	0,250	22	0,0122	0,1419	−0,001
11	0,0057	0,0429	0,215	23	0,0132	0,1551	−0.011
12	0,0062	0,0491	0,184	24	0,0142	0,1693	−0,020
				25	0,8307	1,0000	−0,029

(iv) *Évjáradék.*

(a) *n évre.* A kötvénytulajdonos P díj befizetése után n évig minden év végén 1 egységnyi pénzt kap, amennyiben életben van.

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-n} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

$$M = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(1+i)^l} - P & H_{k+1}\text{-en} \\ \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^l} - P & E_n\text{-en} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$E(M) = M_0 = -P + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^l} \frac{l_{x+l}}{l_x}.$$

Tehát

$$A = a_{x:\overline{n|}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^l} \frac{l_{x+l}}{l_x};$$

és $P=(A+I)/(1-K)$. Nem nehéz kiszámítani, hogy

$$V_k = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n-k} \frac{1}{(1+i)^l} \frac{l_{x+k+l}}{l_{x+k}} = a_{x+k:\overline{n-k|}} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-n} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0$$

$$L_0 = -P + a_{x:\overline{n|}}$$

$$L_k = \begin{cases} \frac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1}(1+a_{x+k:\overline{n-k|}}) & E_k\text{-n} \\ -\frac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1}(1+a_{x+k:\overline{n-k|}}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = \begin{cases} \frac{1}{(1+i)^n} q_{x+n-1} & E_n\text{-en} \\ \frac{-1}{(1+i)^n} p_{x+n-1} & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.4. *Példa.* Egy férfi nyugdíjba menésekor befizeti a P díjat, hogy 80 éves koráig 1 egységnyi évjáradékot kapjon, ha él. A táblázatban a k most az utolsó kifizetés évét jelenti, és a 20. évben ${}_{20}p_x$ valószínűséggel történik a kifizetés. $a_{\overline{k|}}$-val szokás szerint a $\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(1+i)^l}$ összeget jelöljük.

FERFI

ELETKOR: X=60

TARTAM: N=20

KAMATLAB: I=,09

ARANYOS KOLTSEG: KK=,07

KEZDETI KOLTSEG: IK=,02

EVJARADEK
NETTO DIJ: A=7,05748
BRUTTO DIJ: P=7,61019
VARHATO ERTEK: M0=−0,55271
SZORASNEGYZET: D2=5,69739

k	$1-p_{x+k}$	${}_kp_x$	$-P+a_{\overline{k|}}$	k	$1-p_{x+k}$	${}_kp_x$	$-P+a_{\overline{k|}}$
20	0,3045	0,3045	1,518	10	0,0386	0,7164	−1,193
19	0,0400	0,3445	1,340	9	0,0369	0,7533	−1,615
18	0,0412	0,3857	1,145	8	0,0351	0,7884	−2,075
17	0,0419	0,4276	0,933	7	0,0331	0,8215	−2,577
16	0,0422	0,4699	0,702	6	0,0311	0,8526	−3,124
15	0,0421	0,5120	0,450	5	0,0292	0,8818	−3,721
14	0,0425	0,5545	0,176	4	0,0273	0,9090	−4,370
13	0,0421	0,5965	−0,123	3	0,0254	0,9344	−5,079
12	0,0413	0,6378	−0,449	2	0,0235	0,9580	−5,851
11	0,0400	0,6778	−0,805	1	0,0218	0,9798	−6,693

(b) *Halálozásig.* A kötvénytulajdonos haláláig kapja az évjáradékot.

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} 1 & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-on} \end{cases} \quad (1 \leqq k)$$

$$M = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(1+i)^l} - P \quad H_{k+1}\text{-en} \quad (0 \leqq k)$$

$$A = a_x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^l} \frac{l_{x+l}}{l_x}, \quad P = \frac{A+I}{1-K}$$

$$V_k = \begin{cases} a_{x+k} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-on} \end{cases} \quad (0 \leqq k)$$

$$L_0 = -P + a_x$$

$$L_k = \begin{cases} \frac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1}(1+a_{x+k}) & E_k\text{-n} \\ -\frac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1}(1+a_{x+k}) & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (1 \leqq k)$$

(v) *Felhalmozás.*

A kötvénytulajdonos befizet 1 egységnyi pénzt, majd n—1 évig, amennyiben él, minden év végén befizet további 1 egységnyi pénzt, és ezért az n-edik év végén, ha él, P összeget kap a biztosítótól.

$$X_0 = -1$$

$$X_k = \begin{cases} -1 & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-on} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$X_n = \begin{cases} P & E_n\text{-en} \\ 0 & \bar{E}_n\text{-en} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} -\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(1+i)^l} & H_{k+1}\text{-en} \\ -\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^l} + \frac{1}{(1+i)^n} P & E\text{-en} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$E(M) = M_0 = -\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^l} \frac{l_{x+l}}{l_x} + \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_x} P =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_x} \left(P - \sum_{l=0}^{n-1} (1+i)^{n-l} \frac{l_{x+l}}{l_{x+n}} \right)$$

Tehát a bruttó felhalmozott összeg:

$$\ddot{s}_{x:\overline{n|}} = \sum_{l=0}^{n-1} (1+i)^{n-l} \frac{l_{x+l}}{l_{x+n}};$$

és a kifizetendő összeg:

$$P = \ddot{s}_{x:\overline{n|}}(1-K) - (1+i)^n I.$$

Most is kiszámíthatók az alábbiak:

$$V_k = \begin{cases} -a_{x+k:\overline{n-k-1|}} + \dfrac{1}{(1+i)^{n-k}} \cdot P \cdot {}_{n-k}p_{x+k} & E_k\text{-n} \\ 0 & \bar{E}_k\text{-on} \end{cases} \qquad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0$$

$$L_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \frac{l_{x+n}}{l_x} (P - s_{x:\overline{n|}})$$

$$L_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_{n-k}p_{x+k} \cdot q_{x+k-1}(P - \ddot{s}_{x+k:\overline{n-k|}}) & E_k\text{-n} \\ -\dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_{n-k}p_{x+k} \cdot p_{x+k-1}(P - \ddot{s}_{x+k:\overline{n-k|}}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot q_{x+n-1} \cdot P & E_n\text{-en} \\ \dfrac{-1}{(1+i)^n} \cdot p_{x+n-1} \cdot P & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2.5. *Példa.* Egy fiatal házaspár elhatározza, hogy a most született kislányuknak egy nagyobb összeget adnak 18 éves korában, ha akkor még él. Feltesszük, hogy az állam dotálja ezt a biztosítási formát, és átvállalja a költségeket.

NO	n	${}_nP_x$	${}_nP_x$	$-\ddot{a}_{\overline{n|}} + \dfrac{P}{(1+i)^n}$
ELETKOR: X=0	18	0,9613	0,9613	0,075

TARTAM: N=18
KAMATLAB: I=,1
ARANYOS KOLTSEG: KK=0
KEZDETI KOLTSEG: IK=0
FELHALMOZAS
BRUTTO OSSZEG: S=50,57875
KIFIZETENDO OSSZEG: P=50,57875
VARHATO ERTEK: M0=0,00000
SZORASNEGYZET: D2=48,93185

Utolsó biztosítási formának tekintsünk egy olyat, ahol a kötvénytulajdonos nem egy összegben előre, hanem évenként fizeti be a biztosítási díjat. Nem vizsgáljuk meg az összes lehetséges esetet, csak az n évre kötött halálozási biztosítást, de innen már látni fogjuk, hogyan kell levezetni a kiszámítandó valószínűségi változóinkat az előbbiekből.

(vi) *Halálozási biztosítás évenkénti díjjal.*

A kötvénytulajdonos befizet P díjat, majd $n-1$ évig minden év végén, amennyiben él, befizet további P összeget, így ha n éven belül meghal, akkor halála évének végén a biztosítótársaság 1 egységnyi pénzt fizet. Megint könnyen láthatóak az alábbiak:

$$X_0 = -P$$

$$X_k = \begin{cases} -P & E_k\text{-n} \\ 1 & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$X_n = \begin{cases} 1 & H_n\text{-en} \\ 0 & \overline{H}_n\text{-en} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} -P \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{1}{(1+i)^l} + \dfrac{1}{(1+i)^{k+1}} & H_{k+1}\text{-en} \\ -P \sum\limits_{l=0}^{n-1} \dfrac{1}{(1+i)^l} & E_n\text{-en} \end{cases} \qquad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$E(M) = M_0 = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^{k+1}} (l_{x+k} - l_{x+k+1}) - P \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^k} \frac{l_{x+k}}{l_x} =$$

$$= A^1_{x:\overline{n|}} - P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}.$$

Tehát

$$A = A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}; \quad \text{és} \quad P = \frac{A + I/\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{1-K};$$

A további eredmények:

$$V_k = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k|}} - P \cdot a_{x+k:\overline{n-k-1|}} & E_k\text{-n} \\ 0 & \overline{E}_k\text{-on} \end{cases} \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

$$V_n = 0;$$

$$L_0 = A^1_{x:\overline{n|}} - P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$L_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+i)^k} q_{x+k-1}(1 - A^1_{x+k:\overline{n-k|}} + P \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}) & E_k\text{-n} \\ \dfrac{1}{(1+i)^k} p_{x+k-1}(1 - A^1_{x+k:\overline{n-k|}} + P \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}) & H_k\text{-n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

$$L_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+i)^n} q_{x+n-1}(1+P) & E_n\text{-en} \\ \dfrac{1}{(1+i)^n} p_{x+n-1}(1+P) & H_n\text{-en} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2.6. *Példa.* Tekintsük ismét a 2.2. példát, de tegyük fel, hogy ennél a biztosítási formánál az ügynök jutaléka 1%-kal magasabb.

NO	k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-P\ddot{a}_{\overline{k}\vert}+\frac{1}{(1+i)^k}$	k	$1-p_{x+k-1}$	$1-{}_kp_x$	$-P\ddot{a}_{\overline{k}\vert}\frac{1}{(1+i)^k}$
ELETKOR: X=23	1	0,0005	0,0005	0,924	17	0,0018	0,0170	0,253
	2	0,0005	0,0010	0,854	18	0,0020	0,0190	0,233
TARTAM: N=32	3	0,0005	0,0015	0,789	19	0,0022	0,0211	0,214
	4	0,0006	0,0021	0,729	20	0,0024	0,0235	0,196
KAMATLAB: I=,08	5	0,0006	0,0028	0,673	21	0,0026	0,0261	0,180
	6	0,0007	0,0034	0,622	22	0,0028	0,0288	0,165
ARANYOS KOLTSEG: KK=,06	7	0,0008	0,0042	0,574	23	0,0030	0,0318	0,151
	8	0,0008	0,0051	0,530	24	0,0032	0,0350	0,138
KEZDETI KOLTSEG: IK=,004	9	0,0009	0,0060	0,489	25	0,0035	0,0385	0,126
	10	0,0010	0,0070	0,451	26	0,0038	0,0423	0,115
HALALOZASI BIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL	11	0,0011	0,0081	0,416	27	0,0042	0,0465	0,105
	12	0,0012	0,0093	0,383	28	0,0046	0,0511	0,096
NETTO DIJ: A=0,00127	13	0,0013	0,0106	0,353	29	0,0050	0,0561	0,087
	14	0,0014	0,0120	0,325	30	0,0054	0,0615	0,079
BRUTTO DIJ: P=0,00170	15	0,0015	0,0135	0,299	31	0,0059	0,0674	0,071
	16	0,0016	0,0152	0,276	32	0,0063	0,0737	0,064
VARHATO ERTEK: M0=−0,00525								
SZORASNEGYZET: D2=0,00526								

3. Felső becslések

Ebben a fejezetben a biztosító tönkremenésének a valószínűségét vizsgáljuk. Az első fejezetben leírt modellben definiáljuk a biztosító tönkremenését adott kezdő tőke mellett, és különböző felső becsléseket adunk ennek valószínűségére.

3.1. *Definíció.* A biztosítótársaság $U>0$ kezdő tőke mellett tönkremegy a

$$\{\sup_{n\geq 0} M_n > U\}$$

eseményen, ennek valószínűségét $\psi(U)$-val jelöljük.

3.1. TÉTEL. Legyen (a) $\Phi\colon(-\infty, \infty)\to\mathbf{R}$ vagy (b) $\Phi\colon[0, \infty)\to\mathbf{R}$ pozitív, konvex, monoton növő és mérhető függvény. Ekkor $U>0$ esetén

$$\psi(U)\leqq E(\Phi(M))/\Phi(U). \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Azonnal látható a következő egyenlőtlenség

$$\psi(U) = P\big(\sup_{n\geq 0} M_n > U\big) \leqq P\big(\sup_{n\geq 0} \Phi(M_n) > \Phi(U)\big).$$

Legyen

$$A = \{\sup_{n \geqq 0} \Phi(M_n) > \Phi(U)\}$$

és

$$A_0 = \{\Phi(M_0) > \Phi(U)\}$$

$$A_1 = \{\Phi(M_1) > \Phi(U)\} \setminus A_0$$

$$A_2 = \{\Phi(M_2) > \Phi(U)\} \setminus (A_0 \cup A_1)$$

$$\vdots$$

s. í. t.

Ekkor $A = \bigcup_{k=0}^{\infty}{}^* A$ (diszjunkt unió), és

$$E(\Phi(M)) = \int_{\Omega} \Phi(M)\,dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} \Phi(M)\,dP + \int_{\Omega \setminus A} \Phi(M)\,dP.$$

$$\int_{\Omega \setminus A} \Phi(M)\,dP \geqq 0,$$

mivel Φ pozitív, továbbá

$$\int_{A_k} \Phi(M)\,dP = \int_{A_k} E(\Phi(M)|\mathcal{A}_k)\,dP \geqq \int_{A_k} \Phi(E(M|\mathcal{A}_k))\,dP =$$

$$= \int_{A_k} \Phi(M_k)\,dP \geqq \Phi(U) \cdot P(A_k),$$

ahol a definíciókon kívül a *Jensen-egyenlőtlenséget* és azt használtuk, hogy $A_k \in \mathcal{A}_k$. Összeadva egyenlőtlenségeinket

$$E(\Phi(M)) \geqq \Phi(U) \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \Phi(U) \cdot P(A) \geqq \Phi(U) \cdot \psi(U).$$

KÖVETKEZMÉNY.

(3.2) (i) $\psi(U) \leqq \min_{r \geqq 1} E(|M|^r)/U^r$

(3.3) (ii) $\psi(U) \leqq \min_{r > 0} E(e^{rM})e^{-rU}$

(iii) Ha $E(M) < U$, akkor

(3.4) $$\min_{r > 0} E(e^{rM})e^{-rU} = E(e^{r^*M})e^{-r^*U},$$

ahol r^* az egyetlen, létező pozitív szám, amelyre

(3.5) $$\left.\frac{dE(e^{rM})}{dr}\right|_{r=r^*} = U \cdot E(e^{r^*M}).$$

(iv) Ha $E(M) < 0$, akkor létezik egyetlen $R > 0$ szám, amelyre $E(e^{RM}) = 1$. Ekkor

(3.6) $$\psi(U) \leqq e^{-RU}.$$

Bizonyítás. Csak (iii)-at és (iv)-et kell bizonyítani.

(iii): Vegyük észre, hogy az előző fejezetben mindenhol $E(M)\leqq 0$ volt, tehát $E(M)<U$ teljesült. Legyen $r\geqq 0$ mellett

$$g(r) = E(e^{rM}) \quad \text{és} \quad f(r) = \log\big(g(r)\big) - rU.$$

Ekkor $f(0)=0$,

$$f'(0) = E(M)-U < 0,$$

$$f''(r) = \frac{g''(r)}{g(r)} - \left(\frac{g'(r)}{g(r)}\right)^2 > 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = +\infty.$$

Itt az egyenlőtlenség abból következik, hogy f az M *Esscher-transzformáltjának* a szórásnégyzete. A határérték pedig abból következik, hogy $P(M>U)>0$. Könnyen látható ezután, hogy pontosan egy olyan pozitív r^* van, amelyre $f'(r^*)=0$, és az f függvénynek itt totális minimuma van. Végül (3.4) ekvivalens azzal, hogy

$$\min_{r>0} \exp\{f(r)\} = \exp\{f(r^*)\},$$

(3.5) pedig azzal, hogy $f'(r^*)=0$.

(iv):

$$g(0) = 1$$

$$g'(0) = E(M) < 0$$

$$g''(r) \geqq 0$$

$$\lim_{r\to\infty} h(r) = +\infty$$

g grafikonját megvizsgálva valóban látható az állítás első része. A második rész (3.3) következménye.

3.2. TÉTEL. Legyen $C=\{\sup\limits_{n\geqq 0} M_n \leqq U\}$, ekkor

$$\text{(3.7)} \quad \text{(i)} \quad \psi(U) \leqq \min_{r>0}\left\{\frac{E(e^{rM})-e^{rE(M|C)}}{e^{rU}-e^{rE(M|C)}}\right\}.$$

(ii) Ha $M=\hat{M}-\hat{\hat{M}}$, ahol $\hat{M}, \hat{\hat{M}}\geqq 0$ m.m., akkor

$$\text{(3.8)} \qquad \psi(U) \leqq \min_{r>0}\left\{\frac{E(e^{rM})-e^{rE(\hat{M}|C)}}{e^{rU}-e^{rE(\hat{M}|C)}}\right\}.$$

Ha még $E(M)<0$ teljesül, akkor

$$\psi(U) \leqq \frac{1-e^{-RE(\hat{M}|C)}}{e^{RU}-e^{-RE(\hat{M}|C)}}.$$

Bizonyítás. Az előbbi tétel bizonyítását felhasználva, $\Phi(x)=e^{rx}$-szel $(r>0, x\in\mathbf{R})$

$$E(e^{rM}) \geqq e^{rU}\cdot\psi(U)+\int_C e^{rM}\,dP = e^{rU}\cdot\psi(U)+P(C)\cdot E(e^{rM}|C) \leqq$$

$$\leqq e^{rU}\cdot\psi(U)+\bigl(1-\psi(U)\bigr)\cdot e^{rE(M|C)}$$

használva a *Jensen-egyenlőtlenséget.* (3.7)-et ebből átrendezéssel nyerjük. (ii)-höz legyen

$$a = E(e^{rM}) > 0$$

$$b = e^{rE(\hat{M}|C)} \geqq 1$$

$$c = e^{-rE(\hat{M}|C)} \leqq 1$$

$$d = e^{rU} > 1.$$

$d>bc$, mert C-n $M<U$ m.m., így $a>bc$ is teljesül, hisz $\psi(U)\geqq 0$. Tudjuk $d>c$-t is. Ha most $a>d$, akkor $(a-c)/(d-c)>1$, és kész vagyunk. *Ha* $a\leqq d$, akkor átrendezéssel adódik $\frac{a-c}{d-c}\geqq\frac{a-bc}{d-bc}$. Végül (3.9) azonnal adódik (3.8)-ból és R definíciójából.

4. Példák

Ebben a fejezetben négy példán illusztráljuk az előző fejezet eredményeit. Ezek tulajdonképpen a második fejezet példái, de az egyszerű életbiztosítást és a felhalmozást kihagytuk. Ezek a tönkremenés szempontjából kevésbé érdekesek, hiszen ha az első példában a biztosítónak van legalább 0,023 nagyságú kezdőtőkéje, akkor nem mehet csődbe, ha nincs, akkor 0,8379 valószínűséggel csődbe jut.

2.2. *Példa esete.* Ha itt a biztosítónak legalább 0,905 nagyságú kezdőtőkéje van, akkor nem megy tönkre; ha ennél kevesebb, de 0,837-nél több, akkor 0,0005 valószínűséggel megy tönkre; stb. Ennek alapján megállapíthatjuk $\psi(U)$ pontos értékét minden U-ra.

U	$\psi(U)$	r_1	$f_1(r_1)$	r^*	$f_2(r^*)$	$f_2(R)$	r_3	$f_3(r_3)$
0,9	0,0005	34,4	0.00065	39,5	0,00065	0,25684	39,4	0,00065
0,7	0,0021	43,7	0.00623	9,6	0,00989	0,34734	7,2	0,00799
0,5	0,0051	2,6	0,01856	7,8	0,05540	0,46905	3,6	0,02437
0,3	0,0120	1,9	0,05632	6,5	0,23223	0,63494	0,01	0,04859
0,1	0,0465	1,3	0.30936	4,5	0,71705	0,85950	0,004	0,12892

A táblázatban $f_1(r)=E(|M|^r)/U^r$, $f_2(r)=E(e^{rM})\cdot e^{-rU}$, $f_3(r)=\{E(e^{rM})-e^{-rE(\hat{M}|C)}\}/\{e^{rU}-e^{-rE(\hat{M}|C)}\}$, ahol $\hat{M}=P$, és r_1, illetve r_3 az f_1 és az f_3 minimumhelyei, továbbá $R=1{,}5141$.

2.4. *Példa esete.* Újra elkészíthetjük az előző táblázatot. Itt f_1-ből a becslések 1-nél nagyobbak, tehát értéktelenek. Ehelyett (3.9)-et használjuk: $f_4(r)=\{1-e^{-RE(\hat{M}|C)}\}/\{e^{RU}-e^{-RE(\hat{M}|C)}\}$, ahol $\hat{M}=P$ ismét és $R=0{,}2315$.

U	$\psi(U)$	r^*	$f_2(r^*)$	$f_2(R)$	$f_4(R)$	r_3	$f_3(r_3)$
1,5	0,3045	5,59	0,36183	0,70662	0,66528	5,59	0,36183
1,3	0,3445	1,23	0,56583	0,74011	0,70140	1,23	0,56582
1,1	0,3857	0,72	0,68193	0,77518	0,73975	0,71	0,68130
0,9	0,4276	0,49	0,76830	0,81192	0,78048	0,45	0,76408
0,7	0,4699	0,36	0,83571	0,85039	0,82380	0,27	0,82329

Ez a két példa valóban csak illusztráció, sem elméleti, sem gyakorlati szempontból nem túl érdekes. Egyrészt könnyebb kiszámítani U pontos értékét, mint a becsléseket, másrészt azt is nehéz elképzelni, hogy a biztosítónak csak egy biztosítottja legyen.

2.3. *Példa esete.* Nézzük újra a harmadik példát, de tegyük fel, hogy a biztosítónál 40 ugyanilyen kötvény van. Ekkor M tulajdonképpen 40 darab azonos eloszlású, független valószínűségi változó összege (feltesszük, hogy az emberek halandósága egymástól független), tehát M-et közelíthetjük egy $\tilde{M} \sim N(m, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változóval, ahol könnyen láthatóan $m=0$ és $\sigma^2=0{,}40031$. Ekkor (lásd [4]) $E(e^{r\tilde{M}})=e^{(r^2\sigma^2/2)+rm}$, tehát $r^*=(U-m)/\sigma^2$, $f_2(r^*)=\exp\{-(U-m)^2/2\sigma^2\}$, $f_3(r)=$ $=\dfrac{e^{\frac{(r^2\sigma^2)}{2}+rm}-e^{-r\hat{M}}}{e^{rU}-e^{-r\hat{M}}}$, ahol $\hat{\hat{M}}=40\,\mathrm{P}=0{,}0285$, és végül (3.7)-hez legyen $f_5(r)=$ $=\dfrac{e^{\frac{(r^2\sigma^2)}{2}+rm}-e^{r\widetilde{E(M|C)}}}{e^{rU}-e^{r\widetilde{E(M|C)}}}$, ahol $\widetilde{E(M|C)}$ lesz $E(M|C)$ becslése. $\psi(U)$-t szimulációval becsültem, a BASIC nyelvű program a függelékben található. A program felhasználja, hogy ebben a példában $\{M>U\}=\{\sup\limits_{k\geq 0} M_k>U\}$, és megadja $\widetilde{E(M|C)}$-t is. A szimulációk számát ZZ-vel jelölöm.

U	$\psi(U)$	ZZ	$f_2(r^*)$	$f_3(r_3)$	$f_5(r_5)$	$\widetilde{E(M\|C)}$
0,3	0,29900	1000	0,89368	0,79176	0,52597	−0,3333
0,9	0,10100	1000	0,36360	0,35627	0,13028	−0,1347
1,5	0,02280	5000	0,06019	0,06014	0,05665	−0,0425
2,1	0,00393	15000	0,00405	0,00405	0,00404	−0,0091

2.6. *Példa esete.* Legyen itt is 40 egyforma kötvényből álló portfoliónk. Most $m=-0{,}2012$, $\sigma^2=0{,}2102$, $\hat{\hat{M}}=40\ddot{a}_{\overline{n-1|}}$. $P=0{,}8417$. A szimuláló BASIC-program ismét a függelékben található meg. $(f_2(R)=e^{2Um/\sigma^2})$

U	$\psi(U)$	ZZ	$f_2(r^*)$	$f_2(R)$	$f_3(r_3)$	$f_5(r_5)$	$\widetilde{E(M\|C)}$
0,3	0,16800	500	0,53873	0,54921	0,49692	0,22409	−0,3572
0,6	0,08100	1000	0,21007	0,30163	0,20674	0,09681	−0,2967
0,9	0,03033	3000	0,05339	0,16566	0,05329	0,05091	−0,2573

Ezekben a példákban már tényleg könnyebb kiszámolni a becsléseket, mint a pontos értékeket. Az is látható, hogy ha a portfoliónkban többfajta kötvény van, de mindegyikből elég sok, akkor ismét közelíthetjük M-et normális eloszlással, amelynek paramétereit sem nehéz kiszámítani, hiszen független valószínűségi változókra a várható érték és a szórásnégyzet additív.

5. Függelék

A 3. példa szimuláló programja:

```
1 OPEN "A:HALF" FOR INPUT AS #1
2 DIM L(100,2),C(100)
3 FOR H=1 TO 2
4 FOR J=0 TO 100
5 LINE INPUT #1, A$
6 L(J,H)=VAL (A$)
7 NEXT J
8 NEXT H
9 CLOSE #1
10 RANDOMIZE TIMER
20 Z=1
22 X=35
24 N=25
26 I=.11:TH=1/(1+I)
28 INPUT "U=",U
30 K=40
32 P=,1021127
34 INPUT "ZZ=",ZZ
36 DIM R(100)
38 '
78 '
80 FOR L=1 TO N-1
85 R(L)=1-L(X+L,Z)/L(X,Z)
90 NEXT L
95 R(N)=1
98 '
100 MM=0:NN=0
110 FOR 0=1 TO ZZ
111 '
112 '
113 M=K#P
114 FOR J=1 TO K
118 C(J)=RND
130 FOR L=1 TO N
160 IF C(J)<R(L) THEN M=M+TH^L :L=N+1
170 NEXT L
180 NEXT J
185 '
255 '
270 IF M>U THEN NN=NN+1:GOTO 290
280 MM=MM+M
284 '
286 '
290 NEXT 0
295 '
300 PP=NN/ZZ:MC=MM/(ZZ-NN)
310 PRINT NN,ZZ,PP
320 PRINT MM,ZZ-NN,MC
```

A 6. példa szimuláló programja:

```
1 CLS:OPEN "A:HALF" FOR INPUT AS #1
2 DIM L(100,2),P(100)
3 FOR H=1 TO 2
4 FOR J=0 TO 100
5 LINE INPUT #1, A$
6 L(J,H)=VAL(A$)
7 NEXT J
8 NEXT H
9 CLOSE #1
10 RANDOMIZE TIMER
20 Z=2
22 X=23
24 N=32
26 I=,0B:TH=1/(1+I)
28 INPUT "U=",U
30 K=40
32 P=1,703766E-03
34 INPUT "ZZ=",ZZ
36 DIM K(100), TH(100)
38 '
78 '
80 FOR L=1 TO N
85 P(L)=L(X+L,Z)/L(X+L-1,Z):TH(L)=TH^L
90 NEXT L
100 MM=0:NN=0:K(1)=K
110 FOR 0=1 TO ZZ
111 '
112 '
120 M=K*P
130 FOR L=1 TO N-1
135 K(L+1)=0
140 FOR J=1 TO K(L)
160 IF RND<P(L) THEN K(L+1)=K(L+1)+1:M=M-P*TH(L):GOTO 200
170 M=M+TH(L)
200 NEXT J
205 IF M>U THEN NN=NN+1:PRINT NN, 0:GOTO 290
206 '
210 NEXT L
215 '
230 FOR J=1 TO K(N)
240 IF RND>=P(N) THEN M=M+TH(N)
250 NEXT J
255 '
270 IF M>U THEN NN=NN+1:PRINT NN,0:GOTO 290
280 MM=MM+M
284 '
286 '
290 NEXT 0
295 '
300 PP=NN/ZZ:MC=MM/(ZZ-NN)
310 PRINT NN,ZZ,PP
320 PRINT MM,ZZ-NN,MC
```

A második fejezetben használt program:

```
1 CLS:INPUT "OUTPUTFILE:",0$
2 OPEN 0$ FOR OUTPUT AS #3
3 INPUT "NEME (FERFI=1, NO=2):",Z:IF Z=1 THEN LPRINT "FERFI":PRINT #3, "FERFI":GO TO 5
4 LPRINT "NO":PRINT #3, "NO"
5 LPRINT:INPUT "ELETKOR: X=",X:LPRINT "ELETKOR: X=";X:PRINT #3, "ELETKOR: X=";X
6 LPRINT:INPUT "TARTAM: N=",N:LPRINT "TARTAM: N=";N:PRINT #3, "TARTAM: N=";N
7 LPRINT:INPUT "KAMATLAB: I=",I:LPRINT "KAMATLAB: I=";I:PRINT #3, "KAMATLAB: I="; I
8 LPRINT:INPUT "ARANYOS KOLTSEG: KK=",KK:LPRINT "ARANYOS KOLTSEG: KK=";KK:PRINT #3,"ARANYOS KOLTSEG: KK=";KK
9 LPRINT:INPUT "KEZDETI KOLTSEG: IK=",IK:LPRINT "KEZDETI KOLTSEG: IK=";IK:PRINT #3,"KEZDETI KOLTSEG: IK=";IK:LPRINT
10 PRINT "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS: 1"
11 PRINT "HALALOZASI BIZTOSITAS: 2"
12 PRINT "VEGYES BIZTOSITAS: 3"
13 PRINT "EVJARADEK: 4"
14 PRINT "FELHALMOZAS: 5"
15 PRINT "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL: 6"
16 PRINT "HALALOZASI BIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL: 7"
18 INPUT "MILYEN FELDOLGOZAS:",Y
19 OPEN "A:HALF" FOR INPUT AS #1
20 DIM L(100,2), A(100),B(100),C(100)
21 A(0)=0
25 FOR H=1 TO 2
30 FOR J=0 TO 100
40 LINE INPUT #1, A$
50 L(J,H)=VAL(A$)
60 NEXT J
65 NEXT H
67 CLOSE #1
70 ON Y GOTO 200, 400,600,800,1000,1200,1400
197 '
198 '          ** EGYSZERU ELETBIZTOSITAS **
199 '
200 A=L(N+X,Z)/L(X,Z)/(1+I)^N:LPRINT "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS":PRINT #3, "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS"
232 P=(A+IK)/(1-KK)
235 GOSUB 2400
240 '
260 A(N)=L(X+N,Z)/L(X,Z):B(N)=1/(1+I)^N-P
279 '
280 GOSUB 2300
329 '
330 MO=A-P:D2=(1/(1+I)^N-A)^2*L(X+N,Z)/L(X,Z)+A*A*(L(X,Z)-L(X+N,Z))/L(X,Z)
360 GOSUB 2200
370 STOP
397 '
398 '          ** HALALOZASI BIZTOSITAS **
399 '
400 A=0:LPRINT "HALALOZASI BIZTOSITAS":PRINT #3, "HALALOZASI BIZTOSITAS"
410 FOR K=0 TO N-1
420 A=A+(L(X+K,Z)-L(X+K+1,Z))/L(X,Z)/(1+I)(K^+1)
425 NEXT K
```

```
432 P=(A+IK)/(1-KK)
435 GOSUB 2400
440 '
460 FOR K=1 TO N
470 A(K)=1-L(X+K,Z)/L(X,Z):B(K)=1/(1+I)^K-P
475 NEXT K
479 '
480 GOSUB 2000
529 '
530 M0=A-P:D2=A*A*L(X+N,Z)/L(X,Z)
535 FOR K=1 TO N
540 D2=D2+(1/(1+I)^K-A)^2*(L(X+K-1,Z)-L(X+K,Z))/L(X,Z)
555 NEXT K
560 GOSUB 2200
570 STOP
597 '
598 '          ** VEGYES BIZTOSITAS **
599 '
600 A=L(N+X,Z)/L(X,Z)/(1+I)^N:LPRINT "VEGYES BIZTOSITAS":PRINT #3,
"VEGYES BIZTOSITAS"
610 FOR K=0 TO N-1
620 A=A+(L(X+K,Z)-L(X+K+1,Z))/L(X,Z)/(1+I)^(K+1)
625 NEXT K
632 P=(A+IK)/(1-KK)
635 GOSUB 2400
640 '
660 FOR K=1 TO N-1
670 A(K)=1-L(X+K,Z)/L(X,Z):B(K)=1/(1+I) K-P
675 NEXT K
677 A(N)=1:B(N)=1/(1+I)^N-P
679 '
680 GOSUB 2000
729 '
730 M0=A-P:D2=L(X+N,Z)/L(X,Z)*(1/(1+I)^N-A) 2
735 FOR K=1 TO N
740 D2=D2+(1/(1+I)^K-A)^2*(L(X+K-1,Z)-L(X+K,Z))/L(X,Z)
755 NEXT K
760 GOSUB 2200
770 STOP
797 '
798 '          ** EVJARADEK **
799 '
800 A=0:LPRINT "EVJARADEK":PRINT #3,"EVJARADEK"
810 FOR K=1 TO N
820 A=A+L(X+K,Z)/L(X,Z)/(1+I)^K
825 NEXT K
832 P=(A+IK)/(1-KK)
835 GOSUB 2400
840 '
860 B(0)=-P:A(N+1)=0
865 FOR K=1 TO N
870 A(K)=L(X+K,Z)/L(X,Z):B(K)=1/(1+I)^K+B(K-1)
875 NEXT K
879 '
880 FOR K=0 TO INT (N/2)-1
890 PRINT USING "###";N-K;:PRINT USING "######.####";A(N-
K)-A(N-K+1);:PRINT USING "######.####";A(N-K);:PRINT
USING "######.###";B(N-K),
893 LPRINT USING "###";N-K;:LPRINT USING "######.####";
A(N-K)-A(N-K+1);:LPRINT USING "######.####";A(N-K);:LPRINT
```

```
USING "######.###";B(N-K),
 895 PRINT #3,USING"###";N-K;:PRINT #3,USING "######.####";
A(N-K)-A(N-K+1);:PRINT #3,USING "######.####";A(N-K);:
PRINT #3,USING "######.###";B(N-K),
 900 PRINT USING "#############";N-INT (N/2+K);:PRINT USING
"######.####";A(N-INT(N/2+K))-A(N-INT(N/2+K)+1);:PRINT
USING "######.####";A(N-INT(N/2+K));:PRINT USING "######.
###";B(N-INT(N/2+K))
 903 LPRINT USING "#############";N-INT(N/2+K);:LPRINT
USING "######.####";A(N-INT(N/2+K))-A(N-INT(N/2+K)+1);:
LPRINT USING "######.####";A(N-INT(N/2+K));:LPRINT USING
"######.###";B(N-INT(N/2+K))
 905 PRINT #3,USING "#############";N-INT(N/2+K);:PRINT #3,
USING "######.####";A(N-INT(N/2+K))-A(N-INT(N/2+K)+1);:
PRINT #3, USING "######.####";A(N-INT(N/2+K));:PRINT #3,
USING "######.###";B(N-INT(N/2+K))
 910 NEXT K
 920 IF N/2=INT(N/2) THEN GOTO 930
 921 PRINT "                                        ",
 922 LPRINT "                                        ",
 923 PRINT #3,"                                      ",
 924 PRINT USING "###################";1;:PRINT USING
"######.####";A(1)-A(2);:PRINT USING "######.####";A(1);:
PRINT USING "######.###"; B(1)
 925 LPRINT USING "####################";1;:LPRINT USIN
"######.####";A(1)-A(2);: LPRINT USING "######.
####";A(1);:LPRINT USING "######.###";B(1)
 926 PRINT #3,USING "#####################";1;:PRINT #3,
USING "######.####";A(1)-A(2);:PRINT #3,USING "######.
####";A(1);:PRINT #3,USING "######.###";B(1)
 929 '
 930 M0=A-P:D2=L(X+N,Z)/L(X,Z)*(B(N)-M0)^2
 935 FOR K=0 TO N-1
 940 D2=D2+(L(X+K-1,Z)-L(X+K,Z))/L(X,Z)*(B(K)-M0)^2
 955 NEXT K
 960 GOSUB 2200
 970 STOP
 997 '
 998 '                  ** FELHALMOZAS **
 999 '
1000 A=0:LPRINT "FELHALMOZAS":PRINT #3,"FELHALMOZAS"
1010 FOR K=0 TO N-1
1020 A=A+L(X+K,Z)/L(X+N,Z)/(1+I)^K*(1+I)^N
1025 NEXT K
1030 LPRINT:PRINT "BRUTTO OSSZEG: S=";A:PRINT #3,"BRUTTO OSSZEG:
S=";A:LPRINT "BRUTTO OSSZEG: S=";A
1032 P=A*(1-KK)-IK*(1+I)^N
1035 LPRINT:PRINT "KIFIZETENDO OSSZEG: P=";P:PRINT #3, "KIFIZETENDO
OSSZEG: P=";P:LPRINT "KIFIZETENDO OSSZEG: P=";P:LPRINT
1040 '
1060 B(0)=P/(1+I)^N
1065 FOR K=1 TO N
1070 B(K)=-1/(1+I)^(K-1)+B(K-1)
1075 NEXT K
1077 A(N)=L(X+N,Z)/L(X,Z)
1079 '
1080 GOSUB 2300
1129 '
1130 M0=(P-A)*L(X+N,Z)/L(X,Z)/(1+I)^N:D2=L(X+N,Z)/L(X,Z)*(B(N-M0)^2
1135 FOR K=1 TO N
```

```
1140 D2=D2+(L(X+K-1,Z)-L(X+K,Z))/L(X,Z)*(B(K)-P/(1+I)^K-M0)^2
1145 NEXT K
1160 GOSUB 2200
1170 STOP
1197 '
1198 '                    ** EGYSZERU ELETBIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL**
1199 '
1200 B=L(N+X,Z)/L(X,Z)/(1+I)^N:LPRINT "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS ÉVEN
KENTI DIJJAL":PRINT #3, "EGYSZERU ELETBIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL"
1205 C=0
1210 FOR K=0 TO N-1
1220 C=C+L(X+K,Z)/L(X,Z)/(1+I)^K
1225 NEXT K
1227 A=B/C
1232 P=(A+IK/C)/(1-KK)
1235 GOSUB 2400
1240 '
1260 B(0)=1/(1+I)^N
1265 FOR K=1 TO N
1270 B(K)=-P/(1+I)^(K-1)+B(K-1)
1275 NEXT K
1277 A(N)-L(X+N,Z)/L(X,Z)
1279 '
1280 GOSUB 2300
1329 '
1370 STOP
1397 '
1398 '          ** HALALOZASI BIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL **
1399 '
1400 B=0:C=0:LPRINT "HALALOZASI BIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL": PRINT
#3,"HALALOZASI BIZTOSITAS EVENKENTI DIJJAL"
1410 FOR K=0 TO N-1
1415 B=B+(L(X+K,Z)-L(X+K+1,Z))/L(X,Z)/(1+I)^(K+1)
1420 C=C+L(X+K, Z)/L(X, Z)/(1+I)^K
1425 NEXT K
1427 A=B/C
1432 P=(A+IK/C)(1-KK)
1435 GOSUB 2400
1440 '
1460 B(0)=1
1465 FOR K=1 TO N
1470 A(K)=1-L(X+K,Z)/L(X,Z):B(K)=-P*1/(1+I)^(K-1)+B(K-1)-1/(1+I)^(K-1)
+1/(1+I)^K
1475 NEXT K
1479 '
1480 GOSUB 2000
1529 '
1530 M0=(A-P)*C:D2=L(X+N,Z)/L(X,Z)*(B(N)-1/(1+I)^N-M0)^2
1535 FOR K=1 TO N
1540 D2=D2+(L(X+K-1,Z)-L(X+K,Z))/L(X,Z)*(B(K)-M0)^2
1555 NEXT K
1560 GOSUB 2200
1570 STOP
1997 '
1998 '
1999 '          ** NYOMTATAS **
2000 FOR K=1 TO INT (N/2)
2010 PRINT USING "###";K;:PRINT USING "######.####";A(K)-A
(K-1);:PRINT USING "######.####";A(K);:PRINT USING "######.
###";B(K),          ú
```

```
2020 LPRINT USING "# # #";K;:LPRINT USING "# # # # # #. # # # #";A(K)
-A(K-1);:LPRINT USING "# # # # # #. # # # #";A(K);:LPRINT USING "# # #
# # #. # # #";B(K),
2030 PRINT #3,USING "# # #";K;:PRINT #3,USING "# # # # # #. # # # #";
A(K)-A(K-1);:PRINT #3, USING "# # # # # #. # # # #";A(K);:PRINT #3,
USING "# # # # # #. # # #";B(K),
2040 PRINT USING "# # # # # # # # # # # #";INT(N/2+K);:PRINT USING "#
# # # # #. # # # #";A(INT(N/2+K))-A(INT(N/2+K)-1);:PRINT USING "# # #
# # #. # # # #";A(INT(N/2+K));:PRINT USING "# # # # # #. # # #";B(INT
(N/2+K))
2050 LPRINT USING "# # # # # # # # # # # #";INT(N/2+K);:LPRINT USING
"# # # # # #. # # # #";A(INT(N/2+K))-A(INT(N/2+K)-1);:LPRINT USING
"# # # # # #. # # # #";A(INT(N/2+K));:LPRINT USING "# # # # # #. # # #";
B(INT(N/2+K))
2060 PRINT #3,USING "# # # # # # # # # # # #";INT(N/2+K);:PRINT #3,
USING "# # # # # #. # # # #";A(INT(N/2+K))-A(INT(N/2+K)-1);:PRINT #3,
USING "# # # # # #. # # # #";A(INT(N/2+K));:PRINT #3, USING "# # # # #
#. # # #";B(INT(N/2+K))
2070 NEXT K
2080 IF N/2=INT(N/2) THEN GOTO 2150
2090 PRINT "                                             ",
2100 LPRINT "                                              ",
2110 PRINT #3,"                                              ",
2120 PRINT USING "# # # # # # # # # # # # # # # # # # # #";N;:PRINT USING
"# # # # # #. # # # #";A(N)-A(N-1);:PRINT USING "# # # # # #. # # # #";
A(N);:PRINT USING "# # # # # #. # # #";B(N)
2130 LPRINT USING "# # # # # # # # # # # # # # # # # # # #";N;:LPRINT
USING "# # # # # #. # # # #";A(N)-A(N-1);:LPRINT USING "# # # # # #.
# # # #";A(N);:LPRINT USING "# # # # # #. # # #";B(N)
2140 PRINT #3,USING "# # # # # # # # # # # # # # # # # # # #";N;:PRINT #3,
USING "# # # # # #. # # # #";A(N)-A(N-1);:PRINT #3,USING "# # # # # #.
# # # #";A(N)(:PRINT #3,USING "# # # # # #. # # #";B(N)
2150 RETURN
2198 '          ** VARHATO ERTEK NYOMTATASA **
2199 '
2200 PRINT :PRINT "VARHATO ERTEK: M0=";:PRINT USING "# # # # # #. #
# # # #";M0
2210 LPRINT:LPRINT "VARHATO ERTEK: M0=";:LPRINT USING "# # # # # #.
# # # # #";M0
2230 PRINT #3,;PRINT #3,"VARHATO ERTEK: M0=";:PRINT #3,USING "# # #
# # #. # # # # #";M0
2240 PRINT :PRINT "SZORASNEGYZET: D2=";:PRINT USING "# # # # # #. #
# # # #":D2
2250 LPRINT:LPRINT "SZORASNEGYZET: D2=";:LPRINT USING "# # # # # #.
# # # # #";D2
2260 PRINT #3,:PRINT #3,"SZORASNEGYZET: D2=";:PRINT #3, USING "# #
# # # #. # # # # #";D2
2270 RETURN
2298 '          ** ROVID NYOMTATAS **
2299 '
2300 PRINT USING "# # # # #";N;:PRINT USING "# # # # # #. # # # #";A(N);
:PRINT USING "# # # # # #. # # # #";A(N);:PRINT USING "# # # # # #. # #
#";B(N)
2310 LPRINT USING "# # # # #";N;:LPRINT USING "# # # # # #. # # # #";
A(N);:LPRINT USING "# # # # # #. # # # #";A(N);:LPRINT USING "# # # # #
#. # # #";B(N)
2320 PRINT #3,USING "# # # # #";N;:PRINT #3,USING "# # # # # #. # # #
#";A(N);:PRINT #3,USING "# # # # # #. # # # #";A(N);:PRINT #3,USING
"# # # # # #. # # #";B(N)
```

```
2330 RETURN
2398 '        ** DIJAK NYOMTATASA **
2399 '
2400 LPRINT:PRINT "NETTO DIJ: A=";:PRINT USING "######.#####"
;A:PRINT #3,"NETTO DIJ: A=";:PRINT #3,USING "######.#####";
A:LPRINT "NETTO DIJ: A=";:LPRINT USING"######.#####";A
2420 LPRINT:PRINT "BRUTTO DIJ: P=";:PRINT USING "######.####
#";P:PRINT #3,"BRUTTO DIJ: P=";:PRINT #3,USING "######.####
#";P:LPRINT "BRUTTO DIJ: P=";:LPRINT USING "######.#####";P:
LPRINT
2430 RETURN
```

IRODALOM

[1] MOGYORÓDI, J. és SOMOGYI, Á., *Valószínűségszámítás II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1982).
[2] NEILL, A., *Life contingencies* (Heinemann, London, 1985).
[3] PAPATRIANDAFYLOU, A. and WATERS, H. R., "Martingales in life insurance", *Scand. Actuarial J.* (1984) 210—230.
[4] RÉNYI, A., *Valószínűségszámítás* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1981).
[5] WATERS, H. R., "The moments and distributions of actuarial functions", *Journal of the Institute of Actuaries* **105** (1978) 61—75.

(Beérkezett: 1988. április 11.)

CSERE KÁLMÁN
IPARI INFORMATIKAI KÖZPONT ÖKONOMETRIAI LABORATÓRIUM
1073 BUDAPEST, AKÁCFA UTCA 51.

A GENERAL MODEL IN THE LIFE ASSURANCE AND UPPER BOUNDS FOR THE PROBABILITY OF THE RUIN

K. CSERE

The known types of the life assurance are collected in a general model and several examples are computed by the aid of a computer-programme.

Upper bounds for the probability of the ruin are given and we illustrate our results with examples given by simulation.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 85—98

A VALÓSZÍNŰSÉGGEL KORLÁTOZOTT LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT EGY DUÁLIS MEGOLDÓALGORITMUSÁNAK KONVERGENCIÁJÁRÓL

KOMÁROMI ÉVA

Budapest

A valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladat konvex, ha a benne foglalt eloszlásfüggvény kvázikonkáv. De még ha a konvexitás biztosított is, a feladat numerikus megoldása meglehetősen nehéz, és ez részben a feltételrendszer nemlineáris voltának tulajdonítható. Minthogy a duális feladatnak csak a célfüggvénye nemlineáris, ezért a duális megközelítés ígéretesebbnek tűnik. A jelen dolgozatban módosítunk egy korábban közölt és mindkét feladat egyidejű megoldására szolgáló módszert, és bizonyítjuk a módszer konvergenciáját ésszerű konvexitási feltételek megléte esetén.

1. Bevezetés

A valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladat a következő:

$$\mathbf{cx} \to \min$$
$$P(\mathbf{A}_1\mathbf{x} \geqq \beta) \geqq p$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b},$$

ahol $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ $m\times n$, illetve $r\times n$-dimenziós determinisztikus mátrixok, $\mathbf{c}$ n-dimenziós, $\mathbf{b}$ r-dimenziós vektorok; β m-dimenziós, valószínűségi változók alkotta vektor adott F folytonos együttes eloszlásfüggvénnyel; P valószínűséget jelöl; $0<p<1$ előírt megbízhatósági szint, és $\mathbf{x}$ n-dimenziós döntési vektor.

A feladatot jelen formájában Prékopa A. fogalmazta meg először [11], egyszerűbb változatai Charnes és Cooper, illetve Miller és Wagner [2], [10] nevéhez fűződnek. A feladat konvex programozási feladattá válik, ha a szóban forgó F valószínűségi eloszlás logaritmikusan konkáv. Prékopa A. eredményei [12] bizonyítják, hogy az eloszlásfüggvények egy jelentős része rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, mindenekelőtt a statisztikában kitüntetett szereppel bíró normális eloszlás. A feladat megoldására azon feltevés mellett, hogy az F eloszlásfüggvény logaritmikusan konkáv, primál típusú algoritmust fejlesztett ki Prékopa A. [13] és Mayer J. [9]. Meg kell jegyeznünk, hogy e feladat esetében egy algoritmus számítógépes implementálhatóságának egyik kulcskérdése a feladatban szereplő eloszlásfüggvény értékeinek numerikus előállítása. Ezért a feladat megoldásáról-megoldhatóságáról szólván ki kell emelnünk Deák I. és Szántai T. munkáit a többdimenziós normális eloszlásfüggvény értékeinek kiszámítására [4], [16], illetve Prékopa A. legújabb eredményeit, amelyek arra irányulnak, hogy egy többdimenziós eloszlásfüggvény adott pontbeli értékére szoros alsó és felső korlátokat határozzon meg lineáris programozási feladatok optimális célfüggvényértékeinek formájában [14], [15].

A jelen dolgozat szerzője a feladatra duális megközelítést alkalmazott. A valószínűségi eloszlás monotonitását kihasználva és a lineáris programozás dualitási tételére támaszkodva megmutatta, hogy a fenti sztochasztikus feladat ekvivalens az alábbi determinisztikus feladattal

(P)
$$g(\mathbf{y}) \to \min$$
$$\mathbf{y} \in Y = \{\mathbf{y} \in R^m:\ F(\mathbf{y}) \geqq p,\quad \mathbf{y} \in \operatorname{supp} F\}.$$

Itt supp F az F eloszlásfüggvény tartója, azaz R^m azon legszűkebb zárt részhalmaza, amelynek az F által generált valószínűségi mértéke 1; $g(\mathbf{y})$ pedig az optimumértéke a $\mathbf{cx} \to \min$, $\mathbf{A}_1\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$, $\mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$ lineáris programozási feladatnak, azaz

$$g(\mathbf{y}) = \begin{cases} \min\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in X(\mathbf{y})\}, & \text{ha } X(\mathbf{y}) \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $X(\mathbf{y}) =: \{\mathbf{x} \in R^n:\ \mathbf{A}_1\mathbf{x} \geqq \mathbf{y},\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\}$.

E feladat duálisa a következőképpen fogalmazható meg:

(D)
$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \max$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geqq 0:\ \mathbf{u} \in R^m,\ \mathbf{v} \in R^r,\ \mathbf{u}\mathbf{A}_1 + \mathbf{v}\mathbf{A}_2 = \mathbf{c}\},$$

ahol

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \inf\{\mathbf{uy} : \mathbf{y} \in Y\} + \mathbf{vb}, & \text{ha } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A következő tétel a (P) és (D) feladatok kapcsolatát vizsgálja. Bizonyítása *Kuhn—Tucker nyeregponttételére* támaszkodik, megtalálható [7]-ben. A tétel egyik feltevése az, hogy F logaritmikusan konkáv, azaz F kielégíti az

$$F(\lambda\mathbf{y}^1 + (1-\lambda)\mathbf{y}^2) \geqq (F(\mathbf{y}^1))^\lambda (F(\mathbf{y}^2))^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenséget minden $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \operatorname{supp} F$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ esetén.

A. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az F valószínűségi eloszlás szigorúan logaritmikusan konkáv, és folytonosan differenciálható a supp F halmaz belsejében. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ optimális megoldása a (D) feladatnak és $u^* \neq \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{u}^*\mathbf{y}$ felveszi a minimumát az Y halmazon, akkor $\mathbf{y}^* = \operatorname{Arg\,min}\{\mathbf{u}^*\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathrm{Y}\}$ optimális megoldása a (P) feladatnak. Máskülönben (P)-nek nincs optimális megoldása.

A (D) feladat önmagában is figyelemre érdemes, [6] a benne foglalt függvények és halmazok tulajdonságait, illetve megoldhatóságát vizsgálja. A szerző duális típusú algoritmust fejlesztett ki a (P) és (D) feladatok egyidejű megoldására azon feltevés mellett, hogy F szigorúan logaritmikusan konkáv és folytonosan differenciálható [7]. A módszer koncepciójában *Frank—Wolfe lineáris approximációs módszeréhez* hasonlatos. Az algoritmus egyik előnye az, hogy minden iterációban alsó és felső korlátot ad a két feladat közös optimális célfüggvény-értékére oly módon, hogy a (D) feladat célfüggvény-értéke szigorúan nő. Az algoritmus konvergenciája abban az esetben bizonyított, ha a (D) megoldáshalmaza korlátos.

A jelen dolgozatban módosítjuk az algoritmust abból a célból, hogy biztosítsuk az eljárás konvergenciáját abban az esetben is, amikor a (D) duális feladat megoldáshalmaza nem korlátos. A 2. részben (D) célfüggvényértékének az algoritmus szempontjából fontos tulajdonságait vizsgáljuk, a 3. részben bemutatjuk az algoritmust és a 4. részben bizonyítjuk a konvergenciáját.

2. Az algoritmus előkészítése: a (D) feladat tulajdonságai

A dolgozatban mindvégig feltesszük, hogy az F *eloszlásfüggvény szigorúan logaritmikusan konkáv és folytonosan differenciálható* a supp F halmaz belsején. PRÉKOPA A. eredményei [12] mutatják, hogy az eloszlásfüggvények széles osztálya eleget tesz ennek a szigorúbb feltevésnek is. Az alább következő gondolatmenetet erre a feltevésre építjük.

Az Y halmaz konvex és zárt, mert $F(\mathbf{y})\geqq p$ maga után vonja, hogy $\ln F(\mathbf{y})\geqq \ln p$ és mert F folytonos. Y alulról korlátos: az $F(\mathbf{y})\geqq p$ egyenlőtlenségből, az eloszlásfüggvény monotonitása miatt következik, hogy $y_i\geqq \operatorname{Arg}[F_i(a_i)=p]$, $i=1,\dots,m$, ahol F_i az i-edik marginális. E tulajdonságok miatt $\inf\{\mathbf{uy}: \mathbf{y}\in Y\}>-\infty$, ha $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$ és az F szigorú logkonkávitása miatt $\mathbf{u}>\mathbf{0}$ esetén $\mathbf{uy}$ felveszi a minimumát egyetlen pontban. Jelöljük ezt a pontot $\mathbf{y}(\mathbf{u})$-val:

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \operatorname{Arg\,min}\{\mathbf{uy}: \mathbf{y}\in Y\}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{u}>\mathbf{0}.$$

Az $\ln F(\mathbf{y})\geqq\ln p$ kielégíti a *Slater feltételt*, mert $p<1$: létezik olyan $\mathbf{y}'\in\operatorname{supp} F$, amelyre $\ln F(\mathbf{y}')>\ln p$. Így a *Kuhn—Tucker optimalitási kritérium* szerint [8] létezik olyan $\delta_0\in R$, hogy δ_0 és $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ kielégítik az alábbi stacionáris pont feladatot:

$$\text{(K—T)} \qquad u_i = \frac{\delta}{F(\mathbf{y})}\frac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_i} \quad i=1,\dots,m$$

$$\delta\geqq 0,\quad F(\mathbf{y})\geqq p,\quad \delta(\ln p-\ln F(\mathbf{y}))=0.$$

A valószínűségelméletből ismert, hogy az F függvény $\dfrac{\partial F(\mathbf{y})}{\partial y_i}$ parciális deriváltja és az $F(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_m|y_i)$ feltételes eloszlásfüggvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\frac{\partial F(y_1,\dots,y_m)}{\partial y_i} = F(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_m|y_i)\cdot f_i(y_i),$$

ahol f_i az i-edik marginális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ez a kapcsolat maga után vonja, hogy

$$y_i(\mathbf{u})\to\sup\{y_i: \mathbf{y}\in\operatorname{supp} F\},\quad \text{ha}\quad u_i\to 0,$$

ahol $\sup y_i$ a $+\infty$ értéket is felveheti, amikor supp F nem korlátos. Ezt figyelembe véve definiáljuk az $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ függvényt a kiterjesztett R^m térben minden $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ esetén. Így

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases}\mathbf{uy}(\mathbf{u})+\mathbf{vb}, & \text{ha}\quad \mathbf{u}\geqq\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{vb}, & \text{ha}\quad \mathbf{u}=\mathbf{0}.\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{u}>\mathbf{0}$ esetén $\mathbf{y}(\lambda\mathbf{u})=\mathbf{y}(\mathbf{u})$, ha $\lambda>0$, $F(\mathbf{y}(\mathbf{u}))=p$ az F monotonitása miatt, és $\delta_0>0$, pontosabban

$$\delta_0 = p\Big(\sum_{i=1}^m u_i\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^m\frac{\partial F(\mathbf{y}(\mathbf{u}))}{\partial y_i}\Big).$$

Így a (K—T) feltételek folytonos egy-egy értelmű megfeleltetést képviselnek az

$\{\mathbf{y}\in \operatorname{supp} F: F(\mathbf{y})=p\}$ és az $\{\mathbf{u}>\mathbf{0}: \sum_{i=1}^{m} u_i=1\}$ halmazok között. Ennélfogva $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ folytonos az $\{\mathbf{u}: \mathbf{u}>\mathbf{0}\}$ halmazon, és $\lim_{\mathbf{u}^k\to\mathbf{u}} \mathbf{y}(\mathbf{u}^k)=\mathbf{y}(\mathbf{u})$, ha $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^k\geqq\mathbf{0}$. Ebből következik, hogy $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ folytonos az $\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}): \mathbf{u}\geqq\mathbf{0}\}$ halmazon. Továbbá, $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ konkáv definíció szerint és $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})$ szigorúan konkáv az $\{\mathbf{u}: \mathbf{u}\geqq\mathbf{0}, \mathbf{u}\neq\mathbf{0}\}$ halmazon abban az értelemben, hogy

$$[\lambda\mathbf{u}^1+(1-\lambda)\mathbf{u}^2]\mathbf{y}(\lambda\mathbf{u}^1+(1-\lambda)\mathbf{u}^2) > \lambda\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}^1)+(1-\lambda)\mathbf{u}^2\mathbf{y}(\mathbf{u}^2),$$

bármely $\mathbf{u}^1\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^1\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^2\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^2\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^1/|\mathbf{u}^1|\neq\mathbf{u}^2/|\mathbf{u}^2|$ esetén. (Jelezzük, hogy az $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})$ függvény ténylegesen differenciálható is a pozitív $\mathbf{u}$ vektorok halmazán [6], ezt a tulajdonságát azonban itt nem használjuk ki.) Ez azt jelenti, hogy ha $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ és $(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)$ optimális megoldásai (D)-nek, és $\mathbf{u}^1\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{u}^2=\varrho\mathbf{u}^1$ valamely $\varrho\geqq 0$ mellett, mert másként $h(\lambda\mathbf{u}^1+(1-\lambda)\mathbf{u}^2, \lambda\mathbf{v}^1+(1-\lambda)\mathbf{v}^2)>\lambda h(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)+(1-\lambda)h(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)= =h(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ állna fenn $0<\lambda<1$ választása esetén.

A következő két lemma az $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})$ konkávitására támaszkodik.

2.1. LEMMA. Ha $\mathbf{u}^1\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}^1\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}^1)$ szigorúan csökkenő függvénye λ-nak és $\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}^1)=\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}^1)$, feltéve, hogy $\mathbf{u}^1/|\mathbf{u}^1|\neq \neq\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, $\lambda>0$.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}^1)<\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1)$, ha $0< <\lambda_2<\lambda_1$. Az alábbi egyenlőtlenségek az $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})$ függvény definíciójára támaszkodnak.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}^1]\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}^1) &< [\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}^1]\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1) = \\
&=[\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1+(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{u}^1]\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1) < \\
&< [\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1]\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}^1)+(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}^1).
\end{aligned}$$

Másodszor, a $\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}^1)=\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}^1)$ egyenlőség abból a tényből következik, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}^1)=\mathbf{y}(\mathbf{u}/\lambda+\mathbf{u}^1)$, ha λ pozitív.

2.2. LEMMA. Ha $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u})+\mathbf{v}^1\mathbf{b}>0$, $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}^1)+\mathbf{v}^1\mathbf{b}<0$ rögzített $\mathbf{u}^1\geqq 0$, $\mathbf{u}^1\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ mellett, akkor létezik olyan $\lambda_0>0$, hogy $h(\mathbf{u}+\lambda_0\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\lambda_0\mathbf{v}^1)=h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy

(i) létezik olyan $\varrho_0>0$, hogy $h(\mathbf{u}+\varrho_0\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho_0\mathbf{v}^1)>h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, továbbá, hogy

(ii) $\lim_{\varrho\to\infty} h(\mathbf{u}+\varrho\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho\mathbf{v}^1) = -\infty$,

amelyek h konkávitása miatt bizonyítják az állítást.

(i) Válasszuk a $\varrho_0>0$ értéket oly módon, hogy az $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\varrho_0\mathbf{u}^1)+\mathbf{v}^1\mathbf{b}=0$ fennálljon. Ilyen ϱ_0 létezik a 2.1. lemma szerint. Minthogy $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|\neq\mathbf{u}^1/|\mathbf{u}^1|$ a lemma feltevése értelmében, ezért $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}+\varrho_0\mathbf{u}^1)>\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})$ a h függvény definíciója szerint. Ez pedig maga után vonja az állítást.

(ii) Válasszuk a ϱ_1, ϱ értékeket oly módon, hogy $\varrho_0<\varrho_1<\varrho$ fennálljon. Ekkor $h(\mathbf{u}+\varrho_1\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho_1\mathbf{v}^1)-h(\mathbf{u}+\varrho\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho\mathbf{v}^1)>(\varrho_1-\varrho)[\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\varrho_1\mathbf{u}^1)+\mathbf{v}^1\mathbf{b}]$ a h függvény definíciója szerint, és minthogy $\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\varrho_1\mathbf{u}^1)+\mathbf{v}^1\mathbf{b}<0$ a 2.1. lemma szerint, ezért

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varrho\to\infty} h(\mathbf{u}+\varrho\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho\mathbf{v}^1) \leqq \\
&\leqq h(\mathbf{u}+\varrho_1\mathbf{u}^1, \mathbf{v}+\varrho_1\mathbf{v}^1)+\lim_{\varrho\to\infty} \{(\varrho-\varrho_1)[\mathbf{u}^1\mathbf{y}(\mathbf{u}+\varrho_1\mathbf{u}^1)+\mathbf{v}^1\mathbf{b}]\} = -\infty.
\end{aligned}$$

A 3. részben közölt algoritmussal a (P) feladatot a (D) megoldása révén kívánjuk megoldani. Az eljárás során szükségünk lesz arra, hogy ellenőrizzük, vajon egy adott $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V$-hez tartozó $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ vektor megengedett megoldása-e a (P)-nek. Értelmeznünk kell azonban a „megengedett" kifejezést, mivel $\mathbf{y}(\mathbf{u})$-t a kiterjesztett $\bar{R}^m$ térben definiáltuk. Az itt következő értelmezésben bevezetjük az „aszimptotikusan megengedett megoldás" kifejezést. Ennek az általunk adott definíciója különbözik mind KARNEY [5], mind BEN ISRAEL, CHARNES és KORTANEK [1] definíciójától, bár a kifejezés bevezetésének a célja igen hasonló. (Az érdeklődő olvasó kedvéért megjegyezzük, hogy az itt közölt (D) feladat egy más megközelítésben a *semi-infinite programozás* fogalmaival is vizsgálható — ez magyarázza hivatkozásunkat a fenti két dolgozatra.)

Rögzítsük a kiterjesztett $\bar{R}^m$ térből vett $\mathbf{y}$ vektort és legyen $I=\{i\colon y_i=+\infty\}$. Definiáljuk az $\mathbf{y}^\gamma \in R^m$ vektort $\gamma \in R$ mellett oly módon, hogy legyen $y_i^\gamma=y_i$, ha $i \notin I$ és $y_i^\gamma=\gamma$, ha $i \in I$. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{y}$ aszimptotikusan megengedett megoldása a (P) feladatnak, ha létezik olyan $\gamma' \in R$, hogy $\mathbf{y}^\gamma \in \operatorname{supp} F$, $X(\mathbf{y}^\gamma)=\{\mathbf{x}\colon \mathbf{A}_1\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}^\gamma, \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$ minden $\gamma \geqq \gamma'$-re és ha $\lim_{\gamma\to\infty} F(\mathbf{y}^\gamma)=p$. Világos, hogy ha $X(\mathbf{y}^\gamma)\neq\emptyset$ minden $\gamma \geqq \gamma'$-re, akkor $X(\mathbf{y}^\gamma)\neq\emptyset$ minden $\gamma \in R$-re, mert ha $\mathbf{x} \in X(\mathbf{y}^{\gamma'})$, $\gamma<\gamma'$ és $i \in I$, akkor az $\mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq \gamma$ szükségszerűen fennáll (ahol $\mathbf{A}_{1i}$ az $\mathbf{A}_1$ mátrix i-edik sora). Mivel $\mathbf{y}^\gamma=\mathbf{y}$, ha $\mathbf{y}$ véges, ezért egy olyan megengedett $\mathbf{y}$ pont, amelyre $F(\mathbf{y})=p$, szintén aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek. Továbbá, (P) bármely aszimptotikusan megengedett $\mathbf{y}$ megoldása felírható $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{u})$ formában, ahol $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^m u_i=1$ — az $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ definíciója és a (K—T) feltételekkel definiált egy-egy értelmű megfeleltetés miatt.

2.3. LEMMA. Legyen $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{u})$ rögzített $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ mellett. A következő két állítás ekvivalens:

(i) $\mathbf{y}$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek és $V\neq\emptyset$.

(ii) Létezik olyan $\gamma_0 \in R$ és $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \in V$ csúcs, hogy minden $\gamma=\gamma_0$-ra $(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ megoldja az alábbi lineáris programozási feladatot

$$\mathbf{u}\mathbf{y}^\gamma+\mathbf{v}\mathbf{b} \to \max, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\lim_{\gamma\to\infty} F(\mathbf{y}^\gamma)=p$ az $\mathbf{y}$ választása miatt. Az (i) állítás azonnal következik (ii)-ből, mert $X(\mathbf{y}^\gamma)\neq\emptyset$, ha $\gamma=\gamma_0$ a lineáris programozás dualitási tétele szerint [3]. Tegyük fel, hogy (i) fennáll. Tegyük fel, hogy $I\neq\emptyset$. Akkor $X(\mathbf{y}^\gamma)\neq\emptyset$ minden $\gamma \in R$ esetén, vagyis a következő két halmaz nem üres:

$$X_1 = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq 0 \ (i\in I),\quad \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq y_i (i \notin I),\quad \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\},$$

$$X_2 = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq 1 \ (i\in I),\quad \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq 0 \ (i \notin I),\quad \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Legyen $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{Arg\,min}\{\mathbf{c}\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in X_2\}$ és $c_0=\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$. (Ilyen $\tilde{\mathbf{x}}$ létezik az LP dualitási tétel szerint, mert $V\neq\emptyset$ a feltevés értelmében.)

Legyen

$$X_0 = \{(\mathbf{x}, x_0) : \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x}-x_0 \geqq 0 \ (i\in I),\quad \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x} \geqq y_i \ (i\notin I),\quad \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq b\}$$

és

$$V_0 = \Big\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V\colon \sum_{i=1}^m u_i = c_0\Big\}.$$

$X_0 \neq \emptyset$, mert $X_1 \neq \emptyset$ és $V_0 \neq \emptyset$, mert $c_0 = \max\left\{\sum_{i=1}^{m} u_i : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V\right\}$

Legyen $\quad (\hat{\mathbf{x}}, \hat{x}_0) \in \operatorname{Arg\,min} \{\mathbf{cx} - c_0 x_0 : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in X_0\}$

és $\quad (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \in \operatorname{Arg\,max} \left\{\sum_{i \notin I} u_i \mathbf{y}_i + \mathbf{vb} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V_0\right\}.$

Akkor $\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} - c_0 \hat{x}_0 = \sum_{i \notin I} \hat{u}_i \mathbf{y}_i + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}$, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbf{c}[\hat{\mathbf{x}} + (\gamma - \hat{x}_0)\tilde{\mathbf{x}}] = \left(\sum_{i \in I} \hat{u}_i\right)\gamma + \sum_{i \notin I} \hat{u}_i \mathbf{y}_i + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}$$

minden $\gamma \in R$ esetén. Minthogy $\hat{\mathbf{x}} + (\gamma - \hat{x}_0)\tilde{\mathbf{x}} \in X(\mathbf{y}^\gamma)$, ha $\gamma - \hat{x}_0 \geqq 0$, ezért $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ maximalizálja az $\mathbf{u}\mathbf{y}^\gamma + \mathbf{vb}$ függvényt a V halmazon, bármely $\gamma \geqq \gamma_0 = \hat{x}_0$ mellett. Továbbá, $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ a V poliedrikus halmaz egy csúcsa, ha V_0 csúcsaként választottuk, mert V_0 a V halmaz egy lapja.

Az LP dualitási elméletének megfelelően a 2.3. lemma maga után vonja, hogy egy $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \in V$, $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$ nem aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\gamma_1 \in R$ és $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ a $V\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geqq \mathbf{0} : \mathbf{zA}_1 + \mathbf{wA}_2 = \mathbf{0}\}$ recessziós kúpjában, hogy $\mathbf{z}\mathbf{y}^\gamma + \mathbf{wb} > 0$ minden $\gamma \geqq \gamma_1$ mellett, vagy ami ezzel ekvivalens, ha $\mathbf{z}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{wb} > 0$.

2.4. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$ az $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \in V$ vektorban. A következő állítások fennállnak:

(i) Ha $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ optimális megoldása (D)-nek, akkor $\mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek.

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{y}$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek. Legyen γ_0 és $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \in V$ a 2.3. lemma (ii) állítása szerint meghatározott. Az $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ optimális megoldása a (D) feladatnak akkor és csak akkor, ha $\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{v}^*\mathbf{b} = \hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}^\gamma + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}$ fennáll minden $\gamma \geqq \gamma_0$ esetén. Ha $\hat{\mathbf{u}} = \varrho\mathbf{u}^*$ $(\varrho \geqq 0)$, akkor $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ optimális megoldása (D)-nek.

Bizonyítás. (i) Ha az állítással ellentétben $\mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$ nem aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek, akkor valamely $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ elemére a $\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geqq \mathbf{0} : \mathbf{zA}_1 + \mathbf{wA}_2 = \mathbf{0}\}$ halmaznak fennáll a $\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{b} > 0$ egyenlőtlenség a 2.3. lemma értelmében. Létezik tehát olyan $\lambda > 0$, hogy $\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^* + \lambda\hat{\mathbf{z}}) + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{b}$ még pozitív, a $h(\mathbf{u}^* + \lambda\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}^* + \lambda\hat{\mathbf{w}}) \geqq h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) + \lambda[\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^* + \lambda\hat{\mathbf{z}}) + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{b}] > h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ egyenlőtlenség tehát fennáll a feltevéssel ellentétben. (Ilyen λ létezik a 2.1. lemma értelmében, ha $\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{u}^*/|\mathbf{u}^*| \neq \hat{\mathbf{z}}/|\hat{\mathbf{z}}|$, és bármely λ megfelelő egyébként, mert akkor $\mathbf{y}(\mathbf{u}^* + \lambda\hat{\mathbf{z}}) = \mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$.)

(ii) Minthogy $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$ aszimptotikusan megengedett, ezért $u_i = 0$ minden $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V$ vektorban azon i indexekre, amelyekre $y_i(\mathbf{u}^*) = \infty$ *Motzkin tétele* értelmében [13]. Így $\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^*\mathbf{y}^\gamma$ minden $\gamma \in R$ mellett, és a

$$\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{v}^*\mathbf{b} \leqq \hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}^\gamma + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b} \quad \left(= \hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}\right) \tag{2.1}$$

egyenlőtlenség fennáll, ha $\gamma \geqq \gamma_0$.

Tegyük fel először, hogy (2.1) fennáll egyenlőség formájában. Akkor minden $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V$ vektorra $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{vb} = \mathbf{u}\mathbf{y}^\gamma + \mathbf{vb} \leqq \mathbf{u}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \mathbf{v}^*\mathbf{b}$. Figyelembe véve azt a tényt, hogy $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}) \leqq \mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ez azt jelenti, hogy $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ optimális.

Tegyük fel másodszor, hogy (2.1) fennáll szigorú egyenlőtlenség formájában. Tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ és $\hat{\mathbf{u}}/|\hat{\mathbf{u}}| \neq \mathbf{u}^*/|\mathbf{u}^*|$, így $h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) < \hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*) + \hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}$. Ha $h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) <$

$<h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, akkor létezik olyan $\delta>0$, hogy $\hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^*+\delta\hat{\mathbf{u}})+\hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}=h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ fennáll, a 2.1. lemma szerint. Legyen $\lambda=1/(1+\delta)$, ha $h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})<h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, és legyen $0<\lambda<1$ tetszőleges, ha $h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})\geqq h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$. Akkor $h(\lambda\mathbf{u}^*+(1-\lambda)\hat{\mathbf{u}}, \lambda\mathbf{v}^*+(1-\lambda)\hat{\mathbf{v}})>h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$, ami azt jelenti, hogy $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ nem optimális.

Tegyük fel végül, hogy $\hat{\mathbf{u}}=\varrho\mathbf{u}^*$ egy $\varrho\geqq 0$ értékre. Akkor $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})=\mathbf{y}(\mathbf{u}^*)$ így $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})=\mathbf{y}^\gamma$ és $\hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}=\max\{\mathbf{u}\mathbf{y}^\gamma+\mathbf{v}\mathbf{b}:\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V\}=\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u})+\mathbf{v}\mathbf{b}$ minden $(\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V$ vektorra, amely bizonyítja a lemma utolsó állítását.

Jelölje V^* a következő halmazt: $V^*=\{\mathbf{z}, \mathbf{w})\geqq\mathbf{0}:\ \mathbf{z}\mathbf{A}_1+\mathbf{w}\mathbf{A}_2=\mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{m} z_i+ + \sum_{i=1}^{n} w_i=1\}$. $V^*=\emptyset$ akkor és csak akkor, ha V korlátos. Tegyük fel, hogy $V^*\neq\emptyset$. A h folytonos függvény felveszi a maximumát a V^* halmazon, mert V^* kompakt.

2.5. LEMMA. Tegyük fel, hogy $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ maximalizálja h-t a V^* halmazon. Ha $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})>0$, akkor (P)-nek nincs aszimptotikusan megengedett megoldása. Ha $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})=0$ és $\hat{\mathbf{z}}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ az egyetlen aszimptotikusan megengedett megoldása a (P) feladatnak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})>0$. Akkor bármely $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{u})$ $(\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}, \mathbf{u}\neq\mathbf{0})$ vektorra igaz, hogy $\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}\geqq\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$, ezért szükségszerűen létezik olyan γ_1, hogy $\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}^\gamma+ +\hat{\mathbf{w}}\mathbf{b}>0$ minden $\gamma\geqq\gamma_1$ esetén. Így az állítás következik a 2.3. lemmából .Tegyük fel most, hogy $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})=0$, $\hat{\mathbf{z}}\neq\mathbf{0}$, és az állítással ellentétben, $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ nem aszimptotikusan megengedett. Akkor $\mathbf{z}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})+\mathbf{w}\mathbf{b}>0$, egy $(\mathbf{z}, \mathbf{w})\in V^*$ vektorra. Ha $\mathbf{z}=\varrho\hat{\mathbf{z}}$ valamely $\varrho\geqq 0$ számra, vagy ha $h(\mathbf{z}, \mathbf{w})=0$, akkor legyen $0<\lambda<1$ tetszőleges. Máskülönben, válasszuk a $\varrho_0>0$ értéket úgy, hogy a $\mathbf{z}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}}+\varrho\mathbf{z})+\mathbf{w}\mathbf{b}=0$ egyenlőség fennálljon (ilyen ϱ_0 létezik a 2.1. lemma szerint) és legyen $\lambda=1/(1+\varrho_0)$. Akkor $h(\lambda\hat{\mathbf{z}}+(1-\lambda)\mathbf{z}, \lambda\hat{\mathbf{w}}+(1-\lambda)\mathbf{w})>0$, amely ellentmond $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ optimalitásának. Ezért $\mathbf{z}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})+\mathbf{w}\mathbf{b}\leqq 0$ minden $(\mathbf{z}, \mathbf{w})\in V^*$ vektorra, így a 2.3. lemma szerint $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek. Az unicitás következik abból a tényből, hogy $\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\mathbf{u})+\hat{\mathbf{w}}\mathbf{b}>\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})+\hat{\mathbf{w}}\mathbf{b}$ minden olyan $\mathbf{u}$ vektorra, amelyre $\mathbf{u}\neq\varrho\mathbf{z}$, $\varrho\geqq 0$.

3. Az algoritmus leírása

Az algoritmus a megengedett irányok elnevezésű módszerek körébe tartozik: a k-adik iteráció a V halmaz egy olyan $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ pontjával kezdődik, amelyben $\mathbf{u}^k\neq\mathbf{0}$, kiválaszt egy $\mathbf{d}^k$ növekedési irányt (az 1. lépésben, ha $\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)$ aszimptotikusan megengedett és a 3. lépésben egyébként), majd meghatározza a ϱ_k lépéshosszot, és végül, létrehozza a következő $(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})$ pontot az $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)+\varrho_k\mathbf{d}^k$ alakban. Az algoritmus által generált $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}$ sorozatban $h(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})>h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$, ha $\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek és $h(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})=h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ egyébként.

Az algoritmus kiindulópontja a V halmaz egy $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$ eleme, amelyben $\mathbf{u}^1\neq\mathbf{0}$. Ha $V\neq\emptyset$, de $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ minden $(\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V$ vektorban, akkor szükségszerűen vagy $(\mathbf{0}, \bar{v})$ optimális megoldása (D) nek, ahol $\bar{\mathbf{v}}\in\operatorname{Arg}\max\{\mathbf{v}\mathbf{b}:\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V\}$, vagy $\mathbf{v}\mathbf{b}$ nem korlátos a V halmazon, amely esetben a (D) feladatnak nincs optimális megoldása. Ennek megfelelően vagy bármely $\mathbf{y}\in Y$ optimális megoldása (P)-nek, mert $\{\mathbf{x}:\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}>\mathbf{0}, \mathbf{A}_2\mathbf{x}\geqq\mathbf{0},\ \mathbf{c}\mathbf{x}=0\}\neq\emptyset$ *Motzkin alternatívatétele* értelmében, azaz $g(\mathbf{y})=\min$

$\{\mathbf{cx}:\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\}$ minden $\mathbf{y} \in R^m$ mellett, vagy $\{\mathbf{y} \in Y:\ X(\mathbf{y}) \neq \emptyset\} = \emptyset$, mert $\{\mathbf{x}: \mathbf{A}_2\mathbf{x} \geqq \geqq \mathbf{b}\} = \emptyset$.

Az algoritmus leírása következik. Az „$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ maximalizálja $\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{v}\mathbf{b}$-t a $V(V^*)$ halmazon" kifejezés azt jelenti, hogy $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ maximalizálja az $\mathbf{u}\mathbf{y}^\gamma + \mathbf{v}\mathbf{b}$ függvényt $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u}^k)$ mellett és minden „elegendően nagy" γ-ra.

1. *Lépés.* Keresendő azon $(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k)$ csúcsa a $V = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geqq \mathbf{0}:\ \mathbf{u}\mathbf{A}_1 + \mathbf{v}\mathbf{A}_2 = \mathbf{c}\}$ halmaznak, amely megoldása az alábbi feladatnak:

$$\mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{v}\mathbf{b} \to \max, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V.$$

Legyen a növekedés iránya: $\mathbf{d}^k = (\bar{\mathbf{u}}^k - \mathbf{u}^k, \bar{\mathbf{v}}^k - \mathbf{v}^k)$. Ha a feladat nem megoldható, az eljárás folytatódik a 3. lépéssel, máskülönben a 2. lépéssel.

2. *Lépés.* Ha $\bar{\mathbf{u}}^k = \varrho\mathbf{u}^k$ egy $\varrho \geqq 0$ értékre, akkor legyen $\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}^k) = \mathbf{y}(\mathbf{u}^k)$, $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = (\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k)$. Ha $h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = \bar{\mathbf{u}}^k\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \bar{\mathbf{v}}^k\mathbf{b}$, akkor az eljárás befejeződik: $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ optimális. (A következtetés a 2.4. lemmára támaszkodik.)

Máskülönben: megválasztandó a λ_k lépéshossz a következő módon:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1, & &\text{ha} \quad h(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k) > h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \\ 0 < \lambda_k &< 1 \text{ tetszőleges,} & &\text{ha} \quad h(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k) = h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \\ \lambda_k &= s_k/(1+s_k), & &\text{ha} \quad h(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k) < h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \end{aligned}$$

ahol $s_k > 0$ kielégíti az

$$\bar{\mathbf{u}}^k\mathbf{y}(\mathbf{u}^k + s_k\bar{\mathbf{u}}^k) + \bar{\mathbf{v}}^k\mathbf{b} = h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$$

egyenlőséget. (Ilyen s_k létezik a 2.1. lemma szerint.)

Legyen $(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1}) = (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) + \lambda_k\mathbf{d}^k$. Az eljárás folytatódik az 1. lépéssel.

3. *Lépés.* Keresendő azon $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$ csúcsa a $V^* = \{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geqq \mathbf{0}:\ \mathbf{z}\mathbf{A}_1 + \mathbf{w}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^m z_i + \sum_{i=1}^r w_i = 1\}$ halmaznak, amely megoldása az alábbi feladatnak:

$$\mathbf{z}\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{w}\mathbf{b} \to \max, \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^*.$$

Legyen a növekedés iránya: $\mathbf{d}^k = (\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$.

Ha $h(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k) > 0$, akkor az eljárás véget ér: h nem korlátos a V halmazon.

Ha $h(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k) = 0$, akkor az eljárás folytatódik a 4. lépéssel.

Ha $h(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k) < 0$, akkor megválasztandó a $\tau_k > 0$ lépéshossz oly módon, hogy kielégítse a

$$h(\mathbf{u}^k + \tau_k\bar{\mathbf{z}}^k, \mathbf{v}^k + \tau_k\bar{\mathbf{w}}^k) = h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$$

egyenlőséget. (Ilyen τ_k létezik a 2.2. lemma szerint.)

Legyen $(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1}) = (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) + \tau_k\mathbf{d}^k$. Az eljárás folytatódik az 1. lépéssel.

4. *Lépés.* Keresendő olyan $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ a $V_k = \{(\lambda, \mathbf{v}) \geqq 0:\ \lambda(\bar{\mathbf{z}}^k\mathbf{A}_1) + \mathbf{v}\mathbf{A}_2 = \mathbf{c}\}$ halmazban, amely megoldása az alábbi feladatnak:

$$\lambda(\bar{\mathbf{z}}^k\mathbf{y}(\bar{\mathbf{z}}^k)) + \mathbf{v}\mathbf{b} \to \max, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \in V_k.$$

Ha van ilyen optimális megoldás, akkor az eljárás véget ér: $(\bar{\lambda}\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{v}})$ optimális megoldása a (D) feladatnak.

Ha $V_k \neq \emptyset$ és $\lambda(\bar{\mathbf{z}}^k \mathbf{y}(\bar{\mathbf{z}}^k)) + \mathbf{vb}$ nem korlátos a V_k halmazon, akkor az eljárás véget ér: h nem korlátos a V halmazon.

Ha $V_k = \emptyset$, akkor az eljárás véget ér: a (D) feladatnak nincs optimális megoldása. Előfordulhat azonban, hogy $\mathbf{y}(\bar{\mathbf{z}}^k)$ aszimptotikusan megengedett megoldása a (P) feladatnak. Ez oly módon ellenőrizhető, hogy megoldjuk a $\mathbf{zy}(\bar{\mathbf{z}}^k) + \mathbf{wb} \to \max$, $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V$ feladatot. Az optimális célfüggvényérték 0 akkor és csak akkor, ha $\mathbf{y}(\bar{\mathbf{z}}^k)$ az egyetlen aszimptotikus megengedett megoldása (P)-nek.

4. Az algoritmus konvergenciája

Ebben a részben feltesszük, hogy az $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}$ sorozat végtelen. Jellemezzük azon iterációkat, amelyekben $(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})$-et a 2. lépésben számoljuk, az $1, 2, \ldots$ indexek K_1 növekvő részsorozatával és jelöljük a megfelelő részsorozatot így: $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}_{K_1}$. Hasonlóan, jellemezzük azon iterációkat, amelyekben $(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})$-et a 3. lépésben számoljuk, az $1, 2, \ldots$ indexek K_2 növekvő részsorozatával és jelöljük a megfelelő részsorozatot így: $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}_{K_2}$. Világos, hogy $K_1 \cup K_2 = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)$ aszimptotikusan megengedett megoldása a (P) feladatnak, ha $k \in K_1$ és nem az, ha $k \in K_2$. (Ezen indexhalmazok bevezetésével a ZANGWILL által alkalmazott jelölésmódot [17] használjuk.)

Jelölje V^0 a V poliedrikus halmaz csúcsainak konvex kombinációi által alkotott halmazt. Így

$$V = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \delta(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \colon (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^0,\ (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^*,\ \delta \geqq 0\}, \quad \text{ha} \quad V^* \neq \emptyset$$

és $V = V^0$, ha $V^* = \emptyset$. Ennek megfelelően

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = (\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k) + \delta_k(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k),$$

ahol

$$(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k) \in V^0, \quad (\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k) \in V^*, \quad \delta_k \geqq 0, \quad \text{ha} \quad K_2 \neq \emptyset, \quad \text{és} \quad (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \in V^0,$$

ha $K_2 = \emptyset$, $k = 1, 2, \ldots$. Az egyszerűség kedvéért $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ fenti alakját használjuk akkor is, ha $K_2 = \emptyset$, de ekkor $\delta_k = 0$, $\hat{\mathbf{z}}^k = \mathbf{0}$ és $\hat{\mathbf{w}}^k = \mathbf{0}$. Mivel V^0 és V^* kompaktak, ezért az $\{(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)\}$ és $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}$ végtelen sorozatoknak van torlódási pontja, legyenek ezek $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$, illetve $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$. Továbbá, $(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)$ V^0 azon csúcsainak konvex kombinációja, amelyekben az $\mathbf{u}$-rész nem $\mathbf{0}$, ezért $\hat{\mathbf{u}}^k \neq \mathbf{0}$ és $\hat{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$. Hasonlóan, $\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$, ha $K_2 \neq \emptyset$. Ha K_1 véges, K_2 végtelen és $N = \max_{k \in K_1} k$, akkor a $\{\delta_k\}_{k > N}$ sorozat szigorúan növekvő. Ezenkívül, ha $k > N$, akkor

$$(\hat{\mathbf{z}}^{k+1}, \hat{\mathbf{w}}^{k+1}) = (\delta_k/\delta_{k+1})(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k) + (\tau_k/\delta_{k+1})(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k), \tag{4.1}$$

ahol τ_k és $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$-t a k-adik iteráció 3. lépésében választottuk, $\delta_{k+1} = \delta_k + \tau_k$.

Tegyük most fel, hogy K_1 véges. Jelölje $(\mathbf{z}^1, \mathbf{w}^1), \ldots, (\mathbf{z}^s, \mathbf{w}^s)$ V^* azon csúcsait, amelyeket végtelen számú iterációban választottunk növekedési irányként a 3. lépésben. Definiáljuk a $k_0 \in K_2$ indexet oly módon, hogy minden $k > k_0$ esetén $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$ ezen csúcsok egyike. Feltehetjük, hogy $k_0 = N$. Definiáljuk a $K(p) \equiv \{1, 2, \ldots\}$ indexhalmazt így: $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k) = (\mathbf{z}^p, \mathbf{w}^p)$ minden $k \in K(p)$ indexre, $p = 1, 2, \ldots, s$. Világos, hogy $K(p)$ végtelen és $\bigcup_{p=1}^{s} K(p) = \{N+1, N+2, \ldots\}$.

A $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$ és τ_k választási módjából következően minden $k \in K(p)$ indexre fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} \geqq \mathbf{z}\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{w}\mathbf{b}, \quad \text{ha} \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^*, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} > 0, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\mathbf{u}^{k+1}) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} < 0, \tag{4.4}$$

$$p = 1, 2, \ldots, s.$$

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk a (4.1)—(4.4) tulajdonságokat.

4.1. Lemma. Tegyük fel, hogy $K_1 \cup K_2$ végtelen. A K_1 sorozat véges akkor és csak akkor, ha a $\{\delta_k\}$ sorozat nem korlátos. Ha K_1 véges, akkor $K_1 = \emptyset$ vagy $K_1 = \{1\}$.

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy K_1 véges és belátjuk, hogy ekkor $\{\delta_k\}$ nem korlátos. Definiáljuk az N indexet, a $(\mathbf{z}^1, \mathbf{w}^1), \ldots, (\mathbf{z}^s, \mathbf{w}^s)$ csúcsokat a fentiek szerint. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $N = 0$.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_k = \delta < \infty$. Akkor szükségszerűen $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = \lim\limits_{k \to \infty} (\tau_k / \delta_{k+1}) = 0$. Legyen $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}$ sorozat egy torlódási pontja. Akkor a sorozat konvergál $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$-hoz (4.1) értelmében, így tehát $\lim\limits_{k \to \infty} (\mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k) = (\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}^1 + \delta\hat{\mathbf{w}})$. Az $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ folytonossága miatt így a (4.2)—(4.4) egyenlőtlenségekből az következik, hogy

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\mathbf{z}\mathbf{y}(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{w}\mathbf{b} \leqq 0 \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^*,$$

$\mathbf{y}(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}})$ tehát aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek.

Fennáll továbbá a következő egyenlőség:

$$\hat{\mathbf{z}}\mathbf{y}(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}) + \hat{\mathbf{w}}\mathbf{b} = 0, \tag{4.5}$$

mert $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ a $(\mathbf{z}^1, \mathbf{w}^1), \ldots, (\mathbf{z}^s, \mathbf{w}^s)$ vektorok konvex kombinációja. Mivel $\mathbf{y}(\mathbf{u}^1)$ nem volt (P)-nek aszimptotikusan megengedett megoldása, ezért $\hat{\mathbf{z}}/|\hat{\mathbf{z}}| \neq \mathbf{u}^1/|\mathbf{u}^1|$, fennáll tehát, hogy

$$\mathbf{u}^1 \mathbf{y}(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}) > \mathbf{u}^1 \mathbf{y}(\mathbf{u}^1). \tag{4.6}$$

A (4.5) és (4.6) állításokból az következik, hogy

$$h(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}^1 + \delta\hat{\mathbf{w}}) > h(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1),$$

ez pedig ellentmond annak a ténynek, hogy $h(\mathbf{u}^1 + \delta\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{v}^1 + \delta\hat{\mathbf{w}}) = h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ minden k indexre az $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ konstrukciója miatt a 3. lépésben.

Másodszor, feltesszük, hogy $\{\delta_k\}$ nem korlátos és belátjuk, hogy ekkor $K_1 = \emptyset$ vagy $K_1 = \{1\}$. Definiáljuk a $K \subset \{1, 2, \ldots\}$ végtelen sorozatot a $\lim\limits_{k \in K} \delta_k = \infty$ relációval. Legyen $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ torlódási pontja az $\{(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)\}_K$ sorozatnak és legyen K_3 a K indexhalmaz azon részhalmaza, amelyre fennáll, hogy az $\{(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)\}_{K_3}$ sorozat $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$-hoz konvergál. Legyen $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ egy torlódási pontja a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}_{K_3}$ sorozatnak, és legyen K_4 a K_3 indexhalmaz azon részsorozata, amelyre fennáll, hogy a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}_{K_4}$ sorozat

$(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$-hoz konvergál. Ekkor a h függvény folytonossága miatt $\lim\limits_{k\in K_4} [h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)/\delta_k] = \lim\limits_{k\in K_4} h(\hat{\mathbf{u}}^k/\delta_k + \hat{\mathbf{z}}^k \hat{\mathbf{v}}^k/\delta_k + \hat{\mathbf{w}}^k) = h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$. Mivel $h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \geqq h(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)$, ezért $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) \geqq 0$. De a $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) > 0$ egyenlőtlenségből az következik, hogy (P)-nek nincs aszimptotikusan megengedett megoldása, a $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) = 0$ egyenlőségből pedig az, hogy (P)-nek legfeljebb egy aszimptotikusan megengedett megoldása van, a 2.5. lemma szerint. Ez pedig éppen az állítás.

4.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy K_1 véges, K_2 végtelen. Legyen $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ egy torlódási pontja a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}$ sorozatnak. Akkor fennáll, hogy $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) = 0$. Ha $\lim\limits_{k\to\infty} (\tau_k/\delta_{k+1}) = 0$, akkor $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ a (P) feladat egyetlen aszimptotikusan megengedett megoldása. Máskülönben (P)-nek nincs aszimptotikusan megengedett megoldása.

Bizonyítás. Definiáljuk a $(\mathbf{z}^1, \mathbf{w}^1), \ldots, (\mathbf{z}^s, \mathbf{w}^s)$ vektorokat és az N indexet a fentiek szerint. Legyen K az $\{1, 2, \ldots\}$ indexhalmaz azon részhalmaza, amelyre fennáll, hogy a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}_K$ sorozat $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$-hez konvergál. Szükségszerűen fennáll, hogy $\lim\limits_{k\in K} [(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)/\delta_k] = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \infty$ a 4.1. lemma szerint, így $\lim\limits_{k\in K} [h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)/\delta_k] = h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ a h függvény folytonossága miatt. Továbbá $h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = h(\mathbf{u}^{N+1}, \mathbf{v}^{N+1})$ az $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ konstrukciója miatt (a 3. lépésben), ezért $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) = 0$.

Ha $\lim\limits_{k\to\infty} (\tau_k/\delta_{k+1}) = 0$, akkor $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$-hoz konvergál maga a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}$ sorozat, (4.1) szerint. Mivel $\mathbf{y}(\mathbf{u}^k) = \mathbf{y}(\mathbf{u}^k/\delta_k)$ és $\lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{u}^k/\delta_k) = \hat{\mathbf{z}}$, ezért a (4.2)—(4.4) egyenlőtlenségekből az következik, hogy

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\mathbf{z}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{w}\mathbf{b} \leqq 0, \quad \text{minden } (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^* \text{ vektorra},$$

így a $(\mathbf{z}^1, \mathbf{w}^1), \ldots, (\mathbf{z}^s, \mathbf{w}^s)$ vektorok $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ konvex kombinációja maximalizálja a h függvényt a V^* halmazon, $h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) = 0$, $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ aszimptotikusan megengedett megoldása (P)-nek, és $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{z}})$ egyetlen a 2.5. lemma értelmében.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} (\tau_k/\delta_{k+1}) \neq 0$. Akkor a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}$ sorozatnak van egy másik, $(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ torlódási pontja, $h(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = 0$ és $\mathbf{z}' \neq \mathbf{0}$. Minthogy $h(\lambda\hat{\mathbf{z}} + (1-\lambda)\mathbf{z}', \lambda\hat{\mathbf{w}} + (1-\lambda)\mathbf{w}') > \lambda h(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) + (1-\lambda)h(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = 0$, ha $0 < \lambda < 1$ és $\hat{\mathbf{z}}/|\hat{\mathbf{z}}| \neq \mathbf{z}'/|\mathbf{z}'|$, és minthogy $h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) < 0$, $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in V^*$ azt jelenti a 2.5. lemma szerint, hogy (P)-nek nincs aszimptotikusan megengedett megoldása, ezért az állítást bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy létezik olyan $(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ torlódási pont, amelyre $\hat{\mathbf{z}}/|\hat{\mathbf{z}}| \neq \mathbf{z}'/|\mathbf{z}'|$. Ez következik.

Legyen $K_3 = \{k \colon k \notin K,\ k-1 \in K\}$. Világos, hogy $K \cap K_3 = \emptyset$. Rögzítsük a p indexet úgy, hogy $K_3 \cap K(p)$ végtelen legyen. A $\{\tau_k/\delta_{k+1}\}_{K_3 \cap K(p)}$ korlátos sorozatnak van τ torlódási pontja. Nyilvánvaló, hogy $\tau > 0$. Legyen a K_4 a $K_3 \cap K(p)$ indexhalmaz olyan részhalmaza, amelyre fennáll, hogy $\lim\limits_{k\in K_4} (\tau_k/\delta_{k+1}) = \tau$. Akkor $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}_{K_4}$ sorozat bármely $(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ torlódási pontjára igaz, hogy

$$(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = [1-\tau](\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) + \tau(\mathbf{z}^p, \mathbf{w}^p).$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{z}'/|\mathbf{z}'| = \hat{\mathbf{z}}/|\hat{\mathbf{z}}|$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{z}'/|\mathbf{z}'| = \mathbf{z}^p/|\mathbf{z}^p|$. De ekkor a (4.3) és (4.4) egyenlőtlenségek $k+1 \in K_4$ mellett maguk után vonják, hogy

$$\mathbf{z}^p \mathbf{y}(\mathbf{z}^p) + \mathbf{w}^p \mathbf{b} = 0.$$

Ez ellentmond $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ 3. lépésbeli konstrukciójának, amelynek megfelelően az eljárás befejeződik (a 4. lépésben), ha $h(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)=0$.

4.2. LEMMA. Tegyük fel, hogy K_1 végtelen. Akkor az $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}_{K_1}$ sorozatnak van torlódási pontja.

Bizonyítás. A $\{\delta_k\}_{K_1}$ sorozat korlátos a 4.1. lemma értelmében, így van δ torlódási pontja. Legyen a K indexhalmaz a K_1 azon részhalmaza, amelyre $\lim_{k\in K} \delta_k=\delta$. Legyen $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ az $\{(\hat{\mathbf{u}}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)\}_K$ sorozat egy torlódási pontja és K_3 olyan részsorozata K-nak, amelyre $\lim_{k\in K_3} (\mathbf{u}^k, \hat{\mathbf{v}}^k)=(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$. Legyen $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$ egy torlódási pontja a $\{(\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)\}_{K_3}$ sorozatnak és $K_4\subset K_3$ olyan indexsorozat, amelyre $\lim_{k\in K_4} (\hat{\mathbf{z}}^k, \hat{\mathbf{w}}^k)=(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}})$. Nyilvánvaló, hogy $\lim_{k\in K_4} (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)=(\hat{\mathbf{u}}+\delta\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}+\delta\hat{\mathbf{w}})$, ez pedig bizonyítja az állítást.

4.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy K_1 legalább két indexet tartalmaz.

(i) Ha az eljárás véges számú iteráció után befejeződik, akkor az utolsó vektor optimális megoldása a (D) feladatnak.

(ii) Ha $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}$ végtelen, akkor a (D) feladat egy optimális megoldásához konvergál.

Bizonyítás. (i) A tétel feltevése értelmében (P)-nek legalább két aszimptotikusan megengedett megoldása van, így a 2.5. lemma szerint $h(\mathbf{z}, \mathbf{w})\leqq 0$ és $h(\mathbf{z}, \mathbf{w})<0$, ha $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$, $(\mathbf{z}, \mathbf{w})\in V^*$. Az eljárás ezért csak a 2. lépésben fejeződhet be, amely maga után vonja az (i) állítást. (ii) K_1 végtelen a 4.1. lemma szerint. Az $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}_{K_1}$ sorozatnak létezik $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ torlódási pontja a 4.2. lemma szerint. Legyen $K\subset\{1, 2, \dots\}$ olyan indexsorozat, amelyre $\lim_{k\in K} (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)=(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$. Akkor

$$\lim_{k\to\infty} h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = \lim_{k\in K} h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}),$$

mert $\{h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}$ monoton és $\{h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\}_{K_1}$ szigorúan növekvő.

Először belátjuk, hogy

$$\text{(a)} \qquad k+1\in K, \quad \text{ha} \quad k\in K_1\cap K.$$

Legyen $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ a V azon csúcsainak egyike, amelyeket végtelen számú k indexre — $k\in K_1\cap K$ — választottunk az 1. lépésben mint $(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k)$ vektort. Legyen K_3 a $K_1\cap K$ azon részhalmaza, amelyre

$$(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k) = (\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \quad \text{minden} \quad k\in K_3\text{-ra}.$$

A λ_k választása miatt a 2. lépésben fennáll, hogy

$$h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) < h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \quad \text{minden} \quad k\in K_3\text{-ra}. \tag{4.7}$$

A $h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)<h(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})<h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ egyenlőtlenségek maguk után vonják, hogy $\lim\,[h(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})-h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)]=0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{k\in K_3} (1-\lambda_k)\{\mathbf{u}^k\mathbf{y}((1-\lambda_k)\mathbf{u}^k+\lambda_k\mathbf{u}^*)-\mathbf{u}^k\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)\} = 0, \tag{4.8}$$

miközben a λ_k 2. lépésben történt választásának megfelelően

$$\mathbf{u}^*\mathbf{y}((1-\lambda_k)\mathbf{u}^k+\lambda_k\mathbf{u}^*)+\mathbf{v}^*\mathbf{b}-\mathbf{u}^k\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)-\mathbf{v}^k\mathbf{b} = 0. \tag{4.9}$$

Mivel $0\leqq\lambda_k\leqq 1$, így $\{\lambda_k\}_{K_3}$-nak van λ torlódási pontja. Megmutatjuk, hogy $\lambda=0$, tehát a $\{\lambda_k\}_{K_3}$ sorozat λ-hoz konvergál.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\lambda>0$. Legyen $(\hat{\hat{\mathbf{u}}}, \hat{\hat{\mathbf{v}}})=(1-\lambda)(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})+$ $+\lambda(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$.

Ha $\lambda=1$, akkor $h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)=h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ (4.9) miatt, ami ellentmond (4.7)-nek.

Ha $0<\lambda<1$, akkor $\hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\hat{\hat{\mathbf{u}}})=\hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})$ (4.8) miatt. Ezért $\hat{\hat{\mathbf{u}}}/|\hat{\hat{\mathbf{u}}}|=\hat{\mathbf{u}}/|\hat{\mathbf{u}}|$, így $\mathbf{u}^*/|\mathbf{u}^*|=$ $=\hat{\mathbf{u}}/|\hat{\mathbf{u}}|$, és $h(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)=h(\hat{\hat{\mathbf{u}}}, \hat{\hat{\mathbf{v}}})$ (4.9) miatt, ami ellentmond (4.7)-nek. Így $\lambda=0$,

(4.10) $$\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{v}^*\mathbf{b} = h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$$

(4.9) miatt, $\lim_{k\in K_3} (\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1}) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$, $k+1\in K$, ha $k\in K_3$.

Minthogy ez a megfontolás V minden olyan csúcsára érvényes, amelyet végtelen számú iterációban kaptunk az 1. lépésben mint $(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k)$ vektort, $k\in K_1\cap K$, ezért az (a) állítást bizonyítottuk.

Másodszor belátjuk, hogy $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ optimális. Minthogy

$$\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)+\mathbf{v}^*\mathbf{b} \geqq \mathbf{u}\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)+\mathbf{v}\mathbf{b}$$

fennáll minden $(\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V$, $k\in K_3$ esetén az $(\bar{\mathbf{u}}^k, \bar{\mathbf{v}}^k)=(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ választás miatt az 1. lépésben, ezért

$$\mathbf{u}^*\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{v}^*\mathbf{b} \geqq \mathbf{u}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{v}\mathbf{b}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})\in V$$

az $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ folytonossága miatt. Így, a 2.4. lemma szerint $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ optimális volta (4.10)-ből következik.

Végül belátjuk, hogy

(b) $$k+1\in K, \quad \text{ha} \quad k\in K_2\cap K.$$

Ha K_2 végtelen, akkor $K_2\cap K$ végtelen (a) szerint. Tegyük fel, hogy $K_2\cap K$ végtelen. Legyen $(\mathbf{z}^*, \mathbf{w}^*)$ a V^* azon csúcsainak egyike, amelyeket végtelen számú iteráció 3. lépésében kaptunk mint $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$ vektorokat, $k\in K_2\cap K$. Válasszuk a $K_4\subset K_2\cap K$ indexhalmazt oly módon, hogy

$$(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k) = (\mathbf{z}^*, \mathbf{w}^*), \quad \text{minden } k\in K_4 \text{ esetén.}$$

Ekkor $(\bar{\mathbf{z}}^k, \bar{\mathbf{w}}^k)$ választása miatt

(4.11) $$h(\mathbf{z}^*, \mathbf{w}^*) < 0,$$

továbbá $\mathbf{z}^*\mathbf{y}(\mathbf{u}^k)+\mathbf{w}^*\mathbf{b}>0$, ha $k\in K_4$, így $\mathbf{z}^*\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{w}^*\mathbf{b}\geqq 0$. De $\mathbf{z}^*\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{w}^*\mathbf{b}\leqq 0$, mert $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$ optimális megoldása a (D) feladatnak, így $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})$ aszimptotikusan megengedett megoldása a (P) feladatnak.

Ennélfogva

(4.12) $$\mathbf{z}^*\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\mathbf{w}^*\mathbf{b} = 0.$$

Mivel a $\{\tau_k\}_{K_4}$ sorozat korlátos a 4.1. lemma értelmében, ezért van τ torlódási pontja. Megmutatjuk, hogy $\tau=0$, tehát a $\{\tau_k\}_{K_4}$ sorozat τ-hoz konvergál. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy $\tau>0$. Minthogy $h(\mathbf{u}^k+\tau_k\mathbf{z}^*, \mathbf{v}^k+\tau_k\mathbf{w}^*)=h(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$ a τ választása miatt a 3. lépésben, ezért

(4.13) $$h(\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{z}^*, \hat{\mathbf{v}}+\tau\mathbf{w}^*) = h(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$$

a h folytonossága miatt. Továbbá, $\hat{\mathbf{u}}/|\hat{\mathbf{u}}|\neq\mathbf{z}^*/|\mathbf{z}^*|$ (4.11) és (4.12) értelmében, ezért

$$h(\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{z}^*, \hat{\mathbf{v}}+\tau\mathbf{w}^*) < [\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{z}^*]\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+[\hat{\mathbf{v}}+\tau\mathbf{w}^*]\mathbf{b}.$$

Ez ellentmond (4.13)-nak, mert $[\hat{\mathbf{u}}+\tau\mathbf{z}^*]\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+[\hat{\mathbf{v}}+\tau\mathbf{w}^*]\mathbf{b}=\hat{\mathbf{u}}\mathbf{y}(\hat{\mathbf{u}})+\hat{\mathbf{v}}\mathbf{b}$ (4.12) szerint. Így $\tau=0$, $\lim_{k\in K_4} (\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1})=(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$, $k+1\in K$, ha $k\in K_4$.

Minthogy ez a megfontolás V^* minden olyan csúcsára érvényes, amelyet végtelen számú iterációban kaptunk a 3. lépésben mint $(\bar{z}^k, \bar{w}^k)$ vektort, $k \in K_2$, ezért a (b) állítást és így az (ii) állítást bizonyítottuk.

IRODALOM

[1] BEN ISRAEL, A., CHARNES, A. and KORTANEK, K. O., "Asymptotic duality in semi-infinite programming and the convex core topology", *Rendiconti di Matematica* 4 (Serie VI) (1971).

[2] CHARNES, A. and COOPER, W. W., "Chance constrained programming", *Management Science* 6 (1959) 73—89.

[3] DANTZIG, G. B., *Linear Programming and Extensions* (University Press, Princeton, NJ, 1963).

[4] DEÁK, I., "Computing probabilities of rectangles in case of multinormal distributions", *Journal of Statistical Computation and Simulation* 26 (1986) 101—114.

[5] KARNEY, D. F., "Duality gaps in semi-infinite linear programming — an approximation problem", *Mathematical Programming* 20 (1981) 129—143.

[6] KOMÁROMI, É., "On properties of the probabilistic constrained linear programming problem and its dual", *Journal of Optimization Theory and Applications* 55 (1987) 377—390.

[7] KOMÁROMI, É., "A dual method for probabilistic constrained problems", *Mathematical Programming Study* 28 (1986) 94—112.

[8] MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming* (McGraw-Hill, New York, 1969).

[9] MAJER, J., "A nonlinear programming method for the solution of a stochastic programming model of A. Prékopa", in: *Survey of Mathematical Programming, Proceedings of the 9th Mathematical Programming Symposium* ed. A. Prékopa, Vol. 2. (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1979).

[10] MILLER, B. L. and WAGNER, H. M., "Chance constrained programming with joint constraints", *Operations Research* 13 (1965) 930—945.

[11] PRÉKOPA, A., "Contributions to the theory of stochastic programming", *Mathematical Programming* 4 (1973) 202—221.

[12] PRÉKOPA, A., "On logarithmic concave measures and functions", *Acta Scientiarum Mathematicarum* 34 (1973) 335—343.

[13] PRÉKOPA, A., „Eine Erweiterung der sogenannten Methode der zulassigen Richtungen der nichtlinearen Optimierung auf den Fall quasikonkaver Restriktionen", *Mathematische Operationsforschung und Statistik* 5 (1974) 281—293.

[14] PRÉKOPA, A., "Sharp bounds on probabilities using linear programming", RUTCOR Research Report No. 19—86, 1986. augusztus.

[15] PRÉKOPA, A., "Boole-Bonferroni inequalities and linear programming", *Operations Research,* megjelenés alatt.

[16] SZÁNTAI, T., "Calculation of the multivariate probability distribution function values and their gradients", WP—87—82, IIASA, Laxenburg.

[17] ZANGWILL, W. I., *Nonlinear Programming* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969).

(Beérkezett: 1988. február 8.)

KOMÁROMI ÉVA
ORSZÁGOS VEZETŐKÉPZŐ KÖZPONT
1087 BUDAPEST, KÖNYVES KÁLMÁN KRT. 48—52.

ON THE CONVERGENCE OF A DUAL ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF THE PROBABILISTIC CONSTRAINED LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

É. KOMÁROMI

The probabilistic constrained linear programming problem is convex if the contained probability distribution function is quasiconcave. Even if the convexity holds the numerical solution of the problem is problematic. The difficulties are mainly caused by the nonlinear constraint in the problem. As the dual problem has only a nonlinear objective function the dual approach seems to be more useful. In the paper we modified an earlier algorithm which solves both problems simultaneously The convergence of the algorithm is also proved if some reasonable convexity conditions are satisfied.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 99—117

A KEVERÉSI FELADAT MATEMATIKAI MODELLJEIRŐL

KLAFSZKY EMIL* MAYER JÁNOS* TERLAKY TAMÁS*

Miskolc Budapest Budapest

Cikkünkben a keverési probléma különböző lehetséges megoldásait vizsgáljuk. A teljesség igénye nélkül öt lehetséges távolságot használva öt különböző modellt konstruálunk, vizsgáljuk ezek tulajdonságait, egymáshoz való kapcsolatát.

A *variációs* és a *Szmirnov-távolság* alkalmazásával lineáris programozási feladatot, a *Pearson eltérést* használva kvadratikus programozási feladatot, a *Hellinger-távolságot* használva l_p programozási feladatot kapunk, míg a *Kullback—Leibler-féle információ divergencia* geometriai programozási feladatra vezet.

Végül közöljük a különböző modellek megoldása során nyert számítástechnikai tapasztalatainkat.

1. Bevezetés

Keverési problémák a gyakorlati élet számtalan területén felmerülnek. A teljesség igénye nélkül csak kettőt említünk példaként.

— *benzinkeverés:* különböző paraméterű szénhidrogén-párlatokból kikeverendő a kívánt (előírt) minőségi tulajdonságú anyagot legjobban közelítő termék.

— *betonadalék-keverés:* különböző szemcseeloszlású sóderfajtákból kikeverendő az adott betontípushoz az ideálisat legjobban megközelítő szemcseösszetételű sóder.

Természetesen tetszőleges vegyszerek, folyadékok, gázok, illetve szemcsés anyagok keverése is matematikailag azonos feladatra vezet.

A fenti keverési feladat matematikai modelljeivel, illetve azok elemzésével foglalkozunk cikkünkben.

A második fejezetben megfogalmazzuk a keverés általános matematikai modelljét, valamint ismertetjük az általunk használt eltéréseket, melyeket CSISZÁR [1, 2] foglalt össze az *f-eltérések* fogalomkörébe. A *Szmirnov-eltérés* RÉNYI [9] könyvében található. A harmadik fejezetben részletesen vizsgáljuk, jellemezzük az egyes modelleket, specialitásukat, és rámutatunk a modellek között fennálló kapcsolatra. Végül közöljük számítási, számítástechnikai tapasztalatainkat, a programozás során felmerült nehézségeket és azok megoldási módját.

Mielőtt rátérnénk a modellek ismertetésére, megemlítjük, hogy a keverési feladat inverzével, nevezetesen kevert eloszlások szétválasztásával foglalkozott MEDGYESSY [6].

* A kutatás támogatása részlegesen — OTKA 1049 — alapján történt.

2. A keverés matematikai modellje, f-eltérések

Ebben a fejezetben a keverés általános matematikai modelljét ismertetjük, majd a matematikai statisztikában használatos eltérések közül közöljük az általunk vizsgált öt eltérést.

A matematikai modell

Legyenek $\mathbf{a}^{(i)}=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots, \alpha_{in})$ $i=1, \ldots, m$ empirikus sűrűségértékek. Jelöljük az ezekből mint sorokból alkotott mátrixot $\mathbf{A}$-val, azaz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(1)}\\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\end{pmatrix}=(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ahol $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ az oszlopvektorokat jelöli. Ezekkel az eloszlásokkal kívánjuk közelíteni a $\mathbf{c}=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ eloszlást. Ekkor nyilván $\mathbf{A}\geqq 0$, $\mathbf{c}\geqq 0$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{1}=1$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{1}=1$, ahol $\mathbf{1}=(1, \ldots, 1)$ az n, illetve m dimenziós, csupa egyesből álló vektort jelöli.

Feladat: Olyan $\mathbf{x}\in R^m$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{1x}=1$, $\mathbf{x}\geqq\mathbf{0}$ (keverési feltételek) és az $\mathbf{xA}=\mathbf{z}$ keverék valamilyen értelemben „legjobban" közelíti a célként megjelölt sűrűséget, azaz melyre $D(\mathbf{z}\|\mathbf{c})$ minimális.

Itt $D(\mathbf{z}\|\mathbf{c})$ a két eloszlás eltérését mérő függvényt jelöli. Attól függően, hogy milyen $D(\mathbf{z}\|\mathbf{c})$ eltérést használunk, különböző modelleket kapunk.

Eltérések

CSISZÁR [1, 2] dolgozatában megmutatta, hogy az irodalomban, az eloszlások eltérésére vonatkozó mértékszámok nagy része az úgynevezett *f-eltérések* családjába tartozik. Mi ezek közül fogunk néhányat vizsgálni.

Legyen f a pozitív félegyenesen értelmezett konvex függvény, amelyre $f(1)=0$, és megállapodás szerint

$$f(0)=\lim_{u\to 0^+} f(u);\quad 0\cdot f\left(\frac{a}{0}\right)=a\cdot\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

2.1. *Definíció.* Tetszőleges $p=(p_1, \ldots, p_n)$ és $q=(q_1, \ldots, q_n)$ eloszlások f-eltérésén a következő mennyiséget értjük:

$$D_f(p\|q)=\sum_{j=1}^{n} q_j f\left(\frac{p_j}{q_j}\right).$$

Az f függvény különböző megválasztásának megfelelően kapjuk a különböző eltéréseket.

Variációs távolság (l_1 norma)

Legyen $f(u)=|u-1|$, így

$$D_f(p\|q)=\sum_{j=1}^{n} q_j\left|\frac{p_j}{q_j}-1\right|=\sum_{j=1}^{n}|p_j-q_j|.$$

Pearson-féle χ^2 eltérés (Euklideszi norma)

Legyen $f(u)=(u-1)^2$, így

$$D_f(p\|q) = \sum_{j=1}^{n} q_j\left(\frac{p_j}{q_j}-1\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{(p_j-q_j)^2}{q_j}.$$

Kullback—Liebler-féle „diszkrimináló információ" (entrópia)

Legyen $f(u)=u\log u$ és megállapodás szerint

$$0\cdot\log\frac{0}{a} = \lim_{u\to 0^+} u\log\frac{u}{a} = \lim_{u\to 0^+} u\log u = 0 \quad \text{és}$$

$$a\log\frac{a}{0} = \lim_{u\to 0^+} a\log\frac{a}{u} = a\log a - a\lim_{u\to 0^+}\log u = +\infty.$$

Ekkor

$$D_f(p\|q) = \sum_{j=1}^{n} q_j\frac{p_j}{q_j}\log\frac{p_j}{q_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j\log\frac{p_j}{q_j}.$$

Ezt a mennyiséget szokás *információdivergenciának* vagy röviden *divergenciának* nevezni.

Hellinger-távolság

Legyen $f(u)=1-\sqrt{u}$, ekkor

$$D_f(p\|q) = \sum_{j=1}^{n} q_j\left(1-\sqrt{\frac{p_j}{q_j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} q_j - \sum_{j=1}^{n}\sqrt{p_jq_j} = 1-\sum_{j=1}^{n}\sqrt{p_jq_j}.$$

Végül ötödikként egy, az eddigiektől eltérő, de szintén nevezetes eltérést definiálunk. Ez az eloszlások eltérésének mérésére használatos *Szmirnov-eltérés*, amelyet például Rényi [8] könyvében is megtalálhatunk.

Szmirnov-távolság (l_∞ norma)

Legyenek $P=(P_1, \dots, P_n)$ és $Q=(Q_1, \dots, Q_n)$ eloszlások $\left(\text{azaz } P_j=\sum_{i=1}^{j} p_i\right.$ és $\left.Q_j=\sum_{i=1}^{j} q_i \; j=1, \dots, n\right)$. A P és Q eloszlások *Szmirnov-távolsága* az alábbi érték.

$$D(P\|Q) = \max_{1\le j\le n}|P_j-Q_j|.$$

A következő fejezetben a fenti eltérések segítségével konstruált modelleket jellemezzük. Jelöléseinkről megemlítjük, hogy a mátrixokat latin nagy betűkkel, a vektorokat latin kisbetűkkel, míg a vektorok, mátrixok komponenseit a megfelelő görög betűkkel jelöljük.

A továbbiakban, a tömörség kedvéért a *Variációs, Pearson-* stb. *eltérésekkel* konstruált modelleket röviden *Variációs modellnek, Pearson-modellnek* stb. nevezzük.

3. A keverési modellek és a modellek elemzése

Rendre vizsgáljuk az ismertetett távolságokkal definiált modelleket. A duális feladatokat is megfogalmazva megoldási eljárásokat is javaslunk. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltételezzük, hogy $\mathbf{c}>\mathbf{0}$.

3.1. *Variációs modell*

A fenti feladat célfüggvényeként a variációs távolságot tekintve az alábbi modellt kapjuk:

minimalizálandó

(3.1) $$\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{x}\mathbf{a}_j-\gamma_j|$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = 1$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{x}\mathbf{a}_j-\gamma_j=\zeta_j^- -\zeta_j^+$; $\zeta_j^+, \zeta_j^- \geqq 0$ jelölést bevezetve a (3.1) feladat átfogalmazható az alábbi ekvivalens lineáris programozási feladattá.

minimalizálandó

$$\mathbf{1}\mathbf{z}^+ + \mathbf{1}\mathbf{z}^-$$

feltéve, hogy

(3.2) $$\mathbf{A}^T\mathbf{x}+\mathbf{z}^+ -\mathbf{z}^- = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = 1$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0};\quad \mathbf{z}^+ \geqq \mathbf{0};\quad \mathbf{z}^- \geqq \mathbf{0}.$$

A (3.2) LP feladat duálisa az alábbi

maximalizálandó

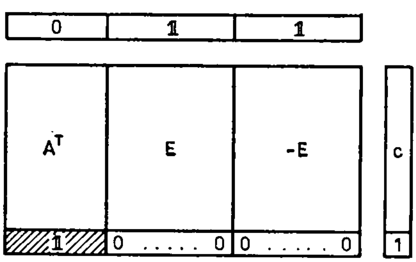
$$\mathbf{c}\mathbf{y}+\eta$$

feltéve, hogy

(3.3) $$\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{1}\eta \leqq 0$$

$$-\mathbf{1} \leqq \mathbf{y} \leqq \mathbf{1}.$$

A (3.2) és (3.3) feladatok mátrixstruktúráját az 1. ábrán láthatjuk.



1. ábra

A (3.2) LP feladat specialitása, hogy az $(n+1)$-edik egységvektor kivételével pozitív és negatív egységmátrixot is tartalmaz. Ezt kihasználva egyetlen pivot művelet segítségével megengedett induló megoldást kapunk, azaz a szimplex módszer első fázisa kikerülhető. Ugyanis az $\mathbf{A}^T$ alatti egyesek valamelyikét (akár az elsőt) pivot elemként választva a tábla $\pm\mathbf{E}$ mátrixai nem változnak. Ekkor ezt a vektort, az új jobb oldal vektor koordinátái előjelének megfelelően a $(+\mathbf{e}_i)$, illetve a $(-\mathbf{e}_i)$ egységvektorokkal kiegészítve triviális módon egy megengedett induló bázist kapunk.

Így a variációs modellt olyan lineáris programozási feladattá fogalmaztuk át, ahol könnyen tudtunk megengedett induló bázist adni.

Megjegyzés: Belátható, hogy amennyiben a duál feladatot kívánjuk megoldani szimplex módszerrel, akkor felső korláttechnikát célszerű alkalmazni, valamint a felső korlátos változók alsó (-1) szinten való rögzítése mellett a slack változók megengedett induló bázist adnak.

Végül a $\|\mathbf{p}\|_A = \sum_{j=1}^{n} |p_j|$ és $\|\mathbf{p}\|_C = \max_j |p_j|$ jelöléseket bevezetve a (3.1) és (3.3) duális feladatok az alábbi alakot öltik, amelyek az l_1 és l_∞ normák duális kapcsolatának egy új arculatát mutatják.

PRIMÁL	DUÁL
$\min \|\mathbf{xA}-\mathbf{c}\|_A$	$\max \mathbf{cy}+\eta$
$\mathbf{1x} = 1$	$\mathbf{Ay}+\mathbf{1}\eta \leqq 0$
$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\|\mathbf{y}\|_C \leqq 1.$

3.2. *Pearson-modell*

Ha a *Pearson-féle χ^2 eltérésben* mérjük a keverék és a célul kitűzött eloszlás távolságát, akkor a következő feladatot kapjuk.

minimalizálandó

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{A}-\mathbf{c}^T)\mathrm{S}(\mathbf{A}^T\mathbf{x}-\mathbf{c}),$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{1x} = 1 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$

ahol $\mathrm{S}: n\times n$ méretű, $\mathrm{S}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\gamma_i}\right)$ mátrix, azaz $\sigma_{ii}=\frac{1}{\gamma_i}$, $i=1,\dots,n$

és

$$\sigma_{ij} = 0, \quad i=1,\dots,n; \quad j=1,\dots,n \quad \text{ha} \quad i\neq j.$$

A $\mathbf{z}=\mathbf{xA}$ jelölést bevezetve a célfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$(\mathbf{z}^T-\mathbf{c}^T)\mathrm{S}(\mathbf{z}-\mathbf{c}) = \mathbf{z}^T\mathrm{S}\mathbf{z}-2\mathbf{z}^T\mathrm{S}\mathbf{c}+\mathbf{c}^T\mathrm{S}\mathbf{c}.$$

Felhasználva az $\mathrm{S}\mathbf{c}=\mathbf{1}$, valamint a $\mathbf{z1}=1$ összefüggéseket, valamint az így kapott konstans tagoktól eltekintve az alábbi, (3.4)-gyel ekvivalens kvadratikus programozási feladatot kapjuk.

minimalizálandó

$$\frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{S}\mathbf{z}$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{x}\mathbf{A}-\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{3.5}$$
$$\mathbf{1}\mathbf{x} = 1$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Ennek duálja, mint ahogy a TERLAKY [11] cikkében is megtalálható

maximalizálandó

$$\eta-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{S}\mathbf{z}$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{y}+\eta\mathbf{1} \leqq 0 \tag{3.6}$$
$$\mathbf{y}+\mathbf{S}\mathbf{z} = 0.$$

Ismert, hogy a (3.5), (3.6) feladatok esetén a primál és duál megengedettségi feltételek mellett az optimalitási (komplementaritási) feltétel az alábbi

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}\mathbf{y}+\eta\mathbf{1}) = 0. \tag{3.7}$$

Észrevétel: Vegyük észre, hogy minden optimális megoldás esetén

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \leqq 0,$$

ugyanis optimális megoldás esetén $\mathbf{y}=-\mathbf{S}\mathbf{z}=-\mathbf{S}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$, amiből $\mathbf{A}\mathbf{y}=-\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^T\mathbf{x}\leqq\mathbf{0}$, mivel $\mathbf{A}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{S}\geqq\mathbf{0}$, $\mathbf{x}\geqq\mathbf{0}$.

(Ezt az észrevételt a *Kullback—Leibler modell* megoldása során fogjuk felhasználni.)

Mint általában a kvadratikus programozási feladatokat, így a *Pearson-modellt* is lineáris komplementaritási feladatként oldjuk meg. A megfelelő lineáris komplementaritási feladat az alábbi.

$$\mathbf{x}\mathbf{A}-\mathbf{z} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\mathbf{x} = 1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{1}\eta+\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{y}+\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = 0.$$

A $\mathbf{z}=\mathbf{x}\mathbf{A}$ és $\mathbf{y}=-\mathbf{S}\mathbf{z}$ helyettesítéseket elvégezve, a $\mathbf{P}=\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^T$ jelölést bevezetve feladatunk az alábbi ekvivalens alakot ölti:

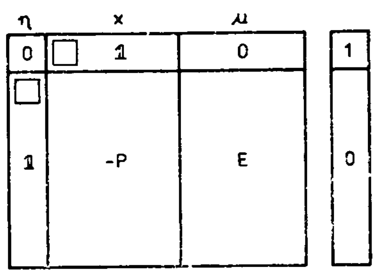
$$\mathbf{1x} = 1$$

(3.8)
$$\mathbf{1}\eta - \mathbf{Px} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} \geqq 0; \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

A (3.8) feladat adatstruktúráját a 2. ábrán láthatjuk.



2. ábra

Ekkor az $(\eta, \xi_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ változókat bázisváltozóknak választva, azaz a 2. ábrán □-val jelölt két helyen pivotálva kapjuk a LEMKE [5] módszerhez szükséges induló bázist. Megjegyezzük, hogy η szabad változó, és így a feladat megoldására általunk használt *Lemke-módszer*, a szimplex módszerhez hasonlóan úgy módosul, hogy η nem távozik a bázisból.

3.3. *A Kullback—Leibler modell*

Információdivergenciát tekintve a célul kijelölt és a keverékeloszlások eltérésének a következő feladatot kapjuk:

minimalizálandó

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j \log \frac{\zeta_j}{\gamma_j}$$

feltéve, hogy

(3.9)
$$\mathbf{xA} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{1x} = 1$$

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{xA}=\mathbf{z}$ összefüggés miatt $\mathbf{z}\geqq\mathbf{0}$ feltételt is megkövetelhetjük. Továbbá $\mathbf{1x}=1$ maga után vonja $\mathbf{1z}=1$ teljesülését is, és ez fordítva is igaz. Így a célfüggvény átalakításával az alábbi ekvivalens megfogalmazáshoz jutunk.

minimalizálandó

$$-\sum_{j=1}^{n}\zeta_j \log\gamma_j+\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\log\zeta_j$$

feltéve, hogy

(3.10)
$$\mathbf{xA}-\mathbf{z}=\mathbf{0}$$
$$\mathbf{1z}=1$$
$$\mathbf{x}\geqq\mathbf{0},\quad \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}.$$

Ebben a felírásban már látható, hogy (3.10) feladat egy geometriai programozási feladat, melynek duálja az alábbi [KLAFSZKY [4]]:

maximalizálandó

$$\eta$$

feltéve, hogy

(3.11)
$$e^{\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{y}}\leqq 1,\quad i=1,\dots,m$$
$$e^{\eta}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e^{-\eta_j}\leqq 1.$$

Itt az első feltételcsoport feltételei valójában lineárisok (vehetjük mindkét oldal logaritmusát) továbbá az utolsó feltétel optimális megoldásnál nyilván egyenlőséggel teljesül, amelyből η-t kifejezve a következő feladatot nyerjük:

maximalizálandó

$$-\log\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e^{-\eta_j}$$

feltéve, hogy

(3.12)
$$\mathbf{Ay}\leqq\mathbf{0}.$$

A negatív logaritmus maximalizálása ekvivalens az argumentum minimalizálásával, azaz feladatunk:

minimalizálandó

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e^{-\eta_j}$$

feltéve, hogy

(3.13)
$$\mathbf{Ay}\leqq\mathbf{0}.$$

Feladatunk megoldását előkészítendő, tekintsük először a (3.10), (3.11) feladatok egyensúlyi rendszerét.

$$\mathbf{xA}-\mathbf{z}=\mathbf{0}\quad \mathbf{Ay}\leqq\mathbf{0},$$
$$\mathbf{1z}=1\quad e^{\eta}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e^{-\eta_j}=1$$
$$\mathbf{x}\geqq\mathbf{0};\quad \mathbf{z}\geqq\mathbf{0}$$
$$\mathbf{xAy}=0$$
$$\gamma_j e^{-\eta_j+\eta}=\zeta_j,\quad j=1,\dots,n.$$

Vezessük be a $G(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e^{-\eta_j}$ és $\|q\|=\sum_{j=1}^{n}|q_j|$ jelöléseket. Könnyen látható, hogy ekkor $G(\mathbf{y})=\|\nabla G(\mathbf{y})\|$, továbbá z és η eliminálható az egyensúlyi rendszerből, ugyanis $e^{\eta}=\frac{1}{G(\mathbf{y})}$ valamint $z=-\frac{1}{G(\mathbf{y})}\nabla G(\mathbf{y})$. Igy az egyensúlyi rendszer az alábbi egyszerűbb alakra redukálódik

$$\begin{aligned} \mathbf{xA} &= -\frac{1}{G(\mathbf{y})}\nabla G(\mathbf{y}) \quad \mathbf{Ay} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{xAy} &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Vegyük észre, hogy ez a feltételrendszer pontosan a (3.12) duál feladat *Kuhn—Tucker feltételrendszere.*

A Kullback—Leibler modell numerikus megoldása

A numerikus megoldáshoz az eddig tárgyaltak alapján két különböző úton is eljuthatunk.

Az egyik lehetőség a (3.9) feladat, illetve a vele ekvivalens alábbi feladat megoldása:

$$\min \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{a}_j\mathbf{x})\log\frac{(\mathbf{a}_j\mathbf{x})}{\gamma_j},$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{1x} = 1,$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

A másik lehetőség a (3.13) duál feladat megoldása, és az optimális primál változónak a (3.14) egyensúlyi feltételekből történő meghatározása.

Az első lehetőség igen vonzónak tűnik, hiszen a fentiekben átfogalmazott primál probléma konvex programozási feladat, egyetlen lineáris egyenlőségi korlátozó feltétellel, és a változók nemnegativitására vonatkozó megkötéssel. A részletesebb analízis során azonban azonnal kiadódik, hogy a célfüggvény gradiensének szakadása van az $\mathbf{a}_j\mathbf{x}=0$, $j=1,\dots,n$ alterek mentén. Jól látszik a probléma a geometriai programozási (3.10) megfogalmazásból is, ugyanaz a numerikus probléma merül itt fel, ami általában a geometriai programozásnál körülményessé teszi a célfüggvény gradiensének használatára épülő algoritmusok implementálását a primál feladat megoldására [10].

Mindezek alapján a fentiekben vázolt második, duál oldali megközelítést választottuk, azaz (3.13) duál feladatot oldottuk meg, és az optimális keverési változókat a (3.14) *Kuhn—Tucker rendszer* alapján határoztuk meg.

Megoldó algoritmusként a redukált gradiens módszernek a MINOS programrendszerben alkalmazott továbbfejlesztését választottuk [7]. Így a bázison kívüli változókat felosztottuk szabad *(„superbasic")* és rögzített *(„nonbasic")* változókra, és a szabad változók alterében a *Davidon—Fletcher—Powell módszerrel* minimalizáltunk. A feladat specialitásai a következőkben jutottak szerephez:

— Mint azt a *Pearson-modell* esetén megmutattuk, a *Pearson-modell* optimális megoldására $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{0}$, az ott nyert $\mathbf{y}$ vektort induló vektornak használhatjuk. (Mivel a *Pearson-eltérés* a *Kullback—Leibler eltérés Taylor-sorából* nyert közelítésnek tekinthető, ez várhatóan „jó" induló megoldást ad.)

— Ha $\mathbf{A}$ teljes rangú, akkor az induló bázist $\mathbf{A}$ oszlopaiból választva az eljárás során nincs szükség báziscserékre, mert az η_i-k szabad változók.

— A duál $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ változók meghatározása. Ha az algoritmus által meghatározott optimum pont $\mathbf{y}^*$, akkor $\mathbf{z}^* = -\frac{1}{G(\mathbf{y}^*)} \nabla G(\mathbf{y}^*)$, mint látjuk. A keverési súly faktorok az alábbi egyenletrendszerből kaphatók:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{z}^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{N}^T \end{pmatrix} \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_B^* \\ \mathbf{z}_N^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{z}_B^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^* = (\mathbf{z}_B^*)^T \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{G(\mathbf{y}^*)} \nabla_B^T G(\mathbf{y}^*) \mathbf{B}^{-1}.$$

Ez utóbbi vektorban $\nabla_B^T G(\mathbf{y}^*)\mathbf{B}^{-1}$ a redukált gradiens slack változókhoz tartozó komponenseit adja, így az eljárás során minden lépésben eleve kiszámoljuk.

3.4. *Hellinger-modell*

Ha a keverési modell célfüggvényében *Hellinger-eltérést* tekintünk, akkor feladatunk a következő:

minimalizálandó

$$1 - \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\mathbf{a}_j \mathbf{x}) \gamma_j},$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{1x} = 1, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Ekvivalens átalakítások:

— Az $1 - \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\mathbf{a}_j\mathbf{x})\gamma_j}$ minimalizálása ekvivalens $\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\mathbf{a}_j\mathbf{x})\gamma_j}$ maximalizálásával.

— Ha az $\mathbf{a}_j\mathbf{x} \geqq \eta_j^2$ feltételeket előírjuk korlátozó feltételként, akkor a fenti célfüggvény helyett $\sum_{j=1}^{n} \eta_j \sqrt{\gamma_j}$ maximalizálását tekinthetjük, mivel η_i csak $\mathbf{a}_i\mathbf{x}$ növekedtével nőhet. Megjegyezzük, hogy optimumnál mindig egyenlőség teljesül.

— Az $\mathbf{1x} = 1$ feltétel helyett, $\mathbf{a}^{(i)} \geqq 0$ miatt, elég az $\mathbf{1x} \leqq 1$ feltételt vennünk, mivel optimumnál egyenlőség teljesül.

— Jelölés $\bar{\gamma}_j = \sqrt{\gamma_j}$ $j = 1, \dots, n$.

A fent felsorolt ekvivalens átalakítások után (3.15) feladat az alábbi l_p programozási primál feladatba fogalmazható át.

maximalizálható

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_j \eta_j$$

feltéve, hogy

(3.16)
$$\frac{1}{2}\eta_j^2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_j\mathbf{x} \leqq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{1x} - 1 \leqq 0$$

$$-\mathbf{Ex} \leqq 0.$$

Az l_p programozás [11] eredményeit felhasználva (3.16) duálja könnyen származtatható.

minimalizálandó

$$\omega_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ \omega_j > 0}}^{n} \omega_j \frac{1}{2} \frac{\mu_j^2}{\omega_j^2}$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{c}}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{Aw} + \mathbf{1}\omega_0 - \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{w}, \omega_0, \mathbf{v} \geqq 0$$

$$\omega_j = 0 \Rightarrow \mu_j = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Az $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{c}} > \mathbf{0}$ összefüggéseket felhasználva feladatunk egyszerűsödik, mivel ekkor $\mu_j = 0$ nem lehetséges, így minden megengedett megoldásban $\mathbf{w} > \mathbf{0}$.

minimalizálandó

$$\omega_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\omega_j}$$

feltéve, hogy

(3.16)
$$\frac{1}{2}\mathbf{Aw} \leqq \mathbf{1}\omega_0,$$

$$\mathbf{w} > \mathbf{0}; \quad \omega_0 \geqq 0.$$

A $2\omega_0$ helyett új változót vezetünk be, amelyet újra ω_0-lal jelölünk, és bevezetjük a $G(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{\omega_j}$ függvényt. Mindezek alapján a duál feladat az alábbi alakot ölti:

minimalizálandó

$$\frac{1}{2}[\omega_0 + G(\mathbf{w})],$$

feltéve, hogy

$$-\mathbf{1}\omega_0+\mathbf{A}\mathbf{w} \leqq 0, \quad \omega_0 \geqq 0, \quad \mathbf{w} > \mathbf{0}. \tag{3.17}$$

Mivel a primál feladatnak létezik optimális megoldása és a *Slater-feltétel* esetünkben nyilvánvalóan teljesül, ezért a (3.17) duál feladatnak is létezik optimális megoldása és a (3.16), (3.17) feladatok optimális célfüggvényértékei megegyeznek [11]. A megoldást előkészítendő, tekintsük először a primál-duál feladatpár egyensúlyi rendszerét.

$$\begin{aligned}
&\eta_j^2-\mathbf{a}_j\mathbf{x} \leqq 0, \quad j = 1, \dots, n \qquad -\mathbf{1}\omega_0+\mathbf{A}\mathbf{w} \leqq \mathbf{0},\\
&\mathbf{1}\mathbf{x} \leqq 1, \qquad \omega_0 \geqq 0,\\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{w} > \mathbf{0},\\
&\xi_i(\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{w}-\omega_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m,\\
&\omega_0(\mathbf{1}\mathbf{x}-1) = 0,\\
&\omega_j(\eta_j^2-\mathbf{a}_j\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n,\\
&\omega_j\eta_j = \bar{\gamma}_j, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

A komplementaritási feltételek sorait tekintve az első sorban szereplő feltételek világos módon helyettesíthetők az $\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{w}-\omega_0=0$ egyetlen feltétellel, a harmadik sorban szereplők $\mathbf{w}>\mathbf{0}$ miatt az $\eta_j^2-\mathbf{a}_j\mathbf{x}=0$, $\forall j$ feltételekkel. Mivel $\mathbf{A}$ egyetlen sora sem zérus-vektor, ezért minden duál-megengedett megoldásra szükségképp $\omega_0>0$ teljesül, ezért $\mathbf{1}\mathbf{x}=1$-nek kell teljesülnie. Mindezek alapján az egyensúlyi feltételrendszer egy ekvivalens megfogalmazása az alábbi:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}\mathbf{A} = -\nabla G(\mathbf{w}), \qquad -\mathbf{1}\omega_0+\mathbf{A}\mathbf{w} \leqq \mathbf{0},\\
&\mathbf{x}\mathbf{1} = 1, \qquad \mathbf{w} > \mathbf{0},\\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\\
&\qquad \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{w}-\omega_0 = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ahol $\nabla G(\mathbf{w})=\left(-\frac{\gamma_1}{\omega_1^2}, \dots, -\frac{\gamma_n}{\omega_n^2}\right)$.

Mivel $G(\mathbf{w})=-\nabla G(\mathbf{w})\mathbf{w}$, ezért a (3.18) feltételrendszernek eleget tevő vektorokra $\omega_0=\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{w}=-\nabla G(\mathbf{w})\mathbf{w}=G(\mathbf{w})$ teljesül. Az ω_0 változót eliminálva az egyensúlyi feltételrendszer egy további ekvivalens alakját nyerjük:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}\mathbf{A} = -\nabla G(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{A}\mathbf{w}-\mathbf{1}G(\mathbf{w}) \leqq \mathbf{0},\\
&\mathbf{x}\mathbf{1} = 1, \qquad \mathbf{w} > \mathbf{0}.\\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Fentiekből az is kiadódott, hogy a (3.17) duál feladat optimális megoldására $\omega_0=$

$=G(\mathbf{w})$ teljesül, azaz a duál feladat ekvivalens az alábbi nemkonvex programozási feladattal:

minimalizálandó

$$G(\mathbf{w}),$$

feltéve, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{w}-\mathbf{1}G(\mathbf{w}) \leqq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{w} > \mathbf{0}.$$

Megjegyezzük, hogy a duál feladat optimumpontjában

$$\|\nabla G(\mathbf{w})\|_A = -\nabla G(\mathbf{w})\mathbf{1} = \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{x}\mathbf{1} = 1 \quad \text{teljesül.}$$

A Hellinger-modell numerikus megoldása

A (3.15) primál feladattal kapcsolatban a Kullback—Leibler modellre vonatkozó numerikus megfontolásokkal analóg gondolatmenet alkalmazható itt is, a célfüggvény gradiensének szakadási helyei az $\mathbf{a}_j\mathbf{x}=0$, $j=1, \ldots, n$ alterek. Így a *Hellinger-modellnél* is a (3.16) duál feladatot oldottuk meg, az optimális $\mathbf{x}$ keverési változókat a (3.19) egyensúlyi feltételekből számoltuk. Megoldó algoritmusként a redukált gradiens módszerek a 3.3. részben körvonalazott változatát alkalmaztuk itt is. A feladat specialitásait az alábbiak szerint használtuk ki:

— A *Kullback—Leibler modellnél* a bázisra tett megjegyzésünk itt is érvényes lesz. A (3.16) duál feladat egy megengedett megoldásából indulva a $\mathbf{w}>\mathbf{0}$ egyenlőtlenség az eljárás során végig érvényben marad, a duál feladat célfüggvénye ebből a szempontból büntetőfüggvényként viselkedik.

— Az $\mathbf{x}$ változók kiszámítása is analóg módon történik.

3.5. *Szmirnov-modell*

Amennyiben a sűrűségértékekről eloszlásértékekre térünk át, azaz (az egyszerűség kedvéért jelöléseinket megtartva) legyen $\gamma_j := \sum_{k=1}^{j} \gamma_k$, $j=1, \ldots, n$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \alpha_{ik}, \quad j = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, m,$$

ekkor *Szmirnov-eltérést* is használhatunk a keverés „jóságának" mérésére. Így tekinthetjük az alábbi Szmirnov-modellt:

minimalizálandó

$$\max_{1 \leqq j \leqq n} |\mathbf{x}\mathbf{a}_j - \gamma_j|$$

feltéve, hogy

(3.20)
$$\mathbf{1}\mathbf{x} = 1,$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az abszolút értékek maximumának minimalizálása ekvivalens a $|\mathbf{x}\mathbf{a}_j-\gamma_j|\leqq\zeta$, $j=1, \dots, n$ feltételek mellett ζ minimalizálásával. Az abszolút értékre vonatkozó felső korlátot két lineáris egyenlőtlenséggel helyettesíthetjük, így (3.20) feladatot a következő lineáris programozási feladattá transzformáltuk.

minimalizálandó

$$\zeta$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\mathbf{A}+\zeta\mathbf{1} &\geqq \mathbf{c}, \\ -\mathbf{x}\mathbf{A}+\zeta\mathbf{1} &\geqq -\mathbf{c}, \\ \mathbf{x}\mathbf{1} &= 1 \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

A (3.21) lineáris programozási feladat duálisa:

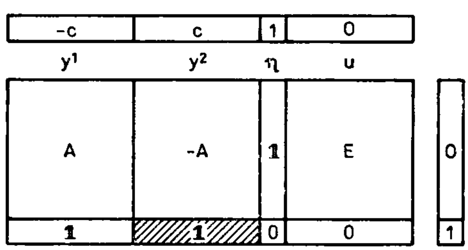
maximalizálandó

$$\mathbf{c}\mathbf{y}^1-\mathbf{c}\mathbf{y}^2+\eta,$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y}^1-\mathbf{A}\mathbf{y}^2+\mathbf{1}\eta &\leqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{1}\mathbf{y}^1+\mathbf{1}\mathbf{y}^2 &= 1, \\ \mathbf{y}^1 \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{y}^2 &\geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

A (3.21) és (3.22) feladatok méreteit figyelembe véve célszerű a (3.22) duál feladatot megoldanunk szimplex módszerrel. A feladat együttható struktúráját a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra

A szimplex módszer első fázisát egyetlen pivot által itt is elkerülhetjük. Tetszőleges (akár az első) elemet pivot elemnek választva a táblázat sraffozott részén, a pivot művelet után az új jobb oldal vektor ismét pozitív lesz (mivel $\mathbf{A}\geqq\mathbf{0}$), és így ez a változó és az $\mathbf{u}$ slack változók megengedett induló megoldást adnak.

Megjegyezzük, hogy egyszerűen (2 pivot művelettel) a primál feladathoz is konstruálhatunk megengedett induló bázist. Ennek belátását gyakorlásképpen az érdeklődő olvasóra hagyjuk.

Megjegyzés. Az $\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2$ jelölést bevezetve a *variációs modellnél* ismertetettekhez hasonlóan az l_1 és l_∞ normák duális feladatokat az alábbi alakban tekintjük.

PRIMÁL	DUÁL
$\min \|\mathbf{xA} - \mathbf{c}\|_C$	$\max \mathbf{cy} + \eta$
$\mathbf{1x} = 1$	$\mathbf{Ay} + \mathbf{1}\eta \leqq 0$
$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\|\mathbf{y}\|_A \leqq 1.$

Nyilvánvaló, hogy a duális feladatban $\|\mathbf{y}\|_A \leqq 1$ is tekinthető, mivel optimumnál ebben az esetben is egyenlőség áll fenn. Ez az észrevétel megfordítva is igaz, és így a variációs modellnél is alkalmazható.

4. Számítástechnikai tapasztalatok

A dolgozatban tárgyalt négy keverési modell megoldására számítógépes programrendszert dolgoztunk ki az általunk javasolt megoldási algoritmusokkal kapcsolatos számítógépes experimentáció céljából.

A programrendszer FORTRAN—77 nyelven készült és a futtatások aritmetikai koprocesszor nélküli IBM/PC AT gépen történtek.

Az egyes keverési modellek megoldására implementált, a feladatok specialitásait kihasználó módszerek, mint azt a fentiekben már említettük, a következő alap-algoritmusokra épültek:

Variációs modell:	szimplex módszer felső-korlát technikával a duál feladatra.
Pearson-modell:	a kvadratikus programozás Lemke-módszere a primál feladatra.
Kullback—Leibler-modell:	redukált gradiens módszer a duálra.
Hellinger-modell:	redukált gradiens módszer a duálra.
Szmirnov-modell:	szimplex módszer a duálra.

A Kullback—Leibler- és a Hellinger-modellek esetében azt tapasztaltuk, hogy a primál feladat megoldásának adott pontossággal történő meghatározása a duál feladat és az egyensúlyi feltételek alapján a duál feladat lényegesen nagyobb pontosságú megoldását kívánja meg. Így, ha a primál feladatban 10^{-5} pontosságot írtunk elő, a duálban a redukált gradiens normáját 10^{-10} alá kellett szorítani, 10^{-3} primál pontosságnál az említett norma a duálban általában 10^{-7} alatt kellett hogy legyen. Tekintve a koprocesszor nélküli AT szerény numerikus pontosságát, ez úgy volt elérhető, hogy a kényes műveleteket (skalár-szorzás, -osztás) dupla pontossággal végeztük.

A numerikus stabilitás, illetve a numerikus pontosság növelése szempontjából hasznosnak találtuk az adatok (**A** mátrix, **b** vektor) oszlopok szerinti skálázását.

Az alábbiakban közöljük néhány futtatás eredményét. Az adatrendszer kavicskeverési feladatból származik, soronként az egyes szemcsenagyságok szerinti eloszlások találhatók meg. A *-gal jelölt sorok szerepelhetnek céleloszlásként, azokat kell a jelöletlen sorokból kikeverni. Lásd. 1. táblázat. A táblázat első oszlopában az eloszlások sorszámai szerepelnek, az első csupa 0-ból, és az utolsó csupa 1-ből álló oszlopot elhagytuk.

1. TÁBLÁZAT

1.	,005	,094	,200	,374	,588	,675	,733	,781	,942	,958	,973
2.	,020	,090	,150	,250	,450	,530	,620	,750	,960	,970	,980
3.	,000	,000	,000	,000	,010	,150	,360	,480	,550	,990	1,00
4.*	,040	,180	,265	,405	,585	,715	,815	,885	,940	,980	,985
5.	,000	,000	,000	,010	,030	,060	,090	,210	,920	,970	1,00
6.*	,000	,000	,230	,460	,650	,750	,850	,910	,950	1,00	1,00
7.*	,000	,000	,130	,300	,460	,600	,710	,820	,900	,960	,970
8.	,000	,000	,000	,050	,150	,230	,320	,500	,930	,980	1,00
9.	,000	,000	,000	,039	,376	,515	,602	,687	,932	,949	,966
10.	,000	,060	,640	,829	,899	,905	,910	,923	,965	,970	,980
11.	,000	,460	,620	,870	,915	,920	,928	,934	,966	,970	,980
12.	,000	,000	,010	,360	,870	,900	,910	,920	,930	,940	,947
13.	,000	,000	,000	,250	,510	,710	,800	,850	,870	,920	,940
14.	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,020	,350	,650
15.*	,000	,150	,200	,300	,470	,610	,730	,820	,910	,930	,950
16.*	,000	,070	,110	,190	,340	,460	,580	,710	,840	,930	,950

A következőkben néhány tipikus futás eredményét közöljük. A táblázatokban szereplő rövidítések:

P *Pearson-távolság*
I *I-divergencia, Kullback—Leibler távolság*
H *Hellinger-eltérés*
V *variációs távolság*
S *Szmirnov-eltérés*

Az első futás során az 1, 2, 3, 5, 9, 10-es sorszámú eloszlásokból kevertük a 7-es sorszámút, $N=9$-et véve. A 2. táblázatban soronként az egyes távolságok szerinti illesztésből adódó eltérésértékeket tüntettük fel, minden egyes illesztés esetén a többi eltérést is kiszámolva az optimumpontban. A táblázat diagonálisa adja tehát az egyes eltérések szerinti illesztésnél az optimális eltérésértéket.

2. TÁBLÁZAT

	P	I	H	V	S
P	,129	,060	,015	,303	,113
I	,130	,059	,014	,298	,110
H	,131	'059	,014	,297	,110
V	,186	,079	,018	,281	,103
S	,263	,123	,031	,406	,054

Az egyes eltérések szerinti illesztésekből adódó súlyvektorokat az alábbi táblázatban adjuk meg 3 jegyre kerekítve; az eredeti értékekben a soronkénti összeg 1, 10^{-5} pontossággal.

3. TÁBLÁZAT

P	,768	,063	,170	,000	,000	,000
I	,672	,161	,167	,000	,000	,000
H	,640	,194	,169	,000	,000	,000
V	,230	,657	,113	,000	,000	,000
S	,358	,610	,001	,000	,000	,032

A fentebb közölt futási eredmények az átlagos viselkedést tükrözik, amennyiben a P, I, H illesztések eredményei viszonylag kis eltérést mutatnak, ezen belül I és H nagyon közeli értékeket ad, P és H eltérése sem túl nagy. A V és S szerinti illesztés eredménye az előbbiektől és egymástól is lényegesen különbözik.

A következő futásnál az 1, 2, 3, 5, 8, 9, 12, 13, 14 sorszámú eloszlásokból kevertük a 16-os sorszámút. $N=9$. A 2. táblázat megfelelője

4. TÁBLÁZAT

	P	I	H	V	S
P	,024	,012	,003	,147	,042
I	,024	,012	,003	,148	,042
H	,024	,012	,003	,148	,042
V	,046	,021	,005	,149	,053
S	,029	,015	,004	,150	,019

A súlyfaktorok táblázata az egyes eltérések szerint:

5. TÁBLÁZAT

P	,000	,665	,174	,000	,000	,000	,000	,115	,046
I	,000	,664	,172	,000	,000	,000	,000	,116	,048
H	,000	,663	,172	,000	,000	,000	,000	,117	,049
V	,000	,733	,144	,000	,000	,000	,000	,027	,096
S	,000	,608	,201	,000	,000	,000	,000	,163	,028

Ez a futás az átlagtól a nagymértékű egyezés felé eső változatot mutat P, I, H vonatkozásában, a V és S eltérések szerint itt is különbség mutatkozik.

Végül az 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12 sorszámú eloszlásokból a 7-es sorszámút kikeverve ($N=9$) a következő eredmény adódik:

6. TÁBLÁZAT

	P	I	H	V	S
P	,101	,051	,013	,282	,118
I	,102	,051	,013	,280	,108
H	,105	,051	,013	,280	,103
V	,132	,066	,017	,272	,165
S	,245	,114	,029	,371	,048

A súlyfaktorok táblázata:

7. TÁBLÁZAT

P	,000	,490	,182	,000	,000	,000	,000	,124	,205
I	,159	,410	,184	,000	,000	,000	,000	,082	,165
H	,236	,375	,184	,000	,000	,000	,000	,060	,144
V	,000	,524	,117	,000	,000	,000	,000	,078	,280
S	,000	,808	,016	,000	,000	,018	,000	,000	,159

Ez a keverés lényegesen különböző eredményeket ad attól függően, hogy milyen eltérést minimalizálva keverünk.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az esetek nagy részében a *Pearson-eltérés* szerinti keverés eredménye általában jól közelíti az *I-divergencia* szerinti keverés eredményét, azonban a 7. táblázat óvatosságra int e tekintetben. Ha az egyes eloszlásokhoz költségek is vannak rendelve (gyakorlati feladatoknál általában ez a helyzet), akkor a 7. táblázat szerint nagyon különböző költségű eredmények is adódhatnak attól függően, hogy milyen eltérés szerint keverünk. Mindenesetre a *Pearson-eltérés* szerinti keverés a *Lemke-módszerrel* igen gyorsan megkapható, és amnenyiben az *I-divergencia* szerinti keverést is kiszámoljuk, azt célszerű a *Pearson-eltérés* eredményéből indítani.

IRODALOM

[1] CSISZÁR, I., „A minimális diszkrimináló információ módszere; kontingencia táblázatok elemzése" a *Többváltozós statisztikai analízis* c. könyvben 209—232 oldalakon. Szerkesztette: Móri Tamás és Székely J. Gábor. Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1986).

[2] CSISZÁR, I., „Eloszlások eltérésének információ típusú mértékszámai" *MTA, III. Osztály Közleményei* **17**, 123—149 és 267—291.

[3] GILL, P. E., MURRAY, W. and WRIGHT, H. H., *Practical Optimization* (Academic Press, London, 1981).

[4] KLAFSZKY, E., „Geometriai programozás és néhány alkalmazása", *MTA SZTAKI Tanulmányok* **8**/1973.

[5] LEMKE, C. E., "Bimatrix equilibrium points and mathematical programming", *Management Science* **11** (1965) 681—689.

[6] MEDGYESSY, P., *Decomposition of superpositions of density functions and discrete distributions* (John Wiley and Sons, 1977).

[7] MURTAGH, B. A., SAUNDERS, M. A., "Large scale linearly constrained optimization", *Mathematical Programming* **14** (1988) 41—72.

[8] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás* (Budapest, 1968).

[9] RÉNYI, A., *Valószínűségszámítás* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1954).

[10] SARMA, P. V. L. N., MARTENS, X. M., REKLAITIS, G. V., RIJCKAERT: "A comparison of computational strategies for geometric programs", *Journal of Optimization The ory and Applications* **26** (1978).

[11] TERLAKY, T., „Az l_p programozásról", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **6** (1980), 27—63.

[12] WOLFE, P., "Algorithm for a least-distance programming problem", *Mathematical Programming Study* **1** (1974) 190—205.

(Beérkezett: 1988. január 27.)

KLAFSZKY EMIL
NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC EGYETEMVÁROS

MAYER JÁNOS
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18—20.

TERLAKY TAMÁS
ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

ON THE MATHEMATICAL MODELS OF MIXING

E. KLAFSZKY, J. MAYER, T. TERLAKY

Some mathematical models of the mixing problem are considered in this paper. The mixing problem is to minimize the divergence $D(\mathbf{z}\|\mathbf{c})$ of two distributions $\mathbf{z}$ and $\mathbf{c}$, where $\mathbf{z}=\mathbf{x}\mathbf{A}$, $(\mathbf{1x}=1, \mathbf{x}\geqq\mathbf{0})$ is a mixture of some distributions. Five models, based on different divergences, are constructed and their fundamental properties are examined.

Using *variational* and *Smirnov distances* linear programming models vere obtained. *Pearsons divergence* led to quadratic programming, *Hellinger distance* led to l_p programming and the *Kullback—Leibler information divergence* gave a special geometric programming model.

Finally computational experiences are presented.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 119—142

VÉGES METSZŐSÍK MÓDSZER FORDÍTOTT KONVEX FELTÉTELLEL KIEGÉSZÍTETT LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

FÜLÖP JÁNOS

Budapest

A dolgozatban azon nemkonvex programozási feladattal foglalkozunk, amelyet lineáris programozási feladat egy fordított konvex feltétellel való kiegészítésével nyerünk. Ismert, hogy ha a lineáris feltételek által meghatározott poliéder korlátos és a nemkonvex feladatnak van megengedett megoldása, akkor véges optimuma is van és az a poliéder egy legfeljebb egydimenziós határoló felületén is felvétetik. A dolgozatban konvex és diszjunktív metszéseket használó véges metszősík módszert mutatunk be a kitűzött feladat megoldására. A módszer egy olyan eljáráson alapul, amely adott q nemnegatív egész szám esetén megkeresi az eredeti poliéder egy olyan legfeljebb q-dimenziós határoló felületét, amely tartalmaz az addig előállított metszéseknek eleget tevő pontot, illetve jelzi, ha ilyen határoló felület nem létezik. Számítástechnikai tapasztalatokat is közlünk.

1. Bevezetés

A dolgozatban a következő alakú matematikai programozási feladattal foglalkozunk:

$$\min \mathbf{c}'\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

$$g(\mathbf{x}) \geqq 0, \tag{1.3}$$

ahol $\mathbf{A}$ $m \times n$ méretű mátrix, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}$ n, illetve m elemből álló vektorok, $g\colon R^n \to R$ folytonos kvázikonvex függvény és $\mathbf{x} \in R^n$. Ha csupán az (1.1)—(1.2) feladatot tekintenénk, akkor egy lineáris programozási feladatot kapnánk. Legyen $P_0 = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ és $G = \{\mathbf{x} \in R^n | g(\mathbf{x}) \geqq 0\}$. Ha az (1.3) feltételt a $g(\mathbf{x}) \leqq 0$ feltétellel helyettesítenénk, akkor egy konvex programozási feladatot nyernénk. Az (1.3)-ban szereplő $g(\mathbf{x}) \geqq 0$ feltételt az irodalomban fordított konvex feltételnek nevezik. Az (1.3) feltétel következtében a $P_0 \cap G$ megengedett halmaz nemkonvex is lehet. Geometriailag, $P_0 \cap G$ egy konvex poliéder és egy konvex nyílt halmaz komplementer halmazának a metszete. A P_0 poliéderről feltesszük, hogy nem üres és korlátos.

Számos közgazdasági és mérnöki feladat írható fel (1.1)—(1.3) alakjában [1, 5, 6, 16, 21, 23]. A fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladatok megoldására több módszer is született. A g függvény differenciálhatóságát és konvexségét feltéve ROSEN [23], AVRIEL és WILLIAMS [1], valamint MEYER [21] KUHN—TUCKER ponthoz konvergáló iteratív linearizációs módszert dolgoztak ki. BANSAL és JACOBSEN [5, 6] egy (1.1)—(1.3) alakú speciális hálózati folyam feladatot vizsgál.

Megmutatható, hogy $P_0 \cap G \neq \emptyset$ esetén az (1.1)—(1.3) feladatnak van véges optimuma és az a P_0 poliéder egy legfeljebb egydimenziós határoló felületén is felvétetik [16, 18]. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a P_0 poliéder nem csak egy pontból áll, akkor $P_0 \cap G \neq \emptyset$ esetén a tekintett feladat véges optimuma a P_0 poliéder valamelyik élén is felvétetik. Az (1.1)—(1.3) feladat megoldására UEING [30], HILLESTAD [16], HILLESTAD és JACOBSEN [18], valamint THUONG és TUY [27] által kidolgozott véges módszerek ezen a tulajdonságon alapulnak. UEING [30] konvex programozási feladatok megoldására vezeti vissza az (1.1)—(1.3) feladatot. HILLESTAD [16] egy korlátozás és szétválasztás módszert javasol. HILLESTAD és JACOBSEN [18] módszere a P_0 poliéder éleinek részleges leszámlálásával jut optimális megoldáshoz. THUONG és TUY [27] lineáris programozási és konkáv minimalizálási feladatok megoldására vezeti vissza az (1.1)—(1.3) feladatot. MUU [22] egy konvergens korlátozás és szétválasztás módszert javasol. A több fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladattal foglalkozik FORGÓ [9], és HILLESTAD és JACOBSEN [17].

Az (1.1)—(1.3) feladat megoldására jelen dolgozatban bemutatandó módszer felhasználja FORGÓ [9], valamint HILLESTAD és JACOBSEN [17] azon észrevételét is, hogy a TUY [29] ötletén alapuló konvex metszések [9, 12, 13] hasznosak P_0 olyan pontjainak levágására, amelyek az (1.3) feltételnek nem tesznek eleget. HILLESTAD és JACOBSEN [17] azonban megmutatták, hogy a csupán konvex metszéseket használó metszősík módszer nem feltétlenül véges, sőt az optimumhoz való konvergencia sincs biztosítva. Az itt bemutatandó metszősík módszer végességét egy olyan eljárás fogja biztosítani, amely a P_0 poliéder egy olyan legfeljebb q-dimenziós határoló felületét keresi meg, amely tartalmaz az addig előállított metszéseknek eleget tevő pontot, illetve jelzi, ha ilyen már nincs. Az eljárás maga is állíthat elő metszősík feltételeket és nemkorlátos P_0 poliéder esetén is működik. Az (1.1)—(1.3) feladat megoldásánál a fenti eljárást $q=1$ helyettesítéssel fogjuk alkalmazni. A bemutatandó eljárás $q=0$ esetén a [10, 11]-ben általunk leírt eredeti csúcspontot kereső eljárással azonos, így annak általánosításaként tekinthető.

A 2. és 3. fejezetben a fent említett eljárást mutatjuk be. A 4. fejezetben a fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladat megoldására adunk véges metszősík módszert. Az 5. fejezetben számítástechnikai tapasztalatokról számolunk be.

2. Releváns vagy irreleváns határoló felület előállítása

Ebben és a következő fejezetben P_0 korlátosságát nem követeljük meg. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy rang$(A)=m$. Legyen $N=\{1, \ldots, n\}$ és $Z \subset N$. A

$$P_Z = \{\mathbf{x} \in P_0 | x_j = 0, \quad \forall j \in Z\}$$

halmaz a P_0 poliéder egy határoló felülete *(face)* [26]. Jelöljék az $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ n-elemű vektorok az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ m-elemű vektorok pedig az oszlopait. Egy $P_Z \neq \emptyset$ határoló felület esetén P_Z dimenziója a P_Z által kifeszített lineáris sokaság dimenziójával azonos [26]. A P_Z dimenzióját a továbbiakban $\dim(P_Z)$ jelöli. Ha $\dim(P_Z)=0$, akkor P_Z a P_0 egy csúcspontja, $\dim(P_Z)=1$ esetén pedig egy éle. Mivel rang$(\mathbf{A})=m$, ezért $0 \leq \dim(P_Z) \leq n-m$ a P_0 poliéder tetszőleges nem üres határoló felülete esetén.

Jelölje F_q a P_0 poliéder legfeljebb q-dimenziós határoló felületeinek egyesítését. Legyenek megadva egyenlőtlenségek

$$\mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{h} \tag{2.1}$$

alakban, ahol $\mathbf{H}$ $k \times n$-es mátrix és $\mathbf{h}$ k-elemű vektor. A metszősík módszer során (2.1)-ben fogjuk tárolni az előállított metszősík feltételeket. Legyen Q_k a (2.1)-nek eleget tevő $\mathbf{x}$ vektorok halmaza. Nyilván $\mathbf{x} \in Q_k$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\mathbf{x}_S$, melyre

$$\mathbf{Hx} + \mathbf{Ex}_S = \mathbf{h},$$

$$\mathbf{x}_S \geqq \mathbf{0},$$

ahol $\mathbf{x}_S \in R^k$, $\mathbf{x}'_S = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$, $S = \{n+1, \dots, n+k\}$, $\mathbf{E}$ pedig a $k \times k$ méretű egységmátrix.

Rögzítsünk egy q egész számot, melyre $0 \leqq q \leqq n-m$. A következőkben olyan eljárást mutatunk be, amely vagy előállítja a P_0 egy olyan legfeljebb q-dimenziós P_Z határoló felületét, melyre $P_Z \cap Q_k \neq \emptyset$, vagy pedig jelzi, hogy ilyen nincs, azaz $F_q \cap Q_k = \emptyset$.

1.1. *Definíció.* A P_0 poliéder P_Z határoló felületét *relevánsnak* nevezzük, ha $P_Z \cap Q_k \neq \emptyset$ és $\dim(P_Z) \leqq q$. A P_0 poliéder P_Z határoló felületét *irrelevánsnak* nevezzük, ha $P_Z \cap Q_k \neq \emptyset$ és $P_Z \cap Q_k \cap F_q = \emptyset$.

Az előbb említett eljárás célja tehát releváns határoló felület előállítása. Egy P_Z határoló felület lehet se nem releváns, se nem irreleváns. Ha találunk egy olyan határoló felületet, amelyről be tudjuk bizonyítani, hogy irreleváns, akkor ennek pontjait érdemes kizárni a további keresésből. Ezt a következő fejezetben bemutatandó felületmetszéssel fogjuk végrehajtani.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{Hx} + \mathbf{Ex}_S &= \mathbf{h}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_S &\geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.2}$$

feltételrendszert. Nyilván $\mathbf{x} \in P_0 \cap Q_k$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}_S = \mathbf{h} - \mathbf{Hx}$ kielégítik a (2.2) feltételrendszert. Legyen $\mathbf{B}$ a (2.2) egy megengedett bázisa és jelölje $I_B \subset N \cup S$ a bázisvektorok indexhalmazát, valamint $I_R = N \cup S \setminus I_B$ a bázison kívüli vektorok indexhalmazát.

2.1. TÉTEL. Akkor és csak akkor létezik releváns határoló felület, ha a (2.2) rendszernek van olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisa, melyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$.

Bizonyítás. Legyen P_Z egy $Z \subset N$ által meghatározott releváns határoló felület. Legyen $\bar{q} = \dim(P_Z)$, nyilván $\bar{q} \leqq q$. Legyen $\hat{Z} = \{j \in N | x_j = 0, \forall x \in P_Z\}$. Nyilván $Z \subset \hat{Z}$ és $P_Z = P_{\hat{Z}}$. Ekkor

$$\bar{q} = \dim(P_Z) = n\text{-rang}\left[\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j, j \in \hat{Z}\}\right],$$

ahol $\mathbf{e}_j$ a j-edik egységvektort jelöli [8, 28]. Mivel rang $(\mathbf{A}) = m$, ezért létezik $\bar{Z} \subset \hat{Z}$, hogy $|\bar{Z}| = n - m - \bar{q}$ és az $\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j | j \in \bar{Z}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Ebből viszont következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{a}_i$, $i \in N \setminus \bar{Z}$ oszlopaiból álló vektorrendszer rangja m. A (2.2) rendszer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

feltételi mátrixának rangja $m+k$. Ha a (2.2) rendszerből ideiglenesen töröljük az x_i, $i\in\bar{Z}$ változókat a hozzájuk tartozó oszlopokkal és nemnegativitási feltételekkel együtt, akkor a kapott rendszer feltételei mátrixának rangja továbbra is $m+k$. Mivel $P_Z\cap Q_k\neq\emptyset$, ezért a redukált (2.2) rendszernek létezik megengedett megoldása, így megengedett bázismegoldása is. Legyen **B** a redukált (2.2) egy megengedett bázisa. Ezen **B** megengedett bázisa az eredeti, redukálás előtti (2.2) rendszernek is. Mivel $\bar{Z}\subset I_R=N\cup S\setminus I_B$, ezért $|N\cap I_B|\leqq n-|\bar{Z}|=m+\bar{q}\leqq m+q$.

Fordítva, tegyük fel, hogy **B** olyan megengedett bázisa (2.2)-nek, melyre $|N\cap I_B|\leqq m+q$. Válasszunk tetszőlegesen egy olyan $Z\subset N\setminus I_B$ indexhalmazt, melyre $|Z|\geqq n-m-q$. Megmutatjuk, hogy ezen Z által meghatározott P_Z határoló felület releváns. Ha a (2.3) mátrixból elhagyjuk a Z-beli indexekkel ellátott oszlopokat, akkor a maradék mátrix rangja továbbra is $m+k$. Ebből következik, hogy az **A** mátrix $\{\mathbf{a}_i|i\in N\setminus Z\}$ oszloprendszerének rangja m. Tekintsük most az $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}\cup$ $\cup\{\mathbf{e}_j|\,j\in Z\}$ vektorrendszert. Könnyen látható, hogy ennek rangja $m+|Z|$. Mivel a **B** által meghatározott megengedett megoldás **x** része a P_Z határoló felületen van, így $P_Z\cap Q_k\neq\emptyset$, továbbá $\dim(P_Z)\leqq n-m-|Z|\leqq q$. A P_Z határoló felület tehát releváns. □

Megjegyezzük, hogy a 2.1. tétel $q=0$ esetben történő alkalmazásával [10] 2.1. tételének azon eredményét kapjuk, amely szerint a 0-dimenziós releváns határoló felületek, azaz eredeti csúcspontok (2.2) olyan **B** megengedett bázisaival jellemezhetők, melyekre $S\subset I_B$, azaz $|N\cap I_B|=m$.

A 2.1. tétel alapján releváns határoló felület keresése végrehajtható (2.2) olyan **B** megengedett bázisának keresésével, amelyre $|N\cap I_B|\leqq m+q$. Ha $P_0\cap Q_k=\emptyset$, akkor közvetlenül kapjuk, hogy nincs releváns határoló felület. Feltehetjük tehát, hogy $P_0\cap Q_k\neq\emptyset$. Tekintsük a (2.2) egy **B** megengedett bázisát. Ha $|N\cap I_B|\leqq m+q$, akkor a 2.1. tétel bizonyításának konstrukciója alapján elő tudunk állítani releváns határoló felületet, pl. $Z=N\cap I_R$ esetén P_Z ilyen. Ha $|N\cap I_B|>m+q$, akkor megpróbáljuk az adott **B** megengedett bázisból kiindulva a (2.2) olyan megengedett bázisát elérni, amelynél az N indexhalmazból indexelt bázisváltozók száma kisebb, mint **B**-nél. Ezt a [10, 11]-ben is használt, eredetileg MAJTHAY és WHINSTON [19] dolgozatában szereplő ötlet alapján hajthatjuk végre. Válasszunk ki egy x_r, $r\in N\cap I_B$ változót és az adott **B** megengedett bázisból kiindulva oldjuk meg a

$$\min x_r,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{E}\mathbf{x}_S=\mathbf{h}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{x}\geqq 0,\quad \mathbf{x}_S\geqq 0,$$

feladatot a szimplex módszernek azzal a módosításával, hogy csak S-ből indexelt kiegészítő változók léphetnek be a bázisba. Ha az optimális megoldásban az x_r változó nulla szinten bent van a bázisban, akkor próbáljuk meg szimplex transzformációval kihozni az x_r változót a bázisváltozók közül úgy, hogy helyébe egy x_j, $j\in S$ nem bázisváltozó lépjen. A belépési szabály biztosítja, hogy (2.4) megoldása során az N indexhalmazból indexelt bázisváltozók száma nem növekszik, sőt esetleg csökken.

A (2.2) rendszer valamely **B** megengedett bázisához tartozó kanonikus alak legyen a következő alakban megadva:

$$x_i + \sum_{j \in I_R} d_{ij} x_j = d_{i0}, \quad i \in I_B. \tag{2.5}$$

Ha a (2.4) feladat optimuma pozitív, akkor az optimális megengedett bázismegoldásban x_r bázisváltozó és az optimális $\bar{\mathbf{B}}$ bázishoz tartozó kanonikus alak x_r változóhoz rendelt sorában $d_{r0}>0$ és $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in S \cap I_R$. Ebből következik, hogy $Z=N \cap I_R$ esetén x_r pozitív a $P_Z \cap Q_k$ halmazon. Ha $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in N \cap I_R$ is teljesül, akkor x_r pozitív az egész $P_0 \cap Q_k$ halmazon.

