



161 29639 adpld 27

MATEMATIKAI és TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVII. KÖTET. — ELSŐ RÉSZ.

MATHEMATISCHER UND NATURWISSENSCHAFTLICHER ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

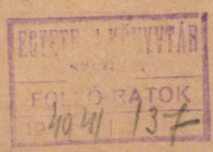
REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVII. — ERSTER TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1938.



TARTALOMJEGYZÉK.

	Lap
BARTA JÓZSEF: Differenciálegyenletek sajátértékeiről	434—439
BARTA JÓZSEF: Rugalmas rendszerek rezgéséről	441—445
ENTZ GÉZA: A protoplazma néhány tulajdonságáról	320—336
GOMBÁS PÁL: A polarizálhatóság számítása egy statisztikai módszer alapján	155—157
GOMBÁS PÁL: A <i>HCl</i> molekula elektroneloszlásának meghatá- rozásáról	166—168
GERŐ LORÁND lásd SCHMID REZSŐ.	
ILLYÉS GÉZA: A köves vesecéltelenségről	290—301
JELITAI JÓZSEF: GAUSS- és ENCKE-levellek az országos levél- tárban	136—143
KONEK FRIGYES: A hydrochinin magasabb homologjainak viselkedése a differenciáló alkylézésnél	256—267
KORMOS TIVADAR: Mimomys Newtoni és Lagurus Pannonicus, két felsőpliocénkori pocokfaj	353—355
KOTZMANN LÁSZLÓ: Adatok a magyarországi főbb talajtípusok dinamikai jellemzéséhez	408—431
LIPKA ISTVÁN: Hatványsorok zéróhelyeiről. I.	79— 86
MAUTHNER NÁNDOR: A chinacetophenonmonomethylaether előállítása	245—249
MAUTHNER NÁNDOR: A 6-jódveratrol szintézise	252—254
MISCHUNG ILONA: A festékes zselatinfoszforok abszorpciója NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN: Újabb adatok a hidrogén túlfeszültsé- gének mechanizmusához	209—230 145—153
NEUGEBAUER TIBOR: A methanmolekula energiájának kiszá- mítása	182
RADOS GUSZTÁV: Bonyolódott determináns-összefüggések in- tuitív levezetése	1— 14
RADOS GUSZTÁV: Bizonyos levezetett bilineár alakok karak- terisztikus egyenletének discriminánsáról	17— 24
RADOS GUSZTÁV: Néhány resolvens-egyenlet explicit előállí- tása	27— 36
RADOS GUSZTÁV: Ciklikus orthogonális helyettesítésekről ..	39— 47
RÉDEI LÁSZLÓ: Másodfokú számtestek abszolút osztálycso- portja 4-gyel osztható invariánsáinak számosságára vonat- kozó néhány középértékkérdés	88—102
ROHRINGER SÁNDOR: Az elméleti és gyakorlati hidraulika mód- szerei	269—288
SCHMID REZSŐ, GERŐ LORÁND és M. ZEMPLÉN JOLÁN: A cián- molekula disszociációs energiájának meghatározása	189—206
STRAUSZ ANTAL lásd SZŐKEFALVI NAGY BÉLA.	
SZABÓ ZOLTÁN: A diffúziós potenciál kiszámítása a Debye- Hückel-elmélet alapján	233—242
SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR: A ferde megvilágítás néhány hatásáról párhuzamos poláros fényben	380—388
SENETPÉTERY ZSIGMOND: Szarvaskői amfibololith	390—406
SZŐKEFALVI NAGY BÉLA: Projektív sokszögekről és sokolda- lakról	105—119
SZŐKEFALVI NAGY BÉLA és STRAUZ ANTAL: Egy BOHR-féle tételről	121—133
SZŐKEFALVI NAGY GYULA: Síksokszögekről, különösen az egy- szerű síksokszögekről	51— 76
M. ZEMPLÉN JOLÁN lásd SCHMID REZSŐ.	
ZIMMERMANN ÁGOSTON: Adatok a Jacobson-féle szerv össze- hasonlító anatómiájához	304—316
ZIMMERMANN GUSZTÁV: Adatok a keményagyvelőburok vénás öbleinek összehasonlító anatómiájához	339—350

MATEMATIKAI
és
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYOIRATA.

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVII. KÖTET. —

MATHEMATISCHER
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHER
ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVII. — DRITTER (LETZTER) TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1938.

50639

AZ 57. KÖTET TARTALOMJEGYZÉKE.

	Lap
BARTA JÓZSEF: Differenciálegyenletek sajátértékeiről.....	434—439
BARTA JÓZSEF: Rugalmas rendszerek rezgéséről.....	441—445
BARTA JÓZSEF: Egy erő által előidézhető legnagyobb rugalmas elmozdulásról.....	509—511
BAY ZOLTÁN: Elektronsokszorozó mint elektronszámláló... 513—539	513—539
BODENSTEIN MAX és SZABÓ ZOLTÁN: A klórmonoxid termikus bomlásáról.....	612—623
COTEL ERNŐ: Az acélötvtvőzés fejlődésének iránya, különös tekintettel az acél kopására és hőállóságára.....	542—549
EGERVÁRY JENŐ: Az elektromágneses térben történő elektron- mozgás differenciálegyenleteiről.....	968—985
ENTZ GÉZA: A protoplazma néhány tulajdonságáról.....	320—336
ENTZ GÉZA: Az utóbbi évek Balatonkutatásáról.....	751
FINKEY JÓZSEF: A pneumatikus szénelőkészítés mechanikai alapegyenletei.....	551—569
GELEI JÓZSEF: Tökéletes érzőelemek a csillások világában. I.	831—844
GELEI JÓZSEF: A véglények lüktetőhólyagjának élettudományi jelentősége.....	1037—1065
GERŐ LORÁND: lásd SCHMID REZSŐ.	
GOMBÁS PÁL: A polarizálhatóság számítása egy statisztikai módszer alapján.....	155—157
GOMBÁS PÁL: A <i>HCl</i> -molekula elektroneloszlásának meg- határozásáról.....	166—168
ILLYÉS GÉZA: A köves vesecélgtelenségről.....	290—301
JELITAI JÓZSEF: GAUSS- és ENCKE-levelek az országos levél- tárban.....	136—143
JELITAI JÓZSEF: BERNOULLI DÁNIEL és CLAIRAUT levelei Teleki József grófhhoz.....	501—507
KONEK FRIGYES: A hydrochinin magasabb homologjainak viselkedése a differenciáló alkylezésnél.....	256—267
KONEK FRIGYES: Alkaloidbetainek.....	1004—1018
KORMOS TIVADAR: Mimomys Newtoni és Lagurus Pannonicus, két felsőpliocénkori pocokfaj.....	353—355
KOSSMATH WALTER és WEBER ALFRÉD: Radonkoncentráció- mérések a Szent Gellért-, Szent Imre- és a Rudas-fürdő levegőjén.....	593
KOTZMANN LÁSZLÓ: Adatok a magyarországi főbb talajtípusok dinamikai jellemzéséhez.....	408—431
KROMPECHER ISTVÁN: Csontfejlődés és mechanikai igénybe- vétel.....	727—749
LIPKA ISTVÁN: Hatványsorok zéróhelyeiről. I.....	79—86
LIPKA ISTVÁN: Hatványsorok zéróhelyeiről. II.....	955—966

MAREK JÓZSEF: Bemutató ismertetés a MANNINGER REZSŐ I. taggal együtt megírt «Spezielle Pathologie und Therapie der Haustiere» cím alatt 7. kiadásban megjelent munka tartalmáról	725—726
MAREK JÓZSEF, WELLMANN OSZKÁR, URBÁNYI LÁSZLÓ: A takarmány ásványi sóarányának lényege és jelentősége az állati szervezet méz- és foszforellátásában	1020—1024
MAUTHNER NÁNDOR: A chinacetophenonmonomethylaether előállítása	245—249
MAUTHNER NÁNDOR: A 6-jódveratról szintézise	252—254
MAUTHNER NÁNDOR: A gluko-chinacetophenonmonomethylaether szintézise	697—699
MAUTHNER NÁNDOR: A 4-methylpyrogallolaldehid egy új szintézise	701—705
MILLNER TIVADAR: Kolorimetriás aluminium-meghatározás eriochromcyanin-R-rel	584—591
MISCHUNG ILONA: A festékes zselatinfoszforok abszorpciója	209—230
NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN: Ujabb adatok a hidrogén túlfeszültségének mechanizmusához	145—153
NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN: A pollucit, $CsAlSi_2O_6 \cdot xH_2O$, szerkezete	653—662
NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN és SASVÁRI KÁLMÁN: A kryolith Na_3AlF_6 szerkezete	664—670
NEUGEBAUER TIBOR: A methanmolekula energiájának kiszámítása	182
PÁRDU CZ BÉLA: Örvénylő életmód és sessilizmus	1070—1089
PELL MÁRIA: Az Adria Hydromedusái a «Najade» gyűjtésében	919—920
RADOS GUSZTÁV: Bonyolódott determináns-összefüggések intuitív levezetése	1—14
RADOS GUSZTÁV: Bizonyos levezetett bilineár alakok karakterisztikus egyenletének discriminánsáról	17—24
RADOS GUSZTÁV: Néhány resolvens-egyenlet explicit előállítása	27—36
RADOS GUSZTÁV: Ciklikus orthogonális helyettesítésekről	39—47
RADOS GUSZTÁV: Orthogonális helyettesítés ciklikus voltának szükséges és elegendő feltétele	447—461
RADOS GUSZTÁV: BRIOSCHI FRANCESCO egyik tételének rövid bizonyítása	465—466
RADOS GUSZTÁV: Unitárius matrix spektrumáról	469—474
RADOS GUSZTÁV: Unitárius helyettesítések levezetett helyettesítései	943—953
RÉDEI LÁSZLÓ: Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportja 4-gyel osztható invariánsainak számosságára vonatkozó néhány középértékkérdés	88—102
RÉDEI LÁSZLÓ: Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére. II.	488—498
RIESZ FRIGYES: A Jordan-féle görbeteletről	477—486
ROHRINGER SÁNDOR: Az elméleti és gyakorlati hidraulika módszerei	269—288
SASVÁRI KÁLMÁN: lásd NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN.	
SASVÁRI KÁLMÁN: Az ezüstpermanganát kristályszerkezetének Fourier-analízise	988—997
SCHAFER KÁROLY: A pyramispálya kisagyi részének finomabb anatómiájáról	1029—1035
SCHMID REZSŐ, GERŐ LORÁND és M. ZEMPLÉN JOLÁN: A cianmolekula disszociációs energiájának meghatározása	189—206

	Lap
SCHMID REZSŐ ÉS GERŐ LORÁND: A szénoxid új sávjairól	625—634
SCHMID REZSŐ ÉS GERŐ LORÁND: Széntartalmú vegyületek és gyökök képződési és disszociációs energiáiról. II. ...	637—651
BEREI SOÓ REZSŐ: A Nyírség vegetációja. I. és II.	888—907
STRAUSZ ANTAL: lásd SZŐKEFALVI NAGY BÉLA.	
SZABÓ ZOLTÁN: lásd BODENSTEIN MAX.	
SZABÓ ZOLTÁN: A diffúziós potenciál kiszámítása a Debye—Hückel-elmélet alapján	233—242
SZABÓ ZOLTÁN: A Vogézek Knautiái	931—932
SZÁDE CZKY-KARDOSS ELEMÉR: A férdő megvilágítás néhány hatásáról párhuzamos poláros fényben	380—388
SZÁDE CZKY-KARDOSS ELEMÉR: Tanulmányok a ferderéteg-zésekről. I. és II.	799—829
SZÁVA-KOVÁTS JÓZSEF: A páryanomás és a nedvesség évi járása a Földön	708—723
SZENTPÉTERY ZSIGMOND: Szarvaskői amfibololith	390—406
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Projektív sokszögekről és sokoldalaktól	105—119
SZŐKEFALVI NAGY BÉLA ÉS STRAUSZ ANTAL: Egy BOHR-féle tételről	121—133
SZŐKEFALVI NAGY GYULA: Síksokszögekről, különösen az egyszerű síksokszögekről	51—76
SZTRÓKAY KÁLMÁN: Antimonit Kisbányáról és Borpatakról	911—917
TOKODY LÁSZLÓ: Persbergi kalcit és barit	1096—1105
TURY PÁL: Molybdénben oldódó nitrogén technológiai effektusa	571—582
URBÁNYI LÁSZLÓ: lásd MAREK JÓZSEF.	
VENDL MIKLÓS: Újabb adatok a tétényi kalló föld (bentonit) ismeretéhez	1108—1115
VITÁLIS ISTVÁN: Papyrotheca mirabilis (BRUS.) és Succinea gracilis (LŐRENT.) a sopronvidéki alsó pontusi üledékekben	778—787
VITÁLIS ISTVÁN: Az első magyarországi fossarulusok a fertő-rákosi alsó pontusi üledékekben	789—797
WAGNER JÁNOS: VASVÁRI MIKLÓS második kisázsiai kutatóútjának állattani eredményei. I.	769—776
WELLMANN OSZKÁR: lásd MAREK JÓZSEF.	
WEBER ALFRÉD: lásd KOSSMATH WALTER.	
WOLSKY SÁNDOR: Kísérleti vizsgálatok a rovarok szemének fejlődésélettani determinációjáról	759—767
M. ZEMPLÉN JOLÁN: lásd SCHMID REZSŐ.	
ZEMPLÉN GÉZA: A hesperidinnek és a neohesperidinnek szerkezete	672—695
ZEMPLÉN GÉZA: A rutinóznak előállítása rutinból enzimhatás nélkül	940—941
ZEMPLÉN GÉZA: A scillabióz szerkezete	999—1002
ZILAHY-SEBESS GÉZA: Magyarország heleidái	1092—1094
ZIMMERMANN ÁGOSTON: Adatok a Jacobson-féle szerv összehasonlító anatómiájához	304—316
ZIMMERMANN GUSZTÁV: Adatok a keményagyvelőburok vénás öbleinek összehasonlító anatómiájához	339—350

INHALTSVERZEICHNIS DES 57-STEN BANDES.

	Seite
BARTA, J.: Über die Eigenwerte der Differentialgleichungen	440
BARTA, J.: Über die Schwingungen elastischer Systeme ..	447
BARTA, J.: Über die grösste elastische Verschiebung infolge einer Kraft	512
BAY, Z.: Elektronenervielfacher als Elektronenzähler....	540—541
BODENSTEIN, M. und SZABÓ, Z.: Über den thermischen Zerfall des Chlormonoxys	624
COTEL, E.: Die Entwicklungsmöglichkeiten der Stahllegie- rungen mit besonderer Rücksicht auf die Hitzebeständig- keit und Verschleissfestigkeit des Stahles	550
EGERVÁRY, E.: Über die Differentialgleichungen der Elektron- bewegung im stationären Magnetfelde	986—987
ENTZ, G.: Über einige Eigenschaften des Protoplasmas ...	337—338
ENTZ, G.: Die Ergebnisse der Balatonforschungen in den letzten Jahren	757—758
FINKEV, J.: Die mechanischen Grundgleichungen der pneuma- tischen Kohlenaufbereitung	570
GELEI, J. v.: Vollkommene Sinneselemente bei den höheren Ciliaten. I.	845—887
GELEI, J. v.: Über die biologische Bedeutung der Pulsations- blase (kontraktile Vakuole) der Protisten	1066—1069
GERÓ, L.: siehe SCHMID, R.	
GOMBÁS, P.: Über eine statistische Methode zur Bestimmung der Polarisierbarkeit	158—165
GOMBÁS, P.: Bestimmung der Elektronenverteilung des HCl Moleküls	169—181
ILLYÉS, G.: Über Niereninsuffizienz bei Steinniere	302—303
JELITAI, J.: Briefe von GAUSS und ENCKE im ungarischen Landesarchiv	144
JELITAI, J.: Briefe von DANIEL BERNOULLI und CLAIRAUT an Graf Josef Teleki	508
KONEK, F.: Über das Verhalten der höheren Hydrochinin Homologen bei der differenzirenden Alkylierung	268
KONEK, F.: Alkaloidbetaine	1019
KORMOS, TH.: Mimomys Newtoni F. Major und Lagurus Pannonicus Korm., zwei gleichzeitige verwandte Wühl- mäuse von verschiedener phylogenetischen Entwicklung	356—379
KOSSMATH, W. und WEBER, A.: Die Radonkonzentrationen im Luftmilieu der budapester Radiumbäder Szent Gellért, Szent Imre und Rudas	594—612

	Seite
KOTZMANN, L.: Beiträge zur dynamischen Charakterisierung der wichtigsten ungarischen Bodentypen	432—433
KROMPFCHER, St.: Knochenbildung und mechanische Inanspruchnahme	750
LIPKA, St.: Über die Nullstellen von Potenzreihen	87
LIPKA, St.: Über die Nullstellen von Potenzreihen II.	967
MAREK, J., WELLMANN, O., URBÁNYI, L.: Das Wesen des Salzverhältnisses in der Nahrung und seine Bedeutung bei der Kalk- u. Phosphorversorgung des tierischen Organismus	1025—1028
MAUTHNER, F.: Über die Darstellung des Chinacetophenonmonomethyläthers	250—251
MAUTHNER, F.: Die Synthese des 6-Jodveratrols	255
MAUTHNER, F.: Die Synthese des Gluco-chinacetophenonmonomethyläthers	700
MAUTHNER, F.: Über eine neue Synthese des 4-Methylpyrogallaldehydes	706—707
MILLNER, T.: Kolorimetrische Aluminiumbestimmung mittels Eriochromcyanin-R.	592
MISCHUNG, H.: Lichtabsorption der Gelatine-Farbstoffphosphoren	231—232
NÁRAY-SZABÓ St. v.: Beitrag zum Mechanismus der Wasserstoffüberspannung	154
NÁRAY-SZABÓ, St. v.: Die Struktur des Pollucits $C_8AlSi_2O_6 \cdot xH_2O$	663
NÁRAY-SZABÓ, F.: St. v. und SASVÁRI, K.: Die Struktur des Kryoliths Na_3AlF_6	671
NEUGEBAUER, Th.: Über die Berechnung der Energie des Methanmoleküls	183—188
PÁRDUCZ, B.: Strudelnde Lebensweise und Sessilität	1090—1091
PELL, M.: The Hydromedusae of the Adriatic, collected by the «Najade»	921—930
RADOS, G.: Intuitive Herleitung verwickelter Determinantenrelationen	15—16
RADOS, G.: Über die Discriminanten der charakteristischen Gleichung einiger abgeleiteten bilinearen Formen	25—26
RADOS, G.: Die explizite Darstellung einiger Resolventen	37—38
RADOS, G.: Über cyklische orthogonale Substitutionen ...	48—50
RADOS, G.: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine orthogonale Substitution cyklisch sei.	462—464
RADOS, G.: Kurzer Beweis eines Theorems von F. BRIOSCI	467—468
RADOS, G.: Über das Spektrum einer unitären Matrix....	475—476
RADOS, G.: Über einige abgeleitete Substitutionen einer unitären Substitution	954
RÉDEI, L.: Einige Mittelwertfragen in Bezug auf die Anzahl der durch 4-teilbaren Invarianten der absoluten Klassen- gruppe im quadratischen Zahlkörper	103—104
RÉDEI, L.: Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendung auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. II.	499—500
RIESZ, FR.: Sur le théorème de Jordan	487
ROHRINGER, A.: Die Methoden der theoretischen und praktischen Hydraulik	289
SASVÁRI, K.: siehe NÁRAY-SZABÓ, St. v.	
SASVÁRI, K.: Fourier-Analyse der Struktur des Silberperman- ganats	998
SCHAFFER, K.: Über die feinere Anatomie des Kleinhirn- anteils der Pyramidenbahn	1036

	Seite
SCHMID, R., GERÓ, L. und ZEMPLÉN, J.: Die Dissoziationsenergie des CN -Moleküls	207—208
SCHMID, R. und GERÓ, L.: Über die neuen Banden des CO -Moleküls	635—636
SCHMID, R. und GERÓ, L.: Über die Bildungs- und Spaltungsenergien von organischen Verbindungen und Radikale. II.	652
Soó, R. v.: Die Vegetation des Sandgebiets Nyírség. I....	895—896
Soó, R. v.: Die Vegetation des Sandgebiets Nyírség. II...	908—910
STRAUSZ, A. siehe NAGY, B. von Sz.	
SZABÓ, Z.: Berechnung der Diffusionspotentiale auf Grund der Debye-Hückelschen Theorie.....	243—244
SZABÓ, Z. v.: Die Knautien der Vogesen	933—939
SZABÓ Z. siehe BODENSTEIN, M.	
SZÁDECKY-KARDOSS, E. v.: Über einige Wirkungen der schiefen Beleuchtung im parallelen polarisierten Licht..	389
SZÁDECKY-KARDOSS, E. v.: Über die Arten und Korngrößenverteilungsverhältnisse fluviatiler Schrägschichtungen...	816
SZÁDECKY-KARDOSS, E. v.: Über die Bestimmung der einstigen Fließrichtung auf Grund der Schrägschichtungen.....	830
SZÁVA-KOVÁTS, J.: Jährlicher Gang des Damfdruckes und der Feuchte auf der Erde	724
SZENTPÉTERY, S. v.: Amphibololith von Szarvaskő.....	407
SZTRÓKAY, K. v.: Über Antimonit von Kisbánya und Borpaták	918
NAGY, J. von Sz.: Über ebene Vielecke, insbesondere über ebene einfache Vielecke	77—78
NAGY, B. von Sz.: Über projektive Vielecke und Vieleiten	120
NAGY, B. von Sz. und STRAUZ, A.: Über einen Satz von H. BOHR	134—135
TOKODY, L.: Kalzit und Baryt von Persberg (Schweden)	1106—1107
TURY, P.: Technological effect of nitrogen dissolved in molybdenum	583
URBÁNYI, L. siehe MAREK, J.	
VENDL, M.: Neuere Daten zur Kenntnis der Walkerde (Ben-tonits) von Tétény	1116
VITÁLIS, St. v.: Die ersten ungarländischen Fossarulen aus den unterpontischen Ablagerungen von Fertórákos....	798
VITÁLIS, St. v.: Papyrotheca mirabilis (BRUS.) und Succinea gracilis (LÓRENT.) aus den unterpontischen Ablagerungen der Umgebung von Sopron	788
WAGNER, H.: Zoologische Ergebnisse der zweiten Forschungsreise N. VASVÁRI's in Kleinasien. I.	777
WEBER, A. siehe KOSSMATH, W.	
WELLMANN, O. siehe MAREK, J.	
WOLSKY, A.: Experimentelle Untersuchungen über die entwicklungsphysiologische Determination des Insektenauges	768
ZEMPLÉN, J. siehe SCHMID, R.	
ZEMPLÉN, G.: Über die Konstitution des Hesperidins und des Neohesperidins	696
ZEMPLÉN, G.: Darstellung der Rutinose aus Rutin ohne Fermentwirkung	942
ZEMPLÉN, G.: Konstitution der Scillabiose	1003
ZILÁHI-SEBESS, G.: Heleiden aus Ungarn.....	1095
ZIMMERMANN, A.: Zur vergleichenden Anatomie des Jacobson-schen Organs	317—319
ZIMMERMANN, G.: Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Sinus Durae Matris	351—352

BONYOLÓDOTT DETERMINÁNS-ÖSSZEFÜGGÉSEK INTUITÍV LEVEZETÉSE.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

A következő sorokban néhány bonyolultabb determináns-összefüggést óhajtok bemutatni, amelyeknek közvetlen levezetése nagy nehézséggel járna, de amelyek a determinánsokhoz tartozó karakterisztikus egyenletek belső szerkezetének ismerete alapján számítások nélkül, mintegy intuitív úton bizonyíthatók be.

A tárgyalások folyamatossága érdekében egy külön fejezetben állítom össze az alkalmazandó jelöléseket és a fölhasználandó tételeket.

I. ALKALMAZANDÓ JELÖLÉSEK ÉS TÉTELEK.

Ismeretes, hogy valamely

$$C = \| c_{ik} \|$$
$$(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

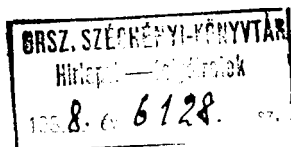
matrix elmélete velejében azonos a hozzátartozó

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ik} u_i v_k$$

bilineás alaknak, vagy az elemeiből készült

$$u_i = c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 + \dots + c_{in} u_n$$
$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

lineár helyettesítés elméletével.



A következőkben kizáróan oly matrixokkal, illetve bilineár alakokkal fogunk foglalkozni, amelyeknél

$$m = n.$$

A

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} u_i v_k \quad \text{és} \quad D = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik} u_i v_k$$

bilineár alakok compositumán vagy szorzatán a

$$CD = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (c_{i1}d_{1k} + c_{i2}d_{2k} + \dots + c_{in}d_{nk}) u_i v_k$$

bilineár alakot értjük. Az így definiált szorzás associatív, de általánosságban nem commutatív.

Az

$$E = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

bilineár alakot *egység-alaknak* nevezük, mert tetszésszerűnti C bilineár alakra nézve fennállanak az

$$EC = CE = C$$

egyenlőségek.

A tetszésszerűnti C alak determinánsát $|C|$ -vel jelöljük.

A

$$|C - \lambda E| = 0$$

λ -ban n -edfokú algebrai egyenletet a C alak *karakterisztikus egyenletének*, a többtagúját a C *karakterisztikus függvényének* nevezük. Utóbbit $K_\lambda(C)$ -vel fogjuk jelölni, úgy hogy

$$K_\lambda(C) \equiv |C - \lambda E| = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n2} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

1. *Hatvány-alak karakterisztikus függvénye.*

Ha a C alak

$$K_\lambda(C) = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

melyeket a C -hez tartozó karakterisztikus-értékeknek nevezünk, akkor a

$$C^k = C, C, \dots \overset{k}{\bar{C}}$$

k egyenlő tényezőt tartalmazó és C k -dik hatványának nevezendő bilineár alak karakterisztikus értékei.

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$$

lesznek, úgyhogy

$$|C^k - \lambda E| = (\lambda - \lambda_1^k)(\lambda - \lambda_2^k) \dots (\lambda - \lambda_n^k).^1$$

2. Adjungált bilineár alakok.

Legyenek ismét a

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} u_i v_k$$

bilineár alakhoz tartozó karakterisztikus értékek

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Legyenek továbbá a

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$$

az

$$1, 2, 3, \dots, n$$

elemeknek

$$\mu = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1, 2, \dots, k}$$

számmal lévő ismétlés nélkül k -adosztályú, határozott sorrendben felírt kombinációi, úgy hogy mindegyik ilyen kombinációnak az

$$1, 2, 3, \dots, \mu$$

számok sorából egy, és csak egy felel meg, akkor ha

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_k) \text{ és } h = (h_1, h_2, \dots, h_k)$$

¹ V. ö. FROBENIUS: «Über lineare Substitutionen und bilineare Formen» című a Journal für die reine und angewandte Mathematik 84. kötetének 11. lapján közölt általánosabb tétellel.

két ilyen kombináció

$$C_{gh} = \begin{vmatrix} c_{g_1 h_1} & c_{g_1 h_2} & \dots & c_{g_1 h_k} \\ c_{g_2 h_1} & c_{g_2 h_2} & \dots & c_{g_2 h_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{g_k h_1} & c_{g_k h_2} & \dots & c_{g_k h_k} \end{vmatrix}$$

a $|C|$ determinánsnak k -adfokú minora és a

$$A_k(C) = \sum_{g=1}^m \sum_{h=1}^n C_{gh} u_g v_h$$

bilineár alakot a C k -dik adjungált alapjának nevezzük. Ennek karakterisztikus egyenletére fennáll a következő tétel:

Ha a C -nek karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

akkor az $A_k(C)$ adjungált alak karakterisztikus értékei, a

$$A_g = \lambda_{g_1} \cdot \lambda_{g_2} \dots \lambda_{g_k}$$

szorzatból akként adódnak, hogy benne

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek összes ismétlés nélkül való k -ad osztályú kombinációit helyettesítjük.²

3. Indukált bilineár alakok.

Ha a C lineár alaknak megfelelő

$$u_i = c_{i1}v_1 + c_{i2}v_2 + \dots + c_{in}v_n \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

² V. ö. RADOS GUSZTÁV 1891-ben a jelen Értesítő X. kötetében megjelent «Az adjungált helyettesítések» című, továbbá *Mathematische Annalen* 48. k. «Zur Theorie der adjungirten Substitutionen» című értekezéseit.

lineár helyettesítés k -dik indukált helyettesítése

$$u_g = r_{g0}v_0 + r_{g1}v_1 + \dots + r_{g, \nu-1}v_{\nu-1}$$

$$g = 0, 1, \dots, \nu-1; \nu = \binom{n+k-1}{k},$$

amelyben az r_{gh} együtthatók a c_{ij} együtthatóknak k -adfokú homogén egész és racionális függvényei, akkor a

$$\sum_{g=0}^{\nu-1} \sum_{h=0}^{\nu-1} r_{gh} u_g v_h$$

bilineár alakot a C bilineár alak k -dik indukált alakjának nevezzük és $J_k(C)$ -vel jelöljük. Az indukált alakok karakterisztikus értékeire a következő tétel áll fenn:

Ha a C karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

akkor k -dik indukáltjának karakterisztikus értékei a

$$A_i = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

szorzatból akként adódnak, hogy

$$i_1, i_2, \dots, i_k$$

helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek összes k -adosztályú ismétléssel való kombinációit helyettesítjük.²

4. A Kronecker-féle szorzat-alakulatok karakterisztikus-értékeire vonatkozó Bauer-féle tétel.

BAUER MIHÁLY a Matematikai és Fizikai Lapok III. k. 293. l. a KRONECKER-féle szorzat-alakulatokra vonatkozó érdekes és fontos tételt vezetett le, amelyet későbben CYPERYSSOS STEPHANOS is bebizonyított. Minthogy alant következő tárgyalásaink ehhez a tételhez fűződnek, ezt részletesen ismertetem.

² L. RADOS GUSZTÁV: „Indukált lineárhelyettesítések” című értekezését Mat. és Természettud. Ért. 16. k. 378. l.

Ha adva vannak az

$$A = \| a_{gh} \| \quad \text{és} \quad B = \| b_{ik} \|$$

$$(g, h = 1, 2, \dots, m) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

akkor az:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{11} & b_{1n} & a_{12} & b_{11} & \dots & a_{12} & b_{1n} & \dots & a_{1m} & b_{11} & \dots & a_{1m} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_{11} & \dots & a_{m1} & b_{1n} & a_{m2} & b_{11} & \dots & a_{m2} & b_{1n} & \dots & a_{mm} & b_{11} & \dots & a_{mm} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & b_{11} & \dots & a_{11} & b_{nn} & a_{12} & b_{n1} & \dots & a_{12} & b_{nn} & \dots & a_{1m} & b_{1n} & \dots & a_{1m} & b_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_{n1} & \dots & a_{m1} & b_{nn} & a_{m2} & b_{n1} & \dots & a_{m2} & b_{nn} & \dots & a_{mm} & b_{1n} & \dots & a_{mm} & b_{nn} \end{array} \right\|$$

mn számú sok és ugyanennyi oszlopot tartalmazó matrixot az A és B matrixok KRONECKER-féle szorzat-alakulatának nevezem és $A \times B$ -vel jelölöm.

BAUER MIHÁLY tétele most már a következő:

Ha a A matrix karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

a B matrix karakterisztikus értékei

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

akkor az $A \times B$ matrix karakterisztikus értékei a

$$\lambda_i \mu_k$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

szorzatok szolgáltatják.

Ezek tehát nem egyebek, mint a

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m) (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)$$

szorzatnak tagjai.

II. A KRONECKER-FÉLE SZORZAT-ALAKULAT KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNYE MINT RESULTATUS.

Legyen az A és B matrixok karakterisztikus értékeik ismét

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m,$$

illetve

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

úgy hogy

$$K_x(A) = (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m)$$

és

$$K_\mu(B) = (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_n);$$

akkor BAUER tétele értelmében az $A \times B$ szorzatalakulatnak karakterisztikus értékeit a

$$\lambda_i \lambda_k \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

szorzatok szolgáltatják, úgy hogy

$$K_x(A \times B) \equiv \prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (x - \lambda_i \mu_k).$$

Írjuk ki részletesebben, amennyiben a k -ra vonatkozó szorzást elvégezzük, akkor lesz:

$$\begin{aligned} K_x(A \times B) &= \prod_{i=1}^m [x - \lambda \mu_1] (x - \lambda_i \mu_2) \dots (x - \lambda_i \mu_n)] = \\ &= \prod_{i=1}^m \left[\lambda_i^n \left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_1 \right) \left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_2 \right) \dots \left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_n \right) \right] = \quad (1) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^n \prod_{i=1}^m \left[\left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_1 \right) \left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_2 \right) \dots \left(\frac{x}{\lambda_i} - \mu_n \right) \right]. \end{aligned}$$

Mint hogy $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ a

$$K_\lambda(A) = |A - \lambda E|$$

karakterisztikus függvény abszolút tagja, ez pedig úgy adódik, hogy a $K_\lambda(A)$ karakterisztikus függvényben $\lambda = 0$ teszünk, azért

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = |A|;$$

ha pedig a $K_\mu(B)$ karakterisztikus függvényt $g(\mu)$ -vel jelöljük, úgy hogy

$$g(\mu) = (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_n) = \mu^n + \dots + |B|,$$

akkor az (1) alatti egyenlőség így írható:

$$K_x(A \times B) = |A|^n g\left(\frac{x}{\lambda_1}\right) g\left(\frac{x}{\lambda_2}\right) \dots g\left(\frac{x}{\lambda_m}\right). \quad (2)$$

Vegyük most közelebről szemügyre a

$$P = g\left(\frac{x}{\mu_1}\right) g\left(\frac{x}{\lambda_2}\right) \cdots g\left(\frac{x}{\mu_m}\right) \quad (3)$$

szorzatot. Ha a $K_\lambda(A)$ karakterisztikus függvényt $f(\lambda)$ -vel jelöljük, úgy hogy

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) = \lambda^m + \cdots + |A|$$

és az

$$f(\lambda) = 0$$

egyenlet reciprok egyenletének többtagúját $f(\lambda)$ -vel jelöljük, úgy hogy

$$f(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_1}\right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_2}\right) \cdots \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_m}\right) = |A| \lambda^m + \cdots + 1$$

és továbbá figyelembe vesszük, hogy az

$$\lambda^m f\left(\frac{\lambda}{x}\right) \equiv |A| \lambda^m + \cdots + x^m = 0$$

egyenlet gyökei

$$\frac{x}{\lambda_1}, \frac{x}{\lambda_2}, \dots, \frac{x}{\lambda_m}$$

akkor a (3) alatti P sorozatról fölismerjük, hogy ez így írható

$$P = |A|^n \operatorname{Res}_\lambda \left[x^m f\left(\frac{\lambda}{x}\right), g(\lambda) \right]$$

ahol $\operatorname{Res}_\lambda$ a λ szerint képzett resultánst jelenti. P -nek ezt a kifejezését a (2) alatti egyenlőségbe helyettesítvén végül a

$$K_\lambda(A \times B) = \operatorname{Res}_\lambda \left[x^m f\left(\frac{\lambda}{x}\right), g(\lambda) \right]. \quad (4)$$

Ha az (1) alatti szorzatban a szorzást i szerint elvégezzük, akkor

$$\begin{aligned} K_x(A \times B) &= \prod_{k=1}^n [(x - \lambda_1 \mu_k)(x - \lambda_2 \mu_k) \cdots (x - \lambda_m \mu_k)] = \\ &= |B|^n \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{x}{\mu_k} - \lambda_1\right) \left(\frac{x}{\mu_k} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{x}{\mu_k} - \lambda_m\right) \right] = \\ &= |B|^n f\left(\frac{x}{\mu_1}\right) f\left(\frac{x}{\mu_2}\right) \cdots f\left(\frac{x}{\mu_n}\right) \end{aligned}$$

adódik és ha most $g(\mu) = 0$ egyenlet reciprok egyenletének többtagúját $\bar{g}(\mu)$ -vel jelöljük, akkor fönt alkalmazott tárgyalás ismétlése a

$$K_x(A \times B) = (-1)^{mn} \operatorname{Res}_\lambda \left[f(\lambda), x^n g\left(\frac{\lambda}{x}\right) \right]$$

egyenlőségre vezet, úgy (4)-nek figyelembe vételével erre az érdekes eredményre jutunk, hogy

$$\begin{aligned} K_x(A \times B) &= \operatorname{Res}_\lambda \left[x^m f\left(\frac{\lambda}{x}\right), g(\lambda) \right] = \\ &= (-1)^{mn} \operatorname{Res}_\lambda \left[f(\lambda), x^n g\left(\frac{\lambda}{x}\right) \right], \end{aligned}$$

III. AZ $A \times A \times \dots \times A$ SZORZATAKULAT KARAKTERISZTIKUS EGYENLETE.

1. Az $A \times A \times \dots \times A$ k tényezős KRONECKER-féle szorzatalkulat karakterisztikus értékei BAEUR MIHÁLY tétele értelmében az A bilineár alak.

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

karakterisztikus értékeiből akként adódnak, hogy a

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^k = \sum_{\substack{l_1 + l_2 + \dots + l_n = k}} \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_n!} \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n} \quad (1)$$

összegnek, mely a

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = k \quad (1)$$

diophantikus egyenlet összes nem-negatív számokból álló megoldásaira kiterjesztendő, összes n^k számú tagjait leírjuk. A

$$K_x(A \times A \times \dots \times A) = 0 \quad (2)$$

egyenlet gyökei tehát a

$$\lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n} = \lambda_{l_1 l_2 \dots l_n}$$

szorzatból akként adódnak, hogy az

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$



kitevő-rendszer helyébe a (1) alatti diophantikus egyenlet összes nem-negatív számokból álló megoldásait helyettesítjük. Az (1) alatti egyenletből tüstént következik, hogy a

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n} = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n}$$

multiplicitása

$$M_{l_1 l_2 \dots l_n} = \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_n!}$$

E multiplicitások összege, amint az (1) alatti egyenlőségből következik, ha ebben $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ helyettesítünk

$$\sum M_{l_1 l_2 \dots l_n} = \sum \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_n!} = (1+1+\dots+1)^k = n^k.$$

tehát egyenlő a

$$\Phi(x) = K_x (A \times A \times \dots \times A) = 0$$

karakterisztikus egyenlet fokszámával.

Az eddigiek alapján a következő tétel következik:

Valahányszor $k < 1$

$$\Phi(x) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek többszörös gyökei vannak, oly formán, hogy a

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n} = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n}$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = k$$

gyökének multiplicitása

$$M_{l_1 l_2 \dots l_n} = \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_n!}.$$

Ha a

$$\Phi(x) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek többszörös gyökeit eltávolítjuk, azaz azt az egyenletet képezzük, melynek gyökei ugyanazok, mint a $\Phi(x) = 0$ egyenletéi, de minden gyök multiplicitása benne 1-gyel egyenlő, akkor ennek gyökei a

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

szorzatból akként adódnak, hogy ebben az

$$i_1, i_2, \dots, i_k$$

index-rendszer helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek összes k -adosztályú ismétléssel való kombinációit helyettesítjük. Ezek pedig az I. fej. 3. tételénél fogva nem egyebek, mint az A k -dik indukáltjának saját-értékein. Ennek következtében fennáll a következő figyelemreméltó egyenlőség

$$\frac{\Phi(x)}{(\Phi(x), \Phi'(x))} = K_x [J_x(A)],$$

amelyben $(\Phi(x), \Phi'(x))$ a $\Phi(x)$ és $\Phi'(x)$ legnagyobb közös osztóját jelenti és $\Phi'(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$.

2. *Speciális esetek*: Az $A \times A$ és $A \times A \times A$ esetei.

Az $A \times A$ KRONECKER-féle szorzat karakterisztikus értékei a következők

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}\lambda_n, \lambda_{n-1}\lambda_n.$$

Mint hogy ezek közül

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$$

az I. fej. 1. tétele értelmében nem egyebek, mint az A^2 bilineár alak karakterisztikus értékei,

$$\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}\lambda_n$$

pedig az A második adjungált alakjának $A_2(A)$ karakterisztikus értékei, azért a

$$K_x(A \times A) = K_x(A^2) \{K_x[A_2(A)]\}^2$$

egyenlőség áll fenn. Ebben a bal oldalon álló függvény fokszáma n^2 , a jobb oldalon állóé:

$$n + 2 \binom{n}{2} = n + n(n-1) = n^2,$$

amint ennek lenni kell.

Ha ebben az egyenlőségben

$$x = 0$$

teszünk, akkor az

$$|A \times A| = |A^2| |A_2(A)| = |A|^2 |A_2(A)|^2 = \{|A| \cdot |A_2(A)|\}^2$$

determináns-egyenlőség adódik, amely az n^2 -fokú $|A \times A|$ determinánst n -edfokú és $\frac{n(n-1)}{2}$ -edfokú determinánsok szorzatának négyzeteként szolgáltatja.

Ha pl. $n = 3$ és

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

akkor az

$$|A \times A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1\beta_1 & a_1\gamma_1 & a_1\beta_1 & \beta_1^2 & \beta_1\gamma_2 & a_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1^2 \\ a_1a_2 & a_2\beta_1 & a_2\gamma_1 & a_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 & \beta_2\gamma_1 & a_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2 \\ a_1a_3 & a_3\beta_1 & a_3\gamma_1 & a_1\beta_3 & \beta_1\beta_3 & \beta_3\gamma_1 & a_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ a_1a_2 & a_1\beta_2 & a_1\gamma_2 & a_2\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\gamma_2 & a_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 \\ a_2^2 & a_2\beta_2 & a_2\gamma_2 & a_2\beta_2 & \beta_2^2 & \beta_2\gamma_2 & a_2\gamma_2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2^2 \\ a_2a_3 & a_3\beta_2 & a_3\gamma_2 & a_2\beta_3 & \beta_2\beta_3 & \beta_3\gamma_2 & a_2\gamma_3 & \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ a_1a_3 & a_1\beta_3 & a_1\gamma_3 & a_3\beta_1 & \beta_1\beta_3 & \beta_1\gamma_3 & a_3\gamma_1 & \beta_3\gamma_1 & \gamma_1\gamma_3 \\ a_2a_3 & a_2\beta_3 & a_2\gamma_3 & a_3\beta_2 & \beta_2\beta_3 & \beta_2\gamma_3 & a_3\gamma_2 & \beta_3\gamma_2 & \gamma_2\gamma_3 \\ a_3^2 & a_3\beta_3 & a_3\gamma_3 & a_3\beta_3 & \beta_3^2 & \beta_3\gamma_3 & a_3\gamma_3 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 & a_3\gamma_2 - a_2\gamma_3 & a_2\beta_3 - a_3\beta_2 \\ \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 & a_1\gamma_3 - a_3\gamma_1 & a_3\beta_2 - a_1\beta_3 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 & a_2\gamma_1 - a_1\gamma_2 & a_1\beta_2 - a_2\beta_1 \end{vmatrix}^2$$

determináns-egyenlőség adódik. Ennek a bonyolult egyenlőségnek közvetlen kimutatása nyilván csak hosszadalmas átalakítások segítségével lehetséges.

Áttérve a $k=3$ eset tárgyalására, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az $A \times A \times A$ karakterisztikus egyenletének gyökei a

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n} = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_n^{l_n}$$

kifejezésből akként adódnak, hogy az

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

kitevő-rendszer helyébe az

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = 3$$

diophantikus egyenletnek összes nem-negatív számokból álló meg-

oldásait helyettesítjük és e mellett megállapítjuk, hogy a $M_{l_1 l_2 \dots l_n}$ gyököknek multiplicitása

$$M_{l_1 l_2 \dots l_n} = \frac{3!}{l_1! l_2! \dots l_n!}.$$

E szerint a

$$K_x(A \times A \times A) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek gyökei:

$$\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_n^3 \quad (3)$$

ezeknek multiplicitása

$$\frac{3!}{3!} = 1;$$

továbbá

$$\lambda_1^2 \lambda_2, \lambda_2^2 \lambda_1, \lambda_1^2 \lambda_3, \lambda_3^2 \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}^2 \lambda_n, \lambda_n^2 \lambda_{n-1} \quad (4)$$

ezeknek multiplicitása

$$\frac{3!}{2! 1!} = 3;$$

végül

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4, \dots, \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_n \quad (5)$$

ezeknek multiplicitása

$$\frac{3!}{1! 1! 1!} = 6.$$

A (3) alatt fölirt gyökök nem egyebek, mint az A^3 alaknak sajátértékei. (L. I. fej. 1. pont.) Ennek következtében

$$K_x(A \times A \times A) K_x(A^3) = 0$$

egyenlet gyökei akként adódnak, hogy a (3), (4) és (5) alatti gyökökhöz még kétszer hozzátesszük A^3 -nak (3) alatt lévő karakterisztikus értékeit. De ekkor az így keletkezett sorozatban $J_3(A)$ -nak, az A 3-dik indukáltjának saját-értékei 3-szor fordulnak elő és még ezeken kívül $A_3(A)$ -nak, az A harmadik adjungált alakjának karakterisztikus értékei mindannyian 3-szor, úgy hogy tényállás figyelembevétele mellett a következő figyelemreméltó egyenlőség adódik:

$$K_x(A \times A \times A) \cdot K_x(A^3) = \{K_x[J_3(A)]\}^3 \cdot \{K[A_3(A)]\}^3.$$

Ebben az egyenlőségben a bal oldalon álló függvénynek fokszáma:

$$n^3 + n;$$

a jobb oldalon állóé

$$\begin{aligned} 3 \cdot \binom{n+3-1}{3} + 3 \binom{n}{3} &= \frac{(n+2)(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \\ &+ \frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{1}{2}(n^3 - 3n^2 + 2n) = n^3 + n, \end{aligned}$$

tehát ugyanakkora, mint a bal oldalé.

Ha a talált egyenlőségben ismét x helyébe zérust helyettesítünk, akkor a következő determináns-egyenlőség adódik:

$$|A \times A \times A| |A|^3 = [J_3(A) \cdot A_3(A)]^3,$$

amelyből az n^3 -fokú $|A \times A \times A|$ determináns kifejezhető az $|A|$ n -edfokú, $|J_3(A)|$ $\left(\frac{n+2}{3}\right)$ -adfokú és az $|A_3(A)|$ $\frac{n(n-1)}{2}$ -edfokú determinánsok segítségével.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25.-én tartott üléséből.)

INTUITIVE HERLEITUNG VERWICKELTER DETERMINANTENRELATIONEN,

Von GUSTAV RADOS E. Mitglied.

Die Bezeichnungen, die zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (kurz den *charakteristischen Werten*) einer bilinearen Form und denjenigen von einer Reihe ihrer abgeleiteten Formen bestehen, gestatten oft eine mühelose Herleitung von verwickelten Determinanten Beziehungen. Im vorstehenden Aufsatz wird dies an einigen Beispielen erörtert.

Sind die charakteristischen Werte der bilinearen Form

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} x_i y_k$$

die folgenden

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \quad (1)$$

so ergeben sich die charakteristischen Werte ihrer k -ten adjungierten Form aus dem Produkt

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} \quad (2)$$

indem man die Indexkombination $i_1 i_2 \dots i_k$ durch die wiederholungsfreien k -elementigen Kombinationen der Zahlen

$$1, 2, \dots, m \quad (3)$$

ersetzt.¹

Die charakteristischen Werte der k -ten induzierten Form von A ergeben sich aus (2) indem man $i_1 i_2 \dots i_m$ durch die k -elementigen Kombinationen mit Wiederholung der Elemente (2) ersetzt.²

¹ S. G. RADOS, «Zur Theorie der adjungierten Substitutionen». Math. Annalen Bd. 48.

² S. G. RADOS, Mat. és Természettud. Ért. Bd. 16, pag. 378.

Die charakteristischen Werte von A^k sind bekanntlich

$$\lambda_1^k \cdot \lambda_2^k \cdot \dots \cdot \lambda_m^k.$$

Hat die bilineare Form

$$B = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} x_i y_k$$

die charakteristischen Werte

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

und bildet man die zur Matrix

$$\| a_{i1} b_{1k}, a_{i2} b_{1k}, \dots, a_{im} b_{1k}, \dots, a_{ik} b_{nk}, a_{i2} b_{nk}, \dots, a_{im} b_{nk} \|$$

($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$)

gehörige bilineare Form, so möge diese durch $A \times B$ bezeichnet und KRONECKER'sches Produkt-Gebilde genannt werden. Nach einem Satze vom M. BAUER hat diese die Produkte

$$\lambda_i^{\mu_k}$$

($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$)

zu charakteristischen Werten.

Mit Heranziehung von diesen Sätzen wird bewiesen, dass die charakteristischen Werte der bilinearen Form $A \times A \times \dots \times A$ sich aus den Produkten

$$A_{l_1 l_2 \dots l_m} = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \dots \lambda_m^{l_m}$$

ergeben in dem man für das Exponentensystem l_1, l_2, \dots, l_m die nichtnegativen Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$l_1 + l_2 + \dots + l_m = k$$

setzt. Die Multiplizität der Wurzel $A_{l_1 l_2 \dots l_m}$ ist $\frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_m!}$.

Bezeichnet man die k -te adjungirte Form von A durch $A_k(A)$ und die k -te induzirte Form von A durch $J_k(A)$, so bestehen die nachfolgenden Relationen:

$$|A \times A| = \{ |A| \cdot |A_2(A)| \}^2$$

$$|A|^3 |A \times A \times A| = \{ |J_3(A)| \cdot |A_3(A)| \}^3.$$

Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

BIZONYOS LEVEZETETT BILINEÁR ALAKOK KARAKTERISZTIKUS EGYENLETÉNEK DISCRIMINÁNSÁRÓL.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

A következő sorokban a

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} u_i v_k$$

bilineár alakból levezetett adjungált alakok, indukált alakok, hatvány-alakok, továbbá két bilineár alakban

$$P = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m p_{ik} u_i v_k$$

$$Q = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n q_{rs} u_r v_s$$

levezetett $P \times Q$ KRONECKER-féle szorzat-alakulatnak discriminánsait fogjuk közelebbről megvizsgálni.¹

A főlisorolt levezetett alakok karakterisztikus egyenletei az eredeti C , illetve a P és Q alakok karakterisztikus egyenleteinek resolvens-egyenletei. Ismeretes, hogy valamely resolvens-egyenlet discriminánsa mindig osztható az eredeti egyenlet discriminánsának bizonyos hatványával. E hatvány kitevőjének pontos meghatározása közvetlen számítások útján nem csekély nehézségbe ütközik. A főt főlisorolt levezetett alakok karakterisztikus

¹ A használt jelölések ugyanazok, mint amelyeket «Bonyolult determináns-összefüggések intuitív levezetése» című értekezésemben alkalmaztam. Mat. és Természettud. Értesítő jelen kötetében.

egyenleteinek gyökeire vonatkozó és az ¹ alatt idézett értekezésem I. fejezetében összeállított tételeim a keresett kitevők meghatározását rendkívüli módon megkönnyítik, amint ezt az alábbi fejtegetések mutatják.

I. Adjungált-, indukált- és hatványalakokra vonatkozó tételek.

1. Adjungált alakok.

A fönt ¹ alatt idézett értekezés I. fej. 2. pontjában említett tétel a következő:

Ha C bilineár alak karakterisztikus-értékei ²

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

akkor az

$$A_k(C) = \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n c_{gh} U_g V_h$$

$$\left(\mu = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1, 2, \dots, k} \right),$$

k-dik adjungált alakjának karakterisztikus értékei *a*

$$A_g = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2} \dots \lambda_{g_k} \quad (1)$$

szorzatból úgy adódnak, hogy abban *a*

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

index-rendszer helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek összes ismétlés nélkül való kombinációit helyettesítjük. Ezt figyelembe véve a

$$K_x [A_k(C)] \equiv |A_k(C) - xE| = 0$$

$$\left(E = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \dots + U_n V_n; \mu = \binom{n}{k} \right)$$

² A következő tárgyalásokban föltesszük, hogy a $C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} u_i v_k$ bilineár alak összes c_{ik} együtthatói és így a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ karakterisztikus-értékei is határozatlanok.

karakterisztikus egyenletnek discriminánsa nem egyéb, mint a A_g gyökökből alakítható és zérustól különböző különbségek szorzata, mivel a

$$K_x[A_k(C)] = 0$$

karakterisztikus egyenletben x legmagasabb hatványának együtthatója 1-gyel egyenlő.

Tehát

$$\text{Discr. } \{K_x[A_k(C)]\} = \prod_{g=1}^{\mu} \prod_{h=1}^{\mu} (A_g - A_h), \quad (2)$$

$$(g, h = 1, 2, \dots, \mu; g \neq h)$$

ahol a fölirt kettős szorzatban g és h mindig egymástól különböző kombinációk jelei.

A

$$K_x(C) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek discriminánsa pedig a

$$\text{Discr. } [K_x(C)] = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^n (\lambda_i - \lambda_k) \quad (3)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k)$$

$n(n-1)$ tényezőből álló szorzattal egyenlő.

Fölvetjük most azt a kérdést, hogy a (3) alatti szorzat $\lambda_i - \lambda_k$ tényezője a (2) alatti szorzat hány tényezőjének osztója? Nyilvánvaló, hogy $\lambda_i - \lambda_k$ valamely $A_g - A_h$ tényezőnek csak akkor lehet osztója, ha a $\lambda_g - \lambda_h$ különbség egyik tagja λ_i -vel, másik tagja λ_k -vel osztható, ha tehát pl.

$$A_g = \lambda_i \lambda_{g_2} \lambda_{g_3} \dots \lambda_{g_k}$$

$$A_h = \lambda_k \lambda_{h_2} \lambda_{h_3} \dots \lambda_{h_k}$$

a másik eset, midőn A_g a λ_k -val és A_h a λ_i -vel osztható, szóról-szóra ugyanígy tárgyalható). Így tehát

$$A_g - A_h = \lambda_i \lambda_{g_2} \lambda_{g_3} \dots \lambda_{g_k} - \lambda_k \lambda_{h_2} \lambda_{h_3} \dots \lambda_{h_k};$$

ez pedig $(\lambda_i - \lambda_k)$ -val akkor és csak akkor osztható, ha a

$$\lambda_i = \lambda_k$$

helyettesítés zérust eredményez, azaz

$$\lambda_k \lambda_{g_2} \lambda_{g_3} \dots \lambda_{g_k} = \lambda_k \lambda_{h_2} \lambda_{h_3} \dots \lambda_{h_k}$$

azaz

$$\lambda_{h_1} \lambda_{h_2} \dots \lambda_{h_k} = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2} \dots \lambda_{g_k},$$

úgyhogy

$$A_g - A_h = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2} \dots \lambda_{g_k} (\lambda_i - \lambda_k). \quad (4)$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$g_2, g_3, \dots, g_k,$$

kombináció elemei között sem az i , sem pedig a k index nem fordulhat elő, mert a

$$A_g = \lambda_{g_2} \lambda_{g_3} \dots \lambda_{g_k} \lambda_i$$

és

$$A_h = \lambda_{g_2} \lambda_{g_3} \dots \lambda_{g_k} \lambda_k$$

kifejezésekben a

$$g_2 g_3 \dots g_k i$$

és

$$g_2 g_3 \dots g_k k$$

ismétlés nélkül való k -adosztályú kombinációk. Ezeknek alapján kimondhatjuk, hogy $A_g - A_h$ a $(\lambda_i - \lambda_k)$ -val osztható legyen, szükséges, és mint közvetlenül belátható, elegendő is, hogy $A_g - A_h$ a (4) alatti alakban legyen előállítható. Tehát a $\lambda_i - \lambda_k$ tényezővel osztható $A_g - A_h$ tényezők száma ugyanakkora, mint ahány $(k-1)$ -edosztályú ismétlés nélkül való kombináció alakítható

$$1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$$

elemekből. Ezeknek számát pedig az $\binom{n-2}{k-1}$ binomiális együttható szolgáltatja. Az eddigiekből a következő tétel következik:

A C bilineár alak k-dik adjungált alakjához tartozó karakterisztikus egyenletnek discriminánsa a C karakterisztikus egyenletéhez tartozó discriminánsnak $\binom{n-2}{k-1}$ -dik hatványával osztható.

2. Indukált alakok.

Az előzőekben követett gondolatmenetekhez hasonló elmélkedéssel levezethető a C bilineár alak k-dik indukált alakjához tartó karakterisztikus egyenletének discriminánsára vonatkozó következő tétel:

A bilineár alak k-dik indukált alakjához tartozó karak-

terisztikus egyenletnek discriminánsa osztható a C alakhoz tartozó karakterisztikus egyenletéhez tartozó discriminánsnak ν -dik hatványával, ahol

$$\nu = \binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)}.$$

A bebizonyítás alapja ismét egy az indukált alakok karakterisztikus egyenletére vonatkozó tétel, amelynek értelmében a k -dik indukált $J_k(C)$ -alagnak karakterisztikus értékei a C -nek

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

karakterisztikus értékeiből úgy adódnak, hogy a

$$J_g = \lambda_{g_1} \lambda_{g_2} \dots \lambda_{g_k}$$

szorzatban a

$$g_1, g_2, \dots, g_k$$

helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek összes ismétléssel való k -adosztályú kombinációit helyettesítjük. A bebizonyítás további folytatása teljesen hasonló az adjungált alakoknál használt következtetésekkel, úgy hogy ismétléseket elkerülni óhajtván, a további részletek felsorolásától eltekintek.

3. Bilineár alak hatványa.

Bilineár alak hatványához tartozó karakterisztikus egyenletnek discriminánsáról a következő tétel áll fenn:

A C bilineár alak C^k hatványához tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsa a C -hez tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsának pontosan az első hatványával osztható.

Ha a C -nek karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

akkor mint ismeretes C^k -nak karakterisztikus értékei

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$$

és karakterisztikus egyenlete

$$K_x(C^k) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i^k) = 0, \quad (1)$$

ennek discriminánása pedig

$$\text{Discr. } [K_x(C^k)] = \prod_{i,j} (\lambda_i^k - \lambda_j^k) \quad (2)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j).$$

A C karakterisztikus egyenletének discriminánása pedig a következő:

$$\text{Discr. } [K_x(C)] = \prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j).$$

Mivel

$$\lambda_i^k - \lambda_j^k = (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^{k-2}\lambda_j + \dots + \lambda_j^{k-1})$$

és

$$\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^{k-2}\lambda_j + \dots + \lambda_j^{k-1}$$

a $(\lambda_i - \lambda_j)$ -vel nem osztható, mert binom egyenletnek többszörös gyöke nincsen, azért a (2) alatti szorzatnak minden egyes tényezője az (1) alatti szorzatban *egyszer és csak egyszer szerepel mint tényező*, amiből a fent kimondott tétel helyessége tüstént következik.

II. Kronecker-féle szorzatalakulatok karakterisztikus egyenletének discriminásáról.

Ha adva vannak a

$$A = \| a_{ik} \|$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, m)$$

és

$$B = \| b_{gh} \|$$

$$(g, h = 1, 2, \dots, n)$$

matrixok, akkor az mn sorból és mn oszlopból álló

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc} a_{11} & b_{11} & a_{11} & b_{12} & \dots & a_{12} & b_{1n} & a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \dots & a_{12} & b_{1n} & \dots & a_{1m} & b_{11} & \dots & a_{1m} & b_{1n} \\ a_{21} & b_{11} & a_{21} & b_{12} & \dots & a_{21} & b_{1n} & a_{22} & b_{11} & a_{22} & b_{12} & \dots & a_{22} & b_{1n} & \dots & a_{2m} & b_{11} & \dots & a_{2m} & b_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & b_{11} & a_{m1} & b_{12} & \dots & a_{m1} & b_{1n} & a_{m2} & b_{11} & a_{m2} & b_{12} & \dots & a_{m2} & b_{1n} & \dots & a_{mm} & b_{11} & \dots & a_{mm} & b_{1n} \\ \vdots & \\ a_{11} & b_{n1} & a_{11} & b_{n2} & \dots & a_{11} & b_{nn} & a_{12} & b_{n1} & a_{12} & b_{n2} & \dots & a_{12} & b_{nn} & \dots & a_{1m} & b_{n1} & \dots & a_{2m} & b_{nn} \\ a_{21} & b_{n1} & a_{21} & b_{n2} & \dots & a_{21} & b_{nn} & a_{22} & b_{n1} & a_{22} & b_{n2} & \dots & a_{22} & b_{nn} & \dots & a_{2m} & b_{n1} & \dots & a_{2m} & b_{nn} \\ \vdots & \\ a_{m1} & b_{n1} & a_{m1} & b_{n2} & \dots & a_{m1} & b_{nn} & a_{m2} & b_{n1} & a_{m2} & b_{n2} & \dots & a_{m2} & b_{nn} & \dots & a_{mm} & b_{n1} & \dots & a_{mm} & b_{nn} \end{array} \right\|$$

matrixot az A és B matrixok KRONECKER-féle szorzat-alakulatának nevezem és $A \times B$ -vel jelölöm.

E KRONECKER-féle szorzat-alakulathoz tartozó karakterisztikus egyenletének discriminánsára vonatkozó tételt fogjuk bebizonyítani:

Az $A \times B$ szorzat-alakulathoz tartozó karakterisztikus egyenletnek discriminánsa mindenkor osztható az A -hoz tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsának n -dik és a B -hez tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsának m -dik hatványával.

A bebizonyítás BAUER MIHÁLY következő tétele alapján eszközölhető (l. az ¹ alatt idézett értekezésem I. fejezetének utolsó pontját):

Ha az A matrix karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

a B -éi

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

akkor az $A \times B$ matrix karakterisztikus értékeit a következő táblázat szolgáltatja:

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1 \mu_1 & \lambda_1 \mu_2 & \dots & \lambda_1 \mu_n \\ \lambda_2 \mu_1 & \lambda_2 \mu_2 & \dots & \lambda_2 \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_m \mu_1 & \lambda_m \mu_2 & \dots & \lambda_m \mu_n \end{array} \quad (1)$$

Az A -hoz tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsa a

$$\Delta_A = \prod_{i, k} (\lambda_i - \lambda_k) \\ (i, k = 1, 2, \dots, m; i > k)$$

$\frac{m(m-1)}{2}$ számú különbség szorzatának négyzete. A B -hez tartozó karakterisztikus egyenlet discriminánsa a

$$\Delta_B = \prod_{g, h} (\mu_g - \mu_h) \\ (g, h = 1, 2, \dots, n; g > h)$$

$\frac{n(n-1)}{2}$ számú tényezőből alakított szorzatnak négyzetével egyenlő. Az $A \times B$ szorzat-alakulathoz tartozó karakterisztikus

egyenletének discriminánása amaz $\frac{mn(mn-1)}{2}$ különbsége szorzatának négyzete, mely az (1) alatti táblázat mn számából alakítható. Ezt $\Delta_{A \times B}$ -vel jelöljük.

Fölvetjük most a kérdést, hogy a Δ_A -nak $\lambda_2 - \lambda_1$ tényezőjével a $\Delta_{A \times B}$ -nek mely tényezői oszthatók? Az (1) alatti táblázat megtekintése mutatja, hogy ezek kizáróan a következők:

$$\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2, \dots, \lambda_2\mu_n - \lambda_1\mu_n,$$

úgy hogy $\Delta_{A \times B}$ a $(\lambda_2 - \lambda_1)$ -nek pontosan n -dik hatványával osztható. Mivel pedig ez Δ_A -nak minden tényezőjére áll, innen tüstént következik, hogy $\Delta_{A \times B}$ a Δ_A^n hatvánnyal osztható.

Ugyanígy mutatható ki, hogy $\Delta_{A \times B}$ a Δ_B^m hatvánnyal osztható. Ezzel azonban a fönt kimondott tétel be van bizonyítva.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25.-én tartott ütéséből.)

ÜBER DIE DISCRIMINANTEN DER KARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG EINIGER ABGELEITETEN BILINEAREN FORMEN.

Von GUSTAV RADOS E. Mitglied.

Hat die bilineare Form

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G_{ik} U_{ik}$$

unbestimmte Koeffizienten und ist

$$|C - \lambda \varepsilon| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (1)$$

$$(\varepsilon = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \dots + U_n V_n)$$

ihre charakteristische Gleichung, alsdann bestehen die nachfolgenden Sätze:

I. Die Discriminante der zur k -ten adjungirten Form von C gehörigen charakteristischen Gleichung ist stets durch die $\binom{n-2}{k-1}$ -te Potenz der Discriminante von (1) teilbar.

II. Die Discriminante der zur k -ten induzirten Form von C gehörigen charakteristischen Gleichung ist stets durch die $\binom{n-k-1}{k-1}$ -te Potenz der Discriminante der Gleichung (1) teilbar.

III. Die Discriminante der Form C^k ist durch die 1-te Potenz der Discriminante von (1) teilbar.

IV. Seien ferner die charakteristischen Gleichungen der Matrizen

$$A = \| a_{ik} \|, \quad B = \| b_{gh} \|$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, m) \quad (g, h = 1, 2, \dots, n).$$

$$|a_{ik} - \delta_{ik} x| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_m) = 0 \quad (2)$$

($i, k=1, 2, \dots, m$; $\delta_{ik}=1$ oder 0 je nachdem $i-k=0$ oder $\neq 0$ ist)
 resp.

$$|b_{gh} - \delta_{gh}x| = (x - \mu_1)(x - \mu_2) \dots (x - \mu_n) = 0 \quad (3)$$

($g, h=1, 2, \dots, n$; $\delta_{gh}=0$ oder 1 je nachdem $g-h=0$ oder $\neq 0$ ist)
 als dann ist die Discriminante der zur Matrix

$$\| a_{i1}b_{k1}a_{i1}b_{k2} \dots a_{i1}b_{kn} \dots a_{im}b_{k1}a_{im}b_{k2} \dots a_{im}b_{kn} \|$$

($i=1, 2, \dots, m$; $k=1, 2, \dots, n$)

gehörigen charakteristischen Gleichung stets durch die n -te Potenz der Discriminante von (2) und durch die m -te Potenz der Discriminante von (3) teilbar.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

NEHÁNY RESOLVENS-EGYENLET EXPLICIT ELŐÁLLÍTÁSA.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

Ha az

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

egyenletnek gyökei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

és

$$\varphi = \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

e gyököknek tetszésszerűen racionális függvénye, akkor

$$\text{Resolv. } (\varphi) \equiv \prod_{i=1}^r (\varphi - \varphi_i) \equiv \varphi^r + A_1 \varphi^{r-1} + \dots + A_r = 0$$

egyenlet, ahol

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$$

az összes különböző értékek, melyeket φ a

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

gyökök összes permutációinak alkalmazásakor fölvesz, az

$$f(\lambda) = 0$$

egyenlet resolvens-egyenletének nevezetik. Ennek

$$A_1, A_2, \dots, A_r$$

együtthatói, mint a λ_i gyökök szimmetrikus függvényei az ω_k együtthatókból az első négy alaplóművelet segítségével kiszámíthatók.

A következőkben föltesszük, hogy az

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

együtthatók és így a

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

gyökök is határozatlanok.

Mindenekelőtt világos, hogy az a további föltevésünk, hogy a $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ racionális egész függvény legyen, nem szorítja meg a tárgyalásoknak általánosságát, mert ha φ törtfüggvény lenne, e törtnek számlálóját és nevezőjét a nevezőnek konjugált értékeivel megszorozni, hogy oly törtet kapjunk, amelynek nevezője mint a λ_i gyököknek szimmetrikus függvénye az a_k együtthatókkal racionálisan kifejezhető, úgy hogy φ mint a λ_i gyököknek racionális egész függvényeként adódjék.

A következőkben a

$$\begin{aligned}\varphi &= \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2}, \\ \varphi &= \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}, \\ \varphi &= \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \lambda_4^{k_4}\end{aligned}$$

esetekre sikerült a megfelelő resolvens-egyenleteknek — irracionálisok mellőzésével — képlet segítségével való előállítására, úgy hogy ebben az ismeretlen kívül csakis a

$$f(\lambda) = 0$$

egyenletnek együtthatói szerepelnek.

A jelen dolgozatban azokra az esetekre szorítkozunk, amelyekben a

$$\begin{aligned}k_1, k_2, \dots, k_g \\ (g = 2, 3, 4)\end{aligned}$$

kitevők között egyenlők nem fordulnak elő.

A tárgyalásoknak alapját a következő, részemről már 1891-ben fölhasznált, segédétel¹ képezi.

Az

$f(\lambda) \equiv c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$ egyenlet mindenkor a következő alakban írható:

¹ L. RADOS G.: «Az adjungált helyettesítések elméletéről» című értekezést. Mat. és Természettud. Ért. X. k., 41. l., továbbá Math. Annalen 48. k. pag. 417—424.

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda+c_1 & -1 & -0 & \dots & 0 \\ c_2 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ c_3 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_n & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tehát mint a

$$\begin{aligned} v_1 &= -c_1 u_1 + u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 + \dots + 0 \cdot u_n \\ v_2 &= -c_2 u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 + \dots + 0 \cdot u_n \\ v_3 &= -c_3 u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 + \dots + 0 \cdot u_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= -c_n u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 + \dots + 0 \cdot u_n \end{aligned}$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenlete fogható föl.

A fent fölállított problémánk teljesen megoldottnak tekinthető tehát, ha sikerül ezt egy tetszőszerinti

$$\begin{aligned} u_i &= c_{i1} v_1 + c_{i2} v_2 + \dots + c_{in} v_n \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

C-nek nevezett lineárhelyettesítésnek

$$(i, k = 1, 2, \dots, n; \delta_{ik} = 1, \text{ ha } i=k; \delta_{ik} = 0, \text{ ha } i \neq k)$$

karakterisztikus egyenletére vonatkozóan megoldanunk:

Egy másik segédétel, melyet ismételten alkalmazunk és amelyet BAUER MIHÁLY bizonyított be először,¹ a következő:

Ha a

$$\begin{aligned} &C_g \\ (g &= 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

lineár helyettesítések karakterisztikus értékei rendre

$$\lambda_{g_1}, \lambda_{g_2}, \dots, \lambda_{g_n},$$

akkor a $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_k$ KRONECKER-féle szorzat-alakulat karakterisztikus értékei nem egyebek mint a

$$\prod_{g=1}^k (\lambda_{g_1} + \lambda_{g_2} + \dots + \lambda_{g_n})$$

szorzatnak tagjai.

¹ L. BAUER M.: Mathematikai és Fizikai Lapok III. k., 293. l.

Végül megjegyzem, hogy a következőkben a tetszőszerinti C helyettesítés karakterisztikus egyenletének többtagúját,

$$|\bar{c}_{ik} - \delta_{ik}\lambda|$$

ezentúl röviden $K_\lambda(C)$ -vel fogom jelölni. Valamely $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ függvényhez tartozó resolvens-egyenletnek többtagúját

$$\text{Resolv}_x(\varphi)\text{-vel}$$

jelöljük, ha az ismeretlenek jelölésére az x betűt használom.

1. A $\varphi = \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2}$ esete.

BAUER-nek fönt idézett tétele értelmében a

$$K_x(C^{k_1} \times C^{k_2}) = 0$$

egyenletnek gyökeit a

$$P_{k_1, k_2} = (\lambda_1^{k_1} + \lambda_2^{k_1} + \dots + \lambda_n^{k_1}) (\lambda_1^{k_2} + \lambda_2^{k_2} + \dots + \lambda_n^{k_2})$$

szorzatnak tagjai szolgáltatják, ahol

$$\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_1}, \dots, \lambda_n^{k_1}$$

a C^{k_1} -nek karakterisztikus-értékei,²

$$\lambda_1^{k_2}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_n^{k_2}$$

pedig C^{k_2} -nek karakterisztikus értékei, föltéve, hogy

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

a C -nek karakterisztikus értékei.³

A P_{k_1, k_2} szorzat tagjai a

$$\lambda_1^{k_1+k_2}, \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}$$

typusokból akként adódnak, hogy ezekre a

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

³ L. «Bonyolódott determináns-összefüggések intuitív levezetése» című értekezésem X. fej. 1. pontját a Mat. és Természettud. Értesítő jelen kötetében.

elemek összes permutációit (a szimmetrikus csoport substitúcióit) alkalmazzuk. Az ekként keletkező mennyiségek közül a

$$\lambda_1^{k_1+k_2}, \lambda_2^{k_1+k_2}, \dots, \lambda_n^{k_1+k_2}$$

nem egyebek, mint a

$$K_x(C^{k_1+k_2}) = 0.$$

karakterisztikus egyenletnek gyökei; a hátralévő

$$\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}, \lambda_1^{k_2}\lambda_2^{k_1}, \dots, \lambda_{n-1}^{k_1}\lambda_n^{k_2}, \lambda_{n-1}^{k_2}\lambda_n^{k_1}$$

tagok pedig a

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}) = 0$$

egyenlet gyökei. De akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$K_x(C^{k_1} \times C^{k_2}) = K_x(C^{k_1+k_2}) \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}),$$

ahonnan a $\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2})$ számára a következő explicit képlet adódik:

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}) = \frac{K_x(C^{k_1} \times C^{k_2})}{K_x(C^{k_1+k_2})}. \quad (1)$$

Itt észrevesszük, hogy az egyenlőség jobboldalán a számláló x -nek n^2 fokú racionális egész függvénye; a nevező fokszáma n ; tehát a jobboldalon álló racionális egész függvényének fokszáma

$$n^2 - n = n(n-1). \quad (2)$$

A baloldalon álló függvény fokszáma megegyező azzal a számmal, mely mutatja, hogy $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}$ a szimmetrikus csoport substitúcióinak hány különböző értékét veszi föl. Minthogy $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}$ a

$$\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$$

elemek összes permutációinál változatlan, ismeretes tételnél fogva, a $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}$ különböző értékeinek száma és így tehát $\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2})$ -nek fokszámát a következő képlet adja:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1). \quad (3)$$

A (2) és (3) kifejezések megtekintése mutatja, hogy az (1) egyenlőség bal- és jobboldalának fokszáma megegyező, amint annak lennie kell.

Talán nem felesleges ezt az eredményt egy példán is áttekinteni. Legyen C a következő binær helyettesítés

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 v_1 + a_2 v_2 \\ u_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, \end{aligned}$$

ügy hogy

$$K_x(C) = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 - x \end{vmatrix}.$$

Feladatul tűzzük magunk elé annak a resolvens-egyenletnek explicit előállítását, amelynek gyöke

$$\varphi = \lambda_1 \lambda_2^2,$$

ahol λ_1, λ_2 a C karakterisztikus-értékei. Az (1) alatti képletünk értelmében

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1 \lambda_2^2) = \frac{K_x(C \times C^2)}{K_x(C^3)},$$

ahol

$$K_x(C^3) = \begin{vmatrix} a_1(a_1^2 + a_2\beta_1) + \beta_1(a_1a_2 + \beta_1\beta_2) - x & a_2(a_1^2 + a_2\beta_1) + \beta_2(a_1a_2 + a_2\beta_2) \\ a_1(a_1\beta_1 + a_1\beta_2) + \beta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) & a_2(a_1\beta_1 + \beta_1\beta_2) + \beta_2(a_2\beta_1 + \beta_2^2) - x \end{vmatrix}$$

és

$$K_x(C \times C^2) = \begin{vmatrix} a_1(a_1^2 + a_2\beta_1) - r & a_2(a_1\beta_2 + a_2a_2) & a_2(a_1^2 + a_2\beta_1) & a_2(a_1a_2 + a_2\beta_2) \\ \beta_1(a_1^2 + a_2\beta_1) & \beta_1(a_1a_2 + a_2\beta_2) - r & \beta_2(a_1^2 + a_2\beta_1) & \beta_2(a_1a_2 + a_2\beta_2) \\ a_1(a_1\beta_1 + \beta_1\beta_2) & a_1(a_2\beta_1 + \beta_2^2) & a_2(a_1\beta_1 + \beta_1\beta_2) - x & a_2(a_1\beta_1 + \beta_2^2) \\ \beta_1(a_1\beta_1 + \beta_1\beta_2) & \beta_2(a_2\beta_1 + \beta_2^2) & \beta_2(a_1\beta_1 + \beta_1\beta_2) & \beta_2(a_1\beta_1 + \beta_2^2) - x \end{vmatrix}$$

Még hozzátételegesen megjegyezzük, hogy a

$$k_1 = k_2 = k$$

esetben más eredményre jutunk. Ekkor ugyanis a $C^k \times C$ karakterisztikus-értékei

$$\lambda_1^{2k}, \lambda_2^{2k}, \dots, \lambda_n^{2k} \quad (4)$$

és

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \lambda_2)^k, (\lambda_1 \lambda_3)^k, \dots, (\lambda_{n-1} \lambda_n)^k \\ (\lambda_1 \lambda_2)^k, (\lambda_1 \lambda_3)^k, \dots, (\lambda_{n-1} \lambda_n)^k; \end{aligned} \quad (5)$$

mivel pedig a (4) alatti értékek a

$$K_x(C^{2k}) = 0$$

egyenlet gyökei; az (5) alattiak pedig a

$$[\text{Resolv}_x(\lambda_1^k \lambda_2^k)]^2 = 0$$

egyenletnek gyökei, azért a jelen esetben a következő egyenlőség áll fenn:

$$[\text{Resolv}_x(\lambda_1^k \lambda_2^k)]^2 = \frac{K_x(C^k \times C^k)}{K_x(C^{2k})}.$$

2. A $\varphi = \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}$ esete.

Ha ismét a C helyettesítéseknek karakterisztikus értékei

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

akkor a $C^{k_1}, C^{k_2}, C^{k_3}$ helyettesítésnek karakterisztikus értékei

$$\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_1}, \dots, \lambda_n^{k_1},$$

illetve

$$\lambda_1^{k_2}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_n^{k_2},$$

illetve

$$\lambda_1^{k_3}, \lambda_2^{k_3}, \dots, \lambda_n^{k_3},$$

úgyhogy a $C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3}$ KRONECKER-féle szorzatalakulat karakterisztikus értékeit a

$$P_{k_1, k_2, k_3} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k_1} \right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k_2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k_3} \right)$$

szorzat tagjai szolgáltatják. Ezek pedig a

$$\lambda_1^{k_1+k_2+k_3}, \lambda_1^{k_1+k_2} \lambda_2^{k_3}, \lambda_1^{k_1+k_3} \lambda_2^{k_2}, \lambda_1^{k_2+k_3} \lambda_2^{k_1}, \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}$$

tipusokból akként adódnak, hogy ezekre a

$$\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

elemek összes permutációit alkalmazzuk és az így keletkezett kifejezések között a különbözőket vesszük.

Ily módon a $\lambda_1^{k_1+k_2+k_3}$ -ból keletkezett értékek a

$$K_x(C^{k_1+k_2+k_3}) = 0$$

egyenletnek gyökei.

A

$$\lambda_1^{k_1+k_2} \lambda_2^{k_3}, \lambda_1^{k_1+k_3} \lambda_2^{k_2}, \lambda_3^{k_2+k_3} \lambda_2^{k_1}$$

kifejezésekből keletkezettek rendre a

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_2}\lambda_2^{k_3}) = 0$$

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_2}) = 0$$

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_1}) = 0$$

egyenleteknek gyökei.

Végül a $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}$ -ból keletkezettek a

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}) = 0$$

egyenlet gyökei.

De akkor

$$K_x(C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3}) =$$

$$= K_x(C^{k_1+k_2+k_3}) \cdot \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_2}\lambda_2^{k_3}) \cdot \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_2}) \cdot$$

$$\cdot \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_1}) \cdot \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}).$$

Ennek az egyenlőségnek jobboldalán álló szorzat 2., 3., 4-ik tényezője az 1. cikknek (1) alatti képletei alapján a következőképpen kifejezhetők:

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_2}\lambda_2^{k_3}) = \frac{K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3})}{K_x(C^{k_1+k_2+k_3})};$$

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_2}) = \frac{K_x(C^{k_1+k_3} \times C^{k_2})}{K_x(C^{k_1+k_2+k_3})},$$

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1+k_3}\lambda_2^{k_1}) = \frac{K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1})}{K_x(C^{k_1+k_2+k_3})}.$$

Ha ezeket az értékeket a fenti egyenlőségbe behelyettesítjük és ezt $\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3})$ -ra megoldjuk, végül a feladatunkat megoldó következő eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned} & \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}) : \\ &= \frac{[K_x(C^{k_1+k_2+k_3})]^3 K_x(C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3})}{K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3}) K_x(C^{k_1+k_3} \times C^{k_2}) K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1})}. \quad (I) \end{aligned}$$

E képlet helyességének némi ellenőrzése végett nézzük meg, hogy a bal- és jobboldalán álló kifejezések fokszáma megegyező-e.

Mivel a

$$\varphi = \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}$$

kifejezés a

$$\lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$$

gyökök összes permutációinak alkalmazásakor változatlan marad (a λ_i -k határozatlanságánál fogva pedig csak ezeknél) a

$$\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3})$$

fokszámát az

$$\frac{n!}{(n-3)!} = (n-2)(n-1)n.$$

Az (I) egyenlőség jobboldalán a számláló fokszáma

$$2n + n^3,$$

a nevezőé pedig

$$3n^2,$$

úgy hogy az (I) alatti egyenlőség jobboldalán álló kifejezés fokszáma

$$2n + n^3 - 3n^2 = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2),$$

mint látnivaló a bal oldalon álló kifejezésnek fokszámával csakugyan megegyező.

3. A $\varphi = \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}\lambda_4^{k_4}$ esete.

Az előbb követett gondolatmenetet a jelen esetben is alkalmazván, a $\text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}\lambda_4^{k_4})$ -et is explicit képlet segítségével előállíthatjuk. Nehogy ismétlésekbe essem, arra szorítkozom, hogy számításom eredményét ideiktassam. Ez pedig a következő:

$$\begin{aligned} & \text{Resolv}_x(\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}\lambda_4^{k_4}) = \\ & = K_x(C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4}) K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3+k_4}) \\ & \quad K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3+k_4}) K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1+k_4}), \\ & \cdot [K_x(C^{k_1+k_2+k_3} \times C^{k_4}) K_x(C^{k_1+k_2+k_3} \times C^{k_4}) \\ & \quad K_x(C^{k_1+k_2+k_3} \times C^{k_4}) K_x(C^{k_2+k_3+k_4} \times C^{k_1})]^2 \cdot \\ & \cdot [K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4}) K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4}) \\ & \quad K_x(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4})]^{-1} \cdot \\ & \cdot [K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1} \times C^{k_4}) K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1} \times C^{k_4}) \cdot \\ & \cdot K_x(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1} \times C^{k_4})]^{-1} \cdot \\ & \cdot [K_x(C^{k_1+k_2+k_3+k_4})]^{-1}. \end{aligned}$$

Itt is a baloldalra álló kifejezés fokszáma

$$\frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

megegyező a jobb oldalon álló kifejezésnek

$$n^4 + 11n^3 - 6n^2 - 6n = n(n-1)(n-3)$$

fokszámával.

Az eddigiek elegendően mutatják, hogy miképen folytatható az eddigi eljárás 4-nél több tényezőt tartalmazó hatvány-szorzatokra vonatkozó resolvensek explicit képlet segítségével való előállítására. De mutatják azt is, hogy a tényezők számának emelkedésével a talált képletek progressive bonyolódnak. Fejlesztéseinknek tehát inkább csak elméleti értéke van, mert először mutatnak utat arra, miként lehet resolvenseket képlet segítségével explicit módon előállítani.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22.-én tartott üléséből.)

DIE EXPLICITE DARSTELLUNG EINIGER RESOLVENTEN.

Von. GUSTAV RADOS E. Mitglied.

Bezeichnet man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der linearen Substitution C

$$v_i = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \dots + c_{in}u_n \quad (C)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

durch

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

und das Polynom dieser Gleichung durch

$$K_\lambda(C) = |c_{ik} - \delta_{ik}\lambda|$$

$(i, k = 1, 2, \dots, n; \delta_{in} = 1$ für $i = k$ und $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$);

bezeichnet man ferner die zu dem Matrizen

$$\|a_{ik}\|, \quad \|b_{rs}\|$$

$(i, k = 1, 2, \dots, m) \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$

gehörige n m Reihen und ebensoviel Spalten enthaltende Matrix

$$\|a_{i1}b_{k1} \ a_{i1}b_{k2} \dots \ a_{i1}b_{kn}, \dots, \ a_{im}b_{k1} \ a_{im}b_{k2} \dots \ a_{im}b_{kn}\|$$

$(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$

durch $A \times B$ und schlieslich die Resolvente der charakteristische Gleichung von K mit der Wurzel $\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_g^{k_g}$ durch

$$\text{Resolv}_\lambda(\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_g^{k_g}),$$

alsdann bestehen die folgenden Formeln:

$$\text{Resolv}_\lambda(\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2}) = \frac{K_\lambda(C^{k_1} \times C^{k_2})}{K_\lambda(C^{k_1+k_2})}$$

ferner

$$\begin{aligned} & \text{Resolv}_\lambda(\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3}) = \\ & = \frac{K_\lambda(C^{k_1+k_2+k_3}) K_\lambda(C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3})}{K_\lambda(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3}) K_\lambda(C^{k_1+k_3} \times C^{k_2}) K_\lambda(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1})} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned} & \text{Resolv}_\lambda(\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \lambda_4^{k_4}) = \\ & = K_\lambda(C^{k_1} \times C^{k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4}) K_\lambda(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3+k_4}) \\ & \quad K_\lambda(C^{k_1+k_3} \times C^{k_2+k_4}) K_\lambda(C^{k_2+k_3} \times C^{k_2+k_4}) \cdot \\ & \quad \cdot [K_\lambda(C^{k_1+k_2+k_3} \times C^{k_4}) K_\lambda(C^{k_1+k_2+k_4} \times C^{k_3}) \\ & \quad K_\lambda(C^{k_1+k_3+k_4} \times C^{k_2}) K_\lambda(C^{k_2+k_3+k_4} \times C^{k_1})]^2 \cdot \\ & \quad \cdot [K_\lambda(C^{k_1+k_2} \times C^{k_3} \times C^{k_4}) K_\lambda(C^{k_1+k_3} \times C^{k_2} \times C^{k_4}) \\ & \quad K_\lambda(C^{k_1+k_4} \times C^{k_2} \times C^{k_3})]^{-1} \cdot \\ & \quad \cdot [K_\lambda(C^{k_2+k_3} \times C^{k_1} \times C^{k_4}) K_\lambda(C^{k_2+k_4} \times C^{k_1} \times C^{k_3}) \cdot \\ & \quad \cdot K_\lambda(C^{k_3+k_4} \times C^{k_1} \times C^{k_2})]^{-1} \cdot \\ & \quad \cdot [K_\lambda(C^{k_1+k_2+k_3+k_4})]^{-1}. \end{aligned}$$

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften von 22. Nov. 1937.)

CYKLIKUS ORTHOGONÁLIS HELYETTESÍTÉSEKRŐL.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

Cyklikusnak nevezzük az olyan helyettesítést, amely véges számban való ismétlése az azonos helyettesítésre vezet. Fölvetem azt a kérdést, hogy valamely

$$x_i = c_{i1}x'_1 + c_{i2}x'_2 + \dots + c_{in}x'_n$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

orthogonális helyettesítés c_{ik} együtthatóinak milyen tulajdonsága biztosítja annak ciklikus voltát? A válaszadás erre a kérdésre teszi tárgyát a jelen dolgozatomnak.

Tájékozódás céljából a binár orthogonális helyettesítések területén tekintsünk körül, hogy az ott szerzett tapasztalatok nyomán az általános eset elintézésére útmutatást kapjunk.

Ha az

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \sin \alpha_1 \\ y &= -x' \sin \alpha_1 + y' \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (O_1)$$

O_1 binár orthogonális helyettesítést összetesszük az

$$\begin{aligned} x'' &= x'' \cos \alpha_2 + y'' \sin \alpha_2 \\ y'' &= -x'' \sin \alpha_2 + y'' \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (O_2)$$

O_2 binár orthogonális helyettesítéssel. akkor az összetett $O_1 O_2$ helyettesítés a következő:

$$\begin{aligned} x &= (x'' \cos \alpha_2 + y'' \sin \alpha_2) \cos \alpha_1 + (-x'' \sin \alpha_2 + y'' \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 = \\ &= x'' \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + y'' \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \\ y &= -(x'' \cos \alpha_2 + y'' \sin \alpha_2) \sin \alpha_1 + (-x'' \sin \alpha_2 + y'' \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 = \\ &= -x'' \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + y'' \cos (\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

Egész általánosan, ha

$$\begin{aligned} x &= x' \cos a_k + y' \sin a_k \\ y &= -x' \sin a_k + y' \cos a_k \end{aligned} \quad (O_k)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

n számú orthogonális helyettesítés van adva, akkor ezeknek $O_1 O_2 \dots O_n$ összetételét a

$$\begin{aligned} x &= x' \cos (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + y' \sin (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ y &= -y' \sin (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + x' \cos (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

orthogonális helyettesítés szolgáltatja.

Ha

$$O_1 = O_2 = \dots = O_n = O,$$

azaz

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a,$$

ahol O a következő binár orthogonális helyettesítés:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos a + y' \sin a \\ y &= -x' \sin a + y' \cos a, \end{aligned}$$

akkor ennek n -szeres ismétléséből keletkező O^n helyettesítés a következő:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos na + y' \sin na \\ y &= -x' \sin na + y' \cos na. \end{aligned}$$

Ebből az eredményből tüstént kitűnik, hogy O^n akkor és csak akkor lesz identikus helyettesítés, ha

$$\cos na = 1 \quad \sin na = 0,$$

azaz

$$a \equiv \frac{2k\pi}{n} \pmod{2\pi.}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Tehát

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \frac{2k\pi}{n} + y' \sin \frac{2k\pi}{n} \\ y &= -x' \sin \frac{2k\pi}{n} + y' \cos \frac{2k\pi}{n} \end{aligned} \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

az összes orthogonális helyettesítések, melyeknek n -dik hatványa az azonos helyettesítés.

Mit tapasztalunk ennek az n számú ciklikus helyettesítés együtthatói tekintetében?

A cosinus-függvény osztási problémája a

$$\begin{aligned} & \left(2 \cos \frac{\alpha}{n}\right)^n - n \left(2 \cos \frac{\alpha}{n}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \left(2 \cos \frac{\alpha}{n}\right)^{n-4} - \\ & - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(2 \cos \frac{\alpha}{n}\right)^{n-6} + \dots + 2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

n -edfokú algebrai egyenlet megoldását követeli.¹ Ha

$$\varphi = 2k\pi,$$

akkor a (2) alatti egyenlet olyan numerikus algebrai egyenletbe megy át, amelyben az ismeretlen $2 \cos \frac{2k\pi}{n}$ és amelyben az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója 1-gyel egyenlő, a többi együttható racionális egész számok és amelynek

$$2 \cos \frac{2\pi}{n}, 2 \cos \frac{4\pi}{n}, \dots, 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{n}, 2 \cos \frac{n\pi}{n} = 2$$

gyökei tehát algebrai egész számok és mindannyian valóságok.

Kimondhatjuk tehát, hogy az (1) alatti ciklikus helyettesítések együttható olyan algebrai számok, amelyek mindegyiküknek összes konjugált értékei valós számok és hogy az (1) alatti ciklikus orthogonális helyettesítés karakterisztikus egyenletében,

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} - \lambda & \sin \frac{2k\pi}{n} \\ -\sin \frac{2k\pi}{n} & \cos \frac{2k\pi}{n} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - 2\lambda \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 = 0$$

az együtthatók

$$1, 2 \cos \frac{2k\pi}{n}, 1$$

algebrai egész számok.

¹ L. WEBER, Lehrbuch der Algebra (1895) I. k. pag. 435.

Fölmerül most az a kérdés, hogy az (1) alatti ciklikus helyettesítés együtthatóin fölismert és kiemelt tulajdonságok eleget-e arra, hogy tetszőszerinti n -dimenziós orthogonális helyettesítés ciklikus voltát biztosítsák, ha együtthatói e tulajdonságokkal föl vannak ruházva.

A válasz erre a kérdésre igenlő, amennyiben sikerül a következő tételnek bebizonyítása.

Ha az

$$x_i = c_{i1}^{(1)}x'_1 + c_{i2}^{(1)}x'_2 + \dots + c_{in}^{(1)}x'_n \quad (3)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

orthogonális helyettesítés összes együtthatói totálisan valós algebrai számok (azaz olyanok, hogy összes konjugált értékeik is valósak) és további karakterisztikus egyenletében a legmagasabb hatvány együtthatója 1-gyel egyenlő, a többiek pedig algebrai egész számok, akkor ez az orthogonális helyettesítés ciklikus.

Legyen a $c_{ik}^{(1)}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) együtthatórendszerhez tartozó GALOIS-féle számtest $T(\vartheta)$, ahol ϑ eleget tesz egy meghatározott

$$\Phi(\vartheta) \equiv \vartheta^m + g_1\vartheta^{m-1} + \dots + \vartheta_m = 0$$

irreducibilis algebrai egyenletnek. Legyenek ennek gyökei

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m,$$

akkor

$$c_{ik}^{(h)} = r_{ik}(\vartheta_h) \quad (4)$$

$$(h = 1, 2, \dots, m; i, k = 1, 2, \dots, n)$$

a $c_{ik}^{(1)}$ konjugált értékei, amelyek föltevésünk szerint a $c_{ik}^{(1)}$ -gyel együtt mindannyian valósak. Az r_{ik} függvények racionálisok. Az

$$x_i = c_{i1}^{(h)}x'_1 + c_{i2}^{(h)}x'_2 + \dots + c_{in}^{(h)}x'_n \quad (3^{(h)})$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; h = 1, 2, \dots, m)$$

lineár helyettesítéseket a (3) alatti helyettesítés algebrailag konjugált helyettesítéseinek nevezem. Most már könnyű szerrel kimutatható, hogy ez az m számban lévő algebrailag konjugált helyettesítések a (3) alatti helyettesítéssel egyidőben orthogonális helyettesítések.

Mivel a (3) alatti helyesítés orthogonális, fennáll a következő $\frac{n(n+1)}{2}$ számú egyenlet:

$$c_{i1}^{(1)}c_{k1}^{(1)} + c_{i2}^{(1)}c_{k2}^{(1)} + \dots + c_{in}^{(1)}c_{kn}^{(1)} = \delta_{ik}, \quad (F_{ik})$$

($i, n = 1, 2, \dots, n$)

amelyben δ_{ik} 1-gyel vagy zérussal egyenlő a szerint, amint $i = k$ vagy $i \neq k$.

Az (F_{ik}) alatti egyenletek a (4) alatti egyenlőségeknél fogva így írhatók.

$$r_{i1}(\vartheta_1)r_{k1}(\vartheta_1) + r_{i2}(\vartheta_1)r_{k2}(\vartheta_1) + \dots + r_{in}(\vartheta_1)r_{kn}(\vartheta_1) = \delta_{ik},$$

de akkor az

$$\phi(\vartheta) = 0$$

egyenlet irreducibilitásánál fogva fennállanak az

$$r_{i1}(\vartheta_h)r_{k1}(\vartheta_h) + r_{i2}(\vartheta_h)r_{k2}(\vartheta_h) + \dots + r_{in}(\vartheta_h)r_{kn}(\vartheta_h) = \delta_{ik},$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$) ($h = 1, 2, \dots, m$),

azaz (4)-re való tekintettel a

$$c_{i1}^{(h)}c_{k1}^{(h)} + c_{i2}^{(h)}c_{k2}^{(h)} + \dots + c_{nh}^{(h)}c_{nk}^{(h)} = \delta_{ik}$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$; $h = 1, 2, \dots, m$)

egyenletek is, amelyek mutatják, hogy a $(3^{(h)})$ alatti lineár helyettesítések mindannyian orthogonálisok.

Az eddigiek összefoglalásaként kimondhatjuk, hogy a $(3^{(h)})$ alatti lineár helyettesítések mindannyian totálisan valós együtthatókkal fölszerelt *orthogonális* helyettesítések.

Most már ismeretes ama BRIOSCHI-tól¹ föllálitott, de teljesen csak FROBENIUS-tól² bebizonyított tétel, mely így szól:

Valós együtthatós orthogonális helyettesítés karakterisztikus egyenlete minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő és elemi osztói egyszerűek.

¹ Liouville-Journal 19. k. pag. 253.

² Journ. für die reine u. angew. Mathematik 84. k. pag. 52. és 53.

E tétel értelmében tehát a

$$\Psi_h(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}^{(h)} - \lambda & c_{12}^{(h)} & \dots & c_{1n}^{(h)} \\ c_{21}^{(h)} & c_{22}^{(h)} - \lambda & \dots & c_{2n}^{(h)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1}^{(h)} & c_{n2}^{(h)} & \dots & c_{nn}^{(h)} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \\ \equiv \lambda^n + I_1^{(h)}\lambda^{n-1} + \dots + I_n^{(h)} = 0$$

karakterisztikus egyenlet minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő, együtthatói pedig föltevésünk folytán algebrai egész számok.

De akkor a

$$\text{Norm } \Psi_1(\lambda) \equiv \Psi_1(\lambda) \Psi_2(\lambda) \dots \Psi_m(\lambda) = 0 \quad (E)$$

egyenletben a λ legmagasabb együtthatója 1-gyel egyenlő, a többi együttható pedig racionális egész és így KRONECKER¹ ismeretes tételénél fogva az (E) alatti egyenletnek és így a

$$\Psi_1(\lambda) = 0$$

egyenletnek is, a (3) alatti helyettesítés karakterisztikus egyenletének is összes gyökei egységgyökök.

Most már ismeretes az a tétel,² *hogyha valamely lineár-helyettesítés karakterisztikus egyenletének összes gyökei egységgyökök és elemi osztói egyszerűek, akkor ez a helyettesítés ciklikus.* Mivel pedig a (3) alatti helyettesítés e feltételeknek eleget tesz, kimondhatjuk, hogy a (3) alatti helyettesítés ciklikus orthogonális helyettesítés.

Önként merül föl a kérdés, hogy valamely valós orthogonális helyettesítés ciklikus voltára fönt talált föltételek egyszerűs-mind szükségesek-e?

Binár valós orthogonális helyettesítésekre vonatkozóan könnyen kimutatható, hogy a válasz a föltett kérdésre igenlő.

Tegyük föl, hogy az

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 \end{aligned} \quad (O)$$

¹ Journal für die reine u. angew. Math. 53. k. 173—175. l.

² L. FROBENIUS: Über lineare Substitutionen und bilinearen Formen Crelle-Journal 84. k. 16. l.

valós együtthatós orthogonális helyettesítés ciklikus. Be fogjuk bizonyítani, hogy a

$$K(C) \equiv \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0$$

karakterisztikus egyenletének együtthatói algebrai egész számok, továbbá a c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} együtthatók totálisan valós algebrai számok, azaz olyanok, hogy mindegyiküknek összes konjugált értékei valós számok. Ha az O helyettesítés orthogonális, akkor együtthatói között fennállanak a következő relatiók:

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1 \quad (r_1)$$

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \quad (r_2)$$

$$c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1 \quad (r_3)$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \quad (r_4)$$

az (r_1) és (r_2) alatti egyenlőségekből következik

$$c_{21}^2 = c_{12}^2$$

az (r_2) és (r_3) alattiakból

$$c_{22}^2 = c_{11}^2.$$

Tehát az O orthogonális helyettesítés matrixa a következő

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \pm c_{12} & \pm c_{11} \end{pmatrix},$$

ami a következő 4 eshetőségre vezet:

$$O_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & -c_{11} \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & -c_{11} \end{pmatrix}, \quad O_4 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}.$$

Az O_1 matrix esetében az orthogonális helyettesítés a következő:

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2$$

$$x_2 = -c_{12}x'_1 + c_{11}x'_2;$$

karakterisztikus egyenlete pedig

$$K(O_1) \equiv \lambda^2 - 2c_{11}\lambda + 1 = 0.$$

Minthogy e helyettesítésről föltettük, hogy ciklikus, karakterisztikus egyenletének gyökei egységgyökök. Legyenek ezek

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= r_1 \\ \lambda_2 &= r_2,\end{aligned}$$

ahol r_1 valamely m -dik és r_2 valamely n -dik egységgyök. A $K(O_1) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei és együtthatói között fennálló összefüggésnél fogva

$$2c_{11} = r_1 + r_2, \quad (5)$$

tehát a $K(O_1) = 0$ karakterisztikus egyenletnek együtthatói

$$1, \quad -2c_{11}, \quad 1$$

csakugyan algebrai egész számok, mert ilyenek az r_1 és r_2 egységgyökök. Az r_1 m -dik és r_2 n -dik egységgyökök mint egy bizonyos mn -dik primitív egységgyöknek, nevezzük ezt r -nek, mint n -dik, illetve m -dik hatványai állíthatók elő, úgyhogy az (5) alatti egyenlőség így írható

$$2c_{11} = r^m + r^n,$$

ahol c_{11} föltevésünk szerint valós szám, mert ilyennek vettük föl az O_1 orthogonális helyettesítést. Tehát $r^m + r^n$ képzetes része föltevésünk szerint zérussal egyenlő. Ez a képzetes rész pedig a következő:

$$\frac{1}{2} (r^m - r^{-n}) + \frac{1}{2} (r^m - r^{-m}) = 0; \quad (6)$$

mivel r mint mn -dik primitív egységgyök egy $\varphi(mn)$ -edfokú (φ az EULER-féle számelméleti függvény jele) irreducibilis egyenletnek gyöke, ennek az egyenletnek összes gyökei kielégítik a (6) alatti egyenletet, azaz a c_{11} együttható *totalisan valós*, mert valósak az összes konjugált értékei.

Az (r_1) alatti egyenlőségnél fogva

$$|c_{11}| \leq 1;$$

tehát

$$c_{12} = \sqrt{1 - c_{11}^2}$$

is totálisan valós, úgyhogy kimondhatjuk, hogyha az (O_1) helyettesítés ciklikus, az együtthatókra fent talált elegendő feltételek egyszersmind szükségesek is.

Az O_2 orthogonális helyettesítés tárgyalása az

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} O_1$$

egyenlőség folytán visszavezethető az O_1 esetére.

Az O_3 csak akkor lehetne orthogonális helyettesítés matrixa, ha

$$|O_3| = -c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1,$$

mivel pedig

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$$

azért

$$c_{12}^2 = 1 \quad c_{11}^2 = 0,$$

tehát O_3 csak akkor valódi orthogonális helyettesítés, ha ilyen

$$c_{11} = 0 \quad c_{12} = \pm 1,$$

de ekkor látnivaló, hogy az együtthatók totálisan valósak és hogy a karakterisztikus egyenletnek együtthatói algebrai egész számok.

Teljesen ugyanigy intézhető el O_4 esete.

Nem oly egyszerű az n -dimenziós orthogonális helyettesítés esetében a szükséges és elegendő feltételek meghatározása. Ez mélyebbreható segédeszközöket igényel, amelyeket bemutatni egy legközelebbi alkalommal szerencsém lesz.

ÜBER CYKLISCHE ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN.

Von GUSTAV RADOS Ehrenmitglied.

Im vorstehenden Aufsatz wurde der Beweis für den folgenden Lehrsatz erbracht:

Eine orthogonale Substitution ist cyclisch, wenn ihre Coëfficienten total-reelle algebraische Zahlen- und die Coëfficienten ihrer charakteristischen Gleichung ganze algebraische Zahlen sind.

Cyklisch nenne ich eine Substitution, wenn eine endlich Anzahl ihren Wiederholung zur identischen Substitution führt und total-reell eine algebraische Zahl, wenn sie und ihre konjugierten Werte reell sind.

Es sei

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n \quad (C)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

eine orthogonale Substitution von der im Lehrsatz angegebenen Beschaffenheit, $G(\rho)$ der GALOIS'sche Körper in welchem sämtliche Coëfficienten c_{ik} eingebettet sind, so dass die Coëfficienten

$$c_{ik} = r_{ik}(\rho)$$

$(i, k = 1, 2, \dots, n),$

wo r_{ik} eine rational Funktion mit ganzzahligen Coëfficienten, ρ die Wurzel einer irreduciblen Gleichung m -ten Grades ist. Es seien die Wurzeln der letzteren:

$$\rho, \rho', \dots, \rho^{(l)}, \dots, \rho^{(m-1)}$$

und

$$r_{ik}(\rho^{(l)}) = c_{ik}^{(l)}$$

alsdann bezeichne man die Substitutionen

$$y_i = c_{i1}^{(l)}x_1 + c_{i2}^{(l)}x_2 + \dots + c_{in}^{(l)}x_n \quad (C^{(l)})$$

durch $C^{(l)}$ wobei $C^{(0)} = C$ sei.

Die Substitutionen $C^{(l)}$ sind sämtlich reell und orthogonal, da die Gleichungen

$$c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \dots + c_{in}c_{kn} = \delta_{ik} \\ (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad \delta_{ik} = 1 \text{ wenn } i=k, \delta_{ik}=0, \text{ wenn } i \neq k$$

die Gleichungen

$$c_{i1}^{(l)}c_{k1}^{(l)} + c_{i2}^{(l)}c_{k2}^{(l)} + \dots + c_{in}^{(l)}c_{kn}^{(l)} \\ (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

zur Folge hat.

Die Coëfficienten der charakteristischen Gleichungen

$$\varphi_l(\lambda) \equiv |C^{(l)} - \lambda E| = 0 \\ (l = 0, 1, 2, \dots, m; E \text{ ist die identische Substitution})$$

sind in Folge unserer Voraussetzung ganze algebraische Zahlen, ihre Wurzeln nach einem bekannten Satz von BRIOSCI über reelle orthogonale Substitutionen¹ sämtliche vom absoluten Werte 1 und ihre Elementarteiler einfach.

Bildet man die Gleichung

$$\Phi(\lambda) \equiv \varphi(\lambda)\varphi^{(1)}(\lambda)\dots\varphi^{(m-1)}(\lambda) = 0,$$

so ist in dieser der Coëfficient von λ^{mn} gleich 1, alle anderen Coëfficienten ganze rationale Zahlen und alle ihre Wurzeln vom absoluten Wert 1. Nach dem schönen Satz KRONECKERS² sind daher alle ihre Wurzeln Einheitswurzeln.

Es sind somit auch die Wurzeln vom

$$\varphi(\lambda) = |C - \lambda E| = 0.$$

¹ BRIOSCI, Lionville-Journal Bd. 19, pag. 253.

² KRONECKER, Crelle Journal Bd. 53 pag. 176.



Einheitswurzeln auch die Elementarteil von $C - \lambda E$ einfache, daher ist ¹ wie zu beweisen war C cyklisch.

Bemerkenswert ist der Umstand, dass im Falle von binären orthogonalen Substitutionen die Bedingungen des obigen Theorems nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig dafür sind, dass die Substitution cyklisch sei.

¹ FROBENIUS, Crelle-Journal Bd. 84, pag. 16.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dezember 1937).

SÍKSOKSZÖGEKRŐL, KÜLÖNÖSEN AZ EGYSZERŰ SÍKSOKSZÖGEKRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA I. tagtól.

1. Bevezetés.

Az újabb irodalomban több szerző¹ vezetett be a síksokszögek tárgyalásába a síkgörbék elméletében szokásos szempontokat. Legújabban J. HJELMSLEV és O. HAUPT mutatott rá nyomatékosan² a görbék és felületek olyan értelmezésének és tárgyalásának szükségességére, hogy az az értelmezés és tárgyalás a sokszögeket, illetve soklapokat is magában foglalja.

A következő vizsgálatok célja a síkban fekvő sokszögekre vonatkozólag az érintőknek, csúcspontoknak, az osztályszámnak és az osztályindexnek értelmezése és az egyszerű sokszögek jellemző számai között fennálló összefüggéseknek megállapítása.

¹ J. HJELMSLEV: «Om Polygoner og Polyedre». Matematisk Tidsskrift B 1925 (Festskrift till C. Juel), 65.

E. KIVIKOSKI: «Über Streckenzüge in der projektiven Ebene», Annales Academiae Scientiarum Fennicae A 28. kötet 14. sz. (1928), 1—56. «Zur Theorie der projektiven Vielseite». Ugyanott A 32. kötet 3. sz. (1929), 1—21.

A. COMESSATTI: «Lezioni di Geometria analitica e proiettiva» I. rész. Padova, 1930, 201—203.

L. BRUSOTTI: «Sui poligoni del piano proiettivo aventi circolazione massima», Rendiconti R. Istituto Lombardo, 66. k. (1933), 69—77. «Poligoni e poliedri», Enciclopedia delle matematiche elementari (Berzolari, Vivanti, Gigli) II. kötet. I. rész (1937), 284—287.

² J. HJELMSLEV: «Die graphische Geometrie». Förhandl. Attende skandinav. Matematikerkongr., Stockholm 1934, 3—12.

O. HAUPT: «Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven», Math. Zeitschrift 39. k. (1934), 126—136, «Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden», Monatshefte für Math. u. Phys. 43. k. (1936), 261—274.

Az érintőknek és a csúcspontoknak általunk adott értelmezése különbözik attól az értelmezéstől, amelyet KIVIKOSKI³ és HJELMSLEV⁴ adott.

Az általunk adott értelmezés szerint az egyszerű sokszögekre ugyanazok a tételek állanak fenn, mint amelyeket a maximális osztályindexű síkgörbékre megállapítottunk.⁵ Ebből is következik, hogy a maximális osztályindexű síkgörbékre vonatkozó eredményeink olyan görbékre is átvihetők, amelyeknek szögpontjaik és egyenesdarabjaik is vannak.

Az egyszerű sokszögekre vonatkozó tételek megállapítása természetesen lényegesen egyszerűbb, mint a maximális osztályindexű síkgörbékre volt.

2. Sokszögek értelmezése a síkon. Érintők, csúcspontok. Osztályszám, osztályindex.

Az euklidesi síkon N -számú ($N \geq 3$) olyan

$$A_1, A_2, \dots, A_N \quad (A_{N+k} \equiv A_k)$$

pont, amelyeknek ciklikus sorrendjében három egymásra következő pont sohasem esik egy egyenesre, egy síkidomot határoz meg, amelyet az elemi geometria N -oldalú sokszögnek nevez, de amelyet mi N -oldalú *alapsokszögnek* fogunk hívni. A felvett N pont az alapsokszögnek *szögpontja*, a szögpontok ciklikus sorrendjében két-két egymásután következőt összekötő N -számú egyenesdarab, illetve egyenes az alapszögnek *oldala*, illetve *alapegyenese*. Egyszerűség kedvéért a következőkben feltételezzük,

³ ⁴ Lásd az 1) és 2) lapalji jegyzetben idézett dolgozatokat.

⁵ SZŐKEFALVI NAGY GYULA: 1. «Über Kurven von Maximalklassenindex. Über Kurven von Maximalindex», Mathematische Annalen 89. k., (1923), 32—75. 90. k. (1924), 152—153. — 2. «Maximális osztályindexű síkgörbék jellemző számairól», Mat. és Természettud. Értesítő 43. k. (1926), 290—306. — 3. «Maximális osztályindexű síkgörbék meneteiről», ugyanott 44. k., (1927), 434—445. — 4. «Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximalklassenindex», Math. Annalen 100. k. (1928), 164—178. — 5. «Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex», Math. Ann. 100 k., (1928), 179—187.

hogy az alapszög szögpontjai mind különbözők és közülök egy sem esik egy oldalra és hogy két oldal metszéspontján nem halad át egy harmadik oldal is.

Ha az alapsokszöghöz hozzárendelünk egy forgásértelmet (amely lehet az óramutató járásával megegyező vagy ellenkező), akkor belőle egy N -oldalú és N -szögű S sokszöget kapunk. Az S sokszögnek ugyanazok az oldalai, mint az alapsokszögnek. Az S sokszög A_k szögpontja mellett fekvő szögön azt a π -nél kisebb a_k pozitív szöget értjük, amely alatt az $A_{k-1}A_k$ teljes alapegyenest A_k pontja körül a megadott forgásértelemben az A_kA_{k+1} alapegyenesbe forgathatjuk ($k = 1, 2, \dots, N$; $A_0 \equiv A_N$, $A_{N+k} \equiv A_k$). Az $A_{k-1}A_k$ és A_kA_{k+1} alapegyenes által alkotott a_k nyílású ketősszögteret az S sokszög A_k szögpontjához tartozó *érintőszögtérnek* nevezzük.