Ha a (2.4) feladat optimuma nulla és az x_r változót nem sikerült kihozni a bázisból valamely x_j, $j \in S \cap I_R$ változóval felcserélve, akkor az optimális kanonikus alakban $d_{r0}=0$ és $d_{rj}=0$, $\forall j \in S \cap I_R$, továbbá ezek az együtthatók nullák maradnak (2.2) tetszőleges olyan megengedett bázisához tartozó kanonikus alakot tekintve, amelyet a $\bar{\mathbf{B}}$ bázisból kiindulva, a speciális belépési szabályt használva szimplex lépésekkel elérünk.

Ha a (2.4) feladat optimális $\bar{\mathbf{B}}$ bázisa esetén $|N \cap I_{\bar{B}}| \leqq m+q$, akkor tudunk releváns határoló felületet konstruálni. Ellenkező esetben választhatunk egy új x_r, $r \in N \cap I_{\bar{B}}$ változót és megoldhatunk egy új (2.4) feladatot. Az nyilvánvaló, hogy olyan x_r változót, amelyről már előzőleg kiderült, hogy bázisban marad, nem érdemes választani. Az ebben a fejezetben ismertetendő 2.1. algoritmusban megmutatjuk, hogy mely x_r változók közül célszerű választani. A 2.1. algoritmus alapján dolgozva véges számú (2.4) feladat megoldása után az alábbi három eset egyikéhez fogunk jutni:

(i) A (2.2) rendszer egy olyan **B** megengedett bázisát kapjuk, melyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$.
(ii) Belátjuk, hogy $F_q \cap Q_k = \emptyset$, azaz nincs releváns határoló felület.
(iii) Előállítunk egy irreleváns F_Z határoló felületet.

Egy (2.4) feladat megoldása után jelölje N_0, illetve N_1 az N halmazból indexelt azon változók indexhalmazát, amelyekről kiderült, hogy a módosított belépési szabály alkalmazása esetén nulla, illetve pozitív szinten a bázisban maradnak. Jelölje N_2 az N halmazból indexelt azon változók indexhalmazát, amelyekről bebizonyosodott, hogy csak pozitív értéket vesznek fel a $P_0 \cap Q_k$ halmazon. Nyilván $N_2 \subset N_1$. Legyen n_i az N_i indexhalmaz elemszáma, $i=0, 1, 2$.

2.2. Tétel. Legyen **B** a (2.2) rendszer egy olyan megengedett bázisa, amelyet egy (2.4) feladat megoldása során érünk el. Rögzítsük le a $Z=N \cap I_R$ és N_0 indexhalmazokat. Legyen $\hat{k}$ tetszőleges nemnegatív egész szám, $\hat{\mathbf{H}}$ $\hat{k} \times n$ méretű mátrix, $\hat{\mathbf{h}}$ $\hat{k}$-elemű vektor. Tekintsük az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \hat{\mathbf{H}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{x}_{\hat{S}} &= \hat{\mathbf{h}}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad & \mathbf{x}_{\hat{S}} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

feltételrendszert, ahol $\hat{\mathbf{E}}$ a $\hat{k} \times \hat{k}$ méretű egységmátrix, $\mathbf{x}_{\hat{S}}=(x_{n+1}, \ldots, x_{n+\hat{k}})'$, $\hat{S}= =\{n+1, \ldots, n+\hat{k}\}$. Tegyük fel, hogy (2.6)-nak van megengedett megoldása. Legyen $\hat{\mathbf{B}}$ a (2.6) rendszer egy tetszőleges megengedett bázisa. Ekkor $|I_{\hat{B}} \cap (Z \cup N_0)| \geqq n_0$, sőt ha a $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás $\mathbf{x}$ része nincs a P_Z határoló felületen, akkor $|I_{\hat{B}} \cap (Z \cup N_0)| \geqq n_0+1$ is teljesül.

Bizonyítás. Az $n_0=0$ esetben az állítás nyilvánvaló, elég az $n_0>0$ esetet tekinteni. A $\mathbf{B}$ megengedett bázishoz tartozó (2.5) kanonikus alakban $d_{rj}=0$ minden $r\in N_0$, $j\in(I_R\cap S)\cup\{0\}$ esetén, ezért a (2.5) jobb oldalából és (2.5) feltételi mátrixának $I=(I_B\setminus N_0)\cup(I_R\cap S)$ indexhalmazhoz tartozó oszlopaiból álló vektorrendszer rangja $m+k-n_0$. A (2.5) kanonikus alak feltételi mátrixát, illetve jobb oldalát a (2.2) feltételrendszer (2.3) feltételi mátrixának, illetve (2.2) jobb oldalának $\mathbf{B}^{-1}$ mátrixszal balról történő szorzásával kapjuk. Következésképpen a (2.2) jobb oldalából és (2.3) I indexhalmazból indexelt oszlopaiból álló vektorrendszer rangja is $m+k-n_0$. Mivel $S\subset I$ és a (2.3) S-hez tartozó oszlopai éppen az $\mathbf{e}_j$, $j=m+1, \ldots, m+k$ egységvektorok, továbbá $I\setminus S=(N\cap I_B)\setminus N_0$, könnyen látható, hogy

$$\text{rang}\,[\{\mathbf{b}\}\cup\{\mathbf{a}_i|i\in(N\cap I_B)\setminus N_0\}] = m-n_0. \tag{2.7}$$

Tekintsük most a (2.6) egy tetszőleges $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázisát. Legyen $\hat{I}=$ $=[(N\cap I_B)\setminus N_0]\cup\hat{S}$. Könnyen látható, hogy (2.7) miatt a (2.6) jobb oldalából és feltételi mátrixának $\hat{I}$ indexhalmazból indexelt oszlopaiból álló vektorrendszer rangja $m+\hat{k}-n_0$. Mivel $\hat{\mathbf{B}}$ $m+\hat{k}$ oszlopa lineárisan független és $(N\cup\hat{S})\setminus\hat{I}=Z\cup N_0$, így $|I_{\hat{B}}\cap(Z\cup N_0)|\geqq n_0$ közvetlenül adódik. Tegyük most fel, hogy a $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás $\mathbf{x}$ része nincs a P_Z határoló felületen és csak $|I_{\hat{B}}\cap(Z\cup N_0)|=n_0$ teljesülne. Tekintsük a (2.6) rendszer $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott

$$x_i+\sum_{j\in I_{\hat{R}}}\hat{d}_{ij}x_j=\hat{d}_{i0}, \quad i\in I_{\hat{B}} \tag{2.8}$$

kanonikus alakját. A (2.8) jobb oldalából és feltételi mátrixának $\hat{I}$ indexhalmazból indexelt oszlopaiból álló vektorrendszer rangja $m+\hat{k}-n_0$. Mivel $|I_{\hat{B}}\cap(Z\cup N_0)|=n_0$, így $|I_{\hat{B}}\cap\hat{I}|=m+\hat{k}-n_0$, tehát (2.8) feltételi mátrixának $\hat{I}$ indexhalmazból indexelt oszlopai között található $m+\hat{k}-n_0$ számú különböző egységvektor. Abból a tényből, hogy a $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás $\mathbf{x}$ része nincs a P_Z határoló felületen, kapjuk, hogy valamely $r\in Z\cap I_{\hat{B}}$ indexre $\hat{d}_{r0}>0$. Az előbb tekintett egységvektorok r indexű komponensében nyilván 0 áll. Ekkor azonban a (2.8) jobb oldalából és a feltételi mátrix $\hat{I}$ indexhalmazból indexelt oszlopaiból álló vektorrendszer rangja nagyobb lenne, mint $m+\hat{k}-n_0$, ami ellentmond a korábban bizonyítottaknak. Következésképpen $|I_{\hat{B}}\cap(Z\cup N_0)|\geqq n_0+1$ mégis teljesül. □

Tegyük fel, hogy $P_0\cap Q_k$ pontjai teljesítik a

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j\geqq\alpha_0$$

egyenlőtlenséget, ahol $\alpha_0>0$. Legyen $J^+=\{j\in N|\alpha_j>0\}$. Ekkor a (2.2) tetszőleges $\mathbf{B}$ megengedett bázisa esetén

$$|I_B\cap J^+|>0. \tag{2.9}$$

A (2.2) mindegyik $\mathbf{B}$ megengedett bázisához egy-egy $\mathbf{y}$ n-elemű $0-1$ vektort rendelünk hozzá a következő módon:

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{ha } j\in I_B,\\ 0, & \text{különben},\end{cases} \quad (j=1,\ldots,n).$$

Ekkor (2.9)

$$\sum_{j \in J^+} y_j \geqq 1 \tag{2.10}$$

alakban is írható.

Ha a (2.4) feladat optimuma pozitív, akkor az optimális **B** megengedett bázishoz tartozó (2.5) kanonikus alakban $d_{r0} > 0$ és $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in S \cap I_R$, így $P_0 \cap Q_k$ pontjaira teljesül az

$$x_r + \sum_{j \in N \cap I_R} d_{rj} x_j \geqq d_{r0} \tag{2.11}$$

egyenlőtlenség, amelyből egy megfelelő (2.10) egyenlőtlenség is konstruálható. Könynyen látható, hogy az így nyert (2.10) egyenlőtlenség érvényes azon (2.2) rendszerek megengedett bázisaira is, amelyeket újabb feltételek (2.1)-hez történő csatolásával kapunk. Ha (2.11)-ben $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in N \cap I_R$, akkor $r \in N_2$ és nyilván $y_r = 1$.

A 2.2. tétel állítása is megfogalmazható az **y** vektor felhasználásával. Legyen **B** a (2.2) rendszer egy olyan megengedett bázisa, amelyet egy (2.4) feladat megoldása során érünk el. Rögzítsük le a $Z = N \cap I_R$ és N_0 indexhalmazokat. Ekkor tetszőleges $\hat{k}$ nemnegatív egész szám és (2.6) rendszer esetén a (2.6) tetszőleges $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázisához rendelt **y** vektorra teljesül

$$\sum_{j \in Z \cup N_0} y_j \geqq n_0, \tag{2.12}$$

sőt ha a $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás **x** része nincs a P_Z határoló felületen, akkor

$$\sum_{j \in Z \cup N_0} y_j \geqq n_0 + 1 \tag{2.13}$$

is. Ezen megfogalmazás speciális eseteként kapjuk azt a tényt, hogy ha egy (2.2) rendszer megengedett bázisaira teljesül (2.12) vagy (2.13), akkor ezen egyenlőtlenségek igazak azon (2.2) rendszerek megengedett bázisaira is, amelyeket újabb feltételek (2.1)-hez történő csatolásával kapunk.

A következőkben itt is alkalmazzuk a [10, 11]-ben már használt azon ötletet, hogy a (2.4) feladatok megoldása során nyert (2.10), (2.12), (2.13) egyenlőtlenségeket érdemes összegyűjteni egy segédfeladatként használt általános halmazlefedési feladat feltételrendszerébe, majd a [10, 11]-ben bemutatott eredményeket kiterjesztjük a most vizsgált általánosabb esetre is. Minden olyan esetben, amikor egy (2.4) feladat megoldása után kiderül, hogy a vizsgált x_r változó a módosított belépési szabály használata mellett a bázisban marad, egy általános halmazlefedési feltételt fogunk előállítani. Ha az r index az N_0 indexhalmazba kerül be, akkor a megfelelő (2.12) feltételt fogjuk előállítani. Ha az r indexet az N_1 indexhalmazhoz kell csatolnunk, akkor a (2.11)-ből nyert (2.10) feltételt, sőt $r \in N_2$ esetben az $y_r = 1$ feltételt állítjuk elő. Gyűjtsük össze ezen feltételeket a

$$\begin{gathered} \sum_{j \in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ y_j = 1, \quad j \in N_2 \\ y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \setminus N_2 \end{gathered} \tag{2.14}$$

feltételrendszer alakjában, ahol $V_i \subset N$ és β_i pozitív egész, $i=1, \dots, p$. Ha megbizonyosodunk arról, hogy P_Z irreleváns, akkor a 2.2. tétel alapján előállított (2.13) feltételt is csatoljuk (2.14)-hez, kivéve a $Z=\emptyset$ esetet, amikor közvetlenül kapjuk, hogy $F_q \cap Q_k = \emptyset$. A (2.14) rendszerbe természetesen belefoglalhatjuk azon ugyanilyen típusú feltételeket is, amelyeket korábbi, (2.1)-ben kevesebb feltételt tartalmazó (2.2) rendszerekben gyűjtöttünk össze. A (2.14) rendszer konstrukciója miatt $|V_i| \geqq \beta_i$, $i=1, \dots, p$, így (2.14)-nek létezik megengedett megoldása.

2.3. TÉTEL. Tekintsük a

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$(2.15) \qquad \sum_{j \in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$y_j = 1, \quad j \in N_2,$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \setminus N_2$$

általános halmazlefedési feladatot. Ha $F_q \cap Q_k \neq \emptyset$, akkor (2.15) optimumértéke nem nagyobb az $m+q$ értéknél.

Bizonyítás. A 2.1. tétel alapján $F_q \cap Q_k \neq \emptyset$ esetben (2.2)-nek létezik olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázisa, melyre $|N \cap I_{\bar{B}}| \leqq m+q$. A (2.15) feladat célfüggvényértéke ezen $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázishoz rendelt $\bar{\mathbf{y}}$ vektor esetén éppen $|N \cap I_{\bar{B}}|$. Belátjuk, hogy $\bar{\mathbf{y}}$ kielégíti (2.15) feltételeit. A (2.15) rendszer (2.10) és (2.12) egyenlőtlenségekből származó feltételeinek, így az $y_j=1$, $j \in N_2$ feltételeknek is, (2.2) tetszőleges megengedett bázisából képzett $\mathbf{y}$ eleget tesz, köztük $\bar{\mathbf{y}}$ is. A (2.13) típusú feltételek azonban nem teljesülnek bármely ilyen $\mathbf{y}$ vektor esetén. Csak olyan (2.13) feltételt csatoltunk (2.15)-höz, amelynél megbizonyosodtunk, hogy $P_Z \cap Q_k \cap F_q = \emptyset$. Mivel a 2.1. tétel bizonyítása alapján a $\bar{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás $\mathbf{x}$ része releváns határoló felületen fekszik, ezért nem lehet egyetlen (2.13)-ban szereplő Z halmaz által meghatározott P_Z határoló felületen sem. Így, a 2.1. tétel alapján $\bar{\mathbf{y}}$ eleget tesz a (2.15)-ben szereplő (2.13) feltételeknek is. □

A 2.3. tétel gyakorlati használatát két dolog hátráltathatja. Az egyik az, hogy az aktuális (2.15) rendszer tartalmazhatja a korábbi (2.15) rendszerek feltételeit is, ezért a feltételek száma nagyon megnőhet. A halmazlefedési feladatnál használt méretcsökkentési lehetőségek [9] azonban közvetlenül vagy némi módosítással az általános halmazlefedési feladatra is alkalmazhatók. Például, ha $V_i \subset V_t$ és $\beta_i \geqq \beta_t$, akkor a t indexű feltétel törölhető (2.15)-ből. Ha $k \in N_2$ és $k \in V_l$, akkor a k indexet elhagyhatjuk a V_l indexhalmazból és a β_l értékét eggyel csökkenthetjük. Ha β_l ezáltal nullává válik, akkor az l indexű feltétel is törölhető (2.15)-ből. A másik problémát az okozná, ha minden esetben, amikor új feltételt csatolunk (2.15)-höz, az új egzakt optimumot is meghatároznánk. Ez nagyon időigényes lenne. Ezen a (2.15) optimumára adható alsó és felső korlátok használatával segíthetünk. Legyen $\mathbf{y}^0$ a (2.15) feladat egy megengedett megoldása U_0 célfüggvényértékkel. Az U_0 érték nyilván egy felső korlát (2.15) optimumára vonatkozóan. Ha $U_0 \leqq m+q$, akkor a 2.3. tétel felhasználásával közvetlenül nem állíthatjuk, hogy $F_q \cap Q_k = \emptyset$. Az $U_0 > m+q$ esetben azonban határozzunk meg egy L_0 alsó korlátot (2.15) optimumára vonatkozóan. Ha $L_0 > m+q$, akkor a 2.3. tétel alapján $F_q \cap Q_k = \emptyset$, azaz nincs releváns határoló felület, így leállhatunk. Ha egy új

$$\sum_{j \in V_t} y_j \geqq \beta_t$$

feltételt adunk (2.15)-höz, akkor közvetlenül tudunk egy megengedett megoldást és felső korlátot konstruálni a korábbi $\mathbf{y}^0$ és U_0 felhasználásával. Ha az $\mathbf{y}^0$ kielégíti az új feltételt, akkor $\mathbf{y}^0$ és U_0 megfelelő az új (2.15) feladat számára is. Ellenkező esetben legyen $C = \{j \in N | y_j^0 = 1\}$ és $C_1 \subset V_t \setminus C$, ahol $|C_1| = \beta_t - |V_t \cap C|$. Legyen $y_j^0 = 1$, ha $j \in C_1 \cup C$ és $y_j^0 = 0$ egyébként, továbbá $U_0 \leftarrow U_0 + |C_1|$. Az így kapott $\mathbf{y}^0$ és U_0 nyilván megengedett megoldása az új (2.15) feladatnak, illetve felső korlát annak optimumára vonatkozóan. Általános halmazlefedési feladatok optimumára vonatkozó alsó, illetve felső becsléseket számító gyors, heurisztikus eljárásokat találunk a [7, 14, 15] dolgozatokban. A számítógépes implementáció során általunk használt heurisztikus eljárásokat az 5. fejezetben vázoljuk.

Megjegyezzük, hogy mivel az $y_j = 1$, $j \in N_2$ feltételek megtalálhatók (2.15)-ben, továbbá $n_0 > 0$ esetben egy olyan

$$\sum_{j \in Z \cup N_0} y_j \geqq n_0$$

alakú feltétel is van (2.15)-ben, melyre $(Z \cup N_0) \cap N_2 = \emptyset$, ezért $n_0 + n_2$ egy nyilvánvaló alsó korlát (2.15) optimumára vonatkozóan. Ezen alsó korlát birtokában akár el is hagyhatjuk a (2.15) feladatot és ekkor csak az N_0, N_1, N_2 indexhalmazokat aktualizáljuk.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha $n_0 + n_2 > m + q$, akkor nincs releváns határoló felület. □

A [10, 11] és jelen dolgozatokban szereplő számítástechnikai tapasztalatok azonban azt bizonyítják, hogy az általános halmazlefedési segédfeladat megfelelően gyors heurisztikus alsó, illetve felső becsléseket adó eljárások használata esetén hatékonyabbá teszi a metszősík módszert.

2.4. TÉTEL. Egy (2.4) feladat megoldása után tekintsük a megfelelő $Z = N \cap I_R$, N_0, N_1 és N_2 indexhalmazokat, ahol $\mathbf{B}$ az utoljára kapott megengedett bázis. Legyen L_1 egy alsó korlát a

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\sum_{j \in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$(2.16) \qquad y_j = 1, \quad j \in N_1,$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \setminus N_1$$

általános halmazlefedési feladat optimumára vonatkozóan. Ha $L_1 > m + q$, akkor $P_Z \cap Q_k \cap F_q = \emptyset$. Ebben az esetben legyen L_2 egy alsó korlát azon általános halmazlefedési feladat optimumára vonatkozóan, amelyet a

$$(2.17) \qquad \sum_{j \in Z \cup N_0} y_j \geqq n_0 + 1$$

feltétel (2.16)-hoz való csatolásával nyerünk. Nyilván feltehető, hogy $L_2 \geqq L_1$. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in F_q \cap Q_k$ pontot tekintve $x_j = 0$ legalább $L_2 - m - q$ számú $j \in N_1 \setminus N_2$ esetén.

Bizonyítás. A (2.16)-ban szereplő feltételek az $y_j=1$, $j\in N_1\setminus N_2$ feltételek kivételével (2.2) minden megengedett bázisára teljesülnek. Tudjuk, hogy az x_r, $r\in N_1$ változók a $P_Z\cap Q_k$ halmazon csak pozitív értéket vesznek fel. Tegyük fel, hogy $L_1>m+q$, de $P_Z\cap Q_k\cap F_q\neq\emptyset$. Adjuk a

$$\sum_{j\in Z} x_j \leqq 0 \tag{2.18}$$

feltételt (2.1)-hez. Mivel az új Q_{k+1} halmazra $P_0\cap Q_{k+1}=P_Z\cap Q_k$, ezért $P_0\cap\cap Q_{k+1}\cap F_q\neq\emptyset$. A 2.1. tétel szerint az új, $m+k+1$ feltételt tartalmazó (2.2) rendszernek van olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázisa, melyre $|I_{\bar B}\cap N|\leqq m+q$. Az x_r, $r\in N_1$ változók a $P_0\cap Q_{k+1}$ halmazon csak pozitív értéket vesznek fel, így a $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázishoz rendelt $\bar{\mathbf{y}}$ vektorra $\bar{y}_j=1$, $\forall j\in N_1$ teljesül. Az $\bar{\mathbf{y}}$ tehát teljesíti (2.16) minden feltételét, ami viszont ellentmond az $L_1>m+q$ ténynek. Tehát mégiscsak $P_Z\cap\cap Q_k\cap F_q=\emptyset$.

Az állítás második részének bizonyítása előtt töröljük a (2.18) feltételt (2.1)-ből. Tegyük fel, hogy $F_q\cap Q_k\neq 0$ és legyen $\hat{\mathbf{x}}\in F_q\cap Q_k$. Adjuk hozzá az

$$\begin{aligned} x_j &\leqq \hat{x}_j, \quad j=1,\dots,n,\\ -x_j &\leqq -\hat{x}_j, \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \tag{2.19}$$

feltételeket (2.1)-hez. Ekkor $P_0\cap Q_{k+2n}=\{\hat{\mathbf{x}}\}$. Mivel $\hat{\mathbf{x}}\in F_q$, az új $m+k+2n$ feltételt tartalmazó (2.2) rendszernek van olyan $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázisa, melyre $|N\cap I_{\hat B}|\leqq m+q$. A $\hat{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás első n komponense éppen $\hat{\mathbf{x}}$. A $\hat{\mathbf{B}}$ által előállított $\hat{\mathbf{y}}$ vektor teljesíti a (2.17) feltételt, mivel $\hat{\mathbf{x}}\notin P_Z$. Legyen $\hat{N}==\{j\in N_1|\hat{y}_j=0\}$. Nyilván $\hat{N}\subset N_1\setminus N_2$. Tekintsük a

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} y_j\\ &\sum_{j\in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i=1,\dots,p,\\ &\sum_{j\in Z\cup N_0} y_j \geqq n_0+1,\\ &y_j=1, \quad j\in N_1\setminus\hat{N},\\ &y_j\in\{0,1\}, \quad j\in(N\setminus N_1)\cup\hat{N} \end{aligned} \tag{2.20}$$

feladatot. A (2.16)—(2.17) feladat optimumértéke nem kisebb a (2.20) feladaténál és a kettő közötti eltérés nyilván legfeljebb $|\hat{N}|$ lehet. Az $\hat{\mathbf{y}}$ kielégíti (2.20) feltételeit, így $m+q$ egy felső korlát (2.20) optimumára vonatkozóan. Mivel $L_2>m+q$, ezért $|\hat{N}|\geqq L_2-m-q$. Ez azt jelenti, hogy $\hat{y}_j=0$ legalább L_2-m-q számú $j\in N_1\setminus N_2$ esetén, így $\hat{x}_j=0$ legalább L_2-m-q számú $j\in N_1\setminus N_2$ esetén. Ezzel a tétel állításait beláttuk, így (2.1)-ből töröljük a bizonyításnál csak segédeszközül használt (2.19) feltételeket és a (2.2) rendszert is megfelelően redukáljuk. □

2.2. KÖVETKEZMÉNY. Ha $L_1>m+q$ és $L_2-m-q>n_1-n_2$, akkor $F_q\cap Q_k==\emptyset$. □

Akárcsak a (2.15) feadatnál, a (2.16) és (2.16)—(2.17) feladatok optimumára vonatkozóan is adhatunk nyilvánvaló alsó korlátot, nevezetesen az n_0+n_1, illetve n_0+n_1+1 értékeket. A (2.16), illetve (2.16)—(2.17) feladatoknál a méretcsökkentő, továbbá alsó és felső korlátokat számító eljárásokat a (2.15) feladatnál elmondottakhoz hasonlóan használhatjuk.

A fentiek összefoglalásaként most egy olyan algoritmust mutatunk be, amely véges számú szimplex iteráció után az (i)—(iii) esetek valamelyikéhez vezet.

2.1. Algoritmus

0. *Lépés (Előkészítés).* Legyen $N_0=\emptyset$, $n_0=0$. Legyen N_2 azon x_j, $j\in N$ változók indexhalmaza, melyekről már korábban kiderült, hogy a $P_0\cap Q_k$ halmazon csak pozitív értéket vesznek fel. Legyen $N_1=N_2$, $n_2=|N_2|$ és $n_1=n_2$. A (2.2) rendszer megengedett bázisaira vonatkozó, korábban kapott általános halmazlefedési feltételek legyenek a (2.15) és (2.16) feladatokban összegyűjtve. Jelen lépésben a (2.15) és (2.16) feladatok azonosak. Határozzuk meg a (2.15) feladat egy $\mathbf{y}^0$ megengedett megoldását. Legyen $U_0=\sum_{j=1}^{n} y_j^0$, $\mathbf{y}^1=\mathbf{y}^0$ és $U_1=U_0$. Válasszuk ki a (2.2) egy tetszőleges $\mathbf{B}$ megengedett bázisát. Menjünk az 1. lépésre.
1. *Lépés.* Ha $|N\cap I_B|\leqq m+q$, akkor az (i) esethez jutottunk, álljunk le. Különben folytassuk a 2. lépésnél.
2. *Lépés.* Ha $U_1\leqq m+q$, akkor menjünk a 3. lépésre. Különben egy heurisztikus eljárással határozzuk meg (2.16) egy $\mathbf{y}^1$ megengedett megoldását és az $U_1=\sum_{j=1}^{n} y_j^1$ célfüggvényértéket. Ha $U_1\leqq m+q$, akkor menjünk a 3. lépésre. Különben egy heurisztikus eljárással határozzunk meg egy olyan L_1 alsó korlátot (2.16) optimumára vonatkozóan, melyre $L_1\geqq n_0+n_1$. Ha $L_1\leqq m+q$, akkor menjünk a 3. lépésre. Különben tekintsük a $Z=N\cap I_R$ indexhalmazt. Ha $Z=\emptyset$, akkor a (ii) esethez jutottunk, álljunk le. Különben határozzunk meg egy olyan L_2 alsó korlátot a (2.16)—(2.17) feladat optimumára vonatkozóan, melyre $L_2\geqq\max\{L_1, n_0+n_1+1\}$. Ha $n_1-n_2<L_2-m-q$, akkor a (ii) esethez jutottunk, álljunk le. Különben menjünk a 8. lépésre.
3. *Lépés.* Válasszunk egy $r\in(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)$ indexet. A legutoljára elért $\mathbf{B}$ megengedett bázisból kiindulva oldjuk meg a (2.4) feladatot a módosított belépési szabály használatával. Jelölje $\mathbf{B}$ az optimális bázist. Ha $r\in I_B$, akkor menjünk a 4. lépésre. Ha $r\in I_R$ és $|N\cap I_B|>m+q$, akkor ismételjük meg a 3. lépést. Különben az (i) esethez jutottunk, álljunk le.
4. *Lépés.* Ha (2.4) optimális megoldásában $x_r>0$, akkor menjünk az 5. lépésre. Különben próbáljuk meg kihozni az x_r változót a bázisból valamely x_j, $j\in I_R\cap S$ változóval felcserélve. Ha ez lehetséges, akkor hajtsuk végre a báziscserét, jelölje $\mathbf{B}$ az új megengedett bázist, majd $|N\cap I_B|>m+q$ esetén menjünk a 3. lépésre, különben az (i) esethez jutottunk, álljunk le. Ha x_r nulla szinten a bázisban marad, akkor legyen $N_0\leftarrow N_0\cup\{r\}$ és $n_0\leftarrow n_0+1$. A $Z=I_R\cap N$ indexhalmazt használva konstruáljuk meg és adjuk a (2.12) feltételt a (2.15) és (2.16) feladatokhoz. Hajtsuk végre a (2.12) csatolásából eredő esetleges méretcsökkentéseket a (2.15) és (2.16) feladatokban. Ha (2.12) nem teljesül az $\mathbf{y}^0$ vektorra, akkor közvetlenül módosítsuk az $\mathbf{y}^0$ vektort úgy, hogy az már eleget tegyen az új (2.15) fel-

tételeinek, és legyen $U_0=\sum_{j=1}^{n} y_j^0$. Ha (2.12) nem teljesül az $\mathbf{y}^1$ vektorra, akkor közvetlenül módosítsuk az $\mathbf{y}^1$ vektort úgy, hogy az már eleget tegyen az új (2.16) feltételeinek, és legyen $U_1=\sum_{j=1}^{n} y_j^1$. Menjünk az 1. lépésre.

5. *Lépés.* Ha az optimális szimplex tábla x_r változóhoz tartozó sorában $d_{rj}\leqq 0$, $\forall j\in N\cap I_R$, akkor menjünk a 7. lépésre. Különben állítsuk elő a (2.10) feltételt (2.11)-ből és adjuk a (2.15) feladathoz. Ha az új feltétel nem teljesül az $\mathbf{y}^0$ vektorra, akkor közvetlenül módosítsuk az $\mathbf{y}^0$ vektort úgy, hogy az már eleget tegyen az új (2.15) feltételeinek, és legyen $U_0=\sum_{j=1}^{n} y_j^0$. Hajtsuk végre az új feltétel csatolásából eredő esetleges méretcsökkentéseket a (2.15) feladatban. Folytassuk a 6. lépésnél.
6. *Lépés.* Legyen $N_1\leftarrow N_1\cup\{r\}$, $n_1\leftarrow n_1+1$. Hajtsuk végre az $y_r=1$ feltétel csatolásából eredő esetleges méretcsökkentéseket a (2.16) feladatban. Ha $y_r^1=0$, akkor legyen $y_r^1=1$ és $U_1\leftarrow U_1+1$. Menjünk az 1. lépésre.
7. *Lépés.* Legyen $N_2\leftarrow N_2\cup\{r\}$, $n_2\leftarrow n_2+1$. Hajtsuk végre az $y_r=1$ feltétel csatolásából eredő esetleges méretcsökkentéseket a (2.15) feladatban. Ha $y_r^0=0$, akkor legyen $y_r^0=1$ és $U_0\leftarrow U_0+1$. Menjünk a 6. lépésre.
8. *Lépés.* Adjuk a (2.17) feltételt a (2.15) feladathoz és hajtsuk végre az új feltétel csatolásából eredő méretcsökkentéseket a (2.15) feladatban. Ha az új feltétel nem teljesül az $\mathbf{y}^0$ vektorra, akkor közvetlenül módosítsuk az $\mathbf{y}^0$ vektort úgy, hogy az már eleget tegyen az új (2.15) feladat feltételeinek, és legyen $U_0=\sum_{j=1}^{n} y_j^0$. Ha $U_0\leqq m+q$, akkor a (iii) esethez jutottunk, álljunk le. Különben heurisztikus eljárással határozzuk meg a (2.15) egy $\mathbf{y}^0$ megengedett megoldását és az $U_0=\sum_{j=1}^{n} y_j^0$ célfüggvényértéket. Ha $U_0\leqq m+q$, akkor a (iii) esethez jutottunk, álljunk le. Különben határozzunk meg egy olyan L_0 alsó korlátot a (2.15) feladat optimumára vonatkozóan, melyre $L_0\geqq n_0+n_2+1$. Ha $L_0>m+q$, akkor a (ii), különben a (iii) esethez jutottunk. Álljunk le.

Könnyen látható, hogy a 2.1. algoritmus véges, mivel egy (2.4) feladat megoldása után az r indexet az I_R, N_0 és N_1 indexhalmazok valamelyikéhez csatoljuk, továbbá $L_1\geqq n_0+n_1$. Ez azt is biztosítja, hogy a 3. lépésben nemüres halmazból kell új r indexet választanunk. Amennyiben a (iii) esethez jutunk, úgy a 2.4. tétel alapján az utoljára elért $\mathbf{B}$ megengedett bázis által meghatározott $Z=N\cap I_R$ indexhalmazhoz tartozó P_Z határoló felületre $P_Z\cap Q_k\cap F_q=\emptyset$, továbbá $F_q\cap Q_k\neq\emptyset$ esetén tetszőleges $\mathbf{x}\in F_q\cap Q_k$ pontot tekintve $x_j=0$ legalább L_2-m-q számú $j\in N_1\setminus N_2$ esetén. Ezen információkat a következő fejezetben ismertetendő felületmetszésnél fogjuk felhasználni.

3. A felületmetszés

Ha a 2.1. algoritmus végén az (i) vagy (ii) esetekhez jutunk, akkor elő tudunk állítani egy releváns határoló felületet vagy megbizonyosodunk arról, hogy nincs releváns határoló felület. A (iii) eset teljesülése esetén egy P_Z irreleváns határoló felületet nyerünk. Azért, hogy a számunkra már nem érdekes P_Z pontjait a továbbiakban ne érhessük el, egy olyan metszősíkfeltételt állítunk elő és adunk (2.1)-hez, amely P_Z pontjait kizárja a további keresésből. Ezen feltételt azonban úgy kell előállítani, hogy az esetleges $F_q \cap Q_k$ halmazbeli pontok azt kielégítsék.

A 2.1. algoritmus (iii) esettel történő befejezése esetén legyen $Z=N\cap I_R$, $J=N_1 \setminus N_2$ és $l=L_2-m-q$, ahol **B** az utoljára kapott megengedett bázis, N_1 és N_2 a megfelelő indexhalmazok és L_2 az utoljára meghatározott alsó korlát a (2.16)—(2.17)-re vonatkozóan. Nyilván $l \leqq |J|$. Mindegyik x_r, $r\in J$ változó indexe egy megfelelő (2.4) feladat megoldása után került a J halmazba. Jelölje

$$x_r + \sum_{j\in I_R^{(r)}} d_{rj}^{(r)} x_j = d_{r0}^{(r)} \tag{3.1}$$

az r indexhez tartozó (2.4) feladat optimális kanonikus alakjában az x_r változóhoz rendelt feltételt. A (3.1) feltételt az r index $N_1 \setminus N_2$ halmazhoz való csatolásakor tároljuk el és most használjuk fel. Nyilván $d_{r0}^{(r)}>0$ és $d_{rj}^{(r)} \leqq 0$, $\forall j\in S\cap I_{R^{(r)}}$. A (2.2) tetszőleges olyan megengedett megoldása, ahol $x_r=0$ a (3.1) miatt teljesíti a

$$\sum_{j\in I_R^{(r)}} (d_{rj}^{(r)}/d_{r0}^{(r)}) x_j \geqq 1 \tag{3.2}$$

egyenlőtlenséget. A (3.2) egyenlőtlenséget megfelelő 0 együtthatók bevezetésével a

$$\sum_{j\in N\cup S} \alpha_{rj} x_j \geqq 1 \tag{3.3}$$

egyenlőtlenség alakjára írhatjuk. Mivel $Z\supset N\cap I_{R^{(r)}}$, így $\alpha_{rj} \leqq 0$, $\forall j\in (N\cup S)\setminus Z$. A (2.2) tetszőleges $F_q\cap Q_k$ halmazbeli ponthoz tartozó megengedett megoldása legalább l számú $r\in J$ index esetén teljesíti a megfelelő (3.3) egyenlőtlenséget. Hagyjunk el a J indexhalmazból tetszőleges $l-1$ elemet és jelölje J^* az így nyert részhalmazt. Ekkor (2.2) bármely $F_q\cap Q_k$ halmazbeli ponthoz tartozó megengedett megoldása legalább egy $r\in J^*$ esetén kielégíti a megfelelő (3.3) egyenlőtlenséget. Legyen

$$\alpha_j^* = \max_{r\in J^*} \alpha_{rj}, \quad j\in N\cup S,$$

és tekintsük a

$$\sum_{j\in N\cup S} \alpha_j^* x_j \geqq 1 \tag{3.4}$$

egyenlőtlenséget, amelyet BALAS diszjunktív metszés ötlete alapján állítunk elő [2, 3, 24]. Mivel $\alpha_j^* \leqq 0$, $\forall j\in (N\cup S)\setminus Z$, így a (3.4) egyenlőtlenség a (2.2) egyetlen olyan megengedett megoldására sem teljesül, melynek **x** része a P_Z halmazban fekszik. A (2.2) rendszer tetszőleges $F_q\cap Q_k$ halmazbeli ponthoz tartozó megengedett megoldása azonban nyilván teljesíti a (3.4) egyenlőtlenséget.

Mielőtt a (3.4) metszősíkfeltételt (2.1)-hez csatolnánk, redukálnunk kell az esetleg nem nulla α_{n+j}^*, $n+j\in S$ együtthatókat. Ezt a (2.2) $(m+j)$-edik feltétele α_{n+j}^*-szeresének (3.4)-ből történő kivonásával megtehetjük. A megfelelő irányú egyenlőtlenséget (-1)-gyel való átszorzással érhetjük el. Csatoljuk az így nyert egyenlőtlenséget $(k+1)$-edik feltételként (2.1)-hez. A metszősíkfeltétel konstrukciója miatt $F_q\cap Q_k=F_q\cap Q_{k+1}$ és $P_Z\cap Q_{k+1}=\emptyset$. Ha az új feltétel (2.1)-hez történő csatolása után $P_0\cap Q_{k+1}=\emptyset$, akkor közvetlenül kapjuk az (ii) esetet. Ellenkező esetben megismételjük a 2.1. algoritmust, most már az $m+k+1$ feltételből álló (2.2) rendszerrel. A 2.1. algoritmus 0. lépésében összeállítandó (2.15) és (2.16) feladatok feltételei az algoritmus előző végrehajtása után kapott (2.15) feladat feltételeivel azonosak. Mivel a P_0 poliéder véges sok határoló felülettel rendelkezik, a 2.1. algoritmus véges sok esetben történő végrehajtása után az (i) vagy (ii) esethez jutunk, azaz releváns határoló felületet kapunk vagy megbizonyosodunk, hogy nincs releváns határoló felület.

Többletráfordítás árán a (3.4) diszjunktív metszésnél esetleg mélyebb metszést kaphatunk GLOVER negatív él kiterjesztési ötletének [13, 24] vagy SHERALI és SEN [25] kombinatorikus módszerének felhasználásával. Ezekre itt most nem térünk ki. A (3.4) diszjunktív metszés konstrukciója lényegében azonos a [10] dolgozatban is használt diszjunktív felületmetszésével. Azt, hogy J^* előállításánál melyik J-beli indexeket érdemes elhagyni, [10]-ben részletezzük. A diszjunktív felület metszés mellett [10]-ben bemutattuk az eredetileg MAJTHAY és WHINSTON[19] által használt parametrikus felületmetszést is, amely jelen esetben is használható a [10]-ben leírt módon. Részleteire itt nem térünk ki.

Megjegyezzük, hogy mivel $\alpha_j^* \leqq 0$, $\forall j \in (N \cup S) \setminus Z$, a

$$\sum_{j \in J^+} \alpha_j^* x_j \geqq 1$$

egyenlőtlenség teljesül $P_0 \cap Q_{k+1}$ pontjaira, ahol $J^+ = \{j | \alpha_j^* > 0, j \in Z\}$. Mivel $J^+ \neq \emptyset$, egy (2.10) feltételt állíthatunk elő és adhatunk a (2.15) és (2 16) feladatokhoz a 2.1. algoritmus megismétlése előtt. Az esetleges méretcsökkentéseket és az $\mathbf{y}^0$ és $\mathbf{y}^1$ esetleges módosítását most is el kell végezni.

4. A fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladat megoldása

Ebben a fejezetben az (1.1)—(1.3) feladat megoldására adunk módszert. Mint azt már az 1. fejezetben említettük, ha $P_0 \neq \emptyset$ és korlátos, továbbá $P_0 \cap G \neq \emptyset$, akkor az (1.1)—(1.3) feladatnak van véges optimuma és az a P_0 poliéder egy élén is felvétetik, ahol most az egyszerűség kedvéért dim $(P_0)=0$ esetben a P_0 poliéder egyetlen pontját is élnek tekintjük. A továbbiakban feltesszük, hogy a P_0 poliéder nemüres és korlátos. A $P_0 \cap G \neq \emptyset$ tény teljesülését az ismertetendő módszer folyamán ellenőrizzük. A módszer során metszősíkfeltételeket állítunk elő, amelyeket a (2.1) feltételrendszerben fogunk tárolni. A metszősíkfeltételek konvex metszés, diszjunktív felületmetszés vagy célfüggvénymetszés eredményeként állnak elő. Konvex metszések csatolásával olyan pontokat fogunk levágni a P_0 poliéderről, amelyek nem teljesítik az (1.3) feltételt. Diszjunktív felületmetszéseket állítunk elő a 2. és 3. fejezetben leírt eljárás használata során, amikor legfeljebb l-dimenziós releváns határoló felület keresése közben irreleváns határoló felületek pontjait vágjuk le. Ezen metszések egyetlen olyan pontot sem vágnak le P_0 valamely éléről, amely már egy korábbi metszősíkfeltétellel ne lett volna kizárva. Szintén diszjunktív metszést fogunk alkalmazni bizonyos lejjebb ismertetendő esetben, amikor a P_0 egy csúcspontját vágjuk le. Ezen metszést úgy konstruáljuk meg, hogy egyetlen olyan pontot se zárjunk ki, amely P_0 valamely élén fekszik, korábban még nem volt levágva és az addig talált legjobb megengedett megoldáshoz tartozó célfüggvényértéknél kisebb célfüggvényértékkel rendelkezik. A

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} \leqq \gamma \tag{4.1}$$

alakú célfüggvénymetszéssel azon pontokat zárjuk ki, amelyek célfüggvényértéke nagyobb az addig talált legjobb $\mathbf{x}^*$ megengedett megoldáshoz tartozó $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ célfüggvényértéknél.

A fenti metszések konstrukciója miatt, ha van olyan megengedett pont, amely a γ értéknél kisebb célfüggvényértékkel rendelkezik, akkor az ilyen pontok között van olyan is, amely P_0 egy élén található és eleget tesz a (2.1) rendszerben addig összegyűjtött metszősíkfeltételeknek. Ez azt is jelenti, hogy ilyen javító pont esetleges létezése esetén a P_0 poliéder élei egyesítésének F_1 halmaza tartalmaz pontot a Q_k halmazból, feltéve, hogy a (2.1) rendszer k számú egyenlőtlenségből áll. Azt, hogy $F_1 \cap Q_k \neq \emptyset$ teljesül-e, a 2. és 3. fejezetben bemutatott eljárással dönthetjük el. Ezen eljárás közben metszősíkfeltételeket csatolhatunk (2.1)-hez, így k értéke növekedhet, azonban eközben $F_1 \cap Q_k$ változatlan marad.

Ha kiderül, hogy $F_1 \cap Q_k=\emptyset$, akkor leállhatunk. Ezen esetben, ha addig a $P_0 \cap G$ halmaz egyetlen pontját sem találtuk meg, akkor az (1.1)—(1.3) feladatnak nincs megengedett megoldása, különben az $\mathbf{x}^*$ addigi legjobb megengedett megoldás egyben optimális megoldás is és $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ az (1.1)—(1.3) feladat optimuma. Ha az eljárás azt mutatja ki, hogy $F_1 \cap Q_k \neq \emptyset$, akkor egyúttal a megfelelő (2.2) rendszer olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát is előállítja, melyre $|N \cap I_B| \leqq m+1$. Mivel $|N \cap I_B|<m$ sosem teljesülhet, így $|N \cap I_B|$ értéke vagy m vagy $m+1$.

Az $|N \cap I_B|=m$ esetben a $Z=N \cap I_R$ által meghatározott P_Z határoló felület 0-dimenziós, így $P_Z=\{\bar{\mathbf{x}}\}$, ahol $\bar{\mathbf{x}}$ a (2.2) rendszer $\mathbf{B}$ megengedett bázishoz tartozó megengedett megoldása első n komponenséből álló vektor. Az $\bar{\mathbf{x}}$ tehát a P_0 olyan csúcspontja, amelyre $\bar{\mathbf{x}} \in Q_k$ is teljesül. A $g(\bar{\mathbf{x}})<0$, $g(\bar{\mathbf{x}})>0$ és $g(\bar{\mathbf{x}})=0$ eseteket külön vizsgáljuk.

Ha $g(\bar{\mathbf{x}})<0$, akkor a Forgó [9], valamint Hillestad és Jacobsen [17] által is használt konvex metszést alkalmazzuk. Tekintsük a $\mathbf{B}$ megengedett bázishoz tartozó (2.5) kanonikus alakot és a $\mathbf{z}^j \in R^n$, $j \in I_R$ vektorokat, ahol

$$z_i^j = \begin{cases} -d_{ij}, & \text{ha} \quad i \in I_B, \\ 1, & \text{ha} \quad i=j, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha a P_0 poliéder $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontja nem degenerált, akkor a $\mathbf{z}^j$, $j \in I_R$ irányok éppen a P_0 poliéder $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontjából kiinduló éleinek az irányvektorai. Degenerált $\bar{\mathbf{x}}$ esetén is igaz azonban, hogy a $\mathbf{z}^j$, $j \in I_R$ irányok által kifeszített konvex kúp $\bar{\mathbf{x}}$ pontba való eltoltja tartalmazza a P_0 poliédert. Legyen

$$\lambda_j = \sup\,\{\lambda \,|\, g(\bar{\mathbf{x}}+\lambda \mathbf{z}^j)<0\}, \quad j \in I_R,$$

valamint

$$t_j = \begin{cases} 1/\lambda_j, & \text{ha} \quad \lambda_j<\infty, \\ 0, & \text{ha} \quad \lambda_j=\infty, \end{cases} \quad j \in I_R.$$

Ekkor tetszőleges $\mathbf{x} \in P_0 \cap \{\mathbf{x} \in R^n \,|\, \sum_{j \in I_R} t_j x_j < 1\}$ esetén $g(\mathbf{x})<0$. A

$$\sum_{j \in I_R} (-t_j) x_j \leqq -1$$

konvex metszés [9, 12, 17, 29] (2.1)-hez történő csatolásával $\bar{\mathbf{x}} \notin P_0 \cap Q_{k+1}$ és csak olyan pontokat vágunk le ezen egyenlőtlenséggel a P_0 poliéderről, amelyek nem teljesítik az (1.3) feltételt. A legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felület keresését újrakezdhetjük a 2. és 3. fejezetben leírt eljárással, most már a $P_0 \cap Q_{k+1}$ halmazban.

Ha $g(\bar{\mathbf{x}})>0$, akkor g folytonossága miatt $\bar{\mathbf{x}}$ egy környezetében teljesül (1.3). Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{x}^{(0)}=\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontnak van-e olyan P_0 poliéderbeli $\mathbf{x}^{(1)}$ szomszédos csúcspontja, melyre $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(1)}<\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(0)}$. Ha nincs, akkor $\mathbf{x}^{(0)}$ optimális megoldása a

$$\min \{\mathbf{c}'\mathbf{x} | \mathbf{x} \in P_0\}$$

feladatnak és $\mathbf{x}^{(0)} \in G$ miatt az (1.1)—(1.3) feladatnak is. Ha van ilyen $\mathbf{x}^{(1)}$ csúcspontja a P_0 poliédernek, akkor $g(\mathbf{x}^{(1)}) \leqq 0$ esetben álljunk meg, különben az $\mathbf{x}^{(1)}$ csúcsponttal ismételjük meg az előbb $\mathbf{x}^{(0)}$ csúcsponttal elvégzett vizsgálatot. A fentieket véges számú alkalommal megismételve P_0 szomszédos csúcspontjainak egy olyan $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(l)}$ sorozatához jutunk, ahol $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}>\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i+1)}$, $i=0, \ldots, l-1$, $g(\mathbf{x}^{(i)})>0$, $i=0, \ldots, l-1$, továbbá vagy $\mathbf{x}^{(l)}$ az (1.1)—(1.3) optimális megoldása, vagy $g(\mathbf{x}^{(l)}) \leqq 0$. A fenti vizsgálatot az (1.2) rendszer megengedett bázisain történő szimplex lépésekkel hajthatjuk végre. Az $\mathbf{A}$ mátrix $\{\mathbf{a}_i | i \in N \cap I_B\}$ oszloprendszere nyilván az (1.2) $\mathbf{x}^{(0)}=\bar{\mathbf{x}}$ megengedett bázismegoldását meghatározó megengedett bázis, így a fenti szimplex lépések kezdő megengedett bázisa lehet.

Amennyiben sem $\mathbf{x}^{(0)}$ sem $\mathbf{x}^{(l)}$ nem optimális megoldása az (1.1)—(1.3) feladatnak, úgy $g(\mathbf{x}^{(l-1)})>0$ és $g(\mathbf{x}^{(l)}) \leqq 0$. A $g(\mathbf{x}^{(l)})=0$ esetben az $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^{(l)}$ helyettesítéssel hajtsuk végre a $g(\bar{\mathbf{x}})=0$ esetnél lejjebb leírtakat, különben legyen

$$\lambda^* = \max \{\lambda | g[\lambda \mathbf{x}^{(l)}+(1-\lambda)\mathbf{x}^{(l-1)}] \geqq 0,\ \lambda \in [0, 1]\}$$

és

$$\mathbf{x}^* = \lambda^* \mathbf{x}^{(l)}+(1-\lambda^*)\mathbf{x}^{(l-1)}.$$

Nyilván $0<\lambda^*<1$ és $g(\mathbf{x}^*)=0$. Legyen $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ és adjuk a (4.1) feltételt (2.1)-hez, illetve módosítsuk (4.1) jobb oldalát az új γ értékre, ha a (4.1) feltétel már szerepel (2.1)-ben. Az $\mathbf{x}^{(i)}$, $i=0, \ldots, l-1$ csúcspontok nem tesznek eleget az új (4.1) feltételnek, így őket kizártuk a további keresésből. Mivel a megengedett bázisokon való lépkedést az $\mathbf{x}^{(l)}$ csúcsponthoz tartozó megengedett bázison fejeztük be és $g(\mathbf{x}^{(l)})<0$, ezért $\mathbf{x}^{(l)} \in Q_k$ esetben közvetlenül előállíthatunk egy olyan konvex metszést, amely az $\mathbf{x}^{(l)}$ csúcspontot levágja. Ezután a legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felületet kereső eljárást ismételjük meg.

Tekintsük most a $g(\bar{\mathbf{x}})=0$ esetet. Határozzuk meg a P_0 poliéder $\bar{\mathbf{x}}$ csúcsponttal szomszédos csúcspontjait. Ha ilyen nincs, akkor $P_0=\{\bar{\mathbf{x}}\}$ és $\bar{\mathbf{x}}$ az (1.1)—(1.3) feladat optimális megoldása. Ellenkező esetben legyenek $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(l)}$ a szomszédos csúcspontok. Degenerált $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspont esetén a [20]-ban áttekintett módszerek közül használhatjuk fel valamelyiket a szomszédos csúcspontok előállítására. Ha $\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}$, $i=1, \ldots, l$ teljesül, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ az (1.1)—(1.3) feladat optimális megoldása. Ha valamelyik szomszédos csúcspontra $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ és $g(\mathbf{x}^{(i)}) \geqq 0$ teljesül, akkor lépjünk át szimplex transzformációval ezen $\mathbf{x}^{(i)}$ csúcspontra és $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^{(i)}$ helyettesítéssel végezzük el a $g(\bar{\mathbf{x}})=0$, illetve $g(\bar{\mathbf{x}})>0$ esetekben leírtakat. Ellenkező esetben minden olyan $\mathbf{x}^{(i)}$ szomszédos csúcspontnál, melyre $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ határozzuk meg a

$$\lambda_i = \max \{\lambda | g[\lambda \mathbf{x}^{(i)}+(1-\lambda)\bar{\mathbf{x}}] \geqq 0,\ \lambda \in [0, 1]\}$$

számot. Ha valamelyik i esetén $\lambda_i>0$, akkor legyen $\mathbf{x}^*=\lambda_i \mathbf{x}^{(i)}+(1-\lambda_i)\bar{\mathbf{x}}$ és $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$. Nyilván $g(\mathbf{x}^*)=0$ és $\mathbf{c}'\mathbf{x}^*<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$. Adjuk a (4.1) feltételt (2.1)-hez, illetve módosítsuk (4.1) jobb oldalát az új γ értékre, ha (4.1) már szerepel (2.1)-ben, majd ismételjük meg a legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felület keresést a maradék poliéderen. Megjegyezzük, hogy konvex g függvény esetén az összes $\lambda_i=0$.

Ha az $\bar{\mathbf{x}}$ tetszőleges $\mathbf{x}^{(i)}$ szomszédos csúcspontja esetén vagy $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}\geqq\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ vagy $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(i)}<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ és $\lambda_i=0$, akkor a P_0 poliéder $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontját a szomszédos csúcspontokkal összekötő élein nincs az (1.1)—(1.3) feladatnak olyan megengedett megoldása, melynek célfüggvényértéke az addig talált legkisebb $\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ értéknél kisebb lenne. Legyen $N_3=\{j\in N|\bar{\mathbf{x}}_j>0\}$. Ha létezik $\tilde{\mathbf{x}}\in F_1\cap G$, melyre $\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}}<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$, akkor $N_3\cap\{j\in N|\tilde{\mathbf{x}}_j==0\}\neq\emptyset$, mivel különben $\tilde{\mathbf{x}}$ az $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontból kiinduló valamelyik élen lenne. A (2.1) rendszer feltételeinek konstrukciója miatt $\tilde{\mathbf{x}}\in Q_k$ is teljesül. Mivel tetszőleges $\mathbf{x}\in P_0\cap Q_k$ esetén $x_j>0$, $\forall j\in N_2$, így létezik olyan $j\in N_3\setminus N_2$, melyre $\tilde{x}_j=0$. Ha $N_3\setminus N_2=\emptyset$, akkor ilyen tulajdonságú $\tilde{\mathbf{x}}$ nem létezik, így $\bar{\mathbf{x}}$ az (1.1)—(1.3) feladat optimális megoldása. Az $N_3\setminus N_2\neq\emptyset$ esetben legyen $\bar{\mathbf{B}}$ az (1.2) egy olyan megengedett bázisa, amely az $\bar{\mathbf{x}}$ megengedett bázismegoldást állítja elő és tekintsük a $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázishoz tartozó kanonikus alakban az

$$x_r+\sum_{j\in I_R}\bar{a}_{rj}x_j=\bar{a}_{r0},\quad r\in N_3\setminus N_2 \tag{4.2}$$

feltételeket. Tetszőleges $\tilde{\mathbf{x}}\in F_1\cap G\cap\{\mathbf{x}|\mathbf{c}'\mathbf{x}<\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}\}$ pontra $\tilde{x}_r=0$ teljesül legalább egy $r\in N_3\setminus N_2$ esetén. A 3. fejezetben már használt diszjunktív metszés konstrukciójához hasonlóan legyen

$$\alpha_j^*=\max\{\bar{a}_{rj}/\bar{a}_{r0}|r\in N_3\setminus N_2\},\quad j\in I_R$$

és tekintsük a

$$\sum_{j\in I_R}\alpha_j^*x_j\geqq 1 \tag{4.3}$$

egyenlőtlenséget. Az $\tilde{\mathbf{x}}$ pont nyilván eleget tesz (4.3)-nak, azonban $\bar{x}_j=0$, $\forall j\in I_R$ miatt (4.3) nem teljesül az $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontra. A

$$\sum_{j\in I_R}(-\alpha_j^*)x_j\leqq -1$$

feltétel (2.1)-hez való csatolásával levágjuk az $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontot, azonban az esetleg javító $\tilde{\mathbf{x}}$ pontokat meghagyjuk. Adjuk a $\gamma=\mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}}$ helyettesítéssel kapott (4.1) feltételt is (2.1)-hez, illetve módosítsuk (4.1) jobb oldalát az új γ értékre, ha (4.1) már szerepel (2.1)-ben. Ezután a legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felületkeresést ismételjük meg a maradék poliéderen.

Most rátérünk arra az esetre, amikor a 2.1. algoritmus befejezésekor a (2.2) olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát kapjuk, melyre $|N\cap I_B|=m+1$. Ekkor a $Z=N\cap I_R$ jelöléssel P_Z legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felület. Vizsgáljuk meg, hogy $P_Z\cap Q_k$ tartalmaz-e 0-dimenziós releváns határoló felületet, azaz P_0 valamely csúcspontját. Ha a 2.1. algoritmus végén $N\cap I_B=N_1\cup N_0$, akkor $n_0+n_1=m+1$, így a 2.4. tétel alapján $P_Z\cap Q_k\cap F_0=\emptyset$. Ha $(N\cap I_B)\setminus(N_1\cup N_0)\neq\emptyset$, akkor válasszunk egy $\mathbf{x}_r$, $r\in(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)$ változót és oldjuk meg a megfelelő (2.4) feladatot a $\mathbf{B}$ megengedett bázisból kiindulva és a módosított belépési szabályt használva. Jelölje újból $\mathbf{B}$ az optimális bázist. Ha $|N\cap I_B|=m$, akkor a már korábban ismertetettek szerint járhatunk el. Különben, ha az optimális megoldásban $x_r>0$, akkor hajtsuk végre a 2.1 algoritmus 5., 6. esetleg 7. lépésben leírtakat, az $x_r=0$ esetben pedig a 4. lépésben leírtakat, azzal az eltéréssel, hogy a (2.16) feladattal és a hozzá tartozó $\mathbf{y}^1$ vektorral és U_1 felső korláttal most nem kell foglalkoznunk, továbbá az 1. vagy 3. lépésre nem kell továbblépnünk. Ha a 4. lépést hajtottuk végre, és ott sikerült kihozni az x_r változót a bázisból, akkor a legutoljára elért $\mathbf{B}$ megengedett bázisra $|N\cap I_B|=m$ és a már ismert módon folytathatjuk. Minden más esetben $|N\cap I_B|=m+1$ és az előbb tekintett r indexre már $r\notin(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)$ teljesül. Az $(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)\neq\emptyset$ esetben válasszunk egy új $r\in(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)$ indexet és ismételjük meg a fentieket. Nyilván véges számú (2.4) feladat megoldása után egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázist kapunk, amelyre vagy $|N\cap I_B|=m$ vagy $(N\cap I_B)\setminus(N_0\cup N_1)=\emptyset$ és $|N\cap I_B|=m+1$. A továbbiakban a második esettel foglalkozunk.

Könnyen látható, hogy $P_Z\cap Q_k=\{\mathbf{x}|\lambda\mathbf{x}^{(1)}+(1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)},\ 0\leqq\lambda\leqq 1\}$, ahol $Z=N\cap I_R$, $\mathbf{x}^{(1)}$ a (2.2) $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának első n komponenséből álló vektor, és $\mathbf{x}^{(2)}$ az egyetlen $l\in S\cap I_R$ indexre felírt

$$\max x_l$$
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$
$$\mathbf{Hx}+\mathbf{Ex}_S=\mathbf{h},$$
$$x_j=0,\quad j\in Z,$$
$$x_j\geqq 0,\quad j\in(N\cup S)\setminus Z,$$

feladat optimális megoldásának első n komponenséből álló vektor. Ha $g(\mathbf{x}^{(1)})<0$ és $g(\mathbf{x}^{(2)})<0$, akkor $P_Z\cap Q_k\cap G=\emptyset$, különben a $g(\mathbf{x}^{(1)})\geqq 0$ és $g(\mathbf{x}^{(2)})\geqq 0$ közül legalább az egyik teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(1)}\leqq\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(2)}$. A $g(\mathbf{x}^{(1)})\geqq 0$ esetben legyen $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^{(1)}$, $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^{(1)}$ és módosítsuk a (2.1) feltételei között már nyilvánvalóan megtalálható (4.1) célfüggvénymetszés jobb oldalát az új γ értékre. A $g(\mathbf{x}^{(1)})<0$ esetben legyen

$$\lambda^*=\max\{\lambda|g[\lambda\mathbf{x}^{(1)}+(1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}]\geqq 0,\ \lambda\in[0,1]\},$$

$\mathbf{x}^*=\lambda^*\mathbf{x}^{(1)}+(1-\lambda^*)\mathbf{x}^{(2)}$, $\gamma=\mathbf{c}'\mathbf{x}^*$ és módosítsuk a (2.1)-ben szereplő (4.1) jobb oldalát az új γ értékre. Mivel az esetleg módosított (4.1) metszés sem vágja le a $P_Z\cap Q_k$ összes pontját, gondoskodnunk kell a $P_Z\cap Q_k$ szakasz pontjainak kizárásáról a további keresésből. Nyilván tetszőleges $\tilde{\mathbf{x}}\in F_1\cap Q_k$, $\tilde{\mathbf{x}}\notin P_Z\cap Q_k$ esetén létezik $j\in N_1\setminus N_2$, amelyre $\tilde{x}_j=0$. Az $N_1\setminus N_2=\emptyset$ esetben ilyen $\tilde{\mathbf{x}}$ nem létezhet, így az addig talált legjobb $\mathbf{x}^*$ megengedett megoldás az (1.1)—(1.3) feladat optimális megoldása. Ha $N_1\setminus N_2\neq\emptyset$, akkor minden $r\in N_1\setminus N_2$ indexhez tekintsük a megfelelő (2.4) feladat optimális megengedett bázisa által meghatározott kanonikus alakból az x_r változóhoz tartozó, korábban eltárolt (3.1) feltételt. Alkalmazzuk a 3. fejezetben bemutatott diszjunktív felületmetszést $J=N_1\setminus N_2$ és $l=1$ helyettesítéssel. Mivel $d_{r0}^{(r)}>0$ és $d_{rj}^{(r)}\leqq 0$, $\forall r\in N_1\setminus N_2$, $\forall j\in(N\cup S)\setminus Z$, így a megfelelő (3.4) metszés levágja (2.2) $P_Z\cap Q_k$ pontjaihoz tartozó megengedett megoldásait, de megtartja (2.2) $(F_1\setminus P_Z)\cap Q_k$ pontjaihoz tartozó megengedett megoldásait. Az előállított (3.4) feltételt a 3. fejezetben leírtak szerint a (2.1) rendszerben kívánt alakra hozzuk és (2.1)-hez csatoljuk, majd a maradék poliéderen újrakezdjük a legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felületet kereső eljárást.

Megjegyezzük, hogy a $g(\mathbf{x}^{(1)})<0$, $g(\mathbf{x}^{(2)})<0$ esetben, ha a $P_0\cap Q_k$ poliéder $\mathbf{x}^{(1)}$ vagy $\mathbf{x}^{(2)}$ csúcspontja nemdegenerált, akkor ezen nemdegenerált csúcspontban előállított konvex metszés levágja az $\mathbf{x}^{(1)}$ és $\mathbf{x}^{(2)}$ pontokat összekötő szakasz minden pontját. Ebben az esetben a konvex metszést is alkalmazhatjuk a diszjunktív felületmetszés helyett.

Miután ezen fejezetben áttekintettük a legfeljebb 1-dimenziós releváns határoló felület megtalálása utáni teendőket, megállapíthatjuk, hogy ha menet közben nem bizonyosodtunk meg valamely megengedett pont optimalitásáról, akkor egy olyan metszősíkfeltételt állítunk elő, amelynek (2.1)-hez való csatolása levágja a P_0 poliéder legalább egy csúcspontját vagy egy élének maradék pontjait. Mivel a P_0 poliédernek véges sok határoló felülete van, így véges sok metszősíkfeltétel (2.1)-hez való csatolása után az (1.1)—(1.3) feladat megoldására adott módszer véget ér.

5. A felhasznált heurisztikák és számítástechnikai tapasztalatok

Mivel az (1.1)—(1.3) feladat megoldására jelen dolgozatban bemutatott módszer lényeges részét képezi a 2.1. algoritmus, így érdemesnek tartjuk a módszer számítógépes implementációja során a 2.1. algoritmusban használt heurisztikák rövid összefoglalását.

A (2.12) és (2.13) alakú feltételek kivételével a dolgozatban szereplő összes általános halmazlefedési feladat jobb oldalán egyes áll. Következésképpen, ha a 2.1. algoritmus végrehajtásai során végig az $n_0=0$ esetet kapjuk, akkor a felmerülő általános halmazlefedési feladatok hagyományos halmazlefedési feladatok [4, 9]. Az általunk használt heurisztikus, alsó és felső korlátot számító eljárások a BALAS és HO [4] által a halmazlefedési feladatra, illetve HALL és HOCHBAUM [14, 15] által az általános halmazlefedési feladatra adott eljárások bizonyos elemeiből állnak össze.

Az összes felmerülő általános halmazlefedési feladatot a következő alakra hozhatjuk:

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} y_j, \\ &\sum_{j\in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i\in M, \\ &y_j = 1, \quad j\in J \\ &y_j\in\{0,1\}, \quad j\in N\setminus J, \end{aligned}$$

ahol $J\subset N=\{1,\dots,n\}$ és M véges indexhalmaz. A (2.16) feladat esetén $J=N_1$, a (2.15) feladat esetén $J=N_2$. Amint azt már a 2. fejezetben említettük, az (5.1) feladatban esetleges méretcsökkentést hajthatunk végre. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy tetszőleges $i\in M$, $j\in J$ esetén $j\notin V_i$ és $|V_i|\geqq\beta_i>0$. Ebben az esetben (5.1) optimuma azonos $|J|$ és az alábbi feladat optimuma összegével:

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &\min \sum_{j\in N\setminus J} y_j, \\ &\sum_{j\in V_i} y_j \geqq \beta_i, \quad i\in M, \\ &y_j\in\{0,1\}, \quad j\in N\setminus J. \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan elég az (5.2) feladat optimumára vonatkozó alsó és felső korlátokat meghatározni, ezekhez hozzáadva a $|J|$ értéket, megkapjuk az (5.1) feladatra vonatkozó megfelelő értékeket.

Az alábbi, felső korlátot számító primál heurisztikus eljárás a BALAS és HO [4] által a halmazlefedési feladatra adott PRIMAL 1 eljárás csekély módosításokkal történő átírása az (5.2) feladatra.

5.1. ALGORITMUS.

0. *Lépés.* Legyen $y_j=0$, $\forall j\in N\setminus J$. Minden $j\in N\setminus J$ indexre számítsuk ki a

$$k_j = \sum_{i\in W_j} \beta_i$$

összeget, ahol $W_j=\{i\in M\,|\, j\in V_i\}$. Folytassuk az 1. lépésen.

1. *Lépés.* Ha $M=\emptyset$, akkor menjünk a 2. lépésre, különben válasszunk egy $i^*\in M$ indexet, melyre

$$|V_{i^*}|/\beta_{i^*} = \min\,\{|V_i|/\beta_i|\ i\in M\}$$

és egy $j^*\in V_{i^*}$ indexet, melyre

$$k_{j^*} = \max\,\{k_j|j\in V_{i^*}\}.$$

Minden $i\in W_{j^*}$ esetén hajtsuk végre a következőket: legyen $V_i\leftarrow V_i\setminus\{j^*\}$, $k_j\leftarrow k_j-1$, $\forall j\in V_i$, $\beta_i\leftarrow\beta_i-1$, és $\beta_i=0$ esetén legyen $M\leftarrow M\setminus\{i\}$. Legyen $y_{j^*}=1$. Ismételjük meg az 1. lépést.

2. *Lépés.* Állítsuk vissza az (5.2) alakját. Vegyük sorba azon $j\in N\setminus J$ indexeket, melyre $y_j=1$. Legyen ideiglenesen $y_j=0$. Ha az így kapott $\mathbf{y}$ vektor nem tesz eleget (5.2) feltételeinek, akkor állítsuk vissza az $y_j=1$ komponenst, különben maradjon továbbra is $y_j=0$. Álljunk le.

Az (5.2)-ben nem szereplő változókra vonatkozó $y_j=1$, $\forall j\in J$ beállítással az előálló $\mathbf{y}$ vektor (5.1) egy megengedett vektora és a hozzá tartozó célfüggvényérték (5.1) optimumának felső korlátja.

Az (5.2) lineáris programozási relaxációját és annak duálját a következő alakban írhatjuk fel:

$$\min \sum_{j\in N\setminus J} y_j$$

$$(5.3)\qquad \sum_{j\in V_i} y_j \geqq \beta_i,\quad i\in M,$$

$$0 \leqq y_j \leqq 1,\quad j\in N\setminus J$$

és

$$\max \sum_{i\in M} \beta_i z_i - \sum_{j\in N\setminus J} v_j$$

$$(5.4)\qquad \sum_{i\in W_j} z_i - v_j \leqq 1,\quad j\in N\setminus J,$$

$$z_i \geqq 0,\quad i\in M,\quad v_j\geqq 0,\quad j\in N\setminus J,$$

ahol $W_j=\{i\in M\,|\, j\in V_i\}$, $j\in N\setminus J$. Az (5.3) vagy (5.4) optimumának meghatározásával alsó korlátot kapunk (5.2) optimumára. Az (5.4) tetszőleges megengedett megoldásához tartozó célfüggvényérték szintén alsó korlát (5.2) optimumára vonatkozóan. A következő duál heurisztika (5.4) egy megengedett megoldását állítja elő.

5.2. ALGORITMUS.

0. *Lépés.* Legyen $z_i=0$ és $l_i=|V_i|/\beta_i$ minden $i\in M$ esetén, továbbá $v_j=0$ és $\gamma_j=0$ minden $j\in N\setminus J$ esetén. Folytassuk az 1. lépésen.
1. *Lépés.* Ha $M=\emptyset$, akkor menjünk a 2. lépésre, különben válasszunk egy $i^*\in M$ indexet, melyre $l_{i^*}=\min\{l_i|i\in M\}$. Ha $\sum_{j\in V_{i^*}}\gamma_j\geqq\beta_{i^*}$, akkor legyen $M\leftarrow M\setminus\{i^*\}$ és ismételjük meg az 1. lépést. Különben minden $j\in V_{i^*}$ esetén legyen $\gamma_j\leftarrow\gamma_j+1$. Ha $\gamma_j>1$, akkor legyen $v_j\leftarrow v_j+1$ és $\gamma_j=1$. Legyen $z_{i^*}=1$, $M\leftarrow M\setminus\{i^*\}$ és ismételjük meg az 1. lépést.
2. *Lépés.* Állítsuk vissza az M indexhalmazt és álljunk le.

Könnyen látható, hogy az 5.2. algoritmus által előállított z_i, $i\in M$ és v_j, $j\in N\setminus J$ komponensekből álló vektor az (5.4) megengedett megoldása. Ezen megengedett megoldáshoz tartozó célfüggvényértékhez a $|J|$ értéket hozzáadva alsó korlátot kapunk (5.1) optimumára.

A 2.1. algoritmus során szereplő általános halmazlefedési feladatok optimumára adott alsó becslésekről megköveteljük, hogy bizonyos nyilvánvaló alsó korlátot elérjenek. Például a (2.16) feladatra adott L_1 alsó becslésről feltettük, hogy $L_1\geqq n_0+n_1$, mivel (2.16) tartalmazza az

$$y_j = 1, \quad j\in N_1$$

feltételeket és $n_0>0$ esetén egy

$$\sum_{j\in Z\cup N_0} y_j \geqq n_0 \tag{5.5}$$

feltételt, ahol $(Z\cup N_0)\cap N_1=\emptyset$. A (2.16) feladatra az (5.1) és (5.2) alakot használva nyilván $J=N_1$ és (5.5) az (5.2) feltételei között található. Ha (5.3) vagy (5.4) egzakt optimumát határozzuk meg, akkor az előálló L_1 alsó becslésre $L_1\geqq n_0+n_1$. Ha az 5.2. algoritmus által az (5.4) optimumára adott alsó becslés esetleg kisebb az n_0 értéknél, akkor $L_1<n_0+n_1$. Ekkor vagy az $L_1=n_0+n_1$ alsó becslést választjuk, vagy az 5.2. algoritmust újrafuttatjuk azzal a módosítással, hogy az 1. lépés első végrehajtásakor az i^* indexnek az (5.5) feltétel (5.2) rendszerbeli indexét választjuk. Ekkor $L_1\geqq n_0+n_1$ már teljesül. Hasonlóképpen járhatunk el a 2.1. algoritmus során szereplő (2.15) és (2.16)—(2.17) feladatok esetén is.

Ezek után rátérünk a fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladatok megoldása során szerzett számítástechnikai tapasztalatok ismertetésére. Az első három tesztfeladatot az irodalomból választottuk. Az első MUU [22], a második THUONG és TUY [27], a harmadik pedig HILLESTAD [16] dolgozatában szereplő numerikus példa, ahol a megadott méretek az (1.1)—(1.3) alakra történő hozás után értendők. A többi tesztfeladatot véletlenszerűen állítottuk elő a következő módon. Véletlenszerűen generáltuk az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor együtthatóit úgy, hogy az előálló P_0 poliéder nemüres és korlátos legyen. Egy véletlen generált $\mathbf{c}$ vektorral meghatároztuk a $\max\{\mathbf{c}'\mathbf{x}|\mathbf{x}\in P_0\}$ és $\min\{\mathbf{c}'\mathbf{x}|\mathbf{x}\in P_0\}$ feladatok $\mathbf{x}^{\max}$, illetve $\mathbf{x}^{\min}$ optimális

1. TÁBLÁZAT

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1.	3×5	I. II. III.	7 7 7	3 3 3	— 0,01 0,01	0,02 0,03 0,04
2.	4×6	I. II. III.	9 9 9	3 3 3	— 0,01 0,02	0,03 0,04 0,05
3.	3×7	I. II. III.	37 37 37	7 7 7	— 0,07 0,08	0,13 0,20 0,21
4.	5×10	I. II. III.	190 135 119	25 20 18	— 0,17 0,26	1,24 1,03 1,06
5.	6×12	I. II. III.	414 252 249	36 30 30	— 0,39 0,41	3,12 2,44 2,39
6.	7×14	I. II. III.	635 429 382	42 39 33	— 0,63 1,06	5,40 4,39 4,33
7.	8×16	I. II. III.	1517 1060 983	83 81 79	— 2,02 5,54	21,19 18,22 20,63
8.	9×18	I. II. III.	1591 954 1028	83 69 71	— 1,74 2,93	25,17 15,82 18,43
9.	10×20	I. II. III.	2841 2212 1587	128 120 113	— 3,28 15,12	63,36 48,89 52,05

megoldásait, majd a

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^{\min})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{\max} - x_j^{\min})^2$$

függvényt választottuk az (1.3) feltételbe.

Három módszert teszteltünk. Ezen módszerek az (1.1)—(1.3) feladat megoldására jelen dolgozatban adott megoldó módszer variánsai, amelyek abban különböznek egymástól, hogy használják-e az általános halmazlefedési segédfeladatokat, illetve, hogy milyen alsó és felső korlát számító eljárásokat alkalmaznak:

I. módszer: Nem alkalmazzuk az általános halmazlefedési segédfeladatokat. Ez azt jelenti, hogy a 2.1. algoritmusban a felső korlát számításokat kihagyjuk, alsó korlátnak pedig a triviális értékeket adjuk át.

II. módszer: Alkalmazzuk az általános halmazlefedési segédfeladatokat. Felső korlát számításra az 5.1. algoritmust, alsó korlát számításra az 5.2. algoritmust használjuk.

III. módszer: Alkalmazzuk az általános halmazlefedési segédfeladatokat. Felső korlát számításra az 5.1. algoritmust, alsó korlát számításra az (5.3) feladat szimplex módszerrel történő megoldását használjuk.

A számítógépes programok FORTRAN programozási nyelven készültek és IBM/3031 típusú számítógépen futottak. Az 1. táblázatban a futási eredményeket közöljük. A táblázat oszlopaiban a következő adatok találhatók:

a = a feladat sorszáma;
b = az **A** mátrix mérete;
c = a módszer sorszáma;
d = a szimplex lépések száma;
e = a metszések száma;
f = az általános halmazlefedési feladatok karbantartására, alsó és felső korlátok számítására felhasznált CPU idő másodpercben;
g = a teljes futás CPU ideje másodpercben.

Az 1. táblázatban közölt futási eredményekből látható, hogy a kisebb méretű feladatokon a három módszer során használt szimplex lépések és metszések száma azonos volt, sőt a II. és III. módszer esetén a halmazlefedési feladattal összefüggő teendők csekély CPU időnövekedést jelentettek. A nagyobb méretű feladatok esetén azonban a II. és III. módszer már jelentősen kisebb számú szimplex lépést és metszést használt és ez a halmazlefedési feladatra fordítandó CPU idő mellett is kisebb teljes CPU időfelhasználást eredményezett.

IRODALOM

[1] AVRIEL, M. and WILLIAMS A. C., "Complementary geometric programming", *SIAM Journal on Applied Mathematics* **19** (1970) 125—141.

[2] BALAS, E., "Disjunctive programming: Cutting planes from logical conditions", in: *MANGASARIAN, O. L. and MEYER, R. R. and ROBINSON, S. M.* (eds.), *Nonlinear Programming* 2 (Academic Press, New York, 1975) 297—312.

[3] BALAS, E., "Disjunctive programming", *Annals of Discrete Mathematics* **5** (1979) 3—51.

[4] BALAS, E. and HO, A., "Set covering algorithms using cutting planes, heuristics and subgradient optimization: a computational study", *Mathematical Programming* **12** (1980) 37—60.

[5] BANSAL, P. P. and JACOBSEN, S. E., "Characterization of basic solutions for a class of nonconvex programs", *Journal of Optimization Theory and Applications* **15** (1975) 549—564.

[6] BANSAL, P. P. and JACOBSEN, S. E., "An algorithm for optimizing network flow capacity under economies-of-scale", *Journal of Optimization Theory and Applications* **15** (1975) 565—586.

[7] BARTHOLDI, J. J., "A guaranteed-accuracy round-off-algorithm for cyclic scheduling and set covering", *Operations Research* **29** (1981) 501—510.

[8] ECKHARDT, U., "Theorems on the dimensions of convex sets", *Linear algebra and its applications* **12** (1975) 63—76.

[9] FORGÓ, F., *Nemkonvex és diszkrét programozás* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978).

[10] FÜLÖP, J., „Eredeti csúcspont keresése és alkalmazása konkáv függvény lineáris feltételek melletti minimalizálásakor", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **9** (1983) 51—72.

[11] FÜLÖP, J., "A finite procedure to generate feasible points for the extreme point mathematical programming problem", *European Journal of Operational Research* **35** (1988) 228—241.

[12] GLOVER, F., "Convexity cuts and cut search", *Operations Research* **21** (1973) 123—134.

[13] GLOVER, F., "Polyhedral convexity cuts and negative edge extensions", *Zeitschrift für Operations Research* **18** (1974) 181—186.
[14] HALL, N. G. and HOCHBAUM, D. S., "The multicovering problem: the use of heuristics, cutting planes, and subgradient optimization for a class of integer programs", *University of California at Berkeley*, Sept. 1986.
[15] HALL, N. G. and HOCHBAUM, D. S., "A fast approximation for the multicovering problem", *Discrete Applied Mathematics* **15** (1986) 35—40.
[16] HILLESTAD, R. J., "Optimization problems subject to a budget constraint with economies of scale", *Operations Research* **23** (1975) 1091—1098.
[17] HILLESTAD, R. J. and JACOBSEN S. E., "Reverse convex programming", *Applied Mathematics and Optimization* **6** (1980) 63—78.
[18] HILLESTAD, R. J. and JACOBSEN, S. E., "Linear programs with an additional reverse convex constraint", *Applied Mathematics and Optimization* **6** (1980) 257—269.
[19] MAJTHAY, A. and WHINSTON A., "Quasi-concave minimization subject to linear constraints", *Discrete Mathematics* **9** (1974) 35—59.
[20] MATTHEIS, T. H. and RUBIN D. S., "A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedrical sets", *Mathematics of Operations Research* **5** (1980) 167—185.
[21] MEYER, R., "The validity of a family of optimization methods", *SIAM Journal on Control* **8** (1970) 41—54.
[22] MUU, L. D., "A convergent algorithm for solving linear programs with an additional reverse convex constraint", *Kybernetika* **21** (1985) 428—435.
[23] ROSEN, J. B., "Iterative solution of nonlinear optimal control problems", *SIAM Journal on Control* **4** (1966) 223—244.
[24] SHERALI, H. D. and SHETTY, C. M., *Optimization with Disjunctive Constraints* (Springer, New York, 1980).
[25] SHERALI, H. D. and SEN, S., "On generating cutting planes from combinatorical disjunctions", *Operations Research* **33** (1985) 928—933.
[26] STOER, J. and WITZGALL, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions*, (Springer, Berlin, 1970).
[27] THUONG, N. V. and TUY, H., "A finite algorithm for solving linear programs with an additional reverse convex constraint", in: *DEMYANOV, V. F. and PALLASCHKE, D.* (eds.), *Nondifferentiable Optimization: motivations and applications*, (Sopron, 1984) (Springer, New York, 1985), 292—301.
[28] TSCHERNIKOW, S. N., *Lineare Ungleichungen*, (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971).
[29] TUY, H., "Concave programming under linear constraints", *Soviet Mathematics* **5** (1964) 1937—1940.
[30] UEING, U., "A combinatorical method to compute a global solution of certain nonconvex problems", in: *LOOTSMA, F. A.* (ed.), *Numerical Methods for Nonlinear Optimization*, (Academic Press, 1972), 223—230.

(Beérkezett: 1987. november 10.)

FÜLÖP JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST, XI. KENDE U. 13—17.

A FINITE CUTTING PLANE METHOD FOR SOLVING LINEAR PROGRAMS WITH AN ADDITIONAL REVERSE CONVEX CONSTRAINT

J. FÜLÖP

In the paper we deal with linear programs with an additional reverse convex constraint. It is known that if the polyhedron determined by the linear constraints is bounded and the feasible region of the considered nonconvex problem is nonempty, then the problem has a finite optimum obtained on an at most onedimensional face of the polyhedron as well. The paper presents a finite cutting plane method using convexity and disjunctive cuts for solving the considered problem. The method is based upon a procedure which, for a given nonnegative integer q, either finds such an at most q-dimensional face of the original polyhedron which has a point feasible to the cuts generated previously or proves that there exists no such a face. Computational experience is also provided.

Alkalmazott Matematikai Lapok 14 (1989) 143—146

EGY ÖSSZLÉPÉSES POLINOM-GYÖKKERESŐ MÓDSZEROSZTÁLY

VARGA GYULA

Budapest

A cikk egy összlépéses polinom-gyökkereső módszerosztályt ad meg, és megvizsgálja néhány ismert összlépéses polinom-gyökkereső eljárás beletartozását a módszerosztályba.

1. Bevezetés

Összlépéses polinom-gyökkereső eljárásokat főként csupa egyszeres gyökökkel rendelkező polinomokra ismerünk ([1], [2] stb). Ennek oka az, hogy a számítástechnika számára a polinom többszörös gyökei mint egymáshoz igen közel fekvő egyszeres gyökök lépnek fel, és kezelésük, valamint kiszámításuk nehezebb. Az eddigi, többszörös gyökök kiszámítására is alkalmas összlépéses módszerek ([3], [4], [5]) algoritmusukban nem tesznek különbséget többszörös és egymáshoz igen közel fekvő gyökök kezelése között. Ez utóbbi esetben az algoritmusok eredményül olyan pontot adnak, amely a komplex síkon egymáshoz közel fekvő gyökök mindegyikéhez közel helyezkedik el.

Az alábbiakban egy kétparaméteres összlépéses polinom-gyökkereső módszerosztályt adunk meg, amely többszörös gyökök kiszámítására is alkalmas, és megvizsgáljuk néhány ismert összlépéses, egyszeres és/vagy többszörös gyökök kiszámítására szolgáló eljárás beletartozását a módszerosztályba.

2. A módszerosztály

Legyen

$$A(z) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i z^{i-1} \tag{2.1}$$

n-edfokú komplex együtthatós polinom, amelynek egyszeres és többszörös gyökei is lehetnek. Legyen $\mathbf{a}=(a_1 \ldots a_n)^T$ az együtthatók vektora, és legyen $a_{n+1}=1$. Írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját:

$$A(z) = \prod_{j=1}^{l} (z-r_j^*) \prod_{j=1}^{m} (z-r_{j+l}^*)^{p_j}. \tag{2.2}$$

Ebből adódik, hogy

$$n = l + \sum_{j=1}^{m} p_j. \tag{2.3}$$

Legyen $\mathbf{r}^*=(r_1^*, \ldots, r_l^*)^T$ a pontos egyszeres gyökök vektora, és legyen $\mathbf{r}=$ $=(r_1, \ldots, r_l)^T$ annak valamely közelítése. A gyökök és együtthatók között fennálló *Vieta-féle*

$$(2.4) \qquad V_i(\mathbf{r}^*, r_{l+1}^*, \ldots, r_{l+m}^*) = a_{n+i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

összefüggéseknek a Newton—Girard-féle rekurziós formulával való transzformált alakjából (l. pl. [5]) adódik a

$$(2.5) \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j r_{j+l}^{*i} = s_i(\mathbf{a}) - \sum_{j=1}^{l} r_j^{*i} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

összefüggés, amelyből látható, hogy az $r_{l+1}^*, \ldots, r_{l+m}^*$ mennyiségek

$$(2.6) \qquad r_{l+j}^* = r_{l+j}^*(\mathbf{r}^*, \mathbf{a}) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

alakban írhatók fel. Az $s_i(\mathbf{a})$ mennyiségek a polinom összes gyökének (a többszörös gyököket multiplicitásukkal véve) j-edik hatványösszegei. A továbbiakban megköveteljük a (2.5), ill. (2.6) formulák érvényességét a gyökök közelítéseire is, és így hivatkozunk rájuk.

Legyen az $\mathbf{r}$ és $r_{l+j}(j=1, \ldots, m)$ gyökökkel rendelkező polinom

$$(2.7) \qquad B(\mathbf{r}, z) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i(\mathbf{r}) z^{i-1} = \prod_{j=1}^{l} (z-r_i) \prod_{j=1}^{m} (z-r_{j+l})^{p_j}.$$

Legyen a (2.7) együtthatóinak vektora $\mathbf{b}(\mathbf{r})=(b_1(\mathbf{r}), \ldots, b_n(\mathbf{r}))^T$ és legyen $b_{n+1}(\mathbf{r})=1$. Kitűzött feladatunk értelmében meg kell oldanunk a

$$(2.8) \qquad \mathbf{b}(\mathbf{r}) - \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

túlhatározott nemlineáris egyenletrendszert. (Ez a polinom gyökeinek multiplicitására tett (2.3) kikötés teljesülése esetén konzisztens). Az egyenletrendszer megoldására a *Newton—Raphson-módszer* egy változatát alkalmazzuk. Írjuk fel az egyenletrendszer *Jacobi mátrixát*. Legyen

$$(2.9) \qquad B_k(\mathbf{r}, z) = \frac{\partial B(\mathbf{r}, z)}{\partial r_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(\mathbf{r})}{\partial r_k} z^{i-1}.$$

Behelyettesítve a $z=r_k$-t a fenti egyenlőségbe, kapjuk:

$$(2.10) \qquad B_k(\mathbf{r}, r_k) = -\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq k}}^{l} (r_k - r_j) \sum_{j=1}^{m} (r_k - r_{j+l})^{p_j} \quad (k = 1, \ldots, l).$$

Az $\mathbf{U}=[u_{i,k}]$ *Jacobi mátrix* k-adik oszlopának elemeit $B_k(\mathbf{r}, r_k)$-nak mint r_k polinomjának együtthatói adják:

$$u_{i,k} = \frac{\partial b_i(\mathbf{r})}{\partial r_k} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (k = 1, \ldots, l).$$

A téglalap alakú *Jacobi mátrix* egy balinverzét megkaphatjuk az

$$\mathbf{U}^{-L} = [w_{k,i}]$$

alakban, ahol

$$w_{k,i} = \frac{r_k^{i-1}}{B_k(\mathbf{r}, r_k)} \quad (k = 1, \dots, l), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Az egyenletrendszer megoldásához szükséges iterációs korrekciót

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{U}^{-L}(\mathbf{a} - \mathbf{b}(\mathbf{r}))$$

vagy komponensenként felírva

$$\Delta r_k = \frac{A(r_k)}{B_k(\mathbf{r}, r_k)} \quad (k = 1, \dots, l)$$

alakban adjuk meg. Ennek megfelelően, kiindulva valamely alkalmas $\mathbf{r}^{(0)}$ kezdő közelítésből, a (2.8) megoldására szolgáló iterációs képlet az alábbi alakú:

$$(2.11) \qquad r_k^{(q+1)} = r_k^{(q)} - \frac{A(r_k^{(q)})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} (r_k^{(q)} - r_j^{(q)}) \prod\limits_{j=1}^{m} (r_k^{(q)} - r_{j+l}^{(q)})^{p_j}} \qquad \begin{matrix} (k = 1, \dots, l) \\ (q = 0, 1, \dots). \end{matrix}$$

A (2.5) és (2.11) képletekkel egy kétparaméteres, $l \geqq 0$-tól és $m \geqq 0$-tól függő módszerosztályt adtunk meg. A továbbiakban ezt fogjuk vizsgálni.

3. A módszerosztály vizsgálata

A módszerosztály paraméterei a vizsgálandó polinom egyszeres és többszörös zérushelyeinek számával egyeznek meg (l, m). A paraméterek bizonyos meghatározott értékeire ismert összlépéses polinom-gyökkereső módszereket kapunk. Tekintsük ezeket:

1. $l > 0$, $m = 0$. Ebben az esetben (2.3) miatt $n = l$, $\mathbf{U}$ négyzetes, nemszinguláris mátrix, $\mathbf{U}^{-L} = \mathbf{U}^{-1}$, és (2.11) a jól ismert *Kerner-féle*, másodrendben konvergáló összlépéses polinom-gyökkereső eljárás iterációs képletét adja [1].

2. $l > 0$, $m = 1$. Ebben az esetben a (2.5) egyismeretlenes elsőfokú egyenlet r_{l+1}-re, megoldását (2.11)-be behelyettesítve kapjuk a [3]-ban leírt módszer iterációs képletét. Ez a módszer feleslegessé teszi az [1]-ben kitűzött feladat megoldásához a gyökök egyszerességére tett megszorítást! A módszer konvergenciája másodrendű (l. ott).

3. $l > 0$, $m = 2$. Ekkor (2.5) egy kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer r_{l+1} és r_{l+2}-re. Képlettel felírható megoldását (2.11)-be behelyettesítve kapjuk a [4]-ben leírt módszer iterációs képletét. A módszer másodrendű konvergenciája az előző esetéhez hasonlóan látható be.

4. $l > 0$, $m > 2$. Ekkor (2.5) egy m-ismeretlenes m-edfokú egyenletrendszer $r_{l+1}, \dots, r_{l+m}$-re, képlettel általában nem oldható meg. Ez az eset, kiindulva valamely alkalmas $\mathbf{r}^{(0)}$ kezdő közelítő vektorból, formálisan a (2.5) egyenletrendszer megoldása és a (2.11) képlet váltakozva történő alkalmazásával kezelhető prediktor-korrektor módszer. A gyakorlatban nem alkalmazzuk, hanem visszavezetjük a következő esetre.

5. Az eddigiekben sehol sem használtuk ki azt, hogy $p_j > 1$. Ez nem is szükséges. Az előző esetet is tekinthetjük úgy, hogy $p_j \geqq 1$, $l=0$ és $m>0$. Ekkor

$$n = \sum_{j=1}^{m} p_j$$

a (2.11) képlet hatástalan, (ui. ott $k=1, \ldots, l$ de $l=0$) és a (2.5) átmegy a

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_j^i = s_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

alakba. Ezt a nemlineáris egyenletrendszert pl. az [5]-ben leírt eljárással oldhatjuk meg a multiplicitások ismeretében. Az eljárás konvergenciája másodrendű.

IRODALOM

[1] Kerner, I. O., „Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen", *Numer. Math.* **8** (1966) 290—294.

[2] Filippi, S., „Ein verallgemeinertes Bairstow-Verfahren zur gleichzeitigen Ermittlung aller Nullstellen eines Polynoms", *Beiträge Numer. Math.* **4** (1975) 83—89.

[3] Varga, Gy., „A Newton—Kerner-féle polinom-gyökkereső eljárás egy általánosítása", *Alk. Mat. Lapok* **10** (1984) 173—176.

[4] Varga, Gy., "On a Generalization of the Newton—Kerner Procedure for Simultaneous Calculation of all Zeros of Polynomials", *MTA SZTAKI tanulmány* MN/13 1983.

[5] Varga, Gy., „Egy összlépéses polinom-faktorizációs eljárás többszörös gyökökkel is rendelkező polinomokra", *Alk. Mat. Lapok* **10** (1984) 273—281.

(Beérkezett: 1987. július 20.)

VARGA GYULA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1014 BUDAPEST, ÚRI U. 49.

A CLASS OF TOTAL-STEP METHODS FOR CALCULATION OF ZEROS OF POLYNOMIALS

Gy. Varga

The paper gives a class of methods for simultaneous computation of all zeros of a complex polynomial which has simple and/or multiple zeros and, it shows that some known total-step methods belong into this class of methods.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 147—153

EGY KOMBINATORIKAI FELADAT SZÁMÍTÓGÉPES MEGOLDÁSA

KOVÁCS BÉLÁNÉ

Debrecen

Különböző gyakorlati problémákban gyakran lép fel a következő feladat: az $1, 2, \ldots, n$ számok m darab permutációját kell megadni mátrix alakban, olyan feltételek mellett, hogy az egy oszlopban előforduló elemek halmaza adott.

A cikkben megadunk egy algoritmust a feladat egy megoldásának előállítására.

Az algoritmus iteratív eljárás, amely a kitűzött elrendezést minden lépés után jobban megközelíti és bizonyítjuk, hogy — n-től és m-től függő polinomrendű — lépésszám után a feladat egy megoldásához jutunk.

Órarendkészítéshez és latin négyzetek számítógépes előállításához is használható a leírt algoritmus.

1. Bevezetés

A kombinatorikai feladatok számítógépes megoldásának legelterjedtebb módszere a backtrack eljárás, amely túl általános ahhoz, hogy a feladat megfogalmazásából az algoritmus ismeretében a megoldás létezésére lehessen következtetni. A módszer ismertetése [3]-ban megtalálható. Segítségével csupán a feladat egy konkrét számértékére vonatkozó megoldás válik ismertté a program lefutása után. Ugyanis az eljárás olyan esetekre is alkalmazható, amikor nincs megoldás. Ezt a tényt állapítja meg a program véges lépésben. Vannak azonban olyan feladatok, amelyekre a megoldhatóság bizonyítható. Abban az esetben, ha a megoldás létezésének bizonyítása algoritmus jellegű célszerű, számítógépes alkalmazás esetén, a bizonyítás eredményeit használni a számítógépes program ekészítésénél. Egy ilyen feladat megoldását tartalmazza ez a cikk.

A megoldáshoz konstruált algoritmus használható olyan kombinatorikai feladatok megoldásának számítógépes kereséséhez és elemzéséhez, ahol a korlátozó feltételek halmazából kiválaszthatók olyanok, amelyek teljesülése a feladat alkalmazásaként biztosíthatók. A 3. pontban két ilyen modellt írunk le.

2. A feladat leírása és megoldása

2.1. *A feladat megfogalmazása*

Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ természetes számokat, amelyek mindegyike pontosan m-szer ismétlődik és rendezzük őket egy $m \times n$-es **A** mátrixba. Feladatunk egy olyan algoritmus megadása, amely az oszlopokon belüli permutációk eredményeként az **A** mátrix olyan elrendezését adja, hogy annak minden sorában csupa különböző elem szerepel.

A feladat megoldása egyúttal bizonyítása a következő állításnak:

TÉTEL. Legyen **A** egy tetszőleges $m\times n$-es mátrix, amelyben n különböző elem mindegyike pontosan m-szer fordul elő. Akkor létezik olyan **A'** mátrix, amely a megfelelő oszlopokban ugyanazokat az elemeket tartalmazza, mint **A** — legfeljebb más sorrendben — és tetszőleges sora az n elem egy permutációja.

2.2. *Az algoritmus leírása*

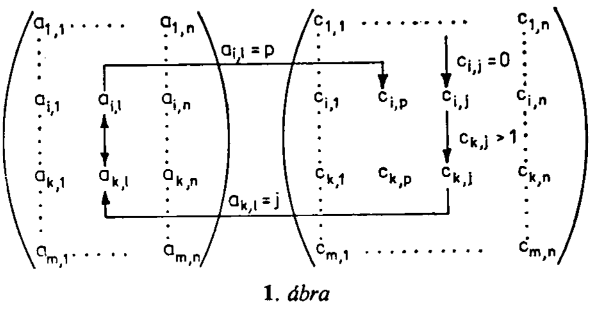
Legyen **C** azon mátrix, amelynek c_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy a j szám az **A** mátrix i-edik sorában hányszor fordul elő.

Ekkor a **C** mátrix minden sorában az elemek összege n, a feladat által megkövetelt elrendezéshez tartozó **C** mátrixnak pedig minden eleme 1.

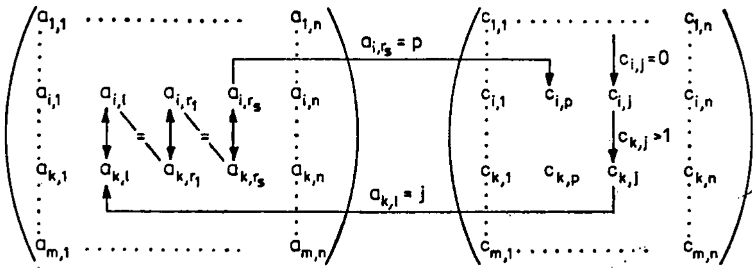
Leírunk egy algoritmust, amely legalább 1-gyel csökkenti a $\emptyset$ elemek számát a **C** mátrixban. A feladat megoldása ezután, addig alkalmazni az algoritmust, mint iterációs lépést, amíg $\emptyset$ elem található a **C** mátrixban.

Az algoritmus a következő:

1. *lépés:* Keressünk $\emptyset$ elemet a **C** mátrixban!
   — Ha nincs $\emptyset$ eleme a **C** mátrixnak, akkor minden eleme 1 és az **A** mátrix a feladat megoldása.
   Legyen $c_{ij}=\emptyset$.
2. *lépés:* Legyen k egy olyan index, amelyre $c_{kj}>1$.
   — Ilyen van, mert ha volt olyan sor, ahonnan hiányzott a j, akkor van olyan is, amelyben legalább kétszer szerepel.
3. *lépés:* Legyen l egy olyan index, amire $a_{kl}=j$.
   — Ilyen legalább kettő van, hiszen $c_{kj}>1$.
4. *lépés:* Az a_{il} és az a_{kl} elemek cseréje.
5. *lépés:* Jelöljük a_{il}-t p-vel (lásd. 1. ábra).
   Vizsgálat: ha $c_{ip}>1$ akkor VEGE, egyébként a következő lépés.
6. *lépés:* Ha $c_{ip}=1$ és $c_{kp}=\emptyset$, akkor VEGE, egyébként a következő lépés.
7. *lépés:* Legyen r egy olyan index, amire $a_{kl}=a_{kr}$ és $l\neq r$ teljesül.
   — Ilyen van, mert a 6. lépésben nem ért véget az algoritmus, ami azt jelenti, hogy $c_{kp}>\emptyset$.
8. *lépés:* Legyen $l=r$ és menjünk az 5. lépésre.



1. *ábra*



2. *ábra*

Az algoritmus befejeződése után aktualizáljuk a **C** mátrix elemeit. Elegendő a 2. ábrán bekeretezett mátrixelemeket aktualizálni, ennek igazolása az algoritmus végességének bizonyításánál található.

2.3. *Az algoritmus végességének bizonyítása*

A tétel bizonyítása a következő két állításból közvetlenül adódik.

1. ÁLLÍTÁS. A 2.2. pontban leírt algoritmus véges számú lépés után befejeződik.

Bizonyítás. Az ismertetett eljárás nem tartalmaz végtelen ciklust, mert mindig olyan oszlopban hajtjuk végre a cserét, amelyben még nem cseréltünk. Tegyük fel, hogy lehet egy oszlopot másodjára is a csere oszlopaként választani. A választást a 7. lépésben a k-adik sorban végezzük. Feltevésünk szerint az itt kiválasztott r-edik oszlop korábban már volt a csere oszlopa, ami azt jelenti, hogy a_{kr} szerepelt az i-edik sorban. De akkor a vele egyenlő a_{kl} nem szerepelhetett, mert akkor az 5. lépésben leállt volna az algoritmus, pedig a_{kl} került az utolsó cserével az i-edik sorból a k-adik sorba, így ellentmondáshoz jutottunk.

2. ÁLLÍTÁS. A 2.2. pontban leírt algoritmus végrehajtása után legalább 1-gyel csökken a $\emptyset$ elemek száma a **C** mátrixban.

Bizonyítás. Legyen r_s az az oszlop index, ahol leállt az algoritmus. Az

$$a_{il}, a_{ir_1}, \dots, a_{ir_{s-1}}; \; a_{kr_1}, \dots, a_{kr_s}$$

elemekhez tartozó **C** mátrixbeli gyakoriságok nem változtak, mert

$$a_{il} = a_{kr_1}, \; a_{ir_1} = a_{kr_2}, \dots$$

a 7. lépésben előírt választás miatt. Elegendő tehát a **C** mátrixnak a 2. sz. ábrán bekeretezett elemeit vizsgálni az algoritmus befejeződése után,

Először megmutatjuk, hogy:

A) Ha az eljárás az 5. lépésben ér véget, akkor az i-edik sorban csökken a $\emptyset$ elemek száma 1-gyel és a k-adik sorban nem növekedik.

Bizonyítás. Az eljárás befejeződése után **C** 2. sz. ábrán bekeretezett elemei a következőképpen változnak:

$$\begin{array}{ll} c_{ij} = 1 & \text{csere előtt } \emptyset \text{ volt,} \\ c_{kj} = c_{kj} - 1 > \emptyset & \text{csere előtt } c_{kj} > 1 \text{ teljesedett,} \\ c_{kp} = c_{kp} + 1 & \\ c_{ip} = c_{ip} - 1 & \text{csere előtt } c_{ip} > 1 \text{ teljesedett,} \end{array}$$

Most megmutatjuk, hogy:

B) Ha az eljárás a 6. lépésben ért véget, akkor a k-adik sorban csökken a $\emptyset$ elemek száma 1-gyel és az i-edik sorban nem változik.

Bizonyítás. Az eljárás befejeződése után **C** 2. sz. ábrán bekeretezett elemei a következőképpen változnak:

$$\begin{array}{ll} c_{ij} = 1 & \text{csere előtt } \emptyset \text{ volt,} \\ c_{kj} = c_{kj} - 1 > 0 & \text{csere előtt } c_{kj} > 1 \text{ teljesedett,} \\ c_{kp} = 1 & \text{csere előtt } \emptyset \text{ volt,} \\ c_{ip} = \emptyset. & \end{array}$$

Természetesen a többi sorokban a $\emptyset$ száma változatlan, mert a cserék csak erre a két sorra vonatkoztak, így a 2. állítás bizonyítását is befejeztük.

2.4. *Megjegyzések a feladat megoldásához*

A feladat egy számítógépes probléma részeként vetődött fel, ezért a megoldás is úgy készült, hogy az algoritmus egyszerűen programozható legyen. A megoldás konstrukciója csak azt biztosítja, hogy a program véges időn belül — ami becsülhető — a feladat egy megoldását eredményezi. A lehetséges megoldások számára az algoritmusból nem tudunk egyszerűen következtetni, de abból, hogy a program az eljárásban, pl. a 3. lépésében, választhat, arra lehet következtetni, hogy több megoldás is van egy kiinduló **A** mátrixhoz. Ennek vizsgálatával itt nem foglalkozunk.

A **C** mátrixban legfeljebb $m*(n-1)$ $\emptyset$ elem szerepel és a legrosszabb esetben egy csereeljárásban egy $\emptyset$ értéket szüntetünk meg. Egy csereeljárás legfeljebb n cserével véget ér — ennyi oszlop van a cserékhez —. Így a szükséges cserék száma kisebb, mint: $n*m*(n-1)$. Mint már említettük az algoritmus determinisztikus, de vannak változtatható elemei, amelyek nehezítik a lépésszám pontos becslését. Változtatható elemek a következők:

1. *lépésben:* a $\emptyset$ elem keresése lehet sorfolytonos, vagy oszlopfolytonos, vagy történhet véletlenszám-generátorral.
2. *lépésben:* k-adik sor kiválasztása az első olyan, amelyre a feltétel teljesedik, vagy további feltételt is vizsgálni kell, amely ha nem teljesedik, akkor az alapfeltételt kielégítőkből kell véletlenszerűen választani.
3. *lépésben:* a cserélendő elem kiválasztása történhet úgy, hogy az első olyat választjuk, ami megfelelő, vagy a második olyat választjuk, ami megfelelő (mert ilyen

legalább kettő volt), vagy annak ismeretében, hogy hány volt, egy véletlenszámgenerátorral végezzük a választást.

Továbbá nehéz annak megállapítása, hogy melyik kiinduló állapot, azaz az **A** mátrixnak melyik alakja a legrosszabb olyan szempontból, hogy a legtöbb cserét kell végrehajtani a kívánt elrendezéshez. Erre a kérdésre az egyik alkalmazásnál, a latin négyzetek generálásánál visszatérünk.

3. Alkalmazások

3.1. *Órarendkészítés*

A számítógépes órarendkészítés problémájával több dolgozat foglalkozik. Ezek közül csak a [2]-t említjük, mert egyrészt ez tartalmaz egy történeti összefoglaló részt a problémáról, másrészt a probléma modelljét az ott leírtaknak megfelelően tárgyaljuk.

Az általunk vizsgált kombinatorikai feladat megoldásának alkalmazása az alap-órarendprobléma egy speciális esetére, az említett cikkben bemutatott modellhez a következőképpen kapcsolódik. A napokra leosztott órarend elkészíthetőségére adunk szükséges és elégséges feltételt, ha az órákat folyamatosan kell tartani az egyes osztályokban. Az említett cikk a *Gotlieb-módszert* alkalmazza az elkészíthetőség vizsgálatára. A módszer az alap-órarendprobléma megoldásával foglalkozik, amelyre azonban nem tud szükséges és elégséges feltételt adni, de a gyakorlatban általában jól működik, azaz általában meg tudja állapítani a nem elkészíthetőséget is.

Az alap-órarendprobléma a következő:

Legyen

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha\}$ a tanárok halmaza,

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_\beta\}$ az osztályok halmaza,

$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_\gamma\}$ a tanítási időpontok halmaza.

Adottak továbbá:

— a t_i tanár b_j osztályban tartandó óráinak száma,

— a t_i tanár tanítási időpontjainak halmaza,

— a b_j osztály tanítási időpontjainak halmaza.

Feladat ütközésmentes órarend készítése a fenti feltételek mellett, azaz olyan órarend, amely kielégíti a feltételeket és minden tanár egy időpontban csak egy osztályban tart órát és minden osztálynak egy időpontban csak egy órája van.

A speciális feltétel, amelynek teljesülése esetén alkalmazható a dolgozat első részében leírt algoritmus, a következő:

Minden tanár és minden osztály tanítási időpontjainak halmaza egyezzen meg és legyen ez H. Ez azt jelenti általános iskolában, hogy 8—13-ig, amikor az osztályoknak órájuk van, a tanár is beosztható legyen órára, azaz a lyukas óráit ne rögzített időpontra kérje.

Feleltessük meg az **A** mátrix oszlopait az osztályoknak $(n=\beta)$, a sorokat a tanítási időpontoknak $(m=\gamma)$, az $1, 2, \ldots, n$ számokat pedig a tanároknak, ha az $\alpha \geqq \gamma$ nyilvánvaló egyenlőtlenségből az egyenlőség teljesedik.

(Ez az egyenlőtlenség csak az általunk megkövetelt speciális esetben nyilvánvaló, mármint az, hogy ellenkező esetben a feladathoz nem rendelhető órarend. Ez tehát egy szükséges feltétel és a feladat megoldásának létezése azt jelenti, hogy elegendő is.)

Ha az éles egyenlőtlenség teljesedik, akkor $\alpha=n$ legyen, azaz az oszlopok száma a tanárok számával egyezzen meg.

Az **A** mátrixot a következőképpen írjuk fel:

A tanárok sorszámát beírjuk abba az oszlopba, amelynek indexe annak az osztálynak a sorszámával egyezik meg, ahol a tanárnak az órát kell tartani, ha a tanárnak m-nél kevesebb órája van, akkor a ténylegesen megtartandó óráinak m-re történő kiegészítését olyan oszlopba írjuk, amelyhez már nem rendelhető osztály ($n=\alpha>\gamma$). Itt lesznek a tanárok lyukas órái. Így minden tanár sorszámát pontosan m-szer írtuk be, és minden oszlopban pontosan annyiszor fog előfordulni a tanár sorszáma, ahány órát abban az osztályban tanítani kell.

Az így előállított $m\times n$-es **A** mátrix soraiban még természetesen előfordulhatnak azonos számok, és mivel a sorok az időpontokat jelentik, az így kialakított órarend még nem ütközésmentes, de a feladat megoldásában leírt **A'** mátrix már az alapórarendprobléma megoldását adja ebben a speciális esetben.

Mivel a feladatnak általában több megoldása van, így számítógéppel gyorsan elkészíthető az órarend több változatban is, hogy a tanárok lyukas órái szempontjából a legmegfelelőbb megoldást lehessen választani.

3.2. *Latin négyzetek előállítása számítógéppel*

A másik alkalmazás az algoritmus egy speciális esetben történő felhasználásaként áll elő.

Legyen $m=n$ és minden szám az **A** mátrix minden oszlopában pontosan egyszer forduljon elő. A mátrix első sora legyen $1, 2, \ldots, n$. Ekkor az algoritmus **A'** mátrixként egy $n\times n$-es latin négyzetet állít elő.

Tehát felhasználható latin négyzet véletlen előállítására a következőképpen:

Véletlenszám-generátorral előállítjuk az $1, 2, \ldots, n$ szám n db tetszőleges permutációját. Egy permutáció lesz az **A** mátrix egy oszlopa. Előállítjuk az első sort, azaz az első oszlopban az első helyre cseréljük az 1-et, a második oszlopban az első helyre cseréljük a 2-t, és így tovább. Ezek után az **A** mátrixra alkalmazzuk az ismertetett algoritmust, melynek eredményeként az **A'** mátrix egy $n\times n$-es latin négyzet lesz.

További vizsgálat tárgyát kell, hogy képezze, hogy az algoritmus milyen paraméterű alkalmazása eredményez valóban „véletlen" latin négyzetet.

A latin négyzetek gyors számítógépes előállítása más elméleti szempontból is fontos lehet [1].

Az algoritmus lépésszámának becslésére ebben a speciális esetben végeztünk gyakorlati számításokat. IBM PC-re készült olyan program, amely tetszőleges n-edrendű latin négyzetet állít elő. Ebben az esetben úgy gondoljuk, hogy a „legrosszabb" **A** mátrix a következő:

$$\begin{matrix} 1 & 1\ldots1 \\ 2 & 2\ldots2 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ n & n\ldots n. \end{matrix}$$

Ehhez tartozó **C** mátrixban van ugyanis a legtöbb Ø elem. A durva becslés szerint ekkor $n*n*(n-1)$ csere szükséges a legrosszabb esetben. A gyakorlatban azonban ettől a számtól egy nagyságrenddel kisebb értékeket, azaz n^2 körüli értékeket kaptunk.

A futtatás paraméterei: az 1. lépésben oszlopfolytonosan keressük a Ø elemeket, a 2. lépésben az első olyat választjuk, amire a feltétel teljesedik, a 3. lépésben véletlenszám-generátorral választunk.

Konkrét futtatási eredmények:

$n=$	4	5	6	7	10	20
futások száma:	100	100	100	100	100	11
cserék átlagos száma:	7,24	12,96	20,43	29,86	67,61	321,6

IRODALOM

[1] DÉNES, J. and KEEDWELL, A. D., *Latin Squares and Their Applications* (Akadémiai Kiadó, Bp., 1974).

[2] FADGYAS, T., "Órakészítés számítógéppel", *INFORMÁCIÓ ELEKTRONIKA* 85/4 kötet 222—229.

[3] NIEVERGELT, J., FARRAR, J. C., REINGOLD, E. M., *Matematikai problémák megoldásainak számítógépes módszerei* (Műszaki kiadó, Bp., 1977).

(Beérkezett: 1988. július 14.)

DR. KOVÁCS BÉLÁNÉ
SZÁMALK DEBRECENI TAGOZAT
4010 DEBRECEN PF. 12

ON A COMPUTER SOLUTION OF A COMBINATORIAL PROBLEM

B. KOVÁCS

In our paper we describe an algorithm which gives a solution of the following problem, in polynomial number of steps:

Let $\mathbf{A}=(a_{ij})$ be a matrix of type $m\times n$ such that every number in $\{1, 2, \dots, n\}$ occurs m times as a component of **A**. Permuting only the elements of the same columns of **A**, transform **A** into a matrix **A**′ which has pairweise distinct elements in every rows.

We give applications of the algorithm to

— making time table of lessons for pupils,

— generating latin squares by computer.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 155—169

A SZEMÉLYI SZÁMÍTÓGÉPEK HATÁSA AZ OPERÁCIÓKUTATÁSRA

MAROS ISTVÁN ÉS BOKOR JÓZSEF
Budapest

A nagy teljesítményű személyi számítógépek (PC-k) megjelenése és széles körű elterjedése újszerű helyzetet teremtett az operációkutatás gyakorlata számára, de részben az elmélete szempontjából is. Az operációkutatás által nyújtott potenciális előnyök hasznosítására minden eddiginél nagyobb lehetőség kínálkozik. Ehhez azonban az operációkutatók hozzáállásában is változásra van szükség. A cikk először röviden bemutatja a személyi számítógépek főbb hardware/software lehetőségeit, majd a PC-n használható operációkutatási eszközöket veszi számba. Végezetül felhívja a figyelmet a PC-knek arra a szerepére, amelyet az operációkutatás módszertanának az átalakulására gyakorol.

Előszó*

Az MTA Operációkutatási Bizottsága az elmúlt években több felmérést végzett az operációkutatással kapcsolatos témakörök feltárására, s a levont tapasztalatok alapján javaslatokat dolgozott ki az előrelépés elősegítésére.

Az operációkutatás oktatása, módszertana és alkalmazása egyaránt jelentős változáson ment keresztül az elmúlt néhány év alatt a személyi számítógépek gyors fejlődésével és elterjedésével.

A matematikai modellek alkalmazása és megoldása mindennapossá vált nemcsak a gazdasági és a műszaki életben, hanem az agrárszférában, a bio- és a társadalomtudományokban stb.

A megnövekedett felhasználói kör természetesen számos új feladatot vetett fel, amelyek a klasszikus módszerekkel nem voltak megoldhatók.

Bővült a módszertan: szakértői rendszerek, döntéstámogató módszerek stb., s kapcsolódott más diszcliplínákhoz (mesterséges intelligencia, számítástudomány stb.). Az alkalmazás területén a változás olyan jelentős az új irányzatok kialakulásával, hogy köre gyorsan nőtt, s ehhez képest a hozzáértő szakemberek száma csak igen mérsékelt ütemben.

A változások láttán joggal merül fel a kérdés, hogy mi is a jelenlegi helyzet. E problémák megválaszolására kezdeményezte az Operációkutatási Bizottság „A személyi számítógépek hatása az Operációkutatásra" című felmérést, aminek az anyagát a két szerző állította össze. A Bizottság több lépésben megvitatta az anyagot, amíg az elnyerte jelenlegi formáját.

A tanulmányban megfogalmazott megállapítások a jelenlegi helyzetet tükrözik. Itt a hangsúly a *jelenlegin* van (1988. november 1.), mert e területen a fejlődés olyan

* Az előszót írta: Harnos Zsolt, az MTA Operációkutatási Bizottság elöke

rendkívüli, hogy mire ez cikk formájában megjelenik, addigra várhatóan a softwaretermékek piacán jelentős változás fog végbemenni. A megváltozott körülményeket kérnénk a tanulmány olvasásakor figyelembe venni. Az alapvető megállapítások hosszabb távon érvényben maradnak, s ezért mindenképp érdemes azokat a szakmai közvélemény elé tárni.

1. Bevezetés

A személyi számítógépek (más néven professzionális személyi számítógépek, illetve mikrogépek, vagy közismert rövidítéssel PC-k) teljesítőképességének rohamos fejlődése, valamint a gépek robbanásszerű terjedése jelentős hatást gyakorol számos tudományterület elméletére és gyakorlatára. Mindez fokozottan igaz az operációkutatásra, hiszen a konkrét problémák megoldásának nélkülözhetetlen segédeszköze az operációkutatás esetében mindig is a számítógép volt. Jellemző, hogy az operációkutatás és a számítógépek kialakulása és kezdeti fejlődése szinte párhuzamosan haladt. Ennek megfelelően a mikrogépek említett megjelenése és gyors terjedése minőségileg új helyzetet teremtett az operációkutatás számára is. A világ operációkutató társadalma a 80-as évek elején kezdett reagálni a kihívásra. 1981 áprilisában a Journal of Operational Research Society egy külön számot jelentetett meg, amelyet az első jelzésnek tekinthetünk a mikrogépek operációkutatásbeli fontosságának felismerésében. Az azóta eltelt rövid idő alatt óriási fejlődésen mentek át a PC-k.

A személyi számítógépek hazai megjelenése a világpiaci megjelenéshez képest viszonylag nem nagy késéssel történt meg. A rohamos terjedés azonban egyelőre még várat magára.

Ezen a helyen talán célszerű egy kicsit pontosítani, hogy mit is értünk professzionális személyi számítógépen. Ez azért látszik lényegesnek, mert sokan a valóban nagyobb számban megjelenő Commodore—64 (C—64) típusú számítógépekkel gondolták „megváltani a világot”. Erre az jogosította fel őket, hogy nagy erőfeszítések és komoly programozói bravúrok árán néhány szűk területen egy-két meglepően jól használható alkalmazási eredmény született. Sajnos, a jó példák sokakat éppen a helytelen következtetések levonására késztettek, miszerint, „erre a vonalra kell ráállni”

Ennek eredményeképpen a C—64 gépek sorra jelentek meg vállalatoknál, irodákban, intézetekben és az oktatásban is.

Bár a számítástechnikai kultúra terjesztésében hasznos szerepet töltöttek be, igen hamar kiderültek korlátaik (ez alól az általános- és középiskolai oktatás talán kivételnek tekinthető). Nem véletlen, hogy sikereit a C—64 a fejlett országokban home computer minőségben érte el. Miután ezt saját kárunkon mi is megtanultuk, elkezdtek beszivárogni az országba az IBM PC/XT kategóriájú, 16 bites processzorral, megbízható, nagy kapacitású és gyors Winchester típusú mágneslemezzel felszerelt, valóban professzionális személyi számítógépek. Nem sokkal később megjelentek az AT kategóriájú gépek is, amelyeket pillanatnyilag mind 16 bites, mind pedig 32 bites (I 80286, illetve I 80386 mikroprocesszorral felépített) változatban is gyártanak. Kétségtelen, hogy a világpiacon nem egyedül az IBM PC jelenti a választékot, azonban hatalmas piaci súlya miatt sok hardware és software gyártó ehhez igazodik és így helyeselhető, hogy a hazai piac is elsősorban erre orientálódik. A továbbiakban PC-nek mi is elsősorban ezt a kategóriát fogjuk nevezni.

A fejlett technológiát jelentő PC-k hazai elterjedését sajnálatos módon a magyar hatóságok — az elősegítés helyett — valójában nehezítették. Itt most elsősorban a vámkérdésre gondolunk. Több és jó irányban tett módosítás után is mind a mai napig (1988 november 1.) érvényben van az a vámszabály, hogy kedvezményesen csak a 128 KB-nál nem nagyobb memóriájú gépek hozhatók be, vagyis a kevésbé korszerűt támogatjuk, a korszerűt büntetjük, illetve akadályozzuk, ahelyett, hogy pont fordítva lenne, akár még olyan módon is, hogy az igazán korszerű akár vámmentes is lehetne, mint ahogy több szocialista ország esetében ez így is van. A helyzetet tovább bonyolítja, hogy a beszerzési források bővítése helyett éppen az ellenkezőjéről határozott a kormányzat (17/1987. (XII. 27.) ÁH. sz. rendelet). Ezzel egyidejűleg a fejlett országokban a PC-k egyre inkább személyi tulajdonú munkaeszközként kezdenek elerjedni.

Jelen tanulmány célja az, hogy a nemzetközi tapasztalatok és a magyar sajátosságok figyelembevételével megkísérelje felvázolni a PC-knek azt a szerepét, amelyet a hazai operációkutatás elméletében és gyakorlatában betöltenek, betölthetnek, illetve be kellene tölteniük. Ilyen jellegű írásmű magyar nyelven még nem készült. A nemzetközi szakirodalomban ugyanakkor több cikk is jelent meg a PC-k operációkutatási alkalmazási lehetőségeiről. Ezen cikkekből adunk meg néhányat az irodalomjegyzékben.

2. Az operációkutatás és a számítógépek

Sommásan az mondható, hogy az eddigi hazai operációkutatási (OK) gyakorlat alatta van a lehetőségeknek. Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan okot (a teljesség igénye nélkül), amelyek a későbbiek során valamilyen módon kapcsolatba hozhatók a PC-k szerepével:

— OK kultúra fogyatékosságai (főleg korábban),
— felhasználói fogadókészség hiánya,
  = érdekeltség hiánya,
  = gazdasági környezet instabilitása (folyton változó szabályzók),
— megbízható adatrendszerek hiánya,
— hazai számítógéppark gyengeségei (megbízhatatlanság, nehézkesség, kis kapacitás),
— sikertelen alkalmazások miatti csalódottság (nem megfelelő modell, adat, nagy munkaigényesség, hosszú átfutási idő stb.),
— sikeres alkalmazások (referenciák) ismertetésének (reklámozásának) hiánya.

Itt jegyezzük meg, hogy az MTA Operációkutatási Bizottságnak kezdeményezésére Ziermann Margit összegezte az általa vezetett munkabizottság vizsgálatának eredményeit [19]. Ebből a tanulmányból az olvasó részletes és pontos képet kaphat a fentebb csak vázlatosan említett kérdésekre.

Tekintettel arra, hogy az operációkutatási feladatok zöme olyan, hogy megoldásuk számítógép használatát igényli, ezért sokan a múltbeli magyar OK alkalmazások nem kielégítő volta egyik lényeges okának az itthon elérhető gyenge számítógépek miatti, a számítástechnikával kapcsolatos általános kiábrándultságot tekintik. Az ESZR, illetve MSZR programok ezen a téren sajnos nem jelentettek frontáttörést.

Az igazán jelentős változást a PC-k megjelenésétől és gyors terjedésétől lehet várni. Ezt az elvárást különféle okokra lehet visszavezetni, elsősorban arra, hogy a PC-k fontos tulajdonságai a

— kedvező ár,
— nagy teljesítmény,

— megbízható működés,
— kényelmes használat.

A továbbiak jobb megértéséhez szükséges, hogy röviden jellemezzük, mit is tekintünk PC-nek.

A PC egy mikroprocesszor bázisú (közel) általános célú asztali számítógép. A gyakorlatban jelenleg elsősorban az IBM PC/XT, AT és a velük kompatíbilis 16 és 32 bites gépeket soroljuk ebbe a kategóriába. A gépek jó használhatóságát fontos hardware és software elemek segítik elő. Ezeket a 2.1, 2.2 pontokban tekintjük át.

Megemlítjük, hogy az IBM időközben kibocsátotta az új Personal System/2 (PS/2) sorozatát, amely 32 bites és körülbelül 3,5-ször gyorsabb, mint az AT. Ez a sorozat azonban hazai viszonyok között még aligha elérhető, így alkalmazási lehetőségeikkel nem foglalkozunk. Nem foglalkozunk továbbá a DEC VAX sorozatával, valamint az igen drága „workstation" kategóriába eső gépekkel, lásd pl. SUN, mivel ezek hazai terjedésének még igen sok feltétele van.

A PC-k előnyeiről szólva általában a következőket szokás figyelembe venni:

— közvetlen és korlátlan hozzáférés,
— kizárólagos használati lehetőség,
— interaktivitás,
— fejlett grafikai lehetőségek,
— felhasználói kényelem (user friendliness),
— lokális hálózati lehetőség,
— kisebb diverzifikáció, nagyfokú kompatibilitás.

Ugyanakkor tudni kell, hogy a PC-knek a nagygéphez képest szerényebb

— az adattárolási kapacitása (memória- és háttértár),
— műveleti sebessége,
— periferiális kapcsolati lehetősége,
— multi-tasking és multi-user lehetősége.

Ez utóbbi megjegyzésre azért van szükség, hogy világosan lássuk: a jelenlegi PC-k nem helyettesítik a nagy (mainframe) számítógépeket.

2.1. *A hardware erőforrások jellemzése*

Világszerte tapasztalható egy elfordulás a mainframe gépektől. Ezt a folyamatot a hatvanas évek Amerikájának ahhoz a folyamatához hasonlították [14], melyben a lakosság a népes nagyvárosokat elhagyva a külterületekbe költözött.

A mikrogépek árának csökkenése és a teljesítményének növekedése valóban azt eredményezte, hogy ezek már nemcsak a kutatóhelyekre, üzemekbe, hivatalokba, hanem a magánemberek otthonába is eljutottak.

A 80-as évek közepéig lényegében letisztult a mikrogépgyártók óriási kínálata és választéka által okozott zavaros kép, ti., hogy milyen gépet célszerű venni, ill. milyen software környezetben célszerű fejleszteni. Nem elemezzük a mához vezető utat, csak illusztrációként megjegyezzük, hogy 1985-ben hazánkban is kb. 20-féle, főleg 8 bites mikrogépet kínáltak, amelyek között alig volt egymással hardware, ill. software kompatíbilis fejlesztés.

Hazai viszonylatban kialakult egy (lényegében a nemzetközi tendenciákat is követő) helyzet, amit a 16 bites IBM PC/XT vagy AT, ill. ezekkel kompatibilis gépek domináns megjelenése jellemez. Ezenkívül kisebb számban megtalálhatók még az USA-ban oly népszerű Macintosh gépek is.

Megfigyelhető, hogy a gépek túlnyomórészt stand-alone üzemmódban vagy lokális hálózatban üzemelnek. Jellemző hazai hardware kiépítettségük a következő: 640 Kbyte (vagy 1Mbyte) RAM (központi memória), egy vagy két floppydrive (5 1/4 inches floppy lemez, 360 Kbyte vagy 1.2 Mbyte formátummal), merevlemezes tárolók (20, 30 Mbyte tárolókapacitású Winchesterek).

2.2. *A software erőforrások jellemzése*

A mikrogépeken igénybevehető software környezetet általában a következő csoportosításban szokták tárgyalni:

- operációs rendszerek,
- programozási nyelvek,
- grafika,
- adatbázis-kezelő programok,
- spreadsheet-ek,

valamint szakma- vagy alkalmazásorientált programcsomagok, mint pl. LP, hálótervezési, matematikai statisztikai, szimulációs programok, mérnöki tervezést segítő programcsomagok.

Tekintettel arra, hogy az operációkutatási gyakorlatban ritkán találkozunk real-time problémák megoldásával, a real-time operációs és nyelvi rendszereket nem tárgyaljuk.

Nem célunk továbbá a fenti software termékek katalógusainak, dokumentációinak a teljeskörű feldolgozása sem, hanem elsősorban a hazai helyzetet kívánjuk jellemezni, de természetesen a nemzetközi tendenciák tükrében.

2.2.1. *Operációs rendszerek*

Minthogy a hazai operációkutatási gyakorlatban az IBM PC kompatíbilis gépek elterjedtsége a leginkább jellemző, röviden összefoglaljuk ezeken a gépeken elterjedt operációs rendszereket.

Az IBM PC-t vagy kompatíbilisát szállító cégek többnyire az IBM PC DOS vagy a Microsoft cég MS DOS operációs rendszerének valamelyik verzióját adják a géppel együtt. Ennek megfelelően ezeken a gépeken a DOS terjedt el a leginkább, jelenleg használt változataik pl. az MS DOS 3.1, ill. MS DOS 3.3, MS DOS 4.0.

Talán meglepőnek tűnik, de a 8 bites mikrogépeken oly népszerű CP/M, ill. a nagyobb gépeken gyakran alkalmazott UNIX IBM PC változata, a XENIX nem terjedt el.

Az MS—DOS operációs rendszerek főbb korlátai, hogy egyfelhasználós rendszerek, valamint, hogy csak 640 Kbyte RAM címzését teszik lehetővé.

A Digital Research által kifejlesztett Concurrent DOS 4.1 (C—DOS 4.1) operációs rendszer már multiuser/multitasking üzemmódot is megenged, lehetővé teszi terminálok használatát és hat független task jelenlétét. A C—DOS 5.1 XM pedig 1 Mbyte-nál nagyobb operatív tár kezelésére is alkalmas. Megjegyezzük, hogy ebben az operációs rendszerben a CP—M/86 operációs rendszerben fejlesztett programok változtatás nélkül futnak.

A Microsoft által fejlesztett operációs rendszer az MS Windows, amely multitasking üzemmódot is lehetővé tesz. Pull-down menürendszerével igen „user-friendly" használatot biztosít. Az MS DOS alatt fejlesztett programok az MS Windows alatt is futtathatók.

Az MS WINDOWS egy közbeeső lépcsőként került kibocsátásra a PS/2 sorozathoz kifejlesztett OS/2 operációs rendszerhez vezető folyamatban. Az OS/2 16 MByte memória használatát támogatja a multitasking üzemmód és a többszörözhető ablakkezelés (multiple windowing) mellett.

2.2.2. *Programozási nyelvek*

Az operációkutatási gyakorlatot elsősorban az ún. magas szintű nyelvek alkalmazása jellemzi, amelyeket két csoportba oszthatunk: procedurális és logikai nyelvek.

Elérhető újabban az objektum-orientált programozást megvalósító SMALLTALK rendszer is.

A procedurális nyelvek közül az IBM PC gépeken megtalálhatjuk a BASIC, FORTRAN, PASCAL és C nyelvek különböző verzióit, a logikai nyelvek közül a PROLOG és LISP nyelveket.

A továbbiakban röviden a strukturált programozási lehetőségeket biztosító nyelveket jellemezzük.

Tekintettel arra, hogy a matematikai feladatok megoldására fejlesztett programok egy jelentős részét FORTRAN-ban írták, a FORTRAN használata mikrogépeken is elterjedt. A jelenlegi gyakorlatban az MS FORTRAN 3.20, 3.30, 4.0 verziót használhatjuk.

A 3.30 verziószámtól fölfelé lehetőség van ún. vegyes programozási környezet használatára, ami azt jelenti, hogy egy programban MS FORTRAN, MS PASCAL és MS C nyelvű modulokat együttesen használhatunk.

Talán meglepő, de a fenti nyelvek egyike sem nyújt elegendő támogatást a megfelelő user-kommunikáció kialakításához, (fullscreen input, output, grafikus képernyőkezelés). Ezért igen elterjedt a Borland cég TURBO-PASCAL fejlesztő rendszere (3.0 és 4.0 verziók), amely még egy igen jól használható EDITOR-t is tartalmaz, továbbá kiváló képernyőszerkesztési, input/output és grafikus lehetőségeket is nyújt. Közvetlenül azonban nem használható vegyes nyelvi környezetben.

A C nyelv különböző verziói közül az MS—C 4.0 alkalmazásáról vannak ismereteink, de már megjelent az MS—C 5.0 verizó is.

A logikai programozást támogató nyelvek közül hazai alkalmazásokról keveset tudunk. Egyes speciális feladatokon belül a Borland cég TURBO-PROLOG-ja elérhető, de létezik az ennél nagyságrendekkel hatékonyabb ARITY PROLOG is, valamint az SZKI fejlesztésében a TURBO PROLOG kategóriájába eső M-PROLOG is.

Hasonló a helyzet a LISP alkalmazásokkal is.

Várható azonban, hogy a mesterséges intelligencia (AI) technológia és a szakértő rendszerek hatása következtében a fenti nyelvek operációkutatási feladatok megoldására történő alkalmazása felgyorsul (pl. intelligens döntést támogató rendszerek). Véleményünk szerint azonban az ilyen típusú gyakorlati igényeket is kielégíteni képes rendszerek fejlesztése nagyobb teljesítményű gépeket igényel, mint a jelenlegi 16 bites IBM PC XT/AT kategória.

2.2.3. *Mikrogépes grafika*

Az előző pontban ismertetett programnyelvek közül a Turbo Pascal maga is kiváló grafikus lehetőségeket nyújt. Lényegesen javít a bonyolultabb grafikai feladatok megoldásához a Turbo Toolkit, amelynek a grafikus eljárásai a Turbo Pascal-ból hívhatók. A Turbo Toolkit segítségével fehér-fekete grafika készíthető normál és nagyfelbontású (640×200 pixel) képernyőgrafikával. A TURBO PASCAL 4.0 már az EGA grafikát (640×350 pixel, színes képernyőgrafika) is támogatja.

A logikai programozási nyelvek közül a Turbo PROLOG grafikája nagyon jó, továbbá támogatja az EGA grafikus eszközök használatát is.

Speciális színes grafikus lehetőségeket (különböző diagramok, minták, reklám-, üzleti és illusztrációs célokra) kínál a PC Paint Brush, amely az MS Windows alatt fut.

Az MS Windows ezenkívül rendelkezik egy PC Paint elnevezésű grafikus editorral is, amely fehér-fekete grafikus szerkesztést tesz lehetővé.

Mindkét program használatánál előnyös egérrel dolgozni.

A mérnöki tervezés feladatainak mikrogépeken való megoldásához javasolják pl. az Auto CAD programcsomagot, amely az USA-ban és hazánkban is nagy népszerűségnek örvend.

A programnyelvekből hívható grafikus eszközök közül elterjedt még az IBM GKS (Graphic Kernel System) és VDI (Virtual Device Interface) használata is.

2.2.4. *Adatbázis-kezelő programcsomagok*

Az IBM PC és kompatíbilis gépeken a nagy teljesítményű relációs adatbázis-kezelő programok egy igen széles skáláját használhatjuk.

Főbb tulajdonságaiknak ismertetése messze túlnyúlna a jelen tanulmány keretein. Jelentőségük az operációkutatási gyakorlat szempontjából óriási, mivel sok olyan mikrogépes információs és döntést támogató rendszer kifejlesztését tették lehetővé, amelyhez hatékonyan kapcsolódhat az operációkutatás módszertana.

Hazai viszonyok között legelterjedtebbek a dBASE III, dBASE III Plus, és a Dataflex. Ez utóbbi kettő konkurens hozzáférést biztosító multiuser relációs adatbázis-kezelést nyújt.

Csak példaként említjük meg, hogy a dBASE III egybillió rekordot enged meg file-onként, az egyszerre nyitva levő file-ok számát pedig tizenhattal korlátozza. A Dataflex 255 file egyidejű nyitva tartását teszi lehetővé.

Megemlítjük még két viszonylag új fejlesztésű adatbázis-kezelő- programot. A REFLEX a Borland International fejlesztése, elsősorban „user-friendly" tulajdonságaival és alacsony árával tűnik ki. A Q & A adatbázis-kezelőnek érdekessége, hogy egyik programja, az Intelligent Assistant segítségével a userrel folytatott dialógus alapján építi fel az adatbázis struktúráját.

A fenti adatbázis-kezelők számos olyan hasznos funkciót (riportgenerálás, struktúradefiníció, ablaktechnika stb.) biztosítanak, amelyek a korábbiakban a fejlesztők és felhasználók számára elérhetetlenek voltak. Használatuk az operációkutatási modellek alkalmazásához is új perspektívát nyitott meg.

Ismételten megjegyezzük azonban, hogy kritikus áttekintésük több könyvnyi anyag megírását igényelné, így a fenti rövid leírás még illusztrációnak sem igazán tekinthető.

3. PC-n alkalmazható operációkutatási algoritmusok

A fejezet címében szereplő témakör vizsgálata, legalábbis korábban, nem volt egyértelműen könnyű. Elegendő itt arra utalni, hogy pl. Jennergren [5] 1985-ben még nem tudott egyértelmű következtetésre jutni abban, hogy a mikrogépek képesek lesznek-e valós méretű lineáris programozási (LP) feladatok rutinszerű megoldására. Ő ugyanis azt tapasztalta, hogy egy Apple-II gépen egy tisztán a memóriában dolgozó program 13 óra (!) alatt tudott megoldani egy 50 feltételből és 100 változatból álló LP feladatot. Azóta sok szempontból jobb a helyzet. Vannak már olyan LP rendszerek, melyek akár 1000 feltételből és több ezer változóból álló feladatokat tudnak biztonságosan megoldani elfogadható idő alatt. Az operációkutatás más módszereivel is egy kicsit hasonló a helyzet.

Nagy erőfeszítések történnek abban az irányban, hogy minél több, a korábbi gyakorlatban bevált OK módszer legyen hozzáférhető PC-n is, természetesen figyelembe véve a PC-k különleges lehetőségeit és a potenciális felhasználók bővülő körét.

Az erőfeszítések másik fő iránya szorosan összefügg azzal az útkereséssel, ami magán az operációkutatáson belül tapasztalható. Nem teljesen strukturált, bizonytalanul megfogalmazott feladatok modellezése, tudásbázisú döntéstámogató rendszerek kifejlesztése, illetve ezeken belül a korábbi módszertan hasznosításának a lehetősége képezik a vizsgálatok fő irányait.

Az alábbiakban először áttekintjük azt, „ami van", amire már támaszkodhatunk.

3.1. *Matematikai programozás*

3.1.1. *Lineáris programozás*

Az operációkutatás matematikai eszközei közül a leggyakrabban használatos eljárás a lineáris programozás (LP). Korábban a valósághű modellekből származó nagyméretű LP feladatokat kizárólag nagy számítógépeken lehetett megoldani, többnyire kötegelt (batch) üzemmódban. Ez jelentősen behatárolta az LP alkalmazók körét.

A PC-k megjelenésével egy időben felmerült a kérdés, hogy ezek a gépek alkalmasak-e komoly LP feladatok megoldására. A korábban említett Jennergren óta a helyzet jelentősen változott. Részben a hardware eszközök (aritmetikai koprocessor), részben a software eszközök (memoriakezelés) fejlődése, de elsősorban a PC-k lehetőségeit figyelembe vevő algoritmikus fejlesztések eredményeként ma már elmondható, hogy léteznek hatékony mikrogépes LP rendszerek.

Ezek — egy kivételtől eltekintve — nem nagygépes rendszerek kisgépre átmásolt vagy adaptált változatai, hanem valóban eredeti alkotások. A nemzetközi piacon elérhető LP rendszerek száma néhány tucatra tehető. Ezek azonban árban, képességben, megbízhatóságban és hatékonyságban meglehetősen különböznek egymástól [10]. Az idézett cikk tanúsága szerint a rendszerek megbízhatósága és alkalmanként hatékonysága még mindig sok kívánnivalót hagy maga után, de azért vannak olyan rendszerek, melyek 1000 feltételből és több ezer változatból álló feladatok rutinszerű megoldására képesek. A megoldási idők első megoldás (indulás az egység bázisról) esetén 1—2 órán belüliek.

A hazai fejlesztésű LP rendszerek teljesítményvizsgálatára a XVII. Magyar Operációkutatási Konferencia keretében került sor 1987 őszén. Ennek pozitív eredménye az, hogy akadt két olyan programcsomag, amely megbízhatóan — noha különböző hatékonysággal — működött nagyméretű LP feladatok esetén is. A negatív eredmény az, hogy az összes többi vizsgált rendszer nem tudott megbírkózni már a közepes méretű LP feladatokkal sem [1].

Régi és nemcsak az LP rendszereknél felmerült probléma az adatrendszerek felépítése és karbantartása. A PC-n működő LP rendszerek jellemzője, hogy szinte kivétel nélkül fogadni tudják a nemzetközi szabványnak számító (egyébként nem túl kényelmes) MPS input formában megadott feladatokat. Ezen túlmenően azonban rendelkeznek saját input formával, illetve lehetővé teszik, hogy elektronikus táblakezelő (spreadsheet) programokkal előállított adatrendszer legyen az LP inputja. Ez utóbbiaknak azért van külön jelentőségük, mert használatuk közepes méretű feladatok esetén nagy segítséget jelent a modellezőnek. Márpedig a modellezés segítése, hatékonyabbá tétele egyre inkább alapkövetelmény lesz a mikrogépes operációkutatási rendszerek esetében.

A lineáris programozás speciális területét jelenti a minimál költségű kapacitáskorlátos hálózati optimalizálási feladat, amely több fontos feladatosztályt foglal magába (pl. a szállítási feladatot is). Az erre kifejlesztett igen hatékony network LP algoritmus variánsait minden további nélkül jól lehet adaptálni PC-re. Egy többezer csomópontból és esetleg néhány tízezer élből álló hálózat optimalizálása PC-n ma már reális feladatnak tekinthető, 10—20 percen belüli megoldási idővel.

3.1.2. *Egészértékű programozás*

Az egészértékű programozás közismert problémáin (kombinatorikus robbanás) természetesen a PC-k sem tudnak segíteni. Sőt a nagy (mainframe) számítógépekhez képest szerényebb működési sebességük miatt eleve csak kisebb méretű problémák megoldására lehetnek képesek.

A leggyakrabban felmerülő lineáris egészértékű feladatok megoldása általában az LP rendszerek képességeinek ilyen irányú kiterjesztése alapján lehetséges (MIP= =mixed integer programming képesség). A különféle rendszerek 200—400 egészértékű változó kezelését ígérik, elfogadható futási idejű tapasztalatok azonban csak 40—50 egészértékű változóval vannak.

Nyilvánvaló, hogy az általános eszközöknél hatékonyabban működnek az egy-egy speciális problémára készült egzakt vagy heurisztikus algoritmusok. Új lehetőségnek kínálkozik, hogy a felhasználónak a speciális feladatra vonatkozó esetleges ismereteit a megoldó algoritmussal interaktív módon közölni tudja, amivel a megoldási idők nagyságrendekkel csökkenthetők, illetve a megoldható feladatok méretei jelentősen növelhetők. Az ilyen rendszerek elvi és gyakorlati megvalósítása még jelentős kutató- és fejlesztőmunkát igényel.

3.1.3. *Nemlineáris programozás*

Nemlineáris programozás (NLP) területén még csak kezdeti lépések történtek meg. Itt eleve nehezebb általános eszközt adni, mint LP esetében. Általában azok a kutatók foglalkoznak PC-n működő NLP rendszerek kifejlesztésével, akik korábban nagygépre már sikeresen készítettek hasonlót. A jelenlegi PC-s lehetőségek felső határát kb. 30 feltétel és 50 változó jelenti.

3.2. *Hálótervezés, project management*

Az operációkutatási technikák közül a hálótervezés egyedülálló figyelmet keltett fel a fejlesztők körében. A nemzetközi piacon 120—150 hálóterves programcsomag ismeretes. Ezek egymástól jelentős mértékben eltérnek képességek és kapacitás vonatkozásában. A tevékenységek maximális száma 100 és 10 000 között mozog. A lehetőségek az egyszerű időelemzéstől a költség- és az erőforrás-allokációig terjednek. Megjelenítés dolgában is erős a diverzifikáció; a legegyszerűbb szöveges eredményközléstől kezdve a bonyolult grafikáig és a színes plotteres kirajzolásig bezárólag sok minden rendelkezésre áll a különböző rendszerekben.

A témakör iránt Magyarországon is nagy az érdeklődés.

Egy hazai fejlesztésű hálóterves programcsomag szerencsés kompromisszumot valósított meg a két véglet között és valószínűleg ennek, meg természetesen az ügyes népszerűsítő munkának köszönhetően, használata viszonylag szélesebb körben elterjedt.

3.3. *Matematikai statisztika, idősor-analízis*

Az operációkutatási gyakorlatban a sikeres alkalmazások körének jelentős hányada a statisztikai módszertan alkalmazásaiból került ki. A feladat megfogalmazásában az operációkutató vagy statisztikus együttműködött a problémakört ismerő szakemberekkel, majd a megoldást nagyszámítógépeken installált programcsomagok segítségével keresték. A statisztikai analízis részleteivel csak a beavatottak foglalkoztak, az eredményeket többnyire írásos tanulmányokban közölték.

A PC-k megjelenése lényegi változást jelentett a statisztikai feladatok megfogalmazása és megoldási módja területén. Eleinte a nagygépes programcsomagok PC-s változatai jelentek meg a mikrogépes szoftware piacon (pl. BMDP/PC, SPSS/PC) lényegében azonos szolgáltatásokat nyújtva, mint elődeik. A piaci verseny egyre nagyobb számú és minőségileg jobb szolgáltatást biztosító statisztikai programok megjelenéséhez vezetett.

Míg Carpenter [14] 1984-ben 24 programcsomagról ír ismertetést, 1986-ban Lezotte [15] már 130 programcsomag rövid katalógusát mutatja be.

A továbbiakban röviden bemutatjuk két nagy terület, az általános célú statisztikai programok, valamint az idősor-analízis területén ismert programcsomagok általános jellemzőit.

Általános célú statisztikai programcsomagok

Az általános célú programcsomagok az alkalmazott módszertant tekintve a következő problémakörökhöz kapcsolódnak:

— leíró statisztika,
— hipotézisvizsgálatok,
— regresszióanalízis,
— korrelációanalízis,
— nemparametrikus módszerek,
— többváltozós módszerek (MANOVA, kanonikus korreláció diszkriminancia-, klaszter-, faktor-, főkomponensanalízis).

Látható, hogy módszertan szempontjából (ahogy az várható volt) a PC-ken futó programcsomagok nem kínálnak többet nagygépes elődeiknél. A lényeges különbség azonban az adatkezelésben, a módszerek kiválasztásában (user interface-k) és az alkalmazott grafikában van.

Az adatkezelési módszerek igen fontosak minden potenciális alkalmazás szempontjából, hiszen a billentyűzetről való adatbevitel csak speciális egyedi, kevés adatot igénylő feldolgozásnál jöhet szóba. A PC-s programcsomagok egyik nagy előnye, hogy közvetlenül át tudják venni szövegszerkesztőkkel, spread-sheet programokkal (pl. LOTUS 1—2—3) vagy hatékony adatbáziskezelőkkel (pl. dBASE) létrehozott adatállományokat. Az ilyen lehetőségek biztosítása ma már követelmény egy statisztikai programcsomaggal szemben.

A nagygépes programcsomagok többségénél a megfelelő módszer kiválasztása és az opciók beállítása speciális vezérlőutasításokkal történt, amelyek ismerete többnyire a statisztikusok vagy számítástechnikusok birtokában volt.

A PC-s megoldások e helyett sok esetben felhasználóbarát interface-t biztosítanak, ahol dialógusokon keresztül, egyszerű menürendszerekkel, default opciókkal és HELP funkciókkal segítik a felhasználót.

Az újabb irányzat az, hogy az AI-technológia segítségével kifejlesztett intelligens front-end processzorok tanácsot adnak a dialógus alapján a megfelelő módszer kiválasztására és a kapott eredmények helyes interpretálására.

Az eredmények gyors, áttekinthető megjelenítését és interpretációját nagymértékben támogatják a PC-k grafikus eszközei. Bizonyos esetekben a grafika az analízis része (pl. klaszteranalízis), más esetben pedig pl. oszlop, kördiagramok, rajzok segítségével befogadhatóvá teszik az eredményeket.

Idősor-analízis

Tekintettel arra, hogy az idősor-analízis (modellezés, előrejelzés) alkalmazása területén hazánkban is figyelemreméltó eredmények születtek, kitérünk röviden azokra a programcsomagokra, amelyeket az utóbbi években PC-re fejlesztettek ki.

Az idősorok modellezését módszertanilag vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ez beletartozik a műszaki tudományok területén rendszer-identifikációnak elnevezett tudományterületbe. Így a kifejlesztett programcsomagokat olyan szempontból vizsgálhatjuk, hogy milyen modellosztályok identifikálhatók, támogatják-e a modell-struktúra meghatározását, milyen paraméterbecslési módszereket és modellvalidációs módszereket biztosítanak. További vizsgálati szempontok az adatkezelés, dialógusrendszer és a grafika.

A legtöbb elérhető programcsomag két- vagy háromlépéses regressziós, és az egyváltozós Box—Jenkins modellezési és előrejelzési módszert kínálja (ARIMA és/vagy transzferfüggvény-modellek), ilyenek pl. az AUTOBJ [16].
Az állapottérmodellek felhasználására a FORECAST MASTER-ben [17] találunk hivatkozást.

A programcsomagok adatkezelésére és grafikájára nagyjából ugyanaz jellemző, mint amit az általános célú statisztikai programcsomagoknál ismertettünk.

A grafika általában kiegészül még a struktúrabecslést és modellvalidációt támogató grafikával, valamint a tényadatok és előrejelzések megjelenítését biztosító speciális rajzokkal.

A többváltozós idősorok modellezésére és előrejelzésére könnyen elérhető általános és olcsó programok még nem állnak rendelkezésre.

Megemlítjük a hazai fejlesztésű TSA programcsomagot [18], amely IBM PC-n futtatható. Interaktív dialógusrendszerrel rendelkezik, különböző modellosztályokból való választást tesz lehetővé, támogatja a struktúrabecslést, és számos paraméterbecslési módszert tartalmaz. Grafikája segíti a modellezési folyamatot, valamint az eredmények és előrejelzések megjelenítését. Az idősor-analízis területén várható fejlesztési irányokat tekintve kísérletek vannak arra is, hogy az idősorok statisztikai analízisének, modellezésének folyamatát szakértő rendszerekkel támogassák.

3.4. *Szimuláció*

A népszerű nagygépes szimulációs rendszerek közül soknak elkészült a kisgépes változata. Így létezik mikrogépes GPSS, SIMSCRIPT és SLAM. Ezek közül a GPSS diszkrét szimulációt támogat, míg a másik kettő diszkrét és folytonos szimulációt egyaránt. A SLAM, amelynek PC-s változata a SLAM II/PC nevet viseli, az eredményt egy olyan file-ba is el tudja helyezni, ahonnan lehetőség van további feldolgozásra, pl. plotteren való megjelenítésre.

Fentiek alapján elmondható, hogy PC-n a szimulációs módszerek alkalmazásának nincs akadálya. Folytonos szimuláció esetén aritmetikai koprocesszor használata nagyon lényeges a számítások felgyorsítása érdekében.

4. Néhány új fejlesztési irány

4.1 *Döntéstámogató rendszerek* (DSS)

Míg a szakértő rendszerek elsősorban operatív döntések hozatalában képesek segítséget nyújtani, addig a döntéstámogató rendszerek (*D*ecision *S*upport *S*ystems, DSS) alkalmazása a stratégiai jellegű döntések területén jelentős. Bár a DSS, mint diszciplína még nem kristályosodott ki egyértelműen, a jelenlegi felfogás szerint nagyjából a következő főbb funkciókkal lehet jellemezni.

— Segítségnyújtás a felmerült döntési probléma formalizálásában:
= az igények megfogalmazása,
= a célok megfogalmazása (a döntések eredményének mérése),
— A probléma információs bázisának biztosítása:
= adatbázis,
= tudásbázis,
= modellbázis,
— Megoldási alternatívák generálása:
= eredmények megjelenítése,
= eredmények analízise, tárolása,
= szerzett új ismeretek (tudás, modell) visszacsatolása.

Fentiek alapján nem nehéz belátni, hogy az operációkutatás a döntéstámogató rendszerekben fontos szerepet játszik. Az is világos, hogy a PC-k különösen alkalmasak a felsorolt funkciók együttes ellátására. Az ehhez szükséges rendszerelemek elsősorban az adatbázis kezelők, modellbázis-kezelők és a felhasználóval a dialógust lehetővé tevő eszközök (beleértve a grafikát is).

Nagyon fontosnak látszik, hogy a döntéstámogató rendszerek fejlesztői tájékozottak legyenek a használható kész rendszerelemek meglétéről és képesek legyenek azok közül kiválasztani az adott problémához legjobban megfelelőt. Tekintettel arra, hogy a kezdeti túlburjánzás után kialakult a jól használható eszközök egy szűkebb köre, ezért ez egy teljesíthető követelmény. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert régi magyar betegség, hogy mindenki igyekezett saját eszközöket kifejleszteni. Ha régebben ez még elfogadható is volt (például az igen heterogén hazai számítógép-állomány miatt), ma már megengedhetetlen luxus lenne.

4.2. *Szakértőrendszerek*

Az operációkutatás és a szakértőrendszerek közeledésének folyamata a PC-k megjelenésével felgyorsult. Nem célunk itt a szakértőrendszerekkel részletesen foglalkozni, ezért csak annyit említünk meg, hogy a mikrogépeken használható ilyen irányú általános eszközök a szakértőrendszer-generátorok (shell-ek). Az ugyanis ismeretes, hogy egy szakértőrendszer mindig valamilyen szakterület specifikus ismereteire alapul. A shell-ek támogatják az ismeretek tárolását és struktúrálását (tudásbázis szerkesztők és kezelők), a következtető mechanizmusok (inference engine) működését. Lehetővé teszik a következtetési folyamat nyomkövetését, a következtetések magyarázatának megjelenítését.

Korábban az a nézet alakult ki, hogy a PC-k nem alkalmasak érdemi szakértőrendszerek befogadására. Ma már a gyors 32 bites gépek megjelenésével más a helyzet, ami ismét a hardware- és software- eszközök együttes fejlődésének az eredménye. A nagy központi memória- és diszkkapacitás, valamint a nagy műveleti sebesség lehetővé teszi nagy mennyiségű ismeret tárolását és kezelését. Ez egyben azt is jelenti, hogy a jövőben a PC-kkel ezen a területen is komolyan kell számolni.

4.3. *Oktatás*

A PC-k szerepe az operációkutatás oktatásában roppant nagy lehet. Ennek oka az, hogy ha a hallgatók nemcsak elméleti modelleket és módszereket ismernek meg, hanem azokat rögtön és értelmesen használni tudják, akkor a gyakorlatba kikerülve maguk is sokkal inkább fogják igényelni az operációkutatási eszközöket munkájuk során.

A PC-k bevonása az oktatásba olyan érdekes, új kérdéseket vet fel, mint pl. hogyan célszerű oktatni a módszereket, hogyan a modellezés folyamatát.

Néhány egyetemen az operációkutatás oktatására kifejlesztettek programcsomagokat, ezek színvonala azonban még nem éri el a kívánatosat. Használatuk nem elég kényelmes, egyes algoritmusok túlságosan le vannak egyszerűsítve és néhány működése elég megbízhatatlan. Ezzel együtt valószínűnek látszik, hogy előbb-utóbb rendelkezésre állnak az egyetemi és postgraduális oktatásban olyan OK oktatóprogramok, amelyek algoritmikusan is elég korszerűek és használatuk az ember—gép kapcsolat modern eszközeivel történik. Segítségükkel az operációkutatási kultúra magasabb színvonalú terjedése várható, aminek hasznát egyaránt látnák az operációkutatási szakma művelői és használói.

5. Záró gondolatok

A PC-knek az előzőekben felvázolt kedvező tulajdonságai és széles körű elterjedése több tudományterület, így az operációkutatás számára komoly kihívást jelentenek. Ez a kihívás egyidejűleg nagy lehetőséget is hordoz magában. Egyrészt, gyakorlati oldalról jelentősen növekszik a potenciális felhasználók köre, másrészt, elméleti oldalról, régebbi problémák újszerűen vetődnek fel, illetve valódi új problémák jönnek elő, továbbá az egész operációkutatás új környezetbe kerül. Mindez együttesen nemcsak az operációkutatás létjogosultságát erősíti meg, hanem a jövőre nézve tovább szélesíti a perspektívát.

A PC-k terjedésének általános hatása megítélésünk szerint várhatóan a következő lesz:

— a számítástechnikai kultúra gyors és széles körű terjedése,
— felhasználói fogadókészség jelentős növekedése,
— újszerű alkalmazások,
— új alkalmazási területek bekapcsolódása.

Ugyanakkor a PC-k terjedésének várható hatása az OK-ra (az általános hatásokon túl) a következőkben körvonalazható.

— OK módszerek potenciális alkalmazóinak köre jelentősen bővül,
— bővül az OK tematikai köre és alkalmazási eszköztára (pl. döntéstámogató rendszerek),
— könnyebb lesz több helyen is használható (portábilis) rendszereket kifejleszteni,
— igény merül fel a PC-n megoldható feladatok körének feltárására,
— az ismert OK eljárások PC-re adaptált és a PC lehetőségeit (grafika, interaktivitás, user friendliness) jól kihasználó változatait el kell készíteni,
— módszerek kidolgozása válik szükségessé az OK alkalmazásának támogatására (modellezési segítség: modellalkotó rendszerek, eredmények értelmezésének segítése),

— hatékony fejlesztőeszköz kerül új algoritmusok kidolgozásával, implementálásával foglalkozó szakemberek kezébe,
— módszertani vizsgálatokat kell végezni a PC-k lehetőségeinek újszerű kihasználására.

A fenti koránt sem teljes lista rávilágít az operációkutatás arculatának változására, miszerint az OK egyre szervesebben képes beépülni a döntéshozatali munkába. Ehhez azonban nélkülözhetetlen a működő rendszerek környezeti kapcsolatainak kiépítése (adatbázisok, spreadsheet-ek), a modellezési munka támogatása, az információs technológia eredményeinek felhasználása.

A lehetőségek tehát adva vannak, kihasználásuk több terület együttműködését, de ezen belül is a magyar operációkutató társadalom aktív tevékenységét igényli.

IRODALOM

[1] Blitzer Éva, „Melyiket szeressem?", Computerworld—Számítástechnika, 1/1988.
[2] Belshaw, P. N., Microcomputers in management science, Interfaces 12, 6 (1982) 105.
[3] Dowsland, W. B., Microcomputer software and hardware considerations for OR, J. Opl. Res. Soc. No. 1. pp. 87—93, 1987.
[4] Geoffrion, A. M., Can MS/OR evolve fast enough, Interfaces 13, 1 (1983) 10.
[5] Jennergen, L. P., Linear programming on micro — the case of Apple-II, European Journal of Operational Research, Vol. 19. No. 2. Feb. 1985.
[6] Kastner, J. A., and Hong, S. J., A review of expert systems, European Journal of Operational Research 18, 3 (1984) 285.
[7] Ranyard, J. C., Introducing the microcomputer into the OR department, Journal of the Operational Research Society, 32, 4 (1981) 277.
[8] Sharda, R., Optimization using spreadsheets on a microcomputer, Ann. Oper. Res. 5 (1985/86) 599.
[9] Sharda, R., A summary of OR/MS software on microcomputers, Annals of Operations Research 5 (1985/86) 613—630.
[10] Sharda, R., Somarajan, C., Comparative performance of advanced microcomputer LP systems, Comput. & Opns. Res. Vol. 13. No. 2/3, pp. 131—147.
[11] Sharda, R., Mathematical programming on microcomputers: directions in performance and user interface, NATO ASI on Mathematical Modelling for Decision Support, Val d'Isere, July 1987.
[12] Saaty, T. L. (1986) The role of microcomputers in analysis and creativity. *In Impacts of Microcomputers on Operations Research.* Ed. Gass, Greenberg and Langley, Elsevier Science Publ. Co.
[13] Sage, A. P. (1986) Overview of Contemporary Issues in the Design and Development of Microcomputer Decision Support Systems. *In Microcomputer Decision Support Systems: Design Impl. and Evaluation,* J. Andriole Ed., North Holland.
[14] Carpenter, J., D. Deloria and D. Morganstein (1984) Statistical software for microcomputers, Byte, 9, 5,
[15] Lezotte, D., (1986) Statistical software for microcomputers. In *Impacts of Microcomputers on Operations Research.* Ed. Gass, Greenberg and Langley, Elsevier Science Publ. Co.
[16] AUTOBJ, Automatic Forecasting Systems, Inc. Stat. Consultants, P. O. Box 563 Hatboro, PA 19 040.
[17] FORECAST MASTER, Scientific Systems, EPRI Electric Power Res-Ints. One Alewife Place, Cambridge, MA 02140.
[18] TSA: TIME Series Analysis Package, CSM. SZTV—MVM—MTA. SZTAKI.
[19] Zifermann Margit, (1987) „Az operációkutatás hazai helyzetképe — elmélet és gyakorlat", MTA Operációkutatási Bizottság jelentése.

(Beérkezett: 1988. november 28.)

MAROS ISTVÁN ÉS BOKOR JÓZSEF
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, KENDE U. 13—17.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 171—232

A külföldi szakirodalomból

DINAMIKAI RENDSZEREK ÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

MORRIS W. HIRSCH

Létezik-e a természetben az emberi értelemtől független harmónia, amelynek felfedezésében olyannyira bízunk? Nem, kétségkívül nem lehet a valóság teljesen független az őt felfogó, látó, érzékelő értelemtől. Még ha léteznék is egy ennyire idegen külvilág, számunkra örökre elérhetetlen maradna. Látni fogjuk, hogy amit végső soron objektív valóságnak hívunk, ami számos gondolkodó lény számára ugyanazt jelenti — és jelenthetné mindenki számára —, nem más, mint a matematikai törvényekkel kifejezhető harmónia.

H. Poincaré, *La valeur de la science*, 9. o.

... súlyos következményekkel jár, ha egy témakör eredetét figyelmen kívül hagyjuk — tagadhatatlan, hogy a modern formalizmus világos, elegáns és precíz, csupán az felfoghatatlan, hogy hogyan lehet rájönni.

M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*

Bevezetés

A matematikának az az ága, amelyet a dinamikai rendszerek elméletének nevezünk, Poincarétól ered, Birkhoff fejlesztette tovább, és erőteljes, új növekedésnek indult az utóbbi húsz évben. Az I. fejezetben megpróbálom bemutatni, hogy érdemes a matematikának erre a fejlődésére úgy tekinteni, mint egy jóval általánosabb, a tudománnyal egyidős problémának természetes következményére: a világegyetem olyan rendszer, amely változik az időben.

Minden matematikus — noha ritkán fejezi ki — a maga egyéni módján műveli a matematikát. Bármely szakterület ilyen perspektívája azonban rendkívül értékes lehet azok számára, akik a terület eredményeit alkalmazzák vagy el akarják sajátítani. Bizonyos területeken a szakemberek figyelme elsősorban néhány világosan definiált fogalomra irányul. Ilyen a dinamikai rendszerek elmélete is, ahol az alapvető fogalmak Poincarétól származnak. Az I. és II. fejezet célja, hogy — kissé csapongva — kifejtsek néhány témakört a dinamikai rendszerek elméletéből (ahogyan én látom), hátterükkel és szemléltető tételekkel együtt. Érthetőségre törekedtem, a teljesség igénye nélkül: számos témát és megközelítési módot nem tárgyalok, de legalábbis érintem a szakterület elterjedtebb eredményeit.

Az utolsó fejezet a legújabb eredményekből mutat be néhányat, amelyek az első két fejezet anyagának illusztrációjaként szolgálnak, és jobban érthetők ezek alapján.

Olyan rendszerekre vonatkoznak, amelyekben — számos, jelenleg divatos rendszertől eltérően — a trajektóriák többsége az egyensúlyhoz közeledik.

Sokaktól kaptam értékes gondolatokat: Giles Auchmuty, John Franks, David Fried, Jack Hale, Xavier Mora, Jenny Harrison, Nancy Kopell, Charles Pugh és különösen Stephen Smale volt segítségemre. Köszönetet mondok Felix Browdernek, amiért bátorított e cikk megírására.

I. FEJEZET: TÖRTÉNETI HÁTTÉR

1. Rendszerek, dinamikák és a tudomány kezdetei

> Noha divatos szokás lehet azt hangoztatni, hogy elvben minden dolog kapcsolatban áll minden mással, néhány dolog azonban szorosabban kapcsolódik egymáshoz, mint a többihez. Az okozati kölcsönhatásoknak egy ilyen kis csoportosulását nevezzük rendszernek.
>
> A. Winfree, *The geometry of biological time*

> Minden modell két, a priori különböző csoport egyikébe sorolható: a kinematika célja a vizsgált folyamat állapotainak parametrizálása, a dinamika az objektumok időbeni fejlődését írja le.
>
> R. Thom, *Structural stability and morphogenesis* (1975), 4. o.

A tapasztalatok rendszerezése az emberi értelem természetéhez tartozik. Képesek vagyunk egyedi objektumok felismerésére, a közöttük levő kapcsolatok érzékelésére, amelyek azután maguk is objektumokká válnak; a hasonló objektumokat absztrakt fogalmakká csoportosítjuk, komplex objektumokat egyszerűbbek alapján analizálunk. (Az emberi értelem másra is képes, és viszont: másfajta értelem is végezhet ilyen tevékenységet.)

Ennek a cselekvésnek egyik megjelenési formája, hogy rendszereket érzékelünk, konstruálunk és elemzünk. A *rendszer* részekből álló valami, amelyet egyedi entitásként észlelünk. Nem minden dolog rendszer: Euklidesz definíciója szerint a pontnak nincsenek részei; a legtöbb teológiában Isten nem részekből áll; az üreshalmaz sem bontható részekre. Néhány jól ismert rendszer: a Naprendszer, a kapitalista társadalmi rendszer, a tízes számrendszer és az érrendszer.

Wittgenstein a következőket mondta a matematikai rendszerekről:

> Egy rendszer, mondhatni, egy világ.
> A matematikában nem beszélhetünk rendszerekről általában, csak rendszereken *belül.* A rendszerek éppen azok, amelyekről nem beszélhetünk.

Gödel tételei adják Wittgenstein gondolatának precíz megfogalmazását.

A rendszer alkotórészeit definiálhatjuk egyértelműen vagy semmitmondóan. A rendszer érdekessége éppen az, hogy részei hogyan viszonyulnak egymáshoz. A matematikában tanulmányozott rendszerek részeit és kapcsolataikat olyan világosan kell definiálnunk, hogy kiemelhető legyen egy részhalmaza azoknak a kapcsolatoknak, amelyek teljes mértékben jellemzik a rendszer *állapotát.* A matematikus ezután azonosítja a rendszert összes lehetséges állapotainak halmazával.

Szükségesnek látszik, legalábbis a matematika jelenlegi helyzetében, hogy az állapottér világosan és egyértelműen definiált legyen. Sajnos ez többnyire azt jelenti, hogy a matematikai rendszer drasztikus leegyszerűsítése annak a valós rendszernek, amelyet modellez. Ökológiai rendszerekben például az állapottér gyakran a populáció egy listája, amely fajok adott halmazát tartalmazza. A valóságban azonban egyes fajok kihalnak, ugyanakkor mutáció, migráció vagy evolúció révén új fajok keletkeznek. Esetleg elképzelhető, hogy nem is ismerjük pontosan a jelenlevő különböző fajok számát. Hasonló probléma merül fel gazdasági modellek esetében, ahol áruk érkeznek a piacra és távoznak onnan. A fizikában a fázisátmenetek tanulmányozásakor találkozunk ilyen jellegű problémával. Egy másik biológiai példát tekintve; nagyon nehéz egy fejlődő embrió modellezése: a sejtek száma változik, új szövetek és szervek keletkeznek, amelyek konfigurációja hamarosan fontos alkotórészévé válik az állapotnak. Amikor ezek a jelenségek nem hanyagolhatók el, többnyire nincs egyéb lehetőség, mint egy más rendszerre való áttérés: gáz tanulmányozása folyadék, felnőtt organizmus vizsgálata embrió helyett. (Érdekes az analógia a koordinátatranszformáció matematikai műveletével — csupán ebben az esetben nem tudjuk leírni, hogy hogyan változnak a koordináták!)

A *dinamikus rendszer* olyan, amely változik az időben; ami változik, az a rendszer állapota. A kapitalista rendszer (Marx szerint) dinamikus, a tízes számrendszer (remélhetőleg) nem az. Egy matematikai dinamikai rendszer az állapotok teréből és egy *dinamikának* nevezett szabályból áll, amely kijelöli a jövő egy adott időpontjában azt az állapotot, amely a jelen egy adott állapotának felel meg. A tudomány központi problémája, hogy hogyan határozhatók meg az ilyen szabályok a különböző valós rendszerekre. Ismert dinamika esetén a dinamikai rendszerek elméletének feladata, hogy feltárja az állapotok hosszú távú változását.

Az általános relativitás korai mítoszai óta a legfontosabb dinamikai rendszer a kozmosz. Részei az égitestek, állapotai ezeknek lehetséges konfigurációi; a központi kérdés a dinamika felfedezése. Amíg a dinamika néhány aspektusa könnyen megragadható, mások, mint például a bolygómozgás vagy a napfordulók időzítése távolról sem nyilvánvaló. Feltételezik, hogy bizonyos műemlékek — mint Stonehenge — a napfordulók pontos meghatározásának céljából épültek; ha így van, akkor ezek a kozmikus dinamika megfigyelésének elmondhatatlanul hosszú korszakát testesítik meg.

Noha Stonhenge lehet számítási segédeszköz, valójában arról árulkodik — mint minden más ilyen eszköz —, hogy használói nem tudják fogalmi úton megközelíteni a dinamikát, amelyet számítanak. Sokkal jobbak voltak a kozmoszról alkotott olyan geometriai képek, mint Eudoxosz forgó gömbjei és Ptolemaiosz epiciklusai. Az értelem egészként képes felfogni az egymáson gördülő gömbök együttesét — egy-egy gömb tartozik minden bolygóhoz és csillaghoz — és játszani tud vele. Ez a kép adaptálható: beilleszthetők excentrikus gömbök az esetenkénti rendellenes bolygómozgás miatt, amíg a megfigyelésekkel való elfogadható egyezést el nem érünk. A legfontosabb az elméleti számítások és az előrejelzés lehetősége. Történelmi jelentőségű lépés ezeknek a gördülő gömböknek a tanulmányozása, egy valós rendszer vizsgálata *matematikai modell* alapján.

Ptolemaiosz, Eudoxosz, Kopernikusz és Brahe geometriai modelljei több-kevesebb sikert jelentettek a Naprendszer dinamikájának számításában, de mindegyiknél fellép a *tetszés szerinti* adaptálhatóság problémája. Mindig beilleszthető egy-két extra epiciklus, hogy feloldjunk egy újabb megfigyelés miatt mutatkozó diszkrepanciát, de hiányzik a vezérelv, amely kijelölné jobb modellek szisztematikus felépítésének útját. Kopernikusz heliocentrikus modellje óriási filozófiai jelentősége mellett sem garantált lényegesen pontosabb előrejelzéseket, mint a (matematikailag ekvivalens) földközéppontú modellek.

Kepler dinamikai módszere alapjaiban különbözött ezektől. Ahelyett, hogy csupán a tapasztalatokat jól közelítő matematikai modelleket keresett volna, a megfigyeléseket belülről vezérlő törvényeket és az ezeket kifejező rendszereket akarta felfedezni.

> Kepler mindenekelőtt az öt bolygó (és mozgásuk), valamint az öt szabályos test közötti kapcsolat magyarázatát tűzte ki céljául. Szokás ezért manapság gúnyosan mosolyogni rajta... Tanulságos ezt összehasonlítani azokkal a jelenlegi törekvésekkel, amelyek az elemi részecskék viselkedését a Lie-csoportok irreducíbilis ábrázolásainak fogalomkörében próbálják kifejteni.
>
> S. Sternberg (1969,) 95. o.

Az öt bolygó és az öt szabályos test léte az univerzum matematikai szabályszerűsége; Kepler megpróbálta megmagyarázni. Miután hitt abban, hogy a bolygók Naptól mért távolságát, keringési idejét és sebességét belső törvényszerűségek kötik össze, ezeket kutatta Brahe megfigyeléseinek tömegében. Ahelyett, hogy rendszerét a kör szabályosságának prekoncepciójára építette volna, az adatokban fellelhető szabályszerűségek feltárásának modern módszerét választotta — és megtalálta az ellipszispályákat, a bolygóév és a Naptól mért távolság háromkettedik hatványának arányosságát és az első megmaradási törvényt: a Naptól a bolygóhoz húzott rádiuszvektor egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.

Galilei távcsövön figyelte az eget, de harminc évet töltött el a lejtőn legördülő golyóból álló szerény földi rendszer tanulmányozásával is. Ez a — kozmosz nagyságához képest apró — rendszer döntő tudományos előnnyel rendelkezett: Galilei kísérleteket tudott végrehajtani. (Ezek lehettek csupán gondolatkísérletek, de legalább lehetett rajtuk gondolkozni.) Komoly nehézséget jelenthetett, hogy nem volt mód az idő pontos mérésére. Az időre, távolságra és sebességre vonatkozó törvények — amik a bolygómozgás előrejelzésénél finomabb problémát jelentenek — felfedezésén át jutott el Galilei a modern tudomány első területéhez, a matematikai fizika dinamikai rendszereihez.