Mindazokat az egyeneseket, amelyek az S sokszög valamelyik érintőszögterébe vagy annak határára esnek, az S sokszög *érintőinek* nevezzük. Az S sokszögnek tehát azok és csak azok az egyenesek az érintői, amelyeken egy egyenes az A_NA_1 alapegyenesből kiindulva keresztülmegy az alatt, amíg az A_1, A_2, \dots, A_N szögpontok körül a megadott értelemben (a_1, a_2, \dots, a_N szöggel való) forgás után az A_NA_1 alapegyenesbe visszatér.

Az S sokszög bármely érintőjén van legalább egy *érintéselem*, amely vagy *érintéspont*, vagy *érintésszakasz*. A sokszög egy oldala a rajta áthaladó alapegyenesen érintésszakasz. A sokszög érintőin az érintésszakaszoktól különböző érintéselemek érintéspontok. Ezek a sokszögnek olyan szögpontjai, amelyekhez tartozó érintőszögtereknek belsejébe esnek az illető érintők.

A sokszög szögpontjai vagy *csúcspontok*, vagy *közönséges szögpontok*. Az A_k szögpont akkor csúcspont, illetőleg közönséges szögpont, ha az A_k érintőszögterének belsejébe eső érintők metszik, illetve nem metszik az $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ törtvonalat az A_k pontban. (Az A_k ponton átmenő egy olyan egyenesről mondjuk, hogy metszi az $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ törtvonalat, amelynek különböző oldalára esik az A_{k-1} és A_{k+1} pont. Az A_k ponton átmenő egy olyan egyenes, amelynek ugyanarra az oldalára esik az A_{k-1} és A_{k+1} pont, nem metszi az $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ törtvonalat.) Könnyen belátható, hogy az (A_k -ből kiinduló) A_kA_{k-1} félegyenes

az $A_k A_{k+1}$ félegyenessel, illetve ennek ellentettjével alkotja az a_k szöget a szerint, amint A_k az S sokszögnek csúcspontja, ill. közönséges szögpontja.

Az S sokszög *osztályszáma*, illetve *osztályindexe* a síknak a sokszögre nem eső P pontjaiból a sokszöghöz húzható érintők számának maximuma, illetve minimuma.⁶ Egy P pontból a sokszöghöz húzható érintők számában egy érintőt annyszorosan kell számításba venni, mint ahány különböző érintésem van rajta.

3. Ellenszögek. Külső és belső sokszögek.

Ha az S sokszög alapsokszögét megtartjuk, de a felvett forgásértelmet ellentettjével helyettesítjük, akkor az S sokszög S' *ellensokszögét* kapjuk. Ebből az értelmezésből következik, hogy az S és S' kölcsönösen ellensokszög. A két sokszögnek ugyanazok a szögpontjai és oldalai, szögeik azonban egymásnak mellékszögei. Az A_k szögpontban ugyanis az S és S' sokszög érintőszögtere egymást teljes sikká egészíti ki. Ha tehát a_k , ill. a'_k jelöli az S , illetve S' sokszög szögét az A_k szögpontban, akkor $a_k + a'_k = \pi$.

Az ellensokszögek értelmezéséből könnyen lehozhatók a következő tételek:

I. Ha c és c' jelöli a N -oldalú S és S' ellensokszög csúcspontjainak számát, akkor $c + c' = N$. Itt c' egyszersmind az S , c pedig az S' sokszög közönséges szögpontjainak számát is jelenti.

II. Ha a síknak egy olyan pontján, amely a N -oldalú S és S' ellensokszög alapegyenesein kívül esik, a két sokszöghöz t , illetve t' érintő megy át, akkor $t + t' = N$.

Az I. tétel abból következik, hogy az A_k szögpont az S' sokszögnek nyilvánkép csúcspontja, illetve közönséges szögpontja

⁶ Ez az értelmezés megfelel annak, amelyet O. HAUPT: «Über ebene Bogen und Kurven in weiterem Sinne» című dolgozatában (Sitzungsber. d. Bay. Akad. 1935, 37—70. l.) alkalmaz, ahol egy síkgörbe rendszáma, illetve indexe azon pontok számának maximuma, illetve minimuma, amelyekben a görbét szelők metszik.

a szerint, amint az S sokszögnek közönséges szögpontja, illetve csúcspontja. A II. tétel pedig abból következik, hogy a síknak egy olyan P pontjára vonatkozólag, amely az S és S' sokszög alapegyenesein kívül van, a PA_k egyenes a két ellensokszög A_k szögpontjához tartozó érintőszögtér közül az egyiknek és csak az egyiknek esik a belsejébe és így a két sokszög közül az A_k pontban az egyiket és csak az egyiket érinti.

Konvex alapsokszöghöz tartozó S és S' ellensokszög közül az egyiknek szögei a konvex alapsokszög elemi geometriai külső, a másiknak pedig a belső szögeivel megegyeznek. Ha S az a sokszög, amelynek szögei a konvex alapsokszög külső szögeivel egyenlők, akkor az S sokszögnek *külső* és az S' -nek *belső* sokszög elnevezése egyértelmű. Az ilyen S külső sokszögnek egy csúcspontja sincs, a hozzátartozó belső sokszögnek pedig egy közönséges szögpontja sincs.

Az olyan alapsokszöget, amelyben nincs két olyan nem szomszédos oldal, amelyeknek közös pontja volna, *egyszerű alapsokszögnek* nevezzük. Egy olyan egyszerű alapsokszögnek, amely nem konvex, van π -nél kisebb és van π -nél nagyobb belső szöge. Azokat a szögpontokat, amelyekben az egyszerű alapsokszög (elemi geometriai) belső szöge π -nél kisebb, illetve nagyobb, az egyszerű alapsokszög konvex, illetve konkáv szögpontjainak nevezzük.

Egy egyszerű alapsokszöghöz tartozó S és S' ellensokszög közül is egyértelműen lehet az egyiket *külső*, a másikat *belső sokszögnek* nevezni. Ha az egyszerű alapsokszögnek belső szögét az A_k konvex, illetve A_h konkáv szögpontban γ_k , illetve $\bar{\gamma}_h = \gamma_h + \pi$ jelöli, akkor könnyen be lehet látni, hogy a két ellensokszög közül az A_k és A_h szögpontban az egyiknek $\alpha_k = \pi - \gamma_k$ és $\alpha_h = \pi - \gamma_h$, a másiknak pedig $\alpha'_k = \gamma_k$ és $\alpha'_h = \gamma_h$ a szöge. A két sokszög közül az α_k és α_h szögekkel bíró a külső sokszög, a másik a belső sokszög.

Az egyszerű alapsokszög konvex pontjaiban a belső, illetve külső szögek a hozzátartozó belső, illetve külső sokszög szögeivel egyeznek meg. Ha az alapsokszög konkáv szögpontjainak számát c , konvex szögpontjainak számát pedig c' jelöli, akkor a hozzátartozó külső sokszögnek nyilvánkép c csúcspontja és c'

közönséges szögpontja van, a belső sokszögnek pedig c' csúspontja és c közönséges szögpontja van.

Ha egy egyszerű alapsokszöghöz tartozó külső és belső sokszöget egyszerre veszünk tekintetbe, akkor S -sel jelöljük a külső és S' -vel a belső sokszöget.

Egy egyszerű alapsokszög a síkot két tartományra bontja fel. A sokszögön belül fekvő véges tartomány, *a sokszög belseje* egyszeresen összefüggő, a másik tartomány, *a sokszög külseje* végtelenbe nyúlik és kétszeresen összefüggő.

4. A sík egy pontjából a sokszöghöz húzható érintők számának változása a pont mozgása közben. Maximális osztályindexű sokszögek.

Ha egy P pont a síkon mozog, akkor belőle egy N -oldalú sokszöghöz húzható érintők száma a pont mozgása közben nyilvánképpen csak akkor változhatik meg, ha a pont az S sokszög egy érintőszögteréből kilép vagy oda belép, vagyis csak akkor, amikor a pont a sokszög valamelyik alapegyenesén áthalad.

Legyen P_1P_2 egy olyan elég kicsiny egyenesdarab, amely metszi az $A_{k-1}A_k$ alapegyenest egy P_0 pontban, de nem metszi az $A_{k-2}A_{k-1}$ és az A_kA_{k+1} alapegyenest.

Ha P_0 az $A_{k-1}A_k$ sokszögoldalnak egy belső pontja, akkor a P_1 és P_2 pont közül az egyik benne van az A_{k-1} és az A_k szögponthoz tartozó mindkét érintőszögter belsejében, a másik ellenben mindkettőn kívül esik. (Amíg ugyanis a P pont a P_1P_2 szakaszt leírja, azalatt az $A_{k-1}P$ és az A_kP egyenes ellenkező értelemben forog. Az a forgás tehát, amelyet az $A_{k-1}P$ egyenes végez az A_{k-1} körül azalatt, amíg a P pont P_1 -től P_0 -ig jut, és az, amelyet az A_kP egyenes végez az A_k körül ugyanez alatt az idő alatt, egyenlő értelmű. A P_1P_0 szakasz P pontjaira nézve tehát az $A_{k-1}P$ és A_kP egyenes közül vagy mindkettő érintője az S sokszögnek, vagy egyik sem, amikor mindkettő az S' sokszög érintője.)

A P_1 és P_2 pont közül tehát az egyiken az S sokszögnek két olyan érintője megy át, amelynek A_{k-1} , vagy A_k érintés-

pontja, a másikon ellenben egy sem. Amikor tehát átlépi a P pont az $A_{k-1}A_k$ oldalt, akkor az S sokszög érintőinek száma kettővel változik. Itt feltételeztük, hogy P_0 nem pontja egyszersem más oldalnak is. Ha ugyanis P_0 más oldalnak is pontja, akkor annak átlépése is kettővel változtatná meg az érintők számát. A két oldalnak a P_0 metszéspontjában való átlépésekor az érintők számának változása tehát 4 vagy 0 volna.)

Ha a P_1P_2 szakasznak az $A_{k-1}A_k$ alapegyenessel való P_0 metszéspontja az $A_{k-1}A_k$ sokszögoldalán kívül esik, akkor feltételezhetjük, hogy A_k van az A_{k-1} és P_0 pont között, mivel a másik eset hasonlóképp intézhető el. Ekkor a P_1 és P_2 közül az egyik az A_{k-1} érintőszögterében van, a másik ezen kívül esik. Ha P_1 van az A_{k-1} érintőszögterében, akkor nem lehet egyszersem az A_k érintőszögterében is. (Az ellenkező esetben ugyanis az S sokszög érintőin ugyanabban az értelemben végigforduló egyenesnek az A_{k-1} és A_k szögpontok körüli forgása ellenkező értelmű volna, ami pedig ellentmondás.) Ebből következik, hogy az $A_{k-1}P_1$ és az A_kP_2 egyenes érinti az S sokszöget az A_{k-1} , illetve A_k pontban, az $A_{k-1}P_2$ és az A_kP_1 egyenes ellenben nem. Az S sokszöghöz a P_1 és P_2 pontból tehát egy-egy olyan érintő húzható, amely a sokszöget vagy az A_{k-1} , vagy az A_k szögpontban érinti. Amikor tehát P átlépi az $A_{k-1}A_k$ oldal meghosszabbítását, az érintők száma nem változik (feltéve, hogy ugyanekkor P nem lép át egy sokszögoldalra).

Ha a síkban két tartományt akkor mondunk szomszédosnak, ha van közös határdarabjuk, akkor az előzők alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

III. *Egy S sokszög a síkot bizonyos tartományokra bontja. Az egyes tartományok valamennyi pontjából ugyanannyi érintő húzható az S sokszöghöz. Szomszédos tartományok pontjaiból a sokszöghöz húzható érintők száma kettővel különbözik egymástól.*

A II. és III. tételből lehozható a következő két tétel:

IV. *Egy-egy olyan tartomány pontjaiból, amelyekre egy N -oldalú S sokszög a síkot felbontja, az S' ellensokszöghöz is egyenlőszámú érintő húzható, még pedig $N-m$, ha az illető tartomány pontjaiból m érintő megy az S sokszöghöz.*

V. Ha n és n' , illetve i és i' jelöli a N -oldalú S és S' ellensokszög osztályszámát, illetve osztályindexét, akkor $n + i' = n' + i = N$.

A IV. tétel nyilvánvaló. Az V. tétel bebizonyítására csak annyit kell belátnunk, hogy az S és S' sokszög alapegyenesein kívül is van olyan P , illetve P' pont a síkban, ahonnan az S , illetve S' sokszöghöz osztályszámával egyenlőszámú érintő húzható. Az ilyen P , illetve P' pontból az S és S' ellensokszögekhez menő érintők számára a II. tétel alkalmazásával kapjuk az V. tételt, mivel egy ilyen P , illetve P' pontból az S' és S sokszöghöz i' , illetve i érintő húzható.

Tegyük fel ugyanis, hogy az $A_{k-1}A_k$ alapegyenes egy P_0 pontjából, amely azonban a sokszög $A_{k-1}A_k$ oldalán kívül és egyszersmind a többi alapegyenesen kívül van, n érintő húzható az S sokszöghöz. Ekkor a III. tétel bizonyítása miatt az $A_{k-1}A_k$ alapegyenest a P_0 pontban metsző elég kicsiny P_1P_2 szakasz pontjaiból egy-egy olyan érintő húzható az S sokszöghöz, amely a sokszöget az A_{k-1} és A_k szögpont közül valamelyikben érinti, mivel a P_0 pontból is csak egy érintő még pedig az $A_{k-1}A_k$ alapegyenes húzható. (Ez a sokszöget az $A_{-1k}A_k$ érintésszakaszon érinti.)

Ebből következik, hogy az alapegyeneseken kívül fekvő P_1 pontból is n érintő húzható az S sokszöghöz. Ebből egyszersmind az S' sokszögre is következik megfelelő P' pont létezése. Ezzel az V. tétel be van bizonyítva.

Az V. tételből következik, hogy $n - i = n' - i' = H$. Ha ezt a H számot, vagyis az S sokszög osztályszámának és osztályindexének különbségét *osztályhiánynak*, *osztálydefektusnak* nevezzük, akkor a III. tétel alapján a következőt mondhatjuk ki:

VI. *Bármely sokszögnek páros az osztályhiánya. Ellen-sokszögeknek ugyanaz az osztályhiánya. Ha az N -oldalú S és S' ellensokszögeknek n és n' jelöli az osztályszámát, i és i' az osztályindexét és H az osztályhiányt, akkor*

$$n + n' - H = i + i' + H = N.$$

Az osztályhiány azért páros szám, mivel az S sokszög által felbontott síkban két tartomány pontjaiból a sokszöghöz húzható

érintők száma egymástól páros számban különbözik. A III. tétel miatt tehát $H \leq 2$, vagyis az n -edosztályú S sokszög osztályindexe, $i \leq n-2$. Az olyan sokszöget, amelynek osztályhiánya 2, maximális osztályindexű sokszögnek nevezzük. A legegyszerűbb ilyen sokszög a külső háromszög, amely nyilvánkép másodosztályú.

A III. tételből lehozható a következő tétel is:

VII. *Ha egy sokszögnek van közöséges kettőspontja (amelyben a sokszögnek két, de csak két oldala metszi egymást), akkor osztályhiánya legalább négy. Az egyszerű alapsokszögekhez tartozó sokszögek, az egyszerű sokszögek minél maximális osztályindexűek. Bármely maximális osztályindexű sokszög egyszerű, (feltéve, hogy nincs olyan pontja, amelyben három vagy több oldala metszi egymást).*

Ha ugyanis az S sokszögnek P közöséges kettőspontja, akkor a P -ben egymást metsző két sokszögoldalt át lehet P -n keresztül olyan irányban lépni, hogy az átlépéskor négyvel csökkenjen az S sokszöghöz húzható érintők száma. Ebből következik, hogy maximális osztályindexű sokszögnek nem lehet közöséges kettőspontja. Az ilyen sokszög egyszerű sokszög, mivel feltételeztük, hogy nincs olyan pontja, amelyben három vagy több oldal metszi egymást. Egy egyszerű sokszög a síkot két tartományra bontja fel, s így akár külső, akár belső az a sokszög, mindkét esetben maximális osztályindexű. Ha ugyanis az egyik tartománynak pontjaiból az illető sokszöghöz m érintő húzható, akkor a másik pontjaiból vagy $m-2$, vagy $m+2$.

5. Egy sokszög pontjain átmenő érintők számának számítása. Szorosabb értelemben maximális osztályindexű sokszögek. Többszörös pontokkal bíró sokszögek.

Abból, hogy egy S sokszög egy oldalának átlépésekor az érintők száma kettővel változik, következik, hogy egy oldal egy belső pontjából kiinduló érintők számában az ezt az oldalt tartalmazó alapegyenes kétszer számítandó.

Nem nehéz belátni, hogy akkor, amikor az S sokszögnek az $A_k A_{k-1} A_k A_{k+1}$ törtvonalát az A_k pontban metsző elég kiesiny

P_1P_2 egyenesdarabon mozgó P pont az A_k -n áthalad, belőle a sokszöghöz húzható érintők száma szintén kettővel változik. Az S sokszög A_k -n átmenő érintőinek végtelen száma helyett tehát lehetne azt a számot venni, amelyik a P_1 és P_2 ponton átmenő érintők száma közül a nagyobbik. Ez a szám, miként könnyen belátható, kettővel nagyobb, mint a sokszög olyan érintőinek száma, amelyek az A_k -n keresztülmennek és a sokszöget az $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ törtvonalon kívül érintik, ha A_k közösleges szögpont, ellenben hárommal nagyobb akkor, ha A_k csúcspontja az S sokszögnek. Az első esetben a P_1P_2 egyenes nem érinti a sokszöget az A_k pontban, a második esetben érinti.

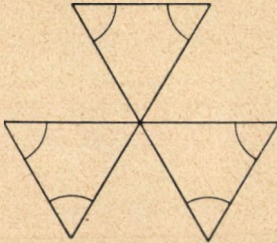
Ha azok a pontok, amelyekben az S sokszög önmagát metszi, mind közösleges kettőspontok, — miként feltételeztük — akkor az előbbi értelmezés szerint a sokszög egy P pontjából a sokszöghöz húzható érintők száma ugyanaz, mint a P ponthoz bizonyos szomszédos pontokból húzható érintők száma. Ilyen felfogással egy S (három és többszörös pontnélküli) sokszög egy pontjából sem húzható a sokszög osztályszámánál több és az osztályindexénél kevesebb érintő. Az S sokszög osztályszáma, illetve osztályindexe tehát a sík bármely pontjából a sokszöghöz húzható érintők száma maximumának, illetve minimumának tekinthető.

Ezzel a felfogással a háromszoros és többszörös pontnélküli maximális osztályindexű sokszögeket szorosabb értelemben vett maximális osztályindexűeknek nevezhetjük. Az ilyen sokszögek a VII. tétel értelmében egyszerű sokszögek.

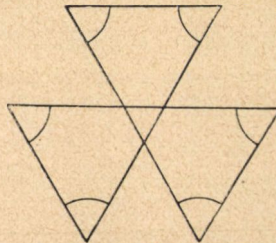
Ha többszörös pontokkal bíró sokszögeket is megengedünk, akkor a többszörös pontokból a sokszöghöz húzható érintők száma a sokszög osztályszámánál nagyobb is lehet, amint ezt az első ábrán a megjelölt szögekkel bíró hatszög igazolja.⁷ Ehhez a hatszöghöz a síknak kívülről fekvő pontjaiból vagy négy, vagy két érintő húzható. A hatszög tehát negyedrendű és maximális indexű, de csak a tágabb értelemben, mert hozzá a háromszoros pontjából hat érintő húzható. Ez a hatszög a 2. és 3. ábrán

⁷ Erre a kivételes hatszögre fiam, SZŐKEFALVI NAGY BÉLA hívta fel a figyelmemet.

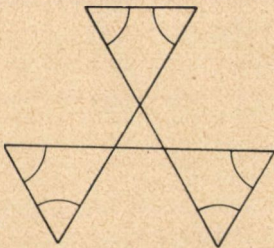
feltüntetett két hatszögnek közös határhelyzete. A 2. hatszög hatodosztályú és kettősosztályindexű, a 3. negyedosztályú és zéróosztályindexű. Csak a három kettőspont által meghatározott háromszög belsejéből húzható a 2. hatszöghöz hat, a 3. hatszöghöz pedig zéró érintő. Az 1. hatszögon ez a háromszög



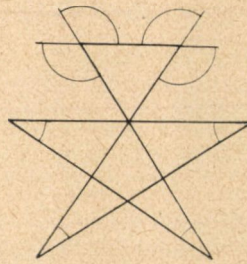
1. ábra.



2. ábra.



3. ábra.



4. ábra.

ponttá zsugorodik össze és így lesz ez a hatszög maximális osztályindexű (a tágabb értelemben).

Annak a magyarázata, hogy az 1. hatszöghöz a háromszoros pont szomszédságában a fekvő pontok közül egyből sem húzható hat érintő, az, hogy a háromszoros pontban nem lehet az egymást metsző három oldalt úgy átlépni, hogy az átlépéskor a három oldal végpontjain átmenő érintők száma mindhárom oldalra vonatkozólag külön-külön is csökkenjen. Nem minden többszöröspontnak van meg azonban ez a tulajdonsága, miként a 4. ábra hatszöge igazolja. Ha ennek az ábrának a négyszögű tartományából a háromszoros ponton áthaladunk a megfelelő

háromszögű tartományba, akkor az érintők száma hatról zéróra csökken. A 4. hatszög hatodosztályú és zéró osztályindexű.

6. Sokszögek teljes görbülete. Egyszerű sokszögek osztályszáma.

Mialatt egy egyenes egy N -oldalú S sokszögön a felvett forgásértelemben végigfordul, azalatt a vele párhuzamosan egy pont körül forgó egyenes állandóan ugyanabban az értelemben forogva visszatér eredeti helyzetébe. Az általa leírt G szög tehát π -nek egészszámú többszöröse. Ezt a $G = M\pi$ szöget a S sokszög teljes görbületének nevezzük.

Ebbol az értelmezésből következnek az alábbi tételek:

VIII. *Egy S sokszög teljes görbülete szögeinek összegével egyenlő.*

IX. *Egy N -oldalú sokszögnek és ellensokszögének teljes görbülete együttvéve $N\pi$.*

X. *Az S sokszög teljes görbületének és π -nek a hányadosa a sokszöget jellemző egész szám. Ez az M szám megadja azt, hogy a sokszög által felbontott síknak abban a tartományában, amely a síknak végtelen távoli pontjait tartalmazza, egy tetszőleges ponton át hány érintője megy az S sokszögnek.*

A IX. tétel abból következik, hogy az S sokszög egy szög-pontjában az S és S' ellensokszög szögei kiegészítőszögek.

A X. tétel a következőkép látható be:

Ha a $G = M\pi$ az S sokszög teljes görbülete, akkor azalatt, amíg egy egyenes a sokszöghöz felvett forgásértelemben a sokszög valamennyi érintőjén keresztülmegy, a sík bármely egyenesével M -szer válik párhuzamossá. A sík végtelen távoli pontjaitól az S sokszöghöz tehát M -számú érintő húzható. A III. tétel értelmében ugyanennyi érintő húzható az S sokszöghöz a síknak bármely olyan pontjából, amely a sík végtelen távoli pontjaitól a sokszög átlépése nélkül elérhető.

Az S sokszög S' ellensokszögére vonatkozólag $M' = N - M$, mivel $G' = M'\pi$ és $G + G' = N\pi = (M + M')\pi$.

Kimutatjuk a következő tételt:

XI. *Ha egy egyszerű alaj sokszögnek c konkáv és c' kon-*

vez szögpontja van, akkor a hozzátartozó külső sokszögnek $G = (c + 2)\pi$, a belső sokszögnek pedig $G' = (c' - 2)\pi$ a teljes görbülete.

Ha ugyanis a'_1, a'_2, \dots, a'_N jelöli az $N = (c + c')$ -oldalú egyszerű alapsokszöghöz tartozó belső sokszög szögeit, akkor az alapsokszög A_k konvex, illetve A_h konkáv szögpontjában az elemi geometriai szöge $\gamma_k = a'_k$, illetve $\gamma_h = a'_h + \pi$. Ezeknek az elemi geometriai szögeknek az összege $(N - 2)\pi$ lévén

$$\sum a'_k + \sum (a'_h + \pi) = G' + c\pi = (N - 2)\pi = (c + c' - 2)\pi.$$

Ebből következik, hogy $G' = (c' - 2)\pi$ és hogy a IX. tétel alapján

$$G = N\pi - G' = (c + c')\pi - (c' - 2)\pi = (c + 2)\pi.$$

Ezzel a X. tétel be van bizonyítva.

Ki fogjuk mutatni most a következő tételt:⁸

XII. *Egy olyan külső sokszögnek, amelynek c csúcspontja van, $n = c + 2$ az osztályszáma és c az indexe. A c' csúcsponttal bíró belső sokszögnek $n' = c'$ az osztályszáma és $c' - 2$ az osztályindexe.*

Ezt a tételt először az S' belső sokszögre bizonyítjuk be. Ha A_k az S' sokszög egy csúcspontja, akkor az $A_{k-1}A_k$ oldal felezőpontjához a sokszög belsejében egy elég közel fekvő P_1 pont az A_k érintőszögterében fekszik. Ha tehát egy P pont az S sokszöget P_1 -ből kiindulva az $A_{k-1}A_k$ oldalt átlépi, akkor a belőle az S' sokszöghöz húzható érintők száma kettővel csökken. Ekkor azonban a P pont a sík végtelen távoli pontjait tartalmazó tartományba jut. Ennek pontjaiból a sokszöghöz $M' = c' - 2$ érintő húzható. Az S' belső sokszög osztályszáma tehát $n' = M' + 2 = c'$.

Mivel a sík egy pontjából az S és S' ellensokszöghöz együttvéve $N = c + c'$ érintő húzható, azért az S és S' sokszög

⁸ E tétel szerint a külső, illetve belső sokszög olyan maximális osztályindexű síkgörbének tekinthető, amilyent az ⁵ lapalji jegyzetben idézett 1. dolgozatunkban (36—40. lap) konvex, illetve konkáv ívsokszögnek neveztünk.

belsejében fekvő pontokból c , a külsejében fekvő pontokból pedig $n = c + 2$ érintő húzható az S külső sokszöghöz.

Ezzel a XI. tétel teljesen be van bizonyítva.

7. Az egyszerű sokszögek fajszáma, kettősérintőik száma.

Egy egyszerű sokszög a síkot két tartományra bontja fel, amelyek közül a sokszög belseje egyszeresen, a sokszög külseje pedig kétszeresen összefüggő. Egy egyszerű sokszög *fajszáma* akkor p , ha az a tartomány, amelynek pontjaiból hozzá osztály indexével egyenlőszámú érintő húzható, $(p+1)$ -szeresen összefüggő. E szerint a külső sokszögek nullad-, a belső sokszögek pedig elsőfajúak.

A fajsám bevezetésével a következő tétel mondható ki:

XIII. *Az n -edosztályú és p -edfajú egyszerű sokszögek csúcs-pontjainak száma $n + 2p - 2$.*

Belső sokszögre vonatkozólag ugyanis $c = n$ és $p = 1$, külsejére pedig $c = n - 2$ és $p = 0$, mindkét esetben tehát $c = n + 2p - 2$.

Kettősérintőn a sokszögnek olyan érintőjét értjük, amelyen két érintésem van. Ha egy érintőn k egymástól különböző érintésem van, akkor az érintő k -szoros érintő. A síkgörbék elméletével megegyezésben egy k -szoros érintőt $\frac{k(k-1)}{2}$ -számú kettősérintőnek tekintünk. Ennyiszor lehet k különböző érintésem közül kettőt kiválasztani.

Az S sokszög bármely kettősérintője a sokszögnek egy *átlója*, vagyis olyan egyenes, amely a sokszögnek két nem szomszédos szögpontján megy át. Az S sokszögnek azonban csak olyan átlója lehet kettősérintője, amely az összekötött két szögponthoz tartozó érintőszögtérnek belsejébe vagy határára esik.

Kettősérintőkre a következő tételt fogjuk kimutatni:⁹

XIV. *Az n -edosztályú és p -edfajú egyszerű sokszögek kettősérintőinek száma*

$$t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

⁹ A XIII. és a XIV. tétel is minden változtatás nélkül érvényes az egyenletű maximális osztályindexű síkgörbékre, miként ezt az 5. lapalji jegyzetben a 2-5. sz. dolgozatok igazolják.

Ez a tétel a N -oldalú konvex sokszöghöz tartozó S külső és S' belső sokszögre könnyen belátható. Az S sokszög nullad-fajú és másodosztályú, mivel nincs csúcspontja. Kettősérintői a tétellel megegyezésben nincsenek. Az S' belső sokszög elsőfajú és $n = N$ -edosztályú, mivel N csúcspontja van. A konvex sokszög valamennyi átlója nyilvánkép kettősérintője az S' sokszögnek. Ezeknek száma a tétellel megegyezésben

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1.$$

Három csúcsponttal bíró akárhány oldalú belső sokszögre is igaz a XIV. tétel. Egy ilyen sokszöghöz a síknak a végtelen távoli pontjait tartalmazó tartományában bármely ponton át csak egy érintő megy át. A sokszögnek tehát nem lehet kettősérintője, mivel a kettősérintőnek végtelen távoli pontjából a kettősérintő két érintőnek számít. Ugyanennyi kettősérintőt ad a XIV. tétel is, mivel a belső sokszögek elsőfajúak.

A tétel általános kimutatása végett előbb az egyszerű sokszögeknek bizonyos átalakításait fogjuk tanulmányozni.

8. Egyszerű sokszögek bizonyos átalakításai.

Feltételezzük, hogy az A_1, A_2, \dots, A_N szögponttal bíró S (külső vagy belső) egyszerű sokszögnek az A_2 csúcspontja és hogy a sokszögnek nincs pontja az A_1, A_2, A_3 háromszög belsejében. Jelölje Q az A_N, A_1 és A_2, A_3 alapegyenes metszéspontját, R a Q vagy az A_3 pontot a szerint, amint az A_2, A_3 szakasz tartalmazza, illetve nem tartalmazza a Q pontot és B a RA_2 szakasz egy tetszőleges pontját. Azt az S -sel egyenlőfajú (külső vagy belső) egyszerű sokszöget, amelyet S -ből úgy kapunk, hogy az A_1, A_2, A_3 törtvonalat az A_1, B, A_3 törtvonallal helyettesítjük, $S(B)$ sokszögnek fogjuk nevezni.

Ebből az értelmezésből következik, hogy az S és $S(B)$ sokszögnek ugyanannyi közöséges szögpontja és ugyanannyi csúcspontja van, hogy az S sokszög A_2 csúcspontja helyett az $S(B)$ sokszögnek B a csúcspontja, hogy továbbá az A_3, A_1, \dots, A_N szögpontban a két sokszögnek ugyanaz az érintőszögtere és

hogy végül az A_1BR belső háromszög A_1 mellett fekvő érintőszögtere vagy megegyezik az $S(B)$ sokszög A_1 mellett fekvő érintőszögterével, vagy része ennek a szerint, amint $R \equiv Q$, illetve $R \equiv A_3$. Könnyű belátni azt is, hogy az $S(B)$ és S sokszög A_1 mellett fekvő érintőszögtere közül az első része a másodiknak.

Azt az átalakítást, amellyel az S sokszögből az $S(B)$ sokszöget kapjuk, T átalakításnak fogjuk nevezni. Ki fogjuk mutatni, hogy egy ilyen átalakítás az S sokszögnek nemcsak az osztályszámát és a fajsámát hagyja változatlanul, hanem a kettősérintők számát sem változtatja meg.

Mivel az S és $S(B)$ sokszögnek az A_3, A_4, \dots, A_N szögpontban rendre ugyanaz az érintőszögtere, azért az S sokszögnek bármely olyan kettősérintője, amely az A_3, A_4, \dots, A_N szögpont közül kettőben érinti a sokszöget, az $S(B)$ sokszögnek is ugyanott érintő kettősérintője és megfordítva. Az A_1A_k átló kettősérintője lehet azonban az S sokszögnek a nélkül, hogy az $S(B)$ sokszögnek is kettősérintője volna. Nem mindig egyszerre kettősérintője az A_2A_k átló az S , a BA_k átló pedig az $S(B)$ sokszögnek.

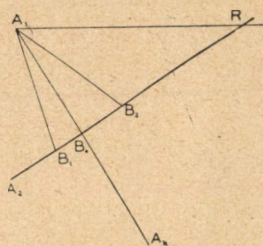
Azalatt, amíg B az A_2 pontból kiindulva az A_2R szakaszon R felé tart, az $S(B)$ sokszög kettősérintőinek száma nyilvánképpen csak akkor változhatik meg, ha B vagy egy A_1A_k átlót, vagy pedig egy $A_{k-1}A_k$ alapegyenest átlép. B egy alapegyenest csak a rajta levő oldalon kívül léphet át, mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében az S sokszögnek nincs pontja.

Jelölje B_0 az A_2R szakasz metszéspontját az S sokszög A_1A_k ($k \neq 2, 3, N$) átlójával és jelölje B_1 , illetve B_2 az A_2B_0 , illetve B_0R szakasznak B_0 -hoz egy elég közeli pontját, akkor kimutatjuk, hogy az A_1A_k és B_1A_k átló közül ugyanannyi kettősérintője van az $S(B_1)$ sokszögnek, mint amennyi az A_1A_k és B_2A_k átló közül az $S(B_2)$ sokszögnek.

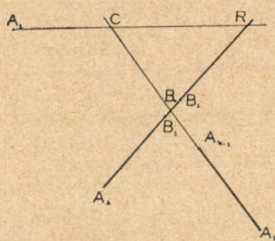
Ez az állítás arra az esetre, amikor az A_1A_k átló kívül esik az $S(B_1)$ és $S(B_2)$ sokszög A_k szögpontjához tartozó közös érintőszögterén, nyilvánvaló. A B_1 és B_2 pont B_0 -hoz való elég közeli fekvése miatt ugyanis ekkor a B_1A_k és B_2A_k egyenes sem esik az A_k érintőszögterébe. Az A_1A_k , B_1B_k és B_2A_k egyenes közül

tehát egy sem érintheti az A_k szögpontban az $S(B_1)$ vagy az $S(B_2)$ sokszöget.

Feltételezhetjük tehát azt, hogy az A_1A_k és ezzel együtt a B_1A_k és B_2A_k egyenes az A_k érintőszögterébe esik. (5. ábra.) Akár az A_1B_0 , akár a B_0A_1 félegyenesen fekszik az A_k pont, az A_kB_2 egyenes metszi, az A_kB_1 egyenes pedig nem metszi az A_1R szakaszt. Ebből következik, hogy az A_kB_2 egyenes érinti az $S(B_2)$ sokszöget a B_2 pontban, mivel keresztülmegy a B_2 -höz tartozó érintőszögteren. Az A_kB_1 egyenes ellenben nem megy át az $S(B_1)$ sokszög B_1 pontjához tartozó szögteren, s így nem érinti a B_1 pontban a sokszöget. Az A_1 pontban az A_1A_k átló érinti az $S(B_1)$ sokszöget, de nem érinti az $S(B_2)$ sokszöget, mivel az $S(B_1)$ és $S(B_2)$ A_1 szögpontjához tartozó érintőszögtér



5. ábra.



6. ábra.

közül az elsőbe beleesik, a másikon ellenben kívül esik az A_1A egyenes.

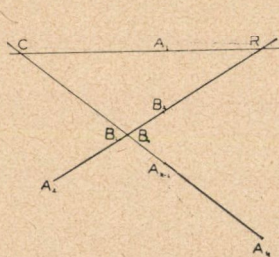
Ezzel ki van mutatva, hogy az A_1A_k és B_1A_k , ill. A_1A_k és B_2A_k egyenespárban az $S(B_1)$, ill. $S(B_2)$ sokszögnek egyszerre vagy csak egy kettősérintője van, vagy egy sincs. Azalatt tehát, amíg B az A_1A_k átlót átlépi, az $S(B)$ sokszög kettősérintőinek száma nem változik meg.

Ha B az $A_{k-1}A_k$ alapegyenest egy B_0 pontban átlépi és ha C jelöli az $A_{k-1}A_k$ és az A_1R egyenes metszéspontját, akkor három eset lehetséges aszerint, amint C az A_1R szakaszra, ezen kívül ill. az A_1 vagy R pontba esik. Egyik esetben sem változik meg az $S(B)$ kettősérintőinek száma azalatt, amíg B a B_0 ponton áthalad.

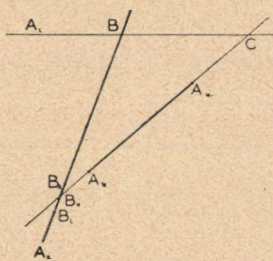
Az első esetben (6. ábra), amikor C az A_1R szakaszra esik,

a III. tétel bizonyítása alapján a B_1A_{k-1} és B_1A_k , ill. a B_2A_{k-1} és B_2A_k egyenespárból az A_{k-1} vagy az A_k szögpontban egy és csak egy egyenes érinti az $S(B_1)$, ill. $S(B_2)$ sokszöget, a B_1 , ill. B_2 pontban ellenben mindkét egyenes érinti, ha B_1 és B_2 jelentése ugyanaz, mint előbb volt. Az első egyenespár ugyanis az A_1B_1R belső háromszög B_1 , a második pedig az A_1B_2R belső háromszög B_2 mellett fekvő érintőszögterébe esik, mivel ezek az egyenesek az A_1R szakaszt C szomszédságában metszik. A felsorolt egyenespárban tehát egy-egy kettősérintője van az $S(B_1)$, ill. $S(B_2)$ sokszögnek. Erre az esetre tehát állításunk be van bizonyítva.

A második esetben (7. és 8. ábra, a 8. ábrán R helyett B áll), amikor C az A_1R szakaszon kívül esik, akkor vagy A_1 esik C és



7. ábra.



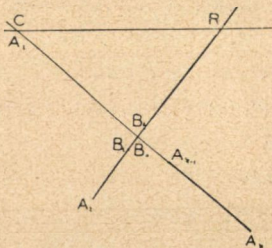
8. ábra.

R , vagy R C és A_1 közé. Mindkét esetben C közelében, tehát az A_1R szakaszon kívül metszi a B_1A_{k-1} és B_1A_k , ill. B_2A_{k-1} és B_2A_k egyenes az A_1R egyenest. Ebből következik, hogy az $S(B_1)$ B_1 szögpontjának érintőszögterén nem megy át a B_1A_{k-1} és B_1A_k átló, ez a két átló a B_1 és A_{k-1} ill. A_k szögpontokra vonatkozólag tehát nem kettősérintője az $S(B_1)$ sokszögnek. Hasonló ok miatt nem érinti az $S(B_2)$ sokszöget a B_2A_{k-1} , illetőleg B_2A_k átló a B_2 szögpontban. Állításunk tehát a második esetben is igaz.

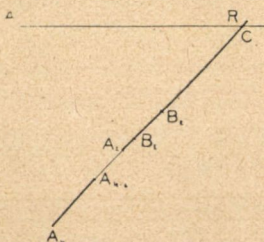
Ha C az A_1 -be esik (9. ábra), akkor az előbbieket alapján a B_1A_{k-1} és B_1A_k átló a B_1 pontban nem érinti az $S(B_1)$ sokszöget, az A_1A_k átló ellenben az A_1 pontban is érinti és így kettősérintő. Az $S(B_2)$ sokszöget a B_2A_{k-1} és B_2A_k átló érinti a B_2 pontban, az A_{k-1} vagy A_k szögpontban azonban közülök

csak egy érinti. Az $A_1A_{k-1}A_k$ egyenes az $A_{k-1}A_k$ oldalon érinti, az A_1 pontban nem érinti az $S(B_2)$ sokszöget. Az A_1, A_{k-1}, A_k és B_1 , ill. B_2 pontokba eső érintéselemeket véve tekintetbe az $S(B_1)$ és $S(B_2)$ sokszög kettősérintőinek száma ismét ugyanaz.

Ha pedig az R pontba esik C (10. ábra), akkor az A_3A_2 egyenes az $S(B_1)$ és $S(B_2)$ sokszögnek egyaránt kettősérintője.



9. ábra.



10. ábra.

Ezen az $A_{k-1}A_k$ oldal az egyik, a B_1A_3 , ill. a B_2A_3 oldal a másik érintéselem. A kettősérintők száma tehát ismét egyenlő.

Ezzel a kimondott tétel igazolva van.

9. Az egyszerű sokszögek kettősérintőinek számára vonatkozó tétel bizonyítása.

Egy egyszerű sokszög *belső*, ill. *külső átlóján* olyan szakaszt értünk, amelynek végpontjai a sokszög szögpontjai, pontjai pedig a sokszög belsejében ill. külsejében vannak. Egy belső vagy külső átlót akkor nevezünk *kiválasztottnak*, ha a sokszög két szomszédos oldalának nem közös szögpontját köti össze. Abból a tételből,¹⁰ hogy háromnál többoldalú bármely egyszerű sokszögnek van belső átlója, következik, hogy kiválasztott belső átlója is van. Hasonlóképp könnyen belátható, hogy csúcs-ponttal is bíró külső sokszögnek van legalább egy kiválasztott külső átlója. (Egy ilyen külső sokszög belsejét konvex burkolója belsejéből úgy kapjuk meg, hogy ebből bizonyos olyan egyszerű alapsokszögek belsejét eltávolítjuk, amelyeknek az eredeti külső

¹⁰ Lásd pl. KERÉKJÁRTÓ BÉLA: «A geometria alapjairól» I. kötet, Szeged, 1937, 31–35. lap.

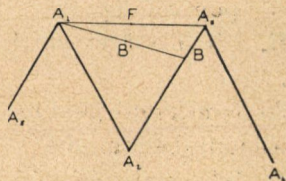
sokszög bizonyos számú egymásra következő oldala és egy külső átlója az oldalai. Ha az eltávolított alapsokszög háromszög, akkor a megfelelő külső átló kiválasztott. Ha az eltávolított alapsokszögek között nincs háromszög, akkor egy ilyen alapsokszög egy belső átlójának, (amely az eredeti S külső sokszögnek egy külső átlója), kétszeres hozzászámítása után két egyszerű alapsokszögre bomlik fel. Ezek közül az egyiknek oldalai között az S sokszögnek csak egy átlója szerepel. Ha ez az alapsokszög nem háromszög, akkor az előbbi módon ismét felbontható. Így végül olyan háromszöget kapunk, amelynek egyik oldala az S sokszögnek kiválasztott külső átlója).

Ha az A_1, A_2, \dots, A_N szögpontra bíró külső, ill. belső sokszögnek az A_1A_3 szakasz kiválasztott külső, ill. belső átlója, akkor A_2 nyilvankép csúcspontja az illető sokszögnek. Erre az S sokszögre alkalmazott T átalakítás a sokszöget az előbbieken használt jelölésekkel átviszi egy $S(B)$ sokszögbe, ahol B az A_1B szakasznak egy B -től különböző pontja. Az $S(B)$ sokszögnek fajszáma, osztályszáma, csúcspontjainak és kettősérintőinek száma ugyanaz, mint az S sokszögnek.

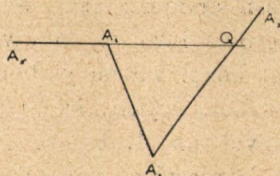
A XIV. tétel bebizonyítása végett még azt is feltételezzük, hogy sem az A_NA_1 alapegyenes nem metszi az A_2A_3 szakaszt, sem az A_3A_4 alapegyenes az A_1A_2 szakaszt. Ekkor az A_1A_3 átló az S sokszögnek kettős érintője, mivel a sokszöget az A_1 és A_3 pontban érinti. Mivel a Q pont a feltétel szerint nem esik az A_2A_3 oldalra, azért az S sokszöget egy megfelelő T átalakítással átvihetjük egy olyan $S(B)$ sokszögbe, amelynek B csúcspontja az A_3 szögponthoz tetszőleges közel fekszik. Abból a feltételből, hogy az A_3A_4 alapegyenes nem metszi az A_1A_2 oldalt, következik, hogy nem metszi az A_1B szakaszt sem. Az $S(B)$ sokszögre lehet tehát egy olyan T átalakítást alkalmazni, amely az A_1BA_3 törtvonalat egy olyan $A_1B'A_3$ törtvonal helyettesíti, ahol B' az A_1B szakasznak egy tetszőleges pontja. Két ilyen T átalakítás egymásutánjával elérhetjük, hogy az S sokszög olyan $S(B, B')$ sokszögbe megy át, amelynek B' csúcspontja az A_1A_3 szakasz F felezőpontjához tetszőlegesen közel esik (11. ábra). Ennek a B' csúcspontnak érintőszögtere majdnem π nyílású.

Tegyük fel most még azt is, hogy az S sokszögnek az A_1A_3

egyenesen az A_1 és A_3 kivételével más szögpontja nincs. Ekkor B' megválasztható olyan közel az F ponthoz, hogy B' -t az A_4, A_5, \dots, A_N szögponttal összekötő egyenesek mind messék az A_1A_3 szakaszt, vagyis hogy mind beleessenek az $S(B, B')$ sokszög B' csúcspontja érintőszögterébe. Az $S(B, B')$ sokszögnek tehát annyi kettősérintője megy át a B' ponton, mint ahány érintője van az S sokszögnek az $A_4B', A_5B', \dots, A_NB'$ átlók között, vagyis annyi, mint ahány érintő húzható a B' pontból a $(N-1)$ oldalú és S -sel ugyanazon p -edfajú $A_1A_3A_4 \dots A_N$ sokszöghöz. Ennek az \bar{S} sokszögnek eggyel, az A_2 -vel kevesebb csúcspontja van, mint S -nek, osztályszáma tehát szintén eggyel kisebb, mint az S sokszögé.



11. ábra.



12. ábra.

Ha S n -edosztályú, akkor \bar{S} $(n-1)$ -edosztályú és hozzá a B' pontból $n-3$ érintő húzható. Ha ugyanis S külső sokszög, akkor B' az S külső sokszög belsejében van, ha pedig S belső sokszög, akkor B' az S belső sokszög külsejében van. Mindkét esetben B' -ből $n-3$ érintő húzható az \bar{S} egyszerű sokszöghöz. Ebből következik, hogy az $S(B, B')$ sokszögnek $(n-2)$ -vel van több kettősérintője, mint az S sokszögnek, mivel az A_1A_3 átló az $S(B, B')$ sokszögnek kettősérintője, az S -nek ellenben oldala. Az $S(B, B')$ sokszög az S -ből T átalakításokkal származik, tehát annyi kettősérintője van, mint az S -nek.

Tegyük fel most, hogy a XIV. tétel $(n-1)$ -edosztályú sokszögekre már be van bizonyítva és jelölje t_{n-1} , ill. t_n az \bar{S} , ill. S sokszög kettősérintőinek számát, akkor

$$\begin{aligned}
 t_n = t_{n+1} + (n-2) &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} - p + (n-2) = \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.
 \end{aligned}$$

A XIV. tétel tehát az n -edosztályú sokszögre is áll.

Ugyanez áll akkor is, ha az S sokszögnek az A_1A_3 egyenesen más szögpontja is van. Az S sokszöghöz a B' pontból ekkor is $n-3$ érintő húzható, de ezek közül az az m érintő, amely az A_1A_3 egyenesen érinti az $S(B, B')$ sokszöget ennek a sokszögnek nem kettősérintője, mert nem esik be a B' csúcspont érintőszögterébe. Ekkor azonban az A_1A_3 egyenesen az A_1 és az A_3 ponton kívül éppen m érintéselem van. Ha ugyanis A_k ezen az egyenesen egy érintéspont, akkor az A_kB' egyenes is az, mert a B' pontnak az F -hez való elég közeli fekvése miatt nemcsak az A_1A_3 , hanem az A_kB' egyenes is beesik a A_k szög-pont érintőszögterébe. Ha pedig az $A_{k-1}A_k$ sokszögoldal az A_1A_3 egyenesen érintésszakasz, akkor a B' pontból egy és csak egy olyan érintő húzható, amely az $S(B, B')$ sokszöget az A_{k-1} és A_k pont közül valamelyikben érinti.

Az A_1A_3 egyenes az $S(B, B')$ sokszögnek $(m+2)$ -szörös érintője, mivel az A_1 és az A_3 érintéspont beszámításával rajta $(m+2)$ érintéselem van, de csak $(m+1)$ -szeres érintője az S sokszögnek, mivel rajta az A_1A_3 oldal egy érintéselem. Az A_1A_3 egyenes tehát $\frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{(m+1) \cdot m}{2} = (m+1)$ -gyel több kettősérintőnek számít az $S(B, B')$ sokszögre vonatkozólag, mint az \bar{S} -ra. Az n -edrendű $S(B, B')$ és S sokszögnek tehát ismét $(n-3-m) + (m+1) = (n-2)$ -vel van több kettősérintője, mint az ugyanazon fajú és $(n-1)$ -edrendű S sokszögnek.

A bizonyításban feltételeztük azt is, hogy az A_NA_1 alapegyenes nem metszi az S sokszög A_2A_3 oldalát. Ha a Q pont az A_2A_3 szakaszra esik (12. ábra), akkor az A_1 pont az S sokszögnek közös szögpontja. Mialatt B az A_2Q szakaszon Q -hoz közeledik, azalatt az $S(B)$ sokszög A_1 szögpontja mellett fekvő szög zéró felé tart, az $S(B)$ sokszögnek az A_1 ponton átmenő kettősérintői közül tehát csak azok maradnak meg, amelyek az A_1A_N alapegyenessel összeesnek. Ha B a Q ponttal összeesik, akkor az $S(Q)$ sokszögnek A_1 nem szögpontja, hanem az A_NQ oldalának egy pontja. Q ellenben csúcspontja az $S(Q)$ sokszögnek. Az N -oldalú S sokszög és az $(N-1)$ -oldalú $S(Q)$ sokszög ugyanazon osztályszámú, mivel csúcspontjaiknak száma

ugyanaz. A két sokszög kettősérintőinek száma is ugyanaz, mivel az A_1A_N alapegyenesen a két sokszöggel ugyanannyi érintésem van, amelyek közül csak egy érintésem különbözik, és pedig az S sokszögre vonatkozólag az A_NA_1 , az $S(Q)$ -ra vonatkozólag az A_NQ érintésszakasz.

Ha tehát az A_2 csúcsponttal és A_1A_3 kiválasztott (külső, ill. belső) átlóval bíró S (külső, ill. belső) sokszögnek az A_NA_1 alapegyenese metszi az A_2A_3 oldalt, (vagy az A_3A_4 alapegyenese az A_1A_2 oldalt), akkor az S sokszög átalakítható egy ugyanolyan osztályszámú, fajszerű és ugyanannyi kettősérintővel bíró olyan egyszerű sokszögbe, amelynek eggyel kevesebb szögpontja van, mint S -nek. A kapott $(N-1)$ -oldalú S_1 sokszögön szögpontjainak megfelelő jelölése után van olyan A_2 csúcspont, hogy az A_1A_3 szakasz kiválasztott átló. Ha az A_2A_3 oldalt metszi az $A_{N-1}A_1$ alapegyenes, (vagy pedig az A_1A_2 oldalt az A_3A_4 alapegyenes), akkor az S_1 sokszög átalakítható egy olyan $(N-2)$ -oldalú S_2 sokszögbe, amelynek osztályszáma, fajszerűsége és kettősérintőinek száma ugyanaz, mint az S sokszögnek. Mivel egy ilyen átalakításkor a csúcspontok száma változatlan marad, azért ily átalakítás csak véges számszor alkalmazható. Kell tehát végül egy olyan sokszöghöz jutnunk, amelynek kettősérintői száma az előzők alapján az eggyel kisebb osztályú sokszögek kettősérintőinek számából meghatározható.

Ezzel most már kimutattuk a XIV. tétel általános érvényét, mivel az a 7. pont eredményei alapján akárhány oldalú másod-osztályú vagy harmadosztályú és elsőfajú sokszögre áll.

10. Projektív általánosítások.

Eddig végesben fekvő sokszögeket vizsgáltunk. A rájuk megállapított tételek nagyjából olyanok, amelyeknek akkor is megvan az értelmük, ha a sokszögeket érintőiknek összességével középpontos vetítésnek vetjük alá. Egy sokszög ilyen vetítéssel ugyanazon osztályú, ugyanannyi közös szögponttal, csúcsponttal és kettősérintővel bíró sokszögbe megy át. Ellensokszögek projekciói szintén ellensokszögek.

Egy sokszög *rendszáma*, ill. *indexe* azoknak a pontoknak

maximális, ill. minimális számát jelenti, amelyekben a sokszöget az alapegyeneseitől különböző síkbeli egyenesek találják. A végesben fekvő sokszögek projekciói mind zéróindexűek. Az egyszerű sokszögekre vonatkozó eredményeink azonban átvihetők zérótól különböző indexű sokszögekre is.

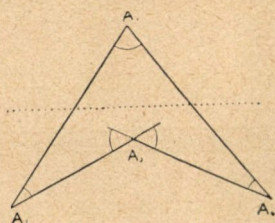
A 13. ábrán a megjelölt szögekkel bíró belső négyszög harmadosztályú. Ha a pontozott egyenest végtelen távolba vetítjük, akkor a kapott négyszög alakját szögeivel együtt a 14. ábra mutatja. Ez a négyszög is felbontja a síkot két tartományra, amelyek közül az egyszerűen összefüggő a négyszög belseje, a másik tartomány a négyszög külseje. Ennek a tartománynak összefüggési száma 2, pontjaiból a sokszöghöz csak egy-egy érintő húzható. A fajsám értelmezése alapján ez a négyszög is elsőfajú. Az ellennégyszög szintén harmadosztályú, de nem első, hanem nulladfajú.

Ha a 14. ábra elsőfajú négyszögének A_1 csúcspontját tartalmazó $B_1A_1B_2$ törtvonalat a 15. ábra szerinti B_1CB_2 törtvonallal pótoljuk, akkor a négyszögből egy nyilvánképpen kettősindexű harmadosztályú és elsőfajú hatszöget kapunk. Az ellenhatszög ötödosztályú, maximális osztályindexű és nulladfajú. Mindkét hatszög hatodrendű.

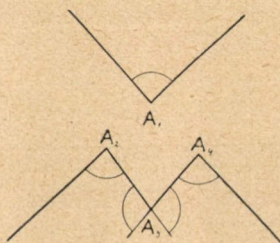
A 14. ábra megmutatja azt, hogy egy végesben fekvő szögpontokkal, de páros számú végtelenbe nyúló oldallal is bíró N -oldalú $A_1A_2\dots A_N$ projektív Σ sokszög A_1 szögpontja érintőszögterének megválasztása után miképp kell a többi szögpont érintőszögterét kijelölni. Erre a következő a szabály: Ha az A_1A_2 oldal véges, akkor az A_2 szögpont érintőszögtere ugyanaz, mintha az egész sokszög végesben volna. Ha pedig a Σ sokszög A_1A_2 oldala az előbbi véges A_1A_2 szakaszt teljes egyenessé kiegészítő végtelen nagy szakasz, akkor az A_2 szögpont érintőszögtere teljes síkra egészíti azt az érintőszögteret, amely az A_2 szögponthoz akkor tartoznék, ha a véges A_1A_2 szakasz volna a Σ sokszög oldala. Ha az A_2 szögpont érintőszögterét tekintetbe véve rendre meghatározzuk a többi szögpont érintőszögterét, akkor az A_1 szögponthoz azt az érintőszögteret kapjuk, mint amelyből kiindultunk. Ez abból következik, hogy a Σ sokszögnek párosszámú végtelenbe nyúló oldala van. Páratlanszámú

végtelenbe nyúló oldalú, röviden páratlan Σ sokszög esetén az A_1 szögpontra a sokszög leírása után az előbbi szabály a kiindulás érintőszögterének kiegészítő szögterét rendeli.

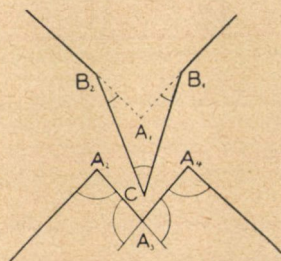
Ha egy projektív sokszögnek csak szögpontjait adjuk meg azok egymásutánjával és az egyes szögpontokban találkozó két-két oldal által alkotott két kettősszögtere közül az egyiket az illető szögpont érintőszögterének tetszőlegesen kiválasztunk, akkor két egymásra következő szögpont érintőszögtere az előbb



13. ábra.