A differenciál- és integrálszámítás keretében minden hallgató megtanulja, hogy a mozgás tanulmányozásakor az idő a független változó; Galilei korában ez nem így volt.

> Eleinte természetesebbnek tűnt az időt és a sebességet egymás ellentéteként tekinteni, és mindkettőt a távolsághoz viszonyítani, amelyet mérni tudott.
>
> S. Drake (1978)

Másik előnye a mai hallgatóknak Galileivel szemben, hogy ismerik a folytonosan változó pillanatnyi sebesség fogalmát. Drake így ír erről:

> A „pontbeli sebesség" fogalma Galilei számára sokáig puszta fikciónak vagy éppen fogalmi ellentmondásnak látszott. A sebesség mozgáshoz kötött, amely nem mehet végbe egy pontban... Az egyenesek és a távolságok elismerten folytonos mennyiségek. A sebesség azonban nem, és Galilei ebben a vonatkozásban lassan követte matematikájának útmutatását.

Kezdettől fogva hibás feltételezés, hogy matematikája irányította a természetet, és a fizikának ehhez kellett idomulnia; valójában a matematika egyre inkább megkötötte a kezét a folytonos változás bonyolult kérdésének tekintetében.

S. Drake (1978), 116. o.

Galilei legnagyobb érdeme — amely nélkül nemcsak a dinamikai rendszerek matematikai vizsgálata, hanem a modern tudomány egésze is lehetetlen volna —, hogy megtanította nekünk: az idő, a mozgás és a sebesség nem valamiféle misztikus mennyiségek, hanem egyszerűen változók, amelyeket kívülről kell megmérnünk és matematikailag kiszámítanunk.

Galileinek tehát nem Arisztotelészre vonatkozó kritikája, hanem végső mozgásfogalma volt eredeti. Ez valóban annyira eredetinek számít. hogy azon rendkívül ritka események egyikének tekinthető, amikor a gondolatok igazi mutációja, a múlttal való szakítás következik be. Megváltoztatta a természetben élő ember külvilágról alkotott képét. Ez az új világ inkább mérés, semmint érzések alapján fogható fel. Lehetségessé válik benne az arkhimédészi tudomány: nemcsak a nyugalmi állapotokat szemlélő statika, hanem a dolgokat mozgás közben megismerő dinamika. Bízvást elmondható, hogy Galilei törvénye a szabadon eső testekről azért volt forradalmian új, mert az időt egy tisztán fizikai jelenség absztrakt paraméterének tekintette. Ez lehetővé tette számára, amit a görögök nem tudtak véghezvinni: a mozgás kvantifikációját. Galilei húsz évig küzdött a problémával, míg sikerült megszabadulnia az ember természetes biológiai ösztöneitől, amelyek az időhöz kötődnek, az időhöz, amiben él és amiben megöregszik. Galilei előtt a tudomány nem tudta megragadni az időt.

C. C. Gillispie, *The edge of objectivity,* (1960), 42. o.

Galilei egységesíteni szerette volna a kozmoszt, de sajnos helytelenül kapcsolta össze földi dinamikáját az égi mechanikával. Nem fordított figyelmet Kepler ellipsziseire, és noha tudta, hogy a hajításokhoz parabolikus trajektóriák tartoznak, úgy vélte, hogy a forgó földgömbön nyugalmi helyzetből leeső testek körpályán mozognak. Annak ellenére, hogy a mozgást megmaradónak tekintette, sohasem fogalmazta meg az inercia elvét. Ismét Gillispie-t idézve (51. o.):

Újra a mozgás a probléma, a béklyó mindenki számára, aki nem tudott elszakadni a görögöktől... amikor kénytelen volt választani a kozmikus rend és a természet abszolút matematizálása között, ő is a rendet választotta. Görögországban a tudomány funkciója az univerzum kizárólagosan logikai alapokon történő magyarázata, nem pedig a jelenségek egy behatárolt körének általánosítása volt. Egy megmagyarázható, illeszkedő univerzum szükségképpen véges, és Galilei ténylegesen sohasem nézett szembe a végtelennel. Galilei számára tehát az a természetes mozgás, az inerciális mozgás, amely nem emelkedik és nem esik, amely ekvidisztans a Föld középpontjához képest. Ez a körmozgás. Elveszítve a világegyetem középpontjának szerepét, a Föld még mindig a mozgás középpontja.

A tehetetlenség törvényét Descartes fogalmazta meg: egy test csak akkor változtat mozgásállapotán, ha hatás éri; hatás nélkül a mozgás egyenes vonalat követ. Ő hagyta ránk a tér végtelenségét, az analitikus geometria módszereit és a világnak — beleértve a természetet is — gépként való felfogását. Ezek, nem pedig az éter örvényeinek fizikája jelentik Descartes valódi érdemeit a dinamikában.

Newton és Leibniz fedezte fel az alapvető segédeszközt, az analízist. Newton azonban sokkal többet tett: matematikailag elegendően precíz formában állított fel egy *fizikai* hipotézist — az egyetemes gravitáció törvényét —, amelyből azután *le tudta vezetni* a kozmikus dinamikát. Kepler és Galilei törvényei matematikai következményekké váltak.

Különös, hogy noha Newton az analízis segítségével fedezte fel tételeit, kifejtésükkor a *Princípiában* klasszikus (és nehézkes) geometriai módszereket használ. A „newtoni" mechanikát később Euler, Laplace, Lagrange és mások fejlesztették ki. Newton nagymértékben hozzájárult ahhoz a filozófiai programhoz, amelyet Galilei kezdett el, és amelynek célja a tudomány metafizikai érveléstől való megszabadítása volt. A matematikával kapcsolatos bármiféle filozófiai gondolkodást elutasító modern matematikusok valószínűleg nem tudják, hogy milyen sokkal tartozunk Galileinek és Newtonnak. Az ő erőfeszítéseiknek köszönhetően haladhatunk úgy a matematikában, hogy a metafizikát és a fizikát is másokra hagyjuk. Kemény munkával alapozták meg a tudományos módszertan két olyan elvét, amelyet mi magától értetődőnek tekintünk: matematikailag megfogalmazott tudományos tételből levont matematikai következtetés ugyanolyan érvényű, mint maga a tétel; másrészt éppen ez az elméleti tudomány művelésének legjobb útja.

A matematikai hipotézisek és következtetések megalkotása nem mindig kényelmes hivatás. Galilei ellenfelei nem csupán intellektuális fegyverekkel harcoltak: a *Dialógus a két fő világrendszerről* kiadását követően kínzással fenyegették és bebörtönözték. Egy századdal korábban Brunót megégették a végtelen térről vallott eretnek nézetei miatt. Manapság már, szerencsére, a bíróságok enyhébben büntetik a matematika terjesztését, mégis elgondolkodtató, hogy a titkos kódok fejlődése miatt bizonyos számok prímfaktorizációjának publikálása már-már bűnnek számít.

2. Az idő és a matematikusok

> Nem definiálom az időt, a teret és a mozgást, mivel ezeket mindenki jól ismeri... Az abszolút, igaz és matematikai idő magától és a saját természeténél fogva egyenletesen folyik bármi máshoz való viszonyítás nélkül és másképpen tartamnak nevezzük.
>
> Newton (1687)

> Megjegyezhető, hogy az idősorok fogalma csaknem kimeríthetetlen alapjául szolgál a filozófiai spekulációnak.
>
> Birkhoff (1934)

Absztrakt értelemben az idő talán nem tárgya a matematikának. Ha azonban azt tekintjük, hogy mivel foglalkoznak a matematikusok, és nem azt, hogy mit mondanak erről, kiderül, hogy az idő a matematika legfontosabb változója. Számos élenjáró matematikus és filozófus érzékelte az idő és a matematika belső kapcsolatát. Szórakoztató és valószínűleg tanulságos is megvizsgálni néhány gondolatukat.

Senki sem tudja megmagyarázni, hogy Newton híres mondása mit jelent, de ettől kezdve szabaddá vált az út a matematika előtt. A mai matematikusok többsége sohasem gondolna arra, hogy tudományos publikációjában az időről írjon; nem is tartja fontosnak. Mindemellett kevésbé formális közleményeikben — gyakran különös módon — felbukkan a téma.

Két évszázaddal ezelőtt, amikor a matematikusok és a filozófusok még több figyelmet fordítottak egymásra, Kant így vélekedett:

> Az aritmetika egységek időben történő szukcesszív összeadásával ér el a számfogalomhoz.

Ezt visszhangozza egy századdal később Schopenhauer:

> ... az aritmetika az idő tiszta intuícióján nyugszik ...
> Az idő teszi lehetővé az aritmetikát. A tér teszi lehetővé a geometriát.

Sok későbbi filozófus vallott hasonló nézetet.

A matematikus Hamilton nem az aritmetikát, hanem az algebrát (amely aligha létezett Kant korában) tartotta az idő tudományának, és így írt erről:

> ... az algebrai tudomány tárgya az idő absztrakt fogalma... a *lehetséges* rákövetkezés vagy az ideális progresszió eszméje.

Biográfusa, Hankins (1980) szerint Hamilton azért volt képes megszabadítani az algebrát attól, hogy a közönséges aritmetika törvényeinek legyen alávetve, mert látta az algebra szimbólumai mögött a szellemi tevékenység realitását és ellenezte, hogy ezeket csupán határozatlan számokat helyettesítő szimbólumoknak tekintsük. Lehetséges, hogy a metafizikus gondolkodás fontosabb szerepet játszott a matematika fejlődésében, mint ahogyan azt eddig sejtettük.

Hamilton „idő plusz tér" együtteseként tekintette kvaternióit. A négydimenziós tér és idő kontinuumnak ezt a korai fogalmát már d'Alembert megsejtette; erre a tényre A. Borel hívta fel a figyelmemet. Az *Enciklopédiában*, egy dimenzióról szóló cikkében d'Alembert (1754) a következőket írta:

> Fentebb említettem, hogy lehetetlen volna háromnál több dimenziót felfognunk. Ismeretségi körömben van egy okos ember, aki úgy gondolja, hogy mégis lehetséges az időtartamot úgy tekinteni, mint negyedik dimenziót, továbbá az idő létrejötte bizonyosan valamilyen módon a négy dimenzióból származik; ez a gondolat tagadható, de számomra úgy tűnik, hogy van benne valami, noha csupán egy új eszme része.

Vajon az „okos ember" d'Alembert maga volt?

Hamilton a tér és idő tudományaként jellemezte a matematikát. Ezt a nézetet Augustus De Morgan, aki széles közönségnek írt számos matematikai témáról, támogatta; C. S. Peirce (a harvardi matematikus fia, a pragmatizmus megalapítója) kigúnyolta:

> Azt kell mondjam, ritkán találkozhatunk a tudománynak ilyen körültekintő definíciójával, amely ennyire kifogásolható ... Hamilton szándéka valószínűleg az volt — definíciója alapján —, hogy megbélyegezze a képzelet geometriába való bevezetését, mint hamis tudományt; mindazonáltal De Morgannak látnia kellett volna, hogy ez nehezen tartható, hacsak nem akar szembeszegülni Boole logikaelméletével. A matematikusok igenis foglalkoznak olyan hipotézisekkel, amelyeknek semmivel sincs több közük a térhez és az időhöz, mint bármilyen más hipotézisnek; mi több, most már világosan látjuk, amióta a nem-euklideszi geometriákat megismertük, hogy van tényleges tudománya a térnek és az időnek, és ezek a tanok... a fizikához tartoznak.

Egy korai munkájában Peirce az időt és a megfigyelést a folytonosság tulajdonságának révén hozza kapcsolatba:

> a megfigyelés folytonos mennyiségre vonatkozik; amennyire tudjuk, a folytonos mennyiség végső soron az idő elemzésére vezet vissza.
>
> (1868)

Később felvetette, hogy az idő folytonossága lehet puszta illúzió:

> Miért nem lehetséges mozdulatlan állapotok egymásra következése, mondjuk ezernyi vagy hasonló, esetleg végtelen sok másodpercenként...

és a kvantumelmélet egy figyelemreméltó megsejtésével folytatja, feltéve a kérdést:

> ... és miért ne töredezhetne szét a dolgok állapota hirtelen egyikről a másikra?

Valóban, miért ne? — eltekintve attól, hogy így az idő nem volna megfelelő változó az analízis számára.

L. E. J. Brouwer mély topológiai tételei rendkívül hasznosnak bizonyultak a dinamikában. Differenciálegyenletek periodikus megoldásai előállításának szokásos módja, hogy Brouwer eredményét használjuk fel a megfelelő transzformáció egy fixpontjának megkereséséhez. Brouwer egyébiránt ikonoklasztikus filozófusa volt a tudománynak és a matematikának: intuicionizmusa arra késztette, hogy fő matematikai munkáit elutasítsa, mint bizonyítatlanokat. Számára a matematika olyan konstrukció, amely emberi tudatban egy természetes belső képesség révén jött létre, egyenesen az intuícióból az idők folyamán:

> Ez a neo-intuicionizmus úgy tekint az élet pillanatainak minőségileg különböző részekre történő szétválasztására, erre az időbeli elkülönítés újraegyesítésére, mint a matematikai gondolkodás alapelvére, a tiszta egység-kettősség intuíciójára.
>
> * * *
>
> Így az idő aprioritása nemcsak az aritmetika sajátságait minősíti szintetikus apriori ítéleteknek, hanem ugyanezt teszi a geometriára vonatkozóan ...
>
> (1913)

Brouwer szerint minden matematikai reláció a gyakorlati alkalmazások során időbeli relációvá válik:

> Így például az euklideszi geometria, amikor a valóságra alkalmazzuk, merev testek segítségével végrehajtott különböző mérések közötti oksági összefüggéseket szolgáltat.
>
> * * *
>
> *A tudomány egyetlen apriori eleme az idő.*
>
> (1907)

Másfelől viszont a tapasztalat, szemben az intuícióval, független mind a matematikától, mind az időtől:

> Nemcsak a matematika létezik minden tapasztalatunktól függetlenül, hanem a tapasztalatok is függetlenek a matematikától. Az emberi tapasztalás nincs passzívan alávetve semmiféle matematikai rendszernek, még az időkoordinátának sem, de még a mértéktől mentes időkontinuumnak sem.
>
> (1907)

továbbá:

> *A matematika független a logikától.*
> (1907)

Brouwer kevéssé hitt a „tudományos igazságokban":

> ... a tudományos gondolkodás semmi több, mint a szándék rögzítése az emberi tudat keretei között; a tudományos igazság csupán a vágy elfogultsága az emberi értelem korlátain belül.
>
> (1907)

és ugyanígy nem hitt a matematikai okfejtésben, mint a természet igazságainak forrásában:

> Igaz, hogy matematikai objektumok közötti bizonyos relációkból, amelyeket axiómáknak tekintünk, rögzített szabályok szerint más relációkat vezetünk le, abban a hitben, hogy ily módon igazságokból igazságokat nyerünk logikai következtetés útján, de ez az igazságba vagy legitimitásba vetett nem-matematikus hit nélkülöz minden egzaktságot, és nem több, mint egy bizonytalan örömérzet, amely abból a tudatból fakad, hogy milyen hatásos ezeknek a relációknak és következtetési szabályoknak a kivetítése a természetbe.
>
> (1913)

Bertrand Russellt érdekelte az idő szerepe a fizikában:

> Sir Isaac Newton „abszolút" idejét, noha a klasszikus fizika technikájának része maradt, általában nem fogadták el ... A Newton „abszolút" idejével szembeni ellenvetések gyakori alapja, hogy nem megfigyelhető. Ez a kifogás első pillantásra furcsának tűnik olyan emberektől, akik azt kérik tőlünk, hogy higyjünk elektronokban, protonokban és neutronokban, atomokban végbemenő kvantumátmenetekben, amelyek egyike sem megfigyelhető. Az a tény, hogy az abszolút idő nem figyelhető meg, önmagában még nem döntő abból a szempontból, hogy el kell-e fogadnunk; ami meghatározó, az az, hogy a fizika interpretálható a feltételezése nélkül.
>
> (1948), 286. o.

Russell továbbmegy és rámutat, hogy a fizikának szüksége van a t változó és a „pillanat" valamilyen értelmezésére. Felvázol egy utat a „pillanat" átfedő események segítségével történő definiálására, ahhoz a konstrukcióhoz hasonlóan, ahogyan a valós számokat nyerjük egymásba skatulyázott intervallumokból (az ötletet feltehetően innen merítve).

A kvantumelmélet és a relativitás többek között teljességgel felborította az időről és a térről kialakult régi fogalmainkat, de ahelyett, hogy belemélyednék alapvető hatásukba a dinamikára, hadd idézzem Eddingtont:

> Van egy mennyiség, amelyet a relativitás előtti fizika nem ismert fel, és amely közvetlenebbül reprezentálja az értelem által megismert időt. Ez az úgynevezett sajátidő vagy *intervallum*. Határozottan elkülönítendő, egészen más, mint a sajáttér. Az a tiltakozás, amely a józan ész nevében a tér és idő összekeverése ellen lép fel, olyan érzés, amelyet bátorítani szeretnék. Az időt és a teret el kell különítenünk. Az a jelenlegi ábrázolás, amely úgy mutatja be a maradandó világot, mint olyan háromdimenziós teret, amelyik pillanatról pillanatra ugrál az időben, egy *sikertelen* kísérlet az elkülönítésre. Tartson velem az érintetlen négydimenziós térbe, és újra szétválaszthatjuk őket egy olyan terv alapján, amely megtartja a teljes elkülönítést. Ezután feléleszthetjük tudatunk majdnem elfelejtett időfogalmát, és úgy fogjuk találni, hogy örvendetesen fontos helyet foglal el a természet abszolút sémájában.
>
> (1927), 37. o.

Manapság a matematikusok közössége megújult érdeklődést tanúsít a filozófiai közlemények iránt, a legtöbb matematikus azonban még mindig inkább mellőzi ezeket, és publikációiban technikai ismertetésre szorítkozik. Még a metafizikus intuíció is szakzsargon formájában kerül nyomtatásba. Olyan, jelenleg népszerű kifejezések, mint „kaotikus dinamikák", „különös attraktor" felfednek valamit azok világnézetéből, akik használják őket, csakúgy, mint „nem-konstruktív bizonyítás", „numerikus szimuláció" és „evolúciós egyenlet". A ma teljesen precíz, technikai kifejezései: „irracionális", „negatív", „képzetes" a tegnap filozófiai örökségét tükrözik.

Még a könyvcímek is hordozhatnak filozofikus üzeneteket. Gyakorlásképpen az olvasóra hagyom, hogy kiemelje az alábbi korszerű művek címéből a filozófiai jelleget: A. Winfree: *„The geometry of biological time"*, R. Abraham és C. Shaw: *„Dynamics — The geometry of behaviour"*, S. Smale: *„The mathematics of time: Essays on dynamical systems, economic processes and related topics"*.

3. A dinamika haszna: előrejelzés és betekintés

> Jobban meggondolva azonban, nagyon kevés jelenség múlik matematikailag egyszerűen kifejezett törvényeken... Továbbá, még akkor is, ha a rendszert explicit evolúciós törvények irányítják, gyakran előfordul, hogy kvalitatív viselkedése nem számítható, nem előrejelezhető...
>
> R. Thom (1975), 322. o.

A matematika leglátványosabb alkalmazásai, különösképpen a dinamika, pontosan és sikeresen jelezték előre a bolygók megfigyeléseit, újak felfedezését, atomrobbanásokat, a holdraszállást és más eseményeket. A tudomány jelentős része azonban nem annyira az előrejelzéssel, mint inkább a megértéssel foglalkozik: hogyan alakultak ki a galaxisok, hogyan keletkeztek a fajok, hogyan fejlődik a gazdaság. A dinamikai rendszerek elméletének fontos része van az ilyen kérdések megválaszolásában, de szerepe meglehetősen különbözik attól, ami a legismertebb: nem csupán egy a jóslás eszközei közül. Különösen, ha távolodva a fizikától, a biológiai és társadalomtudományokhoz közeledünk, úgy találjuk, hogy a dinamikát inkább minőségi megértés forrásaként, mintsem mennyiségi előrejelzések megalkotására használják. Óriási értéke, hogy felhasználható természetes rendszerek modelljének konstruálására, amely azután viszonylag könnyen variálható és analizálható.

A biológiai és társadalomtudományok modelljei ritkán „tervrajzok a világ felépítéséhez, gyakrabban hasonlatok a világ megértéséhez" (N. Georgescu—Roegen [1966], 116. o.). Mármost egy effajta fogalmi modellnek sokkal egyszerűbbnek kell lennie annál a komplex realitásnál, amit modellez, különben nincs értelme a hasonlatnak. Hogyan lehet tehát hasznos? A válasz: a modell megvilágíthat bizonyos tendenciákat vagy viszonylatokat — nem feltétlenül „törvényeket" —, amelyek egyébként homályban maradnának. Az ilyen konklúziók eredménye gyakran negatív: ha úgy véljük, hogy a modellből levont következtetések nem állják meg helyüket a valóságra vonatkoztatva, tovább kell keresnünk az okot. Másfelől meggyőződhetünk a modell plauzibilitásáról vagy általánosságáról, akkor valóban megtudtunk valami újat a valóságról.

Ahhoz, hogy egy ilyen modellből származó matematikai dedukció meggyőző legyen, robusztusnak kell lennie — érzéketlennek a matematikai részletekre. Ez a homályos, de fontos fogalom a kis perturbációknak alávetett matematikai rendszer valamely vonásának állandóságára utal. (A „kis perturbáció" interpretációja gyakran ködös, bonyolult és vitatható.) Tekintsünk például a síkon egy körből és egy egyenesből álló rendszert. Az a tulajdonság, hogy a metszéspontok száma kettő , robusztus, míg az, hogy pontosan egy metszéspont van, nem robusztus.

A robusztusság nagyon erős formája egy differenciálegyenlet-rendszer *strukturális stabilitása*. Ez nagyjából azt jelenti, hogy elegendően kis perturbáció nem változtatja meg a megoldások terének topologikus és dinamikus struktúráját. Ez a fogalom, amelyet R. Thom a dinamikai modellépítés kiemelkedő teljesítményében, a *„Struktural stability and morphogenesis"* (1972, 1975) című munkájában hangsúlyozott, túlságosan ritkán jelenik meg ahhoz, hogy általános eszközként legyen használható. Mindazonáltal, az alapjául szolgáló gondolat, hogy *a matematikai modellek legyenek robusztusak fontos vonásaikban*, széles körben elfogadott. Ezt a „stabilitási dogmát" tárgyalja Abraham és Marsden *„Foundations of mechanics"* (1967) című könyvének első kiadásában, továbbá Guckenheimer és Holmes egy újabb könyvben (1983).

Egy sikeres matematikai modell végső eredménye az előrejelzés egy pontos módszere lehet. Vagy valami egészen más, bár nem szükségképpen kevésbé értékes: *egy megújult látásmód...*

4. A dinamikai okfejtés egy korai példája a közgazdaságtanban: a malthusi látásmód

> Malthus egy megdöbbentő csapással végzett minden rózsás reményével egy olyan kornak, amely a megelégedettség és a kényelmes fejlődés perspektívájának irányába haladt.
>
> Robert Heilbroner (1953)

> Malthust nagyon pikánsnak találtam.
>
> Paul Samuelson (az idézet L. Silktől [1983])

Malthus 1798-ban publikálta *„An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society"* című művét. Borúlátó üzenete az volt, hogy „a népesedés alapelve perdöntő ellenérv az emberiség tökéletesíthetőségével szemben", mivel:

> a kontroll nélküli népesség geometriai ütemben nő. A létfenntartáshoz szükséges javak csak aritmetikai ütemben gyarapodnak. A számok csekély ismerete is elegendő ahhoz, hogy belássuk: az első mérhetetlenül gyorsabban nő a másodiknál.

A népesség geometriai, mai szóhasználattal exponenciális növekedését minden egyetemi hallgató ismeri, a javak gyarapodásának aritmetikai üteme azonban manapság kevésbé nyilvánvaló. Úgy tekintünk a mezőgazdaság növekvő teljesítményére, mint a műtrágyázás, a gépesítés és a genetikai manipuláció eredményére. Malthus idejében azonban ezek a módszerek nem léteztek: a termés számottevő növelésének egyetlen módja az volt, hogy több földet kellett művelés alá vonni — ennek korlátai nyilvánvalók. Malthus érvelése szerint csak háború, éhínség és járvány (amint azt Darwin később kiemelte, gyermekek között pusztító járvány) védi meg az emberiséget attól, hogy létfenntartási javaiból kifogyjon. Arra a következtetésre jutott, hogy minden olyan erőfeszítés, amely a szegények (ami gyakorlatilag mindenkit jelentett) gyötrelmes sorsának enyhítésére irányul, eleve kudarcra ítéltetett, hiszen bármilyen időszakos javulás a népesség növekedéséhez vezet, amely viszont kevesebb élelmet és általában rosszabb életfeltételeket jelent.

Malthus tézise kezdettől fogva nagy hatással bírt, és ez így van mind a mai napig. R. Heilbroner mondja:

> Nem csoda, hogy miután Malthust olvasta, Carlyle a közgazdaságtant a „lehangoló tudománynak" nevezte, és szegény Godwin arra panaszkodott, hogy Malthus a fejlődés híveinek százait változtatta reakcióssá. Malthus egy megdöbbentő csapással végzett minden rózsás reményével egy olyan kornak, amely a megelégedettség és a kényelmes fejlődés perspektívájának irányába haladt.

Malthus idejétől korunkig a közgazdászok nagyon komolyan vették Malthus érveit. Barátja, Ricardo, a klasszikus közgazdász vég nélkül vitatkozott vele. Egy biográfus írta:

> Korának legtöbbet becsmérelt embere volt... Malthust kezdettől fogva nem tagadták meg. Harminc éven át záporozta a cáfolatokat.

Marx megvetette érvelését, noha elismerte, hogy a kapitalizmusban bizonyos mértékig érvényes. Keynes úgy indokolta a gazdag osztályok hatalmas mértékű tőkefelhalmozását, hogy ez a malthusi látomás ellenszere:

> Bár ne osztanánk szét a javakat, hanem hagynánk növekedni abban a geometriai ütemben, amit Malthus a népesség növekedésére vonatkozóan jósolt, és ami nem kevésbé igaz a kamatos kamatra is; akkor talán eljöhetne az a nap, amikor nem szenvednénk hiányt ... Az egyik geometriai növekedés semlegesítheti a másikat, és a XIX. század képes volt elfeledkezni a fajok szaporodóképességéről a kamatos kamat szédítő hatékonyságának tervezgetése során.
> *The economic consequences of the peace* (az idézet J. Stracheytől,
>
> *Contemporary capitalism*, 83. o.)

Ha egy elmélet sikerét annak alapján bíráljuk el, hogy mennyi vitát provokált, akkor Malthus sikere óriási; mellékszempontokra való tekintet nélkül hatása tagadhatatlan. Mindez sem bármiféle predikatív erőnek, sem igazolhatóságnak nem tulajdonítható — ténylegesen nincs elképzelhető mód megfigyelési tapasztalat útján történő kipróbálására. (Malthus érvelése kötőmódban, következtetése felszólító módban fogalmazódott; az ilyen állítások nem igazolhatók és nem cáfolhatók.) Mégis, akkor honnan ez a siker?

Úgy vélem, a válasz okfejtésének matematikai formájában és következtetésének robusztusságában rejlik. Az érv, hogy „a népesség gyorsabban nő, mint a létfenntartási javak", közel sem olyan megrázó, mint az exponenciális és a lineáris növekedés közötti kontraszt. Abszurd egyszerűsége ellenére is elfogadjuk a valós világra vonatkozó relevanciaként, pontosabban azért, mert annyira robusztus.

Ha Malthus egy századdal később ír, használhatott volna folytonosat a diszkrét dinamika helyett. Azaz, érveit megfogalmazhatta volna a differenciálegyenletek fogalmainak segítségével: „Az imént kifejtett szociológiai tényezők miatt (S) azt kell posztulálnunk, hogy háborúk stb. hiányában a t időpontbeli $X(t)$ népesség $dx/dt=cx$ típusú differenciálegyenletet elégít ki pozitív c konstanssal; a rendelkezésre álló $y(t)$ élelemre pedig $dy/dt=k$, ahol k szintén pozitív konstans. Következésképpen az egy főre jutó élelem, $y/x=(y_0+kt)/x_0e^{ct}$ az idő előrehaladásával zérushoz tart. Így a nyomor elkerülhetetlen.

Arra az ellenvetésre, hogy ezek a differenciálegyenletek a végletekig leegyszerűsítettek, Malthus azt válaszolhatta volna: „Valóban, csupán egyszerű illusztrációként értendők. Ténylegesen (S) a következő két egyenlőtlenséget implikálja: $dx/dt>cx$ és $dy/dt<k$, valamely ismeretlen pozitív c és k konstanssal. Ebből még mindig következik, hogy y/x tart nullához."

Ez az érvelés nem könnyen támadható. Az egyedüli ésszerű stratégia azoknak a szociális és közgazdasági érveknek az elemzése, amelyeket a növekedési rátákat szabályozó egyenlőtlenségek levezetéséhez használt. (Ilyen analízis már történt, lásd pl. J. Robinson (1956).)

A matematika szerepe Malthus elméletében nagyon eltér a fizikában, pl. Newton munkájában játszott szerepétől. Az utóbbi esetben a matematikai végeredmény azonos a fizikai követelménnyel, pl. hogy a bolygópályák ellipszisek. A matematikai tárgyalás döntő az érvelés sikerességének szempontjából, amely egy állítás arra nézve, hogyan is állnak a dolgok. Malthus esetében a matematika csak egy tendenciát mutat meg, a részletek nem fontosak. Az elmélet nem annak megvilágítására irányul, hogy a dolgok hogyan állnak, hanem hogy bizonyos, látszólag realizálhatatlan feltételek (nincsenek háborúk, éhínség, járványok) teljesülése esetén mi történne. Malthus elméletének célja nem az előrejelzés, hanem a mélyebb megértés.

5. A dinamikai látásmód a nem-kvantitatív tudományokban: Malthus és az evolúció

> Lásd T. Malthus tiszteletes „Essay on the Principle of Population" című emlékezetes munkáját...
> C. Darwin, *The descent of man*, 428. o.
> Az evolúció egy irreverzibilis változáson átmenő rendszer története.
> A. Lotka (1956), 24. o.

Malthus erős hatással volt a közgazdaságtanra, de még inkább a biológiára: az *„Essay"*-re Darwin és Wallace is hivatkozott, mint a természetes kiválasztódás

— az evolúció mozgatórugója — egymástól függetlenül való felfedezésének közvetlen inspirációjára. Önéletrajzában Darwin (1892) a következőket írja:

> 1838 októberében, tizenöt hónappal azután, hogy rendszeres kutatásaimat elkezdtem, kikapcsolódásképpen elolvastam Malthusnak a népességről szóló munkáját; miután kész voltam értékelni a létért folyó küzdelem jelenségét, amely a növények és állatok hosszú távú megfigyelése során mindenütt tapasztalható, azonnal megfogott az a gondolat, hogy az alkalmazkodásra képes változatok fennmaradnak, a képtelenek elpusztulnak. Ez új fajok kialakulását eredményezi. Ott és akkor egy olyan elmélet birtokába jutottam, amelynek alapján dolgoznom kellett...
>
> 40. o.

Wallace Darwinhoz írott híres levelében Malthus könyvét idézi:

> hirtelen világossá vált számomra... a gyengét minden generációban elkerülhetetlenül megölik, az erősebb fennmarad — azaz *a legalkalmasabb a túlélő*.

Amit az evolúció kutatói Malthustól kaptak: egy látásmód — ahogyan felhasználták, az nagyon eltért Malthustól:

> noha elfogadta Malthus premisszáit, Darwin a feje tetejére akarta állítani Malthus következtetését: ahol Darwin úgy látta, hogy a küzdelem változáshoz vezet, Malthus lényegében úgy vélte, hogy az a változást kizárja!
>
> M. Ruse, *The Darwinian revolution*, 175. o.

Ruse így folytatja:

> Darwin újnak és hatásosnak találta Malthus „Essay"-ét, nem premisszáinak igazsága miatt — az 1830-as években csaknem mindenki vitán felül állónak fogadta el ezeket —, hanem mert Malthus törvényszerű, kvantitatív formában találta őket, deduktív megközelítés útján. Éppen ez volt az, amit Darwin a korabeli (newtoni) természetfilozófiában keresett... Amint Darwin elolvasta Malthust, erőkben és kényszerekben kezdett gondolkodni, amelyek az organizmusokat a természet gazdaságának hézagai felé taszítják... Malthus oly mértékben feltárt előtte egy élőlényeken munkálkodó, erőhöz hasonló tényezőt, hogy Darwin kezdett tudatára ébredni: ez elsődleges jelöltje egy tudományos evolúciós mechanizmusnak. Filozofikus látásmódja révén rendkívül fogékony volt arra a módra, ahogyan Malthus a létért folyó küzdelmet előadta.

Newton dinamikai elmélete oly sikeres volt, hogy Darwin korában minden tudományos elmélet standard modelljévé lett: kevés volt valamilyen történés (pl. az evolúció), léteznie kellett egy kényszerítő dinamikának, ami a történést vezérelte. Darwin és Russell Malthusnál találta meg a dinamikát.

Ahogyan a newtoni mechanika volt a kozmikus dinamika kifejtése, úgy a természetes kiválasztódás elmélete az élővilág dinamikájának alapja. De, noha az evolúció nyilvánvalóan dinamikai folyamat, nem könnyű megmondani, hogy mi a *rendszer*. Alkotóelemei vajon az egyes élőlények, a fajok, a gének vagy a kromoszómák? Az ilyen kérdések teljességgel tükrözik a matematika leegyszerűsítései és a biológia mély komplexitása közötti ellentmondást. (Esetleg a dinamikai rendszerre adott definóciónk elégtelen mivoltát.) Úgy tűnik, van valami az evolúcióban, ami makacsul ellenáll a mennyiségi megközelítésnek — vagy talán azt kellene mondanunk, a matematikai megközelítésnek?

Az természetesen igaz, hogy számos, az evolúcióval kapcsolatos téma tanulmányozásához hasznosítható a matematika, például a genetikában, ahol szerephez jutottak a dinamikai rendszerek is. Érdekes, hogy Darwin sajnálkozását fejezte ki amiatt, hogy nem tanult több matematikát (1892), 18. o.

Az evolúció ellenállása a matematikai megközelítéssel szemben három alapvető szempontból is nyomon követhető. Az első minden biológiai és társadalomtudományra vonatkozik: a megfigyelő aktív és lényegbevágó szerepe. Végül is a megfigyelő ember az, aki intuitíve és a tudományosságot megelőzően élőkre és élettelenekre csoportosítja a dolgokat, aki felismeri — de aligha definiálja — az ösztönt, a tanulást, az intelligenciát, a mozgékonyságot, az alkalmazkodóképességet, a társadalmi rétegeket stb. Csak a legmélyebb és legmodernebb fizikában lép be szükségszerűen a megfigyelő lényegileg elméleti úton; a biológiai és társadalomtudományokban azonban szerepe kezdettől fogva döntő — ez olyannyira alapvető, hogy elkerülheti a figyelmünket. Mindemellett egy emberi lény nehezen modellezhető.

A második aspektus, ami nem-matematizálhatóságára utal, a földi evolúció *egyszerisége:* megismételhetetlen és csak részlegesen tanulmányozható.

Végül: az evolúció az élővilág apró, de jelentős konkrét különbségeiről szól, és csak az ember képes felismerni ezeket. Míg a fizika az anyagi világ lényegtelen különbségeitől a lényeges tulajdonságok absztrahálásának irányába fejlődött, az evolúció elmélete épp az ellenkező utat járta, a legnagyobb figyelmet fordítva ezekre az eltérésekre. Egy megfigyelés során lehetetlen előre megmondani, hogy melyek lesznek ezek az eltérések és melyik bizonyul majd közülük fontosnak, tehát nehéz őket elvontan kezelni.

J. Z. Young, a biológus ugyanerre mutat rá, pszichológiai szemszögből:

> A változás tanulmányozása bizonyos speciális nehézségeket vet fel, mivel az összehasonlítás alapvető tendenciájának (közös vonásokat találni, a dolgoknak nevet adni) ellenkezőjét foglalja magában. Ha egy populáció egyedeinek változatait vizsgáljuk, például az emberek esetében. éppen az a lényeg, hogy rámutassunk, miben nem hasonlítanak. Ez nehéz és visszataszító tevékenység egy olyan elmének, amely a csoportosítás könnyű és nyilvánvaló megoldását keresi. Sok ember számára csak úgy szólhatunk kielégítő módon a világról, ha azt egy sor precízen definiált kategória alapján tesszük, olyan tulajdonságok alapján, amelyeket pontosan ismerünk.
> *Doubt and certainty in science* (1951), 147. o.

Utolsó mondata talán a matematikusokra vonatkozik.

Ironikus, hogy Malthus nyers, elemi, de robusztus matematikai érvelése inspirálta a döntő bepillantást a legkevésbé kvantitatív hatalmas tudományos elméletbe, az evolúcióba.

6. Közönséges differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

Az összes matematikai diszciplína közül a differenciálegyenletek elmélete a legfontosabb... Magyarázatot ad a természet minden olyan elemi megnyilvánulására, amelyben szerepet játszik az idő.

Sophus Lie (1895)

Egy olyan korban, amikor már semmilyen fizikai elméletet sem nevezhetünk joggal fundamentálisnak... bizton állítható, hogy a valós tartományon értelmezett differenciálegyenletek, különösen a dinamikai eredetűek, a legfontosabb pozíciót fogják elfoglalni.

G. D. Birkhoff (1927)

Felix Klein, aki sohasem riadt vissza fölényes kijelentésektől, még nagyobb jelentőséget tulajdonított a differenciálegyenleteknek:

Közismert, hogy az egész modern matematika központi problémája a differenciálegyenletek segítségével definiált transzcendens függvények vizsgálata.

F. Klein (1911)

Nem kell elfogadnunk a Klein által a központi problémára adott definíciót — még ilyen probléma létében sem kell hinnünk — ahhoz, hogy felismerjük a differenciálegyenletek fontosságát a matematikában. Amellett, hogy az alkalmazások legfontosabb eszköze, a differenciálegyenletek vizsgálata termékenyítőleg hatott az absztrakt matematika minden területén: Poincaré, aki olyan sokat tett a differenciálegyenletek elméletében, kifejlesztette az algebrai topológiát azért, hogy differenciálegyenletekkel kapcsolatos problémákat oldjon meg; Lie hasonló céllal fedezte fel a róla elnevezett csoportokat; Fourier a hővezetés tanulmányozásakor alkotta meg sorait és Cantort a Fourier-sorok konvergenciaproblémái vezették el a topológiához és a halmazelmélethez; a funkcionálanalízis jelentős része a parciális differenciálegyenletekből ered. Természetesen a dinamikai rendszerek matematikai elmélete is eredetileg a közönséges differenciálegyenletek elméletéhez tartozott.

Érdekes, hogy a differenciálegyenletek elméletének ezek a leszármazottai nem csupán önmagukban fontos kutatási területek, hanem a differenciálegyenletek vizsgálatának alapvető eszközei.

Hadamard, Poincaré munkájának nagyszerű áttekintésében (1912, 1912a) a differenciálegyenletek korábbi „aranykoráról" beszél; arról az időszakról, amikor az érdekes egyenletek megoldhatók voltak „integrál" segítségével — olyan függvényekkel, amelyek értéke állandó a megoldásgörbék mentén. Mivel minden megoldásgörbe egy ilyen függvény szintfelületén van, az integrál létezése azt jelenti, hogy az állapottér dimenziója eggyel csökkenthető; az eredeti állapotteret egyszerűen azzal a szintfelülettel helyettesíthetjük, amely a keresett megoldáshoz tartozó kezdeti értéket tartalmazza. Elegendő független integrált megadva, az állapottér dimenziója egyre redukálható. Ekkor (az új koordinátákban) egy egyváltozós egyenletünk van, amelynek megoldása standard módszerekkel (közelítéssel) számítható. Azonban „ezek az egyszerű esetek hamar elfogytak. Általában az ismert integrálok száma nem elégséges". Főként, mondja Hadamard, „az n-test probléma szolgáltatja a differenciálegyenletek általános problematikájának minden nehézségét. Ezek a nehézségek a dolgok lényegében rejlenek... éppen azok a következtetések, amelyekre Poincaré jutott... magyarázzák meg számunkra, hogy ezek az általános problémák miért igényelnek nemcsak más, hanem alapvetően különböző módszereket azoktól, amelyek először sikerre vezettek". (1912)

Ezek az új módszerek képezik most a dinamikai rendszerek elméletének tárgyát. Mindenekelőtt, mivel Poincarét csak a valós megoldások érdekelték, fel kellett adnia a komplex változók használatát, ami oly sikeresnek bizonyult az analízisben. Ahogyan fenntebb említettük, nem támaszkodhatott az integrál keresésére: kézzelfogható bizonyítéka volt arra nézve, hogy a háromtest-probléma esetében egyszerűen nincs elég.

Ehelyett Poincaré bevezette, amit a megoldásgörbék *kvalitatív* vizsgálatának nevezett, szemben az általánosan elfogadott kvantitatív vizsgálattal. Analógiát vont az algebrai egyenletek tanulmányozásával: *először* Sturm tételének felhasználásával meghatározzuk a valós gyökök számát; ez a kvalitatív rész. *Ezután* kiszámíthatjuk őket numerikusan — a kvantitatív rész. Hasonlóan történik egy algebrai görbe tanulmányozása: először „konstruáljuk" a görbét, megvizsgáljuk, hogy mely ágak végesek, melyek végtelenek stb.; *ezután* a kvalitatív lépés után pontosan meghatározzuk a görbe néhány pontját. Ugyanez a helyzet a differenciálegyenletek esetében, mondja Poincaré, az első lépés „olyan görbéket konstruálni, amelyeket a differenciálegyenletek határoznak meg" (1881).

Hadamard (1912) azt állítja, hogy kevés, elszigetelt kivételtől eltekintve ez a nézőpont teljesen hiányzott Poincaré elődeinél. Szerinte ennek az az oka, hogy a komplex függvénytan nagy sikere elfordította az analízis híveit a valós tartománytól, míg ugyanakkor „A tudomány fegyvertelenül állt a felmerült kérdések nehézsége előtt, az első eset volt, amikor az analitikus függvények elmélete nem adott egyértelmű megoldást".

Milyen módszereket használt Poincaré? Hadamard kiváló történeti párhuzamot ajánl: az algebrai egyenletek korábbi vizsgálataiban a figyelem az adott egyenlet egyik gyökének megtalálására összpontosult. Az elmélet azonban képes volt továbbhaladni valamilyen empirikus „logikai tökéletesítés" útján, amikor Galois és mások az összes gyököt egyszerre vizsgálták. A gyökök közötti relációk vizsgálata során azután „minden világossá vált". (Az analógia sokkal mélyebbre nyúlik: ahogyan Galois elmélete egy algebrai egyenlet gyökeinek permutációit kutatja, a Lie-elmélet egy differenciálegyenlet megoldásainak szimmetriáit vizsgálja.)

Hasonló a helyzet a differenciálegyenletek esetében: a korai analitikusok, néhány kivételtől eltekintve, izoláltan vizsgálták az egyes megoldásokat. Poincaré volt az, aki szisztematikusan tanulmányozta az összes megoldás közötti relációkat. Mindenekelőtt, ahogy Hadamard mondja, ő jutott arra a döntő felfedezésre, hogy az ismeretlent nem a független változó (a dinamikában az idő), hanem *a kezdeti értékek függvényének tekintette.* A dinamikai rendszer modern matematikai eszméje ennek a nézőpontnak absztrakt formalizációja.

A *dinamikai rendszer* (amelyet mostantól a matematikai értelemben tekintünk) átmeneti definíciója egy (X, φ) pár, amely egy X topológikus térből, az úgynevezett *állapottérből* és leképezések egy $\varphi = \{\varphi_t\}$ együtteséből áll, amelyet dinamikának vagy *folyamnak* nevezünk. Itt a t index végigfutja a pozitív valós számok R^+ halmazát, néha az összes valós számok R halmazát; minden φ_t leképezés X egy nyílt részhalmazát X-be képezi. Ezek az objektumok néhány, később megfogalmazandó axiómának vannak alávetve. A motívum: mi történik $\varphi_t(x)$-szel, amikor $t \to \infty$?

Az n-dimenziós R^n euklideszi térnek egy F vektormezőjéből egy $X=R^n$ állapotterű dinamikai rendszert kapunk az alábbi módon: tegyük fel, hogy F C^1-beli (folytonosan differenciálható), így itt minden

$$dx/dt = F(x), \quad x(0) = v$$

kezdetiérték problémának egyértelmű megoldása van valamely I_v maximális intervallumon, amelyre $I_v=(a, b)$, $a<0<b$. A φ_t leképezés értelmezési tartománya azon v-knek (esetleg üres) halmaza, amelyekre $t\in I_v$, és így definiált:

$$\varphi_t(v) = x(t, v).$$

Általánosabban: F lehet az M sima sokaságon egy vektormező. F-et a lokális koordinátákkal kifejezve és a kapott, R^n-beli differenciálegyenletet megoldva egy olyan dinamikai rendszert nyerünk, amelynek állapottere M.

A klasszikus mechanika jórészt abból áll, hogy Newton törvényeiből és későbbi eredményeiből, mint például az energiamegmaradásból, olyan differenciálegyenleteket vezetünk le, amelyek véges sok szabadsági fokkal rendelkező fizikai rendszerek „mozgástörvényeit" fejezik ki. (A végtelen sok szabadsági fok parciális differenciálegyenletre vezet.) Ezek az egyenletek rendszerint speciális szerkezetűek (szimmetriák, Hamilton-alak, megmaradási tételek), ami elősegíti a megoldások vizsgálatát, ugyanakkor rendkívül kényessé teszik perturbációik tanulmányozását.

Differenciálegyenletekkel kapcsolatban számos szempont merül fel. Poincaré idejéig formulát vagy hatványsort — lehetőleg konvergens hatványsort — kerestünk egy partikuláris megoldásra. Az 1908-as Nemzetközi Kongresszuson tartott előadásában Poincaré a következőket mondta:

> A múltban egy egyenletet csak akkor tekintettünk megoldottnak, ha kifejeztük a megoldást véges sok ismert függvény segítségével; ez azonban száz esetből legfeljebb egyszer lehetséges. Amit mindig megtehetünk, jobban mondva, amit mindig meg kellene tennünk, az a probléma *kvalitatív* megoldása, hogy így mondjam, azaz az ismeretlen függvényhez tartozó görbe általános alakját kell megtalálnunk. Ezután csupán a probléma *kvantitatív* megoldása marad; ha azonban az ismeretlen nem határozható meg véges számítással, még mindig kifejezhető konvergens végtelen sorral, ami lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk. Tekinthető-e ez igazi megoldásnak? Úgy mondják, Newton valami efféle anagrammát küldött Leibniznek: aaaaabbbeeeeii stb. Leibniz természetesen semmit sem értett az egészből, de mi, akiknek rendelkezésére áll az anagramma jelentésének kulcsa, lefordítottuk a mai nyelvre: képes vagyok bármely differenciálegyenlet integrálására; mindez azt sugallja számomra, hogy Newton nagyon szerencsés volt, vagy pedig sajátságos illúziókba ringatta magát. Egyszerűen úgy értette, hogy fel tudott írni egy hatványsort a határozatlan együtthatók módszerének alapján, amely formálisan kielégítette az adott egyenletet.
>
> Ilyen megoldás manapság két okból sem elégít ki bennünket: egyrészt a konvergencia túl lassú, másrészt az egymásutánai együtthatók semmiféle szabályszerűséget sem mutatnak...
>
> Mindazonáltal nincsenek többé megoldott és megoldatlan problémák, csak olyanok, amelyeket *többé-kevésbé* megoldottunk, annak megfelelően, hogy az illető hatványsor többé-kevésbé gyorsan konvergál, vagy tagjai többé-kevésbé harmonikus törvényszerűségnek engedelmeskednek... Néha a hatványsor konvergenciája oly lassú, hogy gyakorlati számításra alkalmatlan és csak a probléma lehetőségét sikerült demonstrálnunk

Mindezt a műszaki ember nevetségesnek tartja és okkal... Őt nem nagyon érdekli, hogy ez hasznára lesz a huszonkettedik század mérnökének; mi azonban másképpen gondolkodunk: néha boldogabbá tesz bennünket, ha egynapi munkát megtakarítunk gyermekeinknek, mint ha egy órát kortársainknak.

Poincaré (1908)

Klasszikus emlékirataiban (1881, 1885) és *„Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste"* (1899) című értekezésében Poincaré kezdeményezte a differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálatát. Sok alapvető eredmény és eljárás felfedezésén túl ő alapozta meg mindazt, ami manapság is fő témája a dinamikai rendszerek elméletének: a stabilitást, a periodicitást és a rekurenciát. A *„Les méthodes nouvelles* alapkérdése, amint az egész égimechanikáé, hogy stabilis-e a Naprendszer — egy minőségi kérdés példája. Egy bolygó és a Nap jelenlétében Newton mozgásegyenleteit nem nehéz explicit módon megoldani: a pályák a kepleri ellipszisek, minden kérdés könynyűszerrel megválaszolható. Két vagy több bolygó esetén a szituáció eléggé homályos. Nagyon keveset tudunk az olyan kérdésekről, mint: összeütközik-e valaha két bolygó? Az egymástól mért távolságuk nulla és végtelen között marad-e? Valószínű-e, hogy egy bolygó kitör a végtelenbe, vagy befogódik a végtelenből? Ha kissé megváltoztatjuk egy bolygó tömegét, hogyan változnak a trajektóriák?

Ezeknek a kérdéseknek egyszerű és precíz matematikai megfelelőjük van a differenciálegyenletek körében. Miközben feleletet próbált adni, Poincaré gyakran találta magát olyan helyzetben, hogy egy eredmény csak bizonyos trajektóriák kivételével volt bizonyítható, amelyek — érzése szerint — teljesen valószínűtlen konfigurációt reprezentáltak; analóg módon azzal, hogy egy véletlenszerűen választott valós szám egész.

A fenti kérdések úgy is interpretálhatók, mint a Naprendszer modellezésére használt differenciálegyenletek kvalitatív problémái. Természetesen a megoldás, feltéve, hogy megtaláljuk, a modell részleteitől függ; Poincaré elég körültekintő volt ahhoz, hogy kiemelje: az égimechanika egyenleteiben elhanyagoljuk az olyan jelenségeket, mint pl. az árapály, amelyek hatása hosszú távon szükségképpen érvényesül (Poincaré (1896)). Tekintet nélkül azonban az eredmények esetleges fizikai jelentőségére, a tisztán matematikai problémák önmagukban is nagy érdeklődésre tarthatnak számot.

Poincaré a leszűkített, síkbeli háromtest-problémára összpontosította erőfeszítéseit, periodikus trajektóriák keresésére, stabilitásuk eldöntésére: egy adott periodikus pályához közeli pálya a jövőben mindvégig közel marad-e?

A probléma megközelítésekor kifejlesztett nagyszerű új módszerek felfedezése közben Poincaré lefektette azokat az alapokat, amelyekből a dinamikai rendszerek elmélete kinőtt. Ez az elmélet nemcsak eljárásokból és tételekből áll, hanem a dolgok egy sajátos szemléletmódjából is. Manapság az egyik elsődleges szempont, hogy a *generikus* viselkedés a fontos. A gondolatnak, amely közvetlenül Poincaré munkásságából származik, két aspektusa is van: egyrészt *elégtelen* (azaz nem elég érdekes) a jelenségek bemutatása, például egy periodikus megoldás, amely annyira speciális természetű, hogy aligha figyelhető meg; másrészt *nem szükséges* a bizonyítás minden elképzelhető, vizsgálat alá vett objektumra (pl. adott rendszer trajektóriáira vagy adott osztály rendszereire); objektumok egy olyan halmaza kizárható, amely nagyon kicsiny valamilyen értelemben (pl. nullmértékű).

Hadamard egy bizonyos — Poincarétól származó —, a trajektóriák „Poisson stabilitásáról" szóló tételre hivatkozva azt írta:

> ... eredménye a korábbiaktól egészen eltérő jelentőséggel bírt. Nem vonatkozik valamennyi trajektóriára, hanem csak *bizonyos kivételes trajektóriák kivételével érvényes.*
> A „kivételes trajektóriák" fogalma itt a valószínűségszámítási szóhasználat szerint értendő: azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen választott trajektória esetén annak valószínűsége, hogy a tétel ellenpéldáját választjuk, *végtelenül kicsi* (és nem csupán nagyon kicsi).
> Más szóval: nem teljesen biztos, hogy egy tetszőleges trajektória rendelkezik a Poisson-stabilitással, de annak az esélye, hogy nem, végtelenül kicsiny.
>
> Hadamard (1912), 270. o.

Az a kérdés, hogy a matematikailag érdekes objektumok milyen halmaza tekinthető „kivételesnek", rendkívül izgalmas. Poincaré kritériuma, a (mai szóhasználattal) nullmértékűség, nyilvánvaló választás, vannak azonban más, természetes lehetőségek. Ha az objektumok valamely topologikus tér elemei, ésszerűnek látszik a sehol sem sűrű halmazokat kivételesnek tekinteni; így az egészek kivételes halmazt alkotnak a valós számhalmazban. Ugyanígy egy Cantor-halmaz is, de egy Cantor-halmaz lehet pozitív mértékű. Tehát a „kivételes" különböző definíciói ellentmondanak egymásnak. Egy egyszerű dinamikai szituációt, amelyben ez az ellentmondás felmerül, a II. fejezet 3. §-ában tárgyalunk.

Poincaré és később Birkhoff is került olyan helyzetbe, amikor intuíciójuk meggyőzte őket arról, hogy azok az ellenpéldák, amelyekre bizonyítani akartak, valóban kivételesek; nem tudták azonban mindezt pontosan formalizálni, és kénytelenek voltak megelégedni véleményük puszta kinyilvánításával. Valamivel később igazolták elvárásaikat: ahogyan Birkhoff érezte, valószínűtlen, hogy egy periodikus pálya stabil és nem stabil sokaságai megegyezhetnek (Birkhoff (1932), 379. o.; l. II. fejezet 4. §). Érdekes, hogy Poincaré egyszerűen figyelmen kívül hagyta ezt a problémát — feltételezte, hogy nem egyeznek meg, és ennek alapján olyan következtetésre jutott, amire a későbbiekben nagymértékben támaszkodott.

Másfelől az intuíció esetenként még Birkhoffot is megcsalta. Sejtése szerint az ergodikus hipotézis érvényes a „legtöbb", két szabadságfokkal rendelkező Hamilton-rendszerre (amelyek a háromdimenziós energiafelületen vett folyamokhoz vezetnek), azaz, egy nullmértékű halmaz kivételével minden ponthoz sűrű pálya tartozik. A „sejtés" szó kissé keveset fejez ki — eléggé magabiztos volt ahhoz, hogy fontos művének, a *„Dynamical systems"*-nek (1927) egy egész fejezetét erre alapozza. Mindennek az ellenkezője jelentkezett a híres Kolmogorov—Arnold—Moser-féle „twist elméletben" (l. pl. Moser (1973)): generikusan (bizonyos topológiai értelemben) az állapottér felbomlik végtelen sok invariáns zárt hiperfelületre, amelyeket a trajektóriák nem keresztezhetnek. (L. J. Moser Birkhoff könyvének 1966-os kiadásához fűzött megjegyzéseit.)

Mostanság a dinamikai rendszerek meglehetősen általánossá váltak a biológia, kémia, közgazdaság és más területek modellezésében. Ezek a rendszerek gyakran egészen eltérőek a fizika legismertebb rendszereitől: alakjuk, például, ritkán hamiltoni, de megvan a saját érdekességük, és kihívó problémákra vezetnek. Kevéssé használhatók előrejelzésre, mint az égimechanika egyenletei, felhasználásuk általában egészen más módon valósul meg. Ahelyett, hogy egy elmélet megjelenési formája lenne, más tudományokban a differenciálegyenletet gyakran ad hoc módon vezetik le, és arra használják, hogy egy elméletet illusztráljanak vagy kipróbáljanak a belőle levonható következtetések alapján. Sokszor a fő konklúzió inkább kvalitatív, mint kvantitatív, de ez semmit sem von le az értékéből.

A trajektóriák kiszámításában és a természeti rendszerek hosszú távú előrejelzésében a differenciálegyenletek elmélete olyan nagy sikert aratott, hogy más módszereket ritkán használunk; a dinamikai rendszerek elmélete látszólag egy ága a differenciálegyenletek elméletének.

Különös, hogy miközben a differenciálegyenletek tantárgyat a legszárazabb „szakácskönyv" stílusban tanítjuk, ugyanakkor az, aki a tárgy mélyére hatol, a legnagyobb dicséretben részesül. Helmholtzra hivatkozva C. C. Gillispie írja (1960):

> ... tárgyalásmódját a fizika lehető legbonyolultabb nyelvén fogalmazta meg, nemcsak Joule nehezen emészthető laboratóriumi méréseinek adathalmazával, nemcsak Mayer primitív numerikus párhuzamaival terhelve, hanem, elegánsan, a klasszikus dinamika differenciálegyenleteivel megtűzdelve.

Einstein (1930) rámutatott, hogy Kepler törvényei:

> a mozgás egészére vonatkoznak, és nem arra a kérdésre, *hogyan indokolja egy rendszer mozgásállapota azt, amely közvetlenül utána következik az időben.* Ezek, mai álláspontunk szerint, az integrál- és nem a differenciálszámítás körébe tartozó kérdések.
> A differenciálszámítás az egyedüli, amely kielégíti a modern fizikus oksági igényét. A differenciálszámítás Newton egyik legnagyobb vívmánya.

René Thom (1975), 4. o. odáig megy, hogy így ír:

> A differenciális modell használatának lehetősége számomra végképp igazolja a kvantitatív modellek tudományokban való felhasználását.

A téma azonban oly kimeríthetetlen és problémái oly elrettentők, hogy a legtapasztaltabb, legnagyobb tudású gyakorlati szakemberek írásaiban is megjelenik időnként egy pesszimista hangvétel. Az 1958-as Nemzetközi Kongresszuson tartott előadásában G. Temple a következőket mondta:

> A problémáknak az a köre, amelyet az alábbiakban kívánok ecsetelni, a tiszta matematika Hamupipőkéje: a differenciálegyenletek tanulmányozása. E témakör féltve őrzött titka, hogy még nem érte el egy tudományág státusát és rangját, élvezi azonban a szabadságot és a frissességet, mint pl. a természettörténet a botanikával szemben. A differenciálegyenleteket hallgató egyetemista — jellemző módon nincs reá külön elnevezés, amely egy sorba állítaná a geométerrel vagy az analitikussal — még mindig ott tart, hogy példányokat gyűjt, szerető gonddal leírja és laboratóriumi körülmények közötti tanulmányozásra alkalmassá teszi őket. Aligha kezdődött meg az osztályozás és a rendszerezés munkája.

Most már csak a *nemlineáris* differenciálegyenletekhez tartozik érdekes dinamika. Ezekre vonatkozóan Temple professzor így folytatja:

> A ritka egyenletek és egzotikus problémák csábító flórája invitál a nemlineáris területre, egy botanikai kirándulásra.

Igaz, hogy az utóbbi három évtized során figyelemreméltó fejlődést értünk el, de miközben a tudományág több „státust és rangot" nyert, távolabb vagyunk, mint valaha, egy egységes megközelítéstől. (Szerintem ez inkább lelkesedésre, mint pesszimizmusra ad okot!) Az irányítási rendszerek elméletének egy mai áttekintésében J. Casti ezt írta:

> Jelenlegi ismereteink arra mutatnak, hogy egy általános elmélet reménye a nemlineáris rendszerek területén a Szent Grál kereséséhez hasonló: ártalmatlan tevékenység sok kellemes meglepetéssel, némi csalódással, de lényegileg kilátástalan. Jóval több haszonnal kecsegtet, ha a nemlineáris problémák speciális osztályaira koncentrálunk, amelyeket rendszerint az alkalmazások motiválnak, és ezek örökletes struktúráját használjuk fel vezérelvként hasznos, azaz alkalmazható eredmények eléréséhez.

Valóban, minden jelenlegi előrehaladás a dinamikai rendszerek elméletében annak tulajdonítható, hogy speciális rendszerek osztályainak belső struktúráját használtuk ki. A III. fejezetben megvizsgálunk néhány nagyfokú strukturáltsággal bíró rendszert, amelyek elemzése jól hasznosítható.

7. Parciális differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek

> Maxwell előtt úgy tekintették a fizikai valóságot — olyannyira, hogy feltételezték: az képviseli a természet jelenségeit —, mint anyagi pontokat, amelyek változásai kizárólag a differenciálegyenletek témakörébe tartozó mozgásokra korlátozódnak. Maxwellt követően úgy gondolták, hogy a fizikai valóság mechanikailag nem magyarázható, folytonos mezőkből áll, amelyek a parciális differenciálegyenletek témakörébe tartoznak. A valóság fogalmának ez a fizikában bekövetkezett változása a legalapvetőbb és leggyümölcsözőbb Newton óta; ugyanakkor észre kell vennünk, hogy a program semmilyen értelemben sincs még kidolgozva.
>
> Albert Einstein (1931)

> ... a Természet és az Okság összehangolásának legfontosabb eszköze egy parciális differenciálegyenlet.
>
> J. Sylvester (1877)

Már Maxwell előtt is — visszamenőleg Eulerig — a parciális differenciálegyenleteket folytonos közeg, mint pl. folyadék vagy rezgő húr mozgásának leírására használták. Az ilyen mozgások a fizikai rendszerek állapotváltozásainak olyan csoportját képezik, amely lényegesen különbözik a részecskerendszerek állapotváltozásaitól: az állapot leírásához nem csupán változók egy véges halmazára, hanem egy függvényre van szükségünk. Egy vasrúd állapotát a hőmérséklet tekintetében egy függvény írja le, amely a rúd minden pontjához a — valamely megfelelő skálán felvett — hőmérsékletét rendeli. Az idő múlásával ez a függvény megváltozik: fizikai elmélet vezet a változást szabályozó matematikai törvényszerűséghez. Megfelelő peremfeltételekkel és függvénytérrel olyan dinamikai rendszerhez jutunk, amelynek állapottere a függvénytér. A dinamikát egy $\partial u/\partial t = F[u]$ alakú differenciálegyenlet fejezi ki, ahol F a függvénytér valamely nemlineáris operátora. Az egyetletben $u = u(x, t)$ jelöli az x koordinátájú pont hőmérsékletét a t időpontban, míg $F[u]$ azt jelenti, hogy az F operátort az $u(., t)$ függvényre alkalmazzuk t rögzítésekor. $\partial u/\partial t$ gyakran csak u értékeitől és x szerinti deriváltjaitól függ, azaz F egy differenciáloperátor.

Tipikus példaként tekintsünk egy számos egyedből álló fajt (pl. baktériumokat), amely egy hosszú, szűk csövet foglal el. A csövet egy zárt $[a, b]$ intervallummal modellezzük. A t időpontban a populáció sűrűsége az intervallum x pontjában $u(x, t)$. Tegyük fel először, hogy a baktériumok nem pusztulnak el és nem szaporodnak, csak egyszerűen vándorolnak az intervallumban, végpontjai érintése nélkül. Az $[x_0, x_0+h]$ belső részintervallumba eső populáció a t időpontban $\int_{x_0}^{x_0+h} u(y, t)dy$. E mennyiség megváltozásának egyetlen módja a végpontokon történő átvándorlás. Rövid időintervallumban csak a végpontokhoz közeli egyedek képesek a végpontokon áthaladni. Ha x_0 szomszédságában több egyed található x_0-tól jobbra, mint balra, világos, hogy a részintervallumból kifelé irányuló vándorlás fog kialakulni; nyilvánvaló továbbá az a feltételezés, hogy az átvándorlás mértéke arányos az u függvény x szerinti gradiensével, azaz $-u_x(x_0, t)$-vel. Hasonlóan, a részintervallumba való bevándorlás aránya a másik végponton keresztül feltehetően $u_x(x_0+h, t)$-vel arányos. Tehát az $[x_0, x_0+h]$ részintervallumbeli teljes populáció megváltozására:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_0+h} u(y, t)\,dy = c(u_x(x_0+h, t)-u_x(x, t)),$$

ahol a c arányossági tényező függhet x-től. h-val osztva és $h\to 0$ esetén a határértékre áttérve:

$$u_t = c(x)u_{xx}$$

a Neumann-féle (vagy „áramlásmentes") peremfeltételekkel:

$$u_x(a) = u_x(b) = 0.$$

Most tegyük fel, hogy minden x pontban van egy belső g növekedési arány, amely csak x-től és az x-beli aktuális populációsűrűségtől függ. Így a vándorlás okozta populációváltozáson felül figyelembe kell vennünk a növekedés miattit. A következő egyenletre jutunk:

$$u_t = cu_{xx}+g(x, u)$$

ugyanolyan áramlásmentes peremfeltételekkel.

Ha a baktériumok nem egy csőben, hanem a tér egy Ω tartományában élnek, hasonló okfejtés vezet az alábbi „reakció-diffúzió" egyenletekhez:

(1) $$u_t = c(x)\Delta u+g(x, u), \quad \partial u/\partial n = 0.$$

Itt Δ a Laplace-operátor: $\sum_{i=1}^{3} (\partial/\partial x_i)^2$, $\partial/\partial n$ pedig az Ω tartomány határán kifelé mutató normálvektor szerinti iránymenti deriváltat jelöli, $x=(x_1, x_2, x_3)$ egy vektor.

Kiterjedt irodalma van az (1)-hez hasonló egyenleteknek. Nincs egyetlen „természetes" függvénytér, de van számos olyan, amelyet különböző célokból megfelelően használhatunk, és amelyekben bizonyítható, hogy (1) megoldásai elegendően erős egzisztencia-, unicitási és folytonossági tételeket elégítenek ki ahhoz, hogy dinamikai rendszert kapjunk. Ha X egy ilyen függvénytér, a $\{\varphi_t\}$ dinamika a következőképpen nyerhető: legyen $u_0 \in X$ adott. Legyen $u(x, t)$ az (1) egyenletek egy olyan megoldása, amelyre $u(x, 0) = u_0(x)$. Ekkor $\varphi_t(u_0)$ az a függvény, amely x-et $u(x, t)$-be viszi:

$$\varphi_t(u_0)(x) = u(x, t).$$

Más szavakkal: minden $t > 0$-ra φ_t az $u(., 0)$ függvényt $u(., t)$-be viszi.

Több, kölcsönható faj modellezhető reakciós-diffúziós egyenletrendszerrel. Feltehetjük, hogy a g növekedési arány u tér szerinti gradiensétől is függ. A továbbiakban érdekes bonyodalmak várják az olvasót.

A III. fejezetben néhány, az (1) egyenletre vonatkozó dinamikai tételt mutatunk be, noha általában nagyon kevéssé ismert a parciális differenciálegyenletek dinamikája. Létezik azonban egy módszer, amely sok alkalmazásban hasznos információt szolgáltat. Gyakori eset, hogy az X függvénytérbeli dinamikai rendszer tartalmaz egy sima, *véges dimenziós* részrendszert, azaz egy véges dimenziós $M \subset X$ sokaságot, amely invariáns a dinamikára. Továbbá, az M sokaság gyakorta attraktor (l. II.1.§) és tudjuk róla, hogy periodikus pályákat vagy más érdekes dinamikai jelenségeket tartalmaz. Ilyen esetben a közönséges differenciálegyenletek dinamikájának leginkább hozzáférhető módszerei és eredményei alkalmazhatók a részrendszerre. Ennek a fontos technikának az alkalmazásaira nézve l. pl. D. Ruelle és F. Takens (1971), J. Marsden és M. McCracken (1976), valamint J. Guckenheimer és P. H. Holmes (1983) munkáit.

II. FEJEZET. KONVERGENCIA, KÁOSZ ÉS STABILITÁS

> A Poincarétól származó differenciálegyenletek kvalitatív elméletének a fejlődése elvezetett egy olyan felismeréshez, ami hasonló ahhoz a tényhez, hogy a differenciálegyenletek explicit integrálása általában nem lehetséges.
> Mégpedig: egy többdimenziós fázisterű általános differenciálegyenlet teljes kvalitatív vizsgálatáról is kiderült, hogy nem lehetséges.
>
> V. Arnold (1983)

> Több mint 10 évvel ezelőtt fogalmaztam meg az alábbi feladatot: határozzuk meg a Dyn (M) tér egy olyan nyílt, sűrű U részhalmazát (vagy legalább is U legyen Baire-halmaz) úgy, hogy az U minden eleme kvalitatívan leírható legyen valamilyen diszkrét numerikus vagy algebrai invariáns segítségével. ... A feladat ilyenforma megfogalmazása túlságosan leegyszerűsített, túl durva. Most úgy hiszem, hogy a dinamikai rendszerek fő problémáit nem lehet ilyen elegánsan rendszerezni.
>
> S. Smale (1969

A dinamikai rendszerek matematikai elméletének fejlődésében egyidejűleg figyelhető meg két kutatási irányvonal: egyik oldalról az *egyszerűség,* érthetőség, stabilitás keresése, míg másik oldalról a *komplexitás,* bonyolultság, instabilitás és a káosz feltárása. Amikor új összetett, bonyolult dolgokat fedezünk fel, megpróbáljuk azokat analizálva, osztályokba sorolva megszelídíteni. Ez a vállalkozás néhány említésre méltó, sőt látványos sikerrel is járt, de mivel a többi tudomány halad előre és mind növekvő mértékben használják a dinamikai rendszereket, jelenleg el vagyunk árasztva különböző területekről származó érdekes rendszerekkel, melyekről vajmi kevés állítás bizonyított. R. Abraham megfogalmazása, amit ő yin-yang problémának nevez, még érvényes:

> Ismert általános tulajdonságokkal rendelkező differenciálegyenleteknek néhány nagy (yin) halmaza, szintén ismert néhány kis (yang) halmaz, melyet tudunk osztályozni, de általában véve ezen két tartomány még nem találkozott egymással.
>
> (1969)

A dinamikai rendszerek elméletének fő célja hasznos utakat találni az alábbi kérdés megválaszolására: Mi történik hosszú idő elmúltával? Ebben a fejezetben először megadjuk az ezen kérdés megvitatásához szükséges precíz terminológiát — a topológiai dinamika nyelvezetét (folyamok, egyensúlyi helyzetek, periodikus pályák, határhalmazok). Majd néhány kiemelkedő eredmény következik a felületeken tekintett folyamok nagyon sikeres elméletéből (egy olyan helyről, ahol yin=yang). Végül egy rövid ismertetés a kaotikus viselkedés egyik legfontosabb forrásáról — a homoklinikus pontokról. (A III. fejezethez csak az első pont ismerete szükséges.)

1. Folyamok

> Klasszikus értelemben egy dinamikai rendszer egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amely kielégít valamilyen, a megoldások egyértelműségét és folytonosságát biztosító elégséges feltételt. Mint ilyen, a dinamikai rendszer meghatároz egy (egyparaméteres vagy folytonos) folyamot a térben. Poincaré ideje óta a klasszikus dinamikában fontos folyamokra nagyszámú eredmény született, anélkül, hogy utaltak volna arra a tényre, miszerint a folyamok a differenciálegyenletekből keletkeztek.
>
> W. Gottschalk, G. Hedlund (1955)

A *dinamikai rendszer* egy (X, φ) pár, ahol X topologikus tér, $\varphi=\{\varphi_t\}_{t\in R_+}$ leképezéscsalád, az indexek a nem negatív valós számok R_+ halmazából valók. Az X *fázistérről* feltesszük, hogy Hausdorff; X általában egy sokaság vagy valamilyen topologikus vektortér egy nyílt részhalmaza.

A *dinamika* vagy a φ *folyam* folytonos $\varphi_t\colon X_t\to X$ leképezésekből áll, ahol mindegyik X_t tartomány az X egy nyílt (lehet, hogy üres) részhalmaza. Ezek a leképezések kielégítik a következő két feltételt:

1. *Folytonosság.* Az

$$X^\# = \{(t, x)\in R_+\times X\colon\ x\in X_t\}$$

halmaz nyílt az $R_+\times X$-ben, és a

$$\varphi\colon X^\# \to X,\quad (t, x)\to \varphi_t x$$

leképezés folytonos.

2. *Determinizmus.* Minden $x\in X$-re az

$$I(x) = \{t\in R_+\colon x\in X_t\}$$

halmaz egy egyik oldalról nyílt intervallum $I(x)=[0, \tau_x)$, $0<\tau_x\leqq\infty$. Ha $t\in I(x)$ és $s\in I(\varphi_t x)$, akkor $s+t\in I(x)$ és

$$\varphi_s\varphi_t x = \varphi_{s+t}x,$$

míg

$$\varphi_0 x = x, \quad \text{minden} \quad x\in X\text{-re}.$$

Gyakran előfordul, hogy a τ_x *eltűnési idő* ∞ minden x-re, ennek a bizonyítása azonban igen bonyolult is lehet. Egy ilyen rendszert *teljesnek* hívnak. A φ dinamikát (vagy a $\varphi_\#$ leképezést) folyamnak nevezzük (pontosabban lokális félfolyamnak). Ahol φ értelmezve van, írhatjuk $\varphi_t x=x(t)$. Az $I(x)\to X$, $t\to x(t)$ leképezés az $x\in X$ pont *trajektóriája*. A trajektória képe az $O(x)$ *pálya*, az $O(x)$ *pálya lezárása* $\bar{O}(x)$.

Könnyen igazolható, ha $\bar{O}(x)$ kompakt, akkor az x trajektóriája *teljes*, vagyis $\tau_x=\infty$.

A trajektória hosszú távú (időben) viselkedését szokásos a *határhalmaz* (vagy *omega határhalmaz*)

$$\omega(x) = \bigcap_{t\in I(x)} \bar{O}(x(t))$$

segítségével tanulmányozni.

Így

$$y\in\omega(x) \Leftrightarrow y = \lim_{k\to\infty} x(t_k)$$

valamely $\{t_k\}_{k\in Z_+}$ $I(x)$-ben levő τ_x-hez tartó sorozatra.

Szintén érdekes, habár elsősorban technikai okokból az $\alpha(x)$ *alfa határhalmaz*, amely azon y pontokat tartalmazza, melyek előállnak, mint egy olyan $\{y_k\}$ sorozat X-beli határértékei, ahol létezik egy olyan $t_k\to\infty$ sorozat az R_+-ban, hogy $t_k\in I(y_k)$ és $y_k(t_k)=x$.

Némely folyamok (általában azok, melyek közönséges differenciálegyenletekből származtathatók) *reverzíbilisek* (megfordíthatók): minden φ_t az X_t-t homeomorf módon „ra" képezi egy nyílt halmazra. Ebben az esetben legyen $X_{-t}=\varphi_t(X_t)$ $t>0$-ra és definíció szerint

$$\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}\colon X_{-t} \to X.$$

Evvel a módszerrel kiterjesztettük a dinamikát a $t\in R$-ből indexelt (φ_t) leképezések halmazára. A kapott folyam kielégíti a folytonosságnak és determinisztikusságnak megfelelő axiómákat. Többek között minden x-re azon $t\in R$-ek halmaza, melyekre $x\in X_t$ egy origó körüli nyílt intervallum. Ha φ reverzíbilis, akkor *az idő megfordításával* egy ψ új folyamot nyerünk, $\psi_t=\varphi_{-t}$. Ezeknek a folyamoknak ugyanazok az egyensúlyi helyzetei és a periodikus pályái és az egyik omega határhalmazai a másik alfa határhalmazai.

Azt mondjuk, hogy egy x pont (vagy a belőle induló pálya) *vonzódik* a K halmazhoz vagy *tart* a K halmazhoz, ha $\bar{O}(x)$ kompakt és $\omega(x)\subset K$. Ez azt jelenti, hogy a K halmaz egy tetszőleges környezetében benne marad az x trajektóriájának egy elég nagy időpillanattól kezdődő része. Azt is mondjuk, hogy az S halmaz vonzódik a K-hoz, ha minden s pontja tart a K-hoz.

Most elkezdhetjük megvitatni a trajektóriák hosszú távú viselkedését, azaz a határhalmazokat és az utat, ahogy a trajektóriák elérik őket.

A legegyszerűbb eset a *stacionárius pont* vagy *egyensúlyi helyzet*: ekkor $x(t)=x$ minden $t\in I(x)$-re. A folytonossági, illetve a determinisztikussági axiómákból következik, hogy $I(x)=[0, \infty)$. Az egyensúlyi helyzetre más elnevezések is használatosak, így a „nyugvó pont”, illetve különösen a vektormezők által generált folyamok esetén a „szinguláris pont” (a „kritikus pont” elnevezés használata nem szerencsés, ezt célszerű korlátozni a fogalom szokásos használatára, vagyis olyan pont jelölésére, ahol egy függvény differenciálja eltűnik). Az egyensúlyi helyzetek halmazát mindig E-vel jelöljük. E az X egy zárt részhalmaza.

A legegyszerűbb határviselkedés egy x nemstacionárius pontra az, hogy az x pont tart egy p egyensúlyi helyzethez. Az ilyen x pontokat *konvergenseknek* nevezzük.

Ha x tart az egyensúlyi helyzetek E halmazához, akkor x-et *kvázikonvergensnek* nevezem. A gyakorlatban (azaz numerikus kísérletek során) nehéz megkülönböztetni az ilyen pályákat a konvergensektől. Továbbá, ha E teljesen nem összefüggő (pl. amikor X metrizálható és E megszámlálható), akkor a kvázikonvergenciából következik a konvergencia, mivel $\omega(x)$ mindig összefüggő, amikor $\bar{O}(x)$ kompakt.

Az x pontot *periodikusnak* nevezzük, ha létezik olyan $T>0$, hogy $x(T)=x$. Ekkor $x(t+T)=x(t)$ minden $t\geqq 0$-ra. Ebben az esetben az $O(x)$ pályát *zárt* vagy *periodikus pályának* nevezzük. Egy periodikus pályát, amelyik nem stacionárius pont, *ciklusnak* hívunk.

A periodicitás mindig elbűvölte (mondhatni, megszállottá tette) a dinamikával foglalkozókat. Poincaré az égi mechanikával foglalkozó híres értekezésének nagyobb részét annak szentelte, hogy bebizonyítsa a háromtest-probléma esetére végtelen sok periodikus megoldás létezését. Ebben a nehéz problémában Poincaré az egyetlen kiindulópontnak tekintette ezeket a megoldásokat:

> Az, ami ezeket a periodikus megoldásokat számunkra oly értékessé teszi az, hogy ők, úgyszólván, az egyetlen rés, melyen keresztül megpróbálhatunk bejutni egy mindeddig megközelíthetetlennek tartott helyre.
> Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste.
> Vol. 1. 82. 5.

Birkhoff (1920) felvetette a periodicitás pszichológiai szükségszerűségét:

> Ősidők óta az emberi értelem arra törekedett, hogy a csillagok mozgásának tulajdonságait ismétlődéssel (periodicitással) jellemezze. Kétségesnek tűnik, hogy bármely más leírási mód lehetséges lenne. Mindezek intuitív alapja könnyen kifejezhető: egy dinamikai rendszer minden mozgása az idő múlásának egy jellegzetes ciklikus viselkedéshez kell tartson.

Az utóbbi állítás sok rendszerre igaz, de hamis, ha szó szerint értelmezzük (még a Hamilton-rendszerekre is, melyekre Birkhoff gondolt). Ennek ellenére ez kifejezi az egyik legalapvetőbb intuiciónkat a rendszerek hosszú távú viselkedéséről. A dinamika teljes fejlődését tekinthetjük egy kísérletnek ezen állítás bizonyítására.

Amellett, hogy megkérdezhetjük „Hová tart egy adott trajektória?”, feltehetjük azt a kérdést is, „Milyen trajektóriák tartanak egy adott halmazhoz?”. Különösen érdekes az *attraktor* esete. Attraktornak nevezünk egy nem üres kompakt K halmazt, amely valamely N környezetét vonzza saját magához. Feltesszük azt is, hogy K *invariáns*, azaz minden pontjának pályáját is tartalmazza. Az N környezetet is választhatjuk mindig invariánsnak, egyszerűen felcserélve az összes pontján átmenő pálya uniójával. A legnagyobb ilyen N halmazt — az összes K-hoz tartó pontok halmazát — K (attraktor) *medencéjének* nevezzük.

Amennyire számomra ismert, az attraktor fogalma először a 60-as években Thom és Smale munkáiban jelent meg. Thom az attraktoroknak mint tudományos modelleknek alapvető jelentőséget tulajdonít:

> Minden objektum vagy fizikai forma szemléltethető, mint egy a belső változók M terén megadott dinamikai rendszer C *attraktora.*
> Structural stability and morphogenesis (1975) 320. o.

(Néhány szerző, közéjük tartozik Thom is, az attraktor belső struktúrájától többet követel meg. Például egy attraktor bizonyos pályák lezártja kell legyen, de ebben a dolgozatban elegendő az általánosabb definíció.)

Az attraktor rendelkezik egyfajta stabilitással: bármely, a közeléből induló trajektória elvándorolhat, de végül is visszatér és aszimptotikusan tart az attraktorhoz. Egy másfajta stabilis halmaz az *orbitálisan stabilis:* K kompakt nem üres invariáns halmaz orbitálisan stabilis, ha van tetszőleges kicsiny invariáns környezete. Például az egyszerű harmonikus rezgőmozgás esetén (melyet most egy síkbeli folyamnak tekintünk) minden pálya orbitálisan stabilis, de egyik sem attraktor.

Egy olyan halmazt, amely orbitálisan stabilis és attraktor, *aszimptotikusan stabilisnak* nevezünk.

Különösen érdekesek az aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzetek, melyeket *nyelőknek* nevezünk, illetve a néha *határciklusoknak* nevezett aszimptotikusan stabilis ciklusok. A stabilitási dogma szerint ezek az egyetlen fizikailag értelmes, megfigyelhető periodikus pályák.

Az egyensúlyi helyzetek nyelőkkel szembeni másik végletét *forrásoknak* nevezzük. Ezeket általában csak a reverzíbilis folyamokra definiáljuk: p forrás, ha p a fordított idejű folyamra nyelő. Így p-nek van egy olyan N környezete, hogy az $N \setminus p$-ből induló összes pálya végül elhagyja N-t és oda soha vissza nem tér.

A „különös attraktor" egy pontatlan, de jelenleg igen divatos, elnevezése az olyan attraktoroknak, melyek se nem nyelők, se nem határciklusok. Általában felteszik róluk, hogy van bizonyos belső struktúrájuk (pl. a ciklusok sűrűek) és strukturálisan stabilisak. A dinamikai rendszerek új korszakának kezdete óta (kb. 20 éve) az ilyen attraktorokat a szakemberek jól ismerik és nem tekintik őket jobban „különös"-nek, mint a képzetes számokat „képzetes"-nek. Az ilyen attraktorok közül néhány legérdekesebbet Smale alkotott meg (1967, 1980).

Más tudományterületek kutatói azonban továbbra is valamilyen egzotikus dolognak tekintik a különös attraktorokat, talán azért, mert ellentmondanak a természetes elvárásnak, miszerint minden rendszer tart egy „jellegzetes ciklikus viselkedéshez". Valójában rendkívül nehéz eldönteni, akár elméletileg, akár gyakorlatilag azt, hogy egy konkrét rendszernek van-e különös attraktora. A különös attraktorral rendelkező rendszereket gyakran kaotikusnak nevezik, az igaz is, hogy az egyes trajektóriák gyakran véletlen eloszlásúnak tűnnek. Az utóbbi időben J. Guckenheimer (1976, 1982, 1983) vizsgálataiban megpróbált különbséget tenni a determinisztikus és a sztochasztikus viselkedés között az idősorok megfigyelése alapján.

D. Ruelle és F. Takens (1971) alapvető jelentőségű és vitatott dolgozatukban azt sugallták, hogy a különös attraktorok jelenléte jellemzi a turbulens hidrodinamikát.

2. Vektormezők és diffeomorfizmusok

Newton alapvető felfedezése, az, amelyet szükségesnek látott titokban tartani és csak anagramma formában közölt:
Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa. A modern matematika nyelvére lefordítva ez a következőket jelenti: „Hasznos differenciálegyenleteket megoldani".

V. Arnold (1983)

Két differenciálegyenlet *ekvivalenciája* (vagy topologikus ekvivalenciája) egy a trajektóriákat (vagy a pályákat) megőrző homeomorfizmus. A differenciálegyenletek kvalitatív elméletének feladata ismereteket elérni egy adott sokaságon tekintett differenciálegyenletek ekvivalenciaosztályairól.

S. Smale (1962)

Legyen $X \subset R^n$ egy nem üres nyílt halmaz és legyen $F=(F_1, \ldots, F_n)$: $X \to R^n$ egy C^1 (folytonosan differenciálható) vektormező.

Minden $x \in X$-re legyen $I(x)=[0, \tau_x)$ a fenti *kezdeti érték probléma u* megoldásának maximális intervalluma, így

$$u\colon I(x) \to X,$$

(1a)
$$du/dt = F(u),$$

(1b)
$$u(0) = x.$$

A $\varphi_t(x)=u(t)$ választással, egy az X-en reverzíbilis folyamot kapunk; a folytonosság, illetve a determinizmus axiómái a közönséges differenciálegyenletek elméletének standard tételei. A megoldások egyértelműségéből következik, hogy x pontosan akkor stacionárius pont, amikor $F(x)=0$.

Ha $\bar{O}(x)$ kompakt (X-ben), akkor x pontosan akkor kvázikonvergens, amikor $F(x(t)) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Most legyen F egy C^1 vektormező egy (véges dimenziós) M sokaságon és tegyük fel, hogy $F(x)$ érinti a ∂M határt, amikor $x \in \partial M$. M-ben egy reverzíbilis folyamot kapunk, ha a lokális koordinátákban megoldjuk az F által megadott differenciálegyenletet. Ha M kompakt, akkor a folyam teljes. Az ilyen folyamokat *simának* nevezem. (Ha az előbbiek helyett azt tesszük fel, hogy $F(x)$ transzverzális ∂M-re és M-be befelé mutat $x \in \partial M$-re, akkor F egy nem reverzíbilis folyamot határoz meg, ha $\partial M \neq \emptyset$.)

Közvetlenül a vektormezőből nem könnyű meghatározni a dinamikus viselkedést. Azon kevés dolgok egyike, melyet így meg tudunk határozni az esetek többségében — az egyensúlyi helyzetek jellege. Itt a következő tétel alapvető jelentőségű:

TÉTEL. Legyen $p \in M$ az M-en megadott F C^1 vektormező egyensúlyi helyzete. Legyen $\Sigma \subset C$ az M_p érintőtéren ható $DF(p)$ lineáris operátor spektruma.

Akkor

(a) Ha p orbitálisan stabilis vagy attraktor, akkor $\mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0$, ha $\lambda \in \Sigma$;

(b) Ha $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ minden $\lambda \in \Sigma$, akkor p nyelő;

(c) Ha $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ minden $\lambda \in \Sigma$, akkor p forrás.

A p egyensúlyi helyzetek egy fontos típusára $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ minden $\lambda \in \Sigma$ esetén. Ebben az esetben p-t hiperbolikusnak nevezzük. Az eset jelentősége abban áll, hogy a lokális dinamika p közelében nagyon egyszerű, topologikusan ekvivalens két lineáris az origóban a (b), illetve (c) feltételeket kielégítő folyam Descartes szorzatával.

Ha $0 \notin \Sigma$, akkor p-t *egyszerűnek* nevezzük. Az egyszerű egyensúlyi helyzet izolált. Egy *nemautonóm* differenciálegyenlet

$$du/dt = G(t, u), \tag{2}$$

ahol G: $R \times X \to R^n$, $G \in C^1$ szintén egy folyamhoz vezet, de a fázistér nem X, hanem $R \times X$. Ezt a folyamot származtathatjuk a

$$\frac{ds}{dt} = 1, \tag{3a}$$

$$\frac{du}{dt} = G(s, u) \tag{3b}$$

autonóm rendszerből.

A (3a), (3b) által $R \times X$-en megadott folyam nyilvánvalóan

$$\varphi_t(s, x) = \big(t+s, \psi(t, s, x)\big) \tag{4}$$

alakú.

Akkor bármely $(t_0, x_0) \in R \times X$-re (2) $u(t_0) = x_0$ feltételt kielégítő megoldása

$$t \mapsto \Psi\big(t-t_0, t_0, x_0\big),$$

amely értelmezett valamely t_0-t tartalmazó nyílt intervallumon. Itt is lehet M egy tetszőleges sima sokaság, akkor $G: R \times M \to TM$ egy egyparaméteres vektormező-család az M-en (egy „idő függő vektormező").

Egy fontos speciális eset a *gerjesztett rezgéseké,* amikor $G(t, x)$ t-ben periodikus, a periódus legyen $T > 0$:

$$G(t+T, x) = G(t, x).$$

Ebben az esetben (3a), (3b)-t tekinthetjük az $S^1 \times M$-en megadott vektormezőnek, ahol S^1 az R/TZ kör, (4) pedig meghatároz egy folyamot az $S^1 \times M$-en.

A sima folyamok egy másik fontos származtatási módja a *szuszpenzió.* Induljunk ki az Y kompakt sokaság h: $Y \to Y$ diffeomorfizmusából. Legyen Y_h az $Y \times R$ tér ellátva az $(y, s) \sim \big(f^n(y), s-n\big)$ ekvivalenciarelációval.

Más szavakkal Y_h az $(y, s) \to \big(f(y), s-1\big)$ formulával generált Z $Y \times R$-re való hatásának pályatere. (Topologikusan X egy nyaláb az S^1-en, Y szállal.) Az Y_h-n egy $\{\varphi_t\}_{t \in R}$ sima folyamot kapunk $\varphi_t(y, s) = [y, s+t]$ választással, ahol $[y, s] \in Y_h$ az $(y, s) \in Y \times R$ ekvivalenciaosztályt jelöli. Az így generált vektormező a $0 \times \partial/\partial t$ felemelése az $Y \times R$-re.

A folyam tulajdonságai természetes módon megfelelnek a diffeomorfizmus tulajdonságainak. Például $[y, s]$ egy $n \in Z_+$ periódusú zárt pályán van, akkor és csak akkor, ha $h^n(y) = y$.

Ez a szuszpenzió konstrukció két irányban is fontos. Először, sok sima folyamnak van egy *globális Y metszete,* azaz egy kompakt Y hiperfelülete, melyet minden pálya végtelen sokszor metsz át és transzverzális a definiáló vektormezőre. A h: $Y \to Y$ „első visszatérés leképezése" (amelyet a pályákat követve kapunk) esetére a szuszpenzió egy ugyanolyan pályastruktúrájú folyamot ad meg (figyelmen kívül hagyva a paraméterezést), mint az eredeti folyam. Más részről sok érdekes példát kaphatunk a folyamokra szuszpenzió segítségével.

Egy például szolgálhat szuszpenzióra a (4) folyam az $S^1 \times M$-en, melyet az időben periodikus $G(t, x)$ vektormező határoz meg az M kompakt sokaságon. Mint korábban, feltesszük $G(t+T, x) \equiv G(t, x)$ és $S^1 = R/TZ$. Minden $p \in S^1$-re a $\{p\} \times M$ globális metszete a folyamnak. Az M megfelelő h homeomorfizmusa $h(x) = \psi(T, 0, x)$. Ez a (4) folyam T-idő leképezése leszorítva a $\{p\} \times M$-re. h szuszpenziója pontosan megegyezik (4)-gyel, ha $T=1$.

A szoros kapcsolat, ami összefűzi az időben periodikus vektormezőket, a globális metszeteket és a diffeomorfizmusokat ösztönzőleg hatott az ún. diszkrét dinamikai rendszerek vagy diffeomorfizmusok hatalmas elméletének kialakulására. Az egész témakör kutatását Poincaré kezdte meg égi mechanikai vizsgálataival. A differenciálegyenletekre való alkalmazásuk mellett

> van egy másik és fontosabb ok, amiért tanulmányozzuk a diffeomorfizmus (konjugált) problémát (és persze nagy természetes szépségük miatt is). Az, hogy a közönséges differenciálegyenletek kvalitatív elméletének jelenségei és problémái legegyszerűbb formájukban mint diffeomorfizmus feladatok jelennek meg.
> Ha először a diffeomorfizmusok esetére találunk tételeket, akkor általában már egy másodrendű feladat visszafordítani az eredményeket a differenciálegyenletekre.
>
> S. Smale (1967) 747. o.

3. Felületi folyamok: stabilitás az elfajulás ellen

> Egy rendszer, amelyből teljesen hiányzik a stabilitás, a valóság gyenge modellje lenne, mivel a valóság mindig csak valami közelítése annak, amit mi gondolunk róla. Így valamilyen fajta stabilitás feltétlenül szükséges.
>
> R. Williams (1983)

> ... az a durva feltevés, hogy minden dinamikai rendszer periodikus vagy ahhoz közeli, ellenállhatatlannak tűnik az emberi gondolkodás számára.
>
> G. Birkhoff (1941)

Az általánosság különböző fokozatain merülnek fel a hosszú távú viselkedés kérdései. A körülményektől és a hagyományoktól függően több vagy kevesebb precizitást, illetve részletet követelhetnek meg. Míg az egyes pályák közelítőleg nagy pontossággal kiszámíthatók, addig ugyanezt az eljárást már nem egykönnyen lehet alkalmazni olyan, a rendszer globális felépítésére vonatkozó kérdésekre, mint: Konvergál-e a legtöbb pálya? Sűrűek-e a ciklusok? A közeli rendszerek viselkedése hasonló-e?

Kétfajta *stabilitásnak* van különösen nagy jelentősége a differenciálegyenletek alkalmazásaiban: stabilitás a kezdeti értékek megváltozására rögzített egyenlet esetén és magának az egyenletnek a perturbációjára való stabilitás. A „tartós" vagy „durva" kifejezések ezt a második fajta stabilitást jelentik.

Tegyük fel például, hogy feladatunk az (X, φ) rendszer egyensúlyi helyzeteinek megkeresése. Tekintve egy p egyensúlyi helyzetet, az első stabilitási kérdés az, hogy p orbitálisan (vagy jobban aszimptotikusan) stabilis-e. A második kérdés az, vajon p megmarad-e, azaz minden olyan rendszerre, melynek X a fázistere és a folyama elegendőn „közeli" φ-hez létezik egyensúlyi helyzet p bármelyik adott környezetében.

Természetesen a „közeli" szó jelentését a vizsgált folyamok halmazának megfelelő topológiájával precízzé kell tenni.

Egy az M-en C^1-típusú F vektormező által megadott folyam esetére, a természetes topológia az M-en megadott C^1 vektormezők $V(M)$ halmazán indukált C^1 gyenge topológia. Ebben a topológiában a vektor-mezők egy sorozata pontosan akkor konvergál, ha minden koordináta-rendszerben a vektormezők és a deriváltjuknak sorozata egyenletesen konvergál a kompakt halmazokban. (De sok olyan érdekes feladat van, mikor többszöri deriválhatóság szükséges, ilyenkor a megfelelő topológiának figyelembe kell vennie a magasabb deriváltakat is).

A vektormezők C^1 kicsi perturbációja esetén a p szinguláris pont megmaradásának kérdése lokális koordinátákban az $F(x)=0$ egyenlet — ahol $F\colon W\to R^n$ a vektormezőt a $W\subset R^n$ nyílt halmazon megadó C^1 leképezés — gyökének megmaradásához vezet. Egy jól ismert elégséges (de nem szükséges) feltétele ennek, hogy a $DF(p)$ lineáris operátornak létezzék inverze. Így ugyanaz a hármas feltétel, amelyik garantálta p aszimptotikus stabilitását — azaz a $DF(p)$ spektruma a bal oldali félsíkon fekszik —, szintén biztosítja p megmaradását.

Minekutána megértettük azt a szigorú tényt, hogy mi sohasem ismerjük se a dinamikát, se a kezdeti értékeket hiba nélkül, olyan jellegű eredményeket próbálunk keresni, melyek *általánosak* (tipikusak) abban az értelemben, hogy fennállnak a rendszerek többségére és egy adott rendszer kezdeti értékeinek többségére. E célból vezette be Andronov és Pontrjagin (1937) a strukturális stabilitás fogalmát. Egy M kompakt sokaságon megadott F C^1 vektormező (vagy az általa definiált folyam) strukturálisan stabilis, feltéve, ha F-nek van egy olyan $\mathscr{V}$ környezete a $V(M)$-ben, melyre, ha $G\in\mathscr{V}$, akkor az M valamely h_G homeomorfizmusa a G minden pályáját átviszi az F pályáira és midőn G tart F-hez a $V(M)$-ben, akkor h_G tart az M identitás leképezéséhez a kompakt nyílt $(=C^0)$ topológiában.

Világos, hogy egy ilyen F-nek pontosan ugyanazok a dinamikus tulajdonságai, mint bármely G-nek a $\mathscr{V}$ környezetben. Minden M kompakt felület esetén kiderül, hogy a strukturálisan stabilis mezők halmaza nemcsak nyílt és sűrű a $V(M)$-ben, de ezeket a mezőket nagyon egyszerű dinamikák segítségével jellemezhetjük.

Valóban, az alábbi három feltétel együtt ekvivalens egy M kompakt felületen* megadott F C^1 vektormező strukturális stabilitásával:

(a) Ha p egyensúlyi helyzet, akkor $DF(p)$-nek nincsen sajátértéke a képzetes tengelyen;

(b) Ha p egy $T>0$ periódusú cikluson fekszik, akkor $D\varphi_T(p)$ spektrumából az 1, egyszeres sajátértéken kívül nincs pont az egységkörön;

(c) Semmilyen pálya nem köt össze nyereg-típusú egyensúlyi helyzeteket. Azaz, ha $\alpha(x)=p$ és $\omega(x)=q$, akkor vagy p egy forrás, vagy q egy nyelő.

Ez az „Általános sűrűségi tétel" Peixoto-tól (1962) származik. Továbbá igaz az is, hogy csak véges sok zárt pályája van az ilyen rendszereknek.

Léteznek természetesen, strukturálisan nem stabilis felületi vektormezők, melyek különleges, egzotikus határviselkedéssel rendelkezhetnek. Például tekintsük a T^2 tóruszt (R^2/Z^2). Tetszőleges $\alpha\in R$-re legyen F_α az R^2-en megadott $(1,\alpha)$ állandó vektormezőnek megfelelő mező a T^2 tóruszon. Ha α racionális, akkor F minden pályája periodikus, α nevezőjével megegyező periódussal. Ha α irracionális, akkor

* Itt a felületen kétdimenziós felületet értünk. (A ford. megj.)

minden pálya sűrű T^2-ben. Ezek az F_α vektormezők azonban teljesen kivételesek a $V(T^2)$ mezők között, és nem olyan a viselkedésük, ami a strukturálisan stabilis mezők sűrű (és nyílt) halmazát jellemzi.

Még rosszabb (azaz még érdekesebb) lehet a helyzet a C^1, de nem C^2 vektormezők esetén. A. Denjoy (1932) megalkotott egy ilyen vektormezőt (a kör egy C^1 diffeomorfizmusának szuszpenziójával), melynek nincsenek periodikus pályái és minden trajektória tart egy bizonyos furcsa, sehol se sűrű kontinuumhoz. Míg ez az eset nem fordulhat elő C^2 mezőkre, amint azt Poincaré igazolta, T. M. Cherry (1938) kimutatta, hogy léteznek olyan valós analitikus (sőt algebrai) vektormezők a tóruszon, melyekre egyes pályák határhalmaza különleges, izolált egyensúlyi helyzeteket is tartalmaz.

A felületi folyamatok mindezen viselkedését tekinthetjük patalogikusnak az Általános Sűrűségi Tétel fényében, a vektormező tetszőlegesen kicsi C^1 perturbációjának hatására eltűnnek, míg azok a mezők, melyeknek nincs ilyen viselkedésük, egy egész hasonló környezettel rendelkeznek. Így a tipikusság szempontjából csak strukturálisan stabilis vektormezőket kell vizsgálnunk. ezeket pedig egyszerű dinamikák jellemzik. A kompakt sokaságon megadott különböző dinamikai típusú strukturálisan stabilis vektormezők felsorolása egy megoldható topológiai-kombinatorikai feladatnak tűnik — habár én nem tudom, hogy ez megtörtént-e már.

Azonban a tipikusság szempontja nem az egyetlen lehetséges. A gyakorlatban minduntalan *korlátozott osztályból* levő vektormezőkkel kell foglalkoznunk, mely esetben nem engedhetünk meg tetszőleges perturbációt, csak az adott osztályban levőt. Ez a követelés azonban megakadályozza az általános sűrűségi tétel alkalmazását; ténylegesen az egész osztály állhat olyan rendszerekből, melyek a tipikusság szempontjából patalogikusak.

Például tegyük fel, hogy a tóruszon csak a területtartó egyensúlyi helyzet nélküli folyamokat tekintjük. Egy ilyen folyam nem lehet strukturálisan stabilis, ismert, hogy vagy minden pálya sűrű, vagy minden pálya periodikus. A korábban megtárgyalt F_α lineáris vektormezők mutatják, hogy a területmegőrző folyamok ezen osztályán nem létezik valamilyen ésszerű dinamikai stabilitáskoncepció. Ehelyett viszont sokkal finomabb kérdések merülnek fel, például egy olyan diffeomorfizmus létezésének kérdése, mely folyamunk pályáit ráképezi valamely F_α pályáira.

A strukturálisan stabilis rendszerek sűrűségével kapcsolatban egy másfajta fenntartást vetett fel V. Arnold (1983), 108. o. Ez a „tipikusság" jelentését érinti. A tipikus tulajdonság egyik elfogadható, magától értetődő definíciója (pl. mondjuk egy sokaságon megadott C^1 vektormező esetére) az, amelyik igaz a mezők egy nyílt, mindenütt sűrű halmazának minden elemére. De gyakran találkozunk a mezők egy véges dimenziós családjával, például egy K-dimenziós egységkockával parametrizálva. Ebben az esetben plauzíbilis a „tipikus" alatt azt érteni, ami „1 valószínűséggel igaz" a K-kocka természetes mértékében. Amint azt Arnold kimutatja, ez a két definíció ellentmond egymásnak nagyon egyszerű és természetes példákra is.

Arnold olyan folyamokat tekint a tóruszon, melyek a kör forgáshoz közeli homeomorfizmusának szuszpenziójával adódnak. Legyen y az $R/2\pi Z$ körön a szögkoordináta és legyen $a(y)$ tetszőleges 2π periodikus analitikus függvény. Minden (r, s) valós számpárra Arnold értelmezi a kör egy $h_{r,s}$ diffeomorfizmusát az alábbi összefüggés szerint

$$h_{r,s}(y) = y + r + sa(y).$$

Elég kicsi rögzített $s>0$ számokra:

$$D_s = \{r\in[0, 2\pi]: h_{r,s}\text{-nek vannak sűrű pályái}\}$$

halmaz mértéke közeli a 2π-hez a $[0, 2\pi]$-n. A diffeomorfizmusnak akkor és csak akkor vannak sűrű pályái, ha a megfelelő folyamnak vannak sűrű pályái, de az ilyen folyamok a strukturálisan instabilis vektormezők sehol se sűrű halmazába tartoznak a tóruszon. Így látjuk az ellentmondást a „tipikusság" két értelme között.

Másként tekintve ugyanezt elmondhatjuk, hogy az r, s-t a megfelelő vektormezőbe képező leképezés egy pozitív mértékű halmazt egy sehol se sűrűbe visz. Itt matematikai értelemben nincsen semmilyen ellentmondás, sőt a $\{h_{r,s}\}$ család éppen nagyon *természetes*. Arnold írja:

> ... a numerikus kísérletek általában (legalábbis látszólag) mindenütt sűrű pályákhoz vezetnek. ... a strukturális stabilitás gondolata nem az egyetlen lehetőség a tipikus rendszer fogalmára. A fenti metrikus megközelítés sok esetben alkalmasabb a ténylegesen megfigyelhető viselkedés leírására.

Minden numerikus kísérlet pontosságának megvannak a határai. Gondoljunk Arnold zárójeles megjegyzésére. Megkérdezhetjük azt is: Arnold kétparaméteres diffeomorfizmus családja a körön egy nagyon speciális család, vagy megszokott az ilyen családok között? Más szóval, *tipikus-e* a család? Míg ez a kérdezősködés valami filozófiai végtelen ciklusnak tűnhet, elvezetett egy nagyon gazdag matematikai területre, a *bifurkációelmélethez* — a gyakorlat szempontjából alapvető jelentőségű tárgykörhöz, mely területen Arnoldnak jelentős eredményei vannak.

4. Magasabb dimenziós folyamok: homoklinikus csomók és stabilis káosz

> „Egy egyszerű három- vagy magasabb dimenziós differenciálegyenlet megoldásai elképesztően bonyolultak lehetnek. Továbbá, mivel ezek a rendszerek, gerjesztett rezgések vagy autonóm evolúciós egyenletek formájában, fontos szerepet játszanak a nemlineáris folyamatok modellezésében, megoldásaik tipikus struktúrájának megértése lényeges. ... a megértés legjobban geometriai vagy topológiai megfontolásokból érhető el. A számítógépes szimuláció megnövelése valamilyen magyarázat és elemzés nélkül nem sokat segít.
>
> J. Guckenheimer és P. Holmes (1983) 116. o.
>
> Úgy tűnik tehát, hogy minden nemintegrálható dinamikai rendszer, amelynek egy ilyenfajta homoklinikus megoldása van, a megfelelő környezetben a pályák egy majdnem elképzelhetetlen hierarchiájával rendelkezik.
>
> G. Birkhoff (1935)

Poincaré, több alapvető dinamikai felfedezése mellett, megtalálta a kaotikus mozgások egyik elsődleges forrását: a homoklinikus pályát. A korlátozott síkbeli háromtest-problémával foglalkozott, egy olyan kérdéssel, melyet ma négydimenziós fázisterű Hamilton folyamoknak nevezünk. Ezeknek a folyamoknak van egy invariáns függvényük, az energia; lerögzítve az energiát, háromdimenziós fázisteret kapunk. Poincaré egy speciális esettel foglalkozott, amikor létezik globális metszet, vagyis a folyam pályáinak rendszere ugyanaz, mint egy kétdimenziós sokaság (Poincaré esetében egy félsík) egy diffeomorfizmusának szuszpenziója. Továbbá ez a diffeomorfizmus területtartó. Ez a probléma ösztönzőleg hatott a felületi transzformációk, napjainkig se csökkenő, vizsgálatára.

Világos, Poincaré egy nagyon speciális esetet vizsgált, viszont alapötlete, ma már tudjuk, általánosan alkalmazható.

Poincaré vizsgálta a pozitív vagy negatív időben egy rögzített γ zárt pályához aszimptotikusan tartó pályákat. A modern terminológiát használva (ami neki nem tetszett volna) a γ-hoz tartó pontok halmazát $S(\gamma)$ halmazát *stabilis sokaság*-nak nevezzük; és γ-nak a megfordított idejű folyam esetére adódó stabilis sokaságát $U(\gamma)$ *instabilis sokaságnak* hívjuk. Ezek a halmazok, elég általános feltételek mellett, az M sokaságba beágyazott részsokaságok. Megfelelő s, illetve u dimenziójuk kielégíti az $s+u=\dim M+1$ feltételt. A Poincaré által vizsgált rendszerekben M az R^3 egy nyílt halmaza, $s=u=2$ és $s(\gamma)$ általában egy beágyazott henger vagy Möbius-szalag ugyanúgy, mint $U(\gamma)$.

$S(\gamma)$ és $U(\gamma)$ γ minden pontjában metszik egymást, de metszhetik egymást más pontokban is. Egy $y\in S(\gamma)\cap U(\gamma)\setminus\gamma$ pontot a γ-hoz tartozó *homoklinikus pontnak* nevezünk és a pályáját vagy trajektóriáját szintén homoklinikusnak hívjuk. Világos, hogy y *kétszeresen aszimptotikus* γ-hoz, mivel $\omega(y)=\alpha(y)=\gamma$. Az egész y pálya (mind pozitív, mind negatív irányban) homoklinikus pontokból áll. Egy y homoklinikus pontot *transzverzálisnak* nevezünk, ha a stabilis és instabilis sokaságok transzverzálisan metszik egymást az y-ban.

Poincaré alapvető felfedezése az volt, ha *y egy transzverzális homoklinikus pont, akkor $S(\gamma)\cap U(\gamma)$-ban végtelen sok különböző homoklinikus trajektória van, és ezek γ-t nagyon eltérő módon érik el.* Például γ-nak van egy N környezete az alábbi tulajdonsággal. Legyen N a γ egy tetszőleges nagyon kicsiny környezete és legyen $t_0>0$ olyan, hogy $y(t)\in N$ minden $t\geqq t_0$. Legyen $t_1>t_0$; akkor y minden környezetében van olyan z homoklinikus pont, hogy $z(t)\in N$, ha $t_0\leqq t\leqq t_1$, de $z(t_2)\notin N$ valamilyen $t_2>t_1$-re.

A jelentősége ennek abban van, hogy az y homoklinikus pont minden környezete tartalmaz más homoklinikus pontokat, melyeknek végtelenül sokféle a határviselkedése, és ugyanez igaz ezen homoklinikus pontok mindegyikére stb. A rendszer *a kezdeti értékekre nézve rendkívüli instabilitást* mutat.

Poincaré ((1899), 389, 391. o.) meg volt döbbenve ezen mozgások bonyolultságán, az osztályozásuk vagy akár csak leírásuk is távolinak tűnt. (Különösen Poincarénak, aki erősen ragaszkodott ahhoz, hogy minden matematikai objektumot véges sok kifejezés segítségével definiáljunk, csak a korábban már definiáltakra hivatkozva. Ő talán elvetette volna a mi omegahatárhalmaz ($\omega(x)$-definícióinkat is, mivel az végtelen sok, még nem definiált, sorozatot tartalmaz. Úgy hiszem, a halmazelmélettel szembeni utálata gátolhatta őt.)

A transzverzális homoklinikus pontokat behatóan tanulmányozta Birkhoff, aki belátta, hogy a háromdimenziós rendszerekre *egy transzverzális homoklinikus pont minden környezetén végtelenül sok ciklus is átmegy,* egy újfajta bonyolultságra híva fel ezzel a figyelmet.

Poincaré a transzverzális homoklinikus pontokról szóló vizsgálataiban a leginkább az említésre méltó, hogy ő nem rendelkezett semmilyen példával vagy bizonyítással arra, miszerint ilyen pont egyáltalán létezik! Nem tudom, hogy bárki is megalkotott-e már egy olyan típusú példát, melyet ő vizsgált: Egy egyparaméteres $(S_\mu)_{\mu\geqq 0}$ család a síkbeli korlátozott háromtest-problémára, olyan, hogy valamely rögzített energia esetén, S_0 integrálható rendszer (minden pálya periodikus) és egy $\mu_0 > 0$-ra minden S_μ $0 < \mu < \mu_0$ rendelkezik transzverzális homoklinikus ponttal és ráadásul a vektormezők valós analitikusok (μ, x)-ben, ahol x az állapotváltozó. Birkhoff (1932) 385. o. elismeri, hogy nem tudott ilyen példát konstruálni. Erre T. M. Cherry (1968) mutatott rá, aki az egyetlen ilyen, de nem egyparaméteres, családot megalkotta. (Poincaré, de nem Birkhoff, erősen hitt az analitikusságban és a területtartó tulajdonságban. Mindketten csak háromdimenziós rendszerekre bizonyították eredményeiket.)

Se Poincaré, se Birkhoff nem vizsgálta eredményeik strukturális stabilitását, habár rendszeresen tekintettek „végtelenül valószínűtlen" eseteket. Ennek ellenére intuitíven világos, hogy egy transzverzális homoklinikus pont egy tartós jelenség. Ténylegesen precízen Smale (1961, 1963) bizonyította be, illetve függetlenül tőle I. Kupka (1963). Smale-nek (1961) Birkhoff végtelenül sok ciklus létezéséről szóló tételét (egy transzverzális homoklinikus pont környezetében) sikerült elegánsan kiterjesztenie tetszőleges dimenzió esetére. A bizonyítás a szimbolikus dinamikát használja egy új és különösen termékeny módon. A *szimbolikus dinamikák* a T: $C \to C$ „eltolós" homeomorfizmusokhoz tartoznak, ahol C egy véges abc összes bi-végtelen sorozatának Cantor-halmaza: T a $c = \{c_j\}_{j \in Z}$ sorozatot a $Tc = \{d_j\}$ sorozatba küldi, ahol $d_j = c_{j+1}$. Smale létrehozza a C egy f beágyazását egy homoklinikus pálya tetszőleges környezetébe oly módon, ha $f(c) = x$, akkor $f(Tc) = x(t)$ valamely $t > 0$-ra. Ha c egy periodikus sorozat, akkor $f(c)$ egy periodikus pont. Mivel a periodikus sorozatok C-ben sűrűek és az $f(c)$ konstrukció érinti a homoklinikus pályát, innen következik, hogy minden homoklinikus pont periodikus pontok határértéke .

J. Moser (1973) 100. o. megemlíti, hogy ezeket a gondolatokat, kevésbé részletezve és precízen, már Birkhoff [(1935)-ben] is leírta, ahol megtalálható a szimbólumok sorozatának elve is. Emiatt az elv (ebben az összefüggésben) visszanyúlik Poincaré-ig (1899) 389. o.

Poincaré megérzése, hogy a transzverzális homoklinikus pontok létezése igen gyakori, teljességgel beigazolódott. Az utóbbi időben sok „természetes" dinamikai rendszerre igazolták létezésüket.

Egy nagyon egyszerű és történetileg fontos rendszer: *a tórusz hiperbolikus automorfizmusának szuszpenziója.* Az *automorfizmus* a $T^n = R^n/Z^n$ n-tórusz f_A olyan diffeomorfizmusát jelenti, melyet az R^n olyan lineáris automorfizmusa fed le, aminek az $n \times n$-es **A** mátrixa egész elemű, a determináns pedig ± 1. Azt mondjuk, hogy f_A *hiperbolikus,* ha A-nak nincsen sajátértéke az egységkörön. Könnyen látható, hogy f_A periodikus pontjai a T^n pontosan azon pontjai, melyeknek az R^n-ben racionális koordináták felelnek meg; az ilyen pontok sűrűek T^n-ben.

Az f_A szuszpenziója egy valós analitikus φ_A folyam egy bizonyos kompakt M_A 3-sokaságon, ahol *a ciklusok sűrűek.*

1960-ban Thom felvetette a kérdést, vajon f_A (és akkor φ_A) strukturálisan stabilis-e az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ speciális esetben. (Egy f: $M \to M$ diffeomorfizmust strukturálisan stabilisnak hívunk, ha van egy $\mathcal{V}$ környezete az M C^1 diffeomorfizmusainak terében, amelyiknek minden eleme konjugált az f-fel az M homeomorfizmusainak csoportjában.) S. Smale (nem publikálta) és D. Anoszov (1962) bebizonyították, hogy f_A strukturálisan stabilis a T^2 bármely hiperbolikus automorfizmusára. Anoszov általánosította ezt T^n-re, és a rendszereknek egy jóval szélesebb osztályára, amit róla neveztek el. Az Anoszov-folyamoknak egy fontos típusa a geodetikus folyam egy kompakt negatív görbületű Riemann sokaság egység érintőnyalábján (Anosov (1967)).

Mivel f_A strukturálisan stabilis, a *kellően közeli g diffeomorfizmusai* a tórusznak pontosan ugyanolyan dinamikus viselkedést mutatnak — ez egy nagyon nemtriviális eredmény. Továbbá a strukturális satbilitás bizonyítása becsléseket tartalmaz a g szükséges közelségére. Így fontos ismeretekhez jutunk a diffeomorfizmusoknak egy teljes, nyílt osztályáról. (Mindez igaz bármely Anoszov-rendszerre.) Például viszonylagosan egyszerű bizonyítani, hogy f_A-nak van sűrű pályája, a periodikus pályák uniója sűrű, minden periodikus pálya stabilis és instabilis sokasága sűrű, a homoklinikus pontok halmaza sűrű. Az előbbiekből következik, hogy a g perturbációk rendelkeznek mindezen tulajdonságokkal.

Most létrehozhatunk egy bájos „különös attraktor"-t. Rögzítsük le az n-tórusz egy A hiperbolikus automorfizmusát és legyen F_A az M_A-n a φ_A folyam által definiált vektormező. Legyen $V=M_A\times S^1$, ahol S^1 az R/Z kör. Az S^1-en legyen G egy tetszőleges vektormező, melyre $p\in S^1$ nyelő. Az $F_A\times G$ vektormező a V-n generál egy ψ folyamot, $M_A\times p$ attraktor. A ψ leszorítása $M_A\times p$-re megegyezik φ_A-val, ahonnét meggyőződtünk arról, hogy $M_A\times p$-t különös attraktornak hívhatjuk.

Megmutatható, hogy a ψ folyam strukturálisan stabilis. A dinamika különleges: $\omega(x)=M_A\times p$ majdnem minden $x\in V$-re. A trajektóriák többsége $M_A\times p$ körül látszólag véletlenszerűen forog.

Ezek és más példák magasabb dimenziókra a tartós dinamikus viselkedés olyan bőségét mutatták meg, ami nem létezik a felületi folyamok esetén. A remény arra, hogy a strukturálisan stabilis vektormezők sűrűek lehetnek $V(M)$-ben, Smale (1965) példájával veszett el. A példa egy háromdimenziós tórusz diffeomorfizmusa, ami nem C^1 közelíthető strukturálisan stabilis leképezésekkel. Ezen diffeomorfizmus szuszpenziója egy négydimenziós sokaságon megadott vektormező, amely nem approximálható strukturálisan stabilis C^1 vektormezőkkel. 1971-ben S. Newhouse talált hasonló példákat három dimenzióban.

Érdekes, hogy mindezekben a példákban, hasonlóan a korábban idézett strukturális stabilitási tételek bizonyításához, a kulcspont a stabilis és instabilis sokaságok metszése. Így látjuk, hogy Poincaré eredeti meglátása továbbra is gyümölcsöző.

Egy nemrég megjelent könyvben J. Guckenheimer és P. Holmes (1983) vázolják Newhouse konstrukcióját és érdekes fejtegetéseket fogalmaznak meg a következményeiről a bifurkációelméletben, illetve a Duffing-egyenlet, vagy a Hénon-attraktor speciális rendszerek numerikus vizsgálatában.

Az alapötlet Smale és Newhouse példáiban túlhaladja Poincarét azáltal, hogy olyan homoklinikus pontokat vizsgálnak, melyekben a stabilis és instabilis sokaságok *nem* transzverzálisak. Egy rendszer, melyben ilyen *érintő homoklinikus pontok* vannak, nem lehet strukturálisan stabilis, se nem lehet strukturálisan stabilis rendszerek határértéke. Smale és Newhouse megmutatták, hogy az ilyen rendszerek lehetnek sűrűek a $V(M)$ egy környezetében.

Newhouse (1979, 1980) szintén igazolta, ha p egy olyan felületi f diffeomorfizmus fixpontja, melyre a stabilis és instabilis sokaságok érintik egymást és $Df(p)$ determinánsa negatív, akkor f tetszőleges C^r közelében ($r>0$ tetszőleges) van olyan diffeomorfizmus, mely végtelenül sok aszimptotikusan stabilis periodikus pályával rendelkezik. Szuszpenzióval megkaphatjuk a hasonló eredményt a folyamokra. Poincaré el lenne borzadva.

Mindezen példák szertefoszlatták a reményt egy Peixoto-éhoz hasonló Általános Sűrűségi Tétel bizonyítására magasabb dimenziókban, de hihetőnek tűnik, hogy a strukturálisan stabilis rendszerek, ha nem is sűrűek, de legalábbis jellemezhetők a tulajdonságoknak valamilyen alkalmas halmazával. Smale megfogalmazott egy ilyen listát, majd módosította, mivel ellenpéldákat találtak. Jelenleg a rés az ismert szükséges, illetve elégséges feltételek között kicsi, de még nincs áthidalva.

Az egyik ilyen feltétel, aminek az elégségessége (kiegészítve néhány más tulajdonsággal) ismert és úgy sejtik, hogy szükséges is, alapul szolgál a strukturális stabilitással kapcsolatos összes további munkákra. Ez Smale axiómája:

A. Axióma. *A nem vándorló halmaz hiperbolikus struktúrájú.*

Egy M kompakt sokaságon megadott $\{\varphi_t\}$ folyamra ez a következőket jelenti. Az M egy x pontja *vándorló*, ha van egy olyan U környezete, hogy $(\varphi_t U) \cap U$ üres minden elég nagy $t > 0$-ra; egyébként x *nem vándorló*. A nem vándorló pontok halmaza hiperbolikus struktúrájú, ha minden nem vándorló pontra igaz a következő: x-ben M érintőtere három lineáris altér direkt szorzata. Az egyiket a vektortér feszíti ki, a másik kettő elemei, megfelelően, exponenciálisan széthúzódnak, illetve összenyomódnak (kontrakció) az M érintőnyalábján a folyam által indukált hatásra, amikor $t \to +\infty$.

Diffeomorfizmusokra a definíció hasonló, csak két lineáris teret tartalmaz.

Általában rendkívül nehéz megtalálni egy adott rendszer nem vándorló halmazát és ugyanolyan nehéz meghatározni, hogy ez hiperbolikus struktúrájú-e. Egy explicit kifejezésekkel megadott vektormező esetén, mint például a Lorenz-rendszer (lásd lejjebb) ez a feladat reménytelennek tűnik. De sok esetben a kérdéses rendszer nem ilyen módon adott, hanem jobban geometriai vagy algebrai kifejezésekkel írják le. Olyan példákra gondolok, mint a geodetikus folyam egy kompakt Riemann-sokaság egységérintőnyalábján: Anoszov (1962) bebizonyította, ha minden metszetgörbület negatív, akkor nemcsak a nem vándorló halmaz, de az egész állapottér hiperbolikus struktúrájú.

A kompakt sokaságon tekintett sima folyamok esetén két különleges eset van, amikor könnyen meghatározható a nem vándorló halmaz. Ha a folyam megtart egy sima mértéket, akkor minden pont nem vándorló, amint az nyilvánvalóan következik a vándorlás definíciójából. Ha minden omega határhalmaz hiperbolikus periodikus pálya, akkor ezen pályák egyesítése a nem vándorló halmaz és ez hiperbolikus struktúrájú.

Az utóbbi esetben J. Palis és S. Smale bebizonyították (1970), hogy a strukturális stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy a stabilis és instabilis sokaságok minden metszése transzverzális legyen.

Fejezzük be ezt a fejezetet egy *explicit differenciálegyenlet-rendszerrel, a híres Lorenz-rendszerrel:*

$$dx/dt = -10x + 10y,$$

$$dy/dt = 28x - y - xz,$$

$$dz/dt = -8z/3 + xy.$$

Ez egy az áramlástanban fellépő rendszer rendkívül leegyszerűsített változata. Számítógépes szimulációval E. Lorenz (1963) azt találta, hogy a pályák többsége előre megjósolhatatlan módon oda-vissza vándorol két speciális egyensúlyi helyzet között.

Nagyon közeli helyről együtt induló pályák végül eltávolodnak egymástól a hosszú távú viselkedésükre vonatkozó valamilyen kapcsolat nélkül.

De ez a kaotikus viselkedés még nem *bizonyított,* ténylegesen még majdnem semmi sincs bizonyítva erről a speciális rendszerről, habár nagyon jól ismert minden dinamikával foglalkozó szakember számára. J. Guckenheimer (1976) és R. Williams (1979) bebizonyították, hogy tényleg sok rendszer létezik, precíz értelemben, olyan viselkedéssel, mint amit a Lorenz-rendszerre figyeltek meg, de senki se tudja, hogy maga a Lorenz-rendszer közéjük tartozik-e. Nem különösebben fontos, hogy feleljünk erre a kérdésre, de tudatlanságunk nagy kihívás a szakembereknek. Figyelembe véve mindazon erőfeszítéseket, amit a Lorenz-rendszernek szenteltünk, ez a helyzet már szinte botrányos.

Ebben a fejezetben a hangsúly a bonyolultságon és a stabilitáson volt, figyelmen kívül hagyva sok nagyon fontos egyéb témakört. Ezek közé tartozik a jelentősen fejlett bifurkációelmélet, vagy a rendszerek véges dimenziós családjai és az ehhez kapcsolódó normál formák elmélete; a mechanikában és geometriában fontos Hamilton-rendszerek; az ergodikus elmélet, amely szorosan kapcsolódik a valószínűségszámításhoz és a statisztikus mechanikához; finom regularitási és mély topológiai kérdések, melyek alapul szolgálnak a sokaságokon megadott rendszerek tere felépítésének megértéséhez. Nagyon sok érdekes munka született a különböző alkalmazásokban fellépő speciális rendszerek osztályairól; ezek többször utat mutattak az általános eredményekhez. Nem érintettük a végtelen dimenziós rendszerek nagy tartományát. Ezek nagyon fontosak az alkalmazásokban, de dinamikai szempontból majdnem teljesen érintetlenek még; néhány új eredményt a parabolikus parciális differenciálegyenletekre a következő fejezetben mutatunk be. Kivéve a Hénon attaktor megemlítését, nem fordítottunk figyelmet egy, az utóbbi időben gyorsan fejlődő területre, a neminvertálható leképezések (vagy differenciaegyenletek) dinamikájára.

Ezekben a témakörökben az olvasó áttekintés vagy a legfrissebb eredmények kifejtése céljából az alábbi könyvekhez fordulhat: J. Moser (1973), V. Arnold (1983), S. Smale (1980), J. Palis és W. Demelo (1982), R. Abraham és J. Marsden (1978), J. Hale (1963), J. Marsden és M. Mc Cracken (1976), J. Franks (1982), J. Walker (1980), B. Hassard, N. Kazarinoff és Y. — H. Wan (1980), illetve D. Henry (1981). J. Guckenheimer és P. Holmes 1983-as könyve több tárgykör hasznos áttekintésén kívül egy szokatlanul teljes irodalomjegyzéket is tartalmaz. Lásd még G. Iooss és mások (1983), G. Barenblatt és mások (1983).

III. FEJEZET. MONOTON FOLYAMOK KONVERGENCIÁJA ÉS STABILITÁSA

> Lehetséges, hogy az elméleti dinamika végső célja a „logikai integrálás". Az igazat megvallva, egy matematikai elmélet jellegzetes fejlődését, úgy tűnik, akkor tekinthetjük befejezettnek, ha szabadon tudunk áttérni a tisztán kvantitatív, mennyiségi alakról a tisztán kvalitatív, minőségi formára és vissza. Ha így teszünk, birtokába jutunk az egész logikai struktúrának. A dinamikai rendszerek esetében a kvantitatív formáról indulunk (a rendszert differenciálegyenletek adják meg), és megpróbáljuk meghatározni a mozgások kvalitatív tulajdonságait és ezek kapcsolatait.
>
> G. D. Birkhoff (1935), 268. o.

A legtöbb differenciálegyenletnek nem lehetséges se egzakt analitikus megoldása, se teljes kvalitatív vizsgálata.

V. Arnold (1983), 142. o.

Bevezetés. Manapság divatos a dinamikai rendszereket sokaságokon vizsgálni, és ténylegesen sok kérdésre ez a helyes problémafelvetés. A gyakorlatban azonban általában néhány természetes változónk van, ezek kapcsolatát egy differenciálegyenlet írja le és, legalábbis első lépésként, ezeket a változókat koordinátáknak választva valamilyen R^n Descartes-térben egy differenciálegyenletre jutunk. Invariáns függvények vagy kényszerek később sugallhatják azt, hogy figyelmünket egy részsokaságra korlátozzuk, ugyanide vezethetnek szimmetriák vagy periodicitások.

Az ebben a fejezetben leírt rendszerek osztályára a folyam megőrzi az állapottér egy (részbeni) rendezését. A gyakorlatban felmerülő példákban az állapottér vagy az R^n a vektorok rendezésével (melyet a megfelelő koordináták közötti egyenlőtlenségek határoznak meg), vagy a valós értékű függvények tere a természetes rendezéssel. Technikai okokból szokásos az ilyen terek nyílt részhalmazait is tekinteni.

Az alábbi eredmények helyességéhez a rendezésnek ki kell elégítenie egy néhány speciális tulajdonságot, az R^n-ben ezek fennállnak, és igazak sok, de nem minden közkedvelt függvénytérre is. A lineáris struktúra nem játszik további szerepet; a függvényterek olyan különböző, gyakran használt tulajdonságai, mint a norma teljessége, reflexivitás, lokális konvexitás stb. nem szükségesek a fő eredmények bizonyításához, habár ezek a tulajdonságok gyakran szerepelnek a fő példák megfogalmazásában.

Ilyen megfontolásokból természetesnek tűnik az általánosság egy elég magas szintjét választani, az utolsó pontban ez technikailag hasznos lesz. Az állapottér ekképpen egy rendezett tér néhány speciális tulajdonsággal. Azok az olvasók, akik előnyben részesítik a konkrétabb vizsgálatokat, feltehetik, hogy az állapottér vagy az R^n vagy egy kompakt Riemann sokaságon megadott C^1 függvények tere, ahol vagy a függvény vagy a normális irányú derivált eltűnik a határon. Az absztrakció egy magasabb szintjén az állapottér tekinthető bármely olyan rendezett Banach-tér egy nyílt részhalmazának, melyre a pozitív kúpnak nem üres a belseje.

Ennek a résznek az eredményei azt mutatják, hogy az itt vizsgált folyamok esetén indokolt azt várnunk, hogy a pályák többsége stabilis stacionárius állapotokhoz tart. Ezeknek a folyamoknak nincsenek különös attraktorai, kaotikus mozgásai. Ezek az „erősen monoton" folyamok egy kicsi, de nem természetellenes osztályt alkotnak, és avval a további előnnyel is rendelkeznek, miszerint egy adott vektormezőről általában könnyű meghatározni, hogy a folyama beletartozik-e az említett osztályba. Továbbá van egy jó strukturális stabilitásuk, habár ezt itt csak az R^n folyamokra tárgyaljuk.

Az 1. § tartalmazza az alapvető definíciókat és példákat. Egy fő konvergencia-kritérium, a 2. 3. tétel, bizonyítására a 2. §-ban kerül sor; és ezt alkalmazzuk a 3., illetve 4. §-ban az egyensúlyi helyzetek létezésének bizonyítására az attraktorokban. Az 5. § szerint a legtöbb kezdeti állapotra erősen monoton folyamok esetén a trajektóriák egyensúlyi helyzetekhez való tartása várható. A 6. § újravizsgálja az 1. §-ban megfogalmazott járványmodellt. Az utolsó rész elmagyarázza, milyen értelemben maradnak meg ezek az eredmények a folyam perturbációja során.

1. Monoton folyamok erősen rendezett terekben

A dinamika célját a következőkben fogalmazhatjuk meg: teljesen jellemezni a dinamikai rendszer mozgásainak összességét kvalitatív tulajdonságaik segítségével.

G. D. Birkhoff (1920)

Egy *rendezett tér* egy X topologikus térből és egy $R \subset X \times X$ (részben) rendezési relációból áll, ami egy zárt altér. Azt írjuk, hogy:

$$x \leqq y \quad \text{ha} \quad (x, y) \in R,$$

$$x < y \quad \text{ha} \quad x \leqq y \quad \text{és} \quad x \neq y,$$

$$x \ll y \quad \text{ha} \quad (x, y) \in \operatorname{Int} R,$$

ahol Int a halmaz belső részét jelenti. Az olyan jelöléseknek, mint $x > y$ a jelentése magától értetődő.

Egy X rendezett teret *erősen rendezettnek* nevezünk, ha rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(SO 1) Ha $U \subset X$ nyílt és $x \in U$, akkor létezik olyan a, b az U-ban, melyekre $a \ll x \ll b$.

(SO 2) Ha $U \subset X$ nyílt és a, b $a \ll b$ az U-ban vannak, akkor létezik $x \in U$, melyre $a \ll x \ll b$.

Megjegyezzük, hogy (SO 1)-ből következik Int R sűrűsége R-ben.

1.1. PÉLDA. Legyen V egy topologikus vektortér, és $V_+ \subset V$ egy olyan zárt konvex kúp (csúcsával az origóban), hogy ha mind x és $-x$ a V_+-ban vannak, akkor $x = 0$. V-t rendezett térré tesszük az $x \leqq y$ relációt $y - x \in V_+$-szal értelmezve. Az ilyenfajta rendezett teret *rendezett topologikus vektortérnek* nevezzük. Minden nyílt részhalmaz egy rendezett tér az indukált rendezésben. Könnyen látható, hogy az ilyen terek akkor és csak akkor erősen rendezettek, ha Int V_+ nem üres. Ebben az esetben $y \gg x$ jelentése:

$$y - x \in \operatorname{Int} V_+ .$$

Az erősen rendezettségi tulajdonság elég finom. Tekintsük például a következő tereket, ahol M egy sima, kompakt sokaság:

$$C^r(M) = \{C^r \text{ leképezések } M \to R\},$$

$$C_0^r(M) = \{u \in C^r(M) \colon u|\partial M = 0\}.$$

Itt r bármilyen nem negatív egész szám. Ezek topologikus vektorterek, ha adott a C^r gyenge topológia, akkor van Banach-normájuk. A nem negatív függvények kúpja segítségével rendezett topologikus vektortérré válnak. Világos, hogy $C^r(M)$ erősen rendezett, u akkor és csak akkor $\gg 0$, ha $u(x) > 0$ minden x-re. De ha ∂M nem üres, akkor $C_0(M)$ nem erősen rendezett. Másrészről $r > 0$ esetén $C_0^r(M)$ erősen rendezett, $u \gg 0$ akkor és csak akkor, ha u szigorúan pozitív $M \setminus \partial M$-en és u gradiense (valamilyen Riemann-metrikában) transzverzális ∂M-re a határ minden pontjában.

1.2. PÉLDA. Az R^n alábbi kúp által definiált *vektor rendezését zárt pozitív ortánsnak* nevezzük:

$$R_+^n = \{x \colon x_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Ez egy erős rendezés, $x \gg 0$ akkor és csak akkor, ha $x_j > 0$. Hacsak külön másként nem mondjuk, az R^n-ben mindig ezt a rendezést használjuk.

1.3. PÉLDA. Legyen X a V erősen rendezett topologikus vektortér egy nyílt halmaza. $x, y \in V$-re $x \leqq_p y$-nal jelöljük, ha létezik egy *monoton út* h: $[0, 1] \to X$ x-ből y-ba, azaz h folytonos $h(s) > h(t)$, ha $s > t$ és $h(0) = x$, $h(1) = y$. Könnyű látni, hogy az $x \leqq_p y$ reláció X egy erős rendezése, ami X konvex részhalmazain összhangban van V rendezésével. Valójában X minden olyan U részhalmazán, melyet én *p-konvex*-nek nevezek, egybeesnek: U tartalmazza a bármely két $<$relációval kapcsolódó pontját összekötő szakaszt. A $\leqq_p$ rendezés az X *út monoton* rendezése.

Két rendezett tér közötti f leképezést *monotonnak* nevezünk, ha $x \leqq y$-ból következik, hogy $f(x) \leqq f(y)$. A leképezés *szigorúan monoton,* ha $x < y$-ból következik $f(x) \ll f(y)$.

Egy valós A mátrix, $A \geqq 0$ (minden elem $\geqq 0$) egy monoton lineáris leképezést definiál és egy szigorúan monoton lineáris leképezést, ha $A \gg 0$ (minden elem pozitív). Az alábbi példa egy nemlineáris általánosítás:

1.4. PÉLDA. Legyen $X \subset V$, mint az 1.3. példában és legyen $f: X \to X$ egy C^1 leképezés (Gateaux-deriválhatóság elegendő). Tegyük fel, hogy minden $Df(x)$: $V \to V$ lineáris leképezés monoton. Akkor f monoton az X útmonoton rendezésére nézve. Ennek a megvilágítására tegyük fel, hogy x és y-t összekötöttük egy monoton úttal az X-ben. Cseréljük fel ezt az utat egy szakaszonként lineáris monoton útra. A csúcsok száma szerinti indukcióban elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor x és y egy X-beli szakasz végpontjai és $x < y$. Az $f(y) - f(x)$-et a Taylor-formula alapján kiszámítva látszik, hogy $f(x) < f(y)$; mivel ez alkalmazható a szakasz bármely két pontjára, innen következik, hogy a szakasz képe egy $f(x)$ és $f(y)$-t X-ben összekötő monoton út.

Hasonló indoklások igazolják, hogy f szigorúan monoton az útmonoton rendezésre, feltéve, hogy minden $Df(x)$ szigorúan monoton. Amikor X p-konvex, akkor ezek az eredmények öröklődnek a V-ből származtatott rendezésre.

Most legyen $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \geqq 0}$ egy folyam (a II. fejezet 1. § értelmében) egy rendezett X térben. φ-t *monoton folyamnak* nevezem, ha minden φ_t leképezés monoton, φ *szigorúan monoton folyam,* ha minden φ_t leképezés szigorúan monoton minden $t > 0$-ra.

1.5. PÉLDA. Legyen A olyan valós $n \times n$-es mátrix, hogy $A + cI \geqq 0$ valamely valós c számra.

Az $\{e^{tA}\}_{t \geqq 0}$ lineáris folyam monoton, amint az látszik az $A = -cI + (A + cI)$ alakból. Hiszen $e^{tA} = e^{-ct} e^{t(A+cI)}$ és a $t(A + cI)$ mátrix exponenciális függvénye $\geqq 0$, mivel az exponenciális sor együtthatói pozitívak.

Azt mondjuk, hogy az A mátrix *irreducíbilis,* ha nem képezi saját magába az $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 0$ egyenletekkel megadott nemnulla altereket. Megmutatható, ha az 1.5. példában A irreducíbilis, akkor $e^{tA} \gg 0$ $t > 0$-ra, és így a lineáris folyam szigorúan monoton.

Alább az előző példa nemlineáris általánosítása következik:

1.6. PÉLDA. Legyen $F: X \to R^n$ az $X \subset R^n$ nyílt halmazon megadott C^1 vektormező. Amikor a $DF = [\partial F_i / \partial x_j]$ Jacobi-mátrix főátlón kívüli elemei mind $\geqq 0$ az F-et (és a folyamát) *együttműködőnek (kooperálónak)* nevezem. Ha minden

Jacobi-mátrix irreducíbilis, akkor F-et *irreducíbilisnek* hívjuk. Felhasználva Kamke egy differenciálegyenlőtlenségekre vonatkozó tételét (Hirsch [1983 a]) megmutatható, ha F együttműködő, akkor φ folyamára $D\varphi_t x \geqq 0$ és ha F irreducíbilis is, akkor $D\varphi_t \gg 0$ $t>0$-ra.

Az 1.4. példa eredményét felhasználva kapjuk

1.7. TÉTEL. *Legyen φ egy az $X \subset R^n$ nyílt halmazon megadott együttműködő F vektormező által generált folyam. Akkor φ monoton az X útmonoton rendezésére nézve és szigorúan monoton, ha F irreducíbilis.*

Az együttműködő (kooperatív) vektormezők ellentettje a G *versengő (kompetitív)* mező, jellemzője $\partial G_i/\partial x_j \leqq 0$, ha $i \neq j$. Az együttműködő és versengő folyamok az idő megfordításával átmennek egymásba ($t \to -t$ független változó helyettesítése). Bizonyos összefüggésben az idő folyásának iránya nem lényeges és szabadon áttérhetünk a versengő vektormezőkről az együttműködőkre. Az ilyen mezők határhalmazai speciális topologikus és dinamikus tulajdonságokkal rendelkeznek (Hirsch [1982]), ezek közül néhányat megtárgyalunk a további paragrafusokban.

1.8. PÉLDA. A. Lajmanovich és J. Yorke (1976) egy irreducíbilis együttműködő modellt használtak a gonorea terjedésének modellezésére. Egyenleteiket az alábbiak szerint általánosíthatjuk. Tekintsünk egy olyan fertőzést, mint a gonorea, melyre nem szerezhető immunitás, mindenki, akinek még nincs, érzékeny rá. Tegyük fel, hogy a populáció n csoportba osztható. Legyen P_i az i-edik osztály lélekszáma (feltételezzük, hogy állandó), x_i pedig legyen az i-osztálybeli fertőzöttek száma. Akkor $P_i - x_i$ a betegségre fogékonyak száma i-ben. Mind x_i, mind $P_i - x_i$ nemnegatív egész számok, de a szokásos kézlegyintéssel x_i-t folytonos változónak tekintjük és feltesszük, hogy deriválhatóan függ az időtől. Legyen R_i a fertőzési ráta az i-edik osztályban, C_i pedig a gyógyítási ráta és tegyük fel (nem túl valósághűen), hogy R_i csak az $x = x_1, \dots, x_n$ vektor, míg C_i csak x_i függvénye. Az alapfeltétel, ésszerűen, $\partial R_i/\partial x_j \geqq 0$. Végül feltesszük, hogy minden csoport közvetlen vagy közvetett úton megfertőzhet bármely csoportot.

Ezeket a feltételezéseket a

$$dx_i/dt = R_i(x) + C_i(x_i) \equiv F_i(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

differenciálegyenlet-rendszerrel modellezzük. Világosan $\partial F_i/\partial x_j \geqq 0$, ha $i \neq j$, így a rendszer együttműködő és a kölcsönös közvetett megfertőzhetőség feltétele azt jelenti, hogy feltehetjük a rendszer irreducíbilitását is. Így egy szigorúan monoton folyamhoz jutunk. (Lajmanovich és Yorke egyenletei speciális alakúak

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j (P_i - x_i) K_i x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol $A_{ij} \geqq 0$, $K_i > 0$ valós állandók, és $[A_{ij}]$ irreducíbilis.) Így a monoton folyamok általános elmélete alkalmazható ezekre az egyenletekre, a részletesebb tárgyalás a 6. §-ban következik. Az együttműködő, illetve versengő rendszerek, mint biológiai modellek, tanulmányozásához az olvasó többek között az alábbi munkákhoz fordulhat: A. Rescigno és I. Richardson (1967), A. N. Kolmogorov (1936), S. Grossberg (1978), S. Smale (1976), W. Leonard és R. May (1975), P. Waltman (1983), H. Freedman (1980), S. Hsu és mások (1978), H. Freedman és P. Waltman (1984), J. Coste és mások (1979).

1.9. PÉLDA. Legyen $M\subset R^n$ egy n-dimenziós kompakt részsokaság sima határral. (Ebben a példában a „sima" a C^4 osztályhoz tartozást jelent.) Tekintsünk egy félineáris parabolitikus egyenletet az M-en.

(1) $$\partial u/\partial t = Au+f(x, u, \nabla u) \quad (t>0,\ x\in M)$$

valamelyik peremfeltétellel

(2) $$u|\partial M = 0 \quad \text{(Dirichlet)}$$

vagy

(3) $$\nabla u\cdot v = 0 \quad \text{(Neumann)}.$$

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_iD_j$$

egyenletesen elliptikus másodrendű differenciáloperátor, $[a_{ij}]$ sima valós értékű függvények mátrixa az M-en, pozitív definit minden pontban, $D_i=\partial/\partial x_i$, a ∇u vektorfüggvény az $u(x, t)$ $(D_1u, \dots, D_nu)$ gradiensét jelenti az x-ben, v pedig v: $\partial M\to R^n$ egy sima, ∂M-re transzverzális vektormező. Az f: $M\times R\times R^n\to R$ függvény sima és a Dirichlet peremfeladat esetén kielégít bizonyos kompatibilitási feltételeket. Az ismeretlen u függvény u: $M\times[0, \tau]\to R$ folytonos valamely $\tau>0$-ra és kielégíti (1), illetve (2) vagy (3) feltételeket.

Régóta ismert, hogy megfelelő technikai feltételek teljesülése esetén minden észszerű W: $M\to R$ kezdeti függvény esetén az (1)-nek egyetlen megoldása van, melyre $u(x, 0)=w(x)$. A $\varphi_t(w)=u(\,.\,, t)$ választással úgy tűnik, egy folyamot kapunk, de még előttünk van annak a függvénytérnek a részletezése, ahol a folyam hat. Mostanság divatos valamiféle általánosított megoldásokat találni L_p terekben. A kapott folyamok monotonok, de nem lehetnek szigorúan monotonok, mivel az ilyen terek nem erősen rendezettek. Ha *több* simaságot tételezünk fel, akkor elkerüljük annak a kockázatát, hogy a „folyam" nem folytonos.

Szerencsére X. Mora (1983) egy nemrégen megjelent dolgozatában elegánsan elkerüli ezeket a nehézségeket és a C^0, illetve C^1 terekben talál a peremfeltételeket kielégítő függvényeket. A szokásos maximum elvből következik, hogy ezek a folyamok monotonok vagy szigorúan monotonok (pl. M. Protter és H. Weinberger [1967] 12. tétel a 187. oldalon, illetve 14. tétel a 190. oldalon). Mora eredményeiből (melyek általánosabb fajta parabolikus egyenleteket érintenek) az alábbi eredményt kapjuk:

1.10. TÉTEL. (a) *Az* (1), (3) *Neumann-probléma megoldásai egy szigorúan monoton* φ *folyamot határoznak meg a* $C^0(M)$*-ben, illetve a* $C^1_v(M)$ *az összes* (3) *feltételt kielégítő* C^1 *függvények terében is. Az utóbbi folyam* C^1, *azaz minden* φ_t *leképezés Fréchet deriváltja folytonos.*

(b) *Az* (1), (2) *Dirichlet-probléma egy monoton folyamot ad meg* $C^0_0(M)$*-en, feltéve, hogy* $f(x, 0, y)=0$ *minden* $x\in M$, $y\in R^n$ *esetén.*

(c) *Az* (1), (2) *Dirichlet-probléma megoldásai* C^1_0 (M)*-ben egy szigorúan monoton folyamot határoznak meg, feltéve* $f(x, 0, y)=0$ minden $x\in\partial M$, $y\in R^n$-re. Ha még $Df(x, 0, y)(0, 0, z)=0$ minden $(x, y, z)\in\partial M\times R^n\times R^n$-re, akkor ez a folyam C^1.

További példák találhatók monoton folyamokra Hirsch (1983) munkájában.

2. Konvergenciakritérium monoton folyamok esetére

Az Isten, aki figyeli a kéziratokba, nyomtatványokba, táblára írt matematikai szimbólumok helyes használatát, bocsássa meg ezt és több más bűnömet.

H. Weyl, The classical groups, 289. o.

Ebben a részben (és továbbá a dolgozat végéig) X jelöljön egy erősen rendezett teret. A következő jelöléseket használjuk: Ha A, $B \subset X$ részhalmazok, akkor $A < B$ azt jelenti, hogy $a < b$ minden $a \in A$, $b \in B$-re; és hasonlóan $A \ll B$, $A \leqq B$, stb. Ha $x \in X$, akkor az $x < B$ és ehhez hasonló jelölések értelme nyilvánvaló.

Az $[[x, y]]$ *nyílt rendezett intervallum*

$$[[x, y]] = \{z \in X: x \ll z \ll y\}.$$

Az $[x, y]$ *zárt rendezett intervallum*

$$[x, y] = \{z \in X: x \leqq z \leqq y\}.$$

(Ha $x \ll y$, akkor $[x, y]$ az $[[x, y]]$ lezártja.)

Továbbá definiáljuk

$$[[A, B]] = \{z \in X: A \ll z \ll B\}.$$

Legyen $S \subset X$ tetszőleges halmaz. Az S *maximális eleme* egy olyan $s \in S$ pont, melyre ha $x \in S$ és $x \geqq s$, akkor $x = s$. A *minimális elemek* hasonlóan definiálhatók. A Zorn-lemmából könnyen következik, hogy X *minden nem üres kompakt részhalmazának van minimális, illetve maximális eleme.*

X egy *háló*, ha bármely két elemének van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. Könnyen belátható, hogy minden kompakt részhalmaznak van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja.

Egy erősen rendezett X térnek megfeleltetünk egy másik $\hat{X}$ topologikus teret. $\hat{X}$ alaphalmaza X, míg a topológiát az $[[a, b]]$ nyílt rendezett intervallumok generálják. Ennek a *rendezési topológiának* a nyílt halmazai ugyancsak nyíltak az eredeti topológiában is. Az eredeti rendezés $\hat{X}$-t egy erősen rendezett térré teszi. A környezeteket $\hat{X}$-ban *rendezési környezeteknek* nevezzük. Az $X \to \hat{X}$ identitás leképezés folytonos és monoton. Megjegyezzük, hogy $x \ll y$ ugyanazt jelenti X és $\hat{X}$-ban.

Ha X egy erősen rendezett topologikus vektortér, akkor a rendezési topológiát egy normával definiáljuk. Rögzítsünk le egy $e \gg 0$ elemet X-ben és legyen definíció szerint

$$\|x\|_e = \inf \{t > 0: t^{-1}x \in [[-e, e]]\}.$$

Annak az ellenőrzését, hogy ez egy jól definiált norma, amelyik a rendezési topológiát indukálja, meghagyjuk gyakorlatnak az olvasó számára. Ha M egy kompakt sokaság, $X = C^1(M)$, akkor a rendezési topológia megegyezik a C^0 topológiával a C^1 (M)-en. De ha $\partial M = \emptyset$ és $X = C_0^1(M)$, akkor a rendezési topológia finomabb a C^0 topológiánál. Sajnos ezekre a finomságokra nem térünk ki ebben a dolgozatban.

Mivel az identitás leképezés X-ből $\hat{X}$-be folytonos, minden $K \subset X$ kompakt esetére a rendezési topológia K-n ugyanaz, mint az eredeti topológia. Innen következik egy hasznos megjegyzés:

2.1. LEMMA. *Legyen* $\{x_i\}$ *egy sorozat az erősen rendezett* X *tér egy* K *kompakt részhalmazában. Tegyük fel, hogy* $p \in X$*-re, ha* $a \ll p \ll b$*, akkor létezik olyan* i_0*, melyre* $a \ll x_i \ll b$ *minden* $i > i_0$*-ra. Akkor* $\lim_{i \to \infty} x_i = p$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $K \cup \{p\}$ kompakt, elegendő belátni a konvergenciát a rendezési topológiában; ez pedig a tétel feltétele. Q. E. D.

A következő eredmény szerint egy X-ben monoton φ folyam folytonos X-ben. (Ugyanazok a φ_t leképezések definiálhatnak egy folyamot $\hat{X}$-ban leszámítva azt a lehetőséget, hogy a folyam $X^\#$ értelmezési tartománya nem nyílt halmaz $[0, \infty] \times \hat{X}$-ban.)

2.2. LEMMA. *Legyen* $X^\# \subset [0, \infty] \times X$ *az* X*-beli* φ *monoton folyam értelmezési tartománya. Jelöljük* $\hat{X}^\#$*-tel az* $X^\#$ *halmaz által elfoglalt részteret* $[0, \infty] \times \hat{X}$*-ban. Akkor* φ *folytonos, mint* $\hat{X}^\# \to X$*-be való leképezés.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\varphi(t_0, x_0) \in [[a, b]]$. Mivel φ folytonos, a (t_0, x_0)-nak létezik egy olyan $I \times W \subset [0, \infty] \times X$ környezete, hogy $\varphi(I \times W) \subset [[a, b]]$. Rögzítsük le u, v-t W-ben úgy, hogy $u \ll x_0 \ll v$ (felhasználva az erősen rendezett terek (SO 1) tulajdonságát). Mivel minden φ_t megőrzi a rendezést, minden $(t, x) \in I \times [[u, v]]$-re

$$a \ll \varphi(t, u) \ll \varphi(t, x) \ll \varphi(t, v) \ll b.$$

Így

$$\varphi(I \times [[u, v]]) \subset [[a, b]]. \quad \text{Q.E.D.}$$

Ezen rész folytatásában φ monoton folyamot jelöl X-ben. Az alábbi konvergenciakritérium hasznos, mint az egyensúlyi helyzetek létezését biztosító tétel.

2.3. TÉTEL. *Legyen az* $x \in X$ *pályájának lezártja kompakt és tegyük fel, létezik olyan valós* $T > 0$*, melyre* $x(T) \gg x$ *vagy* $x(T) \ll x$*. Akkor* $x(t)$ *konvergál (szükségszerűen egy egyensúlyi helyzethez), ha* $t \to \infty$.

2.3. bizonyítása előtt megfogalmazunk néhány következményt.

2.4. KÖVETKEZMÉNY. *Monoton folyamnak nincsen határciklusa.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $C \subset X$ periodikus pálya, amelyik vonzza a C egy N környezetét. Válasszunk egy tetszőleges $p \in C$ és $x \in N$-et, melyre $x \gg p$. Mivel x tart C-hez, innen következik $\omega(x) = C$; többek között $p \in \omega(x)$. Így létezik olyan $T > 0$, hogy $x(T)$ benne van a p alábbi W környezetében: $W = \{z \in X\colon z \ll x\}$. Mivel $x(T) \ll x$, a 2.3. tétel szerint $\omega(x)$ egyetlen pont, így C $\{p\}$-vé zsugorodik és nem lehet ciklus. Q. E. D.

2.5. KÖVETKEZMÉNY. *Egy* $X \subset R^3$ *nyílt halmazon megadott monoton folyamnak nem lehet csomózott ciklusa vagy két összekötött ciklusa.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $C \subset R^3$ ciklus φ-re. Legyen $E^2 \subset R^3$ az $(1, 1, 1)$ vektorra merőleges sík és legyen $\pi\colon R^3 \to E^2$ merőleges vetítés. π/C injektív kell legyen. Ha két különböző x, y-ra C-ből $\pi(x) = \pi(y)$, akkor $y = x(T)$ valamely $T > 0$-ra és mivel $y - x$ egy valós érték szorozva $(1, 1, 1)$-gyel, így vagy $x(T) \gg x$ vagy $x(T) \ll x$. De akkor $x(t)$-nek konvergensnek kell lennie és C nem lehet ciklus. π injektivitása azt jelenti, hogy nincs csomó a C-n. A bizonyítás másik részét (összekötött ciklusok) meghagyjuk gyakorlatnak. Q. E. D.

Ezeket az eredményeket Hirsch (1982) általánosította.

A 2.3. tétel bizonyítása hasznos stacionáriusságot garantáló kritériumra épül.

2.6. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $x \ll y$ és létezik egy $t_i \to \infty$ sorozat, melyre $x(t_i)$ és $y(t_i)$ p-hez tart a rendezési topológiában. Tegyük fel, hogy létezik olyan $z \in [[x, y]]$, hogy $z(t)$ értelmezett minden $t \geqq 0$-ra. Akkor p stacionárius.*

BIZONYÍTÁS. Rögzítsük le $\delta > 0$-t olyan kicsi értékre, hogy $z(t) \in [[x, y]]$ minden $t \in [[0, \delta]]$ esetén. Akkor $x(t_i) \leqq z(t_i + t) \leqq y(t_i)$ minden $t \in [0, \delta]$ és minden i-re. Innen következik, ha $i \to \infty$ a $z(t_i + t)$ sorozat tart p-hez a rendezési topológiában minden $t \in [0, \infty]$-re. Többek között $z(t_i) \to p$ X-ben. Mivel minden φ folytonos X-ben $z(t_i + t) \to p(t)$ minden $t \in [0, \delta]$-ra. Így $p(t) = p$ minden $t \in [0, \delta]$ esetén, ahonnét p stacionárius.

A 2.3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Tegyük fel $x \ll x(T)$, a másik eset bizonyítása hasonlóan történik. Legyen p az $\{x(mT): m \in Z_+\}$ egy határpontja. Akkor az $\{x(mT)\}$ sorozat nyilvánvalóan tart p-hez a rendezési topológiában $m \to \infty$ esetén, mivel φ monoton leképezés. A 2.6. lemmát x és $y = x(T)$-re $t_i = iT$, $i \in z_+$ értékekkel alkalmazva azt kapjuk, hogy p stacionárius. Az $x(t) \to p$-hez X-ben igazolásához elegendő belátni a konvergenciát $\hat{X}$-ban, mivel $\bar{O}(x)$ kompakt. E célból elég bizonyítani, hogy minden nem korlátos $\{s_j\}$ sorozatra az R_+-ban az $\{x(s_j)\}$ sorozatnak van egy részsorozata ($\{s_j\}$-vel átindexelve,) hogy $s_j = n_j T + r_j$, $n_j \in z_+$ és $r_j \in [0, T]$, melyre létezik $\lim_{j \to \infty} r_j = r \in [0, T]$. Legyen $y_i = x(n_j T)$ és figyeljük meg, hogy a φ folytonosságából a rendezési topológiában következik $y_j(r_j) \to p(r)$ $\hat{X}$-ban. Mivel $y_j(r_j) = x(s_j)$ és $p(r) = p$, a bizonyítás teljes. Q. E. D.

Az előbbi bizonyításban p rendelkezett egy speciális tulajdonsággal, pontosan $y(t) \to p$, ha $y \in [[x, x(T)]]$ és y pályájának lezártja kompakt. Így, amikor minden pálya lezárása kompakt — úgy nem ritka esetben — p valamely nem üres nyílt halmaz minden elemét vonzza. Az ilyen p-t csapdának nevezzük. Ha X Banach-tér és minden φ_t leképezés deriválható, akkor innen következik, hogy a $D\varphi_i(p)$ X-en tekintett lineáris operátor spektruma benne van a zárt egységkörben. Ha φ sima folyam az R^n-ben (melyet egy F sima vektormező generált), akkor div $F(p) = 0$. Ebben az esetben, F-re vonatkozó általános feltételek mellett, p egy nyelő.

3. Egyensúlyi helyzetek monoton folyamok attraktoraiban

> Egy gondolat, melyet egyszer lehet használni, az egy trükk, ha egynél többször alkalmazható, akkor módszerré válik.
>
> Pólya Gy. és Szegő S. (1971)

Ebben a részben φ egy monoton folyam az erősen rendezett X térben, $K \subset X$ φ attraktora (lásd II. fejezet 1. §.).

3.1. TÉTEL. *K tartalmaz egyensúlyi helyzetet.*

A bizonyítás felhasználja Birkhoff elvét a nem vándorló pontokról. A z nem vándorlópont, ha léteznek $z_i \to z$ X-ben és $t_i \to \infty$ R_+-ban sorozatok, melyekre $z_i(t_i) \to z$. Ezek magukban foglalják az összes omega határpontokat. Minden kompakt invariáns halmaz tartalmaz legalább egy nem vándorló pontot. A nem vándorló pontok halmazát Ω-val jelöljük.

Az $\Omega \cap K$ kompakt, invariáns és nem üres. Minden $z \in \Omega \cap K$-ra vannak olyan p, q maximális és minimális elemek az $\Omega \cap K$-ból, hogy $p \leqq z \leqq q$.

A 3.1. tétel következik az alábbi precízebb megfogalmazásból.

3.2. TÉTEL. *Legyen $p \in \Omega \cap K$ egy tetszőleges minimális elem. Ekkor p egyensúlyi helyzet és létezik $y \ll p$, melyre $y(t) \to p$. Hasonló eredmény igaz a maximális elemekre is.*

BIZONYÍTÁS. Válasszunk olyan $z_i \to p$ (X-ben) és $t_i \to \infty$ (R-ben) sorozatokat, hogy $z_i(t_i) \to p$. Legyen y a K medencéjében és $y \ll p$ (felhasználva az 1. §. (SO 1) tulajdonságát). Akkor $y \ll z_i$, ha i elég nagy. Áttérve egy részsorozatra, ha szükséges, feltesszük, hogy $y(t_i)$ tart valamely $x \in K$-hoz. A monotonitás miatt $y(t_i) \leqq z_i(t_i)$, így a folyam folytonossága miatt $x \leqq p$; és $x \in \Omega \cap K$, ahonnan $x = p$ p minimalitása miatt. Q. E. D.

A bizonyítás mutatja, hogy a maximális és minimális egyensúlyi helyzetek a K-ban csapdák (lásd a 2. §. végét). Ha a K minden egyensúlyi helyzete egyszerű, akkor ezek az extremálisok nyelők, innen következik, hogy a mozgás K-ban nem lehet nagyon kaotikus.

3.2. másik alkalmazása a

3.3. TÉTEL. *Ha K csak egyetlen p egyensúlyi helyzetet tartalmaz, akkor minden K-hoz tartó trajektória p-hez konvergál.*

BIZONYÍTÁS. Legyen x a K medencéjében. Legyen $z \in \omega(x)$ tetszőleges. 3.2. szerint a K-ban vannak olyan p_1, p_2 egyensúlyi helyzetek, melyekre $p_1 \ll z \ll p_2$. De $p_1 = p_2 = p$, így $\omega(x) = \{p\}$. Q. E. D.

4. Szigorúan monoton folyamok stabilis egyensúlyi helyzetei

> ... még az elég egyszerű ismert példák strukturálisan stabilis attraktorai is periodikus, majdnem periodikus, homoklinikus és másfajta mozgások bonyolult keverékét alkotják.
>
> S. Smale (1971)

A célunk ebben a részben azt bebizonyítani, hogy a szigorúan monoton folyamok minden attraktora tartalmaz egy bizonyos módon stabilis egyensúlyi helyzetet (4.1. tétel).[2]

φ legyen *szigorúan* monoton folyam egy erősen rendezett X térben. Tegyük fel továbbá, hogy minden pálya lezárása kompakt (és így minden φ_t globálisan értelmezett). Az 1. §-ban vizsgált példákban az ilyen kompaktság gyakran teljesül. Ha $X = R^n$ ez azt jelenti, hogy minden pálya korlátos (időben előre). Az 1.9. példa és az 1.10. tétel féllineáris parabolikus egyenletére a megoldásfolyamra tett jól ismert simasági feltételekből következik, hogy minden az $L^2(M)$ normában korlátos pálya lezárása kompakt X-ben.

[2] Egy hasonló eredményt bizonyított függetlenül H. Matano, aki volt olyan kedves egy külön lenyomatot küldeni nekem.

A stabilitás — a legfőbb téma a dinamikai rendszerek elméletében — változó fogalom, elkerülhetetlenül növekvő számú „különböző definícióval" rendelkezik. Mielőtt lerögzítenénk a pontos terminológiát, hasznos lehet nagyjából megfogalmazni egy p egyensúlyi helyzet kétféle fontos, általános stabilitásának a fogalmát. Ha a p-hez közeli pontokból induló pályák nem távolodnak el p-től nagyon messzire, akkor p-t egyszerűen „stabilisnak" nevezzük. Ha még ezek a pályák mind p-hez tartanak, akkor p-t „aszimptotikusan stabilis"-nak hívjuk. Ezeknek a szavaknak a pontos jelentése függ az X állapottér topológiájától. Jelen összefüggésben, ha a rendezési topológiát akarjuk alkalmazni, ez esetben a „rendezési" kiegészítést használjuk. Gyakorlatilag előnyös lesz gyengébb stabilitásfajtákat vizsgálni, melyekkel csak a p-nél nagyobb ($\geqq p$) vagy kisebb ($\leqq p$) trajektóriáktól követeljük meg a p közelében maradást; ilyenkor a „felső", illetve „alsó" pontosítót használjuk.

Egy hatásos stabilitás alapdefiníció a következő. Legyen $\mathcal{S}$ az X részhalmazainak valamilyen családja. Azt mondjuk, hogy φ $\mathcal{S}$-stabilis, ha minden $Q_0 \in \mathcal{S}$-re létezik $Q_1 \in \mathcal{S}$, hogy $\varphi_t(Q_1) \subset Q_0$ minden $t \geqq 0$.

Konkretizálva $\mathcal{S}$-t különböző stabilitási típusokat kapunk, többek között az alábbiakat. A p egyensúlyi helyzet

stabilis, ha $\mathcal{S} = \{p$ *környezetei*$\}$,
rendezési stabilitás, ha $\mathcal{S} = \{p$ *rendezési környezetei*$\}$,
felső rendezési-stabilis, ha $\mathcal{S} = \{[p, v] : v \gg p\}$,
alsó rendezési-stabilis, ha $\mathcal{S} = \{[u, p] : u \ll p\}$.

Adott $\mathcal{S}$ esetén p-t *aszimptotikusan* $\mathcal{S}$*-stabilisnak* mondjuk, ha p $\mathcal{S}$-stabilis és ha létezik $Q_* \in \mathcal{S}$: tetszőleges $Q \in \mathcal{S}$-re $\varphi_t(Q_*) \subset Q$ minden elég nagy $t > 0$-ra. Így mind a négy, itt felsorolt stabilitásfogalomnak van egy erősebb, aszimptotikus formája.

Az R^n-beli folyamokra a stabilitási és rendezési stabilitási fogalmak ekvivalensek csakúgy, mint az aszimptotikus változataik. Ez általában nem igaz általánosabb erősen rendezett terekben, de a φ *rendezési — kompakt* kiegészítő feltétel mellett érvényben marad. Ez azt jelenti, $\varphi_t[[a, b]]$ lezárása kompakt minden $t > 0$-ra és minden $[[a, b]]$ nyílt rendezési intervallumra.

A φ rendezési kompaktságának bizonyítása, ami egyenlővé teszi p rendezési stabilitását a stabilitással, a következő ötleten alapszik. A rendezési kompaktságból következik, hogy $\varphi_r(X)$ rögzített $r > 0$-ra, X és $\hat{X}$-től ugyanazt a topológiát örökli (lásd 2. §.). Így a két stabilitási fogalom egybeesik φ $\varphi_r(X)$-en levő leszűkítésén, ez pedig felhasználható a bizonyítás befejezéséhez.

A $\partial u/\partial t = Au + f(x, u, \nabla u)$ parabolikus egyenlet Neumann vagy Dirichlet peremfeltételek mellett a $C_v^1\,(M)$, illetve a $C_0^1(M)$ függvényterekben, megfelelően, generál egy szigorúan monoton folyamot, ha az 1.9. példa és az 1.10. tétel (a) vagy (c) feltételei teljesülnek. Tudva ezen folyamok simasági tulajdonságait, igazolható a rendezési-kompaktság, ha $f = f(x, u)$. Hirsch (1983) tovább tárgyalja ezt az esetet.

4.1. TÉTEL. *Egy szigorúan monoton folyam minden K attraktora tartalmaz rendezési-stabilis egyensúlyi helyzetet. Ha* φ *rendezési kompakt, K tartalmaz stabilis egyensúlyi helyzetet.*

A bizonyítás azon a megfigyelésen alapszik, *hogy a* 2.3. *tétel konvergenciakritériuma alapján kapott egyensúlyi helyzetek aszimptotikusan felső vagy alsó rendezési-stabilisak,* amint az könnyen következik a definíciókból. Több között, bármely (a 3.2.

által ígért) minimális egyensúlyi helyzet a K-ban alsó rendezési stabilis, és analóg állítás igaz a maximálisakra is.

Minden $p \in K \cap E$-re definíció szerint

$$L(p) = \operatorname{clos} \bigcup \{\omega(x) \colon x \gg p\}.$$

Könnyen látható, hogy $L(p)$ teljesen invariáns, azaz

$$\varphi_t L(p) = L(p), \quad \text{minden} \quad t \geqq 0\text{-ra}.$$

4.2. LEMMA. (a) *Ha $p \in L(p)$, akkor p felső rendezési stabilis.*

(b) *Ha $p \notin L(p)$, akkor létezik egy $q \gg p$ egyensúlyi helyzet a K-ban, mely aszimptotikusan alsó rendezési-stabilis.*

BIZONYÍTÁS. (a) Tegyük fel $p \in L(p)$. Ha $p \in \omega(x)$ $x > p$-re, akkor 2.3.-ból következik, hogy p felső rendezési stabilis. Egyébként minden $v \gg p$ esetén létezik $x > p$ és $y \in \omega(x) \cap [[p, v]]$ olyan, hogy $p \notin \omega(x)$. Akkor $p < \omega(x)$ és a teljes invariancia, illetve a szigorú monotonitás miatt $p \ll \omega(x)$. Rögzítsünk le egy $u \in [[p, \omega(x)]]$ pontot. A szigorú monotonitásból minden $t \geqq 0$-ra

$$\varphi_t [p, u] \subset [p, \omega(x)]$$

és így

$$\varphi_t [p, u] \subset [p, v].$$

Ez bizonyítja, hogy p felső rendezési stabilis.

(b) Tegyük fel, hogy $p \notin L(p)$. Akkor $p < L(p)$ és a teljes invariancia miatt $p \ll L(p)$. Vegyünk egy $z \in [[p, L(p)]]$ pontot. Akkor $\omega(z) \subset L(p)$, ahonnan $z \ll \ll \omega(z)$. 2.3. miatt $z(t)$ tart egy egyensúlyi helyzethez $q \gg z \gg p$, és egy ilyen q aszimptotikusan alsó rendezési stabilis kell legyen. Q. E. D.

A 4.1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. 3.2. miatt K tartalmaz egy aszimptotikusan alsó rendezési-stabilis minimális egyensúlyi helyzetet. Legyen p egy maximális eleme a $H = \operatorname{clos} \{y \in K \cap E \colon y \geqq p_0$ és y alsó rendezési-stabilis$\}$ kompakt, nem üres (mivel tartalmazza p_0-t) halmaznak. Akkor $p \in K \cap E$ és könnyen igazolható, hogy p alsó rendezési-stabilis. A p maximalitása kizárja a 4.2. lemma (b) részét, így 4.2. (a) van érvényben. Eszerint p mind alsó, mind felső rendezési-stabilis. Q. .E. D.

Hasonlóan a 3.1. tételhez a bizonyítás több információt tartalmaz. Például, ha K csak egy rendezési stabilis egyensúlyi helyzetet tartalmaz, akkor a K medencéjében minden pályának konvergálnia kell. Ez az alábbi eredmény következménye.

4.3. TÉTEL. *Legyen K a φ szigorúan monoton folyam egy attraktora. Tegyük fel, hogy z tart a K-hoz, de nem kvázikonvergens. Akkor K tartalmaz két rendezési stabilis egyensúlyi helyzetet, p, q-t, melyekre $p \ll \omega(z) \ll q$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $B = \{x \in K$ medencéje: $x \ll \omega(z)\}$. B nem üres. A feltétel szerint létezik $y \in \omega(z) \setminus E$. Mivel y nem vándorló, K tartalmaz egy $b < y$ egyensúlyi helyzetet, így $\ll \omega(z)$, a 2.3. tétel miatt. Világos, hogy $b \in B$.

Legyen $K_0 = \operatorname{clos} U\{\omega(x) \colon x \in B\}$. K_0 attraktor, a medencéje B és $K_0 \ll \omega(z)$ a teljes invariancia miatt. Hasonlóan létezik egy $K_1 \gg \omega(z)$ attraktor is. Alkalmazzuk a 4.1. tételt K_0 és K_1-re. Q. E. D.

Ennek a résznek az eredményei tovább világossá teszik, hogy a monoton folyamoknak nem lehet kaotikus mozgásuk: egy egyensúlyi helyzetet tartalmazó attraktorban nem lehet sűrű pálya (hacsak nem egyetlen egyensúlyi helyzetről van szó), se a ciklusok nem lehetnek sűrűek K-ban.

5. Majdnem mindenütt konvergencia szigorúan monoton folyamokban

A rekurens mozgások tárgyalásánál H. Poincaré bevezeti egy olyan tulajdonság alapvető fogalmát, amely anélkül, hogy igaz lenne az összes lehetséges mozgásra, 1 valószínűséggel megvalósul.

G. D. Birkhoff és B. O. Koopman (1932)

Itt φ egy szigorúan monoton folyam az erősen rendezett X térben; az egyensúlyi helyzetek halmazát szokásosan E-vel jelöljük. A rövidség érdekében sok bizonyítást elhagyunk.

Az alapvető munkaeszközünk a *határhalmaz dichotómia (kettősség)* lesz.

5.1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $x<y$. Legyen x és y pályáinak lezárása kompakt. Akkor a következő lehetőségekből pontosan egy áll fenn:*

(a) $$\omega(x) \ll \omega(y)$$

(b) $$\omega(x) = \omega(y) \subset E.$$

Másszóval (a) *áll fenn, hacsak x és y nem kvázikonvergensek.*

Arra az esetre, amikor X az R^n egy nyílt halmaza, a bizonyítás megtalálható Hirsch (1983 a) dolgozatában.

Az 5.1. tétel intuitiven azt jelenti, hogy a nem stacionáris pontokat tartalmazó határhalmazok sok helyet foglalnak el a térben. Néhány további feltételezés mellett ez a gondolat kiterjeszthető annak az igazolásáig, hogy a pályák „többsége” kvázikonvergens.

A következő tételekben legyen $S\subset X$ egy nem üres egyszerűen rendezett részhalmaz, amely minden eleméhez tartozó pálya lezárása kompakt. Legyen $L\subset X$ egy az $\bigcup_{x\in S}\omega(x)$-et tartalmazó halmaz. (Például X lehet egy rendezett Banach-tér, L egy attraktor, S pedig egy pozitív vektorral párhuzamos egyenes szakasz.) Legyen $S_0\subset S$ a nem kvázikonvergens pontok halmaza.