14. ábra.



15. ábra.

adott szabály szerint egyértelműleg meghatározza, hogy a két szögpontot összekötő oldalnak a véges vagy a végtelen szakaszt kell választani. Ebből következik, hogy egy N -oldalú projektív sokszöghöz a sokszög beszámításával 2^N számú olyan sokszög tartozik, amelyen a szögpontok sorrendje ugyanaz. Ezek közül két-két sokszögnek ugyanazok az oldalai, de érintőszögterei kiegészítőszögterek. Az ilyen sokszögek projektív ellensokszögek.

A szögeikkel ilyen módon egyértelműen megállapított (páros) projektív sokszögekre is könnyen belátható a végesben fekvő

sokszögekre kimutatott I—VII. tétel. Egy projektív egyszerű páros sokszög is két tartományra bontja fel a projektív síkot. Ezek közül az egyik egyszeresen, a másik kétszeresen összefüggő. Ha az a tartomány, amelynek pontjaiból a sokszöghöz osztályindexével egyenlőszámú érintő húzható, $(p+1)$ -szeresen összefüggő, akkor a sokszögnek p a fajszáma. Ha külső, ill. belső projektív sokszögön nullad-, ill. elsőfajú projektív egyszerű sokszöget értünk, akkor az ilyen egyszerű sokszögekre is ki lehet mutatni a XII—XIV. tétel érvényességét.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

ÜBER EBENE VIELECKE, INSBESONDERE ÜBER EBENE EINFACHE VIELECKE.

Von GYULA (JULIUS) v. SZÖKEFALVI NAGY.

N Punkte A_1, A_2, \dots, A_N ($N \geq 3, A_{N+k} = A_k$) in der Ebene bestimmen ein N -seitiges Grundviereck. Die N Punkte sind Ecken, die N Strecken bzw. Geraden, von denen je zwei aufeinanderfolgende Ecken verbunden werden, sind Seiten bzw. Grundgeraden des Grundvierecks. Es wird angenommen, dass keine Ecke mit einer anderen zusammenfällt oder auf eine Seite fällt und dass keine drei Seiten einen Punkt gemeinsam haben.

Ordnet man dem Grundviereck einen Drehungssinn zu, so erhält man ein N -seitiges und N -eckiges Viereck V . Die Seiten und Ecken von V sind dieselben, wie diejenigen des Grundvierecks. Der Winkel $\alpha_k (< \pi)$ von V bei A_k bedeutet den kleinsten positiven Winkel, unter welchem die nicht orientierte Grundgerade $A_{k-1}A_k$ sich um A_k im angenommenen Drehungssinne in die Grundgerade A_kA_{k+1} drehen lässt. Während dieser Drehung beschreibt die gedrehte Gerade den Berührungswinkelraum von V in A_k . Jede Gerade der Ebene, die in den Berührungswinkelraum von A_k oder auf seinen Rand fällt, ist eine Tangente von V ($k = 1, 2, \dots, N$). Jede Tangente von V hat mindestens einen Berührungselement, das entweder ein Berührungspunkt (eine Ecke von V), oder eine Berührungsstrecke (eine Seite von V) ist.

A_k ist eine gewöhnliche Ecke oder ein Rückkehrpunkt, je nachdem der Streckenzug $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ von den Tangenten mit dem Berührungspunkt A_k in A_k nicht geschnitten oder geschnitten wird.

Die Klasse bzw. der Klassenindex von V ist die Maximal- bzw. Minimalanzahl der Tangenten, die aus einem ausserhalb von V liegenden Punkte an V gehen. V ist vom Maximal-

klassenindex, wenn seine Klasse um zwei grösser ist, als sein Klassenindex.

Ersetzt man beim Grundviereck den angenommenen Drehsinn durch seinen entgegengesetzten, so erhält man das Gegenviereck V' von V . Bedeutet n , i und r bzw. n' , i' bzw. r' die Klasse, den Klassenindex bzw. die Anzahl der Rückkehrpunkte von V bzw. V' , so sind $n + i' = n' + i = N$ und $r + r' = N$.

Hat das Viereck V keinen Doppelpunkt, so ist es einfach und vom Maximalklassenindex. Das einfache Viereck V teilt die projektive Ebene in zwei Gebiete. Jeder Punkt eines solchen Gebietes sendet dieselbe Anzahl der Tangenten an V . Diese Anzahl ist entweder der Klassenindex, oder die Klasse von V . Ist das Gebiet, dessen Punkte die minimale Tangenten an V senden, vom Zusammenhange eins oder zwei, so hat V das Geschlecht Null oder Eins.

Bedeutet n , p , r bzw. t die Klasse, das Geschlecht, die Anzahl der Rückkehrpunkte bzw. diejenige der Doppeltangenten für ein einfaches Vieleck, so gelten die Relationen

$$r = n + 2p - 2 \quad \text{und} \quad t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Der Begriff der Vielecke lässt sich projektiv verallgemeinern. Die durch die Ecke A_k gehenden Grundgeraden $A_{k-1}A_k$ und A_kA_{k+1} bilden zwei Winkelräume. Wird der eine dieser Winkelräume als Berührungswinkelraum in A_k ($k = 1, 2, \dots, N$) beliebig gewählt, so erhält man ein projektives Vieleck. Die Seite A_kA_{k+1} dieses Vierecks ist entweder die endliche, oder die unendliche Strecke A_kA_{k+1} . Die Figuren 14 und 15, wo die Berührungswinkelräume gezeichnet sind, zeigen genug deutlich, wie man die Seiten eines Vielecks mit gegebenen Berührungswinkeln bestimmen soll.

Die ausgesprochenen Sätze gelten auch für die so verallgemeinerten projektiven Vierecke.

HATVÁNSOROK ZÉRÓHELYEIRŐL. I.

LIPKA ISTVÁN-tól.

Bevezetés.

Egy régebben közölt dolgozatomban¹ bebizonyítottam néhány olyan tételt, melyek pozitív együtthatós algebrai egyenletek gyökelinek eloszlására vonatkoznak, s a jól ismert ENESTRÖM- KAKEYA-féle tétel analogonjainak tekinthetők. Ezeknek a tételeknek a feltételében az egyenlet együtthatói, vagy pedig az együtthatók-ból egyszerű módon képezett sorozatok, bizonyos monotonitási feltételeknek tesznek eleget. Ebbe a témakörbe vágó eredményeimre azóta, részben új bizonyításokat adtak, de azokat lényegesen tovább is fejlesztették a következő szerzők: EGERVÁRY², BERWALD³, SEGRE⁴, TAKAHASHI⁵, SCHULZ.⁶ Legutóbb ONOFRI⁷ általánosította e tételeket valós együtthatós hatványsorokra.

Mindezeknek a tételeknek közös gyökere FEJÉR-nek egy a cosinus-polinomok, illetve cosinus-sorok pozitívítására vonatkozó

¹ LIPKA ST.: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten. Acta litt. ac scient., Szeged, 5 (1931) 69–77. o.

² EGERVÁRY E.: On a generalisation of a theorem of Kakeya, Acta litt. ac scient., Szeged, 5 (1931) 78–82. o.

³ BERWALD L.: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze, Math. Zeitschr. 37 (1933) 61–76. o.

⁴ SEGRE B.: Sulla teoria delle equazioni algebriche a coefficienti reali, Mem. d. R. Accademia d'Italia 5 (1934) 323–346. o.

⁵ TAKAHASHI S.: On the algebraic equations whose roots lie in the unit circle, The Tohoku Math. Journ. 38 (1933) 262–264. o.

⁶ SCHULZ W.: Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn Takahashi, Jahresbericht d. DMV. 45 (1935) 172–180. o.

⁷ ONOFRI L.: Intorno agli zeri di alcune classi funzioni analitiche, Mem. d. R. Accademia d'Italia 6 (1935) 1267–1291. o.

nevezetes tétele,⁸ továbbá ennek a tételnek újabb kiegészítései. De közös gyökere a szóbanforgó tételeknek két arcus-variációs tétel is, s éppen ennek a megmutatása egyik főcélja dolgozatomban. E két arcus-variációs tétel, mint segéd-tétel lényeges szerepet játszott fentidézett dolgozatomban. Ennek dacára ez a két tétel, KERÉKJÁRTÓ-nak egy szép dolgozatát⁹ kivéve, eddig nem részesült kellő figyelemben, sőt azokat bizonyos speciálisabb esetekben utólag újból is felfedezték.¹⁰ Fentebb idézett szerzők is figyelmen kívül hagyják e két segéd-tételt, holott közvetlen felhasználásukkal, egyes hosszabb ad hoc megfontolásokkal mellőzhetők volna. Ezért a következőkben először is a szóbanforgó két arcus-variációs tételt újra bebizonyítom és pedig a komplex függvénytan jólismert módszerével, a logaritmusos-residuum alkalmazásával.

A továbbiakban valós együtthatós hatványsorok zéróhelyeinek az eloszlásával foglalkozom, abban az esetben, amikor a sor együtthatóiból képezett bizonyos egyszerű sorozatok, monoton sorozatok. Megmutatom majd, hogy ONOFRI-nak fentemlített tételeiben a *feltételek lényegesen gyengülhetnek*.

1. §. Két függvény-tani segéd-tétel.

Értelmezés. Legyen $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ két komplex szám. z_1 és z_2 skaláris szorzatán az

$$x_1x_2 + y_1y_2$$

⁸ FEJÉR L.: a) Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten, Acta litt. ac scient., Szeged 2 (1924—26) 75—85. o. b) Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeya-schen Satzes, Jahresbericht d. DMV. 38 (1929) 231—238. o. c) Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Transac. o. t. American Math. Soc. 39 (1936) 18—59. o.

⁹ KERÉKJÁRTÓ B.: Analytikus leképezések indexéről, Matematikai és Természettud. Értesítő 53 (1935) 407—418. o. Sur l'indice des transformations analytiques, Acta litt. ac scient., Szeged. 7 (1935) 163—172. o.

¹⁰ POMPEIU D.: Sur un théoreme analogue a celui de Rouché..., C. R. Académie des Sciences, Paris, 195 (1932) 855—857. o. MONTEL P.: Sur un théoreme de Rouché, u. o. 1214—1216. o.

valós számot értjük és a következőképpen jelöljük: $(z_1, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2$.

z_1 és z_2 vektori szorzatán érteni fogjuk a következő valós számértéket:

$$x_1y_2 - y_1x_2 = z_1 \times z_2.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$(z_1, \bar{z}_2) = R(\bar{z}_1 z_2) = R(z_1 \bar{z}_2) \quad z_1 \times z_2 = J(\bar{z}_1 z_2) = -z_2 \times z_1.$$

I. Segéd-tétel. Legyen $f(z)$ és $g(z)$ az egységkörben és annak kerületén is reguláris függvény. Ha az egységkör kerületén az $f(z)$ és $g(z)$ függvénynek a skaláris szorzata állandóan pozitív, vagy pedig állandóan negatív előjelű, akkor az egységkör belsejében az $f(z)$ és $g(z)$ függvény nullahelyeinek a száma egyenlő. (Ugyanez az állítás érvényes abban az esetben is, amikor az egységkör kerületén $f(z)$ és $g(z)$ -nek a vektori szorzata: $f(z) \times g(z)$ állandó előjelű.)

Bizonyítás. Mivel feltételünk szerint az $(f(z), g(z))$ skaláris szorzat állandó előjelű, ha $z = e^{i\theta}$, feltehetjük, hogy állandóan pozitív. Abból, hogy a kerületen az $(f(z), g(z))$ skaláris szorzat nem tűnik el, következik, hogy ott az $f(z)$ és $g(z)$ függvény sem tűnhetik el. Tehát az $f(z)$, illetve $g(z)$ függvény nullahelyeinek a számát az egységkör belsejében a következő ismeretes integrál szolgáltatja:

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \text{illetve} \quad N_g = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g'(z)}{g(z)} dz,$$

ahol az integráció az egységkör kerületén, pozitív értelemben történik.

Megmutatjuk, hogy $N_f = N_g$. Tekintsük az

$$F_\lambda(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda g(z) \quad (1)$$

függvényt, ahol λ valós pozitív paramétert jelent és $0 \leq \lambda \leq 1$. Az egységkör kerületének bármely pontjában $F_\lambda(z) \neq 0$. Ugyanis, ha $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 1$, akkor $F_0(z) = f(z)$, illetőleg $F_1(z) = g(z)$, s ezek a függvények fentebbi megjegyzésünk szerint a kerületen nem tűnnek el. Ha pedig $0 < \lambda < 1$ esetében a kerület valamelyik ξ pontjában $F_\lambda(\xi) = 0$ lenne, akkor (1) szerint állana a következő egyenlőség

$$(1-\lambda)f(\xi) = -\lambda g(\xi),$$

amelyből nyernénk a következőt:

$$(1-\lambda)f(\xi)\overline{g(\xi)} = -\lambda|g(\xi)|^2 < 0. \quad (2)$$

Mivel $0 < \lambda < 1$, az utóbbi egyenlőtlenségből következne, hogy $f(z)$ és $g(z)$ skaláris szorzatának értéke a kerület ξ pontjában:

$$(f(\xi).g(\xi)) < 0,$$

ami ellentmond feltételünknek. Ezzel megmutattuk, hogy a kerület bármely pontjában $F_\lambda(z) \neq 0$ és így nullahelyeinek a számát az egységkör belsejében az

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1-\lambda)f'(z) + \lambda g'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda g(z)} dz = N_\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3)$$

integrál szolgáltatja, ahol az integráció a kerületen pozitív értelemben történik. Az utóbbi integrál λ -nak folytonos függvénye, mert

$$N_\lambda - N_{\lambda'} = \frac{\lambda - \lambda'}{2\pi i} \int \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{\{(1-\lambda)f(z) + \lambda g(z)\}\{(1-\lambda')f(z) + \lambda'g(z)\}} dz,$$

és így, ha a $\lambda - \lambda'$ különbség elegendő kicsiny, akkor $N_\lambda - N_{\lambda'}$ különbség is kicsiny. Mivel még az N_λ integrál csakis egészértékeket vehet fel, azért kell, hogy

$$N_0 = N_1 = N_f = N_g$$

legyen.

A tétel bizonyítása lényegében nem változik, ha $f(z)$ és $g(z)$ függvényeknek a vektori szorzatáról tesszük fel azt, hogy a kerületen állandó előjelű.

KERÉKJÁRTÓ-tól származik a következő:

II. Segéd-tétel. *Legyen $f(z)$ és $g(z)$ az egységkör belsejében és kerületén, reguláris függvény. Ha az egységkör kerületének minden olyan helyén, ahol az $f(z) \times g(z)$ vektori szorzat eltűnik, az $(f(z).g(z))$ skaláris szorzat állandó előjelű, akkor az egységkör belsejében $f(z)$ és $g(z)$ függvények nullahelyeinek a száma egyenlő. (Ugyanezt állíthatjuk abban az esetben is, ha a kerületnek minden olyan pontjában, ahol $(f(z).g(z)) = 0$ az $f(z) \times g(z)$ szorzat állandó előjelű.)*

Bizonyítás. Majdnem úgy történik, mint az I. segédétel esetében. Feltehetjük, hogy ahol $f(z) \times g(z) = 0$, ($z = e^{i\varphi}$), ott $(f(z) \cdot g(z)) > 0$. Megint az (1) alatti $F_\lambda(z)$ függvényt tekintjük. Ha az egységkör valamelyik ξ helyén $F_\lambda(\xi) = 0$ lenne, akkor (2) alattiból következne, hogy a ξ helyen

$$f(\xi) \times g(\xi) = 0 \quad \text{és} \quad (f(\xi) \cdot g(\xi)) < 0,$$

ami ellentmond feltételünknek. Tehát $F_\lambda(z)$ a kerületen nem tűnik el s így nullahelyeinek a számát a (3) alatti integrál szolgáltatja. Ezek után bizonyításunk a továbbiakban szószerint megegyezik az I. segédétel bizonyításának megfelelő részével.

2. §. A zéróhelyek eloszlásának kapcsolata a hatványsor együttthatóiból képezett sorozatok monotonitásával.

FEJÉR tétele. Legyen $F(\varphi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\varphi$ valós együttthatós cosinus-sor. Ha a $\{b_n\}$ sorozat kétszeresen monoton és $b_n \rightarrow 0$, akkor $F(\varphi)$ sor konvergens a $0 < \varphi < 2\pi$ közben és

$$F(\varphi) \geq 0,$$

ha

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

(A $\{b_n\}$ sorozatot kétszeresen monotonnak nevezzük, ha $b_n \geq 0$, $b_n - b_{n+1} = \Delta b_n \geq 0$ és $\Delta b_n - \Delta b_{n+1} = \Delta^2 b_n \geq 0$, $n=0, 1, 2, \dots$).

ONOFRI tétele. Legyen az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ valós együttthatós hatványsor konvergens az egységkörben. Jelentsen k egy tetszőszerinti pozitív egészszámot vagy zérót, és képezzük a hatványsor együttthatóiból a következő sorozatot:

$$b_n = a_{k+n} + a_{k-n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ahol $a_{-k} = 0$, ha $v < 0$. Legyen a $\{b_n\}$ sorozat kétszeresen monoton, és tegyen még eleget a következő feltételeknek

$$\Delta^2 b_n > 0, \tag{1}$$

ha

$$n = 0, 1, 2, \dots, k,$$

akkor az $f(z)$ függvénynek pontosan k nullahelye van az egységkör belsejében.

A következőkben megmutatjuk, hogy ONOFRI-nak most idézett tételében a (1) alatti feltétel lényegesen gyengíthető, amennyiben elegendő, ha csak azt tesszük fel, hogy a $\Delta^2 b_n$ második differenciák közül csakis a nulla inderű pozitív, vagyis a (1) alatti helyett a következő feltétel áll:

$$\Delta^2 b_0 > 0. \quad (1')$$

Bizonyítás. Vizsgálni fogjuk $f(z)$ nullahelyeinek a számát olyan $|z| < \rho$ körben, melynek sugara $\rho < 1$. E célból tekintjük az

$$f(\rho z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n z^n = h(z) \quad (2)$$

függvényt és megmutatjuk, hogyha ρ elég közel van az 1-hez, akkor a $h(z)$ függvénynek pontosan k nullahelye van az egységkörben. E szerint (2) értelmében következik, hogy az $f(z)$ függvénynek is pontosan k nullahelye van az egységkörben.

Számítsuk ki z^k és $h(z)$ függvények skaláris szorzatának az értékét az egységkör területén:

$$\begin{aligned} (z^k, h(z)) &= R \{ e^{-i\varphi k} h(z) \} = \\ &= a_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k+n} \rho^{k+n} + a_{k-n} \rho^{k-n}) \cos n\varphi = F(\varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Most már ha megmutatjuk, hogy $F(\varphi) > 0$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), amikor $\rho < 1$ és $1 - \rho$ elegendő kicsiny, akkor az 1. §, I. segédtetele értelmében a $h(z)$ nullahelyeinek a száma az egységkörben: k .

Tekintsük a $F(\varphi)$ cosinus-sor FEJÉR-féle előállítását.¹¹ Ez a következő:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 (a_{k+n} \rho^{k+n} + a_{k-n} \rho^{k-n}) \sin^2 (n+1) \frac{\varphi}{2}.$$

Ezt a végtelen sort felbontjuk három részre, a következőképpen:

$$F(\varphi) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (4)$$

¹¹ L. pl. 8 lj., a).

ahol

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \{ 2a_k \varrho^k - 2(a_{k+1} \varrho^{k+1} + a_{k-1} \varrho^{k-1}) + a_{k+2} \varrho^{k+2} + a_{k-2} \varrho^{k-2} \}$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sum_{n=1}^k \Delta^2 (a_{k+n} \varrho^{k+n} + a_{k-n} \varrho^{k-n}) \sin^2 (n+1) \frac{\varphi}{2}$$

és

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sum_{n=k+1}^{\infty}$$

ahol az összegező jelben ugyanaz a kifejezés áll, mint a Σ_2 -ben. Vizsgáljuk először e felbontásnak Σ_3 tagját. Tekintettel a $\Delta^2 a_{k+n} \geq 0$, $\Delta a_{k+n+1} \geq 0$ feltételekre és arra, hogy $\nu < 0$ esetében $a_\nu = 0$, könnyen belátható,¹² hogy a Σ_3 összeg tagjai nemnegatívak, ha $\varrho \leq 1$ és $0 < \varphi < 2\pi$. A (4) alatti felbontás második tagjában, a Σ_2 -ben szereplő $\Delta^2(\cdot)$ másodrendű differenciák $\varrho = 1$ -re a feltétel szerint nemnegatívak. Bontsuk fel a Σ_2 kifejezést

$$\Sigma_2 = s_1(\varphi) + s_2(\varphi) \quad (5)$$

összegre olyképpen, hogy $s_1(\varphi)$ azokat a másodrendű differenciákat tartalmazza, amelyek $\varrho = 1$ -re pozitívak. Nyilvánvaló, hogy ha a ϱ keveset különbözik 1-től, akkor

$$\begin{aligned} s_1(\varphi) &> 0 \\ (0 < \varphi < 2\pi). \end{aligned} \quad (6)$$

Az (5) alatti felbontásnak második tagjában olyan differenciák szerepelnek, amelyek $\varrho = 1$ -re zéróval egyenlők; ha tehát a ϱ elég közel van az 1-hez, akkor az $s_2(\varphi)$ -ben fellépő differenciák abszolút értéke kisebb, mint egy tetszésszerű kicsiny pozitív ε szám. Ebből következik, mivel még az

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+1) \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 = \frac{n+1}{2} + n \cos \vartheta + (n-1) \cos 2\vartheta + \dots + \cos n\vartheta$$

¹² L. 7 lj. 1280 old.

formula értelmében

$$\left| \frac{\sin^2(n+1) \frac{\vartheta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right| \leq \frac{1}{2} (n+1)^2, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi,$$

hogy

$$|s_2(\varphi)| \leq \varepsilon m, \quad m = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (\nu+1)^2. \quad (7)$$

Ezek után az (5) alatti értelmében (6) és (7) szerint a Σ_2 -re a következő becslést nyerjük:

$$\Sigma_2 \geq s_1(\varphi) - \varepsilon \cdot m. \quad (8)$$

Végül tekintsük a (4) alatti felbontásnak Σ_1 tagját. Mivel $\rho=1$ -re $\Sigma_1 = \frac{\Delta^2 b_0}{2}$ és (1') szerint $\Delta^2 b_0 > 0$, azért ha ρ keveset különbözik az 1-től, akkor a Σ_1 is egy, a fix pozitív $\frac{\Delta^2 b_0}{2}$ -től csak keveset különböző pozitív számérték.

Most már, ha a ρ elég közel van az 1-hez, akkor a (4), (8) és (6) alattiból következik, hogy

$$F(\varphi) \geq \Sigma_1 - \varepsilon \cdot m + \Sigma_3$$

és e szerint, mivel $\Sigma_3 \geq 0$, továbbá Σ_1 egy fix pozitív számnál nagyobb, nyomban következik, hogy

$$F(\varphi) > 0 \\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Ha $\varphi=0$, akkor (3) szerint

$$F(0) = a_k \rho^k + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{k+n} \rho^{k+n} + a_{k-n} \rho^{k-n}),$$

mivel pedig (1') értelmében $b_0 = 2a_k > 0$ azért, ha ρ elegendő közel van 1-hez, akkor $F(0)$, előbbi kifejezéséből könnyen következik, hogy $F(0) > 0$.

Ezzel megmutattuk, hogy a (3) alatti skaláris szorzat állandóan pozitív az egységkör kerületén.

ÜBER DIE NULLSTELLEN VON POTENZREIHEN.

Von STEPHAN LIPKA.

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten. L. ONOFRI hat den folgenden Satz bewiesen:

Ist die Folge

$$b_n = a_{k+n} + a_{k-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($a_\nu = 0$ wenn $\nu < 0$ gilt)

zweifach monoton (d. h. $b_n \geq 0$, $\Delta b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0$, $\Delta^2 b_n - \Delta^2 b_{n+1} \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) und ausserdem

$$\Delta^2 b_n > 0 \quad \text{wenn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (\text{I})$$

so hat die Funktion $f(z)$ k Nullstellen im Inneren des Einheitskreises.

Im vorstehenden Aufsatz wurde bewiesen, dass man die Voraussetzung (I) des vorigen Satzes mit der einzigen Ungleichung.

$$\Delta^2 b_0 > 0$$

ersetzen kann.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften von 22. November 1937.)

MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEK ABSZOLÚT OSZTÁLYCSOPORTJA 4-GYEL OSZTHATÓ INVARIÁNSAINAK SZÁMOSSÁGÁRA VONATKOZÓ NÉHÁNY KÖZÉPÉRTÉKKÉRDÉS.

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Mezőtúr).

Legyen t tetszőszerinti pozitív egész szám, R a racionális számok teste, $R(\sqrt{D})$ olyan 2-odfokú számtest, amelynek D diszkriminánsa pontosan t különböző törzstényezőt tartalmaz, e_4 legyen az $R(\sqrt{D})$ test («szűkebb» értelemben) abszolút osztálycsoportjában a 4-gyel osztható invariánsok számossága.

Adott t mellett $M_t(e_4)$ -gyel jelölöm az e_4 középértékét, azaz

$$M_t(e_4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum e_4}{D(x, t)}, \quad (1)$$

ahol az összegezés az összes olyan D -re értendő, amelyre $D \leq x$ teljesül, és mindezeknek a D -knek számosságát $D(x, t)$ jelöli.

Adott t és e ($0 \leq e \leq t-1$) mellett t_e -vel jelölöm az $e_4 = e$ bekövetkezésének valószínűségét, azaz

$$t_e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, e)}{D(x, t)}, \quad (2)$$

ahol $D(x, t, e)$ jelenti a $D(x, t)$ által összeszámlált D -k közül azokat, amelyekre $e_4 = e$. (Természetesen az e csak racionális egész számot jelenthet. A $0 \leq e \leq t-1$ megszorítást azért tettük, mert tudvalevőleg mindig $0 \leq e_4 \leq t-1$.)

A jelenlevő dolgozat az $M_t(e_4)$ középértéknek és a t_e valószínűségnek kérdésével foglalkozik. Kiderül, hogy ezek mindketteje mindig létezik és a $t=1$ esettől eltekintve pozitív. Érté-

küket meghatározom véges (azaz határátmenettől mentes) képletekkel. Kiderül még, hogy $t \rightarrow \infty$ mellett $M_t(e_4)$ -nek és t_e -nek van határértéke. Az előbbi határérték $0.655\dots$, az utóbbi az e -től függ s növekvő e mellett rohamosan csökken. Különösen t_0 és t_1 határértéke $0.4331\dots$, illetve $0.4811\dots$. E szerint a $t_0 + t_1$ összeg határértéke $0.914\dots$, s így — legalább is elég nagy t mellett — nem is egészen az esetek 11-edrészében áll be $e_4 \geq 2$.

Az $M_t(e_4)$ meghatározása t_e meghatározásán keresztül történik. A t_e meghatározásához szükséges a kérdés következő részletezése, ami e mellett önmagában is érdekes.

Legyen t' a D negatív törzsdiszkriminánstényezőinek¹ számossága ($0 \leq t' \leq t$). Adott t, t', e mellett $(t, t')_e$ -vel jelölöm az $e_4 = e$ bekövetkezésének valószínűségét, azaz

$$(t, t')_e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, t', e)}{D(x, t, t')}, \quad (3)$$

ahol $D(x, t, t')$ a további $D \leq x$ feltételt kielégítő D -k számossága, míg $D(x, t, t', e)$ az utóbbi D -k közül azoknak a számossága, amelyekre még $e_4 = e$ is teljesül. Látni fogjuk, hogy ezek a $(t, t')_e$ valószínűségek is léteznek. Ezekből azután a t_e könnyen lesz kiszámítható.

A $(t, t')_e$ valószínűségek élesen eltérő értékeket mutatnak fel a szerint, amint t' páros vagy páratlan, azaz a szerint, amint D pozitív vagy negatív. Mégpedig érvényes többek között az, hogy (negatív D -kre azaz) képzetes $R(\sqrt{D})$ testekre az e_4 középértéke (elég nagy t mellett) $1.84\dots$ -szer annyi, mint valós $R(\sqrt{D})$ testekre.²

Egy régebbi dolgozatban³ foglalkoztam már hasonló kérdésekkel, ahol azonban csupán olyan D -ket vettem figyelembe,

¹ A D törzsdiszkriminánstényezői alatt értem a $D = d_1 d_2 \dots d_t$ szorzatos előállításnak a tényezőit, ahol d_1, d_2, \dots, d_t racionális egész számok, d_2, d_3, \dots, d_t $4l+1$ alakú törzsszámok.

² Ennek a jelenségnek (mindenesetre naiv) magyarázata már abban található, hogy (pozitív D mellett) egy D_1, D_2 D -felbontás a $D_1, D_2 < 0$ esetben nem lehet 2-odfajú.

³ RÉDEI L.: Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben, ez az Ért., 54 (1936), 45—112. Ezt a dolgozatot I-gyel fogom idézni.

amelyeknek összes törzsdiskriminánstényezői pozitívok ($t'=0$). Az ott használt analitikai-számelméleti alapvetések itt is kielégítők lesznek, csak az eltérésre kell kevés szóval rámutatnom. A továbbiakhoz szükséges volt a 2-odfajú D-felbontások csoportjának tüzetes s elég körülményes vizsgálata, amelyet azonban az itteniekhez szükséges mértékben egy másik dolgozatban⁴ már elvégeztem.

A mostani általános esetben az eredmények sokkal bonyolultabb képletek által nyernek kifejezést, mint az említett ($t'=0$) különös esetben. Mégis a tekintett valószínűségszámok s középértékek számszerűség tekintetében nagy mértékben hasonló viselkedésűek.

Legyenek az O, \sim jelek hasonlóan értelmezve, mint az I-ben (50. o.).

Egyelőre a páros D-ket figyelmen kívül hagyom. Kikötöm, hogy $t \geq 2$ legyen, minthogy a $t=1$ eset érdektelen. Itt is érvényesnek veszem a II-ben az (1)–(5)-ig tett megállapodásokat. Legyen c a T típus néhány különböző (legalább egy) elemének szorzata. Akkor c a D-nek egyértékű függvénye. Legyen

$$\pi_t(x, c) = \sum_{D \leq x} c. \quad (4)$$

LANDAU⁵ szerint

$$D(x, t) \sim \frac{1}{(t-1)!} \frac{x(\log \log x)^{t-1}}{\log x}. \quad (5)$$

Az I (5)-höz hasonlóan most is bebizonyítható a

$$\pi_t(x, c) = O\left(\frac{x(\log \log x)^{t-2}}{\log x}\right) \quad (6)$$

összefüggés.

Ezután (5)-ből és (6)-ból következik az I (24)-hez hasonló

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, T)}{D(x, t)} = \frac{1}{2^{\binom{t+1}{2}}} \quad (7)$$

⁴ RÉDEI L.: A másodfajú D-felbontásokról, ez az Ért., 56 (1937), 89–124. Ezt a dolgozatot II-vel fogom idézni.

⁵ LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I (1909), 208.

összefüggés, ahol $2^{\binom{t+1}{2}}$ éppen (az egyugyanazon t -hez tartozó) különböző T típusok számossága. (A (7) azt jelenti, hogy az összes gondolható T típusok tényleg lehetségesek és egyenlő valószínűek.)

Jelentse adott U főrészt mellett $D(x, U)$ a $D(x, t)$ által összeszámlált D -k közül azoknak a számosságát, amelyek típusának főrésze U . Minthogy az egyugyanazon főrésszel bíró T típusok számossága $2^{\binom{t}{2}}$, azért (7)-ből előáll:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, U)}{D(x, t)} = \frac{1}{2^t}. \quad (8)$$

Ebből előáll még

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, t')}{D(x, t)} = \frac{\binom{t}{t'}}{2^t}, \quad (9)$$

tekintettel arra, hogy t' nem egyéb, mint az U 1 elemeinek számossága.

Minthogy a II 5. o. szerint e_4 csupán a T típus függvénye, azért (3), (7), (9) miatt

$$(t, t')_e = \frac{T(t, t', e)}{\binom{t}{t'} 2^{\binom{t}{2}}}, \quad (10)$$

ahol $T(t, t', e)$ jelenti mindazoknak a T típusoknak számosságát, amelyekre fennállnak a következők: az U főrészt t elemből áll, ezek között pontosan t' számú 1 elem van és $e_4 = e$. (Ennek belátásához a (3)-beli tört számlálóját s nevezője $D(x, t)$ -vel osztandó.)

A (2)-ből nyilvánvalóan következik

$$t_e = \sum_{t'=0}^t \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, t', e)}{D(x, t)}.$$

Ebből, (3)-ból és (9)-ből előáll

$$t_e = \frac{1}{2^t} \sum_{t'=0}^t \binom{t}{t'} (t, t')_e. \quad (11)$$

Az (1)-beli számláló helyébe

$$\sum_{e=1}^{t-1} eD(x, t, e)$$

vehető, s így (2) miatt

$$M_t(e_4) = \sum_{e=1}^{t-1} et_e. \quad (12)$$

Észrevesszük most már, hogy a páros D -k bevonása az eredményeken semmit sem változtat, mert minden ilyen D előáll a $\pm 8d$, $-4d$ alakok egyikében, ahol d olyan páratlan diszkriminánszám, amely csupán $t-1$ törzsszám szorzata, s így az ilyen D -k a $D(x, t)$ -hez csupán egy

$$O\left(\frac{x(\log \log x)^{t-2}}{\log x}\right)$$

többletet szolgáltatnak, ami (5), (7), (8), (9) miatt mellőzhető. E szerint (10), (11), (12) helyesek az eredeti értelmezés szerint is.

Jelentse $T(t, U, e)$ mindazoknak az U főrészü T típusoknak számosságát, amelyekre $e_4 = e$, ahol az U változatlanul t elemből, köztük pontosan t' számú 1 elemből áll. Nyilvánvaló, hogy $T(t, U, e)$ nem változik az U elemeinek permutálásánál, amiből $T(t, t', e) = \binom{t}{t'} T(t, U, e)$. Ebből (10) miatt

$$(t, t')_e = \frac{T(t, U, e)}{2^{\binom{t}{t'}}},$$

ahol U egy tetszőszerintit jelent az imént mondott U -k közül. A II §. o. szerint az itteni számláló épp azoknak az (U főrészü) T -knek számossága, amelyekre a G_2 csoport (a 2-odfajú D -felbontások csoportja a II értelmében) független elemeinek számossága $e+1$. Ez a számláló ezért éppen a II (57), illetve (57₀) képletekkel van megadva, megfelelőleg a $t' > 0$, $t' = 0$ eseteknek, amely képletekben azonban most $r = e+1$ helyettesítendő. Ezek közül a $t' = 0$ eset már ismeretes, mégpedig $(t, 0)_e$ éppen az I-beli t_e . Ezzel előáll a következő:

I. tétel. *A pontosan t' különböző negatív és $t-t'$ különböző pozitív törzsdiskrimináns tényező szorzatából álló diszkriminánssal bíró másodfokú számtetek között $(t, t')_e =$*

$$\sum_{\varrho=\max(0, e-v)}^{\min(t-t', e)} \sum_{i=0}^{t-t'-\varrho} \sum_{k=0}^{v-e+\varrho} (-1)^{i+k} \begin{Bmatrix} 2t-t'-1 \\ 2\varrho-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2t-t'-\varrho-1 \\ 2i-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4^v-1 \\ 2^{e-\varrho}-1 \end{Bmatrix} \\ \left\{ \begin{matrix} 4^{v-e+\varrho}-1 \\ 2^{k-1} \end{matrix} \right\} 2^{\binom{i}{2} + \binom{k}{2} + \binom{t-e-i-k}{2} + \binom{e-\varrho+k}{2} + \binom{t-t'-\varrho}{2}} - \binom{t}{2}^{(1)} \quad (13)$$

a valószínűsége mindazoknak az eseteknek, amelyekben az abszolút osztálycsoport 4-gyel osztható invariánsainak számossága $e_4 = e$. Itt v jelenti a $\frac{t'-1}{2}$ -ben foglalt legnagyobb egész számot, $\max(x, y)$ és $\min(x, y)$ jelenti az x, y közül azt, amelyik a másikonál nem kisebb, illetve nem nagyobb, $\left\{ \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\}$ jelentése ugyanaz, mint II (38)-ban.

A pontosan t különböző törzstényezőt tartalmazó diszkrimináns-sal bíró másodfokú számtestek között az $e_4 = e$ bekövetkezésének t . valószínűsége (11) és (13) által van megadva. Ugyanezen testekre az e_4 -nek $M_t(e_4)$ középértéke (12), (11) és (13) által van megadva.⁷

A már előrebocsátottak miatt elég a bizonyításhoz még csak annyit megjegyezni, hogy a II (57)-beli u' az itteni jelölésben éppen $v+1$, továbbá ϱ' helyébe $e+1-\varrho$ volt írható, úgyhogy akkor ϱ a $0 \leq \varrho \leq t-t'$ és $(1 \leq e+1-\varrho \leq v+1$ azaz) $e-v \leq \varrho \leq e$ feltételeknek tartozik eleget tenni.

Alant feljegyzem az I. tételből a $t \leq 6$ példákat. A ⁶ jegyzet szerint a $(t, 0)_e = (t, 1)_e$ ($1 \leq t \leq 6$; $0 \leq e \leq t-1$) értékek az I 77. o. táblázatából veendőek. A többi ($t'=2, 3, 4, 5, 6$) esetben (t, t') -re (13) alapján a következő értékeket nyerjük:

⁶ A (13) jobboldala helyett a $t'=0$ esetben az I (51) jobboldala veendő. Itt jegyzem meg, hogy a II (57)-nek a $t'=1$ esete egyezik a II (57₀)-sal. Ez azt jelenti, hogy $(t, 1)_e = (t, 0)_e$.

⁷ Egy régebbi dolgozatom (Felső korlát a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai számára, ez az Ért., 51 (1934), 219–224) szerint az itteni jelölésben $e_4 \leq t-t'+v$. Ezért (t, t') -ről csak akkor kell beszélnünk, ha $e \leq t-t'+v$. Ez láthatóan pontosan annak a feltétele, hogy a (13)-beli első összegezésnek értelme legyen. Ugyanekkor (t, t') _e nem zérus volta — ami (13)-ról nem könnyen olvasható le — következik akár az itt idézett dolgozathból, akár az I (42)-ből. Utóbbiból könnyen nyerhető egy alsó korlát (t, t') _e-re.

		$(t, 2)_e =$					
		$e =$	0	1	2	3	4
$t = 2$			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{3}{4} = 0.75$	$\frac{1}{4} = 0.25$			
4			$\frac{11}{16} = 0.687\dots$	$\frac{9}{32} = 0.281\dots$	$\frac{1}{32} = 0.031\dots$		
5			$\frac{21}{23} = 0.656\dots$	$\frac{77}{256} = 0.300\dots$	$\frac{21}{512} = 0.041\dots$	$\frac{1}{512} = 0.0019\dots$	
6			$\frac{329}{512} = 0.642\dots$	$\frac{315}{1024} = 0.307\dots$	$\frac{385}{8192} = 0.047\dots$	$\frac{45}{16384} = 0.0027\dots$	$\frac{1}{16384} = 0.00006\dots$

		$(t, 3)_e =$					
		$e =$	0	1	2	3	4
$t = 3$			$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{3}{4} = 0.75$			
4			$\frac{5}{16} = 0.312\dots$	$\frac{19}{32} = 0.593\dots$	$\frac{3}{32} = 0.093\dots$		
5			$\frac{5}{16} = 0.312\dots$	$\frac{147}{256} = 0.574\dots$	$\frac{55}{512} = 0.107\dots$	$\frac{3}{512} = 0.0058\dots$	
6			$\frac{161}{512} = 0.314\dots$	$\frac{287}{512} = 0.560\dots$	$\frac{959}{8192} = 0.117\dots$	$\frac{127}{16384} = 0.0077\dots$	$\frac{3}{16384} = 0.00018\dots$

$(t, 4)_e =$

	$e = 0$	1	2	3
$t = 4$	$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{3}{8} = 0.375$		
5	$\frac{39}{64} = 0.609\dots$	$\frac{47}{128} = 0.367\dots$	$\frac{3}{128} = 0.023\dots$	
6	$\frac{307}{512} = 0.599\dots$	$\frac{753}{2048} = 0.367\dots$	$\frac{131}{4096} = 0.031\dots$	$\frac{3}{4096} = 0.0007\dots$

$(t, 5)_e =$

	$e = 0$	1	2	3
$t = 5$	$\frac{19}{64} = 0.296\dots$	$\frac{75}{128} = 0.585\dots$	$\frac{15}{128} = 0.117\dots$	
6	$\frac{151}{512} = 0.294\dots$	$\frac{1189}{2048} = 0.580\dots$	$\frac{495}{4096} = 0.120\dots$	$\frac{15}{4096} = 0.0036\dots$

$(t, 6)_e =$

	$e = 0$	1	2
$t = 6$	$\frac{151}{256} = 0.589\dots$	$\frac{195}{512} = 0.380\dots$	$\frac{15}{512} = 0.029\dots$

Ezekből, a fenti megjegyzés szerint (11) alapján előállnak még a következők:

		$t_e =$					
		1	2	3	4	5	
$e =$	0	1	2	3	4	5	
1	1						
2	$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{3}{8} = 0.375$					
3	$\frac{9}{16} = 0.562\dots$	$\frac{3}{8} = 0.375$	$\frac{1}{16} = 0.062\dots$				
4	$\frac{131}{256} = 0.511\dots$	$\frac{53}{128} = 0.414\dots$	$\frac{71}{1024} = 0.069\dots$	$\frac{5}{1024} = 0.0048\dots$			
5	$\frac{501}{1024} = 0.489\dots$	$\frac{1745}{4096} = 0.426\dots$	$\frac{325}{4096} = 0.079\dots$	$\frac{85}{16384} = 0.0051\dots$	$\frac{3}{16384} = 0.00018\dots$		
6	$\frac{15484}{32768} = 0.472\dots$	$\frac{57695}{131072} = 0.440\dots$	$\frac{10665}{131072} = 0.081\dots$	$\frac{5925}{1048576} = 0.0056\dots$	$\frac{367}{2097152} = 0.00017\dots$	$\frac{7}{2097152} = 0.000003\dots$	

Ebből a táblázathól s (12)-ből nyerjük a következőt:

$t =$	1	2	3	4	5	6
$M_t(e_s) =$	0	0·375	0·500	0·567...	0·601...	0·620...

Megvizsgálom, hogy $(t, t')_e$ hogyan viselkedik elegendő nagy t' és $t-t'$ értékeknél. Legyen t' olyan nagy, hogy az I. tételben $e-v \leq 0$ és legyen még t olyan nagy, hogy $t-t' \geq e$. Akkor a (13)-ban a $\rho=0, 1, 2, \dots, e$ értékekkel történik az összegezés. Jelentsen ε 0-t vagy 1-et, a szerint, amint $2 \nmid t'$ vagy $2 \mid t'$. Akkor $t' = 2^v + 1 + \varepsilon$. Legyen még $k = 0, 1, 2, \dots$ mellett

$$\left\{ 1 - \frac{1}{x^n} \right\}_k = \left(1 - \frac{1}{x^n} \right) \left(1 - \frac{1}{x^{n-1}} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{x^{n-k+1}} \right),$$

ahol a $k=0$ esetben a jobboldal értéke 1-nek veendő. Akkor a (13)-ból könnyű számítással előáll a következő:

$$(t, t')_e = \sum_{\rho=0}^e \sum_{i=0}^{t'-\rho} \sum_{k=0}^{v-e+\rho} (-1)^{i+k} \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{2^{t-t'}} \right\}_{\rho+i} \left\{ 1 - \frac{1}{4^v} \right\}_{e-\rho+k}}{\left\{ 1 - \frac{1}{2^\rho} \right\}_\rho \left\{ 1 - \frac{1}{2^i} \right\}_i \left\{ 1 - \frac{1}{2^{e-\rho}} \right\}_{e-\rho} \left\{ 1 - \frac{1}{2^k} \right\}_k} 2^{-E}, \tag{14}$$

ahol

$$E = (t' - e - k)(\rho + i) + ek + \binom{k+1}{2} + (e-\rho)^2 + \varepsilon(e-\rho+k) + (e+i)\rho + \binom{\rho}{2}.$$

Ebből $E \geq (t' - e - k)(\rho + i)$, és így $k \leq v$ miatt

$$E \geq (t' - e - v)(\rho + i) \geq (v - e)(\rho + i).$$

A (14)-ben különválasztom a $\rho=0, i=0$ esethez tartozó részt. A maradék részben $\rho+i \geq 1$ s így egyben $E \geq v-e$. Minthogy továbbá a (14)-beli törtkifejezés egy abszolút korlát alatt van, azért a mondott maradékrész abszolút értéke

$$\leq \sum_{\rho=0}^e \sum_{i=0}^{t'-\rho} \sum_{k=0}^{v-e+\rho} \frac{C}{2^{(v-e)(\rho+i)}},$$

ahol a «'» vessző azt jelenti, hogy a $\varrho+i=0$ eset mellőzendő, továbbá C (és később C_1, C_2, \dots) egy állandót jelent. Minthogy itt $\varrho+i$ csupán pozitív egész értékeket vesz fel, mindegyiket legfeljebb $e+1$ -szer, továbbá $k \leq v$, azért az előbbi kifejezés

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C(e+1)(v+1)}{2^{(v-e)j}}.$$

Ha $v > e$, akkor ez

$$\leq \frac{C(e+1)(v+1)}{2^{v-e-1}} \leq \frac{C_1 v}{2^v}.$$

Ezek szerint (14)-ből

$$(t, t')_e = \sum_{k=0}^{v-e} (-1)^k \frac{\left\{1 - \frac{1}{4^v}\right\}_{e+k}}{\left\{1 - \frac{1}{2^e}\right\}_e \left\{1 - \frac{1}{2^k}\right\}_k} 2^{-ek - \binom{k+1}{2} - e^2 - \varepsilon(e+k)} + \frac{1}{2^v} O(v).$$

Ha $v > 2e$, akkor itt az összeget csupán a $k \leq \frac{v}{2}$ értékekkel véve, az összeg maradék részének abszolút értéke $\binom{k+1}{2} \geq k$ miatt

$$\leq \sum_{k \geq \frac{v}{2}} \frac{C_2}{2^k} \leq \frac{C_3}{2^{\frac{v}{2}-1}} \leq \frac{C_3}{2^{\frac{v}{2}}}.$$

Ezért érvényes

$$(t, t')_e = \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} (-1)^k \frac{\left\{1 - \frac{1}{4^v}\right\}_{e+k}}{\left\{1 - \frac{1}{2^e}\right\}_e \left\{1 - \frac{1}{2^k}\right\}_k} 2^{-ek - \binom{k+1}{2} - e^2 - \varepsilon(e+k)} + \frac{1}{\sqrt{2^v}} O(v),$$

ahol az összegezés a $\frac{v}{2}$ -ben foglalt legnagyobb egész ig értendő. Az itteni számlálót 1-gyel helyettesítve, az elkövetett hiba abszolút értéke

$$\begin{aligned} &\leq C_4 \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} \left(1 - \left\{1 - \frac{1}{4^v}\right\}_{e+k}\right) \leq C_4 \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} \left(\frac{1}{4^v} + \frac{1}{4^{v-1}} + \dots + \frac{1}{4^{v-e-k+1}}\right) \leq \\ &\leq C_4 \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} \frac{1}{2^{2v-2e-2k+1}} \leq C_4 \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} \frac{1}{2^{v-2e+1}} \leq \frac{C_5 v}{2^v}. \end{aligned}$$

E szerint

$$\begin{aligned} (t, t')_e = \sum_{k=0}^{\frac{v}{2}} (-1)^k \frac{1}{\left\{1 - \frac{1}{2^e}\right\}_e \left\{1 - \frac{1}{2^k}\right\}_k} 2^{-ek - \binom{k+1}{2} - e^2 - e(e+k)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2^v}} O(v). \end{aligned} \tag{15}$$

Az itteni kitevő $-\binom{k+1}{2}$ tagja miatt az összegezés felső határánál nyilvánvalóan ∞ vehető.

Jelentse $\lim^+(t, t')_e$ azt a határértéket, ami $(t, t')_e$ -ből előáll akkor, ha t, t' helyébe egy olyan $t_n, t'_n (n=1, 2, \dots)$ sorozatot helyettesítünk, amelyben elég nagy n -től kezdve $t_n - t'_n \geq e, 2 \mid t'_n$ és t'_n az n -nel minden határon túl nő; azért használom itt a «+» jelzést, mert $2 \mid t'$ ugyanazt jelenti, mint $D > 0$. A $2 \mid t'_n$ helyett a $2 \nmid t_n$ megszorítást véve, megfelelő jelentéssel bírjon $\lim^-(t, t')_e$. Más szóval ezek a határértékek kizárólag valós, illetve képzetes testekre vonatkoznak. A (15) szerint mind a két határérték létezik, mégpedig könnyen láthatóan:

$$\lim^+(t, t')_e = \frac{S_{e+1}}{\{2^e - 1\} 2^{\binom{e+1}{2}}},$$

$$\lim^-(t, t')_e = \frac{S_e}{\{2^e - 1\} 2^{\binom{e}{2}}},$$

ahol

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\} 2^{nk}}$$

és

$$\{2^n - 1\} = (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^1 - 1),$$

amelyben a jobboldal helyébe az $n=0$ esetben 1 veendő.

Érvényes $n \geq 1$ mellett

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\} 2^{nk}} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\}} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^k}{\{2^{k-1} - 1\} 2^{ik}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\} 2^{i(k+1)}} = \sum_{i=0}^n \frac{S_i}{2^i}. \end{aligned}$$

Ebből

$$S_n = S_{n-1} + \frac{S_n}{2^n},$$

azaz

$$S_n = \frac{2^n}{2^n - 1} S_{n-1},$$

és így

$$S_n = \frac{2^{\binom{n+1}{2}}}{\{2^n - 1\}} S_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Ezzel a fentiekből előállnak a következők:

$$\lim^+ (t, t')_e = \frac{2^{e+1}}{\{2^e - 1\}^2 (2^{e+1} - 1)} S, \quad (16)$$

$$\lim^- (t, t')_e = \frac{2^e}{\{2^e - 1\}^2} S, \quad (16_1)$$

ahol S_0 helyett S -t írtam, s külön is feljegyzem, hogy

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\{2^k - 1\}}.$$

Ezekután meghatározható $\lim_{t \rightarrow \infty} t_e$. A (11)-ből $|(t, t')_e| \leq 1$ miatt tetszőszerinti a, b pozitív egész számok mellett elegendő nagy t -vel fennáll

$$t_e = \frac{1}{2^t} \sum_{t'=a}^{t-b} \binom{t}{t'}_e + \frac{1}{2^t} O(t^{a+b}). \quad (17)$$

Jelölje a (16), (16₁) alatti határértékeket egy pillanatra c^+ és c^- . Ha η tetszésszerű pozitív szám, akkor a, b választhatók olyan nagyoknak, hogy mind a (17)-beli $(t, t')_e$ jelekre fennállnak

$$|(t, t')_e - c^+| < \frac{\eta}{4} \quad (2 \mid t'),$$

$$|(t, t')_e - c^-| < \frac{\eta}{4} \quad (2 \nmid t').$$

Akkor (17)-ből

$$\left| t_e - \frac{1}{2^t} \sum_{\substack{t'=a \\ 2 \mid t'}}^{t-b} \binom{t}{t'} c^+ - \frac{1}{2^t} \sum_{\substack{t'=a \\ 2 \nmid t'}}^{t-b} \binom{t}{t'} c^- \right| < \frac{\eta}{4} + \frac{1}{2^t} O(t^{a+b}).$$

Nyilvánvalóan van egy olyan N szám, hogy $t > N$ mellett a baloldali második és harmadik tagja $\frac{1}{2} c^+$ -től, illetve $\frac{1}{2} c^-$ -től $\frac{\eta}{4}$ -nél kevesebbel tér el, továbbá a jobboldali második tagja abszolút értékben $\frac{\eta}{4}$ alatt marad. Akkor

$$\left| t_e - \frac{1}{2} (c^+ + c^-) \right| < \eta.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} t_e = \frac{1}{2} (c^+ + c^-)$.

Nyilvánvalóan a t_e számára hasonló úton a c^+ , illetve c^- határérték áll elő akkor, ha csupán a valós vagy csupán a képzetes testeket tekintjük.

Ha még c^+, c^- értékeit (16)-ból és (16₁)-ből visszahelyettesítjük és a $\{2^n - 1\}$ jel értékét részletesen kiírjuk, akkor előáll a következő:

II. tétel. *Legyen*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k - 1)(2^{k-1} - 1) \dots (2^1 - 1)} = 0.28878 \dots$$

Az I. tételbeli t_e valószínűség és $M_t(e_i)$ középérték határértéke $t \rightarrow \infty$ mellett

$$A_e = \frac{2^{e-1}(2^{e+1}+1)}{(2^{e+1}-1)[(2^e-1)(2^{e-1}-1)\dots(2^1-1)]^2} S$$

(különösen $A_0 = \frac{3}{2} S = 0.433\dots$, $A_1 = \frac{5}{3} S = 0.481\dots$,

$$A_2 = \frac{2}{7} S = 0.082\dots, A_3 = \frac{68}{6615} S = 0.002\dots),$$

illetve

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \dots = 0.655\dots$$

Ha az összes 2-odfokú számtest helyett vagy csak a való-
sakat, vagy csak a képzeteseket vesszük alapul, de egyébként
 t_e -t és $M_t(e_i)$ -et hasonlóan értelmezzük, akkor az eltérés csak
annyi, hogy A_e helyébe

$$B_e = \frac{2^{e+1}}{(2^{e+1}-1)[(2^e-1)(2^{e-1}-1)\dots(2^1-1)]^2} S,$$

illetve

$$C_e = \frac{2^e}{[(2^e-1)(2^{e-1}-1)\dots(2^1-1)]^2} S$$

lép (különösen

$$B_0 = 2S = 0.577\dots, B_1 = \frac{4}{3} S = 0.385\dots, B_2 = \frac{8}{63} S = 0.036\dots,$$

$$C_0 = S = 0.288\dots, C_1 = 2S = 0.577\dots, C_2 = \frac{4}{9} S = 0.128\dots),$$

amelyekből az e_i középértékének határértékére ($t \rightarrow \infty$ mellett)
előáll a

$$B_1 + 2B_2 + 3B_3 + \dots = 0.460\dots,$$

illetve

$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots = 0.850\dots$$

érték. (Mindig $A_e = \frac{1}{2} (B_e + C_e)$, s hasonló igaz a számított
középértékek határértékére.)

EINIGE MITTELWERTFRAGEN IN BEZUG
AUF DIE ANZAHL DER DURCH 4 TEILBAREN
INVARIANTEN DER ABSOLUTEN KLASSENGRUPPE
IM QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER.

Von LADISLAUS RÉDEI in Mezötúr.

Es bedeute t eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, R den rationalen Zahlkörper, $R(\sqrt{D})$ einen quadratischen Zahlkörper, dessen Diskriminante D genau t verschiedene Primfaktoren enthält, e_4 die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten in der (im «engeren» Sinne) absoluten Klassengruppe des Körpers $R(\sqrt{D})$.

Es bezeichne $M_t(e_4)$ den Mittelwert von e_4 und t_e ($0 \leq e \leq t-1$) die Wahrscheinlichkeit von $e_4=e$ unter all den obigen Körpern $R(\sqrt{D})$, also

$$M_t(e_4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum e_4}{D(x, t)},$$

$$t_e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, e)}{D(x, t)},$$

wobei die Summe sich auf alle $D \leq x$ bezieht und $D(x, t)$, $D(x, t, e)$ die Anzahl von all diesen, bzw. der weiteren Einschränkung $e_4=e$ unterworfenen D bedeutet. (Wegen des GAUSS'schen Satzes kommt bei t_e ein $e \geq t$ nicht in Frage.)

Es stellt sich heraus, dass $M_t(e_4)$, t_e existieren und (mit der einzigen Ausnahme $M_1(e_4)=0$) positiv sind. Beide Werte werden durch je eine explizite (von jedem Grenzübergang freie) ziemlich komplizierte Formel bestimmt. Die Anfangsfälle sind a. d. S. 94—96 tabelliert. Dabei streben $M_t(e_4)$ und t_e ($e=0, 1, 2, 3, 4, \dots$)

mit wachsendem t den Werten $0\cdot655\dots$, bzw. $0\cdot433\dots$, $0\cdot481\dots$, $0\cdot082\dots$, $0\cdot002\dots$, $0\cdot00002\dots$,... zu. Danach nähert sich t_0+t_1 dem Werte $0\cdot914\dots$, es kommt also bei genügend grossem t der Fall $e_4 \geq 2$ nicht einmal in $\frac{1}{11}$ aller Fälle vor.

Werden statt aller quadratischen Körper bloss die reellen oder die imaginären betrachtet, so gelten ähnliche Resultate. Dabei erweist sich der imaginäre Fall für e_4 als günstiger, indem unter anderem sich der Mittelwert von e_4 im reellen, bzw. imaginären Falle für wachsendes t dem Werte $0\cdot460\dots$, bzw. $0\cdot850\dots$ nähert. (Davon ist die arithmetische Mitte das obige $0\cdot655\dots$)

Vom reellen Fall habe ich den kleinen Teil schon länger betrachtet, wo D durch keine positive Primzahl der Gestalt $4l+3$ teilbar ist.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 27. Okt. 1937.)

PROJEKTÍV SOKSZÖGEKRŐL ÉS SOKOLDALAKRÓL.

SZÓKEFALVI NAGY BÉLÁ-tól.

Bevezetés.

A projektív síkon felvett s megszámozott n darab ($n \geq 3$) «szögpont»: P_1, P_2, \dots, P_n , egy «alap- n -szöget» alkot. Bármely két (a ciklikus sorrendben) szomszédos P_k, P_{k+1} ($P_{n+1} = P_1$) szögponton áthaladó egyenest alapegyenesnek fogunk hívni. A következőkben mindig feltesszük, hogy nincs három olyan alapegyenes, amelynek közös pontja volna. Ebben a követelésben természetesen már benne foglaltatik az is, hogy két alapegyenes nem eshet össze. Az n darab alapegyenes ekkor a projektív síkot $\binom{n}{2} + 1$ «alaptartományra» bontja.¹

A P_k -n átmenő két alapegyenes a projektív síkot két szögtartományra osztja. Nevezzük ezek egyikét σ_k szögtérnek, a másikat τ_k érintőtérnek. Az így tetszésünk szerint kiválasztott $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ szögtér az alap- n -szöghöz tartozó egyik «projektív n -szöget» határozza meg. Ugyanahhoz az alap- n -szöghöz tehát 2^n számú különböző projektív n -szög tartozik.

Állapodjunk meg az egyik ilyen projektív n -szögnél. Legyen P a sík egy olyan pontja, amely nem esik egyik alapegyenesre sem. A PF_k egyenes ekkor vagy σ_k -ba, vagy τ_k -ba esik. Utóbbi esetben PP_k -t P -ből a projektív n -szöghöz húzott érintőnek nevezzük. P -ből a projektív n -szöghöz húzható érintők számának, mint P függvényének maximumát, illetve minimumát a a projektív n -szög o_s osztályszámának, illetve o_i osztályindexé-

¹ V. ö. pl. M. BRÜCKNER, Vielecke und Vielfache (Leipzig, 1900), 2. o.

nek, az $o_s - o_i = h$ különbséget pedig a projektív n -szög osztályhiányának fogjuk nevezni.

Ezeket a fogalmakat édesapám egy új dolgozatában ² vezette be. Ez a dolgozat, melynek egyes eredményeire hivatkozni fogunk, adta jelen vizsgálatainkhoz is az indítékot.

Dolgozatunkban elsősorban azt fogjuk vizsgálni, hogy az ugyanazon alap- n -szöghöz tartozó projektív sokszögek osztályhiányai milyen határok közt mozoghatnak. A dolgozat végén eredményeinket a duális fogalmazásban is megadjuk.

1. §. Szimbolumok rendelése az alaptartományokhoz, az alapsokszögek osztályozása.

Nyilvánvaló, hogy ha P és Q ugyanabba a T alaptartományba tartoznak, akkor bármely k -ra a PP_k és QP_k egyenesek közül vagy mindkettő érintője a projektív sokszögnek, vagy egyik sem. Ennélfogva T -hez egyértelműen hozzárendelhetünk egy $(x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T))$ szimbolumot a következő előírással: vegyünk T -ből egy P pontot, $x_k(T)$ legyen egyenlő eggyel, vagy nullával, a szerint, hogy PP_k érintője-e a projektív sokszögnek, vagy sem. A T minden egyes pontjából e szerint $\sum_k x_k(T) = t(T)$ darab érintő húzható.

Ha a T -ből a $P_i P_{i+1}$ alapegyenesnek a P_i és P_{i+1} szög-ponttól különböző pontban való átlépésével a T' alaptartományba jutunk, akkor, mint könnyen látható,

$$\begin{aligned} x_k(T') &= x_k(T), \text{ ha } k \text{ különbözik } i\text{-től és } i+1\text{-től,} \\ x_k(T') &= 1 - x_k(T), \text{ ha } k \text{ egyenlő } i\text{-vel, vagy } i+1\text{-gyel.} \end{aligned}$$

Látható, hogy $t(T')$ vagy egyenlő $t(T)$ -vel, vagy tőle 2-vel különbözik.

Ha most T'' egy tetszőszerinti alaptartomány, akkor, mint-hogy T -ből T'' -be bizonyos alapegyenesek átlépésével eljuthatok, azért $t(T'')$ csak páros számmal különbözhet $t(T)$ -től s ha pl. $|t(T) - t(T'')| = 2m$ ($m > 1$), akkor T -ből T'' -be menet közben,

² SZÓKEFALVI NAGY GYULA, Síksokszögekről, különösen egyszerű síksokszögekről, Mat. és Term. Tud. Értesítő 57. (1938). 51—76. o.

amennyiben a szögpontokat elkerüljük, szükségképpen át kell haladnunk olyan T_1, T_2, \dots alaptartományokon, amelyekre

$$|t(T) - t(T_1)| = 2, |t(T) - t(T_2)| = 4, \dots, |t(T) - t(T_{m-1})| = 2(m-1).$$

Mintogy az alaptartományokra értelmezett $t(T)$ függvény maximuma, illetve minimuma nyilván megadja a szóban forgó projektív sokszöghöz tartozó o_s , illetve o_i számokat, azért az osztályhiány mindig páros szám (≥ 2).

Bár a továbbiakban nem fogunk rá hivatkozni, mégis megemlítjük azt a könnyen bebizonyítható tényt, hogy két különböző alaptartomány szimbolumai különbözők. Speciálisan tehát mindig legfeljebb egy olyan tartomány lehet, amelyre $t(T) = 0$.

A P_1, P_2, \dots, P_n szögpontokkal bíró π és a P'_1, P'_2, \dots, P'_n szögpontokkal bíró π' alap- n -szöget *azonos típusúnak* mondjuk, ha teljesül a következő feltétel: (bármely k -ra) a P_k -ban található két alapegyenes által meghatározott két szögtartomány és a P'_k -ben található két alapegyenes által meghatározott két szögtartomány úgy feleltethető meg egymásnak, hogy bármely két olyan π -hez, illetve π' -hez tartozó projektív n -szögnek, amelyeknek $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ illetve $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$ szögtere rendre egymásnak megfelelő szögtartomány, ugyanaz az o_s és o_i száma.

Nyilvánvaló, hogy *a síknak bármely önmagára való projektív leképezése az alapsokszögeket azonos típusú alapsokszögekbe viszi át.*

A P'_1, P'_2, \dots, P'_n szögpontokkal bíró π' alap- n -szöget akkor mondjuk a P_1, P_2, \dots, P_n szögpontokkal bíró π alap- n -szög *folytonos deformáltjának*, ha π szögpontjait olyan módon tudjuk a projektív síkon folytonosan átvinni π' megfelelő szögpontjaiba, hogy a szögpontokkal együtt mozgó alapegyenesek közül bármely három a mozgás közben is mindig közös pont nélkül marad. Ez a feltétel biztosítja azt, hogy a deformáció közben nem tűnnek el és nem lépnek fel alaptartományok, hanem π minden egyes T alaptartománya folytonos módon átmegy π' egy-egy jól meghatározott T' alaptartományába. A P_k szögponton átmenő két alapegyenes által meghatározott két szögtartomány átmegy folytonos módon a P'_k szögponton áthaladó két alapegyenes által meghatározott két szögtartományba. Nevez-

zük az egymásba átmenő szögtartományokat megfelelőknek. Ha a π' alap- n -szög a π alap- n -szögnek folytonos deformáltja, akkor π és π' azonos típusú. Tekintsük ugyanis a π -hez tartozó egyik projektív n -szöget, legyenek ennek szögterei: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. A rendre megfelelő $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$ szögtartományok mint szögterek meghatároznak egy π' -hez tartozó projektív n -szöget. Ha T a folytonos deformációval T' -be megy át, akkor $t(T)$, T -ből az előbbi projektív n -szöghöz húzható érintők száma, nyilván egyenlő $t'(T')$ -vel, T' -ből az utóbbi projektív n -szöghöz húzható érintők számával. Ennélfogva a t és t' függvények maximumai és minimumai ugyanazok: a két projektív n -szögnek ugyanaz az o_s és o_i száma.

2. §. Ugyanahhoz az alapsokszöghöz tartozó projektív sokszögek osztályhiányának minimuma.

Tekintsük az ugyanahhoz az alap- n -szöghöz tartozó projektív sokszögek osztályhiányainak minimumát. Ez a szám természetesen már csak az alapsokszögtől függ. Az összes lehetséges alap- n szögekhez tartozó ezen számok maximumát jelöljük h_n -nel.

$$\text{I. tétel. } h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = 2, \quad h_7 = h_8 = 4,$$

$$4 \leq h_n \leq \begin{cases} n-3 & \text{a többi páratlan } n\text{-re,} \\ n-4 & \text{a többi páros } n\text{-re.} \end{cases}$$

Bizonyítás.

$n = 3$. A minden projektív n -szögre nyilván érvényes $2 \leq h \leq n$ egyenlőtlenségből triviálisan következik, hogy $h_3 = 2$.

$n = 2m + 1$, ($m > 1$). Kimutatjuk, hogy ez esetben bármely alap- n -szöghöz tartozik olyan projektív n -szög, amelynek az osztályhiánya nem nagyobb $(n-3)$ -nál, azaz, hogy $h_n \leq n-3$. Minthogy másrészt mindig $h_n \geq 2$, azért $n = 5$ esetére ezzel már megkapjuk a $h_5 = 2$ egyenlőséget. Az $n \geq 7$ esetben érvényes $h_n \geq 4$ egyenlőtlenséget később fogjuk bebizonyítani. Ha tehát $n \geq 7$, akkor $4 \leq h_n \leq n-3$; ebből $n = 7$ esetére már következik a $h_7 = 4$ egyenlőség.

Tekintsünk egy tetszőszerinti alap- n -szöget. T_0 legyen az

egyik hozzátartozó alaptartomány. Válasszuk meg a σ_k szögtereket úgy, hogy $t(T_0) = 0$ legyen; ez nyilván mindig megtehető.

Két eset állhat ekkor elő: vagy van olyan T_{2m} alaptartomány, amelyre $t(T_{2m}) = 2m - n - 1$, vagy nincs.

Ha nincs, akkor az o_s osztályszám s ezzel együtt a h osztályhiány erre a projektív n -szögre máris legfeljebb $2m - 2 = n - 3$ lehet.

Ha van, akkor olyan alaptartomány, amelyre $t(T) = 2$ (röviden 2-érintős tartomány), legfeljebb $\binom{n}{2} - 1$ darab lehet. Ugyanis összesen $\binom{n}{2} + 1$ alaptartomány van, ezek közül azonban a T_0 0-érintős, a T_{2m} pedig 2-nél mindenestre több érintős. Rendeljük hozzá minden 2-érintős tartományhoz azt a két k_1, k_2 számot, ahányadik helyen áll az illető alaptartomány szimbólumában az egyes. Így minden 2-érintős alaptartományhoz hozzárendeltünk egy az 1, 2, 3, ..., n számokból alkotott kettős kombinációt. Minthogy az összes kettős kombinációk száma $\binom{n}{2}$, azaz több, mint ahány 2-érintős alaptartomány van, azért lesz egy olyan (j_1, j_2) kombináció, amelyet nem rendeltünk egy tartományhoz sem. Most térjünk át arra a projektív n -szögre, amely az előbbiből úgy áll elő, hogy a σ_{j_1} és σ_{j_2} szögtereket (és ezekkel együtt természetesen a τ_{j_1} és τ_{j_2} érintőtereket) a másik lehetőség szerint választjuk, a többi szögteret azonban meghagyjuk. Ekkor minden T alaptartomány szimbóluma is megváltozik, amennyiben $x_{j_1}(T)$ és $x_{j_2}(T)$ helyébe nyilván $\bar{x}_{j_1}(T) = 1 - x_{j_1}(T)$ és $\bar{x}_{j_2}(T) = 1 - x_{j_2}(T)$ lép, a többi indexre azonban $\bar{x}_k(T) = x_k(T)$. A (j_1, j_2) számpár kiválasztása biztosítja, hogy az eddig 2-érintős tartományok egyikéből sem lesz 0-érintős; az eddig 0-érintős tartományból viszont 2-érintős lesz. Minthogy az egyes tartományokból húzható érintők száma az eredeti projektív sokszögről az utóbbira való áttérés alkalmával legfeljebb kettővel változhat, azért az eddig 2-nél több érintős tartományokból sem válhat 0-érintős. Ennek a projektív n -szögnek az osztályindexe tehát legalább 2. Osztályhiánya ennél fogva legfeljebb $n - 2$, sőt, minthogy páros számnak kell lennie, azért legfeljebb $n - 3$ lehet, q. e. d.

$n = 4$. A tetszés szerint adott alapnégyszöghöz tartozó egyik alaptartomány legyen T_0 . A σ_k szögtereket válasszuk meg úgy, hogy T_0 szimboluma (1000) legyen, ez nyilván megtehető. Mint-hogy a $t(T)$ függvény csak a 0 és 4 közt levő értékeket vehet fel, még pedig olyanokat, amelyek a $t(T_0)$ -tól legfeljebb páros számban különböznek, azért $t(T)$ csak 1-gyel vagy 3-mal lehet egyenlő. Azaz erre a projektív négyszögre $h=2$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $h_4=2$.

$n = 6$. Legyen adva egy tetszésszerű alaphatszög. Kimutatjuk, hogy van hozzá tartozó 2 osztályhiánnyal bíró projektív hatszög. Ezzel be lesz bizonyítva a $h_6=2$ egyenlőség.

Legyenek a szögpontok P_1, P_2, \dots, P_6 . A P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 alapegyeneseket páratlan, a P_2P_3, P_4P_5, P_6P_1 alapegyeneseket pedig páros alapegyeneseknek fogjuk nevezni. A páratlan alapegyenesek a projektív síkot négy háromszögű tartományra bontják, minden páros alapegyenes ezek közül háromba lép be. Kell tehát lennie e tartományok közül legalább egynek, amelybe mindhárom páros alapegyenes belép, legyen ez Δ .

Tegyük fel, hogy van olyan Δ -ban fekvő \overline{PQ} egyenes szakasz, amely mindhárom páros alapegyenest metszi. Ez az eset áll fenn akkor, ha Δ -nak van egy olyan oldala, amelyet mindhárom páros alapegyenes metsz (csak egy olyan szakaszt kell tekintenünk, amely elég «közel» fekszik Δ illető oldalához). Ez az eset áll fenn nyilván akkor is, ha bár Δ -nak nincs ilyen oldala (ekkor Δ minden oldalát két-két páros alapegyenes metszi), de van a páros alapegyenesek közül legalább kettő, amelyik metszéspontja Δ -ba esik.

Tekintsük a projektív síknak az összes alapegyenesek által való felbontását. A P pont fekszik a T_P , a Q pont a T_Q alaptartományban. Válasszuk azt az alaphatszögünkhöz tartozó projektív hatszöget, amelyre nézve $t(T_P) = 0$. Ekkor $t(T_Q) = 6$, hiszen azalatt, míg a T_P -ből a páros alapegyenesek átlépésével T_Q -ba jutunk, a T_P szimbolumának minden helyén beáll egy változás. Ennélfogva 2- és 4-érintős alaptartomány összesen legfeljebb $\left[\binom{6}{2} + 1 \right] - 2 = \binom{6}{2} - 1$ darab lehetséges. Rendeljük minden 2-érintős tartományhoz hozzá azt a két számot, ahány-

dik helyeken állnak a szimbolumában az egyesek; minden 4-érintős tartományhoz azt a két számot, ahányadik helyeken állnak a szimbolumában a nullák. Az összesen legfeljebb $\binom{6}{2} = 15$ darab 2- és 4-érintős alaptartományhoz nem rendelhettem hozzá az 1, 2, ..., 6 számokból alkotható összes kettős kombinációkat. Legalább egy kombináció, pl. a (j_1, j_2) kimarad.

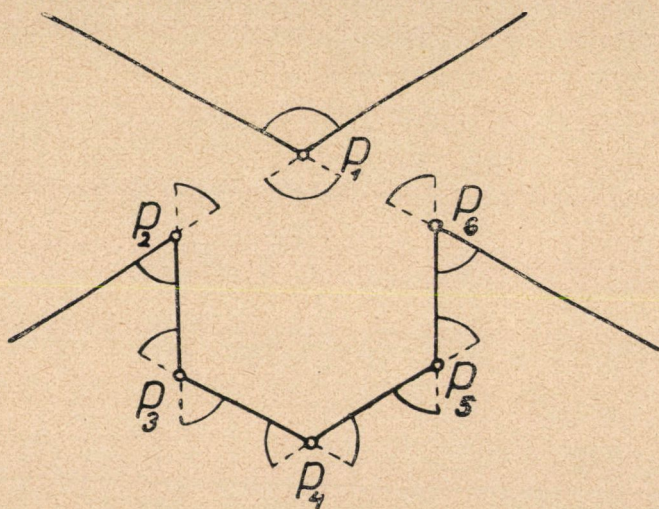
Változtassuk meg most σ_{j_1} és σ_{j_2} értelmezését az ellenkezőjére. Az így előálló új projektív hatszögre vonatkozólag csak 2- és 4-érintős tartományok lesznek. Az eddigi 0-érintős tartományból ugyanis nyilván 2-érintős, az eddigi 6-érintős tartományból pedig 4-érintős lesz; a (j_1, j_2) kombináció kiválasztása pedig biztosítja, hogy egy eddigi 2-érintős tartományból csak 2- vagy 4-érintős, egy eddigi 4-érintősből ugyancsak 2- vagy 4-érintős tartomány lehet. Erre a projektív hatszögre tehát valóban $h = 2, 4$ e. d.

Hátra van még annak az esetnek a tekintetbe vétele, amikor \mathcal{J} -ban nincs fenti tulajdonságú egyenes szakasz. Ez csak akkor fordulhat elő, ha \mathcal{J} minden oldalát két-két páros alapegyenes metszi s bármely két páros alapegyenesnek nincs \mathcal{J} -ban metszéspontja. A síknak az összes alapegyenesek által való felbontásában fellep ekkor tehát egy T_0 hatszögű alaptartomány (\mathcal{J} egy rész-tartománya), amelynek oldalai felváltva a páros és páratlan alapegyenesek bizonyos szakaszai. Jelöljük e_1 -gyel azt a páros alapegyenest, amelyik \mathcal{J} -nak a P_1P_2 és P_3P_4 egyenesre eső két oldalát találja; e_2 -vel azt a páros alapegyenest, amelyik \mathcal{J} -nak a P_3P_4 és P_5P_6 egyenesekre eső oldalait találja; végül legyen e_3 a harmadik páros alapegyenes. A következő hat lehetőség van:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
e_1 :	P_2P_3	P_2P_3	P_4P_5	P_4P_5	P_6P_1	P_6P_1
e_2 :	P_4P_5	P_6P_1	P_2P_3	P_6P_1	P_2P_3	P_4P_5
e_3 :	P_6P_1	P_4P_5	P_6P_1	P_2P_3	P_4P_5	P_2P_3

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy alkalmasan választott projektív leképezések, valamint folytonos deformációk (lásd 1. §) által (melyek azonos típusú alapsokszögekre vezetnek s így az alapsokszögekhez tartozó projektív sokszögek osztályhiányainak a

minimumát sem változtatják meg), az *a)* esetben az alaphatszög az 1. ábrán, a *b), c)* és *f)* esetben a 2. ábrán, a *d)* és *e)* esetben a 3. ábrán feltüntetett alaphatszögbe vihető át. Mindegyik esetben sikerül úgy megadni a σ_k szögtereket, hogy az osztályhiány 2 legyen (az ábrákon a τ_k érintőtereket jelöltük meg). Mindegyik ábrán megrajzoltunk a szögpontokat rendre összekötő egy olyan zárt törtvonalat, amely a projektív síkot két részre bontja, ezek egyikének minden egyes pontjából 3, másiká-



1. ábra.

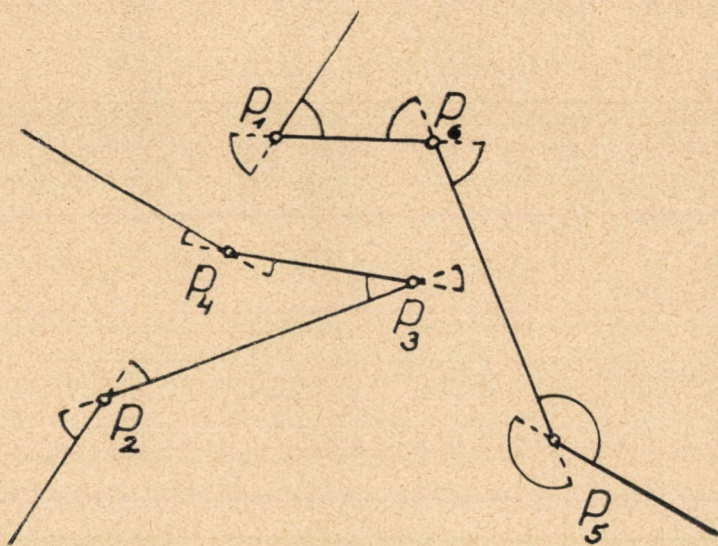
nak minden egyes pontjából 1 érintő húzható (e törtvonalakról bővebben a következő §-ban lesz szó).

Az I. tételnek a hatszögekre vonatkozó részét teljesen bebizonyítottuk.

$n = 2m$, ($m \geq 4$). Kimutatjuk, hogy ebben az esetben bármely alap- n -szöghöz tartozik egy olyan projektív n -szög, amelyre $h \leq n - 4$, azaz, hogy $h_n \leq n - 4$. A következő §-ban minden 6-nál nagyobb n -re bebizonyítandó $h_n \geq 4$ egyenlőtlenséggel együtt ez tehát azt adja, hogy $4 \leq h_n \leq n - 4$; ebből $n = 8$ esetére már következik a $h_8 = 4$ egyenlőség.

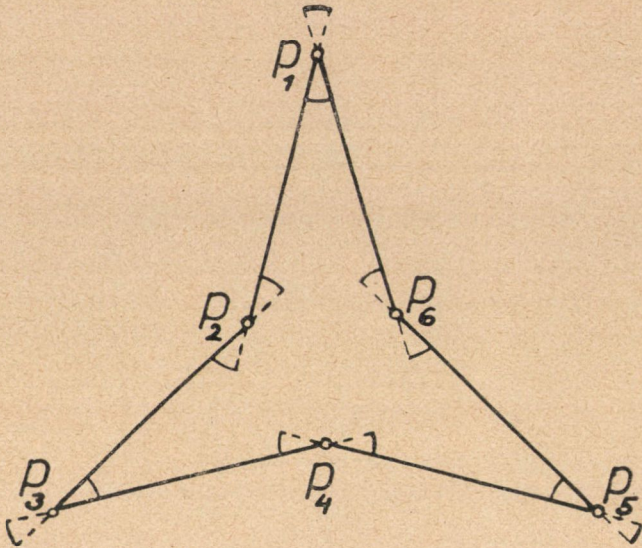
Tekintsünk egy tetszés szerinti alap- $2m$ -szöget. T_0 legyen

az egyik hozzátartozó alaptartomány. Válasszuk azt az alap- $2m$ -szögünkhöz tartozó projektív sokszöget, amelyre vonatkozólag $t(T_0) = 0$. Két eset lehet: vagy van legalább egy erre a projektív sokszögre vonatkozóan $2m-2$ -érintős tartomány vagy nincs. Az utóbbi esetben természetesen $2m$ -érintős tartomány sem lehet (lásd 1. §) s így ekkor h máris legfeljebb $2m-4 = n-4$. Az előbbi esetben viszont, hasonló ok miatt, kell lennie legalább egy $2m-4$ -érintős tartománynak is, amely minthogy $2m-4 \geq 4$,



2. ábra.

nem 2-érintős. A 2- és $2m-2$ -érintős tartományok együttes száma tehát legfeljebb $\left[\binom{n}{2} + 1 \right] - 2 = \binom{n}{2} - 1$ lehet. Úgy, mint a hatszögek egyik kategóriájának tárgyalásakor a 2- és 4-érintős tartományokhoz tettük, most a 2- és $2m-2$ -érintős tartományokhoz rendelünk az $1, 2, 3, \dots, n$ számokból alkotott bizonyos kettős kombinációkat. Legalább egy kombináció, pl. a (j_1, j_2) feltétlenül kimarad. A σ_{j_1} és σ_{j_2} értelmezésének megváltoztatásával áttérve egy másik projektív n -szögre, erre vonat-



3. ábra.

kozóan már nem lesznek sem 0-, sem $2m$ -érintős tartományok, azaz e projektív n -szögre h tényleg legfeljebb $n-4$ lehet.

Az I. tétel teljes bebizonyításához ezek után már csak a $h_n \geq 4$ ($n \geq 7$) egyenlőtlenség kimutatása szükséges.

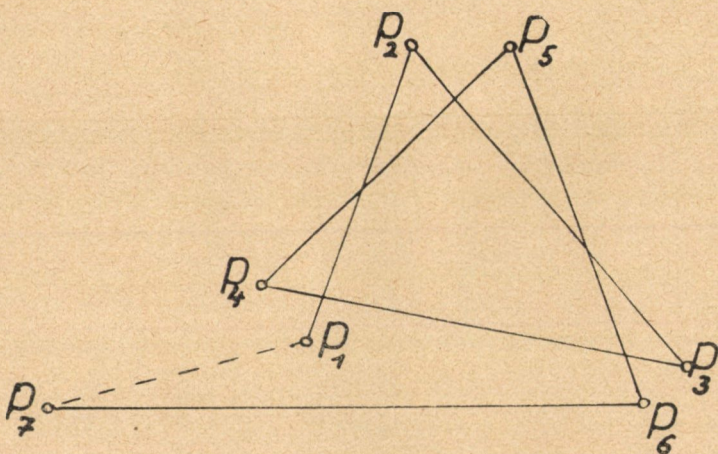
3. §. A projektív sokszögekhez rendelt zárt törtvonalak.

Tekintsük a $P_1P_2\dots P_n$ alap- n -szöghöz tartozó egyik projektív sokszöget. A P_kP_{k+1} alapegyenest a P_k és P_{k+1} pont két szakaszra bontja. Könnyen belátható, hogy e két szakasz közül egyik és csak egyik rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy, ha egy mozgópont átlép rajta, akkor a belőle húzható érintők száma (kettővel) megváltozik. Nevezzük ezt s_k^{k+1} szakasznak. Az $s_1^2, s_2^3, \dots, s_{n-1}^n, s_n^1$ szakasz egy olyan zárt S törtvonalat alkot, melynek a végtelen távoli egyenessel több metszéspontja lehet. S párosrendű, azaz bármely egyenessel, amely nem halad át a P_i szögpontok egyikén sem, párosszámú közös pontja van.³

³ V. ö. a 2) alatt idézett dolgozat 10. pontjával.

Ennélfogva S a projektív síkot bizonyos mezőkre bontja. Ugyanabban a mezőben fekvő bármely két pontból természetesen ugyanannyi érintő húzható.

Ha a szóban forgó projektív sokszög osztályhiánya 2, akkor S egyszerű. Ha ugyanis metszené önmagát, akkor ennek a kettőspontnak alkalmas irányban való átlépésével a projektív sokszögünkhöz húzható érintők száma négygyel változna. Minthogy az I. tétel már bebizonyított része szerint $h_n = 2$, ha $n = 3, 4, 5, 6$,



4. ábra.

azért a következő tétel első ($3 \leq n \leq 6$ esetre vonatkozó) állítását máris beigazoltuk.

II. Tétel. Legyen adva egy $P_1P_2\dots P_n$ alap- n -szög, kössük össze a ciklikusan egymásután jövő szögpontokat egy-egy egyenes szakasszal, tetszésünktől függ, hogy melyikkel. Így tehát összesen 2^n különböző zárt törtvonalat nyerhetünk. Ha $3 \leq n \leq 6$, akkor e zárt törtvonalak közt mindig akad olyan, amely egyszerű és páros rendű. De ha $n \geq 7$, akkor van olyan alap- n -szög, amelyhez tartozó zárt törtvonalak egyike sem egyszerű.

A tételben foglalt második ($n \geq 7$ esetre vonatkozó) állításból nyilván következik, hogy, ha $n \geq 7$, akkor $h_n \geq 4$; azaz

ennek az állításnak az igazolásával az I. tétel bizonyítása is teljes lesz.

Tekintsünk egy olyan alap- n -szöget ($n \geq 7$), amelynek első 7 szögpontja a 4. ábrán feltüntetett helyzetű, a többi szögpont helyzete tetszés szerinti. Próbáljuk a szögpontokat egy egyszerű törtvonallal összekötni. Kétféleképpen kezdhetünk neki:

a) P_1 -et és P_2 -t a véges szakasszal kötjük össze. Ekkor P_3 -at és P_4 -et, valamint P_4 -et és P_5 -öt a végtelen szakaszokkal kell összekötnünk, különben máris fellépne metszéspont. E két végtelen szakasz közül az első a P_6 -ot és P_7 -et összekötő végtelen, a második a P_6 -ot és P_7 -et összekötő véges szakaszt metszi. Bármiképpen kötjük tehát össze P_6 -ot P_7 -tel, fellép metszéspont.

b) P_1 -et és P_2 -t a végtelen szakasszal kötjük össze. Ekkor P_5 -öt és P_6 -ot a véges szakasszal kell összekötnünk, különben máris fellépne metszéspont. Ez viszont ugyanígy azt vonja maga után, hogy P_2 -t és P_3 -at a végtelen szakasszal kell összekötnünk, ebből meg az következik, hogy P_6 -ot és P_7 -et a véges szakasszal kell összekötnünk. Utóbbinak azonban a P_1 -et és P_2 -t összekötő végtelen szakasszal van metszéspontja.

4. §. Ugyanahhoz az alapsokszöghöz tartozó projektív sokszögek osztályhiányainak a maximuma.

Tekintsük az ugyanahhoz az alap- n -szöghöz tartozó projektív n -szögek osztályhiányainak a maximumát. Az összes alap- n -szögekhez így kapott számok minimumát jelöljük $h^{(n)}$ -nel.

III. tétel. $h^{(3)} = 2$; minden háromnál nagyobb n -re: $h^{(n)} = 4$.

A $h^{(3)} = 2$ egyenlőség triviális.

Legyen $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ egy tetszés szerinti alap- n -szög, $n \geq 4$. A P_1P_2 és P_3P_4 alapegyenesek metszéspontján fektessünk át egy olyan kis Q_1Q_2 egyenes szakaszt, hogy ennek az alapegyenesekkel több metszéspontja ne legyen. Ha a σ_k szögtereket úgy adjuk meg, hogy Q_1 -ből egy érintő se legyen húzható, akkor, minthogy Q_1 -ből Q_2 -be a P_1P_2 és P_3P_4 alapegyenesek átlépésével juthatunk el, Q_2 -ből a sokszöghöz négy érintő húzható ($P_1,$

P_2, P_3, P_4 érintési pontokkal). Az osztályhiány az így választott projektív n -szögre tehát legalább 4. Azaz $h^{(n)} \geq 4$.

Annak kimutatására, hogy $h^{(n)} = 4$, most már elég, ha megadunk minden n -hez ($n \geq 4$) egy olyan alap- n -szöget, amelyhez tartozó projektív sokszögek osztályhiányainak a maximuma pontosan 4. Ilyen minden konvex alap- n -szög. Konvex egy P_1, P_2, \dots, P_n alap- n -szög, ha a hozzátartozó alaptartományok közt van egy olyan, T_0 , amelynek minden P_k szögpont a határán fekszik. (Ekkor a T_0 oldalai rendre a $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ alapegyenesek szakaszai.) Válasszuk azt a projektív sokszöget, amelyre $t(T_0) = 0$. Legyen T_k az az alaptartomány, amelybe T_0 -ból P_kP_{k+1} átlépésével jutunk. T_k szimbólumában a k -edik és $k+1$ -edik helyen már egyes áll. Tehát a jelen esetben az s_k^{k+1} szakasz (lásd az előbbi §-t) éppen a T_0 -nak a P_kP_{k+1} egyenesen fekvő oldala. Ennélfogva ekkor a T_0 határvonala lesz az S zárt törtvonal. Az összes T_0 -tól különböző T alaptartományokra tehát $t(T) = 2$. Most tekintsünk egy az alap- n -szögünkhöz tartozó tetszőleges projektív sokszöget, pl. azt, amelyet az eddig tekintetből úgy kapunk, hogy megváltoztatjuk a $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \dots, \sigma_{k_m}$ értelmezését. Ekkor T_0 -ból m -érintős tartomány lesz; egy T_0 -tól különböző T -ből pedig $m-2$, ill. m , ill. $m+2$ -érintős tartomány lesz, a szerint, hogy T eddigi szimbólumában mindkét egyes, illetve csak egyik egyes, illetve egyik egyes sem esett a k_1 -edik, k_2 -edik, \dots , k_m -edik helyek valamelyikére. Az osztályhiány tényleg nem lehet 4-nél nagyobb, (ha $m = 2$, akkor pontosan egyenlő 4-gyel).

Mint láttuk, konvex alapsokszöghöz tartozó projektív sokszögek közt mindig van 2 osztályszámú. Az iménti eredményünket általánosítja a következő

IV. tétel. Ha egy adott alapsokszöghöz tartozó projektív sokszögek osztályszámainak a minimumát $\min o_s$ -sel jelöljük, akkor e projektív sokszögek osztályhiányainak a maximuma nem lehet $2 \min o_s$ -nél nagyobb.

Induljunk ki ugyanis abból a projektív sokszögből, amelynek az osztályszáma egyenlő $\min o_s$ -sel. Most változtassuk meg m darab σ_k szögtérnek az értelmezését. Az új projektív sokszög osztályszáma természetesen legfeljebb $\min o_s + m$ lehet. Kömlyü

azt is belátni, hogy, ha a kiindulási projektív sokszög osztály-indexe \bar{o}_i volt, akkor az újé legalább is $|\bar{o}_i - m|$. Az új projektív sokszög osztályhiánya ennél fogva legfeljebb $\min o_s + m - |\bar{o}_i - m|$. Ez a kifejezés azonban, tekintetbe véve, hogy $\bar{o}_i < \min o_s$, sohasem lehet 2 $\min o_s$ -nél nagyobb.

5. §. Duális tételek.

A projektív síkon felvett n darab ($n \geq 3$) «oldalegyenes»: e_1, e_2, \dots, e_n , egy «alap- n -oldalt» alkot. A ciklikus sorrendben egymás után álló bármely két e_k, e_{k+1} egyenes metszéspontját alappontnak fogjuk hívni. Mindig feltesszük, hogy bármely három alappont nem fekszik ugyanazon az egyenesen. Az e_k -n levő két alappont e_k -t két szakaszra bontja, nevezzük ezek egyikét s_k oldalnak. Az így tetszésünk szerint kiválasztott s_1, s_2, \dots, s_n oldalak egy zárt törtvonalat határoznak meg, melyet az alap- n -oldalhoz tartozó egy «projektív n -oldalnak» fogunk nevezni. Ugyanahhoz az alap- n -oldalhoz tehát 2^n különböző projektív n -oldal tartozik. Egy projektív sokoldal r_s rendszámán, illetve r_i indexén az alappontokon át nem haladó egyenesekkel való metszéspontjainak maximális, illetve minimális számát értjük, a $H = r_s - r_i$ különbség a rendhiány, H mindig páros és ≥ 2 .

Tekintsük az ugyanahhoz az alap- n -oldalhoz tartozó projektív n -oldalak rendhiányainak a minimumát. Az összes lehetséges alap- n -oldalokhoz így kapott számok maximuma legyen H_n . Az I. tétel duálisaként kapjuk:

$$V. \text{ tétel. } H_3 = H_4 = H_5 = H_6 = 2, \quad H_7 = H_8 = 4,$$

$$4 \leq H_n \leq \begin{cases} n - 3 & \text{a többi páratlan } n\text{-re,} \\ n - 4 & \text{a többi páros } n\text{-re.} \end{cases}$$

A II. tétel duálisa:

VI. tétel. Egy alap- n -oldal két (a ciklikus sorrendben) egymásután jövő oldalegyenese a síkot két szögtartományra bontja, ezek közül válasszuk ki az egyiket tetszőlegesen, s nevezzük szögtérnek. E szögterek egy projektív n -szöget határoznak

meg.⁴ Így tehát összesen 2^n darab különböző projektív n -szöget kaphatunk. Ha $3 \leq n \leq 6$, akkor e projektív n -szögek közt mindig akad olyan, amelynek nincs kettősérintője és páros osztályszámú. De ha $n \geq 7$, akkor van olyan alap- n -oldal, amelyhez tartozó projektív n -szögek mindegyikének van kettősérintője.

Tekintsük az ugyanahhoz az alap- n -oldalhoz tartozó projektív n -oldalak rendhiányainak a maximumát. Az összes lehetséges alap- n -oldalakhoz így nyert számok minimumát jelöljük $H^{(n)}$ -nel. A III. duálisa most már:

VII. tétel. $H^{(3)} = 2$; minden 3-nál nagyobb n -re: $H^{(n)} = 4$.

Végül:

VIII. tétel. Ha egy adott alapsokoldalhoz tartozó projektív sokoldalak rendszámainak a minimumát $\min r_s$ -sel jelöljük, akkor e projektív sokoldalak rendhiányainak a maximuma nem lehet $2 \min r_s$ -nél nagyobb.

⁴ E projektív sokszög alapegyenesei esetleg nem teljesítik azt az eddig mindig megkívánt feltételt, hogy bármely három alapegyenesnek nincs közös pontja. Ez a VI. tétel érvényességét természetesen nem érinti.

ÜBER PROJEKTIVE VIELECKE UND VIELSEITEN.

Von BÉLA v. SZ. NAGY in Szeged.

n Punkte: P_1, P_2, \dots, P_n in der projektiven Ebene bilden ein *Grund- n -Eck*; es wird vorausgesetzt, dass keine drei der *Grundgeraden* $P_k P_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $P_{n+1} \equiv P_1$) einen gemeinsamen Punkt haben. Die durch P_k gehenden zwei Grundgeraden bestimmen zwei Winkelräume, deren einer mit σ_k , der andere mit τ_k bezeichnet wird. Die n Winkelräume, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ bestimmen ein *projektives n -Eck*. (Zu einem Grund- n -Eck gehören also 2^n verschiedene projektive n -Ecke.) Liegt der Punkt P auf keiner Grundgeraden, so fällt die Gerade PP_k entweder in σ_k oder in τ_k . Im zweiten Falle nennen wir sie eine Tangente an das projektive n -Eck. So kann man Klassenzahl und Klassenindex für das projektive n -Eck definieren. Ihre Differenz h ist der Klassendefekt. Die vorstehende Note beschäftigt sich hauptsächlich mit der Frage nach den Grenzen, zwischen denen die Klassendefekte der zum gleichen Grund- n -Eck gehörigen 2^n projektiven n -Ecke variieren können.

Im letzten § werden duale Sätze für die dualen Gebilde (projektive n -Seiten) ausgesprochen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

EGY BOHR-FÉLE TÉTELÉRŐL.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLA-tól és STRAUSZ ANTAL-tól.¹

I. A tétel egy új bizonyítása.

1. HARALD BOHR-tól származik a következő tétel:²

Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x), \quad \lambda_k \geq 1 > 0.$$

Az $f(x)$ állandó tag nélküli

$$F(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} (a_k \sin \lambda_k x - b_k \cos \lambda_k x)$$

integrálfüggvénye akkor a következő egyenlőtlenségnek tesz eleget:

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2.1} \cdot \max |f(x)|.$$

A jobboldalon álló $\frac{\pi}{2.1}$ állandó nem pontosítható.

A tételnek BOHR által adott eredeti bizonyítása a komplex változós függvénytan és potenciálelmélet segédeszközeit használja fel. J. FAVARD adott később a tételre egy teljesen valós úton

¹ Az első szerzőtől az 1, 3, 4, a második szerzőtől a 2 pont származik.

² H. BOHR, Un théorème général sur l'intégration d'un polynôme trigonométrique, *Comptes Rendus Paris*, 200 (1935), 1276—1277. old.; Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 43 (1935), 273—288. old.

haladó bizonyítást.³ Ennek a bizonyításnak viszont az a hátránya, hogy a tételt nem egyenesen a fenti általános esetre bizonyítja be, hanem először csak a periodikus trigonometrikus polinomokra, s csak azután, további meggondolásokkal jut el innen az általános nemperiodikus esethez.

A tételnek alább adandó bizonyítása szintén valós úton halad és megvan az az előnye, hogy közvetlenül szolgáltatja a tételt a nemperiodikus polinomok esetére is, sőt a tétel általánosítását is lehetővé teszi.

Nyilvánvaló, hogy a bizonyításban elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $A=1$ (hiszen az általános eset erre az x változó egy lineáris helyettesítésével mindig visszavezethető).

Kényelmesebben való kezelhetősége miatt írjuk $f(x)$ -et a következő alakba:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2N} c_n e^{i\mu_n x}, \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots) = (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots),$$

ekkor

$$F(x) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{i\mu_n} c_n e^{i\mu_n x}.$$

Az $F(x)$ e kifejezésében szereplő $\frac{1}{\mu_n}$ szorzókat FOURIER-féle integrálok segítségével fogjuk előállítani. Tekintsük e végből az

$$r(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}, & \text{ha } |u| \geq 1, \\ \frac{1}{u} - \frac{\pi}{2} \cotg \frac{\pi u}{2}, & \text{ha } |u| < 1, \end{cases} \quad (1)$$

minden valós u -ra folytonos páratlan függvényt.

Mint hogy $r(u)$ az $(1, \infty)$ féltengelyen monoton s mint hogy

³ J. FAVARD, Sur une propriété extrême de l'intégrale d'une fonction trigonométrique, *Comptes Rendus Paris*, 202 (1936), 273—276. old.; Application de la formule sommatoire d'EULER à la démonstration de quelques propriétés extrêmes des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, *Matematisk Tidskrift*, B (1936), 81—94. old.

$r(u)/u$ ezen a féltengelyen nyilván abszolút integrálható, azért alkalmazhatjuk a FOURIER-féle integráltételt, amely szerint

$$r(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ua \left(\int_0^{\infty} r(v) \sin va \, dv \right) da$$

minden olyan u helyen, amelynek környezetében az $r(u)$ függvény korlátos változású.⁴ Nyilván ilyen minden a 0-tól különböző u hely. (Mint hogy $r(0)=0$, azért ez a képlet $u=0$ esetben is érvényes.) Speciálisan, ha $|u| \geq 1$, akkor

$$r(u) = \frac{1}{u} = 2 \int_0^{\infty} \sin ua \cdot \varphi(a) da = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iua} \varphi(a) da; \quad (2)$$

itt $\varphi(a)$ -val jelöltük röviden a nyilvánvalóan páratlan

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r(v) \sin va \, dv$$

függvényt.

Mint hogy $|\mu_n| \geq 1$, azért (2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{2N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu_n a} \varphi(a) da \right) c_n e^{i\mu_n x} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{2N} c_n e^{i\mu_n(x-a)} \right] \varphi(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \varphi(a) da, \end{aligned}$$

vagy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy. \quad (3)$$

Ez az $F(x)$ -et előállító integrál *abszolút konvergens*. Kimutatjuk ugyanis, hogy a $\varphi(a)$ függvénynek a 0 helyen véges ugrása van, máshol folytonos és ha $|a| \rightarrow \infty$, akkor $\varphi(a) = O\left(\frac{1}{a^2}\right)$. (Ezekből az is következik, hogy van egy olyan A szám, hogy $|\varphi(a)|$ minden a -ra az integrálható $A(1+a^2)^{-1}$ függvény alatt marad.) Bontsuk fel a $\pi\varphi(a)$ -t megadó integrált a következőképpen

$$\pi\varphi(a) = \int_0^1 \sin av \cdot r(v) dv + \int_1^{\infty} \frac{\sin av}{v} dv. \quad (4)$$

⁴ V. ö. S. BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integrale (Leipzig, 1932), 39—41. old. Az integrálok Cauchy-féle improprius integrálok. — BOCHNER könyvét a következőkben «B»-vel idézzük.

Az első tag az α -nak nyilván mindenütt folytonos függvénye; a második tag

$$\operatorname{sgn} \alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

alakban is felírható, tehát szintén mindenütt folytonos, kivéve az $\alpha=0$ helyet, ahol véges (π -vel egyenlő) ugrása van. Kétszer parciálisan integrálva a (4) jobboldalán álló integrálokat, s tekintetbe véve, hogy $r(u)=0$, $r(1)=1$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi \varphi(\alpha) = & -\frac{\sin \alpha}{\alpha^2} r'(1-0) + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \sin \alpha v \cdot r''(v) dv - \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} - \\ & - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha v}{v^3} dv, \end{aligned}$$

azaz tényleg $\varphi(\alpha) = O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

Tekintsük most az $s(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ függvényt. $S(x)$ legyen $s(x)$ -nek az az integrálfüggvénye, amelyre $S(0) = -\frac{\pi}{2}$. $S(x)$ -nek a $(0, 2\pi)$ számközön vett integrálja nyilván 0-val egyenlő. Az $s(x)$, illetőleg $S(x)$ FOURIER-féle sorának FEJÉR-féle n -edik szám-tani közepét jelöljük $s_n(x)$ -szel, illetőleg $S_n(x)$ -szel. Az $s_n(x)$ nyilván olyan függvény, mint amilyenekről eddig szó volt s az $s_n(x)$ konstans tag nélküli integrálfüggvénye éppen $S_n(x)$. Alkalmazhatjuk tehát a (3) képletet (az $x=0$ helyen):

$$S_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-y) s_n(y) dy.$$

Növeljük n -et minden határon túl. $S_n(0)$ határértéke $S(0)$, azaz $-\frac{\pi}{2}$. Minthogy $|s_n(y)| \leq \max |s(y)| = 1$, s minthogy $|\varphi(-y)|$ integrálható, azért a határátmenet jobboldalt az integráljel alatt végezhető el. Ennélfogva

$$-\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-y) \cdot \operatorname{sgn}(\sin y) dy,$$

vagy, felhasználva azt, hogy $\varphi(y)$ páratlan,

$$\frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{\infty} \varphi(y) \cdot \operatorname{sgn}(\sin y) dy. \tag{5}$$

A következő pontban látni fogjuk, hogy $\varphi(y)$ előjele a $\sin y$ előjelével egyezik. Ebből és (5)-ből következik tehát, hogy

$$\frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{\infty} |\varphi(y)| dy. \tag{6}$$

(3)-ból és (6)-ból nyerjük végre:

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x-y)| \cdot |f(y)| dy \leq \max |f| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x-y)| dy = \\ &= 2 \max |f| \cdot \int_0^{\infty} |\varphi(y)| dy = \frac{\pi}{2} \max |f|. \end{aligned}$$

Ezzel kimutattuk a BOHR-féle tételben szereplő egyenlőtlenséget.⁵ Hogy a $\frac{\pi}{2}$ állandó a legpontosabb, az onnan következik, hogy bár $|s_n(x)| \leq 1$, mégis elég nagy n -re $|S_n(0)|$ tetszőszerint közel jut $\frac{\pi}{2}$ -hez.

2. Bebizonyítjuk, hogy a

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \alpha v \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{\pi}{2} \cotg \frac{\pi v}{2} \right) dv + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin \alpha v}{v} dv$$

függvény előjele a $\sin \alpha$ előjelével egyezik. Páratlan függvényről lévén szó, elég ezt pozitív α -kra bizonyítani. Nyilvánvaló, hogy

⁵ Bizonyításunkból az is kiderül, hogy egyenlőség sohasem állhat fenn, azaz

$$|F(x)| < \frac{\pi}{2} \cdot \max |f(x)|.$$

Ha ugyanis $f(x) = c \cdot e^{i\mu x}$ ($|\mu| \geq 1$), akkor $|F(x)| = |c| |\mu| \leq |f(x)| < \frac{\pi}{2} \cdot \max |f(x)|$; más $f(x)$ esetében pedig van olyan számköz, amelyen $|f(x)| < \max |f|$, ennél fogva fent a szövegben a második \leq jel a $<$ jellel helyettesíthető.

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin av}{v} dv - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin av \cdot \cotg \frac{\pi v}{2} dv = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin av \cdot \cotg \frac{\pi v}{2} dv.\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}2\varphi(a) - 2\varphi(a+\pi) &= \int_0^1 (\sin(a+\pi)v - \sin av) \cotg \frac{\pi v}{2} dv = \\ &= 2 \int_0^1 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) v \cdot \sin \frac{\pi v}{2} \cotg \frac{\pi v}{2} dv = \\ &= 2 \int_0^1 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) v \cdot \cos \frac{\pi v}{2} dv = \\ &= \int_0^1 (\cos av + \cos(a+\pi)v) dv = \\ &= \frac{\sin a}{a} + \frac{\sin(a+\pi)}{a+\pi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a) - \varphi(a+2\pi) &= (\varphi(a) - \varphi(a+\pi)) + (\varphi(a+\pi) - \varphi(a+2\pi)) = \\ &= \frac{\sin a}{2a} + \frac{\sin(a+\pi)}{a+\pi} + \frac{\sin(a+2\pi)}{2(a+2\pi)} = \\ &= \frac{\sin a}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a+\pi} + \frac{1}{a+2\pi} \right) = \sin a \cdot \frac{\pi^2}{a(a+\pi)(a+2\pi)}.\end{aligned}$$

Már most, tekintettel arra, hogy $\varphi(a) \rightarrow 0$, ha $a \rightarrow \infty$, kapjuk a $\varphi(a)$ következő sorfejtését:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(a+2k\pi) - \varphi(a+2(k+1)\pi)) = \\ &= \sin a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^2}{(a+2k\pi)(a+2(k+1)\pi)(a+2(k+1)\pi)},\end{aligned}$$

ahonnan a $\varphi(a)$ előjelére vonatkozó állításunk nyilván következik.⁶

⁶ Ismeretes, hogy a FEJÉR-féle $\frac{1}{v} \left(\frac{\sin vt}{\sin t} \right)^2$ magfüggvénynek a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ számközön vett integrálközepe minden pozitív egész v -re 1-gyel

II. A Bohr-féle tétel általánosítása.

3. A BOHR-féle tételben szereplő $f(x)$ függvények, valamint állandó tag nélküli $F(x)$ integrálfüggvényeik a következő alakban is felírhatók:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dU_f(u), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dU_F(u), \quad (7)$$

ahol $U_f(u)$ és $U_F(u)$ a $(-A, A)$ számközön állandó, az egész számegeyenesen összesen is csak véges sok ugrási hellyel bíró, szakaszonként állandó függvények. $U_f(u)$ -ra érvényes a következő inverziós képlet:⁷

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(U_f(u_1+0) + U_f(u_1-0)) - \frac{1}{2}(U_f(u_2+0) + U_f(u_2-0)) = \\ & = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) \frac{e^{-iu_1x} - e^{-iu_2x}}{-ix} dx, \end{aligned}$$

tehát a jobboldalon álló integrál limesze minden a $(-A, A)$ számközbe eső (u_1, u_2) értékpárra 0-val egyenlő. (Ugyanez áll $f(x)$ helyett $F(x)$ -re is.)

Ez a képlet problémánk általánosításának lehetőségét rejti magában. A jobboldalon álló integrál ugyanis a tekintett $f(x)$ trigonometrikus polinomoknál jóval általánosabb függvények esetében is konvergál, ha $\omega \rightarrow \infty$; ha nem is a közönséges, hanem a négyzetintegrálra való konvergencia értelmében. (A négyzet-

egyenlő. Érdekes megjegyezni, hogy tetszésszerű pozitív valós ν -re ez az integrálközép (mint ez $t = \frac{\pi\nu}{2}$ helyettesítéssel és parciális integrálással könnyen ellenőrizhető), ilyen alakra hozható:

$$\int_0^1 \sin \nu\pi v \cdot \cotg \frac{\pi v}{2} dv,$$

azaz $(1-2\varphi(\nu\pi))$ -vel egyenlő. Ennélfogva pozitív ν -re:

$$\frac{2}{\nu\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \nu t}{\sin t} \right)^2 dt = 1 - \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+2k)(v+2k+1)(v+2k+2)}.$$

⁷ V. ö. «B», 66. old.

integrálra való határértéket jelöljük l. i. m. jellel, «limes in medio» rövidítéseként.)

Elég az $f(x)$ -től csupán azt kívánunk, hogy *korlátos* és *mérhető* legyen. Ekkor ugyanis a

$$W_f(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{e^{-iu_1x} - e^{-iu_2x}}{-ix} dx$$

integrál nyilván létezik (sőt az u_1 és u_2 folytonos függvénye),

$$V_f(u) = \text{l. i. m.}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_1^\omega + \int_{-\omega}^{-1} \right) \frac{f(x)}{-ix} e^{-iux} dx$$

létezését pedig a PLANCHEREL-féle tétel biztosítja,⁸ hiszen $\frac{f(x)}{-ix}$ a $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ számközökön nyilván négyzetesen integrálható. Ennélfogva valóban létezik bármely korlátos mérhető $f(x)$ -re

$$\begin{aligned} V_f(u_1, u_2) &= W_f(u_1, u_2) + V_f(u_1) - V_f(u_2) = \\ &= \text{l. i. m.}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) \frac{e^{-iu_1x} - e^{-iu_2x}}{-ix} dx \end{aligned}$$

is.⁹

Tekintsük azokat a korlátos és mérhető $f(x)$ függvényeket, amelyekre a $V_f(u_1, u_2)$ függvény az u_1, u_2 változóknak majdnem minden a $(-1, 1)$ számközbe eső értékére 0-val egyenlő. Ezekről a függvényekről, egy *ad hoc* kifejezéssel élve, azt mondjuk, hogy *spektrumuk nem nyúlik a $(-1, 1)$ számközbe*.

Az előbb mondottakból nyilván következik, hogy a BOHR-féle tételben szereplő $f(x)$ függvények, valamint állandó tag nélküli integrálfüggvényeik ilyen típusúak. Ennélfogva a következő tétel a BOHR-félét már magában foglalja:

⁸ A következőkben gyakran fogunk hivatkozni a négyzetesen integrálható függvények FOURIER-féle transzformáltjaira és «Faltung»-jaira vonatkozó PLANCHEREL- és PARSEVAL-féle tételekre. E tételek dolgában «B. 40—41. §-ára utalhatunk.

⁹ $V_f(u_1, u_2)$ természetesen csak *majdnem* minden u_1, u_2 értékre van meghatározva.

Legyen $f(x)$ tetszőszerinti olyan korlátos, mérhető függvény, amelynek a spektruma nem nyúlik be a $(-A, A)$ számközbe. Ekkor van az $f(x)$ -nek egy olyan $F(x)$ integrálfüggvénye, amelyre

$$|F'(x)| \leq \frac{\pi}{2A} \cdot \max |f(x)|$$

s amelynek a spektruma szintén nem nyúlik be a $(-A, A)$ számközbe. Az egyenlőtlenség jobboldalán álló állandó a lehető legpontosabb.¹⁰

Természetesen elég ezt a tételt is $A=1$ esetére bebizonyítani. A tétel utolsó állítását már 1-ben bebizonyítottuk. A tétel többi részét a következő pontban bizonyítjuk be.

4. Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy olyan korlátos, mérhető függvény, amelynek a spektruma nem nyúlik be a $(-1, 1)$ számközbe.

Legyen $0 < \varepsilon < 1$. A

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon(u) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\varepsilon} V_f\left(\frac{u+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{u-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) = \\ &= \text{l. i. m.}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) \frac{e^{-\frac{ix}{1+\varepsilon}} - e^{\frac{ix}{1+\varepsilon}}}{-2i\varepsilon x} e^{-\frac{iux}{1+\varepsilon}} dx = \\ &= \text{l. i. m.}_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} f((1+\varepsilon)t) \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t} e^{-iut} dt \end{aligned}$$

függvény majdnem minden u -ra értelmezve van és a $V_f(u_1, u_2)$ függvényre vonatkozó feltevésünkből következik, hogy $\sigma_\varepsilon(u)$ majdnem minden a $(-1, 1)$ számközbe eső u -ra 0 -val egyenlő. Mint látható, $\sigma_\varepsilon(u)$ az $f_\varepsilon(x) = f((1+\varepsilon)x) \frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}$, a $(-\infty, \infty)$ egyenesen négyzetesen integrálható (röviden: L_2 -be tartozó)

¹⁰ Amint közvetlenül e dolgozat lezárása előtt értesültünk, B. LEWITAN néhány hónapja egy a fenti tétellel lényegében azonos tételt bizonyított be, l. B. LEWITAN, Über eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von S. BERNSTEIN und H. BOHR, *Comptes Rendus de l'Acad. d. Sci. de l'URSS*, 15 (1937), 169—172. old. Ő a problémát a BOHR-féle tételre való visszavezetéssel oldja meg, míg mi közvetlen bizonyítást adunk.

függvénynek a FOURIER-féle transzformáltja; a PLANCHEREL-féle tétel szerint tehát $\sigma_\varepsilon(u)$ maga is L_2 -be tartozik és FOURIER-féle transzformáltja $f_\varepsilon(-x)$.

Az (1) alatt értelmezett $r(u)$ függvény nyilván szintén L_2 -be tartozik, FOURIER-féle transzformáltja:

$$\begin{aligned} & \text{l. i. m. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r(u) e^{-iux} du = \\ & = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} r(u) \sin(-u\omega) du = i\sqrt{2\pi} \varphi(-x). \end{aligned}$$

A négyzetesen integrálható függvények és FOURIER-féle transzformáltjaik szorzatintegráljai közt levő összefüggésre vonatkozó PARSEVAL-féle tétel alapján az

$$F_\varepsilon(y) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\varepsilon(u) r(u) e^{iyu} du \quad (8)$$

függvényt a következő módon is előállíthatjuk:

$$F(y) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) \cdot i\sqrt{2\pi} \varphi(y-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-x) f_\varepsilon(x) dx, \quad (9)$$

(ezek az integrálok, négyzetesen integrálható függvények szorzatintegráljai lévén, mind abszolút konvergensek).

Legyen $\chi_y(x)$ a 0 és y között $\text{sgn } y$ -nal, máshol 0-val egyenlő. FOURIER-féle transzformáltja nyilván: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - 1}{-iy}$.

A PARSEVAL-féle tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int_0^y f_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(x) f_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iyu} - 1}{\sqrt{2\pi} \cdot iy} \sigma_\varepsilon(u) du. \quad (10)$$

Felhasználva azt, hogy a $(-1, 1)$ közben $\sigma_\varepsilon(u)$ majdnem mindenütt 0, a (10) utolsó integrálját az

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\varepsilon(u) r(u) (e^{iyu} - 1) du$$

integrállal helyettesíthetjük. Összehasonlítva ezt (8) jobboldalával

láthatjuk, hogy $\int_0^y f_\varepsilon(x) dx$ az $F_\varepsilon(y)$ -től csak egy additív állandó-
ban különbözik, azaz $F_\varepsilon(x)$ az $f_\varepsilon(x)$ egy integrálfüggvénye.

(9)-ből kis átalakítással nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-z) f((1+\varepsilon)z) \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x - \frac{y}{1+\varepsilon}\right) f(y) \frac{\sin \frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon}}{\frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon}} \frac{dy}{1+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{11}$$

Amint 1-ben láttuk, $\varphi(a)$ a 0 hely kivételével mindenütt folytonos és van olyan A szám, hogy $|\varphi(a)| \leq A(1+a^2)^{-1}$. Ennélfogva az utolsó integrál integrandusa bármely $0 < \varepsilon < 1$ számra abszolút értékben alatta marad az ε -től független és y szerint nyilván integrálható

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \cdot \max_{0 < \varepsilon < 1} A \left(1 + \left(x - \frac{y}{1+\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}$$

függvénynek, s ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor az $y=x$ hely kivételével minden y helyen a $\varphi(x-y)f(y)$ határértékhez tart. A (11)-ben ennélfogva a határátmenet az integrálással felcserélhető:

$$F_\varepsilon(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy.$$

Jelöljük a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x)$ függvényt $F(x)$ -szel. Minthogy

$$\begin{aligned} F(x) - F(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x f_\varepsilon(z) dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x f(y) \frac{\sin \frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon}}{\frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon}} \frac{dy}{1+\varepsilon} = \int_0^x f(y) dy, \end{aligned}$$

azért az

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy \tag{12}$$

függvény az $f(x)$ egy integrálfüggvénye.

Amint az I. részben láttuk, a (9) és (12) alatti integrálaló-
állításokból következnek az

$$|F_\varepsilon(x)| \leq \frac{\pi}{2} \max |f_\varepsilon(x)| \leq \frac{\pi}{2} \max |f(x)|,$$

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2} \max |f(x)|$$

egyenlőtlenségek.

Még be kell bizonyítanunk, hogy az (amint éppen látjuk, korlátos) $F(x)$ spektruma nem nyúlik be a $(-1, 1)$ közbe. Bizonyítsuk ezt be először az ugyancsak korlátos $F_\varepsilon(x)$ -ra ($0 < \varepsilon < 1$). Ha u_1 és u_2 a $(-1, 1)$ közbe esnek, akkor a $\sigma_\varepsilon(u) \cdot r(u)$ függvény u_1 -től u_2 -ig vett integrálja nyilván 0. Ennélfogva, ha

$$\chi_{u_1, u_2}(u) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(u_2 - u_1), & \text{ha } u \text{ az } u_1 \text{ és } u_2 \text{ közt van,} \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_\varepsilon(u) r(u) \chi_{u_1, u_2}(u) du = \int_{u_1}^{u_2} \sigma_\varepsilon(u) r(u) du = 0.$$

Mint hogy $\sigma_\varepsilon(u) r(u)$ FOURIER-féle transzformáltja (8) szerint $iF_\varepsilon(-x)$, a $\chi_{u_1, u_2}(u)$ függvényé pedig $\frac{e^{-iu_2x} - e^{-iu_1x}}{-\sqrt{2\pi} \cdot ix}$, azért a PARSEVAL-féle tétel szerint a fenti első integrál egyenlő a következővel:

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(x) \frac{e^{-iu_2x} - e^{-iu_1x}}{-ix} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} V_{F_\varepsilon}(u_1, u_2).$$

Ennélfogva, ha u_1 és u_2 a $(-1, 1)$ számközbe esik, akkor $V_{F_\varepsilon}(u_1, u_2)$ tényleg 0.

Az $F_\varepsilon(x)$ egy ε -tól független korlát alatt maradván, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{F_\varepsilon}(u_1, u_2) = W_F(u_1, u_2)$. Ugyancsak az $F_\varepsilon(x)$ ezen ε -tól független korlátosságából következik, hogy az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetkor az $F_\varepsilon(x)/-ix$ függvény a $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ számközökön négyzetintegrálra is az $F(x)/-ix$ függvényhez tart; amiből viszont a PLANCHEREL-féle tétel alapján az követ-

kezik, hogy $V_{F_i}(u)$ négyzetintegrálra a $V_F(u)$ -hoz tart. Mint ismeretes, kiválasztható ekkor egy olyan ε_n nullához tartó sorozat, amelyre (majdnem minden u_1, u_2 helyen)

$$\begin{aligned} V_{F_{\varepsilon_n}}(u_1, u_2) &= W_{F_{\varepsilon_n}}(u_1, u_2) + V_{F_{\varepsilon_n}}(u_1) - V_{F_{\varepsilon_n}}(u_2) \rightarrow \\ &\rightarrow W_F(u_1, u_2) + V_F(u_1) - V_F(u_2) = V_F(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Ennélfogva a $V_F(u_1, u_2)$ függvény is a változók majdnem minden a $(-1, 1)$ közbe eső értékére 0, amit éppen be akartunk bizonyítani.

Ezzel a 3-ban kimondott tételt teljesen bebizonyítottuk.

ÜBER EINEN SATZ VON H. BOHR.

Von BÉLA v. SZ. NAGY und ANTAL STRAUZS.

Im ersten Teile der Arbeit wird ein neuer Beweis des folgenden BOHR-schen Satzes erbracht:

Sei $f(x) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$, $\lambda_k \geq 1$, dann gilt für die Integralfunktion ohne konstantes Glied:

$$F(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} (a_k \sin \lambda_k x - b_k \cos \lambda_k x)$$

die Ungleichung

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \max |f(x)|.$$

Die Konstante $\frac{\pi}{2}$ ist die genaueste. (Es wird sogar gezeigt, dass das \leq Zeichen durch das $<$ Zeichen ersetzt werden darf.)

Durch eine Anwendung des FOURIER-schen Integraltheorems wird $F(x)$ in der Form

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) f(y) dy \quad (*)$$

dargestellt, wo $\varphi(x)$ die Funktion

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin xv \left(\frac{1}{v} - \frac{\pi}{2} \cotg \frac{\pi v}{2} \right) dv + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin xv}{v} dv$$

bedeutet. Wenn man (*) auf die FEJÉR-schen arithmetischen Mittel der Funktion $\text{sgn}(\sin x)$ anwendet und dann zur Grenze übergeht, so bekommt man (für $x=0$) die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{\infty} \varphi(y) \cdot \text{sgn}(\sin y) dy.$$

Es wird dann gezeigt, dass hier der Integrand gleich $|\varphi(y)|$ ist. Also gilt:

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x-y)| \cdot |f(y)| dy \leq 2 \max |f| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy = \frac{\pi}{2} \cdot \max |f|.$$

(Hat $f(x)$ nicht die Gestalt $c \cdot e^{i\mu x}$ mit $|\mu| \geq 1$, so kann man hier das zweite \leq Zeichen durch $<$ ersetzen. Für $f(x) = c \cdot e^{i\mu x}$ hat man $|F(x)| = \left| \frac{ce^{i\mu x}}{i\mu} \right| = \frac{|f(x)|}{|\mu|}$, also erst recht $|F(x)| < \frac{\pi}{2} |f(x)|$.)

Im zweiten Teile wird der BOHR-sche Satz verallgemeinert wie folgt:

Sei $f(x)$ eine beschränkte messbare Funktion von der Beschaffenheit, dass (der dann stets vorhandene Grenzwert)

$$\text{l. i. m.}_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w f(x) \frac{e^{-iu_1 x} - e^{-iu_2 x}}{-i\tau} dx$$

für fast alle u_1 , und u_2 aus dem Intervall $(-1, 1)$ gleich 0 ausfällt. Dann gibt es eine beschränkte Integralfunktion $F(x)$ von $f(x)$ von derselben Beschaffenheit, und zwar für welche

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2} \max |f(x)|$$

gilt. Die Konstante $\frac{\pi}{2}$ ist die genaueste.

Mit Hilfe der Theorie der FOURIER-schen Transformaten lässt sich nämlich zeigen, dass die gewünschte Integralfunktion $F(x)$ wieder durch die Formel (*) aus $f(x)$ gewonnen werden kann und es geht dann der Beweis analog wie oben.

GAUSS- ÉS ENCKE-LEVELEK AZ ORSZÁGOS LEVÉLTÁRBAN.

Adalék csillagászatunk történetéhez.

JELITAI JÓZSEF-től.

A mult század második évtizedében épült gellérthegy csillagvizsgálót kora legjobb eszközeivel szerelték föl. Körültekintő első igazgatója: PASQUICH már az építés megkezdése előtt GAUSS-tól kért ajánlást az adjunktusi állás betöltésére. GAUSS 1812. november 2-án kelt válaszában egy részét PASQUICH másolatában mellékelte az Országos Levéltár egy aktájához, amelynek jelzése: Dep. Lit. Pol. 1814, fons 8, pos. 192—193. Ez a rész így szól :

«Ich bin so glücklich seit dritthalb Jahren eine Anzahl von Zöglingen der Astronomie zu haben, unter welchen mehrere sind, die sich wie ich glaube zu der Stelle eines Adjuncten bei ihrer Sternwarte gut qualificiren würden. Mehrere von diesen jungen hoffnungsvollen Männern haben sich bereits durch nützliche Arbeiten bekannt gemacht. Ohne aller Bedenken würde ich Ihnen dazu A. D. GERLING empfehlen, der gründliche Kenntnisse, unermüdeten Fleiss und viele Fertigkeit im Beobachten vereinigt. Allein von diesem wird wohl abstrahirt werden müssen, da er bereits in Cassel auf eine *sehr vortheilhafte* Art angestellt ist, wofür ich nicht weiss, ob die Stelle in Ofen ihm Entschädigung geben würde.» «Allein auch einer Herr ENCKE aus Hamburg scheint mir gleichfalls alle Requisita zu vereinigen. Er hat bereits treffliche theoretische Kenntnisse, grosse Fertigkeit im astronomischen Calcul, und auch bereits einige im Observiren, die er jetzt unter meiner Leitung noch weiter ausbildet. Dabei ist er von einem gefälligen braven Charakter, sehr

bescheiden, und ungemein fleissig. Ich würde mich freuen, wenn er ganz bei seiner Lieblingsbeschäftigung der Astronomie bleiben könnte.» «Sollten Sie auf diese Empfehlung reflectiren wollen, so bitte ich Sie mir bald etwas näheres über die Angelegenheit, die Bedingungen u. s. w. mitzutheilen. Ehre denke ich mit meinem Schüler einzulegen.»

A GAUSS által említett GERLING a későbbi jónévű matematikus és marburgi egyetemi tanár, ENCKE a későbbi híres csillagász. Mind a kettő a legnagyobb nyeresége lett volna a gellérthegyi obszervatóriumnak. Egy további (1814. márc. 15.) GAUSS-levélből idézi PASQUICH ugyanott a következőket :

«Bei der Wendung, welche im Frühjahre 1813 die Lage der Vaterstadt des Hr. ENCKE erhielt, verliessen die meisten seiner Landsleute unsre Universität, um sich den Vertheidigern der vaterländischen Freiheit anzuschliessen. Vielleicht trug die Ungewissheit, ob Sie meinem Vorschlage Ihren Beifall geben — da mein Brief Gott weiss durch welchen Zufall so späth in Ihre Hände gekommen ist — etwas mit dazu bei, dass auch unser patriotischer ENCKE nicht zurückbleiben wollte. Er trat unter die Fahnen der hanseatischen Legion, und hat sich schon öfters rühmlich hervorgethan. Indess auch im Felde verliess ihn seine Liebe zu den friedlichen Musen nicht. Wie einst ihr VEGA führte er am Tage den Degen und bei Nacht die Feder! Von Kiel aus schickte er mir z. B. die parabolischen Elemente des im April v. J. auf hiesiger Sternwarte entdeckten Cometen.» «Vermuthlich ist er mit dem Tettenbornschen Corps jetzt in Frankreich. Ich und GERLING werden indessen nichts unversucht lassen, bald gewisse Auskunft zu erhalten. Ich bin übrigens gewiss, dass Hr. ENCKE seine jetze(!) Laufbahn nur als eine temporaire betrachtet, und nur in den Wissenschaften sein dauerndes Glück findet. Herrlichst wünsche ich also, dass Sie, verehrtester Herr Professor, ihm ihre wohlwollenden Absichten erhalten. Es wäre traurig, wenn er für seinen so edeln Patriotismus die schönen Aussichten verlöre. Aller Wahrscheinlichkeit nach muss sich doch die jetzige Crisis bald enden.» «Sollte aber, was der Himmel verhüten möge, unser hoffnungsvoller ENCKE, auch noch als ein Opfer des mörderischen Krieges fallen; so würde ich Ihnen ganz eben so wie diesen, seinen Landsmann den obenerwähnten

Dr. GERLING empfehlen, der glaube ich *dann* wohl dazu geneigt gemacht werden könnte, aber ohne jenen Fall gewiss nicht darauf entiren würde, da er um keinen Preis seinen Freund supplantiren möchte.»

Az előbbi idézetek folytatása GAUSS alábbi levele (12×20 cm-es kettős lap; három oldalán igen apróbetűs, gondos írás), amelyet szintén az Országos Levéltárban találtam. Ez a levél is PASQUICH ugyanazon fölterjesztésének melléklete.

Göttingen, 30 Jul. 1814.

Sehr freue ich mich, Ihnen, Verehrtester Herr Professor, jetzt endlich über die Angelegenheit mit unserm jungen ENKE etwas ganz Bestimmtes schreiben zu können. Erst wenige Tage vor Empfang Ihres letzten Briefes vom 4. d. M. hatte ich die erste directe Nachricht von ihm erhalten; meine frühern Briefe waren gar nicht in seine Hände gekommen und der zuletzt geschriebene erst kurz vorher. Er erklärte in diesem Briefe, dass die Aussicht bei so herrlichen Hilfsmitteln, wie die Ofner Sternwarte sie jetzt darbieten wird, ganz der Astronomie leben zu können, ihn sehr glücklich machen müsse, allein dass er selbst wohl fühle, dass ein ganzes Jahr unter den Waffen zugebracht ihn in seiner wissenschaftlichen Cultur etwas zurückgesetzt habe, und er daher einer gewissen Zeit bedürfe, um sich erst wieder zu sammeln, die früher schon besessenen Geschicklichkeiten sich von neuem anzueignen und noch weiter auszubilden, um sich so nach Kräften in den Stand zu setzen Ihren Erwartungen zu entsprechen. Noch habe er seinen Abschied nicht, er denke aber so bald es nur thunlich sey, sich diesen auszuwirken, dann wiederum nach Göttingen zu kommen, um die alten Studien wieder anzuknüpfen.

Gleich nach Empfang Ihres Briefes theilte ich ihm dessen Inhalt mit, ersuchte ihn um eine ganz entschiedne Erklärung und wiederholte ihm die Versicherung meiner Bereitwilligkeit, ihm bei seinen hier noch auf einige Zeit wieder zu erneuerden Studien auf alle Art beförderlich zu seyn. In seiner gestern eingelaufenen Antwort erklärt er nun bestimmt seine Bereitwilligkeit, die Stelle eines Adjuncten der Ofner Sternwarte anzunehmen, allein um diesen Platz auf eine würdige Art ausfüllen zu können, müsse er *wenig-*

stens noch um eine Frist bis zu nächsten Ostern bitten, damit er bis dahin sich hier in Göttingen bestreben könne, die durch den Feldzug in seinen Kenntnissen entstandenen Lücken wieder auszufüllen und sich nach Möglichkeit des in ihn gesetzten Vertrauens werth zu zeigen. Was übrigens die weitem Bedingungen betreffe, so fände er zwar zu dem Entschlusse einen solchen Rufe zu folgen die mächtigsten Beweggründe in den auserlesenen Hülfsmitteln, welche die neue Ofner Sternwarte zur Befriedigung seiner Wissensbegierde und zur Beförderung der Wissenschaft darbieten würde, müsse aber doch daneben auf einer Besoldung von nicht unter 1200 Gulden, nebst freier Wohnung und Heizung im Winter Rechnung machen können.

Ich füge dieser Erklärung nur noch einiges bei, was als Ergänzung dessen dienen kann, was ich bereits in meinen frühern Briefen erwähnt habe.

Hr. ENCKE ist ein geborner Hamburger und jetzt in seinem 24-ten Jahre. Er kam Michaelis 1811 nach Göttingen um hier ausschliesslich sich dem mathematischen und besonders dem astronomischen Studium zu widmen. Obgleich bei seinem frühern Schulunterricht, wie das in Deutschland gewöhnlich ist, die alten Sprachen und die damit zusammenhangenden Kenntnisse als die Hauptsache waren angesehen worden, so fand ich ihn doch, als er sich meiner Leitung bei dem Studium der Astronomie bediente, in den mathematischen Hülfkenntnissen sehr gut vorbereitet, er fasste stets mit grosser Leichtigkeit und machte daher schnelle Fortschritte. Bald hörte er auf bloss Schüler zu seyn, er wurde zugleich Theilnehmer mancher vorfallenden Arbeiten, im Beobachten so wie im Calcul, was er immer zu meiner Zufriedenheit ausführte. Einen Zug habe ich hier an ihm bemerkt, den ich an jungen Leuten immer gern sehe, einen gewissen Eigensinn, eine Arbeit so vollkommen wie möglich zu machen. Mehrere male ist wol der Fall vorgekommen, wo er eine Arbeit von nicht unbedeutendem Umfange nachdem sie schon ganz vollendet war, irgend einer an sich unbedeutenden kleinen Vernachlässigung wegen ganz von neuem machte. Auch das Observiren ging ihm gut von Händen, aber immer war er auch hier mit sich selbst nicht zufrieden, wenn ich es schon vollkommen war. Freilich wird er jetzt über die Behandlung der

Kanonen die Manipulation der astronomischen Instrumente ein wenig verlernt haben aber bei seinem eben so ausgezeichneten Fleiss wie bei seinem natürlichen Talent bin ich überzeugt, dass er nicht bloss dies bald wieder einbringen sondern sich in dem nächsten Winter auch in der Behandlung von andern Instrumenten mit denen er noch weniger bekannt ist eine hinreichende Fertigkeit werde erwerben können. Ich rechne dazu hauptsächlich einige schöne neue Instrumente von dem unvergleichlichen Reichenbach, die wir erst seit kurzem erhalten haben, einen 12 zolligen Repetitionskreis, einen 8 zolligen Theodolith und einen $3\frac{1}{2}$ fussigen Heliometer, zu welchem ich ein parallitischer Stativ in kurzem erwarte.

Bei einem Specialkollegen ist der moralische Character nicht minder wichtig als die Kenntnisse. Auch von dieser Seite kann ich unsern jungen Freund nur rühmen. Besonders schätzbar ist seine Gefälligkeit und Bescheidenheit.

Soviel von Hrn. ENKE. Für unsern Freund LINDENAU wäre der Feldzug beinahe verderblich geworden. Zu Ende Mays wurde er in einem Duell in Paris sehr gefährlich verwundet, die Kugel wurde nur durch eine lange und schmerzhaftige Operation aus der Wunde gebracht. Nach den letzten Nachrichten ging es indessen mit seiner Herstellung fortwährend gut, und ich hoffe, dass er nun sehr bald wieder auf dem Seeberg eintreffen und seine Monatliche Correspondenz wieder anfangen wird.

Ich habe vorhin noch vergessen zu bemerken, dass Hr. ENKE seinen Abschied jetzt wirklich erhalten hat, und so wieder sein eigener Herr ist. Er hat die Absicht nur erst noch in Familienangelegenheiten eine Reise zu machen, und dann sogleich hieher zu kommen. Hoffentlich wird er daher schon im September wieder hier seyn.

Ich habe jetzt nichts weiter hinzusetzen, als den herzlichen Wunsch, dass die Angelegenheit ganz zu Ihrer Zufriedenheit ausfallen möge, so wie die Versicherung der innigsten Hochachtung, womit ich bin

Ihr ergebenster Freund und Diener

C. F. Gauss.

Darf ich Sie noch damit belästigen, das Angeschlossene gütigst zu befördern?

Ez a «csatolt» levél TITTELnek szólhatott, aki akkor az egrí érseki csillagvizsgáló élén állt. A göttingai GAUSS-levéltár négy TITTEL-levele közül az első 1814. július 16-án kelt. Erre válaszolhatott GAUSS.

A fenti GAUSS-levéllel egy borítékban ENCKE is küldött egy levelet PASQUICHnak. Ezt a levelet is mellékelte fölterjesztéséhez PASQUICH.

Hamburg den 26 July. 1814.

Hochzuverehrender Herr Professor

Durch die Güte des Herrn Professors GAUSS von den vortheilhaften Absichten die Sie mit mir haben unterrichtet, zögere ich keinen Augenblick, wenigstens schriftlich die Ehre Ihrer Bekantschaft mir zu nehmen.

Eine Stelle, wie die, die ich durch Ihre Verwendung zu erhalten hoffe, übertrifft so weit meine kühnsten Erwartungen, dass unwillkührlich sich zu der Freude mich dazu fähig gehalten zu sehen, ein gewisses ängstliches Gefühl mischt nicht alle Pflichten derselben erfüllen zu können.

Früherhin beinahe fast gänzlich für Philologie erzogen, kam ich mit den allerersten Kenntnissen der Mathematik nothdürftig versehen nach Göttingen. Aber auch diese waren schon hinreichend mich ganz ausschliesslich für das fernere Studium zu bestimmen, und der vortrefliche Unterricht des Herrn Professors GAUSS, verstärkte diese Liebe und besonders die Neigung zur Astronomie während der anderthalb Jahre, da ich das Glück hatte ihn zu geniessen, so sehr, dass sie nie wieder bei mir erlöschen kann.

Vielleicht wenn ich damals ungestört meine Studien hätte fortsetzen können, so wäre ich zu der Zeit, wo ich zuerst von der Stelle in Ofen hörte, auf dem Wege gewesen mich ihrer würdiger zu machen, wie ich es jetzt zu thun hoffen kann. Aber die fortwährenden Nachrichten die ich von den unaufhörlichen Anstrengungen meiner mir über alles theuren Vaterstadt erhielt, sich eines übermächtigen Feindes zu erwehren, liessen mich nicht länger in Göttingen verweilen. Leider kam ich nur um ihre Einnahme unwiederbringlich herannahen und endlich erfolgen zu sehen; und so ward ich genöthigt, obgleich ich anfangs nur zur Vertheidigung Hamburgs

hingekommen war, mich wenn ich für Hamburg noch etwas thun wollte, den übrigen vaterländischen Kriegern anzuschliessen. In diesem ganzen Jahre, was für Deutschland so herrlich und freudereich, für jeden Hamburger indess wegen der gänzlichen Lähmung aller ihrer Kräfte, und den fortwährend schrecklichen Nachrichten von Hamburgs vernichtetem Wohlstande, zu den martervollsten seines Lebens gehört, war es mir unmöglich an Astronomie auch nur zu denken.

So sehnlich deswegen mein Wunsch auch ist eine so herrliche Gelegenheit, zeitlebens mich ganz der Astronomie widmen zu können, zu benutzen, so würde es doch eine zu grosse Dreistigkeit seyn, in meiner jetzigen Lage darauf Ansprüche zu machen, wenn nicht eine kleine Frist mir erst verstattet wird, um mich einigermaßen mit der Astronomie wieder bekant zu machen. Und eben deswegen ist es meine wichtigste Bitte, dass es mir erlaubt wird noch ein Jahr lang oder wenigstens doch bis Ostern 1815 in Göttingen noch etwas sammeln zu dürfen und vorzubereiten auf diese Stelle. Nicht als ob ich hoffte in dieser Zeit mich ihrer würdig zu machen, sondern nur in der Erwartung, dass ich durch angestregten Fleiss in dieser Zeit so weit gelangen kann, dass Sie es nicht für der Mühe gänzlich unwerth achten werden, durch die gütige Mittheilung des grossen Vorraths Ihrer Kenntnisse und Erfahrungen mich zu meinem künftigen Geschäfte vorzubereiten. Denn wenn nicht der Herr Professor GAUSS von dieser Ihrer gütigen Geneigheit, mit Nachsicht meinen Mängeln nachzuhelfen und mich zu belehren mich versichert hätte, so würde ich gleich jeden Gedanken an diese Stelle haben aufgeben müssen.

Ich hielt es für meine Pflicht so aufrichtig wie möglich von meiner bisherigen Lage und Kenntnissen Ihnen Rechenschaft abzulegen, und glaube nur noch hinzusetzen zu dürfen, dass wenn Liebe zur Wissenschaft und guter Wille sich belehren zu lassen diese Mängel etwas ersetzen kann, ich hierin nicht leicht von einem Mit Bewerber übertroffen werde.

Mit der Bitte um gütige Nachsicht wegen dieses Schreibens, und in der Erwartung einer geneigten Entscheidung über mein Gesuch habe ich die Ehre zu verbleiben

Ihr unterthänigster Diener und Verehrer J. F. Encke.

A göttingai GAUSS-levéltár idevágó leveleiből kiderül, hogy PASQUICH jóakarata megtört Bécs ellenállásán. A «bécsi ármány» szövői PASQUICH szerint TITTEL és a prágai csillagvizsgáló igazgatója: DAVID voltak, akik nem akartak külföldit és protestánst. Évekig húzódott a dolog. Végre is ENCKE helyett az osztrák LIT-TROW került Kazánból PASQUICH mellé. Ez a választás a legszerencsétlenebbnek bizonyult. A PASQUICH és LIT-TROW közti ellentét rövidesen súlyos torzsalkodássá fajult. A gyászos személyi harc fölemésztette erejüket: megbénította a tudományos munkát. Bizonyos, hogy ha ENCKE kerül PASQUICH mellé, egészen más sors vár csillagászatunkra.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13-án tartott üléséből.)

BRIEFE VON GAUSS UND ENCKE IM UNGARISCHEN LANDESARCHIV.

Beitrag zur Geschichte der Astronomie in Ungarn.

Von JÓZSEF JELITAI.

PASQUICH wollte, als Direktor der neuen Sternwarte am Gerhardsberg einen Schüler von GAUSS zum Adjunkten haben. Ich fand im Budapester Landesarchiv einen Brief von GAUSS und Teile von zwei früheren Briefen von ihm, wo er ENCKE und GERLING für diese Stelle empfiehlt. ENCKE bat PASQUICH um eine Frist. Vorstehend die buchstäblich genaue Widergabe dieser Briefe.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dez. 1937.)

ÚJABB ADATOK A HIDROGÉN TÚLFESZÜLTSGÉNEK MECHANIZMUSÁHOZ.

NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN-tól.

Előző munkáimban (1, 2) rámutattam arra, hogy igen tiszta higanykatódon leváló hidrogén túlfeszültségét az ERDEY-GRUZ-VOLMER-f.(3) kisülési elmélettel lehet magyarázni abban az esetben, ha előző hosszabb elektrolizissal a higany felületét sikerült hidrogénnel telíteni.

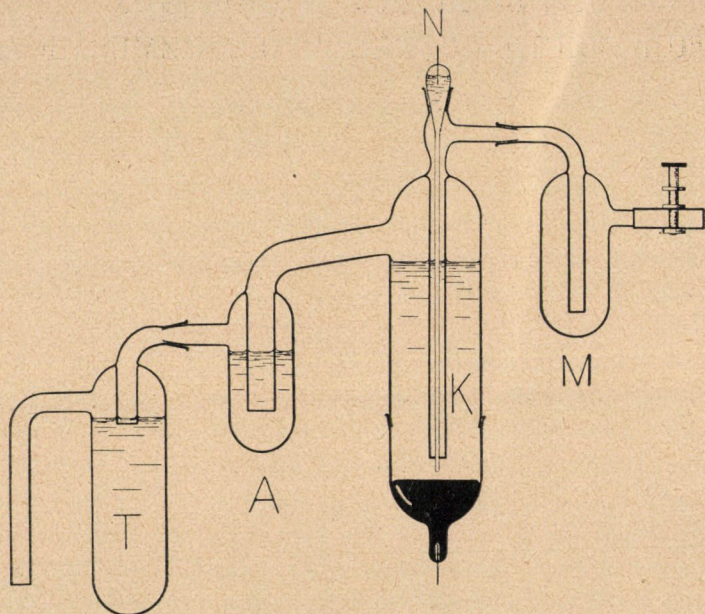
Ismeretesek azonban olyan esetek is, amelyek semmiképp sem hozhatók összhangba a kisülési elmélettel, mert az észlelt b -érték rendkívül kicsi, 0.029 V körül van, ami viszont a TAFEL-f.(4) mechanizmust látszik erősíteni. Ilyen esetekben az észlelt áramsűrűség-túlfeszültség-görbe logaritmikusan ábrázolva nem egyenes, hanem felülről konkáv és így a b -érték --- a TAFEL-egyenletet véve alapul --- változó. Ezt a viselkedést csak «aktív» fémeken és pedig előzőleg anódikusan kezelt platinán és palládiumon észlelték.(5) Kétségtelen, hogy itt másféle mechanizmusnak kell szerepet játszani.

A jelen dolgozatban az előzőhöz képest kissé módosított készülékkel különböző katódokon, ú. m. *Pt*, *Ag*, *Cu* és *Hg*, végzett újabb kísérleteimet ismertetem, amelyekből további következtetések vonhatók a túlfeszültség mechanizmusára nézve.

A használt készüléket az *I. rajz* mutatja. A K katódtér hengeres, alsó része esiszolattal csatlakozik és magában foglalja a 10 cm² keresztmetszetű, köralakú katódot, amelyet ki lehet cserélni.¹ Az A anódtér ferde összekötő csővel csatlakozik és hozzá egy kellő térfogatú T töltőedény illeszthető esiszolat segítségével. A katód-

¹ A lemezalakú katód alatti tér paraffinnal volt kitöltve.

tér tengelyében levő gázbevezető cső felső végének csiszolatába illeszthető a kapillárisal ellátott N normálelektrod ($Ag/AgCl$ vagy Pt/H_2). Kísérlet előtt megtöltjük a katódteret az elektrolittal, az (ekkor még üres) M mosón át tiszta hidrogént vagy nitrogént vezetünk be 1—2 óráig, miáltal az elnyelt oxigént kiűzzük. A hidrogén átbuborékol az A anódtérben és a T töltőedényben levő elektroliton



1. rajz. Túlfeszültség mérésére szolgáló készülék. K katódter, A anódtér, T tartalékedény, N normálelektrod, M mosó. A készülék a hidrogén bevezetése előtt van ábrázolva.

is. Most a hidrogénbevezetést megszakítva, megfordítjuk a T edényt, ezáltal az anódtér és a katódter összekötő csöve megtelik oxigénmentes elektrolittal, majd T eltávolítása után az anódtérbe Ag , ill. Pt drótból készült anódot vezetünk be (miután az M mosót elzártuk). Az N normálelektrod már előre meg van töltve ugyanazzal az elektrolittal. Ezután a szokott módon végezzük a kísérletet. (1)

Eredményeim összefoglalását az 1. táblázat mutatja. Megjegyzendő, hogy helyszűke miatt a kísérleteknek csak egy részét közöl-

1. Táblázat.

Mért és számított túlfeszültségek (η m. és η sz.) különböző katódokon és különböző elektrolitekben.

I/q 10 ⁻⁸ Amp/cm ²	1. Hg		2. Hg		3. Hg		4. Ag		5. Ag		6. Ag		7. Cu		8. Cu	
	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.	η m.	η sz.
1	676	682	—	685	—	715	—	219	—	217	—	145	—	786	—	190
5	731	728	736	741	767	767	308	300	281	282	201	210	845	851	247	257
10	750	747	770	765	790	790	340	335	310	310	232	238	879	879	292	286
20	767	766	791	789	813	812	373	371	340	338	263	266	907	907	318	315
50	789	792	818	821	839	842	418	417	372	375	301	303	942	944	352	353
100	806	811	839	846	860	865	451	452	398	403	327	332	968	972	381	382
200	826	830	866	870	883	888	485	487	427	431	356	359	994	999	410	411
500	—	—	906	902	922	918	534	533	468	468	392	396	1029	1036	448	449
1000	—	—	—	—	—	—	591	568	501	496	419	424	1058	1064	477	478
2000	—	—	—	—	—	—	—	—	529	524	448	452	1090	1092	505	507
5000	—	—	—	—	—	—	—	—	566	561	500	489	1146	1126	548	545
2000	—	—	—	—	—	—	—	—	526	521	442	445	1096	1102	502	502
1000	—	—	—	—	—	—	591	568	497	491	410	412	1064	1069	470	470
500	—	—	906	902	922	918	530	533	465	461	380	379	1030	1036	438	438
200	826	830	866	866	882	884	484	487	422	421	339	335	988	992	395	395
100	806	810	839	839	857	858	449	452	387	391	305	302	955	959	364	363
50	787	790	815	812	834	833	417	417	355	361	270	269	925	926	333	331
20	764	764	774	776	798	799	372	371	322	321	224	225	886	882	291	288
10	749	744	743	749	776	774	339	336	295	291	189	188	854	849	258	256
5	724	724	720	722	744	748	308	300	272	261	156	155	825	816	225	224
1	666	678	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Elektrolit	2n HCl		2n HCl		2n HCl		2n HCl		2n HCl		2n H ₂ SO ₄		2n HCl		2n H ₂ SO ₄	
Előzetes elektroli- zis tartama, óra	1		6		7		48		36		2		24		16	
TAFEL-egyenlet állandói:																
a (fel)	0·682		0·685		0·714		0·219		0·217		0·145		0·786		0·190	
a (le)	0·682		0·685		0·714		0·219		0·217		0·145		0·803		0·190	
b (fel)	0·064		0·080		0·075		0·116		0·093		0·093		0·093		0·094	
b (le)	0·066		0·090		0·085		0·116		0·100		0·110		0·110		0·107	

10*

ÚJABB ADATOK A HIDROGÉN TÚLFESZÜLTSGÉNEK STB.

hetem, a többiek, amelyeknél a katódfelület hidrogénnel való telítését sikerült kellőképpen elérni, hasonló eredményeket adtak. Az ezüstelektród a platinának elektrolitikus úton való vastag (kb. 0.10—0.15 mm-es) ezüstözése útján készült, hogy így teljesen tiszta és szennyezésektől mentes felületet kapjunk, a rézelektródot pedig rézlemeznek rézzel való elektrolites bevonása útján állítottam elő. A higany mennyisége minden kísérletnél 100 g volt; minden alkalommal friss, anódikusan tisztított higanyt használtam. A kísérlet folyamán gázbevezetés nem történt; a hőfok 25° volt.

Mindezek a kísérletek azt mutatják, hogy *Hg*, *Ag* és *Cu* katódokon a katód felületi rétegének hidrogénnel való telítése után a folyamatot a kisülés (és az ionizálódás) sebessége szabja meg; a kapott *b*-értékek *Hg*-on felfelé 0.064—0.080, lefelé 0.066—0.090 közt, *Ag*-n felfelé 0.093—0.116, lefelé 0.100—0.116 közt, *Cu*-n pedig felfelé 0.093—0.094, lefelé 0.107—0.110 közt váltakoztak. Az *a*-értékek $2n$ *HCl*-ban *Hg*-n 0.682—0.724 közt mozogtak, tehát kissé eltérnek előző közleményemben talált értékektől, bizonyára a készülék eltérő alakja miatt, egyébként a *Hg* mennyiségének minden kísérletben állandó volta miatt jobban reprodukálhatók. Már előző közleményemben is rámutattam arra, hogy az *a*-értékek mennyire függenek az elektrolit minőségétől; ezt még inkább mutatják a jelen kísérletek, amelyek szerint az *a*-érték *Cu*-n $2n$ *HCl*-ban 0.786—0.803, $2n$ H_2SO_4 -ban pedig 0.190, *Ag*-n $2n$ *HCl*-ban 0.219, $2n$ H_2SO_4 -ban 0.145 V, ha az áramsűrűséget 10^{-6} Amp/cm² egységekben mérjük.

Olyan esetekben, amikor a felületnek hidrogénnel való telítése nem volt elegendő, a kapott áramsűrűség-túlfeszültség-görbe nem felel meg a módosított TAFEL-egyenletnek, hanem felülről konkáv lefutást mutat. Ilyenkor további telítéssel fokozatosan meg lehet közelíteni és végül elérni azt, hogy a görbe kiegyenesedjék.

Amint ezekből az eredményekből látjuk, a kapott *b*-értékek az ERDEY-GRUZ-VOLMER-f. elmélet határai, vagyis 25° -on 0.059 és felfelé tetszőlegesen nagy, de leggyakrabban 0.118 közt mozognak.

Egyik elmélet sem mond semmit az *a*-értékekre vonatkozólag, mert ezek sok különböző körülménytől függenek. Egyelőre megalég-

szünk azzal, hogy kísérletileg tanulmányozzuk ezeket az értékeket, amelyekre eddig még nem álltak rendelkezésre szabatos mérések.

Egészen külön lapra tartoznak a platinakatódon végzett kísérletek eredményei, amelyek közül három a 2. táblázatban van összefoglalva. A platinakatódok viselkedése erősen függ előzetes kezelésük módjától. Az 1. kísérletben kiizzított platinalemezt használtam, minden egyéb kezelés nélkül; a platinalemez egyébként a HERAEUS-cégtől érkezett és más célra még nem volt használva.

2. Táblázat.

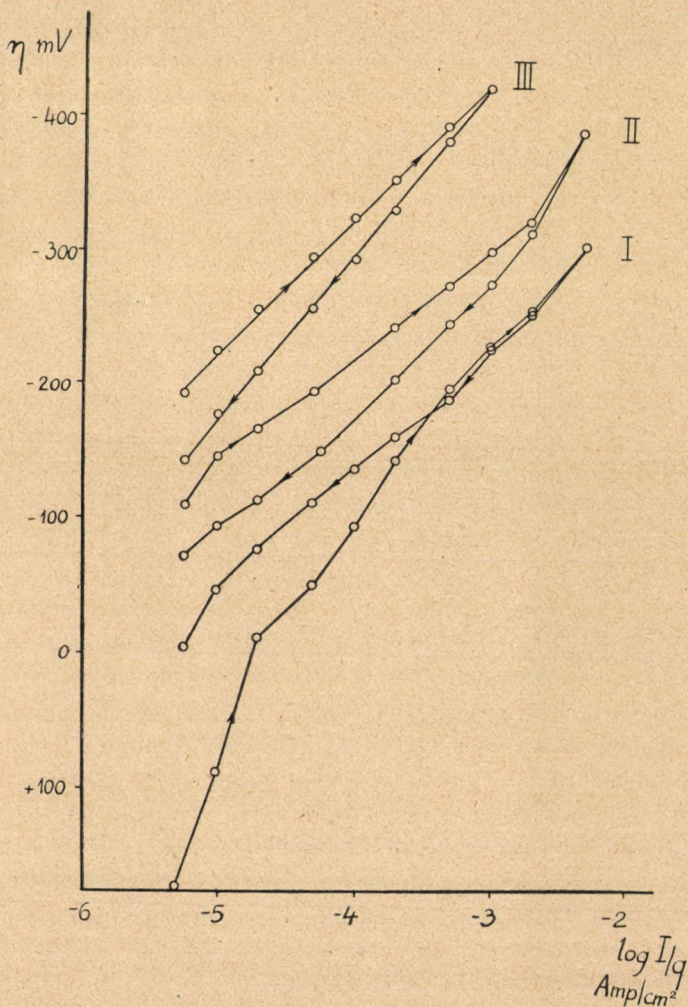
Túlfeszültség Pt elektródon 2n H₂SO₄-ban.

I'q 10 ⁸ Amp/cm ²	1. Először használt platina	2. Másodszer használt platina	3. Hosszabb ideig katódosan polarizált platina	
			η m.	η sz.
5	+172	-119	-193	-196
10	+ 87	146	225	226
20	- 11	166	256	256
50	62	195	295	295
100	96	218	324	325
200	146	244	354	355
500	191	275	394	394
1000	232	300	422	424
2000	262	323	—	—
5000	308	380	—	—
2000	258	314	—	—
1000	229	277	422	424
500	199	246	382	386
200	163	204	331	337
100	138	176	294	299
50	112	151	257	261
20	78	113	209	212
10	49	94	177	174
5	6	71	142	136
Előzetes polarizáció tartama, óra	3 1/2	—	48	
TAFEL-egyenlet állandói:				
a	—	—	0.125	
b (fel)	—	—	0.099	
b (le)	—	—	0.125	

Az először használt, tehát hidrogénnel még nem telített platinának a potenciálja áramáthaladás nélkül erősen pozitív a normál hidrogénelektroddal szemben, mert oxigénelektrodként szerepel. Katódnak kapcsolva (0.005 mA/cm^2 áramsűrűséggel), a potenciál rohamosan közeledik a hidrogénelektrodéhoz, azonban még 45 perc múlva is $+172 \text{ mV}$. Innen kezdve az áramsűrűséget lépésenként emeltem a szokott módon és minden áramsűrűségnél 10 percig vártam. ezalatt a potenciál keveset változott. Az így egészen 5 mA/cm^2 -ig emelt áramsűrűséget azután ugyanilyen lépésekben csökkentettem, a kapott értékek a 2. táblázat 1. jelű rovatában találhatóak. Másodszor végezve a kísérletet, a 2. jelű rovatban található értékeket kaptam, amelyek már lényegesen negatívabbak. Két napon át 0.005 mA/cm^2 áramsűrűséggel polarizálva az elektródot, a 3. jelű rovatban feltüntetett értékeket kaptam, amelyek már teljesen egyenes TAFEL-f. diagrammot adnak, b értéke felfelé 0.099 , lefelé 0.125 (2. rajz).

A jelenségek magyarázatára csak egyetlen lehetőség van, még pedig az, hogy aktív fémeken, aminők a *Pt* és *Pd* (különösen előzetes anódos kezelés után) más mechanizmussal történik a hidrogénleválás — amint azt KNORR és munkatársai (5) is megállapítják. Szerintük itt csakis a molekuláris hidrogénnek az elektrolitban való diffúziója szabja meg a túlfeszültség értékét; ezen az alapon végzett elméleti számításait a mérések igazolják. Így a túlfeszültséget az áramsűrűség logaritmusá szerint ábrázolva, felülről konkáv görbét kapunk. Megjegyzendő, hogy ezeken az aktivált *Pt* és *Pd* elektródokon a túlfeszültség oly kicsi (30 mV alatt van), hogy arra a kisülési elmélet úgy sem érvényes, mert annak érvényessége csak 60 mV -nál nagyobb értékeknél kezdődik. (6)

A platinának fent leírt kísérleteimből, továbbá MASING és LAUBE(7) vizsgálataiból ismert viselkedése azonban arra mutat, hogy hosszú elektrolízis által hidrogénnel telített platinaelektrodok úgy viselkednek, mint a többi, nem aktív fémek (*Ag*, *Cu*, *Hg*), amennyiben viselkedésük a kisülési elmélettel kielégítően magyarázható. Amint a platinát fokozatosan telítjük hidrogénnel, úgy megy át a túlfeszültség-áramsűrűség-görbe a felülről konkáv alakból az egyenesbe, miközben a túlfeszültség abszolút értékei is erősen növekednek.



2. rajz. Túlfeszültség platinakatódon. I. első ízben használt platinán, II. másodízben használt platinán, III. hosszabb ideig katódosan polarizált platinán.

A közönséges, nem aktív fémek, mint *Ag*, *Cu*, *Hg*, ugyancsak képesek hidrogént elnyelni, azonban sokkal kisebb mértékben, mint a *Pt* és különösen a *Pd* (mely a legaktívabb). Míg ezeknek a felülete nincsen hidrogénnel telítve, addig itt is más mechanizmus

szerint megy a hidrogénfejlődés, azonban ezek oly hamar telítődnek részlegesen, hogy a túlfeszültség abszolút értékei már egészen kis áramsűrűségnél is elég nagyok. Valószínű, hogy ezeken a fémeken is elő lehetne állítani az aktív fémeken talált görbéket, de csak rendkívül kis áramsűrűségeknél, mert csekély adszorpcióképességüknel fogva a felületi réteg könnyebben telítődik. Mikor pedig a felület részben már telítődött hidrogénnel, akkor a görbe a kisülési elméletnek megfelelő egyeneshez közeledik, azonban csak akkor éri ezt el, ha az adszorpció már a telítésig fokozódott, amihez megfelelően hosszú idő kell. A diffúziónak a szerepe itt mindenestre csekélyebb, csak annyiban érvényesül, hogy a felszínből kifelé is diffundálhat hidrogén, így tehát a telítést elérni és fenntartani csak megfelelően választott körülmények közt lehet. Igen kis áramsűrűségnél kevésbé valószínű, hogy a telítést elérhetjük, ilyenkor egyébként oxigénnyomok is nagyobb szerepet játszhatnak, mert a felület csekély adszorbeált hidrogénjével katalitikusan egyesülve, annak viszonylagos mennyiségét erősen csökkenthetik.

Azt pedig, hogy a hidrogénnel nem telített, vagy nem tökéletesen telített felületen miért más a leválás mechanizmusa, egyszerűen magyarázhatjuk azzal a körülménnyel, hogy adszorbeált hidrogén leválása lényegesen kisebb túlfeszültséggel lehetséges, mint atomos hidrogén leválása. (8) Ha a felület már telítve van, akkor nincs mód további adszorbeált hidrogén leválására, tehát a hidrogén csak atomos állapotban válhat le. Az atomos hidrogén leválását pedig a kisülési elmélet kellőképpen leírja. Természetesen megvannak az átmenetek a kétféle mechanizmus közt minden olyan esetben, amikor a felület csak részben van hidrogénnel telítve — amíg tehát egyik vagy másik esetet nem tudjuk kísérletileg szabatosan megvalósítani, addig rosszul reprodukálható átmeneti görbéket kapunk. Így tehát a különböző szerzők sokszor eltérő eredményeket észleltek.

Amint említettük, az elméletek semmit sem mondanak a TAFEL-képlet a állandójáról. Kísérleteimből azt a következtetést lehet levonni, hogy ez is összefüggésben van a katódfelület telítettségével. Így pl. az a tény, hogy az a érték azonos elektrolitban jól reprodukálható, kénsavban és sósavban azonban erősen különbözik, szintén magyarázható úgy, hogy a különböző elektrolitekben

különböző mértékben telítődik egyébként azonos kísérleti körülmények közt a fém felületi rétege. Tekintettel arra, hogy idegen anyagok akár igen kis mennyiségben is befolyásolhatják a túlfeszültséget, feltehető, hogy ez a katódfelületre kifejtett hatás is összefüggésben van a hidrogén adszorpciójával. Ilyen anyagok könnyen csökkenthetik az adszorpcióképességet azáltal, hogy maguk adszorbeálódnak — különösen az oxigén, amelynek nagy hatása ismeretes — vagy pedig a különböző mérges anyagok. Ha ezeknek adszorpciója által a katódfelület egy része inaktíválódik, ennek következménye az adszorpcióképesség csökkenése, a túlfeszültség abszolút értékének és a b értékének növekedése.

Amint látjuk, a kétféle, ú. m. a kisülési és az adszorpciós, mechanizmus fellépésével a túlfeszültség jelenségei mind megmagyarázhatók. Megérthető a platinán észlelt, igen hosszú ideig tartó lassú túlfeszültség-emelkedés is, amely egyszerűen azáltal áll elő, hogy a platina felülete lassan telítődik tökéletesen hidrogénnel, mert az adszorbeált hidrogén tovább diffundálhat a platina belsejébe. MASING és LAUE(9) azon megfigyelése, hogy a platina-katód annál több hidrogént nyelt el, minél magasabb túlfeszültséget mutatott, ugyancsak összhangban van felfogásunkkal.

A kísérletek végzésében nagy segítségemre volt BOROS JÁNOS okl. középiskolai tanár úr, amiért neki e helyen is köszönetet mondok. Munkám a Széchenyi-Társaság, a Rockefeller Alap és a szegedi Természettudományi Kutatási Bizottság támogatásával készült. Mindezen támogatásokért hálás köszönetemet fejezem ki.

Irodalom.

1. NÁRAY-SZABÓ I.: Math. Természettud. Ért. **55**, 672. (1937.).
2. NÁRAY-SZABÓ I.: Z. f. phys. Chem. **A 178**, 355. (1937.).
3. ERDEY-GRUZ u. VOLMER: Z. f. phys. Chem. **A 150**, 203. (1930.).
4. TAFEL: Z. f. phys. Chem. **50**, 641. (1905.).
5. KANDLER, KNORR u. SCHWITZER, Z. f. phys. Chem. **A 180**, 281. (1937.).
6. VOLMER u. WICK: Z. f. phys. Chem. **A 172**, 429. (1935.).
7. MASING u. LAUE: Z. f. phys. Chem. **A 178**, 1. (1936.).
8. BUTLER: Proc. Roy. Soc. **A 157**, 423. (1936.).

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

BEITRAG ZUM MECHANISMUS DER WASSERSTOFFÜBERSPANNUNG.

Von St. v. NÁRAY-SZABÓ.

1. Es wurde die Überspannung des Wasserstoffes an Kathoden aus *Pt*, *Ag*, *Cu* und *Hg* in $2n\text{HCl}$ und $2n\text{H}_2\text{SO}_4$ untersucht. Nach Sättigung der Kathodenoberfläche erhält man reproduzierbare Werte, die der TAFEL'schen Gleichung gehorchen. Die Konstanten b dieser Gleichung bewegten sich an *Hg* aufwärts zwischen 0·064—0·080 V, abwärts 0·066—0·090 V, an *Ag* aufw. 0·093—0·116, abw. 0·100—0·116, an *Cu* aufw. 0·093—0·094, abw. 0·107—0·110 und an *Pt* nach Sättigung durch lange Polarisation aufw. 0·099, abw. 0·125. Die a -Werte der TAFEL'schen Gleichung hängen ausser dem Kathodenmetall auch von dem Elektrolyten ab und zwar in erheblichen Masse.

2. Zur Deutung sämtlicher Erscheinungen der Überspannung des Wasserstoffes genügt die Annahme zweier Mechanismen und zwar Entladungsmechanismus an mit Wasserstoff gesättigten, Adsorptionsmechanismus an ungesättigten Kathodenoberflächen. Die schwer reproduzierbaren Übergangsformen entsprechen einer teilweisen Sättigung.

3. Die Wirkung von Sauerstoff und Giften wird durch die Beeinflussung der Adsorption erklärt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie
der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

A POLARIZÁLHATÓSÁG SZÁMÍTÁSA EGY STATISZTIKAI MÓDSZER ALAPJÁN.

GOMBÁS PÁLTÓL.

Ebben a dolgozatban célunk gömbszimmetrikus elektron-eloszlású atomok polarizálhatóságára egy a szerző által kidolgozott statisztikai perturbáció elmélet^s alapján egy formulát levezetni.

Mint ismeretes, a polarizálhatóság a következőképpen van definiálva. Ha egy atomot vagy iont egy \mathcal{E} térerősségű elektromos térbe hozunk, akkor az atom vagy ion energiája a következő értékkel változik meg:

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \alpha \mathcal{E}^2 \quad (1)$$

ahol α a polarizálhatóság.

A klasszikus elmélet alapján nem lehetett α -t kiszámítani. α meghatározása csak a hullámmechanika alapján vált lehetségessé. A hullámmechanika segítségével egy exakt formulát lehet levezetni α számára, mely azonban számításra nem alkalmas, de sikerült megadni leegyszerűsített közelítő formulákat, melyekből α kiszámítható.

Mi itt egy a THOMAS-FERMI-DIRAC modell keretében kidolgozott statisztikai perturbáció elmélet alapján határozzuk meg α -t. E szerint a perturbáció elmélet szerint a másodrendű perturbációs energia számára, mely az (1) alatti energiaváltozást és így α -t szolgáltatja, a következő kifejezést nyerjük:

$$E_S^{(2)} = -\frac{3N\epsilon}{4} \frac{1}{V_{11}} [w_{00}^{(2)} - (w_{00}^{(1)})^2] \quad (2)$$

^s GOMBÁS, ZS. f. Phys. 97, 633, 1935; 98, 417, 1936.

ahol

$$w_{00}^{(i)} = \frac{1}{N} \int v^i \varrho_0 d\tau \quad (3)$$

N az elektronok száma, v a perturbációs potenciál, ϱ_0 az elektron-sűrűség a nem perturbált atomban, ε a pozitív elemi töltés, $d\tau$ a térfogatelem.