Az alábbi eredmény, a legfontosabb ebben az egész részben, feltétele teljesül, ha X egy szeparábilis Banach-tér, pl. $C^r(M)$ egy résztere.

5.2. TÉTEL. Ha L topológiájának van megszámlálható bázisa, akkor S_0 megszámlálható.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, S_0 nem megszámlálható. Legyen $z(x)\in\omega(x)$ minden $x\in S_0$-ra (felhasználva a kiválasztási axiómát). Az 5.1. határhalmaz dichotómia miatt az $B=\{z(x):\ x\in S_0\}$ halmaz egyszerűen rendezett a $\ll$ relációval. Mivel B második kategóriájú halmaz, tartalmazza egy torlódási pontját, mondjuk $z_0=z(x_0)$-t, valamely $x_0\in S_0$-ra.

Feltesszük, hogy z_0 a $\{z(x):\ x\in S,\ x\gg x_0\}$ torlódási pontja, a másik eset hasonlóan tárgyalható. Következik, hogy $z_0\gg\omega(x_0)$, mivel $\omega(x)\gg\omega(x_0)$ minden

$x \in S_0$, $x \gg x_0$-ra. De mivel $z_0 \in \omega(x_0)$, adódik, hogy x_0 konvergens, ellentmondás. Q. E. D.

Az 5.2. tétel intuitív jelentése az, hogy majdnem minden pontra (mely pályájának lezárása kompakt) a trajektória kvázikonvergens. Amikor X az R^n egy nyílt részhalmaza, ez az állítás gyakorlati értelemben igaz:

5.3. TÉTEL. *Legyen φ az $X \subset R^n$ nyílt részhalmazon megadott szigorúan monoton folyam, mely minden pályájának a lezártja kompakt. Akkor a nem kvázikonvergens pontok (melyek pályáinak lezárása kompakt) Y halmazának mértéke* 0.

BIZONYÍTÁS. Legyen $E^{n-1} \subset R^n$ egy $v \gg 0$ vektorra merőleges hipersík. Az 5.2. tételből következik, hogy minden E^{n-1}-re merőleges egyenes metszi Y-t egy megszámlálható és így nullmértékű halmazán. Mivel Y könnyen igazolhatóan Borel-halmaz, Fubini tételéből következik, hogy Y mértéke 0. Q. E. D.

Egy kicsit erősebb, de természetes, feltételek mellett az 5.2. tételbeli S_0-ról beláthatjuk, hogy még ritkább.

5.4 TÉTEL. *Ha L kompakt, vagy háló az indukált rendezésben, akkor S_0 diszkrét a relatív topológiájában és $S \setminus S_0$ minden pontja konvergens.*

5.5. TÉTEL. *Ha E számossága véges $|E|$, akkor ez igaz S_0-ra is és* $|S_0| \leqq |E|+1$.

A csak véges sok egyensúlyi helyzetet tartalmazó attraktorok esetére pontosíthatjuk, javíthatjuk 4.1. tételünket. A határhalmaz dichotómia és a 4.1. tétel bizonyításához hasonló fejtegetések felhasználásával bizonyítható, hogy egy attraktorban bármely izolált rendezési-stabilis egyensúlyi helyzet aszimptotikusan rendezési-stabilis kell legyen.

5.6. TÉTEL. *Legyen $K \subset X$ attraktor, $K \cap E$ véges .Akkor K tartalmaz aszimptotikusan rendezési-stabilis egyensúlyi helyzetet.*

6. Alkalmazások a gonorea modell és egy parabolikus egyenlet esetére

A sikeres tudomány elvonatkoztat: mindabból, ami érdekes, csak egy részt tudunk megmagyarázni, és csak a rész egy részét komolyan matematikailag vizsgálni.

D. Berlinski (1976), 85. o.

Néhány korábbi eredmény szemléltetésére visszatérünk az 1.8. példa szigorúan monoton rendszerére

$$dx_i/dt = R_i(x) - C_i(x_i) \equiv F_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

amelyik a Lajmanovich és Yorke által vizsgált

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(P_i - x_i)x_j - K_i x_i \equiv H_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

speciális eset általánosítása.

A (2) rendszer tulajdonsága, hogy $dx_i/dt \geqq 0$, ha $x_i = 0$ és $dx_i/dt < 0$, ha $x_i = P_i$. Ezeknek a feltételeknek teljesülniük kell, ha a rendszernek biológiai értelmet akarunk tulajdonítani, hiszen a fertőzöttek száma nem mehet 0 alá, illetőleg nem nőhet túl P_i-n. Ennek megfelelően magától értetődik ugyanezeket a tulajdonságokat megkövetelni az (1) egyenlettől. Ez a $W=\{x\in R^n\colon 0\leqq x_i\leqq P_i,\ i=1,\dots,n\}$ kompakt halmazt invariánssá teszi a folyamra, így minden pálya lezárása a W-ben kompakt. A W-n kívüli pályáknak nincsen biológiai jelentése.

További feltételek nélkül látjuk, hogy az (1), illetve (2) folyamok W-ben erősen hajlamosak a konvergenciára: az 5.3. tételből látjuk, hogy majdnem minden $x\in W$ kezdeti fertőzöttségi szintről induló járvány az E egyensúlyi helyzetek halmaza felé halad — azaz gyakorlatilag a fertőzöttségi szint stabilizálódni fog (ha ez a modell igaz).

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az R_i fertőzési ráták és a C_i gyógyítási ráták olyanok, hogy a nagyon alacsony fertőzöttségi szint nő, azaz $F(x)\gg 0$, ha $x>0$ és $|x|$ (euklideszi norma) elég kicsi. Könnyen látható, hogy W belsejében kell lennie egy attraktornak és a 4.1. tétel szerint létezik egy stabilis egyensúlyi helyzet, amelyben minden fertőzöttségi szint pozitív.

A (2) egyenleteknek van azonban egy jóval érdekesebb tulajdonságuk. Lajmanovich és Yorke bebizonyították, hogy az R^n-ben vagy minden trajektória a 0-hoz tart, vagy van egy $p\gg 0$ egyensúlyi helyzet és minden $R^n_+\setminus\{0\}$-beli trajektória p-hez tart. Többek között, a fertőzöttségi szintek nem oszcillálnak, függetlenül attól, mik voltak a kezdeti szintek. (Ez igaz majdnem minden kezdeti szintre az (1) általánosabb modellben.)

A tényleges adatok azonban egy évenkénti oszcillációt mutatnak. Aronsson és Mellander (1980) megengedi az A_{ij} érintkezési rátákra a periodikus függvényeket is; megmutatják; vagy minden pálya kihal, vagy tart az R^n_+-ban levő egyetlen ciklushoz. Így az oszcillációk a környezet periodikus változásait tükrözik csak vissza, a dinamika jellege megmarad.

Lajmanovich és Yorke modelljének biológiai magyarázata világos: periodikus környezeti változások hiányában a betegség vagy elmúlik, vagy stabilizálódik egy pozitív fertőzöttségi szinten mind az n csoportban. Továbbá a stabilizálódási szint vektora egyértelmű (mert nincs több egyensúlyi helyzet az $R^n_+\setminus\{0\}$-ban).

Ez a nem triviális eredmény egyáltalán nem nyilvánvaló se az (1) egyenletekből, se az őket motiváló biológiai feltételekből. A fő érdekessége nem annyira a valóság részletes leírásában van (ami nem is), de abban, hogy bepillantást ad a járvány lefolyására, illetve a biológiai feltételezések és következtetések közötti kapcsolatra.

Használhatjuk a matematikai modellt annak a tanulmányozására is, hogy a különböző adatok változtatása milyen hatással van a fertőzöttségi szintekre. Többek között Hethcote és társai (1982) különböző stratégiákat dolgoztak ki ezen szintek alacsonyan tartására.

A modell egyik meglepő jellegzetessége a $p\gg 0$ egyensúlyi helyzet egyértelműsége. Biológiailag nem nyilvánvaló, miért nem lehet több ilyen egyensúly, például alacsony kezdeti fertőzöttségi szintek mellett végül is stabilizálódhatna egy p_1 egyensúlyi helyzet, elég magas kezdeti szintek esetén egy $p_2\gg p_1$.

Amennyire én tudom, a fertőzöttségi szintek egyértelműségét nem vizsgálták az irodalomban, ez csak egy nem magyarázott matematikai következménye a (2) egyenleteknek.

Ezt az egyértelműséget a következő értelemben meg lehet „magyarázni": ez az (1) egyenlet egy speciális matematikai tulajdonságának a következménye, és ennek a tulajdonságnak van egy egyszerű biológiai interpretációja. Precízebben, az $F=$ $=(F_1, \ldots, F_n)$ vektormező az R^n-ben kielégíti az

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_j} \leqq 0 \quad \text{(minden } i, j, k\text{-ra)} \tag{3}$$

tulajdonságot. A $\partial F_i/\partial x_j$-t értelmezhetjük, mint egy *szélső (marginális)* rátát, amivel a j-csoport megfertőzi az i-t. A (3) jelentése: *a marginális fertőzési ráta csökken, ha a fertőzöttségi szint nő.* Az, hogy ez igaz vagy hihető-e — egy érdekes biológiai kérdés; de ez a matematikai oka a stabilis fertőzöttségi szint egyértelműségének. Ez az alábbi eredmény következménye, a feltételek könnyen ellenőrizhetőek az (1) egyenletre:

6.1. TÉTEL. *Legyen F egy C^1 vektormező az R^n-ben, a φ folyama legyen invariáns és szigorúan monoton R^n_+-ban $t \geqq 0$-ra. Tegyük fel, hogy az origó egyensúlyi helyzet és az R^n_+-ban minden pálya korlátos. Feltesszük, hogy a DF: $R^n \to R^{n\times n}$ mátrix értékű leképezés szigorúan antimonoton, úgy értve*

$$\text{ha} \quad x > y, \quad \text{akkor} \quad DF(x) < DF(y). \tag{4}$$

Akkor vagy minden pálya az R^n_+-ban tart az origóhoz, vagy van egy egyértelmű $p \in \operatorname{Int} R^n_+$ egyensúlyi helyzet és minden $R^n_+ \setminus \{0\}$-beli pálya tart p-hez.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük azt az esetet, amikor valamely $x \in R^n_+$ pályája nem tart 0-hoz. Ekkor $\omega(x)$-nek van $y \in R^n_+ \setminus \{0\}$ legkisebb felső korlátja. Könnyen látható, hogy $y(t)$ szintén felső korlát $\omega(x)$ -re minden $t \geqq 0$ esetén, mivel $y(t) \geqq y$. A szigorú monotonitás és a 2.3. tétel miatt $y(t)$ tart egy $q \geqq y$ egyensúlyi helyzethez. $q > 0$ és a szigorú monotonitás miatt $q \gg 0$.

Most rögzítsünk egy $p \gg 0$ egyensúlyi helyzetet. Azt állítjuk, hogy

$$\text{Ha} \quad 0 < x < p, \quad \text{akkor} \quad x(t) \to p. \tag{5}$$

A bizonyítás a következőkön alapszik:

(6) *Legyen z a 0 és p végpontú nyílt egyenes szakaszon.* Akkor $F(z) > 0$.

(6) igazolásakor tekintsük minden $i=1, \ldots, n$-re a g_i: $[0, 1] \to R$, $g_i(s) = F_i(sp)$ leképezést. $g_i(0) = g_i(1) = 0$; és a DF-re vonatkozó feltételből következik, hogy $g_i(s)$ nem növekszik és nem azonosan nulla valamely i-re. A középértéktételből következik, hogy $g_i(s) \geqq 0$ minden i-re és minden $s \in [0, 1]$-re; míg valamely i-re $g_i(s) > 0$, ha $0 < s < 1$. Ez igazolja (6)-ot.

(5) bizonyításához tekintsük a $B_s = [sp, p]$, $0 < s < 1$ zárt rendezési intervallumokat (kockákat). A szigorú monotonitásból és onnan, hogy $F(sp) > 0$, $F(p) = 0$ következik, ha $x \in B_s \setminus \{p\}$, akkor $F(x) \neq 0$ és $F(x)$ B_s-be mutat.

Innen adódik, hogy $\varphi_t(B_s \setminus \{p\}) \subset \operatorname{Int} B_s$ minden $t > 0$, $0 < s < 1$-re. Többek között, $sp \leqq \varphi_t(sp) < p$. Így sp pálya B_s-ben tart egy egyensúlyi helyzethez, ami csak a p lehet.

Most rögzítsünk le egy $y \in [0, p] \setminus \{0\}$ pontot. Létezik s, melyre $sp \leqq y \leqq p$. Mivel $\varphi_t(sp) \to p$, $\varphi_t(p) = p$ és a folyam monoton, innen következik, hogy $\varphi_t(y) \to p$. Ez bizonyítja (5)-öt.

(5)-ből következik, hogy $p \gg 0$ egyértelmű egyensúlyi helyzet. Rögzítsünk le egy $y \in R^n_+ \setminus \{0\}$ pontot. Nem lehetséges, hogy $y \to 0$, hiszen evvel járna, hogy

$y(t_0) \in [0, p] \setminus \{0\}$ valamely $t_0 > 0$-ra, de akkor $y(t_0)$ p-hez tartana, ami ellentmond $y(t) \to 0$-nak. A bizonyítás elején levő érvelés mutatja, hogy valamely egyensúlyi helyzet — amelyik p kell legyen — $\geqq \omega(y)$. Ha $p \in \omega(y)$, akkor 2.3. felhasználásával igazolható, hogy $y(t) \to p$. Ha $p > \omega(y)$, akkor a szigorú monotonitás miatt $p \gg \gg \omega(y)$. De akkor $p \gg y(t_0)$ valamely $t_0 > 0$-ra és ismét $y(t) \to p$. Ez teljessé teszi 6.1. bizonyítását. Q. E. D.

A 6.1. tétel általánosítható bizonyos parabolikus egyenletekre (1.9. példa, 1.10. tétel). Tekintsük a

$$\text{(7a)} \qquad \partial u / \partial t = Au + f(u)$$

$$\text{(7b)} \qquad u | \partial M = 0$$

alakú egyenletet, az 1.9. példa (1), (3) egyenletének speciális esetét. Feltesszük, hogy $f\colon R \to R$ C^4 osztálybeli és $f(0) = 0$. A kapott φ szigorúan monoton folyam C^1 a $C_0^1(M)$-en az 1.10. (c) tétel értelmében.

6.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $w \in C_0^1(M)$ a* (7a), (7b) *stacionárius megoldása, azaz megoldása a $\partial u / \partial t = Au + f(u)$, $u|\partial M = 0$ elliptikus egyenletnek, feltesszük továbbá $w \gg 0$. Legyen $\alpha > 0$ w maximális értéke. Feltesszük vagy* (a) $f''(y) > 0$, *ha* $0 < y < \alpha$, *vagy* (b) $f''(y) < 0$, *ha* $0 < y < \alpha$. *Legyen $v \in [0, w]$ tetszőleges* 0 *és w-től különböző kezdeti érték. Akkor $\varphi_t(v) \to 0$ az* (a) *esetben, $\varphi_t(v) \to \alpha$ a* (b) *esetben.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás fő vonalaiban hasonló a 6.1. tételéhez, az alapgondolat az, hogy minden $x \in M$-re a

$$g_x\colon [0, 1] \to R, \quad s \to A(sw)(x) + f(sw(x))$$

leképezés nő (az (a) esetben), csökken (a (b) esetben). Ez igaz, mert $g_x''(s) = f''(sw(x))$. Innen következik, a (b) esetben minden $[sw, w]$ rendezési intervallum, az (a) esetben pedig minden $[0, sw]$ intervallum invariáns. A bizonyítás többi része formálisan ugyanaz. Q. E. D.

Hirsch (1983) dolgozatában megtalálható a 6.2. tétel egy más megközelítése és egyéb parabolikus egyenletekre történő alkalmazások.

7. Strukturális stabilitás

> Minden matematikai vizsgálatnál felmerül a kérdés, vajon alkalmazhatóak-e az eredményeink a valós világra. Következésképpen, a kérdés azoknak a tulajdonságoknak a kiválasztása, melyek nem nagyon érzékenyek a modell kis változásaira és így tekinthetők a valódi folyamat tulajdonságainak.
>
> V. I. Arnold (1983), 87. o.

Ebben a részben X az R^n egy nyílt halmazát jelöli, φ az X-beli F folytonosan differenciálható (C^1) vektormező által generált sima folyam.

Az eddig bemutatott feltételek közül a legáltalánosabb, amelyik biztosítja φ szigorú monotonitását — F együttműködő és irreducíbilis (1. §.). Egy $n \times n$ mátrix irreducibilitása megmarad a mátrix kis perturbációi során. Így bármely az F-hez eléggé C^1 közeli vektormező $DF(x)$ mátrixa irreducíbilis lesz (x egy adott kompakt halmazban van). De a kooperatív tulajdonság — $\partial F_i / \partial x_j \geqq 0$, ha $i \neq j$ — nem rendelkezik hasonló fennmaradási tulajdonsággal. Míg az igaz, hogy az erősebb feltételezés, DF nem a fődiagonálison fekvő elemei mind szigorúan pozitívak, fennmarad, de egy ilyen szűkítő feltétel nagyon sok olyan érdekes rendszert kizár a vizsgálatból, melyek folyama szigorúan monoton.

Hogy elkerüljük ezt a dilemmát, vizsgáljuk meg alaposabban az okokat, amiért egy irreducíbilis együttműködő mező szigorúan monoton folyamot generál, azaz, mert minden $D\varphi_t(x)$ mátrix$\gg 0$ ($D\varphi_t(x)$ elemei határozottan pozitívak) minden $t>0$-ra.

Legyen G egy vektormező, ψ a megfelelő folyam. Minden rögzített $t_0>0$-ra és minden $C\subset R^n$ kompaktra $\psi_t(x)$-et közelivé tehetjük $\varphi_t(x)$-hez, $D\psi_t(x)$-et $D\varphi_t(x)$-hez minden $t\in[0, t_0]$ és $x\in K$-ra, ha G-t elég közelinek választjuk az F-hez, az $\bigcup\{\varphi_t(K)\colon 0\leqq t\leqq t_0$ halmazon. Ha C invariáns φ_t-re minden $t\geqq 0$ esetére, akkor F-nek van egy olyan $\mathcal{N}\subset V(M)$ környezete, hogy létezik $t_0>0$ az alábbi tulajdonsággal: Ha $x\in C$ és $t_2\geqq t_0$ olyanok, hogy $\psi_t(x)\in K$ minden $t\in[0, t_2]$-re, akkor $D\psi_t(x)\gg 0$ minden $t\in[t_0, t_2]$. Továbbá t_0 vehető a 0 bármely környezetéből, feltéve, hogy $\mathcal{N}$ elég kicsi.

Nem indokolatlan feltenni azt is, hogy C invariáns ψ_t-re is $t\geqq 0$ esetén; ebben az esetben

$$D\psi_t(x)\gg 0 \text{ minden } t\geqq t_0,\ x\in C. \tag{1}$$

Az $X_0=\operatorname{Int} C$ halmazon egy új rendezést definiálunk. E célból minden $x\in X_0$-ra

$$\Gamma(x)=\bigcap\{D\psi_t(x)^{-1}R^n_+\colon t\geqq t_0\}=\bigcap\{D\psi_t(x)^{-1}R^n_+\colon 2t_0\geqq t\geqq t_0\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\Gamma(x)$ egy R^n_+-t tartalmazó zárt konvex kúp, és $\Gamma(x)\cap$ $\cap(-\Gamma(x))=\{0\}$. Továbbá (1)-ből következik

$$D\psi_t(x)\Gamma(x)\subset\operatorname{Int}\Gamma(\psi_t x) \text{ minden } t\geqq 0\text{-ra.} \tag{2}$$

x, $y\in X_0$-ra $x\leqq y$ definíció szerint azt jelenti, hogy létezik egy szakaszonként sima út $h\colon [0, 1]\to X_0$ olyan, hogy $h(0)=x$, $h(1)=y$ és minden $s\in[0, 1]$-re $h'(s)\in\Gamma(h(s))$, ha $h'(s)$ létezik. Ez megad egy erős rendezést az X_0-ban. (A rendezés felírható, mint egy út-monoton rendezés (1.3. példa) az

$$xRy\Leftrightarrow\psi_t(x)\leqq\psi_t(y) \text{ minden } t\geqq t_0\text{-ra,}$$

összefüggésekkel megadott R rendezésre az X_0-ban.)

(2)-ből következik, hogy a $\psi|X_0$ folyam szigorúan monoton a $\leqq$ rendezésre. Ebben az értelemben az előbbi eredmények fennmaradnak. Mindez összefoglalható:

7.1. TÉTEL. *Legyen F egy irreducíbilis együttműködő vektormező az $X\subset R^n$ nyílt halmazon. Minden X_0 nyílt halmazra, melynek a lezárása kompakt X-ben, létezik egy $\mathcal{N}\subset V(X)$ C^1 környezet az alábbi tulajdonsággal. Adjon meg $G\in\mathcal{N}$ egy ψ folyamot, mely minden $t>0$-ra megtart valamely $U\subset X_0$ nyílt halmazt. Akkor $\psi|U$ szigorúan monoton az U valamely erős rendezésére, amelyik a vektor rendezés egy lokális kiterjesztése.*

Alkalmazásként megadjuk a 4.1. tétel strukturális stabilis változatát.

7.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek F, X, $\mathcal{N}$ ugyanazok, mint a 7.1. tételben. Akkor minden $G\in\mathcal{N}$-re a G ψ folyama rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: ψ minden attraktora, melynek medencéje az X_0-ban fekszik, tartalmaz stabilis egyensúly helyzetet.*

BIZONYÍTÁS. Vegyük a 7.1.-beli U-t ψ egy attraktormedencéjének és alkalmazzuk a 4.1. tételt. Q. E. D.

A 7.1. alábbi következményének szokásosabb a feltétele.

7.3. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $M \subset R^n$ egy kompakt n-dimenziós részsokaság szakaszonként sima határral. Legyen F az M egy környezetében megadott együttműködő irreducibilis vektormező, amely a határ minden pontjában transzverzális ∂M-re és befelé mutat* Int *M-be. Akkor F-nek van egy $\mathcal{N} \subset V(M)$ környezete az alábbi tulajdonsággal: Minden $G \in \mathcal{N}$ ψ folyamára M invariáns a pozitív időkre, és $\psi|$*Int *M szigorúan monoton egy bizonyos erős rendezésre.*

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk 7.1.-et X-re, mint az M 7.3.-ban említett környezetére, $X_0 = \text{Int } M$. $\mathcal{N}$-t elég kicsire választva elérjük, hogy minden $G \in \mathcal{N}$ befelé transzverzális ∂M-re, és így a folyam invariáns Int M-re $r > 0$ esetén. A 7.1.-ben választható $U = \text{Int } M$. Q. E. D.

A strukturális stabilitás lehetővé teszi a vektormezők tipikus tulajdonságainak bevezetését.

Például az M kompakt sokaságon megadott vektormezők halmaza, ha csak hiperbolikus egyensúlyi helyzetei vannak, sűrű és nyílt a $V(M)$-ben. Egy ilyen mezőre az egyensúlyi helyzetek halmaza véges és minden csapda (lásd 2. §.) nyelő, a kvázikonvergens pályák konvergensek. A 4. és 5. §-ok eredményeit alkalmazva

7.4. TÉTEL. *Legyenek M, F és $\mathcal{N}$, mint a 7.3. következményben. Akkor létezik $\mathcal{N}$ egy $\mathcal{N}_0$ nyílt részhalmaza, olyan, hogy az $\mathcal{N}_0$-on megadott bármely mező folyamára M invariáns $t \geqq 0$-ra és a folyam az M-en kielégíti az alábbi feltételeket:*

(a) *minden egyensúlyi helyzet hiperbolikus;*
(b) *M majdnem minden pontjának időben előrehaladó pályája tart egy nyelőhöz;*
(c) *minden monoton $I \subset M$ íven, azon pontok halmaza, melyek nincsenek egy nyelő medencéjében, véges;*
(d) *minden attraktor tartalmaz egy nyelőt;*
(e) *ha M csak egy p nyelőt tartalmaz, akkor minden trajektória tart p-hez.*

IRODALOM

R. ABRAHAM
1971 *Predictions for the future of differential equations*, Lecture Notes in Math., vol. 206 (D. Chillingworth. ed.), Springer-Verlag.

R. ABRAHAM and J. MARSDEN
1967 *Foundation of mechanics*, Benjamin, New York.
1978 *Foundation of mechanics*, 2nd ed., Benjamin/Cummings, Reading, Mass.

R. ABRAHAM and C. SHAW
1982 *Dynamics—The geometry of behavior*, Acrial Press, Santa Cruz, Calif.

M. AMMAN
1976 *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. **18**, 620—709.

A. A. ANDRONOV and L. PONTRYAGIN
1937 *Systemes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **14**, 247—251.

D. V. ANOSOV
1962 *Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Soviet Math Dokl. **3**, 1068—1070.

1967 *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov **90**, 3—209; English transl. in Proc. Steklov. Inst. Math. (I. G. Petrovskiĭ and S. M. Nikol'skiĭ, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1969.

V. I. Arnold

1983 *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 250, Springer-Verlag. Magyar fordítás: A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei, Műszaki Könyvkiadó, 1988.

G. Aronsson and I. Mellander

1980 *A deterministic model in biomathematics: asymptotic behavior and threshold conditions*, Math. Biosci. **49**, 207—222.

D. Berlinski

1976 *On systems analysis*, MIT Press, Cambridge, Mass

G. D. Birkhoff

1920 *Recent advance in dynamics*, Science (N. S.) **51**, 51—55 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 106—110.

1927 *Dynamical systems*, Amer, Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.; reprinted 1966.

1927a *On the periodic motion of dynamical systems*, Acta Math. **50**, 359—379 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, op. cit., 333—353.

1932 *Sur l'existence de regions d'instabilité en dynamique*, Ann. Inst. H. Poincaré **2**, 369—386 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, op. cit., 444—461.

1935 *Sur le problème restreint des trois corps (première mèmoire)*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **4**, 267—306 and *Collected mathematical papers*, vol 2. op. cit 46 —506;

1941 *Some unsolved problems of theoretical dynamics*, Science **94**, 598—600 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, op. cit., pp. 710—712.

1935a *Nouvelles recherches sur les systémes dynamiques*, Mem. Pont. Acad. Sci. Nov. Lyn. **1**, 85—216 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, op. cit., 530—661.

1943 *The mathematical nature of physical theories*, Amer. Sci. **31**, 281—310 and *Collected mathematical papers*, vol. 2, op. cit., 890—919.

1950 *Collected mathematical papers*, vol. 1, 2, 3, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

G. D. Birkhoff and B. O. Koopman

1932 *Recent contributions to ergodic theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **18**, 279—282 and *Collected mathematical papers*, op. cit., vol. 3, 462—465.

L. E. J. Brouwer

1907 *On the foundation of mathematics*, Collected Mathematical Works, Vol. 1, American Elsevier, New York.

1913 *Intuitionism and formalism*, Bull. Amer. Math. Soc. **20**, 81—96; *Collected works*, Vol. 1, op. cit., 123—138.

1975 *Collected works*, Vol. 1 (A. Heyting ed.), American Elsevier, New York.

J. L. Casti

1982 *Recent developments and future perspectives in nonlinear systems theory*, SIAM Rev. **24**, 301—331.

T. M. Cherry

1938 *Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus*, Proc. London Math. Soc. (2) **44**, 175—215.

1968 *Asymptotic solutions of analytic Hamiltonian systems*, J. Differential Equations **4**, 142—159.

W. A. Coppel

1965 *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath, Boston.

J. Coste, J. Peyraud and P. Coullet

1979 *Asymptotic behaviors in the dynamics of competing species*, SIAM J. Appl. Math. **36**, (1979), 516—543.

D'Alembert and Diderot (Editors)

1754 *Encyclopédie*, Vol. 4, Briasson, David, LeBreton, Durand, Paris.

C. Darwin

1892 *Life of Charles Darwin* (F. Darwin, ed.), John Murray, London.

1936 *The origin of species* and *The descent of man*, Modern Library, New York.

A. Denjoy

1932 *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. (4) **17**, 333—375.

S. Drake
1978 *Galileo at work*, Univ. of Chicago Press, Chicago, III.
A. S. Eddington
1927 *The nature of the physical world*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England.
A. Einstein
1930 *On the occasion of the three hundredth anniversary of Kepler's death*, Frankfurter Zeitung, November 9, 1930 and *Ideas and opinions*, Crown, New York, 1954.
1931 *On the one hundreath anniversary of Maxwell's birth*, James Clerk Maxwell: A Commemorative Volume, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, and *Ideas and opinions*, op. cit.
J. M. Franks
1982 *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
H. I. Freedman
1980 *Deterministic mathematical models in population ecology*, Dekker, New York.
H. I. Freedman and P. Waltman
1984 *Persistence in models of three interacting species*, Math. Biosci. 68, 213—231.
N. Georgescu—Roegen
1966 *Analytical economics: Issues and problems*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass.
C. C. Gllispie
1960 *Thee dge of objectivity*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund
1955 *Topological dynamics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
S. Grossberg
1978 *Competition, decision and consensus*, J. Math. Anal. appl. **66**, 470—493.
J. Guckenheimer
1976 *A strange strange attractor*, The Hopf Bifurcation and Its Applications (J. E. Marsden and M. McCracken, eds.), Springer-Verlag, pp. 368—381.
1982 *Noise in chaotic systems*, Nature **298**, 358—361.
J. Guckenheimer and G. Buzyna
1983 *Dimension measurements for geostrophic turbulence*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1438—1441.
J. Guckenheimer and P. Holmes
1983 *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Math. Sci., Vol. 42, Springer-Verlag.
J. Hadamard
1912 *L'oeuvres mathématique de Henri Poincaré*, Acta Math. **38**, 203—287; and *Oeuvres de Jacques Hadamard* 4, CNRS, Paris, pp. 1921—2005.
1912a *Henri Poincaré et le problèmé de trois corps*, Rev. Mois **16**, 385—418 and *Oeuvres de Jacques Hadamard*, op. cit., 2007—2041.
1968 *Oeuvres de Jacques Hadamard* 4, CNRS, Paris.
J. K. Hale
1963 *Oscillations in nonlinear systems*, McGraw-Hill, New York.
T. L. Hankins
1980 *Sir William Rowan Hamilton*, Johns Hopkins Univ. Press. Baltimore.
B. D. Hassard. N. D. Kazarinoff and Y.-H. Wan
1980 *Theory and application of the Hopf bifurcation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England.
R. Heilbroner
1953 *The worldly philosphers*, Simon and Schuster, New York.
D. Henry
1981 *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag.
H. W. Hethcote
1973 *Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model*, J. Math. Biol. **35**, 607—614.
H. Hethcote, A. Nold and L. Yorke
1982 *Gonorrhea modelling: a comparison of control methods*, Math. Biosci. **58**, 93—109.
M. W. Hirsch
1983 *Differential equations and convergence almost everywhere in strongly monotone flows* Contemporary Math., vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 267—285.

1983a *Systems of differential equations which are competitive or cooperative.* II: *Convergence almost everywhere,* SIAM J. Math. Anal. (in press); preprint, Center for Pure and Appl. Math., Univ. of California, Berkeley.

1982 *Systems of differential equations which are competitive or cooperative.* I: *Limit sets,* SIAM J. Math. Anal. **13**, 167—179.

S. B. Hsu, S. P. Hubbell and P. Waltman

1978 *Competing predators,* SIAM J. Appl. Math. **35**, 617—625.

E. Kamke

1932 *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher differential-gleichungen.* II, Acta Math. **58**, 57—85.

F. Klein

1911 *Lectures on mathematics* (Proc. Colloq., Evanston, 1893). Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

A. Kolmogorov

1936 *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenzia,* Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 47—80.

I. Kupka

1963 *Contribution à la theorie des champs génériques,* Contributions to Differential Equations **2**, 457—484.

A. Lajmanovich and J. Yorke

1976 *A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population,* Math. Biosci. **28**, 221—236.

W. Leonard and R. May

1975 *Nonlinear aspects of competition between species,* SIAM J. Appl. Math. **29**, 243—275.

S. Lie

1895 *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung,* Leipziger Berichte **47**, 53—128 and *Sophus Lie Gesammelte Abhandlungen* (F. Engel, ed.), Bd. 4, Teubner, Leipzig, 1929, 320—386.

E. N. Lorenz

1963 *Deterministic non-periodic flow,* J. Atmospheric Sci. **20**, 130—141.

A. Lotka

1956 *Principles of mathematical biology,* Dover, New York.

J. E. Marsden and M. McCracken (Editors)

1976 *The Hopf bifurcation and its applications,* Springer-Verlag.

X. Mora

1983 *Semilinear problems define semiflows in C^k-spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **278**, 21—55.

R. E. Moritz

1914 *Memorabilia mathematica,* Macmillan, New York; reprinted as *On mathematics and mathematicians,* Dover New, York, 1958.

J. Moser

1973 *Stable and random motions in dynamical systems,* Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.

S. Newhouse

1971 *Nondensity of axiom $A(a)$,* Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math, vol. 14 (S.-S. Chern and S. Smale, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., pp. 191—203.

1979 *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50**, 101—151.

1980 *Lectures on dynamical systems,* Dynamical Systems (CIME Summer School, Bressanone, 1978), Birkhäuser, Boston, 1—114.

H. G. Othmer

1976 *The qualitative dynamics of a class of biochemical control circuits,* J. Math. Biol. **3**, 53—78.

J. Palis and W. Demelo

1982 *Geometric theory of dynamical systems: An introduction,* Springer-Verlag.

J. Palis and S. Smale

1970 *Structural stability theorems,* Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14 (S.-S. Chern and S. Smale, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

C. S. Peirce

1955 *The philosophical writings of C. S. Peirce,* Dover, New York.

M. Peixoto

1962 *Structural stability on 2-dimensional manifolds,* Topology **1**, 101—120.

1973 *On the classification of flows on two-manifolds,* Dynamical Systems (M. Peixoto, ed.), Academic Press, New York.

H. POINCARÉ
1881 *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle,* J. Math. Pures Appl. **7,** 375—422 and *Oeuvres,* Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris.
1880—1890 *Sur les courbes définies par les équations differentielles,* I—VI, *Oeuvres,* Vol. 1, op. cit.
1890a *Sur les équations de la dynamique et le problème de trois corps,* Acta Math. **13,** 1—270.
1892, 1893, 1899 *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Vols. I, II, III, Gauthier-Villars, Paris.
1908 Atti IV Congr. Internaz. Mat. (Roma, 1908), Vol. I, Acad. dei Lincei, Rome, 1909.
1914 *La valeur de la science,* Flammarion, Paris.
1916—1956 *Oeuvres de Henri Poincaré,* Vols. 1—11, Gauthier-Villars, Paris.
1921 *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faites par lui-même,* Acta Math. **38,** 1—135 and *Oeuvres,* Vol. 1, op. cit.
G. PÓLYA and S. SZEGŐ
1971 *Problems and theorems in analysis,* Springer-Verlag.
M. PROTTER and H. WEINBERGER
1967 *Maximum principles in differential equations,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
A. RESCIGNO and I. RICHARDSON
1967 *The struggle for life.* I: *Two species,* Bull. Math. Biophys. **29,** 377—388.
J. ROBINSON
1956 *The accumulation of capital,* Macmillan, London.
D. RUELLE and F. TAKENS
1971 *On the nature of turbulence,* Comm. Math. Phys. **20,** 167—192; ibid. **23,** 343—344.
M. RUSE
1979 *The Darwinian revolution,* Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill.
B. RUSSELL
1948 *Human knowledge, its scope and limits,* Simon and Schuster, New York.
1955 *Basic writings,* 1903—1959 (R. Egner and L. Denner, eds.), Simon and Schuster, New York.
J. F. SELGRADE
1979 *Mathematical analysis of a cellular control process with positive feedback,* SIAM J. Appl. Math. **36,** 219—229.
1980 *Asymptotic behavior of solutions to single loop positive feedback systems,* J. Differential Equations **38,** 80—103.
L. SILK
1976 *The economists,* Basic Books, New York.
S. SMALE
1961 *On gradient dynamical systems,* Ann. of Math. (2) **74,** 199—206.
1962 *Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms,* Proc. Internat. Congress Math. (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, pp. 440—496.
1963 *A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points,* Proc. Internat. Sympos. Nonlinear Vibrations, Izdat. Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Kiev.
1965 *Diffeomorphisms with many periodic points,* Differential and Combinatorial Topology (S. Cairns, ed.), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., pp. 63—80.
1966 *Structurally stable systems are not dense,* Amer. J. Math. **88,** 491—495.
1967 *Differentiable dynamical systems,* Bull. Amer. Math. Soc. **73,** 747—817.
1967a *Dynamical systems on n-dimensional manifolds,* Sympos. Differential Equations and Dynamical Systems (Puerto Rico), Academic Press, New York.
1967b *Stability and genericity of dynamical systems,* Sem. Bourbaki, no. 374, 1969—1970 and *The mathematics of time,* Springer-Verlag, 1980.
1976 *On the differential equations of species in competition,* J. Math. Biol. 3, 5—7.
1980 *The mathematics of time,* Springer-Verlag.
M. SPIVAK
1970 *A comprehensive introduction to differential geometry,* Vol. 1, Publish or Perish, Waltham, Mass.
S. STERNBERG
1969 *Celestial mechanics,* Part 1, Benjamin, Reading, Mass.

J. Strachey
1956 *Contemporary capitalism,* Random House, New York.
J. Sylvester
1877 Appendix to Address on Commemoration Day at Johns Hopkins University, in *Collected mathematical papers of James Joseph Sylvester,* Vol. 3, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1908, pp. 85, 87.
G. Temple
1958 *Linearization and delinearization,* Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958), Cambridge Univ. Press, Cambridge England, pp. 233—247.
R. Thom
1975 *Structural stability and morphogenesis,* Benjamin, Reading, Mass.; original ed., Paris, 1972.
W. Walter
1970 *Differential and integral inequalities,* Springer-Verlag.
J. A. Walker
1980 *Dynamical systems and evolution equations,* Plenum Press, New York.
H. Weyl
1939 *The classical groups: Their invariants and representations,* Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
R. F. Williams
1979 *The structure of Lorentz attractors,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50,** 101—152.
1983 *Reviev of "Dynamical Systems on Surfaces" by C. Godbillon,* Amer. Math. Monthly (in press).
A. Winfree
1979 *The geometric theory of biological time,* Springer-Verlag.
J. Z. Young
1951 *Doubt and certainty in science,* Oxford Univ. Press, New York.

SCHOOL OFMATHEMATICS,
INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON,
NEW JERSEY 08540

Fordította:
Kajtár László (I. fejezet)
Moson Péter (II. és III. fejezet)

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Szedte és nyomta a Szegedi Nyomda. — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató
Szeged, 1989 — 142
Felelős szerkesztő: Prékopa András — Műszaki szerkesztő: Sándor István
Megjelent: 20,30 (A/5 ív) terjedelemben
HU ISSN 0133 3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen , *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1—27.

[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.

[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.

[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak ezek költsége — nyomtatott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 96 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Alkalmazott matematikai lapok

1989/3–4

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

14. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

XIV. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.
Kiadóhivatal: 1117 Budapest XI., Prielle Kornélia u. 36.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közül cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 192 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1117 Budapest XI., Prielle Kornélia u. 35. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok 14 (1989) 233—298

AUTOMATÁK SZORZATCSALÁDJAINAK ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATA

DÖMÖSI PÁL

Debrecen

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Az absztrakt automaták kompozícióival kapcsolatos vizsgálatok szorosan kötődnek bizonyos teljességi kérdésekhez. Ennek során központi problémaként jelentkezik azon automataosztályok jellemzése, melyeket bizonyos megengedett operációkkal bővítve az összes automaták osztályához jutunk. A megengedett operációk közé szokás sorolni adott kompozíciótípus esetén a részautomata-képzés mellett a homomorfizmust vagy az izomorfizmust. Ebben az értelemben beszélünk adott kompozíciótípusra nézve homomorfan vagy izomorfan teljes osztályokról. A homomorfizmus, illetve izomorfizmus természetes általánosításaiként tekinthető a homomorf, illetve izomorf szimuláció fogalma. Homomorfizmus vagy izomorfizmus helyett megengedett operációként homomorf vagy izomorf szimulációt alkalmazva jutunk el az adott kompozíciótípusra nézve homomorfan, illetve izomorfan S-teljes osztály fogalmához.

Az 50-es években elindult intenzív automataelméleti kutatások eredményeként a 60-as évek elején megkezdődtek a teljességi kutatások. Ekkor definiálta GLUSKOV az általános szorzat, illetve az ezen szorzatra nézve homomorfan és izomorfan teljes osztály fogalmát. A *Gluskov-féle szorzatra* nézve homomorfan teljes osztályok jellemzése LETICSEVSZKIJ nevéhez, míg ugyanezen szorzatfogalomra nézve izomorfan teljes osztályok jellemzése GLUSKOV nevéhez fűződik. GLUSKOV és LETICSEVSZKIJ vizsgálataival egy időben KROHN és RHODES kapott mélyreható eredményeket a kaszkád szorzatra nézve homomorfan teljes osztályokkal kapcsolatban. A nem hazai kutatások ezt követően a kaszkád szorzatra, s ennek egyik általánosítására, a hurokmentes szorzatra összpontosultak.

A hazai teljességi kutatásokat GÉCSEG FERENC indította el a 60-as évek második felében. Általánosítva a komponensek között visszacsatolást nem tartalmazó kaszkád szorzat fogalmát, definiált és vizsgált egy szorzathierarchiát, melynek egy-egy tagját a visszacsatolások megengedett hossza jellemez. A *Gécseg-féle szorzathierarchia* legalsó lépcsőfokán áll az általa α_0-szorzatnak is hívott kaszkád szorzat, míg az általa α_i-szorzatnak hívott szorzattípusban megengedettek a komponensek közötti korlátozott, legfeljebb i hosszúságú visszacsatolások (ahol az i egy tetszőlegesen rögzített nemnegatív egész szám).

A *Gécseg-féle szorzathierarchia* mintájára született meg a v_i-szorzatok fogalma. Itt nem a visszacsatolások hossza, hanem azok száma korlátozott. Rögzített i természetes szám mellett tehát a v_i-szorzatban egy-egy tényező működését a bemenő jelen kívül legfeljebb i számú tényező (pontosabban ezen tényezők állapota) határozza meg. Ez a fogalom a változtatható átmeneti függvényű sejtautomata egy modelljének is tekinthető, ahol is bizonyos gazdaságossági követelmények tetszőleges szomszédsági topológia esetén is megkövetelik, hogy a szomszédok száma lehetőleg egyetlen sejtre se haladjon meg egy előre megadott i természetes számot.

A dolgozat tárgya az α_i- és a v_i-szorzatcsalád összehasonlító vizsgálata. Vizsgálataink a *Gluskov-féle fogalmakon* túlmenően kiterjednek az ugyancsak GÉCSEG FERENC által bevezetett teljességi és szorzatfogalmakra is. Megállapításaink kettős célt szolgálnak: részben az említett két szorzatcsalád hasonló vagy épp eltérő tulajdonságait jellemezzük, részben pedig információkat kapunk a v_i-szorzatcsalád viselkedéséről a jól ismert α_i-szorzatcsalád tulajdonságainak tükrében.

A dolgozat ezekhez a problémákhoz kapcsolódik és a felhasznált alapvető fogalmakat és eredményeket összefoglaló első fejezet mellett öt további fejezetből áll.

A 2. fejezetben az α_i- és v_i-szorzatokra nézve végzünk összehasonlító vizsgálatokat homomorf reprezentáció és szimuláció szempontjából. Először mutatunk egy olyan automataosztályt, mely homomorfan teljes a v_1-szorzatra nézve, de homomorfan nem teljes (és homomorfan nem is S-teljes) sem az α_0-szorzatra, sem pedig az α_1-szorzatra nézve. Megjegyezzük, hogy $i>1$ esetén α_i-szorzatra nem várható ilyen jellegű eredmény, hisz ÉSIK ZOLTÁN és HORVÁTH GYULA idevonatkozó eredménye alapján az α_2-szorzat már homomorfan általános.

Ezután kimutatjuk, hogy szemben az α_i-szorzatcsaláddal a v_i-szorzatcsalád egyetlen tagja sem homomorfan általános. Sőt, van olyan automataosztály, mely mind homomorf szimuláció, mind pedig homomorf reprezentáció szempontjából a v_{i+1}-szorzatra nézve bővebb osztályt szolgáltat, mint a v_i-szorzatra nézve, akárhogy is rögzítjük az i természetes számot. Ugyanez az automataosztály az α_0-szorzatra nézve mind homomorf szimuláció, mind pedig homomorf reprezentáció szempontjából bővebb, mint a v_i-szorzatra nézve bármely rögzített i esetén.

A 3. fejezet első részében megmutatjuk, hogy a kétállapotú beállító automaták homomorfan teljes osztályt alkotnak a v_2-szorzatra nézve. Így azt kapjuk, hogy már a v_2-szorzatra nézve is létezik véges homomorfan teljes osztály. (Nyitott kérdés marad, hogy a v_1-szorzat rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal.) A fejezet második részében bizonyítást nyer, hogy minden monoton automata izomorfan szimulálható kétállapotú elevátor ν_2-hatványával. Kimutatjuk azt is, hogy minden monoton automata homomorfan reprezentálható kétállapotú elevátor ν_2-hatványával. Bizonyítjuk, hogy kétállapotú elevátor általánosított ν_1-hatványával viszont még homomorfan sem szimulálható minden monoton automata. A fejezet további részében ezen kisegítő jellegű eredményekre támaszkodva az általánosított ν_i-szorzatokra vonatkozóan végzünk vizsgálatokat. Kimutatjuk, hogy homomorf reprezentáció szempontjából az általánosított ν_3-szorzat ekvivalens az *általánosított Gluskov-szorzattal.* Így a homomorf reprezentáció szempontjából jellemezni tudjuk az *általánosított Gluskov-szorzat* egészen egyszerű alakjait. GÉCSEG FERENC vizsgálatait felhasználva azt is mondhatjuk, hogy ezek ekvivalensek homomorf reprezentáció szempontjából az általánosított α_i-szorzatcsalád alakjaival $i>1$ esetén (azaz α_0-tól és α_1-től eltekintve). Azt kapjuk tehát, hogy szemben a ν_i-szorzatcsaláddal (illetve összhangban az általánosított α_i-szorzatcsaláddal) az általánosított ν_i-szorzatcsalád nem alkot valódi hierarchiát a homomorf reprezentációra nézve. Sőt (hasonlóan az általánosított α_i-szorzatcsaládhoz), van olyan $k(=3)$, hogy tetszőleges $i \geqq k$ esetén az általánosított ν_i-szorzat homomorfan általános (azaz homomorf reprezentáció szempontjából ekvivalens az *általánosított Gluskov-szorzattal*).

Mivel IMREH BALÁZS eredményei azt igazolják, hogy az izomorf reprezentációra nézve mind a négy szorzatcsalád (α_i- és általánosított α_i-, ν_i- és általánosított ν_i-szorzatcsalád) valódi hierarchiát alkot, értekezésünkben az izomorf reprezentáció ilyen irányú vizsgálatára nem térünk ki.

A 4. fejezetben a ν_i-szorzatcsalád egy olyan jellegű általánosítását vizsgáljuk, amikor visszacsatolási függvényértékül csak nem-üres bemenő szavakat engedünk meg. Ezt a szorzatcsaládot ν_i^+-szorzatcsaládnak hívjuk (míg a klasszikus általánosított ν_i-szorzatcsaládra a ν_i^*-szorzatcsalád elnevezést használjuk). Fejezetünkben teljeskörűen jellemezzük a homomorfan és izomorfan S-teljes rendszereket a ν_i^+-szorzatra nézve tetszőleges $i(\geqq 1)$ esetén. Vizsgálataink következményeként adódik, hogy izomorf és homomorf szimuláció szempontjából az általánosított ν_i-szorzatcsalád (azaz a ν_i^*-szorzatcsalád) tagjai $i>1$ esetén általánosak, azaz ekvivalensek az *általánosított Gluskov-szorzattal.* (Az általánosított ν_1-szorzat nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.) Így az is igaz, hogy az általánosított ν_i-szorzatcsalád sem az izomorf, sem pedig a homomorf szimulációra nézve nem alkot valódi hierarchiát (szemben a ν_i-szorzatcsaláddal). GÉCSEG FERENC idevonatkozó vizsgálatait alkalmazva nyerjük, hogy az általánosított ν_i-szorzatcsalád és az általánosított α_i-szorzatcsalád ebben a vonatkozásban hasonló szerkezetű. GÉCSEG FERENC, IMREH BALÁZS és HELMUT JÜRGENSEN eredményeit alkalmazva az is igazolást nyer, hogy a homomorf szimuláció szempontjából a ν_i^+-szorzatcsalád is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. (Nyitott kérdés marad, hogy izomorf szimuláció szempontjából a ν_i^+-szorzatcsalád valódi hierarchiát alkot-e avagy sem.)

Az 5. fejezetben α_i-szorzatok és ν_i-szorzatok temporális szorzatait vizsgáljuk. Ehhez értelmezzük a $\mathbf{T}_g$-operátor és a $\mathbf{T}_{\alpha_i}$-, illetve a $\mathbf{T}_{\nu_i}$-operátorok fogalmát. A $\mathbf{T}_g$-operátor alkalmazása automaták egy osztályára azt jelenti, hogy először képezzük az adott osztálybeli automatákból alkotott *Gluskov-szorzatokkal* izomorf automaták osztályát. Ezután az így nyert osztálybeli automaták temporális szorzatainak osztályát tekintjük. Végül, a kapott automataosztályt kibővítjük a tekintett osztálybeli automaták összes (valódi és nem valódi) részautomatái osztályára. A $\mathbf{T}_{\alpha_i}$- és $\mathbf{T}_{\nu_i}$-operátorok értelmezése abban különbözik a $\mathbf{T}_g$-operátorétól, hogy a *Gluskov-szorzat* szerepét az α_i-szorzat, illetve a ν_i-szorzat veszi át.

Látni fogjuk, hogy $i \geqq 1$ esetén a $\mathbf{T}_g$-, $\mathbf{T}_{\alpha_i}$-, illetve $\mathbf{T}_{\nu_i}$-operátorok alkalmazása egy és ugyanazon automataosztályhoz vezet. Ez az osztály nem bővül akkor sem, ha a szóban forgó operátorokat ismételten akárhányszor is alkalmazzuk. (Ez utóbbi tulajdonsággal rendelkezik a $\mathbf{T}_{\alpha_0}$-operátor is.) Ha viszont (*Gluskov*-, α_i-, ν_i-) szorzásnál a visszacsatolási függvény értékéül az üres szót is megengedjük, úgy a szóban forgó operátorok eredeti, GÉCSEG FERENC által bevezetett formájával ekvivalens operátorokhoz jutunk. Amint látni fogjuk, a GÉCSEG FERENC által bevezetett forma valódi általánosítása az általunk vizsgált formának. Ennek ellenére megőrződnek ezen általánosítás legfontosabb tulajdonságai. Így izomorf és homomorf módon történő reprezentálásra nézve a $\mathbf{T}_{\alpha_1}$- és $\mathbf{T}_{\nu_1}$-operátorok ekvivalensek a $\mathbf{T}_g$-operátorral. Létezik a $\mathbf{T}_{\alpha_0}$-operátor képzésére nézve is véges izomorf módon teljes osztály. Végül, ha a szóban forgó operátorok valamelyikét alkalmazzuk automaták egy osztályára, úgy a kapott osztályba eső automaták részautomatái izomorf, illetve homomorf képeinek osztálya megegyezik egymással. Az alkalmazott operátorok erejét az is mutatja, hogy α_0-szorzat helyett kvázidirekt szorzat, $i > 1$ esetén pedig α_i-szorzat vagy ν_i-szorzat (vagy akár *Gluskov-szorzat*) helyett egytényezős *Gluskov-szorzatok* kvázidirekt szorzata tekinthető.

A 6. fejezet bibliográfiai megjegyzéseket tartalmaz. Erre azért van szükség, mert a közölt eredmények többnyire egy alkotó kollektívával együttműködve születtek meg, sok esetben közös munkaként. Itt elsősorban ÉSIK ZOLTÁN, GÉCSEG FERENC és IMREH BALÁZS alkotó együttműködésére történik részletes utalás.

A dolgozatban szereplő módszerek elsősorban algebrai és kombinatorikai jellegűek. Egy automata természetes módon tekinthető speciális algebrai struktúrának. Így lépten-nyomon alkalmazásra kerülnek egyszerű algebrai struktúratételek, illetve a velük kapcsolatos módszerek és összefüggések. Kombinatorikai jellegű módszerek alkalmazása azon egyszerű tényből következik, hogy mindvégig véges struktúrákkal dolgozunk. Kihasználva az automaták és félcsoportok között fennálló szoros összefüggést, időnként félcsoportelméleti, illetve csoportelméleti eszközöket veszünk igénybe. Az alapvető összefüggéseken túlmenően felhasználunk mély csoportelméleti eredményeket is.

Nagymértékben támaszkodunk a téma szakirodalmában kidolgozott eredményekre és módszerekre. Többszörösen hivatkozunk immár klasszikusnak tekinthető automataelméleti összefüggésekre mint kritériumokra. Ezek a kritériumok nemcsak útbaigazítást adnak egy-egy probléma megoldásához, hanem segítenek tisztázni is az egyes szorzattípusokra nézve teljes rendszerek egymáshoz való viszonyát.

A kidolgozott téma alapkutatás jellegű. Az eredmények elsősorban az automaták szorzataival kapcsolatos, ugyancsak alapkutatás jellegű kérdések megoldásához nyújthatnak segítséget. Mivel rögzített i értékek mellett a ν_i-szorzat a változtatható átmeneti függvényű sejtautomata egy modelljének is tekinthető, megállapításaink és módszereink útbaigazítást adhatnak bizonyos sejtautomatákkal kapcsolatos kérdések tisztázásához is.

A *Gluskov-szorzatban* a visszacsatolási függvények bizonyos egyszerű jelátalakítók absztrakt megfelelői. Ennek *Gécseg-féle* általánosításában már jelátalakítók helyett mikroprocesszorok absztrakt megfelelői szerepelnek. Egy ilyen általánosítást megengedve tetszőleges automata izomorfan szimulálható igen egyszerű szerkezetű automatákból felépülő egyszerű topológiájú ν_i-szorzatokkal (l. 4. fejezet). Természetesen feltételezhető az is, hogy a megfelelő bemenő jelekhez tartozó szimulációs szavakat ugyancsak mikroprocesszorok generálják.

Végül, a temporális szorzatoknál tulajdonképp arról van szó, hogy egy-egy bemenő jel feldolgozása során korlátozott mértékben a szorzat topológiája is változhat. Ez a természetes feltételezés igen erős reprezentációfogalomhoz vezet, melynek további kutatása útján újabb alkalmazási lehetőségek remélhetők (l. 5. fejezet).

1. Alapvető fogalmak és eredmények

Ebben a fejezetben áttekintést adunk a dolgozatban leggyakrabban felhasznált fogalmakról és jelölésekről, továbbá bizonyítás nélkül ismertetjük azokat az alapvető automataelméleti és algebrai eredményeket, melyekre vizsgálataink során támaszkodunk.

Tetszőleges nem üres és véges X halmazra jelölje X^* az X feletti összes *szavak szabad monoidját,* beleértve a λ *üres szót* is mint egységelemet. Jelölje továbbá X^+ az X feletti szavak *szabad félcsoportját,* azaz legyen $X^+=X^*-\{\lambda\}$. Amennyiben $p=x_1 \dots x_n \in X^+$ $(x_1, \dots, x_n \in X)$, úgy p *hosszán* az n természetes számot, azaz a p-ben előforduló X *ábécé betűinek* számát értjük, s rá a $|p|$ jelölést használjuk. Az X^* szabad monoid egységelemének (azaz a λ üres szónak) hossza definíció szerint nulla (jelölésben: $|\lambda|=0$). Ha egy p szó felírható $p=qr$ alakban, akkor q-t a p szó *kezdőszeletének, r*-t pedig *végszeletének* mondjuk. Ha $r \neq \lambda (q \neq \lambda)$, úgy q *valódi kezdőszelete* p-nek (úgy r *valódi végszelete* p-nek). Ezenkívül, ha $|q|=m$, akkor q-ra és r-re használjuk a $q=p[m]$ és $r=p/m$ jelöléseket. Jelentse továbbá $p(m)$ a p szó m-edik betűjét $(1 \leqq m \leqq |p|)$. Amint szokásos, tetszőleges $n \geqq 0$-ra és $p \in X^*$-re $p^n=\lambda$, ha $n=0$, illetve $p^n=pp^{n-1}$, ha $n>0$. Végül, az X^* monoid összes legfeljebb n hosszúságú szavainak halmazát $X^{(n)}$-nel az X^*-beli összes n hosszúságú szavak halmazát pedig X^n-nel jelöljük.

Automatán véges kimenő jel nélküli automatát, azaz egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ hármast értünk, ahol A az *állapotok* nem üres és véges halmaza, X a nem üres és véges *bemenő jelhalmaz* és δ: $A \times X \to A$ az *átmeneti függvény.* Használni fogjuk az átmeneti függvényt kiterjesztett értelemben is, vagyis mint egy δ: $A \times X^* \to A$ leképezést, ahol tetszőleges $a \in A$, $x \in X$, $p \in X^*$ hármasra $\delta(a, px)=\delta(\delta(a, p), x)$, továbbá $\delta(a, \lambda)=a$.

Tekintsünk egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ egy $a \in A$ állapota *generálja* a $b \in A$ állapotot, ha található egy $\delta(a, p)=b$ összefüggésnek eleget tevő $p \in X^+$ bemenő szó. $\mathbf{A}$ *összefüggő az* $a \in A$ *állapotra nézve,* ha a generálja az $A=\{a\}$ minden elemét. Az $\mathbf{A}$ automatát *erősen összefüggőnek* hívjuk, ha minden állapotára nézve összefüggő. Más szóval, $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, ha minden $a, b \in A$ párhoz létezik olyan $p \in X^+$, hogy $\delta(a, p)=b$. Az egyetlen állapottal rendelkező automatákat *triviálisnak* hívjuk. *Autonóm* az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata, ha tetszőleges $a \in A$, $x_1, x_2 \in X$ hármasra $\delta(a, x_1)=\delta(a, x_2)$. $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *bemenetre nézve redukált,* ha bármely $x_1, x_2 \in X$ párra $x_1 \neq x_2$ csak úgy állhat fenn, ha legalább egy $a \in A$ esetén $\delta(a, x_1) \neq \delta(a, x_2)$.

Egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata *monoton,* ha létezik olyan $\leqq$ parciális rendezés az A állapothalmazon, hogy minden $a \in A$, $x \in X$ pár esetén $a \leqq \delta(a, x)$. Ha még az is fennáll, hogy $\delta(a, x)=a (a \in A,\ x \in X)$ esetén az a állapot maximális $\leqq$-ra nézve (ami egyben azt is jelenti, hogy $\delta(a, y)=a$ minden $y \in X$-re fennáll), akkor az $\mathbf{A}$-t *erősen monotonnak* hívjuk. (Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban erre az automatatípusra az erősen monoton elnevezés helyett többnyire a *kvázinilpotens* vagy *reverz definit* elnevezés használatos.)

Permutáció automatának hívjuk az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát, ha bármely $a, b\in A$-ra és $x\in X$-re $\delta(a, x)=\delta(b, x)$ maga után vonja $a=b$ teljesülését. Másképp fogalmazva, $\mathbf{A}$ permutáció automata, ha minden bemenő jele az állapothalmaz egy permutációját indukálja. Az egyetlen bemenő jellel rendelkező erősen összefüggő permutáció automatát *számlálónak* nevezzük. Más szóval, $\mathbf{A}=(A, \{x\}, \delta)$ számláló, ha állapotainak alkalmas $A=\{a_1, ..., a_n\}$ elrendezésére $\delta(a_i, x)=a_{i+1}$, ha $1\leqq i<n$ és $\delta(a_n, x)=a_1$. Az autonóm erősen összefüggő permutáció automatákat *általánosított számlálóknak* nevezzük. Így tehát $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ általánosított számláló, ha állapotainak alkalmas $A=\{a_1, ..., a_n\}$ elrendezésére $x\in X$ mellett $\delta(a_i, x)=$ $=a_{i+1}$, ha $1\leqq i<n$ és $\delta(a_n, x)=a_1$.

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát. Az $x\in X$ egy *beállító jel*, ha van olyan $a_x\in A$, hogy minden $b\in A$-ra $\delta(b, x)=a_x$ fennáll. *Identikus jelnek* hívjuk az $x\in X$-et, ha tetszőleges $a\in A$ esetén $\delta(a, x)=a$. $\mathbf{A}$ *beállító automata,* ha az összes bemenő jele beállító jel. $\mathbf{A}$ *diszkrét automata,* ha minden bemenő jele identikus. Végül, $\mathbf{A}$ *identikus beállító automata,* ha rendelkezik identikus és beállító bemenő jellel, s ugyanekkor az összes bemenő jele ebbe a két osztályba sorolható.

Legyen $n\geqq 1$ és jelölje $[n]$ az $\{1, ..., n\}$ halmazt. Tekintsük a következő primitív automatákat:

$$\mathbf{C}_n = ([n], \{x\}, \delta_n), \delta_n(i, x) = i+1, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq i < n \quad \text{és} \quad \delta_n(n, x) = 1,$$

$$\mathbf{E} = (\{0, 1\}, \{x_0, x_1\}, \delta_{\mathbf{E}}), \delta_{\mathbf{E}}(0, x_0) = 0, \quad \delta_{\mathbf{E}}(1, x_0) = \delta_{\mathbf{E}}(0, x_1) = \delta_{\mathbf{E}}(1, x_1) = 1,$$

$$\mathbf{R} = (\{0, 1\}, \{x_0, x_1\}, \delta_{\mathbf{R}}), \delta_{\mathbf{R}}(0, x_0) = \delta_{\mathbf{R}}(1, x_0) = 0, \quad \delta_{\mathbf{R}}(0, x_1) = \delta_{\mathbf{R}}(1, x_1) = 1.$$

Helyenként *n állapotú számláló* alatt a $\mathbf{C}_n$ automatát fogjuk érteni. Az $\mathbf{E}$ automatát *(kétállapotú) elevátornak,* az $\mathbf{R}$ automatát pedig *kétállapotú (teljes) beállító automatának* is fogjuk nevezni.

Végül, tetszőleges n természetes számra jelölje $\mathbf{T}_n=([n], T_n, \delta_n)$ azt az automatát, ahol T_n az $[n]$ összes önmagába történő leképezéseinek halmaza és $\delta_n(i, t)=t(i)$ $(i\in[n],\ t\in T_n)$.

Tetszőleges $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata és $p\in X^*$ esetén definiáljuk a $p^{\mathbf{A}}\colon A\to A$ leképezést a $p^{\mathbf{A}}(a)=\delta(a, p)$ $(a\in A)$ összefüggéssel. Az összes ilyen leképezések a szokásos szorzásra nézve egy ($S_1(\mathbf{A})$-val jelölt) monoidot alkotnak, melyet az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus monoidjának* hívunk. Hasonlóan, az összes $p\in X^+$-beli szavakhoz tartozó $p^{\mathbf{A}}$ leképezések a szokásos szorzásra nézve egy ($S(\mathbf{A})$-val jelölt) félcsoportot alkotnak, melyet az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus félcsoportjának* nevezünk.

Az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatához adjuk meg az $\mathbf{A}^*=(A, S_1(\mathbf{A}), \delta^*)$ automatát, aholis tetszőleges $a\in A$ és $p\in X^*$ mellett $\delta^*(a, p^{\mathbf{A}})=p^{\mathbf{A}}(a)$. Hasonlóan, $\mathbf{A}^+=$ $=(A, S(\mathbf{A}), \delta^+)$, ahol minden $a\in A$, $p\in X^+$ párra $\delta^+(a, p^{\mathbf{A}})=p^{\mathbf{A}}(a)$. Végül legyen $\mathbf{A}^\lambda=(A, \{z^{\mathbf{A}}|z\in X\cup\{\lambda\}\}, \delta^\lambda)$ megadva a $\delta^\lambda(a, z^{\mathbf{A}})=z^{\mathbf{A}}(a)$ összefüggéssel

$$(a\in A,\ z\in X\cup\{\lambda\}).$$

Legyen S tetszőleges véges félcsoport. (Félcsoporton általában véges félcsoportot fogunk érteni.) Ha S-nek nincs egységeleme, akkor jelölje S^λ azt a félcsoportot, melyre $S^\lambda=S\cup\{\lambda\}$, ahol $\lambda\notin S$ tetszőleges szimbólum, továbbá az S feletti szorzás $\lambda s=s\lambda=s$ $(s\in S)$ és $\lambda\lambda=\lambda$ által ki van terjesztve S^λ-ra. Ha S-nek van egységeleme (azaz ha S monoid), akkor legyen $S^\lambda = S$. Röviden szólva, S^λ jelöli azt a minimális monoidot, melynek S részfélcsoportja.

Vegyünk egy S félcsoportot és jelöljük $S_{\mathbf{A}} = (S^\lambda, S, \delta_s)$-sel azt az automatát, melyre minden $s_1 \in S^\lambda$ és $s_2 \in S$ pár esetén $\delta_s(s_1, s_2) = s_1 s_2$, ahol $s_1 s_2$ jelöli s_1-nek s_2-vel való szorzatát S^λ-ban. Az $S_{\mathbf{A}}$ automatát (az *S félcsoporthoz tartozó*) *félcsoportautomatának* (vagy ha S csoport, akkor *csoportautomatának*) hívjuk. Ha S egyszerű csoport, úgy $S_{\mathbf{A}}$-ra használni fogjuk az *egyszerű csoportautomata* elnevezést. *Transzformációfélcsoporton* értjük az (A, S) párt, ahol A nem üres és véges halmaz, S pedig $\varphi\colon A \to A$ alakú leképezések félcsoportja. Ha S tartalmazza az identikus leképezést, úgy (A, S) egy *transzformáció monoid.* Speciálisan, ha S elemei permutációk, úgy *transzformációcsoportról* vagy *permutációcsoportról* beszélünk. Transzformációcsoportokra használjuk a *permutációcsoport* elnevezést is.

Tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ esetén az $\{x^{\mathbf{A}} | x \in X\}$ az $S(\mathbf{A})$ egy *generátorrendszere.* Hasonlóan, $(A, \{x^{\mathbf{A}} | x \in X\})$ az $(A, S(\mathbf{A}))$ *transzformációfélcsoport egy generátorrendszere.* Ez utóbbit az $\mathbf{A}$ *automata transzformációfélcsoportjának* is hívjuk. Ebben az értelemben tehát egy $\mathbf{A}$ automatát tekinthetünk úgy is, mint egy állapothalmaz feletti transzformációfélcsoport valamely generátorrendszerét. (Ilyenkor persze nem tekintjük különbözőnek az $\mathbf{A}$ olyan $x, y \in X$ bemenő jeleit, melyekre $x^{\mathbf{A}} = y^{\mathbf{A}}$.) Megfordítva, minden (A, S) transzformációfélcsoport azonosítható egy (A, S, δ) automatával, ahol is $\delta(a, s) = s(a)$ $(a \in A,\ s \in S)$. Végül, tekintsünk valamely S félcsoporthoz tartozó $S_{\mathbf{A}} = (S^\lambda, S, \delta_S)$ automatát, melyre tetszőleges $s_1 \in S^\lambda$, $s_2 \in S$ pár esetén $\delta_S(s_1, s_2) = s_1 s_2$ ahogy azt már korábban definiáltuk ($s_1 s_2$ az s_1-nek s_2-vel való szorzatát jelöli az S^λ-ban). Az eddigiek értelmében ez az automata azonosítható egy (S^λ, S) transzformációfélcsoporttal. Adott S félcsoport esetén erre az (S^λ, S) transzformációfélcsoportra hivatkozunk úgy is, mint az *S félcsoport transzformációfélcsoportjára.*

Az automata fogalma nemcsak egy diszkrét időskálában működő (véges) rendszer absztrakt modelljének tekinthető, hanem speciális algebrai struktúrafogalomként is felfogható. Így az algebrai struktúráknál használatos részstruktúra, homomorfizmus és izomorfizmus fogalmak mintájára definiálható a részautomata, illetve az automaták homomorfizmusának és izomorfizmusának fogalma is (l. pl. GÉCSEG—PEÁK [36]).

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának tehát *részautomatája* a $\mathbf{B} = (B, Y, \delta')$ automata, ha $B \subseteq A$, $Y \subseteq X$ és tetszőleges $a \in B$, $x \in Y$ párra $\delta'(a, x) = \delta(a, x) \in B$, azaz $\delta' = \delta|_{B \times Y}$. *Homomorf képe* a $\mathbf{B} = (B, Y, \delta')$ automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának a $h = (h_1, h_2)$ $(h_1\colon A \to B,\ h_2\colon X \to Y)$ szürjektív leképezéspárra nézve, ha minden $a \in A$, $x \in X$ esetén

$$h_1(\delta(a, x)) = \delta'(h_1(a), h_2(x)).$$

Ha $X = Y$, akkor a $h_1\colon A \to B$ *leképezéshez tartozó homomorfizmus* alatt a $h = (h_1, h_2)$ leképezés-párt értjük, ahol h_2 identikus és $h_1(\delta(a, x)) = \delta'(h_1(a), x)$ $(a \in A,\ x \in X)$. Hasonlóan, ha $A = B$, akkor a $h_2\colon X \to Y$ *leképezéshez tartozó homomorfizmus* alatt értjük a $h = (h_1, h_2)$ leképezés-párt, ahol h_1 identikus és $\delta(a, x) = \delta'(a, h_2(x))$ $(a \in A,\ x \in X)$. Ha nem áll fenn a félreértés veszélye, időnként a h_1 leképezéshez tartozó homomorfizmus (h_2 leképezéshez tartozó homomorfizmus) kifejezés helyett a h_1 homomorfizmus (h_2 homomorfizmus) elnevezést használjuk. Akkor mondjuk, hogy egy $\mathbf{A}$ automata *homomorfan (izomorfan) reprezentál* valamely $\mathbf{B}$ automatát (illetve a $\mathbf{B}$ automata *homomorfan (izomorfan) reprezentálható* az **A** automatával), ha az **A** tartalmaz **B**-re homomorfan (izomorfan) leképezhető részautomatát. Homomorf reprezentáció esetén használatos a *lefedés* elnevezés is (azaz **A** lefedi **B**-t, illetve **B** lefedhető **A**-val). Ha **A** izomorfan reprezentálja **B**-t, akkor szokásos azt is mondani, hogy **B** *izomorfan beágyazható* **A**-ba. A homomorf (izomorf) reprezentáció fogalmának természetes általánosítása a homomorf (izomorf) szimuláció (GÉCSEG [29], [30], [31]).

Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, \delta_{\mathbf{A}})$ automata *homomorfan (izomorfan) szimulálja* a $\mathbf{B}=(B, Y, \delta_{\mathbf{B}})$ automatát, ha létezik $A'\subseteq A$ mellett olyan szürjektív (bijektív) h_1: $A'\to B$ leképezés, továbbá olyan h_2: $Y\to X^*$ leképezés, hogy tetszőleges $a\in A'$ és $y\in Y$ mellett $\delta_{\mathbf{A}}(a, h_2(y))\in A'$, továbbá $h_1(\delta_{\mathbf{A}}(a, h_2(y)))=\delta_{\mathbf{B}}(h_1(a), y)$. A h_1 és h_2 leképezésekre használni fogjuk a *szimulációs leképezés* elnevezést (**B**-re és **A**-ra nézve).

A következő állítások nyilvánvalóak.

1.1. TÉTEL. *Ha az* **A** *automata homomorf módon szimulálja (reprezentálja) a* **B** *automatát és a* **B** *automata homomorf módon szimulálja (reprezentálja) a* **C** *automatát, úgy* **A** *homomorf módon szimulálja (reprezentálja)* **C***-t. Hasonló állítás érvényes az izomorf módon történő szimulációra (reprezentációra) vonatkozóan.*

1.2. TÉTEL. *Legyenek* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *és* $\mathbf{B}=(B, Y, \delta')$ *automatákhoz* h_1: $B'\to A(B'\subseteq B)$ *és* h_2: $X\to Y^*$ *szimulációs leképezések, s tegyük fel, hogy* $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\lambda}$ *és* $\{h_2(x)|x\in X\}\subseteq Y^n$. *Ekkor minden k természetes szám esetén megadhatók az* **A** *és* **B** *automatákhoz olyan* h_1': $B''\to A\,(B''\subseteq B)$ *és* h_2': $X\to Y^*$ *szimulációs leképezések, hogy* $B''=B'$ *és* $h_1'=h_1$ *mellett* $\{h_2'(x)|x\in X\}\subseteq Y^{nk}$.

A homomorf szimuláció fogalmának egyik fontos speciális esete az oszthatóság fogalma.

Legyenek $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ és $\mathbf{B}=(B, Y, \delta')$ automaták. Legyen továbbá valamely $A'\subseteq A$-ra h: $A'\to B$ szürjektív leképezés. Valamely $p^{\mathbf{A}}$ $(p\in X^+)$ *lefedi* $q^{\mathbf{B}}$ $(q\in Y^+)$-t h-ra nézve, ha tetszőleges $a\in A'$ mellett $p^{\mathbf{A}}(a)\in A'$ és $h(p^{\mathbf{A}}(a))=q^{\mathbf{B}}(h(a))$. Így $q^{\mathbf{B}}$ $(q\in Y^+)$ *lefedhető* h-ra nézve, ha létezik olyan $p^{\mathbf{A}}$ $(p\in X^+)$, mely lefedi (h-ra nézve). Amennyiben $A'\subseteq A$ és h: $A'\to B$ úgy is megválaszthatóak, hogy h-ra nézve minden $y^{\mathbf{B}}$ $(y\in Y)$ lefedhető, akkor azt mondjuk, hogy **A** *osztható* **B**-vel vagy **B** *osztója* **A**-nak (s ezt a tényt $\mathbf{B}|\mathbf{A}$-val jelöljük). Nyilvánvaló, hogy ez utóbbi eset akkor és csak akkor áll fenn, ha akárhogy is választjuk a $q\in Y^+$ szót, $q^{\mathbf{B}}$ lefedhető h-ra nézve.

Legyen n rögzített természetes szám. **A** *azonos n hosszban* osztható **B**-vel (jelekben: $\mathbf{B}\|^{(n)}\mathbf{A}$), ha minden $y^{\mathbf{B}}$ $(y\in Y)$ lefedhető olyan $p^{\mathbf{A}}$ $(p\in X^+)$-val (egy és ugyanazon h-ra nézve), melyre $p\in X^n$ (azaz $|p|=n$). Ilyenkor azt is mondjuk, hogy **B** *azonos n hosszban osztója* **A**-nak. Azt a tényt, hogy alkalmas n-re $\mathbf{B}\|^{(n)}\mathbf{A}$, időnként $\mathbf{B}\|\mathbf{A}$-val jelöljük, s röviden csak azt mondjuk, hogy **A** *azonos hosszban osztható* **B**-vel (vagy **B** *azonos hosszban osztója* **A**-nak).

Utóbbi definícióinkat transzformációfélcsoportokra természetes módon értelmezzük, ahol is a transzformációfélcsoportokat automataként kezeljük a már említett módon. Könnyen igazolható, hogy az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ és $\mathbf{B}=(B, Y, \delta')$ automatákra $\mathbf{B}|\mathbf{A}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(B, S(\mathbf{B}))|\mathbf{A}$, ami egyben azt is jelenti, hogy $(B, S(\mathbf{B}))|(A, S(\mathbf{A}))$, illetve $\mathbf{B}|(A, S(\mathbf{A}))$. Megjegyezzük még, hogy $\mathbf{B}\|\mathbf{A}$-ból $(B, S(\mathbf{B}))\|\mathbf{A}$ általában nem következik, $\mathbf{B}\|\mathbf{A}$ viszont nyilvánvalóan ekvivalens $\mathbf{B}\|(A, S(\mathbf{A}))$-val. Végül, $(B, S(\mathbf{B}))\|\mathbf{A}$-nak $\mathbf{B}\|\mathbf{A}$ definíció zerinti következménye.

Definíciónkat félcsoportokra úgy terjesztjük ki, hogy félcsoport helyett annak transzformációfélcsoportját tekintjük. Ha tehát S és T félcsoportok, úgy $S|T$ alatt azt értjük, hogy $(S^\lambda, S)|(T^\lambda, T)$. Ismeretes (EILENBERG [20]), hogy $S|T$ akkor és csak akkor, ha S homomorf képe a T egy részfélcsoportjának. Ha S monoid (vagy csoport), ez azzal is ekvivalens, hogy S homomorf képe a T egy részmonoidjának (vagy részcsoportjának) (ARBIB [1], EILENBERG [20], GINZBURG [37]).

Dolgozatunkban alkalmazást nyer a következő

1.3. TÉTEL (DÉNES—HERMANN [3]). *Legyen $G=\{g_1, \ldots, g_n\}$ (véges n-edrendű) csoport és jelölje G' a G kommutátor részcsoportját. Legyen továbbá*

$$P(G) = \{g_{p(1)} \ldots g_{p(n)} | p \text{ az } [n] \text{ egy permutációja}\}.$$

Ekkor létezik olyan $g \in G$, hogy $P(G)=G'g$. Így $P(G)=G$, valahányszor $G=G'$.

Az idézett tételből közvetlenül következik, hogy ha $G=G'$ és H a G egy generátorrendszere, akkor van olyan m természetes szám, melyre minden $g \in G$ előáll H-beli elemek m tényezős szorzataként (DÉNES [2]). Nevezetesen, ha $G=\{g_1, \ldots, g_n\}$ és g_i $(1 \leqq i \leqq n)$ a H-beli elemek m_i-tényezős szorzataként áll elő, úgy m értékéül $\sum_{i=1}^{n} m_i$ megválasztható. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha valamely $\mathbf{A}$ automatára ($G=G'$ mellett) $G|S(\mathbf{A})$, úgy $G\|S(\mathbf{A})$. Az 1.3. tétel következményeként adódik tehát az

1.4. TÉTEL (ÉSIK [24]). *Ha egy G nemkommutatív egyszerű csoportra és egy $\mathbf{A}$ automatára $(G, G)|\mathbf{A}$ fennáll, úgy $(G, G)\|\mathbf{A}$.*

(Az 1.4. tétel [24]-ben közvetlenül, azaz a *Dénes—Hermann tétel* felhasználása nélkül is bizonyítást nyert.)

Legyen $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ $(t=0, \ldots, k-1;\ k \geqq 1)$ automaták egy véges rendszere. Tekintsünk egy tetszőleges nem üres és véges X halmazt, továbbá egy $\varphi=(\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1})$ leképezésvektort, ahol is a

$$\varphi_t\colon A_0 \times \ldots \times A_{k-1} \times X \to X_t \quad (t=0, \ldots, k-1)$$

leképezéseket *visszacsatolási függvényeknek* fogjuk hívni. Adjuk meg az $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát a következő módon:

$$A = A_0 \times \ldots \times A_{k-1},$$

továbbá tetszőleges $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in A$ állapot és $x \in X$ bemenő jel esetén

$$\delta((a_0, \ldots, a_{k-1}), x) = (\delta_0(a_0, \varphi_0(a_0, \ldots, a_{k-1}, x)), \ldots$$
$$\ldots, \delta_{k-1}(a_{k-1}, \varphi_{k-1}(a_0, \ldots, a_{k-1}, x))).$$

Az így kapott automatát az $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ automaták *általános szorzatának* vagy *g-szorzatának* hívjuk (GLUSKOV [39]) (az X halmazra és a $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ visszacsatolási függvényekre nézve), s rá gyakran használjuk az $\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi)$, vagy a $\prod_{t=}^{k-1} \mathbf{A}_t(X, \varphi)$ jelöléseket. A visszacsatolási függvényeket használni fogjuk kiterjesztett értelemben is, vagyis mint

$$\varphi_t\colon A_0\times\ldots\times A_{k-1}\times X^*\to X_t^* \quad (t=0,\ldots,k-1)$$

alakú leképezéseket, ahol is tetszőleges $(a_0,\ldots,a_{k-1})\in A$, $x\in X$, $p\in X^*$ hármasra és tetszőleges $t(=0,\ldots,k-1)$-re

$$\varphi_t(a_0,\ldots,a_{k-1},px)=\varphi_t(a_0,\ldots,a_{k-1},p)\varphi_t(\delta_0(a_0,\varphi_0(a_0,\ldots,a_{k-1},p)),\ldots$$
$$\ldots,\delta_{k-1}(a_{k-1},\varphi_{k-1}(a_0,\ldots,a_{k-1},p)),x),$$

továbbá

$$\varphi_t(a_0,\ldots,a_{k-1},\lambda)=\lambda.$$

Az általános szorzatra időnként használni fogjuk a *Gluskov-szorzat* elnevezést is.

Speciálisan, a közös bemenő jelhalmazzal rendelkező $\mathbf{A}_t=(A_t,X,\delta_t)$ $(t=1,\ldots,n)$ automaták *direkt szorzatán* (vagy röviden, *d*-szorzatán) értjük azt az $\mathbf{A}=(A,X,\delta)$ automatát, melyre $A=A_1\times\ldots\times A_n$, továbbá bármely $(a_1,\ldots,a_n)\in A$, $x\in X$ esetén $\delta((a_1,\ldots,a_n),x)=(\delta_1(a_1,x),\ldots,\delta_n(a_n,x))$. Speciálisan, ha $\mathbf{A}_1=\ldots=\mathbf{A}_n$, akkor *direkt hatványról* beszélünk.

Tegyük fel ezek után, hogy az $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{k-1}(X,\varphi)$ *g*-szorzatban minden $t(=0,\ldots,k-1)$-re adott egy $\gamma(t)\subseteq\{0,\ldots,k-1\}$ halmaz úgy, hogy φ_t nem függ az $(i+1)$-edik $\mathbf{A}_i$ automatától (azaz az $(i+1)$-edik állapotváltozótól), ha $i\notin\gamma(t)$.

Amennyiben létezik olyan rögzített nemnegatív i egész, melyre

$$\gamma(t)\subseteqq\{0,1,\ldots,\max(k-1,i+t-1)\}\quad(t=0,\ldots,k-1),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ egy *α_i-szorzat* (GÉCSEG [30]). Speciálisan, ha $i=0$ (azaz α_0-szorzatról van szó), használatos a *kaszkád szorzat* (YOELI [48]) elnevezés is. Ennek megfelelően, α_0-szorzat (azaz kaszkád szorzat) esetén

$$\gamma(0)=\emptyset,\ \gamma(1)\subseteqq\{0\},\ \gamma(2)\subseteqq\{0,1\},\ldots,\gamma(k-1)\subseteqq\{0,1,\ldots,k-2\}.$$

Ha minden $t(=0,\ldots,k-1)$-re $\gamma(t)=\emptyset$, úgy *kvázidirekt szorzatról* (vagy röviden *q*-szorzatról) beszélünk (GÉCSEG—PEÁK [36]). Ha pedig egy rögzített i természetes számra $|\gamma(t)|\leqq i$ $(t=0,\ldots,k-1)$, úgy azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ egy *v_i-szorzat* (DÖMÖSI—IMREH [16]). *Hurokszorzat*-ról (ÉSIK [23]) akkor van szó, ha $\gamma(t)=\{t-1\}$ minden $t=1,\ldots,k-1$ mellett, továbbá $\gamma(0)=\{k-1\}$. Nyilvánvaló, hogy a hurokszorzat fogalma a v_1-szorzat fogalmának speciális eseteként adódik. A hurokszorzatra használni fogjuk időnként az *l-szorzat* elnevezést is.

Időnként hangsúlyozni fogjuk, hogy a φ_t $(t=0,\ldots,k-1)$ visszacsatolási függvények értékei bizonyos állapotváltozóktól ténylegesen nem függnek. Ha nem áll fenn félreértés veszélye, helyenként ezeket az argumentumokat a visszacsatolási függvények megadásánál elhagyjuk. Ilyenkor gyakran adunk meg egy automata-szorzatot $\mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{k-1}(X,\varphi,\gamma)$ alakban, ahol is a

$$\gamma\colon\{0,\ldots,k-1\}\to 2^{\{0,\ldots,k-1\}}$$

hozzárendelést a tárgyalt értelemben használjuk. A γ-t helyenként *szomszédsági függvénynek* is fogjuk hívni.

Jelölje β a d, g, α_i, q, v_i, l felsorolás valamelyik elemét. Az $\mathbf{A}_0,\ldots,\mathbf{A}_{k-1}$ automaták valamely *β^*-szorzatán* (*β^+-szorzatán*, avagy *β^λ-szorzatán*) értjük az $\mathbf{A}_0^*,\ldots,\mathbf{A}_{k-1}^*$ automaták (az $\mathbf{A}_0^+,\ldots,\mathbf{A}_{k-1}^+$ automaták, avagy $\mathbf{A}_0^\lambda,\ldots,\mathbf{A}_{k-1}^\lambda$ automaták) egy β-szorzatát (GÉCSEG [30], GÉCSEG [29], ÉSIK—VIRÁGH [28]). A β^*-szorzat (β^+-szorzat, avagy β^λ-szorzat) jelölésére az $\mathbf{A}_0^* \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}^*(X, \varphi)$

$$(\mathbf{A}_0^+ \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}^+(X, \varphi), \text{ avagy } \mathbf{A}_0^\lambda \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}^\lambda(X, \varphi))$$

forma helyett az $\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi)$ formát használjuk a legtöbb esetben. Ez az írásmód azon a szokásos felfogáson alapszik, hogy a β-szorzat olyan általánosításait tekintjük, ahol is a nem-kiterjesztett értelemben vett visszacsatolási függvények is felvehetnek értékül bemenő szavakat. Ezen bemenő szavak a szereplő automata-tényezőket aktuális állapotukból az általánosított átmeneti függvény által meghatározott állapotukba viszik át. Ahol lényeges, ott ki fogjuk hangsúlyozni, hogy ez az írásmód β^*-szorzatot, β^+-szorzatot, vagy pedig β^λ-szorzatot takar.

Nyilvánvaló, hogy a β^*-szorzat, β^+-szorzat, illetve β^λ-szorzat fogalma a β-szorzat fogalmának különböző szintű általánosítása. Ezenkívül minden β^λ-szorzat és β^+-szorzat egyben β^*-szorzat is. Értekezésünkben az *általánosított β-szorzat* elnevezést a β^*-szorzat számára tartjuk fenn. Ha tehát általánosított β-szorzatról beszélünk, akkor feltételezzük, hogy a benne szereplő automata-tényezőkhöz rendelt visszacsatolási függvények értékei tetszőleges bemenő szavak. Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban az általánosított β-szorzat elnevezés többnyire a β^*-szorzatra használatos (l. pl. GÉCSEG [29]). Végül, ha egy (általánosított) β-szorzatban az automata-tényezők rendre megegyeznek egymással, akkor használni fogjuk rá az (általánosított) β-hatvány elnevezést is.

Automataszorzat-fogalmak valamely rendezett $\beta_1, \beta_2, \ldots$ (véges vagy végtelen) sorozatára használni fogjuk a *szorzatcsalád* elnevezést. Ebben az értelemben fogunk beszélni α_i-szorzatcsaládról, illetve ν_i-szorzatcsaládról. A szorzatcsalád elnevezést ugyanebben az értelemben használni fogjuk általánosított szorzatok esetén is.

Automaták egy *osztályán* mindig egy nem üres osztályt értünk. Szokásosan, $\mathbf{X}$ egy *automata-operátor* (vagy röviden *operátor*), ha automaták tetszőleges K osztályára $\mathbf{X}(K)$ ugyancsak automaták egy osztályát szolgáltatja. Ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ operátorok, akkor $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(K))$ helyett $\mathbf{XY}(K)$-t írunk. Így, ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ operátorok, az $\mathbf{XY}$ operátor alatt értjük azt a $\mathbf{Z}$ operátort, melyre tetszőleges K automataosztály esetén $\mathbf{Z}(K) = \mathbf{XY}(K)$.

Legyenek $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ operátorok. Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ *ekvivalens* $\mathbf{Z}$*-re nézve,* ha tetszőleges K automataosztályra $\mathbf{XZ}(K) = \mathbf{YZ}(K)$. $\mathbf{X}$ *általánosabb* $\mathbf{Y}$-nál $\mathbf{Z}$*-re nézve,* ha tetszőleges K automataosztályra $\mathbf{XZ}(K) \supseteq \mathbf{YZ}(K)$, és ugyanekkor van olyan K' automataosztály, hogy $\mathbf{XZ}(K') \supset \mathbf{YZ}(K')$. $\mathbf{Z}$*-re nézve* $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ *összehasonlíthatatlan, ha* $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Z}$-re nézve nem ekvivalensek és ráadásul $\mathbf{Z}$-re nézve egyik sem általánosabb a másiknál. Ha $\mathbf{Z}$ az identikus operátor (azaz minden K automataosztályra $\mathbf{Z}(K) = K$), akkor a fenti fogalmaknál a „$\mathbf{Z}$-re nézve" jelzőt rendszerint elhagyjuk.

Jelölje K automaták tetszőleges osztályát. Dolgozatunkban használni fogjuk a következő operátorokat: $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{P}_\beta$, ahol

$\mathbf{S}(K)$: az összes K-beli automaták (valódi és nem valódi) részautomatáinak osztálya,
$\mathbf{H}(K)$: az összes K-beli automaták homomorf képeinek osztálya,
$\mathbf{I}(K)$: az összes K-beli automaták izomorf képeinek osztálya,
$\mathbf{P}_\beta(K)$: K-beli automatákból képezhető összes β-szorzatok osztálya,

ahol is, mint korábban, β a d, g, α_i, q, v_i, l felsorolás bármelyik elemét jelölheti. Tetszőleges K automataosztályra használni fogjuk a

$$K^* = \{\mathbf{A}^* | \mathbf{A} \in K\}, \quad K^+ = \{\mathbf{A}^+ | \mathbf{A} \in K\}, \quad K^\lambda = \{\mathbf{A}^\lambda | \mathbf{A} \in K\}$$

jelöléseket. Ezen jelöléseket alkalmazva jutunk a felsorolt operátorok természetes általánosításaihoz. Valamely $\mathbf{X}$ operátor és K automataosztály esetén legyen definíció szerint

$$\mathbf{X}^*(K) = \mathbf{X}(K^*), \quad \mathbf{X}^+(K) = \mathbf{X}(K^+), \quad \mathbf{X}^\lambda(K) = \mathbf{X}(K^\lambda).$$

Látható, hogy ekkor $\mathbf{P}_\beta^*(K)$ $\big(\mathbf{P}_\beta^+(K)$, illetve $\mathbf{P}_\beta^\lambda(K)\big)$ épp a K-beli automatákból képezhető összes β^*-szorzatok (β^+-szorzatok, illetve β^λ-szorzatok) osztályát jelöli.

Nem nehéz kimutatni, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automaták esetén $\mathbf{B}^* \in \mathbf{HS}^*(\{\mathbf{A}\})$ $\big(\mathbf{B}^* \in \mathbf{IS}^*(\{\mathbf{A}\})\big)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{A}$ homomorfan (izomorfan) szimulálja $\mathbf{B}$-t.

Hasonlóan, $\mathbf{B}^+ \in \mathbf{HS}^+(\{\mathbf{A}\})$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{B}|\mathbf{A}$. A homomorf (izomorf) szimuláció és az oszthatóság fogalma tehát egyszerűen adódik a bevezetett operátorok felhasználásával.

Végül, akkor mondjuk, hogy automaták egy $\beta_1, \beta_2, \ldots$ szorzatcsaládja (általánosított szorzatcsaládja) az $\mathbf{X}$ *operátorra nézve valódi hierarchiát alkot,* ha minden $t(=1, 2, \ldots)$-hez létezik olyan K automataosztály, hogy $\mathbf{XP}_{\beta_t}(K) \subset \mathbf{XP}_{\beta_{t+1}}(K)$ $\big(\mathbf{XP}_{\beta_t}^*(K) \subset \mathbf{XP}_{\beta_{t+1}}^*(K)\big)$, s ugyanekkor bármely K' automataosztályra

$$\mathbf{XP}_{\beta_t}(K') \subseteqq \mathbf{XP}_{\beta_{t+1}}(K') \quad \big(\mathbf{X}P_{\beta_t}^*(K') \subseteqq \mathbf{X}P_{\beta_{t+1}}^*(K')\big).$$

Jelölje ismét β a d, g, α_i, q, v_i, l felsorolás valamelyik elemét, és legyen M az összes automaták osztálya. Automaták egy K osztályát *homomorfan (izomorfan) teljesnek* nevezzük a β-szorzatra nézve, ha $\mathbf{HSP}_\beta(K) = M$ $\big($ha $\mathbf{ISP}_\beta(K) = M\big)$. Amennyiben $\mathbf{HSP}_\beta^*(K) = M$ $\big(\mathbf{ISP}_\beta^*(K) = M\big)$, úgy K-t *homomorfan (izomorfan) teljesnek* hívjuk az *általánosított β-szorzatra nézve. Homomorfan (izomorfan) S*-teljesnek nevezzük K-t a *β-szorzatra nézve,* ha $\mathbf{HS}^*\mathbf{P}_\beta(K) = M$ $\big(\mathbf{IS}^*\mathbf{P}_\beta(K) = M\big)$. Végül akkor mondjuk, hogy K *homomorfan (izomorfan) S-teljes* az *általánosított β-szorzatra nézve,* ha

$$\mathbf{HS}^*\mathbf{P}_\beta^*(K) = M \quad \big(\mathbf{IS}^*\mathbf{P}_\beta^*(K) = M\big).$$

Az általános szorzattal kapcsolatosak a következő eredmények.

1.5. Tétel (Gluskov [39]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor izomorfan teljes az általános szorzatra nézve,* ha *K-ban található olyan* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *automata, melynek vannak olyan különböző $a, b \in A$ állapotai és egymástól nem feltétlen különböző $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ bemenő jelei, hogy*

$$\delta(a, x_1) = \delta(b, x_2) = a \quad \text{és} \quad \delta(a, x_3) = \delta(b, x_4) = b.$$

1.6. Tétel (Leticsevszkij [47]). *Automaták egy K osztálya akkor és csakis akkor homomorfan teljes az általános szorzatra nézve, ha K-ban található olyan* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *automata, melynek alkalmas $a \in A$ állapotára, $x_1, x_2 \in X$ bemenő jeleire* és *$p_1, p_2 \in X^*$ bemenő szavaira*

$$\delta(a, x_1) \neq \delta(a, x_2) \quad \text{és} \quad \delta(a, x_1 p_1) = \delta(a, x_2 p_2) = a$$

fennállnak.

Akkor mondjuk, hogy egy automata *eleget tesz a Leticsevszkij-kritériumnak*, ha teljesíti az 1.6. tételben szereplő **A** automatára adott feltételeket. Ha egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata valamely $a\in A$ állapotára, $x_1, x_2\in X$ bemenő jeleire és $p\in X^*$ bemenő szavára $\delta(a, x_1)\neq\delta(a, x_2)$ és $\delta(a, x_1 p)=a$ akkor azt mondjuk, hogy **A** *eleget tesz a fél-Leticsevszkij-kritériumnak*. Amennyiben automaták egy K osztálya tartalmaz a *(fél-) Leticsevszkij-kritériumnak* eleget tevő automatát, akkor azt is mondjuk, hogy a K osztály *eleget tesz a (fél-) Leticsevszkij-kritériumnak*. Érvényes a következő

1.7. TÉTEL (ÉSIK [21]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor homomorfan teljes az α_2-szorzatra nézve, ha K eleget tesz a Leticsevszkij-kritériumnak, azaz ha K homomorfan teljes az általános szorzatra nézve.*

(Az α_0- és α_1-szorzatra nézve homomorfan teljes rendszerek jellemzését l. ÉSIK—DÖMÖSI [25], DÖMÖSI—ÉSIK [10], illetve ÉSIK [22].)

Valamely β szorzattípust *homomorfan (izomorfan) általánosnak* hívunk, ha $\mathbf{HSP}_\beta$ ekvivalens $\mathbf{HSP}_g$-vel ($\mathbf{ISP}_\beta$ ekvivalens $\mathbf{ISP}_g$-vel). *Homomorfan (izomorfan) S-általánosnak* hívjuk β-t, ha $\mathbf{HS^*P}_\beta$ ekvivalens $\mathbf{HS^*P}_g$-vel ($\mathbf{IS^*P}_\beta$ ekvivalens $\mathbf{IS^*P}_g$-vel). Ugyanígy értelmezzük ezeket a fogalmakat általánosított szorzatok esetén is. (Ekkor természetesen a P_β és P_g operátorok helyett a P_β^* és P_g^* operátorokat tekintjük.) Érvényes az 1.7. tétel következő élesítése

1.8. TÉTEL (ÉSIK—HORVÁTH [27]). *Az α_2-szorzat homomorfan általános.*

A következő eredmény a szakirodalomban *Krohn—Rhodes-féle lefedési tétel* néven ismeretes.

1.9. TÉTEL (KROHN—RHODES [45]). *Legyen K automaták azon osztálya, mely tartalmazza az $\mathbf{R}^\lambda$ kétállapotú identikus-beállító automatát és az összes $G_\mathbf{A}$ automatát, ahol G egyszerű csoport. Ekkor K homomorfan teljes az α_0-szorzatra nézve. Pontosabban, ekkor minden* **A** *automatára* $\mathbf{A}\in\mathbf{HSP}_{\alpha_0}(K_\mathbf{A})$, *ahol*

$$K_\mathbf{A} = \{\mathbf{R}^\lambda, G_\mathbf{A} | G \text{ egyszerű csoport, melyre } G|S(\mathbf{A})\}.$$

Speciálisan, $\mathbf{A}\in\mathbf{HSP}_{\alpha_0}(K_\mathbf{A}-\{\mathbf{R}^\lambda\})$ *akkor és csak akkor, ha* **A** *permutáció automata.*

Megfordítva, tetszőleges **A** *automatára és automaták tetszőleges K osztályára* $\mathbf{A}\in\mathbf{HSP}_{\alpha_0}(K)$ *teljesülése mellett a következők állnak fenn:*

(i) *ha $S(\mathbf{R}^\lambda)|S(\mathbf{A})$, úgy van olyan $\mathbf{B}\in K$, hogy $S(\mathbf{B})$ egy részfélcsoportja izomorf $S(\mathbf{R}^\lambda)$-val,*

(ii) *ha $G|S(\mathbf{A})$ és G egyszerű csoport, úgy van olyan $\mathbf{B}\in K$, hogy $G|S(\mathbf{B})$.*

Automaták egy K osztályára akkor mondjuk, hogy *eleget tesz a Krohn—Rhodes kritériumnak, ha*

(i) van olyan $\mathbf{A}\in K$, hogy az $S(\mathbf{A})$ egy részfélcsoportja izomorf $S(\mathbf{R}^\lambda)$-val,

(ii) minden G egyszerű csoporthoz létezik olyan $\mathbf{A}\in K$, melyre $G|S(\mathbf{A})$.

GÉCSEG FERENC [31]-ben többek között igazolta, hogy az általánosított α_0-szorzatra nézve homomorfan S-teljes osztályok épp a *Krohn—Rhodes kritériumnak* eleget tevő automataosztályok. Ezen eredményt összevonva egyik [11]-beli eredménnyel, a következő tételhez jutunk.

1.10. TÉTEL (GÉCSEG [31], illetve DÖMÖSI—ÉSIK [11]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor homomorfan S-teljes az általánosított* α_0*-szorzatra nézve, ha homomorfan S-teljes az* α_0*-szorzatra nézve.*

Nevezetesen, az ilyen tulajdonságú K automataosztályok épp a Krohn—Rhodes kritériumnak eleget tevő automataosztályok lesznek.

A következő állítás nyilvánvaló.

1.11. TÉTEL. *Legyen* $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{n-1}(X,\varphi)$ *automaták egy* α_1*-szorzata. Ekkor* $\mathbf{A}$ *izomorf egy* $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0\times\ldots\times\mathbf{B}_{n-1}(X,\varphi)$ α_0*-szorzattal, ahol minden* $t(=0,\ldots,n-1)$*-re* $\mathbf{B}_t$ *előáll az* $\mathbf{A}_t$ *egytényezős* α_1*-szorzataként.*

Legyenek β_1 és β_2 szorzattípusok. β_1-et *homomorfan (izomorfan) általánosabbnak* hívjuk β_2-nél, ha $\mathbf{HSP}_{\beta_1}$ ($\mathbf{ISP}_{\beta_1}$) általánosabb $\mathbf{HSP}_{\beta_2}$-nél ($\mathbf{ISP}_{\beta_2}$-nél). Ilyenkor azt is mondjuk, hogy β_1 a β_2-nek *valódi általánosítása a homomorf (izomorf) reprezentációra nézve.* Hasonlóan értelmezzük a szorzatok valódi általánosításának fogalmát a homomorf (izomorf) szimulációra nézve, s ugyanúgy értelmezzük ezeket a fogalmakat általánosított szorzatok esetén is.

Az 1.8—1.11. tételek felhasználásával nem nehéz kimutatni, hogy az α_2-szorzat homomorfan általánosabb, mint az α_1-szorzat, továbbá az α_1-szorzat homomorfan általánosabb, mint az α_0-szorzat. Az 1.8. tételből nyilvánvalóan következik az is, hogy minden $i\geqq 2$-re az α_i-szorzat homomorfan általános.

Ismeretes az is, hogy az α_i-szorzat egyetlen i-re sem izomorfan általános, továbbá minde i-re az α_{i+1}-szorzat izomorfan általánosabb, mint az α_i-szorzat (IMREH [42]). (Ugyanitt megtalálható az α_i-szorzatokra nézve izomorfan teljes rendszerek jellemzése is.)

GÉCSEG FERENC [31]-ben teljeskörűen jellemezte homomorf és izomorf S-teljesség szempontjából az általánosított α_i-szorzatcsalád minden tagját. (Így az általánosított α_0- és általánosított α_1-szorzatokat is.) Értekezésünkben fel fogjuk használni a következő eredményeit is.

1.12. TÉTEL (GÉCSEG [31]). *Automaták egy K osztálya homomorfan S-teljes az általánosított Gluskov-szorzatra nézve akkor és csak akkor, ha minden* $i\geqq 2$ *esetén izomorfan S-teljes az általánosított* α_i*-szorzatra nézve.*

Nevezetesen, K akkor és csak akkor rendelkezik ezen tulajdonságokkal, ha tartalmaz nem-monoton automatát.

Automaták valamely β szorzattípusára akkor mondjuk, hogy *homomorf (izomorf) szimuláció* és *homomorf (izomorf) reprezentáció szempontjából ekvivalens,* ha a $\mathbf{HS^*P}_\beta$ ($\mathbf{IS^*P}_\beta$) és $\mathbf{HSP}_\beta$ ($\mathbf{ISP}_\beta$) operátorok ekvivalensek egymással. Hasonlóképp értelmezzük ezt a fogalmat általánosított szorzatokra is.

1.13. TÉTEL (GÉCSEG [29]). *Mind az általánosított Gluskov-szorzat, mind pedig az általánosított* α_i*-szorzat* $(i=0,1,2,\ldots)$ *homomorf szimuláció és homomorf reprezentáció szempontjából ekvivalens.*

GÉCSEG FERENC azt is kimutatta, hogy az *általánosított Gluskov-szorzat* izomorf szimuláció és izomorf reprezentáció szempontjából is ekvivalens. Az általánosított α_i-szorzatoknál $(i=0,1,2,\ldots)$ viszont ez már nem teljesül. Sőt, az izomorf reprezentációra nézve az általánosított α_i-szorzatcsalád valódi hierarchiát alkot, s így egyike sem ekvivalens izomorf reprezentáció szempontjából az *általánosított Gluskov-szorzattal* (GÉCSEG [29]).

Fel fogjuk használni a következő, speciális automatákkal kapcsolatos eredményeket is.

1.14. TÉTEL (GÉCSEG—IMREH [33], illetve GÉCSEG—JÜRGENSEN [35]). *Ha K egy olyan automataosztály, mely nem tesz eleget a fél-Leticsevszkij kritériumnak, akkor*

$$\mathbf{HSP}_g(K) = \mathbf{HSP}_{v_1}(K).$$

1.15. TÉTEL (GÉCSEG [29]). *Ha K jelöli az összes monoton automaták osztályát, akkor*

$$K = \mathbf{HS}^*\mathbf{P}_g^*(K) = \mathbf{ISP}_{\alpha_0}(\{E\}).$$

Definiáljuk tetszőleges p természetes szám esetén a $\mathbf{D}_p=(D_p, \{x, y\}, \delta_p)$ automatát, ahol $D_p=\{0, ..., p\}$, továbbá

$$\delta_p(t, x) = \begin{cases} t+1, & \text{ha} \quad 0 \leqq t < p-1, \\ 0, & \text{ha} \quad t = p-1, \\ p, & \text{ha} \quad t = p, \end{cases}$$

és

$$\delta_p(t, y) = p \quad (t \in D_p).$$

Az így megkonstruált automatára használni fogjuk a *(p súlyú) kvázielevátor* elnevezést is. ÉSIK és HORVÁTH [27]-beli alaperedményének bizonyításából adódik a következő

1.16. TÉTEL (ÉSIK—HORVÁTH [27]). *Legyen $K=\{\mathbf{D}_p|p$ prím$\}$, azaz legyen K az összes prím súlyú kvázielevátorok osztálya. Legyen továbbá $K'=\{\mathbf{C}_p|p$ prím$\}\cup\{\mathbf{E}\}$, ahol $\mathbf{C}_p$ jelöli a p állapotszámú számlálót, $\mathbf{E}$ pedig a kétállapotú elevátort. Ekkor*

$$\mathbf{HSP}_g(K) = \mathbf{HSP}_{\alpha_0}(K').$$

Fejezetünket néhány egyszerű összefüggés ismertetésével zárjuk.

1.17. TÉTEL. *Automaták tetszőleges K osztályára $\mathbf{HSP}_{\alpha_0}(K)$ $(\mathbf{HSP}_g(K))$ a legszűkebb automataosztály, mely K-t tartalmazza és zárt a $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}_{\alpha_0}$ operátorokra nézve (és zárt a $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}_g$ operátorokra nézve).*

(Az 1.17. tétel bizonyítása GÉCSEG FERENC [29] munkájában megtalálható.)

A következő tétel a v_i-szorzatok bizonyos átrendezhetőségével kapcsolatos.

1.18. TÉTEL. *Legyen $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{n-1}(X, \varphi)$ az $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ $(t=0, ..., n-1)$ automaták egy v_i-szorzata (egy v_i^λ-szorzata, egy v_i^+-szorzata, egy v_i^*-szorzata). Legyen π a $\{0, ..., n-1\}$ halmaz egy permutációja. Létezik egy olyan*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\pi(0)}\times\ldots\times\mathbf{A}_{\pi(n-1)}(X, \varphi')$$

v_i-szorzat (v_i^λ-szorzat, v_i^+-szorzat, v_i^*-szorzat), mely izomorf $\mathbf{A}$-val és az $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'$ izomorfizmust az

$$(a_1, ..., a_n) \to (a_{\pi(1)}, ..., a_{\pi(n)}) \quad ((a_1, ..., a_n)\in A_0\times\ldots\times A_{n-1})$$

hozzárendelés szolgáltatja.

Ismét használjuk a β-szorzat elnevezést a g-szorzatra, avagy az eddigiekben definiált speciális g-szorzatok valamelyikére.

A szorzótényezők számának bizonyos értelmű csökkenthetőségét szolgálja a következő

1.19. TÉTEL. *Legyen* $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{n-1}(X, \varphi)$ *egy legalább kéttényezős* β*-szorzata* (β^λ*-szorzata*, β^+*-szorzata*, β^**-szorzata*) *valamely* $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ $(t=0, \ldots, n-1)$ *automatáknak. Legyen továbbá* $\mathbf{B}=(B, X, \delta)$ *az* $\mathbf{A}$ *egy részautomatája és valamely* $t_0\in\{0, \ldots, n-1\}$ *mellett legyen* $a\in A_{t_0}$. *Ha tetszőleges* $(a_0, \ldots, a_{n-1})\in B(\subseteq A_0\times\ldots\times A_{n-1})$ *esetén* $a_{t_0}=a$, *akkor létezik olyan*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0\times\ldots\times\mathbf{A}_{t_0-1}\times\mathbf{A}_{t_0+1}\times\ldots\times A_{n-1}(X, \varphi')$$

β*-szorzat* (β^λ*-szorzat*, β^+*-szorzat*, β^**-szorzat*), *hogy* $\mathbf{A}'$ *tartalmaz egy* $\mathbf{B}'$ *részautomatát, mely* $\mathbf{B}$*-vel izomorf és a* $\mathbf{B}\to\mathbf{B}'$ *izomorfizmust a*

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \to (a_0, \ldots, a_{t_0-1}, a_{t_0+1}, \ldots, a_{n-1}) \quad ((a_0, \ldots, a_{n-1})\in B)$$

hozzárendelés szolgáltatja.

(Az 1.18. és 1.19. tétel bizonyítás nélkül megtalálható DÖMÖSI—ÉSIK [13]-ban ν_i-szorzatokra.)

2. Az α_i-szorzatcsalád és a ν_i-szorzatcsalád

Ebben a fejezetben homomorf reprezentáció és szimuláció szempontjából összehasonlító vizsgálatokat végzünk az α_i-szorzatokra és a ν_i-szorzatokra nézve. Ki fog derülni, hogy homomorf reprezentáció és homomorf szimuláció szempontjából a két szorzatcsalád lényeges eltérést mutat.

Először meg fogunk adni egy olyan automataosztályt, mely a ν_1-szorzatra nézve homomorfan teljes, de sem az α_0-, sem pedig az α_1-szorzatra nézve homomorfan még csak nem is S-teljes. (Az α_2-szorzatra, illetve minden $i\geqq 2$ esetén az α_i-szorzatra ilyen eredmény nem várható, mivel az α_2-szorzat már homomorfan általános.)

Megadunk ezután egy olyan K automataosztályt, melyre tetszőlegesen rögzített $i(>0)$ mellett

$$HSP_{\nu_i}(K) \subset HSP_{\nu_{i+1}}(K) \subset HSP_{\alpha_0}(K),$$

illetve

$$HS^*P_{\nu_i}(K) \subset HS^*P_{\nu_{i+1}}(K) \subset HS^*P_{\alpha_0}(K).$$

Ez $HSP_{\alpha_0}(K)\subseteq HSP_g(K)$ és $HS^*P_{\alpha_0}(K)\subseteq HS^*P_g(K)$ nyilvánvaló fennállása miatt egyúttal azt is jelenti, hogy szemben az α_i-szorzatcsaláddal, nincs olyan i természetes szám, melyre a ν_i-szorzat homomorf reprezentáció vagy homomorf szimuláció szempontjából ekvivalens lenne a *Gluskov-szorzattal.*

Érvényes a következő

2.1. TÉTEL (DÖMÖSI [7]). *Létezik olyan* K *automataosztály, mely homomorfan teljes a* ν_1*-szorzatra nézve, de nem homomorfan* S*-teljes sem az* α_0*-szorzatra, sem pedig az* α_1*-szorzatra nézve.*

Bizonyítás. Definiáljuk minden n természetes számra az $\mathbf{A}_n=(A_n, X_n, \delta_n)$ automatát, ahol $A_n=\{0, \ldots, n\}$, $X_n=\{x_1, \ldots, x_n\}$, továbbá tetszőleges $u \in A_n$, $x_v \in X_n$ esetén $\delta_n(u, x_v)=v$, ha $u=0$ és $\delta_n(u, x_v)=0$, ha $u \neq 0$.

Legyen továbbá $K=\{\mathbf{A}_n | n=1, 2, \ldots\}$.

Mutassuk meg először, hogy K nem homomorfan teljes az α_1-szorzatra nézve (s így az α_0-szorzatra nézve sem). Legyen $\mathbf{A}_n=(A_n, X_n, \delta_n) \in K$ tetszőlegesen rögzített. Vegyük észre, hogy akárhogy is adunk meg egy $a \in A_n$ állapotot és egy páratlan hosszúságú $p \in X_n^+$ szót, $\delta_n(a, p)=0$, ha $a \neq 0$. Ha viszont $p \in X^+$ hossza páros, $\delta_n(0, p)=0$. Így bárhogy is definiálunk egy $\mathbf{B}=\mathbf{A}_n(X, \varphi)$ egytényezős α_1-szorzatot, valamely G csoportra $G|S(\mathbf{B})$ csak úgy teljesülhet, ha G vagy triviális (egy elemű), vagy pedig a másodfokú szimmetrikus csoporttal izomorf. A K tehát nem tesz eleget a *Krohn—Rhodes kritériumnak,* vagyis az 1.10. tétel következtében nem homomorfan S-teljes az α_0-szorzatra nézve. Ugyanez érvényes az összes K-beli egytényezős α_1-szorzatok osztályára is. Figyelembe véve, hogy minden α_1-szorzat megegyezik tényezői egytényezős α_1-szorzatának α_0-szorzatával, ekkor a K nem lehet homomorfan S-teljes az α_1-szorzatra nézve (s így az α_0-szorzatra nézve) sem.

Igazoljuk ezután, hogy K homomorfan teljes a ν_1-szorzatra nézve. Ehhez azt fogjuk bebizonyítani, hogy ha $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ tetszőleges n állapotszámú automata, akkor van olyan (kéttényezős) $\mathbf{M}=\mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n(X, \varphi)$ ν_1-hatvány, mely homomorfan reprezentálja $\mathbf{A}$-t.

Legyen $a_1, \ldots, a_n$ az $\mathbf{A}$ állapotainak egy felsorolása. Alkossuk meg a φ visszacsatolási függvényt úgy, hogy tetszőleges $(u, v) \in A_n \times A_n$, $x \in X$ párra

$$\varphi_0(u, v, x) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } v \neq 0 \text{ és } \delta(a_v, x) = a_k, \\ \text{tetszőlegesen rögzített } X_n\text{-beli elem különben,} \end{cases}$$

$$\varphi_1(u, v, x) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } u \neq 0 \text{ és } \delta(a_u, x) = a_k, \\ \text{tetszőlegesen rögzített } X_n\text{-beli elem különben.} \end{cases}$$

Legyen $B=(A_n-\{0\}) \times \{0\} \cup \{0\} \times (A_n-\{0\})$, s adjuk meg a $h\colon B \to A$ leképezést oly módon, hogy minden $(u, v) \in B$ esetén

$$h((u, v)) = \begin{cases} a_u, & \text{ha } v = 0, \\ a_v, & \text{ha } u = 0. \end{cases}$$

Egyszerű számítással bizonyítható, hogy h az $\mathbf{M}$ ν_1-szorzat egy homomorfizmusát szolgáltatja $\mathbf{A}$-ra. □

Jelölje ismét tetszőleges p természetes szám esetén $\mathbf{D}_p=(D_p, \{x, y\}, \delta_p)$ a p súlyú kvázielevátort, azaz legyen $D_p=\{0, \ldots, p\}$, továbbá

$$\delta_p(t, x) = \begin{cases} t+1, & \text{ha } 0 \leq p < p-1, \\ 0, & \text{ha } t = p-1, \\ p, & \text{ha } t = p \end{cases}$$

és

$$\delta_p(t, y) = p \quad (t \in D_p).$$

Legyen $i \geqq 1$ valamely egész szám és $m = \Pi(p_j | j=1, \dots, i+1)$, ahol p_j a j-edik prímszám. Definiáljuk az $\mathbf{M} = (M, \{x, y\}, \delta)$ automatát oly módon, hogy $M = \{0, \dots, m\}$, valamint

$$\delta(t, x) = \begin{cases} t+1, & \text{ha} \quad 0 \leqq t < m-1, \\ 0, & \text{ha} \quad t = m-1, \\ m, & \text{ha} \quad t = m, \end{cases}$$

$$\delta(t, y) = \begin{cases} t+1, & \text{ha} \quad 0 < t < m-1, \\ 0, & \text{ha} \quad t = m-1, \\ m, & \text{ha} \quad t \in \{0, m\}. \end{cases}$$

Most kimutatjuk a következő állítás teljesülését.

2.2. Segédtétel (Dömösi [7], illetve Dömösi—Ésik [13]). *Legyen K az összes prímszám súlyú kvázielevátorok osztálya. Ekkor érvényesek a következők:*

(i) $\mathbf{M} \notin HS^*P_{v_i}(K)$,

(ii) $\mathbf{M} \in HSP_{v_{i+1}}(K)$.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{D} = (D, X', \delta_{\mathbf{D}}) = \mathbf{D}_{q_0} \times \dots \times \mathbf{D}_{q_{n-1}}(X', \varphi) \quad (\mathbf{D}_{q_0}, \dots, \mathbf{D}_{q_{n-1}} \in K)$$

egy olyan v_i-szorzat, mely ((i)-beli állításunkkal ellentétben) tartalmaz egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta_{\mathbf{A}})$ automatát úgy, hogy alkalmas $h_1 \colon A' \to M$ $(A' \subseteqq A)$, $h_2 \colon \{x, y\} \to X^*$ szimulációs leképezésekre nézve homomorfan szimulálja $\mathbf{M}$-et. Kimutatjuk, hogy ilyen tulajdonságokkal rendelkező $\mathbf{A}$ automata létezésének feltételezése ellentmondáshoz vezet.

Az n-et válasszuk minimálisnak, azaz ha egy K-beli v_i-szorzat homomorfan szimulálja $\mathbf{M}$-et, akkor ezen szorzat tényezőinek száma legyen legalább n. Ezenkívül $\mathbf{A}$ is legyen minimális abban az értelemben, hogy egyetlen valódi részautomatája sem szimulálja homomorfan $\mathbf{M}$-et. Végül, legyen $A'(\subseteqq A)$ is minimális abban az értelemben, hogy ha $A'' \subset A'$ és létezik a h_1-nek egy $h_1' \colon A'' \to M$ szürjektív szűkítése, akkor $\mathbf{A}$ az $\mathbf{M}$-et h_1'-re és h_2-re nézve nem szimulálja homomorfan.

Legyen $A_0 = h_1^{-1}(M - \{m\})$ és $A_1 = h_1^{-1}(\{m\})$. Az előzőek értelmében $A' = A_0 \cup A_1$ (ahol is $A_0 \cap A_1 = \emptyset$). Ekkor tekintettel arra, hogy az $\mathbf{A}$ választása miatt az A-nak minden $a \in A_0$ generáló eleme, az $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) (\in A_0)$ állapotvektor valamely $(t+1)$-edik a_t $(t = 0, \dots, n-1)$ komponense q_t-vel csak úgy egyezhet meg, ha minden $b \in A$ állapotvektor $(t+1)$-edik komponense q_t-vel megegyezik. (Értelemszerűen, valamely $(a_0, \dots, a_{n-1})$ állapotvektor első komponensén az a_0, második komponensén az $a_1, \dots, n$-edik komponensén az a_{n-1} állapotokat értjük.) Ekkor azonban az 1.19. tétel értelmében $\mathbf{A}$ izomorf K-beli automaták egy $(n-1)$-tényezős v_i-szorzatával, s így az $\mathbf{M}$ homomorfan szimulálható egy ilyen $(n-1)$-tényezős szorzattal. Ez ellentmond az n minimalitására tett feltételünknek, tehát tetszőleges $a (\in A_0)$, $t (=0, \dots, n-1)$ mellett az a állapotvektor $(t+1)$-edik komponense q_t-től különböző.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy tetszőleges $d = (d_0, \dots, d_{n-1}) \in A_1$ esetén létezik olyan $t (=0, \dots, n-1)$, hogy $d_t = q_t$.

Vezessük be az $\bar{x}=h_2(x)$, $\bar{y}=h_2(y)$ $(\bar{x},\bar{y}\in X^+)$ jelöléseket, s mutassuk meg először, hogy m és $|\bar{x}|$ relatív prímek. (**M** konstrukciója miatt nyilvánvaló, hogy $\lambda\notin\{h_2(x), h_2(y)\}$, azaz $h_2(x), h_2(y)\in X^+$.) Ha állításunkkal ellentétben m és $|\bar{x}|$ nem lennének relatív prímek, akkor akárhogy is adjuk meg a $b=(b_0, \ldots, b_{n-1})\in A_0$ állapotot, minden olyan $t(=0, \ldots, n-1)$ esetén, melyre q_t osztója m és $|\bar{x}|$ legnagyobb közös osztójának, azt kapjuk, hogy

$$\delta_{q_t}(b_t, \varphi_t(b_0, \ldots, b_{n-1}, \bar{x}))\in\{b_t, q_t\}.$$

Mivel $\delta_{\mathbf{A}}(b, \bar{x})\in A_0$ és az A_0-beli állapotvektorok $(t+1)$-edik komponensei tetszőleges $t(=0, \ldots, n-1)$ mellett q_t-től különböznek, ez azt jelenti, hogy ez esetben

$$\delta_{q_t}(b_t, \varphi_t(b_0, \ldots, b_{n-1}, \bar{x})) = b_t.$$

k-val jelölve az $|\bar{x}|$, $q_0, \ldots, q_{n-1}$ legkisebb közös többszörösét, $l=k/|\bar{x}|$ mellett $\delta_{\mathbf{A}}(b, \bar{x}^l)=b$, hiszen $\delta_{\mathbf{A}}(b, \bar{x}^l)\in A_0$ és az A_0-beli állapotvektorok $(t+1)$-edik komponensei minden $t(=0, \ldots, n-1)$ esetén q_t-től különböznek. A $\delta_{\mathbf{A}}(b, \bar{x}^l)=b$ feltételezés azonban ellentmondáshoz vezet, hiszen az **M** szerkezete és $m>1$ értelmében ez csak úgy állhatna fenn, ha l az m többszöröse lenne. Így tehát azt kaptuk, hogy m és $|\bar{x}|$ valóban relatív prímek.

M és **D** szerkezete miatt nyilvánvaló, hogy m osztója a $q_0, \ldots, q_{n-1}$ prímszámok legkisebb közös többszörösének, azaz ezen legkisebb közös többszörös előáll rm alakban (ahol r és m relatív prímek). Így alkalmas k, l nemnegatív egészekre $kr=lm+1$, azaz tetszőleges $t\in M$ esetén $\delta_{\mathbf{M}}(t, x^{kr})=\delta_{\mathbf{M}}(t, x)$. Ennek alapján egyszerű számítással kimutatható, hogy **A** homomorfan szimulálja **M**-et a $h_1'(d)=h_1(d)$ $(d\in A')$, $h_2'(x)=\bar{x}^{kr}$, $h_2'(y)=\bar{y}$ összefüggéseknek eleget tevő $h_1'\colon A'\to M$ $(A'\subseteq A)$, $h_2''\colon \{x, y\}\to\{x, y\}^*$ leképezésekre nézve is.

Eddigi gondolatmenetünket összefoglalva, $\bar{x}$-ról megszorítás nélkül feltehető, hogy $r\,\|\bar{x}|$. Másrészt korábban azt kaptuk, hogy m és $|\bar{x}|$ relatív prímek.

Legyen valamely $\mathbf{A}_0$-beli $a=(a_0, \ldots, a_{n-1})$-re $h_1(a)=0$, s tekintsük rendre a $\delta_{\mathbf{A}}(a,\bar{y})=b$, $\delta_{\mathbf{A}}(a,\bar{x})=c'$ és $\delta_{\mathbf{A}}(a,\bar{x}\bar{y})=c$ egyenlőségeknek eleget tevő $b=(b_0, \ldots, b_{n-1})$, $c'=(c_0', \ldots, c_{n-1}')$ és $c=(c_0, \ldots, c_{n-1})$ állapotokat. Folytatva annak igazolását, hogy tetszőleges $d=(d_0, \ldots, d_{n-1})\in A_1$ esetén létezik olyan $t(=0, \ldots, n-1)$, hogy $d_t=q_t$, először azt mutatjuk meg, hogy alkalmas $t(=0, \ldots, n-1)$-re $b_t=q_t$.

Korábban láttuk, hogy $(a_0, \ldots, a_{n-1})\in A_0$ esetén $a_t\neq q_t$ $(t=0, \ldots, n-1)$. Így tekintettel arra, hogy $\delta_{\mathbf{A}}(a,\bar{x}\bar{y})\in A_0$ az M szerkezete miatt ugyancsak fennáll, $c_t\neq q_t$ $(t=0, \ldots, n-1)$ is igaz. Ezt felhasználva mutatjuk meg, hogy ha $b_t\neq q_t$ minden $t(=0, \ldots, n-1)$-re teljesül, úgy alkalmas k-ra $\delta_{\mathbf{A}}(c,\bar{x}^k)=b$, ami lehetetlen, hiszen $\delta_{\mathbf{A}}(c,\bar{x}^k)\in A_0$ és $b\in A_1$. Tegyük fel tehát, hogy állításainkkal ellentétben $b_t\neq q_t$ $(t=0, \ldots, n-1)$.

Mivel $r\,\|\bar{x}|$, minden olyan $t(=0, \ldots, n-1)$-re, melyre $q_t\nmid m$, fennáll a $c_t'=a_t$, s így ($b_t\neq q_t$ és $\mathbf{D}_{q_t}$ szerkezete miatt) a $c_t=b_t$ egyenlőség. Így ismét alkalmazva az $r\,\|\bar{x}|$ összefüggést, azt kapjuk, hogy tetszőleges k nemnegatív egész esetén a $\delta_{\mathbf{A}}(c,\bar{x}^k)$ és a b állapotvektorok $(t+1)$-edik komponense $(0\leqq t\leqq n-1)$ egybeesik, ha $q_t\nmid m$.

Vegyük észre azt, is, hogy ha valamely q_u, q_v $(0\leqq u,\ v\leqq n-1)$ párra $q_u=q_v$, akkor a $\delta_{\mathbf{A}}(c,\bar{x}^k)$ állapotvektor $(u+1)$-edik c_u'' és $(v+1)$-edik c_v'' komponensére $c_u''-c_v''\equiv b_u-b_v \bmod q_u$. Tehát tekintettel arra, hogy m és $|\bar{x}|$ relatív prímek, ($b_t\neq q_t$ $(t=0, \ldots, n-1)$ miatt) szükségképp van olyan k, hogy minden olyan

$t(=0, \ldots, n-1)$-re, melyre $q_t|m$, a $\delta_A(c, \bar{x}^k)$ és a b állapotvektorok $(t+1)$-edik komponensei megegyeznek, azaz $\delta_A(c, \bar{x}^k)=b$. Mint már említettük, ez $\delta_A(c, \bar{x}^k)\in A_0$ és $b\in A_1$ miatt ellentmondás, azaz alkalmas $t(=0, \ldots, n-1)$ mellett $b_t=q_t$, amint azt korábban állítottuk.

Nyilvánvaló, hogy ha alkalmas $t=(0, \ldots, n-1)$-re $b_t=q_t$, úgy $\mathbf{D}_{q_t}$ definíciója értelmében akárhogy is adjuk meg a $p\in X^*$ szót, a $\delta_A(b, p)$ állapotvektor $(t+1)$-edik komponense ugyancsak q_t-vel fog megegyezni. Így ha valamely $d=(d_0, \ldots, d_{n-1})\in A$ állapotra $d_t\neq q_t$ minden $t(=0, \ldots, n-1)$ esetén teljesül, akárhogy is adjuk meg a $p\in X^*$ szót, $\delta_A(b, p)\neq d$. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy amint azt korábban állítottuk, minden $d=(d_0, \ldots, d_{n-1})\in A_1$ esetén létezik olyan $t(=0, \ldots, n-1)$, hogy $d_t=q_t$.

Legyen valamely $a\in A_0$-ra és $p\in\{\bar{x}, \bar{y}\}^*$-ra $\delta_A(a, p)\in A_1$. Ekkor az M konstrukciója miatt létezik olyan $p_1, p_2\in\{\bar{x}, \bar{y}\}^*$ pár, hogy $p=p_1\bar{y}p_2$ és $h_1(\delta_A(a, p_1))=0$. Ekkor azonban (amint azt kimutattuk) $\delta_A(a, p_1\bar{y})\in A_1$, és ráadásul alkalmas $t(=0, \ldots, n-1)$-re a $\delta_A(a, p_1\bar{y})$ állapotvektor $(t+1)$-edik komponense épp q_t. Ebből rögtön jön, hogy a $\delta_A(a, p)(=\delta_A(a, p_1\bar{y}p_2))$ állapotvektor $(t+1)$-edik komponense ugyancsak megegyezik q_t-vel, azaz az $\mathbf{A}_0$-ból $\{\bar{x}, \bar{y}\}^*$-beli szóval elérhető összes $\mathbf{A}_1$-beli állapotvektor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal legalább egy $t(=0, \ldots, n-1)$-re. Az $\mathbf{A}$-ra tett minimalitási feltételek miatt viszont minden A_0-beli állapot generálja $\{\bar{x}, \bar{y}\}^*$-beli szavakkal az egész $A'=A_0\cup A_1$ halmazt. Így tehát valóban, minden A_1-beli $d=(d_0, \ldots, d_{n-1})$-hez van olyan $t(=0, \ldots, n-1)$, hogy $d_t=q_t$.

Folytassuk annak bizonyítását, hogy az $\mathbf{M}$-et homomorfan szimuláló $\mathbf{A}$ automata létezése ellentmondáshoz vezet.

Legyen most $a_0=(a_{0,0}, \ldots, a_{0,n-1}), \ldots, a_{q-1}=(a_{q-1,0}, \ldots, a_{q-1,n-1})$ A_0-beli elemek egy olyan sorozata, hogy $\delta_A(a_t, \bar{x})=a_{t+1}$, ha $0\leqq t<q-1$ és $\delta_A(a_{q-1}, \bar{x})=a_0$. Mivel $\mathbf{A}$ homomorfan szimulálja $\mathbf{M}$-et, ilyen sorozatnak léteznie kell. Amint azt már korábban megjegyeztük, minden olyan $a=(a_0, \ldots, a_{n-1})\in A_0$, $t(=0, \ldots, n-1)$ párra, melyre $q_t\nmid m$, a $\delta_A(a, \bar{x})$ állapotvektor $(t+1)$-edik komponense megegyezik a_t-vel. Ennek értelmében ekkor az is igaz, hogy $q=m$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető az is, hogy $\delta_A(a_0, \bar{y})\in A_1$. Így valamely $t(=0, n-1)$-re $\delta_A(a_0, \bar{y})$ $(t+1)$-edik komponense q_t. Az 1.18. tétel felhasználásával feltehető, hogy ekkor $t=0$. Így a $\varphi_0(a_{0,0}, \ldots, a_{0,n-1}, \bar{y})=y_1 \ldots y_s(\in\{x, y\}^+)$ (általánosított) visszacsatolási függvényértékre teljesülni fog $\delta_{q_0}(a_{0,0}, y_1 \ldots y_s)=q_0$.

Legyen $\gamma(0)=\{j_1, \ldots, j_k\}$ úgy, hogy $k\leqq i$ fennálljon. Definiáljuk a $z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}$ számokat oly módon, hogy $z_{j_t}=1$, ha $q_{j_t}\nmid m$ és $z_{j_t}=q_{j_t}$, ha $q_{j_t}|m$. Jelölje $\bar{q}$ a $z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}$ számok legkisebb közös többszörösét. Világos, hogy ekkor $\bar{q}|m$. Így tekintettel arra, hogy m pontosan $i+1$ számú különböző prímszám szorzata, $\bar{q}$ pedig vagy legfeljebb i számú különböző prímszám szorzata, vagy pedig $\bar{q}=1$, azt kapjuk, hogy $\bar{q}<m$. Tekintsük az $a_{\bar{q}}=(a_{\bar{q},0}, \ldots, a_{\bar{q},n-1})$ állapotot. Ekkor minden $t(=1, \ldots, k)$ esetén azt kapjuk, hogy $\delta_{q_{j_t}}(a_{0,j_t}, \varphi_{j_t}(a_{0,0}, \ldots, a_{0,n-1}, \bar{x}^{\bar{q}}))=a_{\bar{q},j_t}\neq q_{j_t}$. Mivel $z_{j_t}|\bar{q}$ (és $z_{j_t}=1$, azaz $q_{j_t}\nmid m$ esetén $a_{\bar{q},j_t}=a_{0,j_t}$, amint azt korábban megállapítottuk), látható, hogy $a_{\bar{q},j_t}=a_{0,j_t}$.

Ha most valamely $t(=1, \ldots, k)$ indexre a $\varphi_{j_t}(a_{\bar{q},0}, \ldots, a_{\bar{q},n-1}, \bar{y})$ (általánosított) visszacsatolási függvényérték egy olyan $y_1 \ldots y_s(\in\{x, y\}^+)$ szó lesz, hogy $\delta_{q_{j_t}}(a_{\bar{q},j_t}, y_1 \ldots y_s)=q_{j_t}$, akkor $\delta_A(a_{\bar{q}}, \bar{y})\in A_1$, ahol is $a_{\bar{q}}=\delta_A(a_0, \bar{x}^{\bar{q}})$. Mivel $\delta_A(a_0, \bar{y})\in A_1$ is fennáll, ez $a_0\in A_0$ következtében csak úgy teljesülhet, ha $h_1(a_0)= =h_1(\delta_A(a_0, \bar{x}^{\bar{q}}))$. Ez viszont lehetetlen az $\mathbf{M}$ definíciója miatt, hiszen $\bar{q}<m$. Felte-

hető tehát, hogy tetszőleges $t(=1, ..., k)$ esetén $\delta_{q_{j_t}}(a_{\bar{q},j_t}, y_1...y_s) \neq q_{j_t}$ (ahol definíció szerint $y_1...y_s = \varphi_{j_t}(a_{\bar{q},0}, ..., a_{\bar{q},n-1}, \bar{y})$), azaz $y_1...y_s = x^s$.

Legyen $\bar{y} = y'_1...y'_s (\in X^+)$. Legyen továbbá u $(1 \leqq u \leqq s)$ a legkisebb olyan index, melyre $\delta_{\mathbf{A}}(a_0, y'_1...y'_u)$ valamely $(t+1)$-edik $(t=0, ..., n-1)$ komponense q_t-vel megegyezik. Az 1.18. tétel alkalmazásával feltehető, hogy

$$\delta_{q_0}(a_{0,0}, \varphi_0(a_{0,0}, ..., a_{0,n-1}, y'_1...y'_u)) = q_0.$$

(Ha nem így lenne, a tényezők 1.18. tétel szerinti átsorszámozásával ez elérhető.) Ekkor azonban figyelembe véve, hogy a_0 és $a_{\bar{q}}$, illetve $1 < v \leqq u$ esetén $\delta_{\mathbf{A}}(a_0, y'_1...y'_{v-1})$ és $\delta_{\mathbf{A}}(a_{\bar{q}}, y'_1...y'_{v-1})$ (j_1+1)-edik, ..., (j_k+1)-edik komponensei $a_{0,j_1} \neq q_{j_1}, ..., a_{0,j_k} \neq$ $\neq q_{j_k}$ mellett rendre megegyeznek,

$$\varphi_0(a_{0,0}, ..., a_{0,n-1}, y'_1...y'_u) = \varphi_0(a_{\bar{q},0}, ..., a_{\bar{q},n-1}, y'_1...y'_u).$$

Ez viszont a $\delta_{\mathbf{A}}(a_{\bar{q}}, \bar{y})$ komponenseire tett megállapításaink értelmében csak úgy lehetséges, ha

$$\varphi_0(a_{0,0}, ..., a_{0,n-1}, y'_1...y'_u) = x^u,$$

vagyis feltételezésünkkel ellentétben

$$\delta_{q_0}(a_{0,0}, \varphi_0(a_{0,0}, ..., a_{0,n-1}, y'_1...y'_u)) \neq q_0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathbf{M} \notin HS^*P_{v_i}(K)$.

Segédtételünkhöz azt kell még bebizonyítanunk, hogy $\mathbf{M} \in HSP_{v_i+1}(K)$. Ehhez definiáljuk az

$$\mathbf{A} = (A, X, \delta) = \mathbf{D}_{p_1} \times ... \times \mathbf{D}_{p_{i+1}}(\{x, y\}, \varphi)$$

Gluskov-szorzatot úgy, hogy tetszőleges $t(=0, ..., i)$-re és $(a_0, ..., a_i) \in A$-ra

$$\varphi_t(a_0, ..., a_i, x) = x,$$

$$\varphi_t(a_0, ..., a_i, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } a_0 = ... = a_i = 0, \\ x, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mivel a tényezők száma $i+1$, ez a *Gluskov-szorzat* egyben v_{i+1}-szorzat is. Definiáljuk az

$$A_0 = \{(a_0, ..., a_i) \in A \mid a_0 \neq p_1, ..., a_i \neq p_{i+1}\},$$
$$A_1 = A - A_0$$

halmazokat. Minden $a = (a_0, ..., a_i) \in A_0$ esetén legyen $h(a) = k$ úgy, hogy $0 \leqq k \leqq$ $\leqq m-1$ és $k \equiv a_t \mod p_{t+1}$, $t = 0, ..., i$. Ha $a \in A_1$, akkor legyen $h(a) = m$. Könnyen igazolható, hogy az így definiált $h\colon A \to M$ az $\mathbf{A}$ v_{i+1}-szorzat egy $\mathbf{M}$-re történő homomorfizmusát szolgáltatja. □

Érvényes a következő

2.3. Tétel (Dömösi—Ésik [13], Dömösi [7]). *Létezik automatáknak olyan K osztálya, hogy*

(i) $HSP_{v_i}(K) \subset HSP_{v_{i+1}}(K) \subset HSP_{\alpha_0}(K)$,
(ii) $HS^*P_{v_i}(K) \subset HS^*P_{v_{i+1}}(K) \subset HS^*P_{\alpha_0}(K)$

fennállnak minden $i \geqq 1$ *egészre.*

Bizonyítás. Jelölje ismét K az összes prím súlyú kvázielevátorok osztályát. A 2.2. segédtétel értelmében

$$HSP_{v_i}(K) \subset HSP_{v_{i+1}}(K) \quad \text{és} \quad HS^*P_{v_i}(K) \subset HS^*P_{v_{i+1}}(K),$$

hiszen $HSP_{v_i}(K) \subseteq HSP_{v_{i+1}}(K)$, $HS^*P_{v_i}(K) \subseteq HS^*P_{v_{i+1}}(K)$, $HSP_{v_i}(K) \subseteq HS^*P_{v_i}(K)$ rendre definíció szerint teljesülnek. Így tételünkhöz azt kell még bizonyítanunk, hogy

$$HSP_{v_i}(K) \subset HSP_{\alpha_0}(K), \quad HS^*P_{v_i}(K) \subset HS^*P_{\alpha_0}(K)$$

minden $i \geqq 1$ esetén fennáll.

Tetszőleges p prímszám esetén definiáljuk a $\mathbf{C}_p = (C_p, \{x\}, \delta_p)$ automatát úgy, hogy $C_p = \{0, ..., p-1\}$ és minden $t \in C_p$ esetén $\delta_p(t, x) = t+1$, ha $0 \leqq t \leqq p-1$, illetve $\delta_p(p-1, x) = 0$. Legyen továbbá $\mathbf{E} = (\{0, 1\}, \{x_0, x_1\}, \delta_{\mathrm{E}})$ egy olyan automata, hogy $\delta_{\mathrm{E}}(0, x_0) = 0$, továbbá $\delta_{\mathrm{E}}(1, x_0) = \delta_{\mathrm{E}}(0, x_1) = \delta_{\mathrm{E}}(1, x_1) = 1$. Más szóval, legyen $\mathbf{C}_p$ a p állapotszámú számláló és $\mathbf{E}$ a kétállapotú elevátor. Tekintsük a $K' = \{\mathbf{C}_p | p \text{ prím}\} \cup \{\mathbf{E}\}$ halmazt. Az 1.16. tétel értelmében $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_0}(K')$. Másrészt nyilvánvaló, hogy tetszőleges $\mathbf{D}_p \in K$ kvázielevátor esetén $\mathbf{E}$ homomorf képe $\mathbf{D}_p$-nek, $\mathbf{C}_p$ pedig részautomatája $\mathbf{D}_p$-nek. Így az 1.17. tétel és $K' \subseteq HSP_{\alpha_0}(K)$ következtében $HSP_{\alpha_0}(K') \subseteq HSP_{\alpha_0}(K)$. $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_0}(K')$ tehát maga után vonja $HSP_g(K) \subseteq HSP_{\alpha_0}(K)$ teljesülését, amiből $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_0}(K)$ és $HS^*P_g(K) = HS^*P_{\alpha_0}(K)$ nyilvánvalóan következik.

Mivel $HSP_{v_{i+1}}(K) \subseteq HSP_g(K)$ nyilvánvalóan érvényes, $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_0}(K)$ és $HSP_{v_i}(K) \subset HSP_{v_{i+1}}(K)$ miatt kapjuk, hogy $HSP_{v_i}(K) \subset HSP_{\alpha_0}(K)$ minden $i \geqq 1$ mellett teljesül. Végül, $HS^*P_{v_i}(K) \subset HS^*P_{v_{i+1}}(K)$, továbbá $HS^*P_{v_{i+1}}(K) \subseteq HS^*P_g(K)$ és $HS^*P_g(K) = HS^*P_{\alpha_0}(K)$ alapján fennáll tetszőleges $i \geqq 1$ mellett $HS^*P_{v_i}(K) \subset HS^*P_{\alpha_0}(K)$ is. □

Leticsevszkij [47]-beli klasszikus eredménye alapján $HSP_g(K)$ az összes automaták osztálya akkor és csak akkor, ha K eleget tesz a *Leticsevszkij-kritériumnak.* Ésik bebizonyította [21]-ben, hogy ugyanez érvényes az α_2-szorzatra.

Ha K nem tesz eleget a *fél-Leticsevszkij kritériumnak,* akkor Ésik és Horváth [27]-beli vizsgálatai alapján $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_0}(K)$. Ez esetben $HSP_g(K) = HSP_{v_1}(K)$ is fennáll (Gécseg—Imreh [33], illetve Gécseg—Jürgensen [35]). Tegyük fel, hogy K eleget tesz a *fél-Leticsevszkij kritériumnak,* de nem tesz eleget a *Leticsevszkij-kritériumnak.* Ésik és Horváth [27]-beli vizsgálatai alapján ekkor $HSP_g(K) = HSP_{\alpha_1}(K)$.

A v_i-szorzatcsalád e tekintetben lényegesen eltérő viselkedést mutat. A 2.3. tétel bizonyításában szereplő K automataosztály eleget tesz a *fél-Leticsevszkij kritériumnak,* nem tesz eleget a *Leticsevszkij kritériumnak,* továbbá nincs olyan $i \geqq 1$ egész, melyre $HSP_g(K) = HSP_{v_i}(K)$.

Mivel $HSP_{\alpha_i}(K) = HSP_g(K)$ $(i = 0, 1, ...)$ maga után vonja $HS^*P_{\alpha_i}(K) = HS^*P_g(K)$ teljesülését, továbbá tekintettel arra, hogy a 2.3. tétel bizonyításában szereplő K automataosztályra $HS^*P_g(K) = HS^*P_{v_i}(K)$ nem állhat fenn egyetlen $i \geqq 1$ egész mellett sem, előbbi gondolatmenetünk érvényben marad akkor is, ha homomorf reprezentáció helyett homomorf szimulációra nézve végzünk összehasonlító vizsgálatokat.

A 2.3. tétel egyben arról is tájékoztat, hogy homomorf reprezentáció vagy szimuláció szempontjából egyetlen $i(\geqq 1)$-re sem lehet a v_i-szorzat általánosítása az α_0-szorzatnak (s így tetszőleges $j > 0$ egészre az α_j-szorzatnak sem). A 2.1. tétel értelmében homomorf reprezentáció avagy homomorf szimuláció szempontjából az α_0- vagy α_1-szorzat sem lehet általánosítása a v_i-szorzatnak egyetlen $i \geqq 1$ egész mellett sem. Az α_2-szorzat azonban már általánosítása mind homomorf reprezentáció, mind pedig homomorf szimuláció szempontjából a v_i-szorzatnak tetszőlegesen rögzített $i(\geqq 1)$ esetén, hiszen az α_2-szorzat homomorfan általános (ÉSIK—HORVÁTH [27]). Ez az általánosítás a 2.3. tétel értelmében minden $i(\geqq 1)$ esetén valódi.

Fejezetünk v_i-szorzatcsaláddal kapcsolatos fő eredményeit a következő állítás foglalja össze.

2.4. KÖVETKEZMÉNY. *A v_i-szorzatcsalád valódi hierarchiát alkot mind a homomorf reprezentációra, mind pedig a homomorf szimulációra nézve. Speciálisan, homomorf reprezentáció vagy homomorf szimuláció szempontjából a Gluskov-szorzat általánosabb a v_i-szorzatnál minden i pozitív egészre.*

3. A v_i-szorzatcsalád és az általánosított v_i-szorzatcsalád

A fejezet első részében megmutatjuk, hogy a kétállapotú beállító automaták homomorfan teljes osztályt alkotnak a v_2-szorzatra nézve. Így azt kapjuk, hogy már a v_2-szorzatra nézve is létezik véges homomorfan teljes automataosztály. A fejezet második részében kimutatjuk, hogy kétállapotú elevátor v_2-hatványával minden monoton automata izomorfan szimulálható, illetve homomorfan reprezentálható. Bizonyítjuk azt is, hogy kétállapotú elevátor általánosított v_1-hatványával viszont homomorfan nem szimulálható minden monoton automata. A fejezet harmadik részében ezen eredményekre támaszkodva bizonyítást nyer, hogy homomorf reprezentáció szempontjából az általánosított v_3-szorzat ekvivalens az általánosított *Gluskov-szorzattal.* Azt kapjuk tehát, hogy szemben a v_i-szorzatcsaláddal, az általánosított v_i-szorzatcsalád a homomorf reprezentációra nézve nem alkot valódi hierarchiát. Sőt, az 1.13. tételre támaszkodva ekkor azt is tudjuk, hogy az általánosított v_i-szorzatcsalád a homomorf szimuláció szempontjából sem alkot valódi hierarchiát (hisz az általánosított v_3-szorzat az általánosított *Gluskov-szorzattal* ekkor homomorf szimuláció szempontjából is ekvivalens). Így a v_i-szorzatcsalád és az általánosított v_i-szorzatcsalád viselkedése homomorf szimuláció szempontjából is lényegesen eltér.

3.1. Beállító automaták

Ebben a részben azt fogjuk megmutatni, hogy minden automata homomorfan reprezentálható kétállapotú beállító automaták v_2-hatványával. (Ezzel azt is megmutatjuk, hogy van véges homomorfan teljes automataosztály a v_2-szorzatra nézve.)

Valamely v_i-szorzat *csatlakozási pontjain* értjük azon tényezőit, melyek visszacsatolási függvénye ténylegesen legfeljebb $(i-1)$ számú tényező állapotától függ. A v_i-szorzatot *X-bővíthetőnek* nevezzük, ha minden olyan tényezője csatlakozási pont, melynek visszacsatolási függvényértéke ténylegesen függ a bemenő jeltől.

3.1. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [8]). *Minden automata izomorfan szimulálható kétállapotú beállító automata (két bemenőjeles) X-bővíthető v_2-hatványával úgy, hogy az izomorf szimuláció azonos hosszúságú bemenő szavakkal történik.*

Bizonyítás. Valamely $\{0, ..., m-1\}$ halmazra, ahol $m \geqq 3$, legyenek t_0, t_1, t_2, t_3 olyan transzformációk, ahol $t_0(i)=i$, $t_1(i)=i+1 \bmod m$, $t_2(0)=1$, $t_2(1)=t_3(1)=t_3(0)=0$, illetve $t_2(j)=t_3(j)=j$ $(0 \leqq i \leqq m-1,\ 2 \leqq j \leqq m-1)$. Ismeretes, hogy a t_1, t_2, t_3 leképezések által generált félcsoport izomorf az m-edfokú szimmetrikus félcsoporttal. Így az $\mathbf{A}'=(\{0, ..., m-1\}, \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \delta')$ automata, melyre $\delta'(u, x_v)=t_v(u)$ $(0 \leqq u \leqq m-1,\ 0 \leqq v \leqq 3)$ izomorfan szimulál minden m-nél nem nagyobb állapotszámú automatát. Sőt, tekintettel arra, hogy az $x_0^{\mathbf{A}}=t_0$ transzformáció identikus, minden m-nél nagyobb állapotszámú automatára elérhető, hogy ez az izomorf szimuláció azonos hosszúságú bemenő szavakkal történjék.

Az $\mathbf{A}'$ automatához adjuk meg az $\mathbf{A}=(\{0, ..., 3m-1\}, \{x_0, x_1\}, \delta)$ automatát úgy, hogy tetszőleges $u(\in\{0, ..., 3m-1\})$, $x_v(\in\{x_0, x_1\})$ esetén

$$\delta(u, x_v) = \begin{cases} m+u, & \text{ha } 0 \leqq u \leqq m-1 \text{ és } v=0, \\ 2m+u, & \text{ha } 0 \leqq u \leqq m-1 \text{ és } v=1, \\ t_v(u-m), & \text{ha } m \leqq u \leqq 2m-1, \\ t_{v+2}(u-2m), & \text{ha } 2m \leqq u \leqq 3m-1. \end{cases}$$

Definiáljuk a h_2: $\{x_0, ..., x_3\} \to \{x_0, x_1\}^*$ leképezést oly módon, hogy

$$h_2(x_0) = x_0x_0, \quad h_2(x_1) = x_0x_1, \quad h_2(x_2) = x_1x_0, \quad h_2(x_3) = x_1x_1$$

fennálljon, s legyen h_1: $\{0, ..., m-1\} \to \{0, ..., m-1\}$ identikus leképezés. Egyszerű számítással látható, hogy az $\mathbf{A}$ izomorfan szimulálja az $\mathbf{A}'$ automatát h_1-re és h_2-re nézve. Az előzőek figyelembevételével tehát az is igaz, hogy $\mathbf{A}$ minden m-nél nem nagyobb állapotszámú automatát izomorfan szimulál úgy, hogy ez a szimuláció azonos hosszúságú bemenő szavakkal történik. Így segédtételünkhöz azt kell csupán megmutatnunk, hogy az $\mathbf{A}$ izomorfan szimulálható két állapotú beállító automata egy $\mathbf{M}$ X-bővíthető (két bemenőjeles) ν_2-hatványával úgy, hogy az izomorf szimuláció ugyancsak azonos hosszúságú bemenő szavakkal történik. A bizonyításhoz megalkotjuk az $\mathbf{M}$ ν_2-szorzatot, mely hét rész-szorzatból épül fel. Jelöljük ezeket rendre $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_6$-tal. Minden egyes rész-szorzat $3m$ számú, kétállapotú beállító automatából fog felépülni. Használva az $n=3m$ rövidítést, legyenek ezek sorra $\mathbf{A}_{un}, \mathbf{A}_{un+1}, ..., \mathbf{A}_{(u+1)n-1}$ $(u=0, ..., 6)$.

Az hogy az $\mathbf{M}$ automata egy d állapota a megadott h_1, h_2 szimulációs leképezésekre nézve az $\mathbf{A}$ automata valamely $k(=0, ..., n-1)$ állapotát szimulálja, azaz $h_1(d)=k$, azt fogja jelenteni, hogy ebben a d állapotban az $\mathbf{M}_6$ rész-szorzat $\mathbf{A}_{6n+k}$ tényezője „1" állapotban, míg az összes többi $\mathbf{A}_{6n+v}$ $(0 \leqq v \leqq n-1,\ v \neq k)$ és $\mathbf{A}_{sn+w}$ $(0 \leqq s \leqq 5,\ 0 \leqq w \leqq n-1)$ tényező a „0" állapotban van.

Az $\mathbf{M}$ szorzat ezután kap egy j $(0 \leqq j \leqq 1)$ bemenő jelet. Ha $j=0$, akkor $\mathbf{A}_v$ átveszi az $\mathbf{A}_{6n+v}$ állapotát, míg $\mathbf{A}_{6n+v}$ a „0" állapotba kerül $(0 \leqq v \leqq n-1)$. Ha $j=1$, akkor az $\mathbf{A}_{6n+v}$ állapotát az $\mathbf{A}_{n+v}$ fogja átvenni. A többi tényező-automata a „0" állapotba megy át.

A következő bemenőjel hatására (mely célszerűen 0) az $\mathbf{M}_2$ rész-szorzat átveszi (tényezőről tényezőre) az $\mathbf{M}_0$ rész-szorzat állapotait, míg az $\mathbf{M}_3$ rész-szorzatban $\mathbf{A}_{3n+2m+1}$ a „0" állapotba kerül, $\mathbf{A}_{3n+2m}$ pedig akkor és csak akkor kerül az „1" állapotba, ha $\mathbf{A}_{n+2m}$ vagy $\mathbf{A}_{n+2m+1}$ valamelyike az „1" állapotban volt. Végül, $0 \leqq v \leqq n-1$ és $v \notin \{2m, 2m+1\}$ esetén az $\mathbf{A}_{3n+v}$ átveszi az $\mathbf{A}_{n+v}$ állapotot. Minden más tényező a „0" állapotot veszi fel.

A harmadik bemenő jel hatására (mely ismét célszerűen 0) az $\mathbf{M}_4$ rész-szorzat $\mathbf{A}_{4n+v}$ tényezője a következő esetekben kerül az „1" állapotba:

(i1) $0 \leqq v \leqq m-1$ és az $\mathbf{A}_{2n+m+v}$, $\mathbf{A}_{2n+2m+t_2^{-1}(v)}$ tényezők közül legalább az egyik az „1" állapotban van;

(ii1) $m \leqq v \leqq 2m-1$ és az $\mathbf{A}_{2n+v-m}$ tényező az „1" állapotban van.

Hasonlóan, az $\mathbf{M}_5$ rész-szorzat $\mathbf{A}_{5n+v}$ tényezője a harmadik bemenő jel (azaz 0) hatására az „1" állapotba a következő esetekben kerül:

(i2) $0 \leqq v \leqq m-1$ és az $\mathbf{A}_{3n+m+t_1^{-1}(v)}$, $\mathbf{A}_{3n+2m+v}$ tényezők közül legalább az egyik az „1" állapotban van;

(ii2) $2m \leqq v \leqq 3m-1$ és az $\mathbf{A}_{3n+v-2m}$ tényező az „1" állapotban van.

Végül, a negyedik (ismét 0-val megegyező) bemenőjel hatására az $\mathbf{M}_6$ rész-szorzat azon $\mathbf{A}_{6n+v}$ tényezője kerül „1" állapotba, melyre a szimulálandó $\mathbf{A}$ automatában $\delta(k, x_j) = v$. (Az összes többi $\mathbf{M}$-beli tényező a „0" állapotba kerül.) Ez azáltal történik meg, hogy minden $\mathbf{A}_{6n+v}$ tényező akkor és csak akkor veszi fel az „1" állapotot, ha az $\mathbf{A}_{4n+v}$ és $\mathbf{A}_{5n+v}$ tényezők valamelyike az „1" állapotban van $(0 \leqq v \leqq n-1)$.

Gondolatmenetünket végigkövetve látható, hogy a korábban rögzített h_1 és $h_2(x_j) = j000$ $(j=0, 1)$ szimulációs leképezésekre nézve az $\mathbf{M}$ izomorfan szimulálja $\mathbf{A}$-t. Az említett, négy lépésben történő szimuláció biztosítja, hogy $\mathbf{M}$ olyan ν_2-szorzat legyen, ahol az $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{2n-1}$ tényezők visszacsatolási függvénye csupán egyetlen $\mathbf{M}$-beli tényezőtől függ ténylegesen. Következésképp, $\mathbf{M}$ egy X-bővíthető (két bemenőjellel rendelkező) ν_2-szorzat lesz. Az eddigieket formatizálva, legyen

$$\mathbf{M} = \Pi(A_t \mid t = 0, \ldots, 7n-1)(X, \varphi),$$

ahol $X = \{0, 1\}$, továbbá legyenek a φ_t $(0 \leqq t \leqq 7n-1)$ visszacsatolási függvények úgy definiálva, hogy tetszőleges $a_{un+v} \in \{0, 1\}$ $(0 \leqq u \leqq 6,\ 0 \leqq v \leqq n-1)$ állapotra és $j \in \{0, 1\}$ bemenőjelre

$$\delta_{un+v}(a_{un+v}, \varphi_{un+v}(a_0, \ldots, a_{7n-1}, j)) =$$

$$= \begin{cases} a_{6n+v}, & \text{ha } u = j \quad (0 \leqq j \leqq 1), \\ a_v, & \text{ha } u = 2, \\ 1, & \text{ha } u = 3, \quad v = 2m, \quad \text{és} \quad a_{n+v} + a_{n+v+1} > 0, \\ 0, & \text{ha } u = 3, \quad v = 2m+1, \\ a_{n+v}, & \text{ha } u = 3, \quad 0 \leqq v \leqq n-1, \quad v \notin \{2m, 2m+1\}, \\ 1, & \text{ha } u = 4, \quad 0 \leqq v \leqq m-1 \quad \text{és} \quad a_{2n+m+v} + a_{2n+2m+t_2^{-1}(v)} > 0, \\ 1, & \text{ha } u = 4, \quad m \leqq v \leqq 2m-1 \quad \text{és} \quad a_{2n+v-m} = 1, \\ 1, & \text{ha } u = 5, \quad 0 \leqq v \leqq m-1 \quad \text{és} \quad a_{3n+m+t_1^{-1}(v)} + a_{3n+2m+v} > 0, \\ 1, & \text{ha } u = 5, \quad 2m \leqq v \leqq 3m-1 \quad \text{és} \quad a_{3n+v-2m} = 1, \\ 1, & \text{ha } u = 6 \quad \text{és} \quad a_{4n+v} + a_{5n+v} > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $B = \{(a_0, \ldots, a_{7n-1}) \mid a_{un+v} \in \{0, 1\}$ $(0 \leqq u \leqq 6,\ 0 \leqq v \leqq n-1)$,

$$\sum (a_{6n+v} \mid v = 0, \ldots, n-1) = 1,\ \sum \left(\left(\sum (a_{un+v} \mid v = 0, \ldots, n-1) \right) \middle| u = 0, \ldots, 5 \right) = 0 \Big\},$$

továbbá tetszőleges $(a_0, \ldots, a_{7n-1}) \in B$ és $j \in \{0, 1\}$ mellett

$$h_1((a_0, \ldots, a_{7n-1})) = v, \quad \text{ha} \quad a_{6n+v} = 1 \quad (0 \leqq v \leqq n-1)$$

és $h_2(j) = j000$. Ekkor **M** a kívánt tulajdonságú, két bemenőjellel rendelkező, X-bővíthető ν_2-szorzat lesz. □

3.2. Segédtétel (Dömösi—Ésik [8]). *Tetszőleges $\tau\colon X^n \to \{0, 1\}^n$ leképezés esetén létezik kétállapotú ($\{0, 1\}$ állapothalmazú) beállító automatának olyan $\mathbf{N} = \prod(\mathbf{A}_t | t = 0, \ldots, m-1)\ (X, \varphi)$ ν_2-hatványa, hogy megfelelően rögzített N-beli $(a_0, \ldots, a_{m-1})$ állapot mellett fennállnak a következők:*

(i) *Alkalmas r $(1 \leqq r \leqq m)$ esetén akárhogy is adjuk meg a $|p_1| = ln$ $(l = 0, 1, \ldots)$, $|p_2| = n$, $1 \leqq |p_3| \leqq n$ feltételeknek eleget tevő $p_1, p_2, p_3 \in X^+$ szavakat, a $(b_0, \ldots, b_{m-1}) = \delta_{\mathbf{N}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p_1 p_2 p_3)$ állapotvektorra (ahol $\delta_{\mathbf{N}}$ jelöli az* **N** *átmeneti függvényét)* $\sum (b_t | t = m-r, \ldots, m-1)$ értéke megegyezik a $\tau(p_2)$ szó $|p_3|$-adik betűjével.

(ii) *Minden olyan $p, q \in X^*$ párra, melyre $|p| \not\equiv |q|$* mod n *teljesül,*

$$\delta_{\mathbf{N}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p) \neq \delta_{\mathbf{N}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), q).$$

Bizonyítás. Minden egyes $p \in X^n$ szóra megadjuk kétállapotú beállító automata egy $\mathbf{A}_p = \prod(\mathbf{A}_t | t = 0, \ldots, 3n-1)\ (X, \varphi^{(p)})$ ν_2-hatványát, mely feltételezéseink szerint a következőképp működik.

Az első n tényező (azaz $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$) egy n állapotú számlálót reprezentál. Ez úgy történik, hogy az első n tényező hurokszorzatot alkot. A hurokszorzat egyetlen tagja van „1" állapotban, a többi „0" állapotban. Minden bemenő jel hatására a hurokszorzat tényezői átveszik azon tényező állapotát, melytől visszacsatolási függvényértékük ténylegesen függ.

Az $\mathbf{A}_n$ automata tényező akkor kerül „1" állapotba, ha az $\mathbf{A}_0$ tényező az „1" állapotban van és a bemenő jel $p(1)$ (azaz a p szó első betűje). Az $\mathbf{A}_{n+t}$ $(t = 1, \ldots, n-1)$ tényező akkor kerül „1" állapotba, ha az $\mathbf{A}_{n+t-1}$ tényező az „1" állapotban van és bembemenő jel $p(t+1)$ (azaz a p szó $(t+1)$-edik betűje).

Ha az $\mathbf{A}_{2n-1}$ az „1" állapotban van, akkor tetszőleges bemenő jel hatására az $\mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{3n-1}$ automaták rendre olyan $a_{2n}, \ldots, a_{3n-1} (\in \{0, 1\})$ állapotba kerülnek, melyre $a_{3n-1} \ldots a_{2n} = \tau(p)$. Ha az $\mathbf{A}_{2n-1}$ a „0" állapotban van, akkor tetszőleges bemenő jel hatására $\mathbf{A}_{2n+t}$ átveszi az $\mathbf{A}_{2n+t-1}$ állapotát $(t = 0, \ldots, n-1)$.

Adjuk meg az $\mathbf{A}_p = \prod(\mathbf{A}_t | t = 0, \ldots, 3n-1)\ (X, \varphi^{(p)})$ ν_2-szorzatot formálisan is. Legyenek $\varphi_t^{(p)}$ $(0 \leqq t \leqq 3n-1)$ úgy megválasztva, hogy tetszőleges

$$(a_0, \ldots, a_{3n-1}) \in A_0 \times \ldots \times A_{3n-1}, \quad x \in X \quad \text{és} \quad t (= 0, \ldots, 3n-1)$$

esetén

$$\delta_t(a_t, \varphi_t^{(p)}(a_0, \ldots, a_{3n-1}, x)) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t = 0 \quad \text{és} \quad a_{n-1} = 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq n-1 \quad \text{és} \quad a_{t-1} = 1, \\ 1, & \text{ha} \quad t = n, \ x = p(1) \quad \text{és} \quad a_0 = 1, \\ 1, & \text{ha} \quad n+1 \leqq t \leqq 2n-1, \ x = p(t-n+1) \quad \text{és} \quad a_{t-1} = 1, \\ \tau(p)(3n-t), & \text{ha} \quad 2n \leqq t \leqq 3n-1 \quad \text{és} \quad a_{2n-1} = 1, \\ a_{t-1}, & \text{ha} \quad 2n+1 \leqq t \leqq 3n-1 \quad \text{és} \quad a_{2n-1} = 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Jelölje δ_p az $\mathbf{A}_p$ átmeneti függvényét, s legyen $(a_0, ..., a_{3n-1})$ az $\mathbf{A}_p$ egy olyan állapota, ahol $a_0=1$, $a_1=...=a_{3n-1}=0$. Legyen továbbá $p_1, p_2, p_3 \in X^*$, ahol $|p_1|=ln$ $(l=0, 1, ...)$, $|p_2|=n$ és $1 \leqq |p_3| \leqq n$. Ekkor a $(b_0, ..., b_{3n-1})=\delta_p((a_0, ..., a_{3n-1}), p_1p_2p_3)$ állapotra a következők fognak teljesülni:

(i1) Ha p_3 nem kezdőszelete a p szónak, akkor $b_n=...=b_{2n-1}=0$. Ha p_3 kezdőszelete a p szónak, akkor $b_{n+|p_3|-1}=1$ és $b_t=0$, valahányszor $n \leqq t \leqq 2n-1$ és $t \neq n+|p_3|-1$.

(ii1) Ha $p_2 \neq p$, akkor $b_{2n}=...=b_{3n-1}=0$. Ha $p_2=p$, akkor $b_{3n-1}...b_{2n+|p_3|-1}$ megegyezik $\tau(p)$-nek $n-|p_3|+1$ hosszú végszeletével, továbbá $|p_3|>1$ esetén $b_{2n}=...=b_{2n+|p_3|-2}=0$.

Legyen $q_1, ..., q_z$ az X^n elemeinek egy felsorolása, s jelölje rendre $\delta_{q_1}, ..., \delta_{q_z}$ az $\mathbf{A}_{q_1}, ..., \mathbf{A}_{q_z}$ átmeneti függvényét. Tekintsük az $\mathbf{A}_{q_1} \times ... \times \mathbf{A}_{q_z}$ direkt szorzat egy olyan $(d_1, ..., d_z)$ állapotát, ahol $d_t=(1, 0, ..., 0)$ $(1 \leqq t \leqq z)$. Kimutatjuk, hogy ez a direkt szorzat az $(a_0, ..., a_{m-1})=(d_1, ..., d_z)$ választással eleget tesz a segédtételbeli (i) és (ii) összefüggéseknek. Vezessük be az

$$R_\tau = \{(p, q) \in X^+ \times \{0, 1\}^+ | 1 \leqq |p|, |q| \leqq n, \; |p|+|q| = n+1\}$$

jelölést és adjuk meg a

$$h\colon \{(\delta_{q_1}(d_1, p), ..., \delta_{q_z}(d_z, p)) | p \in X^+, \; |p| > n\} \to R_\tau$$

leképezést oly módon, hogy ha $p=p_1p_2p_3 (\in X^+)$, ahol $|p_1|=ln$ $(l=0, 1, ...)$, $|p_2|=n$, $1 \leqq |p_3| \leqq n$ és $\tau(p_2)=y_1...y_n$, akkor

$$h((\delta_{q_1}(d_1, p), ..., \delta_{q_z}(d_z, p))) = (p_3, y_{|p_3|}...y_n).$$

(i1) és (ii1) alkalmazásával látható, hogy ha valamely $p \in X^+$-ra $(|p|>n$ mellett)

$$h((\delta_{q_1}(d_1, p), ..., \delta_{q_z}(d_z, p))) = (p', yp'') \quad (\in R_\tau, \; y \in \{0, 1\}, \; d_1 = ... = d_z = (1, 0, ..., 0)),$$

akkor u_t-vel $(t=1, ..., z)$ jelölve a $\delta_{q_t}(d_t, p)$ állapotvektor $3n$-edik (utolsó) komponensét, $\sum (u_t | t=1, ..., z)=y$. Így az 1.18. tétel felhasználásával kapjuk, hogy létezik olyan, az $\mathbf{A}_{q_1} \times ... \times \mathbf{A}_{q_z}$ direkt szorzattal izomorf $\mathbf{N}$ ν_2-hatvány, mely eleget tesz a segédtételbeli (i) feltételnek. (A h egyértelműsége egyszerű számolással ellenőrizhető.)

Most bizonyítsuk be, hogy minden olyan $p, q \in X^*$ párra, melyre $|p| \not\equiv |q| \mod n$ fennáll, $(\delta_{q_1}(d_1, p), ..., \delta_{q_z}(d_z, p)) \neq (\delta_{q_1}(d_1, q), ..., \delta_{q_z}(d_z, q))$. Legyen valamely $r \in X^*$-ra $pr=r_1r_2r_3$, $qr=r_1'r_2'r_3'$, ahol $n \mid |r_1|, |r_1'|$, továbbá $|r_2|=|r_2'|=n$ és $1 \leqq |r_3|, |r_3'| \leqq n$. Világos, hogy ha valamely $q_t \in X^n$-re $\delta_{q_t}(d_t, pr) \neq \delta_{q_t}(d_t, qr)$, akkor $\delta_{q_t}(d_t, p) \neq \delta_{q_t}(d_t, q)$. Így azt kell csak kimutatni, hogy alkalmas $q_t \in X^n$-re $\delta_{q_t}(d_t, r_1r_2r_3) \neq \delta_{q_t}(d_t, r_1'r_2'r_3')$. Ez az (i1) megállapításunk szerint teljesül, ha r_3 kezdőszelete a q_t szónak és $r_3 \neq r_3'$. A $|p| \not\equiv |q| \mod n$ miatt viszont $|r_3| \neq |r_3'|$ (ami egyben azt is jelenti, hogy $r_3 \neq r_3'$). Így az $\mathbf{A}_{q_1} \times ... \times \mathbf{A}_{q_z}$ eleget tesz (ii)-nek is. □

3.3. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [8]). *Minden $\tau\colon X^n \to \{0, 1\}^n$ leképezéshez található olyan k nemnegatív egész, hogy kétállapotú ($\{0, 1\}$ állapothalmazú) beállító automata alkalmas*

$$\mathbf{B} = (B, X, \delta_{\mathbf{B}}) = \Pi(A_t | t = 0, ..., m-1)(X, \varphi_{\mathbf{B}})$$

ν_2-hatványára és megfelelően rögzített $(a_0, ..., a_{m-1}) (\in B)$-re teljesülnek a következők:

(i) *Ha* $p_1, p_2, p_3, p_4 \in X^+$, *ahol is* $|p_1| = ln$ $(l=0, 1, \ldots)$, $|p_2| = n$, $|p_3| = kn$, $1 \leqq |p_4| \leqq n$, *akkor a*

$$(b_0, \ldots, b_{m-1}) = \delta_{\mathbf{B}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p_1 p_2 p_3 p_4)$$

állapotvektor b_{m-1} *komponense épp a* $\tau(p_2)$ *szó* $|p_4|$*-edik betűje lesz.*

(ii) *Minden olyan* $p, q \in X^*$ *párra, melyre* $|p| \not\equiv |q| \mod n$ *teljesül,*

$$\delta_{\mathbf{B}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p) \neq \delta_{\mathbf{B}}((a_0, \ldots, a_{m-1}), q).$$

Bizonyítás. Tekintsük a 3.2. segédtételbeli $\mathbf{N}$ automatát. Ha $r=1$, akkor $\mathbf{N}$ rendelkezik ($k=0$ választással) a megkövetelt tulajdonságokkal. Ellenkező esetben adjuk meg az

$$\mathbf{N}' = \prod (A_t | t = 0, \ldots, m+(r-1)n-1)(X, \varphi')$$

ν_2-szorzatot úgy, hogy tetszőleges $(a_0, \ldots, a_{m+(r-1)n-1}) \in A_0 \times \ldots \times A_{m+(r-1)n-1}$, $x \in X$, $z(=0, \ldots, m+(r-1)n-1)$ mellett φ'_z alkalmas megadásával

$$\delta_z(a_z, \varphi'_z(a_0, \ldots, a_{m+(r-1)n-1}, x)) =$$

$$= \begin{cases} \delta_z(a_z, \varphi_z(a_0, \ldots, a_{m-1}, x)), & \text{ha } 0 \leqq z \leqq m-1, \\ 1, & \text{ha } z = m+(r-t)n, \quad 3 \leqq t \leqq r, \quad a_{m-t} > 0, \quad r \geqq 3, \\ 1, & \text{ha } z = m+(r-2)n \text{ és } a_{m-2}+a_{m-1} > 0, \\ 1, & \text{ha } z = m+un+v, \quad 0 \leqq u \leqq r-2, \quad 1 \leqq v \leqq n-1, \text{ és } a_{z-1} > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha $r=2$, akkor a 3.2. segédtételbeli $\mathbf{N}$ tulajdonságai, továbbá konstrukciónk miatt $\mathbf{N}'$-re teljesülni fognak a segédtételünkben $\mathbf{B}$-re megadott tulajdonságok. (Ez esetben $k=1$ fog fennállni.) Ha $r>2$, gondolatmenetünket ismételjük meg úgy, hogy $\mathbf{N}$ helyett az $\mathbf{N}'$ automatát, illetve az $\mathbf{A}_{m-r}, \ldots, \mathbf{A}_{m-1}$ tényezők helyett az $\mathbf{A}_{m+tn-1}$ $(t=1, \ldots, r-1)$ tényezőket tekintjük. Így az $\mathbf{N}$ ν_2-szorzatból kiindulva végül eljutunk egy olyan $\mathbf{B}$ ν_2-szorzathoz, mely eleget tesz a segédtételünkben megadott tulajdonságoknak. □

Most már ki tudjuk mutatni, hogy érvényes a következő

3.4. TÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [8]). *Minden automata homomorfan reprezentálható kétállapotú beállító automata* ν_2*-hatványával.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát, melyre minden $t\colon A \to A$ transzformáció esetén van olyan $x \in X$, hogy $x^{\mathbf{A}} = t$. Azt fogjuk igazolni, hogy az $\mathbf{A}$ (s így összes részautomatái is) homomorfan reprezentálható kétállapotú ($\{0, 1\}$ állapothalmazú) beállító automata ν_2-hatványával. A 3.1. segédtétel értelmében feltehető, hogy kétállapotú beállító automata megfelelően választott X-bővíthető

$$\mathbf{M} = \prod (A_t | t = 0, \ldots, u-1)(\{0, 1\}, \varphi_{\mathbf{M}})$$

(kétbemenőjeles) ν_2-hatványa valamely $h_1\colon A' \to A$ $(A' \subseteq A_0 \times \ldots \times A_{u-1})$, $h_2\colon X \to \{0, 1\}^n$ leképezésekre nézve izomorfan szimulálja $\mathbf{A}$-t, s tetszőleges $x \in X$-re $|h_2(x)| = n$. Feltételezéseink szerint minden $t\colon A \to A$ mellett van olyan $x \in X$, hogy $x^A = t$. Így nyilvánvaló az is, hogy minden $p \in X^n$ esetén található olyan $x \in X$, hogy

$p^{\mathbf{A}}=x^{\mathbf{A}}$. Alkossuk meg a $\tau\colon X^n\to\{0,1\}^n$ leképezést úgy, hogy tetszőleges $p\in X^n$-re $\tau(p)=h_2(x)$, ahol $x\in X$ tetszőleges, az $x^{\mathbf{A}}=p^{\mathbf{A}}$ feltételnek eleget tevő bemenő jel. Ekkor minden $a\in A'$, $p\in X^n$ mellett $\delta(h_1(a),p)=h_1(\delta_{\mathbf{M}}(a,\tau(p)))$ (ahol $\delta_{\mathbf{M}}$ az $\mathbf{M}$ átmeneti függvénye).