\bar{V}_{11} egy potenciálközepérték, mely a következőképpen van definiálva

$$\frac{1}{\bar{V}_{11}} = \frac{1}{N} \int \frac{1}{(F+\sigma)^2} \varrho_0 d\tau, \quad (4)$$

ahol

$$F = (V_0 - \lambda + \sigma^2)^{1/2} \quad (5)$$

és

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{a_H^{1/2}}. \quad (6)$$

V_0 jelenti az atom összpotenciálját egy bizonyos r távolságban. λ számára pedig neutrális atomok esetén a következő kifejezés adódik

$$\lambda = \frac{15\varepsilon}{32\pi^2 a_H} \quad (7)$$

a_H az első H rádius.

A mi esetünkben a perturbációs potenciál, ha a z tengelyt \mathcal{E} irányába helyezzük, a következő:

$$v = -|\mathcal{E}|z = -|\mathcal{E}|r \cos \vartheta, \quad (8)$$

ahol z egy derékszögű koordináta, r a magtól való távolság, ϑ pedig az r és \mathcal{E} közti szög.

A (8) alatti kifejezést (2)-be helyettesítve és \bar{V}_{11} helyett röviden \bar{V} -t írva, nyerjük

$$E_S^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{\bar{V}} \bar{r}^2, \quad (9)$$

ahol \bar{r}^2 jelenti r^2 -nek ϱ_0 szerinti középértékét.

A (9) alatti formulát (1)-el összehasonlítva α számára kapjuk

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\bar{r}^2}{\bar{V}}. \quad (10)$$

Minthogy a THOMAS-FERMI-DIRAC egyenlet csak numerikusan oldható meg, ρ_0 nem adható meg analitikailag, hanem csak numerikusan. JENSEN egy munkájában, melyet nem tett közzé, a Kr és Xe esetében numerikusan megoldotta a THOMAS-FERMI-DIRAC egyenletet. Mi ezekkel a megoldásokkal számítottuk ki α -t Kr-ra és Xe-ra.

Eredményeink az 1. táblázat második sorában vannak feltüntetve.

1. táblázat

	Kr	Xe
(10) alatti formula	$23 a_H^3$	$25 a_H^3$
Kirkwood — — —	$24 a_H^3$	$27 a_H^3$
Pauling — — —	$16 a_H^3$	$27 a_H^3$

Összehasonlításképpen α -t KIRKWOOD formulájából is kiszámítottuk a THOMAS-FERMI-DIRAC eloszlással számított \bar{r}^2 -el. Az így számított α értékek a táblázat harmadik sorában állnak. A táblázat negyedik sorában PAULING eredményei vannak feltüntetve. Amint látható, a megegyezés jó.

Még ki szeretnénk emelni, hogy a (10) alatti formulánkban semmilyen empirikus konstans nem szerepel.

H. JENSEN dr. úrnak ezúton is hálásan köszönöm, hogy volt szíves a THOMAS-FERMI-DIRAC egyenletnek Kr-a és Xe-ra meghatározott megoldásait rendelkezésemre bocsátani.

Budapest, Elméleti fizikai intézet, 1937. július.

ÜBER EINE STATISTISCHE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER POLARISIERBARKEIT.

Von PAUL GOMBAS in Budapest.

In der vorliegenden Arbeit wird für die Polarisierbarkeit von Atomen mit kugelsymmetrischer Elektronenverteilung auf Grund einer vom Verfasser ausgearbeiteten statistischen Störungsrechnung eine Formel hergeleitet. Die Formel enthält keine willkürliche oder empirische Parameter. Die Anwendung der Formel auf *Kr* und *Xe* gibt Resultate, welche mit den aus der Kirkwoodschen Formel berechneten Werten und mit den Werten von Pauling befriedigend übereinstimmen.

1. §. Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist für die Polarisierbarkeit von Atomen mit kugelsymmetrischer Elektronenverteilung auf Grund einer vom Verfasser entwickelten statistischen Störungsrechnung eine Formel herzuleiten und aus dieser die Polarisierbarkeit des *Kr* und *Xe* Atoms zu berechnen.

Die Polarisierbarkeit ist folgendermassen definiert. Wenn man ein Atom oder Ion in ein homogenes elektrisches Feld von der Feldstärke \mathcal{E} bringt, so ändert sich die Energie des Atoms oder Ions um folgenden Betrag.

$$\Delta E = -\frac{1}{2} a \mathcal{E}^2 \quad (1)$$

wo a die Polarisierbarkeit bedeutet.

Wie bekannt ist die Polarisierbarkeit eine der wichtigsten atomaren Konstanten, zu derer Berechnung mehrere Methoden ausgearbeitet wurden. Auf Grund der klassischen Theorie konnte a nicht berechnet werden. Erst mit Hilfe der Wellenmechanik

konnten Formeln hergeleitet werden, welche eine Berechnung von α ermöglichten. Die Wellenmechanik gibt für die Polarisierbarkeit folgende Formel

$$\alpha = 2 \sum_{s'} \frac{H(s, s')^2}{E_s - E_{s'}} \quad (2)$$

wo

$$H(s, s') = \int \psi_s(\Sigma z \varepsilon) \psi_{s'} d\tau \quad (3)$$

ist. $\psi_s, \psi_{s'}$ sind die Eigenfunktionen im Zustande s bzw. s' ; z bedeutet eine rechtwinkelige Koordinate, ε die positive Elementarladung und $d\tau$ das Volumenelement. $E_s, E_{s'}$ bezeichnet die Energie des Atoms oder Ions im Zustande s bzw. s' . Die Summierung in (3) geht über alle Elektronen.

Mit Hilfe dieser Formel kann die Polarisierbarkeit nur für Hydrogen berechnet werden, für Atome mit mehreren Elektronen ist die Formel zur Berechnung von α ungeeignet, da man in diesen Fällen die Eigenfunktionen der angeregten Zustände nicht genügend kennt. In diesen Fällen ist man auf Näherungsmethoden angewiesen. Eine solche Näherungsmethode bzw. Näherungsformel wurde von Pauling¹ dann von Slater und Kirkwood² und später von Kirkwood³ hergeleitet. Die von Kirkwood hergeleitete Näherungsformel ist folgende:

$$\alpha = \frac{4a_H^3}{9N} (\Sigma r^2)^2 \quad (4)$$

wo a_H den ersten H -Radius und N die Zahl der Elektronen des Atoms oder Ions bedeutet. \bar{r}^2 ist der über die Elektronendichte des Atoms oder Ions gemittelte Wert von r^2 .

Im folgenden leiten wir mit Hilfe einer statistischen Störungsrechnung für α ebenfalls eine Näherungsformel her. Bevor wir dazu übergehen, ist es aber notwendig die wichtigsten Resultate der statistischen Störungsrechnung anzugeben, da die folgenden Betrachtungen sich auf diese gründen.

¹ L. PAULING Proc. Roy. Soc. London (A) 114, 181, 1927.

² J. C. SLATER u. J. G. KIRKWOOD, Phys. Rev. (2) 31, 682, 1931.

³ J. G. KIRKWOOD, Phys. ZS. 33, 57, 1932.

2. §. Herleitung einer Näherungsformel für die Polarisierbarkeit in der statistischen Störungsrechnung.

Wir legen dem folgenden das statistische Atommodell von THOMAS-FERMI-DIRAC⁴ zu Grunde, in welchem der Elektronenaustausch mit berücksichtigt ist. Vom Verfasser wurde im Rahmen dieses Modells eine Störungsrechnung ausgearbeitet,⁵ in welcher man für die Störungsenergie erster und zweiter Ordnung $E_S^{(1)}$ bzw. $E_S^{(2)}$ folgende Ausdrücke erhält:

$$E_S^{(1)} = -N\varepsilon w_{00}^{(1)} \quad (5)$$

$$E_S^{(2)} = -\frac{3N\varepsilon}{4} \frac{1}{\bar{V}_{11}} [w_{00}^{(2)} - (w_{00}^{(1)})^2] \quad (6)$$

wo

$$w_{00}^{(i)} = \frac{1}{N} \int v^i \rho_0 d\tau \quad (7)$$

ist. In dieser Formel bezeichnet v das Störungspotential, ρ_0 die ungestörte Elektronendichte, N die Zahl der Elektronen des Atoms und $d\tau$ das Volumenelement.

\bar{V}_{11} ist ein Potentialmittelwert, welcher folgendermassen definiert ist

$$\frac{1}{\bar{V}_{11}} = \frac{1}{N} \int \frac{1}{(F + \sigma)F} \rho_0 d\tau \quad (8)$$

hierin ist

$$F = (V_0 - \lambda + \sigma^2)^{1/2} \quad (9)$$

und

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{a_H^{1/2}} \quad (10)$$

wo V_0 das Gesamtpotential im THOMAS-FERMI-DIRAC-Atom bezeichnet und λ für neutrale Atome, auf welche wir uns im folgenden beschränken, folgende Konstante ist:

$$\lambda = \frac{15\varepsilon}{32\pi^2 a_H} \quad (11)$$

⁴ P. A. M. DIRAC, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26, 376, 1930;

L. BRILLOUIN, Journ. de phys. et le Radium, 5, 185, 1934;

H. JENSEN, ZS. f. Phys. 89, 713, 1934; 93, 232, 1935.

⁵ P. GOMBÁS, ZS. f. Phys. 97, 633, 1935; 98, 417, 1936.

Die Integration in den Formeln (7) und (8) ist auf den ganzen Raum auszudehnen.

Wir wollen nun mit Hilfe der angegebenen Ausdrücke für α eine Formel herleiten. Wir bringen also das Atom in ein homogenes elektrisches Feld von der Feldstärke \mathcal{E} . Wenn wir die z Achse des Koordinatensystems in die Richtung von \mathcal{E} legen, so erhält man für das Störungspotential folgenden Ausdruck:

$$v = - |\mathcal{E}| z = - |\mathcal{E}| r \cos \vartheta \quad (12)$$

wo r die Entfernung vom Kern und ϑ der Winkel zwischen der z Achse und r ist.

Wenn man den Ausdruck (12) in (7) einsetzt, so erhält man

$$w_{00}^{(1)} = 0 \quad (13)$$

$E_S^{(1)}$ ist also 0, wie dies in unserem Falle auch sein muss.

Für $E_S^{(2)}$ erhält man

$$E_S^{(2)} = - \frac{3N\varepsilon}{4} \frac{1}{V} w_{00}^{(2)} \quad (14)$$

wo wir statt \bar{V}_{11} der einfacheren Schreibweise halber \bar{V} setzten. Nach einsetzen der weiter oben angegebenen Ausdrücke, erhält man hieraus

$$E_S^{(2)} = - \frac{3\varepsilon}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{V} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^4 \rho_0 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (15)$$

oder nach Durchführung der Integration nach ϑ und φ

$$E_S^{(2)} = - \frac{3\varepsilon}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{V} \frac{1}{3} \int_0^{\infty} r^2 \rho_0 4\pi r^2 dr = - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\mathcal{E}^2}{V} \bar{r}^2 \quad (16)$$

wo \bar{r}^2 den über ρ_0 gemittelten Wert von r^2 bezeichnet.

Ein Vergleich des Ausdruckes (16) mit der rechten Seite von (1) ergibt für α folgende Formel

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\bar{r}^2}{V} \quad (17)$$

Zur Berechnung von α hat man also \bar{r}^2 und \bar{V} zu berechnen.

3. §. Berechnung von \bar{r}^2 und \bar{V} .

Die Elektronendichte im THOMAS-FERMI-DIRAC-Modell ergibt sich folgendermassen

$$\varrho_0 = \gamma (F + \sigma)^3 \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}} a_H^{\frac{3}{2}}} \quad (19)$$

Wenn man F aus (9) einsetzt, folgt

$$\varrho_0 = \gamma [(V_0 - \lambda + \sigma^2)^{\frac{1}{2}} + \sigma]^3 \quad (20)$$

wo man, da wir uns nur mit solchen Atomen befassen, deren Elektronenverteilung kugelsymmetrisch ist, V_0 als eine Funktion von r allein betrachten kann.

Die Elektronendichte reicht im THOMAS-FERMI-DIRAC-Modell nicht bis ins Unendliche, sondern ist auf eine Kugel vom endlichen Radius r_g beschränkt.

Wir für nun statt r die Variable x und statt $V_0 - \lambda$ die Funktion $\varphi(x)$ durch folgende Gleichungen ein

$$r = x r \quad (21)$$

$$V_0 - \lambda = \frac{Z\varepsilon}{r} \varphi(x) = \frac{Z\varepsilon}{x} \frac{\varphi(x)}{x} \quad (22)$$

$$x = \left(\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} Z^{-\frac{1}{3}} a_H \quad (23)$$

wo Z die Ordnungszahl des Atoms bedeutet.

Durch die Substitution (21) und (22) erhält man aus (20)

$$\varrho_0 = \frac{Z}{4\pi x^3} \left[\beta + \left(\frac{\omega(x)}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^3 \quad (24)$$

wo

$$\omega(x) = \varphi(x) + \beta^2 x \quad (25)$$

und

$$\beta = \frac{\sigma x^{\frac{1}{2}}}{(Z\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot \pi^{\frac{1}{2}}} Z^{-\frac{1}{3}} \quad (26)$$

ist.

Es ist zweckmässig noch folgende Bezeichnungen einzuführen

$$\frac{Z}{4\pi x^3} = c \quad (27)$$

und

$$\beta + \left(\frac{\omega(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = R(x). \quad (29)$$

Dadurch erhält man

$$\varrho^{\frac{1}{2}} = cR(x) \quad (28)$$

welchen Ausdruck wir bei der Berechnung von \bar{V} gebrauchen werden.

Dem Grenzradius r_g entspricht

$$x_g = \frac{r_g}{c}. \quad (30)$$

Wir befassen uns zunächst mit \bar{r}^2 , das folgendermassen definiert ist

$$\bar{r}^2 = \int_0^{r_g} r^2 \varrho_0 d\tau = 4\pi \int_0^{r_g} r^4 \varrho_0 dr. \quad (31)$$

Oder wenn wir statt r die Variable x einführen, so folgt mit der Bezeichnung (28)

$$\bar{r}^2 = Zc^2 \int_0^{r_g} R^3(x)x^4 dx. \quad (32)$$

Wir gehen nun zur Bestimmung von \bar{V} über. Nach der Definitionsgleichung ist

$$\frac{1}{\bar{V}} = \frac{1}{Z} \int \frac{1}{(F+\sigma)F} \varrho_0 d\tau \quad (33)$$

Wenn man hier statt $F + \sigma$ und F mit Hilfe der Gleichung (18) ϱ_0 einführt, so folgt

$$\frac{1}{\bar{V}} = \frac{\gamma^{\frac{2}{3}}}{Z} \int \frac{\varrho_0^{\frac{3}{2}}}{\varrho_0^{\frac{1}{2}} - \sigma\gamma^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{4\pi\gamma^{\frac{2}{3}}}{Z} \int_0^{r_g} \frac{\varrho_0^{\frac{3}{2}}}{\varrho_0^{\frac{1}{2}} - \sigma\gamma^{\frac{1}{2}}} r^2 dr \quad (34)$$

und wenn man hier ebenfalls statt r die Variable x einführt, so folgt mit (28) und (29)

$$\frac{1}{\bar{V}} = \frac{x}{Z\varepsilon} \int_0^{x_0} \frac{R(x)}{R(x) - \beta} x^2 dx. \quad (35)$$

Zur Berechnung von \bar{v}^2 und \bar{V} haben wir also die Integrale (32) und (35) zu berechnen.

4. §. Numerische Resultate.

Die THOMAS—FERMI—DIRAC-Gleichung ist auf analytischem Wege nicht lösbar, das Lösen der Gleichung kann nur numerisch durchgeführt werden. Für Kr und Xc wurde die Gleichung von Jensen in einer unveröffentlichten Arbeit gelöst. Herr Jensen hat mir freundlicherweise die numerischen Rechnungen brieflich mitgeteilt, welche für die folgenden numerischen Berechnungen benutzt wurden. Aus den Jensenschen Tabellen kann man $R(x)$ sehr einfach berechnen und somit die Integrale (32) und (35) auf einfachem Wege auswerten. Die Resultate sind in der Tabelle 1. zusammengestellt.

Tabelle 1.

	Kr	Xc
\bar{v}^2	$43.7 a_H^2$	$57.7 a_H^2$
\bar{V}	$0.935 \frac{\varepsilon}{a_H}$	$1.17 \frac{\varepsilon}{a_H}$
α	$23 a_H^3$	$25 a_H^3$

Zum Vergleich mit unseren Resultaten haben wir α auch mit der Kirkwoodschen Formel⁶ berechnet, wobei wir für \bar{v}^2 die Werte der Tabelle 1 benutzten. Die Resultate sind in der Tabelle 2 angegeben. In der Tabelle 2 sind ebenfalls zum Vergleich mit unseren Resultaten auch die Werte von Pauling⁷ angeführt. Sowohl die Resultate, welche man aus der Kirkwood-

⁶ J. G. KIRKWOOD, l. c.

⁷ L. PAULING, l. c.

sehen Formel erhält, als die von Pauling, sind mit unseren in guter Übereinstimmung.

Tabelle 2.

	Kr	Xe
Kirkwood	$24 a_H^3$	$27 a_H^3$
Pauling	$16 a_H^3$	$27 a_H^3$

Der Potentialmittelwert \bar{V} ist für Kr und Xe, wie man aus der Tabelle 1 sieht von der Grössenordnung von 25 Volt, was dem mittleren Potential der äusseren Elektronen entspricht. Die Grössenordnung von \bar{V} entspricht also durchaus unserer Erwartung, da durch ein äusseres elektrisches Störungspotential sowieso nur die äussere Elektronenschale deformiert wird, für die Polarisierbarkeit also nur die äusseren Elektronen verantwortlich sind. Deswegen muss \bar{V} von der Grössenordnung des Potentials in der äusseren Elektronenschale sein.

Wir möchten noch bemerken, dass in unsere Formel (17) keinerlei willkürliche oder empirische Parameter eingehen, so dass wir unsere Resultate ohne Zuhilfenahme solcher Parameter erhielten.

Dem ungarischen Kultusministerium danke ich für die Gewährung eines Forschungstipendiums. Herrn Professor Dr. R. ORTVAY bin ich für die Förderung meiner Arbeit zu Dank verpflichtet. Besonders möchte ich Herrn Dr. H. JENSEN danken für die briefliche Mitteilung der numerischen Lösung der THOMAS-FERMI-DIRAC Gleichung für Kr und Xe.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Universität.
Juli, 1937.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

A *HCl* MOLEKULA ELEKTRONELOSZLÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

GOMBÁS PÁL-tól.

Ennek a dolgozatnak a célja a *HCl* molekulában az elektroneloszlást egy a szerző által egy előző dolgozatban megadott statisztikai perturbációs elmélet¹ alapján meghatározni.

A *HCl* molekulát egy Cl^- és egy H^+ Ionból gondoljuk felépítve és meghatározzuk, hogy a proton hogyan befolyásolja a Cl^- Ion elektroneloszlását. Az elektronikcserélést (Austausch) a következőkben elhanyagoljuk. A statisztikai perturbáció elmélet alapján a *HCl* molekula elektronsűrűségére a következő kifejezés adódik:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{v - \mu}{V} \right). \quad (1)$$

ahol ρ_0 a nem perturbált Cl^- Ion elektronsűrűsége, amely számára a LENZ—JENSEN-féle statisztikai függvényt használjuk, v a perturbációs potenciál, μ és V pedig a következőképpen vannak definiálva:

$$\mu = \frac{1}{N} \int v \rho_0 d\tau \quad (2)$$

$$V = \frac{\epsilon \bar{r}^2}{2a}, \quad (3)$$

itt N jelenti a Cl^- Ion elektronjainak a számát, $d\tau$ a térfogatelemet, ϵ a pozitív elemi töltést, a a Cl^- Ion polarizálhatóságát, r a Cl^- Ion magjától számított távolságát, \bar{r}^2 pedig r^2 -nek ρ_0 szerint közepelt értéke.

¹ P. GOMBÁS, ZS. f. Phys. 97, 633, 1935.

A perturbációs potenciál a mi esetünkben a következő

$$v = \frac{\varepsilon}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

ahol δ a protonnak a Cl^- Ion magjától számított távolsága, ϑ pedig az r és δ közötti szög.

A (2) alatti egyenletből μ számára nyerjük

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{4\pi}{N} \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \rho_0 r^2 dr. \quad (5)$$

Mivel a jobboldal második tagja csak 3%-a az elsőnek, jó közelítésben fennáll, hogy

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\delta}. \quad (6)$$

Ha α számára a PAULING-tól megadott értéket $3 \cdot 66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ -t használjuk, akkor nyerjük

$$V = 0 \cdot 796 \frac{\varepsilon}{a_H}. \quad (7)$$

Ha még a rövidség kedvéért a következő jelölést vezetjük be

$$c = \frac{3}{2} \frac{1}{V} = 1 \cdot 88 \frac{a_H}{\varepsilon} \quad (8)$$

akkor nyerjük

$$\rho = \rho_0 [1 + c(v - \mu)]. \quad (9)$$

Miután a HCl molekula elektronsűrűségére egy egyszerű formulát adtunk meg, meghatározzuk azokat a felületeket, melyeken a sűrűség állandó. A nem perturbált Cl^- ionban az egyenlő sűrűség felületei gömbfelületek, mégpedig egy r_0 sugarú gömbfelületen a sűrűség értéke $\rho_0(r_0)$. A következőkben meg akarjuk határozni, hogy az $r=r_0$ felületek a HCl molekulában hogyan deformálódnak. Egy egyszerű számítás a következő eredményre vezet

$$r = r_0 - \frac{c[v(r_0, \vartheta) - \mu]}{\{1 + c[v(r_0, \vartheta) - \mu]\} h(r_0) - c\rho(r_0, \vartheta)}, \quad (10)$$

ahol

$$h(r_0) = \frac{1}{\rho_0(r_0)} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \frac{1}{2r_0} \left(\frac{3}{1+c_1 \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}}} + \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}} \right) \quad (11)$$

és

$$g(r_0) = \left(\frac{dr}{dr} \right)_{r=r_0} = \frac{(\delta \cos \vartheta - r_0) \varepsilon}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{3/2}}. \quad (12)$$

A Cl^- mag közelében ($r_0 \ll \delta$) és tőle nagy távolságban ($r_0 \gg \delta$) a (11) és (12) alatti kifejezés nagyon leegyszerűsödik, miáltal a numerikus számítások nagyon könnyen vihetők keresztül. A számítások eredménye megfelel a várakozásnak. A proton közvetlen közelében módszerünk nem használható, mert itt v igen nagy értékeket vesz fel. A sűrűségeloszlás ellenben itt is megadható, minthogy az elektronsűrűségnek a proton közvetlen közelében a szabad H atom elektronsűrűségébe kell átmennie.

Elméleti fizikai intézet. Budapest, 1937. július.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25.-én tartott üléséből.)

BESTIMMUNG DER ELEKTRONENVERTEILUNG DES *HCl* MOLEKÜLS.

Von PAUL GOMBÁS in Budapest.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe einer vom Verfasser in einer früheren Arbeit ausgearbeiteten statistischen Störungsrechnung die Elektronendichte im *HCl* Molekül berechnet, und für die Flächen konstanter Elektronendichte eine Gleichung hergeleitet. Die Resultate, welche der Erwartung entsprechen, werden diskutiert.

1. §. Einleitung.

Die Bestimmung der Elektronenverteilung in Elektronenreichen Atomen und Ionen ist ein Problem, welches nur näherungsweise gelöst werden konnte, da die exakte Bestimmung der Verteilung zu unüberwindlichen mathematischen Hindernissen führt. Und zwar wurden zur Bestimmung der Elektronenverteilung zwei Näherungsmethoden ausgearbeitet die THOMAS—FERMISCHE¹ und die HARTREESCHE² Methode.

Wenn schon die Bestimmung der Elektronenverteilung von ungestörten elektronenreichen Atomen und Ionen zu Schwierigkeiten führt, ist es leicht verständlich, dass man bei der exakten Bestimmung der Elektronenverteilung in perturbierten Atomen und Ionen bedeutend grösseren Schwierigkeiten begegnet. Der Verfasser hat im Rahmen der THOMAS—FERMISCHEN Theorie eine Störungsrechnung³ ausgearbeitet, mit Hilfe derer

¹ L. H. THOMAS, Proc. Cambridge Phil. Soc. 23, 713, 1927; E. FERMI, ZS. f. Phys. 48, 73, 1928.

² D. R. HARTREE, mehrere Arbeiten im Proc. Roy. Soc. London (A) Z. B. 141, 282, 1933.

³ P. GOMBÁS, ZS. f. Phys. 97, 633, 1935; 98, 417, 1936.

man in perturbierten Atomen und Ionen die Elektronenverteilung bestimmen kann.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Bestimmung der Elektronenverteilung im HCl Molekül. Wir denken uns dabei das HCl Molekül aus einem Cl^- und H^+ Ion aufgebaut, und werden berechnen in welcher Weise das Proton die Elektronenverteilung des Cl^- Ions modifiziert. Da es sich bei unserer Methode um eine Störungsrechnung handelt, sieht man sofort, dass sie in der unmittelbaren Umgebung des Protons versagt, da dort das vom Proton erzeugte Potential nichtmehr als kleine Störung betrachtet werden kann. Ausserhalb dieses, wie wir sehen werden ganz kleinen Gebietes, gibt aber unser Verfahren eine gut brauchbare Näherung. Man kann aber die Elektronenverteilung auch in der unmittelbaren Nähe des Protons angeben, da diese sich dort wie in einem freien H Atom verhalten muss.

Für das unperturbierte Cl^- Ion gebrauchen wir die von LENZ⁴ und JENSEN⁵ ohne Berücksichtigung des Elektronenaustausches berechnete Elektronenverteilung. Entsprechend der Vernachlässigung des Austausches, beziehen wir uns im folgenden auf den Teil der statistischen Störungsrechnung, in welchem der Austausch vernachlässigt ist.

2. §. Die Elektronenverteilung im HCl Molekül.

Nach der statistischen Störungsrechnung ohne Austausch⁶ erhält man für die perturbierete Elektronendichte ϱ in erster Näherung folgenden Ausdruck

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v - \mu}{\bar{V}} \right) \quad (1)$$

wo ϱ_0 die Elektronendichte des ungestörten Systems bedeutet. v ist das Störungspotential. μ und \bar{V} sind folgendermassen definiert

⁴ W. LENZ, ZS. f. Phys. 77, 713, 1932.

⁵ H. JENSEN, ZS. f. Phys. 77, 722, 1932.

⁶ P. GOMBÁS, ZS. f. Phys. 97, 633, 1935.

$$\mu = \frac{1}{N} \int v \varrho_0 d\tau \quad (2)$$

$$v = \frac{\varepsilon \bar{r}^2}{2a} \quad (3)$$

N ist die Zahl der Elektronen des ungestörten Systems, $d\tau$ bedeutet das Volumenelement, ε die positive Elementarladung, a die Polarisierbarkeit des Systems. \bar{r}^2 ist der über ϱ_0 gemittelte Wert von r^2 , wo r bei Atomen oder Ionen die Entfernung vom Kern bedeutet. Die Integration in (2) wird auf den ganzen Raum ausgedehnt.

Für ϱ_0 benutzen wir die LENZ—JENSENSCHE Verteilung,⁷ welche die folgende ist

$$\varrho_0 = \frac{N}{4\pi A} \frac{e^{-c_1 r}}{r^3} (1 - c_1 r)^3 \quad (4)$$

$$r = \lambda x^2 \quad (5)$$

r ist wieder die Entfernung vom Kern des Cl^- Ions, λ und c_1 sind Parameter, A bezeichnet den Normierungsfaktor. Im Falle des Cl^- Ions ist

$$\lambda = 0.03112a_H, \quad c_1 = 0.285, \quad A = 0.0009500, \quad (6)$$

wo a_H den ersten H -Radius bezeichnet.

Das Störungspotential ist in unserem Falle das folgende

$$v = \frac{\varepsilon}{R} \quad (7)$$

wo R die Entfernung vom Proton bedeutet. Wenn man den Abstand des Protons vom Kern des Cl^- Ions mit δ bezeichnet, so erhält man (siehe Fig. 1.)

$$v = \frac{\varepsilon}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

wo ϑ den Winkel zwischen r und δ bezeichnet.

⁷ H. JENSEN, l. c.

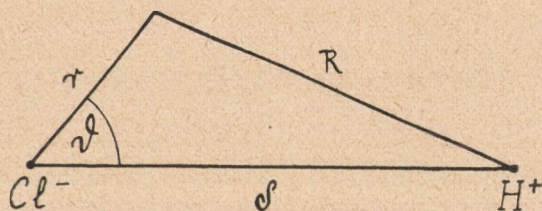


Fig. 1.

v kann man für $r < \delta$ und $r > \delta$ in eine Reihe entwickeln und zwar ist⁸

I. für $r < \delta$

$$v = \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\delta}\right)^n P_n(\cos \vartheta) \quad (9)$$

II. für $r > \delta$

$$v = \frac{\varepsilon}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{r}\right)^n P_n(\cos \vartheta) \quad (10)$$

wo $P_n(\cos \vartheta)$ die n -te Kugelfunktion bedeutet.

Für die P_n besteht folgender wichtiger Satz,⁹ welchen wir im folgenden benutzen werden

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases} \quad (11)$$

wobei wir bemerken, dass

$$P_0(\cos \vartheta) = 1 \quad (12)$$

ist.

Wir haben nun μ zu berechnen, für welches wir nach (2) und (8) folgenden Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \int \frac{\varepsilon}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \varrho_0 d\tau = \\ &= \frac{\varepsilon}{N} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varrho_0 r^2 \sin \vartheta}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} dr d\vartheta d\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

⁸ Vgl. z. B. E. JAHNKE u. F. EMDE, Funktionentafeln.

⁹ Vgl. z. B. E. JAHNKE, u. F. EMDE, l. c.

wo φ den Winkel um die Symmetrieachse (Kernverbindungs-
linie) bedeutet. Die Integration über φ kann sofort ausgeführt
werden und ergibt 2π . Man könnte auch die Integration nach
 ϑ direct durchführen, doch ist es bedeutend anschaulicher, wenn
man diese in zwei Teilen für $r < \delta$ und $r > \delta$ separat durch-
führt. Es ergibt sich

$$\mu = \frac{2\pi\varepsilon}{N} \left\{ \int_{r=0}^{\delta} \int_{\vartheta=0}^{\pi} e_0 \frac{r^2}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\delta}\right)^n P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta r d\vartheta + \right. \\ \left. + \int_{r=\delta}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} e_0 r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{r}\right)^n P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta r d\vartheta \right\} \quad (14)$$

woraus man mit Hilfe des Satzes (11) erhält

$$\mu = \frac{4\pi\varepsilon}{N} \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} e_0 r^2 dr + \int_{\delta}^{\infty} e_0 r dr \right\} \quad (15)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\mu = \frac{4\pi\varepsilon}{N} \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} e_0 r^2 dr + \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\delta}\right) e_0 r^2 dr \right\}. \quad (16)$$

Das zweite Integral ist in unserem Falle gänzlich un-
bedeutend, es beträgt nur weniger als 3% des ersteren und kann
also vernachlässigt werden.

Man erhält also

$$\mu = \frac{4\pi\varepsilon}{N} \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} e_0 r^2 dr \quad (17)$$

und da

$$\int_0^{\infty} e_0 r^2 dr = \frac{N}{4\pi} \quad (18)$$

ist, folgt

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\delta}. \quad (19)$$

Der experimentell bestimmte Kernabstand des *HCl* Mole-
küls beträgt¹

$$\delta = 1.272 \text{ \AA} = 2.391 a_H.$$

¹ W. JEVONS, Band Spectra of Diatomic Molecules, Cambridge, 1932.

Mit diesem Wert erhält man für μ

$$\mu = 0.418 \frac{\varepsilon}{a_H}.$$

Für \bar{V} erhält man aus (3), wenn man \bar{r}^2 mit Hilfe der LENZ—JENSENSCHEN Verteilung berechnet, wofür man $\bar{r}^2 = 38.7 a_H^2$ erhält und für α den von PAULING¹ angegebenen Wert $\alpha = 3.66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ einsetzt

$$\bar{V} = 0.796 \frac{\varepsilon}{a_H}. \quad (20)$$

Wenn wir der Kürze halber noch die Bezeichnung

$$c = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{V}} = 1.88 \frac{a_H}{\varepsilon} \quad (21)$$

einführen, so folgt für ϱ

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 \left[1 + c \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \right] = \\ &= \varrho_0 \left[1 + c \left(\frac{\varepsilon}{(\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon}{\delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

In der Umgebung des Kernes und in grosser Entfernung vom Kern, kann man für ϱ mit Hilfe der Reihen (9) und (10) bedeutend einfachere Ausdrücke angeben und zwar wird

I. für $r \ll \delta$

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + c \frac{\varepsilon}{\delta^2} r \cos \vartheta \right) \quad (23)$$

II. für $r \gg \delta$

$$\varrho = \varrho_0 \left[1 + c \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{r^2} \delta \cos \vartheta \right) \right]. \quad (24)$$

In den Gebieten wo r und δ von angenähert gleichert Grösse sind, ist dagegen (22) zu gebrauchen.

3. §. Die Flächen gleicher Elektronendichte im *HCl* Molekül.

Im ungestörten Cl^- Ion sind die Fläche gleicher Elektronendichte, nach dem statistischen Modell, Kugelflächen da, wie

man aus (4) und (5) sieht ϱ_0 nur von r abhängt. Beim *HCl* Molekül ist das, wie man aus (22) sieht, nichtmehr der Fall. Für sehr grosse r (Fall II) sind die Flächen gleicher Elektronendichte allerdings auch im *HCl* Molekül Kugelflächen, wie man dies aus (24) sieht, da in diesem Falle das Glied $\frac{\varepsilon}{r^2} \delta \cos \vartheta$ gegenüber $\frac{\varepsilon}{r} - \frac{\varepsilon}{\delta}$ sehr klein wird, und vernachlässigt werden kann. Dies ist auch aus anderen Untersuchungen zu erwarten.

In allen anderen Fällen erhält man aber keine Kugelflächen. Die Gleichung dieser Flächen zu bestimmen ist unser Ziel.

Wir führen der Kürze halber folgende Bezeichnung ein

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho' \quad (25)$$

wo

$$\varrho' = c\varrho_0(\nu - \mu) \quad (26)$$

ist.

Im ungestörten Cl^- Ion ist die Elektronendichte auf einer Kugelfläche von Radius r_0 konstant und zwar beträgt sie $\varrho_0(r)$. Wir wollen nun berechnen wie die Kugelfläche

$$r = r_0 \quad (27)$$

im *HCl* Molekül deformiert wird. Wir haben also die Fläche zu bestimmen, auf welcher im *HCl* Molekül die Dichte den konstanten Betrag $\varrho_0(r_0)$ hat. Diese Fläche ist durch folgende Gleichung definiert

$$\varrho(r, \vartheta) = \varrho_0(r_0). \quad (28)$$

Die explizite Gleichung der Fläche erhält man hieraus, wenn man die Gleichung (28) nach r löst. Die exakte Lösung führt zu unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten. Man kann aber eine sehr gut brauchbare Näherungslösung angeben. Da sich, wie man leicht einsieht, mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung des Protons r nur wenig von r_0 unterscheidet, kann man die linke Seite von (28) in der Umgebung von r_0 nach $r - r_0$ in eine Reihe entwickeln, wobei wir nur die ersten zwei Glieder der Reihe behalten. Es wird also

$$\varrho(r_0, \vartheta) + \left(\frac{d\varrho}{dr} \right)_{r=r_0} (r - r_0) = \varrho_0(r_0). \quad (29)$$

Wenn wir folgende Bezeichnung einführen

$$\left(\frac{\partial \varrho_0}{\partial r}\right)_{r=r_0} = f(r_0) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=r_0} = g(r_0, \vartheta), \quad (30)$$

so erhält man mit Berücksichtigung von (25) und (26)

$$\varrho_0(r_0) + \varrho'(r_0, \vartheta) + \left[f(r_0) + \left(\frac{\partial \varrho'}{\partial r}\right)_{r=r_0} \right] (r - r_0) = \varrho_0(r_0) \quad (31)$$

$$c\varrho_0(r_0) [v(r_0, \vartheta) - \mu] + f(r_0)(r - r_0) + cf(r_0) [v(r_0, \vartheta) - \mu] (r - r_0) + c\varrho_0(r_0) g(r_0, \vartheta) (r - r_0) = 0. \quad (32)$$

Wenn man diese Gleichung für r löst, so folgt

$$r = r_0 - \frac{c\varrho_0(r_0) [v(r_0, \vartheta) - \mu]}{\{1 + c [v(r_0, \vartheta) - \mu]\} f(r_0) - c\varrho_0(r_0) g(r_0, \vartheta)}. \quad (33)$$

Dies ist also die Gleichung jener Fläche, auf welcher im *HCl* Molekül die Dichte den konstanten Betrag $\varrho_0(r_0)$ hat. Für verschwindende Störung $v=0$ geht sie, wie man sofort sieht, in die Kugelfläche $r=r_0$ über, wie dies auch sein muss.

Wir geben hier noch die Ausdrücke für $f(r_0)$ und $g(r_0, \vartheta)$ an. Mit Hilfe von (4) und (5) findet man für $f(r_0)$ sehr einfach

$$f(r_0) = -\frac{1}{2r_0} \left(\frac{3}{1 + c_1 \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}}} + \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}} \right) \varrho_0(r_0). \quad (34)$$

Der folgenden halber führen wir folgende Bezeichnung ein

$$h(r_0) = \frac{1}{2r_0} \left(\frac{3}{1 + c_1 \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}}} + \sqrt{\frac{r_0}{\lambda}} \right) \quad (35)$$

mit Hilfe welcher man $f(r_0)$ folgendermassen schreiben kann

$$f(r_0) = -h(r_0) \varrho_0(r_0) \quad (36)$$

$g(r_0, \vartheta)$ kann man aus (8) ebenfalls sehr einfach berechnen und zwar erhält man

$$g(r_0, \vartheta) = \frac{(\delta \cos \vartheta - r_0) \varepsilon}{(\delta^2 + r_0^2 - 2\delta r_0 \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (37)$$

Mit Hilfe von (36) kann man (33) noch vereinfachen und zwar erhält man

$$r = r_0 + \frac{c [v(r_0, \vartheta) - \mu]}{\{1 + c [v(r_0, \vartheta) - \mu]\} h(r_0) - c g(r_0, \vartheta)}. \quad (38)$$

In der Umgebung des Cl^- Kernes ($r_0 \ll \delta$) und in sehr grosser Entfernung vom Cl^- Kern wird r besonders einfach. Diese beiden Fälle wollen wir näher untersuchen.

I. $r_0 \ll \delta$. In diesem Falle wird nach (9)

$$v(r_0, \vartheta) - \mu = \frac{\varepsilon}{\delta^2} r_0 \cos \vartheta \quad (39)$$

$$g(r_0, \vartheta) = \frac{\varepsilon}{\delta^2} \cos \vartheta. \quad (40)$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (38) folgt

$$r = r_0 + \frac{r_0 \cos \vartheta}{(\gamma + r_0 \cos \vartheta) h(r_0) - \cos \vartheta}, \quad (41)$$

wo

$$\gamma = \frac{\delta^2}{c\varepsilon} = 3.04 a_H \quad (42)$$

ist.

Wir haben aus (41) r für $r_0=1$ berechnet, wo die Formel (41) noch eine brauchbare Näherung gibt. Das Resultat ist in der Tabelle 1 angegeben. Man sieht, dass die Flächen Ellipsoidflächen ähnlich sind. Sie sind jedoch an dem vom Proton entfernten Ende stärker abgeplattet als an dem Ende, welches dem Proton zugekehrt ist. Dass dies so sein muss sieht man sofort, da durch das Proton die Elektronenladung zu diesem hinübergezogen wird. Wenn r_0 gegen 0 geht, muss $r \sim r_0$ werden, da in unmittelbarer Nähe des Cl^- Kernes die Elektronenverteilung im Cl^- Ion durch das Proton nur ganz unbedeutend perturbirt wird. Dies ist aus unserer Gleichung tatsächlich zu sehen. Auf unsere Gleichung (41) übertragen, bedeutet nämlich unsere Behauptung, dass auf der rechten Seite von (41) das zweite Glied, das Korrektionsglied für $r_0=0$ von höherer Ordnung verschwinden muss als das erste Glied, also r_0 . Dies ist tat-

sächlich der Fall, denn für sehr kleine r_0 wird das Korrektionsglied

$$\frac{r_0 \cos \vartheta}{r h(r_0) - \cos \vartheta}. \quad (43)$$

Da, wie man aus (35) sieht, für sehr kleine r_0

$$h(r_0) \sim \frac{3}{2r_0} \quad (44)$$

wird, ist unsere Behauptung bewiesen.

II. $r_0 \gg \delta$. Für sehr grosse r_0 erhält man nach (10)

$$v(r_0, \vartheta) - u = \frac{\varepsilon}{r_0} - \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{r_0^2} \delta \cos \vartheta \quad (45)$$

$$g(r_0, \vartheta) = -\frac{\varepsilon}{r_0^2} \left(1 + \frac{2\delta}{r_0} \cos \vartheta \right). \quad (46)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke folgt aus (38)

$$r = r_0 - \frac{r_0^3 - \delta r_0^2 - \delta^2 r_0 \cos \vartheta}{\left(\frac{\partial r_0^3}{\partial \varepsilon} + \delta r_0^2 - r_0^3 \right) h(r_0) + \delta r_0 + (h(r_0) \delta^2 r_0 + 2\delta^2) \cos \vartheta}. \quad (47)$$

Wir haben mit diesem Ausdruck r für $r_0 = 4a_H$ berechnet, wo die Näherung noch brauchbar ist. Die Resultate sind in der Tabelle 2 angegeben (47) unterscheidet sich hauptsächlich darin von (41), dass in (41) für $\vartheta = 90^\circ$ das Korrektionsglied verschwindet, also $r = r_0$ wird, während sich in (47) auch für $\vartheta = 90^\circ$ eine negative Korrektion ergibt, was bedeutet, dass an diesen Stellen $r < r_0$ ist. Dies letztere ist eine Folge dessen, dass sich die perturbierende Wirkung des Protons in den äusseren Gebieten darin äussert, dass die Elektronenladung mehr in die inneren Gebiete gezogen wird.

Dies ist besonders gut zu sehen, wenn wir uns auf so grosse r_0 beschränken, für welche man in (45) und (46) die Glieder mit $\frac{\delta}{r_0}$ bzw. $\frac{\delta}{r_0^2}$ vernachlässigen kann. Dann wird

$$r = r_0 - \frac{r_0(r_0 - \delta)}{\left[\frac{\partial r_0^2}{\partial \varepsilon} + (\delta - r_0) r_0 \right] h(r_0) + \delta}. \quad (48)$$

Wie man sofort sieht, ist der Zähler des Korrektionsgliedes immer positiv, der Nenner ist in unserem Falle ebenfalls positiv, da

$$\frac{\delta}{c\varepsilon} > 1$$

ist. Hieraus folgt, dass für r_0 Werte, welche der obigen Bedingung genügen, r immer kleiner als r_0 ist.

Ausserdem sieht man aus (48) auch, dass für sehr grosse r_0 die Flächen konstanter Dichte Kugelflächen sind, wie wir dies auch am Anfang dieses Paragraphen schon erwähnten.

Tabelle 1.

$$r_0 < \delta$$

ϑ	$r_0 = 1a_H$		$r_0 = 2a_H$	
	Δr_0	$r = r_0 + \Delta r_0$	Δr_0	$r = r_0 + \Delta r_0$
0°	+0.133	1.133	—	—
45°	+0.087	1.087	+0.110	2.110
90°	0	1	-0.101	1.899
135°	-0.063	0.937	-0.217	1.783
180°	-0.084	0.916	-0.252	1.748

Tabelle 2.

$$r_0 > \delta$$

ϑ	$r_0 = 3a_H$		$r_0 = 4a_H$	
	Δr_0	$r = r_0 + \Delta r_0$	Δr_0	$r = r_0 + \Delta r_0$
0°	—	—	-0.022	3.978
45°	+0.046	3.046	-0.045	3.955
90°	-0.240	2.760	-0.302	3.698
135°	-0.401	2.599	-0.760	3.240
180°	-0.793	2.207	-1.142	2.858

In den Tabellen 1 und 2 sind die Querschnitte einiger Flächen

$$\varrho(r) = \varrho_0(r_0)$$

berechnet und zwar für $r_0 = 1a_H, 2a_H, 3a_H$ und $4a_H$. Für $r_0 = 1a_H$ und $4a_H$ konnten die Formeln (41) bzw. (47) benutzt werden für $r_0 = 2a_H$ und $3a_H$ wurde die Formel (38) gebraucht. Die durch die Deformationen bedingte Korrektur von r_0 ist in den Tabellen mit Δr_0 bezeichnet. Alle Daten Δr_0 und r sind in den Tabellen in a_H Einheiten angegeben. In der Umgebung des Protons versagt natürlich unsere Formel zufolge Gründen, welche wir schon weiter oben erörtert haben. Man kann aber auch in der unmittelbaren Umgebung des Protons die Flächen konstanter Dichte angeben, da dort die Dichte dieselbe sein muss wie im freien H Atom, so dass man für die Flächen konstanter Dichte in diesem Gebiet Kugelflächen erhält.

Zum Vergleich berechnen wir noch im welchem Masse ein positives Ion mit derselben Elektronenzahl, also eine K^+ Ion durch ein Proton im selben Abstand vom Kern deformiert würde. Wir haben hierzu nur V für das K^+ Ion zu berechnen. Mit der LENZ—JENSEN-schen Elektronenverteilung² erhält man

$$\bar{r}^3 = 25.7 a_H^3. \quad (50)$$

Für a benutzen wir den von PAULING³ angegebenen Wert

$$a = 0.835 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3. \quad (51)$$

Mit Hilfe dieser Daten erhält man

$$\bar{V} = 2.32 \frac{\varepsilon}{a_H}. \quad (52)$$

Es ist also

$$\frac{\bar{V}_{Cl^-}}{V_{K^+}} = \frac{1}{2.9} \quad (53)$$

was bedeutet, dass die durch das Proton verursachte Deformation der Elektronenwolke im K^+ Ion im Durchschnitt rund 3-mal

² H. JENSEN, l. c.

³ L. PAULING, l. c.

kleiner ist als im Cl^- Ion. Dieses Resultat entspricht ebenfalls der Erwartung.

Man sieht also, dass man auf ganz einfache Weise die Dichteverteilung und die Flächen konstanter Dichte im *HCl* Molekül bestimmen kann. Die Methode kann man natürlich auch auf andere Systeme übertragen, was in vielen Fälle von Interesse ist.

Herrn Professor Dr. R. ORTVAY danke ich für die Förderung meiner Arbeit.

Budapest, Institut für theoretische Physik der Universität,
Juli 1937.

¹ L. PAULING: Proc. Roy. Soc. London (A) 114, 181. 1927.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

A METHANMOLEKULA ENERGIÁJÁNAK KISZÁMÍTÁSA.

Karai NEUGEBAUER TIBOR-tól.

A szerző egy más helyen megjelent munkájában a methanmolekulát felépítő atomok távolságának és a molekula négy különböző sajátrezgésének elméleti meghatározása céljából egy kvantummechanikai közelítő módszer segítségével kiszámította azt az energiát, mely a methanmolekula nyolc külső nemesgázszerű burkot képező elektronjának és a négy protonnak a végtelenbe távolításához szükséges. Jelen dolgozat célja ezen energiának egy körfolyamat segítségével a tapasztalattal való összehasonlítása. Az ilyen módon kísérleti adatok felhasználásával nyert energiaérték 7·4%-kal tér el a számítottól, amit, ha tekintetbe vesszük, hogy a szénatom negyedik ionizációs energiáját elméletileg a négyszeresen pozitív szénion elektrosztatikus terének egy közelítő előállításával kellett meghatározni és éppen ez a legnagyobb a körfolyamatban szereplő energiaérték és azonkívül, hogy a szilárd halmazállapotú szén ugyancsak a körfolyamatban szereplő szublimációs hőjének kísérleti értéke még kissé bizonytalan, egy igen kielégítő megegyezésnek mondhatunk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13.-án tartott üléséből.)

ÜBER DIE BERECHNUNG DER ENERGIE DES METHANMOLEKÜLS.

Von TH. NEUGEBAUER in Budapest.

Es wird gezeigt, dass man die mit Hilfe einer quantenmechanischen Näherungsmethode in einer anderen Arbeit berechnete Energie, die zur Entfernung der äusseren acht Elektronen und der vier Protonen des Methanmoleküls notwendig ist, mit Hilfe eines Kreisprozesses mit der Erfahrung vergleichen kann. Der aus den experimentellen Daten berechnete Wert stimmt bis auf 7·4% mit dem theoretischen überein, was, wenn man berücksichtigt, dass die vierte Ionisierungsspannung des Kohlenstoffatoms theoretisch mit Hilfe von Abschirmungszahlen berechnet werden musste, und ausserdem auch noch die ebenfalls in den Kreisprozess eingehende Sublimationswärme des Kohlenstoffs noch etwas ungewiss ist, als recht befriedigend betrachtet werden kann.

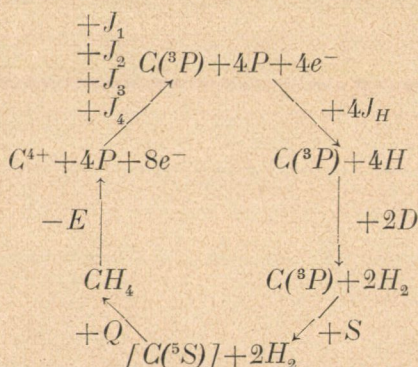
Wie das vom Verfasser an anderer Stelle gezeigt wurde,¹ ist es möglich die Energie, die zur Entfernung der äusseren acht Elektronen des Methanmoleküls, welche eine pseudoedelgasartige Konfiguration bilden und der vier Protonen ins Unendliche, mit Hilfe einer quantenmechanischen Näherungsmethode zu berechnen. Das Ergebnis ist $7\cdot341 e^2/a_H = 316\cdot07\cdot10^{-12}$ erg. Es sei noch bemerkt, dass es selbstverständlich auch möglich wäre noch die Energie, die zur Entfernung der noch übriggebliebenen zwei Elektronen notwendig ist, zu berechnen. Die Berechnung könnte man z. B. ganz leicht analog zu der Methode von HYLLERAAS zur Berechnung der Energieniveaus des He-Mole-

¹ TH. NEUGEBAUER, ZS. f. Phys. 98, 638, 1936. In dieser Arbeit wurden die Entfernungen der das Methanmolekül aufbauenden Atome voneinander und die Frequenzen der Eigenschwingungen rein theoretisch berechnet.

küls ausführen. Die daraus erhaltenen Ergebnisse könnten wir aber nicht mehr mit der Erfahrung vergleichen und wollen uns darum nicht weiter mit diesem Problem beschäftigen.

Den vorher erwähnten Energiewert können wir dagegen verhältnismässig leicht mit Hilfe eines Kreisprozesses mit der Erfahrung vergleichen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist darum diesen Vergleich mit Hilfe von besonders seit dem Erscheinen der zitierten Arbeit veröffentlichten Messungsergebnissen durchzuführen.

Den erwähnten Kreisprozess¹ können wir folgendermassen veranschaulichen:



Wir gehen von dem neutralen Molekül aus, von dem wir die äusseren acht Elektronen und die vier Protonen entfernen, dazu ist die quantenmechanisch berechnete Energie $E = 316 \cdot 07 \cdot 10^{-12}$ erg notwendig. Mit dem vierfach positiven C-Ion vereinigen wir jetzt wieder der Reihe nach vier Elektronen, wobei die ersten vier Ionisierungsenergien des C, also J_1 , J_2 , J_3 und J_4 frei werden und als Ergebnis erhalten wir ein neutrales Kohlenstoffatom im 3P Zustande. Die noch übriggebliebenen vier Elektronen und vier Protonen vereinigen wir jetzt zu vier neutrale Wasserstoffatome, wobei die vierfache Ionisationsenergie er-

¹ Dieser Kreisprozess ist dem aus vier Gliedern bestehenden BORN—HABER—FAJANS'schen Kreisprozess zur Berechnung der Gitterenergie der Alkalihalogenide analog. Vgl. z. B. A. E. Van Arkel und J. H. de Boer, Die chemische Bindung als elektrostatische Erscheinung, Leipzig. S. Hirzel, 1931. S. 57.

halten wird. Die gewonnenen vier Wasserstoffatome setzen wir dann zu zwei Wasserstoffmoleküle zusammen, dabei wird die zweifache Dissoziationsenergie $2D$ frei. Endlich bauen wir vom neutralen Kohlenstoffatom und von den zwei Wasserstoffmolekülen wieder ein Methanmolekül auf, wobei wir die Bildungsenergie des letzteren gewinnen und damit ist der Kreisprozess geschlossen. Es sei aber noch bemerkt, dass wir den letztgenannten Prozess in zwei Schritten durchführen müssen, weil nur die Bildungswärme des Methans aus festem Kohlenstoff¹ und gasförmigem Wasserstoff unmittelbar aus thermochemischen Daten berechenbar ist. Um die Reaktionswärme aus gasförmigem Kohlenstoff W berechnen zu können, müssen wir noch die Sublimationswärme des letzteren kennen, die diesbezüglichen experimentellen Ergebnisse sind leider noch etwas ungewiss, wie wir noch darauf zurückkommen werden.

Die bei der numerischen Ausführung der Rechnung benutzten experimentellen Daten sind die Folgenden: Die Ionisationsenergien des Kohlenstoffatoms im 3P Zustande² $J_1 = 11.22$, $J_2 = 24.28$ und $J_3 = 46.34$ e-Volt. Die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms $J_H = 13.53$ e-Volt, die Dissoziationsenergie des Wasserstoffmoleküls³ $D = 4.465$ e-Volt, die Bildungswärme des Methanmoleküls⁴ $Q = 18.7$ kcal und die Sublimationswärme des festen Kohlenstoffs⁵ $S = 130$ kcal aus denen wir W berechnen können.

Die vierte Ionisierungsenergie des Kohlenstoffatoms ist leider

¹ In der Fig. 1. bedeutet die eckige Klammer ein Atom im festen Zustande, die nicht eingeklammerten Symbole bedeuten alle Atome im Gaszustand.

² R. de L. KRONIG, The Optical Basis of the Theory of Valency. Cambridge. University Press. 1935. S. 71.

³ W. JEVONS, Report on Band-Spectra of Diatomic Molecules. Cambridge. University Press. 1932. S. 269.

⁴ LANDOLT-BÖRNSTEIN, Tabellen. 5. Aufl. Hauptwerk. S. 1492. Erster Ergänzungsband S. 810. Zweiter Ergänzungsband. S. 1499.

⁵ Aus den Messungsergebnissen von J. T. Tate und W. LOZIER (Phys, Rev. 39, 254, 1932) haben diese Sublimationswärme H. G. GRIMM und H. WOLF berechnet. Vgl. GEIGER-SCHEEL, Handbuch der Physik. 2 Aufl. Bd. XXIV/2. S. 999.

experimentell nicht bekannt, wir können aber dieselbe Grösse verhältnissig leicht theoretisch berechnen. Dazu betrachten wir das vom sechsfach positiv geladenen Kohlenstoffkern und den inneren zwei Elektronen aufgebaute Gebilde und fügen noch das fragliche Elektron hinzu. Dann folgt

$$J_4 = \frac{2\pi^2 Z^{*2} e^4 m}{h^2 n^2}, \quad (1)$$

wo

$$Z^* = 6 - 2\sigma \quad (2)$$

ist und σ die von einem 1s Elektron verursachte Abschirmung der Kernladung bedeutet, wofür wir nach Slater¹ $\sigma = 0.85$ setzen, also folgt $Z^* = 4.3$. Die übrigen Buchstaben haben die in der Atomphysik gewohnte Bedeutung. Setzen wir noch $n = 2$, so folgt $J_4 = 62.54$ e-Volt.² Die polarisierende Wirkung des äusseren Elektrons auf die aus den zwei 1s Elektronen aufgebaute Schale haben wir vernachlässigt, was auch gerechtfertigt ist, da die Polarisierbarkeit eines vierfach positiven Ions schon ganz unbedeutend ist.