Ezt felhasználva mutatjuk ki, hogy alkalmas, kétállapotú beállító automatából álló

$$\mathbf{N}=\prod(A_t|t=0,\dots,m+u-1)(X,\varphi)$$

ν_2-hatvány homomorfan reprezentálja $\mathbf{A}$-t. Tekintsük a 3.3. segédtételbeli $\mathbf{B}$ ν_2-szorzatot, s legyen minden $t(=0,\dots,m+u-1)$-re φ_t úgy megadva, hogy bármely $\mathbf{N}$-beli $(a_0,\dots,a_{m+u-1})$ állapot és x bemenő jel esetén

$$\delta_t(a_t,\varphi_t(a_0,\dots,a_{m+u-1},x))=$$

$$=\begin{cases}\delta_t(a_t,\varphi_{\mathbf{B}_t}(a_0,\dots,a_{m-1},x)), & \text{ha}\quad 0\le t\le m-1,\\ \delta_t(a_t,\varphi_{\mathbf{M}_t}(a_m,\dots,a_{m+u-1},a_{m-1})), & \text{ha}\quad m\le t\le m+u-1\end{cases}$$

(ahol $\varphi_{\mathbf{B}_t}$ a $\mathbf{B}$, $\varphi_{\mathbf{M}_t}$ pedig az $\mathbf{M}$ ν_2-hatvány $(t+1)$-edik tényezőjének visszacsatolási függvénye).

Mivel a 3.1. segédtételbeli $\mathbf{M}$ automata egy X-bővíthető ν_2-hatvány, az így kapott $\mathbf{N}$ szorzat ugyancsak ν_2-hatvány. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{N}$ az $\mathbf{A}$-ra homomorfan leképezhető.

Legyen valamely $x\in X$-re $x^{\mathbf{A}}\colon A\to A$ identikus leképezés. (Ilyen x feltételezéseink szerint létezik.) Adjuk meg a $\mathbf{B}$ automata 3.3. segédtételbeli rögzített $(a_0,\dots,a_{m-1})$ állapotához a

$$(b_0,\dots,b_{m-1})=\delta_{\mathbf{B}}((a_0,\dots,a_{m-1}),x^{(k+1)n+1})$$

állapotot, s tekintsük a $h_1\colon A'\to A$ $(A'\subseteq A_0\times\dots\times A_{m-1})$, $h_2\colon X\to\{x_0,x_1\}^n$ szimulációs leképezésekhez az

$$N'=\{\delta_{\mathbf{N}}((b_0,\dots,b_{m-1},b_m,\dots,b_{m+u-1}),p)|(b_m,\dots,b_{m+u-1})\in A',\ p\in X^*\}$$

halmazt (ahol $\delta_{\mathbf{N}}$ az $\mathbf{N}$ ν_2-szorzat átmeneti függvényét jelöli.) Mutassuk meg, hogy alkalmas $h\colon N'\to A$ leképezés az $\mathbf{N}$ egy részautomatájának $\mathbf{A}$-ra történő homomorfizmusát szolgáltatja.

Legyen először valamely $p,p'\in X^*$ párra

$$(d_0,\dots,d_{m+u-1})=\delta_{\mathbf{N}}((b_0,\dots,b_{m+u-1}),p)$$

$$(d'_0,\dots,d'_{m+u-1})=\delta_{\mathbf{N}}((b_0,\dots,b_{m+u-1}),p')((b_m,\dots,b_{m+u-1})\in A').$$

Mutassuk meg, hogy ha $(d_0,\dots,d_{m+u-1})=(d'_0,\dots,d'_{m+u-1})$, akkor

$$\delta(h_1((b_m,\dots,b_{m+u-1})),p)=\delta(h_1((b_m,\dots,b_{m+u-1})),p').$$

A 3.3. segédtétel (ii) része miatt ekkor $|p|\equiv|p'|$ mod n fennáll. Így alkalmas $z(=0,1,\dots)$-re

$$px^z=p_1\dots p_v x^{(k+1)n+1},\quad p'x^z=p'_1\dots p'_w x^{(k+1)n+1}$$

ahol $|p_2|=\dots=|p_v|=|p'_2|=\dots=|p'_w|=n$, továbbá $|p_1|=|p'_1|=n-1$.

Mivel feltettük, hogy $(d_0,\dots,d_{m+u-1})=(d'_0,\dots,d'_{m+u-1})$

$$(\text{azaz } \delta_{\mathbf{N}}((b_0,\dots,b_{m+u-1}),p)=\delta_{\mathbf{N}}((b_0,\dots,b_{m+u-1}),p')),$$

megfelelően választott N-beli $(l_0, \ldots, l_{m+u-1})$ állapotra

$$(l_0, \ldots, l_{m+u-1}) = \delta_{\mathbf{N}}\big((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), px^z\big) = \delta_{\mathbf{N}}\big((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), p'x^z\big).$$

Másrészt a $(b_0, \ldots, b_{m-1}) = \delta_{\mathbf{B}}\big((a_0, \ldots, a_{m-1}), x^{(k+1)n+1}\big)$ választás miatt tetszőleges $p \in X^*$ szóra azt kapjuk, hogy ha $x^{(k+1)n+1}p = p_1p_2p_3p_4$ és $|p_1| = ln$, $|p_2| = n$, $|p_3| = kn$, $1 \leq |p_4| \leq n$ (ahol is k a 3.3. segédtételben rögzített nemnegatív egész és $l = 0, 1, \ldots$), akkor a 3.3. segédtétel értelmében $\delta_{\mathbf{B}}\big((b_0, \ldots, b_{m-1}), p\big)$ állapotvektor utolsó komponense épp a $\tau(p_2)$ szó $|p_4|$-edik betűje lesz. Így **B** és **N** definíciója következtében

$$(l_m, \ldots, l_{m+u-1}) = \delta_{\mathbf{M}}\big((b_m, \ldots, b_{m+u-1}), (\tau(x^n))^{k+1}\tau(xp_1)\tau(p_2)\ldots\tau(p_v)\big) =$$

$$= \delta_{\mathbf{M}}\big((b_m, \ldots, b_{m+u-1}), (\tau(x^n))^{k+1}\tau(xp_1')\tau(p_2')\ldots\tau(p_w')\big)$$

(ahol $\delta_{\mathbf{M}}$ az **M** ν_2-szorzat átmeneti függvényét jelöli). Ez viszont azt eredményezi, hogy

$$\delta\big(h_1((b_m, \ldots, b_{m+u-1})), x^{(k+1)n+1}p_1\ldots p_v\big) = \delta\big(h_1((b_m, \ldots, b_{m+u-1})), x^{(k+1)n+1}p_1'\ldots p_w'\big),$$

azaz, $(x^{(k+1)n+1}p_1\ldots p_v)^{\mathbf{A}} = p^{\mathbf{A}}$ és $(x^{(k+1)n+1}p_1'\ldots p_w')^{\mathbf{A}} = (p')^{\mathbf{A}}$ értelmében valóban,

$$\delta\big(h_1((b_m, \ldots, b_{m+u-1})), p\big) = \delta\big(h_1((b_m, \ldots, b_{m+u-1})), p'\big).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a

$$h\big(\delta_{\mathbf{N}}((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), p)\big) = \delta\big(h_1((b_m, \ldots, b_{m+u-1})), p\big)$$

$$\big(\delta_{\mathbf{N}}((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), p) \in N', \ (b_m, \ldots, b_{m+u-1}) \in A', \ p \in X^*\big)$$

összefüggéssel megadott $h\colon N' \to A$ leképezés jól definiált. Mivel minden $a \in A$-hoz létezik olyan $(b_m, \ldots, b_{m+u-1}) \in A'$, hogy $h_1\big((b_m, \ldots, b_{m+u-1})\big) = a$, tetszőleges $a \in A$, $p \in X^*$ párhoz is létezik olyan $(b_0, \ldots, b_{m+u-1}) \in N'$, melyre $h\big(\delta_{\mathbf{N}}((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), p)\big) = \delta(a, p)$. Másrészt $x^{\mathbf{A}}\colon A \to A$ feltételezéseink szerint identikus leképezés, azaz $\delta(a, x) = a$. Így a tetszőlegesen választott $a \in A$-ra $h\big(\delta_{\mathbf{N}}((b_0, \ldots, b_{m+u-1}), x)\big) = a$, azaz h szürjektív is ($p = x$ helyett a $p = \lambda$ választással ugyanerre az eredményre jutunk). A h definíciója értelmében ezzel az is bizonyítást nyert, hogy h az **N** alkalmas részautomatájának **A**-ra történő homomorfizmusa. □

3.2. Elevátorok és monoton automaták

Ebben a részben a kétállapotú elevátor ν_2-hatványait tanulmányozzuk. Kimutatjuk, hogy tetszőleges monoton automata izomorfan szimulálható, homomorfan pedig reprezentálható kétállapotú elevátor ν_i-hatványával akkor és csak akkor, ha $i \geq 2$.

Érvényes a következő

3.5. TÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [15]). *Minden monoton automata izomorfan szimulálható a kétállapotú elevátor alkalmas ν_2-hatványával.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ monoton automata, s jelöljön $\leq$ egy, az A halmazon értelmezett olyan parciális rendezést, hogy minden $a \in A$, $x \in X$ párra $a \leq \delta(a, x)$. Tekintsük az A elemeinek egy olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ felsorolását, hogy tetszőleges $a_i, a_j \in A$ pár mellett $a_i \neq a_j$ és $a_i \leqq a_j$ teljesülése maga után vonja $i<j$ fennállását. Nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges $a_t \in A$, $x \in X$ mellett $\delta(a_t, x) \notin \{a_1, \ldots, a_{t-1}\}$, amit a bizonyítás folyamán többször is ki fogunk használni. Most megkonstruálunk egy **A**-t izomorfan szimuláló olyan **B** automatát, melyről később kimutatjuk, hogy megegyezik a kétállapotú elevátor egy ν_2-hatványának részautomatájával.

Használjuk a tetszőleges $(d_1, \ldots, d_{2n}) \in \{0, 1\}^{2n}$ vektorra a $d_1 \ldots d_{2n}$ rövidítést és legyen $B = \{1^t 0^{n-t} 1^t 0^{n-t} | t = 1, \ldots, n\} (\subseteq \{0, 1\}^{2n})$. Végül legyen

$$B' = \{1^{s+t} 0^{n-s-t} 1^{n-t} 0^{n-t} | t = 1, \ldots, n,\ s = 0, \ldots, n-t\} (\supseteq B),$$

s használjuk tetszőleges $1^{s+t} 0^{n-s-t} 1^t 0^{n-t} \in B'$-re a $b_{s+t} b_t$ rövidítést is. Konstruáljuk meg a $\mathbf{B} = (B', X', \delta')$ automatát, ahol $X' = A \times X \cup A \cup \{*\}$ ($*$ tetszőleges, $* \notin A \cup \cup A \times X$-nek eleget tevő szimbólum), továbbá bármely $b_t b_t \in B (\subseteq B')$, $b_{s+t} b_t \in B'$, $(a_r, x) \in A \times X$, $a_r \in A$ mellett

$$\delta'(b_t b_t, (a_r, x)) = b_{t+1} b_t, \quad \text{ha} \quad r > t \quad \text{és} \quad \delta(a_t, x) = a_r,$$

$$\delta'(b_{s+t} b_t, a_r) = b_{s+t+1} b_t, \quad \text{ha} \quad s > 0 \quad \text{és} \quad r > s+t,$$

$$\delta'(b_{s+t} b_t, *) = b_{s+t} b_{s+t},$$

és végül, minden más esetben legyen

$$\delta'(b', x') = b' (b' \in B', x' \in X').$$

Mutassuk ki, hogy tetszőleges $b_t b_t \in B (\subseteq B')$, $a_r \in A$, $x \in X$ hármas esetén

$$\text{(i)} \quad \delta'(b_t b_t, (a_r, x) a_r^{n-2} *) = b_r b_r, \quad \text{ha} \quad \delta(a_t, x) = a_r$$

és

$$\text{(ii)} \quad \delta'(b_t b_t, (a_r, x) a_r^{n-2} *) = b_t b_t, \quad \text{ha} \quad \delta(a_t, x) \neq a_r.$$

Valóban, $\delta'(b_t b_t, (a_r, x)) = b_t b_t$, ha $r \leqq t$ vagy $\delta(a_t, x) \neq a_r$, illetve $\delta'(b_t b_t, (a_r, x)) = = b_{t+1} b_t$, ha $r > t$ és $\delta(a_t, x) = a_r$. Ugyanekkor, $\delta'(b_t b_t, a_r^{n-2}) = b_t b_t$, illetve $r > t$ mellett $\delta'(b_{t+1} b_t, a_r^{n-2}) = b_r b_t$. Végül, $\delta'(b_t b_t, *) = b_t b_t$, illetve $r \geqq t$ esetén $\delta'(b_r b_t, *) = = b_r b_r$. Figyelembe véve, hogy $\delta(a_t, x) \notin \{a_1, \ldots, a_{t-1}\}$ $(a_t \in A, x \in X)$, a konstrukciónk rendelkezik a kívánt (i) és (ii) tulajdonsággal. Ez egyben azt is jelenti, hogy a

$$p_x = (a_n, x) a_n^{n-2} * (a_{n-1}, x) a_{n-1}^{n-2} * \ldots * (a_1, x) a_1^{n-2} * (\in (X')^+)$$

választással $\delta'(b_t, b_t, p_x) = b_r b_r$ pontosan akkor teljesül, ha $\delta(a_t, x) = a_r$. Legyen tehát h_1: $B \to A$ $(B \subseteq B')$ és h_2: $X \to (X')^+$ úgy definiálva, hogy

$$h_1(b_t b_t) = a_t, \quad h_2(x) = p_x \quad (b_t b_t \in B,\ x \in X),$$

illetve

$$p_x = (a_n, x) a_n^{n-2} * \ldots (a_1, x) a_1^{n-2} *.$$

Ekkor azt kapjuk, hogy tetszőleges $b_t b_t \in B$, $x \in X$ mellett

$$h_1(\delta'(b_t b_t, h_2(x))) = \delta(h_1(b_t b_t), x),$$

azaz **B** izomorfan szimulálja **A**-t h_1-re és h_2-re nézve.

Mutassuk meg ezután, hogy **B** a kétállapotú $\mathrm{E}=(\{0,1\}, \{x_0, x_1\}, \delta_{\mathrm{E}})$ elevátor alkalmas $\mathrm{E}^{2n}(X', \varphi, \gamma)$ ν_2-hatványának részautomatája. (Emlékeztetőül, $\delta_{\mathrm{E}}(0, x_0)=0$, illetve $\delta_{\mathrm{E}}(1, x_0)=\delta_{\mathrm{E}}(0, x_1)=\delta_{\mathrm{E}}(1, x_1)=1$.)

Legyen $\gamma(0)=\emptyset$, $\gamma(t)=\{t-1, n+t-1\}$ $(t=1, \ldots, n-1)$,

$$\gamma(n+s)=\{s\} \quad (s=0, \ldots, n-1).$$

Legyen továbbá tetszőleges $(l_0, \ldots, l_{2n-1})\in\{0,1\}^{2n}$, $a_r\in A$, $x\in X$ mellett

$$\varphi_{t+1}(l_0, \ldots, l_{2n-1}, (a_r, x))=x_1, \quad \text{ha} \quad l_t=l_{n+t}=1, \quad r>t+1 \quad \text{és} \quad \delta(a_{t+1}, x)=a_r$$

$$(t=0, \ldots, n-2),$$

$$\varphi_{t+1}(l_0, \ldots, l_{2n-1}, a_r)=x_1, \quad \text{ha} \quad l_t=1, \quad l_{n+t}=0 \quad \text{és} \quad r>t+1 \quad (t=0, \ldots, n-2),$$

$$\varphi_{n+t}(l_0, \ldots, l_{2n-1}, *)=x_1, \quad \text{ha} \quad l_t=1 \quad (t=0, \ldots, n-1),$$

s minden más esetben legyen

$$\varphi_s(l_0, \ldots, l_{2n-1}, x')=x_0 \ ((l_0, \ldots, l_{2n-1})\in\{0,1\}^{2n}, \quad x'\in X', \quad s=0, \ldots, 2n-1).$$

Jelölje δ'' az $\mathrm{E}^{2n}(X', \varphi)$ ν_2-szorzat átmeneti függvényét, s legyen $l_0\ldots l_{2n-1}\in B'$, továbbá $x'\in X'$. Definíciónk alapján $\delta''(l_0\ldots l_{2n-1}, x')\neq l_0\ldots l_{2n-1}$ a következő esetekben állhat fenn:

(i1) $l_0\ldots l_{2n-1}=b_t b_t$ $(t\in\{1, \ldots, n\})$, $x'=(a_r, x)\in A\times X$, $t<r\leqq n$ és $\delta(a_t, x)=a_r$. Ekkor $\delta''(l_0\ldots l_{2n-1}, x')=b_{t+1}b_t$.

(ii1) $l_0\ldots l_{2n-1}=b_{s+t+1}b_t$ $(t\in\{1, \ldots, n-1\}$, $s\in\{0, \ldots, n-t-1\})$, $x'=a_r\in A$, $s+t+1<r$. Ekkor $\delta''(l_0\ldots l_{2n-1}, x')=b_{s+t+2}b_t$.

(iii1) $l_0\ldots l_{2n-1}=b_{s+t+1}b_t$ $(t\in\{1, \ldots, n-1\}$, $s\in\{0, \ldots, n-t-1\}$, $x'=*$. Ekkor $\delta''(l_0\ldots l_{2n-1}, x')=b_{s+t+1}b_{s+t+1}$.

Így azt kaptuk, hogy a **B** automata δ' átmeneti függvénye nem más, mint a δ'' függvény $B\times X'$-re történő szűkítése. □

Jelölje L az összes olyan $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automaták osztályát, ahol alkalmas n természetes számra $A=\{0, \ldots, n\}$, továbbá tetszőleges $x\in X$-re $\delta(0, x)=0$, $\delta(n, x)=n$, $\delta(t, x)\in\{0, t, t+1\}$ $(0<t<n)$. Érvényesek a következő állítások:

3.6. Segédtétel (Dömösi—Gécseg [15]). *Minden L-beli automata homomorfan reprezentálható a kétállapotú elevátor alkalmas ν_2-hatványával.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(\{0, \ldots, n\}, X, \delta)$ tetszőleges L-beli automata. Az $n=1$ esetén az állítás nyilvánvaló. Könnyen igazolható az is, hogy ha $n\leqq 2$, akkor **A** izomorfan reprezentálható a kétállapotú elevátor kéttényezős g-hatványával (azaz önmagával való *Gluskov-szorzatával*). Tegyük fel tehát, hogy $n>2$ és tekintsük a kétállapotú elevátor egy $\mathrm{E}^{2n}(X, \varphi, \gamma)$ ν_2-hatványát a következőképp.

Legyen $\gamma(0)=\{n\}$, $\gamma(n)$ üres halmaz, továbbá legyen $\gamma(t)=\{t-1, n+t\}$ $(t=1, \ldots, n-1)$, $\gamma(n+s)=\{n+s-1, s-1\}$ $(s=1, \ldots, n-1)$. Tetszőleges

$$(l_0, \ldots, l_{2n-1})\in\{0,1\}^{2n},$$

$x \in X$ és $0 \leqq t \leqq 2n-1$ mellett teljesüljön

$$\varphi_t(l_0, \ldots, l_{2n-1}, x) =$$

$$= \begin{cases} x_1, & \text{ha } 1 \leqq t < n, \ l_{t-1} = 1, \ l_{n+t} = 0 \ \text{ és } \ \delta(t, x) = t+1, \\ x_1, & \text{ha } n < t \leqq 2n-1, \ l_{t-n-1} = l_{t-1} = 1 \ \text{ és } \ \delta(t-n, x) \in \{0, t-n+1\}, \\ x_0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen

$$B = \{1^k 0^{n-k} 1^k 0^{n-k} \mid k = 1, \ldots, n\} \cup \{1^l 0^{n-l} 1^{l+1} 0^{n-l-1} \mid l = 0, \ldots, n-1\},$$

továbbá legyen $h\colon B \to \{0, \ldots, n\}$ olyan leképezés, melyre

$$h((l_0, \ldots, l_{2n-1})) =$$

$$= \begin{cases} k, & \text{ha } l_0 \ldots l_{2n-1} = 1^k 0^{n-k} 1^k 0^{n-k}, \quad 1 \leqq k \leqq n, \\ 0, & \text{ha } l_0 \ldots l_{2n-1} = 1^l 0^{n-l} 1^{l+1} 0^{n-l-1}, \quad 0 \leqq l < n. \end{cases}$$

Elemi számítással igazolható, hogy az így definiált $h\colon B \to \{0, \ldots, n\}$ leképezés a tekintett ν_2-hatvány egy B állapothalmazú részautomatájának **A**-ra történő homomorfizmusát szolgáltatja. □

3.7. Segédtétel (Dömösi—Gécseg [15]). *Minden monoton automata homomorfan reprezentálható L-beli automaták direkt szorzatával.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ monoton automatát, s jelöljön „$\leqq$" egy parciális rendezést, melyre tetszőleges $a \in A$, $x \in X$ pár esetén $a \leqq \delta(a, x)$. Vegyük az A elemeinek egy olyan $a_1, \ldots, a_n$ felsorolását, hogy tetszőleges $a_i, a_j \in A$ pár mellett $a_i \neq a_j$ és $a_i \leqq a_j$ teljesülése maga után vonja $i<j$ fennállását. Vegyük az összes olyan $f_s\colon \{a_1, \ldots, a_n\} \to \{1, \ldots, n\}$ $(s=0, 1, \ldots, m-1)$ alakú kölcsönösen egyértelmű leképezést, melyre $f_s(a_n) = n$, s definiáljunk minden ilyen f_s $(0 \leqq s \leqq m-1)$-hez egy $\mathbf{A}_s = (\{0, \ldots, n\}\ X, \delta_s)$ automatát a következőképp.

Legyen tetszőleges $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x \in X$ párra

$$\delta_s(k, x) = \begin{cases} k, & \text{ha } \delta(f_s^{-1}(k), x) = f_s^{-1}(k) \quad (1 \leqq k \leqq n), \\ k+1, & \text{ha } f_s(\delta(f_s^{-1}(k), x)) = k+1 \quad (1 \leqq k < n), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy $\mathbf{A}_s \in L$ $(0 \leqq s \leqq m-1)$.

Alkossuk meg az $\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{m-1}$ direkt szorzatot. Mutassuk meg, hogy ez a direkt szorzat homomorfan reprezentálja az **A** automatát.

Tekintsük ezen direkt szorzat állapotainak egy következő tulajdonságokkal rendelkező $B(\subset \{0, \ldots, n\}^m)$ részhalmazát:

(i) minden $a_k \in A$-hoz létezik olyan $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in B$, hogy legalább egy alkalmas $s = (0, \ldots, m-1)$-re $f_s(a_k) = b_s$;

(ii) tetszőleges $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in B$, b_s, b_t $(0 \leqq s, t \leqq m-1)$ hármasra $0 \notin \{b_s, b_t\}$ maga után vonja $f_s^{-1}(b_s) = f_t^{-1}(b_t)$ teljesülését;

(iii) ha valamely $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in B$, b_t $(0 \leqq t \leqq m-1)$ párra $b_t \neq 0$, akkor minden $x_1, \ldots, x_r \in X$ sorozathoz létezik olyan s $(0 \leqq s \leqq m-1)$, hogy $f_s^{-1}(b_s) = f_t^{-1}(b_t)$ és

$$f_s^{-1}(\delta_s(b_s, x_1 \ldots x_j)) = \delta(f_t^{-1}(b_t), x_1 \ldots x_j) \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Legyen $h: B \to \{a_1, \ldots, a_n\}$ egy olyan leképezés, melyre tetszőleges $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \in B$ esetén $h((b_0, \ldots, b_{m-1})) = a_k$, ha valamely b_t $(0 \leqq t \leqq m-1)$-re $f_t^{-1}(b_t) = a_k$. Az (i) és az (ii) következtében h egy jól definiált szürjektív leképezés. Az (iii) és a δ_s $(s = 0, \ldots, m-1)$ átmeneti függvények definíciója alapján az is látható, hogy

$$h((\delta_0(b_0, x), \ldots, \delta_{m-1}(b_{m-1}, x))) = \delta(h((b_0, \ldots, b_{m-1})), x) \; ((b_0, \ldots, b_{m-1}) \in B, \; x \in X),$$

azaz az $\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{m-1}$ direkt szorzat B állapothalmazú részautomatája $\mathbf{A}$-ra homomorfan leképezhető. □

Mivel automaták ν_2-szorzatainak direkt szorzata ismét ν_2-szorzat, a 3.6. és 3.7. segédtétel következményeként adódik a következő

3.8. TÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [15]). *Minden monoton automata homomorfan reprezentálható a kétállapotú elevátor alkalmas ν_2-hatványával.*

Láttuk, hogy $IS^*P_{\nu_2}(\{\mathbf{E}\}) = HSP_{\nu_2}\{\mathbf{E}\})$ az összes monoton automaták osztálya. Most megmutatjuk, hogy $HS^* P_{\nu_1}^*(\{\mathbf{E}\})$-re (s így $HSP_{\nu_1}^*(\{\mathbf{E}\})$-re) ez nem teljesül. Tekintsük az $\mathbf{A} = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{y_1, y_2\}, \delta)$ automatát, ahol

$$\delta(a_1, y_1) = a_1, \quad \delta(a_1, y_2) = a_2, \quad \delta(a_2, y_1) = a_3, \quad \delta(a_2, y_2) = a_4,$$

$$\delta(a_3, y_1) = \delta(a_3, y_2) = a_3, \quad \delta(a_4, y_1) = \delta(a_4, y_2) = a_4.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ homomorfan szimulálható egy

$$\mathbf{M} = (M, X, \delta_{\mathbf{M}}) = \mathbf{E}^m(X, \varphi, \gamma)$$

ν_1^*-szorzattal a h_1: $M' \to \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $(M' \subseteqq M)$ és h_2: $\{x_0, x_1\} \to X^*$ szimulációs leképezésekre nézve. Legyen $h_2(y_1) = p_1$, $h_2(y_2) = p_2$ és legyen h_1-re nézve m_1 az a_1 egy őse. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy m_1-re $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p_1) = m_1$ teljesül. Ez a következőképp mutatható ki. Mivel $\mathbf{M}$ véges és $\delta(a_1, y_1) = a_1$, létezik egy $m_1 \in M'$ állapot és egy t pozitív egész úgy, hogy $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p^t) = m_1$, mely az $\mathbf{M}$ speciális szerkezete miatt maga után vonja $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p_1) = m_1$ teljesülését.

A következő 3.9. és 3.10. segédtételekben használni fogjuk az $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ automatákat, az $M'(\subset M)$ halmazt, a h_1, h_2 leképezéseket, a p_1, p_2 szavakat és az m_1 állapotot. Végül, legyen $m_2 = \delta_{\mathbf{M}}(m_1, p_2)$, Z_1 a p_1-ben előforduló betűk halmaza, Z_2 a p_2-ben előforduló betűk halmaza, s $Z = Z_1 \cup Z_2$.

3.9. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [14]). *Legyenek i, j $(0 \leqq i, j < m)$ tetszőleges egészek, ahol $\gamma(i) = \{j\}$. Ha az m_2 állapotvektor $(i+1)$-edik és $(j+1)$-edik komponense nulla, akkor $\varphi_i(0, z) = x_0$ minden $z \in Z$-re.*

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy ha az m_2 állapotvektor $(i+1)$-edik és $(j+1)$-edik komponense nulla, akkor ugyanez fennáll m_1-re is.

Mivel $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p_1) = m_1$, a p_1 szó minden p kezdőszeletére fennáll, hogy a $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p)$ állapotvektor $(i+1)$-edik és $(j+1)$-edik komponense nulla. Következésképp $\varphi_i(0, z) = x_0$ fennáll minden $z \in Z_1$-re. Hasonlóképp, $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p_2) = m_2$ következtében a p_2 szó minden p kezdőszeletére fennáll, hogy a $\delta_{\mathbf{M}}(m_1, p)$ állapotvektor $(i+1)$-edik és $(j+1)$-edik komponense nulla. Így $\varphi_i(0, z) = x_0$ minden $z \in Z_2$-re. □

3.10. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [14]). *Legyen* $i_1, ..., i_j$ $(0 \leqq i_1, ..., i_j < m)$ *egészek olyan sorozata, hogy* $\gamma(i_t) = \{i_{t-1}\}$ $(1 < t \leqq j)$, *továbbá az* m_2 *állapotvektor* (i_1+1)*-edik komponense* 1, *az* m_2 *állapotvektor* (i_2+1)*-edik*, ..., (i_j+1)*-edik komponense pedig nulla. Ekkor a következők teljesülnek.*

(i) *Minden* t $(1 < t \leqq j)$ *és* $n \geqq t-1$*-re a* $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^n)$ *állapotvektor* (i_t+1)*-edik komponense* 1 *akkor és csak akkor, ha* $\varphi_{i_2}(1, z_1) = ... = \varphi_{i_t}(1, z_{t-1}) = x_1$ *valamely* $z_1, ..., z_{t-1} \in Z$*-re.*

(ii) *Minden* t $(1 < t \leqq j)$ *és* $n \geqq t-1$*-re a* $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^n)$ *állapotvektor* (i_t+1)*-edik komponense* 1 *akkor és csak akkor, ha* $\varphi_{i_2}(1, z_1) = ... = \varphi_{i_t}(1, z_{t-1}) = x_1$ *valamely* $z_1, ..., z_{t-1} \in Z$*-re.*

(iii) *Minden* t $(1 \leqq t \leqq j)$ *és* $n \geqq j-1$ *mellett a* $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^n)$ *és* $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^n)$ *állapotvektorok* (i_t+1)*-edik komponensei egyenlőek.*

Bizonyítás. Az (i) és (ii) állítás t szerinti indukcióval könnyen kimutatható a 3.9. segédtétel alapján. Ha $t=1$, az (iii) állítás azért teljesül, mert a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, p)$ állapotvektor (i_1+1)-edik komponense minden $p \in X^*$ esetén 1. Ha viszont $1 < t \leqq j$, akkor az (iii) állítás az (i) és az (ii) állítások közvetlen következménye. □

3.11. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [14]). *Alkalmas k pozitív egészre*

$$\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^k) = \delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^k).$$

Bizonyítás. Legyen $k \geqq m-1$. Elegendő kimutatnunk, hogy tetszőleges i $(0 \leqq i \leqq m-1)$ esetén a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^k)$ állapotvektor $(i+1)$-edik komponense akkor és csak akkor 1, ha a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^k)$ állapotvektor $(i+1)$-edik komponense 1. Az **E** definíciója miatt nyilvánvaló, hogy elegendő arra az esetre szorítkozunk, amikor az m_2 állapotvektor $(i+1)$-edik komponense nulla.

Legyen $i_1, ..., i_j$ $(0 \leqq i_1, ..., i_j \leqq m-1)$ egy olyan lánc, melyre

(1) $i_j = i$ és $\gamma(i_t) = \{i_{t-1}\}$ $(1 < t \leqq j)$,

(2a) vagy az teljesül, hogy az m_2 állapotvektor (i_2+1)-edik, ..., (i_j+1)-edik komponense nulla, (i_1+1)-edik komponense pedig 1,

(2b) vagy pedig az, hogy az m_2 állapotvektor (i_1+1)-edik, ..., (i_j+1)-edik komponense nulla és $\gamma(i_1) \subseteq \{i_1, ..., i_j\}$.

A 3.9. segédtétel értelmében a (2b) esetben azt kapjuk, hogy a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^t)$ és a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^t)$ állapotvektorok $(l+1)$-edik komponensei a nulla értéket veszik fel minden $t > 0$ és $l \in \{i_1, ..., i_j\}$ mellett. A (2a) esetben viszont a 3.10. segédtétel (iii) állítása szerint a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^n)$ és a $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^n)$ állapotvektorok (i_t+1)-edik komponensei rendre megegyeznek minden $t (=1, ..., j)$ és $n \geqq j-1$ mellett.

Mivel egy m tényezős v_1^*-szorzatban egy (1)-nek és (2a)-nak eleget tevő lánc hossza m-et nem haladja meg, állításunk fennáll minden $k \geqq m-1$ mellett. □

Vegyük észre, hogy $\delta(a_2, (y_1 y_2)^k) = a_3$ és $\delta(a_2, (y_2 y_1)^k) = a_4$ minden $k \geqq 1$ mellett. Következésképp, $\delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_1 p_2)^k) \neq \delta_{\mathrm{M}}(m_2, (p_2 p_1)^k)$, mely ellentmond a 3.11. segédtételnek. Az ellentmondás abból a feltételezésből származik, hogy létezik az **E**-nek olyan v_1^*-hatványa, mely **A**-t homomorfan szimulálja. Másrészt nyilvánvaló, hogy **A** monoton automata. Így a következő eredményhez jutunk.

3.12. TÉTEL (DÖMÖSI—GÉCSEG [14]). $HS^*P_{v_1}^*(\{\mathbf{E}\})$ *nem tartalmaz minden monoton automatát.*

3.3. Általánosított v_i-szorzatcsalád és homomorf reprezentáció

A következő állítás nyilvánvaló.

3.13. SEGÉDTÉTEL. *Ha valamely* **A** *automata izomorfan reprezentálható egy* **B** *automata egytényezős általánosított* v_1*-szorzatával, továbbá egy* **C** *automata homomorfan reprezentálható az* **A** *valamely* v_2*-hatványával, akkor* **C** *homomorfan reprezentálható a* **B** *automata általánosított* v_3*-hatványával.*

Erre az egyszerű állításra, továbbá a 3. fejezet 3.4. és 3.8. tételeire támaszkodva igazoljuk a következő eredményt.

3.14. TÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [8]). *Homomorf reprezentáció szempontjából az általánosított* v_3*-szorzat ekvivalens az általánosított Gluskov-szorzattal.*

Bizonyítás. Legyen K tetszőleges automataosztály. A következő eseteket különböztetjük meg.

(i) K tartalmaz egy nem-monoton $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát. Ekkor definíció szerint teljesül, hogy alkalmas $a_0, a_1 \in A$ állapotpárra és $p, q \in X^+$ párra $a_0 \neq a_1$ mellett $\delta(a_0, p)=a_1$, $\delta(a_1, q)=a_0$. Alkossuk meg a $\mathbf{B}=\mathbf{A}(\{x_0, x_1\}, \varphi)$ egytényezős általánosított v_1-szorzatot úgy, hogy tetszőleges $a \in A$, $x_t \in \{x_0, x_1\}$ párra

$$\varphi(a, x_t) = \begin{cases} q, & \text{ha} \quad a = a_1 \quad \text{és} \quad x = x_0, \\ pq, & \text{ha} \quad a = a_0 \quad \text{és} \quad x = x_0, \\ p, & \text{ha} \quad a = a_0 \quad \text{és} \quad x = x_1, \\ qp, & \text{ha} \quad a = a_1 \quad \text{és} \quad x = x_1, \\ \text{tetszőlegesen rögzített } r \in X^+ \text{ különben.} \end{cases}$$

Könnyen igazolható, hogy a **B** egytényezős általánosított v_1-szorzat $\{a_0, a_1\}$ állapothalmazú (és $\{x_0, x_1\}$ bemenő jelhalmazú) részautomatája izomorf a kétállapotú beállító automatával. Így rendre alkalmazva a 3.13. segédtételt és a 3.4. tételt, illetve az 1.12. és 1.13. tételeket, azt kapjuk, hogy ez esetben valóban, $HSP^*_{v_3}(K)= =HSP^*_g(K)$.

(ii) K a monoton automaták egy olyan osztálya, hogy alkalmas $\mathbf{A}=(A, X, \delta) \in K$, $a \in A$, $x \in X$ hármasra $\delta(a, x) \neq a$. Ekkor alkossuk meg a $\mathbf{B}=\mathbf{A}(\{x_0, x_1\}, \varphi)$ egytényezős általánosított v_1-szorzatot úgy, hogy tetszőleges $b \in A$, $x_t \in \{x_0, x_1\}$ párra

$$\varphi(b, x_t) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad b = a \quad \text{és} \quad x_t = x_1 \\ \lambda & \text{különben.} \end{cases}$$

Definíció szerint látható, hogy a **B** egytényezős v_1-szorzat $\{a, \delta(a, x)\}$ állapothalmazú (és $\{x_0, x_1\}$ bemenő jelhalmazú) részautomatája izomorf a kétállapotú elevátorral. Így a 3.13. segédtétel és a 3.8. tétel felhasználásával adódik, hogy $HSP^*_{v_3}(K)$ ekkor tartalmazza az összes monoton automaták osztályát. Mivel

$$HSP^*_{v_3}(K) \subseteq HSP^*_g(K) \subseteq HS^*P^*_g(K)$$

definíció szerint fennáll, s az 1.15. tétel értelmében ekkor $HS^*P^*_g(K)$ az összes monoton automaták osztályának egy részosztálya, azt kapjuk, hogy $HSP^*_{v_3}(K)= HSP^*_g(K)$ ez esetben is igaz.

(iii) Tetszőleges $\mathbf{A}=(A, X, \delta)\in K$, $a\in A$, $x\in X$ hármasra $\delta(a, x)=a$. Ekkor $HSP^*_{v_3}(K)=HSP^*_g(K)$ nyilvánvalóan teljesül (hisz ekkor $HSP_q(K)=HSP^*_g(K)$ is fennáll, ahol P_q a kvázidirekt szorzás operátora). □

3.15. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $i\geqq 3$, akkor homomorf reprezentáció szempontjából a v_i^*-szorzat ekvivalens a g^*-szorzattal.*

A 3.12. tétel alapján tudjuk, hogy $HSP^*_{v_1}(\{\mathbf{E}\})(\subseteq HS^*P^*_{v_1}(\{\mathbf{E}\}))$ nem tartalmaz minden monoton automatát. Ezt összevetve az 1.15. tétellel, azt kapjuk, hogy

$$HSP^*_{v_1}(\{\mathbf{E}\})\subset HSP_{\alpha_0}(\{\mathbf{E}\})(\subseteq HSP^*_g(\{\mathbf{E}\})),$$

vagyis az általánosított *Gluskov-szorzat* az általánosított v_1-szorzatnak valódi általánosítása a homomorf reprezentációra nézve. A 3.14. tétel szerint az általánosított *Gluskov-szorzat* homomorf reprezentáció szempontjából ekvivalens az általánosított v_3-szorzattal. (Ez természetesen egyben azt is jelenti, hogy az általánosított *Gluskov-szorzat* homomorf reprezentáció szempontjából minden $i\geqq 3$ esetén ekvivalens az általánosított v_i-szorzattal.) Nyitott kérdés marad, hogy az általánosított *Gluskov-szorzat* homomorf reprezentáció szempontjából valódi általánosítása-e az általánosított v_2-szorzatnak.

Fejezetünk általánosított v_i-szorzatcsaláddal kapcsolatos fő eredményeit tehát a következő állás foglalja össze:

3.16. KÖVETKEZMÉNY. *Az általánosított v_i-szorzatcsalád nem alkot valódi hierarchiát a homomorf reprezentációra nézve. Speciálisan, van olyan $k(=3)$ pozitív egész, hogy ha $i\geqq k$, akkor homomorf reprezentáció szempontjából az általánosított v_i-szorzat ekvivalens az általánosított Gluskov-szorzattal.*

4. S-teljességi vizsgálatok a v_i^+-szorzatcsalád és a v_i^*-szorzatcsalád körében

Ebben a fejezetben S-teljességi vizsgálatokat végzünk a v_i^+-szorzatokkal és az általánosított v_i-szorzatokkal kapcsolatban. Szükséges és elegendő feltételeket adunk annak eldöntésére, hogy automaták valamely rendszere mikor S-teljes homomorfan vagy izomorfan tetszőlegesen rögzített i természetes szám mellett a v_i^+-szorzatra nézve. Ki fog derülni, hogy (tetszőlegesen rögzített i mellett) automaták egy K osztálya pontosan akkor izomorfan S-teljes a v_i^+-szorzatra nézve, amikor homomorfan S-teljes. Kimutatjuk, hogy homomorf és izomorf szimuláció szempontjából már az általánosított v_2-szorzat is ekvivalens az általánosított *Gluskov-szorzattal.* (Az általánosított v_1-szorzat nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.)

4.1. Szemirezet automaták

Legyen tetszőleges $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata esetén

$$\Gamma=\{B\subseteq A|B\neq\emptyset,\ \forall a, b\in B\colon\ \exists p\in X^+\colon\ \delta(a,p)=b\}.$$

A *súlyán* értjük a $W(\mathbf{A})=\max\{|B|\,|B\in\Gamma\}$ természetes számot.

Legyen $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ valamely n súlyú automata. $\mathbf{A}$-t *szemirezet automatának* nevezzük, ha minden $a, b\in A$, $p\in X^+$, továbbá $q, r\in X^*$ esetén a $|p|\geqq\binom{n}{2}$, $\delta(a, pq)=b$

és $\delta(b, pr)=a$ feltételek teljesülése maga után vonja $\delta(a, p(1))=\delta(b, p(1))$ fennállását (ahol mint korábban, $1 \leqq k \leqq |p|$ mellett $p(k)$ a p szó k-adik betűjét jelöli). Így $W(\mathbf{A})=1$ egyben azt is jelenti, hogy $\mathbf{A}$ szemirezet automata.

$\binom{n}{2}$-t fejezetünk további részében $\bar{n}$-sal jelöljük. Érvényes a következő

4.1. TÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [12]). *Egy* $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ *automata akkor és csak akkor szemirezet automata, ha minden* $a, b \in A$ *és* $p, q, r \in X^+$ *mellett fennállnak a következők:*

(i) *ha* $\delta(a, p)=\delta(b, r)=b$ *és* $\delta(b, q)=\delta(a, r)=a$, *akkor* $a=b$,

(ii) *ha* $\delta(a, p)=\delta(b, p)=a$ *és* $\delta(a, q)=b$, *akkor* $\delta(a, p(1))=\delta(b, p(1))$.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ nem szemirezet. Ekkor $W(\mathbf{A})=n \geqq 2$ és léteznek olyan $a, b \in A$ állapotok, $p \in X^+$ és $q, r \in X^*$ szavak, ahol is $|p| \geqq \bar{n}$, $\delta(a, pq)=b$, $\delta(b, pr)=a$, továbbá $\delta(a, p(1)) \neq \neq \delta(b, p(1))$.

Ha $\delta(a, p)=\delta(b, p)$, akkor (ii) nem teljesül. Ha $\delta(a, p) \neq \delta(b, p)$ akkor az

$$\{a, b\},\ \{\delta(a, p[1]),\ \delta(b, p[1])\}, \ldots, \{\delta(a, p[\bar{n}]),\ \delta(b, p[\bar{n}])\}$$

sorozatban egy tényező — mondjuk $\{a', b'\}$ — kétszer előfordul ($p[k]$, mint korábban, $0 \leqq k \leqq \bar{n}$ mellett a p szó k hosszúságú kezdőszeletét jelöli). Ebből következik, hogy $\delta(a', p')=\delta(b', r')=b'$ és $\delta(b', q')=\delta(a', r')=a'$ valamely $p', q', r' \in X^+$ mellett. Mivel $a' \neq b'$, $\mathbf{A}$ nem elégíti ki az (i) feltételt. □

Most a szemirezet automaták v_1^+-szorzatát fogjuk tanulmányozni. A következő segédtételben $\mathbf{A}=(A, X, \delta)=\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi)$ valamely $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ ($t=0, \ldots, k-1, k \geqq 1$), $W(\mathbf{A}_t) \leqq n$ súlyú szemirezet automaták egy l^+-szorzata, ahol $n \geqq 2$ tetszőlegesen rögzített. Legyen $B \subseteq A$ nem üres halmaz, melyre tetszőleges $a, b \in B$ esetén létezik olyan $p \in X^+$, hogy $\delta(a, p)=b$. (Megjegyezzük, hogy minden t-re ugyanez teljesül $\mathbf{A}_t$-ben a B-beli állapotok összes $(t+1)$-edik komponenseinek halmazára.) Definiáljuk a ϱ_t ekvivalenciarelációt B-n minden $t=0, \ldots, k-1$ esetén $(a_0, \ldots, a_{n-1})\varrho_t(b_0, \ldots, b_{k-1})$ által akkor és csak akkor, ha $a_{t \oplus j}=b_{t \oplus j}$ tetszőleges $j=0, \ldots, \bar{n}-1$ mellett, ahol $\oplus$ jelöli a $\bmod k$ szerinti összeadást.

4.2. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [12]).

(i) *Legyen* $a \varrho_t b$ *valamely* $a, b \in B$ *párra és* $t(=0, \ldots, k-1)$*-re. Tegyük fel, hogy a* $\delta(a, p)$ *és* $\delta(b, p)$ *állapotok B-beliek valamely* $|p| \geqq \bar{n}$ *feltételnek eleget tevő* $p \in X^+$ *szó mellett. Ekkor* $\delta(a, p(1))\varrho_{t \oplus 1}\delta(b, p(1))$.

(ii) $k \geqq \bar{n}$ *teljesülését feltételezve legyen* $p \in X^+$ *tetszőleges olyan szó, hogy* $k \,|\, |p|$ *és* $\delta(a, p) \in B$ *minden* $a \in B$*-re. Ekkor léteznek olyan* f_t ($t=0, \ldots, k-1$) *függvények úgy, hogy ha* $a=(a_0, \ldots, a_{k-1})$ *és* $b=(b_0, \ldots, b_{k-1})$ *a* $\delta(a, p)=b$ *összefüggésnek eleget tevő B-beli állapotok, akkor minden t-re*

$$(b_t, \ldots, b_{t \oplus (\bar{n}-1)})=f_t(a_t, \ldots, a_{t \oplus (\bar{n}-1)}).$$

Bizonyítás. A segédtétel (ii) része lényegében arról nyújt információt, hogy ha az $\mathbf{A}$ egy legalább $\bar{n}$-tényezős l^+-szorzat, továbbá $\mathbf{A}$ valamely a állapotában egy olyan p bemenő szót kap, melynek hossza k-nak (azaz $\mathbf{A}$ tényezői számának) többszöröse, úgy $\mathbf{A}$ átmegy egy olyan b állapotba, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: akárhogy is adjuk meg a $t(=0, \dots, k-1)$ indexet, a b állapot $b_t, b_{t\oplus 1}, \dots, b_{t\oplus(\bar{n}-1)}$ komponense független attól, hogy mi volt az a állapot $a_{t\oplus\bar{n}}, a_{t\oplus(\bar{n}+1)}, \dots, a_{t\oplus k}$ komponense. Ez az állítás viszont (i)-nek következménye. Elegendő tehát csupán (i)-t igazolni. Az (i) nyilvánvalóan teljesül, ha $k \leqq \bar{n}$. Így legyen $k > \bar{n}$. Csupán azt fogjuk kimutatni, hogy $a\varrho_0 b$ maga után vonja $\delta(a, x)\varrho_1\delta(b, x)$ fennállását, ahol $x = p(1)$ (a többi eset bizonyos indexezési nehézségek mellett ugyanúgy bizonyítható).

Legyen $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ és $b = (b_0, \dots, b_{k-1})$. Mivel minden $t = 0, \dots, \bar{n}-1$ mellett $a_t = b_t$, így $\varphi_{t+1}(a_t, x) = \varphi_{t+1}(b_t, x)$. (A visszacsatolási függvények azon argumentumait, melyektől a függvényérték ténylegesen nem függhet, a jobb áttekinthetőség érdekében elhagyjuk.) Következésképp, $\delta_t(a_t, \varphi_t(a_{t-1}, x)) = \delta_t(b_t, \varphi_t(b_{t-1}, x))$ $(t = 1, \dots, \bar{n}-1)$. Ki kell mutatnunk, hogy $\delta_{\bar{n}}(a_{\bar{n}}, \bar{x}) = \delta_{\bar{n}}(b_{\bar{n}}, \bar{x})$ ugyancsak fennáll, ahol is

$$\bar{x} = \varphi_{\bar{n}}(a_{\bar{n}-1}, x) = \varphi_{\bar{n}}(b_{\bar{n}-1}, x) \quad (\in X_{\bar{n}}^+).$$

Legyen $p_0 = p[\bar{n}]$ (azaz p-nek $\bar{n}$ hosszú kezdőszelete) és $\bar{p} = \varphi_{\bar{n}}(a, p_0) = \varphi_{\bar{n}}(b, p_0)$. (A $\varphi_{\bar{n}}(a, p_0) = \varphi_{\bar{n}}(b, p_0)$ egyenlőség amiatt áll fenn, hogy $a_0 = b_0, \dots, a_{\bar{n}-1} = b_{\bar{n}-1}$ és $|p_0| = \bar{n}$.)

A $p_0 = p[\bar{n}]$, s így $|p_0| = \bar{n}$ miatt teljesül a $|\bar{p}| \geqq \bar{n}$ feltétel (hisz $|\bar{p}| = |\varphi_{\bar{n}}(a, p_0)|$). Ezenkívül, a B-re tett feltételezéseink következtében léteznek olyan $\bar{q}, \bar{r} \in X_{\bar{n}}^*$ szavak, hogy $\delta_{\bar{n}}(a_{\bar{n}}, \bar{p}\bar{q}) = b_{\bar{n}}$ és $\delta_{\bar{n}}(b_{\bar{n}}, \bar{p}\bar{r}) = a_{\bar{n}}$. Mivel $\mathbf{A}_{\bar{n}}$ egy n-nél nem nagyobb súlyú szemirezet automata, ez azt jelenti, hogy $\delta_{\bar{n}}(a_{\bar{n}}, \bar{p}(1)) = \delta_{\bar{n}}(b_{\bar{n}}, \bar{p}(1))$. Így érvényes $\delta_{\bar{n}}(a_{\bar{n}}, \bar{x}) = \delta_{\bar{n}}(b_{\bar{n}}, \bar{x})$ is. □

Jelöljük $\hat{n}$-val tetszőleges n természetes szám esetén az $1, \dots, n^{\bar{n}}$ számok legkisebb közös többszörösét (így ha $n = 1$, akkor $\hat{n} = 1$).

4.3. Segédtétel (Dömösi—Ésik [12]). *Legyen $\mathbf{A}_t = (A_t, X_t, \delta_t)$ $(t = 0, \dots, k-1)$ szemirezet automaták egy sorozata, s tegyük fel, hogy valamely n-re $W(\mathbf{A}_t) \leqq n$. Legyen továbbá $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ az $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_{k-1}$ automaták egy v_1^+-szorzata, mondjuk, legyen $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \times \dots \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi, \gamma)$. Végül, legyen $a \in A$ és $p \in X^+$ tetszőleges olyan pár, hogy $1, \dots, k$ legkisebb közös többszöröse $|p|$-nek osztója. Tegyük fel, hogy $\delta(a, p^r) = a$ valamely $r \geqq 1$-re. Ekkor $\delta(a, p^{\hat{n}}) = a$ ugyancsak fennáll, azaz a $p^{\mathbf{A}}\colon A \to A$ transzformáció periódusa $\hat{n}$-nek osztója.*

Bizonyítás. A bizonyításban végig tételezzük fel, hogy r a legkisebb olyan természetes szám, melyre $\delta(a, p^r) = a$. Így $\delta(a, p^{\hat{n}}) = a$ akkor és csak akkor, ha $r | \hat{n}$. Vezessük be az $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ jelölést. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$, következésképp legyen $n > 1$.

Ha $k = 1$, akkor feltételezhetjük, hogy $\gamma(0) = \{0\}$. Ekkor $b_i = \delta_0(a_0, \varphi_0(a_0, p^i))$ $(i = 0, \dots, r-1)$ páronként különbözőek és tetszőleges i, j párhoz $(0 \leqq i, j < r)$ létezik olyan $q \in X^+$, hogy $\delta_0(b_i, q) = b_j$. Mivel $W(\mathbf{A}_0) \leqq n$, ebből következik, hogy $r \leqq n$ és így $r | \hat{n}$.

Legyen $k > 1$ és tegyük fel, hogy állításunk valamely $l < k$ mellett fennáll. Definiáljuk a ϱ' binér relációt a $\{0, \dots, k-1\}$ halmazon a következőképp: $i\varrho' j$ akkor és csak akkor, ha $i = j$, vagy $\gamma(i) = \{j\}$, vagy $\gamma(j) = \{i\}$ $(0 \leqq i, j \leqq k-1)$. Jelölje ϱ a ϱ' tranzitív lezártját. Ekkor ϱ ekvivalencia reláció $\{0, \dots, k-1\}$-en. (Más szóval, ϱ a legszűkebb ekvivalencia reláció a $\{0, \dots, k-1\}$ halmazon, melyre $i\varrho j$ fennáll, valahányszor $\gamma(i) = \{j\}$.)

A következő három esetet különböztetjük meg:

1. *eset.* A ϱ nem a totális reláció, azaz a ϱ által indukált felosztás legalább két blokkal rendelkezik. Megszorítás nélkül feltehető, hogy a 0-t tartalmazó blokk a $0, \ldots, m-1$ számokból áll valamely $1 \leqq m < k$ mellett. (Ellenkező esetben a tényezők és a hozzájuk tartozó visszacsatolási függvények sorrendjének alkalmas felcserélésével elérhető, hogy egy olyan, az eredeti ν_1-szorzattal izomorf ν_1-szorzatot kapjunk, melyre ez teljesül.) Ebből következik, hogy **A** izomorf egy olyan $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ automata-pár direkt szorzatával, ahol $\mathbf{B}_1$ az $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{m-1}$ automaták egy ν_1^+-szorzata, $\mathbf{B}_2$ pedig az $\mathbf{A}_m, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ automatákból álló ν_1^+-szorzat. Így a

$$(b_0, \ldots, b_{k-1}) \to ((b_0, \ldots, b_{m-1}), (b_m, \ldots, b_{k-1})) \quad ((b_0 \ldots, b_{k-1}) \in A)$$

hozzárendelés **A**-nak ezen direkt szorzatra való izomorfizmusát eredményezi. $\delta_{\mathbf{B}_1}$-gyel jelölve a $\mathbf{B}_1$, $\delta_{\mathbf{B}_2}$-vel pedig a $\mathbf{B}_2$ átmeneti függvényét, innen adódik, hogy

$$\delta_{\mathbf{B}_1}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p^r) = (a_0, \ldots, a_{m-1})$$

és

$$\delta_{\mathbf{B}_2}((a_m, \ldots, a_{k-1}), p^r) = (a_m, \ldots, a_{k-1}).$$

Indukciós hipotézisünk alapján

$$\delta_{\mathbf{B}_1}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p^{\bar{n}}) = (a_0, \ldots, a_{m-1})$$

és

$$\delta_{\mathbf{B}_2}((a_m, \ldots, a_{k-1}), p^{\bar{n}}) = (a_m, \ldots, a_{k-1}).$$

Így

$$\delta(a, p^{\bar{n}}) = (\delta_{\mathbf{B}_1}((a_0, \ldots, a_{m-1}), p^{\bar{n}}), \delta_{\mathbf{B}_2}((a_m, \ldots, a_{k-1}), p^{\bar{n}})) = a.$$

2. *eset.* A ϱ a totális reláció (azaz az általa indukált felosztás egy blokkból áll) és létezik olyan $u \in \{0, k-1\}$, hogy $u \notin \bigcup (\gamma(t) | t=0, \ldots, k-1)$. Ismét felhasználva (az előző esethez hasonlóan) a ν_1^+-szorzatban a tényezők sorrendjének átrendezhetőségét, feltételezhetjük, hogy $u=k-1$. Most **A** izomorf egy olyan $\mathbf{B}_0 \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi', \gamma')$ ν_1^+-szorzattal, ahol $\mathbf{B}_0$ az $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-2}$ automaták ν_1^+-szorzata, továbbá $\gamma'(0)=\emptyset$, $\gamma'(1)=\{0\}$ és $\varphi_0'(x)=x$ tetszőleges $x \in X$-re. Ezenkívül $\mathbf{B}_0$ és a tekintett ν_1^+-szorzat úgy definiálható, hogy a

$$(b_0, \ldots, b_{k-1}) \to ((b_0, \ldots, b_{k-2}), b_{k-1}) \quad ((b_0, \ldots, b_{k-1}) \in A)$$

hozzárendelés egy izomorfizmus lesz. Mivel tetszőleges $(b_0, \ldots, b_{k-1}) \in A$ és $q \in X^*$ mellett

$$\delta((b_0, \ldots, b_{k-1}), q) = (\delta_{\mathbf{B}_0}((b_0, \ldots, b_{k-2}), q), \delta_{k-1}(b_{k-1}, \varphi_1'((b_0, \ldots, b_{k-2}), q)))$$

fennáll, azt kapjuk, hogy

$$\delta_{\mathbf{B}_0}((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^r) = (a_0, \ldots, a_{k-2})$$

és

$$\delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^r)\big) = a_{k-1}.$$

Az indukciós feltevésből adódik

$$\delta_{B_0}\big((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}}\big) = (a_0, \ldots, a_{k-2}).$$

Ha tehát

$$\delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})\big) = a_{k-1},$$

akkor

$$\delta(a, p^{\hat{n}}) = \big(\delta_{B_0}((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}}),\ \delta_{k-1}(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}}))\big) = a.$$

Megmutatjuk, hogy az $a_{k-1} \neq b_{k-1}$ feltételezés, ahol

$$b_{k-1} = \delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})\big)$$

ellentmondáshoz vezet. Valóban,

$$\delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}})\big) = a_{k-1}$$

fennáll, hiszen

$$\delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^r)\big) = a_{k-1}$$

és

$$\delta_{B_0}\big((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^r\big) = (a_0, \ldots, a_{k-2}).$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
&\delta_{k-1}\big(b_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}})\big) = \\
&= \delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})\varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}})\big) = \\
&= \delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}+\hat{n}})\big) = \\
&= \delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}})\varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})\big) = \\
&= \delta_{k-1}\big(a_{k-1}, \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})\big) = b_{k-1}.
\end{aligned}$$

Mivel léteznek olyan $q, r \in X_{k-1}^+$ szavak, hogy $\delta_{k-1}(a_{k-1}, q) = b_{k-1}$ és $\delta_{k-1}(b_{k-1}, r) = a_{k-1}$, nevezetesen $q = \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{\hat{n}})$, $r = \varphi_1'((a_0, \ldots, a_{k-2}), p^{r\hat{n}-\hat{n}})$, a 4.1. tétel (i) részéből következik, hogy $\mathbf{A}_{k-1}$ nem szemirezet automata. Ezen ellentmondás kimutatásával befejeztük a 2. eset tárgyalását is.

3. *eset.* A ϱ a totális reláció és $\bigcup(\gamma(t) \mid t = 0, \ldots, k-1) = \{0, \ldots, k-1\}$. Ebben az esetben feltételezhető, hogy $\mathbf{A}$ egy l^+-szorzat. Legyen

$$B = \{\delta(a, p^i) = (a_{i,0}, \ldots, a_{i,k-1}) \mid i = 0, \ldots, r-1\},$$

továbbá legyen $|B| = r$ és $a_{0,t} = a_t$ minden $t(=0, \ldots, k-1)$-re. Mivel minden $\mathbf{A}^t$ súlya legfeljebb n, $|B| \leqq n^k$. Következésképp, ha $k \leqq \bar{n}$, akkor $r = |B| \leqq n^{\bar{n}}$, tehát $r \mid \hat{n}$.

Ha $k > \bar{n}$, alkalmazzuk a 4.2. segédtétel (ii) részét. Léteznek tehát olyan f_t $(t = 0, \ldots, k-1)$ függvények, hogy

$$(a_{i+1,t}, \ldots, a_{i+1,t\oplus(\bar{n}-1)}) = f_t(a_{i,t}, \ldots, a_{i,t\oplus(\bar{n}-1)}) \quad (i = 0, \ldots, r-2)$$

és

$$(a_{0,t}, \ldots, a_{0,t\oplus(\bar{n}-1)}) = f_t(a_{r-1,t}, \ldots, a_{r-1,t\oplus(\bar{n}-1)}).$$

Továbbá, mivel minden $\mathbf{A}_t$ legfeljebb n súlyú, minden f_t függvény periódusa is legfeljebb $n^{\bar{n}}$. Ebből következik, hogy r osztója az $1, \ldots, n^{\bar{n}}$ legkisebb közös többszörösének, azaz $r|\hat{n}$. □

4.2. v_1^+-szorzatok

Vizsgálatainkat a következő állítás bizonyításával kezdjük.

4.4. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI—ÉSIK [12]). *Ha K valamely n-nél nem nagyobb súlyú szemirezet automaták osztálya, akkor K nem homomorfan S-teljes a v_1^+-szorzatra nézve.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben K homomorfan S-teljes a v_1^+-szorzatra nézve. Ekkor az is igaz, hogy tetszőleges G csoport esetén $(G, G)^* \in HS^*P_{v_1}^+(K)$, ami $((G, G) = (G, G)^*$ miatt$)$ egyben azt is jelenti, hogy $(G, G) \in HS^+P_{v_1}^+(K)$. Más szóval, létezik olyan $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_{k-1}(X, \varphi, \gamma)$ v_1^+-szorzat, melyre $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1} \in K$ és $(G, G)|\mathbf{A}$.

Legyen G olyan nemkommutatív egyszerű csoport, mely tartalmaz egy $O(g) > \hat{n}$ feltételnek eleget tevő $g(\in G)$ elemet, ahol amint szokásos, $O(g)$ a $g \in G$ rendjét jelöli.

Mivel G nemkommutatív egyszerű csoport, továbbá $(G, G)|\mathbf{A}$, az 1.4. tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $(G, G)\|\mathbf{A}$. Másrészt az 1.2. tétel értelmében (figyelembe véve, hogy $(G, G) = (G, G)^\lambda$) azt kapjuk, hogy $(G, G)\|^{(m_1)}\mathbf{A}$-ból $(G, G)\|^{(m_2)}\mathbf{A}$ következik, valahányszor m_2 többszöröse m_1-nek. Így ha l-lel jelöljük $1, \ldots, k$ legkisebb közös többszörösét, alkalmas m-re $(G, G)\|^{(m)}\mathbf{A}$, ahol m az l többszöröse. Ez azonban azt eredményezi, hogy az $\mathbf{A}$ alkalmas p bemenő szavára $|p| = m$ mellett a $p^{\mathbf{A}}$ transzformáció periódusa többszöröse $O(g)(>\hat{n})$-nek annak ellenére, hogy $1, \ldots, k$ legkisebb közös többszöröse osztója m-nek. Ez ellentmond a 4.3. segédtételnek.

4.5. TÉTEL (DÖMÖSI—IMREH [16]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor izomorfan S-teljes az l^+-szorzatra nézve, ha a következő három feltétel közül legalább az egyiknek eleget tesz:*

(i) *minden $n > 1$ természetes számhoz létezik olyan K-beli* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$, *mely rendelkezik n számú páronként különböző a_t $(t = 0, \ldots, n-1)$ állapottal és n számú q_t $(t = 0, \ldots, n-1)$ bemenő szóval úgy, hogy $\delta(a_t, q_t) = a_{t+1}$ ha $0 \leq t < n-1$ és $\delta(a_t, q_t) = a_0$, ha $t = n-1$,*

(ii) *K tartalmaz egy* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *automatát, melynek két különböző a, b állapotára és p, q, r nem üres bemenő szavaira*

$$\delta(a, p) = \delta(b, r) = a \quad \text{és} \quad \delta(a, q) = \delta(b, p) = b,$$

(iii) *létezik egy olyan K-beli* $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *automata, melynek két különböző a, b állapotára és p, q, r nem üres bemenő szavaira*

$$\delta(a, p) \neq \delta(b, p), \quad \delta(a, pq) = \delta(b, pq) = a \quad \text{és} \quad \delta(a, r) = b.$$

Bizonyítás. A 4.1. tétel alapján látható, hogy ha K nem tesz eleget az (i)—(iii) feltételek egyikének sem, úgy alkalmas n természetes számra K az n-nél nem nagyobb súlyú szemirezet automaták egy osztálya. A 4.4. segédtétel értelmében K ekkor homomorfan nem teljes az l^+-szorzatra nézve, s így izomorfan sem. A szükségességet ezzel megmutattuk.

Az elegendőség igazolásához először tegyük fel, hogy K eleget tesz (i)-nek. Nem nehéz belátni, hogy ekkor minden $\mathbf{A}$ automatához létezik olyan $\mathbf{B} \in K$, hogy $\mathbf{A}$ izomorfan szimulálható a $\mathbf{B}$ egy egytényezős l^+-szorzatával.

Az (ii) és (iii) esetek vizsgálata előtt néhány egyszerű megállapítást teszünk. Könnyen igazolható, hogy egy $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automata izomorfan szimulálható egy $\mathbf{T}_n$ automatával, ha $n \geqq \max(3, |A|)$. Így az izomorf szimuláció tranzitív tulajdonsága miatt kapjuk, hogy ha tetszőleges $n \geqq 3$ mellett a $\mathbf{T}_n$ automata izomorfan szimulálható egy K-beli automatákból álló l^+-szorzattal, akkor K izomorfan S-teljes az l^+-szorzatra nézve.

Másrészt tekintsük az összes $[n]$ feletti transzformációk T_n félcsoportjának egy olyan $H_n = T_n'' \cup \{s\}$ generátorrendszerét, ahol T_n'' az összes $[n]$ feletti, $(i, i+1)$ $(i=1, \ldots, n-1)$ alakú transzpozíciók halmaza, továbbá s-re teljesül

$$s(1) = s(2) = 1 \quad \text{és} \quad s(k) = k \quad (k = 3, \ldots, n).$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy a $\mathbf{T}_n' = ([n], H_n, \delta_n')$ automata, melyre $\delta_n'(k, h) = h(k)$ $(k \in [n],\ h \in H_n)$, izomorfan szimulálja $\mathbf{T}_n$-t. Így az izomorf szimuláció tranzitív tulajdonsága miatt azt kapjuk, hogy ha tetszőleges $n \geqq 3$ esetén a $\mathbf{T}_n'$ automata izomorfan szimulálható K-beli automaták l^+-szorzatával, úgy K izomorfan S-teljes az l^+-szorzatra nézve.

Folytatva az (ii) és (iii) esetek tárgyalását, tekintsük a

$$t_2(1) = 2, \quad t_2(2) = 1, \quad t_2(k) = k \quad (2 < k \leqq n)$$

feltételeknek eleget tevő $t_2 \in T_n''$ transzpozíciót.

Tételünkhöz azt fogjuk még megmutatni, hogy ha valamely $\mathbf{A} \in K$ eleget tesz az (i) vagy (ii) feltételek valamelyikének, akkor $n \geqq 6$ mellett van olyan n tényezős $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}(Z, \varphi, \gamma)$ l^+-hatvány, hogy alkalmas

$$h_1\colon A' \to [n] (A' \subseteqq A^n), \quad h_2\colon H_n \to Z^+$$

leképezés-pár mellett

$$h_1(\delta''(b, h_2(t))) = \delta_n'(h_1(b), t) \quad (b \in A',\ t \in H_n),$$

ahol δ'' a $\mathbf{B}$ átmeneti függvényét jelöli.

Azt az esetet fogjuk csupán tárgyalni, amikor $t \in \{t_2, s\}$. Más esetben (azaz $t \in T_n'' - \{t_2\}$ mellett) hasonló konstrukciót kell követnünk, mint a t_2 transzpozíció tárgyalása esetén (eltekintve bizonyos indexezési problémáktól).

Tételezzük fel még, hogy $\gamma(t) = \{t-1\}$, ha $1 \leqq t < n$ és $\gamma(0) = \{n-1\}$, azaz legyen $\mathbf{B}$ egy l^+-szorzat, s vizsgáljuk meg először az (ii) esetet. (Mint már előbb tettük, az áttekinthetőség kedvéért a visszacsatolási függvények azon argumentumait elhagyjuk, amitől a függvényérték ténylegesen nem függhet.)

Legyen $\{u_i | 1 \leqq i < n\} \cup \{s_1, s_2, s_3, x, y, w, z\} \subseteqq Z$ és $n \geqq 5$, ahol tetszőleges $t \in \{0, \ldots, n-1\}$-re

$$\varphi_t(a, u_i) = p, \quad \varphi_t(b, u_i) = \begin{cases} q, & \text{ha } t = i, \\ p, & \text{különben } (i = 1, \ldots, n-1), \end{cases}$$

$$\varphi_0(a, s_1) = p, \quad \varphi_0(b, s_1) = q, \quad \varphi_t(a, s_1) = \varphi_t(b, s_1) = p \quad (t \geqq 1),$$

$$\varphi_t(a, s_2) = p, \quad \varphi_t(b, s_2) = \begin{cases} r, & \text{ha } 2 \leqq t \leqq n-1, \\ p, & \text{különben} \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, s_3) = p, \quad \varphi_t(b, s_3) = \begin{cases} r, & \text{ha } 3 \leqq t \leqq n-1, \\ p, & \text{különben} \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, x) = \begin{cases} r, & \text{ha } t = 0, \\ p, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\varphi_t(b, x) = p,$$

$$\varphi_0(a, y) = q, \quad \varphi_0(b, y) = \varphi_t(a, y) = \varphi_t(b, y) = p \quad (t \geqq 1)$$

$$\varphi_0(a, w) = q, \quad \varphi_0(b, w) = p, \quad \varphi_t(a, w) = p, \quad \varphi_t(b, w) = r \quad (t \geqq 1)$$

$$\varphi_0(a, z) = p, \quad \varphi_0(b, z) = r, \quad \varphi_1(a, z) = r \quad \varphi_1(b, z) = p,$$

$$\varphi_2(a, z) = \varphi_2(b, z) = p, \quad \varphi_t(a, z) = p, \quad \varphi_t(b, z) = r \quad (t > 2).$$

Legyen $A' = \{b_1, \ldots, b_n\}$, ahol $b_1 = (b, a, \ldots, a), \ldots, b_n = (a, \ldots, a, b)$, s használjuk A' valamely $(a_1, \ldots, a_n) = b_t$ $(1 \leqq t \leqq n)$ elemére az $a_1 \ldots a_n$ rövidítést is. A $h_2(t_2) = \bar{p}$ és $h_2(s) = \bar{q}$ feltételeknek $h_1(\delta(b, h_2(t))) = \delta'_n(h_1(b), t)$ $(b \in A', t \in \{t_2, s\})$ mellett eleget tevő Z^+-beli $\bar{p}$, $\bar{q}$ szavakat az alábbi lépésekben konstruáljuk meg.

1. *Lépés.* Legyen $p_1 = u_3 \ldots u_{n-1}$. Ekkor

$$\delta''(b_t, p_1) = b_t, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2,$$

$$\delta''(b_t, p_1) = a^{t-1} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

2. *Lépés.* Legyen $p_2 = p_1 s_1$. Ekkor

$$\delta''(b_t, p_2) = b_t, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2$$

$$\delta''(b_t, p_2) = b a^{t-2} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

3. *Lépés.* Legyen $p_3 = p_2 z$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_3) = b_1,$$

$$\delta''(b_2, p_3) = a^n,$$

$$\delta''(b_t, p_3) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

4. *Lépés.* Legyen $p_4 = p_3 u_1 \dots u_{n-1}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_4) = b^n,$$

$$\delta''(b_2, p_4) = a^n,$$

$$\delta''(b_t, p_4) = a^{t-1} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

5/a) *Lépés.* Legyen $\bar{q} = p_4 w$. Ekkor

$$\delta''(b_t, \bar{q}) = b_1, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2,$$

$$\delta''(b_t, \bar{q}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

5/b) *Lépés.* Legyen $p_5 = p_4 y$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_5) = b^n,$$

$$\delta''(b_2, p_5) = ba^{n-1} \quad (= b_1),$$

$$\delta''(b_t, p_5) = a^{t-1} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

6. *Lépés.* Legyen $p_6 = p_5 s_2$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_6) = b^2 a^{n-2},$$

$$\delta''(b_2, p_6) = ba^{n-1} \quad (= b_1),$$

$$\delta''(b_t, p_6) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

7. *Lépés.* Legyen $p_7 = p_6 u_3 \dots u_{n-1}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_7) = b^2 a^{n-2},$$

$$\delta''(b_2, p_7) = ba^{n-1} \quad (= b_1),$$

$$\delta''(b_t, p_7) = a^{t-1} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

8. *Lépés.* Legyen $p_8 = p_7 x$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_8) = aba^{n-2} \quad (= b_2),$$

$$\delta''(b_2, p_8) = a^n$$

$$\delta''(b_t, p_8) = a^{t-1} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

9. *Lépés.* Legyen $p_9 = p_8 s_3$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_9) = aba^{n-2} \quad (= b_2),$$

$$\delta''(b_2, p_9) = a^n,$$

$$\delta''(b_t, p_9) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

10. *Lépés.* Legyen $p_{10}=p_9u_2\dots u_{n-1}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_{10}) = ab^{n-1},$$

$$\delta''(b_2, p_{10}) = a^n,$$

$$\delta''(b_t, p_{10}) = a^{t-1}b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

11. *Lépés.* Legyen $p_{11}=p_{10}y$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_{11}) = ab^{n-1},$$

$$\delta''(b_2, p_{11}) = ba^{n-1} \quad (= b_1),$$

$$\delta''(b_t, p_{11}) = a^{t-1}b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

12. *Lépés.* Legyen $\bar{p}=p_{11}s_2$. Ekkor

$$\delta''(b_1, \bar{p}) = b_2,$$

$$\delta''(b_2, \bar{p}) = b_1,$$

$$\delta''(b_t, \bar{p}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

Az 5/a) és a 12. lépés alapján látható, hogy a $\bar{q}=u_3\dots u_{n-1}s_1zu_1\dots u_{n-1}w(=h_2(s))$ és a $\bar{p}=u_3\dots u_{n-1}s_1zu_1\dots u_{n-1}ys_2u_3\dots u_{n-1}xs_3u_2\dots u_{n-1}ys_2(=h_2(t_2))$ választás eleget tesz a kívánt feltételeknek.

Most rátérünk az (iii) eset tárgyalására.

Ekkor az alkalmasan választott $\mathbf{A}=(A, X, \delta)\in K$ automatának léteznek olyan $a\neq b$-nek eleget tevő $a, b(\in A)$ állapotai és $p, q, r(\in X^*)$ bemenő szavai, hogy

$$\delta(a, p) \neq \delta(b, p), \quad \delta(a, pq) = \delta(b, pq) = a \quad \text{és} \quad \delta(a, r) = b.$$

Vegyük észre, hogy elegendő az $a\notin\{\delta(a, p), \delta(b, p)\}$ esettel foglalkoznunk. Valóban, tegyük fel, hogy $a\in\{\delta(a, p), \delta(b, p)\}$. Két esetet különböztetünk meg. Ha $b\in\{\delta(a, p), \delta(b, p)\}$, akkor $p^{\mathbf{A}}$ az $\{a, b\}$ halmazon egy permutációt indukál és így az $\mathbf{A}$ eleget tesz az (ii)-beli feltételeknek. Ha $b\notin\{\delta(a, p), \delta(b, p)\}$, akkor bevezetve az $a'=b$, $b'=a$, $p'=p$, $q'=qr$, $r'=pq$ jelöléseket, azt kapjuk, hogy

$$a' \neq b', \quad \delta(a', p') \neq \delta(b', p'), \quad \delta(a', p'q') = \delta(b', p'q') = a', \quad \delta(a', r') = b'$$

és

$$a'\notin\{\delta(a', p'), \delta(b', p')\}.$$

Következésképp, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$a\notin\{\delta(a, p), \delta(b, p)\}.$$

Legyen $\{x_1, x_2, \dots, x_8\}\subseteq Z$ és $n\geqq 6$. Definiáljuk tetszőleges $t(=0, \dots, n-1)$-re a visszacsatolási függvényeket a következő módon.

$$\varphi_t(a, x_1) = pq, \quad \varphi_t(b, x_1) = r,$$

$$\varphi_t(a, x_2) = \begin{cases} p, & \text{ha} \quad t = 1, \\ pqp, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(b, x_2) = \begin{cases} p, & \text{ha} \quad t = 2, \\ rp, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(a, p), x_3) = q, \quad \varphi_t(\delta(b, p), x_3) = qr,$$

$$\varphi_t(a, x_4) = p, \quad \varphi_t(b, x_4) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad t = 1, \\ p, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, x_5) = \begin{cases} qp, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \\ p, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(a, p), x_5) = q,$$

$$\varphi_t(\delta(b, p), x_5) = \begin{cases} r, & \text{ha} \quad t = 1, \\ qr, & \text{ha} \quad t \neq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, x_6) = p, \quad \varphi_t(b, x_6) = \begin{cases} q, & \text{ha} \quad t = 2, \\ p, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(a, p), x_6) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \\ \varphi_t(b, x_6), & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(b, p), x_6) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \\ \varphi_t(b, x_6), & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, x_7) = \begin{cases} p, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \quad t = 3, \\ qp, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \quad t \neq 3, \\ rp, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \quad t = 3, \\ qrp, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \quad t \neq 3, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(a, p), x_7) = q, \quad \varphi_t(\delta(b, p), x_7) = \begin{cases} r, & \text{ha} \quad t = 2, \\ qr, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(a, x_8) = \begin{cases} p, & \text{ha} \quad t = 3, \\ pqp, & \text{különben}, \end{cases} \quad \varphi_t(b, x_8) = \begin{cases} qp, & \text{ha} \quad t = 3, \\ p, & \text{ha} \quad t = 4, \\ rp, & \text{különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(a, p), x_8) = \begin{cases} qrp, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \quad t = 4, \\ p, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \quad t = 5, \\ \varphi_t(b, x_8), & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \\ \text{tetszőleges bemenő szó, különben}, \end{cases}$$

$$\varphi_t(\delta(b, p), x_8) = \begin{cases} qrp, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \quad t = 4, \\ p, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \quad t = 5, \\ \varphi_t(b, x_8), & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p) \\ \text{tetszőleges bemenő szó különben.} \end{cases}$$

(A fel nem sorolt esetekben φ_t értéke vizsgálataink szempontjából közömbös.) Legyen, mint előbb, $A'=\{b_1, \ldots, b_n\}$, ahol $b_1=(b, a, \ldots, a), \ldots, b_n=(a, \ldots, a, b)$, s ismét használjuk az $a_1 \ldots a_n$ rövidítést valamely $(a_1, \ldots, a_n) \in A'$-re. Ezenfelül az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az $\alpha=\delta(a, p)$ és $\beta=\delta(b, p)$ jelöléseket. Előbb a $\bar{q}=h_2(s)$ szót határozzuk meg.

1. *Lépés.* Legyen $q_1=x_2$. Ekkor

$$\delta''(b_t, x_2) = \alpha\beta\alpha^{n-2}, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2$$

$$\delta''(b_t, x_2) = \alpha^t\beta\alpha^{n-t-1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n-1,$$

$$\delta''(b_n, x_2) = \beta\alpha^{n-1}.$$

2. *Lépés.* Legyen $q_2=q_1x_3$. Ekkor

$$\delta''(b_t, q_2) = a^2ba^{n-3}, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2$$

$$\delta''(b_t, q_2) = a^{t+1}ba^{n-t-2}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n-2$$

$$\delta''(b_{n-1}, q_2) = ba^{n-1}$$

$$\delta''(b_n, q_2) = aba^{n-2}.$$

3. *Lépés.* Legyen $\bar{q}=q_2x_1^{n-2}$. Ekkor

$$\delta''(b_t, \bar{q}) = b_1, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq t \leqq 2,$$

$$\delta''(b_t, \bar{q}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

Most határozzuk meg a $\bar{p}=h_2(t_2)$ szót.

1. *Lépés.* Legyen $p_1=x_4$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_1) = \beta a\alpha^{n-2},$$

$$\delta''(b_t, p_1) = \alpha^{t-1}\beta\alpha^{n-t}, \quad \text{ha} \quad 1 < t \leqq n.$$

2. *Lépés.* Legyen $p_2=p_1x_5$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_2) = \begin{cases} ab\alpha a^{n-3}, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \\ ab\beta a^{n-3}, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p) \end{cases}$$

$$\delta''(b_t, p_2) = a^t ba^{n-t-1}, \quad \text{ha} \quad 1 < t < n,$$

$$\delta''(b_n, p_2) = ba^{n-1}.$$

3. *Lépés.* Legyen $p_3=p_2x_6$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_3) = \alpha\beta a^2\alpha^{n-4}$$

(függetlenül attól, hogy $b \neq \delta(a, p)$ avagy sem),

$$\delta''(b_t, p_3) = \alpha^t\beta\alpha^{n-t-1}, \quad \text{ha} \quad 1 < t < n,$$

$$\delta''(b_n, p_3) = \beta\alpha^{n-1}.$$

4. *Lépés.* Legyen $p_4 = p_3 x_7$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_4) = \begin{cases} a^2 b\alpha^2 a^{n-5}, & \text{ha} \quad b \neq \delta(a, p), \\ a^2 b\beta^2 a^{n-5}, & \text{ha} \quad b = \delta(a, p), \end{cases}$$

$$\delta''(b_t, p_4) = \begin{cases} a^{t+1} b a^{n-t-2}, & \text{ha} \quad 1 < t \leqq n-2, \\ b a^{n-1}, & \text{ha} \quad t = n-1, \\ a b a^{n-2}, & \text{ha} \quad t = n. \end{cases}$$

5. *Lépés.* Legyen $p_5 = p_4 x_8$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_5) = \alpha^4 \beta \alpha^{n-5}$$

függetlenül attól, hogy $b \neq \delta(a, p)$ avagy sem),

$$\delta''(b_2, p_5) = \alpha^3 \beta \alpha^{n-4}$$

$$\delta''(b_t, p_5) = \begin{cases} \alpha^{t+2} \beta \alpha^{n-t-3}, & \text{ha} \quad 2 < t \leqq n-3 \\ \beta \alpha^{n-1}, & \text{ha} \quad t = n-2, \\ \alpha \beta \alpha^{n-2}, & \text{ha} \quad t = n-1, \\ \alpha^2 \beta \alpha^{n-3}, & \text{ha} \quad t = n. \end{cases}$$

6. *Lépés.* Legyen $p_6 = p_5 x_3$. Ekkor

$$\delta''(b_1, p_6) = a^5 b a^{n-6},$$

$$\delta''(b_2, p_6) = a^4 b a^{n-5},$$

$$\delta''(b_t, p_6) = \begin{cases} a^{t+3} b a^{n-t-4}, & \text{ha} \quad 2 < t < n-3, \\ b a^{n-1}, & \text{ha} \quad t = n-3, \\ a b a^{n-2}, & \text{ha} \quad t = n-2, \\ a^2 b a^{n-3}, & \text{ha} \quad t = n-1, \\ a^3 b a^{n-4}, & \text{ha} \quad t = n. \end{cases}$$

7. *Lépés.* Legyen $\bar{p} = p_6 x_1^{n-4}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, \bar{p}) = b_2, \quad \delta''(b_2, \bar{p}) = b_1,$$

$$\delta''(b_t, \bar{p}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

Ezzel megmutattuk, hogy a

$$\bar{q} = x_2 x_3 x_1^{n-2}, \quad \bar{p} = x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_3 x_1^{n-4}$$

választással a kívánt feltételek teljesülnek.

Mint már említettük, a 4.1. tétel alapján látható, hogy ha automaták egy K osztálya nem tesz eleget a 4.5. tételbeli (i)—(iii) feltételek egyikének sem, akkor alkalmas n természetes számra K az n-nél nem nagyobb súlyú szemirezet automaták osztálya. A 4.4. segédtétel értelmében K ekkor homomorfan nem teljes a ν_1^+-szorzatra, s így izomorfan sem. Mivel az l^+-szorzat fogalma a ν_1^+-szorzat fogalmának specializálásaként adódik, ugyanez érvényes az l^+-szorzatra is. Megfordítva, ha K

eleget tesz a 4.5. tételbeli (i)—(iii) feltételek valamelyikének, akkor K izomorfan (s így homomorfan is) S-teljes nemcsak az l^+-szorzatra, hanem a v_1^+-szorzatra is, hiszen minden l^+-szorzat egyben v_1^+-szorzat is. Ezen gondolatmenetünket összefoglalva adódik a

4.6. KÖVETKEZMÉNY (DÖMÖSI—ÉSIK [12]). *Automaták egy K osztályára ekvivalensek a következő állítások:*

(i) *K izomorfan S-teljes az l^+-szorzatra nézve,*
(ii) *K homomorfan S-teljes az l^+-szorzatra nézve,*
(iii) *K izomorfan S-teljes a v_1^+-szorzatra nézve,*
(iv) *K homomorfan S-teljes a v_1^+-szorzatra nézve,*
(v) *K-ra fennáll a* 4.5. *tétel* (i)—(iii) *feltételeinek valamelyike.*

4.3. v_i^+-szorzatok $(i>1)$

Ha $i>1$, akkor a következő tétel a v_i^+-szorzatra fennáll.

4.7. TÉTEL (DÖMÖSI—IMREH [16]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor izomorfan S-teljes a v_i^+-szorzatra nézve $(i>1)$, ha K tartalmaz olyan $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ automatát, melynek két különböző $a, b(\in A)$ állapotára és $p, q(\in X^+)$ bemenő szavára* $\delta(a, p)=b$ és $\delta(b, q)=a$.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőség igazolását vissza lehet vezetni a 4.5. tétel (ii) részének bizonyítására. Mi nem ezt az utat választjuk, hanem direkt módon igazoljuk tételünket. Tegyük fel tehát, hogy K eleget tesz a 4.7. tétel feltételeinek $\mathbf{A}\in K$ által. Legyen $n\geqq 3$ és tekintsük a $\mathbf{B}=\mathbf{A}^n(Z, \varphi, \gamma)$ v_2^+-szorzatot, ahol $Z=\{x_1, \dots, x_6\}$ és a γ, φ a következőképp vannak definiálva: valamely $t\in\{0, \dots, n-1\}$-re

$$\gamma(t)=\{t-1, t\}, \quad \text{ha} \quad t>0 \quad \text{és} \quad \gamma(0)=\{n-1, 0\}.$$

Ezenkívül, rendre legyen

$$\varphi_t(a, a, x_1)=pq, \quad \varphi_t(a, b, x_1)=q, \quad \varphi_t(b, a, x_1)=p,$$

$$\varphi_0(a, a, x_2)=\varphi_0(b, a, x_2)=p, \quad \varphi_0(a, b, x_2)=q,$$

$$\varphi_1(a, a, x_2)=pq, \quad \varphi_1(a, b, x_2)=q,$$

$$\varphi_1(b, a, x_2)=p, \quad \varphi_t(u, v, x_2)=\begin{cases} pq, & \text{ha} \quad v=a, \\ qp, & \text{ha} \quad v=b, \end{cases} \quad (t=2, \dots, n-1),$$

$$\varphi_t(u, v, x_3)=\begin{cases} pq, & \text{ha} \quad v=a, \\ qp, & \text{ha} \quad v=b, \end{cases} \quad (t=0, 1),$$

$$\varphi_t(u, v, x_3)=\begin{cases} p, & \text{ha} \quad u=b, \quad v=a, \\ pq, & \text{ha} \quad u=a, \quad v=a, \\ qp, & \text{ha} \quad v\neq a, \end{cases} \quad (t=2, \dots, n-1),$$

$$\varphi_0(a, a, x_4) = \varphi_0(b, a, x_4) = pq, \quad \varphi_0(a, b, x_4) = qp,$$

$$\varphi_0(b, b, x_4) = q,$$

$$\varphi_t(u, v, x_4) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad v = a, \\ qp, & \text{ha} \quad v = b, \end{cases} \quad (t = 1, \ldots, n-1),$$

$$\varphi_t(u, v, x_5) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad v = a, \\ qp, & \text{ha} \quad v = b, \end{cases} \quad (t = 0, 1),$$

$$\varphi_t(u, v, x_5) = \begin{cases} q, & \text{ha} \quad u = v = b, \\ qp, & \text{ha} \quad u = a, \quad v = b, \\ pq, & \text{ha} \quad v = a, \end{cases} \quad (t = 2, \ldots, n-1),$$

$$\varphi_0(a, a, x_6) = \varphi_0(b, a, x_6) = p, \quad \varphi_0(a, b, x_6) = qp,$$

$$\varphi_1(a, a, x_6) = \varphi_1(b, a, x_6) = pq, \quad \varphi_1(a, b, x_6) = q,$$

$$\varphi_t(u, v, x_6) = \begin{cases} pq, & \text{ha} \quad v = a, \\ qp, & \text{ha} \quad v = b \end{cases} \quad (t = 2, \ldots, n-1).$$

A többi esetben $\varphi_t(u, v, x_j)$ legyen tetszőlegesen rögzített $\{p, q\}^+$-beli elem.

Legyen $t_1 \in T_n$-re $t_1(k) = k+1$, ha $k < n-1$ és $t_1(n-1) = 0$. Ismeretes, hogy $\{t_1, t_2, s\}$ generálja T_n-t. Így a 4.5. tételnél alkalmazott módon olyan $p, q, r \in Z^+$ szavakat kell konstruálnunk, melyekre alkalmas $h_1\colon A' \to [n]$ $(A' \subseteq A^n)$, $h_2\colon \{t_1, t_2, s\} \to Z^+$ mellett $h_2(t_1) = \bar{p}$, $h_2(t_2) = \bar{q}$, $h_2(s) = \bar{r}$, továbbá tetszőleges $b \in A'$ és $t \in \{t_1, t_2, s\}$ mellett

$$h_1(\delta''(b, h_2(t))) = t(h_1(b))$$

(ahol δ'' a **B** általánosított v_1-hatvány átmeneti függvényét jelöli).

Rögtön látható, hogy $\bar{p} = x_1 (= h_2(t_1))$ esetén

$$\delta''(a^t b a^{n-t-1}, \bar{p}) = \begin{cases} a^{t+1} b a^{n-t-2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq t < n-1, \\ b a^{n-1}, & \text{ha} \quad t = n-1. \end{cases}$$

Így $\bar{p}$ eleget tesz a megkövetelt feltételeknek (az A'-beli elemek jelölésére megtartjuk a 4.5. tétel bizonyításánál alkalmazott konvenciókat).

Most $\bar{q}$-t fogjuk definiálni.

1. *Lépés.* Legyen $q_1 = x_2$. Ekkor

$$\delta''(b_1, q_1) = b_2, \quad \delta''(b_2, q_1) = b_1,$$

$$\delta''(b_t, q_1) = b a^{t-2} b a^{n-t}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

2. *Lépés.* Legyen $q_2 = q_1 x_3^{n-3}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, q_2) = a b^{n-2} a, \quad \delta''(b_2, q_2) = b a^{n-1} \quad (= b_1),$$

$$\delta''(b_t, q_2) = b a^{t-2} b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

3. *Lépés*. Legyen $q_3 = q_2 x_4$. Ekkor

$$\delta''(b_1, q_3) = ab^{n-2}a, \quad \delta''(b_2, q_3) = ba^{n-1} \quad (= b_1),$$
$$\delta''(b_t, q_3) = a^{t-1}b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

4. *Lépés*. Legyen $\bar{q} = q_3 x_5$. Ekkor

$$\delta''(b_1, \bar{q}) = b_2, \quad \delta''(b_2, \bar{q}) = b_1,$$
$$\delta''(b_t, \bar{q}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

Látható, hogy $\bar{q} = x_2 x_3^{n-3} x_4 x_5$ eleget tesz a kívánt követelményeknek. Az $\bar{r} = h_2(s)$ szó megkonstruálása van még hátra.

1. *Lépés*. $r_1 = x_6$. Ekkor

$$\delta''(b_1, r_1) = ba^{n-1}, \quad \delta''(b_2, r_1) = ba^{n-1},$$
$$\delta''(b_t, r_1) = ba^{t-2}ba^{n-t}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

2. *Lépés*. $r_2 = r_1 x_3^{n-3}$. Ekkor

$$\delta''(b_1, r_2) = ba^{n-1}, \quad \delta''(b_2, r_1) = ba^{n-1},$$
$$\delta''(b_t, r_2) = ba^{t-2}b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

3. *Lépés*. $r_3 = r_2 x_4$. Ekkor

$$\delta''(b_1, r_3) = ba^{n-1}, \quad \delta''(b_2, r_2) = ba^{n-1},$$
$$\delta''(b_t, r_3) = a^{t-1}b^{n-t+1}, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

4. *Lépés*. $\bar{r} = r_3 x_5$. Ekkor

$$\delta''(b_1, \bar{r}) = b_1, \quad \delta''(b_2, \bar{r}) = b_1,$$
$$\delta''(b_t, \bar{r}) = b_t, \quad \text{ha} \quad 2 < t \leqq n.$$

Látható, hogy $\bar{r} = x_6 x_3^{n-3} x_4 x_5$ is eleget tesz a kívánt követelményeknek.

4.4. v_i^+-szorzatcsalád, v_i^*-szorzatcsalád, homomorf és izomorf szimuláció

Könnyen igazolható, hogy ha K az erősen monoton automaták osztálya, akkor K^+ is az. Az 1.14. tétel alkalmazásával ekkor azt nyerjük, hogy $\mathbf{HSP}_g(K^+) = \mathbf{HSP}_{v_1}(K^+)$. Mivel $\mathbf{HSP}_g(K^+) = \mathbf{HSP}_g^+(K)$ és $\mathbf{HSP}_{v_1}(K^+) = \mathbf{HSP}_{v_1}^+(K)$ tetszőleges K automataosztályra fennáll, ez egyben azt is jelenti, hogy $\mathbf{HSP}_g^+(K) = \mathbf{HSP}_{v_1}^+(K)$ teljesül az erősen monoton automaták minden K osztályára. Ebből viszont (tekintettel arra, hogy $\mathbf{HS^*HS}(K) = \mathbf{HS^*}(K)$ minden K automataosztályra fennáll) azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{HS^*P}_g^+(K) = \mathbf{HS^*P}_{v_i}^+(K) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

teljesül, ha K erősen monoton automatákból áll. (Megjegyezzük, hogy ekkor $\mathbf{HS^*P}_g^+(K)$ már csak akkor részosztálya az erősen monoton automatáknak, ha K diszkrét automatákból áll.)

Ha K monoton automaták egy olyan osztálya, melynek nem minden tagja erősen monoton, akkor $\mathbf{E} \in \mathbf{I}(K^+)$ nyilvánvalóan teljesül. Az 1.15., 3.5. és 3.8. tételek szerint ekkor

$$\mathbf{IS^*P}_{v_2} I(K^+) = \mathbf{HSP}_{v_2} I(K^+) = \mathbf{HS^*P}^*_g(K)$$

$\big($azaz $\mathbf{IS^*P}^+_{v_2}(K) = \mathbf{HSP}^+_{v_2}(K) = \mathbf{HS^*P}^*_g(K)\big)$ az összes monoton automaták osztálya. Ekkor tehát $\mathbf{IS^*P}^+_{v_i}(K) = \mathbf{HS^*P}^*_g(K)$ minden $i \geq 2$ mellett teljesül, amiből természetesen ($i \geq 2$ mellett) $\mathbf{IS^*P}^*_g(K) = \mathbf{IS^*P}^+_{v_i}(K)$ is következik.

A 3.12. tétel szerint $\mathbf{HS^*P}^*_{v_1}(\{\mathbf{E}\})$ nem tartalmaz minden monoton automatát, azaz $\mathbf{HS^*P}^*_{v_1}(\{\mathbf{E}\}) \subset \mathbf{IS^*P}^+_g(\{\mathbf{E}\})$. Végül, az 1.12. és 4.7. tétel értelmében $\mathbf{IS^*P}^*_g(K) = \mathbf{IS^*P}^+_{v_i}(K)$ akkor is fennáll, ha $i \geq 2$ és K tartalmaz nem-monoton automatát. Vegyük észre, hogy ha K monoton automaták egy olyan osztálya, mely tartalmaz nem diszkrét automatát, akkor $\mathbf{E} \in \mathbf{I}(K^*)$. Ugyenekkor, diszkrét automaták tetszőleges K osztályára $\mathbf{HS^*P}^*_g(K) = \mathbf{ISP}_q(K)$ (ahol $\mathbf{P}_q$ a kvázidirekt szorzás operátora). Így gondolatmenetünket a következő állításokban foglalhatjuk össze:

4.8. KÖVETKEZMÉNY. *Homomorf szimuláció szempontjából a v_i^+-szorzat ekvivalens a g^+-szorzattal akkor és csak akkor, ha $i > 1$.*

4.9. KÖVETKEZMÉNY. *Homomorf és izomorf szimuláció szempontjából a v_i^*-szorzat ekvivalens a g^*-szorzattal akkor és csak akkor, ha $i > 1$.*

Így azt kaptuk, hogy a v_i^+-szorzatcsalád nem alkot valódi hierarchiát a homomorf szimulációra nézve. Nyitott kérdés marad, hogy a v_i^+-szorzatcsalád az izomorf szimulációra nézve valódi hierarchiát alkot-e vagy sem.

Az általánosított v_i-szorzatcsaládra viszont a következő eredményeket nyertük:

4.10. KÖVETKEZMÉNY. *Az általánosított v_i-szorzatcsalád nem alkot valódi hierarchiát sem a homomorf szimulációra, sem pedig az izomorf szimulációra nézve. Speciálisan, van olyan $k(=2)$ nemnegatív egész, hogy ha $i \geq k$, akkor homomorf és izomorf szimuláció szempontjából az általánosított v_i-szorzat ekvivalens az általánosított Gluskov-szorzattal.*

5. Temporális kompozíciók

Ebben a fejezetben alapvető szerepet játszik a következő fogalom.

Legyenek $\mathbf{A}_t = (A, X_t, \delta_t)$ $(t = 1, 2)$ közös állapothalmazzal rendelkező automaták. Legyen továbbá $\varphi\colon X \to X_1 \times X_2$ egy nem üres és véges X halmaznak $X_1 \times X_2$-be történő tetszőleges leképezése. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát az $\mathbf{A}_1$-nek $\mathbf{A}_2$-vel való *temporális szorzatának* $\big($IVANOV [41], GÉCSEG [31]$\big)$ hívjuk az X halmazra és a φ leképezésre nézve, ha tetszőleges $a (\in A)$, $x (\in X)$ pár esetén fennáll

$$\varphi(x) = (x_1, x_2) \quad (\in X_1 \times X_2)$$

mellett a

$$\delta(a, x) = \delta_2(\delta_1(a, x_1), x_2)$$

összefüggés. Ha $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$-t a $\mathbf{B}$ automata *temporális hatványának* nevezzük. A temporális szorzat fogalmát természetes módon általánosítjuk tetszőleges véges számú tényező esetére. Könnyen igazolható, hogy a temporális szorzat képzése asszociatív. A temporális szorzatra használni fogjuk a T-szorzat elnevezést is, s tetszőleges K automataosztályra jelölje $\mathbf{T}(K)$ az összes K-beli tényezőkből felépíthető temporális szorzatok osztályát. A $\mathbf{T}$ operátor felhasználásával definiáljuk a következő fogalmakat.

Értsük β-szorzat alatt ismét a *Gluskov-szorzat*, avagy annak tárgyalt speciális esetei valamelyikét. Akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata előáll K-beli automaták *T_β-szorzataként*, ha $\mathbf{A} \in \mathbf{STIP}_\beta(K)$. Az $\mathbf{STIP}_\beta$ operátorra használni fogjuk a $\mathbf{T}_\beta$ rövidítést is, azaz legyen tetszőleges K automataosztályra definíció szerint $\mathbf{T}_\beta(K) = \mathbf{STIP}_\beta(K)$. K-t *izomorfan (homomorfan) teljesnek* nevezzük a T_β-szorzatra nézve, ha $\mathbf{T}_\beta(K)(\mathbf{HT}_\beta(K))$ az összes automaták osztálya. (Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{IST}_\beta(K) = \mathbf{T}_\beta(K)$, illetve $\mathbf{HST}_\beta(K) = \mathbf{HT}_\beta(K)$ definíció szerint teljesül tetszőleges K automataosztályra.)

Fejezetünkben a $\mathbf{T}_g$, $\mathbf{T}_{\alpha_i}$ $(i=0, 1, \ldots)$, illetve $\mathbf{T}_{\nu_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$ operátorokkal kapcsolatban végzünk vizsgálatokat. Látni fogjuk, hogy a T_g-szorzatra, T_{α_i}-szorzatokra $(i=0, 1, \ldots)$ és T_{ν_i}-szorzatokra $(i=1, 2, \ldots)$ nézve izomorfan és homomorfan teljes osztályok egybeesnek. Azt is ki fogjuk mutatni, hogy ezen teljes osztályok végesek. Az alkalmazott operátorok erejét az is mutatja, hogy α_0-szorzat helyett kvázidirekt szorzat, $i > 1$ esetén pedig α_i-szorzat vagy ν_i-szorzat (vagy akár *Gluskov-szorzat*) helyett egytényezős *Gluskov-szorzatok* kvázidirekt szorzata tekinthető. Ez egyben azt is jelenti, hogy tetszőleges K automataosztálya és $i > 0$ egészre $\mathbf{T}_g(K) = \mathbf{T}_{\alpha_i}(K)$, továbbá $\mathbf{T}_g(K) = \mathbf{T}_{\nu_i}(K)$.

5.1. A T_{α_0}-szorzat és a T_q-szorzat

A következő állítások nyilvánvalóak.

5.1. SEGÉDTÉTEL. *Érvényesek az alábbi összefüggések.*
(i) *Autonóm automaták T_{α_0}-szorzata is autonóm automata.*
(ii) *Permutáció automaták T_{α_0}-szorzata is permutáció automata.*
(iii) *Beállító automaták T_{α_0}-szorzata is beállító automata.*

Adott $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata esetén definiáljuk minden $x (\in X)$ mellett az $\mathbf{A}_x = (A, \{x_0, x\}, \delta_x)$ automatát oly módon, hogy $x_0 \notin X$ tetszőleges szimbólum, továbbá minden $a (\in A)$-ra $\delta_x(a, x_0) = a$ és $\delta_x(a, x) = \delta(a, x)$. Érvényes a következő

5.2. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Legyen K automaták valamely osztálya, s legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ egy automata. Tegyük fel, hogy alkalmas* $\mathbf{B} \in K$ *esetén* $\mathbf{A}_x \in \mathbf{ST}(\{\mathbf{B}\})$ *minden* $x (\in X)$*-re fennáll. Ekkor* $\mathbf{A} \in \mathbf{ST}(K)$ *is igaz.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} \in K$, továbbá legyen minden $x (\in X)$-re

$$M_x = (M, \{x_0, x\}, \delta'_x) \in \mathbf{T}(\{\mathbf{B}\})$$

egy olyan automata, melynek $\mathbf{A}_x$ részautomatája. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ az X elemeinek egy felsorolása, s képezzük az $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{x_1} \times \ldots \times \mathbf{M}_{x_n}(X, \varphi)$ temporális szorzatot úgy, hogy minden $x_t \in X$-re

$$\varphi(x_t) = (z_1^{x_t}, \ldots, z_n^{x_t}), \quad \text{ahol is} \quad z_1^{x_t} = \ldots = z_{t-1}^{x_t} = z_{t+1}^{x_t} = \ldots = z_n^{x_t} = x_0 \quad \text{és} \quad z_t^{x_t} = x_t.$$

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{M}$ temporális szorzatnak $\mathbf{A}$ részautomatája. □

5.3. SEGÉDTÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Legyen K automaták egy olyan osztálya, hogy alkalmas (nem feltétlen különböző) $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)\in K$ $(t=1,2)$ automata-párra teljesülnek a következő feltételek:*

(i) *található olyan $a(\in A_1)$, $x(\in X_1)$ pár, hogy $a\neq\delta_1(a,x)$;*

(ii) *megfelelően választott $a_1, a_2(\in A_2)$, $y(\in X_2)$ hármas esetén $a_1\neq a_2$ és $\delta_2(a_1,y)\neq\delta_2(a_2,y)$.*

Ekkor minden m természetes számhoz megadható olyan $\mathbf{N}=(N,X,\delta)\in\mathbf{P}_q(K)$ automata, s olyan $B_1,\dots,B_{2m}\subset N$ páronként diszjunkt halmazok, hogy alkalmas (nem feltétlen páronként különböző) $y_1, y_2, x_1, \dots, x_s(\in X, s\geq 1)$ mellett

$$B_t=\{b_t, \delta(b_t,y_1), \delta(b_t,y_2)\},\quad b_t\notin\{\delta(b_t,y_1), \delta(b_t,y_2)\},$$

$$B_{m+t}=\{b_{m+t}, b_{m+t}^{(1)},\dots,b_{m+t}^{(s)}\},\quad \delta(b_{m+t}^{(k)},x_k)=b_{m+t}\quad (k=1,\dots,s),$$

$$b_{m+t}\notin\{b_{m+t}^{(1)},\dots,b_{m+t}^{(s)}\}\quad (t=1,\dots,m).$$

Speciálisan, feltételezhető, hogy

(i1) *ha K tartalmaz nemautonóm automatát, akkor minden $t(=1,\dots,m)$ mellett*

$$\delta(b_t,y_1)\neq\delta(b_t,y_2)\quad (s \text{ így } y_1\neq y_2);$$

(ii1) *ha K tartalmaz nem permutáció automatát, akkor $y_2=x_1=\dots=x_s$ és $s=m+1$ mellett $|B_{m+t}|=m+2$ $(t=1,\dots,m)$;*

(iii1) *ha K permutáció automaták olyan osztálya, mely tartalmaz nemautonóm automatát, akkor*

$$s=2,\quad x_1=y_1,\quad x_2=y_2,\quad x_1\neq x_2,\quad |B_{m+t}|=3\quad (t=1,\dots,m).$$

Bizonyítás. Alkalmas $\mathbf{D}_0,\dots,\mathbf{D}_{r-1}\in K$ mellett alkossuk meg az $\mathbf{N}=(N,X,\delta)=\mathbf{D}_0\times\dots\times\mathbf{D}_{r-1}(X,\varphi)$ kvázidirekt szorzatot, melyről egyelőre csak annyit kössünk ki, hogy a később definiált tulajdonságokhoz az r természetes számot elég nagyra választottuk.

Először azt bizonyítjuk, hogy $\mathbf{N}$ alkalmas választásával léteznek olyan páronként diszjunkt $B_1,\dots,B_{2m}\subset N$ halmazok, hogy (esetleg $y_1=y_2$ és $s=1$ mellett)

$$b_t\notin\{\delta(b_t,y_1), \delta(b_t,y_2)\},\quad \delta(b_{m+t}^{(k)},x_k)=b_{m+t},$$

$$b_{m+t}\notin\{b_{m+t}^{(1)},\dots,b_{m+t}^{(s)}\}\quad (1\leq t\leq m,\ 1\leq k\leq s)$$

fennállnak.

Legyen $\mathbf{D}_0=\mathbf{A}_1$ és minden $x'\in X$-re $\varphi_0(x')=x$. Ekkor tetszőleges N-beli $(a,d_1,\dots,d_{r-1})$ és $x'(\in X)$ esetén $\delta((a,d_1,\dots,d_{r-1}),x')$ egy olyan $(d_0',\dots,d_{r-1}')(\in N)$ állapotvektor lesz, melyre $d_0'=\delta_1(a,x)$. Így feltételezve, hogy minden

$$b'\in\{b_u\}\cup(B_{m+u}-\{b_{m+u}\})\quad (1\leq u\leq m),\quad b''\in(B_v-\{b_v\})\cup\{b_{m+v}\}\quad (1\leq v\leq m)$$

párra a b' állapotvektor első komponense a-val, míg a b'' állapotvektor első komponense $\delta_1(a,x)$-szel egyezik meg, azt kapjuk, hogy $b'\neq b''$. Ez a feltételezés $\mathbf{D}_0=\mathbf{A}_1$ és $\varphi_0(x')=x$ $(x'\in X)$ miatt nem vezet ellentmondáshoz akkor sem, ha kikötjük ($u=v$ és $b', b''\in B_u$, avagy $b', b''\in B_{m+u}$ mellett), hogy alkalmas $x'\in X$-re $\delta(b',x')=b''$.

Azt kaptuk tehát, hogy ha $\mathbf{N}$-t megfelelő módon választjuk, alkalmas $B_1,\dots,B_{2m}\subset N$ mellett akárhogy is adjuk meg az $x'\in X$, u, v $(1\leq u, v\leq m)$ hármast, a $\{b_u, b_{m+v}^{(1)},\dots,b_{m+v}^{(s)}\}$ és a $\{\delta(b_u,x'), \delta(b_{m+v}^{(1)},x'),\dots,\delta(b_{m+v}^{(s)},x')\}$ halmazok diszjunktak. (Speciálisan, akkor is, ha $u=v$.) Így a $B_1, \ldots, B_{2m}$ halmazokra tett kikötések (esetleg $y_1=y_2$ és $s=1$ mellett) teljesülnek, ha bebizonyítjuk, hogy alkalmas választással páronként diszjunktak lesznek.

Legyen ezután valamely $1 \leqq u < v \leqq 2m$ mellett $b' \in B_u$, $b'' \in B_v$ és tegyük fel, hogy mind b', mind pedig b'' első komponense a-val megegyezik. Így ha $1 \leqq u, v \leqq m$, akkor $b'=b_u$, $b''=b_v$, ha $m+1 \leqq u, v \leqq 2m$, akkor $b' \neq b_u$, $b'' \neq b_v$, ha pedig $1 \leqq u \leqq m$ és $m+1 \leqq v \leqq 2m$, akkor $b'=b_u$ és $b'' \neq b_v$. Ekkor létezzék olyan t, hogy $1 \leqq t \leqq r-1$ mellett $\mathbf{D}_t=\mathbf{A}_2$, és ha a b' állapotvektor $(t+1)$-edik komponensét d_t, a b'' állapotvektor $(t+1)$-edik komponensét pedig d_t' jelöli, akkor $\{d_t, d_t'\}= =\{a_1, a_2\}$. Az (ii) értelmében ekkor $b' \neq b''$ szükségképp teljesül. Legyen ráadásul tetszőleges $x'(\in X)$-re $\varphi_t(x')=y$. Így akárhogyan is adjuk meg az $x', y'(\in X)$ párt, $\delta(b', x') \neq \delta(b'', y')$.

Mivel a később tárgyalásra kerülő (i1)—(iii1) speciális esetektől eltekintve nem kötöttük ki $s>1$ teljesülését, a $\delta(b', x') \neq \delta(b', y')$ $(x', y' \in X', x' \neq y')$ feltételezés (esetleg $s=1$ mellett) sem mond ellent a $B_1, \ldots, b_{2m}(\subset N)$ halmazok szerkezetére tett kikötéseinknek. Az sem jelent problémát, ha valamely $t(=1, \ldots, m)$-re $\delta(b_t, y_1)= =\delta(b_t, y_2)$, hiszen ekkor $y_1=y_2$ választással jutunk a kívánt tulajdonságú halmazokhoz.

Tekintettel arra, hogy $1 \leqq u < v \leqq 2m$ mellett az összes számba vehető $b' \in B_u$, $b'' \in B_v$ eshetőségre $b' \neq b''$, ezzel kimutattuk, hogy (eltekintve az ezután tárgyalandó (i1)—(iii1) esetektől) a $B_1, \ldots, B_{2m}(\subset N)$ halmazok a kívánt módon megszerkeszthetőek.

Tegyük fel, hogy K tartalmaz nemautonóm automatát, azaz alkalmas $\mathbf{A}_3=(A_3, X_3, \delta_3)$, $a(\in A)$, $x, y(\in X_3)$ esetén $\delta_3(a, x) \neq \delta_3(a, y)$. Ekkor legyen $y_1, y_2(\in X)$ úgy megadva, hogy $y_1 \neq y_2$ és valamely $t(=1, \ldots, r-1)$-re $\mathbf{D}_t=\mathbf{A}_3$ mellett álljon fenn $\varphi_t(y_1)=x$, $\varphi_t(y_2)=y$. Ha minden b_t $(t=1, \ldots, m)$ állapotvektor t-edik komponense az $a(\in A_3)$ állapottal megegyezik, a $\mathbf{B}_t$-beli állapotvektorokra tett korábbi kikötéseinket figyelembe véve az (i1) feltételek teljesíthetőek.

Ha K tartalmaz egy $\mathbf{A}_4=(A_4, X_4, \delta_4)$ nem permutáció automatát, úgy létezik egy $a_1, a_2(\in A_4)$, $x(\in X_4)$ hármas, melyre $a_1 \neq a_2$ és $\delta(a_1, x)=\delta(a_2, x)$.

Ekkor minden $b_{m+t}^{(u)}, b_{m+t}^{(v)}(\in B_{m+t}$, $1 \leqq t \leqq m$, $1 \leqq u < v \leqq m+1)$ párhoz legyen található olyan $z(=1, \ldots, r-1)$, hogy $\mathbf{D}_z=\mathbf{A}_4$ és ha d_z a $b_{m+t}^{(u)}$, d_z' pedig a $b_{m+t}^{(v)}$ állapotvektor $(z+1)$-edik komponensét jelöli, akkor $\{d_z, d_z'\}=\{a_1, a_2\}$. Ezzel biztosítjuk $b_{m+t}^{(u)} \neq b_{m+t}^{(v)}$ teljesülését, és ha minden $x'(\in X)$-re $\varphi_z(x')=x$, úgy nem kerültünk ellentmondásba a $\delta(b_{m+t}^{(u)}, x_u)=\delta(b_{m+t}^{(v)}, x_v)=b_{m+t}$ (és az $y_2=x_u=x_v$) feltételezéssel. Az (ii1) tehát teljesíthető.

Tegyük fel végül, hogy K a permutáció automaták olyan osztálya, melyre alkalmas $\mathbf{A}_5=(A_5, X_5, \delta_5)(\in K)$ nemautonóm, azaz van olyan $a(\in A_5)$, $x, y(\in X_5)$ hármas, hogy $\delta_5(a, x) \neq \delta_5(a, y)$. Ekkor alkalmas k, l természetes számpárra $\delta_5(a, x^k)= =\delta_5(a, y^l)=a$. Így szükségképp található olyan t természetes szám, hogy $t \leqq k, l$ és $\delta_5(a, x^{k-t}) \neq \delta_5(a, y^{l-t})$ és $\delta_5(a, x^{k-t+1})=\delta_5(a, y^{l-t+1})$. Ez egyben azt is jelenti, hogy megfelelő $a_1, a_2(\in A_5)$-re $a_1 \neq a_2$ és $\delta_5(a_1, x)=\delta_5(a_2, y)$.

Minden $b_{m+t}^{(1)}, b_{m+t}^{(2)}(\in B_{m+t}$, $1 \leqq t \leqq m)$ párhoz legyen valamely $z(=1, \ldots, r-1)$ esetén $\mathbf{D}_z=\mathbf{A}_5$ és ha d_z a $b_{m+t}^{(1)}$, d_z' pedig a $b_{m+t}^{(2)}$ állapotvektor $(z+1)$-edik tényezőjét jelöli, úgy legyen $\{d_z, d_z'\}=\{a_1, a_2\}$. Ekkor a $\varphi_z(x_1)=x$, $\varphi_z(x_2)=y$ választással elérhető, hogy $b_{m+t}^{(1)} \neq b_{m+t}^{(2)}$ mellett $\delta(b_{m+t}^{(1)}, x_1)$ és $\delta(b_{m+t}^{(2)}, x_2)$ állapotvektorok $(z+1)$-edik tényezői megegyezzenek. Ha kikötjük még, hogy minden olyan $w(=1, \ldots, r-1)$-re, melyre a $b_{m+t}^{(1)}$ állapotvektor $(w+1)$-edik d_w és $b_{m+t}^{(2)}$ állapotvektor

$(w+1)$-edik d'_w komponense különböző, $\mathbf{D}_w=\mathbf{A}_5$ mellett $\varphi_w(x_1)=x$, $\varphi_w(x_2)=y$ és $\{d_w, d'_w\}=\{a_1, a_2\}$ teljesüljön, úgy az (iii1)-beli $\delta(b^{(1)}_{m+t}, x_1)\neq\delta(b^{(2)}_{m+t}, x_2)$ feltétel is teljesíthető. Végül az (iii1)-beli $x_1=y_1$ és $x_2=y_2$ feltétel fennállásához legyen valamely (nem feltétlenül w-től különböző) $v(=1, ..., r-1)$-re $\mathbf{D}_v=\mathbf{A}_5$, $\varphi_u(y_1)=x$, $\varphi_u(y_2)=y$ és minden b_t $(t=1, ..., m)$ állapot $(u+1)$-edik komponense egyezzék meg egy olyan $a\in A_5$ állapottal, melyre $\delta_5(a, x)\neq\delta_5(a, y)$. Látható, hogy ekkor $x_1=y_1$ és $x_2=y_2$ feltételezhető. □

Érvényes a következő

5.4. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor izomorfan teljes a T_{α_0}-szorzatra nézve, ha K tartalmaz a következő tulajdonságokkal rendelkező (nem feltétlen páronként különböző) $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ $(t=1, 2, 3)$ automatákat:*

(i) *létezik olyan $a(\in A_1)$, $x, y(\in X_1)$ hármas, hogy $\delta_1(a, x)\neq\delta_1(a, y)$;*

(ii) *található olyan $a_1, a_2(\in A_2)$, $x(\in X_2)$ hármas, melyre $a_1\neq a_2$ és $\delta_2(a_1, x)=$ $=\delta_2(a_2, x)$;*

(iii) *megfelelően választott $a_1, a_2(\in A_3)$, $x(\in X_3)$ hármas esetén $a_1\neq a_2$ és $\delta_3(a_1, x)\neq$ $\neq\delta_3(a_2, x)$.*

Bizonyítás. Ha K nem tartalmaz olyan automatát, mely az (i) feltételt kielégíti, úgy K az autonóm automaták egy osztálya. Amennyiben az (ii) feltétel nem teljesül egyetlen K-beli automatára sem, úgy K a permutáció automaták egy osztálya. Végül, ha egyetlen K-beli automata sem tesz eleget az (iii) feltételnek, akkor K a beállító automaták egy osztálya. Az 5.1. segédtétel értelmében tehát feltételeink szükségesek.

Az elegendőséghez azt fogjuk megmutatni, hogy ha K eleget tesz a tételbeli feltételeknek, akkor K izomorfan teljes a T_q-szorzatra nézve is. Ehhez az 5.2. segédtétel értelmében azt kell csak kimutatnunk, hogy a tételbeli feltételek teljesülése mellett tetszőlegesen rögzített A nem üres és véges halmazhoz van olyan $\mathbf{N}\in\mathbf{P}_q(K)$, hogy minden olyan $\mathbf{A}=(A, \{y_1, y_2\}, \delta_\mathbf{A})$ automata esetén, melyre $\delta_\mathbf{A}(a, y_1)=a$ $(a\in A)$, fennáll az $\mathbf{A}\in STI(\{\mathbf{N}\})$ összefüggés. Tekintsük tehát az $\mathbf{A}$ automatát és állapotainak egy $a_1, .., a_m$ felsorolását.

Az (i) feltételből következik az 5.3. segédtétel (i) feltétele, az (iii) feltétel pedig ugyanazt jelenti, mint az 5.3. segédtétel (ii) feltétele. Az (i) feltétel szerint K tartalmaz nem autonóm automatát, az (ii) feltétel szerint pedig K tartalmaz nem permutáció automatát. Így az 5.3. segédtételben szereplő (i1)-beli és (ii1)-beli összefüggések is teljesülnek. Ezt felhasználva képezzünk az 5.3. segédtételbeli $\mathbf{N}=(N, \{y_1, y_2\}, \delta)$ automatához egy olyan $h\colon N\to N$ bijektív leképezést, hogy tetszőleges $t(=1, ..., m)$ esetén

$$h^{-1}(b_t) = b_{m+t}, \quad h^{-1}(\delta(b_t, y_1))\in B_{m+t}-\{b_{m+t}\},$$

valamint

$$h^{-1}(\delta(b_t, y_2))\in B_{m+l}-\{b_{m+l}\}, \quad \text{ha} \quad \delta_\mathbf{A}(a_t, y_2) = a_l \quad (1 \leqq l \leqq m).$$

Legyen ezután $\mathbf{N}'=(N, \{y_1, y_2\}, \delta')$ egy olyan ($\mathbf{N}$-nel izomorf) automata, melyre tetszőleges $b\in N$, $x\in\{y_1, y_2\}$ esetén $\delta'(h(b), x)=h(\delta(b, x))$. Alkossuk meg az $\mathbf{M}=(N, \{y_1, y_2\}, \delta_\mathbf{M})=\mathbf{N}\times\mathbf{N}'(\{y_1, y_2\}, \varphi)$ temporális szorzatot úgy, hogy

$\varphi(y_1)=(y_1, y_1)$ és $\varphi(y_2)=(y_2, y_2)$. Ekkor rögzített $t(=1, \ldots, m)$ mellett $(\delta_A(a_t, y_2)= =a_l$ esetén)

$$\delta_M(b_t, y_2) = \delta'(\delta(b_t, y_2), y_2) = \delta'(h(b'_{m+l}), y_2) = h(\delta(b'_{m+l}, y_2)) = h(b_{m+l}) = b_l,$$

ahol

$$b'_{m+l} \in B_{m+l} - \{b_{m+l}\}.$$

Hasonlóan,

$$\delta_M(b_t, y_1) = \delta'(\delta(b_t, y_1), y_1) = \delta'(h(b'_{m+t}), y_1) = h(\delta(b'_{m+t}, y_1)) = h(b_{m+t}) = b_t,$$

ahol

$$b'_{m+t} \in B_{m+t} - \{b_{m+t}\}.$$

Rögtön látható, hogy a $g(a_t)=b_t$ $(t=1, \ldots, m)$ összefüggéssel definiált $g\colon A \to N$ leképezés az **A** automata egy izomorfizmusát szolgáltatja **M**-be, azaz $\mathbf{A} \in \mathbf{STI}(\{\mathbf{N}\})$. □

Az 5.4. tétel bizonyítása során igazoltuk a következő állítást is.

5.5. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Ha automaták egy K osztálya izomorfan teljes a T_q-szorzatra nézve, akkor izomorfan teljes a T_{α_0}-szorzatra nézve is.*

Az 5.4. tétel bizonyítása során azt is láttuk, hogy ha K nem teljesíti az (i)—(iii) feltételek valamelyikét, akkor K vagy autonóm automaták egy osztálya, vagy a permutáció automaták egy osztálya, vagy pedig a beállító automaták egy osztálya. Mivel ezen automataosztályok a homomorfizmusra nézve zártak, az 5.1. segédtétel és az 5.4. tétel alkalmazásával adódik a következő

5.6. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Automaták egy K osztálya izomorfan teljes a T_{α_0} szorzatra nézve akkor és csak akkor, ha homomorfan teljes a T_{α_0}-szorzatra nézve.*

Most meg fogjuk adni tetszőleges K automataosztály esetén a $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)$ (illetőleg $\mathbf{T}_q(K)$) egy jellemzését. Ha egy-egy automataosztály (illetőleg annak valamely tagja) több speciális tulajdonsággal is rendelkezik, nem adunk újabb elnevezéseket, hanem a speciális tulajdonságokat egyszerűen felsoroljuk. (Ebben az értelemben beszélünk például — kissé helytelen szóhasználattal — monoton beállító automatákról, autonóm permutáció automatákról, illetve azok osztályairól.)

5.7. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Ha monoton beállító automaták egy K osztálya tartalmaz nem triviális (egynél nagyobb állapotszámú) automatát, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes monoton beállító automaták osztálya lesz. Ha K triviális (egyállapotú) automaták egy osztálya, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes triviális automaták egy osztálya.*

Bizonyítás. Könnyen igazolható, hogy ha **A** egy monoton nem triviális beállító automata, akkor minden monoton beállító **B** automatához található az **A**-nak olyan kvázidirekt hatványa, mely **B**-vel izomorf részautomatát tartalmaz. Az is könnyen igazolható, hogy a monoton beállító automaták osztálya zárt a *Gluskov-szorzásra* (s így az α_0-szorzásra), a homomorfizmusra (s így az izomorfizmusra) és a temporális szorzásra nézve. Így tételünkhöz azt kell még bebizonyítanunk, hogy ha K a triviális automaták egy osztálya, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes triviális automaták osztálya. Ez azonban nyilvánvaló. □

5.8. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Ha K az autonóm automaták egy olyan osztálya, melynek minden tagja permutáció automata, továbbá K tartalmaz egy legalább kétállapotú nem diszkrét automatát, úgy $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes autonóm permutáció automaták osztálya. Ha K diszkrét automaták egy olyan osztálya, mely tartalmaz nem triviális automatát, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes diszkrét automaták osztálya.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a diszkrét automaták tetszőleges K osztályára $\mathbf{T}_q(K)$ a diszkrét automaták egy olyan osztálya lesz, melyre $\mathbf{T}_q(K)=\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)$. Könynyen adódik az is, hogy ha K tartalmaz egy nem triviális diszkrét automatát, akkor $\mathbf{SIP}_q(K)$ tartalmazza az összes diszkrét automatát. A tétel második fele tehát érvényes.

Definíció szerint látható az is, hogy ha K egy autonóm permutáció automatákból álló osztály, akkor $\mathbf{T}_q(K)$ egy olyan autonóm permutáció automatákból álló osztály lesz, melyre $\mathbf{T}_q(K)=\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)$. Azt kell még igazolnunk, hogy ha K olyan autonóm permutáció automatákból áll, melyek legalább egyike nem diszkrét, akkor $\mathbf{T}_q(K)$ az összes autonóm permutáció automatákat tartalmazza. Vegyük észre, hogy ha K tartalmaz egy $\mathbf{D}$ nem diszkrét (autonóm) permutáció automatát, akkor $\mathbf{D}$ eleget tesz az 5.3. segédtétel (i) és (ii) feltételeinek. Ekkor tehát minden m pozitív egészhez megadható olyan $\mathbf{N}=(N, X, \delta')\in\mathbf{P}_q(K)$, továbbá megadhatóak olyan páronként diszjunkt $B_1, \ldots, B_{2m}\subset N$ halmazok, hogy alkalmas $x\in X$-re

$$B_t = \{b_t, \delta(b_t, x)\}, \quad B_{m+t} = \{b_{m+t}, \delta(b_{m+t}, x)\} \quad (t = 1, \ldots, m),$$

továbbá $|B_1|=\ldots=|B_{2m}|=2$. (Mivel $\mathbf{N}$ szükségképp autonóm, $s=1$ és $y_1=y_2=$ $=x_1=\ldots=x_s=x$ feltehető.)

Legyen $\mathbf{A}=(\{a_1, \ldots, a_m\}, X, \delta_{\mathbf{A}})$ tetszőleges (m állapotszámú) autonóm permutáció automata. Adjuk meg a $h\colon N\to N$ bijektív leképezést úgy, hogy $h(\delta'(b_{m+t}, x))=$ $=b_t$ $(1\leqq t\leqq m)$, továbbá $h(b_{m+l})=\delta'(b_t, x)$, ha $\delta(a_t, x)=a_l$ $(1\leqq l\leqq m,\ x\in X)$. (Ez utóbbi feltételezés nem vezet ellentmondáshoz, hiszen $\mathbf{A}$ autonóm permutáció automata.) Adjuk meg az ($\mathbf{N}$-nel izomorf) $\mathbf{N}'=(N, X, \delta'')$ automatát úgy, hogy tetszőleges $b'\in N$ mellett

$$\delta''(h(b'), x) = h(\delta'(b', x)) \quad (x\in X).$$

Tekintsük az $\mathbf{M}=(N, X, \delta_{\mathbf{M}})=\mathbf{N}\times\mathbf{N}'(X, \varphi)$ temporális szorzatot, ahol minden $x\in X$-re $\varphi(x)=(x, x)$. Rögtön látható, hogy $\delta_{\mathbf{A}}(a_t, x)=a_l$ $(1\leqq t\leqq m,\ x\in X)$ mellett

$$\delta_{\mathbf{M}}(b_t, x) = \delta''(\delta'(b_t, x), x) = \delta''(h(b_{m+l}), x) = h(\delta'(b_{m+l}, x)) = b_l.$$

Így nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ izomorfan beágyazható $\mathbf{M}$-be. $\mathbf{T}_q(K)$ tehát valóban tartalmaz minden monoton permutáció automatát. □

5.9. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Legyen K az autonóm automaták egy olyan osztálya, mely tartalmaz olyan (nem feltétlen különböző) $\mathbf{A}_t=(A_t, X_t, \delta_t)$ $(t=1, 2)$ automatákat, hogy*

(i) *alkalmas $a_1, a_2(\in A_1)$ párra $a_1\neq a_2$ mellett $\delta_1(a_1, x)=\delta_1(a_2, x)$ $(x\in X)$,*

(ii) *megfelelően választott $a_1, a_2(\in A_2)$ párra $a_1\neq a_2$ mellett*

$$\delta_2(a_1, x) \neq \delta_2(a_2, x) \quad (x\in X).$$

Ekkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes autonóm automaták osztálya.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ tetszőleges autonóm automata. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbf{A}\in T_q(K)$. Tekintsük az A állapotainak egy $a_1, \ldots, a_m$ felsorolását, s legyen $\mathbf{N}=(N, X, \delta')$ a következő tulajdonságokkal rendelkező autonóm automata. Létezik olyan $B_1, \ldots, B_{2m}\subseteq N$, hogy $B_1, \ldots, B_{2m}$ páronként diszjunktak,

(i1) $|B_t|=2$, $|B_{m+t}|=m+1$ $(t=1, \ldots, m)$,

(ii1) alkalmas $b_t\in B_t$ mellett $B_t=\{b_t, \delta'(b_t, x)\}$ $(t=1, \ldots, m, x\in X)$,

(iii1) létezik olyan $b_{m+t}\in B_{m+t}$, hogy minden $b'\in B_{m+t}-\{b_{m+t}\}$ esetén

$$\delta'(b', x) = b_{m+t} \quad (t = 1, \ldots, m, \ x\in X).$$

Legyen most $h\colon N\to N$ olyan bijektív leképezés, melyre tetszőleges $t(=1, \ldots, m)$ esetén

$$h^{-1}(b_t) = b_{m+t},$$

$$h^{-1}(\delta'(b_t, x))\in B_{m+l}-\{b_{m+l}\}, \quad \text{ha} \quad \delta(a_t, x) = a_l \quad (1 \leqq l \leqq m, \ x\in X).$$

Az 5.4. és 5.8. tétel bizonyításának gondolatmenetéhez hasonlóan képezzünk egy olyan ($\mathbf{N}$-nel izomorf) $\mathbf{N}'=(N, X, \delta'')$ automatát, melyre tetszőleges $b'\in N$ mellett

$$\delta''(h(b'), x) = h(\delta'(b', x)) \quad (x\in X).$$

Alkossuk meg az $\mathbf{M}=(N, X, \delta_{\mathbf{M}})=N\times N'(X, \varphi)$ temporális szorzatot úgy, hogy minden $x(\in X)$-re $\varphi(x)=(x, x)$. Ekkor, ha rögzített $t(=1, \ldots, m)$ mellett $\delta(a_t, x)=$ $=a_l$ $(a_l\in A)$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\delta_{\mathbf{M}}(b_t, x) = \delta''(\delta'(b_t, x), x) = \delta''(h(b'_{m+l}), x) = h(\delta'(b'_{m+l}, x)) = h(b_{m+l}) = b_l,$$

ahol $b'_{m+l}\in B_{m+l}-\{b_{m+l}\}$.

Rögtön látható, hogy a $g_1(a_t)=b_t$ $(t=1, \ldots, m)$ $g_2(x)=x$ $(x\in X)$ összefüggésekkel definiált $g_1\colon A\to N$, $g_2\colon X\to X$ leképezések $\mathbf{A}$ egy $\mathbf{M}$-be történő izomorfizmusát szolgáltatják. Így $\mathbf{A}$ tetszőleges választása miatt tételünkhöz elegendő bizonyítani, hogy $\mathbf{P}_q(K)$ tartalmaz az (i1)–(iii1) összefüggéseknek eleget tevő $\mathbf{N}=(N, X, \delta')$ automatát.

Tételünk (i) feltételében szereplő $\mathbf{A}_1$ automata $a_1, a_2\in A$ állapotaira $a_1\neq a_2$ mellett $\delta_1(a_1, x)=\delta_1(a_2, x)$ $(x\in X)$. Így nyilvánvaló az is, hogy $\delta_1(a_1, x)\neq a_1$, $\delta_1(a_2, x)\neq a_2$ feltételek közül legalább egyiknek teljesülnie kell. Feltehető tehát, hogy mondjuk, $a_1\neq\delta_1(a_1, x)$. Ekkor azonban teljesülnek az 5.3. segédtétel (i), (ii) és (ii1) feltételei. Megkonstruálható tehát egy $\mathbf{N}\in T_q(K)$ automata oly módon, hogy $\mathbf{N}$ eleget tesz $y_1=y_2=x_1=\ldots=x_s$ mellett az 5.3. segédtételbeli tulajdonságoknak. (Speciálisan, az 5.3. segédtételbeli (ii1) tulajdonságnak is. Az 5.3. segédtételbeli (i1) és (iii1) tulajdonságoknak természetesen nem.) Hogy ez az $\mathbf{N}$ automata rendre teljesítse a tételünk bizonyításában megkövetelt tulajdonságokat, azt kell csak tennünk, hogy alkalmas

$$b'_{m+1}\in B_{m+1}-\{b_{m+1}\}, \ldots, b'_{2m}\in B_{2m}-\{b_{2m}\}$$

mellett az 5.3. segédtételbeli $B_1, \ldots, B_{2m}\subset N$ halmazok helyett konstrukciónkban a $B_1, \ldots, B_m, B_{m+1}-\{b'_{m+1}\}, \ldots, B_{2m}-\{b'_{2m}\}\subset N$ halmazokat tekintjük. Ezzel teljesíthetők a tételünk bizonyításában szereplő (i1)—(iii1) követelmények is. (Értelemszerűen, ekkor tetszőleges $t(=1, \ldots, m)$-re és $y_1, y_2\in X$-re $\delta(b_t, y_1)=\delta(b_t, y_2)\neq b_t$). □

Az 5.7—5.9. tételek teljeskörűen jellemzik a $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)(=\mathbf{T}_q(K))$ osztályokat abban az esetben, ha K az autonóm automaták egy osztálya. Valóban, ha K nem tesz eleget az 5.9. tétel (i) feltételének, s ugyanekkor tartalmaz nem triviális automatát, akkor az 5.8. tétel alkalmazható. Ha K triviális automaták egy osztálya, avagy K nem tesz eleget az 5.9. tétel (ii) feltételének, akkor viszont az 5.7. tétel kerülhet alkalmazásra.

5.10. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Ha K a permutáció automaták egy olyan osztálya, mely tartalmaz egy nem autonóm permutáció automatát, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes permutáció automaták osztálya.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}=(A, X, \delta)$ tetszőleges permutáció automata, s legyen minden $x\in X$-re $\mathbf{M}_x=(M, \{x_0, x\}, \delta_x)$, mint korábban, ahol is $x_0\neq x$ tetszőleges szimbólum, $A\subset M$, és $\delta_x(b, x_0)=b$, illetve $\delta_x(b, x)=\delta(b, x)$ minden $b\in A$ esetén teljesül. Az 5.2. segédtétel értelmében elegendő megmutatnunk, hogy $\mathbf{N}\in\mathbf{T}_q(K)$ alkalmas választásával minden ilyen $\mathbf{M}_x$ automatára $\mathbf{M}_x\in\mathbf{STI}(\{\mathbf{N}\})$.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ állapotainak egy $a_1, \dots, a_m$ felsorolását és legyen ekkor $\mathbf{N}=(N, X, \delta')$ a következő tulajdonságokkal rendelkező automata. Létezik minden $x, y(\in X)$, $x\neq y$ párhoz olyan $B_1, \dots, B_{2m}\subseteq N$, hogy $B_1, \dots, B_{2m}$ páronként diszjunktak,

(i1) $|B_t|=|B_{m+t}|=3$ $(t=1, \dots, m)$,

(ii1) alkalmas $b_t\in B_t$ mellett $B_t=\{b_t, \delta'(b_t, x), \delta'(b_t, y)\}$ $(t=1, \dots, m)$,

(iii1) $B_{m+t}=\{b'_{m+t}, b''_{m+t}, b_{m+t}\}$, ahol b'_{m+t}, b''_{m+t} olyan N-beli állapotok, melyekre $\delta'(b'_{m+t}, x)=\delta'(b''_{m+t}, y)=b_{m+t}$ fennáll $(t=1, \dots, m)$.

Tekintsük a $h\colon N\to N$ bijektív leképezést, ahol minden $t(=1, \dots, m)$ esetén

$$h^{-1}(b_t) = b_{m+t},$$

$$h^{-1}(\delta'(b_t, x)) = b''_{m+l}, \quad \text{ha} \quad \delta(a_t, x) = a_l \quad (1 \leqq l \leqq m),$$

$$h^{-1}(\delta'(b_t, y)) = b'_{m+t}.$$

Ismét képezzünk egy olyan ($\mathbf{N}$-nel izomorf) $\mathbf{N}'=(N, X, \delta'')$ automatát, melyre minden $b'\in N$ esetén $\delta''(h(b'), x) = h(\delta'(b', x))$ $(x\in X)$.

Legyen x_0 tetszőleges, x-től különböző szimbólum. Alkossuk meg az

$$\mathbf{M}_x = (M, \{x_0, x\}, \delta_x) = \mathbf{N}\times\mathbf{N}'(\{x_0, x\}, \varphi)$$

temporális szorzatot úgy, hogy $M=N$ mellett $\varphi(x)=(x, y)$ és $\varphi(x_0)=(y, x)$ fennálljon.

Tegyük fel, hogy valamely $a_t(\in A)$-ra $\delta(a_t, x)=a_l$. Így azt kapjuk, hogy

$$\delta_x(b_t, x) = \delta''(\delta'(b_t, x), y) = \delta''(h(b''_{m+l}), y) = h(\delta'(b''_{m+l}, y)) = h(b_{m+l}) = b_l.$$

Hasonlóan,

$$\delta_x(b_t, x_0) = \delta''(\delta'(b_t, y), x) = \delta''(h(b'_{m+t}), x) = h(\delta'(b'_{m+t}, x)) = h(b_{m+t}) = b_t.$$

A $g_1(a_t)=b_t$ $(t=1, \dots, m)$, $g_2(x)=x$, $g_2(x_0)=x_0$ összefüggésekkel definiált $g_1\colon A\to N$, $g_2\colon \{x_0, x\}\to\{x_0, x\}$ leképezések tehát az $\mathbf{A}_x$ egy izomorfizmusát szolgáltatják $\mathbf{M}_x$-be. Azt kell még látnunk, hogy $\mathbf{N}\in\mathbf{T}_q(K)$.

Legyen $\mathbf{D}=(D, X_\mathrm{D}, \delta_\mathrm{D})$ tetszőleges K-beli nem autonóm permutáció automata. Könnyen igazolható, hogy $\mathbf{D}$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i2) alkalmas $d(\in D)$, $x, y(\in X_\mathrm{D})$ mellett $\delta_\mathrm{D}(d, x)\neq\delta_\mathrm{D}(d, y)$,

(ii2) megfelelően választott $d_1, d_2(\in D)$, $x, y(\in X_\mathrm{D})$ esetén $d_1\neq d_2$ és $x\neq y$ mellett

$$\delta_\mathrm{D}(d_1, x) = \delta_\mathrm{D}(d_2, y),$$

(iii2) van olyan $d_1, d_2(\in D)$, $x(\in X_\mathrm{D})$ hármas, hogy $d_1\neq d_2$ és

$$\delta_\mathrm{D}(d_1, x) \neq \delta_\mathrm{D}(d_2, x).$$

Az (i2) tulajdonság magába foglalja azt a feltételezést is, hogy, mondjuk $d(\in D)$-re és $x(\in X_\mathrm{D})$-re

(iv2) $\delta_\mathrm{D}(d, x) \neq d.$

A felsorolt tulajdonságok felhasználásával (az 5.3. segédtétel értelmében) meg tudjuk konstruálni a $\mathbf{D}$ egy olyan kvázidirekt hatványát, mely eleget tesz tetszőleges $x, y(\in X, x\neq y)$ esetén az (i1)—(iii1) feltételeknek. (Részletesebben, az (iv2) felhasználásával elérhető, hogy tetszőleges $t(=1, \ldots, m)$ esetén $b_t\notin\{\delta'(b_t, x), \delta'(b_t, y)\}$, illetve $b_{m+t}\notin\{b'_{m+t}, b''_{m+t}\}$ teljesüljön. A $\delta'(b_t, x)\neq\delta'(b_t, y)$ az (i2) alkalmazásával, $b'_{m+t}\neq b''_{m+t}$ pedig az (iii2) segítségével érhető el. A $\delta'(b'_{m+t}, x)=\delta'(b''_{m+t}, y)=n_{m+t}$ az (ii2) felhasználásával biztosítható. Végül, a $B_1, \ldots, B_{2m}$ halmazok páronként diszjunkt volta (iii2), illetve (iv2) figyelembevételével érhető el.) □

Igazolható, hogy ha $\mathbf{A}$ egy nem monoton beállító automata, akkor minden beállító automata izomorfan beágyazható az $\mathbf{A}$ egy megfelelően választott kvázidirekt hatványába (l. GINZBURG [37], ZEIGER [49]). Így az 5.1. segédtétel figyelembevételével adódik az

5.11. TÉTEL. *Ha K beállító automaták egy olyan osztálya, mely tartalmaz nem monoton beállító automatát, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ az összes beállító automaták osztálya.*

Ha K autonóm permutáció, avagy beállító automaták egy osztálya, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ szerkezetéről az 5.7—5.11. tételek tájékoztatnak. Ha a K automataosztály ezen automatatípusok egyikének sem osztálya, akkor $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)=\mathbf{T}_q(K)$ szerkezetéről az 5.4. tétel nyújt tájékoztatást. Ezen gondolatmenetünket foglalja össze a következő

5.12. KÖVETKEZMÉNY (DÖMÖSI [5]). *Automaták tetszőleges K osztályára*

$$\mathbf{T}_{\alpha_0}\mathbf{T}_{\alpha_0}(K) = \mathbf{T}_{\alpha_0}(K) = \mathbf{T}_q(K).$$

Speciálisan, ha K automaták egy véges elemszámú osztálya, akkor tetszőleges $\mathbf{A}$ automata esetén eldönthető, hogy $\mathbf{A}$ eleme $\mathbf{T}_{\alpha_0}(K)(=\mathbf{T}_q(K))$-nak, avagy sem.

5.2. A T_g-szorzat és a $T_{q'}$-szorzat

Valamely $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ automaták egytényezős *Gluskov-szorzatainak* kvázidirekt szorzatát hívjuk röviden q'-szorzatnak. Értelemszerűen, ha K automaták egy osztálya, akkor $\mathbf{P}_{q'}(K)$ az összes K-beli tényezőkből felépülő q'-szorzatok osztályát, $\mathbf{T}_{q'}(K)$ pedig az $\mathbf{STIP}_{q'}(K)$ osztályt fogja jelenteni. Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *előáll* az $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ automaták *$T_{q'}$-szorzataként*, ha $\mathbf{A} \in \mathbf{T}_{q'}(\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n\})$. Könnyen igazolható, hogy autonóm automaták tetszőleges *Gluskov-szorzata* megegyezik ugyanezen automaták kvázidirekt szorzatával. Így érvényes a következő

5.13. Segédtétel. *Ha K az autonóm automaták egy osztálya, akkor*

$$\mathbf{T}_g(K) = \mathbf{T}_q(K)$$

A következő tétellel jellemezzük a $\mathbf{T}_g$-szorzatra nézve izomorfan teljes rendszereket.

5.14. Tétel (Dömösi [5]). *Automaták egy K osztálya akkor és csak akkor izomorfan teljes a T_g-szorzatra nézve, ha K tartalmaz nemautonóm automatát.*

Bizonyítás. Mivel minden kvázidirekt szorzat egyben α_0-szorzat is, az 5.13. segédtétel és az 5.1. segédtétel következtében feltételeink szükségesek.

Az elegendőséghez legyen $\mathbf{A}=(A, X, \delta)\in K$ nem autonóm automata, azaz alkalmas $a(\in A)$, $x, y(\in X)$ hármasra teljesüljön $\delta(a, x)\neq\delta(a, y)$. Vegyük észre, hogy ekkor $\mathbf{A}\in K$ kielégíti az 5.4. tétel (i) feltételét. Az 5.5. tétel figyelembevételével tehát tételünkhöz elegendő igazolni, hogy az $\mathbf{A}$ alkalmas (nem feltétlen különböző) egytényezős $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ *Gluskov-szorzataira* teljesülnek az 5.4. tétel (ii) és (iii) feltételei is. Ehhez viszont azt kell csak látnunk, hogy az $\mathbf{A}$ automatára teljesülnek a következők:

(i1) található olyan $a_1, a_2(\in A)$, $x, y(\in X)$, hogy $a_1\neq a_2$ és $\delta(a_1, x)=\delta(a_2, y)$;

(ii1) megfelelően választott $a_1, a_2(\in A)$, $x, y(\in X)$ esetén $a_1\neq a_2$ és $\delta(a_1, x)\neq \neq\delta(a_2, y)$.

Ha $\mathbf{A}$ nem permutáció automata, akkor $(x=y)$ feltételezése mellett) (i1) definíció szerint teljesül. Az (i1) igazolásához tehát elegendő azt az esetet vizsgálnunk, mikor $\mathbf{A}$ permutáció automata. Ekkor az $a(\in A)$, $x, y(\in X)$ hármasra tett $\delta(a, x)\neq \neq\delta(a, y)$ feltételezés értelmében (az $a_1'=\delta(a, x)$ és $a_2'=\delta(a, y)$ választással) található olyan $a_1', a_2'(\in A)$ állapotpár, hogy $a_1'\neq a_2'$ és alkalmas k, l természetes számpárra

$$\delta(a_1', x^k) = \delta(a_2', y^l) \quad (=a).$$

Egyszerű számítással belátható, hogy ez maga után vonja (i1) fennállását.

Ha $\mathbf{A}$ csupán triviális (egyállapotú) olyan részautomatákat tartalmaz, melyek permutáció automaták, úgy $\delta(a, x)\neq\delta(a, y)$ mellett alkalmas $l>0$ esetén $\delta(\delta(a, x^l), x)=\delta(a, x^l)$ és $\delta(\delta(a, y^l), y)=\delta(a, y^l)$ teljesül. Az $a_1=\delta(a, x^l)$ és $a_2= =\delta(a, y^l)$ választással tehát (ii1) ekkor fennáll, ha $\delta(a, x^l)\neq\delta(a, y^l)$. Ha viszont $\delta(a, x^l)=\delta(a, y^l)$ $(l>0)$, úgy $\delta(a, x)\neq\delta(a, y)$ miatt alkalmas $z\in\{x, y\}$-re $a\neq\delta(a, z)$ és $\delta(a, z)\neq\delta(a, z^2)$. Ekkor $a=a_1$, $\delta(a, z)=a_2$, $x=y=z$ mellett jutunk (ii1)-hez.

Tegyük fel tehát, hogy $\mathbf{A}$-nak részautomatája egy nem triviális (egynél nagyobb állapotszámú) permutáció automata. Ekkor alkalmas $b(\in A)$, $z(\in X)$ párhoz létezik olyan $k>1$ természetes szám, hogy $\delta(b, z^k)=b$ és minden $t<k$ természetes szám esetén $\delta(b, z^t)\neq b$. Ekkor az $a_1=b$ és $a_2=\delta(b, z^{k-1})$ választással $(x=y=z$ feltéte-

lezése mellett) (ii1) fennáll. Valóban, így $a_1 \neq a_2$ mellett $\delta(a_1, x) = \delta(b, x)$, $\delta(a_2, x) = b$ és $\delta(b, x) \neq b$ miatt (ii1)-nek teljesülnie kell.

Az 5.14. tétel bizonyítása során igazoltuk a következő állítást is.

5.15. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Ha automaták egy K osztálya izomorfan teljes a $T_{q'}$-szorzatra nézve, akkor izomorfan teljes a T_g-szorzatra nézve is.*

Mivel az autonóm automaták osztálya a homomorfizmusra nézve zárt, az 5.14. tétel felhasználásával adódik a következő eredmény.

5.16. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Automaták egy K osztálya izomorfan teljes a T_g-szorzatra nézve akkor és csak akkor, ha homomorfan teljes a T_g-szorzatra nézve.*

Az 5.13. segédtétel, továbbá az 5.14, 5.15. és 5.16. tételek következményeként azt kapjuk, hogy izomorf és homomorf reprezentáció szempontjából a T_g-szorzat ekvivalens a $T_{q'}$-szorzattal. Így állításaink érvényben maradnak akkor is, ha valamely $i>0$ esetén T_g-szorzat helyett T_{α_i}-, avagy T_{ν_i}-szorzatokat veszünk, hisz a $T_{q'}$-szorzat speciális ilyen típusú szorzatnak is tekinthető. Így eljutunk a következő eredményhez.

5.17. TÉTEL (DÖMÖSI [5]). *Izomorf és homomorf reprezentáció szempontjából tetszőleges $i>0$ mellett a T_{α_i}-szorzat és a T_{ν_i}-szorzat ekvivalens a T_g-szorzattal.*

Végül megjegyezzük, hogy ha K az autonóm automaták egy osztálya, akkor $T_g(K) = T_q(K)$ szerkezetéről az 5.13. segédtétel értelmében az 5.7—5.9. tételek adnak tájékoztatás. Amennyiben pedig K tartalmaz nem autonóm automatát, úgy $T_g(K) = T_{q'}(K)$-ról az 5.14. tétel ad információt.

Ezen gondolatmenetünket összefoglalja a következő

5.18. KÖVETKEZMÉNY ([DÖMÖSI [5]). *Automaták tetszőleges K osztályára $T_g T_g(K) = T_g(K) = T_{q'}(K)$. Speciálisan, ha K automaták egy véges elemszámú osztálya, akkor tetszőleges* **A** *automata esetén eldönthető, hogy* **A** *eleme $T_g(K)(=T_{q'}(K))$-nak avagy sem.*

GÉCSEG FERENC [31]-beli temporális kompozíciós fogalmai némiképp eltérnek az általunk alkalmazottaktól. Ha feltesszük, hogy vizsgálatainkban olyan K automataosztályokat tekintünk, melyekre $I(K) = I(K^\lambda)$, akkor eredményeink (elhagyva a triviálisan teljesülő feltételeket és összefüggéseket) meg fognak egyezni GÉCSEG FERENC temporális kompozíciókra vonatkozó [31]-beli eredményeivel. (Mint már említettük, a *Gécseg-féle temporális kompozíciós fogalmak* általánosításai az általunk alkalmazottaknak.)

6. Bibliográfiai megjegyzések

A dolgozat témájának alapötletét GÉCSEG FERENC *„Product of Automata"* című könyve szolgáltatta. A dolgozatban alkalmazott fogalmak és felhasznált eredmények forrásául is döntő mértékben ez a mű szolgált. Ezen túlmenően azt is meg kell jegyeznünk, hogy a dolgozatban közölt eredmények többnyire a GÉCSEG FERENC köré tömörülő alkotó kollektívával együttműködve születtek meg, sok esetben közös munkaként. Így a 2. fejezet azon megállapítása, hogy a homomorf reprezentációra nézve a ν_i-sorozatcsalád valódi hierarchiát alkot, ÉSIK ZOLTÁN és a szerző közös eredménye. Hasonlóképp, ÉSIK ZOLTÁNnal közös eredmény az is, hogy bizonyos automata-osztályok esetén az α_0-szorzat általánosabb a homomorf reprezentációra nézve, mint a ν_i-szorzatcsalád bármely tagja.

A 3. fejezet első része ÉSIK ZOLTÁN és a szerző közös munkája. Az elevátorok és a monoton automaták közötti, a 3. fejezet második részében közölt összefüggések GÉCSEG FERENC és a szerző közös eredményei.

A 4. fejezetben tárgyalt ν_i^+-szorzatcsalád izomorf S-teljességi vizsgálata IMREH BALÁZS és a szerző, míg a 4. fejezet első részeként adódó homomorf S-teljességi vizsgálat ÉSIK ZOLTÁN és a szerző közös munkája.

Az 5. fejezet teljes mértékben GÉCSEG FERENC hasonló irányú eredményeire támaszkodik, lényegében azok általánosítása.

IRODALOM

[1] ARBIB, M. A. (szerk.), *Machines, Languages and Semigroups, with a major contribution by K. Krohn and J. L. Rhodes* (Academic Press, New York, 1968).
[2] DÉNES, J., "Perfect groups and Cayley graphs", *Periodica Math. Hung.* **16** (1985) 139—140.
[3] DÉNES, J. and HERMANN, P., "On the product of all elements in a finite group", *Ann. of Discrete Mathematics* **15** (1982) 107—111.
[4] DÖMÖSI, P., "On complete systems of automata", *Conf. on Automata, Languages and Programming Systems,* Salgótarján (1986), K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, No. DM86—4, 87—95.
[5] DÖMÖSI, P., „On temporal products of automata", *Papers on Automata and Languages* (közlésre benyújtva).
[6] DÖMÖSI, P., Véges automaták teljes rendszereiről, kandidátusi értekezés, Budapest, 1981.
[7] DÖMÖSI, P., "Products of automata and homomorphic simulation", *Puma* (közlésre benyújtva).
[8] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "ν_i-products of automata and the Letičevskii criterion" (kézirat).
[9] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "On homomorphic realization of automata with α_0-products", *Papers on Automata and Languages,* VIII., K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest (1986),No. DM86—3, 63—97.
[10] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "Critical classes for the α_0-product", *Theoretical Computer Science* **61** (1988) 17—24.
[11] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "On homomorphic simulation of automata by α_0-products", *Acta Cybernetica* **8** (1988) 315—323.
[12] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "On homomorphic simulation of automata by ν_1-products", *Papers on Automata and Languages,* IX., K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest (1987), No. DM87—2, 91—112.
[13] DÖMÖSI, P. and ÉSIK, Z., "On the hierarchy of ν_i-products of automata", *Acta Cybernetica* **8** (1988) 253—258.
[14] DÖMÖSI, P. and GÉCSEG, F., "Simulation by ν_1^*-products of automata", *Publicationes Math.* (közlésre benyújtva).
[15] DÖMÖSI, P. and GÉCSEG, F., "Simulation by ν_i^*-products of automata" (kézirat).
[16] DÖMÖSI, P. and IMREH, B., "On ν_i-products of automata", *Acta Cybernetica* **6** (1983) 149—162.
[17] DÖMÖSI, P. and IMREH, B., "On the decomposition of cellular automata", *Conf. on System Theoretical Aspects in Computer Science,* Salgótarján (1982), K. Marx University of Economics Dept. of Math., Budapest (1982), No. DM82—2, 80—86.
[18] DÖMÖSI, P. and PEÁK, I., "On the counter-free and weakly controlled automata", *Papers on Automata Theory,* III. K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest (1981), No. DM81—2, 77—82.
[19] EILENBERG, S., *Automata, Languages, and Machines, vol. A* (Academic Press, London—New York, 1974).
[20] EILENBERG, S., *Automata, Languages, and Machines, vol. B* (Academic Press, London—New York, 1976).

[21] ÉSIK, Z., "Homomorphically complete classes of automata with respect to the α_2-product", *Acta Sci. Math.* **48** (1985) 135—141.
[22] ÉSIK, Z., "Complete classes of automata for the α_1-product", *Found. Control Engrg.* **11** (1986) 95—107.
[23] ÉSIK,, Z., "Loop products and loop-free products", *Acta Cybernetica* **8** (1987) 45—48.
[24] ÉSIK, Z., "Results on homomorphic realization of automata by α_0-product" (kézirat).
[25] ÉSIK, Z. and DÖMÖSI, P., "Complete classes of automata for the α_0-product", *Theoretical Computer Science* **47** (1986) 1—14.
[26] ÉSIK, Z., DÖMÖSI, P., GÉCSEG, F. and VIRÁGH, J., "Homomorphic realization of automata with compositions", *Mathematical Foundations of Computer Science* (1986) LNCS **233** 299—307.
[27] ÉSIK, Z. and HORVÁTH, GY., "The α_2-product is homomorphically general", *Papers on Automata Theory*, V., K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest (1983), No. DM83—3, 49—62.
[28] ÉSIK, Z. and VIRÁGH, J., "On products of automata with identity", *Acta Cybernetica* **7** (1986) 299—311.
[29] GÉCSEG, F., *Products of Automata* (EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, 1986).
[30] GÉCSEG, F., "Composition of automata", Languages and Programming, 2nd Colloguium, Saarbrücken, 1974, *Lecture Notes in Computer Science* **14** (1974) 351—363.
[31] GÉCSEG, F., "On products of abstract automata", *Acta Sci. Math.* **38** (1976) 21—43.
[32] GÉCSEG, F., "Metric representations by ν_i-products", *Acta Cybernetica* **7** (1985) 203—209.
[33] GÉCSEG, F. and IMREH, B., "On metric equivalence of ν_i-products", *Acta Cybernetica* **8** (1987) 129—134.
[34] GÉCSEG, F. and IMREH, B., "A comparison of α_i-products and ν_i-products", *Foundations of Control Engineering* **12** (1987) 3—9.
[35] GÉCSEG, F. and JÜRGENSEN, H., "On $\alpha_0-\nu_1$-Product of Automata, Report No. 162, Univ. of Western Ontario, Dept. of Comp. Sci. (1987).
[36] GÉCSEG, F. and PEÁK, I., *Algebraic Theory of Automata* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972).
[37] GINZBURG, A., *Algebraic Theory of Automata* (Academic Press, London New York, 1968).
[38] GILL, A., "Single-channel and multichannel finite-state machines", *IEEE Trans. Comput.* **19** (1970) 1073—1078.
[39] GLUSKOV, V. M., Absztraktnaja teorija avtomatov, *Usp. Mat. Nauk.* **16** (1961) 3—62.
[40] GLUSKOV, V. M., „O polnote szisztem operacii v elektronnüh vücsiszlennüh masin", *Kibernetika* No **2** (1968) 1—5.
[41] IVANOV, G. I., „Vremennüe preobrazovanyija cifrovüh avtomatov", *Izv. AN SSSR, Tehniceszkaja Kibernetika* No **6** (1973) 106—113.
[42] IMREH, B., "On α_i-products of automata", *Acta Cybernetica* 3 (1978) 301—307.
[43] IMREH, B., "A note on the generalized ν_1-product", *Acta Cybernetica* **8** (1988) 247—252.
[44] KATONA, E., "Local and global reversibility of finite inhomogeneous cellular automaton", *Acta Cybernetica* 3 (1978) 278—292.
[45] KROHN, K. B. and RHODES, J. L., "Algebraic theory of machines", *Proc. Symp. Math. Theory of Automata*, Brooklyn (1962), 341—384.
[46] LEGENDI, T., „Sejtautomaták alkalmazása számítási rendszerekben", *Sejtautomaták* (Gondolat Kiadó, Budapest, 1978) 266—273.
[47] LETICSEVSZKIJ, A. A., „Uszlovija polnotü dlja konyecsnüh avtomatov", *Zurn. Vic. Mat. i Mat. Fiz.* **4** (1961) 702—710.
[48] YOELI, M., "The cascade decomposition of sequential machines", *IRE Trans. Electronic Comput.* **10** (1961) 587—592.
[49] ZEIGER, H. P., "Cascade synthesis of finite-state machines", *Inform. and Control* **10** (1967) 419—433.

(Beérkezett: 1989. február 21.)

DÖMÖSI PÁL
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 299—307

ALGORITMUS INTERVALLUMRENDSZER ERŐS LEFOGÁSÁRA

ZUBOR ZOLTÁN
Budapest

Egy statisztikai probléma kezelése kapcsán TELCS ANDRÁS vetette föl a következő problémát: Adott a számegyenesen egy véges intervallumokból álló véges intervallumrendszer. Hogyan lehet egy olyan minimális elemszámú lefogó pontrendszert találni, aminek az incidenciája maximális? Ebben a cikkben egy algoritmust adunk a problémára, ill. általánosítására.

1. Bevezetés

Legyen adva a számegyenesen véges intervallumoknak egy véges $\mathscr{I}$ halmaza! Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy minden intervallum zárt. Egy $\mathscr{P}$ pontrendszert az $\mathscr{I}$-t lefogó pontrendszernek nevezzük, ha minden $\mathscr{I}$-beli intervallumra esik legalább egy $\mathscr{P}$-beli pont.

Egy pont $\mathscr{I}$-re vonatkozó incidenciáján azon $\mathscr{I}$-beli intervallumok számát értjük, amikre ráesik a pont, azaz $i(P):=|\{I\in\mathscr{I}:\ P\in I\}|$. Egy $\mathscr{P}$ pontrendszer $\mathscr{I}$-re vonatkozó incidenciájának a pontjai incidenciái összegét hívjuk, azaz $i(\mathscr{P}):=\sum\{i(P):\ P\in\mathscr{P}\}$.

Egy lineáris lépésszámú algoritmust fogok adni ebben a cikkben, ami olyan minimális elemszámú lefogó pontrendszert ad, aminek incidenciája (a minimális elemszámú lefogó pontrendszerek között) maximális.

Miután föltettük, hogy az intervallumok zártak, az optimális lefogó pontrendszert elég az intervallum-végpontokon keresni.

Ez a probléma polinomiálisan megoldható két cirkulációs optimalizálási algoritmus egymás utáni végrehajtásával. Legyen $\mathbf{A}$ egy olyan mátrix, melynek sorai az intervallumoknak, oszlopai a végpontoknak felelnek meg, és egy eleme legyen 1, ha a megfelelő pont ráesik a megfelelő intervallumra, egyébként pedig 0! Így a probléma a következő egész értékű lineáris programozási feladattal ekvivalens:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geqq 1, \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = k$$

$$x_j\in\{0,1\}, \quad j=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max$$

ahol c_j a j-edik végpont incidenciája, k pedig a lefogó pontok minimális száma, amit a

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geqq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \to \min$$

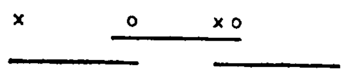
egész értékű lineáris programozási feladat ad meg.

Ezt az utat követve, ha áttérünk a duális feladatra, és a neki megfelelő cirkulációs problémát oldjuk meg, akkor egy $O(n^4)$-es algoritmust kapunk ([2]).

Minimális lefogó pontrendszert ad a közismert ún. „legjobboldalibb bal végpont" algoritmus ([1]):

Legyen P_1 $\mathscr{I}$-ben a legjobboldalibb bal végpont, I_1 az az intervallum, aminek a bal végpontja a P_1! Hagyjuk el $\mathscr{I}$-ből azon intervallumokat, amiket a P_1 lefog, és legyen P_2 az így megmaradt intervallumrendszerben a legjobboldalibb bal végpont, I_2 a P_2-höz tartozó intervallum, stb.! Folytassuk ezt mindaddig, amíg el nem fogy minden intervallum! Az így kapott $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontrendszer lefogó lesz, mert az algoritmus során $\mathscr{I}$-ből sorra a $P_1, P_2, \ldots$ pontok lefogta intervallumokat hagytuk el, s végül mind elfogyott. De kaptunk eközben egy $I_1, I_2, \ldots, I_k$ részintervallum-rendszert is, ami független (azaz bármely kettő metszete üres), hiszen I_i bal végpontjától az I_{i+1} jobb végpontja is balra van minden $i=1, 2, \ldots, k-1$-re. Semmilyen pont sem foghat le ezen intervallumok közül kettőt, így legalább k pontra van szükség csupán ezek lefogásához, tehát a fenti lefogó pontrendszer minimális elemszámú. Igazoltuk azt a jól ismert tényt, hogy tetszőleges $\mathscr{I}$ intervallumrendszer esetén az $\mathscr{I}$-beli független intervallumok maximális száma egyenlő az $\mathscr{I}$-t lefogó pontok minimális számával.

Ez az algoritmus azonban nem feltétlenül ad maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert:



1. ábra

x — a „legjobboldalibb bal végpont" algoritmus eredményezte minimális lefogó pontrendszer — 3 incidenciával

o — az optimális megoldás — 4 incidenciával.

2. Az algoritmus leírása

Válasszunk ki egy maximális elemszámú $I_1, I_2, \ldots, I_k$ független intervallumrendszert a „legjobboldalibb bal végpont" algoritmussal! Készítsünk egy k oszlopból álló irányított gráfot. Első (-$k$adik) oszlopának pontjai legyenek az I_1-re (I_k-ra) eső intervallumvégpontok közül azok, amelyek a legbaloldalibb jobb (legjobboldalibb bal) végponttól balra (jobbra) vannak, és $i \neq 1$, $i \neq k$-ra az i-edik oszlopának pontjai legyenek az I_i-re eső intervallumvégpontok. Egy i-edik oszlopban levő P pontból mutasson él az $i+1$-edik oszlopbeli Q pontba, ha nincs olyan $\mathcal{I}$-beli I intervallum, ami szigorúan e két pont közé esne ($i=1, 2, \ldots, k-1$)! Súlyozzuk meg a gráf pontjait az $\mathcal{I}$-re vonatkozó incidenciájuk szerint, és keressünk a gráfunkban egy maximális súlyú irányított utat, ami az első oszlopban kezdődik, és a k-adikban végződik! Ezt oszlopról oszlopra haladva tehetjük meg úgy, hogy közben átsúlyozzuk a gráfot, hogy egy pont új súlya az első oszlopból hozzá vezető maximális súlyú irányított út súlya legyen! Ha már az i-edik oszloppal végeztünk, akkor vegyük sorra az $i+1$-edik oszlop pontjait, fessük pirosra az átsúlyozás utáni maximális új súlyú őseiből mutató éleket, és az új súly legyen a maximális új súlyú ősének a súlya, és a saját régi súlyának összege! (A Q pont őse a P pontnak, ha Q-ból mutat P-be él.) Maximális súlyú utat egy k-adik oszlopbeli maximális új súlyú pontból kiindulva, piros éleken az első oszlopig visszafelé menve kaphatunk.

Maximális súlyú út pontjai optimális pontrendszert adnak.

Az algoritmus a következő gondolatra épül:

Mivel az intervallumrendszert annyi ponttal szeretnénk lefogni, mint ahány intervallumból áll a kiválasztott maximális független intervallumrendszer, az i-edik lefogó pontnak valahol az i-edik intervallumon kell lennie. Csakhogy nem választhatók ezek egymástól függetlenül, mert P_i és P_{i+1} között lefogatlanul maradhat egy intervallum:

2. ábra

Ennek elkerülése végett készítettük a segédgráfot.

Jegyezzük meg, hogy így nemcsak egy maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert kapunk, hanem megkaphatjuk az összes „lényegében különbözőt" is. Erre még visszatérünk.

3. Az algoritmus leírása

Az algoritmus négy részre bontható, és az inputnak tekintett (A_i, B_i) rendezett párok $(A_i \leqq B_i)$ halmazából előállít egy $P_1, P_2, \ldots, P_k$ maximális incidenciájú minimális pontrendszert mint outputot.

Az algoritmus négy fő része a következő:

1. rész: Rakjuk sorba a bemenő adatokat nagyság szerint: Ha $A_i=A_j$ $(B_i=B_j)$, akkor legyen például $A_i(B_i)$ előbb, mint $A_j(B_j)$, ha $i<j$! Ha pedig $A_i=B_j$, akkor legyen mindig A_i előbb, mint B_j!
Az algoritmusban a későbbiek során már nem lesz szükség konkrétan az input adatokra, hanem csak arra, hogy a sorbarendezésben hanyadik helyen állnak, valamint, hogy melyik végpontot reprezentálják. Így tehát az algoritmus első részének a végén egy olyan típusú sorozat fog rendelkezésünkre állni, mint pl. $A_2A_1A_3B_2A_4B_3B_1B_4$.

2. rész: A legjobboldalibb bal végpont algoritmussal válasszunk ki egy maximális független intervallumrendszert!

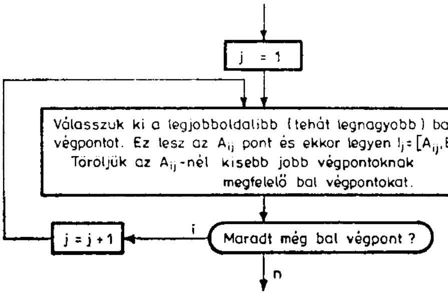
3. rész: Építsük fel a segédgráfot!

4. rész: Súlyozzuk meg és súlyozzuk át a gráf pontjait oszlopról oszlopra haladva, majd válasszuk ki a k-adik oszlop egy maximális súlyú elemét, és tekintsük a hozzá tartozó maximális súlyú utat!
Ezen maximális út pontjai egy maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer elemei lesznek.

Ezek után tekintsük külön-külön részletesen az egyes algoritmus részeket.

Az első részt nem részletezem. Sokféle sorbarendező algoritmus ismert. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a lépésszáma $n \log n$-nel arányos.

A második rész az $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ végpontok sorbarendezett számsorából, mint input adatokból létrehoz egy $I_1=[A_{i1}, B_{i1}], \ldots, I_k=[A_{ik}, B_{ik}]$ maximális független intervallumrendszert mint outputot. A blokkdiagramja a 3. ábrán látható.



3. ábra

A harmadik rész az intervallum végpontok sorbarendezett számsorából, valamint a második részben előállított maximális független intervallumrendszerből, mint input adatokból felépít outputként egy segédgráfot. A harmadik rész blokkdiagramja a 4. ábrán látható.

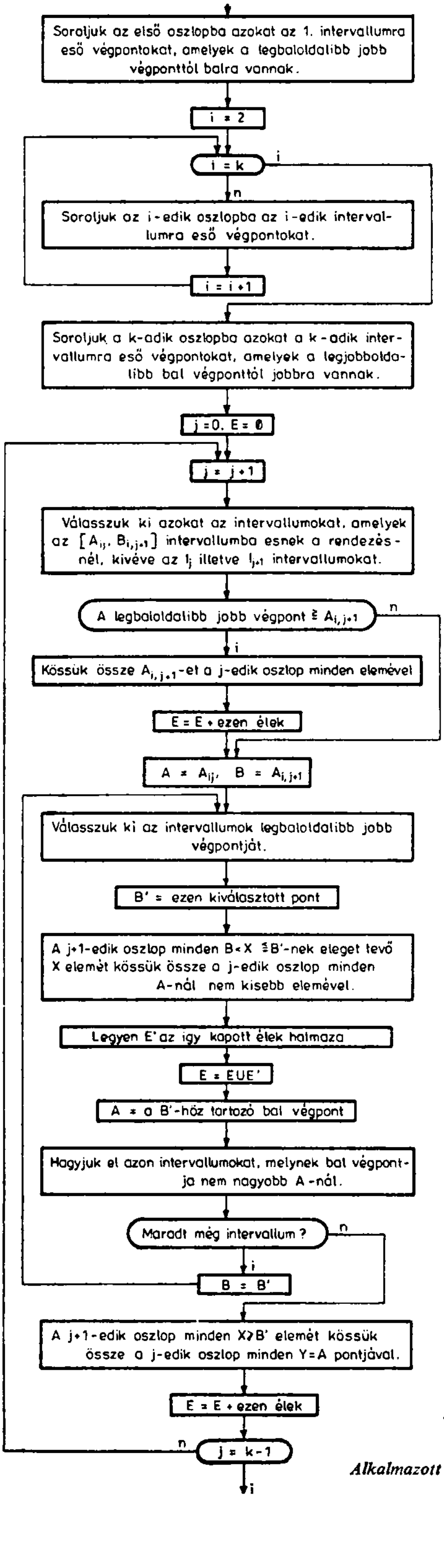
A negyedik rész inputja a harmadik részben előállított segédgráf, melynek oszlopain belül az elemek sorba vannak rendezve, outputja pedig egy maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer, amely keresése az algoritmus célja volt. A negyedik rész blokkdiagramját az 5. ábra tartalmazza.

4. Az algoritmus helyessége

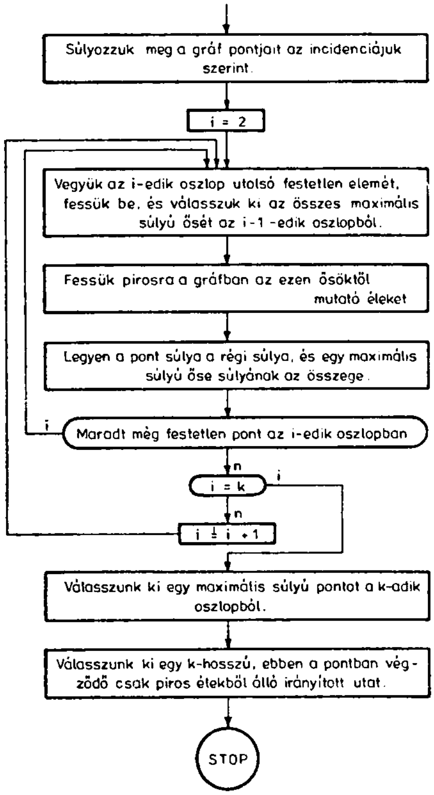
Azt fogom ebben a fejezetben bebizonyítani, hogy az algoritmus valóban maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert ad. Legyen $\mathcal{I}^*$ a kiválasztott maximális független intervallumrendszer! A bevezetésben leírtakból nyilvánvalóan következik

4.1. ÁLLÍTÁS. Minden $\mathcal{P}$ minimális lefogó pontrendszerre $|\mathcal{P}|=k$, és $\mathcal{P}$ (nagyságrendben) i-edik eleme az $\mathcal{I}^*$ i-edik intervallumára esik.

Mivel a maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert elég a végpontokon keresni, ezért a 4.1. állítás következtében a keresett pontrendszer i-edik eleme a gráf i-edik oszlopának egyik pontja lesz.


Soroljuk az első oszlopba azokat az 1. intervallumra eső végpontokat, amelyek a legbaloldalibb jobb végponttól balra vannak.
i = 2
i = k
i
n
Soroljuk az i-edik oszlopba az i-edik intervallumra eső végpontokat.
i = i + 1
Soroljuk a k-adik oszlopba azokat a k-adik intervallumra eső végpontokat, amelyek a legjobboldalibb bal végponttól jobbra vannak.
j = 0, E = ∅
j = j + 1
Válasszuk ki azokat az intervallumokat, amelyek az [A_ij, B_i,j+1] intervallumba esnek a rendezésnél, kivéve az I_j illetve I_j+1 intervallumokat.
A legbaloldalibb jobb végpont ≥ A_i,j+1
n
i
Kössük össze A_i,j+1-et a j-edik oszlop minden elemével
E = E + ezen élek
A = A_ij, B = A_i,j+1
Válasszuk ki az intervallumok legbaloldalibb jobb végpontját.
B' = ezen kiválasztott pont
A j+1-edik oszlop minden B < X ≤ B'-nek eleget tevő X elemét kössük össze a j-edik oszlop minden A-nál nem kisebb elemével.
Legyen E' az így kapott élek halmaza
E = E ∪ E'
A = a B'-höz tartozó bal végpont
Hagyjuk el azon intervallumokat, melynek bal végpontja nem nagyobb A-nál.
Maradt még intervallum?
n
i
B = B'
A j+1-edik oszlop minden X > B' elemét kössük össze a j-edik oszlop minden Y = A pontjával.
E = E + ezen élek
n
j = k - 1
i

4. ábra



5. ábra

4.2. Állítás. Egy reprezentánsrendszer (minden oszlopból egy elem) pontosan akkor lefogó pontrendszer, ha a gráfban utat alkot.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $v_1, \ldots, v_k$ reprezentánsrendszer utat alkot. Legyen $I \subset \mathscr{I}$ tetszőleges! Legyen $I=[A, B]$! Tegyük fel, hogy $v_1 > A$! A gráf első oszlopába azon I_1 intervallumbeli pontokat soroltuk, melyek a legbaloldalibb jobb végponttól balra vannak. Következésképp v_1-nek a B-től balra kell esnie, így $v_1 \in I$. Hasonlóképpen látható, hogy $v_k \in I$, ha $v_k < B$. Tehát föltehető, hogy $v_1 < A \leqq B < v_k$. Legyen ezek után $v_{i0} := \max\{v_i \colon v_i < A\}$, $v_{i1} := \min\{v_i \colon v_i > B\}$! $(v_{i0} < v_{i1})$! A $v_1, \ldots, v_k$ utat alkot a gráfban a feltevésünk szerint, tehát $(v_{i0}, v_{i0+1}) \in E$. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan $\mathscr{I}$-beli $[A', B']$ intervallum, hogy $v_{i0} < A' \leqq B' < v_{i0+1}$. De tudjuk, hogy $v_{i0} < A \leqq B < v_{i1}$, így $v_{i0+1} \neq v_{i1}$. De ekkor v_{i0} és v_{i1} definíciója miatt $A \leqq v_{i0+1} \leqq B$, tehát $v_{i0+1} \in I$, ami azt jelenti, hogy $v_1, \ldots, v_k$ lefogó pontrendszer.

Tegyük föl ezek után, hogy $v_1, \ldots, v_k$ lefogó reprezentánsrendszer, és indirekt módon tegyük fel, hogy $v_1, \ldots, v_k$ nem alkot utat a gráfban, azaz létezik olyan $1 \leqq i \leqq k-1$, hogy $(v_i, v_{i+1}) \notin E$. Ez azt jelenti, hogy található olyan $\mathscr{I}$-beli $[A, B]$ intervallum, hogy $v_i < A \leqq B < v_{i+1}$. De ekkor ezt az $[A, B]$ intervallumot egyik pont sem fogja le, ami ellentmond a feltevésünknek.

Ezzel az állítás mindkét irányát igazoltuk.

Végül térjünk rá az algoritmus utolsó lépésének vizsgálatára. Tekintsünk egy tetszőleges irányított utat gráfunkban! Ezen út súlya (pontjai súlyának összege) az út pontjainak megfelelő minimális lefogó pontrendszer incidenciája. Így nyilvánvaló a következő

4.3. ÁLLÍTÁS. Egy $\mathcal{P}$ pontrendszer maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer akkor és csak akkor, ha $\mathcal{P}$ reprezentánsrendszer, és a gráfban maximális súlyú irányított utat alkot.

Tehát elég igazolni

4.4. ÁLLÍTÁS. Az algoritmus utolsó lépése maximális súlyú utat eredményez.

4.5. MEGJEGYZÉS. Legyen $C_1, \ldots, C_k$ egy maximális út pontjai (sorrendben)! Könnyen látható, hogy ezen út minden $C_1, \ldots, C_i$ kezdő részútja is maximális abban az értelemben, hogy nem létezik olyan $D_1, \ldots, D_{i-1}$, C_i út, melynek súlya nagyobb, mint a $C_1, \ldots, C_i$ úté, ugyanis ekkor a $D_1, \ldots, D_{i-1}$, $C_i, \ldots, C_k$ út súlya is nagyobb lesz, mint a $C_1, \ldots, C_k$ úté, ami ellentmond a maximalitásnak.

Ezek után többet igazolok:

4.6. ÁLLÍTÁS. A gráf pontjainak átsúlyozása után minden pont súlya egyenlő a hozzá vezető maximális súlyú irányított út súlyával.

Bizonyítás. A bizonyítást az út hosszára (m) való teljes indukcióval végzem.

Az $m=1$-re nincs mit bizonyítani.

Legyen C_m az m-edik oszlop egy pontja! Legyen $C_1, \ldots, C_{m-1}$, C_m egy, a C_m-be menő maximális súlyú út! A 4.5. megjegyzés értelmében $C_1, \ldots, C_{m-1}$ út egy, a C_{m-1}-be menő maximális súlyú út, következésképpen C_{m-1} új súlya egyenlő ezen út súlyával. Az indukcióból és a 4.5. megjegyzésből következik, hogy C_{m-1} a C_m egy maximális súlyú őse lesz az átsúlyozás után, így C_m új súlya a C_m régi súlya és a C_{m-1} új súlyának összege lesz, ami az indukció szerint éppen a $C_1, \ldots, C_m$ maximális súlyú út súlya.

5. Az algoritmus lépésszáma

5.1. ÁLLÍTÁS. Az algoritmus lépésszáma $n \cdot \log n$-nel arányos, de a sorbarendezéstől eltekintve $O(n)$-es.

Bizonyítás. Tudjuk ([1]), hogy n elemet $n \cdot \log n$ összehasonlítással sorba lehet rendezni, kevesebbel azonban nem. Így az állítás második részéből következik az első.

Annak igazolását, hogy a második, ill. a harmadik lépés $O(n)$ lépésszámban végrehajtható, az olvasóra bízom.

A negyedik lépés gyorsasága:

A gráf pontjainak megsúlyozása látszólag $O(n^2)$-es feladat (mert minden gráfbeli pont és minden intervallum esetén el kell dönteni, hogy a pont rajta van-e az intervallumon), de felhasználhatjuk, hogy a pontok sorba vannak rendezve. Feltéve, hogy semelyik két pont sem esik egybe, könnyen látható, hogy B pont esetén pontosan annyi, A pont esetén pedig eggyel több intervallumra esik a pont, mint amennyivel több A pont előzi meg, mint B. Így az összes pont (tehát nemcsak a gráf pontjainak) megsúlyozása n-nel arányos lépésszámban elvégezhető.

A gráf felépítésének algoritmusából látszik, hogy az $i+1$-edik oszlop pontjainak őshalmazai egymásba skatulyázott halmazok, méghozzá minél kisebb az elem, annál több őse van. Így az átsúlyozást a következőképpen lehet gyorsan (n-nel arányos lépésszámban) elvégezni.

Tegyük fel, hogy az i-edik oszlopot már átsúlyoztuk! Tekintsük az $i+1$-edik oszlop legnagyobb pontjának őseit! Legyen ezek halmaza H! Keressük meg H maximális súlyú elemeit, majd tekintsük a második legnagyobb pont H' őseit! (Nyilván $H' \supseteq H$.) Ekkor elég megkeresni a $H'-H \cup \{p\}$ halmaz maximális elemeit, ahol p a H egy maximális eleme. Stb. Így az $i+1$-edik oszlop minden pontjának megkaptuk az összes maximális súlyú ősét, és a lépésszám az i-edik oszlop elemszámával arányos. Tehát az egész átsúlyozás $O(n)$ gyorsaságú.

A negyedik lépés többi része már nyilvánvalóan elég gyors.

6. Megjegyzések, általánosítások

Az algoritmus nemcsak egy, hanem az összes „lényegében különböző" maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert megadja.

6.1. *Definíció.* Legyen $\mathscr{P}$, ill. $\mathscr{P}'$ két pontrendszer! $\mathscr{P}$ és $\mathscr{P}$-t lényegében megegyezőnek nevezek, ha $|\mathscr{P}|=|\mathscr{P}'|$ és $\mathscr{P}$, ill. $\mathscr{P}'$ (sorrendben) i-edik eleme ugyanazon intervallumokat fogja le.

Könnyen igazolható a következő

6.2. Állítás. Legyen $\mathscr{P}$ egy maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer! Ekkor létezik a végpontokon olyan $\mathscr{P}'$ pontrendszer, hogy $\mathscr{P}$ és $\mathscr{P}'$ lényegében megegyezik.

6.3. Állítás. Egy k-adik oszlopbeli maximális súlyú pontban végződő k hosszú, csupa piros élekből álló irányított utak az összes lényegében különböző maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert megadják (melyek között lehetnek lényegében azonos pontrendszerek).

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{P}$ tetszőleges maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer! A 6.2. állításból következik, hogy található a végpontokon egy lényegében megegyező $\mathscr{P}'$ pontrendszer. Mivel ez is lefogó rendszer, ezért utat alkot a segédgráfban, és mivel maximális incidenciájú, ezért egy maximális súlyú pontban végződik. A 4.5. megjegyzés segítségével indukcióval könnyen láthatjuk, hogy az út minden éle piros, így $\mathscr{P}'$ a fönti típusú.

Megjegyzések. Az összes lényegében különböző maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer megkeresését már nem lehet n-nel arányosan végrehajtani, mert túl sok lehet belőlük, de a számukkal arányosan igen: Hagyjuk el a nem piros éleket! Fordítsuk meg a megmaradt élek irányítását, és hagyjuk el azon pontokat, amik így egy maximális súlyú pontból irányított úttal nem érhetők el! Ezek után fordítsuk vissza az élek irányítását!

Tegyük fel, hogy az i-edik oszlopig már eljutottunk! Tekintsük az i-edik oszlop egy pontját! Írjuk le az összes ezen pontban végződő már meglevő utat annyiszor, ahány szomszédja van ennek a pontnak, és egészítsük ki őket a szomszédaival! Könnyen látható, hogy a k-adik oszlopig eljutva így valóban megkaptuk az összes lényegében különböző maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszert.

Az algoritmus nem épít az incidencia fogalmára, azaz tetszőlegesen megsúlyozva a végpontokat, megadja a maximális súlyú minimális lefogó pontrendszert.

7. Nyitott kérdések

Legyen adva az n dimenziós euklideszi térben n dimenziós álló téglalapok egy véges halmaza! (Állónak nevezek egy téglalapot, ha élei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.) Keresett maximális incidenciájú minimális lefogó pontrendszer. Ha $n>1$, akkor még minimális lefogó pontrendszert találó algoritmus sem ismeretes. (Az $n>1$ esetén sajnos nem igaz, hogy a lefogó pontok minimális száma egyenlő a független téglák maximális számával, így az $n=1$-re adott algoritmus még akkor sem lenne általánosítható, ha minimális lefogó pontrendszert vagy maximális független téglarendszert sikerülne találni.)

IRODALOM

[1] Lovász, L. és Gács, P., *Algoritmusok* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978).
[2] Ford, L. R. and Fulkerson, D. R., *Flows in Networks* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1962).

(Beérkezett: 1988. május 16.)

ZUBOR ZOLTÁN
ELTE TTK SZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNYI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

AN ALGORITHM FOR STRONG COVERING OF AN INTERVAL SYSTEM

Z. Zubor

The following problem has been stated by A. Telcs in connection with a statistical problem. Let be given a finite system of finite intervals. How to find a covering point system which consists of finite elements and has maximal incidence. In the paper an algorithm is given for the solution of the problem and a generalization of the problem is also formulated.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 309—334

HATÉKONY ALGORITMUSOK NAGYMÉRETŰ HAENKEL- ÉS TOEPLITZ- EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁRA

BECK GYÖRGY

Budapest

A gyakorlatban felmerülő igen sok fizikai és matematikai probléma megoldásához szükség van valamilyen nagyméretű lineáris egyenletrendszer megoldásának meghatározására. Ezen egyenletrendszereknek egy jelentős részét alkotják a *Haenkel-* és a *Toeplitz rendszerek,* melyek megoldására a jelenleg használt algoritmusok közül a $3n^2+O(n)$ műveletigényű eljárások a leghatékonyabbak. Arra a speciális esetre, amikor a megoldandó *Toeplitz rendszer* egyenleteinek a száma kettőhatvány, azaz $n=2^k$, létezik egy hatékonyabb, $2n^2+8n\log_2(n)+O(n)$ műveletigényű megoldási algoritmus is. A dolgozatban ennek az eljárásnak az általánosítását adjuk meg tetszőleges n esetére. A bemutatásra kerülő eljárás műveletigényének felső korlátjaként $2n^2+9n\log_2(n)+O(n)$ adható meg, míg abban a speciális esetben, ha az n kettőhatvány, ez az érték $2n^2+4{,}5n\log_2(n)+O(n)$ lesz.

A dolgozatban megadjuk a kidolgozott algoritmus általánosítását *Haenkel egyenletrendszerek* megoldására, bemutatjuk az eljárás néhány alkalmazási lehetőségét és megadunk néhány mérési eredményt, amelyet az algoritmus számítógépes implementációjával végeztünk, és amelyhez kontroll eljárásként az igen elterjedt IMSL, matematikai-statisztikai programrendszer TOEPLITZ programcsomagját használtuk.

A kidolgozott eljárás nagy elemszámú egyenletrendszerek megoldása esetén nyújt jelentős hatékonyságnövekedést és különösen abban az esetben lehet hatékonyan alkalmazni, ha egyszerre több, azonos együtthatómátrixú *Haenkel-* vagy *Toeplitz egyenletrendszer* megoldására van szükség. Ebben az esetben az első rendszer megoldása után minden egyes új megoldás meghatározásának műveletszükséglete $7n\log_2(n)+O(n)$ lesz, míg az alternatív eljárások esetén ez az érték $n^2+O(n)$.

Ha a kidolgozott eljárásban alapvető szerepet játszó *gyors Fourier transzformációkat* hardware úton hajtjuk végre, további műveletszám csökkenés, s így hatékonyságnövekedés érhető el.

1. Bevezetés

A gyakorlatban felmerülő igen sok fizikai és matematikai probléma megoldáshoz szükség van valamilyen nagyméretű lineáris egyenletrendszer megoldásának meghatározására. Ezen egyenletrendszereknek — a gyakorlati alkalmazás szempontjából — egy igen jelentős részét alkotják az ún. *Haenkel-* és *Toeplitz rendszerek,* azaz az olyan speciális lineáris egyenletrendszerek, melyek együtthatója *Haenkel-,* ill. *Toeplitz mátrix.* Néhány alapvető felhasználási terület: jelfeldolgozás, képfeldolgozás, digitális szűrők tervezése, idősorok elemzése, parciális differenciálegyenletek megoldása.

A *Haenkel-* és *Toeplitz egyenletrendszerek* megoldására jelenleg használt algoritmusok [1, 7, 14, 15] közül a

$$3n^2+O(n) \tag{1.1}$$

műveletigényű eljárások a leghatékonyabbak. (Az (1.1) képletben, n-nel a megoldandó rendszer egyenleteinek számát jelöltük és egy műveletnek egy szorzás vagy osztás és egy összeadás vagy kivonás együttes végrehajtását tekintjük.)

Arra a speciális esetre, amikor a megoldandó *Toeplitz rendszer* egyenleteinek száma kettőhatvány, azaz, ha $n=2^k$, J. JAIN publikált egy hatékonyabb algoritmust [11], amelynek műveletigénye

$$2n^2+8n\log_2(n)+O(n). \tag{1.2}$$

A dolgozat első felében ezen algoritmus általánosítását adjuk meg n nem kettőhatvány esetre, azaz a bemutatandó eljárás már tetszőleges elemszámú *Toeplitz egyenletrendszerek* megoldására is alkalmas. A kidolgozott eljárás műveletigényének egy felső korlátjaként a

$$2n^2+9n\log_2(n)+O(n) \tag{1.3}$$

érték adható meg, míg abban a speciális esetben, ha az n kettőhatvány, az algoritmus műveletigénye

$$2n^2+4{,}5n\log_2(n)+O(n). \tag{1.4}$$

Ezen utolsó eredmény alapján az is látszik, hogy a bemutatásra kerülő eljárás *Jain algoritmusának* nem csupán általánosítása, hanem javítása is.

A dolgozat következő részében — a *Toeplitz-* és *Haenkel mátrixok* közötti összefüggést leíró tételek felhasználásával — megadjuk az első részben kidolgozott eljárás általánosítását *Haenkel egyenletrendszerekre* is.

Ezután a dolgozatban megadott tételek és algoritmusok néhány alkalmazási lehetőségét mutatjuk meg.

A befejező részben néhány olyan mérési eredmény kerül ismertetésre, amelyet az algoritmusok számítógépes implementációjával végeztünk és amelyhez kontroll eljárásként az igen elterjedt IMSL matematikai statisztikai programrendszer TOEPLITZ programcsomagját használtuk.

2. A felhasznált jelölések és legfontosabb fogalmak definíciója

A dolgozatban az egyes fogalmak világosabb megkülönböztetése céljából egymástól eltérő betűtípusokat alkalmazunk. A kvadratikus mátrixokat nagybetűkkel, a skaláris mennyiségeket kisbetűkkel, a vektorokat pedig félkövér kisbetűkkel jelöljük. A mátrixok és a vektorok mellé írt indexkifejezés mindig a komponensek számát jelzi. Mivel legtöbbször indexként n-et kellene írnunk, ezért ezt nem jelezzük, tehát minden olyan mátrixot, ill. vektort, amely mellett nem szerepel index, $n\times n$-esnek, ill. n eleműnek tekintünk. Ezenkívül a következő jeleket és rövidítéseket használjuk:

két vektor komponensenként képzett szorzatának a jele:	$*$
két vektor komponensenként képzett hányadosának a jele:	$\substack{*\\ *}$
az **a** vektor *diszkrét Fourier transzformáltja:*	DFT (**a**)
az **a** vektor *inverz diszkrét Fourier transzformáltja:*	IDFT (**a**)
az **a** vektor *gyors Fourier transzformációval* kiszámított *diszkrét Fourier transzformáltja:*	FFT (**a**)
az **a** vektor *inverz gyors Fourier transzformációval* kiszámított *inverz diszkrét Fourier transzformáltja:*	IFFT (**a**)

Egy vektor fölé írt $\sim$ jel a vektor elemeinek fordított sorrendbe történő rendezését jelzi, azaz:

$$\tilde{\mathbf{a}}(i) = a(n+1-i) \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

A továbbiakban a $\log(n)$ mindig a 2-es alapú logaritmust jelöli, azaz a $\log_2(n)$-t helyettesíti.

2.1. *Definíció.* Jelölje **r**, ill. **c** egy n-edrendű **T** mátrix első sor-, ill. oszlopvektorát. A **T** mátrixot *Toeplitz típusú*nak nevezzük, ha elemeire teljesül a következő feltétel:

$$T(i,j) = \begin{cases} \mathbf{r}(j-i+1) & 1 \leqq i \leqq j \leqq n \\ \mathbf{c}(i-j+1) & 1 \leqq j < i \leqq n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Mivel **r**, ill. **c** a **T** mátrix első sor-, ill. oszlopvektorát jelöli, így nyilvánvalóan $\mathbf{r}(1) = \mathbf{c}(1)$.

2.2. *Definíció.* Jelölje **c** egy n-edrendű **C** mátrix első oszlopvektorát. A **C** mátrixot *cirkuláris*nak nevezzük, ha elemeire teljesül a

$$\mathbf{C}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{c}(i-j+1) & 1 \leqq j \leqq i \leqq n \\ \mathbf{c}(i-j+n+1) & 1 \leqq i < j \leqq n \end{cases} \tag{2.2}$$

feltétel.

2.3. *Definíció.* Legyn **H** egy n-edrendű mátrix, melynek **r** jelöli az első sorvektorát, **c** pedig az utolsó oszlopvektorát. A **H** mátrixot *Haenkel típusú*nak nevezzük, ha elemeire teljesül a

$$\mathbf{H}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{r}(i+j-1) & 2 \leqq i+j \leqq n+1 \\ \mathbf{c}(i+j-n) & n+1 \leqq i+j \leqq 2n \end{cases} \tag{2.3}$$

feltétel.

Mivel **r**, ill. **c** a **H** mátrix első sor-, ill. utolsó oszlopvektorát jelöli, így nyilvánvalóan $\mathbf{r}(n) = \mathbf{c}(1)$.

2.4. *Definíció.* Egy n pozitív egész szám *kettőhatvány burkoló*jának nevezzük azt a legkisebb egész számot, amely kielégíti a következő feltételeket:

(2.4) i) $m \geqq n$

ii) $\exists k > 0$ egész: $2^k = m$.

Egy n szám kettőhatvány burkolója tehát az a legkisebb kettőhatvány, amely már legalább akkora, mint az n.

2.5. *Definíció. Gyors-, ill. inverz gyors Fourier transzformációs algoritmus*nak nevezzük azt az eljárást, amelynek az alkalmazásával egy n elemű vektor diszkrét, ill. *inverz diszkrét Fourier transzformáltja,* $n = 2^k$ esetén

$$\frac{n}{2}\log(n) + O(n) \tag{2.5}$$

művelettel meghatározható [6, 9].

3. Az eljárások matematikai megalapozásához szükséges tételek

A következő részben az eljárások elméleti kialakításához felhasznált, ill. kidolgozott tételeket ismertetjük.

3.1. LEMMA ([14]). Legyen $\mathbf{T}$ egy n-edrendű, erősen nemszinguláris *Toeplitz mátrix,* melynek első sor-, ill. oszlopvektora $\mathbf{r}$ és $\mathbf{c}$. Ekkor a $\mathbf{T}^{-1}$ inverz mátrixnak létezik a következő felbontása:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{d_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

és a felbontásban szereplő $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$, d_{n-1} vektorok, ill. skaláris mennyiség értékét a következő rekurziós képletekkel határozhatjuk meg:

$$d_0 = \mathbf{r}(1) = \mathbf{c}(1); \quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = \mathbf{e}_0 = \mathbf{g}_0 = 0, \tag{3.2}$$

$$0 \leqq k \leqq n-2$$

esetén

$$u_k = -\big(\mathbf{c}(k+2) + \mathbf{a}_k \tilde{\mathbf{e}}_k\big)/d_k; \quad v_k = -\big(\mathbf{r}(k+2) + \mathbf{g}_k \tilde{\mathbf{b}}_k\big)/d_k,$$

$$\mathbf{a}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k + u_k \tilde{\mathbf{b}}_k \\ u_k \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{b}}_{k+1} = \begin{bmatrix} v_k \\ \tilde{\mathbf{b}}_k + v_k \mathbf{a}_k \end{bmatrix},$$

$$d_{k+1} = (1 - u_k v_k) d_k$$

ahol

$$= \big(\mathbf{c}(2), \mathbf{c}(3), \ldots, \mathbf{c}(k+1); \quad \mathbf{g}_k = \big(\mathbf{r}(2), \mathbf{r}(3), \ldots, \mathbf{r}(k+1)\big).$$

3.2. LEMMA ([12]). Legyen $\mathbf{T}$ egy n-edrendű, nemszinguláris *Toeplitz mátrix* és írjuk fel az inverzét a 3.1. lemma szerinti felbontással:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{d_{n-1}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ekkor az inverz mátrixnak létezik a következő particionálása:

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{A}^+ \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}\mathbf{A})/d_{n-1}, \tag{3.3}$$

ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}^+$ felső trianguláris *Toeplitz mátrixok,* míg $\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}^+$ alsó trianguláris *Toeplitz mátrixok* a következő definícióval:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(j, k) &= \tilde{\mathbf{a}}_{n-1}(k-j) \\ \mathbf{B}(j, k) &= \tilde{\mathbf{b}}_{n-1}(j-k) \\ \mathbf{A}^+(j, k) &= \mathbf{a}_{n-1}(j-k) + \delta_{j-k} \\ \mathbf{B}^+(j, k) &= \mathbf{b}_{n-1}(k-j) + \delta_{j-k} \quad 1 \leqq j, k \leqq n \end{aligned} \tag{3.4}$$

úgy, hogy minden $\mathbf{g}_m$ vektorra

$$\mathbf{g}_m(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t \leqq 0$$

és

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad k = 0 \\ 0, & \text{ha} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

3.1. TÉTEL. Legyen $\mathbf{T}$ egy n-edrendű alsó trianguláris *Toeplitz mátrix*, melynek első oszlopvektora $\mathbf{t}$. Legyen $\mathbf{f}$ egy tetszőleges n elemű oszlopvektor és m az n-nek kettőhatvány burkolója.

Definiáljuk a $\mathbf{c}_{2m}$ vektort a következő képlettel:

$$\mathbf{c}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{t}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n < i \leqq 2m. \end{cases}$$

Ekkor a

$$\mathbf{Tf}$$

szorzatvektor megkapható a

$$\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}$$

szorzatvektor első n komponenseként, azaz

$$\mathbf{Tf} = [\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}]_1^n.$$

Bizonyítás. Legyen $1 \leqq i \leqq n$, és tekintsük a

$$\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}(i) = \sum_{k=1}^{2m} \mathbf{C}_{2m}(i, k)\mathbf{f}_{2m}(k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{C}_{2m}(i, k) \tag{3.5}$$

$$\mathbf{f}_{2m}(k) + \sum_{k=n+1}^{2m} \mathbf{C}_{2m}(c, k)\mathbf{f}_{2m}(k).$$

Az $\mathbf{f}_{2m}$ definíciója miatt a (3.5) jobb oldalán a 2. tag nulla, így

$$\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}(i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{C}_{2m}(i, k)\mathbf{f}(k) = \sum_{1 \leqq k \leqq i \leqq n} \mathbf{c}_{2m}(i-k+1)\mathbf{f}(k) + \tag{3.6}$$

$$+ \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} \mathbf{c}_{2m}(i-k+2m+1)\mathbf{f}(k).$$

Ez utóbbi egyenlőségét azért írhattuk fel, mert $\mathbf{C}_{2m}$ cirkuláris mátrix. Azonban mivel $n \leqq k \leqq 1$, $1 \leqq i \leqq n$ és $m \geqq n$ így (3.6) jobb oldalának első összegzésében

$$1 \leqq i-k+1 \leqq n,$$

a másodikban pedig

$$n < i-k+2m+1 \leqq 2m.$$

Ezért a $\mathbf{c}_{2m}$ definíciója alapján a (3.6) egyenlőséget a következő alakban írhatjuk fel:

$$\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}(i) = \sum_{1 \leqq k \leqq i \leqq n} \mathbf{t}(i-k+1)\mathbf{f}(k),$$

és ez a $\mathbf{T}$ mátrix alsó trianguláris volta miatt éppen a $\mathbf{Tf}$ szorzatvektor i-edik komponense.

A továbbiakban következő 3.2, 3.3 és 3.4. tételek igen hasonlóak a 3.1. tételhez és bizonyításuk a 3.1. tétel bizonyítása alapján igen egyszerűen elvégezhető.

3.2. TÉTEL. Legyen $\mathbf{T}$ egy n-edrendű felső trianguláris *Toeplitz mátrix*, melynek első sorát jelöljük $\mathbf{t}$-vel. Legyen továbbá $\mathbf{f}$ egy tetszőleges n elemű oszlopvektor és legyen m az n kettőhatvány burkolója. Definiáljuk az $\mathbf{r}_{2m}$ és $\mathbf{f}_{2m}$ vektorokat a következő képletekkel:

$$\mathbf{r}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{t}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{f}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{f}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{3.8}$$

A $\mathbf{C}_{2m}$ legyen egy olyan $2m$-edrendű cirkuláris mátrix, melynek $\mathbf{r}_{2m}$ az első sorvektora.

Ekkor a $\mathbf{Tf}$ szorzatvektor megkapható a $\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}$ mátrix-vektor szorzással keletkezett szorzatvektor első n komponenseként, azaz

$$\mathbf{Tf} = [\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}]_1^n. \tag{3.9}$$

3.3. TÉTEL. Legyen $\mathbf{T}$ egy olyan n-edrendű alsó trianguláris Toeplitz mátrix, amelynek a főátlójában 0 áll. Legyen $\mathbf{T}$ első oszlopvektora $\mathbf{t}$, az $\mathbf{f}$ pedig egy tetszőleges n elemű oszlopvektor, m legyen az n kettőhatvány burkolója és

$$\mathbf{c}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i = 1 \\ 0, & 2 \leqq i \leqq 2m-n+1 \\ \mathbf{t}(i-2m+n) & 2m-n+2 \leqq i \leqq 2m \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{f}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{f}(i) & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{3.11}$$

Legyen továbbá $\mathbf{C}_{2m}$ egy $2m$-edrendű cirkuláris mátrix, melynek első oszlopvektora $\mathbf{c}_{2m}$.
Ekkor a $\mathbf{Tf}$ szorzatvektor megkapható a $\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}$ szorzatvektor utolsó n komponenseként, azaz

$$\mathbf{Tf} = [\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}]_{2m-n+1}^{2m}. \tag{3.12}$$

3.4. TÉTEL. Legyen $\mathbf{T}$ egy olyan n-edrendű felső trianguláris *Toeplitz mátrix*, amelynek a fődiagonálisában 0 áll. Jelöljük $\mathbf{t}$-vel a $\mathbf{T}$ első sorvektorát, és $\mathbf{f}$ pedig jelöljön egy tetszőleges n elemű oszlopvektort.

Legyen m az n kettőhatvány burkolója és definiáljuk a $\mathbf{c}_{2m}$, ill. $\mathbf{f}_{2m}$ vektorokat a következőképpen:

$$\mathbf{c}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i = 1 \\ \mathbf{t}(n+2-i), & 2 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{f}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{f}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Legyen továbbá $\mathbf{C}_{2m}$ egy olyan $2m$-edrendű cirkuláris mátrix, amelynek az első oszlopvektora $\mathbf{c}_{2m}$.

Ekkor a **Tf** szorzatvektor megkapható a $\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}$ szorzatvektor $n+1, n+2, \ldots, 2n$-edik komponensei által alkotott vektorként, azaz

$$\mathbf{Tf} = [\mathbf{C}_{2m}\mathbf{f}_{2m}]_{n+1}^{2n}. \tag{3.15}$$

3.3. LEMMA ([4]). Legyen **C** egy tetszőleges n-edrendű cirkuláris mátrix, melynek első oszlopvektora **c**. Legyen továbbá **f** egy tetszőleges n elemű oszlopvektor. Ekkor

$$\mathbf{Cf} = \mathrm{IDFT}\,(\mathrm{DFT}\,(\mathbf{c}) * \mathrm{DFT}\,(\mathbf{f})), \tag{3.16}$$

tehát egy cirkuláris mátrix és egy vektor szorzatát megkapjuk a mátrix első oszlopvektora és a szorzandó vektor komponenseként összeszorzott *diszkrét Fourier transzformáltjai inverz Fourier transzformáltjaként*. Ha a szükséges (inverz) *diszkrét Fourier transzformációkat* (az inverz) *gyors Fourier transzformációs algoritmussal* számítjuk ki, akkor a szorzatvektor meghatározásának műveletigénye:

$$3\frac{n}{2}\log(n)+O(n). \tag{3.17}$$

3.5. TÉTEL. Egy n pozitív egész szám kettőhatvány burkolóját a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$m = \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad n = 1 \\ 2^{1+\mathrm{int}(\log(n-1))}, & \text{ha} \quad n > 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

ahol m a keresett kettőhatvány burkoló és az „int" jelölés a zárójelben lévő kifejezés egész részét jelenti.

Bizonyítás.

i) $n=1$ esetén az $m=2$ nyilvánvalóan teljesíti a (2.4) feltételrendszert.

ii) $n>1$ esetén

a) ha $\exists k>0$ egész:

$$n = 2^k,$$

akkor az $n>1$ feltétel teljesülése miatt felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{n}{2} \leqq n-1 < n.$$

Tekintsük ezután az egyenlőtlenség kettes alapú logaritmusát:

$$\log\left(\frac{n}{2}\right) \leqq \log(n-1) < \log(n).$$

Az $n=2^k$ miatt

$$k-1 \leqq \mathrm{int}\,(\log(n-1)) < k,$$

és mivel $k-1$ és k is egész, ezért

$$k-1 \leqq \log(n-1) < k.$$

Ez az egyenlőtlenség viszont csak akkor teljesül, ha

$$\operatorname{int}(\log(n-1)) = k-1,$$

s így

$$m = 2^{1+\operatorname{int}(\log(n-1))} = 2^{1+k-1} = 2^k.$$

Az $n=2^k$-nak nyilvánvalóan a (3.18) alapján kapott $m=2^k$ kettőhatvány burkolója, tehát most már csak az $n\neq 2^k$ esetet kell megvizsgálni.

b) ha $n>1$ és $n\neq 2^k$, akkor keressünk egy olyan $k>0$ egész számot, amelyre teljesül:

$$2^k < n < 2^{k+1}.$$

Mivel $n>1$, így ezt az egyenlőtlenséget

$$2^k \leqq n-1 < 2^{k+1}$$

alakban is felírhatjuk. Ha ezek után az egyenlőtlenség kettes alapú logaritmusát vizsgáljuk, a

$$k \leqq \log(n-1) < k+1$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel k és $k+1$ két egymást követő egész szám, így a fenti egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha

$$\operatorname{int}(\log(n-1)) = k.$$

Így viszont a (3.18) alapján az

$$m = 2^{1+\operatorname{int}(\log(n-1))} = 2^{1+k} = 2^{k+1}.$$

számot kapjuk, ami a

$$2^k < n < 2^{k+1}$$

kiindulási feltételünk mellett nyilvánvalóan a (2.4)-es kritériumokat teljesítő burkoló.

3.6. TÉTEL. Legyen $\mathbf{E}$ az n-edrendű egységmátrix, $\mathbf{x}$ egy tetszőleges n elemű oszlopvektor és $\mathbf{M}$ pedig egy olyan n-edrendű mátrix, amelyre teljesül:

$$\mathbf{M}(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i+j = n+1 \\ 0, & \text{ha } i+j \neq n+1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Ekkor

$$\text{i)}\ \mathbf{MM} = \mathbf{E} \tag{3.20}$$

$$\text{ii)}\ \mathbf{Mx} = \tilde{\mathbf{x}}.$$

Bizonyítás.

i) Legyen $1 \leqq i, j \leqq n$

$$\mathbf{MM}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(i,k)\mathbf{M}(k,j) =$$

$$= \mathbf{M}(i, n+1-i)\mathbf{M}(n+1-i, j) = \mathbf{M}(n+1-i, j) = \delta_{i,j},$$

tehát

$$\mathbf{MM}(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ez viszont pontosan azt jelenti, hogy

$$\mathbf{M}\mathbf{M} = \mathbf{E}.$$

ii) Legyen $1 \leqq i \leqq n$

$$\mathbf{Mx}(i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(i, k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}(i, n+1-i)\mathbf{x}(n+1-i) =$$

$$= \mathbf{x}(n+1-i) = \tilde{\mathbf{x}}(i).$$

3.7. TÉTEL. Legyen $\mathbf{H}$ egy olyan n-edrendű *Haenkel mátrix*, amelynek első sor-, ill. utolsó oszlopvektora $\mathbf{r}$ és $\mathbf{c}$. Legyen továbbá $\mathbf{M}$ a (3.19) képlettel definiált mátrix. Ekkor a

$$\mathbf{D} = \mathbf{HM} \tag{3.21}$$

képlettel definiált $\mathbf{D}$ mátrix:

i) *Toeplitz mátrix* és

ii) az első sor-, ill. oszlopvektora $\tilde{\mathbf{r}}$, ill. $\mathbf{c}$.

Bizonyítás. Legyen $1 \leqq i, j \leqq n$

$$\mathbf{D}(i, j) = \mathbf{HM}(i, j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{H}(i, k)\mathbf{M}(k, j) = \mathbf{H}(i, n+1-j)$$

$$\mathbf{M}(n+1-i, j) = \mathbf{H}(i, n+1-j).$$

Tehát $1 \leqq i, j \leqq n$ esetén

$$\mathbf{D}(i, j) = \mathbf{H}(i, n+1-j). \tag{3.22}$$

Legyen $1 \leqq i \leqq j \leqq n$, ekkor

$$\mathbf{D}(i, j) = \mathbf{H}(i, n+1-j) = \mathbf{r}(i+n+1-j-1) = \mathbf{r}(i-j+n) = \tilde{\mathbf{r}}(j-i+1). \tag{3.23}$$

Ha $1 \leqq j \leqq i \leqq n$, akkor

$$\mathbf{D}(i, j) = \mathbf{H}(i, n+1-j) = \mathbf{c}(i+n+1-j-n) = \mathbf{c}(i-j+1). \tag{3.24}$$

A kapott (3.23) és (3.24) egyenlőségek értelmében a $\mathbf{D}$ mátrix elemeire a

$$\mathbf{D}(i, j) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}(j-i+1), & 1 \leqq i \leqq j \leqq n \\ \mathbf{c}(i-j+1), & 1 \leqq j \leqq i \leqq n, \end{cases}$$

feltétel teljesül, ami viszont a *Toeplitz mátrixok* definíciója alapján éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{D}$ egy olyan *Toeplitz mátrix*, amelynek első sorvektora $\tilde{\mathbf{r}}$ és az első oszlopvektora pedig $\mathbf{c}$.

3.4. LEMMA ([6]). A *gyors Fourier transzformációs algoritmus* alkalmazásával két, n elemű *valós* vektor *diszkrét Fourier transzformáltja*

$$\frac{n}{2}\log(n)+O(n)$$

művelettel meghatározható, abban az esetben, ha n kettőhatvány.

3.5. LEMMA ([6]). A *gyors Fourier transzformációs algoritmus* alkalmazásával egy $2n$ elemű *valós* vektor *diszkrét Fourier transzformáltját*

$$\frac{n}{2}\log(n)+O(n)$$

művelettel meghatározhatjuk, abban az esetben, ha n kettőhatvány.

3.6. LEMMA ([6]). Legyen **a** és **b** két n elemű vektor, melyeknek az *inverz diszkrét Fourier transzformáltja valós.*

Az *inverz gyors Fourier transzformáció* alkalmazásával az **a** és **c** vektor *inverz diszkrét Fourier transzformáltjának* meghatározásához csupán

$$\frac{n}{2}\log(n)+O(n)$$

műveletvégzés szükséges, abban az esetben, ha n kettőhatvány.

3.7. LEMMA ([4]). Egy ciklikus mátrix akkor és csak akkor nemszinguláris, ha az első oszlopvektorának *diszkrét Fourier transzformáltja* nem tartalmaz egyetlen nulla komponenst sem.

3.8. LEMMA ([4]). Legyen **C** egy nemszinguláris cirkuláris mátrix és jelöljük **c**-vel a **C** első oszlopvektorát. Ekkor **C** inverze is cirkuláris mátrix lesz és az inverz mátrix — **a**-val jelölt — első oszlopvektorát a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$\mathbf{a} = \mathrm{IDFT}(\mathbf{1} \overset{*}{*} \mathrm{DFT}(\mathbf{c})).$$

3.9. LEMMA ([2]). Tetszőleges **a** vektor esetén

$$\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{a})) = \mathrm{DFT}(\mathrm{IDFT}(\mathbf{a})) = \mathbf{a}.$$

4. A Toeplitz egyenletrendszerek megoldására szolgáló eljárás elméleti kidolgozása

Tekintsük a

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{y} \tag{4.1}$$

lineáris egyenletrendszert, amelyben **y** egy n elemű oszlopvektor és a **T** pedig egy erősen nemszinguláris n-edrendű *Toeplitz mátrix,* azaz ha **r** és **c** jelöli a **T** első sor- és oszlopvektorát, akkor

$$\mathrm{T}(i,j) = \begin{cases} \mathbf{r}(j-i+1) & 1 \leqq i \leqq j \leqq n \\ \mathbf{c}(i-j+1) & 1 \leqq j \leqq i \leqq n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Az **x** megoldásvektor meghatározására kidolgozott eljárás két részből áll. Az első részben egy rekurziós képlettel meghatározzuk a **T** együtthatómátrix inverzének első sorát és oszlopát, majd a második részben az inverz mátrix egy — a már meghatározott első sor és oszlop elemeit felhasználó — speciális felbontását használva a *gyors Fourier transzformációs algoritmus* alkalmazásával számítjuk ki a (4.1) lineáris egyenletrendszer megoldását.

Az eljárásunk első lépéseként tehát az együtthatómátrix inverzének első sorát és oszlopát határozzuk meg. Mivel a **T** együtthatómátrix erősen nemszinguláris *Toeplitz mátrix,* ezért alkalmazhatjuk a 3.1. lemmá-t, és az inverz mátrix

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{d_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

felbontását használva, a (3.2) képletek alapján kiszámíthatjuk a d_{n-1}, $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ értékeket.

Tekintsük ezután az inverz mátrixnak a

$$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{A}^+\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}\mathbf{A})/d_{n-1} \tag{4.4}$$

felbontását.

Mivel **T** erősen nemszinguláris *Toeplitz mátrix,* így alkalmazhatjuk a 3.2. lemmát. Ennek alapján érvényes a (4.4) particionálás és az $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{B}$, ill. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^+$ mátrixok, az első lépésben meghatározott $\mathbf{a}_{n-1}$ és $\mathbf{b}_{n-1}$ vektorokból felépített alsó-, ill. felső trianguláris *Toeplitz mátrixok,* valamint a d_{n-1} is ugyanaz a skaláris érték, amelyet az első lépésben meghatároztunk.

A **T** mátrix nemszinguláris voltát kihasználva kiindulási egyenletünket

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} \tag{4.5}$$

alakra hozhatjuk.

Ha bevezetjük a $g = 1/d_{n-1}$ jelölést, akkor a (4.5) egyenletet a (4.4) felhasználásával

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{A}^+\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{y} = g(\mathbf{A}^+\mathbf{B}^+\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{y}) \tag{4.6}$$

alakban is felírhatjuk.

Vezessük be a következő szorzatvektor jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{B}^+\mathbf{y} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{A}\mathbf{y} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{A}^+\mathbf{p} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{B}\mathbf{q}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ekkor (4.6) alapján az **x** megoldásvektort az

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{r} - \mathbf{z}) \tag{4.8}$$

képlettel határozhatjuk meg.

A megadott képletek alapján jól látható, hogy az $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ és d_{n-1} kiszámítása után az egyenletrendszer megoldásához már csak a **p**, **q**, **r** és **z** vektorok meghatározása szükséges, amit a (4.7) képletek alapján egyszerű mátrix-vektor szorzással érhetünk el. Ha ezeket a mátrix-vektor szorzásokat a hagyományos úton végezzük el, akkor az eljárásunk műveletigénye jóval nagyobb lesz a jelenleg alkalmazott $3n^2$ műveletszükségletű algoritmusokénál, hiszen ekkor csupán a **p**, **q**, **r** és **z** vektorok meghatározása $4n^2$ műveletet igényelne. Azonban kihasználva az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{B}^+$

mátrixok speciális tulajdonságait és alkalmazva a 3.1—3.4. tételeket, a megoldás kiszámításához szükséges műveletek számát jelentősen csökkenthetjük.

Tekintsük először a

$$\mathbf{B}^+\mathbf{y} \tag{4.9}$$

szorzást.

A 3.2. lemma és az ott megadott (3.4) képletek alapján a $\mathbf{B}^+$ mátrix egy n-edrendű felső trianguláris *Toeplitz mátrix,* amelynek a — $\mathbf{b}^+$-szal jelölt — első sorvektora az eljárásunk első lépésében meghatározott $\mathbf{b}_{n-1}$ (a $\mathbf{T}^{-1}$ inverz mátrix első sorvektora) alapján a következő lesz:

$$\mathbf{b}^+(i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \mathbf{b}_{n-1}(i-1), & 2 \leqq i \leqq n. \end{cases} \tag{4.10}$$

Mivel $\mathbf{B}^+$ egy felső trianguláris *Toeplitz mátrix,* így a (4.9) szorzás végrehajtására alkalmazhatjuk a 3.2. tétel eredményeit. Legyen m az n kettőhatvány burkolója — ezt a 3.5. tétel alapján egyszerűen meghatározhatjuk — és jelöljük $\mathbf{c}_{2m}$-mel, ill. $\mathbf{y}_{2m}$-mel a $\mathbf{b}^+$ és $\mathbf{y}$ $2m$-edrendű kiterjesztését, melyek a 3.5. tétel alapján a következők:

$$\mathbf{c}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{b}^+(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m \end{cases} \tag{4.11}$$

és

$$\mathbf{y}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{y}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{4.12}$$

Legyen $\mathbf{B}_{2m}^+$ a $\mathbf{c}_{2m}$ mint első sorvektor által meghatározott circkuláris mátrix, ekkor a 3.5. tétel alapján teljesül a következő egyenlőség:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^+\mathbf{y} = [\mathbf{B}_{2m}^+\mathbf{y}_{2m}]_1^n,$$

azaz a keresett $\mathbf{p}$ szorzatvektort megkaphatjuk a $\mathbf{B}_{2m}^+$ cirkuláris mátrix és az $\mathbf{y}_{2m}$ vektor szorzatának első n komponenseként. Egy cirkuláris mátrix és egy vektor szorzatát viszont a 3.3. lemma felhasználásával a diszkrét *Fourier transzformáltak* segítségével egyszerűen meghatározhatjuk. A 3.3. lemma alkalmazásához a cirkuláris mátrix első oszlopvektorára van szükség. Ez azonban az ismert első sorvektor alapján egyszerűen megkapható. Ha $\mathbf{b}_{2m}^+$-mel jelöljük a $\mathbf{B}_{2m}^+$ cirkuláris mátrix első oszlopvektorát, akkor ez, a (4.11)-es képlettel megadott első sorvektor alapján — nyilvánvalóan — a következő lesz:

$$\mathbf{b}_{2m}^+(i) = \begin{cases} \mathbf{c}_{2m}(1), & i = 1 \\ \mathbf{c}_{2m}(2m+2-i), & 2 \leqq i \leqq 2m. \end{cases}$$

Ha felhasználjuk a (4.10) képletet is, akkor a $\mathbf{b}_{2m}^+$ vektort a $\mathbf{b}_{n-1}$ elemei felhasználásával a következő alakban írhatjuk fel:

$$\mathbf{b}_{2m}^+(i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & 2 \leqq i \leqq 2m-n+1 \\ \mathbf{b}_{n-1}(2m+1-i), & 2m-n+2 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{4.13}$$

Az így megkapott $\mathbf{b}_{2m}^{+}$ vektor felhasználásával a 3.3. lemma alapján a $\mathbf{p}$ szorzatvektorra a következő képletet írhatjuk fel:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{y} = [\mathbf{B}_{2m}^{+}\mathbf{y}_{2m}]_1^n = [\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{b}_{2m}^{+}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_1^n .$$

Mivel az m kettőhatvány, így a kapott képlet jobb oldalán álló diszkrét *Fourier transzformáltak,* ill. inverz diszkrét *Fourier transzformált* meghatározására alkalmazhatjuk a *gyors Fourier transzformációs algoritmust:*

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_1^n \tag{4.14}$$

és a *gyors Fourier transzformáció* 2.5. definíciója alapján a keresett $\mathbf{p}$ vektort

$$3\frac{2m}{2}\log(2m)+O(m)$$

azaz

$$3m\log(m)+O(m) \tag{4.15}$$

művelettel kiszámíthatjuk.

Ez már egy használható eredmény, hisz „nagy n-ek” esetén a hagyományos mátrix-vektor szorzás n^2 művelete és a most kapott $3m\log(m)+O(m)$ között már igen nagy különbség lehet.

A 3. fejezetben megadott tételek alapján a további 3 mátrix-vektor szorzás is teljesen hasonló módon és hasonló műveletszükséglettel végezhető el, s így a $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{z}$ szorzatvektorokra a következő képletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathbf{A}_{2m}\mathbf{y}_{2m}]_1^n = [\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{a}_{2m}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_1^n = \\ &= [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}((\mathbf{a}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m})))]_1^n .\end{aligned} \tag{4.16}$$

A $\mathbf{q}$ vektor meghatározása a (2.5) alapján most is

$$3m\log(m)+O(m)$$

műveletvégzést igényel.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{A}^{+}\mathbf{p} = [\mathbf{A}_{2m}^{+}\mathbf{p}_{2m}]_1^n = [\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{a}_{2m}^{+}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{p}_{2m}))]_1^n = \\ &= [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{p}_{2m}))]_1^n ,\end{aligned} \tag{4.17}$$

és az $\mathbf{r}$ szorzatvektor meghatározása

$$3m\log(m)+O(m) \tag{4.18}$$

műveletvégzést igényel.

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathbf{B}_{2m}\mathbf{q}_{2m}]_1^n = \\ &= [\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{b}_{2m}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{q}_{2m})]_1^n = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_1^n ,\end{aligned} \tag{4.19}$$

és a $\mathbf{z}$ vektor meghatározásának műveletigénye:

$$3m\log(m)+(m). \tag{4.20}$$

Ezen eredmények alapján tehát megkaptuk az $\mathbf{x}$ megoldásvektort definiáló (4.8) képletben szereplő $\mathbf{r}$ és $\mathbf{z}$ vektorokat. Mivel a g skaláris mennyiséget a

$$g = 1/d_{n-1} \tag{4.21}$$

képlettel definiáltuk és a d_{n-1}-et az eljárás első lépésében már meghatároztuk, így a kiindulási (4.1) lineáris egyenletrendszer $\mathbf{x}$ megoldásvektorának meghatározásához a (4.8) képlet alapján csupán a

$$g(\mathbf{r}-\mathbf{z})$$

kifejezés kiszámítását kell elvégznünk, a már meghatározott $\mathbf{r}$, $\mathbf{z}$, g vektorok, ill. skaláris mennyiség segítségével.

5. A megoldási algoritmus fő lépései, a szükséges műveletigény meghatározása

A 4. részben megadott eredmények alapján a

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{y} \tag{5.1}$$

erősen nemszinguláris *Toeplitz mátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására a következő lépésekből álló algoritmust adhatjuk meg:

1. *Lépés.* Az $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$, d_{n-1} értékek meghatározása.
A $\mathbf{T}^{-1}$ inverz mátrix (4.3) felbontásában szereplő $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ vektorokat és a d_{n-1} skalár értékét a 3.1. lemma (3.2) képletei alapján határozzuk meg.

Az első lépés műveletigénye:
Az algoritmus első lépésében a (3.2) rekurziós képleteket alkalmazzuk. Az $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ és d_{n-1} kiszámításának teljes műveletszükséglete:

$$2n^2+O(n)$$

lesz. (Egy művelet=egy multiplikatív *és* egy additív művelet.)

2. *Lépés.* Az n kettőhatvány burkolójának meghatározása.
Az algoritmus további lépéseihez szükségünk van az egyenletszám kettőhatvány burkolójának a meghatározásához. Az m-mel jelölt kettőhatvány burkolót a 3.5. tétel alapján a (3.18) képlet segítségével számítjuk ki.
Ennek a lépésnek a műveletszükséglete a többi lépéshez képest elhanyagolható.

3. *Lépés.* A $\mathbf{p}=\mathbf{B}^+\mathbf{y}$, $\mathbf{q}=\mathbf{Ay}$, $\mathbf{r}=\mathbf{A}^+\mathbf{p}$ és a $\mathbf{z}=\mathbf{Bq}$ szorzatvektorok meghatározása.
Ha a kiszámítandó szorzatvektorok meghatározására a 4. fejezetben megadott (4.14), (4.16), (4.17) és (4.19)-es képleteket használjuk, akkor — szintén a 4. fejezetben belátott eredmények alapján — a 3. lépés teljes műveletigénye

$$12m \log(m)+O(m)$$

lesz.

4. *Lépés.* Az

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r} - \mathbf{z})/d_{n-1} \tag{5.2}$$

kiszámítása.

A kiindulási (5.1) egyenletrendszer $\mathbf{x}$ megoldásvektorát a 4. lépésben határozzuk meg az eljárásunk 1. lépésében kiszámított d_{n-1}, és a 3. lépésben meghatározott $\mathbf{r}$, ill. $\mathbf{z}$ vektorok segítségével a felírt (5.2) képlettel.

Ennek a lépésnek a műveletszükséglete:

$$n$$

lesz.

A most megadott „4 lépéses" eljárás az eddig belátott eredmények alapján a következő tétel feltételeit teljesíti:

5.1. TÉTEL. Az 5. fejezetben megadott 4 lépésből álló algoritmus:

i) a

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{y}$$

n-edrendű, erősen nemszinguláris *Toeplitz mátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszer megoldását számítja ki, és

ii) a megoldáshoz szükséges műveletek száma:

$$2n^2 + 12m \log(m) + O(m). \tag{5.3}$$

Az (5.3) műveletigény az egyes lépésekben kapott műveletszükségletek összege, amelynek egy felső korlátjaként

$$2n^2 + 24 \log(n) + O(n) \tag{5.4}$$

érték adható meg.

6. A megoldási algoritmus hatékonyságának további javítása

Az 5. részben megadott megoldási algoritmus műveletszükségletét lényegében az 1. lépés rekurziós képleteinek kiszámításához szükséges $2n^2$ művelet, továbbá a mátrix-vektor szorzások elvégzéséhez alkalmazott 12 *gyors Fourier-, ill. inverz gyors Fourier transzformáció* műveletigénye adja.

Az algoritmus hatékonyságának javítását, azaz a műveletigény redukálását a 3. részben megadott eredmények alapján a felhasznált *gyors Fourier-*, ill. *inverz gyors Fourier transzformációk* számának csökkentésével lehet elérni.

A megoldás kiszámításához szükséges (inverz) *gyors Fourier transzformációk* számát a 3.3. és 3.4. tételek alkalmazásával 12-ről 9-re csökkentjük, míg a 3.4, 3.5. és 3.6. lemmák felhasználásával a megoldási algoritmust úgy módosíthatjuk, hogy az eljárás teljes műveletigénye:

$$2n^2 + 4{,}5m \log(m) + O(m) \tag{6.1}$$

lesz.

A 6. fejezet további részében ezt a javított algoritmust ismertetjük.

Vizsgáljuk meg először a végrehajtandó 4 mátrix-vektor szorzásra felírt egyenlőségét ((4.14), (4.16), (4.17), (4.19)):

$$(6.2)\qquad \mathbf{p} = \mathbf{B}^+\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_1^n$$

$$(6.3)\qquad \mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_1^n$$

$$(6.4)\qquad \mathbf{r} = \mathbf{A}^+\mathbf{p} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{p}_{2m}))]_1^n$$

$$(6.5)\qquad \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_1^n.$$

Az első amit észrevehetünk a felírt képletek alapján az, hogy a (6.2)-ben és (6.3)-ban is szerepel az

$$\mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m})$$

kifejezés.

Vizsgáljuk meg ezután a

$$(6.6)\qquad \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q}$$

szorzatot. A 3.2. lemma alapján a $\mathbf{B}$ egy n-edrendű alsó trianguláris *Toeplitz mátrix*, amelynek az első oszlopvektorát az első lépésben meghatározott $\mathbf{b}_{n-1}$ segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$(6.7)\qquad \mathbf{b}(i) = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ \mathbf{b}_{n-1}(n-i+1), & 2 \leqq i \leqq n. \end{cases}$$

Ha a (6.6) szorzás végrehajtására a korábban alkalmazott 3.1. tétel helyett a 3.3. tételt használjuk, akkor a $\mathbf{b}$, $2m$-edrendű kiterjesztése a következő lesz:

$$(6.8)\qquad \mathbf{w}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i = 1 \\ 0, & 2 \leqq i \leqq 2m-n+1 \\ \mathbf{b}(i-2m+n), & 2m-n+2 \leqq i \leqq 2m. \end{cases}$$

A $\mathbf{q}$ vektort most is a

$$(6.9)\qquad \mathbf{q}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{q}(i), & i \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m \end{cases}$$

képlettel definiáljuk.

A $\mathbf{w}_{2m}$-re felírt (6.8)-as képletet a (6.7) alapján

$$(6.10)\qquad \mathbf{w}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i = 1 \\ 0, & 2 \leqq i \leqq 2m-n+1 \\ \mathbf{b}_{n-1}(2m-i+1) & 2m-n+2 \leqq i \leqq 2m \end{cases}$$

alakra hozhatjuk. Ha w_{2m}-mel jelöljük azt a $2m$-edrendű cirkuláris mátrixot, amelynek az első oszlopvektora $\mathbf{w}_{2m}$, akkor a 3.3. tétel alapján a (6.6) szorzásra a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$(6.11)\qquad \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathbf{w}_{2m}\mathbf{q}_{2m}]_{2m-n+1}^{2m}.$$

A (6.11)-re a 3.3. lemma és a *gyors Fourier transzformáció* definíciója alapján, a korábbiakhoz hasonlóan a következő egyenlőség írható fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q} &= [\mathbf{w}_{2m}\mathbf{q}_{2m}]_{2m-n+1}^{2m} = [\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{w}_{2m}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_{2m-n+1}^{2m} = \\ &= [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{w}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_{2m-n+1}^{2m}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Annak az oka, hogy miért kellett a $\mathbf{z}$ szorzatvektor kiszámítására a korábban megkapott (6.5) egyenlőség helyett egy másik képletet kidolgozni rögtön látszik, ha megnézzük a $\mathbf{b}_{2m}^{+}$ és $\mathbf{w}_{2m}$ vektorok definícióját. Mindkét vektor ugyanabból a $\mathbf{b}_{n-1}$ vektorból épül fel és a két definíció is csak egy pontban, az $i=1$ esetben tér el. De mivel $\mathbf{w}_{2m}(1)$ tetszőleges lehet, így a $\mathbf{b}_{2m}^{+}(1)=1$ értéket is használhatjuk, és a $\mathbf{z}$ kiszámítására a következő képletet írhatjuk fel:

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_{2m-n+1}^{2m}. \tag{6.13}$$

A most kapott eredmények alapján azt láthatjuk, hogy ha a megoldási eljárás során a $\mathbf{p}$ vektort a (6.2) képlettel határozzuk meg, és a számítás során a $\mathbf{b}_{2m}^{+}$ *diszkrét Fourier transzformáltját* egy $2m$ elemű segédvektorban tároljuk, akkor ezután a $\mathbf{z}$ vektor (6.13) képlet alapján történő kiszámításakor a szereplő $\mathbf{b}_{2m}^{+}$-et nem kell újra transzformálnunk, és így a szorzatvektor meghatározásához csak két (inverz) *gyors Fourier transzformációt* kell elvégeznünk.

A most bemutatott algoritmus módosításhoz eléggé hasonló módon lehet még egy *Fourier transzformációt* kiküszöbölni.

A (6.4) képletben szereplő $\mathbf{a}_{2m}^{+}$ vektor a megoldási algoritmus első lépésében meghatározott $\mathbf{a}_{n-1}$ vektorból a következőképpen épül fel:

$$\mathbf{a}_{2m}^{+}(i) = \begin{cases} 1, & i=1 \\ \mathbf{a}_{n-1}(i-1), & 2 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m. \end{cases} \tag{6.14}$$

Tekintsük most a

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{6.15}$$

szorzatot. A 3.2. lemma alapján az $\mathbf{A}$ egy n-edrendű felső trianguláris *Toeplitz mátrix*, amelynek az első sorvektorát az első lépésben meghatározott $\mathbf{a}_{n-1}$ segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{a}(i) = \begin{cases} 0, & i=1 \\ \mathbf{a}_{n-1}(n-i+1), & 2 \leqq i \leqq n. \end{cases} \tag{6.16}$$

Ha a (6.15) szorzás végrehajtására a korábban alkalmazott 3.2. tétel helyett a 3.4. tételt használjuk, akkor az $\mathbf{a}$ $2m$-edrendű kiterjesztése:

$$\mathbf{u}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i=1 \\ \mathbf{a}(n+2-k), & 2 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m \end{cases}$$

lesz. Az $\mathbf{y}_{2m}$ továbbra is az

$$\mathbf{y}_{2m}(i) = \begin{cases} \mathbf{y}(i), & 1 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m \end{cases}$$

képlettel definiálódik.

Az $\mathbf{u}_{2m}$-et az $\mathbf{a}_{n-1}$ elemeivel

$$\mathbf{u}_{2m}(i) = \begin{cases} \text{tetszőleges}, & i = 1 \\ \mathbf{a}_{n-1}(i-1), & 2 \leqq i \leqq n \\ 0, & n+1 \leqq i \leqq 2m \end{cases} \tag{6.17}$$

alakban írhatjuk fel.

Ha $\mathbf{U}_{2m}$-mel jelöljük azt a $2m$-edrendű cirkuláris mátrixot, amelynek az első oszlopvektora $\mathbf{u}_{2m}$, akkor a 3.4. tétel alapján a (6.15) szorzásra a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathbf{U}_{2m}\mathbf{y}_{2m}]_{n+1}^{2n}.$$

A 3.3. lemma és a 2.5. definíció alapján pedig a

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathbf{U}_{2m}\mathbf{y}]_{n+1}^{2n} = [\mathrm{IDFF}(\mathrm{DFT}(\mathbf{u}_{2m}) * \mathrm{DFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_{n+1}^{2n} =$$
$$= [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{u}_{2m}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_{n+1}^{2n}$$

képlet írható fel.

Az $\mathbf{a}_{2m}^{+}$ (6.14)-es definíciója és az $\mathbf{u}_{2m}$ (6.17)-es definíciója alapján az FFT $(\mathbf{u}_{2m})$-et az FFT $(\mathbf{a}_{2m}^{+})$-mel helyettesíthetjük, azaz

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_{n+1}^{2n}. \tag{6.18}$$

A most kapott eredmény alapján azt láthatjuk, hogy ha a megoldási algoritmus során a $\mathbf{q}$ szorzatvektort a (6.18)-as képlet alapján számoljuk ki és ezután egy $2m$ elemű segédvektorba eltároljuk az $\mathbf{a}_{2m}^{+}$*-diszkrét Fourier transzformáltját*, akkor ezt a transzformáltat még egyszer felhasználhatjuk az $\mathbf{r}$ vektor — (6.4) képlettel történő — kiszámítása során. Így az $\mathbf{r}$ vektor meghatározásához nem három, hanem csak két (inverz) *gyors Fourier transzformáció* szükséges.
Az eddigi eredmények alapján tehát azt láttuk, hogy a 3.3. és 3.4. tételek segítségével a kiindulási 12 (inverz) *gyors Fourier transzformáció* helyett 9 elvégzése is elegendő a megoldásvektor meghatározására.

Nézzük meg most, hogy a fejezet eddigi eredményei alapján az egyes szorzatvektorok kiszámítására milyen képletet tudtunk felírni:

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_{1}^{n}, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{y} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}))]_{n+1}^{2n}, \tag{6.18}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{p} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{p}_{2m}))]_{1}^{n}, \tag{6.4}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{q} = [\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^{+}) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}))]_{2m-n+1}^{2m}. \tag{6.13}$$

Ha megvizsgáljuk, hogy a számítások során milyen vektoroknak kell a *diszkrét Fourier transzformáltját* kiszámítanunk, akkor egyszerűen beláthatjuk, hogy minden transzformálandó vektor valós lesz. Ugyanis a kiindulási $\mathbf{T}$ együtthatómátrix valós volt és a megoldási algoritmus első lépésben — az $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ és d_{n-1} kiszámításakor — csak „valós műveleteket" végeztünk, így az $\mathbf{a}_{n-1}$, $\mathbf{b}_{n-1}$ elemeiből konstruált $\mathbf{b}_{2m}^+$ és $\mathbf{a}_{2m}^+$ vektorok is valósak lesznek.

Az $\mathbf{y}_{2m}$ vektor a valós $\mathbf{y}$ vektorból 0 komponensek hozzáadásával bővült, tehát továbbra is valós maradt.

A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ szorzatvektorok a valós $\mathbf{B}^+$, ill. $\mathbf{A}$ mátrix és $\mathbf{y}$ vektor összeszorzásának az eredményei, így ezek is valósak.

A 3.4. és 3.5. lemmák alapján viszont a valós vektorok *diszkrét Fourier transzformáltját* — ami általában már komplex lesz — az általános esetnél egyszerűbben lehet meghatározni. A 3.4. lemmát először a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ kiszámításakor alkalmazhatjuk és segítségével a valós $\mathbf{a}_{2m}^+$ és $\mathbf{b}_{2m}^+$ vektorok *diszkrét Fourier transzformáltját*

$$m \log(m)+O(m)$$

művelettel határozhatjuk meg.

A DFT $(\mathbf{y}_{2m})$ vektor kiszámításakor nem tudjuk a 3.4. lemmát használni. Most azonban a 3.5. lemmát alkalmazhatjuk, amelynek a felhasználásával egy $2m$ elemű valós vektor *diszkrét Fourier transzformáltja* egy m-edrendű *diszkrét Fourier transzformációval* kiszámítható és a műveletigény ebben az esetben csak

$$\frac{m}{2}\log(m)+O(m) \tag{6.21}$$

lesz.

Ezek után a megoldási algoritmusunkban már csak két olyan vektor *diszkrét Fourier transzformáltjára* van szükség, amelyet eddig még nem határoztunk meg.

Mivel $\mathbf{p}_{2m}$ és $\mathbf{q}_{2m}$ valós, így ezek transzformáltját a 3.4. lemma alapján

$$m \log(m)+O(m)$$

művelettel határozhatjuk meg.

Az algoritmusunkban még egy eredményt tudunk felhasználni. Ha megvizsgáljuk a $\mathbf{p}$ szorzatvektort meghatározó (6.8)-as képletet, akkor láthatjuk, hogy a $\mathbf{p}$ vektort két — általában komplex — *diszkrét Fourier transzformált* vektor komponenseként képzett szorzatának az *inverz diszkrét Fourier transzformáltjaként* kapjuk meg. Az

$$\mathbf{e}_{2m} = \mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m})$$

vektor, amelynek az inverz transzformáltjából kapjuk a $\mathbf{p}$ vektort általában nem valós, viszont azt tudjuk róla, hogy az inverz diszkrét Fourier transzformáltja — ami nem más, mint a korábban definiált $\mathbf{B}_{2m}$ valós cirkuláris mátrix és az $\mathbf{y}_{2m}$ valós vektor szorzata —, valós lesz. Ugyanezen okok miatt ez teljesül a (6.18) képletben szereplő

$$\mathbf{f}_{2m} = \mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{y}_{2m}),$$

valamint a (6.4) és (6.13) képletben szereplő

$$\mathbf{h}_{2m} = \mathrm{FFT}(\mathbf{a}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{p}_{2m}) \tag{6.22}$$

$$\mathbf{k}_{2m} = \mathrm{FFT}(\mathbf{b}_{2m}^+) * \mathrm{FFT}(\mathbf{q}_{2m}) \tag{6.23}$$

vektorokra is, tehát $\mathbf{f}_{2m}$, $\mathbf{h}_{2m}$ és $\mathbf{k}_{2m}$ *inverz diszkrét Fourier transzformáltja* is valós. A 3.6. lemma alapján viszont két, $2m$ elemű, valós *inverz diszkrét Fourier transz-*

formáltú vektor inverz transzformáltja meghatározásának együttes műveletigénye

$$m \log (m)+O(m)$$

lesz.

A (6.22) és (6.23) képletekkel definiált $\mathbf{h}_{2m}$ és $\mathbf{k}_{2m}$ vektorok inverz transzformáltját szintén a 3.6. lemma alapján határozhatjuk meg.

A fejezetben bemutatott optimalizálási lehetőségek felhasználásával egy új eljárást tudunk összeállítani a kiindulási (4.1)-es

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{y}$$

egyenletrendszer megoldására, amelyről a belátott eredmények alapján a következőket állíthatjuk:

i) az algoritmus a

$$\mathbf{Tx} = \mathbf{y}$$

n-edrendű, *erősen nemszinguláris Toeplitz mátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszer megoldását számítja ki,

ii) a megoldás meghatározásához szükséges műveletek száma:

$$2n^2+4{,}5m \log (m)+O(m). \tag{6.24}$$

Az 5. fejezethez hasonlóan, most is adhatunk egy felső korlátot az eljárás műveletszükségletére, amelynek értéke:

$$2n^2+9n \log (n)+O(n).$$

7. A kidolgozott eljárás általánosítása lineáris Haenkel egyenletrendszerek hatékony megoldására

Erősen nemszinguláris lineáris Haenkel egyenletrendszernek nevezzük egy olyan

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{y} \tag{7.1}$$

egyenletrendszert, amelyben az $\mathbf{y}$ egy n-edrendű oszlopvektor, a $\mathbf{H}$ pedig egy n-edrendű *erősen nemszinguláris Haenkel mátrix,* azaz ha $\mathbf{r}$ és $\mathbf{c}$ jelöli a $\mathbf{H}$ mátrix első sor- és utolsó oszlopvektorát, akkor a 2.3. definíció szerint:

$$\mathbf{H}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{r}(i+j-1), & 2 \leqq i+j \leqq n+1 \\ \mathbf{c}(i+j-n), & n+1 \leqq i+j \leqq 2n. \end{cases}$$

A (7.1) típusú egyenletrendszerek megoldását jelenleg — a *Toeplitz rendszerekhez* hasonlóan

$$3n^2+O(n)$$

műveletigényű eljárásokkal határozzák meg.

Ebben a fejezetben a 3.6. és 3.7. tételek eredményeinek és a *Toeplitz egyenletrendszerek* megoldására kidolgozott eljárásunknak a felhasználásával megadunk egy algoritmust, amely a (7.1) *Haenkel egyenletrendszerek* megoldását

$$2n^2+4{,}5m \log (m)+O(m)$$

művelettel határozza meg.

Tekintsük a megoldandó (7.1)

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{y}$$

erősen nemszinguláris *Haenkel mátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszert.

Jelöljük **r**-rel, ill. **c**-vel a **H** mátrix első sor-, ill. utolsó oszlopvektorát.

Legyen **E** egy n-edrendű egységmátrix és **M** egy n-edrendű mátrix a következő definícióval:

$$\mathbf{M}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i+j = n+1 \\ 0, & \text{ha} \quad i+j \neq n+1. \end{cases}$$

Mivel **E** egységmátrix, így a (7.1)-et felírhatjuk a

$$\mathbf{HEx} = \mathbf{y} \tag{7.2}$$

alakban is. A 3.6. tétel értelmében a (7.2)-t

$$\mathbf{HEx} = \mathbf{HMMx} = \mathbf{y} \tag{7.3}$$

alakra hozhatjuk.

Alkalmazzuk most a (7.3)-ban szereplő **Mx** szorzatra a 3.6. tétel eredményét:

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{HMMx} = \mathbf{HM\tilde{x}} = \mathbf{y}. \tag{7.4}$$

A (7.4) egyenletben szerepel egy **HM** mátrix szorzat.

Jelöljük **D**-vel ezt a szorzatmátrixot:

$$\mathbf{D} = \mathbf{HM}. \tag{7.5}$$

A 3.7. tétel értelmében a **HM** által definiált **D** mátrix *Toeplitz mátrix* és a — korábbi jelöléseinknek megfelelően — **D** első sor-, ill. oszlopvektora $\tilde{\mathbf{r}}$, ill. **c**. Ezt az eredményt felhasználva a kiindulási egyenletrendszerre a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{D\tilde{x}} = \mathbf{y}, \tag{7.6}$$

ahol **H** egy **r**, ill. **c** első sor-, és utolsó oszlopvektorú *Haenkel mátrix*, a **D** pedig egy $\tilde{\mathbf{r}}$, ill. **c** első sor- és oszlopvektorú *Toeplitz mátrix*.

Ezen eredmények alapján a következő algoritmust adhatjuk meg a

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{y}$$

egyenletrendszer megoldására:

1. *Lépés.* A **H**, *Haenkel mátrix* **r**-rel jelölt első sorvektora alapján készítsük el az

$$\mathbf{s}(i) = \mathbf{r}(n+1-i) \quad 1 \leqq i \leqq n$$

képlettel definiált vektort és legyen a **H** utolsó oszlopvektora **c**.

2. *Lépés.* Alkalmazzuk a 6. fejezetben — a *Toeplitz egyenletrendszerek* megoldására — kidolgozott algoritmust a következő input paraméterekkel:

a megoldandó egyenletrendszer együtthatójának:

első sorvektora: **s**,

első oszlopvektora: **c**,

és az egyenletrendszer jobb oldala: **y**.

3. *Lépés.* Jelöljük $\mathbf{t}$-vel a 2. lépésben kapott megoldásvektort. Ekkor a kiindulási (7.1) egyenletrendszer $\mathbf{x}$ megoldásvektorát a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{t}},$$

azaz

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{t}(n+1-i) \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Mivel a most megadott megoldási algoritmusban az 1-es és 3-as lépésben történő — és a többi művelethez képest elhanyagolható műveletigényű — két vektor átrendezésén kívül, pontosan azokat a műveleteket kell elvégeznünk, mint amelyeket egy *Toeplitz egyenletrendszer* kiszámításánál, így a *Haenkel egyenletrendszerek* megoldásának a műveletigénye is:

$$(7.13) \qquad 2n^2+4{,}5m \log(m)+O(m)$$

és felső korlátként most is a

$$2n^2+9n \log(n)+O(n)$$

érték adható meg.

8. Az eredmények néhány alkalmazása

Ebben a részben a korábban belátott tételek, ill. a kidolgozott megoldási algoritmus néhány alkalmazási lehetőségét mutatjuk be.

A bevezetésben megemlített gyakorlati alkalmazási területeken a megoldandó *Toeplitz és Haenkel egyenletrendszerek* gyakran még azzal a speciális tulajdonsággal is rendelkeznek, hogy a nem nulla elemeik a fő-, ill. a mellékátló körül helyezkednek el, azaz az együtthatómátrix nemcsak *Toeplitz-, ill. Haenkel típusú,* hanem még szalagmátrix is. Ezekben az esetekben a szalagmátrix tulajdonság kihasználásával a most bemutatott eljárásnál lényegesen hatékonyabb megoldási algoritmusok is kialakíthatók. A *Toeplitz típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására egy

$$(8.1) \qquad 6n \log n+3d^2+O(n)$$

műveletigényű eljárás [3, 4]-ben került ismertetésre. (A (8.1) képletben a d az együtthatómátrix szalagszélességét jelöli.)

Ez az eljárás azon alapul, hogy a megoldandó egyenletrendszert két másik egyenletrendszerré alakítja, melyek közül az egyik egy cirkuláris mátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszer, s amelynek a megoldását $6n \log(n)$ műveletvégzéssel meg lehet határozni, míg a másik egyenletrendszer egy d-edrendűre redukált *Toeplitz egyenletrendszer,* s ezt egy $3d^2$ műveletigényű eljárással lehet megoldani. A (8.1) alapján jól látszik, hogy amennyiben az együtthatómátrix szalagszélessége elég kicsi ($d \ll n$), akkor a (8.1) értéke lényegesen kisebb lesz $3n^2$-nél, amely az egyéb megoldási algoritmusok műveletigénye. A *d-edrendű Toeplitz egyenletrendszer* ebben az eljárásban még egy $3d^2$ műveletigényű, ún. *Trench—Zohar-féle algoritmussal* került megoldásra, mivel akkor még nem volt ismert a most kidolgozott eljárás.

Így most azonnal látszik az új eljárásnak egy alkalmazási lehetősége. Ha ugyanis ebbe a *Toeplitz típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására kidolgozott eljárásba beépítjük a most bemutatott algoritmusunkat, akkor annak a műveletigényét

$$(8.2) \qquad 6n \log n + 2d^2 + O(n)$$

értékre csökkenthetjük.

A 3. részben megadott 3.5. és 3.6.-os tételeknek is van egy érdekes alkalmazási lehetőségük. Mint azt ennek a résznek az elején már leírtuk, nemcsak a *Toeplitz,* hanem a *Haenkel egyenletrendszereknek* is gyakori a „szalagos" előfordulásuk, azaz az olyan egyenletrendszerek, ahol az együtthatómátrix egy *Haenkel típusú szalagmátrix.* A 3.5. és 3.6. tételek alkalmazásával a korábban említett [4] *Toeplitz típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására kidolgozott eljárást felhasználhatjuk a *szalag Haenkel egyenletrendszerek* megoldására is. Mivel egy *szalag Haenkel mátrix,* nyilvánvalóan *Haenkel mátrix* is, tehát a 3.5. és 3.6. tételek most is teljesülnek, így csak azt kell belátnunk, hogy a 3.7. tételben alkalmazott

$$\mathbf{HM}$$

mátrixtranszformáció a *szalag Haenkel mátrixból szalag Toeplitz mátrixot* készít. A 3.7. tétel értelmében, ha $\mathbf{r}$ és $\mathbf{c}$ a $\mathbf{H}$ első sor-, ill. utolsó oszlopvektora, akkor a

$$(8.3) \qquad \mathbf{D} = \mathbf{HM}$$

Toeplitz mátrixnak az első sor-, ill. oszlopvektora

$$\mathbf{s}(=\tilde{\mathbf{r}}) \text{ és } \mathbf{c}$$

lesz.

Mivel a $\mathbf{H}$ szalagmátrix, így

$$\exists p, q < n$$

amelyre

$$(8.4) \qquad \mathbf{r}(i) = 0, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq i \leqq p$$

és

$$(8.5) \qquad \mathbf{c}(i) = 0, \quad \text{ha} \quad q < i \leqq n.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a transzformáció után keletkezett $\mathbf{D}$ mátrix esetén

$$(8.6) \qquad \mathbf{s}(i) \quad (=\tilde{\mathbf{r}}(i)) = 0, \quad \text{ha} \quad n-p < i \leqq n$$

és

$$(8.7) \qquad \mathbf{c}(i) = 0, \quad \text{ha} \quad q \leqq i \leqq n.$$

A (8.6) és (8.7) egyenletek viszont pont azt mutatják, hogy a $\mathbf{D}$ is szalagmátrix lesz, és így a

$$(8.8) \qquad \mathbf{Hx} = \mathbf{y}$$

Haenkel típusú szalagmátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszer megoldására a 7. részben leírt algoritmust használhatjuk, azzal az eltéréssel, hogy az eljárás 2. lépésében nem a 6. fejezet algoritmusát, hanem a *Toeplitz típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására kidolgozott és a 8. rész első részében leírt módon javított algoritmust kell alkalmazni. Ebben az esetben a megoldás meghatározásának műveletigénye:

$$6n \log n + 2d^2 + O(n) \tag{8.9}$$

lesz.

A kidolgozott algoritmusunkat igen hatékonyan lehet alkalmazni abban a speciális esetben, amikor nem csupán egy *Toeplitz* vagy *Haenkel egyenletrendszert* kell megoldanunk, hanem egyszerre több olyan egyenletrendszer megoldására van szükségünk, amelyeknek az együtthatómátrixa megegyezik, azaz a megoldandó egyenletrendszerek a következő alakúak:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tx1} &= \mathbf{y1} \\ \mathbf{Tx2} &= \mathbf{y2} \\ \mathbf{Txk} &= \mathbf{yk} \end{aligned} \tag{8.10}$$

ill.

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Hx1} &= \mathbf{y1} \\ \mathbf{Hx2} &= \mathbf{y2} \\ &\;\vdots \\ \mathbf{Hxk} &= \mathbf{yk}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ebben az esetben a jelenleg használt algoritmusok esetén minden egyes új megoldásvektor kiszámításához újabb

$$n^2 + O(n) \tag{8.12}$$

műveletvégzésre van szükség, n^2 elem tárolása mellett, vagy kevés szabad memóriakapacitás esetén

$$(2n-1)$$

elem tárolásával

$$2n^2 + O(n) \tag{8.13}$$

újabb műveletet kell végeznünk.

A bemutatott algoritmust megvizsgálva, jól látszik, hogy az első egyenletrendszer megoldása után minden további megoldás meghatározása csupán

$$3{,}5m \log(m) + O(m) \tag{8.14}$$

műveletvégzést és $2m+2$ elem

$$\left(\mathrm{DFT}\,(\mathbf{a}_{2m}^{+} + i\mathbf{b}_{2m}^{+}),\ d_{n-1},\ m\right)$$

tárolását igényli.

Így tehát a (8.10), ill. (8.11), k darab lineáris egyenletrendszer megoldása a jelenlegi eljárásokkal

$$(k+2)n^2 + O(n), \quad \text{ill.} \quad (2k+1)n^2 + O(n) \tag{8.15}$$

műveletvégzést igényel, a bemutatott algoritmus

$$2n^2 + (3{,}5k + 4{,}5)m \log(m) + O(n) \tag{8.16}$$

műveletigényével szemben, azaz az elérhető hatékonyságnövekedés mértéke ebben az esetben $k/2$, ill. k-szoros lesz!

9. Az eljárás számítógépes implementációja

A bemutatott megoldási algoritmus nagy-, mini-, és mikroszámítógépes implementációja is elkészült, mind egyszeres, mind duplapontosságú változatban. Kontroll algoritmusként az igen széles körben alkalmazott IMSL matematikai statisztikai programrendszer [10] National Energy Software Center (USA) által kidolgozott TOEPLITZ programcsomagját [13] használtuk. A méréseket — a Dán Műszaki Egyetem — IBM 3033-as számítógépén, μ Vax—II minigépen és IBM PC/XT-n végeztük.

A következő táblázatok különböző elemszámú *lineáris Haenkel-* és *Toeplitz egyenletrendszerek* megoldásához szükséges műveletidőket tartalmaznak. (*Toeplitz típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldásához szükséges műveletidők a [3, 4]-ben találhatók.)

Az első táblázat az IBM 3033 típusú nagyszámítógépén végzett mérések eredményeit tartalmazza. A 2. táblázat pedig 10 darab azonos együtthatómátrixú ún. *párhuzamos Toeplitz-*, ill. *Haenkel egyenletrendszer* μ Vax—II számítógépen történő megoldásához szükséges műveletidőket tartalmaz.

1. TÁBLÁZAT

Mérési eredmények (sec) IBM 3033 számítógépen

Egyenletszám (n)	Egyszeres pontosságú változat		Dupla pontosságú változat	
	IMSL alg.	új alg.	IMSL alg.	új alg.
500	1,82	1,83	1,92	1,92
1000	7,35	6,29	7,66	6,67
1500	16,41	13,95	17,59	14,03
2000	29,40	23,20	31,50	24,99
3000	66,65	52,21	71,68	54,24
4000	119,34	88,91	131,42	91,86

2. TÁBLÁZAT

Mérési eredmények 10 rendszer esetén μ Vax—II számítógépen

Egyenletszám (n)	IMSL algoritmus min. sec.	Új algoritmus min. sec.
200	20,4	9,1
500	1′ 24,3	20,2
750	3′ 04,1	44,3
1000	7′ 36,5	54,7
2000	27′ 11,3	3′ 03,8

IRODALOM

[1] BAREISS, E. H., "Numerical solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices", *Numer. Math.* (1969) 404—424.

[2] BECK, GY., Toeplitz típusú szalagmátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldása gyors Fourier transzformációval (Egyetemi doktori értekezés, 1982).

[3] BECK, GY., "A fast algorithm for the solution of banded Toeplitz sets of linear equations", *Zeitschrift für Angewandte Matematik und Mechanik* (1983) 426—427.

[4] BECK, GY., „Gyors algoritmus Toeplitz típusú szalagmátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására", *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1982) 157—176.

[5] BERGLAND, G. D., "Fast Fourier transform hardware implementations — An overview", *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics* (1969) 104—108.
[6] BRIGHAM, E. O., *The Fast Fourier Transform* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974).
[7] CARAYANNIS, G., KALOUPTSIDIS, N., MANOLAKIS, D., "Fast recursive algorithms for a class of linear equations", *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.* (1982) 227—239.
[8] DESPAIN, A. M., "Very fast Fourier transform algorithms hardware for implementation", *IEEE Trans. on Computers* (1979) 333—341.
[9] ELLIOT, D. F., RAO, K. R., *Fast Transforms, Algorithms, Analyses, Applications* (Academic Press, 1982).
[10] IMSL — Program-Solving Software System for Mathematics and Statistics (2500 City West Boulevard Houston, Texas, USA).
[11] JAIN, J. R., "An efficient algorithm for a large Toeplitz set of linear equations", *IEEE Trans. on Acous., Speech, and Signal Proc.* (1979) 612—615.
[12] KAILATH, T., VIEIRA, A., MORF, M., "Inverses of Toeplitz operators, innovations, and orthogonal polynomials", *IEEE Conf. Decision and Control*, Houston (1975) 749—754.
[13] TOEPLITZ Package, National Energy Software Center, Arhonne National Laboratory (9700 South Cass Avenue, Argonne, USA).
[14] TRENCH, W. F., "An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices", *SIAM J. Appl. Math.* (1964) 515—522.
[15] ZOHAR, S., "The solution of a Toeplitz set of linear equations", *J. ACM* (1974) 272—276.

(Beérkezett: 1987. május 17.)

BECK GYÖRGY
DIGITAL EQUIPMENT (MAGYARORSZÁGI) KFT.
1119 BUDAPEST, VAHOT U. 6.

EFFICIENT ALGORITHMS FOR SOLVING LARGE HAENKEL AND TOEPLITZ SETS OF LINEAR EQUATIONS

GY. BECK

The computer solution of many physical and mathematical problems requires to solve a large, finite set of linear equations. An important class of these equations is the so-called *Haenkel-* and *Toeplitz systems*, i.e. those sets of linear equations where the coefficient matrix is a *Haenkel* or *Toeplitz* one. Typical applications arise in image processing, digital filtering, signal processing and the solution of certain differential equations.

The generally used, most effective algorithms reguire $3n^2+O(n)$ computations to solve a set of n linear *Haenkel* or *Toeplitz equations*. In 1979, J. JAIN gave a more effective algorithm for the special case, where the number of equations to be solved is an integer power of two, i.e. $n=2^k$. The number of required calculations in *Jain's algorithm* is

$$2n^2+8n\log_2(n)+O(n).$$

Here we present here the extension of *Jain's results* for the general case, and we give an algorithm for solving a set of *n Toeplitz* or *Haenkel equations*, where the number of required computations is at most $2n^2+9n\log_2(n)+O(n)$. In the special case, when the number of equations is an integer power of two, the presented method gives the solutions via $2n^2+4{,}5n\log_2(n)+O(n)$ computations.

The major advantage of the algorithm is realised of those applications where the set of n *Haenkel* or *Toeplitz equations* $\mathbf{Hx}=\mathbf{y}$ is to be solved for a different $\mathbf{y}$ and the same $\mathbf{H}$ for the unknown $\mathbf{x}$. Each additional solutions requires $7n\log_2(n)+(n)$ computations at most compered to the $n^2+O(n)$ of recently used algorithms.

We have worked out the computer implementation of the presented methods, and in the last part of the publication we show some computer results. For control algorithm we used the TOEPLITZ package of the well-known IMSL mathematical program library.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 335—364

GLOBÁLIS EGYENSÚLYI BIFURKÁCIÓK VIZSGÁLATA A PARAMÉTERES REPREZENTÁCIÓ MÓDSZERÉVEL

FARKAS HENRIK, GYÖKÉR SOLT ÉS WITTMANN MÁRIA

Budapest

Két paramétertől lineárisan függő egyenletrendszereket vizsgáltunk. Megadtunk egy görbét, amely a gyökök számára és helyzetére vonatkozó minden lényeges információt tartalmaz. A módszer alkalmazását néhány speciális eseten és példán mutattuk be.

1. Bevezetés

Azok a különböző területeken dolgozó kutatók, akik közönséges differenciálegyenleteket használnak konkrét problémák megoldására, szinte mindig szembekerülnek a következő kérdésekkel:

— Hány egyensúlyi pont van?

— Milyen típusúak ezek?

(Megjegyezzük, hogy fizikában és kémiában nyílt rendszerek esetén a matematikában megszokott „egyensúlyi" vagy „szinguláris pont" helyett a „stacionárius állapot" elnevezést használják. Az egyensúlyi pontok „típusának" fogalmát nem kívánjuk pontosan definiálni, csak példaként említünk meg lehetséges osztályozásokat: stabil pont—instabil pont, fókusz—csomó—nyereg, forrás—nyelő.)

Ezen „egyszerű" kérdések megválaszolása olykor nehézségekbe ütközik, különösen akkor, ha a differenciálegyenlet-rendszer paraméterektől függ, és a fenti kérdéseket „globálisan", azaz a teljes paramétertartományban kívánjuk megválaszolni.

A matematikai irodalomban különböző címszavak alatt találhatunk olyan ismereteket, amelyek segítséget nyújthatnak az alkalmazóknak (algebrai geometria, bifurkációelmélet, szingularitáselmélet, katasztrófaelmélet). Később vissza fogunk térni az itt tárgyalt problémák egyes irodalmi vonatkozásaira, de már itt is felhívjuk a figyelmet BALAKOTAIAH és LUSS kitűnő, átfogó cikkére [3] a kémiai szakirodalomból.

Ebben a dolgozatban a fenti problémákkal kívánunk foglalkozni; módszereket, illetve megoldható eseteket kívánunk ismertetni arra vonatkozóan, hogyan lehet a paraméterteret felbontani tartományokra az egyensúlyi pontok száma és típusa szerint. A tartományok határait alkotó „bifurkációs diagramok" megkonstruálásánál gyakran hasznos paraméternek tekinteni az egyik egyensúlyi pont koordinátáját: erre utaltunk a címben szereplő „parametrikus reprezentáció módszere" elnevezéssel (lásd később a 3. fejezetben).

Az általunk vizsgált differenciálegyenlet-rendszerek kétparaméteresek, általános alakjuk:

$$\dot{x}_i = f_i(u_1, u_2; x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1.1}$$

(u_1, u_2: paraméterek, x_i: állapotváltozók).

Az (1.1) rendszer egyensúlyi pontjainak koordinátáit az egyszerűség kedvéért ugyancsak x_i-vel fogjuk jelölni a továbbiakban:

$$f_i(u_1, u_2;\ x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{1.2}$$

Az (1.1) differenciálegyenlet-rendszerrel kapcsolatban megfogalmazzuk a következő problémákat:

I. Probléma. Adjuk meg az (u_1, u_2) paramétersík felbontását tartományokra az (1.1) rendszer egyensúlyi pontjainak száma szerint. A tartományok határpontjai alkotják az (1.1) rendszer *egyensúlyi bifurkációs diagram*ját (a továbbiakban röviden EBD). Ez rendszerint egy többágú görbe: a görbe bármely ágán átmentve az egyensúlyi pontok száma változik, míg egy tartományon belül az egyensúlyi pontok száma állandó.

II. Probléma. Adjuk meg az (u_1, u_2) paramétersík felbontását az egyensúlyi pontok száma és típusa szerint. Egy tartományon belül az egyensúlyi pontok száma és típusa állandó, a tartományok határaiból álló *„teljes egyensúlyi bifurkációs diagram"* (a továbbiakban röviden TEBD) valamely ágán átmenve az egyensúlyi pontok száma és/vagy típusa változik.

Vezessünk be még egy bifurkációs diagramot: a *tangens bifurkációs diagram*ot (a továbbiakban TBD-vel vagy még rövidebben S-sel fogjuk jelölni):

$$S = \left\{(u_1, u_2) \mid \exists \mathrm{x} \in R^n\colon f_i(u_1, u_2;\ \mathrm{x}) = 0,\ \det \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(u_1, u_2;\ \mathrm{x}) = 0\right\}. \tag{1.3}$$

A TBD tehát azon paraméterpárok halmazából áll, amelyekre létezik olyan egyensúlyi pont, hogy a

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0 \tag{1.4}$$

„érintési feltétel" teljesül.

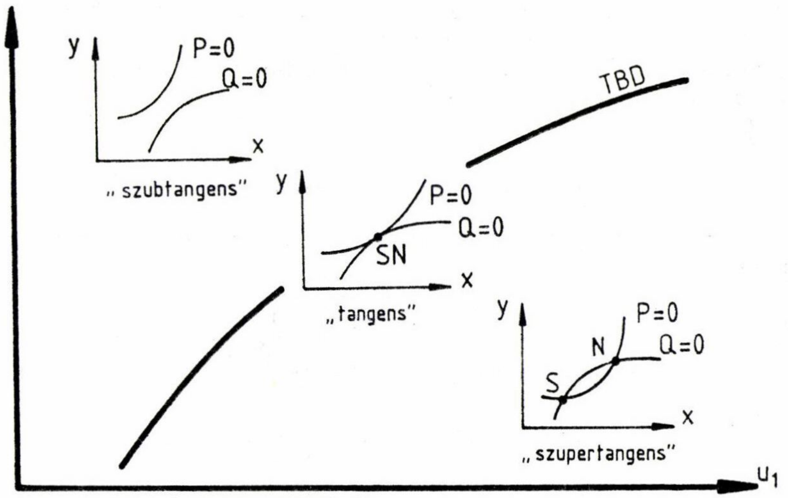
A kétdimenziós

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(u_1, u_2;\ x, y) \\ \dot{y} &= Q(u_1, u_2;\ x, y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

rendszerben a tangens bifurkációt szemlélteti az 1. ábra. Szokásos ezt a bifurkációt nyereg—csomó bifurkációnak is nevezni [1, 9], mivel a bifurkációnál egy nyereg—csomó típusú egyensúlyi pont keletkezik, ami később szétválik egy nyeregpontra és egy csomópontra.

A TBD és az EBD között szoros összefüggés van: $\mathrm{TBD} \subset \mathrm{EBD}$. Egyensúlyi pontok a tangens bifurkáción kívül még egy módon keletkezhetnek, ill. tűnhetnek el: kimennek a végtelenbe vagy bejönnek a végtelenből. Ilyenkor az érintési feltétel a végtelenben teljesül, de ott az (1.2) egyenletrendszer nem feltétlenül teljesül: erre a problémára a későbbiekben még visszatérünk.

Több dimenzióban az 1. ábra tipikusnak tekinthető: az n szintfelületből (azaz az $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ felületekből) $n-2$-t lerögzítve az 1. ábra a maradék két szintfelület metszésvonalát reprezentálja a kiválasztott $n-2$ szintfelület (kétdimenziós) közös részével.



1. ábra. Tangens bifurkáció

Az egyensúlyi pontok típusa rendszerint akkor változik, ha a *Jacobi-mátrix* elemeiből képzett valamely kifejezés előjelet vált (pl. stabilitásvesztésnél valamelyik *Routh—Hurwitz kritérium*). Ezért mind a TBD, mind a TEBD meghatározása a következő típusú problémára vezethető vissza:

III. Probléma. Határozzuk meg az (u_1, u_2) paramétersík azon pontjainak halmazát, amelyekhez található olyan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ egyensúlyi pont, melyekre az (1.2) egyenletrendszer mellett az előírt

$$g(u_1, u_2; x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{1.6}$$

mellékfeltétel is teljesül. Jelöljük röviden ezt a halmazt B_g-vel.

A B_g halmaz egy relációt definiál az (u_1, u_2) síkban; kifejezve az x_i állapotváltozókat (1.2)-ből, (1.6)-ba való behelyettesítés után kapnánk egy összefüggést u_1 és u_2 között:

$$\psi(u_1, u_2) = 0 \tag{1.7}$$

Ámde az (1.7) összefüggés zárt alakban való előállítása még egyszerű függvények esetén is nehézkes vagy lehetetlen, ezenkívül még ha sikerül is előállítani, a kívánt bifurkációs diagram ábrázolása, ill. sajátságainak megállapítása (1.7)-ből rendkívül komplikált. Gyakran előnyösen alkalmazható a parametrikus reprezentáció módszere: ennél az állapotváltozók közül egyet, mondjuk x_1-et megtartjuk paraméterként, és a B_g diagramot paraméteres alakban állítjuk elő:

$$u_1 = \psi_1(x_1), \quad u_2 = \psi_2(x_1). \tag{1.8}$$

Ismertek olyan tételek, amelyek szerint az egyenletrendszerekből bizonyos változók eliminálhatók, akár az egész egyenletrendszer egyetlen egyváltozós egyenletre redukálható bizonyos feltételek mellett (*Ljapunov—Schmidt-redukció,* [8]). Az elimináció gyakorlati kivitelezése azonban nemlineáris egyenleteknél nehézségekbe ütközhet. Algebrai egyenleteknél a rezultáns segítségével is elvégezhető az elimináció ([12], [14]); a függelékben bemutatjuk, hogy az euklideszi algoritmus hogyan használható fel eliminációra.

2. Egyensúlyi bifurkációs diagram

Tételezzük fel, hogy az imént említett eliminációt már elvégeztük, és az egyensúlyi pontok az

$$f(u_1, u_2; x) = 0 \tag{2.1}$$

egyenlet gyökei. Itt x jelöli az állapotváltozót, u_1 és u_2 pedig a paramétereket ($x, u_1, u_2 \in R$).

A (2.1) rendszer tangens bifurkációs diagramja:

$$S = \left\{(u_1, u_2) \mid \exists x : f(u_1, u_2;\ x) = 0 \text{ és } \frac{df}{dx} = 0\right\}. \tag{2.2}$$

Itt tehát x egy legalább egy kodimenziós szingularitás [3], vagyis egy többszörös (legalább kétszeres) gyöke a (2.1) egyenletnek. A parametrikus reprezentáció módszere akkor kecsegtet előnnyel, ha (2.1)-ben az f függvény a paraméterektől egyszerűbb módon függ, mint az x állapotváltozótól. Ez az eset az alkalmazásokban egyáltalán nem ritka: pl. kémiai reakciórendszerekben a paraméterek reakciókonstansok, amelyek a kinetikai egyenletekben lineárisan jelennek meg.

Most olyan függvényeket fogunk vizsgálni, amelyek a paraméterektől lineárisan függnek:

$$f(u_1, u_2; x) = f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2, \tag{2.3}$$

és feltételezzük, hogy

$$f_i \in C^2, \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.4}$$

Azokat a feltételezéseket, amiket a továbbiakban — hacsak mást nem mondunk — érvényesnek tekintünk, sorszámmal látjuk el: (2.3) és (2.4) együtt alkotják az (F.1) feltételt.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy az f_i függvényeknek nincs közös zérushelye, azaz — (F.2) feltétel —:

$$(f_0(x))^2 + (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 \neq 0. \tag{2.5}$$

Ha ugyanis valamely x_0 pont közös zérushelye az f_i függvényeknek, akkor egy megfelelő $q(x)$ függvénnyel beosztva az f függvényt, olyan függvényt kapunk, amire (2.3), (2.4) és (2.5) is teljesül az x_0 pontban. Polinomiális f_i esetén ehhez $(x-x_0)^m$ alakú közös osztóval kell beosztani. (Ha valamely x_0 pontban (2.5) nem teljesülne, akkor x_0 minden (u_1, u_2) paraméterérték esetén gyök lenne.)

Vezessük be a következő jelöléseket:

(2.6)
$$r_0(x) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} f_0(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & f_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$r(x) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{bmatrix},$$

(2.7)
$$D_{ij} = \{x \in R \mid r_0(x) = i \text{ és } r(x) = j\}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

A D_{ij} halmazok között vannak olyanok, amelyek mindig üresek:

(2.8)
$$D_{00} = D_{01} = D_{12} = D_{02} = D_{20} = \emptyset.$$

($D_{00} = \emptyset$ az (F.2) feltételezés következtében.)

Rögzített x mellett tekintsük az

(2.9)
$$f_0(x) + f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 = 0$$
$$f_0'(x) + f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2 = 0$$

lineáris egyenletrendszert (az u_1, u_2 ismeretlenekre nézve). Az egyenletrendszer determinánsa:

(2.10)
$$\Delta(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x).$$

A fent bevezetett D_{22} halmaz éppen azon x értékek halmaza, amelyekre a (2.9) egyenletrendszer determinánsa zérustól különbözik:

(2.11)
$$D_{22} = \{x \in R \mid \Delta(x) \neq 0\}.$$

A D_{22} halmaz minden x eleméhez tartozik a (2.9) egyenletrendszer egy megoldása (ez a megoldás egyúttal egyetlen megoldása (2.9)-nek):

(2.12)
$$u_1(x) = (f_0'(x)f_2(x) - f_0(x)f_2'(x))/\Delta(x)$$
$$u_2(x) = (f_0(x)f_1'(x) - f_0'(x)f_1(x))/\Delta(x), \quad x \in D_{22}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a determináns zérushelyei, azaz az $R \setminus D_{22}$ halmaz pontjai izoláltak — (F.3) feltétel. A D_{22} halmaz ekkor nyílt intervallumok egyesítése. A (2.12)-ben definiált u_i függvények a D_{22} pontjaiban léteznek és folytonosan differenciálhatók:

(2.13)
$$u_i \in C^1, \quad x \in D_{22}.$$

A (2.12)-ben definiált függvények behelyettesítésével a (2.9) egyenletek azonosságokba mennek át a D_{22} halmazon:

(2.14)
$$f_0(x) + f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) = 0$$

(2.15)
$$f_0'(x) + f_1'(x)u_1(x) + f_2'(x)u_2(x) = 0, \quad x \in D_{22}.$$

A (2.14) összefüggést x szerint differenciálva (2.15) figyelembevételével egy újabb azonossághoz jutunk:

(2.16)
$$f_1(x)u_1'(x) + f_2(x)u_2'(x) = 0, \quad x \in D_{22}.$$

A (2.15) összefüggés x szerinti differenciálásával is kapunk egy azonosságot:

(2.17) $f_0''(x)+f_1''(x)u_1(x)+f_2''(x)u_2(x) = -\left(f_1'(x)u_1'(x)+f_2'(x)u_2'(x)\right), \quad x\in D_{22}.$

Az (u_1, u_2)-síkban definiálunk egy paraméteres görbét, paraméternek az x-et tekintve:

$$x \mapsto \left(u_1(x), u_2(x)\right), \quad x\in D_{22}.$$

Ezt a görbét a továbbiakban *U görbének* nevezzük; egy x értékhez tartozó pontját jelöljük U_x-szel:

$$U_x = \left(u_1(x), u_2(x)\right), \; x\in D_{22}; \quad U = \bigcup_{x\in D_{22}} U_x. \tag{2.18}$$

Látni fogjuk, hogy az U görbe lényegében minden információt tartalmaz a gyökök számáról, sőt még a gyökök értékéről is!

Mindenekelőtt tisztázzuk, milyen összefüggés van az U görbe és a tangens bifurkációs diagram, azaz a (2.2)-ben definiált S halmaz között. Ehhez vezessük be az S halmaz x értékhez tartozó szeletét:

$$S_x = \left\{(u_1, u_2) | f(u_1, u_2;\, x) = 0 \text{ és } \frac{\partial f(u_1, u_2;\, x)}{\partial x} = 0\right\}. \tag{2.19}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$S = \bigcup_{x\in R} S_x. \tag{2.20}$$

Az S_x szeletek sajátságai attól függnek, hogy x a (2.7)-ben definiált halmazok melyikébe esik. A lehetséges esetek:

i) $x\in(D_{10}\cup D_{21})$: ekkor $r_0(x)>r(x)$, ezért a (2.9) egyenletrendszer ellentmondó és így $S_x=\emptyset$.

ii) $x\in D_{11}$: ekkor a (2.9) egyenletek egymástól lineárisan függenek, és (2.9) egyenletrendszert kielégítő (u_1, u_2) értékek egy egyenesen vannak (melynek egyenlete: $f=0$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}=0\Big)$.

iii) $x\in D_{22}$: ekkor (2.9) mindkét egyenlete egy-egy egyenest definiál és a két egyenes egymást egyetlen pontban, az U_x pontban metszi: $S_x=U_x$.

Amint látható, S_x és U_x majdnem mindenütt azonos: kivételt csak a ii) eset képez, viszont (*F.3*) következtében a kivételes x pontok izoláltak.

Vizsgáljuk most az U görbe érintőit. Közvetlen differenciálással vagy a (2.16), (2.17) összefüggések felhasználásával látható, hogy

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \left(f_2(x)B(x)\right)/\Delta\left((x)\right) \\ u_2'(x) &= -\left(f_1(x)B(x)\right)/\left(\Delta(x)\right), \quad x\in D_{22}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

ahol bevezettük a később igen fontos szerepet játszó

$$B(x) \equiv \left.\frac{\partial^2 f(u_1, u_2;\, x)}{\partial x^2}\right|_{\substack{u_1=u_1(x)\\ u_2=u_2(x)}} = f_0''(x)+f_1''(x)u_1(x)+f_2''(x)u_2(x) \tag{2.22}$$

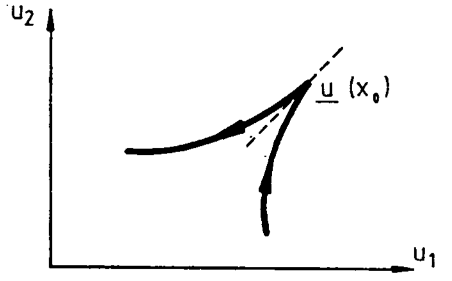
mennyiséget. Ha $B(x)$ egy intervallumban zérussal egyenlő, akkor $u_1(x)$ és $u_2(x)$ ebben az intervallumban konstans: ezen paraméterértékekre az intervallum minden x pontja legalább kétszeres gyök.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $B(x)$-nek csak izolált zérushelyei vannak: a zérushelyek halmazát jelöljük B_0-lal: (*F.4*) feltétel.

A (2.21)-ből látható, hogy az U görbe érintő egységvektora az U_x pontban:

$$(2.23)\qquad \mathbf{e}(x) = \left(\operatorname{sign}(B(x)/\Delta(x))/\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}\right)\left(f_2(x), -f_1(x)\right),$$
$$x \in D_{22}.$$

Az is látható, hogy ha $x_0 \in B_0$ és $x_0 \in D_{22}$, és x_0-nál $B(x)/\Delta(x)$ előjelet vált (páratlan multiplicitású zérushely), akkor az U görbének ott csúcsa *(cusp)* van: az érintő egységvektor „megfordul" x_0-nál. (Megjegyezzük, hogy ha $x_0 \in D_{22}$, akkor $f_1^2(x)+$ $+f_2^2(x) \neq 0$.)



2. ábra. Cusp

A következő tétel az U görbe és a gyökök értéke közti összefüggésre mutat rá:

2.1. Tétel. a) Az (u_1, u_2) sík azon pontjai, amely paraméterértékekhez egy előírt $x \in D_{22}$ érték gyök, az

$$(2.24)\qquad f_0(x)+f_1(x)u_1+f_2(x)u_2 = 0$$

egyenlet által meghatározott egyenesen vannak; ez az egyenes az U görbe U_x pontjához húzott érintő.

b) Legyen x most olyan érték, amelyre $\Delta(x)=0$, de $f_1^2(x)+f_2^2(x)\neq 0$. Ekkor az (u_1, u_2) sík azon pontjai, mely paraméterértékekhez x gyök, ugyancsak egy egyenesen helyezkednek el, amelynek egyenlete (2.24), és ez az egyenes érintője vagy aszimptotája az U görbének. Ha $x \in D_{21}$, akkor a (2.24) által meghatározott (u_1, u_2) értékek esetén x egyszeres gyök, ebben az esetben az U görbe kimegy a végtelenbe, amint közeledünk x-hez, (2.24) pedig az aszimptota egyenlete.

Ha $x \in D_{11}$, akkor a (2.24) egyenes mentén x legalább kétszeres gyök, az U görbe kimegy a végtelenbe vagy végesben marad attól függően, hogy az $u_1(x)$ és $u_2(x)$ függvények szakadása x-nél meg nem szüntethető vagy megszüntethető; az első esetben (2.24) az U görbe aszimptotája, az utóbbi esetben érintője.

c) Végül ha x olyan pont, amire $f_1^2(x)+f_2^2(x)=0$, akkor x nem lehet gyök, mert az (*F.2*) feltétel miatt $f_0(x)\neq 0$.

A tétel bizonyítása a sok részállítás miatt hosszadalmas, ezért csak röviden vázoljuk. Az a) eset viszonylag egyszerű, problémát csak olyan x értékek jelentenek, amelyek $B(x)$ zérushelyei (lásd (2.21)-es összefüggés). Az ($F.4$) feltétel szerint azonban $B(x)$ zérushelyei izoláltak, s így a folytonosságra vonatkozó feltételezésünk (($F.1$): $f_i \in C^2$) kihasználásával az ilyen x-ekre is bizonyítható az állítás. A b) és c) esetek bizonyításánál ugyancsak a folytonosságra lehet hivatkozni, kihasználva, hogy a $\Delta(x)$ függvény zérushelyei is izoláltak (lásd ($F.3$) feltételezés). A (2.24) egyenessel kapcsolatos állítás bizonyításánál a *l'Hospital-szabályt* alkalmazhatjuk.

Az U görbe érintőjének meredekségére (2.21)-ből egy egyszerű formula adódik:

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \tag{2.25}$$

Ebből differenciálással nyerjük az alábbi formulákat:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du_2}{du_1}\right) = \frac{\Delta(x)}{(f_2(x))^2} \tag{2.26}$$

$$\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = \frac{(\Delta(x))^2}{(f_2(x))^3 B(x)}. \tag{2.27}$$

Ezek a formulák előnyösen használhatók konkrét esetekben az U görbe menetének megállapításához.

Térjünk vissza most a gyökök számának kérdéséhez. Az S halmaz számot ad azon bifurkációkról, ahol legalább két gyök összeolvad. Gyökszámváltozás bekövetkezhet még egy másik módon is: a gyök a végtelenbe megy (vagy a végtelenből jön). Ezért szükséges vizsgálnunk az U görbét az $x \to -\infty$, ill. $x \to +\infty$ határesetekben.

Feltételezzük, hogy az alábbi határértékek léteznek (végesek): ($F.5$) feltétel:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_i(x)}{\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}} = a_i, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_i(x)}{\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}} = b_i, \quad i = 1, 2. \tag{2.28}$$

Ahhoz, hogy az EBD-t megkapjuk, néhány további ágat veszünk hozzá az U görbéhez:

a) Az $x \in D_{11}$ értéknél az $f(u_1, u_2; x) = 0$ egyenest (illetve ha $f_1(x) = f_2(x) = 0$, akkor ehelyett a $\frac{\partial f(u_1, u_2; x)}{\partial x} = 0$ egyenest), azaz az U érintőjét vagy aszimptotáját x-nél. Nevezzük el ezeket az ágakat D_{11}-ágaknak.

b) Ha a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_0(x)}{\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}} = a_0 \tag{2.29}$$

határérték létezik, akkor $x = -\infty$-hez is hozzárendelünk egy egyenest:

$$a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 \tag{2.30}$$

ezt α-ágnak fogjuk nevezni. A (2.30) egyenes az U görbe érintője (aszimptotája) $x = -\infty$-nél (pontosabban fogalmazva az érintő határesete).

c) Ha a

(2.31) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x)}{\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}} = b_0$$

határérték létezik, akkor $x=+\infty$-hez is hozzárendelünk egy egyenest, az ω-ágat:

(2.32) $$b_0+b_1u_1+b_2u_2 = 0.$$

Ez az egyenes az U görbe érintője (vagy aszimptotája) $x=+\infty$-nél.

A most bevezetett D_{11}-, α-, ω-ágak közül egyesek hiányozhatnak (ha pl. a (2.29) bal oldalán lévő határérték nem létezik, akkor α-ág nincs). A meglevő ágak az U görbéhez kapcsolódnak, mintegy annak hiányait pótolják. A kapott vonalrendszert nevezzük el U^* *vonalrendszer*nek. Az alábbi tétel szerint U^* éppen az EBD.

2.2. TÉTEL. Az (F.1)—(F.5) feltételek fennállása esetén az U^* vonalrendszer az (u_1, u_2) síkot tartományokra (nyílt, összefüggő halmazokra) bontja. Egy tartományon belül a gyökök folytonosan és egyértelműen folytathatók, nagyság szerinti sorrendjüket megőrzik, és így számuk egy tartományon belül állandó. Az utóbbi állításokat részletezve legyen

(2.33) $$u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

egy egyszerű görbe, amely egy tartományon belül fekszik. Ha x_1 egy gyök $t=t_1$-nél, azaz

(2.34) $$f_0(x_1)+f_1(x_1)u_1(t_1)+f_2(x_1)u_2(t_1) = 0,$$

akkor létezik egyetlen folytonos függvény, $x(t)$, úgy, hogy $x(t)$ az $u_1(t)$, $u_2(t)$ paraméterpárhoz tartozó gyök:

(2.35) $$f_0(x(t))+f_1(x(t))u_1(t)+f_2(x(t))u_2(t) = 0, \quad t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Ha x_1^* egy másik gyök t_1-nél és $x_1<x_1^*$, akkor az x_1 folytatásaként kapott $x^*(t)$ gyökre teljesül, hogy

(2.36) $$x(t) < x^*(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Bizonyítás. Az implicitfüggvény-tétel szerint egyértelmű és folytonos folytathatóság lokálisan fennáll, ha $\dfrac{\partial f(u_1, u_2; x)}{\partial x} \neq 0$ a gyök helyén, azaz ha $x \notin S$. Feltételezéseink miatt most az $\big(u_1(t), u_2(t)\big)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ ív mentén ez mindig teljesül. Gyök eltűnése vagy egy gyök kettéágazása így kizárt, és a görbén visszafelé haladva kizárható gyök keletkezése vagy két gyök egybeolvadása. Az $x(t)$, $x^*(t)$ függvények folytonossága miatt a (2.36) reláció a görbe mentén így végig érvényes marad. A globális folytathatósághoz még be kell látnunk, hogy a gyök a görbe mentén nem tarthat végtelenhez. Ha pl. $\lim\limits_{t\to\tau\in[t_1,t_1]} x(t)=+\infty$ lenne, miközben (2.35) fennáll, akkor az *(F.5)* feltétel miatt $\big(u_1(\tau), u_2(\tau)\big)$ rajta lenne az U^* vonalrendszer ω-ágán.

3. A gyökök számának megváltozása az U^* vonalrendszer valamely ágán történő áthaladáskor

Tegyük fel, hogy a paraméterek (u_{10}, u_{20}) értékénél x_0 egy gyök:

$$f_0(x_0)+f_1(x_0)u_{10}+f_2(x_0)u_{20}=0. \tag{3.1}$$

Módosítsuk a paramétereket az (u_1, u_2) paramétersík valamely rögzített (n_1, n_2) egységvektorához $(n_1^2+n_2^2=1)$ tartozó irányban:

$$u_1=\varepsilon n_1, \quad u_2=\varepsilon n_2, \quad \varepsilon>0, \tag{3.2}$$

és vizsgáljuk meg, hogyan változik a gyök értéke kis módosításra ($\varepsilon \to 0$ határeset). A gyök megváltozott értékét jelöljük x_0+h-val:

$$f_0(x_0+h)+f_1(x_0+h)(u_{10}+\varepsilon n_1)+f_2(x_0+h)(u_{20}+\varepsilon n_2)=0, \tag{3.3}$$

és csak azokat a gyököket vizsgáljuk, amelyekre teljesül, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h=0. \tag{3.4}$$

A (3.3) egyenletben h szerinti sorfejtést alkalmazunk. Ha $(u_{10}, u_{20})\notin S_{x_0}$, akkor elegendő h-ban elsőrendű tagokra szorítkozni a sorfejtésben, és látható, hogy az x_0 gyök egyértelműen és folytonosan folytatható, (3.3)-ból ugyanis kapjuk a

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{2} f_i(x_0)n_i+h\Big(f_0'(x_0)+\sum_{i=1}^{2} f_i'(x_0)u_{i0}\Big)=0 \tag{3.5}$$

közelítő formulát, amelynek egyértelmű megoldása létezik h-ra, és ez kielégíti a (3.4) követelményt is.

Legyen most $(u_{10}, u_{20})\in S_{x_0}$, azaz

$$f_0'(x_0)+f_1'(x_0)u_{10}+f_2'(x_0)u_{20}=0, \tag{3.6}$$

és tegyük fel, hogy

$$f_0''(x_0)+f_1''(x_0)u_{10}+f_2''(x_0)u_{20}\neq 0. \tag{3.7}$$

Ekkor h-ban másodrendű tagokig (3.3)-ból kapjuk:

$$a\,h^2+bh+c=0 \tag{3.8}$$

$$a=\big(f_0''(x_0)+f_1''(x_0)u_{10}+f_2''(x_0)u_{20}\big)/2$$

$$b=\varepsilon f_1'(x_0)n_1+\varepsilon f_2'(x_0)n_2$$

$$c=\varepsilon f_1(x_0)n_1+\varepsilon f_2(x)n_2.$$

Látható, hogy akkor elegendő h-ban másodrendű tagokra szorítkozni, ha (3.7) fennáll; ha (3.7) nem teljesül, akkor tovább kell menni a sorfejtésben. Utóbbi esetben a h-ra kapott egyenlet fokszámának páros vagy páratlan volta attól függ, hogy 'a' jelet vált-e x_0-nál vagy nem. Páratlan fokszám esetén érintő irányú elmozdulás $(f_1n_1+f_2n_2=0)$ kivételével egyetlen megoldás van h-ra.

Az S halmazon belül további három lehetőséget különböztethetünk meg: i) (u_{10}, u_{20}) az U görbén van, azaz $u_{10}=u_1(x_0)$, $u_{20}=u_2(x_0)$. Ekkor

$$a = B(x_0). \tag{3.9}$$

Fenti megjegyzésünk szerint cusp-nál (azaz, ahol $B(x)$ eltűnik és 'a' jelváltó) a gyökök száma csak akkor változik, ha a cusp-ból érintőirányban a cusp belseje felé mozdulunk el.

Vizsgáljuk most a $B(x_0)\neq 0$ esetet. Ha nem az érintő irányában mozdulunk el, akkor $c\neq 0$, és így a (3.8) egyenlet $\varepsilon\to 0$ határesetre érvényes közelítése:

$$ah^2+c = 0. \tag{3.10}$$

Ennek az egyenletnek két (a (3.4) feltételt kielégítő) megoldása van, ha a

$$D(x_0) \equiv ac/\varepsilon \tag{3.11}$$

mennyiség pozitív, és nincs megoldása, ha $D(x_0)$ negatív. A (2.17) és (2.16) összefüggések felhasználásával némi átalakítás után kapjuk:

$$\begin{aligned} D(x_0) &= -B(x_0)\big(f(x_0)n_1+f_2(x_0)n_2\big) = \\ &= \big(f_1'(x_0)u_1'(x_0)+f_2'(x_0)u_2'(x_0)\big)\big(f_1(x_0)n_1+f_2(x_0)n_2\big) = \\ &= \big(f_1(x_0)f_2'(x_0)-f_1'(x_0)f_2(x_0)\big)\big(n_1u_2'(x_0)-n_2u_1'(x_0)\big), \end{aligned} \tag{3.12}$$

azaz

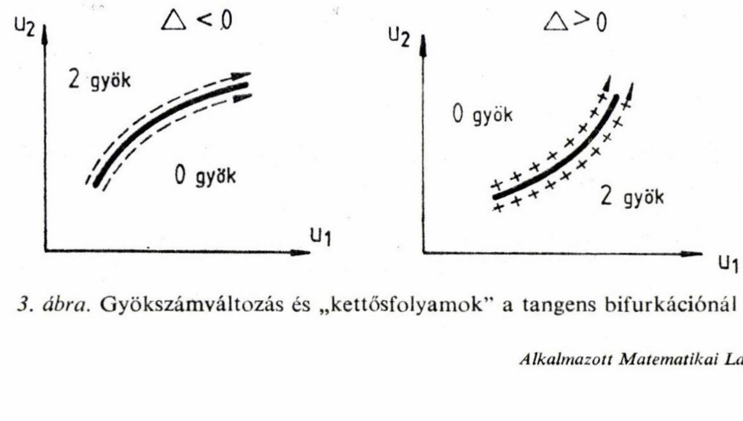
$$D(x_0) = \Delta(x_0)\big(n_1u_2'(x_0)-n_2u_1'(x_0)\big). \tag{3.13}$$

A második tényező úgy is interpretálható, mint az $\mathbf{n}$ egységvektor és az U görbe x_0-nál levő $(u_1'(x_0), u_2'(x_0))$ érintővektora vektoriális szorzatának harmadik komponense. Ezért a h-ra vonatkozó egyenlet gyökeinek száma $\Delta(x_0)>0$ esetben az U görbe bal oldalán zérus, jobb oldalán pedig kettő; $\Delta(x_0)<0$ esetben fordított a helyzet (3. ábra). Megjegyezzük, hogy az U görbe érintője mentén haladva (3.10) helyett az érvényes közelítés:

$$ah^2+bh = 0, \tag{3.14}$$

amelynek mindig két megoldása van:

$$h_1 = 0, \quad h_2 = -b/a, \tag{3.15}$$



3. ábra. Gyökszámváltozás és „kettősfolyamok" a tangens bifurkációnál és mindkettő kielégíti a (3.4) követelményt. (A b mennyiség most zérustól különbözik, mert $\Delta(x_0)\neq 0$.)

Mivel az érintőnek a két gyökös tartományba kell esnie, az U görbének mindig a konvex oldala felé eső tartományban zérus a h-ra vonatkozó egyenlet gyökeinek száma.

Az ábrán az U görbét két párhuzamos „folyam"-ként rajzoltuk fel, és így egy folyam metszésekor eggyel változik a gyökök száma; magán az U görbén csak $h=0$ az egyetlen megoldás. Az U görbe „kettősfolyam"-ként történő ábrázolásának különösen az $x\to\pm\infty$ esetekben lesz szemléleti jelentősége [17].

Az U görbét a következőkben vastag folytonos vonallal rajzoljuk meg, a görbe két oldalán a folyamatokat pedig szaggatott vonallal (– – – – –, ha $\Delta(x)<0$, ill. + + + + +, ha $\Delta(x)>0$).

A fentieket összegzi az alábbi tétel:

3.1. TÉTEL. Ha a paraméterek változtatásakor az U görbét annak U_{x_0} pontjánál átmetsszük, és x_0-ra teljesül a (3.7) összefüggés, akkor az $f(u_1, u_2; x)=0$ egyenlet gyökeinek száma kettővel nő, ha $\Delta(x_0)>0$ és az U görbén balról jobbra megyünk át (az U görbe irányításához — x paraméterezés! — viszonyítva), vagy ha $\Delta(x_0)<0$ és az U görbén jobbról balra megyünk át.

ii) (u_{10}, u_{20}) az U^* vonalrendszer x_0-hoz tartozó D_{11}-ágán van. A D_{11}-ág egy egyenes, amelyet az

$$f_0(x_0)+f_1(x_0)u_1+f_2(x_0)u_2 = 0$$

$$f_0'(x_0)+f_1'(x_0)u_1+f_2'(x_0)u_2 = 0$$

u_1, u_2-ben lineáris, és egymástól lineárisan függő egyenletek valamelyike határoz meg. Ha ezekhez még hozzávesszük az

$$f_0''(x_0)+f_1''(x_0)u_1+f_2''(x_0)u_2 = 0 \tag{3.16}$$

lineáris egyenletet, akkor a következő eseteket különböztethetjük meg:

a) A harmadik egyenlet lineárisan függ az első kettőtől. Ekkor a D_{11}-ág bármely pontja kielégíti (3.16)-ot is, a gyökök számának meghatározásához nem elegendő a másodfokú sor.

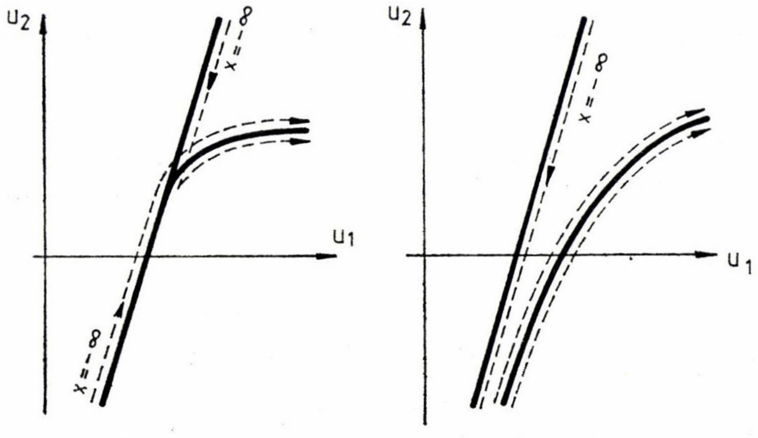
b) A harmadik egyenlet ellentmond az első kettőnek: ekkor $B(x_0)$ előjele a D_{11}-ág mentén nem változik, a D_{11}-ág két oldalán a gyökök száma kettővel különbözik.

c) A (3.16) egyenlet egy egyenest határoz meg, ami egyetlen (u_{11}, u_{21}) pontban metszi a D_{11}-ágat. Ekkor $B(x_0)$ előjele különbözik a D_{11}-ág két szakaszára. A *l'Hospital-szabály* alkalmazásával belátható, hogy ekkor az U görbének x_0-nál megszüntethető szakadása van, az U görbe „hiányzó" pontja éppen (u_{11}, u_{21}):

$$\lim_{x\to x_0} u_1(x) = u_{11}, \quad \lim_{x\to x_0} u_2(x) = u_{21}. \tag{3.17}$$

A D_{11}-ágon átmenve a gyökök száma kettővel változik, de hogy milyen értelemben, az attól függ, hogy az említett ág melyik szakaszán megyünk át.

iii) Tekintsük végül azt az esetet, amikor az U^* vonalrendszer α- vagy ω-ágán haladunk át (ha egyáltalán van ilyen ág). Ekkor a gyökök száma az áthaladáskor eggyel változik annak következtében, hogy a gyök „kimegy a végtelenbe" vagy „a végtelenből jön". Magán az α- vagy ω-ágon ez a gyök még éppen nem jelenik meg, így ezek a határvonalak a kisebb gyökszámú tartományhoz tartoznak. A 2.1. tétel segítséget nyújt a tájékozódásban: a 4. ábrán az α-, ill. ω-ágat szimbolikusan úgy ábrázoltuk, hogy a folyamok balról jobbra történő metszésekor a gyökök száma éppen eggyel nő. Az ábrán vázolt esetek akkor fordulnak elő, ha $\Delta(x)<0$ elég kis (ill. elég nagy) x-ekre.



4. ábra

4. Speciális esetek

A) $f_2(x) \equiv 1$

Ez az eset az általános esetből ((2.3) típusú függvény) származtatható az u_2 együtthatójával történő leosztással, amikor az nem zérus. A (2.8)-on túlmenően most még azt is tudjuk, hogy

$$D_{10} = \emptyset. \tag{4.1}$$

A (2.5) egyenlőtlenség most fennáll, ezért most nincs olyan gyök, ami minden paraméterértékre gyök lenne. A (2.9) egyenletrendszer determinánsa most

$$\Delta(x) = -f_1'(x). \tag{4.2}$$

Az U görbe paraméteres egyenlete:

$$u_1(x) = -\frac{f_0'(x)}{f_1'(x)}, \quad u_2(x) = -f_0(x)+f_0'(x)\frac{f_1(x)}{f_1'(x)}. \tag{4.3}$$

A (2.19)-ben definiált S_x szeletekkel kapcsolatban felsorolt i)—iii) esetek közül a iii) eset változatlan formában tárgyalható, az i) és a ii) eseteket viszont célszerű erre a speciális rendszerre külön megfogalmazni:

i) $x \in D_{21}$: Ekkor $S_x = \emptyset$.

ii) $x \in D_{11}$: Ekkor a (2.9) rendszer első egyenlete egy egyenest definiál:

$$f_0(x)+f_1(x)u_1+u_2 = 0, \tag{4.4}$$

míg a második egyenlet azonosságba megy át; most ugyanis

$$f_0'(x) = f_1'(x) = 0. \tag{4.5}$$

A (2.22)-ben definiált $B(x)$ most a következő alakot ölti:

$$B(x) = f_0''(x) + f_1''(x) u_1. \tag{4.6}$$

A (2.25) összefüggésből az U görbe érintőjének meredekségére most ezt kapjuk:

$$\frac{du_2}{du_1} = -f_1(x), \tag{4.7}$$

ami azt jelenti, hogy a meredekség monoton módon változik azon intervallumokban, ahol $f_1(x)$ monoton módon változik. A 2.1. tételt a vizsgált speciális esetre külön is megfogalmazzuk:

4.1. TÉTEL. Vizsgáljuk az

$$f(u_1, u_2; x) = f_0(x) + f_1(x) u_1 + u_2 = 0 \tag{4.8}$$

egyenlet gyökeit, ahol x az ismeretlen, u_1, u_2 pedig paraméterek. Tegyük fel, hogy

$$f_0 \in C^2, \quad f_1 \in C^2,$$

továbbá, hogy $f_0(x)$, $f_1(x)$ és a (4.6)-ban definiált $B(x)$ zérushelyei izoláltak. Ekkor igazak a következő állítások:

a) Az (u_1, u_2) sík azon pontjai, amely paraméterértékekhez egy előírt $x \in D_{22}$ (azaz $f_1'(x) \neq 0$) érték gyök, az

$$f_0(x) + f_1(x) u_1 + u_2 = 0 \tag{4.9}$$

egyenlet által meghatározott egyenesen vannak: ez az egyenes az U görbe érintője az U_x pontnál.

b) Legyen most x olyan érték, amelyre $f_1'(x) = 0$. Ekkor az (u_1, u_2) sík azon pontjai, amelyeknél x gyök, ugyancsak a (4.9) egyenlet által definiált egyenes mentén vannak, és ez az egyenes érintője vagy aszimptotája az U görbének. Ha $x \in D_{21}$, akkor ezen egyenes mentén x egyszeres gyök, ebben az esetben az U görbe kimegy a végtelenbe, amint közeledünk x-hez, (4.9) pedig az aszimptota egyenlete. Ha $x \in D_{11}$, akkor a (4.9) egyenes a végesben marad vagy kimegy a végtelenbe attól függően, hogy az $u_1(x)$ és $u_2(x)$ függvényeknek x-nél megszüntethető vagy meg nem szüntethető szakadásuk van. Előbbi esetben a (4.9) egyenes érintője az U görbének az U_x pontban, utóbbi esetben aszimptotája.

Az U^* vonalrendszer konstrukciója, valamint a gyökök számára vonatkozó állítások lényeges egyszerűsödést nem mutatnak ebben a speciális esetben.

B) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) \equiv 1$

Ez egy igen fontos speciális eset: a probléma most a $-f_0(x)$ függvény grafikonjának az $u_1 x + u_2$ egyenesekkel való metszéspontjainak száma és helye. Megjegyezzük, hogy ez a speciális eset az A) pontban vizsgált speciális esetből is adódhat az x változó transzformációjával egy olyan intervallumban, ahol $f_1(x)$ szigorúan monoton változik, azaz ahol $f_1(x)$ invertálható.

Azonnal látható, hogy most

$$D_{ij} = \emptyset, \text{ ha } i \neq 2, \; j \neq 2; \; D_{22} = R. \tag{4.10}$$

Az

$$\begin{aligned} f_0(x) + u_1 x + u_2 &= 0 \\ f_0'(x) + u_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

egyenletrendszer determinánsa most

$$\Delta(x) \equiv -1. \tag{4.12}$$

Vizsgálni fogjuk az

$$f_0(x) + u_1 x + u_2 = 0 \tag{4.13}$$

egyenlet gyökeit, és feltételezzük, hogy

$$f_0 \in C^2 \quad \text{((F.1.B) feltétel).}$$

Feltételezzük továbbá, hogy $f_0''(x)$ zérushelyei izoláltak — (F.4.B) feltétel. Az (F.2) és (F.3) feltételekre most nincs szükség, azok most automatikusan teljesülnek. Az (F.5) feltételre ugyancsak nincs szükség, mert most

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0. \tag{4.14}$$

A (4.13) egyenlethez tartozó U görbe most egyetlen folytonos vonalból áll, amelynek paraméteres egyenletei:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -f_0'(x) \\ u_2(x) &= -f_0(x) + f_0'(x)x, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{4.15}$$

E függvények az (F.1.B) feltétel következtében folytonosan differenciálhatók:

$$u_1 \in C^1, \quad u_2 \in C^1, \quad x \in R. \tag{4.16}$$

Az U görbére levezetett (2.16), (2.17), (2.25), (2.26), (2.27) általános formulák a most vizsgált speciális esetben az alábbiakra redukálódnak:

$$x u_1'(x) + u_2'(x) = 0, \quad x \in R \tag{4.17}$$

$$f_0''(x) = -u_1'(x), \quad x \in R \tag{4.18}$$

$$\frac{du_2}{du_1} = -x \tag{4.19}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du_2}{du_1}\right) = -1 \tag{4.20}$$

$$\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = \frac{1}{f_0''(x)}. \tag{4.21}$$

A vizsgált speciális esetre a korábbi állításokból, valamint a fenti formulákból következnek az alábbi tételben megfogalmazott állítások.

4.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az f_0 függvényre teljesülnek a következők:

i) $f_0 \in C^2$,

ii) $f_0''(x) \neq 0$, hacsak $x \notin B_0$, ahol B_0 legfeljebb véges számú pontból álló (vagy üres) halmaz,

iii) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left| \dfrac{f_0(x)}{x} \right| = +\infty$.

Ekkor a (4.15) egyenletek az (u_1, u_2) síkban egy összefüggő U vonalat állítanak elő, és erre az U görbére teljesülnek a következő állítások:

a) A görbe véges számú szakaszból áll. A szakaszok cusp-pontoknál csatlakoznak egymáshoz. A cusp-pontok azon x értékekhez tartoznak, amelyeknél f_0'' előjelet vált. (Tehát ezek az x-ek a B_0 halmaz egy részhalmazát alkotják.) Azokon a szakaszokon, ahol $f_0''<0$, ott a görbe alulról konvex, ahol pedig $f_0''>0$, ott alulról konkáv. A cusp-pontnál csatlakozó két szakasz meredeksége megegyezik.

b) Az U görbe meredeksége $(-x)$ a görbe mentén szigorúan monoton változik $+\infty$-től $-\infty$-ig.

c) Azon (u_1, u_2) paraméterértékek, amelyekre a (4.13) egyenletnek egy előírt x érték gyöke, az U görbe x-hez tartozó pontjához húzott érintő mentén vannak.

d) Az U görbe a paramétersíkot tartományokra bontja: egy tartományon belül a gyökök száma állandó.

e) A paraméterek változtatásakor, ha az U görbén átmegyünk, a gyökök száma kettővel változik, éspedig kettővel nő, ha a görbén „jobbról balra" megyünk át.

A iii) feltétel következtében az U görbe „a végtelenből jön és a végtelenbe megy", a *l'Hospital-szabály* miatt ugyanis

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f_0'(x), \tag{4.22}$$

és ezért ha iii) fennáll, akkor

$$\lim_{x \to \pm\infty} |u_1(x)| = +\infty. \tag{4.23}$$

Ha a iii) feltétel nem teljesül, akkor az U görbét ki kell egészíteni az α- és/vagy ω-ággal ahhoz, hogy a gyökök száma szerint felosszuk a paramétersíkot. Tekintsük pl. azt az esetet, amikor

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_0(x)}{x} = a_0, \tag{4.24}$$

és ugyanakkor

$$\lim_{x \to -\infty} u_2(x) = u_2^*. \tag{4.25}$$

Ekkor az U görbe tart az (a_0, u_2^*) ponthoz, amint $x \to -\infty$. A ii) feltétel miatt $u_1(x)$ és $u_2(x)$ is monoton függvények elég kis x értékekre. Figyelembe véve továbbá a (4.19) összefüggést, látható, hogy csak az 5. ábrán feltüntetett két konfiguráció fordulhat elő az $x \to -\infty$ határesetben.

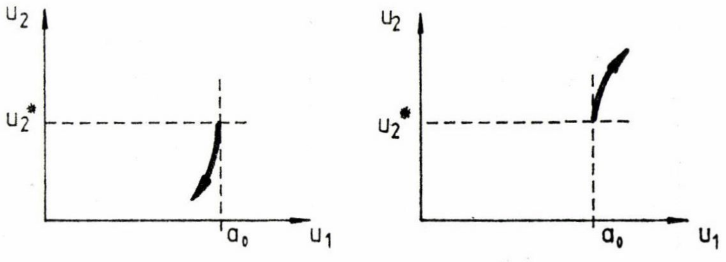
A gyökök számának meghatározására alkalmas „kettősfolyamot" esetünkre a 6. ábra tünteti fel: egy folyamot jobbról balra metszve a gyökök száma eggyel nő.

Ha (4.24) teljesül, de (4.25) helyett az teljesül, hogy

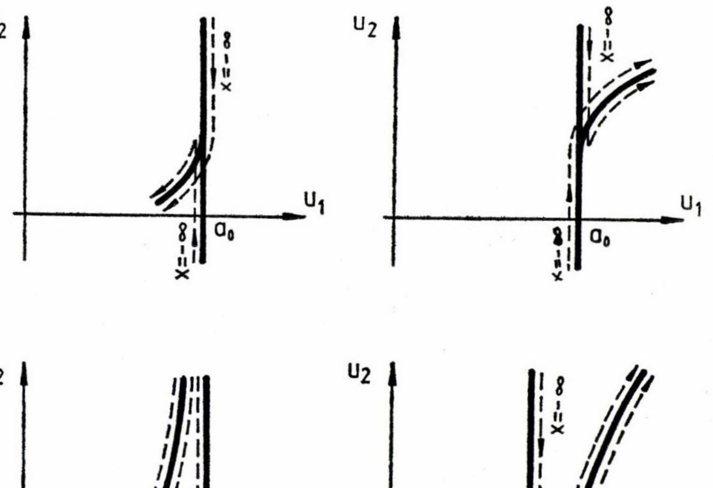
$$\lim_{x\to-\infty} u_2(x) = +\infty, \tag{4.26}$$

akkor az α-ág aszimptotája lesz az U görbének: a kettősfolyamnak csak egyike fut végig az $u_1 = a_0$ egyenes (α-ág) egyik oldalán.

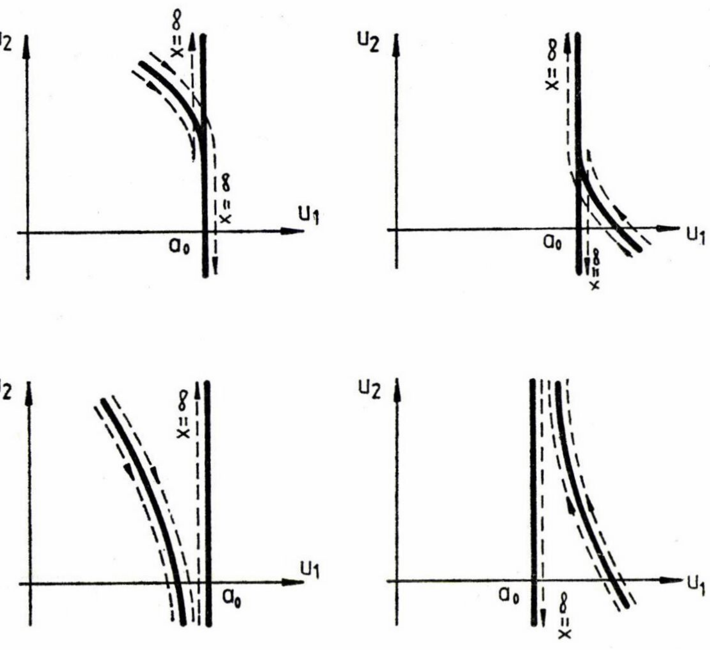
Az ω-ággal hasonló a helyzet. A 7. ábrán összefoglalóan feltüntettük az $x\to+\infty$ határesetre vonatkozó lehetőségeket (feltettük, hogy a $\lim_{x\to+\infty} u_2(x)$ határérték létezik, de lehet $+\infty$ vagy $-\infty$ is).



5. ábra



6. ábra. Az α-ágak lehetséges helyzetei



7. *ábra.* Az ω-ágak lehetséges helyzetei

Összefoglaljuk a vizsgált speciális esetben a gyökök számának meghatározására alkalmas U^* vonalrendszer konstrukcióját és használati utasítását.

1. A (4.15) összefüggés alapján megrajzoljuk az U görbét, illetve annak két oldalán a kettősfolyamot.

2. Meghatározzuk a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{f_0(x)}{x}\right|$ határértéket. Ha az $x\to+\infty$-hez tartozó határérték véges, akkor a 7. ábra megfelelő esetét kiválasztva megrajzoljuk az ω-ágat. Hasonlóan megrajzoljuk — ha szükséges — az α-ágat.

3. Valamely speciális paraméterértéknél meghatározzuk a gyökök számát.

4. Ha kíváncsiak vagyunk a gyökök számára valamely (u_{11}, u_{21}) paraméterértéknél, akkor a kiválasztott (u_{10}, u_{20}) pontból egy folytonos g görbét rajzolunk az (u_{11}, u_{21}) pontba. Gyökszámváltozás csak ott van, ahol a g görbe átmegy az U^* vonalrendszeren: éspedig $+1$, ha az átmenet jobbról balra, -1, ha az átmenet balról jobbra történik.

Amennyiben az $f_0(x)$ függvény egy ismert konkrét függvény, azaz paramétereket nem tartalmaz, akkor az U görbe számítógéppel könnyen megrajzoltatható. Különböző x értékeknél az U-hoz érintőket rajzolva olyan nomogramot rajzolhatunk, ami nemcsak a gyökök számáról, hanem a gyökök értékéről is tájékoztat bennünket.

5. Példák

Néhány konkrét példán szemléltetjük a „parametrikus reprezentáció" módszerének alkalmazását. Az ábrákon az U^* vonalrendszert folytonos vastag vonalak fogják jelölni, a kettősfolyamokat pedig szaggatott vonalak: — — — — —, ha $\Delta(x)<0$, ill. + + + + + +, ha $\Delta(x)>0$. Ha jobbról balra átmegyünk egy — — — — — típusú vonalon, akkor az $f(x)$ gyökeinek száma eggyel nő, + + + + + típusú vonalon jobbról balra átmenve eggyel csökken. A gyökök számát az ábrákon négyzetbe írt számokkal jelezzük.

1. Példa.

$$f(x) = x^2+xu_1+u_2$$

$$\Delta(x) \equiv -1, \quad u_1(x) = -2x, \quad u_2(x) = x^2.$$

Az U görbe parabola (8/a ábra).

2. Példa.

$$f(x) = x+u_1+x^2u_2$$

$$\Delta(x) = 2x, \quad u_1(x) = -\frac{x}{2}, \quad u_2(x) = -\frac{1}{2x}.$$

Az U görbe most hiperbola. Mivel az $x=\mp\infty$-hez tartozó aszimptoták léteznek, az α-ágat, ill. ω-ágat is be kell rajzolnunk: a korábban mondottak szerint mint „belső" aszimptotákat (8/b ábra).

3. Példa.

$$f(x) = 1+x^2u_1+xu_2$$

$$\Delta(x) = -x^2, \quad u_1(x) = \frac{1}{x^2}, \quad u_2(x) = -\frac{2}{x}.$$

Az $x\to\pm\infty$ határesetben az U görbe az origóhoz tart, az α-, ill. ω-ágak most egybeesnek ($u_1=0$ egyenes), de a két folyam különválik (8/c ábra).

4. Példa.

$$f(x) = x^3+x^2u_1+u_2$$

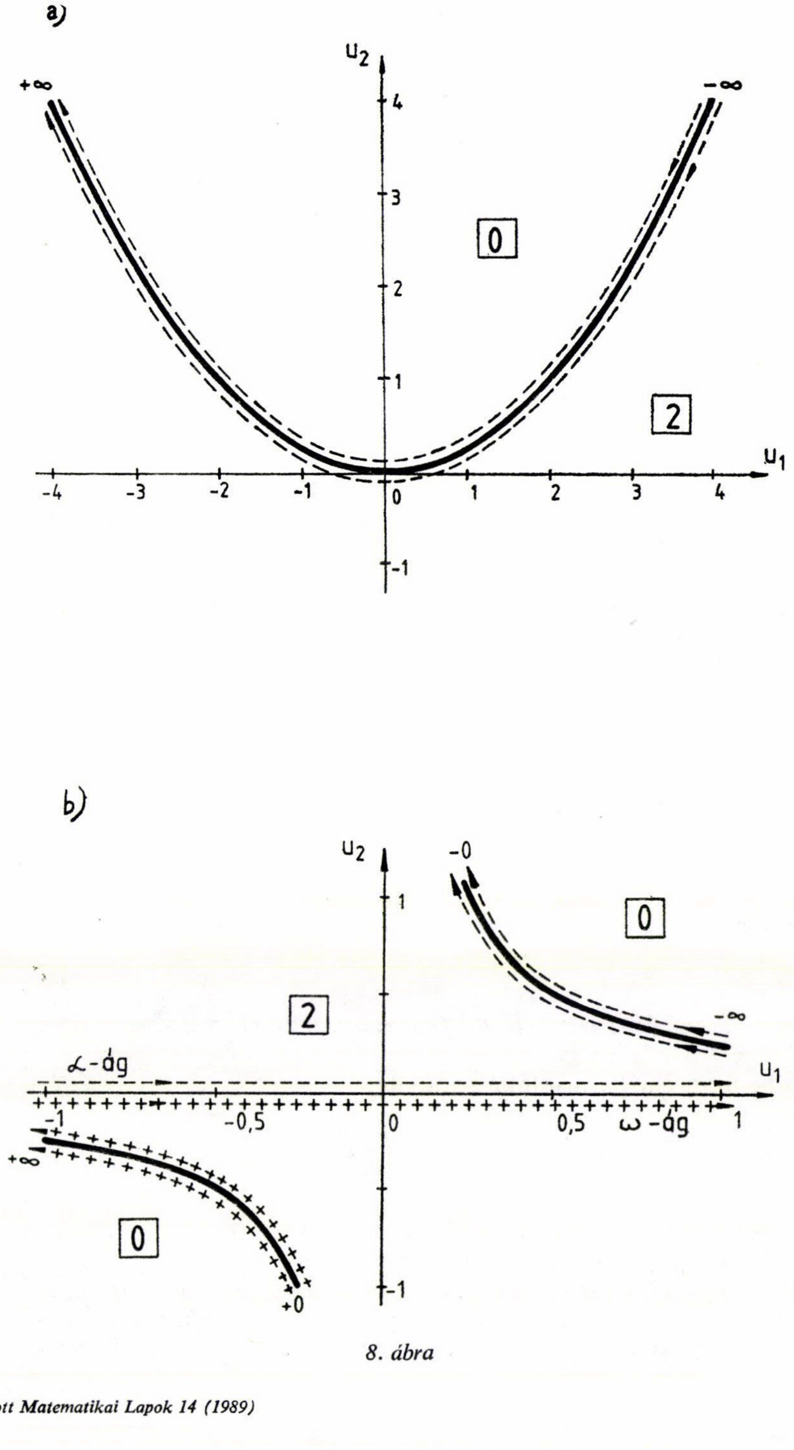
$$\Delta(x) = -2x, \quad u_1(x) = -\frac{3}{2}x, \quad u_2(x) = \frac{1}{2}x^3.$$

Az U görbe most egy harmadfokú parabola:

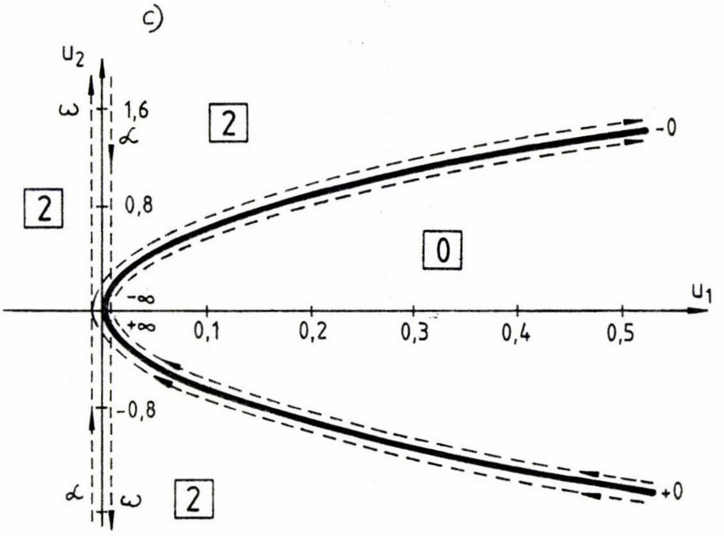
$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 u_1^3.$$

Mivel $r(0)=r_0(0)=1$, ezért az $x=0$-nál be kell rajzolni az U érintőjét ($u_2=0$ egyenes), így kapjuk az U^* vonalrendszert (9/a ábra).

„Kettősfolyam"-ábrázolásban gondot okoz az ágak csatlakoztatása az origóban: a csatlakozás módja attól függ, hogy az $x=0$ gyököt a pozitív gyökökhöz vagy a negatív gyökökhöz számítjuk. Az előbbi választás mellett a következőképpen


a)
u_2
$+\infty$
$-\infty$
4
3
2
1
0
2
u_1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
b)
u_2
-0
1
0
2
$-\infty$
α-ág
u_1
-1
-0,5
0
0,5
ω-ág
1
$+\infty$
0
+0
-1

8. ábra



Az U* vonalrendszerek másodfokú függvényekre:

a) $f(x)=x^2+xu_1+u_2$, b) $f(x)=x+u_1+x^2u_2$, c) $f(x)=1+x^2u_1+xu_2$.

járhatunk el. Az $x<0$ gyökök számát a 9/b ábra adja, míg az $x \geqq 0$ gyökök számát a 9/c ábra adja.

A két ábra egyesítéséből kapjuk a valós gyökök számát megadó ábrát (9/d ábra).

5. Példa.

$$f(x) = x^2+u_1+x^3u_2$$

$$\Delta(x) = 3x^2, \quad u_1(x) = -\frac{1}{3}x^2, \quad u_2(x) = -\frac{2}{3x}.$$

Az $x=0$-hoz tartozó D_{11}-ág az előző példához képest két vonatkozásban is eltér: egyrészt most Δ nem jelváltó $x=0$-nál, másrészt most az U görbe a végtelenbe megy, amint $x \to 0$, így a D_{11}-ág az U görbe aszimptotája (10. ábra).

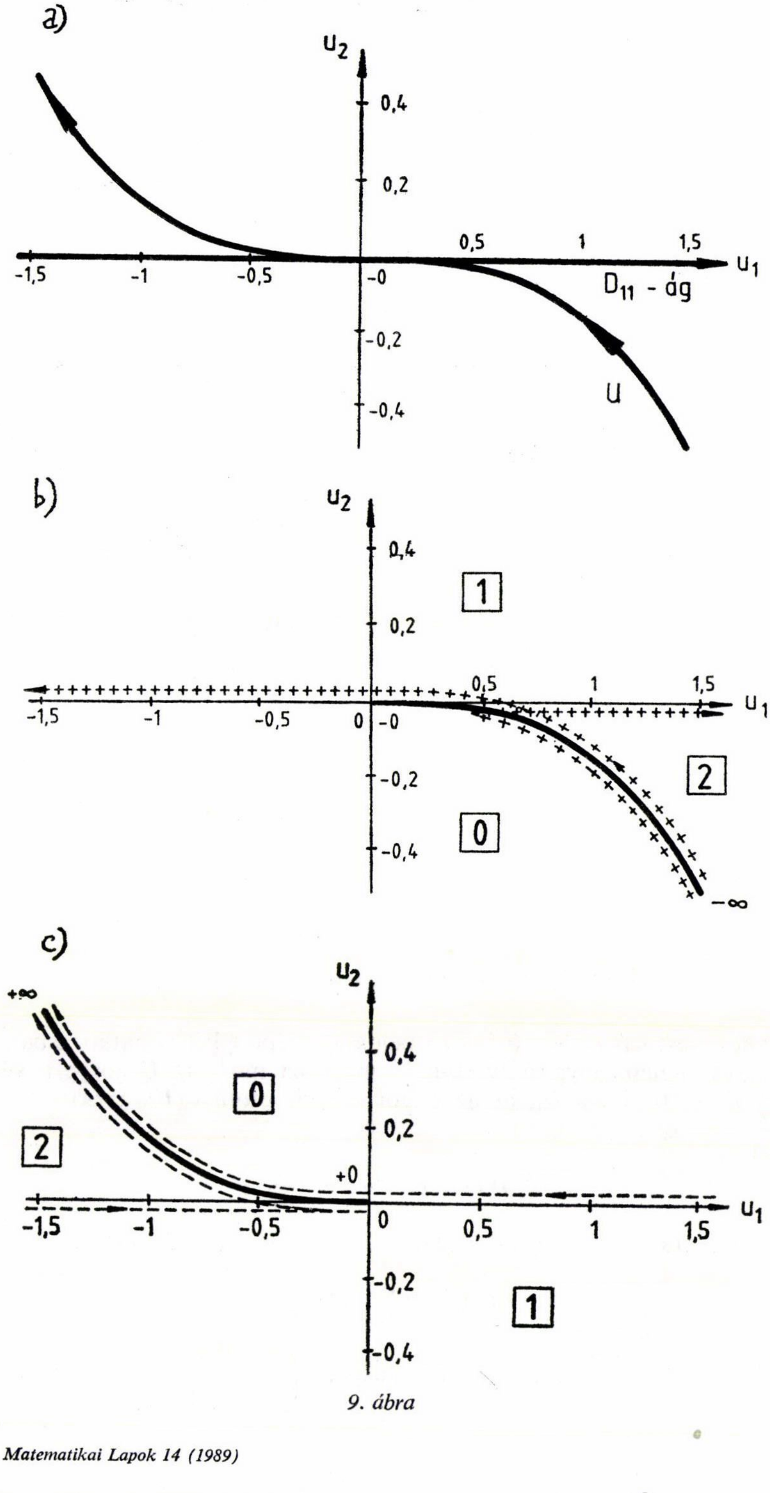
6. Példa.

$$f(x) = e^{-x^2}+xu_1+u_2$$

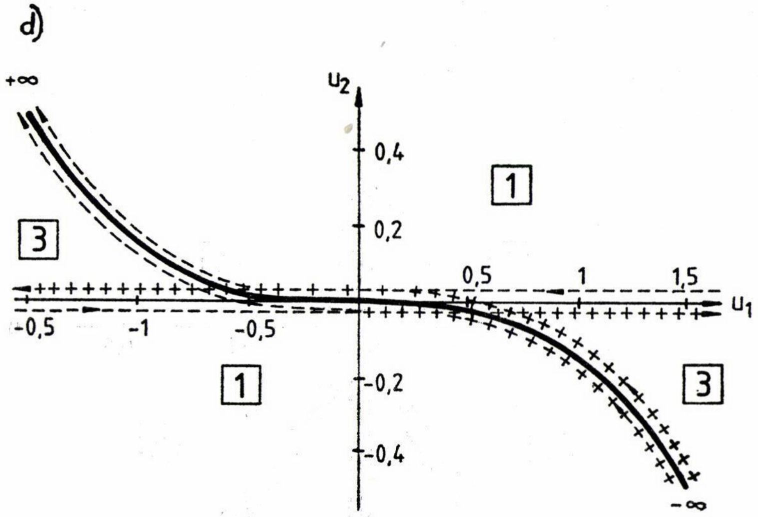
$$\Delta(x) \equiv -1, \quad u_1(x) = 2xe^{-x^2}, \quad u_2(x) = -(1+2x^2)e^{-x^2},$$

$$B(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Az U görbének véges x-ekre van két cuspja $\left(x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{-nél } B=0;\ 11. \text{ ábra}\right)$.


a)
u2
0,4
0,2
0,5
1
1,5
u1
-1,5
-1
-0,5
-0
D11 - ág
-0,2
-0,4
U
b)
u2
0,4
1
0,2
0,5
1
1,5
u1
-1,5
-1
-0,5
0
-0
-0,2
2
0
-0,4
-∞
c)
u2
+∞
0,4
0
0,2
2
+0
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
u1
-0,2
1
-0,4

9. ábra

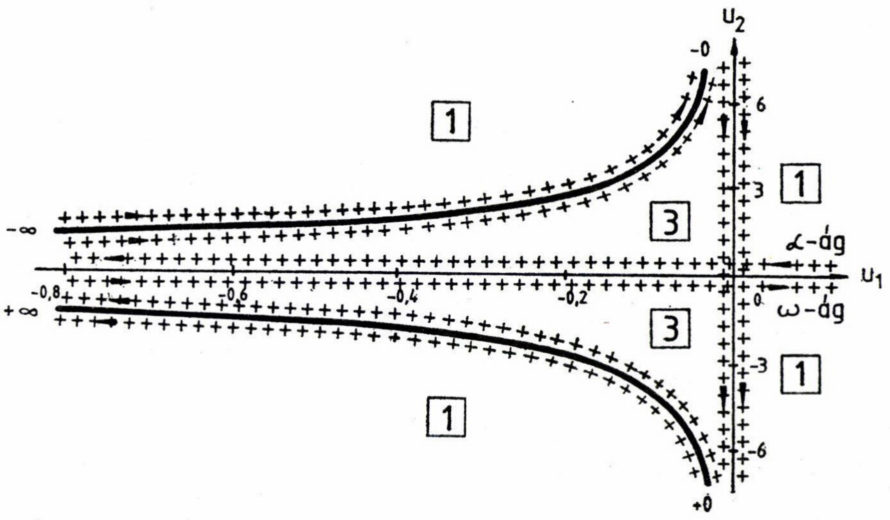


9. ábra

7. Példa.

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + xu_1 + u_2$$

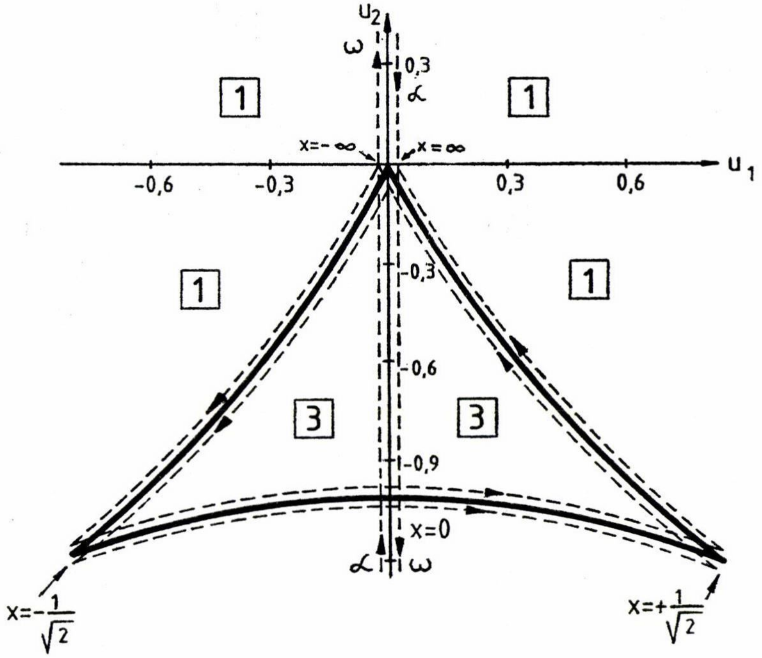
$$\Delta(x) \equiv -1, \quad u_1(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad u_2(x) = \frac{1}{x^2+1} - \operatorname{arc\,tg}(x).$$



10. ábra

A „kettősfolyamok" szerkesztési szabályát (6. és 7. ábra) következetesen alkalmazva most egy α- és egy ω-ág egybeesik $u_1=0$-nál $u_2\in(-1, 1)$-re. Ez azt jelenti, hogy ha $u_2\in(-1, 1)$ és $u_1\geqq 0$, akkor egy gyök van.

Ezen a példán szemléltetjük, hogyan lehet az U görbe érintőinek segítségével a gyökök értékét meghatározni (12/b ábra).



11. ábra

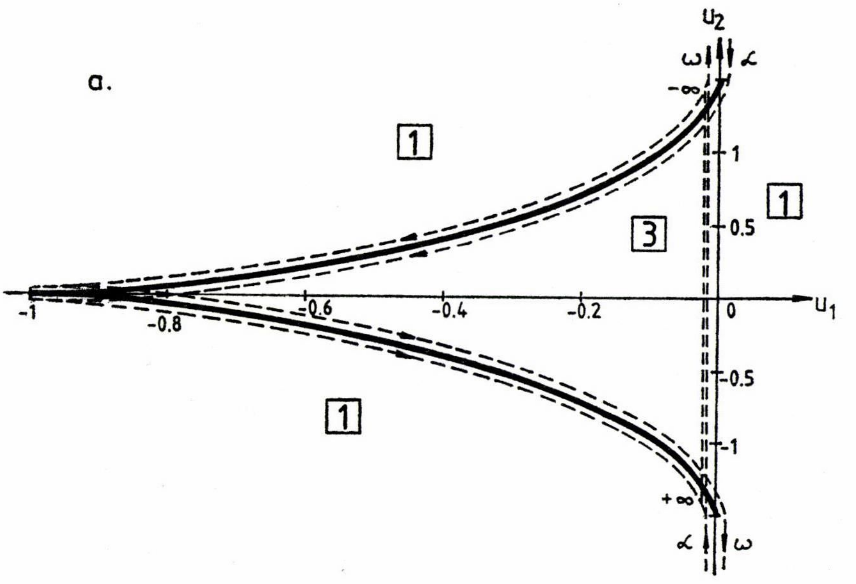
6. Diszkusszió

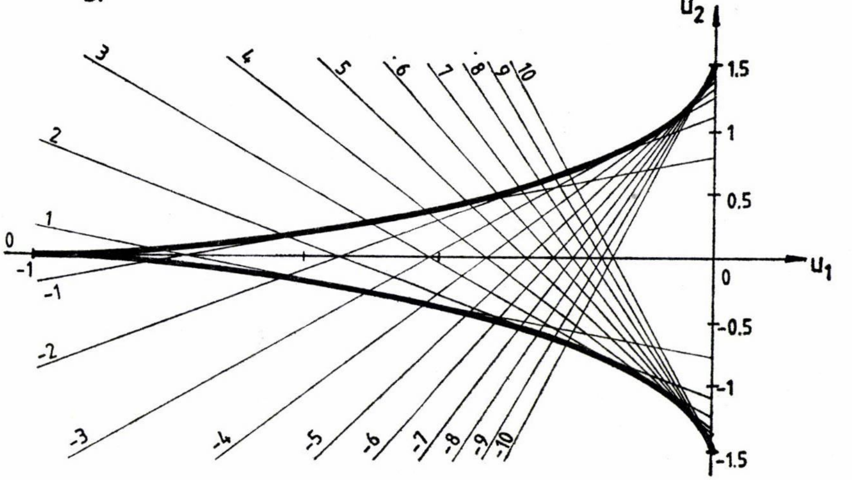
Kiinduló problémánk az volt, hogy mit tudunk mondani közönséges differenciálegyenlet-rendszerek egyensúlyi pontjairól „globális" értelemben. Itt a globális jelző egyaránt vonatkozik a fázis- és paramétertérre. Megoldható eseteket ismertettünk és receptet adtunk, hogyan lehet egyensúlyi bifurkációs diagramot konstruálni. Az ismertetett recept lényege: a paramétersíkon (kétparaméteres rendszereket vizsgáltunk) a bifurkációs görbét paraméteres alakban állítjuk elő, ahol az egyik állapotváltozót tekintjük paraméternek (parametrikus reprezentáció módszere).

Kimutattuk, hogy ezzel a módszerrel az

$$f_0(x)+f_1(x)u_1+f_2(x)u_2=0 \tag{6.1}$$

típusú közönséges egyenleteknél (x állapotváltozó, u_1 és u_2 paraméterek) az egyenlet gyökeire vonatkozó információkat egy explicit formulával (2.12) megadott ($u_1=u_1(x)$, $u_2=u_2(x)$) x-paraméteres U görbe tartalmazza. Adott paraméterértéknél az összes gyököt megkapjuk, ha a kiválasztott (u_1, u_2) pontból az U görbéhez





12. ábra. $f(x) = \text{arc tg } x + xu_1 + u_2$
a) U^* vonalrendszer, b) nomogram a gyökök meghatározásához

érintőket (vagy aszimptotákat) húzunk. A gyökök számának meghatározására is megadtunk egy algoritmust („kettősfolyamok").

Megjegyezzük, hogy a módszer még (6.1)-nél általánosabb rendszerekre is alkalmazható; pl. az

$$f_0(x)+f_1(x)g_1(v_1, v_2)+f_2(x)g(v_1, v_2) = 0 \tag{6.2}$$

típusú egyenlet az

$$u_1 = g_1(v_1, v_2), \quad u_2 = g_2(v_1, v_2) \tag{6.3}$$

paraméter-transzformációval (6.1)-re redukálódik.

Ha egyenletrendszerből indulunk, akkor először is egy redukciós lépésre van szükség: ezzel a redukcióval a függelékben részletesen foglalkozunk és a levezetésben utaltunk a vonatkozó irodalomra is.

Egyváltozós algebrai egyenletnél a *Sturm-féle lánc* lehetőséget kínál a gyökök elhelyezkedésének megadására: a *Sturm-lánc* segítségével tetszőlegesen kiválasztott intervallumban meg tudjuk mondani az oda eső gyökök számát [12]. Ámde ez a módszer az általunk vizsgált globális problémára gyakorlatilag nem alkalmazható: ha a gyökök elhelyezkedését pontosabban akarjuk tudni, akkor az intervallumokat tologatni, szűkítgetni kell, és ráadásul ezt a procedúrát a különböző paraméterértékekre el kellene végezni.

A matematikai szakirodalomban a dolgozatunkban szereplő probléma nem ismeretlen: a katasztrófaelmélet, ill. szingularitáselmélet sok, igen általános érvényű eredményt ismer ezzel kapcsolatban. A matematikai tárgyalásmódnak azonban az alkalmazók szempontjából két hátránya is van:

a) a matematikai vizsgálatok rendszerint lokálisak,

b) a matematikusok a problémát igyekeznek a lehető legegyszerűbb alakra hozni, és az eredmények visszatranszformálása az eredeti változókra, ill. paraméterekre igen nehézkes lehet.

Megemlítünk két munkát, amelyben az a) hátrány nem nagyon jelentkezik: CALLAHAN [4] és GILMORE [7] módszereket ismertetnek tetszőleges polinomok gyökeinek számát megadó bifurkációs diagramok konstruálására. Az egyik módszer, amit GILMORE [7] vezetett be és nevezett el, éppen a parametrikus reprezentáció módszere. Paraméterekként náluk azonban egy transzformált polinom (az $n-1$-edfokú tagot az ismert módon kitranszformálták) együtthatóit használják, s így a b) hátrány náluk is jelentkezik.

Megemlítjük, hogy bizonyos globális problémák lokálisra redukálhatók „szervező centrumok" bevezetésével [18].

ARNOLD egy kis könyvben ismertette a katasztrófaelmélet és a szingularitáselmélet kapcsolatát, valamint a lényeges eredményeket. Felületeknek síkra való leképezésénél a „fold" görbe mentén a gyökök száma kettővel változik, ezért a „fold" görbét kettős vonallal ábrázolja [1]. Ugyancsak ARNOLD idézi PLATONOVA és LANDISZ vizsgálatait, akik a hullámfrontok szingularitásaival foglalkoztak. Lényegében a 4. B) pontban tárgyalt problémáról van itt szó: a cikkünkben szereplő U görbe ebben a speciális esetben az $f_0(x)$ gráfjának duálisa [1].

A parametrikus reprezentáció módszere jól alkalmazható kémiai reakciókra [6], [10], [16]. Megjegyezzük, hogy ilyen alkalmazások „ad hoc" jelleggel már korábban is voltak a kémiában, konkrét példákat találhat az olvasó [11]-ben. BALAKOTAIAH és LUSS már említett cikkében [3] CALLAHAN és GILMORE eredményeinek ismertetésén kívül szintén találhatók konkrét alkalmazások.

FÜGGELÉK

Algebrai egyenletek változóinak eliminálása az euklideszi algoritmus segítségével

Tekintsük a stacionárius állapotokat leíró egyenletrendszert:

(7.1) $$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Tegyük fel, hogy az f_i-k polinomok. A paramétereket itt nem tüntettük fel explicit módon. Az euklideszi algoritmus segítségével változókat fogunk kiküszöbölni.

Először tekintsük az $n=2$ esetet:

(7.2) $$f_i(x_1, x_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ki akarjuk küszöbölni az x_2 változót. Jelöljük $d_2(p)$-vel a p polinom második változója szerinti fokszámát, és vezessük be a következő jelöléseket:

(7.3) $$n = d_2(f_1), \quad m = d_2(f_2).$$

Tegyük fel, hogy $n \geqq m$. (Ha ez nem teljesülne, megcserélnénk az f_i-k indexeit.) Az f_i polinomok

(7.4) $$f_1(x_1, x_2) = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + ... + a_0$$

(7.5) $$f_2(x_1, x_2) = b_m x_2^m + b_{m-1} x_2^{m-1} + ... + b_0$$

alakúak, ahol a_n és b_m nem azonosan nullák, és a_i, b_i az x_1 változó polinomjai.

Állítjuk, hogy $m \geqq 1$ esetén létezik egy r természetes szám és egy $q(x_1, x_2)$ polinom úgy, hogy

(7.6) $$d_2(g_1) < m$$

teljesül a

(7.7) $$g_1(x_1, x_2) = (b_m(x_1))^r f_1(x_1, x_2) + q(x_1, x_2) f_2(x_1, x_2)$$

polinomra.

Az állítás bizonyításához tekintsük az

(7.8) $$f_1^*(x_1, x_2) = b_m(x_1) f_1(x_1, x_2) - a_n(x_1) x_2^{n-m} f_2(x_1, x_2)$$

polinomot. Nyilvánvaló, hogy $d_2(f_1^*) < n$. Ha $d_2(f_1^*) < m$, akkor $r=1$ és $q(x_1, x_2) = -a_n(x_1) x_2^{n-m}$. Ha $d_2(f_1^*) \geqq m$, akkor f_1-et helyettesíthetjük f_1^*-gal, és belőle egy új f_1^{**} polinomot állítunk elő úgy, mint ahogy f_1^* származott f_1-ből. Mivel minden ilyen lépésben az x_2 szerinti fokszám csökken, véges sok lépésben $(r \leqq n-m+1)$ megkapjuk a kívánt $g_1(x_1, x_2)$ polinomot.

Vegyük észre, hogy a (7.7) felbontás egyértelmű, ha f_1-nek és f_2-nek nincs közös tényezője.

Most tehát egy $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$ függvénypárból kiindulva egy új $\begin{pmatrix} f_2 \\ g_1 \end{pmatrix}$ függvénypárt hoztunk létre. Folytatva ezt az eljárást, a

(7.9) $$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_2 \\ g_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \to ... \to \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

sorozatot kapjuk. Ez alatt az eljárás alatt a fokszám csökken: $d_2(f_1) > d_2(g_1) > > d_2(g_2) > \ldots$, és az eljárás folytatható, amíg a fokszám zérus nem lesz:

$$d_2(g) > d_2(h) = 0 \tag{7.10}$$

Minden függvény (7.9)-ben az f_1 és f_2 polinomok kombinációja. Innen

$$g = \alpha f_1 + \beta f_2, \quad h = \gamma f_1 + \delta f_2, \tag{7.11}$$

ahol g, α, β, γ, δ x_1-nek és x_2-nek polinomjai, h viszont csak x_1 polinomja, x_2-től nem függ. (Paraméterektől való függés viszont természetesen előfordulhat.)

(7.11) szerint ha (x_{10}, x_{20}) egy gyöke a (7.2) egyenletnek, akkor gyöke a

$$g(x_1, x_2) = 0, \quad h(x_1) = 0 \tag{7.12}$$

rendszernek is. Másrészt viszont az állítás fordítottja nem feltétlenül igaz: felléphetnek „hamis gyökök" is. De ha a

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \tag{7.13}$$

determináns nem tűnik el a (7.12) egyetlen gyökére sem, akkor a (7.2) és (7.12) rendszerek ekvivalensek egymással.

A tangens bifurkáció vizsgálatánál szükségünk van a

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \tag{7.14}$$

Jacobi-determináns értékeire. Könnyen látható, hogy

$$\frac{\partial(g, h)}{\partial(x_1, x_2)} = \Delta \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \tag{7.15}$$

Másrészről

$$\frac{\partial(g, h)}{\partial(x_1, x_2)} = -\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{dh}{dx_1}.$$

A tangens bifurkáció egyenletei az eredeti egyenletrendszerre:

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0. \tag{7.16}$$

A redukcióval kaptunk egy egyszerűbb rendszert:

$$g(x_1, x_2) = 0, \quad h(x_1) = 0, \quad \frac{dh}{dx_1} = 0. \tag{7.17}$$

Ha teljesül a következő két követelmény:

(7.18) i) $\Delta \neq 0$

ii) $\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ (7.12) egyetlen gyökére sem,

akkor a (7.16) és (7.17) rendszerek egymással ekvivalensek.

Visszatérve a (7.1) általános esethez, az $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ változókat egymás után kiküszöbölhetjük. Először (7.1) első és i-edik $(i=2, \dots, n)$ egyenletéből származtatunk egy olyan egyenletet, amely nem függ x_n-től. Így az első egyenletet elhagyva marad $n-1$ egyenlet az $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ változókkal. A fenti módszert folytatva sorra kiküszöbölhetjük az $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ változókat. Végül egyetlen algebrai egyenletünk marad egyetlen változóval: $h_1(x_1)=0$. Az előzőleg sorra elhagyott egyenleteket hozzávéve a következő egyenletrendszert kapjuk:

(7.19)
$$\begin{aligned} &h_1(x_1) = 0 \\ &h_2(x_1, x_2) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0. \end{aligned}$$

Továbbá

(7.20)
$$h_i = \sum \alpha_{ij} f_j, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

itt α_{ij}-k $x_1, x_2, \dots, x_n$ polinomjai.

Ha $\det \alpha_{ij} \neq 0$ (7.19) egyetlen gyökére sem, akkor a (7.1) és (7.19) rendszerek ekvivalensek egymással.

A (7.1) és (7.19) rendszerek *Jacobi-mátrixai* közti összefüggés a gyöknél:

(7.21)
$$\frac{\partial(h_1, h_2, \dots, h_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det \alpha_{ij} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Másrészt

(7.22)
$$\frac{\partial(h_1, h_2, \dots, h_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dh_1}{dx_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \dots \frac{\partial h_n}{\partial x_n}.$$

Az eredeti rendszerben a tangens bifurkáció feltételei:

(7.23)
$$f_i = 0, \quad \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0,$$

míg az $x_n, \dots, x_2$ változók kiküszöbölése utáni egyenletekre:

(7.24)
$$h_1(x_1) = 0, \quad \frac{dh_1}{dx_1} = 0.$$

(7.23) és (7.24) ekvivalensek egymással, ha teljesülnek a következő követelmények:

i) $\det \alpha_{ij} \neq 0$

ii) $\dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} \dfrac{\partial h_3}{\partial x_3} \dots \dfrac{\partial h_n}{\partial x_n} \neq 0$ (7.19) egyetlen gyökére sem.

IRODALOM

[1] ARNOLD, V. I., *Katasztrófaelmélet* (Tankönyvkiadó, 1987).
[2] ARNOLD, V. I., GUSEIN-ZADE, S. M. and VARCHENKO, A. N., *Singularities of Differentiable Maps, Vol. I.* (Birkhauser, 1985).
[3] BALAKOTAIAH, V. and LUSS, D., "Global analysis of the multiplicity features of multi-reaction lumped parametric systems", *Chem. Engng. Sci.* **39** (1984) 865—881.
[4] CALLAHAN, J., "Singularities and Plane Maps", *Am. Math. Monthly* **81** (1974) 211—240; "Singularities and Plane Maps II: Sketching Catastrophes", *Am. Math. Monthly* **84** (1977) 765—803.
[5] FARKAS, H., KERTÉSZ, V. and NOSZTICZIUS, Z., "Explodator and bistability", *React. Kin. Catal. Lett.* **32** (1986) 301—306.
[6] GASPARD, P. and NICOLIS, G., "What Can We Learn from Homoclinic Orbits in Chaotic Dynamics?", *J. Stat. Phys.* **31** (1983) 499—517.
[7] GILMORE, R., *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers* (Wiley, 1981).
[8] GOLUBITSKY, M. and SCHAEFFER, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* (Springer, 1985).
[9] GUCKENHEIMER, J. and HOLMES, PH., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, 1986).
[10] KEENER, J. P., "Infinite Period Bifurcation in a Simple Chemical Reactor", in: *Modelling of Chemical Reaction Systems*, Eds.: Ebert, K. H., Deuflhard, P. and Jaeger, W. (Springer, 1981).
[11] KERTÉSZ, V. and FARKAS, H., "Local investigation of bistability problems in physico-chemical systems", *Acta Chim. Hung.* (megjelenés alatt).
[12] KUROS, A. G., *Felsőbb algebra* (Tankönyvkiadó, 1967).
[13] PLATONOVA, O. A. and LANDISZ, E. E., idézve [1]-ben, 56. old.
[14] RÉDEI, L., *Algebra I.* (Akadémiai Kiadó, 1954).
[15] SHAFAREVICH, I. R., *Basic Algebraic Geometry* (Springer, 1974).
[16] STIRLING, P., „Bifurkációs diagramok szerkesztése a paraméteres ábrázolás módszerével", diplomamunka, BME, Budapest, 1986.
[17] VERHÁS, J., szóbeli közlés.
[18] ZEEMAN, E. C., "Bifurcation, Catastrophe and Turbulence", in: *New Directions in Applied Mathematics*, Eds.: Hilton, P. J., and Young, G. S. (Springer, New York, 1982) 109—153.

(Beérkezett: 1988. szeptember 30.)

FARKAS HENRIK, WITTMANN MÁRIA
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM, FIZIKAI INTÉZET
1521 BUDAPEST

GYÖKÉR SOLT
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM, GÉPÉSZKARI MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST

INVESTIGATION OF GLOBAL EQUILIBRIUM BIFURCATIONS BY THE METHOD OF PARAMETRIC REPRESENTATION

H. FARKAS, S. GYÖKÉR AND M. WITTMANN

In this paper we have dealt with equations linearly depending upon two parameters. A curve is constructed with basic information about the location and number of the roots. Application of the method is shown for several special cases and examples.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 365—375

IRÁNYÍTOTT MATROIDOK, KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS ÉS A CRISS-CROSS MÓDSZER

KLAFSZKY EMIL TERLAKY TAMÁS

Miskolc Budapest

Cikkünkben bemutatjuk, hogy a kvadratikus programozási feladat, a lineáris komplementaritási feladat miként általánosítható irányított matroidokra. Irányított matroidon definiáljuk a szimmetrikus, komplementáris, pozitív (szemi) definit fogalmak kombinatorikus általánosítását. Ezen fogalmak kiterjesztését úgy végezzük el, hogy lineáris matroidok esetén megegyezzenek a lineáris algebrából jól ismert definíciókkal. Ezen általánosítás MORRIS és TODD munkáiban található, habár MORRIS és TODD definícióit némileg módosítottuk, hogy jobban kidomboríthassuk a definíciókban rejlő szimmetricitást.

A cikk második részében közöljük fő eredményünket, a criss-cross módszer általánosítását az irányított matroidokon definiált kvadratikus programozási feladat megoldására. Megmutatjuk, hogy algoritmusunk miként specializálódik pozitív definit irányított matroidok esetében, illetve miként adja vissza az irányított matroid lineáris programozás criss-cross módszerét. Végül az algoritmus egy módosítását közöljük.

1. Bevezetés

Cikkünkben KLAFSZKY—TERLAKY [16] cikkében adott kvadratikus programozási criss-cross módszereket általánosítjuk irányított matroidok esetére. Ehhez azonban a konvex kvadratikus programozási feladat megfogalmazásához szükséges fogalmakat is általánosítani kell. Így többek közt definiáljuk a négyzetes, szimmetrikus, pozitív (szemi) definit mátrixok analógiájára a négyzetes, szimmetrikus, pozitív (szemi) definit irányított matroidot. Ezen fogalmak általánosítását MORRIS és TODD [21, 22, 30, 31] végezte el. Ezek ismerete cikkünk megértéséhez elegendhetetlen, így ezeket, illetve a rájuk vonatkozó tételeket a második fejezetben röviden, bizonyítás nélkül összefoglaljuk. MORRIS és TODD definícióit némileg módosítjuk, és így szimmetrikusabb fogalmakat nyerünk, illetve az így nyert fogalmak segítségével jobban le tudjuk írni a kvadratikus programozási feladatok bázis tábláinak struktúráját. A második fejezet végén megfogalmazzuk az irányított matroid kvadratikus programozási feladatot.

A harmadik fejezetben az irányított matroidokon értelmezett kvadratikus programozási feladat dualitási tételének bizonyítására közlünk egy algoritmust; mely az irányított matroid lineáris programozás criss-cross módszere egy általánosításának tekinthető. Végül a negyedik fejezetben két speciális esetet tárgyalunk és az algoritmus egy lehetséges módosítását ismertetjük.

Mielőtt rátérnénk MORRIS és TODD eredményeinek ismertetésére, tömören összefoglaljuk az irányított matroid definícióját, alaptulajdonságait. Ezek a foglalmak, eredmények többek közt az [5, 6, 12, 13, 27, 31, 36] cikkekben is megtalálhatóak. Az ekvivalens matroid definíciókat és a matroidok elemi tulajdonságait ismertnek tételezzük fel, ezek megtalálhatók például WELSH [34] könyvében. Mind ez ideig TERLAKY [27] dolgozata az egyetlen magyar nyelvű publikáció a témakörben.

Irányított matroid és alapvető tulajdonságok

Legyen $E=\{e_1, \ldots, e_n\}$ egy véges halmaz. Egy $X=(X^+, X^-)$ rendezett halmazpárt *előjeles halmaznak* nevezünk, ha $X^+ \cap X^- = \emptyset$ és $X^+, X^- \subseteq E$. Egy X előjeles halmaz *ellentett*jén a $-X=(X^-, X^+)$ előjeles halmazt, *alaphalmazán* az $\mathbf{X}=X^+ \cup X^-$ halmazt értjük. Egy X előjeles halmaz tartalmaz egy Y előjeles halmazt, ha $Y^+ \subseteq X^+$ és $Y^- \subseteq X^-$.

1.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}^*$ előjeles halmazok rendszerei az E halmazon. Az $M=(E, \mathcal{O})$ és az $M^*=(E, \mathcal{O}^*)$ *duális irányított matroidok,* ha

(a) $\mathbf{M}=(E, \mathcal{O})$ és $\mathbf{M}^*=(E, \mathcal{O}^*)$ duális matroidok és az $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}^*$ halmazok a matroidok ciklusait, illetve kociklusait tartalmazzák.

(b) $X \in \mathcal{O} \Rightarrow -X \in \mathcal{O}$, és $Y \in \mathcal{O}^* \Rightarrow -Y \in \mathcal{O}^*$,

(c) $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$ és $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2 \Rightarrow X_1 = \pm X_2$,
$Y_1, Y_2 \in \mathcal{O}^*$ és $\mathbf{Y}_1=\mathbf{Y}_2 \Rightarrow Y_1 = \pm Y_2$,

(d) $X \in \mathcal{O}$ és $Y \in \mathcal{O}^*$ esetén
$(X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset \Leftrightarrow (X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) \neq \emptyset$.

A d) feltételt *ortogonalitási feltétel*nek nevezzük, és ekkor az $X \perp Y$ jelölést használjuk. Ismert [6], hogy az ortogonalitási feltétel ekvivalens az úgynevezett eliminációs feltétellel. Ezt az alábbiakban két látszólag eltérő, de valójában ekvivalens alakban is megadjuk.

(e1) Minden $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$, $e \in (X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)$ esetén van olyan $X_3 \in \mathcal{O}$, hogy $X_3^+ \subseteq (X_1^+ \cup X_2^+) \setminus \{e\}$, $X_1^- \subseteq (X_1^- \cup X_2^-) \setminus \{e\}$.

(e2) Minden $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$, $e' \in (X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)$ és $e'' \in (X_1^+ \cap X_2^+) \cup (X_1^- \cap X_2^-)$ esetén van olyan $X_3 \in \mathcal{O}$, hogy $X_3^+ \subseteq (X_1^+ \cap X_2^+) \setminus \{e'\}$, $X_3^- \subseteq (X_1^- \cap X_2^-) \setminus \{e'\}$ és $e'' \in \mathbf{X}_3$.

Két előjeles halmaz *kompozícióján* a

$$Z = Z_1 \circ Z_2 = \left(Z_1^+ \cup (Z_2^+ \setminus Z_1^-),\ Z_1^- \cup (Z_2^- \setminus Z_1^+)\right)$$

előjeles halmazt értjük. Látható, hogy a kompozíció szempontjából az előjeles halmazok sorrendje sem közömbös. Jelöljük $\mathcal{K}(M)$-mel a ciklusok sorozatos kompozíciói eredményeként kapott előjeles halmazok rendszerét. Bland [4] bizonyította, hogy az M irányított matroid és a ciklusai által generált $\mathcal{K}(M)$ előjeles halmazrendszer kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, valamint, hogy minden $K \in \mathcal{K}(M)$ és $L \in \mathcal{K}(M)$ esetén $K \perp L$. $\mathcal{K}(M)$ elemeit az M irányított matroid *cikloid*jainak $\left(\mathcal{K}(M\text{c}) \sim \textit{kocikloid}\right)$ nevezzük. A cikloidok a ciklusokhoz hasonlóan kielégítik az alábbi eliminációs axiómát, melynek érvényességét Bland [5] bizonyította.

e*) Ha K_1 és K_2 két cikloidja M-nek, akkor tetszőleges $e \in (K_1^+ \cap K_2^-) \cup (K_1^- \cap K_2^+)$ esetén van olyan K_3 cikloid, hogy $e \notin \mathbf{K}_3$, $K_3^+ \subseteq K_1^+ \cup K_2^+$,

$$K_3^- \subset K_1^- \cup K_2^- \text{ és } (\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2) \setminus [(K_1^+ \cap K_2^-) \cup (K_1^- \cap K_2^+)] \subseteq K_3.$$

Adott $\mathcal{K}(M)$ esetén azt mondjuk, hogy a

$$\mathcal{K}(F) = \{[(K^+ \setminus F) \cup (K^- \cap F),\ (K^- \setminus F) \cup (K^+ \cap F)] | K \in \mathcal{K}(M)\}$$

cikloid rendszer által definiált irányított matroid az *F halmazon előjelet fordítva* kaptuk. Ha G és H diszjunkt részhalmazai E-nek, akkor az $M\setminus G$ irányított matroidon az $M\setminus G=(E\setminus G, \bar{\mathcal{O}})$ irányított matroidot értjük, ahol $\bar{\mathcal{O}}=\{X|X\cap G=\emptyset, X\in\mathcal{O}\}$. Az M/H irányított matroidon az $M/H=(E\setminus H, \hat{\mathcal{O}})$ irányított matroidot értjük, ahol $\hat{\mathcal{O}}=\{X\setminus H|X\in\mathcal{O}$ és $X\setminus H$ minimális összefüggő halmaz$\}$. Az $M\setminus G/H$ irányított matroid az $M\setminus G/H=(E\setminus(G\cup H), \{X\setminus H|X\cap G=\emptyset, X\in\mathcal{O}$ és $X\setminus H$ minimális összefüggő$\})$ irányított matroidot jelöli. A „$\setminus$" műveletet *törlésnek*, a „/" műveletet *összehúzásnak* nevezzük.

Végül a lineáris algebrából jól ismert bázistáblának megfelelő bázistábla konstrukciót közöljük. Legyen $\mathcal{B}$ az **M** matroid bázisainak halmaza és m a matroid rangja. Egy $B=\{e_{b_1}, \ldots, e_{b_m}\}$ bázis esetén minden e_{b_i}-hez egyértelműen létezik $\mathbf{Y}_{b_i}\in\mathbf{O}^*$ kociklus **M**-ben úgy, hogy $\mathbf{Y}_{b_i}\cap B=\{e_{b_i}\}$. Ekkor $\{Y_{b_1}, \ldots, Y_{b_m}\}$ kociklus rendszert az $E\setminus B$ duális bázishoz tartozó *kociklusok alaprendszerének* nevezzük, ha $e_{b_i}\in Y_{b_i}^+$ minden $e_{b_i}\in B$ esetén. Ezeket a kociklusokat $C(\bar{B}, e_{b_i})$-vel is szokás jelölni ($\bar{B}=E\setminus B$).

Legyen $T(B)$ a $C(B, e_{b_i})$ $e_{b_i}\in B$ irányított kociklusok előjeles incidencia vektoraiból mint sorokból alkotott mátrix. $T(B)$ a B bázishoz tartozó *bázistábla.* Előző cikkeinkhez hasonlóan [15, 16, 26, 27, 28] az e_{b_i} elemhez tartozó sort a tábla b_i sorának nevezzük, és így τ_{ij} jelöli az e_i báziselemhez tartozó kociklusban az e_j nem bázis elem előjelét.

2. Szimmetrikus és pozitív (szemi) definit irányított matroidok

Ebben a fejezetben MORRIS és TODD [21, 22, 30, 31] eredményeit ismertetjük némileg módosított formában. Ezek ismerete elengedhetetlen a kvadratikus programozási és a lineáris komplementaritási feladat kombinatorikus absztrakciójához. Ezért definiáljuk, majd néhány tétellel jellemezzük az alábbi lineáris algebrai fogalmak általánosítását irányított matroidokra:

— komplementáris halmaz
— négyzetes mátrix
— nemszinguláris mátrix
— szimmetrikus mátrix
— pozitív (szemi) definit mátrix.

Az itt felsorolt tételeket, állításokat nem bizonyítjuk, a bizonyítások MORRIS és TODD fent említett műveiben találhatóak. A definíciókon végrehajtott módosítások nem érintik a tételek bizonyításait, azok lényegi változtatás nélkül érvényesek maradnak. A harmadik és negyedik fejezetben közölt eredményeink megértéséhez nem szükséges, hogy ezen fejezet tételeinek bizonyítását közöljük.

A fejezet további részében (ha másként nem definiáljuk) az $M=(E, \mathcal{O})$ irányított matroiddal foglalkozunk, ahol $E=S\cup T$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, $T=\{t_1, \ldots, t_n\}$ és $S\cap T=\emptyset$.

2.1. Definíció. Legyen M a fenti tulajdonságú irányított matroid. Az $F\subset E$ halmazt *komplementáris*nak nevezzük, ha $|F\cap\{s_i, t_i\}|\leq 1$, $i=1, \ldots, n$, azaz F a komplementáris elempároknak legfeljebb egyikét tartalmazza.

2.2. Definíció. Az M irányított matroidot *négyzetes*nek nevezzük, ha rangja n és van komplementáris bázisa (S és T-nek megfelelően).

A négyzetes matroid definíciója annyiban tér el MORRIS és TODD definíciójától, hogy ők azt követelték meg, hogy S legyen bázisa M-nek. A mi definíciónk egy kicsit általánosabb.

2.3. Definíció. Egy X előjeles halmaz *kapcsoló*jának *(switch)* a $\mathrm{sw}X=$ $=(\{s_i|t_i\in X^-\}\cup\{t_i|s_i\in X^+\}, \{s_i|t_i\in X^+\}\cup\{t_i|s_i\in X^-\})$ előjeles halmazt nevezzük, amit úgy kapunk, hogy T-n előjelet váltottunk és felcseréltük a megfelelő s_i és t_i elemeket.

Egy M irányított matroid *kapcsoló*jának azt a $\mathrm{sw}M$ irányított matroidot nevezzük, melynek cikloidjai az M irányított matroid cikloidjainak kapcsolói.

2.4. Definíció. Az M irányított matroid (S, T) *transzponált*jának az $M_{ST}^t=$ $=\mathrm{sw}M^*$ irányított matroidot nevezzük.

2.5. Definíció. Az M irányított matroid $((S, T)$-re vonatkoztatva$)$ *szimmetrikus,* ha $M=M_{ST}^t=\mathrm{sw}M$.

A következő tétel szimmetrikus matroidok komplementáris bázishoz tartozó bázistábláinak a struktúráját írja le. Szemléletesen azt állítja, hogy a bázistáblák rövid tábla része (a nem báziselemekhez tartozó oszlopok részmátrixa) biszimmetrikus, azaz két szimmetrikus diagonális blokkból és egy ferdén szimmetrikus mátrixból tevődik össze. Ez a tábla struktúra is mutatja, hogy a lineáris algebrai fogalmakat konzisztens módon általánosítottuk, ugyanis mint azt [16] cikkünkben is megmutattuk, szimmetrikus mátrixokkal definiált kvadratikus programozási feladatok minden komplementáris bázishoz tartozó bázistáblája biszimmetrikus.

2.1. TÉTEL. Legyen B az M szimmetrikus, négyzetes irányított matroid egy komplementáris bázisa. Ekkor az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

a) Ha $s_i, s_j\in B$, akkor $s_j\in C(B, t_i)^+\Leftrightarrow s_i\in C(B, t_j)^+$ és
$s_j\in C(B, t_i)^-\Leftrightarrow s_i\in C(B, t_j)^-$.

b) Ha $s_i, t_j\in B$, akkor $s_i\in C(B, s_j)^+\Leftrightarrow t_j\in C(B, t_i)^-$ és
$s_i\in C(B, s_j)^-\Leftrightarrow t_j\in C(B, t_i)^+$.

c) Ha $t_i, t_j\in B$, akkor $t_i\in C(B, s_j)^+\Leftrightarrow t_j\in C(B, s_i)^+$ és
$t_i\in C(B, s_j)^-\Leftrightarrow t_j\in C(B, s_i)^-$.

KÖVETKEZMÉNY. Ha S, illetve T bázisa M-nek, akkor az S, illetve T bázishoz tartozó bázistábla szimmetrikus.

2.6. Definíció. Egy négyzetes irányított matroidot *nemszinguláris*nak nevezünk, ha S és T is bázisa a matroidnak.

Szimmetrikus matroidok minorjait jellemzi a következő tétel.

2.2. TÉTEL. Legyen M egy szimmetrikus, négyzetes irányított matroid, akkor minden $1\leq i\leq n$ esetén $M\setminus t_i/s_i$ $(S\setminus s_i$ és $T\setminus t_i$-re vonatkoztatva$)$ is szimmetrikus, ha van olyan komplementáris bázisa M-nek, mely tartalmazza s_i-t de nem tartalmazza t_i-t.

A fenti tételben nyilván felcserélhető s_i és t_i szerepe, így is szimmetrikus matroidot nyerünk, sőt a tétel alkalmazható tetszőleges, a feltételeket kielégítő részhalmaz esetén is.

2.7. Definíció. Az M szimmetrikus, négyzetes irányított matroid egy K cikloidját *előjel váltónak* nevezzük, ha $\{s_i, t_i\} \not\subseteq K^+$ és $\{s_i, t_i\} \not\subseteq K^-$, $i=1, ..., n$. A K cikloidot *szigorúan előjel váltónak* nevezzük, ha előjel váltó, és $\{s_i, t_i\} \subseteq \mathbf{K}$ valamely i esetén, azaz van olyan i index, hogy $s_i \in K^+$, $t_i \in K^-$ vagy $s_i \in K^-$ és $t_i \in K^+$.

2.8. Definíció. Az M szimmetrikus négyzetes irányított matroidot *pozitív (szemi) definitnek* nevezzük, ha nem tartalmaz előjel váltó (szigorúan előjel váltó) irányított cikloidot.

2.1. LEMMA. Legyen M egy pozitív szemidefinit irányított matroid és legyen B egy komplementáris bázisa M-nek. Ekkor

(a) Ha $s_i, s_j \in B$, akkor $s_i \notin \mathbf{C}(B, t_i) \Rightarrow s_j \notin \mathbf{C}(B, t_i)$ minden j esetén.

(b) Ha $t_i, t_j \in B$, akkor $t_i \notin \mathbf{C}(B, s_i) \Rightarrow t_j \notin \mathbf{C}(B, s_i)$ minden j esetén.

(c) Ha $s_i \in B$, akkor $s_i \notin C(B, t_i)^-$ és $t_i \notin C(\bar{B}, s_i)^+$ minden i esetén.

(d) Ha $s_i \in B$ és M nemszinguláris, akkor $s_i \in \mathbf{C}(B, t_i)$ és $t_i \in B$ esetén $t_i \in \mathbf{C}(B, s_i)$ minden i esetén.

A fenti lemma, mint azt 2.1. tétel előtt is megjegyeztük, azt demonstrálja, hogy lineáris algebrai eredményeink érvényesek maradnak az általánosabb struktúrán is. A fenti lemma lényegében azt mondja, hogy pozitív szemidefinit biszimmetrikus mátrix esetén a szimmetrikus diagonális blokkok is pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixok.

2.2. LEMMA. Ha M pozitív (szemi) definit szimmetrikus irányított matroid, akkor $M \setminus t_i / s_i$ is pozitív (szemi) definit szimmetrikus irányított matroid, ha van olyan B bázisa M-nek, melyre $s_i \in B$ és $t_i \notin B$. Szimmetricitási megfontolások alapján s_i és t_i szerepe itt is felcserélhető.

2.3. TÉTEL. Egy pozitív szemidefinit irányított matroid akkor és csak akkor pozitív definit, ha nemszinguláris.

A fenti eredmények ismeretében elmondhatjuk, hogy a konvex kvadratikus programozási feladatok, illetve a megfelelő lineáris komplementaritási feladatok mátrixaira vonatkozó valamennyi lényeges fogalmat, tételt sikerült általánosítanunk. Így most már megfogalmazhatjuk az irányított matroid kvadratikus programozási feladatot.

Kvadratikus programozás irányított matroidokon

Legyen $\hat{M} = (\hat{E}, \hat{\mathcal{O}})$ irányított matroid az alábbi tulajdonságokkal:

a) $\hat{E} = \{e\} \cup S \cup T$,

b) $M = \hat{M} \setminus e$ négyzetes, pozitív szemidefinit, szimmetrikus, irányított matroid.

FELADAT. Keressünk olyan pozitív komplementáris $\hat{X} \in \hat{\mathcal{O}}$ irányított ciklust $\hat{M}$-ban, melyre $e \in \hat{X}$.

Egy $\hat{F} \subset \hat{E}$ részhalmazt komplementárisnak nevezünk a továbbiakban, ha $F = \hat{F} \setminus e \subseteq E$ komplementáris M-ben.

A fenti feladatot nevezzük az irányított matroid kvadratikus programozási feladatának. Amennyiben eltekintünk a pozitív szemidefinit, szimmetrikus követelményektől, akkor az általános értelemben vett lineáris komplementaritási feladat megfelelő általánosítását kapjuk irányított matroidon.

A fenti kvadratikus programozási feladat megoldására először TODD [31] adott konstruktív bizonyítást LEMKE [20] komplementáris pivotálási algoritmusának adaptálásával. Így TODD algoritmikus bizonyítást adott a következő „Alap Tétel”-re.

ALAP TÉTEL. Az alábbi (a) és (b) esetek közül egy és csak egy áll fenn.

(a) Van olyan $e \in \hat{X} \in \hat{\mathcal{O}}$ pozitív komplementáris irányított ciklus, mely megoldja a fenti $OM-QP$ feladatot, vagy

(b) van olyan $e \in \hat{Y} \in \hat{\mathcal{O}}^*$ pozitív komplementáris irányított kociklus, melyre $S \cap \hat{Y} = \emptyset$ vagy $T \cap \hat{Y} = \emptyset$.

A következő fejezetben új konstruktív bizonyítást adunk az Alap Tételre. Módszerünk a kvadratikus programozás criss-cross módszerének [16] általánosítása irányított matroidokra.

Mielőtt ezt megtennénk, lássuk be, hogy a tétel (a) és (b) esetei nem állhatnak fenn egyidejűleg.

2.3. LEMMA. Az Alap Tétel (a) és (b) esetei közül legfeljebb az egyik teljesülhet.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mindkettő egyidejűleg fennáll, akkor $e \in \hat{X} \in \hat{\mathcal{O}}$ és $e \in \hat{Y} \in \hat{\mathcal{O}}^*$ és mindkettő pozitív. Így az ortogonalitási axióma szerint $\hat{X} \perp \hat{Y}$. De $e \in (X^+ \cap Y^+)$, és $(\hat{X}^+ \cap \hat{Y}^-) \cup (\hat{X}^- \cup \hat{Y}^+) = \emptyset$, mivel $\hat{X}$ és $\hat{Y}$ is pozitív. Ellentmondásra jutottunk, állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy itt nem használtuk ki, hogy $S \cap \hat{Y} = \emptyset$ vagy $T \cap \hat{Y} = \emptyset$. Ezek az addicionális tulajdonságok azonban algoritmusunkból következnek.

3. Az általánosított criss-cross módszer

Az általánosított criss-cross módszer egy egyszerű, könnyen végrehajtható algoritmus. A TODD által általánosított *Lemke algoritmussal* ellentétben nincs szükség az irányított matroid lexikografikus kiterjesztésére, és nincs szükségünk arra sem, hogy a bázis megengedettségét megőrző pivot elemeket válasszunk. Algoritmusunk kizárólag a matroid elemeinek rendezésén, a minimális index szabályon és a bázistáblák előjel struktúráján alapul.

Algoritmus (a criss-cross módszer)

Inicializálás. Adott az M irányított matroid, mint az irányított matroid kvadratikus programozási feladat esetében. Rendezzük az elemeket sorba, a komplementáris párokat összefogva (pl.: $s_1, t_1, \ldots, s_i, t_i, \ldots, s_n, t_n, e$). Legyen adott egy tetszőleges B komplementáris bázis és $T(B)$ bázistábla, melyre $e \notin B$.

Kimenet. Az alaptétel (a) vagy (b) esetét kielégítő irányított ciklus, illetve kociklus.

Pivot szabály.

1. Legyen $r = \min \{i \mid s_i \in \hat{X}_e^+ \text{ vagy } t_i \in \hat{X}_e^+\}$, ahol X_e az e nembázis elemhez tartozó irányított ciklus a bázistáblában, azaz $\hat{X}_e = -C(B, e)$. Ha nincs ilyen r, akkor az Alap Tétel (a) eseténél vagyunk, $(-\hat{X}_e)$ a megoldás. KÉSZ.

2(a) Ha van ilyen r (az általánosság megszorítása nélkül feltételezhető, hogy s_r), és $t_r \in \hat{Y}_r = C(\bar{B}, s_r)$, akkor *(Diagonális pivot)* cseréljük ki s_r-t t_r-re a bázisban. Az új bázissal folytatódik az eljárás.

2(b) Ha van r, és $t_r \notin \hat{Y}_r$, akkor legyen $p = \min\{i \mid s_i \in \hat{Y}_r^-\}$. Ha nincs ilyen p, akkor az Alap Tétel (b) eseténél vagyunk, $\hat{Y}_r$ a keresett kociklus. KÉSZ.

2(c) Ha van ilyen p index is, akkor *(Kettős pivot)*, cseréljük ki s_r-t s_p-vel és t_p-t t_s-sel. Az új bázissal folytatódik az eljárás.

Megjegyezzük, hogy 2(a) esetben $t_r \in \hat{Y}_r^+$ mivel az $M = \hat{M} \setminus e$ irányított matroid pozitív szemidefinit (2.1. lemma (b) eset), továbbá a 2(b) esetben $\hat{Y}_r \cap S = \emptyset$ vagy $\hat{Y}_r \cap T = \emptyset$ teljesül (2.1. lemma (a) eset). Vegyük észre továbbá, hogy 2(c) esetben ugyanezen tulajdonságok teljesülnek.

A fenti észrevételekből látható, hogy algoritmusunk végrehajtható, továbbá az algoritmus során a bázis végig komplementáris marad, így a bázistábla előjelstruktúráját a 2.1. tételből és a 2.1. lemmából könnyen kiolvashatjuk, azaz a bázistábla „biszimmetrikus".

Az algoritmus végességét kell csak belátnunk az Alap Tétel bizonyításához.

3.1. TÉTEL. A criss-cross módszer véges.

Bizonyítás. Mivel véges sok bázisunk van, így csak azt kell belátnunk, hogy az algoritmus nem ciklizál. Tegyük fel indirekt, hogy ciklizálás fordul elő, azaz egy B bázisból egy transzformáció sorozat után ismét visszajutunk a B bázishoz. Legyen $I^* = \{i \mid s_i$ kikerült a bázisból a ciklus során$\}$. Nyilván ekkor s_i be is került a bázisba a ciklus során, és ugyanezek az állítások igazak t_i-re is, mivel akár kettős pivotot hajtunk végre, akár diagonális pivotot, t_i mindig ki (be) kerül a bázisba, amikor s_i be (ki) került a bázisba.

Legyen $q = \max\{i \mid i \in I^*\}$. Fenti megjegyzésünk és a változók rendezése miatt ekkor t_q a „legmagasabb indexű" változó, ami a ciklus során mozgott. Aszerint, hogy t_q, illetve s_q vagy valamely más elem volt a legmagasabb indexű nem megengedett elem az $\hat{X}_e$ megoldásoszlopban, amikor t_q bekerült, illetve kikerült a bázisból, az alábbi négy esetet kell megkülönböztetnünk.

t_q távozik a bázisból (s_q bekerült a bázisba)

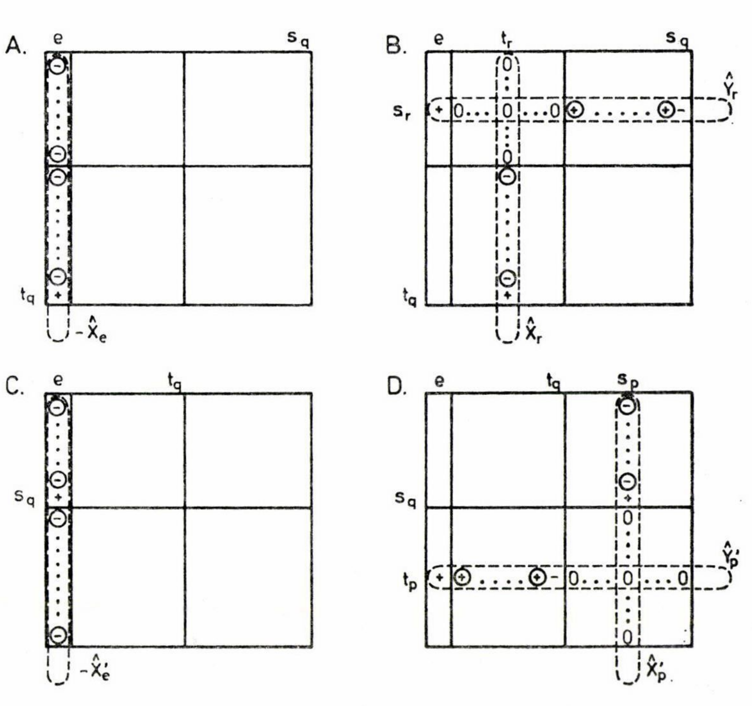
A: t_q a legalacsonyabb indexű nem megengedett elem $\hat{X}_e$-ben.
B: s_r (valamely $r < q$) a legalacsonyabb indexű nem megengedett elem $\hat{X}_e$-ben.

t_q bekerül a bázisba (s_q távozik a bázisból)

C: s_q a legalacsonyabb indexű nem megengedett elem $\hat{X}_e$-ben.
D: t_p (valamely $p < q$) a legalacsonyabb indexű nem megengedett elem $\hat{X}_e$-ben.

Mielőtt a fenti eseteket vizsgálnánk, megjegyezzük, hogy az A, illetve a C esetekben diagonális és kettős pivot is lehetséges, addig a B és D esetekben kizárólag kettős pivotról beszélhetünk.

Mivel a q-nál magasabb indexű komplementáris (s_i, t_i) elem párok nem mozogtak a ciklus során (sőt a pivot elem választás szempontjából is közömbösek), így ezen elemek közül törölhetjük a nem bázis elemeket és összehúzhatjuk a bázisban levőket. Így az egyes esetekben az alábbi előjelstruktúrájú bázistáblákhoz jutunk.



1. ábra

Tételünk bizonyításához az AC, AD, BC és BD esetek előfordulásának lehetőségét kell kizárnunk.

AC eset. Ekkor $\hat{X}_e$ és $\hat{X}'_e$ irányított ciklusok előjelstruktúráját ismerjük. Így a bevezetésben ismertetett (e^*) eliminációs tulajdonság szerint ($K_1=\hat{X}_e$; $K_2=-\hat{X}'_e$; $e=e$ szereposztással) nyerünk egy olyan K cikloidot, melyre $e\notin K$, $t_q\in K^+$, $s_q\in K^-$, $s_i(t_i)\in K^+\Rightarrow t_i(s\,)\notin K^-$ és $s_i(t_i)\in K^-\Rightarrow t_i(s_i)\in K^+$. Így a K cikloid, mivel nem tartalmazza az e elemet, az $M=\hat{M}\setminus e$ irányított matroidnak is cikloidja, továbbá K szigorúan előjelváltó cikloid (lásd 2.7. definíció) és így 2.8. definíció szerint M nem pozitív szemidefinit, ami ellentmond feltételeinknek.

AD eset. Ekkor (t_q, s_q) előjelét megfordítva $(-\hat{X}_e)$ az Alap Tétel a), míg $\hat{Y}'_p$ az Alap Tétel b) esetét elégítené ki, ami 2.3. lemma szerint lehetetlen.

BC eset. Ekkor (t_q, s_q) előjelét megfordítva $\hat{Y}_r$, illetve $(-\hat{X}_e)$ elégítené ki az Alap Tétel b), illetve a) esetét, ami az előbbi esethez hasonlóan ellentmondás.

BD eset. Ekkor az $\hat{Y}_r$ irányított kociklus és az $\hat{X}'_p$ irányított ciklusok ortogonálisak egymásra. De ekkor $s_q\in(\hat{X}'^{+}_p\cap\hat{Y}^{-}_r)\cup(X'^{-}_p\cap Y^{+}_r)$ de $(\hat{X}'^{+}_p\cap\hat{Y}^{+}_r)\cup\cup(\hat{X}'^{-}_p\cap\hat{Y}^{-}_r)=\emptyset$ ugyanis $\hat{Y}^{-}_r=\{s_q\}$ és $\hat{X}'^{+}_p=\{s_q\}$, ami ellentmondás.

Így mivel minden lehetséges eset ellentmondásra vezetett, kizártuk a ciklizálás lehetőségét, azaz algoritmusunk véges.

Vegyük észre, hogy a BD esetben $\hat{X}_r$ és $\hat{Y}'_p$ ortogonalitását ugyanúgy használhattuk volna, mint $\hat{Y}_r$ és $\hat{X}'_p$ ortogonalitását.

4. Módosítás, speciális esetek

4(a) Módosított algoritmus

Algoritmusunkban a 2(a) eseten keresztül prioritást biztosítottunk a diagonális pivotnak. Erre azért volt szükségünk, mivel így tudtuk biztosítani, hogy amennyiben az Alap Tétel a) esete nem áll fenn, akkor a TODD által adott (b) esetben megfogalmazott struktúrájú irányított kociklust kapjunk. Annak ellenére, hogy a 2.3. lemma szerint ennél gyengébb feltétel (nevezetesen az $S \cap \hat{Y} = \emptyset$ vagy $T \cap \hat{Y} = \emptyset$ követelménytől eltekinthetünk) is kizárja az a) eset fennáltát, a diagonális pivotok további preferálása irányában módosíthatjuk algoritmusunkat.

Ebben a módosításban, amennyiben lehetséges, kettős pivot helyett is diagonális pivotot hajtunk végre. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a módosított M Algoritmus is az előzővel megegyező módon véges.

M-Algoritmus

Inicializálás. Mnt a ciriss-cross módszernél.

Kimenet. Az Alap Tétel (a) vagy (b) esete.

Pivot szabály

1. Mint a criss-cross módszer.
2(a) Mint a criss-cross módszer.
2(b) Mint a criss-cross módszer.
2(c) Ha $p < r$ és $s_p \in \hat{Y}_p$, akkor (diagonális pivot) t_p távozik, s_p bekerül a bázisba. Az új bázissal folytatjuk az eljárást.
2(d) Ha $p > r$, illetve $s_p \in \hat{Y}_p$, akkor (kettős pivot) s_r és t_p távozik, s_p és t_r bekerül a bázisba. Az új bázissal folytatjuk az eljárást.

4(b) Pozitív definit eset

Amennyiben az $M = \hat{M} \setminus e$ irányított matroid pozitív definit, akkor a criss-cross módszer nagyon leegyszerűsödik. Hasonlóan egyszerűsödik M2-Algoritmus is, azonban M1-Algoritmus sajnos nem specializálódik ebben az esetben.

Pozitív definit irányított matroid esetén, mint azt a 2.1. lemma (c) esetében közöltük az aktuális bázistábla diagonális (s_i, t_i) vagy (t_i, s_i) eleme sohasem zérus, így a criss-cross módszer a diagonális pivot preferálása miatt kizárólag diagonális pivotok sorozatából áll. Ekkor 2(b) és 2(c) esetekre nem kerülhet sor. Így azt is bizonyítottuk, hogy pozitív definit irányított matroid esetén az irányított matroid kvadratikus programozási feladatnak mindig van megoldása.

Tehát ekkor eredeti és M2-Algoritmusunk kizárólag 1. és 2(a) lépésekből áll. Ekkor a végesség igazolása is lényegesen egyszerűsödik, ugyanis csak A és C esetek fordulhatnak elő.

4/c) Irányított matroid lineáris programozás esete

Jól ismert, hogy minden lineáris programozási feladat megfogalmazható lineáris komplementaritási feladatként (pl. $Ax \leqq b$, $x \geqq 0$, $yA \geqq c$, $y \geqq 0$, $(yA-c)x=0$, $y(Ax-b)=0$). Ezt a közismert tényt általánosította TODD [31] irányított matroidokra, amikor is az irányított matroidok lineáris programozási feladatát irányított matroidok lineáris komplementaritási feladatává transzformálta. Ebben az esetben olyan speciális szerkezetű pozitív szemidefinit szimmetrikus irányított matroidról van szó, amikor tetszőleges komplementáris bázishoz tartozó bázistáblában a tábla szimmetrikus diagonális blokkjai azonosan zérusok.

Ekkor a criss-cross módszer (és mindkét módosítása) úgy specializálódik, hogy csak kettős pivotra kerülhet sor, ugyanúgy, mint valós esetben, ahogy az KLAFSZKY—TERLAKY [16] dolgozatában szerepel. Ugyanazon pivot elemeket választjuk, ugyanazon báziscseréket hajtjuk végre, mint TERLAKY [27] criss-cross módszerénél, csak a komplementaritási feladat bázistábláján, és így tulajdonképpen az eredeti bázistáblát megdupláztuk. Így megmutattuk, hogy algoritmusaink a lineáris programozási criss-cross módszer általánosításai.

IRODALOM

[1] BALINSKI, M. L. and TUCKER, A. W., "Duality theory of linear programs: A constructive approach with applications", *SIAM Review* **11** (1969) 347—377.

[2] BEALE, E. M. L., "On quadratic programming", *Naval Research Logistics Quarterly* **6** (1959) 227—244.

[3] BEST, M. J., "Equivalence of some quadratic programming algorithms", *Mathematical Programming* **30** (1984) 71—87.

[4] BLAND, R. G., "New finite pivoting rules for the simplex method", *Mathematics of Operations Research* **2** (1977) 103—107.

[5] BLAND, R. G., "A combinatorial abstraction of linear programming", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **23** (1977) 33—57.

[6] BLAND, R. G. and LAS VERGNAS M., "Orientability of matroids", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **24** (1978) 94—123.

[7] CHANG, Y. Y. and COTTLE, R. W., "Least index resolution of degeneracy in quadratic programming", *Mathematical Programming* **18** (1980) 127—137.

[8] COTTLE, R. W., "The principal pivoting method of quadratic programming", in: *Mathematics of the Decision Sciences Part I.* Eds. G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Lectures in Applied Mathematics, 11 (American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968) 142—162.

[9] COTTLE, R. W. and DANTZIG, G. B., "Complementary pivot theory of mathematical programming", *Linear Algebra and its Applications* **1** (1968) 103—125.

[10] DANTZIG, G. B., *Linear programming and Extensions* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963).

[11] FOLKMAN, J. and LAWRANCE, J., "Oriented matroids", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **25** (1978) 199—236.

[12] FUKUDA, K., "Oriented matroid programming", Ph. D. dissertation, University of Waterloo, 1982.

[13] JENSEN, D., "Coloring and Duality: Combinatorial Augmentation methods", Ph. D. dissertation, School of OR and IE, Cornell University, 1985.

[14] KELLER, E., "The general quadratic optimization problem", *Mathematical Programming* **5** (1973) 311—337.

[15] KLAFSZKY, E. and TERLAKY, T., Variants of the "Hungarian Method" for solving linear programming problems", *Optimization* (megjelenésre elfogadva).

[16] KLAFSZKY, E. and TERLAKY, T., "Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming", *Mathematics of Operations Research* (megjelenés alatt).

[17] LAS VERGNAS, M., "Bases in oriented matroids", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **25** (1978) 283—289.

[18] LAS VERGNAS, M., "Convexity in oriented matroids", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **29** (1980) 231—243.

[19] LAWRANCE, J., "Oriented matroids and multiply ordered sets", *Linear Algebra and its Applications* **48** (1982) 1—12.

[20] LEMKE, C. E., "Bimatrix equilibrium points and mathematical programming", *Management Science* **11** (1965) 681—689.

[21] MORRIS, JR., "Oriented matroids and the linear complementarity problem", Ph. D. thesis, School of OR and IE, Cornell University, 1986.
[22] MORRIS, JR. and TODD, M. J., "Symmetry and positive definiteness in oriented matroids", Cornell University, School of OR and IE, Itacha, Itacha N. Y. Technical Report No. 631.
[23] ROCKAFELLAR, R. T., "The elementary vectors of a subspace of R^n", in: *"Combinatorial Mathematics and its Applications"*, Proc. of the Chapel Hill Conference, 1967 (R. G. Bore and T. A. Dowling, Eds.) 104—127, Univ. of North Carolina Press, Chapel Hill, 1969.
[24] RITTER, K., "A dual quadratic programming algorithm", Univ. of Wisconsin-Madison, Mathematics Research Center, Technical Summary Report No. 2733 (1984).
[25] ROOS, C., "On the Terlaky path in the umbrella graph of a linear programming problem", Reports of the Department of Informatics, Delft University of Technology, No. 85—12.
[26] TERLAKY, T., "A convergent criss-cross method", *Optimization* **16** (1985) 5, 683—690.
[27] TERLAKY, T., „A véges criss-cross módszer irányított matroidokon", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **11** (1985) 385—398.
[28] TERLAKY, T., "A new algorithm for quadratic programming", *European Journal of Operations Research* **32** (1987) 294—301.
[29] TERLAKY, T., "On lp programming", *European Journal of Operations Research* **22** (1985) 70—101.
[30] TODD, M. J., "Complementarity in oriented matroids", *SIAM J. Alg. Disc. Math.* **5** (1984) 467—485.
[31] TODD, M. J., "Linear and quadratic programming in oriented matroids", *J. Combinatorial Theory Ser. B.* **39** (1985) 105—133.
[32] TUCKER, A. W., "Principal pivotal transforms of squere matrices", *SIAM Review* **5** (1963) 305.
[33] VAND DE PANNE, C. and WHINSTON, A., "The symmetric formulation of the simplex method for quadratic programming", *Econometrica* **37** (1969) 507—527.
[34] WELSH, D. J. A., *Matroid theory* (Academic Press, 1976).
[35] WOLFE, P., "The simplex method for quadratic programming", *Econometrica* **27** (1959) 382—398.
[36] WANG, ZH., "A finite conformal-elimination-free algorithm for oriented matroid programming", *Chineese Annals of Mathematics*, 8B. No. 1 (1987).
[37] WHITNEY, H., "On the abstract properties of linear dependence", *Amer. J. Math.* **57** (1935) 507—553.
[38] ZIONTS, S., "The criss-cross method for solving linear programming problems", *Management Science* **15** (1969) 426—445.

(Beérkezett: 1988. január 29.)

KLAFSZKY EMIL
NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC — EGYETEMVÁROS

TERLAKY TAMÁS
ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

ORIENTED MATROIDS, QUADRATIC PROGRAMMING AND THE CRISS-CROSS METHOD

E. KLAFSZKY and T. TERLAKY

Quadratic programming, symmetry, positive (semi) definiteness was generalized by MORRIS and TODD to oriented matroids. Here we slightly modify their definitions in order to get more symmetric structures.

Some generalizations of *Terlaky's criss-cross method* are presented here for oriented matroid quadratic programming. These algorithms are based on the smalles subscript rule and on sign patterns, and do not preserve feasibility on any subsets. Finally two special cases (positive definite case and oriented matroid linear programming) and a modification are presented.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 377—387

DUALITÁS A MÁTRIXMAXIMUM ÉS A VEKTORMAXIMUM PROBLÉMÁNÁL ÉS AZOK KAPCSOLATA[1]

GYETVÁN FERENC

Pécs

A dolgozatban a lineáris mátrix optimalizálási probléma dualitás elméletét tárgyaljuk, kettős céllal. Egyrészt, hogy környezetébe ágyazva mutathassuk be azt a két tételt, mellyel az elméletet kiegészítjük, s ezzel komplexszé tesszük a felépítést. Másrészt, hogy az irodalomban egyre többször szereplő többcélú lineáris programozás és dualitása kapcsolatrendszerét áttekintsük.

1. Bevezetés

A dualitás gondolata lineáris programozással kapcsolatban elsőnek NEUMANN JÁNOS [6] dolgozatában vetődik fel 1947-ben, bár a dualitás gyökerei a *Farkas-tétel* kapcsán a század elejére nyúlnak vissza. Részletes kidolgozására azonban 1951-ben GALE, KUHN és TUCKER [1] munkájában kerül sor lineáris mátrix optimalizálási probléma esetére. A dualitás fogalmából származó előnyök első hasznosítása a skalár lineáris programozás elméletének kidolgozása során történik az 1950-es években. Majd az 1970-es években a lineáris vektormaximum probléma dualitási kérdései vetődnek fel, és születik két koncepció a dualitás értelmezésére KORNBLUTH [4] és ISERMANN [2] dolgozatában. E két koncepció viszonyát a *Gale, Kuhn, Tucker dualitáshoz* ISERMANN [3] elemzi. Kimutatja azok ekvivalenciáját a mátrix maximalizálási probléma vektorokra specializált alakjával. PARK 1982-ben írt [7] cikkében a vektormaximum problémára érvényes komplementaritási tétellel egészíti ki ISERMANN dualitási tételeit.

A jelen dolgozat második fejezetében részletesen leírjuk GALE, KUHN és TUCKER mátrix problémára vonatkozó dualitás elméletét, és további két tétellel kiegészítjük azt. Meg fogjuk mutatni, hogy a klasszikus és a többcélú programozáshoz hasonlóan a lineáris programozás mátrix problémájára analóg gyenge dualitási tétel és komplementaritási tétel érvényes. A harmadik fejezetben ismertetjük KORNBLUTH és ISERMANN vektormaximum problémára értelmezett primál-duál párját, és kimutatjuk, hogy a két dualitási koncepció ekvivalens a *Gale, Kuhn, Tucker* problémával, következésképpen, mint speciális esetekre adaptálhatók a mátrix optimalizálási probléma dualitási eredményei.

A magyar nyelvű irodalomban STAHL JÁNOS [9] foglalkozott a többcélú lineáris programozás kérdéseivel. Bár a többcélú nemlineáris programozás nem alkotja vizsgálatunk tárgyát, s ezért az ilyen irányú irodalmi hivatkozásoktól eltekintünk, egy kivételt mégis teszünk. Megemlítjük LUC [11] munkáját, mely a többcélú programo-

(1) A dolgozat az OTKA 353/86 pályázat keretében készült.

zás dualitás elméletének részletes leírását tartalmazza. A téma iránt érdeklődők figyelmébe ajánljuk az irodalmi hivatkozásokban felsorolt [12] és [13] bibliográfiát.

A részletes tárgyalás előtt értelmezzük a mátrixegyenlőtlenségeket. Legyen $\mathbf{G}$ és $\mathbf{H}$ két $(m \times n)$-es mátrix.

$\mathbf{G} \leqq \mathbf{H}$ akkor és csak akkor, ha $g_{ij} \leqq h_{ij}$ minden i, j-re,
$\mathbf{G} \leq \mathbf{H}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{G} \leqq \mathbf{H}$ és $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$,
$\mathbf{G} < \mathbf{H}$ akkor és csak akkor, ha $g_{ij} < h_{ij}$ minden i, j-re.

Vektorok esetén értelemszerűen ugyanígy definiáljuk az egyenlőtlenségeket. Mátrix transzponáltja jelölésére a T jelet használjuk.

A következő lemmák fontos szerepet játszanak a későbbi tételek bizonyításában. Legyen $\mathbf{A}$ $(m \times n)$-es, $\mathbf{B}$ $(m \times r)$-es mátrix, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{b}$ m-elemű, $\mathbf{x}$ n-elemű és $\mathbf{y}$ r-elemű vektor.

1.1. LEMMA. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{bu} \geqq 0$ egyenlőtlenség érvényes legyen minden olyan $\mathbf{u}$-ra, mely kielégíti az $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ feltételt, hogy létezzen olyan $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, melyre $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$.

1.2. LEMMA. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{bu} < 0$ semelyik $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$-ra sem teljesüljön, melyre $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$, hogy létezzen olyan $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, melyre $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$.

1.3. LEMMA. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{0}$ semelyik $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$-ra sem teljesüljön, melyre $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$, hogy létezzen olyan $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, melyre $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By}$.

Az 1.1. lemma, melyet *Farkas lemmaként* ismer az irodalom, homogén lineáris egyenlőtlenségek egy alapvető tulajdonságát írja le. Az 1.2. lemma közvetlen következménye az 1.1. lemmának, az 1.3. lemma pedig az 1.2. lemma általánosítása. Az érdeklődő a bizonyításukat megtalálja [1]-ben, illetve a *Farkas lemma* ismeretében könnyen elvégezheti.

2. A lineáris mátrixmaximum probléma és duálja

GALE, KUHN és TUCKER [1] a lineáris mátrix programozás következő két általános problémáját definiálta. Mindkettőben az $(m \times n)$-es $\mathbf{A}$, az $(m \times r)$-es $\mathbf{B}$ és a $(k \times n)$-es $\mathbf{C}$ mátrixok a kiinduló információk hordozói, a $\mathbf{D}$ $(k \times r)$-es ismeretlen mátrix és $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ megfelelő méretű vektorváltozók:

$$\text{„max"}\ \{\mathbf{D} | \mathbf{Cx} \geqq \mathbf{Dy},\ \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y} > \mathbf{0}\} \tag{2.1}$$

$$\text{„min"}\ \{\mathbf{D} | \mathbf{B}^T\mathbf{u} \leqq \mathbf{D}^T\mathbf{v},\ \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{v} > \mathbf{0}\}. \tag{2.2}$$

A „max" és „min" jelöléssel azt akarjuk kifejezésre juttatni, hogy az optimalitás fogalma esetünkben nem értelmezhető a hagyományos módon, mert a mátrixok halmazán általában nem létezik legnagyobb, vagy legkisebb elem. Ezért egy új fogalom, az efficiencia bevezetésével az optimalitás új értelmezését adjuk.

2.1. *Definíció.* A (2.1) feladat $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ megengedett megoldása akkor és csak akkor efficiens, ha nem létezik olyan $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{D}')$ megengedett megoldás, melyre $\mathbf{D}' \geq \mathbf{D}_0$.

Ha $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens, akkor $\mathbf{D}_0$-t maximálisnak mondjuk (2.1)-re nézve a fent értelmezett mátrixegyenlőtlenség segítségével létrejött parciális rendezés mellett. Analóg megoldási koncepció fogalmazható meg (2.2)-re is.

A (2.1), (2.2) általános mátrix probléma speciális esetként kiadja a lineáris vektor probléma és lineáris skalár probléma primál-duál párját. Tekintsük a $\mathbf{B}:=\mathbf{b}$, $\mathbf{D}:=\mathbf{d}$ vektor és $\mathbf{y}:=\tau$ skalár értelmezést.

$$(2.3) \qquad \text{„max"} \{\mathbf{d} | \mathbf{C}\mathbf{x} \geqq \mathbf{d}\,\tau,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}\tau,\ \mathbf{x} \geqq 0,\ \tau > 0\}$$

$$(2.4) \qquad \text{„min"} \{\mathbf{d} | \mathbf{b}\mathbf{u} \leqq \mathbf{d}\,\mathbf{v},\ \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{v} > \mathbf{0}\}.$$

A pozitív τ skalár változóval történő osztás és az $\mathbf{x}:=\mathbf{x}/\tau$ új változó bevezetése után a mátrix problémák a következő duális vektor optimalizálási problémákra redukálódnak:

$$(2.5) \qquad \text{„max"} \{\mathbf{d} | \mathbf{C}\mathbf{x} \geqq \mathbf{d},\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

$$(2.6) \qquad \text{„min"} \{\mathbf{d} | \mathbf{b}\mathbf{u} \leqq \mathbf{d}\mathbf{v},\ \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{v} > \mathbf{0}\}$$

Ha a $\mathbf{B}:=\mathbf{b}$, $\mathbf{C}:=\mathbf{c}$ vektor és $\mathbf{D}:=\delta$, $\mathbf{y}:=\tau$, $\mathbf{v}:=\mu$ skalár speciális esetet tekintjük, akkor az előzőhöz hasonlóan a pozitív τ-val és μ-vel történő osztás és az $\mathbf{x}:=\mathbf{x}/\tau$, $\mathbf{u}:=\mathbf{u}/\mu$ új változók bevezetése után a skalár lineáris programozás primál-duál párját kapjuk.

$$\max \{\delta | \mathbf{c}\mathbf{x} \geqq \delta,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

$$\min \{\delta | \mathbf{b}\mathbf{u} \leqq \delta,\ \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{c},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}$$

A skalár lineáris programozásban skalár értékű, a többcélú lineáris programozásban vektor értékű célfüggvényt maximalizálunk, illetve minimalizálunk. A lineáris mátrix optimalizálási problémát tekinthetjük úgy, mint mátrix értékű célfüggvény szélsőértékének keresését. Ilyen értelemben a következő, ún. gyenge dualitási tétel — mely nem szerepel GALE, KUHN és TUCKER [1] forrásul szolgáló munkájában — azt fejezi ki, hogy a mátrix optimalizálási primál-duál pár esetén is igaz, hogy a maximum feladat „célfüggvényértékét" nem minorálhatja semelyik duális megvalósítható megoldás „célfüggvényértéke".

2.1. TÉTEL. (Gyenge dualitási tétel.) Legyen $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{D}_1)$ és $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{D}_2)$ a (2.1), illetve (2.2) probléma egy-egy megengedett megoldása. Ekkor $\mathbf{D}_1 \geqq \mathbf{D}_2$ nem teljesülhet.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\mathbf{D}_1 \geqq \mathbf{D}_2$. Mivel $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{D}_1)$ és $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{D}_2)$ megengedett megoldások,

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq \mathbf{D}_1\mathbf{y}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \geqq 0, \quad \mathbf{y} > 0,$$

és

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leqq \mathbf{D}_2^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \geqq 0, \quad \mathbf{v} > 0.$$

A megfelelő egyenlőtlenségek mindkét oldalának rendre a $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ és az $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ vektorokkal történő szorzása után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq \mathbf{v}\mathbf{D}_1\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{u}\mathbf{B}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{y}\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leqq \mathbf{y}\mathbf{D}_2^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{x}\mathbf{C}^T\mathbf{v}.$$

Másrészt mivel $\mathbf{y}>\mathbf{0}$, $\mathbf{v}>\mathbf{0}$ és $\mathbf{D}_2\leq\mathbf{D}_1$, ezért

$$\mathbf{v}\mathbf{D}_2\mathbf{y} < \mathbf{v}\mathbf{D}_1\mathbf{y}.$$

Az egyenlőtlenségeket egy egyenlőtlenségsorozatba rendezve:

$$\mathbf{uAx} \leqq \mathbf{uBy} \leqq \mathbf{vD}_2\mathbf{y} < \mathbf{vD}_1\mathbf{y} \leqq \mathbf{vCx} \leqq \mathbf{uAx},$$

vagyis $\mathbf{uAx}<\mathbf{uAx}$, ami ellentmondás. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

A következőkben összefoglaljuk GALE, KUHN és TUCKER egzisztencia és dualitás tételeit. Ezek a tételek tartalmuk lényegét illetően az említett [1] munkában — bár más felépítésben — megtalálhatók. A következő tétel szerint akár a primál, akár a duál feladat efficiens megoldása létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy duális párja megengedett megoldásainak halmaza ne legyen üres.

2.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy (2.1)-nek van megengedett megoldása. Ekkor (2.1)-nek akkor és csakis akkor van efficiens megoldása, ha (2.2)-nek van megengedett megoldása.

Analóg állítás érvényes a (2.2) feladatra is.

Bizonyítás. Ha (2.2)-nek van megengedett megoldása, akkor van olyan $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{D})$' melyre

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leqq \mathbf{D}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Ennek az 1.3. lemma szerint alternatív párja a

$$\mathbf{Cx} \geq \mathbf{Dy}, \quad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \tag{2.8}$$

inkonzisztens egyenlőtlenségrendszer. Ezután megmutatjuk, hogy ha van olyan $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{D})$, mely egyidejűleg eleget tesz a (2.1) feladat feltételeinek és a (2.8) követelménynek, akkor az efficiens megoldása (2.1)-nek. Ennek igazolása érdekében indirekt módon tegyük fel, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{D})$ mellett van olyan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{D}^*)$, mely eleget tesz a (2.1) feladat feltételeinek és a (2.8) követelménynek, de $\mathbf{D}^*\geq\mathbf{D}$. Így mivel $\mathbf{D}^*$ eleget tesz (2.1)-nek,

$$\mathbf{Cx}^* \geqq \mathbf{D}^*\mathbf{y}^*, \quad \mathbf{Ax}^* \leqq \mathbf{By}^*, \quad \mathbf{x}^* \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^* > \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Cx}^* \geqq \mathbf{D}^*\mathbf{y}^* \geq \mathbf{Dy}^*$$

lenne, ami ellentmond a feltételnek, hiszen $\mathbf{D}$ (2.8)-at így konzisztenssé teszi. A tételt ezzel egyik irányba bebizonyítottuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy (2.1)-nek van efficiens megoldása, s az állítással ellentétben (2.2)-nek nincs megengedett megoldása. Azaz nincs olyan $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{D})$, mely eleget tesz a

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leqq \mathbf{D}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}$$

feltételnek. Ebből következik az 1.3. lemma alapján, hogy alternatív párja, (2.8) konzisztens. Legyen ennek egy megoldása $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$:

$$\mathbf{Cx}_0 \geq \mathbf{Dy}_0, \quad \mathbf{Ax}_0 \leqq \mathbf{By}_0, \quad \mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_0 \geqq \mathbf{0}.$$

Adjuk hozzá (2.1) megfelelő tagjaihoz:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{D}(\mathbf{y}+\mathbf{y}_0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0) \leqq \mathbf{B}(\mathbf{y}+\mathbf{y}_0), \quad \mathbf{x}+\mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}+\mathbf{y}_0 \geqq \mathbf{0}.$$

A $\mathbf{C}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\geqq\mathbf{D}(\mathbf{y}+\mathbf{y}_0)$ egyenlőtlenség legalább egy helyen $>$ formában teljesül. Ezért $\mathbf{D}$ megfelelő sorában egy elem megnövelhető anélkül, hogy megsértenénk a $\mathbf{C}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\geqq\mathbf{D}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)$ egyenlőtlenséget. Így azonban $\mathbf{D}$ nem efficiens, ami ellentmond eredeti feltevésünknek, miszerint $\mathbf{D}$ efficiens megoldása (2.1)-nek. Ezért (2.2)-nek van megengedett megoldása. A tételt ezzel a másik irányba is bizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. A (2.1) feladatnak akkor és csak akkor van efficiens megoldása, ha (2.2)-nek is van efficiens megoldása.

Ha egy feladatról tudjuk, hogy létezik efficiens megoldása, akkor a fentiek szerint duális párjának is létezik efficiens megoldása. Sőt, mint a következő tétel mutatja, a duális efficiens megoldásai között van olyan (esetleg több is), melyhez ugyanaz a „célfüggvényérték" tartozik.

2.3. TÉTEL. Ha $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ a (2.1) feladatnak efficiens megoldása, akkor létezik (2.2)-nek olyan $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{D}^*)$ efficiens megoldása, hogy $\mathbf{D}_0=\mathbf{D}^*$.

Analóg állítás igaz fordítva is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldása (2.1)-nek. Ezért egyrészt mivel megengedett,

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{D}_0\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{B}\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_0 > 0 \tag{2.9}$$

teljesül, másrészt az 1.3. lemma miatt ennek alternatív párja

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{D}_0^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0} \tag{2.10}$$

üres. Továbbá, ha $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldása a (2.1) feladatnak, akkor nyilvánvalóan rendelkezik a (2.8) inkonzisztencia tulajdonsággal. A (2.2) feladat feltételrendszere és a (2.8) inkonzisztens rendszer ekvivalenciája (1.3. lemma) miatt ugyanezen $\mathbf{D}_0$ kielégíti a (2.2) feladat feltételrendszerét is. Hogy ez a $\mathbf{D}_0$ efficiens megoldása legyen (2.2)-nek, szükséges és elégséges a (2.10) inkonzisztencia tulajdonság teljesülése. (Az utóbbi állítás igazolása az előző tétel első részében bemutatott analóg állítás bizonyításának mintájára történik.) A (2.1) feladat feltételrendszerének és a (2.10)-nek fentebb látott ekvivalenciája miatt ez a feltétel teljesül, ezzel a tételt beláttuk.

Az előző két tételt összefoglalhatjuk egy tételbe, mely így az erős dualitás tételt adja.

2.4. TÉTEL. (Erős dualitás tétel.) Ha (2.1)-nek és (2.2)-nek van megvalósítható megoldása, akkor mindkettőnek van efficiens megoldása, továbbá minden primál efficiens megoldásnak van duál efficiens párja, és fordítva, abban az értelemben, hogy bennük a $\mathbf{D}$ mátrix közös.

Bizonyítás. Az állítás a 2.2. tétel és a 2.3. tétel következménye.

A primál vagy duál efficiens megoldás létezésének egy szükséges feltételét mondja ki a következő tétel. Eszerint nem lehet efficiens az a megoldás, melyre a megfelelő (2.1) vagy (2.2) feladat első feltétele nem egyenlőség formájában teljesül.

2.5. TÉTEL. Ha $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldása a (2.1) feladatnak, akkor $\mathbf{C}\mathbf{x}_0=$ $=\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0$.

Analóg állítás érvényes a (2.2) feladatra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Cx_0 \neq D_0 y_0$, azaz $Cx_0 \geq D_0 y_0$. Az utóbbi vektor-egyenlőtlenség legalább egy helyen $>$ alakú. Ezért a D_0 megfelelő sorában egy elem megnövelhető úgy, hogy az így kapott D^*-ra $D^* \geq D_0$, és a $Cx_0 \geq D^* y_0$ is érvényes. Ez azt jelenti, hogy D_0 nem efficiens, ami ellentmondás.

Egy közös D_0-lal rendelkező primál és duál efficiens megoldás létezésének elégséges feltételét tartalmazza a következő tétel.

2.6. TÉTEL. Legyen (x_0, y_0, D_0) és (u_0, v_0, D_0) a (2.1) és a (2.2) feladat két megengedett megoldása, melyekre $Cx_0 = D_0 y_0$ és $B^T u_0 = D_0^T v_0$. Ekkor az (x_0, y_0, D_0) és (u_0, v_0, D_0) a (2.1) és a (2.2) feladat efficiens megoldásai.

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy (x_0, y_0, D_0) nem efficiens megoldása (2.1)-nek. Ekkor van olyan (x^*, y^*, D^*) efficiens megoldása, melyre $D^* \geq D_0$. Mivel (x^*, y^*, D^*) efficiens,

$$Cx^* = D^* y^*, \quad Ax^* \leqq By^*, \quad x^* \geqq 0, \quad y^* > 0.$$

Az utóbbi és az (u_0, v_0, D_0)-ra érvényes

$$B^T u_0 = D_0^T v_0, \quad A^T u_0 \geqq C^T v_0, \quad u_0 \geqq 0, \quad v_0 > 0$$

feltételeket kihasználva a következő két egyenlőtlenségsorozathoz juthatunk:

$$u_0 A x^* \geqq v_0 C x^* = v_0 D^* y^* \quad \text{és} \quad u_0 A x^* \leqq u_0 B y^* = v_0 D_0 y^*.$$

Amiből az következik, hogy

$$v_0 D^* y^* \leqq u_0 A x^* \leqq v_0 D_0 y^*,$$

vagyis

$$v_0 (D^* - D_0) y^* \leqq 0.$$

Holott a $D^* \geq D_0$ feltétel miatt

$$v_0 (D^* - D_0) y^* > 0.$$

Ellentmondás. Az (x_0, y_0, D_0) tehát a (2.1) feladatnak efficiens megoldása. Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy (u_0, v_0, D_0) a (2.2) feladat efficiens megoldása.

A 2.6. tétel alapján bevezethetjük az efficiens megoldáspár fogalmát.

2.2. *Definíció.* Az $\{(x_0, y_0, D_0), (u_0, v_0, D_0)\}$ pár akkor és csakis akkor efficiens megoldáspár, ha $Cx_0 = D_0 y_0$ és $B^T u_0 = D_0^T v_0$, ahol (x_0, y_0, D_0) és (u_0, v_0, D_0) a (2.1), illetve (2.2) probléma efficiens megoldásai.

A következő komplementaritási tétel — hasonlóan a 2.1. tételhez — a forrásul szolgáló [1] munkában nem szerepel. A kiegészítő változók kérdését vektormaximum probléma esetére PARK [7] vizsgálta. Tételünk, mely PARK tételének általánosítása, a mátrix optimalizálási probléma primál és duál feladatának — ellentétben a skalár lineáris programozással — nem két tetszőleges optimális megoldása létezésére ad szükséges és elégséges feltételt, hanem csak a 2.2. definíció szerint összetartozó efficiens megoldáspár létezésére.

2.7. TÉTEL. (Komplementaritási tétel.) Az $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ és $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{D}_0)$ a (2.1) és (2.2) feladat két megengedett megoldása akkor és csakis akkor alkot efficiens megoldáspárt, ha

$$(\mathbf{u}_0\mathbf{A}-\mathbf{v}_0\mathbf{C})\mathbf{x}_0 = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{A}\mathbf{x}_0-\mathbf{B}\mathbf{y}_0) = 0.$$

Más szavakkal, ha

$$x_i^0 > 0 \to \mathbf{u}_0\mathbf{a}_i = \mathbf{v}_0\mathbf{c}_i \qquad u_j^0 > 0 \to \mathbf{d}_j\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_j\mathbf{y}_0$$

$$x_i^0 = 0 \leftarrow \mathbf{u}_0\mathbf{a}_i > \mathbf{v}_0\mathbf{c}_i \quad \text{és} \quad u_j^0 = 0 \leftarrow \mathbf{d}_j\mathbf{x}_0 < \mathbf{b}_j\mathbf{y}_0.$$

A szereplő $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{c}_i$ vektorok az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai, $\mathbf{d}_j$ és $\mathbf{b}_j$ az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sorvektorai, az x_i^0 és u_j^0 pedig az $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{u}_0$ vektor komponensei.

Bizonyítás. Mivel $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ és $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{D}_0)$ a (2.1) és (2.2) feladat megengedett megoldása,

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{D}_0\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{B}\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{x}_0 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_0 > \mathbf{0},$$

és

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u}_0 \leqq \mathbf{D}_0^T\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{u}_0 \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u}_0 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_0 > \mathbf{0}.$$

Hasonlóan a 2.1. tétel bizonyításánál alkalmazott módszerhez, a megfelelő egyenlőtlenségek mindkét oldalának rendre a $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{u}_0$ és $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{x}_0$ vektorokkal történő szorzása után a következő egyenlőtlenségsorozathoz jutunk:

$$\text{(2.11)} \qquad \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0 \leqq \mathbf{v}_0\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0 \leqq \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0.$$

Tegyük fel, hogy $(\mathbf{u}_0\mathbf{A}-\mathbf{v}_0\mathbf{C})\mathbf{x}_0=0$ és $\mathbf{u}_0(\mathbf{A}\mathbf{x}_0-\mathbf{B}\mathbf{y}_0)=0$ azaz, $\mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0=\mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0=\mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0$. Ezt figyelembe véve (2.11) így írható:

$$\mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0 \leqq \mathbf{v}_0\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0 \leqq \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0.$$

Mivel az egyenlőtlenségsorozat első és utolsó tagja megegyezik, ezért a közbülső egyenlőtlenségek egyenlőség alakúak, így

$$\mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0, \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_0\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0.$$

Ebből $\mathbf{y}_0>\mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_0>\mathbf{0}$ miatt $\mathbf{C}\mathbf{x}_0=\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0$ és $\mathbf{B}^T\mathbf{u}_0=\mathbf{D}_0^T\mathbf{v}_0$ következik, ami a 2.2. definíció alapján azt jelenti, hogy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ és $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldáspár.

Fordítva, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ és $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{D}_0)$ legyen efficiens megoldáspár, azaz $\mathbf{C}\mathbf{x}_0=\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0$ és $\mathbf{B}^T\mathbf{u}_0=\mathbf{D}_0^T\mathbf{v}_0$. Emiatt (2.11) a következő alakú:

$$\mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leqq \mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{D}_0\mathbf{y}_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0.$$

Az egyenlőtlenségsorozat első és utolsó tagja megegyezik, ezért a közbülső egyenlőtlenségek egyenlőség alakúak, így

$$\mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{u}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_0\mathbf{B}\mathbf{y}_0.$$

Ezt kellett bizonyítani.

3. Dualitás a vektormaximum problémánál

A továbbiakban a mátrixmaximum probléma specializálásával is nyerhető vektormaximum probléma dualitás elméletével foglalkozunk. Pontosabban KORNBLUTH [4] és ISERMANN [2] által kifejlesztett két dualitási koncepcióval.

3.1. Kornbluth dualitás elmélete

A többcélú lineáris programozás első dualitási koncepcióját KORNBLUTH [4] dolgozta ki 1974-ben. A következő problémapárt vizsgálta:

$$(3.1)\qquad \text{„max"}\,\{\mathbf{Cx}|\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y} > \mathbf{0}\}$$

$$(3.2)\qquad \text{„min"}\,\{\mathbf{B}^T\mathbf{u}|\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{v} > \mathbf{0}\}.$$

Mindkét probléma fölfogható, mint k-, illetve r-paraméteres lineáris vektormaximum probléma. Így az efficiencia fogalma a következőképpen definiálható:

3.1. *Definíció.* Az $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ akkor és csakis akkor efficiens megoldása (3.1)-nek, ha (3.1)-nek nem létezik olyan megengedett $(\mathbf{x}', \mathbf{y}_0)$ megoldása, melyre $\mathbf{Cx}' \geq \mathbf{Cx}_0$, és $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ akkor és csakis akkor efficiens megoldása (3.2)-nek, ha (3.2)-nek nem létezik olyan $(\mathbf{u}', \mathbf{v}_0)$ megengedett megoldása, melyre $\mathbf{B}^T\mathbf{u}' \leq \mathbf{B}^T\mathbf{u}_0$.

Kornbluth dualitás koncepciója kidolgozása során a következő gondolatmenetet követi. Legyen $\mathbf{y}_0$ (3.1)-ben egy rögzített paraméter érték:

$$(3.3)\qquad \text{„max"}\,\{\mathbf{Cx}|\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By}_0,\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

PHILIP [8] a (3.3) feladat egy $\mathbf{x}_0$ efficiens megoldása létezésének szükséges és elégséges feltételeként olyan $\mathbf{v}_0 > \mathbf{0}$ vektor létezését adja, melyre $\mathbf{x}_0$ a

$$(3.4)\qquad \max\,\{\mathbf{v}_0\mathbf{Cx}|\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{By}_0,\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

skalár lineáris programozási feladatnak optimális megoldása. De a skalár lineáris programozás dualitás tétele szerint (3.4)-nek $\mathbf{x}_0$ akkor és csakis akkor optimális megoldása, ha létezik olyan $\mathbf{u}_0$ vektor, mely optimális megoldása a

$$(3.5)\qquad \min\,\{\mathbf{uBy}_0|\mathbf{uA} \geqq \mathbf{v}_0\mathbf{C},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}$$

duális feladatnak. Alkalmazva (3.5)-re PHILIP már említett tételét fordított irányban azt kapjuk, hogy $\mathbf{x}_0$ akkor és csakis akkor efficiens megoldása (3.4)-nek, ha $\mathbf{u}_0$ efficiens megoldása a

$$\text{„min"}\,\{\mathbf{B}^T\mathbf{u}|\mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{C}^T\mathbf{v}_0,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}$$

feladatnak. Ezzel eljutottunk a KORNBLUTH által definiált duális alakhoz. A (3.1), (3.2) duál párra tehát a következő tétel igaz:

3.1. TÉTEL. Egy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ vektorpár akkor és csakis akkor efficiens megoldása (3.1)-nek, ha létezik olyan $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ vektorpár, mely efficiens megoldása (3.2)-nek.

KORNBLUTH és GALE, KUHN, TUCKER primál-duál párja között az elég szembetűnő formai hasonlóság mellett lényegi egyezőség is felfedezhető. A következőkben látni fogjuk, hogy a két feladat ekvivalens.

3.2. TÉTEL. Egy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ vektorpár akkor és csakis akkor efficiens megoldása (3.1)-nek, ha létezik olyan $(k \times r)$-típusú $\mathbf{D}_0$ mátrix, hogy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldása (2.1)-nek.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ a (2.1) feladat efficiens megoldása, és az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ nem efficiens megoldása (3.1)-nek. Ekkor van olyan $(\mathbf{x}', \mathbf{y}_0)$ megengedett megoldás, melyre $\mathbf{Cx}' \geq \mathbf{Cx}_0$. Legyen t az az index, melyre $\mathbf{c}_t\mathbf{x}' > \mathbf{c}_t\mathbf{x}_0$, ahol $\mathbf{c}_t$ a $\mathbf{C}$ mátrix t-edik sorvektorát jelöli. Legyen $\mathbf{D}' = (d'_{ij})$ a következőképpen értelmezett: $d'_{ij} := d^0_{ij}$, minden $i=1, \dots, k$, $j=1, \dots, r$ esetén, melyre $(i, j) \neq (t, s)$, és $d'_{ts} := (\mathbf{c}_t\mathbf{x}' - \mathbf{c}_t\mathbf{x}_0)/y^0_s$. Ekkor $\mathbf{C}\mathbf{x}' \geqq \mathbf{D}'\mathbf{y}_0$ miatt $(\mathbf{x}', \mathbf{y}_0, \mathbf{D}')$ a (2.1) feladat megengedett megoldása, s mivel $\mathbf{D}' \geq \mathbf{D}_0$, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ nem efficiens, ellentmondás.

Fordítva, legyen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ efficiens megoldása (3.1)-nek. Definiáljuk a $\mathbf{D}_0 = (d^0_{ij})$ mátrixot: $d^0_{ij} := 0$, ha $i \neq j$, és $d^0_{ij} := (\mathbf{c}_i\mathbf{x}_0)/y^0_i$, ha $i=j$. Ekkor egyrészt $\mathbf{C}\mathbf{x}_0 = \mathbf{D}_0\mathbf{y}_0$, másrészt pedig nincs olyan $(\mathbf{x}', \mathbf{y}_0)$, melyre $\mathbf{C}\mathbf{x}' \geq \mathbf{C}\mathbf{x}_0 = \mathbf{D}_0\mathbf{y}_0$. Ezért $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{D}_0)$ efficiens megoldása (2.1)-nek.

Összefoglalva: megmutattuk, hogy KORNBLUTH dualitása speciális esete a második fejezetben megismert GALE—KUHN—TUCKER-dualitásnak. Hasonló megállapításra fogunk jutni a következőkben ISERMANN dualitásával kapcsolatban.

3.2. Isermann dualitás koncepciója

ISERMANN [2] 1978-as munkájában egy másik koncepcióra építette fel a vektormaximum probléma dualitás elméletét. A következő többcélú lineáris programozási primál feladatból indult ki.

$$\text{(3.6)} \qquad \text{„max''} \{\mathbf{C}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Rendeljünk minden célfüggvényhez egy-egy m-elemű duál vektorváltozót. Ezekből, mint sorvektorokból felépített $(k \times m)$-típusú mátrixot jelölje $\mathbf{U}$. Definiáljuk a duál feladatot a következőképpen:

$$\text{(3.7)} \qquad \text{„min''} \{\mathbf{U}\mathbf{b} \mid \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{w} \leq \mathbf{C}\mathbf{w},\ \mathbf{w} \geqq \mathbf{0} \text{ nem teljesül}\}.$$

Megjegyezzük, hogy (3.6) és (3.7) $k=1$ esetén a skalár lineáris programozás primálduál párjára redukálódik.

3.3. TÉTEL. GALE, KUHN, TUCKER (2.1), (2.2) duál párja vektorokra alkalmazva ekvivalens ISERMANN (3.6), (3.7) duális feladatpárjával.

Bizonyítás. Ha a (2.1) és (2.2) GALE—KUHN—TUCKER-problémában a $\mathbf{B} := \mathbf{b}$, $\mathbf{D} := \mathbf{d}$ vektor, és $\mathbf{y} := \tau$ skalár speciális esetet tekintjük, akkor (2.1) a (2.5) lineáris vektormaximum problémát, (2.2) pedig egy lehetséges duálisát (2.6) adja. Be fogjuk bizonyítani, hogy a (3.6) vektor problémához rendelt *Isermann-féle* (3.7) *alak* és a GALE—KUHN—TUCKER-féle (2.6) *specializált alak* ekvivalensek. Induljunk ki a (2.5) vektormaximum problémából, s írjuk át (3.6) alakúvá.

$$\text{(3.8)} \qquad \text{„max''} \{\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{0}\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}\}$$

ISERMANN szerint ennek duálja:

(3.9)

$$\text{„min''} \left\{ \mathbf{U}\mathbf{b} \mid \mathbf{U}[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \leq [\mathbf{C}, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \text{ nem teljesül semelyik } \mathbf{w}_1 \geqq \mathbf{0}, \mathbf{w}_2 \geqq \mathbf{0}\text{-ra} \right\}.$$

Az inkonzisztens $[UA-C, U]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \leqq 0$, $w_1 \geqq 0$, $w_2 \geqq 0$ feltételrendszer alternatív párja az 1.3. lemma alapján a konzisztens

$$y[UA-C, U] \geqq 0, \quad y > 0,$$

vagyis az

$$yUA \geqq yC, \quad yU \geqq 0, \quad y > 0$$

rendszer. Jelölje a továbbiakban u és v vektor a (3.9) feladat két változóját az alábbi értelmezés szerint: $v := y$ és $u := yU$. Ezek után (3.9) ekvivalens alakja:

$$„\min" \{U b | uA \geqq vC, \; vU = u, \; u \geqq 0, \; v > 0\},$$

mely így is fogalmazható:

$$„\min" \{d | Ub \leqq d, \; uA \geqq vC, \; vU = u, \; u \geqq 0, \; v > 0\}. \tag{3.10}$$

Azt állítjuk, hogy a (3.10) feladat ekvivalens a

$$„\min" \{d | ub \leqq vd, \; uA \geqq vC, \; u \geqq 0, \; v > 0\} \tag{3.11}$$

feladattal. Legyen ugyanis U, u, v, d (3.10)-nek megoldása. Ekkor u, v, d (3.11)-nek is megoldása, mert ha $Ub \leqq d$ és $v > 0$, akkor $vUb \leqq vd$, azaz $ub \leqq vd$. Fordítva, legyen u, v, d (3.11) megoldása. Ekkor van olyan U mátrix, melyre $u = vU$ és $Ub \leqq d$ teljesül, így U, u, v, d megoldása (3.10)-nek. Ezzel állításunkat igazoltuk.

4. Összefoglaló megjegyzések

Dolgozatunkban összefoglaltuk, és két további tétellel kiegészítettük a lineáris mátrixmaximum probléma dualitás elméletét. Továbbá ismertettünk lineáris vektormaximum problémára született két dualitási koncepciót. Láttuk, hogy mindkét dualitás specializálással nyerhető a GALE—KUHN—TUCKER-dualitásból, így azok egymással is ekvivalensek. A 3.2 és 3.3 tételből következik, hogy a (2.1) és (2.2) problémapárra érvényes egzisztencia és dualitás tételek adaptálhatók a KORNBLUTH által definiált (3.1) és (3.2), illetve az ISERMANN által definiált (3.6) és (3.7) duális feladatpárra. Így KORNBLUTH [4], ISERMANN [2] és PARK [7] dolgozatában a lineáris vektormaximum problémákra vonatkozó, valamint a skalár lineáris programozási egzisztencia és dualitás tételek a lineáris mátrix optimalizáció megfelelő tételeiből következményként adódnak.

IRODALOM

[1] GALE, D., KUHN, H. W. and TUCKER, A. W., Linear Programming and the Theory of Games, in: T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York, 1951, 317—329.

[2] ISERMANN, H., "On some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programs", *Zeitschrift für Operations Research* **22** (1978) 33—41.

[3] ISERMANN, H., "Duality in Multiple Objective Linear Programming", in: S. Zionts (ed·), *Multiple Criteria Problem Solving*, Lecture Notice in Economics and Mathematical Sysstem, No. 155, Springer, Berlin, 1978, 274—285.

[4] KORNBLUTH, J. S. H., "Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming", *Operational Research Quarterly* **25** (1974) 599—614.

[5] MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming* (McGraw-Hill, New York, 1969).
[6] NEUMANN, J. VON, Discussion of a Maximum Problem (manuscript), Princeton: Institute for Advanced Study, 1947.
[7] PARK, S., "Complementary Slackness Theorem in Multiple Objective Linear Programming", *Operations Research* 30 (1982) 410—412.
[8] PHILIP, J., "Algorithms for the Vector Maximization Problem", *Mathematical Programming* 2 (1972) 207.
[9] STAHL, J., „Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről", *Szigma* **14** (1981) 191—201.
[10] ZELENY, M., *Linear Multiobjective Programming* (Springer-Verlag, Berlin—New York, 1974).
[11] LUC, D. T., Contributions to the Duality Theory of Mathematical Programming (Kandidátusi értekezés, MTA, Budapest, 1982).
[12] ACHILLES, A., ELSTER, K.-H., NEHSE, R., „Bibliographie zur Vektoroptimierung (Theorie und Anwendungen)", *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization* **10** (1979) 277—321.
[13] NEHSE, R., „Bibliographie zur Vektoroptimierung — Theorie und Anwendungen (1. Fortsetzung)", *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization* **13** (1982) 593—625.

(Beérkezett: 1988. november 15.)

GYETVÁN FERENC
JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM MÓDSZERTANI INTÉZET
7622 PÉCS, RÁKÓCZI ÚT 80.

DUALITY FOR MATRIXMAXIMUM AND VECTORMAXIMUM PROBLEMS AND ITS CONNECTIONS

F. GYETVAN

This paper studies linear matrix programming problems. On the one hand we give a survey of the duality theory of matrix optimization problem and on the other hand, the theory is completed with two theorems: the weak duality theorem and the complementary slackness theorem.

Moreover we demonstrate two concepts of duality for multiobjective linear programming as special cases of duality of linear matrix optimization problem.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 389—404

EGY SPECIÁLIS NEMKONVEX PROGRAMOZÁSI FELADATRÓL

FÜLÖP JÁNOS

Budapest

A dolgozatban azzal a speciális nemkonvex programozási feladattal foglalkozunk, amelynél egy lineáris célfüggvényt kell minimalizálni egy poliéder azon pontjain, amelyek egy másik poliéder legfeljebb q-dimenziós határoló felületén fekszenek. Véges metszősík módszert mutatunk be ezen feladat megoldására. Számítógépes tapasztalatokat is közlünk.

1. Bevezetés

A dolgozatban az angol nyelvű irodalomban *Generalized Lattice Point Problem* [7, 13, 16] néven ismert következő speciális nemkonvex programozási feladattal foglalkozunk:

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}|\mathbf{x}\in Q\cap F_q\}, \tag{1.1}$$

ahol $Q=\{\mathbf{x}\in \boldsymbol{R}^n|\mathbf{H}\mathbf{x}\leqq\mathbf{h}\}$, F_q a $P=\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqq\mathbf{0}\}$ poliéder legfeljebb q-dimenziós határoló felületein fekvő pontjainak halmaza, $\mathbf{c}\in\boldsymbol{R}^n$, $\mathbf{H}$ $k\times n$ méretű mátrix, $\mathbf{h}\in\boldsymbol{R}^k$, $\mathbf{A}$ $m\times n$ méretű mátrix, $\mathbf{b}\in\boldsymbol{R}^m$ és q nemnegatív egész szám. A ^{T} jel a transzponálást jelöli. Mivel feltehetjük, hogy rang $\mathbf{A}=m$, így $0\leqq q\leqq n-m$ is nyilván feltehető. A P és Q poliéderek bármelyike lehet nemkorlátos is. Mivel $P\cap Q=\emptyset$ esetén az (1.1) feladatnak nincs megengedett megoldása, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $P\cap Q\neq\emptyset$.

Az (1.1) feladat a $q=0$ esetben az extremális pont optimalizálási feladattal azonos, mely számos nemkonvex programozási feladat megoldásánál alkalmazható közvetlenül vagy közvetett módon [3, 5, 9, 12, 14, 16, 17]. A bináris diszkrét változókkal rendelkező vegyes diszkrét programozási feladatok, valamint a számossággal korlátozott lineáris programozási feladatok szintén felírhatók (1.1) alakjában [13, 16, 19]. Véges leszámlálási, korlátozás és szétválasztási, valamint metszősík módszerek ismertek a $q=0$ esethez tartozó extremális pont optimalizálási feladat megoldására [3, 5, 9, 12, 14, 16, 17]. GLOVER és KLINGMAN [7], valamint CABOT [2] metszősík módszert javasoltak az általános (1.1) feladat megoldására. Azonban SEN és SHERALI [13] megmutatták, hogy ezen utóbbi módszerek nemkonvergensek is lehetnek, majd ugyanebben a dolgozatban véges metszősík módszereket ismertettek az (1.1) feladat megoldására.

Jelen dolgozatban egy új véges metszősík módszert mutatunk be az (1.1) feladat megoldására. Ez a módszer a [6] dolgozatban általunk ismertetett azon véges eljáráson alapul, melyet releváns határoló felület keresésére javasoltunk. A 2. és 3. fejezetben a véges metszősík módszert mutatjuk be. A 4. fejezetben összefoglaljuk a javasolt módszert. Az 5. fejezetben számítástechnikai tapasztalatokat közlünk.

2. Megengedett megoldás előállítása és a célfüggvényérték javítása

Legyen $N=\{1, \ldots, n\}$ és $Z \subseteq N$. A $P_Z=\{\mathbf{x} \in P \mid x_j=0,\ \forall j \in Z\}$ halmaz a P poliéder egy határoló felülete, és a P poliéder tetszőleges nemüres határoló felülete felírható P_Z alakjában [18]. Ha $Z=\emptyset$, akkor nyilván $P_Z=P$. Egy $P_Z \neq \emptyset$ határoló felület esetén jelölje $\dim P_Z$ a P_Z dimenzióját, amelyet a P_Z által kifeszített lineáris sokaság dimenziójaként értelmezünk. Megmutatható, hogy

$$\dim P_Z = n - \operatorname{rang}\left[\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j \mid j \in \hat{Z}\}\right], \tag{2.1}$$

ahol $\hat{Z}=\{j \in N \mid x_j=0,\ \forall \mathbf{x} \in P_Z\}$, az $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ n-elemű vektorok az $\mathbf{A}^T$ oszlopai, és $\mathbf{e}_j$ a j-edik egységvektort jelöli [4, 20]. Határozzuk meg (2.1) alapján a P poliéder dimenzióját. Ehhez elő kell állítanunk a $\hat{Z}=\{j \in N \mid x_j=0,\ \forall \mathbf{x} \in P\}$ indexhalmazt. A $\hat{Z}$ indexhalmaz előállításához egyszerű lineáris programozási eszközöket kell csak alkalmaznunk. Könnyen látható, hogy $q \geqq \dim P$ esetén $F_q=P$, különben F_q a P poliéder q-dimenziós határoló felületeinek egyesítése. A $q \geqq \dim P$ esetben tehát (1.1) lineáris programozási feladat. A következőkben feltesszük, hogy $0 \leqq q < \dim P$.

2.1. *Definíció.* A P poliéder egy P_Z határoló felületét *relevánsnak* nevezzük, ha $P_Z \cap Q \neq \emptyset$ és $\dim P_Z \leqq q$. A P poliéder egy P_Z határoló felületét *irrelevánsnak* nevezzük, ha $P_Z \cap Q \neq \emptyset$ és $P_Z \cap Q \cap F_q = \emptyset$.

Az (1.1) feladat megengedett pontjainak $Q \cap F_q$ halmaza a releváns határoló felületek azon pontjaiból áll, amelyek a Q poliéderben is benne vannak.

Tekintsük a $P \cap Q$ poliédert. Nyilván $\mathbf{x} \in P \cap Q$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}_S=\mathbf{h}-\mathbf{H}\mathbf{x}$ eleget tesznek az

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}_S = \mathbf{h}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_S \geqq \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

feltételrendszernek, ahol $\mathbf{x}_S \in R^k$, $\mathbf{x}_S=(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})^T$ és $S=\{n+1, \ldots, n+k\}$. A (2.2) egy adott $\mathbf{B}$ megengedett bázisa esetén legyen $I_B \subseteq N \cup S$ a bázisváltozók és $I_R = N \cup S \setminus I_B$ a nem bázisváltozók indexhalmaza. A [6] dolgozatban megmutattuk, hogy $Q \cap F_q \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha (2.2)-nek létezik olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisa, amelyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$, továbbá bármely ilyen $\mathbf{B}$ megengedett bázist tekintve P_Z releváns határoló felület tetszőleges olyan $Z \subseteq N \cap I_R$ indexhalmaz esetén, melyre $|Z| \geqq n-m-q$ teljesül. A [6] dolgozatban egy olyan véges metszősík eljárást is ismertetünk, amely vagy kimutatja, hogy $Q \cap F_q = \emptyset$, vagy előállítja (2.2) egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát, melyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$. Ez az eljárás maga is egy véges metszősík algoritmus, amely során irreleváns határoló felületeket deríthetünk fel és metszősík feltételeket állíthatunk elő ezen irreleváns határoló felületek pontjainak a további keresésből való kizárása céljából. Azonban ezeket a metszéseket úgy állítjuk elő, hogy azok a $Q \cap F_q$ halmaz esetleges pontjait meghagyják. Adjuk hozzá ezeket a metszősík feltételeket a Q poliédert meghatározó

$$\mathbf{H}\mathbf{x} \leqq \mathbf{h} \tag{2.3}$$

feltételrendszerhez, és jelölje újból Q a (2.3)-nak eleget tevő $\mathbf{x}$ vektorok poliéderét. Ugyanezeket az új egyenlőtlenség feltételeket megfelelő új kiegészítő változók bevezetésével alakítsuk át egyenlőség feltételekké is és adjuk őket (2.2)-höz. Ez azt jelenti, hogy az eljárás folyamán a (2.2) és (2.3) feltételeinek száma növekedhet, a Q poliéder kisebbé válhat, azonban eközben a $Q\cap F_q$ halmaz nem változik. Ha az előbb említett eljárás során az derül ki, hogy $Q\cap F_q=\emptyset$, akkor leállhatunk, különben pedig a (2.2) egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát kapjuk meg, amelyre $|N\cap I_B|\leqq m+q$ teljesül. Tudjuk, hogy a (2.2) $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának $\mathbf{x}$ része a $Z=N\cap I_R$ által előállított P_Z releváns határoló felületen fekszik. Mivel a $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ célfüggvény (1.1) megengedett pontjain való minimalizálásában vagyunk érdekeltek, érdemes megvizsgálni, hogy tudunk-e a $P\cap Q$ poliéder releváns határoló felületen fekvő csúcspontjain lépkedni olyan módon, hogy közben a célfüggvény értéke ne növekedjék, sőt lehetőleg csökkenjen. Ez a szimplex módszer alábbi egyszerű módosításával elérhető. Tekintsük a (2.2) rendszer $\mathbf{B}$ megengedett bázis által meghatározott *kanonikus* alakját:

$$x_i+\sum_{j\in I_R} d_{ij}x_j = d_{i0},\quad i\in I_B, \tag{2.4}$$

ahol (2.4) feltételi mátrixa oszlopait és jobb oldali vektorát (2.2) feltételi mátrixa oszlopainak és jobb oldali vektorának a $\mathbf{B}^{-1}$ mátrixszal balról való szorzásával nyerjük. Tekintsük a $j\in I_R$ indexekhez tartozó r_j redukált költségeket, ahol

$$r_j=\begin{cases} c_j-\sum\limits_{i\in N\cap I_B} c_i d_{ij}, & \text{ha}\quad j\in N\cap I_R,\\ -\sum\limits_{i\in N\cap I_B} c_i d_{ij}, & \text{ha}\quad j\in S\cap I_R.\end{cases} \tag{2.5}$$

Ha $r_j\geqq 0$ minden $j\in I_R$ esetén, akkor leállhatunk, ugyanis (2.2) $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának $\mathbf{x}$-része a $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}|\mathbf{x}\in P\cap Q\}$ feladat optimális megoldása és mivel $\mathbf{x}$ releváns határoló felületen fekszik, így ezen $\mathbf{x}$ az (1.1) feladatnak is optimális megoldása.

Tekintsünk egy olyan $j\in S\cap I_R$ indexet, amelyre $r_j<0$. Ha ezen j esetén $d_{ij}\leqq 0$, $\forall i\in I_B$, akkor leállhatunk: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ alulról nem korlátos a $Z=N\cap I_R$ által meghatározott $P_Z\cap Q$ halmazon és mivel P_Z releváns határoló felület, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ alulról nem korlátos (1.1) megengedett pontjainak halmazán. Különben legyen x_j a bázisba belépő változó, hajtsuk végre a báziscserét, és jelölje $\hat{\mathbf{B}}$ az így nyert új megengedett bázist. Nyilván $|N\cap I_{\hat{B}}|\leqq m+q$. A $\mathbf{B}$ helyébe a $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázist helyettesítve ismételjük meg a $\mathbf{B}$ számára előírtakat.

Tegyük most fel, hogy $|N\cap I_B|<m+q$ és tekintsünk egy olyan $j\in N\cap I_R$ indexet, amelyre $r_j<0$. Ha ezen j esetén $d_{ij}\leqq 0$, $\forall i\in I_B$, akkor leállhatunk: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ alulról nem korlátos a $Z=(N\cap I_R)\setminus\{j\}$ által meghatározott $P_Z\cap Q$ halmazon és mivel P_Z releváns határoló felület, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ alulról nem korlátos (1.1) megengedett pontjainak halmazán. Különben legyen x_j a bázisba belépő változó, hajtsuk végre a báziscserét, és jelölje $\hat{\mathbf{B}}$ az így nyert új megengedett bázist. Nyilván $|N\cap I_{\hat{B}}|\leqq m+q$. A $\mathbf{B}$ helyébe a $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázist helyettesítve ismételjük meg a $\mathbf{B}$ számára előírtakat.

Végül tegyük fel, hogy $|N\cap I_B|=m+q$ és tekintsünk egy olyan $j\in N\cap I_R$ indexet, amelyre $r_j<0$. Most nem állíthatjuk, hogy a $Z=(N\cap I_R)\setminus\{j\}$ által meghatározott P_Z határoló felület releváns. Azonban érdemes megvizsgálni, hogy az x_j változót bázisba belépő változónak választva mi lenne a kilépő változó. Ha egy ilyen báziscsere esetén egy x_l, $l\in N\cap I_B$ lenne a kilépő változó, akkor hajtsuk végre a báziscserét, és jelölje $\hat{\mathbf{B}}$ az így nyert új megengedett bázist. Most $|N\cap I_{\hat{B}}|=m+q$. A $\mathbf{B}$ helyébe a $\hat{\mathbf{B}}$ megengedett bázist helyettesítve ismételjük meg a $\mathbf{B}$ számára előírtakat. Ha egy $l\in S\cap I_B$ adódik a kilépő változó indexének, akkor nem érdemes elvégezni a báziscserét, mivel az új $\hat{\mathbf{B}}$ bázisra már $|N\cap I_{\hat{B}}|>m+q$ teljesülne.

Nyilvánvaló, hogy ezen báziscserék során a célfüggvényérték nem növekszik, sőt esetleg csökken. Az elméletileg lehetséges ciklizálás kizárása céljából szükség esetén a lexikografikus szimplex módszer kilépési szabályát használhatjuk. Ekkor véges számú szimplex lépés után az alábbi esetek egyikéhez jutunk:

(i) Az (1.1) feladat optimális megoldását kapjuk meg.

(ii) Kiderül, hogy a $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ célfüggvény nem korlátos alulról (1.1) megengedett megoldásainak halmazán.

(iii) A (2.2) egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát kapjuk meg, amelyre $|N\cap I_B|=m+q$, $r_j\geqq 0$ minden $j\in S\cap I_R$ esetén, továbbá tetszőleges $r_j<0, j\in N\cap I_R$ esetén vagy $d_{ij}\leqq 0$, $\forall i\in I_B$, vagy pedig egy x_l, $l\in S\cap I_B$ változó lenne a kilépő változó, ha egy báziscserénél x_j lenne a belépő változó.

Az (i) és (ii) esetben készen vagyunk az (1.1) feladat megoldásával. Tekintsük most a (iii) esetet. Legyen $\mathbf{x}^*$ a (2.2) $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának $\mathbf{x}$-része. Könnyen látható, hogy $r_j\geqq 0$, $\forall j\in S\cap I_R$ miatt $\mathbf{x}^*$ optimális megoldása a $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}|\mathbf{x}\in P_Z\cap Q)$ feladatnak, ahol $Z=N\cap I_R$. Ekkor $\mathbf{x}^*$ (1.1) eddig talált legjobb megengedett megoldása és $\gamma=\mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ a hozzá tartozó célfüggvényérték. Abból a célból, hogy kizárjuk a további keresésből (1.1) azon megengedett pontjait, amelyek a γ értéknél nagyobb célfüggvényértékkel rendelkeznek, adjuk hozzá a

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}\leqq\gamma \tag{2.6}$$

egyenlőtlenséget (2.3)-hoz, és jelölje újból Q a (2.3)-nak eleget tevő pontok poliéderét. Egy új kiegészítő változó bevezetésével alakítsuk át a (2.6) egyenlőtlenséget egyenlőséggé és adjuk (2.2)-höz. Megjegyezzük, hogy amennyiben egy (2.6) alakú feltételt már korábban csatoltunk (2.2)-höz és (2.3)-hoz, akkor új (2.6) egyenlőtlenség csatolása helyett elég a korábbi (2.6) jobb oldali értékét módosítani az új γ értékre (2.2)-ben és (2.3)-ban.

3. Véges metszősík eljárás

Tekintsük a $Z=N\cap I_R$ által meghatározott P_Z határoló felületet, ahol $\mathbf{B}$ a fenti (iii) esetnél kapott megengedett bázis. Könnyen látható, hogy annak ellenére, hogy a (2.2) és (2.3) rendszereket kiegészítettük a (2.6) feltétellel, a P_Z határoló felület tartalmaz pontot az új $P\cap Q$ poliéderben is, pl. $\mathbf{x}^*$ ilyen pont. Ebből következik, hogy ha most közvetlenül megismételnénk az előző fejezetben leírtakat az új $P\cap Q$ poliéderrel, akkor a ciklizálás csapdájába eshetnénk, mivel esetleg újból az $\mathbf{x}^*$ pontot kapnánk. Nyilván most tetszőleges $\mathbf{x}\in P_Z\cap Q$ esetén $\mathbf{c}^T\mathbf{x}=\gamma$. A következőkben egy véges eljárást ismertetünk, amely

1. vagy bebizonyítja, hogy a fenti (i) vagy (ii) esetnél vagyunk,
2. vagy előállítja $Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}$ egy pontját,
3. vagy egy olyan metszősík feltételt állít elő, amely kizárja P_Z vagy valamely P_Z-ben fekvő határoló felület maradék pontjait, azonban $Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}$ minden pontját meghagyja.

Először tekintsük a legegyszerűbb esetet. Tegyük fel, hogy a (iii) esetnél kapott **B** megengedett bázisra $d_{i0}>0$, $\forall i\in N\cap I_B$ és $r_j>0$, $\forall j\in S\cap I_R$ teljesül. Ha **B** primál és duál nemdegenerált megengedett bázis, akkor ez nyilván fennáll. Mivel $r_j>0$, $\forall j\in S\cap I_R$, ezért $\mathbf{x}^*$ a $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}|\mathbf{x}\in P_Z\cap Q\}$ feladat egyetlen optimális megoldása, ahol $Z=N\cap I_R$. A (2.6) feltételt csatoltuk (2.3)-hoz, így $P_Z\cap Q=\{\mathbf{x}^*\}$. Mivel $d_{i0}>0$, $\forall i\in N\cap I_B$, ezért $x_i^*>0$, $\forall i\in N\cap I_B$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\dim P_Z = n-\operatorname{rang}\left[\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}\cup\{\mathbf{e}_j|j\in Z\}\right] = n-[m+(n-m-q)] = q.$$

Tegyük fel, hogy létezik $\bar{\mathbf{x}}\in Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}$. Ekkor $\bar{x}_i=0$ legalább egy $i\in N\cap I_B$ esetén, mivel különben $\bar{\mathbf{x}}$ a P poliéder csak olyan P_Z határoló felületén lehetne, amely valódi részként tartalmazná a P_Z határoló felületet, ekkor azonban $\dim P_Z>q$ teljesülne. Tekintsük a **B** által meghatározott (2.4) alakot. Ha valamelyik $i\in N\cap I_B$ esetén $\bar{x}_i=0$, akkor az $\bar{\mathbf{x}}$ és $\bar{\mathbf{x}}_S=\mathbf{h}-\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$ részekből álló vektorra fennáll a (2.4)-ből nyert

$$\sum_{j\in I_R}(d_{ij}/d_{i0})\bar{x}_j \geqq 1 \tag{3.1}$$

egyenlőtlenség. Tudjuk, hogy tetszőleges $\bar{\mathbf{x}}\in Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}$ pontot tekintve $\bar{x}_i=0$ legalább egy $i\in N\cap I_B$ index esetén. BALAS [1, 16] diszjunktív metszés ötletének felhasználásával állítsuk elő a

$$\sum_{j\in N\cup S}\alpha_j^* x_j \geqq 1 \tag{3.2}$$

egyenlőtlenséget, ahol

$$\alpha_j^* = \begin{cases}\max\{d_{ij}/d_{i0}|i\in N\cap I_B\}, & \text{ha } j\in I_R,\\ 0, & \text{ha } j\in I_B.\end{cases}$$

Az $\bar{\mathbf{x}}$ és $\bar{\mathbf{x}}_S$ részekből álló vektor nyilván kielégíti (3.2)-t, azonban $x_j^*=0$, $\forall j\in I_R$ miatt (3.2) nem teljesül az $\mathbf{x}^*$ és $\mathbf{x}_S^*=\mathbf{h}-\mathbf{H}\mathbf{x}^*$ részekből álló vektorra. Írjuk át (3.2)-t a (2.3)-ban szereplő egyenlőtlenségek alakjára. Ezt könnyen megtehetjük, ha az összes $\alpha_{n+j}^*\neq 0$, $n+j\in S\cap I_R$ esetén (2.2) $(m+j)$-edik egyenlőségének α_{n+j}^*-szeresét kivonjuk (3.2)-ből. Ezután mindkét oldalt (-1)-gyel átszorozva (2.3) számára megfelelő egyenlőtlenséget kapunk. Jelöljük az így kapott egyenlőtlenséget

$$\sum_{j\in N}\tau_j^* x_j \leqq \tau_0 \tag{3.3}$$

alakban, ahol

$$\tau_j^* = -\alpha_j^* + \sum_{l\in S\cap I_R}\alpha_l^* h_{l-n,j}, \quad j\in N,$$

$$\tau_0^* = -1+\sum_{l\in S\cap I_R}\alpha_l^* h_{l-n},$$

továbbá h_{ij} és h_i $(i=1, \ldots, k;\ j=1, \ldots, n)$ a (2.2)-ben és (2.3)-ban szereplő **H** mátrix és **h** vektor elemei. A (3.3) egyenlőtlenség nyilván teljesíti a fenti 3. eset követelményeit. Adjuk hozzá a (3.3) egyenlőtlenséget (2.3)-hoz, majd egy új kiegészítő változó bevezetésével alakítsuk át egyenlőséggé és adjuk azt hozzá (2.2)-höz. Ezek után ismételjük meg a [6]-ban leírt eljárást az új (2.2) rendszer egy olyan **B** megengedett bázisa felkutatása céljából, amelyre $|N\cap I_B|\leqq m+q$.

Megemlítjük, hogy [6] ezen eljárása során bizonyos x_j, $j\in N$ változókról kiderülhet, hogy azok csak pozitív értéket vesznek fel a $P\cap Q$ poliéderen. A (3.2) metszősík feltétel előállításakor legyen N_2 azon x_j, $j\in N$ változók indexhalmaza, amelyekről ez a tény kiderült. Ekkor nyilván tetszőleges $\mathbf{x}\in Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}$ vektorra $x_i>0$, $\forall i\in N_2$ teljesül. A (3.2) metszés előállításánál elmondottak miatt közvetlenül kapjuk, hogy $(N\cap I_B)\setminus N_2=\emptyset$ esetén $Q\cap F_q\cap\{\mathbf{x}\in R^n|\mathbf{c}^T\mathbf{x}<\gamma\}=\emptyset$ és $\mathbf{x}^*$ az (1.1) feladat optimális megoldása, azaz a fenti (i) esethez jutottunk. Különben állítsuk elő a

$$\sum_{j\in N\cup S}\alpha_j^{**}x_j\geqq 1 \tag{3.4}$$

egyenlőtlenséget, ahol

$$\alpha_j^{**}=\begin{cases}\max\{d_{ij}/d_{i0}|i\in(N\cap I_B)\setminus N_2\}, & \text{ha } j\in I_R,\\ 0, & \text{ha } j\in I_B.\end{cases}$$

Mivel tetszőleges $j\in N\cup S$ indexre $\alpha_j^*\geqq\alpha_j^{**}$ teljesül, ezért a (3.4) metszés dominálja a (3.2) metszést. Ezek szerint érdemesebb a (3.4) metszést használni (3.2) helyett. Az könnyen látható, hogy a (3.2) vagy (3.4) megalkotásához csak olyan együtthatókat használunk, amelyek a $\mathbf{B}$ által meghatározott (2.4) alakban megtalálhatók.

Hasonlóan ahhoz, ahogy a (3.3) egyenlőtlenséget nyertük (3.2)-ből, érdemes (3.4)-ből is eliminálni a kiegészítő változókat, azaz átírni a

$$\sum_{j\in N}\tau_j^{**}x_j\leqq\tau_0^{**} \tag{3.5}$$

alakra, ahol

$$\tau_j^{**}=-\alpha_j^{**}+\sum_{l\in S\cap I_R}\alpha_l^{**}h_{l-n,j},\quad j\in N,$$

$$\tau_0^{**}=-1+\sum_{l\in S\cap I_R}\alpha_l^{**}h_{l-n}.$$

Tegyük most fel, hogy a (iii) esetben szereplő $\mathbf{B}$ megengedett bázis által meghatározott (2.4) alakban található olyan $i\in N\cap I_B$ index, amelyre $d_{i0}=0$ vagy olyan $j\in S\cap I_R$ index, amelyre $r_j=0$. Ez utóbbi esetben a $Z=N\cap I_R$ által meghatározott $P_Z\cap Q$ halmaz tartalmazhat $\mathbf{x}^*$-tól különböző pontot, sőt P_Z valódi rész határoló felületéről is tartalmazhat pontot. Ezen esetek kezelésénél a Majthay és Whinston [10] által bevezetett extremális határoló felület ötletét fogjuk alkalmazni.

A P poliéder egy P_Z határoló felülete *extremális a Q halmazra vonatkozóan,* ha $P_Z\cap Q\neq\emptyset$ és bármely két $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}\in P_Z\cap Q$ esetén $\{j\in N|x_j^{(1)}=0\}=\{j\in N|x_j^{(2)}=0\}$. A P_Z határoló felület pontosan akkor extremális a Q halmazra vonatkozóan, ha $P_Z\cap Q\neq\emptyset$ és P_Z tetszőleges $P_{\hat{Z}}$ rész határoló felülete esetén vagy $P_{\hat{Z}}\cap Q=P_Z\cap Q$ vagy $P_{\hat{Z}}\cap Q=\emptyset$. A P poliéder egy P_Z határoló felülete *minimális extremális a Q halmazra vonatkozóan,* ha $P_Z\cap Q\neq\emptyset$ és P_Z tetszőleges $P_{\hat{Z}}$ rész határoló felülete esetén $P_{\hat{Z}}\cap Q=\emptyset$. Ez azt jelenti, hogy P_Z akkor és csak akkor minimális extremális Q-ra vonatkozóan, ha $P_Z\cap Q\neq\emptyset$ és $P_Z\cap Q$ nem tartalmaz pontot P_Z alacsonyabb dimenziós rész határoló felületéről. Minden minimális extremális határoló felület egyben extremális is. Könnyen látható, hogy ha P_Z extremális Q-ra vonatkozóan és $\hat{Z}=\{j\in N|x_j=0,\ \forall\mathbf{x}\in P_Z\cap Q\}$, akkor $P_{\hat{Z}}$ minimális extremális Q-ra vonatkozóan. Ha $P_Z\cap Q$ pontosan egy pontból áll, akkor P_Z nyilván minimális extremális határoló felület. Számos speciális nemkonvex programozási feladatra adott metszősík módszer végességének biztosításánál alkalmaztak olyan eljárásokat, amelyek extremális határoló felületet derítenek fel és vágnak le [5, 13, 15, 16]. Jelen dolgozatban is hasonló ötletet használunk.

3.1. Lemma. Legyen P_Z a P poliéder legfeljebb q-dimenziós minimális extremális határoló felülete Q-ra vonatkozóan. Tekintsük a P poliéder egy olyan $P_{\bar{Z}}$ határoló felületét, amelyre $\dim P_{\bar{Z}} \leqq q$ és $P_Z \neq P_{\bar{Z}}$. Ekkor vagy $P_Z \subset P_{\bar{Z}}$ vagy $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = \emptyset$ teljesül. A $\dim P_Z = q$ esetben azonban csak $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = \emptyset$ állhat fenn.

Bizonyítás. Ha a tekintett $P_{\bar{Z}}$ határoló felületre a fenti esetek egyike sem teljesülne, akkor azt kapnánk, hogy $P_Z \setminus P_{\bar{Z}} \neq \emptyset$ és $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q \neq \emptyset$. Legyen $P_{\hat{Z}} = P_Z \cap P_{\bar{Z}}$. Ekkor $P_{\hat{Z}}$ a P_Z valódi rész határoló felülete lenne, amelyből $\dim P_{\hat{Z}} < \dim P_Z$ és $P_{\hat{Z}} \cap Q \neq \emptyset$ következik. Ez azonban ellentmond annak a feltevésnek, hogy P_Z minimális extremális határoló felület.

Tegyük most fel, hogy $\dim P_Z = q$ és a tekintett $P_{\bar{Z}}$ határoló felületre $P_Z \subset P_{\bar{Z}}$ teljesül. Mivel $P_Z \neq P_{\bar{Z}}$, ezért P_Z valódi rész határoló felülete $P_{\bar{Z}}$-nak. Következésképpen $\dim P_{\bar{Z}} > \dim P_Z = q$, ami viszont ellentmond a $\dim P_{\bar{Z}} \leqq q$ feltevésnek. □

3.2. Lemma. Legyen P_Z a P poliéder egy extremális határoló felülete Q-ra vonatkozóan és legyen $N_1 = \{j \in N \mid x_j > 0,\ \forall \mathbf{x} \in P_Z \cap Q\}$. Tegyük fel, hogy $P_{\bar{Z}}$ a P poliéder egy olyan határoló felülete, amelyre $P_{\bar{Z}} \cap Q \neq \emptyset$ és $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = \emptyset$ teljesül. Ekkor tetszőleges $\bar{\mathbf{x}} \in P_{\bar{Z}} \cap Q$ esetén létezik olyan $i \in N_1$ index, hogy $\bar{x}_i = 0$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $N_1 \neq \emptyset$. Mivel P_Z extremális határoló felület Q-ra vonatkozóan, ezért tetszőleges $j \in N$ indexet tekintve vagy $x_j > 0$, $\forall \mathbf{x} \in P_Z \cap Q$, vagy $x_j = 0$, $\forall \mathbf{x} \in P_Z \cap Q$. Ha $N_1 = \emptyset$, akkor $P_Z \cap Q = P_N \cap Q = \{\mathbf{0}\}$. Mivel azonban $P_N \subseteqq P_{\bar{Z}}$, így $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = P_N \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = P_Z \cap Q = \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$, ami viszont ellentmond a $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = \emptyset$ feltevésnek. Tehát $N_1 \neq \emptyset$.

Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in P_{\bar{Z}} \cap Q$ és tegyük fel, hogy nem létezik olyan $i \in N_1$ index, hogy $\bar{x}_i = 0$, azaz $\bar{x}_i > 0$, $\forall i \in N_1$. Ekkor azonban $\bar{Z} \subseteqq N \setminus N_1$, amelyből $P_{\bar{Z}} \cap Q \supseteqq P_{N \setminus N_1} \cap Q = P_Z \cap Q$, majd $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q \supseteqq P_Z \cap Q$ következik. Ez utóbbi azonban ellentmond a $P_Z \cap P_{\bar{Z}} \cap Q = \emptyset$ és $P_Z \cap Q \neq \emptyset$ feltevéseknek. □

3.3. Lemma. Legyen P_Z a P poliéder egy olyan extremális határoló felülete Q-ra vonatkozóan, amelyre $\dim P_Z < q$ és $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \gamma$, $\forall \mathbf{x} \in P_Z \cap Q$. Tegyük fel, hogy $P_{\bar{Z}}$ a P poliéder egy olyan határoló felülete, amelyre $P_Z \subset P_{\bar{Z}}$, $\dim P_{\bar{Z}} \leqq q$ és $P_{\bar{Z}} \cap Q \cap \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\} \neq \emptyset$. Ekkor a $P_Z \cap Q$ bármely $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontját tekintve létezik (2.2)-nek olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázisa és olyan $j \in I_R$ index, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

a) $\bar{\mathbf{x}}$ a (2.2) $\bar{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának első n komponenséből álló vektor;

b) $|(N \cap I_R) \setminus \{j\}| \geqq n - m - q$;

c) $r_j < 0$, ahol r_j a $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázishoz és j indexhez tartozó (2.5) redukált költség;

d) a $\bar{\mathbf{B}}$ által meghatározott (2.4) alakban vagy $d_{ij} \leqq 0$, $\forall i \in I_{\bar{B}}$, vagy

$$\min \{d_{i0}/d_{ij} \mid d_{ij} > 0,\ i \in I_{\bar{B}}\} > 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\bar{q} = \dim P_{\bar{Z}}$ és $\hat{Z} = \{j \in N \mid x_j = 0,\ \forall \mathbf{x} \in P_{\bar{Z}}\}$. Nyilván $\bar{Z} \subseteqq \hat{Z}$, $P_{\hat{Z}} = P_{\bar{Z}}$, és $\operatorname{rang}[\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j \mid j \in \hat{Z}\}] = n - \bar{q}$. Mivel $\operatorname{rang} \mathbf{A} = m$, ezért létezik olyan $\tilde{Z} \subseteq \hat{Z}$ indexhalmaz, amelyre $|\tilde{Z}| = n - m - \bar{q}$, rang $[\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j | j \in \tilde{Z}\}] = n - \bar{q}$ és $P_{\tilde{Z}} = P_{\hat{Z}} = P_Z$ teljesül. Könnyen látható, hogy

$$\text{rang}\,\{\mathbf{a}_j | j \in N \setminus \tilde{Z}\} = m, \tag{3.6}$$

ahol $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopait jelöli. Nyilván $\mathbf{x} \in P_{\tilde{Z}} \cap Q$ akkor és csak akkor ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}_S = \mathbf{h} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ eleget tesznek az

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}_S = \mathbf{h}, \\ x_j = 0, \quad j \in \tilde{Z}, \quad x_j \geqq 0, \quad j \in N \setminus \tilde{Z}, \quad \mathbf{x}_S \geqq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{3.7}$$

feltételrendszernek. Az $x_j, j \in \tilde{Z}$ változók (3.7)-ből való törlésével a

$$\begin{gathered} \sum_{j \in N \setminus \tilde{Z}} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b}, \\ \sum_{j \in N \setminus \tilde{Z}} \mathbf{h}_j x_j + \mathbf{x}_S = \mathbf{h}, \\ x_j \geqq 0, \quad j \in N \setminus \tilde{Z}, \quad \mathbf{x}_S \geqq \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{3.8}$$

feltételrendszert kapjuk, ahol $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$ a $\mathbf{H}$ mátrix oszlopai. A (3.6)-ból következik, hogy (3.8) együttható mátrixának rangja $m+k$, így (3.8) megengedett bázisai megengedett bázisai (2.2)-nek is. Tekintsük $P_Z \cap Q$ tetszőleges $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontját. Mivel $P_Z \subset P_{\tilde{Z}}$, ezért $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontja a $P_{\tilde{Z}} \cap Q$ poliédernek is. A $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \gamma$ és $P_{\tilde{Z}} \cap Q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\} \neq \emptyset$ tényekből következik, hogy a $P_{\tilde{Z}} \cap Q$ poliédernek létezik olyan $\bar{\mathbf{x}}$ csúcspontból kiinduló éle, amely tartalmaz pontot az $\{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\}$ halmazból. Ez azonban azt jelenti, hogy (3.8)-nak létezik olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázisa és olyan $j \in I_R \setminus \tilde{Z}$ index, hogy a (2.2) rendszer $\bar{\mathbf{B}}$ által előállított megengedett bázismegoldásának $\mathbf{x}$-része éppen $\bar{\mathbf{x}}$, továbbá $\bar{\mathbf{B}}$ és j teljesítik a fenti c) és d) tulajdonságokat. Következésképpen ezen $\bar{\mathbf{B}}$ és j esetén teljesülnek a fenti a)—d) tulajdonságok. □

Könnyen látható, hogy amennyiben a 2. fejezet (iii) eseténél (2.2) egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisát kapjuk, amelyre $d_{i0} > 0$, $\forall i \in N \cap I_B$ és $r_j > 0$, $\forall j \in S \cap I_R$, akkor a $Z = N \cap I_R$ által meghatározott P_Z határoló felület q-dimenziós és minimális extremális a Q-ra vonatkozóan, így a (3.2) és (3.4) metszések előállítását a 3.1. és 3.2. lemmák alapján is megindokolhatjuk.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{B}$ megengedett bázis által meghatározott (2.4) alakban van olyan $i \in N \cap I_B$ index, amelyre $d_{i0} = 0$, vagy pedig található olyan $j \in S \cap I_R$ indexhez tartozó (2.5) redukált költség, amelyre $r_j = 0$. Ebben az esetben a MAJTHAY és WHINSTON [10] által bemutatott eljárást fogjuk alkalmazni, amellyel vagy azt mutatjuk ki, hogy a $Z = N \cap I_R$ által meghatározott P_Z határoló felület minimális extremális Q-ra vonatkozóan, vagy pedig a P_Z egy ilyen tulajdonságú rész határoló felületét állítjuk elő. Ezután vagy (1.1) egy javító megengedett megoldását kapjuk meg, vagy a (3.4)-hez hasonló metszősík feltételt állítunk elő a tekintett extremális határoló felület pontjainak a további keresésből való kizárása céljából.

Válasszunk ki egy $r \in N \cap I_B$ indexet és a $\mathbf{B}$ megengedett bázisból kiindulva oldjuk meg a

$$\begin{aligned} &\min x_r \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ &\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}_S = \mathbf{h}, \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_S \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

feladatot a szimplex módszer azon módosításával, hogy csak az x_j, $j \in S$ változók közül választhatunk bázisba belépőt.

Legyen $\tilde{\mathbf{B}}$ a (3.9) optimális bázisa. Ha (3.9) optimuma nulla és $r \in I_{\tilde{B}}$, akkor próbáljuk meg kihozni az x_r változót a bázisból olyan módon, hogy felcseréljük őt egy x_j, $j \in S$ nem bázisváltozóval. Ha ez nem lehetséges, akkor a $\tilde{\mathbf{B}}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{r0}=0$ és $d_{rj}=0$, $\forall j \in S \cap I_{\tilde{R}}$, továbbá x_r nulla szinten bázisváltozó marad (2.2) tetszőleges olyan megengedett bázismegoldása esetén, amelyet a $\tilde{\mathbf{B}}$ bázisból kiindulva, a módosított belépési szabályt alkalmazva, szimplex lépésekkel érünk el.

Ha a (3.9) optimuma pozitív, akkor $r \in I_{\tilde{B}}$ és a $\tilde{\mathbf{B}}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{r0}>0$ és $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in S \cap I_{\tilde{R}}$. Ekkor nyilván minden $\mathbf{x} \in P_{\tilde{Z}} \cap Q$ esetén $x_r > 0$, ahol $\tilde{Z} = N \cap I_{\tilde{R}}$. Továbbá, ha $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in N \cap I_{\tilde{R}}$ is fennáll, akkor $x_r > 0$ tetszőleges $\mathbf{x} \in P \cap Q$ esetén. Ezután, ha már az összes $r \in N \cap I_B$ indexre vonatkozóan megoldottuk a megfelelő (3.9) feladatot, akkor álljunk le, különben válasszunk egy olyan új $r \in N \cap I_B$ indexet, amelyre vonatkozó (3.9) feladatot még nem tekintettük és oldjuk meg az új (3.9) feladatot a $\tilde{\mathbf{B}}$ megengedett bázisból kiindulva és a módosított belépési szabályt alkalmazva.

Véges számú (3.9) feladat megoldása után nyilván leállhatunk. Legyen $\tilde{\mathbf{B}}$ az utolsó (3.9) optimális bázisa. Tekintsük a $\tilde{\mathbf{B}}$ által meghatározott (2.4) alakot, legyen $N_0 = \{i \in N \cap I_{\tilde{B}} | d_{i0} = 0\}$ és $N_1 = \{i \in N \cap I_{\tilde{B}} | d_{i0} > 0\}$. Könnyen látható, hogy minden $\mathbf{x} \in P_{\tilde{Z}} \cap Q$ esetén $x_i = 0$, $\forall i \in N_0$, és $x_i > 0$, $\forall i \in N_1$ teljesül, ahol $\tilde{Z} = N \cap I_{\tilde{R}}$. Ebből az következik, hogy $P_{\tilde{Z}}$ extremális határoló felület Q-ra vonatkozóan, és mivel $P_{\tilde{Z}} \subseteqq P_Z$, így $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \gamma$ tetszőleges $\mathbf{x} \in P_{\tilde{Z}} \cap Q$ esetén.

Ha $N_0 = \emptyset$, akkor közvetlenül kapjuk, hogy $\dim P_{\tilde{Z}} = n - m - |\tilde{Z}|$ és $P_{\tilde{Z}}$ minimális extremális határoló felület. Tegyük most fel, hogy $N_0 \neq \emptyset$. Mivel a $\tilde{\mathbf{B}}$ által előállított (2.4) alakban $d_{ij} = 0$ teljesül tetszőleges $i \in N_0$ és $j \in \{0\} \cup \{S \cap I_{\tilde{R}}\}$ esetén, a következő egyenlőségek is érvényesek:

$$x_i + \sum_{j \in \tilde{Z}} d_{ij} x_j = 0, \quad i \in N_0.$$

Ebből viszont az következik, hogy az $\{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ x_j = 0, j \in \tilde{Z}\}$ halmaz bármely pontját tekintve $x_i = 0$, $\forall i \in N_0$, ezért az $\mathbf{e}_i$, $i \in N_0$ egységvektorok az $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\} \cup \cup \{\mathbf{e}_j | j \in \tilde{Z}\}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként állnak elő. Következésképpen $P_{\tilde{Z}} = P_{\tilde{Z} \cup N_0}$ és $\dim P_{\tilde{Z}} = n - \text{rang}\,[\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\} \cup \{\mathbf{e}_j | j \in \tilde{Z}\}]$. Mivel $\tilde{Z} = N \cap I_{\tilde{R}}$, így rang $\{\mathbf{a}_i | i \in N \setminus \tilde{Z}\} = m$, $\dim P_{\tilde{Z}} = n - m - |\tilde{Z}|$ és $P_{\tilde{Z}}$ minimális extremális határoló felület.

Tekintsük most a $\dim P_{\tilde{Z}} = q$ esetet. Ekkor a 3.1. és 3.2. lemma alapján tetszőleges $\bar{\mathbf{x}} \in Q \cap F_q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T\mathbf{x} < \gamma\}$ ponthoz létezik olyan $i \in N_1$ index, amelyre $\bar{x}_i = 0$

teljesül. Jelölje most is N_2 azon x_i, $i \in N$ változók indexhalmazát, amelyekről már kiderült, hogy a maradék $P \cap Q$ poliéderen csak pozitív értéket vesznek fel. Nyilván $N_2 \subseteq N_1$. Ha $N_1 = N_2$, akkor leállhatunk, az (1.1) feladat optimuma γ és $\mathbf{x}^*$ egy optimális megoldás. Különben tetszőleges $\bar{\mathbf{x}} \in Q \cap F_q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\}$ ponthoz létezik olyan $i \in N_1 \setminus N_2$ index, amelyre $\bar{x}_i = 0$ teljesül. Az extremális határoló felületek levágására SHERALI és SHETTY [16] által bemutatott ötletet fogjuk most felhasználni. Minden $r \in N_1 \setminus N_2$ indexre vonatkozóan megoldottunk egy megfelelő (3.9) feladatot. Legyen $\mathbf{B}^{(r)}$ az r indexhez tartozó (3.9) feladat optimális bázisa és tekintsük a $\mathbf{B}^{(r)}$ bázis által meghatározott (2.4) alakban az r indexű feltételt:

$$x_r + \sum_{j \in I_R^{(r)}} d_{rj} x_j = d_{r0}. \tag{3.10}$$

Mivel $d_{r0} > 0$, ezért ha egy $\mathbf{x} \in P \cap Q$ esetén $x_r = 0$ teljesül, akkor az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}_S = \mathbf{h} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ részekből álló vektorra fennáll az r indexhez tartozó (3.10) egyenlőségből kapott

$$\sum_{j \in I_R^{(r)}} (d_{rj} \setminus d_{r0}) x_j \geqq 1 \tag{3.11}$$

egyenlőtlenség. Megfelelő nulla együtthatók bevezetésével írjuk át (3.11)-et a következő alakra:

$$\sum_{j \in N \cup S} \alpha_{rj} x_j \geqq 1. \tag{3.12}$$

Bármely $\bar{\mathbf{x}} \in Q \cap F_q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\}$ vektor az $\bar{\mathbf{x}}_S = \mathbf{h} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$ vektorral kiegészítve legalább egy $r \in N_1 \setminus N_2$ index esetén teljesíti a (3.12) egyenlőtlenséget. Legyen $\bar{\alpha}_j = \max \{\alpha_{rj} | r \in N_1 \setminus N_2\}, j \in N \cup S$. Újból BALAS [1, 16] diszjunktív metszés ötletét használva állítsuk elő a

$$\sum_{j \in N \cup S} \bar{\alpha}_j x_j \geqq 1. \tag{3.13}$$

egyenlőtlenséget. Mivel minden $r \in N_1 \setminus N_2$ és $j \in (N \cup S) \setminus \tilde{Z}$ esetén $\alpha_{rj} \leqq 0$, ezért a $j \in (N \cup S) \setminus \tilde{Z}$ indexekre $\bar{\alpha}_j \leqq 0$ teljesül. Ebből azt kapjuk, hogy a $P_{\tilde{Z}} \cap Q$ poliéder pontjaiból és az egyértelmű kiegészítő vektorokból álló vektorok nem tesznek eleget (3.13)-nak, azonban tetszőleges $\bar{\mathbf{x}} \in Q \cap F_q \cap \{\bar{\mathbf{x}} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\}$ és $\bar{\mathbf{x}}_S = \mathbf{h} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$ részekből álló vektorra teljesül (3.13). A (3.2) metszésnél már elmondottak szerint alakítsuk át a (3.13) feltételt a (2.3) által megkövetelt alakra, azaz állítsuk elő a

$$\sum_{j \in N} \bar{\tau}_j x_j \leqq \bar{\tau}_0 \tag{3.14}$$

egyenlőtlenséget, ahol

$$\bar{\tau}_j = -\bar{\alpha}_j + \sum_{l \in S} \bar{\alpha}_l h_{l-n,j}, \quad j \in N,$$

$$\bar{\tau}_0 = -1 + \sum_{l \in S} \bar{\alpha}_l h_{l-n},$$

és csatoljuk (3.14)-et a (2.2) és (2.3) rendszerhez.

Tekintsük most a $\dim P_{\tilde{Z}} < q$ esetet. Legyen $\bar{\mathbf{x}}$ a (2.2) $\tilde{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának $\mathbf{x}$-része, ahol $\tilde{\mathbf{B}}$ az utoljára megoldott (3.9) feladat optimális bázisa. Az $\bar{\mathbf{x}}$ vektor nyilván a $P_{\tilde{Z}} \cap Q$ poliéder egy csúcspontja. A 3.3. lemma alapján tudjuk, hogy amennyiben létezik olyan $P_{\bar{Z}}$ határoló felülete a P poliédernek, amelyre $P_{\hat{Z}} \subset P_{\bar{Z}}$, $\dim P_{\hat{Z}} \leqq q$ és $P_{\hat{Z}} \cap Q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\} \neq \emptyset$ teljesül, akkor a $\tilde{\mathbf{B}}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás egy olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázishoz is tartozik, amelyhez található olyan $j \in I_{\bar{R}}$ index, hogy a 3.3. lemma a)—d) feltételei teljesülnek. Ha a tekintett megengedett bázismegoldás nemdegenerált, akkor $\tilde{\mathbf{B}}$ az egyetlen olyan bázis, amely őt meghatározza. A degenerált esetben a [11] dolgozatban áttekintett eljárások közül használhatjuk fel valamelyiket az adott megengedett bázismegoldáshoz tartozó bázisok előállítására.

Ha találunk olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázist és $j \in I_{\bar{R}}$ indexet, amelyre az a)—d) tulajdonságok teljesülnek, akkor ezen megengedett bázisból kiindulva (1.1) egy javító megengedett megoldásához juthatunk. Ez azt jelenti, hogy amennyiben egy szimplex lépés belépő változójának az x_j, $j \in I_{\bar{R}}$ változót választjuk, akkor vagy az derül ki, hogy $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ alulról nem korlátos az (1.1) megengedett pontjainak halmazán, vagy pedig a báziscsere végrehajtása után (2.2) egy olyan $\mathbf{B}$ megengedett bázisához jutunk, amelyre fennáll $|N \cap I_B| \leqq m+q$ és a $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldás $\mathbf{x}$-részéhez tartozó (1.1)-beli célfüggvényérték kisebb az eddigi γ értéknél. Ezután a $\mathbf{B}$ megengedett bázisból kiindulva hajtsuk végre a 2. fejezetben leírtak szerint az esetleges további javító lépéseket.

Tekintsük most azt az esetet amikor az $\bar{\mathbf{x}} \in P_{\bar{Z}} \cap Q$ csúcsponthoz nem létezik olyan $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázis és $j \in I_{\bar{R}}$ index, amelyekre a 3.3. lemma a)—d) tulajdonságai igazak lennének. Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan $P_{\hat{Z}}$ határoló felület, amelyre $P_{\hat{Z}} \subset P_{\bar{Z}}$, $\dim P_{\hat{Z}} \leqq q$ és $P_{\hat{Z}} \cap Q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\} \neq \emptyset$ teljesülne. Ekkor azonban a 3.1. és 3.2. lemma alapján tudjuk, hogy bármely $\mathbf{x} \in F_q \cap Q \cap \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \gamma\}$ ponthoz létezik olyan $i \in N_1$ index, hogy $x_i = 0$. Ha $N_1 = N_2$, akkor ilyen javító pont nyilván nem létezik, leállhatunk. Ekkor az (1.1) feladat optimumértéke γ és $\mathbf{x}^*$ egy optimális megoldás. Ha $N_1 \setminus N_2 \neq \emptyset$, akkor állítsuk elő újra a (3.13), illetve (3.14) metszéseket, és a (3.14) feltételt csatoljuk (2.2)-höz és (2.3)-hoz.

4. A módszer összefoglalása

Az alábbiakban összefoglaljuk az (1.1) feladat megoldására javasolt módszert.

4.1. *Algoritmus.*

0. *Lépés.* Legyenek Q és F_q az (1.1) feladat kitűzésénél megadott halmazok és $\gamma = +\infty$. Menjünk az 1. lépésre.

1. *Lépés.* A [6] dolgozatban közölt metszősík eljárással döntsük el, hogy $Q \cap F_q$ üres-e. Ha az derül ki, hogy $Q \cap F_q = \emptyset$, akkor menjünk a 13. lépésre. Különben csatoljuk az eljárás során előállított metszősík feltételeket (2.3)-hoz és legyen újból Q a (2.3)-nak eleget tevő pontok poliédere. Új kiegészítő változók bevezetésével csatoljuk az új feltételeket (2.2)-höz is. Legyen $\mathbf{B}$ [6]-beli eljárással talált olyan megengedett bázisa (2.2)-nek, amelyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$ teljesül. Menjünk a 2. lépésre.

2. *Lépés.* Határozzuk meg (2.5) alapján az r_j, $j \in I_R$ redukált költségeket. Ha $r_j \geqq 0$ minden $j \in I_R$ esetén, akkor legyen $\mathbf{x}^*$ a (2.2) rendszer $\mathbf{B}$ megengedett bázis által meghatározott bázismegoldásának első n komponenséből álló vektor, $\gamma = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ és menjünk a 13. lépésre. Különben az $|N \cap I_B| < m+q$ esetben válasszunk ki egy olyan $j \in I_R$ indexet, amelyre $r_j < 0$, és menjünk a 3. lépésre. Ha $|N \cap I_B| = m+q$ esetén létezik olyan $j \in S \cap I_R$, amelyre $r_j < 0$, akkor válasszunk ki egy ilyen j in-

dexet és menjünk a 3. lépésre. Ha $r_j \geqq 0$, $\forall j \in S \cap I_R$, de létezik olyan $j \in N \cap I_R$, amelyre $r_j < 0$ és az x_j változót választva a bázisba belépőnek egy x_l, $l \in N \cap I_R$ adódna a bázisból kilépő változónak a lexikografikus szimplex módszer szerint, akkor menjünk a 4. lépésre. Különben menjünk az 5. lépésre.

3. *Lépés.* Ha $d_{ij} \leqq 0$, $\forall i \in I_B$, akkor legyen $\gamma = -\infty$ és menjünk a 13. lépésre, különben a 4. lépésre.

4. *Lépés.* A j indexet választva a belépő változó indexének határozzuk meg a bázisból kilépő változót a lexikografikus szimplex módszer szerint. Hajtsuk végre a báziscserét. Jelölje újból $\mathbf{B}$ a kapott megengedett bázist és menjünk a 2. lépésre.

5. *Lépés.* Legyen $\mathbf{x}^*$ a (2.2) rendszer $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldásának első n komponenséből álló vektor és $\gamma = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. Csatoljuk a (2.6) feltételt (2.3)-hoz és új kiegészítő változó bevezetésével (2.2)-höz is. Ha a (2.6) feltételt már korábban csatoltuk (2.2)-höz és (2.3)-hoz, akkor elég a jobb oldalon az új γ értékre módosítani. Jelölje újból Q a (2.3)-nak eleget tevő pontok poliéderét. Legyen N_2 azon $x_j, j \in N$ változók indexhalmaza, amelyekről már korábban kiderült, hogy $x_j > 0$, $\forall \mathbf{x} \in P \cap Q$. Ha a $\mathbf{B}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{i0} > 0$, $\forall i \in N \cap I_B$ és $r_j > 0$, $\forall j \in S \cap I_R$, akkor menjünk a 12. lépésre. Különben legyen $K = (N \cap I_B) \setminus N_2$ és menjünk a 6. lépésre.

6. *Lépés.* Ha $K = \emptyset$, akkor menjünk a 9. lépésre. Különben válasszunk ki egy $r \in K$ indexet, töröljük az r indexet a K halmazból, és oldjuk meg a (3.9) feladatot a $\mathbf{B}$ megengedett bázisból kiindulva a szimplex módszer azon módosításával, hogy csak az x_j, $j \in S$ változók közül választhatunk bázisba belépőt. Jelölje újból $\mathbf{B}$ a (3.9) optimális bázisát. Ha (3.9) optimumértéke 0, akkor menjünk a 8. lépésre, különben a 7. lépésre.

7. *Lépés.* Ha a $\mathbf{B}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{rj} \leqq 0$, $\forall j \in N \cap I_R$, akkor csatoljuk az r indexet az N_2 indexhalmazhoz és menjünk a 6. lépésre. Különben készítsük el és tároljuk a (2.4) alak r indexű feltételéből nyert (3.12) egyenlőtlenséget és menjünk a 6. lépésre.

8. *Lépés.* Ha $r \in I_R$, vagy $r \in I_B$ és a $\mathbf{B}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{rj} = 0$, $\forall j \in S \cap I_R$, akkor menjünk a 6. lépésre. Különben válasszunk ki egy olyan x_j, $j \in S \cap I_R$ változót bázisba belépőnek, amelyre $d_{rj} \neq 0$ teljesül. Legyen x_r a bázisból kilépő változó. Hajtsuk végre a báziscserét. Jelölje újból $\mathbf{B}$ a kapott megengedett bázist. Menjünk a 6. lépésre.

9. *Lépés.* Ha $|N \cap I_B| = m + q$, akkor menjünk a 11. lépésre. Különben állítsuk elő (2.2) azon $\bar{\mathbf{B}}$ megengedett bázisait, amelyek a $\mathbf{B}$ által meghatározott megengedett bázismegoldáshoz tartoznak. Ha van olyan $\bar{\mathbf{B}}$ és $j \in I_{\bar{R}}$, amelyekre a 3.3. lemma b)—d) feltételei teljesülnek, akkor válasszunk ki ilyen $\bar{\mathbf{B}}$ bázist és j indexet, majd menjünk a 10. lépésre. Különben menjünk a 11. lépésre.

10. *Lépés.* Ha a $\bar{\mathbf{B}}$ által meghatározott (2.4) alakban $d_{ij} \leqq 0$, $\forall i \in I_{\bar{B}}$, akkor legyen $\gamma = -\infty$ és menjünk a 13. lépésre. Különben legyen x_j a bázisba belépő változó, határozzuk meg a kilépő változót és hajtsuk végre a báziscserét. Jelölje $\mathbf{B}$ a kapott megengedett bázist. Menjünk a 2. lépésre.

11. *Lépés.* Tekintsük a $\mathbf{B}$ által meghatározott (2.4) alakot és legyen $N_1 = \{i \in N \cap I_B | d_{i0} > 0\}$. Ha $N_1 \setminus N_2 = \emptyset$, akkor menjünk a 13. lépésre. Különben állítsuk elő a (3.13), majd abból a (3.14) egyenlőtlenségeket. Csatoljuk a (3.14) feltételt (2.3)-hoz és új kiegészítő változó bevezetésével (2.2)-höz is. Legyen újból Q a (2.3)-nak eleget tevő pontok poliédere. Menjünk az 1. lépésre.

12. *Lépés.* Ha $(N \cap I_B) \setminus N_2 = \emptyset$, akkor menjünk a 13. lépésre. Különben állít-

suk elő a (3.4), majd abból a (3.5) egyenlőtlenségeket. Csatoljuk a (3.5) feltételt (2.3)-hoz és új kiegészítő változó bevezetésével (2.2)-höz is. Legyen újból Q a (2.3)-nak eleget tevő pontok poliédere. Menjünk az 1. lépésre.

13.*Lépés.* Ha $\gamma=+\infty$, akkor az (1.1) feladatnak nincs megengedett megoldása, Ha $\gamma=-\infty$, akkor (1.1) célfüggvénye alulról nem korlátos (1.1) megengedett pontjai halmazán. A $-\infty<\gamma<+\infty$ esetben γ az (1.1) feladat optimumértéke és $\mathbf{x}^*$ egy optimális megoldás. Álljunk le.

Most az (1.1) feladat megoldására javasolt 4.1. algoritmus végességét mutatjuk meg. A [6]-ban bemutatott eljárás, amelyet annak eldöntésére használunk, hogy $F_q\cap Q$ üres-e, a [6]-ban bizonyítottak alapján véges. A 2—4. lépésekben véges számú javító szimplex lépés végrehajtása után a 2. fejezet (i)—(iii) eseteinek egyikéhez jutunk. A 3. fejezetben, illetve a 4.1. algoritmus 5—8. lépéseiben leírt, extremális határoló felület keresésére használt eljárás szintén véges számú szimplex lépést igényel. Ezután a megtalált extremális határoló felület maradék pontjait a (3.5) vagy (3.14) diszjunktív felület metszéssel zárjuk ki a további keresésből, vagy pedig a (2.6) célfüggvény metszés teszi meg ezt, ha közvetlenül a 2. lépéshez jutunk vissza. Mivel a P poliédernek véges sok határoló felülete van, így véges sok metszősík feltétel (2.2)-höz és (2.3)-hoz való csatolása után az algoritmus véget ér. Ha $F_q\cap Q=\emptyset$ már a [6]-beli algoritmus első végrehajtásakor kiderül, akkor (1.1)-nek nincs megengedett megoldása. Különben vagy az bizonyosodik be, hogy $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ alulról nem korlátos a megengedett pontok halmazán vagy pedig (1.1) egy optimális megoldását kapjuk.

5. Számítástechnikai tapasztalatok

Az (1.1) feladat megoldására javasolt algoritmust véletlenszerűen generált feladatokon teszteltük. A tesztfeladatok előállítási módja hasonló az [5,14] dolgozatokban leírt és $q=0$ esetben használt eljáráshoz.

Adott n, m, k és q esetén az [5,14]-ben leírt módon állítsunk elő egy

$$\min \sum_{j=1}^{\bar n} c_j x_j$$

$$(4.1)\qquad \sum_{j=1}^{\bar n} g_{ij}x_j \leqq g_{i0}, \quad i=1,\dots,m+k,$$

$$x_j \geqq 0, \quad j=1,\dots,\bar n$$

alakú $(m+k)\times\bar n$ méretű lineáris programozási feladatot, ahol $\bar n=n-m$. Minden $\mathbf{g}_i^T=(g_{i1},\dots,g_{i\bar n})$ sorhoz, $i=1,\dots,m+k$, számítsuk ki az $f_i=\mathbf{g}_i^T\mathbf{c}/(\|\mathbf{g}_i\|\cdot\|\mathbf{c}\|)$ normált belső szorzatot, ahol $\mathbf{c}^T=(c_1,\dots,c_{\bar n})$. Minél kisebb az f_i, annál nagyobb az esélye annak, hogy a $\mathbf{g}_i^T\mathbf{x}\leqq g_{i0}$ feltétel aktív a (4.1) feladat esetleg véges optimális megoldásánál. Rendezzük sorba (4.1) sorait az f_i értékek csökkenő sorrendjében és válasszunk egy p egész számot, melyre $0\leqq p\leqq m$. Az így nyert p számú legnagyobb f_i értékkel rendelkező feltételt soroljuk a P poliéder feltételrendszerébe, majd a maradék $m+k-p$ számú feltételből válasszunk ki tetszőlegesen $m-p$ számút (pl. a legkisebb indexűeket) és soroljuk őket is P feltételrendszerébe. Ezután a megmaradt k számú feltételt soroljuk (2.3)-ba, azaz Q feltételrendszerébe. Mivel a P

4.1. TÁBLÁZAT

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
1.	8×10	8	1	I.	184	19	—	34,62
				II.	102	14	0,40	17,97
				III.	102	14	0,85	18,34
2.	8×10	8	2	I.	447	32	—	95,17
				II.	316	29	1,25	63,74
				III.	281	28	2,49	56,71
3.	9×18	9	1	I.	162	16	—	35,33
				II.	152	15	0,70	32,84
				III.	150	15	0,86	32,63
4.	9×18	9	2	I.	242	20	—	53,39
				II.	247	22	0,60	54,84
				III.	239	21	1,13	53,04
5.	10×20	10	1	I.	549	24	—	144,43
				II.	478	23	1,05	124,67
				III.	478	23	2,62	125,86
6.	10×20	10	2	I.	760	44	—	242,86
				II.	430	34	2,30	128,94
				III.	457	36	9,27	140,57
7.	15×25	10	1	I.	1922	68	—	805,09
				II.	1143	47	8,00	430,85
				III.	1134	47	13,63	433,19
8.	15×25	10	2	I.	300	22	—	89,90
				II.	227	17	1,55	66,94
				III.	227	17	1,95	67,78
9.	20×30	10	1	I.	1516	56	—	666,34
				II.	610	32	5,80	226,26
				III.	610	32	9,08	228,98
10.	20×30	10	2	I.	195	13	—	57,86
				II.	192	13	0,50	56,91
				III.	192	13	0,86	57,47

poliéder feltételrendszerében a nemnegativitási feltételek mellett egyenlőségeknek kell szerepelniük, vezessünk be $n-\bar{n}$ számú kiegészítő változót is. A P és Q most már az (1.1)-ben megkívánt alakkal rendelkezik.

Az (1.1) feladat megoldására jelen dolgozatban javasolt módszer három változatát teszteltük. Ezek a változatok csak a [6] dolgozatban bemutatott azon eljárás megvalósításában különböznek, amely a (2.2) egy olyan **B** megengedett bázisát keresi, amelyre $|N \cap I_B| \leqq m+q$ teljesül vagy bebizonyítja, hogy ilyen nem létezik. Ezen eljárás megvalósítása az itteni I., II. és III. módszernél ugyanaz, mint a [6] dolgozatban bemutatott I., II. és III. módszernél. A megvalósításukra vonatkozó részletek [6]-ban találhatók. Az (1.1) megoldására adott algoritmus többi része a I., II. és III. módszernél azonos az itt leírtakkal.

A módszereket FORTRAN programozási nyelven implementáltuk és egy koprocesszor nélküli 8 MHz-es IBM AT személyi számítógépen futtattuk. Dupla pontosságú valós számokat használtunk. Tíz feladatot teszteltünk. A 4.1. táblázat oszlopaiban a következő adatok találhatók.

a = a tesztfeladat sorszáma;
b = az **A** mátrix mérete;
c = a feladat generálása során használt p szám;
d = a q dimenzió;
e = a módszer;
f = a szimplex lépések száma;
g = az előállított metszések száma;
h = a [6]-ban ismertetett eljárás során az általános halmazlefedési feladatok kezelésére felhasznált CPU idő másodpercben;
i = a teljes CPU idő másodpercben.

A kapott számítástechnikai tapasztalatok szerint a II. és III. módszer az I. módszernél hatékonyabbnak tekinthető. Ezek a tapasztalatok megerősítik a más típusú nemkonvex programozási feladatoknál kapott hasonló észrevételeket [5, 6].

IRODALOM

[1] BALAS, E., "Disjunctive programming", *Annals of Discrete Mathematics* 5 (1979) 3—51.
[2] CABOT, A. V., "On the generalized lattice point problem and nonlinear programming", *Operations Research* 23 (1975) 565—571.
[3] CHANDRASEKARAN, R., KUMAR, S. and WAGNER, D., "Critical path under assignment constraints: An application of an extreme point mathematical programming problem", *Journal of Information and Optimization Science (India)* 1 (1980) 41—51.
[4] ECKHARDT, U., "Theorems on the dimensions of convex sets", *Linear algebra and its applications* **12** (1975) 63—76.
[5] FÜLÖP, J., "A finite procedure to generate feasible points for the extreme point mathematical programming problem", *European Journal of Operational Research* 35 (1988) 228—241.
[6] FÜLÖP, J., „Véges metszősík módszer fordított konvex feltétellel kiegészített lineáris programozási feladatok megoldására", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **14** (1989).
[7] GLOVER, F. and KLINGMAN, D., "The generalized lattice point problem", *Operations Research* 21 (1973) 141—155.
[8] KIRBY, M. J. L., LOVE, H. R. and SWARUP, K., "Extreme point mathematical programming", *Management Science* **18** (1972) 540—549.
[9] KUMAR S. and WAGNER, D., "Some algorithms for solving extreme point mathematical programming problems", *New Zealand Journal of Operations Research* 7 (1979) 127—149.
[10] MAJTHAY, A. and WHINSTON, A., "Quasi-concave minimization subject to linear constraints", *Discrete Mathematics* 9 (1974) 35—59.
[11] MATTHEIS, T. H. and RUBIN, D. S., "A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedrical sets", *Mathematics of Operations Research* 5 (1980) 167—185.
[12] PURI, M. C. and SWARUP, K., "Strong-cut enumerative procedure for extreme point mathematical programming problems", *Zeitschrift für Operations Research* **17** (1973) 97—105.
[13] SEN, S. and SHERALI, H. D., "On the convergence of cutting plane algorithms for a class of nonconvex mathematical programs", *Mathematical Programming* **31** (1985) 42—56.
[14] SEN, S. and SHERALI, H. D., "A branch and bound algorithm for extreme point mathematical programming problems", *Discrete Applied Mathematics* **11** (1985) 265—280.
[15] SHERALI, H. D. and SEN, S., "A disjunctive cutting plane algorithm for the extreme point mathematical programming problem", *Opsearch* **22** (1985) 83—94.
[16] SHERALI, H. D. and SHETTY, C. M., *Optimization with disjunctive constraints* (Springer, New York, 1980).

[17] SHERALI, H. D. and DICKEY, S. E., "An extreme-point-ranking algorithm for the extreme-point mathematical programming problem", *Computers and Operations Research* **13** (1986) 465—475.

[18] STOER, J. and WITZGALL, C., *Convexity and optimization in finite dimensions* (Springer, Berlin, 1970).

[19] TANAHASHI, T., "Cardinality constrained linear programming", Unpublished Doctoral Dissertation, Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University (Stanford, CA, 1971).

[20] TSCHERNIKOW, S. N., *Lineare Ungleichungen* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971).

(Beérkezett: 1988. május 19.)

FÜLÖP JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST, XI. KENDE U., 13—17.

ON A SPECIAL NONCONVEX PROGRAMMING PROBLEM

J. FÜLÖP

We deal with the special nonconvex program called *Generalized Lattice Point Problem.* Here, a linear function is to be minimized over such points of a polyhedron which belong to the at most q-dimensional faces of another polyhedron. We present a finite cutting plane algorithm for solving the considered problem. Computational experience is also provided.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 405—416

ERŐMŰVEK HETI TERMELÉSKIOSZTÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSA ÉS MEGBÍZHATÓSÁGI SZÁMÍTÁSOK BIZONYTALAN CSÚCSIGÉNY ESETÉN[1]

HOFFER JÁNOS, DÖRFNER PÉTER

Budapest

A dolgozat villamosenergia-rendszerek erőművi egységeinek heti termeléskiosztásával foglalkozik véletlen igény és bizonytalan csúcsigény esetén. A cikkben megmutatjuk, hogy ésszerű feltételek mellett (az igény természetét jól modellező eloszlások ilyenek) továbbra is használható a kumuláns módszer [2], [5], [7], [8] a kitűzött feladatok megoldására.

1. Bevezetés

Villamosenergia-rendszerekben az egyes energiatermelő egységek várható termelésének, a fogyasztói kiesés valószínűségének, valamint a nemszolgáltatott energia várható értékének kiszámítása igen fontos feladat mind a tervezés, mind a rendszer működtetése szempontjából.

A 80-as évek elején a számítástechnika robbanásszerű fejlődésének következtében a kumuláns módszer használata népszerűvé vált a villamosenergia-ipar megbízhatósági számításaiban, különösen a termeléskiosztás, a fogyasztói kiesés valószínűségének és a nemszolgáltatott energia várható értékének kiszámításában. Ebben a cikkben nem ismertetjük a kumuláns módszert, helyette a [2], [5], [7], [8] publikációkat ajánljuk az olvasónak. A véletlen kiesések mind hűbb szimulálásához, a számítások pontosabbá tételére az energiatermelő egységek több-blokkos reprezentációja vált általánossá ([1], [5], [7], [9]).

Az irodalomban fellelhető modellekben a terhelés eloszlását olyan eloszlással modellezik, mely lehetséges értékeit egy véges intervallumból veszi (többnyire egyenletes eloszlással) figyelmen kívül hagyva a véletlenszerűen fellépő, de nem kizárható csúcsigényeket. A csúcsigények ismerete, és a modellbe való beépítése azért nagyon fontos, mert nagymértékben befolyásolhatja az előírt biztonsági szint eléréséhez készenlétben tartandó egységek számát, és ezen keresztül a karbantartási tervre is kihatással van.

Modellünkben azt feltételezzük, hogy a terhelés csúcsértéke változhat. A terhelési intervallum két részből áll. Az első rész reprezentálja az alapterhelést, míg a második a csúcsterhelést. A terhelés mindkét részintervallumon egyenletes eloszlású, de a terhelés maximum értéke — azaz a tartamdiagram második szakaszának jobb végpontja — egy jól ismert eloszlás szerint változhat (például egyenletes, exponenciális eloszlás szerint), melynek paraméterét (paramétereit) a modellre épülő programrendszer felhasználója állíthatja be.

[1] Készült: részben az MTA Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA) támogatásával (szerződés száma: 1049).

Megmutatjuk, hogy — bár ebben a modellben a terhelési tartamdiagram egzakt formája ismeretlen — a kumuláns módszer továbbra is használható marad, minthogy ki tudjuk számolni a terhelés eloszlásának valamennyi momentumát, és ezeken keresztül az összes kumulánsokat is.

A dolgozat második fejezetében röviden ismertetjük a feladat gyakorlati hátterét és a modell konstrukciót.

A harmadik fejezetben megvizsgáljuk, hogy hogyan kezelhető a terhelés a kumuláns módszerben, ha az egy eloszláscsalád keverékeként áll elő. Ezt követően néhány olyan esetet (paraméteres eloszlás-fajtát (1., 2. példa), illetve paraméteres eloszlás-fajtát és keverő eloszlást (3. példa)) mutatunk be, amikor a terhelés momentumait ki tudjuk számítani, és ily módon a kumuláns módszer továbbra is alkalmazható marad.

A negyedik fejezetben a harmadik fejezetben kidolgozott elméletnek alkalmazását írjuk le az igény fent említett két szakaszos közelítésének esetében; valamint a magyar villamosenergia-rendszerre használt eloszlásról, és néhány számítástechnikai vonatkozásról is beszámolunk.

2. A feladat gyakorlati háttere és a modell

Villamosenergia-rendszerek alapvető feladata a villamosenergia-igények minden időpillanatban történő biztonságos kielégítése. Természetesen egyetlen rendszerben sem érhető el az ellátás teljes biztonsága, tehát még a legjobban üzemelő villamosenergia-rendszerekben is számítani kell egyes időszakokban fogyasztói kiesésre, hiszen a villamosenergia-ellátó rendszer elemeinek megbízhatósága 100%-nál kisebb, és a villamos energia nem tárolható tetszőleges mértékben.

A villamosenergia-rendszereket úgy kell üzemeltetni, hogy — a korlátozó feltételek figyelembevételével — az üzemeltetési költség minimális legyen maximális üzembiztonság mellett. Az üzemeltetés különböző feladatokat jelent a különböző időhorizontok esetén, tehát egészen más feladatot kell megoldani az operatív üzemirányításhoz, az éves gazdálkodás esetén vagy a villamosenergia-rendszer bővítésének tervezésekor.

A különböző feladatokhoz különböző modellekre van szükség, de az egyes modellek alapján meghatározható eredményeknek illeszkedniük kell egymáshoz. Az éves gazdálkodáshoz alkalmazandó modell alapján meghatározható üzemeltetési követelmények alapjelként szolgálhatnak az operatív üzemirányításhoz, ezért kellően kis időintervallumokra kell bontani az évet ahhoz, hogy az illeszkedés megfelelő legyen.

Az éves üzemeltetésnek az operatív üzemirányításnak megfelelő részletezettségű modellezése rendkívül nagy adatigényű lenne, és a modellt kezelhetetlenné tenné. Az év hetekre való felosztása és a villamosenergia-rendszer üzemének ilyen bontású minimalizációja az éves gazdálkodáshoz és az operatív üzemirányításhoz való kapcsolatban is megfelelő időintervallum.

Erőművi oldalról ehhez szükség van a villamosenergia-igények becslésére, a villamosenergia-termeléshez igénybe vehető berendezések műszaki paramétereire, a karbantartások előzetes ütemezésére, a felhasználható primér energiahordozók mennyiségére és költségére.

A villamosenergia-rendszer üzemeltetési költsége jelentősen eltérhet különböző termeléskiosztási változatok esetén. A villamosenergia-igény és a villamosenergia-szolgáltatás rövid távú egyensúlyának biztosításához szükséges legkisebb költségű termeléskiosztás meghatározása fontos feladata a rövid távú tervezést végző és a döntést előkészítő szakembernek.

A jelen munkában bemutatott számítások eredményeként a termeléskiosztás megtervezésén túl, azt is meg lehet határozni, hogy mekkora tartalék-teljesítményre van szükség az adott időszakban jelentkező maximális teljesítményigény felett a villamosenergia-igények gazdaságos, megfelelő üzembiztonság melletti kielégíthetőségéhez. Ezzel komoly segítséget kaphatunk a teljesítménygazdálkodáshoz is.

Az operatív jellegű egy-két éves távlatnál rövidebb időszakra végrehajtott tervezésnél az üzembiztonsági szint új kapacitások létesítésével történő növelése nem lehetséges. Ebben az esetben egy adott időszakra a maximális teljesítményigény és az igénybe vehető teljesítőképesség ismeretében lehet meghatározni az elérhető üzembiztonsági szintet. Szükség és lehetőség esetén csak a karbantartások átütemezésével, villamosenergia-importtal vagy szabályozott fogyasztói korlátozással növelhetjük az üzembiztonságot.

A magyar villamosenergia-rendszerben a villamosenergia-igények kielégítésében több különböző jellegű forrásra támaszkodhatunk: a szabályozható, kondenzációs blokkokra, az időnként csak részben szabályozható, gyűjtősínes erőművekben lévő, kondenzációs turbinákra (kazánszűk helyzetben nem terhelhetőek ki maximálisan), a minimális mértékben szabályozható ellennyomású turbinákra (a hőigények függvényében terhelhetőek) és vízturbinákra, továbbá az államközi megállapodás szerint fix menetrend szerint vételezett import villamos energiára.

Mindegyik berendezés, illetve berendezéscsoport üzembiztonsága statisztikai adatokból meghatározható, illetve bizonyos feltételezésekkel leírható. Egy adott időszakra az igénybe vehető (nem karbantartáson lévő vagy csak részben karbantartáson lévő) kapacitások és üzembiztonságuk, valamint a fogyasztói (csúcs)igény eloszlásának ismeretében meg akarjuk határozni, hogy

— mekkora kapacitástartalék nyújt kellő biztonságot az energiaigények kielégítésére,
— minimális termelési költségű termeléskiosztásra törekedve a szükséges (vagy előírt) megbízhatósági szint eléréséhez várhatóan mennyi villamos energiát kell termelniük az igénybe vehető forrásoknak, ha a forgó tartalékot — lehetőség szerint — egy előírt szint felett akarjuk tartani, és ezen túlmenően bizonyos források energiahozama korlátozott,
— mekkora a nemszolgáltatott energia várható értéke,
— ha az előírt biztonsági szint nem érhető el, akkor mekkora a fogyasztói kiesés valószínűsége.

Modellünkben a valós folyamatok pontosabb megközelítése érdekében az erőművi egységek rendelkezésre állását, illetve véletlen kiesését háromértékű valószínűségi változóval modellezzük.

Az egyes szabályozható erőművi egységeket az alábbi módon vesszük figyelembe. Egy egységhez három teljesítményszint tartozik: minimális teljesítmény (p_{min}), maximális teljesítmény (p_{max}), csökkentett maximális teljesítmény (p_{mix}). A csökkentett maximális teljesítményszint mindig legfeljebb akkora, mint a maximális teljesítményszint. Ennek bevezetésére azért van szükség, mert a magyar villamosenergia-rendszer egyes blokkjai nem tudják szolgáltatni teljes üzemidőben a névleges teljesítményüket, néhány blokknál viszont lehetőség van a névleges teljesítmény felett korlátozott ideig tartó túlterhelésre.

Egy-egy egység rendelkezésre állását, illetve kényszerkiesését a kiesés valószínűsége és a csökkentett maximális teljesítményszintű rendelkezésre állás valószínűsége jellemzi. A minimális teljesítményszinthez nem rendelünk valószínűséget. A maximális szint rendelkezésére állásának valószínűségét az előbb említett két valószínűségi érték komplementere adja.

Két kiemelt nemszabályozható forrást (az IMPORT és a hőszolgáltatással kapcsolt, nemszabályozható blokkokból és vízierőművekből aggregált EGYÉB) a blokkoktól eltérő módon reprezentálunk. Ezen forrásoknak több ún. *hydrocondition* jellegű állapota lehetséges (lásd a WASP [9] modelljét). Ezzel az import esetében a rendelkezésre álló teljesítmény nagyságát, a hőszolgáltatással kapcsolt villamosenergia-termelés esetében a hőszolgáltatás változásától, a vízerőművek esetében a vízjárástól függő, igénybe vehető teljesítmény nagyságát reprezentáljuk. A felhasználó határozhatja meg, hogy a tervezési héten a kiemelt források melyik állapotát vegye figyelembe a programrendszer.

A kiemelt források egy-egy állapotát három teljesítményszint írja le és a maximális szinthez tartozó rendelkezésre állási valószínűség. Az első teljesítményszint a maximális teljesítmény, a második teljesítményszint az üzemzavari, csökkent maximális teljesítmény, a harmadik teljesítményszint az állandóan figyelembe veendő minimális teljesítmény. A rendelkezésre állási valószínűséggel az IMPORT esetében a nemzetközi távvezetéki kapcsolat megbízhatóságát, az EGYÉB esetében a berendezések megbízhatóságát kívánjuk leírni.

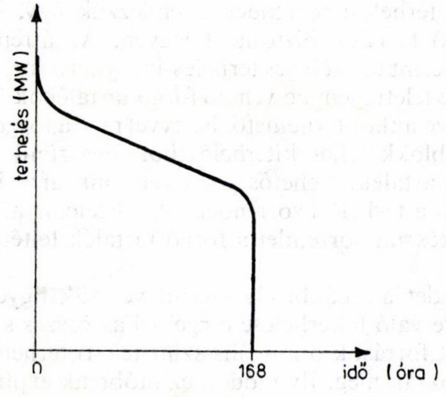
A kiemelt források teljes termelésére, illetve vételezésére vonatkozóan felső korlát feltételeket szabunk meg (GWh-ban megadva), melyet a lehető legteljesebb mértékben ki akarunk használni.

A termeléskiosztással foglalkozó nemzetközi szakirodalomban számos kísérletről számolnak be a probléma mind pontosabb, valósághűbb kezelésével kapcsolatban. Egy időintervallumban várható fogyasztói terhelést általában tartamdiagrammal adják meg. A tartamdiagram a terhelésigényeknek az adott időintervallum minden egyes órájára feltételezett determinisztikus értékeiből nagyság szerinti rendezéssel kapott függvény. Rendkívül fontos, hogy jól ismerjük és modellezzük a fogyasztói igény eloszlását a maximális terhelés környezetében. Az itt jelentkező változtatás vagy pontatlanság jelentősen befolyásolja a rendszer megbízhatóságát, a készenlétben tartandó, terhelhető egységek számát és ezen keresztül a karbantartások ütemezését is. Ezzel szemben a minimális terhelési érték körüli kisebb változtatások (pl.: simítás) csupán néhány olcsóbban termelő egység termelési tervét változtatják meg.

A terhelés lefutásoknak a csúcsterhelés környezetében előbb leírt fontossága miatt a tartamdiagramot két részre osztjuk, pontosabban a tartamdiagramból leválasztjuk a maximális terhelésnek egy kis környezetét. A megmaradó részre azt feltételezzük, hogy a tartamdiagram egy minimális és egy maximális érték között egyenes. A csúcsterhelés környezetében a terhelés eloszlását egyenletes eloszlások exponenciális eloszlás szerinti keverésével állítjuk elő, az igen nagy terhelési értékek természetének megfelelően. Ezzel reprezentáljuk azt a jelenséget, hogy ritkán, de előfordulnak kiugró terhelési értékek.

A megfigyelt terhelési tartamdiagramok formáját az 1. ábrán, az általunk használt reprezentációt a 2. ábrán mutatjuk meg.

A szabályozható erőművi egységek várható energia termelését az egységekre



1. ábra

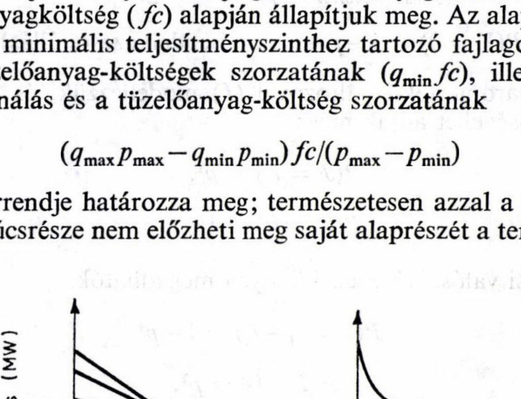
jellemző fajlagos tüzelőanyag felhasználási értékek (q_{min}, q_{max}) és a tüzelőanyag költségtényező (fc) alapján optimalizáló eljárással számoljuk ki.

Az eljárásban az egységek felterhelését két lépésben hajtjuk végre: először a minimális szintig, majd a megmaradó részt terheljük.

A szabályozható egységek gazdaságosság szerinti terhelési sorrendjét a minimális és a maximális teljesítményszint fajlagos tüzelőanyag felhasználása (q_{min}, q_{max}), valamint a tüzelőanyagköltség (fc) alapján állapítjuk meg. Az alaprészek és a csúcsrészek sorrendjét a minimális teljesítményszinthez tartozó fajlagos tüzelőanyag felhasználás és a tüzelőanyag-költségek szorzatának ($q_{min}fc$), illetve a növekmény tüzelőanyag-felhasználás és a tüzelőanyag-költség szorzatának

$$(q_{max}p_{max} - q_{min}p_{min})fc/(p_{max} - p_{min})$$

nagyság szerinti sorrendje határozza meg; természetesen azzal a megkötéssel, hogy egy adott erőmű csúcsrésze nem előzheti meg saját alaprészét a terhelési sorrendben.



2. ábra

Az így elkészített terhelési sorrendet átrendezzük úgy, hogy lehetőség szerint kellő mennyiségű forgó tartalék biztosított legyen. Az átrendezésnél a WASP [9] elveit követjük, mely szerint tetszőleges terhelés-igénynél a forgó tartalék előírt szintje a blokkok alapterhelése felett igénybe vehető forgó tartalékok összegeként biztosítható. Egy blokk csúcsrésze akkor terhelhető, ha evvel még a forgó tartalék előírt szintjét biztosítani tudjuk. A blokk teljes kiterhelésekor megszűnik az adott blokknál az igénybe vehető forgó tartalék. Lehetőséget teremtünk arra is, hogy a felhasználó bármikor módosíthassa a terhelési sorrendet (pl.: tüzelőanyag preferenciák érvényesítése), majd az így elkészült sorrendet a forgó tartalék feltétel biztosításának megfelelően átrendezze.

A terhelési sorrendet az alábbi elv szerint vesszük figyelembe. A két kiemelt forrás minimális szintre való felterhelése megelőzi az összes szabályozható egységek felterhelését. A kiemelt források minimális szint feletti terhelését a termelési-vételezési lehetőségek határozzák meg. Ily módon ez utóbbiak explicite nem jelennek meg a terhelési sorrendben.

Az erőművi egységek kényszerkiesését háromértékű valószínűségi változóval írjuk le. Ha Y egy tetszőleges egység kényszerkiesését méri, q az egység teljes kiesésének valószínűsége, p a csökkentett maximális szint rendelkezésre állásának valószínűsége, akkor

$$P(Y = p_{\max}) = q, \qquad \text{(teljes kiesés)}$$

$$P(Y = p_{\max} - p_{\text{mix}}) = p, \qquad \text{(részleges kiesés)}$$

$$P(Y = 0) = 1 - p - q \qquad \text{(rendelkezésre állás).}$$

Az IMPORT-ot háromértékű változóval (I) modellezzük, és itt a rendelkezésre állási (J) valószínűségeket adjuk meg:

$$P(J = i_1) = p^1,$$

$$P(J = i_2) = 1 - p^1,$$

ahol $i_1 > i_2 > i_3$.

Ebből a kiesési valószínűségek könnyen megadhatók.

$$P(I = i_1 - i_2) = 1 - p^1,$$

$$P(I = 0) = p^1.$$

Az importhoz hasonlóan egyetlen, három lehetséges értékű valószínűségi változóval írjuk le az egyéb villamosenergia-forrásokat tömörítő aggregált blokkot, bár sem modellezési, sem számítástechnikai akadálya nincs a több változóval történő modellezésnek.

Az EGYÉB energiaforrás kényszerkieséseit mérő valószínűségi változót E-vel jelöljük, kapacitásszintjeit: e_1, e_2, e_3-mal ($e_1 > e_2 > e_3$).

Mielőtt a terhelés eloszlásának kezelését leíró részbe belekezdenénk, megjegyezzük, hogy mi a terhelési tartamdiagramot a megszokottól eltérően használjuk, vagyis némi transzformációnak vetjük alá. Egyrészt felcseréljük a koordináta tengelyeket; a vízszintes tengelyen mérjük a terhelési értékeket, a függőleges tengelyen pedig az időt. Másrészt a függőleges tengely skálázását megváltoztatjuk oly módon, hogy a tartamfüggvény maximuma ne a figyelembe vett időszak hossza (hetes tervezésnél 168 óra), hanem 1 legyen. Az így nyert tartamdiagram (tartamfüggvény) azt fejezi ki, hogy egy megadott terhelési értéknél nagyobb terhelési értékek mekkora valószínűséggel lépnek fel.

3. A terhelés momentumainak kiszámítása véletlen csúcsterhelések esetén

Legyen X a fogyasztói igényt reprezentáló valószínűségi változó, mely mint azt az előző fejezetben is említettük az X_t (a t paramétertől függő) valószínűségi változók keverésével (PRÉKOPA [4]) áll elő. Legyen továbbá $p(t)$ az úgynevezett keverő függvény, azaz egy olyan sűrűségfüggvény, amelynek első J (J kellően nagy) momentuma létezik:

$$p(t) \geqq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^j p(t)\,dt < +\infty \quad j = 1, \ldots, J.$$

Jelöljük $LDC(x)$-szel a terhelési tartamfüggvényt, legyen $F(x)$ és $f(x)$ a terhelés eloszlásfüggvénye, illetve sűrűségfüggvénye:

$$F(x) = 1 - LDC(x),$$

$$f(x) = F'(x).$$

Tegyük fel, hogy az $LDC(x)$ terhelési tartamfüggvény az $LDC(x, t)$ t paramétertől függő tartamfüggvények keveréke (a megfelelő valószínűségi változó: X_t). Az alábbi jelöléseket bevezetve:

$$F(x, t) = 1 - LDC(x, t),$$

$$f(x, t) = dF(x, t)/dx,$$

azt kapjuk, hogy

$$LDC(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} LDC(x, t)\,p(t)\,dt,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)\,p(t)\,dt,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)\,p(t)\,dt.$$

Nyilvánvaló, hogy a terhelési tartamdiagram explicit formája függ a keverő függvénytől, és képletszerű megadására sem lehet túl sok reményünk. Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a kumuláns módszert, elegendő a terhelést reprezentáló valószínűségi változó kumulánsait ismernünk. A kumulánsok a centrális momentumokkal, azok polinomjaként állíthatók elő, ily módon a kumulánsok az egyszerű momentumok polinomjai is (KENDALL & STUART [3]). Ezért elegendő, ha a keverékként előálló terhelés momentumait elő tudjuk állítani:

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx,$$

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) p(t)\, dt\Big]\, dx.$$

A *Fubini-tétel* értelmében (RUDIN [6]) az integrálás sorrendje felcserélhető például akkor, ha az X_t változók k-adik momentuma létezik és véges $(k=1, \ldots, K)$ a t paraméter minden szóba jöhető értékére, vagyis akkor, ha a fordított integrál véges. Az általunk vizsgált esetekben ez utóbbi feltétel mindig teljesülni fog. A felcseréléssel az alábbi formulát kapjuk:

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x, t)\, dx\Big]\, dt.$$

Minthogy a belső integrál értéke éppen $M(X_t^k)$, ezért:

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) M(X_t^k)\, dt.$$

Legyen T a $p(t)$ keverő függvénynek megfelelő valószínűségi változó.

Az $M(X^k)$ mennyiségek kiszámítása nem okoz gondot, ha $M(X_t^k)$ a t változó polinomja $(k=1, \ldots, K)$, és ismerjük (ki tudjuk számítani) a T valószínűségi változó összes, szükséges momentumait (illusztrálásként lásd az 1. és 2. példát lentebb). Bevezetve az

$$M(X_t^k) = \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} t^j,$$

jelölést, azt kapjuk, hogy

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} t^j\, dt,$$

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} t^j p(t)\, dt,$$

$$M(X^k) = \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} \int_{-\infty}^{+\infty} t^j p(t)\, dt,$$

$$M(X^k) = \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} M(T^j)\, dt.$$

Illusztráló példák:

1. *Példa:* X_t normális eloszlású valószínűségi változó, t a várható értéke, vagy szórása X_t-nek. Jelöljük az X_t változó k-adik momentumát m_k-val, és s^2-tel a szórásnégyzetét. Ekkor

$$m_2 = s^2 + m_1^2,$$

és

$$m_k = m_1 m_{k-1} + s^2(k-1) m_{k-2}.$$

Felhasználva ezt a rekurziós formulát, könnyen belátható, hogy $M(X_t^k)$ polinomja a várható értéknek és a szórásnak egyaránt.

2. *Példa:* Legyen X_t egyenletes eloszlású valószínűségi változó, t a lehetséges értékek intervallumának egyik végpontja. Ha a szóban forgó intervallumot $[r, s]$ jelöli, akkor

$$M(X_t^k) = (s^{k+1} - r^{k+1})/[(s-r)(k+1)],$$

$$M(X_t^k) = (s^k + s^{k-1} r + \ldots + s r^{k-1} + r^k)/(k+1),$$

ami polinomja mind r-nek, mind s-nek.

3. *Példa:* Ebben a példában annak ellenére, hogy $M(X_t^k)$ negatív kitevős polinomja t-nek, a keverék eloszlás momentumait mégis elő tudjuk állítani. Legyen X_t t paraméterű exponenciális valószínűségi változó, és T egyenletes eloszlású az $[r, s]$ intervallumon (r, s rögzített értékek). Ekkor

$$M(X_t^k) = \frac{k!}{t^k}.$$

Amiből

$$M(X^k) = \int_r^s \frac{k!}{t^k(s-r)}\, dt,$$

$$M(X^k) = \frac{k!}{(s-r)} \int_r^s t^{-k}\, dt.$$

Az integrálást elvégezve

$$M(X^k) = \frac{\ln s - \ln r}{s-r}, \quad \text{ha} \quad k = 1,$$

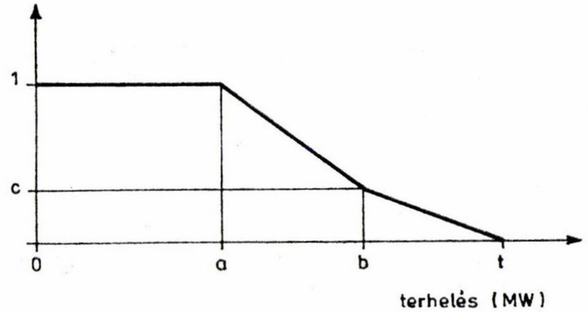
$$M(X^k) = \frac{-k!}{(k-1)(s-r)} \left(\frac{1}{s^{k-1}} - \frac{1}{r^{k-1}} \right), \quad \text{ha} \quad k > 1.$$

4. A magyar villamosenergia-rendszer terhelésének modellezése

A magyar villamosenergia-igényre jellemző terhelési tartamfüggvény kezelésére a 3. fejezetben kidolgozott eredményeket fogjuk felhasználni.

Legyen a és b annak az intervallumnak jobb és bal oldali végpontja, ahol a terhelés egyszerűen egyenletes eloszlású. Legyen c annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a terhelés nagysága nem kisebb, mint b:

$$c = P(X \geqq b).$$



3. ábra

A gyakorlati feladat természetének helyes modellezéséhez tegyük fel, hogy a keverő függvény

$$p(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t < b.$$

A t paramétertől függő $LDC(x, t)$ terhelési tartamfüggvényt az alábbi módon definiálhatjuk (lásd a 3. ábrát):

$$LDC(x, t) = 1, \quad \text{ha} \quad x < a,$$
$$LDC(x, t) = 1 + (x-a)(c-1)/(b-a), \quad \text{ha} \quad a \leqq x < b,$$
$$LDC(x, t) = c + (x-b)(-c)/(t-b), \quad \text{ha} \quad b \leqq x < t,$$
$$LDC(x, t) = 0, \quad \text{ha} \quad x \geqq t.$$

Ekkor

$$LDC(x) = 1, \quad \text{ha} \quad x < a,$$
$$LDC(x) = 1 + (x-a)(c-1)/(b-a), \quad \text{ha} \quad a \leqq x < b,$$
$$LDC(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [c + (x-b)(-c)/(t-b)]\, p(t)\, dt, \quad \text{ha} \quad x \geqq b.$$

Rögzített t értékre $f(x, t)$ a következő:

$$f(x, t) = (1-c)/(b-a), \quad \text{ha} \quad a \leqq x < b,$$
$$f(x, t) = c/(t-b), \quad \text{ha} \quad b \leqq x < t,$$
$$f(x, t) = 0 \quad \text{egyébként.}$$

Az X_t momentumai az alábbi módon fejezhetők ki:

$$M(X_t^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x, t)\, dx,$$
$$M(X_t^k) = \int_a^b x^k (1-c)/(b-a)\, dx + \int_b^t x^k c/(t-b)\, dx,$$
$$M(X_t^k) = \frac{1-c}{b-a} \int_a^b x^k\, dx + \frac{c}{t-b} \int_b^t x^k\, dx,$$
$$M(X_t^k) = (1-c)(b^{k+1} - a^{k+1})/[(k+1)(b-a)] + c(t^{k+1} - b^{k+1})/[(k+1)(t-b)],$$
$$M(X_t^k) = (1-c)(b^{k+1} - a^{k+1})/[(k+1)(b-a)] + c(t^k + t^{k-1}b + \ldots + tb^{k-1} + b^k)/(k+1).$$

Amiből a terhelés momentumai

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(X_t^k)p(t)\,dt,$$

$$M(X^k) = (1-c)(b^{k+1}-a^{k+1})/[(k+1)(b-a)]+$$

$$\frac{c}{k+1}\int_{-\infty}^{+\infty}(t^k+t^{k-1}b+\ldots+tb^{k-1}+b^k)p(t)\,dt,$$

$$M(X^k) = (1-c)(b^{k+1}-a^{k+1})/[(k+1)(b-a)]+$$

$$+\frac{c}{k+1}[M(T^k)+M(T^{k-1})b+\ldots+M(T)b^{k-1}+b^k)].$$

Modellünkben és programrendszerünkben T-t olyan d paraméterű exponenciális eloszlásnak tekintettük, mely lehetséges értékeit a $[b, +\infty]$ intervallumból veszi, azzal a meggondolással, hogy olyan eloszlás modellezi legjobban a legnagyobb terhelés nagyságát, melynél az azonos hosszúságú intervallumba esés valószínűsége monoton fogy, ha az intervallum a végtelenbe tolódik. (További realisztikus választási lehetőségnek tartjuk T számára az egyenletes eloszlást, ezt azonban még nem próbáltuk ki.)

$$p(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t < b,$$

$$p(t) = de^{-d(t-b)}, \quad \text{ha} \quad t \geqq b.$$

Ekkor

$$M(T) = b+1/d,$$

és parciális integrálással könnyen belátható a momentumokra vonatkozó

$$M(T^k) = b^k+kM(T^{k-1})/d$$

rekurziós képlet, amivel az X momentumainak kiszámítására vonatkozó rész teljessé válik.

A momentumok kiszámításának gyorsabb elvégzésére az IBM PC/AT gépre elkészült programcsomagban az alábbi rekurziót alkalmaztuk. Az

$$M(X^k) = (1-c)(b^{k+1}-a^{k+1})/[(k+1)(b-a)]+$$

$$+\frac{c}{k+1}[M(T^k)+M(T^{k-1})b+\ldots+M(T)b^{k-1}+b^k)]$$

képletben szereplő mennyiségekre vezessük be a

$$v_k = (b^k-a^k)/(b-a),$$

és a

$$w_k = M(T^{k-1})+M(T^{k-2})b+\ldots+b^{k-1}$$

jelöléseket. Ekkor

$$M(X^k) = (1-c)v_{k+1}/(k+1)+cw_{k+1}/(k+1),$$

ami az eggyel kisebb indexű v_k, w_k mennyiségekből az alábbi módon származtatható:

$$M(X^k) = (1-c)(v_k a + b^k)/(k+1) + c[M(T^k) + w_k b]/(k+1),$$

vagyis

$$v_{k+1} = v_k a + b^k,$$

$$w_{k+1} = M(T^k) + w_k b.$$

IRODALOM

[1] *Electric Generation Expansion Analysis System* 1—2. (EPRI Report EL—2561, Palo Alto, California, 1982).

[2] HOFFER, J., DÖRFNER, P., „A kumuláns módszer és használata villamosenergia-rendszerek megbízhatósági számításaiban" *Alkalmazott Matematikai Lapok* **14** (1989) 45—55.

[3] KENDALL, M., STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics, Distribution Theory, Vol. 1.* (Charles Griffin & Company Limited, London, 1977).

[4] PRÉKOPA, A., *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980).

[5] RAU, N. S., TOY, P., SCHENK, K. F., "Expected Energy Production Costing by the Method of Moments", *IEEE Trans. PAS—99* 5 (1980) 1908—1915.

[6] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill, London, 1970).

[7] SCHENK, K. F., "Cumulant Method in Production Cost Evaluation", *IAEA Lecture 30.5.6* (Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois, 1985).

[8] STREMEL, J. P., JENKINS, R. J., BABB, R. A., BAYLESS, W. D., "Production Costing Using the Cumulant Method of Representing the Equivalent Load Curve", *IEEE Trans. PAS—99* 5 (1980) 1947—1956.

[9] *Wien Automatic System Planning Package* (WASP), *User's Manual* (IAEA, Vienna, 1980).

(Beérkezett: 1988. március 3.)

HOFFER JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE
1518 BUDAPEST XI. KENDE UTCA 13—17.

DÖRFNER PÉTER
MAGYAR VILLAMOS MŰVEK TRÖSZT
1251 BUDAPEST I. VÁM UTCA 5—7. PF. 43.

RELIABILITY AND PRODUCTION COST CALCULATION WITH PEAK LOAD FORECAST UNCERTAINTY

J. HOFFER, P. DÖRFNER

In the 1980's the cumulant method became popular in reliability type algorithms for production cost evaluation, particularly in the evaluation of loss of load probability (LOLP), energy not served (ENS) and expected energy generation (EEG) of units.

In the paper we developed a probabilistic model which is able to handle the uncertainty of generating units and peak load forecast both. In order to model the load including peak load forecast uncertainty we use joint probability distributions. We show that the cumulant method remains applicable as we can compute all of the moments of the load distribution.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 417—424

KORLÁTOS DISZKRÉT VÁLTOZÓK BINÁRIS FELBONTÁSAINAK JELLEMZÉSE

BÍRÓ MIKLÓS

Budapest

Korlátos diszkrét változók bináris felbontására leginkább akkor van szükség, ha a rendelkezésre álló szoftver csak bináris változók kezelésére alkalmas. A problémára létezik egy közismert megoldás, amely azonban hátizsák feladat esetén nem fogadható el. A cikkben a probléma összes lehetséges megoldásának vizsgálatával foglalkozunk. Megmutatjuk továbbá, hogy polinomiális idő alatt eldönthető, hogy egy adott $\{a_1, ..., a_r\}$ együttható halmaz részösszegei pontosan a $\{0, 1, ..., k\}$ halmazt írják-e le vagy sem.

1. Bevezetés

Tiszta vagy vegyes diszkrét lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló számítógépes programok gyakran csak 0—1 változók kezelésére képesek. Ilyenek a LINDO és más személyi számítógépen használható programok egyes változatai. Ez elvileg nem jelent megszorítást, mert az x változó, amelynek a 0 és k számok a korlátai, közismerten helyettesíthető $u_1, u_2, ..., u_r$ bináris (0—1) változókkal a következő formula segítségével:

$$x := 2^{r-1}u_1 + 2^{r-2}u_2 + \ldots + 2u_{r-1} + u_r,$$

$$(u_1, u_2, ..., u_r \in \{0, 1\}), \tag{1.1}$$

ahol $r = \lfloor \log_2 k \rfloor + 1$. ($\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egész részét, $\lceil x \rceil$ a felső egész részét jelöli.) Ez az r szám nyilvánvalóan a helyettesítésben szereplő bináris változók számának minimuma.

A legtöbb tankönyv [3, 4, 5, 7, 8] kevéssé fordít figyelmet arra, hogy az (1.1) formula közvetlen használata esetén minden nem 0—1 változóhoz egy új feltételt is csatolni kell az eredeti feladathoz:

$$2^{r-1}u_1 + 2^{r-2}u_2 + \ldots + 2u_{r-1} + u_r \leqq k.$$

E nélkül az eredeti k felső korlát csak $k = 2^r - 1$ esetén érvényes.

Igaz ugyan, hogy a feltételek száma általában kevéssé befolyásolja a diszkrét programozási eljárások hatékonyságát, egy speciális esetben ez mégis döntő szerepet játszik. Ez a hátizsák feladat esete, amikor az egyetlen eredeti feltétel még lehetővé teszi tízezres nagyságrendű feladatok megoldását [1, 2], több feltétel esetén azonban a megoldható méret százasra csökken.

A problémára adható egyszerű megoldás, például:

$$x := au_1 + 2^{r-2}u_2 + \ldots + 2u_{r-1} + u_r, \tag{1.2}$$

ahol

$$a = k - \sum_{i=0}^{r-2} 2^i.$$

Ezenkívül MARTELLO és TOTH a [6] cikkben mellékesen megad egy rekurzív eljárást, amellyel egy (1.2)-től általában különböző együttható halmaz határozható meg. Ők az eljárást nem képletszerűen adják meg, együtthatóik azonban a következő formulával is megadhatók:

$$a_j = \lceil \lfloor k/2^{j-1} \rfloor /2 \rceil, \quad (j = 1, ..., r). \tag{1.3}$$

Ezek után a helyettesítés a következő:

$$x := a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_r u_r, \quad (u_1, u_2, ..., u_r \in \{0, 1\}).$$

Mint a fentiekből és az alábbi példákból is láthatjuk, a problémára több lehetséges megoldás létezik. E cikkben az összes lehetséges együttható halmaz jellemzésével foglalkozunk.

Nem nyilvánvaló az sem, hogy egy adott $\{a_1, ..., a_r\}$ együttható halmaz esetén polinomiális idő alatt ellenőrizhető-e, hogy ezen együtthatók részösszegei pontosan a $\{0, 1, ..., k\}$ halmazt írják-e le vagy sem. A részhalmazok száma ugyanis 2^r. Erre a problémára jó karakterizációt adunk a következő szakaszban.

Az együttható halmazok kereséséhez alsó és felső érték korlátok nyújtanak segítséget. Bebizonyítjuk továbbá, hogy jó együttható halmaz elemei között legfeljebb párok lehetnek egyenlők. Ilyen egyenlőség a megfelelő bináris változók ekvivalenciáját jelenti, ami kihasználható a diszkrét programozási módszerekben.

Az alábbiakban néhány illusztratív példát adunk jó együttható halmazokra:

$k=8$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}=$
$\{4, 2, 1, 1\}$ (mind (1.2), mind (1.3) alapján)
$\{3, 2, 2, 1\}$ (egy együttható pár egyenlő)
$\{3, 3, 1, 1\}$ (két együttható pár egyenlő)

$k=17$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}=$
$\{8, 4, 2, 2, 1\}$ ((1.2) alapján)
$\{9, 4, 2, 1, 1\}$ ((1.3) alapján)
$\{5, 5, 4, 2, 1\}$ (a legnagyobb együttható minimális)
$\{6, 6, 2, 2, 1\}$ (két együttható pár egyenlő)
$\{6, 6, 3, 1, 1\}$ (két együttható pár egyenlő)
$\{9, 3, 3, 1, 1\}$ (két együttható pár egyenlő).

2. Karakterizáció

Ebben a szakaszban $r \geq \lfloor \log_2 k \rfloor + 1$, egyébként tetszőleges pozitív egész szám lehet, hacsak jelentését külön nem korlátozzuk. Feladatunk olyan $\{a_1, ..., a_r\}$ pozitív együttható halmazok jellemzése, amelyekre teljesül a következő:

$$\{y: \exists u_1, ..., u_r \in \{0, 1\} \text{ melyekkel } a_1 u_1 + ... + a_r u_r = y\} = \{0, 1, ..., k\}. \tag{2.1}$$

Ehhez nyilvánvalóan teljesülnie kell az

$$a_1+\ldots+a_r = k$$

összefüggésnek, ezért ezt a továbbiakban felhasználhatjuk.

A következő lemmából többek között az is következik, hogy (1.3)-ban a legnagyobb együttható értéke a jó együttható halmazok körében maximális.

1. LEMMA. Egy (2.1)-et kielégítő $\{a_1, \ldots, a_r\}$ együttható halmazban egyik együttható sem haladhatja meg a $\lceil k/2 \rceil$ értéket.

Bizonyítás. Az állítás bizonyítását az általánosság megszorítása nélkül a_1-gyel végezzük el.

Tegyük fel, hogy

$$a_1 > \lceil k/2 \rceil,$$

ekkor

$$a_2+\ldots+a_r < \lfloor k/2 \rfloor,$$

mivel $a_1+\ldots+a_r=k$. Ez azonban azt jelentené, hogy a $\lceil k/2 \rceil \in \{0, 1, \ldots, k\}$ szám nem áll elő az $a_1, \ldots, a_r$ együtthatók részösszegeként, tehát az $\{a_1, \ldots, a_r\}$ együttható halmaz nem elégíti ki (2.1)-et. Ezzel feltevésünk ellentmondásra vezetett. Másrészről figyelembe véve (1.3)-at, láthatjuk, hogy az $a_1=\lceil k/2 \rceil$ érték elérhető. Q.E.D.

Az általánosság megszorítása nélkül tételezzük fel, hogy

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r > 0,$$

és vezessük be a következő jelölést:

$$A_j = k - \sum_{i=1}^{j-1} a_i = \sum_{i=j}^{r} a_i, \quad (j = 1, 2, \ldots, r+1), \tag{2.2}$$

ahol a következő megállapodással élünk:

Megállapodás. A $q<p$ esetén $\sum_{i=p}^{q} a_i=0$.

A következő lemma a jó együttható halmazok rekurzív felépíthetőségét tárgyalja.

2. LEMMA. Ha az $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r > 0$ együtthatók kielégítik (2.1)-et, akkor

$$\{y\colon \exists u_j, u_{j+1}, \ldots, u_r \in \{0, 1\} \text{ melyekkel } a_j u_j + a_{j+1} u_{j+1} + \ldots + a_r u_r = y\} =$$
$$= \{0, 1, \ldots, A_j\}, \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Bizonyítás. (Az $(r-j)$-re vonatkozó teljes indukcióval.)

Először is $A_r=a_r=1$, mivel ellenkező esetben az 1-es szám nem lenne előállítható a maradék együtthatókkal. Így az állítás $r-j=0$ esetben igaz.

Indukciós feltétel: A $\{0, 1, \ldots, A_j\}$ előállítható az $a_j \geqq a_{j+1} \geqq \ldots \geqq a_r$ számokkal.

Tételezzük fel indirekt módon, hogy az $m \in \{0, 1, \ldots, A_j, A_{j-1}\}$ szám nem állítható elő az $a_{j-1} \geqq a_j \geqq \ldots \geqq a_r$ számok részösszegeként. Ekkor a lemma alapfeltétele miatt

$$m > a_{j-1},$$

tehát

$$0 < m - a_{j-1} \leqq A_{j-1} - a_{j-1} = A_j.$$

Az indukciós feltevésből következik, hogy ekkor az $m - a_{j-1}$ szám előállítható az $a_j \geqq \ldots \geqq a_r$ számok részösszegeként. Ezek után könnyen látható, hogy m előállítható az $a_{j-1} \geqq a_j \geqq \ldots \geqq a_r$ számok részösszegeként, ami viszont ellentmond az indirekt feltevésnek. Q.E.D.

A következő állítás az 1. és a 2. lemma azonnali következménye:

3. ÁLLÍTÁS. Ha az $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r > 0$ együtthatók kielégítik (2.1)-et, akkor

$$a_j \leqq \lceil A_j/2 \rceil, \quad (j = 1, \ldots, r).$$

(*Megjegyzés.* Az

$$a_j = \lceil A_j/2 \rceil, \quad (j = 1, \ldots, r)$$

által meghatározott együttható halmaz azonos az (1.3)-ban megadottal.)

A következő tétel szerint a fenti állítás szükséges feltétele gyakorlatilag elegendő is ahhoz, hogy egy $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r$ együttható halmaz kielégítse (2.1)-et. Így megkapjuk a (2.1)-et kielégítő együttható halmazok egy jó karakterizációját.

4. TÉTEL. Az $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r > 0$ együtthatók akkor és csak akkor elégítik ki (2.1)-et, ha

1. $k = \sum_{i=1}^{r} a_i$

2. $a_j \leqq \lceil A_j/2 \rceil, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$

Bizonyítás. Az 1. feltétel szükségességét a 2. szakasz elején, (2.1) után már tárgyaltuk. A 2. feltétel szükségessége pontosan a 3. állítás tartalma. Bizonyítsuk tehát a feltételek elégségességét.

A 2. feltétel a következő alakba írható át:

$$A_j - a_j = A_{j+1} \geqq \lfloor A_j/2 \rfloor, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2.3}$$

Bizonyítsuk be $(r-j)$-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy

$$\{y\colon \exists u_j, u_{j+1}, \ldots, u_r \in \{0, 1\} \text{ melyekkel } a_j u_j + a_{j+1} u_{j+1} + \ldots + a_r u_r = y\} =$$
$$= \{0, 1, \ldots, A_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Ekkor az $(r-j) = r-1$, azaz a $j=1$ eset adja a keresett állítást, mivel az 1. feltétel alapján $A_1 = k$.

A $j=r$ esetben a 2. feltétel a következőt jelenti:

$$a_r \leqq \lceil A_r/2 \rceil = \lceil a_r/2 \rceil.$$

Ez utóbbi relációt azonban csak egyetlen pozitív egész szám elégíti ki, mégpedig:

$$a_r = 1.$$

Ezzel tehát beláttuk az állítást az $(r-j)=0$ esetben. Azt is láttuk továbbá, hogy $(a_r = 1)$-et nem kell külön kikötnünk, mert ez következik a 2. feltételből.

Tegyük fel, hogy j-re igaz a fenti, indukcióval bizonyítandó állítás; megmutatjuk, hogy akkor $(j-1)$-re is igaz. Ehhez először lássuk be, hogy minden

$$m\in\{0, 1, \dots, \lfloor A_{j-1}/2\rfloor\}$$

egész szám előállítható az $a_{j-1}\geqq a_j\geqq\dots\geqq a_r$ számok segítségével. Ez, sőt már az $a_j\geqq a_{j+1}\geqq\dots\geqq a_r$ számokkal történő előállíthatóság is az induktív feltevés miatt igaz, mivel (2.3) alkalmazásával a következő reláció érvényes:

$$A_j \geqq \lfloor A_{j-1}/2\rfloor.$$

Most vizsgáljuk meg a $p\in\{\lceil A_{j-1}/2\rceil, \dots, A_{j-1}\}$ egész számokat. A p szám nyilván felírható

$$p = A_{j-1}-q$$

alakban, ahol

$$q\in\{0, 1, \dots, \lfloor A_{j-1}/2\rfloor\}.$$

Tehát p előállítható az $a_j\geqq a_{j+1}\geqq\dots\geqq a_r$ számok q előállításában szereplő részhalmazának elhagyásával az

$$A_{j-1} = \sum_{i=j-1}^{r} a_i$$

összegből. Ezzel tehát beláttuk, hogy

$$\{y\colon \exists u_{j-1}, u_j, \dots, u_r\in\{0, 1\} \text{ melyekkel } a_{j-1}u_{j-1}+a_ju_j+\dots+a_ru_r = y\} = \{0, 1, \dots, A_{j-1}\}.$$

Q.E.D.

A következő előállítás illusztrálja a 4. tétel érvényességét az $r>\lfloor\log_2 k\rfloor+1$ esetekre is:

$$15 = 5+4+3+2+1.$$

Természetesen merül fel a gondolat, hogy az a_j számok nem csak felülről, hanem alulról is korlátozottak. Ehhez ad megközelítést a következő lemma és következménye. Az alábbi állítások már csak $r=\lfloor\log_2 k\rfloor+1$ esetén érvényesek.

5. Lemma. Legyen $r=\lfloor\log_2 k\rfloor+1$. Ha az $a_1\geqq a_2\geqq\dots\geqq a_r>0$ együtthatók kielégítik (2.1)-et, akkor

$$\lfloor\log_2 A_j\rfloor = r-j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Bizonyítás. A feltevés következtében $j=1$ esetén

$$\lfloor\log_2 A_1\rfloor = \lfloor\log_2 k\rfloor = r-1$$

teljesül. A 4. tétel bizonyításánál láttuk, hogy $a_r=A_r=1$, ezért $j=r$ esetén

$$\lfloor\log_2 A_r\rfloor = \lfloor\log_2 1\rfloor = 0.$$

Most lássuk be, hogy

$$\lfloor\log_2 A_j\rfloor \leqq \lfloor\log_2 A_{j+1}\rfloor+1. \tag{2.4}$$

Ehhez felhasználjuk a (2.3) egyenlőtlenséget, külön vizsgálva az A_j páros és páratlan eseteket. Ha A_j páros, akkor (2.3) alapján

$$2A_{j+1} \geqq A_j,$$

amiből

$$\lfloor \log_2 2A_{j+1} \rfloor \geqq \lfloor \log_2 A_j \rfloor.$$

Ha A_j páratlan, akkor (2.3) alapján

$$2A_{j+1} \geqq A_j - 1,$$

amiből A_j páratlanságát is felhasználva következik, hogy

$$\lfloor \log_2 2A_{j+1} \rfloor \geqq \lfloor \log_2 (A_j - 1) \rfloor = \lfloor \log_2 A_j \rfloor.$$

Így (2.4) mindkét esetben következik. De ekkor, a bizonyítás elején belátott egyenlőségeket is felhasználva

$$r-1 = \lfloor \log_2 A_1 \rfloor \leqq \lfloor \log_2 A_2 \rfloor + 1 \leqq \ldots \leqq \lfloor \log_2 A_r \rfloor + r - 1 = r-1,$$

tehát minden egyenlőtlenséggel teljesül, és

$$\lfloor \log_2 A_j \rfloor + j - 1 = r - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

ami nyilvánvalóan ekvivalens a lemma állításával.
Q.E.D.

6. KÖVETKEZMÉNY. Az 5. lemma feltevései esetén

$$2^{r-j} \leqq A_j < 2^{r-j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Bizonyítás. Az 5. lemma alapján

$$r-j \leqq \log_2 A_j < r-j+1,$$

ahonnan a lemma állítása nyilvánvaló.
Q.E.D.

Az alábbi következmény mutatja az a_j számok alsó korlátozottságát.

7. KÖVETKEZMÉNY. Az 5. lemma feltevései esetén

$$A_j - 2^{r-j} < a_j \leqq A_j - 2^{r-j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Bizonyítás. A 6. következményben j helyett $(j+1)$-et írva

$$2^{r-j-1} \leqq A_{j+1} = A_j - a_j < 2^{r-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Átrendezéssel kapjuk az állítást.
Q.E.D.

A következő tétel, amelyet a bevezetésben már jeleztünk, igazolja, hogy jó együttható halmaz elemei között legfeljebb párok lehetnek egyenlők.

8. TÉTEL. Legyen $r = \lfloor \log_2 k \rfloor + 1$. Ha az $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r > 0$ együtthatók kielégítik (2.1)-et, és

$$a_j = a_{j+1}$$

valamely $j \in \{1, \ldots, r-2\}$ indexre, akkor

$$a_{j+2} < a_{j+1}.$$

Bizonyítás. A 4. tétel 2. feltételéből kiindulva

$$a_{j+2} \leqq \lceil A_{j+2}/2 \rceil = \lceil (A_j - a_j - a_{j+1})/2 \rceil = \lceil (A_j - 2a_j)/2 \rceil = \lceil A_j/2 \rceil - a_j. \tag{2.5}$$

A 6. következmény bal oldali egyenlőtlensége alapján

$$\lfloor A_j/2 \rfloor \geqq \lfloor 2^{r-j}/2 \rfloor = 2^{r-j-1}.$$

Innen

$$\lceil A_j/2 \rceil = A_j - \lfloor A_j/2 \rfloor \leqq A_j - 2^{r-j-1}.$$

Tehát (2.5)-öt folytatva

$$\lceil A_j/2 \rceil - a_j \leqq A_j - a_j - 2^{r-j-1} = A_{j+1} - 2^{r-(j+1)} < a_{j+1}.$$

A fenti utolsó egyenlőtlenség a 7. következmény bal oldalán j helyett $(j+1)$ írásával adódik.
Q.E.D.

3. Az eredmények felhasználása

A karakterizáció felhasználása két irányban történhet. Egyrészt a 4. tétel segítségével gyakorlatilag egy rendezés árán $O(r \log_2 r)$ idő alatt eldönthető, hogy egy adott $\{a_1, \ldots, a_r\}$ együttható halmaz esetén ezen együtthatók részösszegei pontosan a $\{0, 1, \ldots, k\}$ halmazt írják-e le vagy sem.

Másrészt adott k számhoz a 4., 7., 8. eredmények felhasználásával megkonstruálható az összes olyan $\{a_1, \ldots, a_r\}$ együttható halmaz, amelynek részösszegei pontosan a $\{0, 1, \ldots, k\}$ halmazt írják le. Ezekből tovább lehet válogatni a pillanatnyi célnak megfelelően. Az együttható halmazok előállítása számítógéppel történhet.

Végül köszönetet mondok HUJTER MIHÁLYnak és VÍZVÁRI BÉLÁnak értékes megjegyzéseikért, valamint KÉRI GERZSONnak a kézirat gondos áttanulmányozásáért és a bizonyítások áttekinthetőségét lényegesen növelő javaslataiért.

IRODALOM

[1] BÍRÓ, M., "Efficient Method Applying Incomplete Ordering for Solving the Binary Knapsack Problem", in: *Optimization Techniques*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 23 Eds. K. Iracki, M. Malanowski, S. Walukiewicz (Springer-Verlag, 1980) 160—169.
[2] BÍRÓ, M., „A bináris hátizsák feladat", *Alkalmazott Matematikai Lapok* 9 (1983) 113—136.
[3] FORGÓ, F., *Nemkonvex és diszkrét programozás* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1978).
[4] GARFINKEL, R. S., NEMHAUSER, G. L., *Integer Programming* (John Wiley & Sons, 1972).
[5] KOVÁCS, L. B., *Combinatorial Methods of Discrete Programming*, Mathematical Methods of Operations Research Volume 2 (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980).
[6] MARTELLO, S. and TOTH, P., "The 0—1 Knapsack Problem", in: *Combinatorial Optimization* Eds. N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth, C. Sandi (John Wiley & Sons, 1979).
[7] TAHA, H. A., *Integer Programming* (Academic Press, 1975).
[8] ZIONTS, S., *Linear and Integer Programming* (Prentice Hall, Inc., 1974).

(Beérkezett: 1988. augusztus 4.)

BÍRÓ MIKLÓS
MTA SZTAKI
1111 BUDAPEST, KENDE U. 13—17.

CHARACTERIZATION OF THE BINARY DECOMPOSITIONS OF BOUNDED INTEGER VARIABLES

M. BÍRÓ

If a mathematical programming software at hand is only able to handle binary variables then any bounded integer variables must be decomposed into binary ones. There is a well-known technique for this task, which is nevertheless not acceptable in the case of the knapsack problem. In this paper we investigate the set of all possible solutions to this problem. We show furthermore that the problem of deciding if the partial sums of a set of integers $\{a_1, \ldots, a_r\}$ describe exactly the set of integers $\{0, 1, \ldots, k\}$ is polynomially solvable.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 425—448

A PIVOT TECHNIKA SZEREPE A LINEÁRIS ALGEBRA NÉHÁNY ALAPVETŐ TÉTELÉNEK BIZONYÍTÁSÁBAN

KLAFSZKY EMIL TERLAKY TAMÁS

Miskolc Budapest

A dolgozatban konstruktív bizonyítást adunk a lineáris algebra néhány klasszikus tételére *(Steinitz, mátrix rang tétel, Rouche—Kronecker, Farkas, Weyl, Minkowski.)*
A konstrukció a pivot technikán alapul, alapvető eleme a pivot elem megválasztása. A pivot elem választásnál a BLAND [2]-féle minimális index szabály játssza a döntő szerepet.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban konstruktív bizonyítást adunk a lineáris algebra néhány klasszikus tételére. *(Steinitz, mátrix rang tétel, Rouche—Kronecker, Farkas, Weyl, Minkowski.)*

A bizonyítások a pivot technikán alapulnak. *A Steinitz-tétel* konstruktív bizonyítását a pivot technika szokásosnál általánosabb — generáló táblán való — értelmezése tette lehetővé.

A *Farkas, Weyl, Minkowski tételek* bizonyításában lényegileg a BLAND [2] által közölt minimális index szabályt (illetve annak változatait) használjuk fel. Alapvetően új azonban a 4.1. tétel, mely egységes formában, általánosan tartalmazza a lineáris egyenlőtlenségek alternatíva tételeit. A tétel, és a bizonyításához közölt algoritmus kombinatorikus struktúrákon (pl. irányított matroid) is alkalmazható.

Tárgyalásmódunkban a BALINSKI—TUCKER [1] által bevezetett szimbolikákat és GALE [4] jelöléstechnikáját használjuk. Így a 0, $+$, $-$, $\oplus$, $\ominus$ szimbólumokkal rendre a zérus, pozitív, negatív, nem negatív, nem pozitív számokat jelöljük. A mátrixokat nagy latin, a vektorokat kis latin betűkkel jelöljük, valamint a vektorok koordinátáit és a skalárokat a megfelelő görög betűkkel jelöljük. Az index halmazokat I, J-vel jelöljük (a megfelelő indexekkel ellátva), valamint $\|J\|$ jelenti a J halmaz elemeinek számát.

2. A pivot technika

Ebben a fejezetben a pivotálás technikáját mutatjuk be. Majd ezen technika segítségével bizonyítjuk a lineáris algebra alaptételét, az ún. *Steinitz-tételt,* valamint a mátrix rang tételt. Végezetül megmutatjuk a pivot tábla ortogonalitási tulajdonságát, amely a további fejezetekben fontos eszközként szerepel.

A lineáris algebra alapvető fogalma a lineáris kombináció és a generáló vektorrendszer; az alábbiakban ezeket definiáljuk.

Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ azonos dimenziójú tetszőleges vektorok. Jelölje.

$$J := \{1, \ldots, n\}$$

az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorok indexeinek halmazát.

2.1. *Definíció.* Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektor előáll az $\{\mathbf{a}_j | j \in J\}$ vektorok *lineáris kombinációjaként,* ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számok, hogy

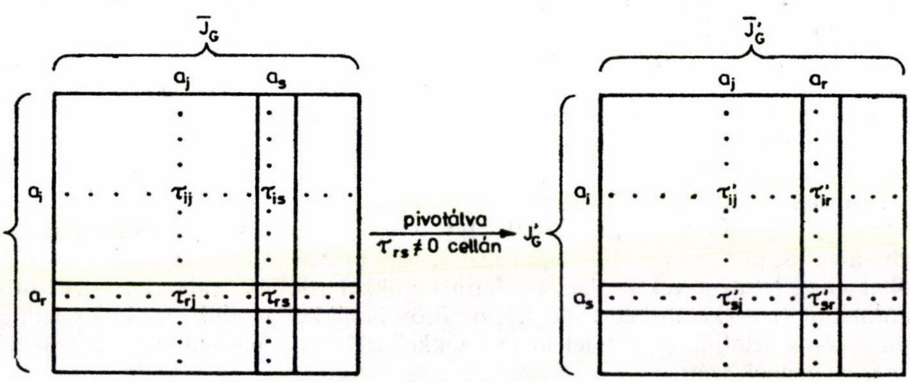
$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j. \quad \square$$

2.2. *Definíció.* Az $\{\mathbf{a}_j | j \in J_G\}$ $(J_G \subset J)$ vektor halmazt a *J generáló rendszerének* nevezzük, ha minden $\{\mathbf{a}_j | j \in \bar{J}_G\}$ $(\bar{J}_G = J \setminus J_G)$ vektor előáll az $\{\mathbf{a}_j | j \in J_G\}$ vektorok lineáris kombinációjaként. $\square$

Tekintsünk egy $J_G \subset J$ generáló rendszert, és állítsuk elő a generáló rendszer lineáris kombinációjaként a generáló rendszeren kívüli vektorokat. Jelölje τ_{ij} az $\mathbf{a}_i$, $i \in J_G$ vektor együtthatóját az $\mathbf{a}_j$, $j \in \bar{J}_G$ vektor előállításában, azaz

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \in J_G} \tau_{ij} \mathbf{a}_i, \quad \forall j \in \bar{J}_G.$$

Ezeket az együtthatókat célszerűen az alábbi táblázatba foglalhatjuk (1. ábra):



1. ábra

Megjegyezzük, hogy valamely J_G esetén esetleg többféle τ_{ij} előállítás is van.

Megmutatjuk, hogy egy generálórendszerben lévő vektort hogyan lehet kicserélni egy, a generáló rendszeren kívüli vektorral; a módszert tétel formájában mondjuk ki.

2.1. TÉTEL (pivot technika). Ha $\tau_{rs} \neq 0$, akkor a J_G generáló rendszerben lévő $\mathbf{a}_r$ vektort kicserélhetjük a generáló rendszerben nem szereplő $\mathbf{a}_s$ $(s \in \bar{J}_G)$ vektorral az alábbi módon:

(2.1) $$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{rj}\tau_{is}}{\tau_{rs}} \qquad i \in J'_G, \quad i \neq s; \quad j \in \bar{J}'_G \quad j \neq r$$

(2.2) $$\tau'_{sj} = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} \qquad j \in \bar{J}'_G, \quad j \neq r$$

(2.3) $$\tau'_{ir} = -\frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \qquad i \in J'_G, \quad i \neq s$$

(2.4) $$\tau'_{sr} = \frac{1}{\tau_{rs}}$$

ahol $J'_G = J_G \setminus \{r\} \cup \{s\}$ az új generáló rendszer és τ'_{ij} az előállító táblázat.

Bizonyítás. A tábla definíciójából:

$$\mathbf{a}_s = \tau_{rs}\mathbf{a}_r + \sum_{\substack{i \in J_G \\ i \neq r}} \tau_{is}\mathbf{a}_i,$$

melyből

(2.5) $$\mathbf{a}_r = \frac{1}{\tau_{rs}}\mathbf{a}_s + \sum_{\substack{i \in J'_G \\ i \neq s}} \left(-\frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}}\right)\mathbf{a}_i.$$

Ez a (2.3) és (2.4) képletek helyességét igazolja. Szintén a tábla definíciójából:

$$\mathbf{a}_j = \tau_{rj}\mathbf{a}_r + \sum_{\substack{i \in J_G \\ i \neq r}} \tau_{ij}\mathbf{a}_i \qquad j \in \bar{J}_G, \quad j \neq s.$$

Ebből (2.5) összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_j = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}}\mathbf{a}_s + \sum_{\substack{i \in J'_G \\ i \neq s}} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{rj}\tau_{is}}{\tau_{rs}}\right)\mathbf{a}_i \qquad j \in \bar{J}'_G, \quad j \neq r,$$

amely (2.1) és (2.2) összefüggések helyességét igazolja; s így azt is megmutattuk, hogy az új $\{\mathbf{a}_j | j \in J'_G\}$ vektor halmaz is generáló rendszere az $\{\mathbf{a}_j | j \in J\}$ halmaznak.

A τ_{rs} tábla elemet *pivot elemnek*, az $r \in J_G$ sort *pivot sornak*, az $s \in \bar{J}_G$ oszlopot *pivot oszlopnak* és magát a (2.1)—(2.4) transzformációt *pivot technikának* nevezzük.

Megjegyzés. A tábla kiegészíthető a generáló rendszer vektoraihoz tartozó oszlopvektorokkal, amelyek legyenek egységvektorok, azaz a generáló rendszer elemeit triviális módon állítjuk elő. Ezt a táblát teljes táblának, míg az eredetit *tömör* vagy *rövid* táblának nevezzük. A lineáris algebra egyik legfontosabb fogalma a vektorok lineáris függetlensége, amelyet a következőkben definiálunk.

2.3. *Definíció.* Az $\{\mathbf{a}_j | j \in J\}$, legalább két elemből álló, vektorrendszert (azaz $\|J\| \geqq 2$) *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha nincs közöttük olyan $\mathbf{a}_r$, $r \in J$ vektor, amely előáll a többiek (azaz $\{\mathbf{a}_j | j \in J, j \neq r\}$ vektorok) lineáris kombinációjaként. □

A definícióból nyilvánvaló, hogy a zérus vektor nem lehet a független vektorhalmazban.

Az alábbi lemma a lineáris függetlenséget karakterizálja.

2.1. LEMMA (karakterizálás). Az $\{\mathbf{a}_j | j \in J\}$ legalább két elemből álló vektorrendszer akkor és csak akkor független, hogyha előállít valamely $\mathbf{b}$ vektort lineáris kombinációként, akkor azt egyértelműen állítja elő.

Bizonyítás. a) Először megmutatjuk, hogy ha többféleképp állít elő valamely $\mathbf{b}$ vektort, akkor nem függetlenek. Ugyanis legyen két előállítás:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{a}_j$$

és tegyük fel, hogy $\lambda_1 \neq \mu_1$.

Ekkor a kettőből kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_1 = -\sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_1 - \mu_1} \mathbf{a}_j$$

azaz nem függetlenek.

b) Fordítva megmutatjuk, hogy ha nem függetlenek és előállítják a $\mathbf{b}$ vektort, akkor azt többféleképp is előállítják.

Ugyanis legyen

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j$$

és tegyük fel, hogy

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{j=2}^{n} \mu_j \mathbf{a}_j.$$

Ekkor a kettőből kapjuk, hogy

$$\mathbf{b} = (\lambda_1 + 1)\mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j - \mu_j)\mathbf{a}_j.$$

Minthogy $\lambda_1 \neq \lambda_1 + 1$, így kaptunk két előállítást.

Az általánosítás érdekében célszerű az egy elemből álló vektorhalmazra is definiálni a függetlenséget, úgy, hogy karakterizáló lemmánk érvényben maradjon.

2.4. *Definíció.* Az egy elemből álló vektorhalmazt *függetlennek* nevezzük, ha az nem a zérus vektor. □

Így most már tetszőleges elemszámú vektorhalmazra karakterizálhatjuk a függetlenségét, amely a lemma következménye.

KÖVETKEZMÉNY (a lineáris függetlenség karakterizálása): Az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorhalmaz akkor és csak akkor lineárisan független, ha a

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$$

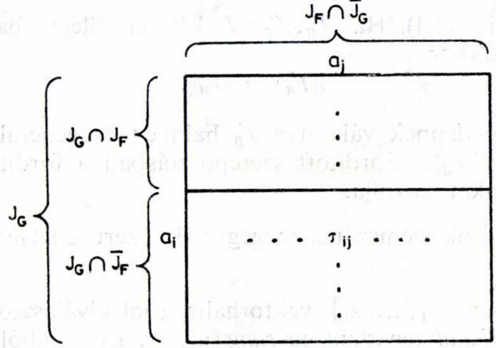
előállításból következik, hogy $\lambda_j = 0 \ \forall j$-re.

A pivot technika segítségével könnyen nyerjük a lineáris algebra két fontos fogalma — a generáló rendszer és a lineárisan független rendszer — közötti kapcsolatot, melyet *Steinitz-tételként* szokásos megfogalmazni.

2.2. TÉTEL (STEINITZ). Ha $J_F \subset J$ egy független és $J_G \subset J$ egy generáló rendszer index halmaza, akkor

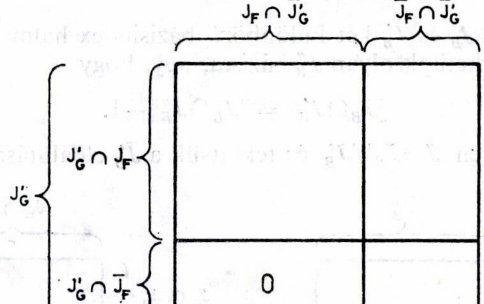
$$\|J_F\| \leqq \|J_G\|.$$

Bizonyítás. Legyen $J = J_G \cup J_F$. Tegyük fel, indirekte, hogy $\|J_F\| > \|J_G\|$. Vegyük az $\{\mathbf{a}_j | j \in \bar{J}_G\}$ vektorok egy előállítását az $\{\mathbf{a}_j | j \in J_G\}$ vektorokkal, azaz tekintsük az alábbi rövid táblát:



2. ábra

Pivotáljunk a $\tau_{ij} \neq 0$ helyen, ha $i \in J_G \cap \bar{J}_F$ és $j \in \bar{J}_G \cap J_F$. Hajtsuk ezt a pivotálást végre mindaddig, ameddig csak lehet; akkor az alábbi táblához jutunk:



3. ábra

Ha $i \in J'_G \cap \bar{J}_F$ és $j \in \bar{J}'_G \cap J_F$, akkor a konstrukció miatt $\tau'_{ij} = 0$.

Az alábbi észrevétel sorozattal ellentmondásra jutunk:

1° $\bar{J}'_G \cap J_F \neq \emptyset$; mert ha üres lenne, akkor az összes J_F-beli vektor a generálók között lenne, de a $\|J_F\| > \|J_G\|$ feltevés miatt ez nem lehet.

2° $J'_G \cap J_F \neq \emptyset$; mert ha üres lenne — kihasználva 1°-et —, akkor a függetlenek között lenne a zérusvektor, ami nem lehetséges.

3° Kihasználva 1° és 2°-t akkor a $\bar{J}'_G \cap J_F$ indexekhez tartozó vektorokat a $J'_G \cap J_F$ indexekhez tartozó vektorokkal állítottuk elő, ami ellentmond a J_F halmaz függetlenségének.

Tehát indirekt feltevésünk hibás, azaz $\|J_F\| \leqq \|J_G\|$ kell, hogy teljesüljön.

A továbbiakban fontos szerepet játszanak azon generáló rendszerek, amelyek függetlenek is; ezek elnevezésére új fogalmat vezettek be.

2.4. *Definíció.* Ha az $\{\mathbf{a}_j \mid j \in J_B \subset J\}$ vektorrendszer lineárisan független és J generáló rendszere, akkor a J *bázisának* nevezzük. □

A *Steinitz-tételből* a bázisrendszerre az alábbi alapvető megállapítás nyerhető, amely erejénél fogva magával a *Steinitz-tétellel* ekvivalens.

2.3. TÉTEL (bázis tétel). Ha $J'_B, J''_B \subset J$ két tetszőleges bázisa a J index halmazú vektoroknak, akkor

$$\|J'_B\| = \|J''_B\|.$$

Bizonyítás. Függetlennek választva J'_B halmazt és generálónak a J''_B halmazt kapjuk, hogy $\|J'_B\| \leqq \|J''_B\|$. Fordított szereposztásban a fordított egyenlőtlenséget kapjuk, ami állításunkat igazolja.

Minthogy a bázisok elemszáma megegyezik, ezért lehetséges a vektorrendszer rangját definiálni.

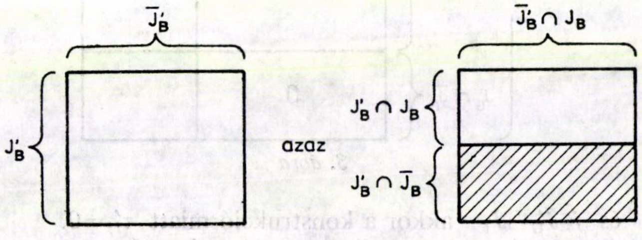
2.5. *Definíció.* Az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorhalmazból kiválasztott bázis elemszámát a vektorhalmaz *rangjának* nevezzük és *rang* $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ szimbólummal jelöljük. □

A 2.1. lemma biztosítja, hogy a báziselőállítás egyértelmű, de ezenfelül még egy másik fontos tulajdonsággal is rendelkezik, azzal, hogy két teszőleges bázistábla pivotálások sorozatával egymásba átvihető. Ezt fejezi ki az alábbi lemma, amely egyúttal eljárást is ad erre.

2.2. LEMMA. Ha J_B és J'_B két különböző bázisindex halmaz, akkor J'_B bázisról egy pivotálással áttérhetünk olyan J''_B bázisra, úgy, hogy

$$\|J_B \cap J'_B\| = \|J_B \cap J''_B\| - 1.$$

Bizonyítás. Legyen $J = J_B \cup J'_B$ és tekintsük a $\bar{J}'_B$ előállítását J'_B-vel:



4. ábra

A 4. ábrán a vonalkázott rész nem állhat csak zérus elemekből, mert akkor J_B indexű vektorok egy részével a többi előállítható lenne, de ez ellentmond a bázis definíciójának. Tehát a vonalkázott részben választva egy nem zérus pivot elemet olyan J''_B bázisra térhetünk át, melyet a lemma megkövetel.

A következőkben, hogy a tárgyalást megkönnyítsük, szemléletesebbé tegyük, egy geometriai fogalmat vezetünk be.

2.6. *Definíció.* Az alábbi halmazt

$$\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{a}_j, \ \forall \xi_j \in R, \ j = 1, \ldots, n\}$$

az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált *altérnek* nevezzük. □

A definícióból azonnal adódnak a lineáris alterek alábbi tulajdonságai:

1° $\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ha $\lambda \in R$ és $\lambda \neq 0$.

2° $\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ahol $1 \leqq k \leqq n$.

Ezen tulajdonságokból pedig nyilvánvaló, hogy az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorhalmaz és az általa generált $\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ lineáris altér rangja megegyezik, azaz:

$$rang\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = rang\,\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Megjegyzés a pivot technikához. Amennyiben a teljes (egységvektorokkal kiegészített) pivot táblát használjuk, akkor a pivotálás a következő verbális formába fogalmazható:

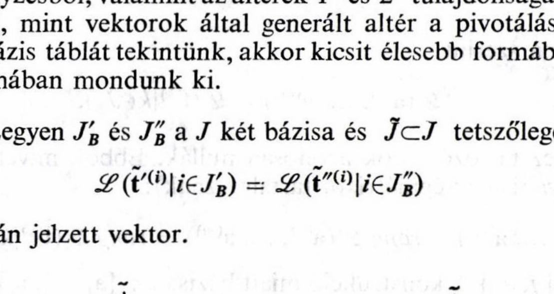
A pivot elem sorát osszuk el a $\tau_{rs} \neq 0$ pivot elemmel, majd a pivot elem sorának annyiszorosát adjuk a tábla többi sorához, hogy a pivot elem oszlopának többi eleme zérus legyen.

A fenti megjegyzésből, valamint az alterek 1° és 2° tulajdonságából nyilvánvaló, hogy a tábla sorai, mint vektorok által generált altér a pivotálás folyamán nem változik. Sőt, ha bázis táblát tekintünk, akkor kicsit élesebb formában is igaz, amelyet az alábbi lemmában mondunk ki.

2.3. Lemma. Legyen J'_B és J''_B a J két bázisa és $\tilde{J} \subset J$ tetszőleges. Akkor

$$\mathscr{L}(\tilde{\mathbf{t}}'^{(i)} \mid i \in J'_B) = \mathscr{L}(\tilde{\mathbf{t}}''^{(i)} \mid i \in J''_B)$$

ahol, $\tilde{\mathbf{t}}'^{(i)}$ az 5. ábrán jelzett vektor.



5. ábra

Bizonyítás. Felhasználva a lemma előtt tett megjegyzésünket, valamint azt a tényt (2.2. lemma), hogy a bázistáblák pivotálással egymásba átvihetők, a lemma állítása nyilvánvaló.

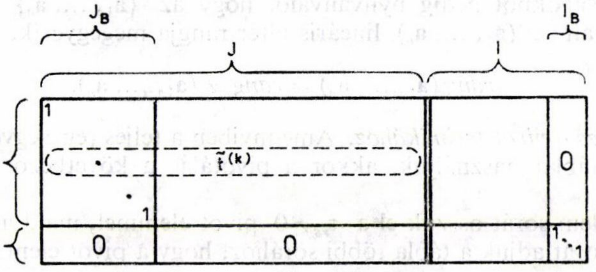
A pivot tábla fenti, 2.3. lemmában kimondott tulajdonságát felhasználva bizonyítjuk a mátrix rang tételt.

2.4. TÉTEL (mátrix rang tétel). Tetszőleges $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)=(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)})$ mátrix esetén

$$rang\,(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = rang\,(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}),$$

ahol az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ és sorvektorai $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}$.

Bizonyítás. Az $\mathbf{A}$ mátrixot az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ vektorokhoz tartozó (rövid) pivot táblaként is felfoghatjuk, ahol $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ egységvektorok adják a bázist. Pivotálással hozzunk annyi $\mathbf{a}_j$ vektort a bázisba, amennyit csak tudunk. Így az alábbi táblához jutunk (J, J_B az $\mathbf{a}_j$, míg I, I_B az $\mathbf{e}_i$ vektorok megfelelő indexeit tartalmazza):



6. ábra

Ekkor 2.3. lemma szerint

$$\mathscr{L}(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}) = \mathscr{L}(\tilde{\mathbf{t}}^{(k)} | k \in J_B),$$

ugyanis az I_B-hez tartozó sorok azonosan nullák. Ebből, mivel a $\tilde{\mathbf{t}}^{(k)}$ sorvektorok függetlenek (ugyanis egységmátrixot tartalmaznak):

$$rang\,(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}) = rang\,\mathscr{L}(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(m)}) = rang\,\mathscr{L}(\tilde{\mathbf{t}}^{(k)} | k \in J_B) = \|J_B\|.$$

Másrészt az $\{\mathbf{a}_j | j \in J_B\}$ a konstrukció miatt bázisa az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorhalmaznak, és így a rang definíciója miatt

$$rang\,\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \|J_B\|.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A következőkben a pivot tábla ortogonalitási tulajdonságát adjuk. Ehhez azonban szükséges az ortogonalitás fogalmát definiálnunk.

2.7. *Definíció.* Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a} \in R^{(m)}$ vektor *ortogonális* a $\mathbf{b} \in R^{(m)}$ vektorra, és jelöljük $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ (ahol $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i$ a skaláris szorzat). □

Ha valamely $\mathbf{y}$ vektor merőleges egy $\mathscr{L}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ altér minden generáló vektorára (akkor nyilvánvalóan minden vektorára is merőleges), akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ vektor merőleges az $\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ altérre és ezt $\mathbf{y} \perp \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ szimbólummal jelöljük.

A pivot táblán vezessük be a következő n dimenziós vektorokat:

$$t^{(i)} = (\tau_k^{(i)})_{k=1}^{n} = \left\{\begin{matrix} \tau_{ik}, & k\in \bar{J}_B, & \\ 1, & k=i, & \\ 0, & k\in J_B, & k\neq i \end{matrix}\right\}, \quad i\in J_B \text{ esetén}$$

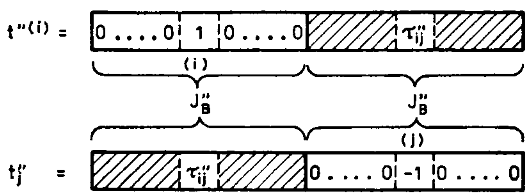
és

$$t_j = (\tau_{(j)k})_{k=1}^{n} = \left\{\begin{matrix} \tau_{kj}, & k\in J_B & \\ -1, & k=j & \\ 0, & k\in \bar{J}_B, & k\neq j \end{matrix}\right\}, \quad j\in \bar{J}_B \text{ esetén.}$$

2.5. TÉTEL (ortogonalitás). Tetszőleges, J index halmazhoz tartozó, J'_B, J''_B esetén

$$t'^{(i)}\cdot t''_j = 0, \quad \forall i\in J'_B \text{ és } \forall j\in \bar{J}''_B \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy egy táblán belül igaz, vagyis a J''_B pivot tábla esetén $\mathbf{t}''^{(i)}\mathbf{t}''_j=0$, $i\in J''_B$, $j\in \bar{J}''_B$. Ugyanis a skaláris szorzat számolása sémán szemléltetve:



7. ábra

azaz

$$\mathbf{t}''^{(i)}\mathbf{t}''_j = (1)\cdot\tau''_{ij} + (-1)\tau''_{ij} = 0.$$

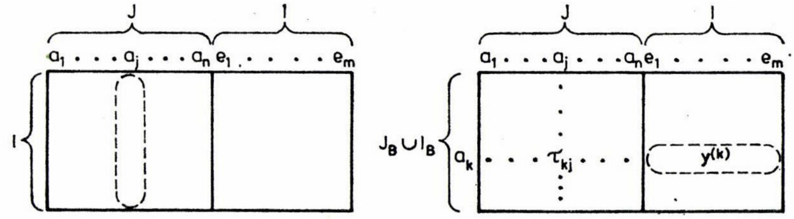
Ezt felhasználva általánosan is belátjuk. Mivel $\mathbf{t}''_j$ merőleges a sorvektorok alterére és láttuk, hogy tetszőleges két bázishoz tartozó pivot tábla pivotálásokkal egymásba átvihető, valamint láttuk, hogy pivotáláskor a sorvektorok altere nem változik, így $\mathbf{t}''_j \perp \mathscr{L}(\mathbf{t}''^{(i)}|i\in J''_B) = \mathscr{L}(\mathbf{t}'^{(i)}|i\in J'_B)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Az ortogonalitási tételből azonnal adódik az alábbi számolási észrevétel, amelyet a későbbiekben gyakran fel fogunk használni, e miatt, hivatkozási céllal, névvel is ellátjuk.

KÖVETKEZMÉNY (kompozíciós tulajdonság). Adott $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in R^{(m)}$ és tetszőleges $J_B \subset J = \{1, \dots, n\}$, $I_B \subset I = \{1, \dots, m\}$ indexhalmazokból álló $J_B \cup I_B$ bázis esetén

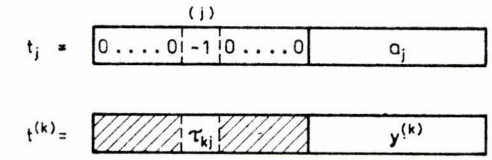
$$\tau_{kj} = \mathbf{y}^{(k)}\cdot \mathbf{a}_j, \quad k\in J_B \text{ vagy } k\in I_B \text{ és } j\in J.$$

A kompozíciós tulajdonságot sémán szemléltetve (8. ábra):



8. *ábra*

Bizonyítás. Az ortogonalitási tétel szerint az első tábla $\mathbf{t}_j$ oszlopa merőleges a második tábla $\mathbf{t}^{(k)}$ sorára:



8/*a ábra*

így $0 = -\tau_{kj} + \mathbf{y}^{(k)} . \mathbf{a}_j$, amit bizonyítanunk kellett.

3. Lineáris egyenletrendszerek vizsgálata

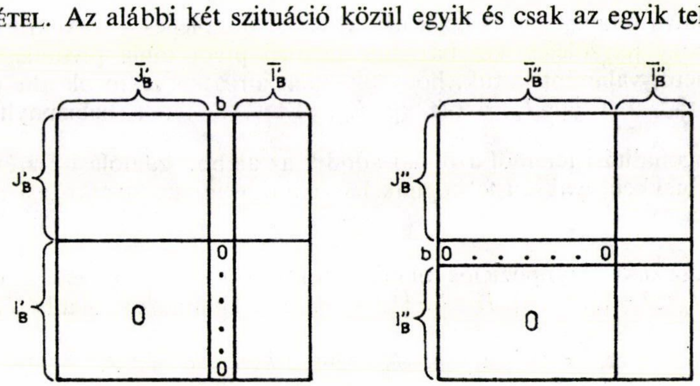
Legyenek $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\} \subset R^{(m)}$ adott vektorok és $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\} \subset R^{(m)}$ az $R^{(m)}$ tér mesterséges bázisa. Jelölje:

$J := \{1, \ldots, n\}$ az $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ vektorok index halmazát

$I := \{1, \ldots, m\}$ az $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ vektorok index halmazát.

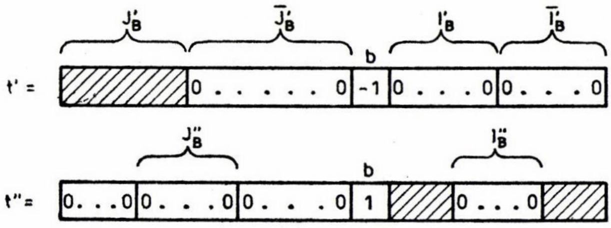
Kimondhatjuk az alábbi *Minty-típusú tételt.*

3.1. TÉTEL. Az alábbi két szituáció közül egyik és csak az egyik teljesül.



9. *ábra*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a kettő egyszerre nem állhat fenn. Indirekt tegyük fel, hogy mindkettő fennáll. Akkor az első tábla „**b**" előállításához tartozó $\mathbf{t}'$ oszlop és a második tábla „**b**" bázisvektorhoz tartozó $\mathbf{t}''$ sora merőlegesek. Azaz az alábbi két vektor egymásra merőleges:



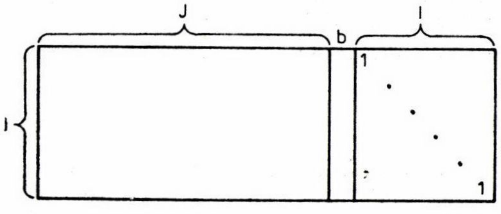
10. ábra

Azonban egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{t}'\mathbf{t}'' = -1$$

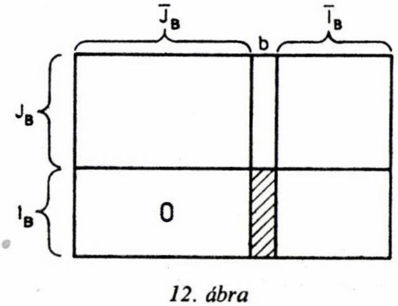
azaz ellentmondásra jutottunk azzal, hogy egymásra merőlegesek.

Ahhoz, hogy a kettő közül egyik fennáll, induljunk ki a mesterséges bázistáblából



11. ábra

Cseréljünk ki annyi $\mathbf{e}_i$ vektort $\mathbf{a}_j$-vel, amennyit csak lehet; akkor az alábbi táblázathoz jutunk (rövid formában írjuk az eredményt):



12. ábra

Ha a 12. ábrán a vonalkázott rész mind zérus, akkor az első esetet kaptuk, ha ott van nem zérus elem, akkor azt pivot elemnek választva a **b** vektor bázisba kerül (valamelyik $\mathbf{e}_i$ helyett) és a második esetet kapjuk.

A tételnek — amelynek bizonyítása konstruktív volta miatt algoritmust is ad — egy fontos következménye az alábbi *Rouche—Kronecker—Campelli-tétel:*

1. KÖVETKEZMÉNY. Az alábbi két állítás közül egyik és csak egyik teljesül

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & \text{(II)} \\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b} & \left.\begin{array}{l} \mathbf{yA}=\mathbf{0} \\ \mathbf{yb}=1 \end{array}\right\} \\ \text{megoldható} & \\ & \text{megoldható} \end{array}$$

Bizonyítás. A kettő egyszerre nem állhat fenn. Ugyanis — indirekt — ha fenn állna, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

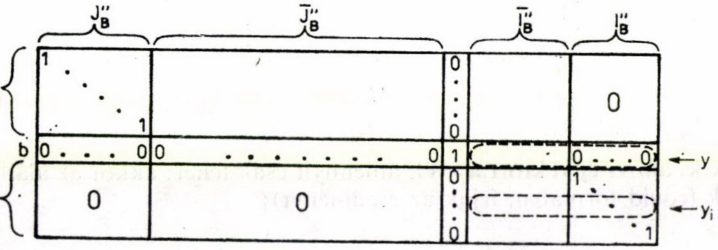
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\ /\cdot\mathbf{y}$$

$$\mathbf{yAx}=\mathbf{yb}$$

$$0=1$$

ami ellentmondás.

Alkalmazzuk a tételt az **A** mátrix $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ oszlopvektoraira: Ha az első szituáció van, akkor a **b** vektort előállítottuk az **A** oszlopvektoraival, vagyis $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer egy megoldását megkaptuk. Ha a második szituáció van, akkor a teljes tábla az alábbi:



13. ábra

A táblán jelölt **y** vektorra — az ortogonalitási tulajdonság miatt

$$\mathbf{yA}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{yb}=1.$$

Megjegyzés. Mind az első, mind a második esetben az egyenletrendszer általános megoldása is kiolvasható a táblázatból.

Az első esetben a $\bar{J}'_B$ indexekhez tartozó $\mathbf{t}'_j$ oszlopvektorok lineáris kombinációja adja a homogén rész $(\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0})$ általános megoldását.

A második esetben az $\mathbf{y}_i$, $i\in I''_B$ vektorok lineáris kombinációja adja a homogén rész $(\mathbf{y}\mathbf{A}=\mathbf{0},\ \mathbf{y}\mathbf{b}=0)$ általános megoldását.

A lineáris egyenletrendszerek geometriai szemléltetése.

3.1. *Definíció.* Az

$$\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \left\{\mathbf{b}|\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j \xi_j \ \ \forall \xi_j \in R\right\}$$

altér *ortogonális komplementumának* nevezzük az

$$\mathscr{L}^{\perp}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \{\mathbf{y}|\mathbf{y}\mathbf{a}_j = 0,\ \forall j\}$$

halmazt. □

Megjegyezzük, hogy nyilvánvalóan teljesül tetszőleges $\mathbf{b}\in\mathscr{L}$ és tetszőleges $\mathbf{y}\in\mathscr{L}^{\perp}$ esetén, hogy $\mathbf{b}\mathbf{y}=0$. Az alábbiakban az ortogonális komplementum három nevezetes tételét mint a *Minty típusú tétel* következményét tárgyaljuk.

2. Következmény. Tetszőleges $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}\subset R^{(m)}$ esetén létezik $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\}\subset \subset R^{(m)}$ úgy, hogy

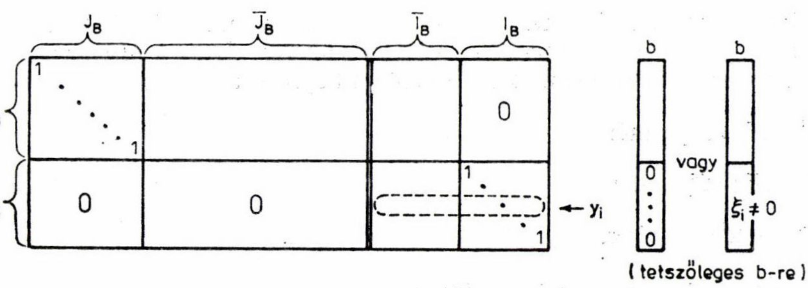
1° $\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{L}^{\perp}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$

2° $\mathscr{L}^{\perp}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$

valamint

3° $\mathscr{L}^{\perp\perp}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan bázis táblát, ahol $\|J_B\|$ maximális, azaz több $\mathbf{e}_i$ vektort nem tudok $\mathbf{a}_j$-vel cserélni.



14. ábra

Legyen $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\}=\{\mathbf{y}_i|i\in I_B\}$, illetve a $\mathbf{0}$ vektor, ha $I_B=\emptyset$.

1° Legyen $\mathbf{b}\in\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ ekkor (lásd 14. ábra $\mathbf{b}$ előállítását) $\mathbf{y}_i\mathbf{b}=0$, $i\in I_B$, azaz $\mathbf{b}\in\mathscr{L}^{\perp}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$.

Fordítva, legyen $\mathbf{b}\notin\mathscr{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ekkor (lásd 14. ábra $\mathbf{b}$ előállítását) valamely $\xi_i\neq 0$, $i\in I_B$, azaz $\mathbf{y}_i\mathbf{b}\neq 0$ vagyis $\mathbf{b}\notin\mathscr{L}^{\perp}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$.

2° Legyen $\mathbf{y}\in\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$, ekkor $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{y}_i$. Minthogy $\mathbf{y}_i\mathbf{a}_j=0$ $(i=1, \dots, k;$ $j=1, \dots, m)$ ezért $\mathbf{y}\mathbf{a}_j=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\mathbf{y}_i\mathbf{a}_j)=0$ $j=1, \dots, n$ azaz $\mathbf{y}\in\mathcal{L}^{\perp}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$. Fordítva, legyen $\mathbf{y}\notin\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$, azaz $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{y}_i=\mathbf{y}$ nem oldható meg. Ekkor az 1. következmény szerint van olyan $\mathbf{b}\in R^{(m)}$ vektor, hogy

$$\mathbf{y}_i\mathbf{b}=0, \quad i=1, \dots, k \quad \text{és} \quad \mathbf{y}\mathbf{b}=1.$$

Tehát 1° szerint $\mathbf{b}\in\mathcal{L}^{\perp}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)=\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, de $\mathbf{y}\mathbf{b}=1$ miatt

$$\mathbf{y}\notin\mathcal{L}^{\perp}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n).$$

3° Alkalmazzuk előbb 1° majd 2°-t a következőképp.

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)=\left(\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_2)\right)^{\perp}=\left(\mathcal{L}^{\perp}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\right)^{\perp}.$$

Megjegyzés. A 2° rész bizonyításának közvetlen következménye az alábbi állítás:

Tetszőleges $\mathcal{L}\subset R^{(m)}$ altér esetén

$$rang\,(\mathcal{L})+rang\,(\mathcal{L}^{\perp})=m.$$

Ismeretes, hogy a vektortér két $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\subset R^{(m)}$ halmazának vektori *(Minkowski)* összege az alábbi módon értelmezhető.

$$\mathcal{H}_1 \# \mathcal{H}_2 := \{\mathbf{x}|\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2;\ \mathbf{x}_1\in\mathcal{H}_1;\ \mathbf{x}_2\in\mathcal{H}_2\}.$$

Megjegyzés. A 2. következményből egyszerű számolással adódnak az alterek struktúráját jellemző összefüggések. A lineáris alterek zártak a *Minkowski összegre,* a metszetre és az ortogonális komplementum képzésre:

1* $\mathcal{L}_1\#\mathcal{L}_2$ altér,

2* $\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2$ altér,

3* $\mathcal{L}^{\perp}$ altér,

valamint fennáll az involúciós tulajdonság,

4* $\mathcal{L}^{\perp\perp}=\mathcal{L}$,

és fennállnak a *De-Morgan formulák*

5* $(\mathcal{L}_1\#\mathcal{L}_2)^{\perp}=\mathcal{L}_1^{\perp}\cap\mathcal{L}_2^{\perp}$

6* $(\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2)^{\perp}=\mathcal{L}_1^{\perp}\#\mathcal{L}_2^{\perp}$.

4. Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek vizsgálata

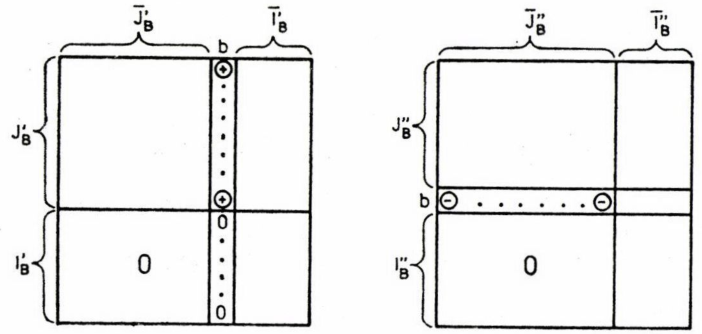
Legyenek $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\} \subset R^{(m)}$ adott vektorok, és $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\} \subset R^{(m)}$ az $R^{(m)}$ tér mesterséges bázisa. Jelöljük

$$J := \{1, \ldots, n\} \quad \text{az} \quad \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \quad \text{vektorok index halmaza}$$

$$I := \{1, \ldots, m\} \quad \text{az} \quad \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\} \quad \text{vektorok index halmaza.}$$

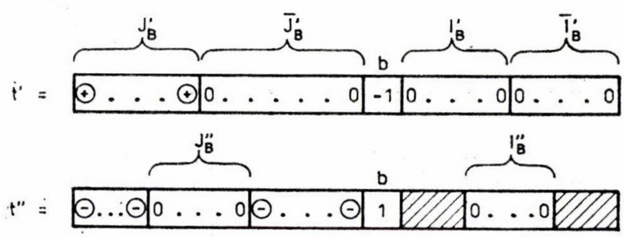
Kimondhatjuk az alábbi *Farkas—Minty típusú tételt.*

4.1. TÉTEL. Az alábbi két szituáció közül egyik és csak egyik teljesül:



15. ábra

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a kettő együtt nem állhat fenn. Indirekt tegyük fel, hogy mindkettő fennáll. Ekkor az első tábla „**b**" előállításához tartozó $\mathbf{t}'$ oszlop és a második tábla „**b**" bázisvektorhoz tartozó $\mathbf{t}''$ sora merőlegesek. Azaz az alábbi két vektor egymásra merőleges.



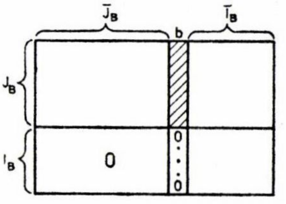
16. ábra

Amelyből egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{t}'\mathbf{t}'' = -1 + \theta < 0,$$

azaz ellentmondásra jutottunk azzal, hogy egymásra merőlegesek.

Ahhoz, hogy a kettő közül egyik fennáll, tekintsük először a 3.1. tétel biztosította alternatívákat. Ha ott a második szituáció áll fenn, akkor most is a második eset van (erősebb alakban, mint megköveteltük). Ha az ott szereplő eset áll fenn, akkor az alábbi táblánál vagyunk:



17. ábra

Hajtsuk végre az alábbi (α) *algoritmust:*

(I) — Ha a vonalkázott rész csupa $\oplus$ együtthatókat tartalmaz, akkor az első esetet kaptuk.

— Ha a vonalkázott részen vannak negatív együtthatók is, akkor legyen $r = \min \{k | \mathbf{a}_k,\ k \in J_B$ együtthatója negatív $\mathbf{b}$ oszlopában$\}$.

Pivotáljunk: $\mathbf{a}_r$ kikerül, $\mathbf{b}$ bekerül a bázisba.

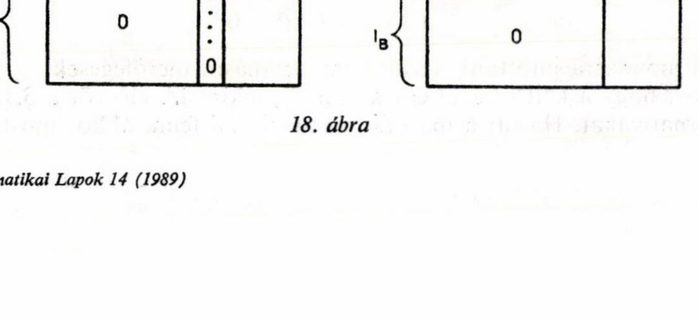
(II) — Ha „**b**" bázisban van és a sora $\bar{J}_B$ helyeken csupa $\ominus$ együtthatókat tartalmaz, akkor a második esetet kaptuk. Ha itt vannak pozitív együtthatók is, akkor legyen $s = \min \{j | \mathbf{a}_j,\ j \in \bar{J}_B$ pozitív együtthatót tartalmaz $\mathbf{b}$ sorában$\}$.

Pivotáljunk; $\mathbf{b}$ kikerül, $\mathbf{a}_s$ bekerül a bázisba.

A fenti algoritmus a kívánt két eset valamelyikénél ér véget, tételünk bizonyításához csak azt kell belátnunk, hogy véges lépésben véget ér. Mivel véges sok bázis van, ezért csak azt kell belátnunk, hogy az algoritmus nem ciklizál.

Megmutatjuk, hogy a fenti algoritmus nem ciklizál:

Tegyük fel indirekt, hogy az algoritmus ciklizál. Legyen $J^* := \{j | \mathbf{a}_j$ kikerült a bázisból a ciklus során$\}$. Megjegyezzük, hogy a J^*-hoz tartozó indexek a ciklus során be is léptek a bázisba, valamint, hogy a J^*-on kívüli indexek a ciklus során végig a bázisban voltak, vagy végig a bázison kívül. Legyen $j^* = \max \{j | j \in J^*\}$. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor $\mathbf{a}_{j^*}$ kiment, és amikor $\mathbf{a}_{j^*}$ bejött a bázisba. Ehhez a két szituációhoz az alábbi táblák tartoznak:



18. ábra

Mivel az $\{\mathbf{a}_j | j \notin J^*\}$ vektorok nem játszottak szerepet sem a pivot elem választásban, sem helyüket nem változtatták az eljárás során, így elhagyhatjuk őket. Helyettesítsük az $\mathbf{a}_{j*}$ vektort a negatívjával, így olyan táblákat kapunk, melyek előjelstruktúrája megegyezik a 15. ábrán adottal. A tétel első részében láttuk, hogy ezek egyidejűleg nem állhatnak fenn, tehát ellentmondást kaptunk azon feltevésünkkel, hogy ciklizál. Így a tételt bizonyítottuk.

A tételnek fontos következménye a *Farkas tétel,* melyekre a konstruktív bizonyítás miatt egyben algoritmust is kaptunk.

1. KÖVETKEZMÉNY. Az alábbi állítások közül egyik és csak egyik teljesül:

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & \text{(II)} \\ \left.\begin{array}{r} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r} \mathbf{yA} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} = 1 \end{array}\right\} \\ \text{megoldható} & \text{megoldható.} \end{array}$$

Bizonyítás. A kettő egyszerre nem állhat fenn. Ugyanis — indirekte — ha fennállna, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;/\cdot \mathbf{y}$$

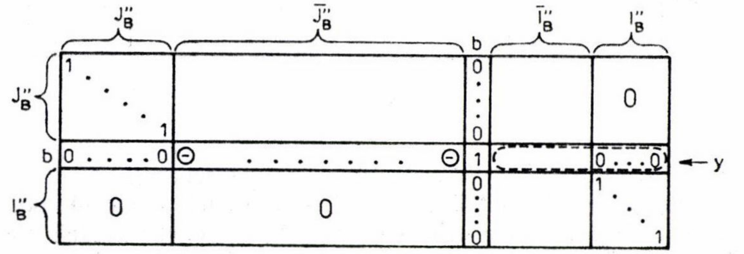
$$\mathbf{yAx} = \mathbf{by}$$

$$0 \geqq \mathbf{yAx} = \mathbf{by} = 1$$

ami ellentmondás.

Alkalmazzuk a tételt az $\mathbf{A}$ mátrix $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ oszlopvektoraira. Ha az első eset áll fenn (15. ábra első tábla), akkor a $\mathbf{b}$ vektort előállítottuk az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak nemnegatív lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$; $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ megoldható.

Ha a második szituáció áll fen, akkor a teljes tábla az alábbi:



19. ábra

A táblán jelölt $\mathbf{y}$ vektorra — a kompozíciós tulajdonság miatt

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{yA} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} = 1 \end{array}\right\}.$$

1. *Megjegyzés.* A *Farkas tétel* gyakran kerül felhasználásra az alábbi ún. *Goldman átírásban:* Az alábbi két állítás közül egyik és csak egyik teljesül

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{Ax}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{cx}&=-1\\ \mathbf{x}&\geqq\mathbf{0}\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{yA}\leqq\mathbf{c}$$

megoldható megoldható.

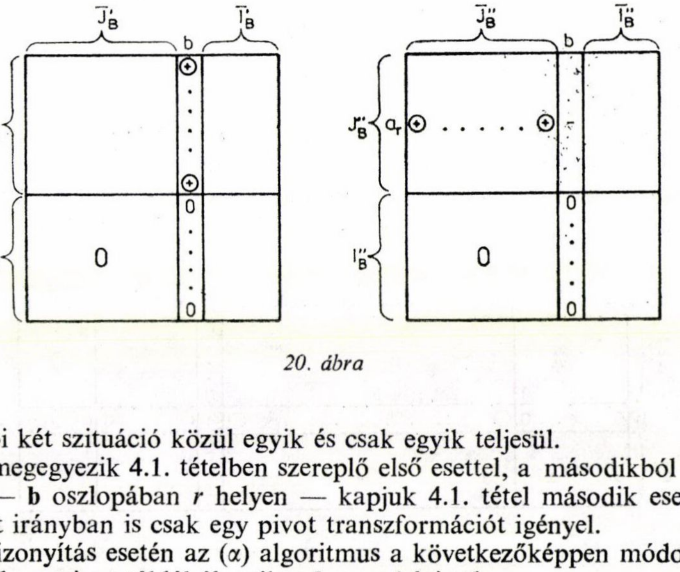
Ekkor a tételt az 1. következményben bemutatottak szerint az alábbi

$$\hat{\mathbf{a}}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\-\gamma_1\end{pmatrix},\ldots,\hat{\mathbf{a}}_j=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_j\\-\gamma_j\end{pmatrix},\ldots,\hat{\mathbf{a}}_n=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_n\\-\gamma_n\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\0\end{pmatrix},\ldots,\hat{\mathbf{e}}_m=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_m\\0\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{e}}_{m+1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

vektorokkal alkalmazva kapjuk a bizonyítást. Csak azt kell észrevennünk, hogy $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}=\hat{\mathbf{b}}$ az $m+1$-edik koordinátákra éppen a $\mathbf{cx}=-1$ egyenletet adja, valamint, hogy az $\hat{\mathbf{y}}=(\mathbf{y},\eta)$ vektor utolsó, η koordinátája $+1$.

2. *Megjegyzés.* A 4.1. tétel az alábbi ekvivalens alakban is kimondható:



20. ábra

Az alábbi két szituáció közül egyik és csak egyik teljesül.
Az első eset megegyezik 4.1. tételben szereplő első esettel, a másodikból pedig egy pivotálással — **b** oszlopában r helyen — kapjuk 4.1. tétel második esetét. Az áttérés fordított irányban is csak egy pivot transzformációt igényel.

Direkt bizonyítás esetén az (α) algoritmus a következőképpen módosul. Induljunk ki egy olyan pivot táblából, mikor **b** nem bázis elem.

(I) — Ha a vonalkázott rész csupa nemnegatív együtthatót tartalmaz (l. 16. ábra) akkor az első esetet kaptuk.

— Különben legyen

$$r=\min\{i\,|\,\mathbf{a}_i;\ i\in J_B \text{ együtthatója negatív } \mathbf{b} \text{ oszlopában}\}.$$

(II) — Ha $\tau_{rj} \geqq 0$ minden $j \in \bar{J}_B$ esetén, akkor a második esetet kapjuk.
— Különben legyen

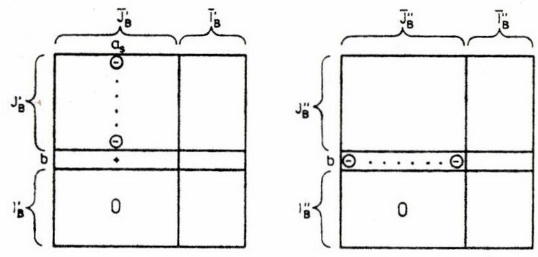
$$s = \min \{ j \mid \tau_{rj} < 0,\ j \in \bar{J}_B \}.$$

Pivotáljunk; r kikerül, s bekerül a bázisba.

Ez a módosított algoritmus szintén véges. Ugyanis vegyük észre, hogy a fenti algoritmus által generált pivot táblák megegyeznek az eredeti algoritmus páratlan lépéseiben előjövő táblákkal, ha első lépésként olyan táblánk van, mikor **b** nincs a bázisban.

Megjegyezzük azt is, hogy ez az algoritmus TERLAKY [8] criss-cross módszerének is speciális esete, és ugyanígy megegyezik a szimplex módszer BLAND [2]-féle változatával, mivel itt minden pivot művelet degenerált a lineáris programozás elméletében használatos terminológia szerint.

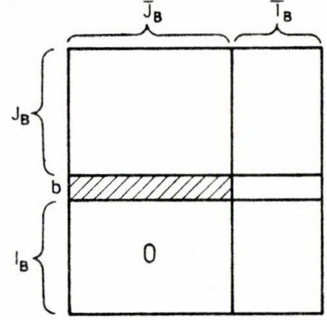
3. *Megjegyzés.* A 4.1. tétel az alábbi ekvivalens alakban is kimondható. Az alábbi két szituáció közül egyik és csak egyik teljesül:



21. ábra

A második eset megegyezik a 4.1. tételben szereplő második esettel, az elsőből pedig egy pivotálással — **b** sorában az s helyen — kapjuk 4.1. tétel második esetét. Az áttérés fordított irányban is csak egy pivot transzformációt igényel.

Direkt bizonyítás esetén az (α) algoritmus a következőképpen módosul. Induljunk ki egy olyan pivot táblából, amikor **b** bázis vektor.



22. ábra

(I) — Ha a vonalkázott táblarész csupa nem pozitív együtthatót tartalmaz, akkor a második esetet kaptuk.

— Különben legyen

$$s = \min \{j | \mathbf{a}_j,\ j \in \bar{J}_B \text{ pozitív együtthatót tartalmaz } \mathbf{b} \text{ sorában}\}.$$

(II) — Ha $\tau_{is} \leqq 0$ minden $i \in J_B$ esetén, akkor az első esetet kapjuk.

— Különben legyen

$$r = \min \{i | \tau_{is} > 0;\ i \in J_B\}.$$

Pivotáljunk; r kikerül, s bekerül a bázisba.

Szintén véges az algoritmus ezen változata is. Ugyanis vegyük észre, hogy a fenti algoritmus által generált pivot táblák megegyeznek az eredeti algoritmus páros lépéseiben fellépő táblákkal. Így láttuk, hogy mindkét módosított változat fele annyi pivot transzformációt hajt végre, mint az eredeti algoritmus, és együtt generálják az eredeti algoritmusban előforduló valamennyi táblát.

Megemlítjük, hogy TERLAKY [8] criss-cross módszerének a fenti algoritmus is speciális esete, és megegyezik a duál szimplex módszer BLAND [2] szabályával megszorított változatával, mivel ebben az esetben minden pivot művelet degenerált.

4. *Megjegyzés.* Könnyen belátható, hogy a 2. és 3. megjegyzésekben közölt alternatíva tételekből is következik *Farkas tétele* (és annak *Goldman átírása* is). Ez az állítás az equivalencia miatt nyilvánvaló, de a megoldásvektorok közvetlenül (pivotálás nélkül) is kiolvashatók az egyes táblázatokból. Ezen megoldásvektorok megkeresését az olvasóra hagyjuk.

A lineáris egyenlőtlenség-rendszerek geometriai szemléltetése.

4.1. *Definíció.* A $\mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \left\{\mathbf{b} | \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j \xi_j;\ \forall \xi_j \geqq 0\right\}$ vektorhalmazt véges kúpnak nevezzük, a

$$\mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \{\mathbf{y} | \mathbf{y}\mathbf{a}_j \leqq 0;\ \forall j\}$$

vektorhalmazt pedig a $\mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ véges kúp polárisának nevezzük. □

Megjegyezzük, hogy nyilvánvalóan teljesül tetszőleges $b \in \mathscr{C}$ és tetszőleges $\mathbf{y} \in \mathscr{C}^*$ esetén, hogy $\mathbf{b}\mathbf{y} \leqq 0$. Az alábbiakban a véges kúpok három nevezetes tételét tárgyaljuk, mint a fent leírt *Minty—Farkas-típusú tétel* következményeit.

2. KÖVETKEZMÉNY. Tetszőleges $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset R^{(m)}$ esetén létezik $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\} \subset R^{(m)}$, hogy

1° (WEYL)

$$\mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{C}^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$$

2° (MINKOWSKI)

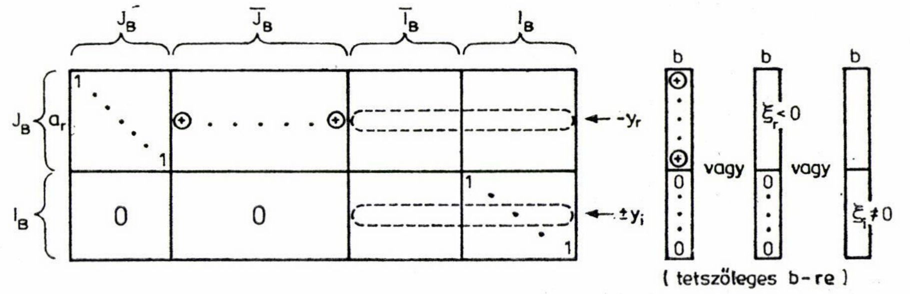
$$\mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$$

valamint

3° (FARKAS)

$$\mathscr{C}^{**}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Bizonyítás. Tekintsük az összes olyan bázis táblát, ahol $\|J_B\|$ maximális, azaz több $\mathbf{e}_i$ vektort nem tudunk $\mathbf{a}_j$-vel kicserélni, valamint olyan a bázis tábla, hogy valamely r sorában $\tau_{rj} \geqq 0$ minden $j \in \bar{J}_B$ esetén.



23. ábra

Legyen

(4.1) $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k\} = \{\pm\mathbf{y}_i | i \in I_B\} \cup \{-\mathbf{y}_r | \text{létezik } J_B \text{ bázis, melyre } \tau_{rj} \geqq 0\ \forall j \in \bar{J}_B \text{ esetén}\}$,

illetve a $\mathbf{0}$ vektor, ha mindkét definiáló halmaz üres. Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{L} = \mathscr{C}\{\pm\mathbf{y}_i | i \in I_B\}$ kúp altér, és hogy a $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C}\{-\mathbf{y}_r | \text{létezik } J_B \text{ bázis, melyre } \tau_{rj} \geqq 0\ \forall j \in \bar{J}_B \text{ esetén}\}$ kúp hegyes kúp (nem tartalmaz egyenest). Továbbá $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) = \hat{\mathscr{C}} + \mathcal{L}$.

1° Legyen $\mathbf{b} \in \mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ekkor $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{a}_j$, ahol $\xi_j \geqq 0\ (j = 1, \ldots, n)$, minthogy $\mathbf{y}_i \mathbf{a}_j \leqq 0\ (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ ezért $\mathbf{y}_i \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{y}_i \mathbf{a}_j) \xi_j \leqq 0$, azaz

$$\mathbf{b} \in \mathscr{C}^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k).$$

Fordítva legyen $\mathbf{b} \notin \mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, ekkor a 2. megjegyzés 20. ábrája szerint valamely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $\mathbf{y}_i \mathbf{b} > 0$, azaz $\mathbf{b} \notin \mathscr{C}^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$.

2° Legyen $\mathbf{y} \in \mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$, ekkor $\mathbf{y} = \sum_{i=j}^{k} \lambda_i \mathbf{y}_i$. Minthogy $\mathbf{y}_i \mathbf{a}_j \leqq 0\ (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ ezért $\mathbf{y}\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\mathbf{y}_i \mathbf{a}_j) \leqq 0,\ j = 1, \ldots, n$, azaz $\mathbf{y} \in \mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Fordítva legyen $\mathbf{y} \notin \mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$, azaz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{y}_i = \mathbf{y};\ \lambda_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, k$ nem megoldható. Ekkor 1. következmény szerint van olyan $\mathbf{b} \in R^{(m)}$ vektor, hogy

$$\mathbf{y}_i \mathbf{b} \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{és} \quad \mathbf{y}\mathbf{b} = 1.$$

Tehát 1° szerint $\mathbf{b} \in \mathscr{C}^*(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) = \mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ de $\mathbf{y}\mathbf{b} = 1$ miatt $\mathbf{y} \notin \mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

3° Alkalmazzuk előbb 1°, majd 2°-t a következőképpen.

$$\mathscr{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = (\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k))^* = (\mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n))^*.$$

Megjegyzés. A 2. következményből egyszerű számolással adódnak a véges kúpok struktúráját jellemző összefüggések. A véges kúpok zártak a *Minkowski összegre,* metszetre és a poláris képzésre:

1* $\mathscr{C}_1 \# \mathscr{C}_2$ véges kúp,

2* $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ véges kúp,

3* $\mathscr{C}^*$ véges kúp,

valamint fennáll az involúciós tulajdonság:

4* $\mathscr{C}^{**} = \mathscr{C}$

és fennállnak a *De Morgan formulák:*

5* $(\mathscr{C}_1 \# \mathscr{C}_2)^* = \mathscr{C}_1^* \cap \mathscr{C}_2^*$

6* $(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2)^* = \mathscr{C}_1^* \# \mathscr{C}_2$.

Végül megmutatjuk, hogy a (4.1)-ben adott $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k\}$ vektorrendszer nemcsak generálja a $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k) = \mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ kúpot, hanem az extremális generálórendszere is a $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k)$ kúpnak.

4.2. *Definició.* Az $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k\}$ vektorhalmazt a $\mathscr{C}$ kúp *extremális generáló* rendszerének nevezzük, ha $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k) =$ és $\mathbf{y}_j = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} \lambda_i \mathbf{y}_i$; $\lambda_i \geqq 0$, $i = 1, ..., k$; nem megoldható $j = 1, ..., k$ esetén. □

Kicsit általánosabban az $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_t\}$ vektor halmazt extremális generálórendszernek nevezzük, ha redukáltja extremális generálórendszer. A vektorrendszer redukáltja extremális generálórendszer. A vektorrendszer redukáltján azt az $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_s\}$ vektorrendszert értjük, melyet az eredetiből úgy kapunk, hogy elhagyjuk azokat a vektorokat, melyek pozitív többszörösei valamely másiknak.
($\mathbf{y}_i = \lambda \mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}_j$-t elhagyjuk.)

4.2. Tétel. Az $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k\}$ vektorrendszer extremális generáló rendszere a $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k) = \mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ kúpnak.

Bizonyítás. A 4.2. definiáló formula és 2° állítás szerint ez generálórendszer. Nyilvánvaló, hogy a konstrukció szerint $\mathscr{L} = \mathscr{C}\{\pm \mathbf{y}_i | i \in I_B\}$ vektorok extremálisak, mivel $\{\mathbf{y}_i | i \in I_B\}$ bázisa az $\mathscr{L}$ altérnek, és $\mathscr{L} \cap \hat{\mathscr{C}} = \mathbf{0}$.

Így csak azt kell belátnunk, hogy a $\{-\mathbf{y}_r |$ ahol létezik J_B bázis, hogy $\tau_{rj} \geqq 0$ minden $j \in \bar{J}_B$ esetén$\} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_s\}$ extremális $\mathscr{C}$-ben. Feltehetjük, hogy $\mathbf{y}_i \neq \lambda \mathbf{y}_j$, $i, j = 0, 1, ..., s$, $i \neq j$; $\lambda > 0$, mivel ha $\mathbf{y}_j$ extremális, akkor $\lambda \mathbf{y}_j$ is extremális $\lambda > 0$ esetén.

Indirekt tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_s\}$ vektorrendszer nem extremális. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\mathbf{y}_0$ eleme a többi vektor által kifeszített kúpnak, azaz vannak $\lambda_1, ..., \lambda_s \geqq 0$ számok úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geqq 0 \quad i = 1, ..., s. \tag{4.2}$$

A (4.2) feladat alternatív párja (lásd 1. következmény)

$$\text{(4.3)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{z}\mathbf{y}_i &\leqq 0, \quad i = 1, \dots, s \\ \mathbf{z}\mathbf{y}_0 &> 0. \end{aligned}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy (4.3) megoldható. Legyen J_B^0 az $\mathbf{y}_0$ vektorhoz tartozó bázis, azaz $\mathbf{y}_0\mathbf{a}_j=0$, $j\in J_B^0$; $j\neq r\in J_B^0$ esetén és $\mathbf{y}_0\mathbf{a}_r=-1$. Legyen $\mathbf{z}=\varepsilon \sum\limits_{\substack{j\in J_B^0\\ j\neq r}} \mathbf{a}_j+\mathbf{y}_0$, ahol $\varepsilon>0$ konstans. Ekkor

$$\mathbf{z}\mathbf{y}_0 = \varepsilon\Big(\sum_{\substack{j\in J_B^0\\ j\neq r}} \mathbf{a}_j\Big)\mathbf{y}_0+\mathbf{y}_0^2 = 0 + \mathbf{y}_0^2 > 0$$

és

$$\mathbf{z}\mathbf{y}_i = \varepsilon\Big(\sum_{\substack{j\in J_B^0\\ j\neq r}} \mathbf{a}_j\Big)\mathbf{y}_i+\mathbf{y}_i\mathbf{y}_0, \quad \text{ahol} \quad \Big(\sum_{\substack{j\in J_B^0\\ j\neq r}} \mathbf{a}_j\Big)\mathbf{y}_i < 0,$$

mivel definíció szerint nem pozitív, és ha zérus lenne, akkor $\mathbf{y}_i$ párhuzamos lenne $\mathbf{y}_0$-lal ami feltevésünk szerint nem lehetséges. Így

$$\mathbf{z}\mathbf{y}_i \leqq 0, \quad \text{ha} \quad 0 < \varepsilon \leqq \min\left\{\frac{-\mathbf{y}_i\mathbf{y}_0}{\sum\limits_{\substack{j\in J_B^0\\ j\neq r}} \mathbf{a}_j} \,\middle|\, \mathbf{y}_i\mathbf{y}_0 > 0;\ i = 1, \dots, s\right\},$$

azaz az így definiált $\mathbf{z}$ vektor megoldása a (4.3) rendszernek. Ez pedig ellentmondás, mivel láttuk (1. következmény), hogy (4.2) és (4.3) egyidejűleg nem megoldható. Azaz $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ extremális generáló rendszere a $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)=\mathscr{C}^*(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ kúpnak.

IRODALOM

[1] BALINSKI, M. L. and TUCKER, A. W., Duality theory of linear programs: A constructive approach with applications", *SIAM Review* **11** (1969) 347—377.

[2] BLAND, R. G., "New finite pivoting rules for the simplex method", *Mathematics of Operations Research* **2** (1977) 103—107.

[3] DANCS, I., *Konvexitás algebrai alapjai és alkalmazásai,* (Országos Vezetőképző Központ kiadványa, Budapest, 1981).

[4] GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models,* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1960).

[5] LANCASTER, P., *Theory of Matrices* (Academic Press, New York, 1969).

[6] PRÉKOPA, A., „A lineáris programozás kombinatorikus tárgyalásmódja", *Matematikai Lapok* **22** (1971) 7—24.

[7] ROCKAFELLAR, R. T., *Network Flows and Monotropic Optimization* (John Wiley and Sons, New York, 1984).

[8] TERLAKY, T., „Egy új, véges criss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **10** (1984) 289—296.

(Beérkezett: 1987. szeptember 2.)

KLAFSZKY EMIL
NME MATEMATIKAI INTÉZET
3515 MISKOLC, EGYETEMVÁROS

TERLAKY TAMÁS
ELTE TTK OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8.

THE ROLE OF PIVOT TECHNIQUE IN PROVING SOME FUNDAMENTAL THEOREMS OF LINEAR ALGEBRA

E. KLAFSZKY and T. TERLAKY

We give a constructive proof for some classical theorems of linear algebra *(Steinitz, rank of matrices, Rouche—Kronecker, Farkas, Weyl, Minkowski)*.

The construction is based on pivot technic, and its most important part is the pivot selection rule, where *Bland's* [2] *minimal index rule* and its consequencies play the decisive rule.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 449—459

A KONVEX PROGRAMOZÁSI FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL[1]

RAPCSÁK TAMÁS

Budapest

A dolgozatban a geodetikusan konvex függvények tulajdonságait vizsgáljuk, majd a konvex programozási feladatot általánosítjuk arra az esetre, mikor a megengedett halmaz megadásánál egyenlőség feltételek is szerepelnek.

1. Bevezetés

A halmazok és a függvények konvexitás fogalma fontos szerepet játszik az optimalizáláselméletben. A lineáris topologikus terekben használatos konvexitás fogalom a két tetszőleges pontot összekötő egyenes szakasz fogalmán alapszik, mely lehetővé teszi a konvex és az általánosított konvex függvények definícióját, valamint a konvex programozási feladatok bevezetését. Azonban a nemlineáris programozásban ez a tulajdonság általában nem teljesül (Pl. ha a nemlineáris programozási feladat feltételei között nemlineáris egyenlőségek is szerepelnek, akkor a feltételi halmaz nem konvex.) Az utóbbi időben számos kísérlet történt az egyenes szakasz fogalmának általánosítására [1], [2], [3], [5], [7], [9], [10], [13], [14], [15], [16], [18], [19], [21], [23].

A továbbiakban csak a geodetikus konvexitással foglalkozunk, amelyet a *g-konvexitás* elnevezéssel helyettesítünk.

A cikkben szereplő eredményekhez a kiindulási pontot LUENBERGER [11], [12] munkái jelentették.

Tekintsük az alábbi nemlineáris programozási feladatot

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n-k, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} \in R^n,$$

ahol $k \geq 0$ és $f, h_j \in C^2$, $j=1,\dots,n-k$. Jelölje h: $R^n \to R^{n-k}$ azt a leképezést, amelynek a komponensei h_j, $j=1,\dots,n-k$ és tegyük fel, hogy a következő regularitási feltétel teljesül: 0 a h leképezés reguláris értéke, azaz a h leképezés *Jacobi mátrixa* $h'(\mathbf{x}) \in \mathscr{L}(R^n, R^{n-k})$ teljes rangú (azaz rangja $(n-k)$) bármely $\mathbf{x} \in h^{-1}(0)$ esetén. Ezen feltétel mellett a $h^{-1}(0)$ halmaz az R^n egy k-dimenziós C^2 részsokasága, amely az R^n *euklideszi metrikája* által indukált *Riemann metrikával* van ellátva.

A dolgozat legfontosabb célja a konvex programozási feladat kiterjesztése az (1.1) feladatra.

[1] A kutatás részben az 1044. számú OTKA szerződés keretében folyt.

2. A g-konvex függvények tulajdonságai

Legyen $M \subset R^n$ egy összefüggő, k-dimenziós, C^2 *Riemann sokaság*.

2.1. *Definíció*. Az $A \subset M$ halmaz g-konvex, ha A bármely két pontja összeköthető egy A-beli geodetikussal.

Ez a definíció némileg különbözik a differenciálgeometriában használatos definíciótól, mivel itt a legrövidebb geodetikus ív helyett egy tetszőleges geodetikus ív szerepel. A következő példa rámutat a két definíció közötti különbségre.

2.1. *Példa*. Tekintsünk egy gömböt és a rajta értelmezett ív-metrikát. Ebben az esetben a gömbnek az a része, amely nagyobb, mint a félgömb, differenciálgeometriai értelemben nem g-konvex, de a 2.1. definíció értelmében igen.

2.2. *Példa*. Egy összefüggő, teljes *Riemann sokaság* g-konvex ([8]).

2.3. *Példa*. Az M *Riemann sokaság* bármely m pontjának van olyan g-konvex U környezete, amelynek bármely két pontját összekötő U-beli geodetikus egyértelmű ([8]).

2.2. *Definíció*. Legyen $A \subset M$ egy g-konvex halmaz. Az $f\colon A \to R$ folytonos függvény g-konvex, ha bármely A-beli geodetikus ív mentén az ívhosszparamétert tekintve konvex függvényt kapunk.

A definíció alapján bármely $\gamma(s)$, $s \in [0, b]$ geodetikus ív mentén, amely a tetszőleges $m_1, m_2 \in M$ pontokat köti össze, a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$f(\gamma(tb)) \leqq (1-t)f(\gamma(0)) + tf(\gamma(b)), \quad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{2.1}$$

ahol $\gamma(0) = m_1$, $\gamma(b) = m_2$ és s az ívhosszparamétert jelenti.

2.1. Tétel. Legyen $A \subset M$ egy g-konvex halmaz és $f\colon A \to R$ egy folytonos g-konvex függvény. Akkor bármely lokális minimum pont globális minimum pont is.

A 2.1. tétel bizonyítása teljesen hasonló a konvex esethez, ezért a bizonyítást elhagyjuk.

2.1. Lemma. Legyen $A \subset M$ egy g-konvex halmaz és $f\colon A \to R$ egy folytonos g-konvex függvény. Akkor tetszőleges $m_0 \in A$ pont esetén $\{m \mid f(m) \leqq f(m_0),\ m \in A\}$ g-konvex halmaz.

Bizonyítás. Legyen $m_1, m_2 \in A$ két tetszőleges pont, amelyre az $f(m_1) \leqq f(m_0)$, $f(m_2) \leqq f(m_0)$ relációk igazak. Ekkor az A halmaz és az f függvény g-konvexitása miatt az m_1 és az m_2 pontok összeköthetők geodetikussal, amelyre a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$f(\gamma(tb)) \leqq (1-t)f(\gamma(0)) + tf(\gamma(b)), \quad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{2.2}$$

ahol $\gamma(0) = m_0$, $\gamma(b) = m_1$. Mivel $f(m_1) \leqq f(m_0)$ és $f(m_2) \leqq f(m_0)$, ezért

$$f(\gamma(tb)) \leqq f(m_0), \quad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{2.3}$$

ami éppen az állítás.

2.2. TÉTEL. Legyen $A \subset M$ egy g-konvex halmaz. Akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $f\colon A \to R$ folytonos függvény g-konvex legyen az, hogy az f függvény g-konvex legyen az A bármely pontjának egy g-konvex környezetében.

Bizonyítás.

I. Ha f az A halmazon g-konvex, akkor az állítás következik a 2.3. példából.

II. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz van két olyan $m_1, m_2 \in M$ pont, és egy $\gamma(tb)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $\gamma(0) = m_1$, $\gamma(b_2) = m_2$ geodetikus, valamint egy $t_0 \in [0, 1]$ érték, amelyekre a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$f(\gamma(t_0 b)) > f(\gamma(0)) + t_0 [f(\gamma(b)) - f(\gamma(0))]. \tag{2.4}$$

Legyen

$$l(t) = f(\gamma(tb)) - f(\gamma(0)) - t[f(\gamma(b)) - f(\gamma(0))] \tag{2.5}$$

és

$$l(t^*) = \max l(t) \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{2.6}$$

Így $0 < t^* < 1$. Ha t^* nem egyértelmű, akkor válasszuk a legkisebb t^* értéket. Legyen $\varepsilon > 0$, $t_1 = t^* - \varepsilon$, $t_2 = t^* + \varepsilon$ olyan, hogy a $\gamma(t_1 b)$ és $\gamma(t_2 b)$ pontok a $\gamma(t^* b)$ pont egy g-konvex környezetében legyenek.

Mivel

$$l(t^*) > l(t_1), \qquad l(t^*) \geqq l(t_2), \tag{2.7}$$

ezért

$$2l(t^*) > l(t_1) + l(t_2), \tag{2.8}$$

azaz

$$f(\gamma(t^* b)) > \frac{f(\gamma(t_1 b)) + f(\gamma(t_2 b))}{2}, \tag{2.9}$$

ami ellentmondás.

A g-konvexitással kapcsolatban azonnal felvetődik a következő természetes kérdés: Mi a kapcsolat a konvex és a g-konvex függvények között?

Mivel a g-konvexitás azt jelenti, hogy az $f\colon M \to R$ függvény konvex a geodetikusok mentén, ezért először az alábbi problémát vizsgáljuk:

Melyek azok a *Riemann geometriák,* amelyeknél a geodetikusok az egyenesek?

Ez a kérdés speciális esete a *Hilbert negyedik problémájának* [22], mivel itt az *M Riemann sokaság.* A választ a *Beltrami tétel* [22] adja meg.

2.3. *Definíció.* Legyen M_1, M_2 két differenciálható sokaság. A $\varphi\colon M_1 \to M_2$ homeomorfizmust geodetikus leképezésnek nevezzük, ha bármely γ M_1-beli geodetikust tekintve a φ_γ legfeljebb egy paraméter-transzformációban különbözik egy M_2-beli geodetikustól.

BELTRAMI TÉTEL. Legyen M egy összefüggő *Riemannian k-sokaság.* Tegyük fel, hogy bármely pontnak van olyan környezete, amelyet geodetikusan le lehet képezni az R^k sokaságra. Akkor az M sokaság konstans görbületű.

A következő tételnek is a *Beltrami tétel* az alapja:

2.3. TÉTEL. Az f: $M \to R$ függvény g-konvexitása akkor és csak akkor esik egybe a klasszikus konvexitás fogalommal az M sokaság bármely pontjának egy koordináta környezetében, ha M konstans görbületű, azaz az *euklideszi geometria,* a *Riemann elliptikus* és a *Bolyai—Lobacsevszkij hiperbolikus geometria* esetén.

Bizonyítás. Elegendő a „csak akkor" részt bizonyítani. Tegyük fel, hogy az f: $M \to R$ függvény g-konvexitása egybeesik a klasszikus konvexitással a sokaság minden pontjának egy koordinátakörnyezetében. Akkor minden pontnak létezik olyan $U \subset R^k$ konvex koordinátakörnyezete, amelyben a sokaságot az $\mathbf{x}_i(\mathbf{u})$: $R^k \to R^n$, $x_i(\mathbf{u}) \in C^2$, $i=1, \ldots, n$; $\mathbf{u} \in U$ függvények írják le. Így az f függvény g-konvexitása és konvexitása ezekben a koordinátakörnyezetekben az $f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in U$ összetett függvény konvexitásával egyezik meg. Mivel a geodetikus leképezések a halmazok g-konvexitási tulajdonságát megőrzik, ezért az M sokaság bármely pontjának van olyan g-konvex környezete, amelyet geodetikus leképezéssel tudunk az R^k-ba vinni. Így a *Beltrami tétel* alapján M konstans görbületű.

3. Első- és másodrendű jellemzés

3.1. LEMMA. Legyen $A \subset M$ egy nyílt, g-konvex halmaz és f: $A \to R$ egy folytonosan differenciálható függvény. Akkor az f függvény az A halmazon akkor és csak akkor g-konvex, ha bármely $m_1, m_2 \in A$ pontpár és az őket összekötő $\gamma(tb)$, $\gamma(0)=m_1$, $\gamma(b)=m_2$, $t \in [0, 1]$ geodetikus esetén a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$f(m_2)-f(m_1) \geqq \nabla f(m_1)\dot{\gamma}(0), \tag{3.1}$$

ahol $\nabla f(m_1)$ jelenti az f függvény m_1 pontbeli gradiensét, a $\dot{\gamma}(0)$ pedig a $\gamma(tb)$ függvény t szerinti differenciálhányadosát a 0 pontban.

A 3.1. lemma bizonyítása teljesen hasonló a konvex esethez.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $A \subset M$ egy nyílt, g-konvex halmaz és f: $A \to R$ egy folytonosan differenciálható g-konvex függvény. Akkor az f függvény bármely, az M sokaságra vonatkozó stacionárius pontja az f függvény globális minimum pontja is. Ezenkívül, a globális minimum pontok halmaza g-konvex.

3.1. *Definíció.* Legyen a k-dimenziós, C^2 $M \subset R^n$ sokaság megadva egy koordinátakörnyezetben $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U \subset R^k$ alakban és legyen η az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ felület valamely $\mathbf{u}$ pontjában az érintősíkra ortogonális, egységnyi hosszúságú vektor. Ekkor az η normálvektorra vonatkoztatott második alapmennyiségek a következők:

$$b_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{u})^T}{\partial u_i \partial u_j} \eta, \quad i, j = 1, \ldots, k. \tag{3.2}$$

3.1. TÉTEL. Legyen $A \subset M$ egy nyílt, g-konvex halmaz és f: $A \to R$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény. Akkor az f függvény g-konvexitásának szükséges és elegendő feltétele az A halmazon az, hogy a következő mátrix pozitív szemidefinit legyen bármely pontban:

$$H^g f = Hf|_{TM} + |\nabla f_N| B_{\nabla f_N}, \tag{3.3}$$

ahol

$Hf|_{TM}$ az f függvény *Hesse mátrixa* megszorítva az M sokaság TM érintősíkjára,

$B_{\nabla f_N}$ az M sokaság második alapformája a ∇f vektor normál komponensének az irányában.

Bizonyítás. Mivel az állítás igaz egy tetszőleges g-konvex környezetet tekintve ([18], [19]), ezért a 3.1. tétel egyszerű következménye a 2.2. tételnek.

3.2. *Definíció.* Az M sokaság m pontjában p-kovariáns tenzornak ($p>0$) nevezünk egy valós értékű p-lineáris függvényt, ami a $\underset{\smile}{\overset{1}{TM}} \times \underset{\smile}{\overset{2}{TM}} \times \ldots \times \underset{\smile}{\overset{p}{TM}}$ szorzattéren van értelmezve.

Ha a tenzor a sokaság minden pontjában értelmezve van, akkor azt mondjuk, hogy a sokaságon egy tenzormező van megadva.

A következő lépésben azt mutatjuk meg, hogy $H^g f$ egy másodrendű, szimmetrikus tenzormezőt határoz meg az A halmazon.

Legyen $\mathbf{u} \in U \subset R^k$ az $M \subset R^n$ k-dimenziós, C^2 sokaság egy U g-konvex koordinátakörnyezetének koordinátavektora. Ekkor megadható n függvény $x_i(\mathbf{u})$: $R^k \to R^n$, $\mathbf{u} \in U$, amelyek ebben a koordinátakörnyezetben a sokaságot írják le.

Vezessük be az alábbi jelöléseket és műveleteket.

$$H\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hx_1(\mathbf{u}) \\ Hx_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ Hx_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

ahol minden $Hx_i(\mathbf{u})$, $i=1, \ldots, n$ $k \times k$ típusú mátrix,

$$J = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{az } \mathbf{x}(\mathbf{u}) \textit{ Jacobi mátrixa}), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n, \quad \dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_k \end{pmatrix} \in R^k, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{y}^T H\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} y_i Hx_i(\mathbf{u}), \tag{3.7}$$

$$\dot{\mathbf{u}}^T H\mathbf{x}(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}^T H\mathbf{x}_1(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}}^T H\mathbf{x}_2(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}^T H\mathbf{x}_n(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\lambda \dot{\mathbf{u}}^T H\mathbf{x}(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^T \lambda H\mathbf{x}(\mathbf{u})\, \dot{\mathbf{u}}, \quad \lambda \in R. \tag{3.9}$$

3.2. TÉTEL. A $H_{\mathbf{x}} f + J(J^T J)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})\,(J^T J)^{-1} J^T : TM \to R$ egy másodrendű, szimmetrikus tenzormező az A halmazon.

Bizonyítás. Először a következő azonosságot bizonyítjuk:

$$\mathbf{v}^T\left(H_{\mathbf{x}} f + J(J^T J)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})(J^T J)^{-1} J^T\right) \mathbf{v} = \tag{3.10}$$
$$\dot{\mathbf{u}}^T H_{\mathbf{u}}^g f \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} \in TM, \quad \dot{\mathbf{u}} \in R^k.$$

Mivel

$$J\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{u}} \in R^k, \quad \mathbf{v} \in TM, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}^T\left(H_{\mathbf{x}} f + J(J^T J)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})(J^T J)^{-1} J^T\right) \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{v}^T H_{\mathbf{x}} f \mathbf{v} + \mathbf{v}^T J(J^T J)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})(J^T J)^{-1} J^T \mathbf{v} = \\ &= \dot{\mathbf{u}}^T J^T H_{\mathbf{x}} f J \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T J^T J(J^T J)^{-1} \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})(J^T J)^{-1} J^T J \dot{\mathbf{u}} = \\ &= \dot{\mathbf{u}}\left(J^T H_{\mathbf{x}} f J + \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})\right) \dot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De $J^T H_{\mathbf{x}} f J = Hf|_{TM}$ és $|\nabla f_N| B_{\nabla f_N} = \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})$, így az azonosság igaz.

Tekintsünk az R^k térben egy nemlineáris koordináta-transzformációt, amelyet $\mathbf{u}(\mathbf{w})$ jelöl. Akkor

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{w}}^g f &= \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{w}} J^T H_{\mathbf{x}} f J \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}} + \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{w})) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{w}} J^T H_{\mathbf{x}} f J \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}} + \nabla_{\mathbf{x}} f_N \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{w}} H\mathbf{x}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{w}} \left(J^T H_{\mathbf{x}} f J + \nabla_{\mathbf{x}} f_N H\mathbf{x}(\mathbf{u})\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{w}} H_{\mathbf{u}}^g f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ami az állítást igazolja.

Megjegyzés. $H_{\mathbf{u}} f = J^T H_{\mathbf{x}} f J + \nabla_{\mathbf{x}} f H\mathbf{x}(\mathbf{u})$ nem határoz meg tenzormezőt az A-n.

4. Optimalitási feltételek és g-konvexitás

Tekintsük a következő problémát:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\mathbf{x} \in A \subset M, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $f \in C^2$, $M \subset R^n$ egy k-dimenziós, C^2 *Riemann sokaság* és A az M egy részhalmaza.

A lokális optimalitás jellemzéséhez elegendő a sokaságot az optimum pont egy környezetében tekinteni, így a (4.1) feladat helyett az alábbi problémával foglalkozunk.

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) \in R^n \\ &\mathbf{u} \in U \subset R^k, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ahol $f(\mathbf{x})$, $x_i(\mathbf{u}) \in C^2$, $i=1, \ldots, n$ és U egy nyílt halmaz. Ezután az optimalitási feltételeket közvetlen számolással kapjuk.

4.1. TÉTEL. Ha $\mathbf{u}_0$ a (4.1) feladat egy lokális minimum pontja, akkor

$$\nabla f_N(\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)) = \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)), \tag{4.3}$$

és

$$\dot{H}^g_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)) \text{ pozitív szemidefinit.} \tag{4.4}$$

Ha egy $\mathbf{u}_0$ pontban a (4.3) feltétel teljesül és

$$H^g_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)) \text{ pozitív definit,} \tag{4.5}$$

akkor $\mathbf{u}_0$ a (4.1) feladat szigorú lokális minimuma.

A (4.3), (4.4) és (4.5) optimalitási feltételekkel, valamint a nemlineáris programozási problémák és a (4.1) feladat közötti kapcsolattal foglalkoznak a [4], [6], [17, [20] cikkek.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy a $H^g_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in U$ mátrix minden pontban pozitív szemidefinit. Akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ pont a (4.2) feladat globális minimumpontja legyen az, hogy a (4.3) feltétel teljesüljön.

A g-konvexitás a nemlineáris programozásban

Ebben a részben a

$$\begin{gathered} \min f(\mathbf{x}) \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k, \\ \mathbf{x} \in R^n \end{gathered} \tag{5.1}$$

feladattal foglalkozunk, ahol $f, h_j \in C^2, j=1, \ldots, n-k$.

Legyen

$$M = \{\mathbf{x} | h_j(\mathbf{x}) = 0, \ j = 1, \ldots, n-k\}. \tag{5.2}$$

Ha a $\nabla h_j(\mathbf{x})$, $j=1, \ldots, n-k$; $\mathbf{x} \in M$ gradiensek lineárisan függetlenek, akkor M egy k-dimenziós, C^2 *Riemann sokaság,* ahol a *Riemann metrikát* az *euklideszi metrika* indukálja. Tegyük fel, hogy M összefüggő.

Vezessük be az (5.1) feladat *Lagrange függvényét* a következő módon:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}), \tag{5.3}$$

ahol

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T [\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T]^{-1}, \tag{5.4}$$

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(\mathbf{x}) \\ \nabla h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla h_{n-k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

5.1. LEMMA. Ha a $\nabla h_j(\mathbf{x})$, $j=1, \ldots, n-k$; $\mathbf{x}\in M$ gradiensek lineárisan függetlenek, akkor

$$(5.6) \qquad |\nabla f_N| B_{\nabla f_N} = -\Big(\sum_{j=1}^{n-k} \mu_j(\mathbf{x}) H h_j(\mathbf{x})\Big)\Big|_{TM}, \quad \mathbf{x}\in M.$$

Bizonyítás. Mivel $\nabla h_j(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, $j=1, \ldots, n-k$; $\mathbf{x}\in M$, ezért a $h_j(\mathbf{x})=0$, $j=1, \ldots, n-k$ nívófelületeket egy tetszőleges pont egy kis környezetében meg lehet adni, mint egy $\mathbf{y}_j(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}\in Z\subset R^{n-1}$ $(n-1)$-dimenziós elemi felületet.

Feltehetjük, hogy a Z $(n-1)$-dimenziós paraméter halmaz minden nívófelület esetén megegyezik és $U\subset Z$ az M megfelelő koordinátakörnyezete esetén. Ezek a feltételek nem sértik az általánosságot, mivel ez a helyzet lineáris transzformációk segítségével elérhető.

Így az M sokaságot egy tetszőleges U környezetében meg lehet adni $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\in U$ formában. Az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}\in U$ felületet minden nívófelület tartalmazza, azaz

$$(5.7) \qquad \mathbf{y}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}), \quad j = 1, \ldots, n-k; \quad \mathbf{u}\in U \subset R^k.$$

Ebből következik, hogy

$$(5.8) \qquad h_j(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k$$

és (5.8)-t kétszer differenciálva kapjuk, hogy

$$(5.9) \qquad \nabla_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}(\mathbf{u})) H\mathbf{x}(\mathbf{u}) = -J^T H_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x}(\mathbf{u}))J, \quad j = 1, \ldots, n-k.$$

Az (5.9) egyenlőséget szorozzuk meg a megfelelő $\mu_j(\mathbf{x})$-szel, $j=1, \ldots, n-k$, majd az egyenlőségeket összeadva azt kapjuk, hogy

$$(5.10) \qquad |\nabla f_N| B_{\nabla f_N} = -\sum_{j=1}^{n-k} \mu_j(\mathbf{x}) J^T H h_j(\mathbf{x}) J,$$

azaz

$$(5.11) \qquad |\nabla f_N| B_{\nabla f_N} = -\Big(\sum_{j=1}^{n-k} \mu_j(\mathbf{x}) H h_j(\mathbf{x})\Big)\Big|_{TM}.$$

5.1. TÉTEL. Legyen $M=\{\mathbf{x}|h_j(\mathbf{x})=0, j=1, \ldots, n-k; \mathbf{x}\in R^n\}$ összefüggő, $f\colon M\to R$ kétszer folytonosan differenciálható függvény és a $\nabla h_j(\mathbf{x}), j=1, \ldots, n-k; \mathbf{x}\in M$ gradiensek lineárisan függetlenek. Akkor az f függvény az M halmazon akkor és csak akkor g-konvex, ha a $H_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}))|_{TM}$ mátrix pozitív szemidefinit bármely $\mathbf{x}\in M$ esetén.

Bizonyítás. A feltételek miatt M egy teljes *Riemann sokaság*. A *Hopf—Rinow tételből* [8] következik, hogy az M bármely két pontját össze lehet kötni egy geodetikus ívvel, azaz M g-konvex. Mivel

$$(5.12) \qquad H_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}))|_{TM} = \Big(H_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j(\mathbf{x}) H_{\mathbf{x}} h_j(\mathbf{x})\Big)\Big|_{TM}, \quad \mathbf{x}\in M$$

ezért az állítás az 5.1. lemmából és az 5.1. tételből már következik.

5.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $M=\{\mathbf{x}|\, h_j(\mathbf{x})=0,\ j=1, \ldots, n-k;\ \mathbf{x}\in R^n\}$ összefüggő, $f\colon M\to R$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény és a $\nabla h_j(\mathbf{x})$,

$j=1, \ldots, n-k; \mathbf{x} \in M$ gradiensek lineárisan függetlenek. Ha $Hf(\mathbf{x})$ és $-\mu_j(\mathbf{x})Hh_j(\mathbf{x})$, $j=1, \ldots, n-k$; $\mathbf{x} \in M$ pozitív szemidefinit, akkor $f(\mathbf{x})$ g-konvex az M halmazon.

5.1. *Példa.* Legyen

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix} \in R^3, \quad U = \left\{(u_1, u_2) \middle| \begin{matrix} -1 < u_1 < 1 \\ -1 < u_2 < 1 \end{matrix}\right\} \subset R^2$$

és

$$f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ex_1^2 + 1x_2^2 + qx_3^2.$$

Akkor az $f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in U$ függvény *Hesse mátrixát* kiszámítva kapjuk, hogy

$$Hf = \begin{pmatrix} e-q & 0 \\ 0 & 1-q \end{pmatrix},$$

a geodetikus *Hesse mátrixot* kiszámítva pedig a következő kifejezést nyerjük:

$$H^g f = \left((e-q)x_1^2 + (1-q)x_2^2\right) \begin{pmatrix} 1+\dfrac{x_1^2}{x_3^2} & \dfrac{x_1 x_2}{x_3^2} \\ \dfrac{x_1 x_2}{x_3^2} & 1+\dfrac{x_2^2}{x_3^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+q\dfrac{x_1^2}{x_3^2} & q\dfrac{x_1 x_2}{x_3^2} \\ q\dfrac{x_1 x_2}{x_3^2} & 1+q\dfrac{x_2^2}{x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Ha $e>q$, $1>q$, $q>0$, akkor $f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in U$ konvex függvény és az f függvény g-konvex az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U$ felületen.

Ha $0<e<q<1$, akkor $f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in U$ nem konvex, de az f függvény g-konvex az $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in U \cap \left\{(u_1, u_2) | u_2 > \sqrt{\dfrac{q-e}{1-q}}\, u_1\right\}$ felületen, tehát egy lokális optimum egyben globális is.

5.2. *Példa.* Tekintsük a következő nemlineáris programozási feladatot:

$$\min \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x}$$

(5.13)

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-k; \ \mathbf{x} \in R^n.$$

Legyen $M = \left\{\mathbf{x} \middle| \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} = 0,\ i=1, \ldots, n-k;\ \mathbf{x} \in R^n\right\}$ összefüggő.

Ha a $\mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{p}_i$, $i=1, \ldots, n-k$; $\mathbf{x} \in M$ vektorok lineárisan függetlenek, a $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_i$, $i=1, \ldots, n-k$ mátrixok pozitív szemidefinitek és $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \geqq 0$, $\mathbf{x} \in M$ (a $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ az (5.4) képlettel van adva), akkor az $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x}$ függvény g-konvex az M halmazon.

6. A g-konvex programozási probléma

A g-konvex programozási probléma a következő:

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$(6.1) \qquad g_i(\mathbf{x}) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$\mathbf{x} \in A \subset M \subset R^n,$$

ahol

M egy *Riemann sokaság*
A egy g-konvex halmaz
f, g_i, $i=1, \ldots, l$ g-konvex függvények A-n.

Könnyű belátni, hogy a (6.1) probléma feltételi halmaza g-konvex. A (6.1) feladat a konvex programozási feladatot mint speciális esetet tartalmazza.

Köszönetnyilvánítás: Szeretnék köszönetet mondani a lektoroknak a hasznos észrevételekért és tanácsokért.

IRODALOM

[1] AVRIEL, M., *Nonlinear Programming — Analysis and Methods* (Prentice Hall, Inc. N. J., 1976).
[2] AVRIEL, M. and ZANG, I., "Generalized arcwise connected functions and characterizations of local-global properties", *Journal of Optimization Theory and Applications* **32** (1980) 407—425.
[3] BEN-TAL, A., "On generalized means and generalized convex functions", *Journal of Optimization Theory and Applications* **21** (1977) 1—13.
[4] BISHOP, R. L. and CRITTENDEN, R. J., *Geometry of Manifolds* (Academic Press, New York, 1964).
[5] CASTAGNOLI, E. and MAZZOLENI, P., "Generalized connectedness for families of arcs", *Optimization* **18** (1987) 3—16.
[6] GABAY, D., "Minimizing a differentiable function over a differentiable manifold", *Journal of Optimization Theory and Applications* **37** (1982) 177—219.
[7] HARTWIG, H., "On generalized convex functions", *Math. Operationsforsch. und Statist., Ser. Optimization* **14** (1983) 49—60.
[8] HICKS, N. J., *Notes on Differential Geometry* (Van Nostrand Publishing Company, Princeton, 1965).
[9] HORST, R., "A note on functions whose local minima are global", *Journal of Optimization Theory and Applications* **36** (1982) 457—463.
[10] HORST, R., "Global optimization in arcwise connected metric spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications* **104** (1984) 481—483.
[11] LUENBERGER, D. G., "The gradient projection methods along geodesics", *Management Science* **18** (1972) 620—631.
[12] LUENBERGER, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1973).
[13] MARTIN, D. H., "Connected level sets, minimizing sets and uniqueness in optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications* **36** (1982) 71—93.
[14] NOŽIČKA, F., „Affin-geodätische Kurven streng konvexer Hyperflächen als Lösungen eines bestimmten Lagrange'schen Variations-Problems", Preprint Nr. 152, Sektion Mathematik, Berlin, 1987.
[15] ORTEGA, J. M. and RHEINBOLDT, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables* (Academic Press, New York, 1970).
[16] PRENOWITZ W. and JANTOSCIAK, J., *Join Geometries* (Springer-Verlag, New York, 1979).
[17] RAPCSÁK, T., „A nemlineáris programozási feladat optimalitási feltételeinek differenciálgeometriai vizsgálata", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **9** (1983) 73—84.

[18] RAPCSÁK, T., „Az ívkonvexitásról", *Alkalmazott Matematikai Lapok* **10** (1984) 115—123.
[19] RAPCSÁK, T., "Arcwise-convex functions on surfaces", *Publicationes Mathematicae* **34** (1987) 35—41.
[20] RAPCSÁK, T., "Minimum problems on differentiable manifolds", *Optimization* **20** (1989) 3—13.
[21] SINGH, C., "Elementary properties of arcwise connected sets and functions", *Journal of Optimization Theory and Applications* **41** (1983).
[22] SZABÓ, Z. I., "Hilbert's fourth problem, I.", *Advances in Mathematics* **59** (1986) 185—300.
[23] ZIMMERMANN, K., "A generalization of convex functions", Ekonomicko-Matematicky Obzor, Rocnok **15** (1979) 147—158.

(Beérkezett: 1988. szeptember 28.)

RAPCSÁK TAMÁS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE
1111 BUDAPEST, KENDE U. 13—17.

ON THE GENERALIZATION OF THE CONVEX PROGRAMMING

T. RAPCSÁK

In the paper the convex programming is generalized if the feasible set of nonlinear programming problem can be represented as a Riemannian manifold.

Alkalmazott Matematikai Lapok **14** (1989) 461—468

HÍREK ÉS KÖZLEMÉNYEK

MATEMATIKAI MÓDSZEREK ÉS PROBLÉMÁK A HAZAI AGRÁR-, BIOLÓGIAI- ÉS ORVOSTUDOMÁNYOKBAN

1. Bevezetés

A biometria azoknak a matematikai modelleknek szisztematikus vizsgálatával foglalkozik, amelyek a biológiai kutatómunkában felvetődő kvantitatív jellegű problémák megoldásához adnak lehetséges módszereket. Ebben az értelemben a biometria alkalmazott matematikai diszciplína, amelynek művelése elsősorban a matematikusok feladata.

A biológus kutatók biometriai tevékenysége abban áll, hogy adott problémáikhoz megkeressék a megfelelő matematikai modellt és azt hozzáidomítsák problémájuk biológiai természetéhez, keressék és analizálják a felhasználandó matematikai módszerek alkalmazhatóságának korlátait. Ez is biometria, de e vizsgálatok eredményei nem általános érvényűek, erősen módosítják a speciális biológiai tudományterületek problémáinak a megfigyelési módszerektől függő sajátosságai. Ilyen értelemben beszélhetünk mezőgazdasági biometriáról, orvosi biometriáról, a biológusok biometriájáról, és ilyen értelemben interdiszciplináris tudományág a biometria. Az ilyen biometriai vizsgálatokat tartalmazó cikkek — kevés kivételtől eltekintve — már nem biometriai, hanem az illető biológiai szaktudomány speciális folyóirataiban látnak napvilágot.

Ha a biometriát mint alkalmazott matematikai tudományt tekintjük, akkor az *MTA* vonatkozásában a *III. Osztályhoz* tartozik. Ha viszont mint biológiai tudományokat nézzük, akkor tárgykörüknek megfelelően a *IV.*, az *V.*, illetve a *VIII. Osztály* a felügyeleti szervük.

A feladat

A *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Matematikai Bizottsága* „Matematikai módszerek és problémák a hazai agrár-, biológiai és orvostudományokban" címen helyzetelemző tanulmány készítését határozta el. Az *Osztály elnöke* a helyzetelemző tanulmány kidolgozására biometriával foglalkozó matematikusokból, agrárszakemberekből, orvoskutatókból és biológusokból interdiszciplináris bizottságot hozott létre.

A bizottság a rendelkezésre álló adatok alapján kb. 100 oldalas tanulmány elkészítésével tett eleget az Osztály megbízásának. Ennek a tanulmánynak rövidített alakja a jelen beszámoló.

Célkitűzés

Ha feltesszük azt a kérdést, melyek azok a biometriai témakörök, amelyeknek vizsgálatával a hazai biometriai alkalmazások szempontjából foglalkoznunk kell, a következőket mondhatjuk.

Mivel a biológiai megfigyeléseket a véletlen igen nagy mértékben megterheli, a biológiai kutatásokban nagy fontosságú a biometriának az az ága, amely a valószínűségszámításra és a matematikai statisztikára támaszkodik. Ezt a tudományágat biostatisztikának nevezzük, amely tehát nem más, mint biológiai problémákra alkalmazott matematikai statisztika.

Az agrárbiológián belül a tervezési kérdésekben szerepet játszik az operációkutatás, ennek elsősorban az az ága, amelyet lineáris programozásnak nevezünk.

A számítástechnika térhódításával a hazai biometriában, elsősorban az orvosi biometriában — de az agrártudományban is — a hangsúly az elméletről a gyakorlati kérdések sokszor nagy adatrendszerek kiértékelését kívánó megoldására terelődött át. Ezt a munkát a számológépek csak lehetővé tudják tenni, így ebben a vonatkozásban is lényeges ezt a munkát biztosító biometriai tevékenység.

Mivel operációkutatási kérdésekkel az *MTA* külön bizottsága foglalkozik, továbbá ugyancsak szakbizottságok tartják kezükben a számítástechnikai módszereknek hazai művelési lehőteségeit, feladatul a biostatisztika szerepének vizsgálatát tűzzük ki a hazai agrárbiológiai, orvosbiológiai és biológiai kutatások vonatkozásában. Csak éppen érintjük az operációkutatás szerepét a mezőgazdasági termelésben, és csak rámutatunk a számítástechnika jelentőségére az orvosi kutatómunkában.

2. Kutatási bázisok, biométerek

2.1. Adatok összegyűjtésének megszervezése

Ahhoz, hogy a „Célkitűzés"-ben megfogalmazott kérdésekre választ adhassunk, és ehhez a megfelelő adatok rendelkezésünkre álljanak, kérdőívvel fordultunk a hazai biológiai és alkalmazott biológiai kutatóhelyekhez, hogy az ott dolgozó munkatársak biometriai tevékenységével kapcsolatban a következőkre nézve adjanak választ: 1. Név, képzettség, tudományos fokozat. 2. Az intézmény, ahol dolgozik, ennek címe, és a megkérdezett itteni beosztása. 3. A biometria melyik területén dolgozik? 4. Biometriai tárgyú könyveinek (cím, kiadó, a kiadás helye és éve) és dolgozatainak (cím, a folyóirat neve, kötetszám, a megjelenés éve, lapszám) jegyzéke. 5. Melyik hazai, illetve nemzetközi biometriai társaság tagja, milyen tisztséget visel ezekben? Mely hazai, illetve külföldi biometriai konferenciákon vett részt? A megkérdezettek közül 42 intézmény adott választ az ezekben dolgozó mintegy 80 biométerről.

Ha biométernek nevezzük azt a szakembert, aki biológiai problémákat matematikai módszerekkel old meg, akkor az a kérdés, milyen módszerek és problémák vannak a hazai agrár-, biológiai és orvostudományokban, egyenértékű azzal, milyen biometriai tevékenységet folytatnak biométereink a szóban forgó tudományterületeken és milyen problémák merülnek fel munkájuk közben. Ez a magyarázata annak, hogy célkitűzésünk megoldása végett a kérdőíveken biométerekről és tevékenységükről érdeklődtünk.

A kapott adatokból a dolgozatok közül csak az 1975—1985. időközben megjelenteket vettük figyelembe, tehát egy évtizedre terjedő irodalomban kerestünk választ kérdéseinkre. Ez, továbbá az, hogy nem minden megkérdezett biológiai kutató intézménytől kaptunk választ, azt mutatja, nem a fellelhető teljes anyagra, hanem annak aránylag nagy részére sikerült támaszkodnunk. A beérkezett anyag így elsősorban egy reprezentatív minta szerepét játssza.

2.2. Kutatóhelyek és biométerek

A vizsgálatokba bevont kutatóhelyeken dolgozó mintegy 80 biométer fele minősített. Vannak közöttük akadémikusok, a tudomány doktorai és a tudomány kandidátusai.

Biometriával is foglalkozó matematikai kutatóhelyek. A *budapesti, debreceni és szegedi tudományegyetemek matematikai tanszékei,* az *MTA Matematikai Kutatóintézete,* az *MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete,* a *Központi Statisztikai Hivatal* stb. Ezeken több mint 20 matematikai alapképzettségű kutató foglalkozik biometriával, akiknek mintegy a fele a matematikai tudományok doktora illetve kandidátusa.

Mezőgazdasági kutatóhelyek. A számbavett kutatóhelyek magukba foglalják többek között a *debreceni, gödöllői, keszthelyi agrártudományi egyetemek* egyes intézeteit, a *Kertészeti és Élelmezésipari Egyetem,* a *Budapesti Műszaki Egyetem* több tanszékét, az *MTA Martonvásári Mezőgazdasági Kutató Intézetét, Növényvédelmi Kutató Intézetét,* a *szegedi Gabonatermesztési Kutató Intézetet.* Biometriai kérdésekkel foglalkozó mintegy 30 kutató között van mezőgazdasági mérnök, matematikus, közgazdász, vegyész, biológus, kertészmérnök, fizikus. Harmadrészük minősített, a különböző tudományterületek doktorai és kandidátusai.

Orvostudományi kutatóhelyek. A számbavett orvosi kutatóhelyeken (a *debreceni, pécsi, szegedi orvostudományi egyetemek* több klinikája és intézete, a *SOTE Biofizikai Intézete* és több más klinikája és intézete, *Gyógyszerkutató Intézet Közös Vállalat, Országos Közegészségügyi Intézet, Országos Onkológiai Intézet, Fejér megyei Tanács Központi Kórházának pszichiátriai osztálya* stb.) orvosok, matematikusok, fizikusok, biológusok foglalkoznak biometriai kérdésekkel. Ezek közül többnek tudományos minősítése is van, akadémikus, tudományok doktora, illetve kandidátusa fokozat.

Biológiai kutatóhelyek. Ebben a vonatkozásban a *budapesti, debreceni és szegedi tudományegyetemek biológiai intézeteinek,* az *MTA ökológiai és Botanikai Kutató Intézetének,* a *Központi Statisztikai Hivatal Népességkutató Intézetének,* a *Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Biológiai Tanszékének,* a *nyíregyházi Jósa András Múzeumnak* stb. adatait vettük figyelembe. E kutatóhelyeken több mint 20 kutató foglalkozik biometriai kérdésekkel, akiknek zöme biológus, de van közöttük matematikus, antropológus, demográfus is. E kutatóknak mintegy fele minősített, van közöttük akadémikus, tudományok doktora és a tudományok kandidátusa.

A figyelembe vetteken kívül még számos más olyan magasan kvalifikált kutató is meg volna említhető, akik alapképzettségük szerint ugyan különböző tudományágakat képviselnek, de akik biometriai kérdésekkel foglalkoznak, aláhúzván ezzel a biometria interdiszciplináris jellegét.

3. Biometriai társaságok és rendezvények

3.1. Biometriai társaságok

A magyar biométerek a következő társaságoknak tagjai:

Az MTESZ tagegyesületeként működő Magyar Biológiai Társaság Biometriai Szakosztálya. Taglétszáma mintegy 300 fő. Első elnöke RÉNYI ALFRÉD, későbbi elnökei: JUVANCZ IRÉNEUSZ, SVÁB JÁNOS.

International Biometric Society. Abból a célból, hogy a matematikai ismeretek terjesztésével, a matematikai statisztika módszereinek fejlesztésével a biometriai szemléletnek a biológiai tudományokban való kialakítását elősegítse, alakult meg 1947-ben ez a biometriai társaság. Céljainak elérésére adja ki a *Biometric Society* a *Biometrics,* a *Biometrische Zeitschrift* és a *Biometrie-Praximetrie* c. folyóiratokat. A *Biometric Society* megalakulása után nemsokára létrejött ennek magyar csoportja. Első vezetője JUVANCZ IRÉNEUSZ lett. Azután SVÁB JÁNOS vette át ezt a tisztet, aki egyben a *Biometric Society* vezetőségének is tagja volt.

3.2. Tudományos rendezvények

Itt csak Magyarországon megrendezett biometriai konferenciákról lesz szó. A 2. fejezet adatai szerint azonban a magyar biométerek számos külföldi konferencián is rendszeresen vesznek részt.

Magyar Biometriai Konferencia, 1958. *Budapest.* Szervezője az *MTA.*

Magyar Biometriai Konferencia, 1968. *Budapest.* Szervezője az *MTA.*

Magyar Biometriai Konferencia, 1981. *Budapest.* Szervezője a *Magyar Biológiai Társaság.*

First European Biometric Conference, 1985. *Budapest.* Szervezője a *Magyar Biológiai Társaság* az *MTA* közreműködésével.

Biometriai Világkongresszus. 1990-ben kerül megrendezésre, lebonyolítására *Magyarországot* kérték fel.

Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában (NJSZ Kollokvium). 1973-tól kezdve szervezik meg rendszeresen Szegeden ezt a konferenciát, amelyen sok biométer jelenik meg rendszeresen.

Magyar Operációkutatási Konferencia. Rendszeresen megrendezésre kerülő konferencia, amelyen többek között a mezőgazdasági jellegű operációkutatási eredményeket is bemutatják és beszélik meg.

4. A biometria szerepe a hazai biológiai kutatásokban

Ebben a fejezetben mondottak hátterét a 42 kutatóhely részéről rendelkezésre bocsátott irodalomjegyzékben található könyvek és egyéb publikációk alkotják. A publikációs jegyzék 545 adatot rögzít. Ezek közül 63 könyveknek, jegyzeteknek, kandidátus, illetve doktori értekezéseknek bibliográfiai adatait tartalmazza. 6 könyv és 62 dolgozat főképp matematikai tárgyú. 28 könyv, 5 módszertani, 25 állattani és 91 növénytani dolgozat mezőgazdasági tárgykörű. Orvostudományi témával foglalkozik 17 könyv, 14 kibernetikai és 142 egyéb tárgykörű publikáció. Általános biológiai tárgykörű 12 könyv, 23 módszertani, 9 genetikai, 10 botanikai, 42 Balaton-project, 8 hidrobiológiai, 29 antropológiai, 22 demográfiai, 3 erdőkutatási tárgykörű dolgozat.

Arra, hogy a számításba vett tíz év alatt az egyes biológiai tudományokban milyen eredmények születtek és hogy milyen biometriai módszereket használtak fel ezek elérésére, első közelítésben tájékoztatást nyújtanak a bibliográfiában felsorolt publikációk címei és talán szerzői is. Viszont ebben a vonatkozásban nem is lehetett többet tenni, mert nem álltak rendelkezésre átnézésre maguk a publikációk.

4.1. Biostatisztika

A biostatisztika, amint ezt már a bevezetésben is említettük, a matematikai statisztika módszereire épül. Így természetes, hogy ennek kapcsán a matematikai statisztikával is foglalkozunk.

A hazai biostatisztikai vizsgálatok fejlődése

Hazánkban az első világháború előtt a mérési adatokat kiértékelő minden tudományban, így a biológiában is módszerként a *Gauss-féle hibaelméletet* használták fel. Ez az elmélet csak leíró jellegű jellemzésekre volt alkalmas. A biostatisztikában, így a matematikai statisztikában is ennek a századnak első negyedében új fordulat következett be, amikor az edinbourgi egyetem tanára, R. A. FISHER épp a mezőgazdasági jelenségek tanulmányozása révén megkezdte annak az új elméletnek, a modern matematikai statisztikának a kiépítését, amely a mérésekben realizálódó megfigyeléseknek új szemléletéhez vezetett. Azóta e kérdésekkel foglalkozó tudomány, a matematikai statisztika és ennek egyik ága, a biostatisztika terebélyes elméletté nőtte ki magát.

Magyarországon JORDAN KÁROLY volt az első, aki matematikai statisztikai kérdésekkel rendszeresen foglalkozott. Már 1927-ben Párizsban, a *Gauthier-Villars* kiadásában jelenik meg *Statistique Mathématique* című munkája, amelyet a francia akadémia mutatott be és amelynek bővített változata Budapesten az *Atheneum Kiadónál* jelent meg. Ezt a tényt annál is inkább értékelnünk kell, mivel tudott, hogy az európai kontinensen a matematikai statisztikai vizsgálatok a jelen század első felében erősen stagnáltak. Ennek következménye volt pl., hogy amikor 1956-ban L. SCHMETTERER bécsi professzor megírta az első német nyelvű modern matematikai statisztikai könyvet, meg kellett alkotnia a matematikai statisztikának német terminológiáját. Könyvéhez angol—német szakszótárt is mellékelt, hogy a német statisztikusok tudják, miről is van szó. JORDAN hatására Magyarországon többen is foglalkoztak matematikai statisztikával, sőt kutatómunkáját is folytatták. Nagyrészt ezekből verbuválta RÉNYI ALFRÉD a második világháború után az *Alkalmazott Matematikai Intézet* matematikai statisztikai osztályának kutatógárdáját. Meg kell jegyezni, hogy JORDAN könyvét csak 40 év múlva követte nálunk a második egzakt felépítésű matematikai statisztikai munka, VINCZE ISTVÁN könyve.

A második világháború után több magyar orvoskutató, így JUVANCZ IRÉNEUSZ is lehetőséget kapott arra, hogy a modern matematikai statisztikára épülő biostatisztikai módszereket FISHER utódjánál, FINNEYNÉL *Edinbourghban* tanulmányozza. Hazatérve, RÉNYI ALFRÉD felkérésére az *Alkalmazott Matematikai Intézet* statisztikai osztályon belül kialakított biometriai csoport vezetője lett és ezt a szerepét akkor is megtartotta, amikor ez az intézmény a *SOTE* egyik részlegévé vált. JUVANCZ nemcsak azzal törődött, hogy orvosoknak, mezőgazdáknak segítsen biometriai problémáik megoldásában, hanem azzal is, hogy a biometria területén művelt kutató orvosgárdát neveljen ki. Ebből a célból indította meg posztgraduális biometriai tanfolyamait, amelyek később az *Orvostovábbképző Egyetem* irányítása alá kerültek. Az ő agilitásának volt köszönhető az is, hogy orvoskutatók számára lehetővé vált a biometriának kandidátusi vizsgatárgyként való választhatósága. Vele egy időben a *SOTE Biofizikai Intézete* is foglalkozott és mind a mai napig foglalkozik biometriai kutatások megszervezésével és irányításával.

Kissé később SVÁB JÁNOS a mezőgazdasági biometria területén kezdte meg és folytatta ugyanazt az apostoli munkát, amit JUVANCZ az orvosbiológia vonatkozásában végzett. SVÁB munkásságának egyik eredménye az, hogy külföldi megbecsülést szerzett a hazai agrárbiometriai vizsgálatoknak.

A teljesség kedvéért meg kell jegyezni, hogy eredetileg az *Alkalmazott Matematikai Intézet* biometriai csoportjában dolgozók egy része később a *SZTAKI* keretei között életre kelt biometriai csoportban folytatta biometriai tevékenységét. Habár ezek a biométerek mind a mai napig változatlan lendülettel dolgoznak a *SZTAKI*-ban, a csoport önállósága megszűnt.

A hazai biostatisztikai vizsgálatok jelen állapota

A következő megállapítások az adatokat szolgáltató 42 kutatóhely publikációs tvékenységén alapulnak.

A hazai tervszerű alkalmazott matematikai kutatások megindítója, RÉNYI ALFRÉD szervező tevékenységének, továbbá JUVANCZ IRÉNEUSZ és SVÁB JÁNOS biometriai munkájának hatására és a közben napvilágot látott speciális (mezőgazdasági, orvosi, általános biológiai, biometriai) könyvek hatására nevelődött fel a biometrikusoknak nagy tábora. Ennek a tábornak tagjait közelítőleg három csoportba oszthatjuk: Az elsőben a teoretikusok foglalnak helyet, azok, akik a matematikai statisztika, a biostatisztika előfeltevéseit vizsgálva jutnak el olyan eredményekhez, amelyeknek lehetnek alkalmazhatósági lecsapódásai is a biometriában. A harmadik csoportba tartozók valamely biológiai tudomány kutatói és kutatómunkájukban közvetlenül hasznosítják biometriai ismereteiket, alkalmaznak kidolgozott biometriai módszereket. A második csoportba tartozók feladata az, hogy az alkalmazásokra alkalmas új matematikai statisztikai eredményeket adaptálják a biometria egyes területein kutatók céljaira. Az első és második csoportba tartozó biometrikusokat a felsorolt matematikai, a harmadik csoportba tartozókat pedig a felsorolt biológiai kutatóhelyeken találjuk meg. Természetesen a csoportok között nincsenek éles választóvonalak, a határok elmosódtak, összefolynak.

Ha most már a vizsgált biometriai munkákat vesszük szemügyre, ezeket is a fenti szempontoknak megfelelően osztályozhatjuk. Így vannak olyanok, amelyek biometriai szempontból teoretikus eredmények, olyanok, melyeknek lényege új matematikai eredmények adaptálása a biológiai tudományok felé, és vannak olyanok, amelyek biológiai jellegűek, a biometriát valamely módszerén át közvetlenül hasznosítják.

Nyilvánvaló, hogy az első és második csoportba tartozó dolgozatok matematikai eredményeket tartalmaznak, így ismertetésük a nemzetközi matematikai referáló folyóiratokra tartozik, amelyek ezeket vagy a matematikai statisztikai, vagy a biometria címszó alatt közlik, aszerint, amint matematikai statisztikai vagy biostatisztikai eredményekről van szó. Így a *Mathematical Reviews* a 92 kódszámú biometria címszón belül gyűjti össze a megjelent matematikai jellegű biometriai dolgozatokat. Végignézve a *Mathematical Reviews* utolsó öt évfolyamát, egyetlen magyar szerzőtől származó dolgozat referátuma sem található meg a fenti címszavak valamelyikén. Ennek egyik oka lehet, hogy a *Mathematical Reviews* szerkesztői a második csoportba tartozó hazai biostatisztikai dolgozatokat címük alapján nem tudják besorolni a fent jelzett címszavak egyikébe sem. Az is ok lehet, hogy biométereink nem publikálnak olyan nemzetközi folyóiratokban, amelyet a *Mathematical Reviews* biometriai szempontból számon tart. Az, hogy a *Biometric Society* magyar tagok részvételét biztosítja a vezetésben és az elnökségben, egyik bizonyítéka annak a magas szintű elismerésnek, amit a magyar biométerek munkája nemzetközi vonatkozásban kiváltott. De ennek bizonyítéka az is, hogy magyar biométerekkel rendeztették meg a *First European Biometric Conference*-t Budapesten és szeretnék megrendeztetni ugyanitt 1990-ben a biométerek világkongresszusát.

A harmadik csoportba tartozó biometriai munkák speciális biológiai eredményeket tartalmaznak, így referálásuk nem matematikai referáló folyóiratokban történik.

Meglepő, hogy a biostatisztikai dolgozatok elsősorban azokra a matematikai statisztikai módszerekre építenek, amelyek feltételezik, hogy az az alapsokaság, amelyből a minta származik, normális eloszlású. Csak elvétve találkozunk nemparaméteres módszerekkel. Ennek nem utolsósorban az is oka lehet, hogy a nemparaméteres módszerekkel szemben, különösen a rendstatisztikai módszerekkel szemben a hazai biométerek részéről kezdettől fogva bizonyos tartózkodás volt tapasztalható.

Egy másik érdekes tapasztalat, hogy az alkalmazott matematikai statisztikai módszerek bizonyos sztatikus szemléletet tükröznek. Majdnem mindig olyan módszereket alkalmaznak, amelyek adott időpontban rögzített megfigyelésekre építenek. Pedig a biológiai folyamatok időben játszódnak le. Így az lenne a természetes, ha a sztochasztikus folyamatok elmélete, ennek az utóbbi időben kiépített statisztikája is nagyobb szerephez juthatna a biológusok kutató munkájában. Ilyen jellegű kiértékelési eljárások szerepet kaptak a hazai biometriában, de csak elvétve. A tekintetbe vett mintegy hatszáz dolgozatból csak egy-kettő érint időben lejátszódó folyamatokat. Így a *Gompertz—Makeham formulával* kapcsolatban, és egy helyen az alkalmazó a *Markov-láncok* elméletére épít.

Pedig nem lehet közömbös, hogy az ország gazdasági életében nagy szerepet játszó mezőgazdasági kutatásokban, vagy az országos egészségi ügyekben szerepet játszó orvosi problémák megoldásában, vagy a biológiának most lejátszódó ugrásszerű fejlődésében az új statisztikai módszerek alkalmazásra kerülnek-e vagy nem. Ehhez szükség volna annak a matematikus rétegnek a megerősödésére, amelyet az előzőkben adaptálóknak neveztünk el. Újra kellene szervezni vagy a *Matematikai Kutató Intézetben*, vagy a *SZTAKI*-ban az elsorvasztott biometriai csoportot. A hazai biométerek áttekintése azt mutatja, hogy rendelkezésre áll ilyen csoport eredményes működését biztosító magasan kvalifikált szakembergárda.

Mivel a biostatisztika a matematikai statisztika eredményeit a biológiai kutatásokban gyümölcsöztető diszciplina, talán nem érdektelen a következő megjegyzés.

Az *International Statistical Institute* tanulmányban foglalkozott a statisztikusok különböző csoportjai közti minél hatékonyabb együttműködés lehetőségeivel. E tanulmány a statisztikusokat a következő három csoportba osztja: 1. Elméleti statisztikusok. 2. A statisztikai adatok szakértői. 3. A statisztikai adatok elemzői. E három kategória között, a statisztika elméleti és gyakorlati művelői között a tanulmány szerint egyre mélyülő szakadék keletkezett. Ennek egyik fő oka, hogy a matematikai statisztikusok oktatásában túlzott hangsúlyt kaptak az elméleti tanulmányok, az öncélú matematikai statisztikai vizsgálatok. Ennek az a következménye, hogy a hallgatók nem készülnek fel kellőképp olyan jellegű munkára, amelyet végzésük után el kell látniuk. Ennek kiküszöbölésére megfelelő egyensúlynak kell beállnia az elméleti és gyakorlati kiképzés között. A tanulmány készítői szerint ez a megállapítás általános érvényű, vonatkozik a fejlett és a kevésbé fejlett országok matematikai statisztikai képzésére egyaránt. Így nekünk is szembe kell néznünk ezzel a problémával.

4.2. Operációkutatási vizsgálatok a mezőgazdaságban

Ismeretes, hogy operációkutatásnak azoknak a matematikai módszereknek az összességét nevezik, amelyeket matematikai programozás, hálótervezési eljárások, készletgazdálkodási modellek, ökonómiai módszerek címszavak alatt foglalnak össze. Mezőgazdasági vonatkozásban ezeket a módszereket a gazdaságossággal, a termelés szerkezetének irányításával és a hatékonysággal kapcsolatos kérdések megválaszolására veszik igénybe.

Azok az adatok, amelyekre a lineáris programozási módszerek alkalmazásánál a mezőgazdasági kutatás épít, a véletlennel terheltek. Így célszerűbb lenne a sztochasztikus programozás módszerére építeni. Viszont a lineáris programozási eljárások egyszerűsége, könnyen kezelhetősége miatt a sztochasztikus programozás nem kapott polgárjogot az agrárbiológiai kutatásokban.

Hazai vonatkozásban az operációkutatásnak igen magas szintű az elméleti bázisa, sok jónevű matematikus dolgozik ebben a témakörben. Így a mezőgazdaságban jelentkező optimalizálási kérdések megválaszolásához megvan az elméleti háttér. Viszont úgy tetszik, hiányzik az a középső réteg, amely a teoretikusok és a felhasználók között közvetít, amelyhez tartozó matematikusok és agrármérnökök feladata az elméleti eredmények adaptálása, finomítása, alkalmassá tétele adott mezőgazdasági feladattal kapcsolatos optimum megkeresésére.

4.3. Számítástechnika és orvostudomány

A számítástechnika térhódításával a hazai biometriában, elsősorban az orvosi biometriában a hangsúly az elméletről a gyakorlati kérdéseknek sokszor nagy adatrendszerek kiértékelését igénylő megoldására tevődött át. Ezt a folyamatot a számológépek csak lehetővé tudják tenni, a lehetőségek kihasználásához, a módszerek alkalmazásához megfelelő szakembergárda szükséges. Ennek létrehozása és kinevelése igen fontos feladat.

Az orvostudományok területén fellépő számítástechnikai kérdések és eredmények a következő csoportokba oszthatók: 1. A számítástechnika alkalmazása a kórházi, klinikai mérő, vizsgáló, figyelő és diagnosztikai rendszerekben, adatfeldolgozásban és -analízisében. 2. A számítástechnika alkalmazása az elméleti orvostudomány, konkrétan a biofizika, élettan, biológia terén folytatott kutatásokban. 3. A számítástechnika alkalmazása a járó- és fekvőbeteg-ellátás kórházi és egyéb egészségügyi szervezési kérdések megoldásában. 4. A számítástechnika alkalmazása az orvosképzésben.

Ezekkel a kérdésekkel foglalkozott a múltban és a feleletet is megtalálta ezekre a „Számítástechnikai módszerek, rendszerek és berendezések fejlesztése, adaptálása az orvostudományban és egészségügyben” című kutatási főirány munkaközössége, amelynek koordináló intézetei a *SOTE Számítástechnikai Csoport* és az *Eü. Szervezési, Tervezési és Információs Központ*. Az eredményekről külön tanulmány számolt be.

4.4. Összefoglalás

Végigtekintve a vizsgált biológiai kutatóhelyeknek a biométerekre vonatkozó adatain, megállapíthatjuk, hogy a hazai biológiai kutatások széles látókörű, alapos felkészültségű biométer gárdára építhetnek. A bibliográfiai adatok tanúsága szerint aránylag sok eredmény kutatási együttesek munkájának gyümölcseként jelentkezik. A teoretikus, az adaptáló matematikus, a szakbiométer egyaránt szerepet játszik ezekben a munkákban. A különböző alapképzettségű, de közös matematikai nyelvet beszélő biométerek új gondolatokkal és ötletekkel járulnak hozzá a megfigyelt adatokban rejlő értékes információk elemzéséhez. Az anyag végignézése után az volt a benyomásunk, hogy ezek a biométerek tudnak egymásról, ha szükségük van rá, építenek is egymás tudására. E szakmai ráutaltságon kívül a kapcsolattartásban szerepe lehet a *Biometriai Szakcsoportnak*, különösen vezetőségének. Legnagyobb részük él azzal a lehetőséggel, hogy részt vegyenek a hazai biometriai rendezvényeken, ezeken problémáikról beszéljenek, kiadványaikban publikáljanak. Érdekes az is, mennyien és milyen sokféle külföldi biometriai rendezvényen vesznek részt ápolván ezzel nemcsak a hazai, hanem a külföldi biométerekkel való kapcsolatokat.

Az aktuális biostatisztikai problémák korszerű megoldását elősegíthetné a teoretikus matematikai statisztikusokkal való szorosabb együttműködés.

5. A matematika szerepe a biológia oktatásával foglalkozó felsőfokú oktatási intézményekben

Matematika a mezőgazdasági felsőoktatásban

A mezőgazdasági felsőfokú oktatási intézményeknek tantervükben biztosított jó lehetőségeik vannak arra, hogy matematikai, biometriai és operációkutatási ismereteket sajátíttathassanak el hallgatóikkal megfelelő szinten és megfelelő óraszámban. A matematikusi és számítástechnikai oktatószemélyzet biztosítani is tudja a matematikai és számítástechnikai előadások és gyakorlatok megfelelő szintű vitelét. A biometria oktatásával kapcsolatban azt kellene elérni, csak olyan matematikus tarthassa, aki egyben felkészült biométer is. — Rendelkezésre állnak azok a munkák is, amelyekből a hallgatóság el tudja sajátítani a matematikai, a biometriai, az operációkutatási és a számítástechnikai ismereteket.

Egyes egyetemek a kutatók biometriai felkészítésének céljából posztgraduális tanfolyamokat szerveznek.

Matematika az orvostudományi egyetemeken

Mind a négy orvostudományi egyetemen *(Budapest, Pécs, Debrecen, Szeged)* az első két félévben a hallgatók átlag 30 órában biofizikát hallgatnak és átlag 45 órában gyakorolnak. Ennek keretében kapnak helyet a matematika és a biometria elemei. Az orvostudományi egyetemeken használatos biofizikai tankönyvek egyben a biometria anyagát is tartalmazzák. Az egészségügyi szervezéstan statisztikai fejezetében még egyszer találkoznak a hallgatók biometriai kérdésekkel.

A matematikának, illetve a biometriának ilyen csekély mértékű oktatásával természetesen nem érhető el, hogy a hallgatóság megismerkedhessék a matematikai gondolkodásmódnak az orvostudományokban való szerepével. Lehet, hogy a gyakorló orvosok számára többre nincs is szükség. De mind a klinikai kutatómunkában, mind az elméletben egyre nagyobb a jelentőségük a modern értékelő módszereknek és eljárásoknak. A nemzetközi folyóiratokban a korszerű biometriai módszerek alkalmazása nélkül nem fogadják el a közleményeket. Szerencsére az *Orvostovábbképző Egyetem* rendszeresen folytatja azt a posztgraduális képzést, amelyben a kutatóorvosok megismerhetik az orvostudományban felhasználásra kerülő matematikai és biometriai ismereteket és készségeket. Felkészültségükről vizsgán is beszámolhatnak. A kapott bizonyítványt a *TMB* is elfogadja a biometriából előírt vizsgaként.

Matematika a tudományegyetemek biológus és biológia tanári szakán

A biológia tanár szakos hallgatók az első félévben elemi matematikai ismereteket sajátítanak el heti két órában.

A biológus szakos hallgatók az első félévben heti 1 óra elmélet és 3 óra gyakorlat, a második félévben heti 1 óra elmélet és 3 óra gyakorlat keretében ismerkednek meg a matematika elemeivel. A harmadik félévben heti 1 óra elméleten és 3 óra gyakorlaton valószínűségszámítással, a negyedik félévben 1 óra elméleten és 3 óra gyakorlaton matematikai statisztikával és ezen át biometriával foglalkoznak. A számítástechnikai képzést szolgálja a hatodik félévben heti 2 óra elmélet és 2 óra gyakorlat. Felkészülésre egyetemi biometriai tankönyv áll rendelkezésre.

Egészen természetes, hogy az agrárfelsőoktatás intézményeiben a matematika oktatására fordítható óraszám magasabb, összevetve az orvos-, illetve a biológus képzésben szereplő matematikai óraszámokkal. Ugyanis a mezőgazdasági mérnök mindennapi munkájában is hasznosítja az elsajátított matematikai módszereket, míg az orvos számára, bizonyos mértékig a biológus számára is, a matematikai felkészültség megkönnyíti bizonyos szakmai stúdiumok megértését. Viszont természetes, hogy nagy az érdemük azoknak az agrárbiométereknek, akiknek a fent említett szempontot sikerült elfogadtatniuk.

6. Javaslatok és problémák

Javaslat Biometriai Bizottság létrehozására

A jelen tanulmány az első, amelynek alapján az *MTA* foglalkozik a hazai biometriai kutatásokkal, az ezeket végző szakemberekkel, a biométerekkel. Felmerül a kérdés, hogyan volna megvalósítható, hogy az *MTA* állandó jelleggel tájékozódhassék e kutatásokkal kapcsolatos problémákról. A legtermészetesebb lehetőség, amely az *MTA* szervezetében is adott, olyan akadémiai bizottság létrehozása, amely istápolná a szóban forgó kérdéskört.

Az *MTA Agrártudományok Osztálya* olyan interdiszciplináris jellegű biometriai bizottság megalakítását javasolta, amelyet az *MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya, Agrártudományok Osztálya, Orvostudományok Osztálya* és *Biológiai Tudományok Osztálya* hozná létre és gondozását is az érdekelt *Osztályok* látnák el. A bizottság létrehozásának szükségességét azzal indokolták, hogy: 1. Lehetőséget adna a biometriai kutatások szervezésének, az eredmények folyamatos áttekintésének és terjesztésének. 2. Megfelelő képviseletet biztosítana a *Biometric Society* felé különösen, ha a magyar csoport régióvá válna. 3. A hazai biometriának, különösen az agrárbiológiának fejlődést tenne lehetővé.

Azóta ez a javaslat meg is valósult.

Biometriai kutatócsoport létrehozása

Meggondolandó, ne kerüljön-e sor az *MTA Matematikai Kutató Intézetében*, vagy a *SZTAKI*-ban biometriai kutatócsoport létrehozására? Az elméleti vonatkozású munkákon kívül ennek a csoportnak volna a feladata a szaktanácsadás is.

Tudományegyetemi posztgraduális biométerképzés

Meggondolandó, nem kellene-e a tudományegyetemeken az agrártudományi egyetemek és az orvostudományi egyetemek közreműködésével posztgraduális formában biométereket képezni?

Biométerek minősítése

Elsősorban az orvostudomány területén jelentkezik és gondot okoz a *Tudományos Minősítő Bizottság* szakbizottságaiban a következő probléma. Melyik tudományág kandidátusa, illetve doktora legyen az a matematikus, aki magas szinten foglalkozik pl. orvosbiológiai kérdésekkel és jut el jelentős — matematikai szempontból általában nem új — eredményekhez, de nincs orvosi oklevele? Volt már olyan eset, amikor a matematikus az orvostudományok kandidátusa lett. Ennek a precedensnek ellenére a probléma mégis él.

Gyires Béla

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója

A nyomdai munkálatokat a Szegedi Nyomda végezte
Felelős vezető: Molnár Tibor igazgató
Szeged, 1991. — Nyomdai táskaszám: 89-1663

Felelős szerkesztő: Prékopa András
Műszaki szerkesztő: Sándor István
Megjelent: 20,65 (A/5) ív
HU ISSN 0133—3395

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen , *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902) 1—27.
[2] Kéri, G., „DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.
[3] Prékopa, A., „Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomtatott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

Ára: 96 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

XIV. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1989

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

89-1663 — Szegedi Nyomda — F. v.: Molnár Tibor igazgató