Unser Kreisprozess muss noch mit einem kleinen Energiebetrag ergänzt werden, von den wir bis jetzt noch nicht gesprochen haben, das ist die Nullpunktschwingungsenergie des Methanmoleküls. Da unser Molekül aus 5 schweren Partikeln aufgebaut ist, besitzt es 15 Freiheitsgrade, von denen drei wegen den Translationsfreiheitsgraden des Schwerpunktes und ebenfalls drei wegen den drei Rotationsfreiheitsgraden wegfallen, also bleiben 9 Schwingungsfreiheitsgrade übrig. Die Eigenschwingungen sind die Folgenden: Eine nichtentartete totalsymmetrische Valenzschwingung ν_t , eine dreifach entartete antisymmetrische Deformationsschwingung $\delta(a)$, eine zweifach entartete symmetrische Deformationsschwingung $\delta(s)$ und endlich eine dreifach entartete Valenzschwingung ν_3 . Daraus folgt für die Nullpunktschwingungsenergie des ganzen Moleküls

$$\frac{1}{2} hc \{ \nu_t + 3(\delta(a) + \nu_3) + 2\delta(s) \}. \quad (3)$$

¹ J. C. SLATER, Phys. Rev. 36, 56, 1930.

² SLATER hat mit Hilfe seiner Theorie diese Grösse zu 63.37 e-Volt berechnet. Vgl. auch C. ZENNER, Phys. Rev. 36, 51, 1930.

Mit Hilfe der numerischen Werte ¹

$$\nu_t = 2915 \text{ cm}^{-1}, \delta(a) = 1304 \text{ cm}^{-1}, \delta(s) = 1520 \text{ cm}^{-1}$$

und $\nu_s = 3022 \text{ cm}^{-1}$ folgt für (3) 1.1691 e-Volt. Diese Energie müssen wir mit einem positiven Vorzeichen zu unserem Kreisprozess hinzufügen, weil ja diese Nullpunktschwingungsenergie das Molekül nicht abgeben kann. Diese Energie würde frei werden, wenn es möglich wäre das Molekül in dem in Kreisprozess angenommenen schwingungslosen Zustande überzuführen.

Es sei noch bemerkt, dass selbstverständlich auch der feste Kohlenstoff eine Nullpunktschwingungsenergie besitzt, die man ebenfalls noch zur gemessenen Sublimationsenergie addieren müsste, andererseits müsste man aber die selbe Energie von der Bildungswärme des Methans (aus festem Kohlenstoff und gasförmigem Wasserstoff) subtrahieren, so dass dieses Glied von unserem Kreisprozess herausfällt. Eine ganz analoge Bemerkung bezieht sich auch auf die Nullpunktschwingungsenergie der im Kreisprozess gebildeten zwei Wasserstoffmoleküle.

Da wir somit alle in unserem Kreisprozess eingehenden Grössen kennen, so können wir den theoretischen Energiewert $E = 7.341 e^2 \cdot a_H = 316.07 \cdot 10^{-12}$ erg mit dem aus dem Kreisprozess folgenden Werte $341.32 \cdot 10^{-12}$ erg vergleichen, der also um 7.4% zu gross ist. Mit Hilfe des von Slater aus der Theorie der komplexen Spektren berechneten Werte für J_4 folgt dagegen 7.7%. Eine um 0.8% grössere Abweichung von der Erfahrung würde man erhalten, wenn man statt dem für die Sublimationswärme des festen Kohlenstoffes weiter oben angegebenen Wert, die Messungsergebnisse von Marshall und Norton ² benützen möchte, die $S = 177$ kcal. fanden. Wir wollen jedoch nicht auf die Besprechung dieser Frage näher eingehen, weil ja diese Sublimationsenergie noch etwas ungewiss ist.

Es sei noch bemerkt, dass die noch vorhandene Abweichung von der Erfahrung davon herrühren kann, dass wir die vierte

¹ H. SPONER, Molekülspektren. Bd. I. Berlin. J. SPRINGER 1935. S. 82.

² A. L. MARSHALL und F. I. NORTON, Journ. of Amer. Chem. Soc. 55, 431, 1933.

Ionisierungsenergie des Kohlenstoffatoms experimentell nicht kennen und eben dieselbe ist der grösste in unserem Kreisprozess eingehende Energiebetrag.

Die neuerdings von SCHMID und GERÖ¹ vertretene Auffassung, wonach bei der Sublimation des festen Kohlenstoffes die Atome im ⁵S Zustande frei werden und die gemessene Sublimationswärme diesem Vorgange entspricht, welches Ergebnis die genannten Verfasser aus bandenspektroskopischen Messungen hergeleitet haben, ändert an unserem Ergebnis nichts, weil der Energieunterschied zwischen dem ⁵S und dem ³P Zustande des Kohlenstoffatoms zweimal und zwar mit verschiedenem Vorzeichen in unsere Rechnungen eingehen würde.

Budapest, Institut f. theoret. Physik d. Universität, November 1937.

¹ R. SCHMID u. L. GERÖ, ZS. f. Phys. 99, 281, 1936; R. SCHMID, ebenda 99, 274, 1936.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. December 1937.)

A CIÁNMOLEKULA DISSZOCIÁCIÓS ENERGIÁJÁNAK MEGHATÁROZÁSA.

SCHMID REZSŐ, GERŐ LORÁND és M. ZEMPLÉN JOLÁN-tól.

A CN molekula disszociójához szükséges energia nagyságára vonatkozólag mindezeig csupán számítások (l. pl. legutóbb R. SCHMID und L. Gerő, *ZS. f. phys. Chem. (B)* **36**, 105. 1937.) nyújtottak hozzávetőleges értékeket; közvetlen kísérleti adatot az irodalomban nem találunk. Hogy a disszociációs energiák felkutatásánál általában sikerrel alkalmazott elektronütköztetési módszer itt nem vezet minden további nélkül eredményhez, annak az oka, hogy a CN molekula maga nem fordul elő szabadon közönséges hőmérsékleten; ha pedig a kísérleteket a dician molekulan ($NC-CN$) végezzük, az eredmények nem vihetők át egyszerűen a CN molekulára, mivel a priori nem bizonyos, hogy a CN molekula felépítésében a szén és a nitrogén atomok ugyanolyan állapotban vesznek részt, mint a dicianéban. Ugyancsak a szabad állapotban való tanulmányozhatóság hiánya az oka annak is, hogy — az abszorpciós színekép nem lévén előállítható — nem volt lehetséges sem abszorpciós disszociációhatárt (kontinuumot), sem abszorpciós sávkonvergenciát észlelni.

Tekintve, hogy a kétatomos molekulákra vonatkozó ismereteink teljessége szempontjából a cianmolekula lényeges szerepet játszik, szükségesnek mutatkozott megkísérelni, vajjon nem volna-e lehetséges a ciánspektrumban már régebben tapasztalt ^{1, 2, 3} perturbációk alapján meghatározni a CN molekula disszociációs energiáját. A sávós színeképeken észlelt perturbációk kimerítő ismerete ugyanis a disszociációs energiák megállapítása szempontjából döntő fontosságú lehet, mivel a perturbációkban

olyan molekulaállapotok adhatnak életjelt magukról, amelyeket a spektrumban egyébként nem is tanulmányozhatnánk. A szénmonoxid esetében pl. ⁴ a CO , $1^1\Pi$ állapot különböző vibrációs termjein többek között számos perturbációt okoznak az $1^1\Sigma^-$ állapot vibrációs termemeletei; viszont olyan sávrendszer, amelyiknek kezdő, vagy végállapota az $1^1\Sigma^-$ term lenne, mindezt ideig egyáltalában nem ismeretes. A perturbációk beható tanulmányozásának eredményeképpen rendszerint megállapíthatók a perturbáló termnek nemcsak a szimmetriaviszonyai, valamint a molekula termrendszerében elfoglalt magassága, hanem rotációs és vibrációs állandói is ⁵. A CO , $1^1\Sigma^-$ esetében kapott eredmények már most azt mutatták, hogy magasabb perturbáló termemeletek felé haladva, úgy a rotációs, mint a vibrációs állandók határozottan csökkennek, azaz az $1^1\Sigma^-$ állapot vibrációs emeletei konvergálnak; sőt a konvergenciahely energiamagasságát elég kis hibahatáron belül meg is lehetett határozni. Mivel pedig a konvergencia oka, mint ismeretes, éppen a molekula bekövetkező disszociációja, a perturbációk pontos lokalizálása és disszociációs jelenségek felderítése közötti kapcsolat nyilvánvaló. Nevezetes továbbá, hogy a CO , $1^1\Sigma^-$ term okozta perturbációk alapján megállapított CO disszociációs szkéma pontosan megegyezett a szénoxidra levezetett egyéb spektroszkópai és elektronütköztetési módszerekből következő disszociációs eredményekkel.

A tényleges sávrendszerekben megnyilvánuló molekulaállapotok általában nem szoktak magasabb termemeleteikkel jelentkezni a spektrumban, aminek az okát abban kell keresnünk, hogy a magasabb energiaállapotok számossága a BOLTZMANN-faktor értelmében rendes körülmények között igen csekély és így az olyan sávok intenzitása, amelyeknek ilyen magasabb vibrációs termemelet a kezdőállapota, szintén elenyésző. Ha azonban ezek a magas vibrációs kvantumszámokhoz tartozó termek valamely más elektronnivó alacsonyabb termjein perturbációkat okoznak, akkor ezeknek a perturbációknak a révén felvilágosítást kaphatunk a közvetlen észlelést már elkerülő, magasabb emeletekről. A disszociációs energia meghatározása szempontjából pedig éppen ezek bírnak nagy fontossággal.

A CN molekula szinképe csupán két sávrendszert tartalmaz,

amelyek mindössze három elektronállapot közötti átmenetet reprezentálnak. Az úgynevezett ibolya CN -sávok $B^2\Sigma \rightarrow X^2\Sigma$, a vörös CN -sávok pedig $A^2\Pi \rightarrow X^2\Sigma$ átmenetnek felelnek meg; a legmagasabb észlelt vibrációs termék pedig a következők: $X^2\Sigma$, $v=15$, $A^2\Pi$, $v=11$ és $B^2\Sigma$, $v=15$. Különösen számos perturbációval találkozunk a $B^2\Sigma$ állapotban. Ennek alacsonyabb vibrációs emeleteihez tartozó rotációs termsorai igen magas rotációs kvantumszámokig követhetők a közönséges, levegőben égő szén-ívlámpa spektrumában, míg magasabb vibrációs emeleiteit az aktív nitrogén segítségével gerjeszthető «tail» sávokon tanulmányozhatjuk. Bár az előbbieket úgyiszlóván a legrégebben ismert sávok és hullámhosszmérések is már évtizedekkel ezelőtt készültek róluk, valóban szisztematikus és a mai elméleti ismereteknek megfelelően feldolgozott adatokkal mégsem rendelkezünk az irodalomban. Az utóbb említett tail-sávok rotációs analízisét JENKINS² végezte el. Mivel a perturbációk tanulmányozásánál az egyes eseteknek közvetlen szemlélet révén való összehasonlítása, egyeztetése stb. úgyiszlóván elengedhetetlen fontosságú, számos felvételt készítettünk magunk is az ibolya CN -sávokról. Fényforrásul 20 mm vastag és egymástól 3–4 cm-re távolított tiszta szénpálcák között, közönséges nyomáson levegőben égő, 220 Volt egyenáramú feszültséggel táplált elektromos ívet használtunk. A felvételek az intézet 6·5 m görbületi sugarú, hüvelykenként 30,000 karcolatú, HOCHHEIM-ötvözzel bevont felületű rácsának első és másodrendjében, ILFORD DN és PERUTZ PERSSENSO lemezekre készültek 2 perctől 16 óráig variált expozíciós idők alatt. A felvételek szemléletének eredményeit egybevetettük régebbi kutatóktól közölt felvételekkel, sematikus rajzokkal, leírásokkal; különösen hasznosnak bizonyult BRIGE ábrája⁶ a (2, 2) sáv perturbációiról. Rendkívül hálásak vagyunk JENKINS professzornak, aki eredeti felvételeit bocsátotta rendelkezésünkre és így megkaphatjuk a tail-sávok újbóli lefényképezését.

A $B^2\Sigma \rightarrow X^2\Sigma$ sávok dublett P és R ágakból állanak. A dublettfelbomlás, mint azt az elmélet is kívánja, a rotációs kvantumszámmal lineárisan nő és általában a huszadik-harmincadik vonaltól kezdve válik észlelhetővé. Minthogy a perturbáció hatása nem egyforma a $^2\Sigma$ két komponensén, a perturbált he-

lyeken a dublettfelbontás abnormálissá válik; erről az abnormális dublettfelbomlásról a perturbációk minden mérés nélkül, a sávok pusztja szemlélete alapján is felismerhetők.

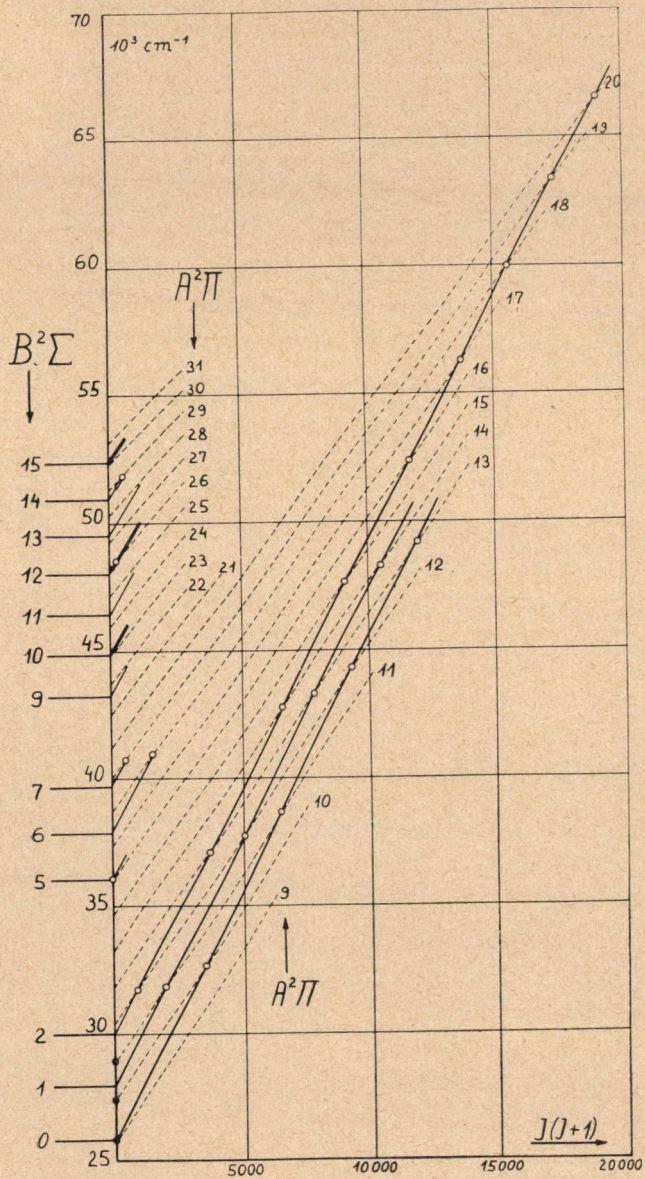
A $B^2\Sigma \rightarrow X^2\Sigma$ (ibolya) sávrendszer $v''=11$ -hez tartozó sávjain mutatkozó perturbációk már igen régóta ismeretesek; ezeken tanulmányozták ROSENTHAL és JENKINS¹ először behatóan a perturbáció jelenségét, kimutatva, hogy azt az $X^2\Sigma$ term $v=11$ -es emeletének és az $A^2\Pi$ term $v=6$ -os emeletének keresztezése okozza. JENKINS, ROOTS és MULLIKEN³ később tényleg meg is találták a $v'=6$ -hoz tartozó vörös ciánsávokon a megfelelő invert perturbációkat is. Az ibolya sávokon található összes többi perturbációról kimutatható volt, hogy azok a $B^2\Sigma$ kezdőállapoton foglalnak helyet. Ez részint annak az alapján történt, hogy a P ágban mindig két rotációs kvantumszámmal később jelenik meg ugyanaz az effektus, mint az R ágban, részint pedig — főképpen ott, ahol a fejképző P ág vonalai fedik egymást és így az észlelés nem mindig megbízható — azáltal, hogy a közös kezdőállapotú sávokon található perturbációk azonosak egymással. A $B^2\Sigma$ termen így lokalizált perturbációk — kettő kivételével — igen hasonlóak és mind megegyeznek egymással abban, hogy feltűnő intenzitás-anomáliát nem okoznak. Ezzel szemben a $v=15$ -ös emeleten $K=22$ kvantumszámnál és $v=14$ -en, $K=8$ -nál két olyan perturbáció fordul elő, melyek merőben különböznek a többitől. Ezeknél ugyanis egyrészt a dublettfelbontás anomális megnövekedése nem fokozatosan történik, mint a többiekénél, hanem ugrásszerűen, egymást váltogatva, hol igen nagy, hol pedig igen kicsiny felbomlás észlelhető 3–4 egymásutáni vonalon, míg a perturbációhely előtt és után közvetlenül teljesen normális a felbontás. Ugyanígy a perturbált vonalak intenzitása is szokatlan és szabálytalan nagymérvű intenzitásingadozást mutat.

Kézenfekvő az a feltevés, hogy a $B^2\Sigma$ termen észlelt perturbációk — az említett kettő kivételével — közös okozóra vezethetők vissza. Minthogy dublettfelbontás-anomáliák tapasztalhatók, a perturbációkat csak Π term okozhatja; ugyanis egy Σ – Σ perturbációnál a Σ termék komponenseinek egyformán kell megzavarva lenniök. Hogy valóban Π term okozza a per-

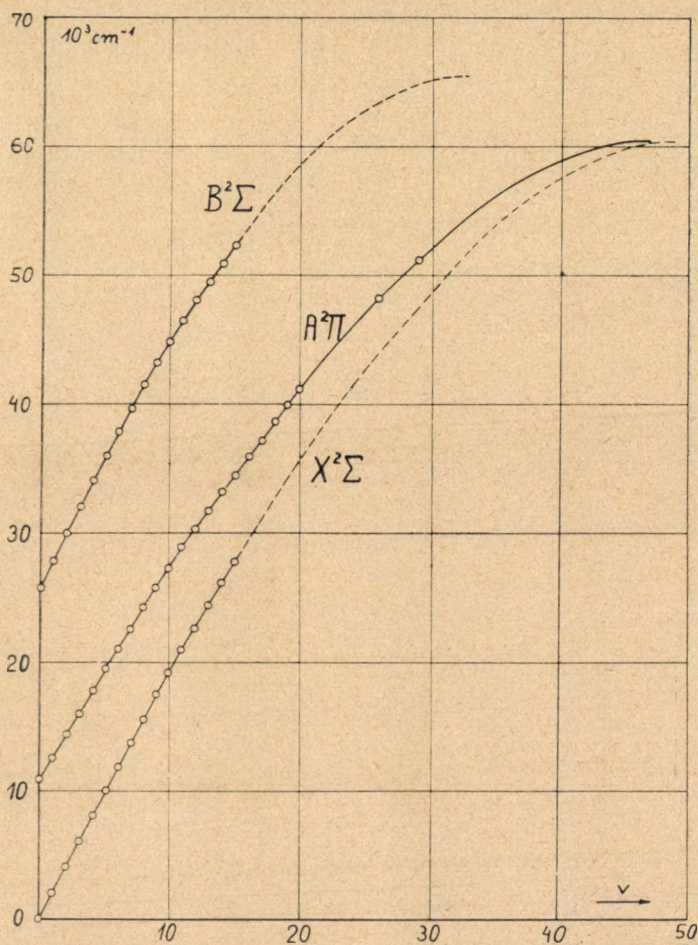
turbációkat, arra mutat az a körülmény is, hogy a vibrációs termemeletek szabályos sorában sehol sincsen rendellenesség, holott a sávok nullahelyeihez elég közel eső esetleges $\Sigma-\Sigma$ perturbációk a nullahelyek helyzetét — és így maguknak a sávoknak a helyzetét is — befolyásolni tudnák. A *CN* molekulának egyetlen ismert *II* termje lévén, (a vörös ciánsávok A^2II kezdőállapota) minden valószínűség szerint ezt kell a perturbációkért felelőssé tennünk.

Az első ábra $J(J+1)$ függvényében a $B^2\Sigma$ állapot vibrációs termsorait tünteti fel, teljes vonallal kihúzva. A termsorokat egyenes vonalaknak rajzoltuk fel, azaz a $J(J+1)$ magasabb hatványait tartalmazó tagokat elhanyagoltuk. Ez annak a teljesen indokolt közelítő feltevésnek az alapján történt, hogy a rotációs konstansok az összes itt szereplő termekre nézve közel egyformák s így a magasabb hatványok elhanyagolása az ábrát kissé eltorzítja ugyan, de a termsorok relatív helyzete és így a metszési helyek kvantumszámjai változatlanok maradnak. Azonkívül — egyszerűbb ábrázolás kedvéért — a dublettermeket középértékükkel helyettesítettük. A termsorokon látható karikák az észlelt perturbáció-helyeket jelzik, az ordináta tengelyen lévő három sötét kör pedig az A^2II term három legfelső vibrációs emeletét. A $v=0$ -hoz és $v=1$ -hez tartozó termeket és perturbációkat a saját lemezeinken kimért 0, 0 és 1, 1 sávok adatai, a $v=2$ -höz tartozókat pedig BIRGE már említett művében található 6. ábra alapján rajzoltuk fel. A $v=5$, termsor legelején, valamint $v=6$, $J=38$ -nál és $v=7$, $J=25$ -nél a JENKINS által rendelkezésünkre bocsátott lemezek alapján identifikáltunk perturbációkat; $v=9$ -tól $v=15$ -ig az adatokat JENKINS saját mérései, illetve művének² 2. ábrája szolgáltatta. Ez utóbbi termemeleteken a JENKINS által észlelt anomális dublettfelbontásokat, melyek nagyobb rotációs kvantumszámintervallumokra terjednek ki, kettős vonallal jelöltük, minthogy ezek értékes felvilágosítással szolgálnak a perturbációt okozó term elhelyezkedésére vonatkozólag.

Az A^2II term vibrációs emeletei — mint említettük — $v=11$ -ig ismeretesek. Az ábrán megjelölt három legmagasabb ($v=9$, 10 és 11-hez tartozó) nullahelyből kiindulva, a szintén



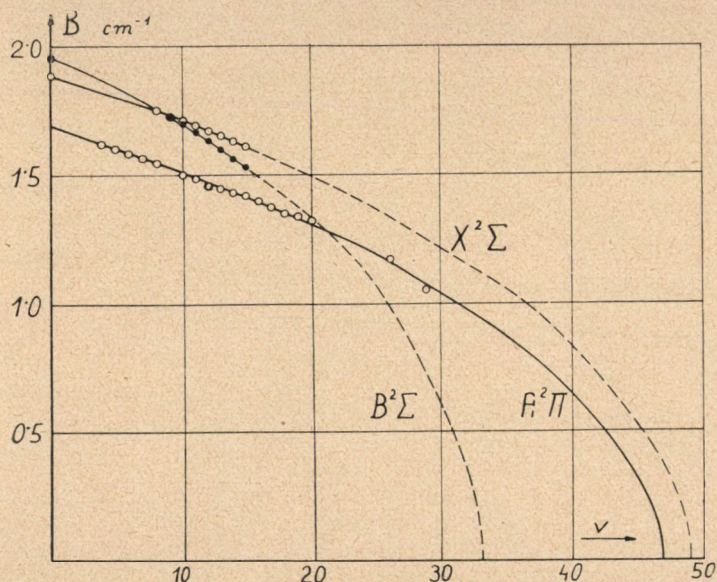
1. ábra.



2. ábra.

ismert rotációs állandók segítségével, felrajzolhatjuk a megfelelő rotációs termsorokat. Ezek a szaggatott vonalakkal jelölt termsorok a $B^2\Sigma$ állapot $v=0$ és 1-es termsorait éppen az észlelt perturbációk helyén metszik, azaz feltételünk helyes volt. Ezen az alapon már most — a megfelelő perturbációhelyeken átmenő vonalak segítségével — az $A^2\Pi$ állapot egész termrendszere meglehetősen biztonsággal rekonstruálható. Ha még azt is szem

előtt tartjuk, hogy az egymásután következő vibrációs termeknek a magasabb energiák felé haladva, mind közelebb kell kerülniök egymáshoz, továbbá hogy a rotációs állandó a magasabb vibrációs kvantumszámú termék irányában csökken és így felfelé a szaggatott vonalak dőlésének mind laposabbakká kell válniök, akkor a szerkesztés teljesen egyértelművé válik.



3. ábra.

Az $A^2\Pi$ állapot termjei, illetve az azokat jelző vonalak be-rajzolásának helyessége az 1. ábrába körülbelül $v=20$ -ig plauzibilis, mert hiszen a legtöbb helyen mindössze 2—2 pont összekötéséről van szó. Magasabb kvantumszámoknál, vagyis JENKINS «tail» sávjainak a közelében viszont az a körülmény igazolja az elhelyezést, hogy — amint várható — a dublettfelbomlás megnövekedése mindenütt azokon a helyeken következik be, ahol a $B^2\Sigma$ termjei az $A^2\Pi$ termjeinek közelébe kerülnek.

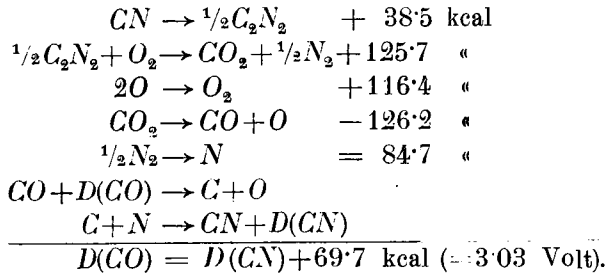
A 2. és 3. ábra az $A^2\Pi$ term vibrációs termemeleteit (a $CN X^2\Sigma$ alapállapot nullahelyétől számítva), illetve rotációs állandóit tünteti fel a v vibrációs kvantumszám függvényében, az

1. ábra alapján. Mint látható, mindkét görbe megfelel a fenti követelményeknek és hasonló azokhoz, melyeknek alapján a CO szinképpel kapcsolatban felmerült problémákat sikerült megoldani. A két ábra egybevetéséből az $A^2\Pi$ term konvergenciahatára is megbecsülhető, még pedig aránylag igen kis hibával. A vibrációs termemeletek görbéjének ugyanis egy bizonyos vibrációs kvantumszámnál maximumot kell elérnie, a rotációs állandóknak viszont éppen eunél a kvantumszámnál kell zérusra lecsökkennie. A két görbét megfelelően összehangolva arra az eredményre jutunk, hogy a konvergencia kb. $v = 47$ -nél következhet be és a konvergenciahatár energiamagassága körülbelül $60,500 \text{ cm}^{-1}$ a $CN X^2\Sigma, J=0, J=0$ alapállapot fölött; az elkövetett hiba minden valószínűség szerint jóval belül van 1000 cm^{-1} -en.*

A következő legfontosabb kérdés, hogy milyen atomtermkombinációt rendeljünk ehhez a konvergenciahatárhoz. Mindenestre közvetlenül világos, hogy a szénatom alap 3P termjét kell választanunk. A szén és nitrogén legalacsonyabb termjei közül ugyanis csak ennek van — körülbelül 40 cm^{-1} -nyi — multiplett-felbomlása, tehát a mintegy 50 cm^{-1} -nyi spindublettel rendelkező $A^2\Pi$ term disszociációtermékei között ennek okvetlenül szerepelnie kell. A nitrogénterm kiválasztásánál azonban

* Az $A^2\Pi$ állapot vibrációs analízis révén ismert 12 legalsó vibrációs emelele másodfokú vibrációs formulát elégít ki. Ha ennek a másodfokú formulának az alapján számítjuk ki a magasabb emeletek energiamagasságát, akkor szisztematikusan magasabb értékeket kapunk, mint ami a perturbációk alapján várható. Ez egyébiránt a tapasztalat szerint valamennyi kétatomos molekula minden elektronállapotára igaz: a vibrációs termemeletek másodfokúnál gyorsabban konvergálnak. Ezt úgy vettük tekintetbe, hogy a formulában a másodfokú tag (negatív előjelű) együttthatóját lépésről-lépésre fokozatosan növeltük oly módon, hogy az így kapott vibrációs termemeletek éppen összeessenek a perturbációkból kapott termekkel. $v=30$ -on felül, ahol már nincsen perturbáció, a másodfokú tag együttthatójának növelését az eddigi ütemben folytattuk egészen a konvergenciahatárig. Az így kapott konvergenciahatár energiamagassága mármost nem függ jelentős mértékben a $v=30$ -on felül beálló kisebbmértvű bizonytalanságtól; az észszerű határok közötti próbálgatások mindössze $\pm 800 \sim 900 \text{ cm}^{-1}$ -nyi maximális ingadozást mutatnak.

már azt a körülményt is figyelembe vesszük, hogy a CN molekula disszociációs energiája jól ismert termokémiai adatok segítségével kapcsolatba hozható a CO disszociációs energiájával. Ugyanis:



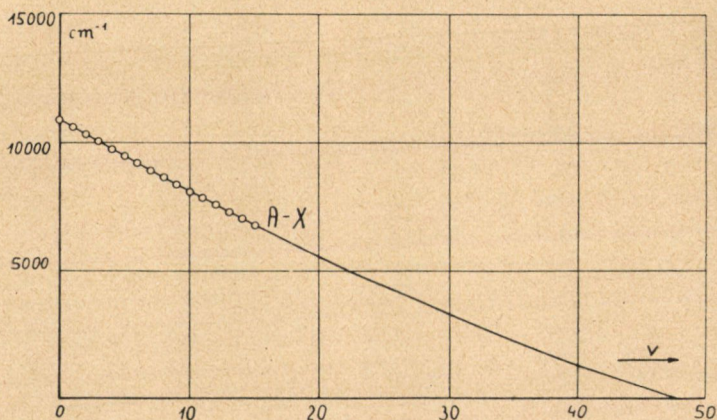
$D(CO)$ helyébe $11\cdot06$ Voltot helyettesítve, (amikor is a szén 5S állapotában jelentkezik, mint disszociációtermék) $D(CN) = 8\cdot03$ Volt. Ha a $60,500 \text{ cm}^{-1} = 7\cdot47$ Voltos konvergenciahelyhez a 3P szén mellé sorra 4S , 2D és 2P nitrogéntermeket rendelünk, akkor a $C(^5S) + N(^4S)$ atomtermkombináció $11\cdot64$, $9\cdot27$, illetőleg $8\cdot08$ Volt energiamagasságba kerül. Mint látható, csak az utóbbi egyeztethető össze a fenti termokémiai ciklussal, úgy hogy a $60,500 \text{ cm}^{-1}$ -es energiamagassághoz a $C(^3P) + N(^2P)$ atomtermkombinációt kell hozzárendelnünk. Ezek szerint tehát a CN molekula disszociációs energiája (5S állapotú szénatomba) $8\cdot08 \pm 0\cdot1$ Voltnak adódik.

A 2. és 3. ábra az A^2II mellett az $X^2\Sigma$ és $A^2\Sigma$ állapotok vibrációs termemeleteit, illetőleg rotációs állandóit is feltünteti. Az A és X állapotok megfelelő kvantumszámú emeletei láthatólag közelednek egymáshoz. Ha az egyforma vibrációs kvantumszámú A^2II és $X^2\Sigma$ termék energiakülönbségét a kvantumszám függvényében felrajzoljuk, — l. a 4. ábrát, — akkor az így kapott görbe körülbelül $v = 45 \sim 50$ körül metszi az abszcisszatengetelyt, azaz az X term vibrációs termemeletei éppen ott kerülnek az A term emeleteinek közvetlen közelébe, ahol az utóbbinak konvergenciahatára van. Ez arra mutat, hogy a két term konvergenciahatára közös.

A $B^2\Sigma$ állapot vibrációs termemeletei határozottan távolodnak az $X^2\Sigma$ és A^2II -től. Így ennek a konvergenciahatára maga-

sabb energiánál kell hogy feküdjék, mint amazoké. Mint főképpen a rotációs állandók görbéjéből (3. ábra) jól látható, a $B^2\Sigma$ term sokkal gyorsabban konvergál, mint a másik kettő és így a konvergencia határa már az észlelt 16 vibrációs emelet alapján is megállapítható, aránylag nem nagy hibával. A 2. és 3. ábra görbéinek szemlélete alapján nyerjük, hogy a konvergencia körülbelül $v=33$ -nál, mintegy $65,500 \pm 1000 \text{ cm}^{-1}$ energiamagasságban következik be.

Éppen ebbe az energiamagasságba jut a fenti hozzárendelés alapján a $C(^5S) + N(^4S)$ atomtermkombináció. Ez a tény



4. ábra.

már önmagában véve is független és igen erős bizonyítékot szolgáltat a hozzárendelés helyessége mellett; bármely más hozzárendelésnél ugyanis a $B^2\Sigma$ term konvergenciahelyének még a környékére sem esik atomtermkombináció.

Mint láttuk, a $B^2\Sigma$ állapot termjein valamennyi perturbációt, kettő kivételével, az $A^2\Pi$ állapot okozza. Ha ennek a fennmaradó két perturbációnak az okozóját keressük, elsősorban mindenesetre az $X^2\Sigma$ alapállapotra kellene gondolnunk. Az alapállapot termsorai $v=15$ -ig ismereteseek és az utolsó két termsor, a $v=14$ -es és 15 -ös már olyan energiamagasságban van, hogy átmetszi a $B^2\Sigma$, $v=0$ -ás 1 -es termsorait. Ezeknek az átmetszéseknek a helyén azonban nyoma sincsen perturbációnak; éppúgy

a magasabb emeleteken sem találunk olyan zavarokat, amelyek ${}^2\Sigma$ termtől eredhetnének. El kell vetnünk tehát azt a feltevést, hogy a két ${}^2\Sigma$ term, az X és B , kölcsönösen zavarhatnák egymást. Így az említett két effektust valami más termnek kell okoznia.

A (15, 15)-ös ibolya ciánsávon észlelhető perturbáció $K=22$ -nél kezdődik, körülbelül $53,400\text{ cm}^{-1}$ energiamagasságban; az $R(21)$ -es vonal intenzitása abnormálisan megnőtt. $K=23$ -nál igen gyenge, $K=24, 25$ és 26 -nál körülbelül normális intenzitás észlelhető. $K=27$ -nél ismét erős intenzitáscsökkenés áll be és a következő vonal már teljesen eltűnt. A $\nu'=16$ -hoz tartozó sávok már egyáltalán meg sem jelennek a színeképen, annak ellenére, hogy a (15, 15)-ös sáv intenzitásából ítélve, legalább is a (16, 16) sávnak észlelhetőnek kellene lenni.

Az olyan intenzitás-anomáliák, amelyekkel nem jár együtt a vonalak frekvencia-értékének észrevehető megváltozása, valamely disszociációs határ közelségére szoktak mutatni. Valóban, az észlelt perturbáció közelében, $53,350\text{ cm}^{-1}$ -nél, van a $C({}^1S)+N({}^4S)$ atomtermkombináció, mely az észlelt intenzitás-anomáliákat és a $\nu'>15$ -höz tartozó sávok meg nem jelenését okozhatja. Ebből az atomtermkombinációból csak egy ${}^4\Sigma$ term származhat ugyan, de az interkombinációs perturbációnak, illetve predisszociációnak, mint a CO -nal tapasztalhattuk, semmi akadályja sincsen.

A másik «számfeletti» perturbáció a (14, 14)-es sávon, $51,040\text{ cm}^{-1}$ energiamagasságban foglal helyet. Ennek a sávnak $R(8)$ -as és $R(11)$ -es, valamint $P(10)$ -es és $P(13)$ -as vonala mutat fel intenzitás-anomáliát és szabálytalan dublettfelbomlást: a közbülső R és P vonalak helyzete és intenzitása teljesen szabályos. Ezen a környéken, $50,900\text{ cm}^{-1}$ -nél van a $C({}^3P)+N({}^3D)$ atomtermkombináció; az ezekből származó számos molekulaterm valamelyike okozhatja a leírt jelenséget.

A $C+N$ atomtermek skémájában a következő alacsonyabb kombináció $C({}^1D)+N({}^4S)$, $41,900\text{ cm}^{-1}$ energiamagasságban. Ez a $B^2\Sigma$ állapot $\nu=8$ -as emeletén okozhat intenzitáscsökkenést. Az ibolya cián-sávrendszer sajátos szerkezete és intenzitáseloszlása miatt azonban $\nu'=8$ -as sáv egyetlen egy sem észlelhető, úgy hogy erről az effektusról nem győződhetünk meg közvetlen szemlélet alapján.



A legalacsonyabban fekvő $C(^3P) + N(^4S)$ atomtermkombináció energiamagassága a CN alapállapot felett $31,700 \text{ cm}^{-1}$. Ebben az energiamagasságban volna az $A^2\Pi$ állapot $v=12$ -es termje, ez az állapot azonban csak $v=11$ -ig észlelhető. A $B^2\Sigma$ állapotban a $v=2$ -es és 3-as emelet közé esik a $31,700 \text{ cm}^{-1}$ -es határ; ennek megfelelőleg a (2, 2)-es ibolya ciánsáv még elég intenzív lemezeinken, míg a (3, 3) már nem észlelhető. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a $C(^3P) + N(^4S)$ termkombinációból csak repulzív molekulatermek keletkezvén, a predisszociáció nem határgörbe, hanem határegyenes mentén következik be. A $v=3$ -as emelet mindenestől a határegyenes fölé esik, ez viszont olyan meredek, hogy a $v=2$ -es emeletet csak igen nagy kvantumszámmal metszi. (Hasonló jelenséget észlelt COSTER, VAN DIJK és LAMERIS az N_2 szinképén.⁷

A CN disszociációnak ez a megfejtése egyrészt megerősíti egy korábbi dolgozatunkban közölt és csak számítással nyert disszociációenergiaértéket, de egyben korrigálja is az ott közölt disszociációs szkéma egyik tévedését, nevezetesen elkerüli a két $^2\Sigma$ ciánterm átmetszését. Ha ugyanis a magasabban fekvő $B^2\Sigma$ term konvergenciahatára alacsonyabban adódott volna az $X^2\Sigma$ alapállapoténál, akkor a két Σ termnek metszenie kellett volna egymást, ennek a valószínűsége pedig, minthogy két teljesen egyforma szimmetriájú termről van szó, kvantummechanikai megfontolások alapján igen kicsiny. Azért is megnyugtató továbbá ez a disszociációs szkéma, mert ily módon az $X^2\Sigma$ CN -alapállapot felett körülbelül 3 Voltnyi energiamagasságban fekvő $B^2\Sigma$ term tartozik a «négyértékű» szénhez, az $X^2\Sigma$ alapállapot pedig a «kétértékűhöz». Ez az eddigi tapasztalatok szerint valamennyi olyan szénvegyületre igaz, melyben a szénnek nincsen mind a négy vegyértéke lekötve. Ha az 5S szénatomtermből származna CN alapállapot, akkor a CN molekulának minden valószínűség szerint stabilnak kellene lenni. Hogy valóban a $B^2\Sigma$ term tartozik a négyértékű szénhez, azt egyébiránt kétségtelenné teszi az a körülmény, hogy stabilis széntartalmú vegyületek, például dician, ciánhidrogén, izociánsav stb. bomlásánál, amely vegyületekben tehát biztosan négy vegyértékű szén szerepel, a CN gyök mindig $B^2\Sigma$ állapotában jelenik meg, mint bomlási termék.

Ezeknek a szénvegyületeknek a bomlási viszonyairól részint elektronütköztetések, részint fényabszorpciós vizsgálatok révén győződhetünk meg.

A *diciánon* TATE, SMITH és VAUGHAN⁸ végeztek elektronütköztetési kísérleteket. A C_2N_2 molekulánál két CN gyökre való szétválasztásához termokémiai adatok szerint 3·3 Voltra van szükség. Minthogy a CN molekula disszociációs energiája $C(^5S)$ és $N(^4S)$ atomokra 8·08 Volt, a dicián teljes disszociációs energiája 19·5 Volt = 448 kcal.

Az 1. táblázat a diciánban keletkező ionokat tünteti fel, keletkezési potenciáljukkal együtt. Az energiaszükségletek kiszámításánál a 2. táblázat adatait vettük alapul; I ionizációs potenciált, Sp leválasztási energiát, A gerjesztési energiát és D disszociációs energiát jelent. Az 1. táblázat utolsó rovatába a kísérleti úton meghatározott «keletkezési potenciál» és a kiszámított «energiaszükséglet» különbségét vettük fel. A számított értékekhez a következőkép juthatunk:

C_2^+ ion $18\cdot6 \pm 0\cdot5$ Voltnál észlelhető. Feltevéseink szerint a C_2 molekula a két 5S atomból összetett $^1\Sigma^*$ állapotban keletkezik; ennek ionizációs potenciálja 11·5 Voltra adódott (l. előző dolgozatunkban⁹ az acetilénnél). BLEAKNEY, CONDON és SMITH¹⁰ szerint fel kell tételeznünk, hogy $C_2N_2 \rightarrow C_2^+ + N + N$ folyamatnál a két nitrogénatom N_2 -vé rekombinálódik, mert különben egy-egy N atom leválasztására valószínűtlenül kevés energia adódnék. $C_2N_2 \rightarrow C_2(^1\Sigma^*)^+ + N_2 - 18\cdot6 \pm 0\cdot5$ Volt folyamatot véve alapul, egy-egy N atom leválasztásához mintegy 7 Volt = 161 kcal szükséges, ha a két leválasztási energia körülbelül egyenlő.

A C_2N_2 ionizációs potenciálja 14 Volt. C_2N^+ ion ennél körülbelül 6 Volttal magasabb elektronenergiánál keletkezik. Tehát vagy az első N -atom leválasztásához kell 7 Voltnál kisebb energia, vagy a C_2N ionizációs potenciálja kisebb, körülbelül 1 elektronvolttal, mint a C_2N_2 -é. Minthogy a C_2 ionizációs potenciálja — mint láttuk — még ennél is jóval kisebb, az utóbbi eset látszik valószínűbbnek.

A CN molekula ionizációs potenciálja szintén körülbelül 14 Voltra tehető.¹¹ Ezt, valamint a dicián kettéválasztásához szükséges 3·3 Voltot a CN^+ keletkezési potenciáljából levonva,

1. táblázat. Dicián.

Ion	Észlelt keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet (számított)	<i>A</i>	
$C_2N_2^+$	14.1 ± 0.1	$C_2N_2^+$	$I(C_2N_2)$	14.0	+0.1
C_2N^+	19.8 ± 0.5	$C_2N^+ + N$	$I(C_2N) + Sp(N)$	20.0	-0.2
CN^+	21.3 ± 0.3	$CN^+ + CN(B^2\Sigma)$	$I(CN) + Sp[CN(X^2\Sigma)] + A[CN(B^2\Sigma)]$	20.5	+0.8
C_2^+	18.6 ± 0.5	$C_2(^1\Sigma^*)^+ + N_2$	$I[C_2(^1\Sigma^*)] + 2Sp(N) - D(N_2)$	18.1	+0.5

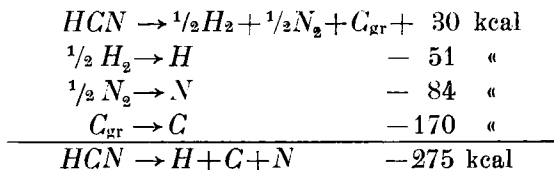
2. táblázat. Dicián.

	Volt	Kcal
$I(C_2N_2)$	14.0	322
$I(C_2N)$	13.0	300
$I(CN)$	14.0	322
$Sp(N)$	7.0	161
$Sp[CN(X^2\Sigma)]$	3.3	76
$A[CN(B^2\Sigma)]$	3.2	74
$D(N_2)$	7.4	170

még mindig 3·8 Volt felesleges energia marad, ami igen sok volna kinetikus energiának. Ezért valószínű, hogy a neutrális CN nem a kétvegyértékű szénhez tartozó alapállapotban, hanem a körülbelül 3 Volttal feljebb levő és a négyértékű szénhez tartozó $B^2\Sigma$ állapotban keletkezik, amint azt az előbbieken alapján vártuk is.

BLEAKNEY, CONDON és SMITH a C_2 ionizációs potenciálját, az acetilénben, illetőleg diciánban végzett elektronütköztetési kísérletek alapján 14·7 és 14·8 Volttnak vették fel (ugyanők a szén párolgási hőjét $L_C=133$ kcalal vették egyenlőnek). Ilyen magas ionizációs potenciál azonban teljesen valószínűtlen, ha meggondoljuk, hogy nem is a C_2 alapállapot, hanem a körülbelül 4 Volttal magasabban fekvő $1^1\Sigma^*$ állapot ionizációjáról van szó. — KALLMANN és ROSEN¹¹ egyébiránt 12 Voltban állapították meg a C_2 ionizációs potenciálját.

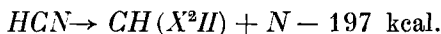
A *ciánhidrogén* (HCN) molekula disszociációs energiáját a következő termociklus adja:



PRICE szerint¹² a HCN abszorpciós színeképén 1400 Å körül észlelhető sávSOROZAT a következő vibrációs formulával adható vissza:

$$\nu = 68645 + 901 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) - 22 \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2.$$

$\nu = 4$ -től kezdve a sávok felső állapota predisszociált. Az utolsó nem diffúz emelet energiamaSSÁGA: 71500 cm^{-1} , azaz körülbelül 203 kcal. Ha a HCN disszociációs energiájából a CH $X^2\Pi$ alapállapotának 3·4 Volt=78 kcal disszociációs energiáját levonjuk, a következő bomlási egyenletre jutunk:

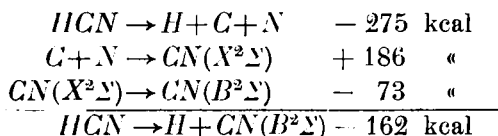


PRICE predisszociációs határához tehát ez a folyamat rendelhető hozzá.

HILGENDORFF¹³ 1770 Å-től (kb. 6·97 Volt) ibolya felé kon-

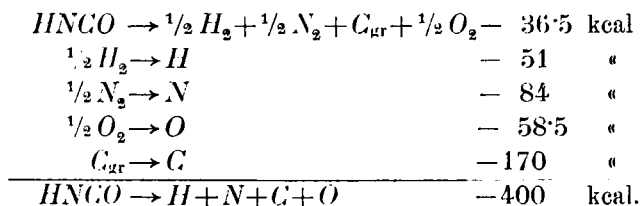
tinuumot észlelt a HCN abszorpciós színeképén. Minthogy a HCN molekula ionizációs potenciálja mintegy 14·8 Volt,¹⁴ ez a kontinuum csak disszociációval lehet kapcsolatos. Vörös felé eső oldalán HILGENDORFF abszorpciós sávokat talált, melyek a kontinuum felé konvergálnak. Spektroszkópjának aránylag kis disperziója következtében (kb. 20—30 Å pro mm 1700—1800 Å környékén) valószínű, hogy a konvergáló sávok már jóval a konvergenciahely előtt összefutottak; így a kontinuum valódi határa az észlelttől ibolya felé, valószínűleg 1750 Å körül lehet, ami körülbelül 162 kcal-nak felel meg.

Pontosan ebben az energiamagasságban várható kontinuum, ha feltesszük, hogy a disszociációtermékek H atom és $B^2\Sigma$ állapotra gerjesztett molekula. Ugyanis:



A ciánhidrogénben észlelt predisszociáció és kontinuum ismét pompás egyezésben vannak eddigi tapasztalatainkkal. Ugyanis ott, ahol a kétértékű szénhez tartozó $X^2\Sigma$ CN -term szerepelne disszociációs termék gyanánt, predisszociáció mutatkozik; abban az energiamagasságban viszont, ahol a négyértékű szénhez tartozó $B^2\Sigma$ CN -term fekszik, kontinuum jelentkezik a színeképén, mutatva, hogy ezen a helyen valódi disszociáció történik, teljesen úgy, mint a CO esetében, ahol a $C(^3P) + O(^3P)$ atomtermkombináció magasságában predisszociáció, viszont a $C(^5S) + O(^3P)$ magasságában tényleges disszociáció következik be.

Az *izociánsav* $H-N=C=O$ szerkezeti képlet alapján számított disszociációs energiája:



A CO kötésre 98, a CN kötésre pedig 186 kcal-t leszámítva, a HN kötésre 116 kcal marad. SHO CHOW WOO és TA-KONG LIU¹⁵ a $HNCO$ abszorpciós szinképen 2240 Å-nél kezdődő kontinuumot találtak, ami 127 kcal-nak felel meg; a kontinuum minden valószínűség szerint a H -atom leválásához, illetőleg az NH kötés felbomlásához tartozik. Az NH molekula disszociációs energiája így körülbelül 5·5 Volt-nak adódik, ami annál is inkább elfogadható szám, mert a H_2 és N_2 molekulák disszociációs energiái közé esik.

Irodalom.

1. J. ROSENTHAL, F. A. JENKINS: Proc. Nat. Acad. Sci. 15. 381. 1929.
2. F. A. JENKINS, Phys. Rev. 31. 539. 1928.
3. F. A. JENKINS, Y. K. ROOTS, R. S. MULLIKEN, Phys. Rev. 39. 16. 1932.
4. R. SCHMID, L. GERŐ, ZS. f. Phys. 106. 205. 1937.
5. I. KOVÁCS, ZS. f. Phys. 106. 431. 1937.
6. R. T. BIRGE, Molekular Spectra in Gases. Fig. 6. p. 90.
7. D. COSTER, E. van DIJK, A. J. LAMERIS, Physica 2. 267. 1935.
8. J. T. TATE, P. T. SMITH, A. L. VAUGHAN, Phys. Rev. 43. 1054. 1933.
9. SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND, Mat. és Természettud. Ért.
10. W. BLEAKNEY, E. V. CONDON, L. G. SCHMID, Journ. Phys. Chem. 41. 197. 1937.
11. H. KALLMANN, B. ROSEN, ZS. f. Phys. 61. 332. 1930.
12. W. C. PRICE, Phys. Rev. 46. 529. 1934.
13. H. J. HILGENDORFF, ZS. f. Phys. 95. 781. 1935.
14. SPONER, Molekülspektren I. 133. l.
15. SHO-CHOW WOO, TA-KONG LIU, Journ. Chem. Phys. 3. 544. 1935.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25.-én tartott üléséből.)

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.

DIE DISSOZIATIONSENERGIE DES *CN*-MOLEKÜLS.

Von R. SCHMID, L. GERÓ und J. ZEMPLÉN in Budapest.

Eine Untersuchung der Originalaufnahmen und Messungsergebnisse der Arbeit von JENKINS, ferner die Ausmessung eigener Aufnahmen der (violetten) *CN*-Banden ermöglichten das Einordnen der Störungen am $B^2\Sigma$ -Zustand von *CN*. Danach sind alle Störungen, die eine Vergrößerung des Spindublettes bewirken und die keine sprunghafte Intensitätsabnahme hervorrufen, den Überkreuzungen mit den höheren Schwingungstermen des $A^2\Pi$ -Zustandes zuzuschreiben. In dieser Weise werden wieder die Lagen der $A^2\Pi$ -Schwingungsstufen und die Rotationskonstanten derselben bis auf hohe Werte der Schwingungsquantenzahl genauer bekannt, woraus nun auch die Konvergenzstelle (nach einer kurzen Extrapolation) ermittelt werden kann. Man erhält etwa $60,500\text{ cm}^{-1}$ über dem $X^2\Sigma$ ($v=0, J=0$) Grundzustand; in dieser Höhe muss also eine $C+N$ Atomtermkombination liegen, aus der ein $^2\Pi$ -Zustand mit einer Dublett-aufspaltung von etwa 50 cm^{-1} (die $A^2\Pi$ besitzt) entspringen kann. Dieser Forderung entspricht nur $C(^3P)$ mit $\Delta\nu=40\text{ cm}^{-1}$, da die übrigen niedrigsten C - und N -Terme verschwindend kleine Aufspaltungen aufweisen. Wird nun $C(^3P)$ mit den verschiedenen N -Termen probeweise nacheinander kombiniert, und dann bei $60,500\text{ cm}^{-1}$ festgesetzt, so erhalten wir eine Reihe von an und für sich möglichen Dissoziationsenergien für *CN*, ausserdem aber — infolge des bekannten thermochemischen Zusammenhanges $D(\text{CO}) - D(\text{CN}) \cong 70\text{ kcal}$ — auch eine Reihe für die *CO*-Dissoziationsenergie. Es zeigt sich aber, dass von diesen letzteren nur eine einzige sich ergibt, die mit den Prädissozia-

tionsbeobachtungen im CO -Spektrum (z. B. bei 11·06 Volt) sich gut vereinbaren lässt. Diese einzig mögliche Deutung schreibt der Höhe von $60,500\text{ cm}^{-1}$ im CN die Kombination $C(^3P) + N(^3P)$ zu und ist identisch mit dem, von den Verfassern auf Grund von blossen CO -Daten vorausgesagten Lokalisieren des $C+N$ Termschemas, wonach $C(^3P) + N(^4S)$ um 3·91 Volt, $C(^5S) + N(^4S)$ um 8·08 Volt über dem CN -Grundzustand zu liegen kommt. Unterstützt wird dies noch dadurch, dass auch in den Höhen der übrigen $C+N$ Kombinationen weitere (kompliziertere) Effekte (darunter Intensitätsabfall, usw.) bemerkbar sind. Nach den vorliegenden Beobachtungen stören sich die Schwingungsterme von $X^2\Sigma$ und $B^2\Sigma$ gegenseitig nicht, und konvergieren zu $C(^3P) + N(^2P)$ [$X^2\Sigma$] und $C(^5S) + N(^4S)$ [$B^2\Sigma$]. Eine Überschneidung der zwei $^2\Sigma$ -Potentialkurven findet also nicht statt. Auch die Elektronenstossergebnisse am Dicyan, ferner die Prädissoziationsbeobachtungen in den Absorptionsspektren von HCN und C_2N_2 lassen sich im Sinne der obigen Termzuordnung deuten und in das allgemeinere Schema für die Kohleenthaltenden Moleküle und Radikale einfügen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften von 25. Okt. 1937.)

A FESTÉKES ZSELATINFOSZFOROK ABSZORPCIÓJA.

MISCHUNG ILONÁ-tól.

Egy táblával.

1. Bevezetés.

A festékes zselatinfoszforokkal számos kutató foglalkozott már,¹ az itt mutatkozó jelenségek értelmezéséhez azonban még további vizsgálatok szükségesek.

Az eddig használt festékek közül² Rhodulin Orange N (Grübler gyártmány) látszik a foszforeszcenciafény intenzitásának és az utóvilágítás időtartamának szempontjából foszforkészítéshez legalkalmasabbnak. Az erre vonatkozó emissziósávok vizsgálatával³ kapcsolatban merült fel az a kérdés, hogy vajjon a szilárd festékes zselatinfoszfor abszorpciójának a hőmérséklettől való függése pár-

¹ E. WIEDEMANN, Wied. Ann. **34**, 449, 1888; G. C. SCHMIDT, Ann. d. Phys. **58**, 102, 1898; A. POSPIELOW, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 411, 1914; A. CARRELLI u. P. PRINGSHEIM, ZS. f. Phys. **17**, 287, 1923; A. CARRELLI u. P. PRINGSHEIM, ZS. f. Phys. **18**, 317, 1923; P. FRÖHLICH, ZS. f. Phys. **35**, 193, 1925; S. I. WAWILOW u. W. L. LEWSCHIN, ZS. f. Phys. **35**, 920, 1926; E. GAVIOLA u. P. PRINGSHEIM, ZS. f. Phys. **43**, 384, 1927; FRÖHLICH P. Math. és Term. tud. Ért. XLVII. **80**, 1930; P. FRÖHLICH, Acta Chem. Min. Phys. Univ. Szeged, **4**, 1, 1934; FRÖHLICH P. Math. és Term. tud. Ért. **LII**. 789, 1935; P. PRINGSHEIM, Fluoreszenz u. Phosphoreszenz, 1928; Handb. d. Exp. Phys. **XXIII/1**. 563. 1928.

² Fluorescein, eosin, aesculin, rhodamin, rhodulin, methylviolett, fuchsin, modebraun stb.

³ P. FRÖHLICH, Acta Chem. Min. Phys. Univ. Szeged. **4**, 1, 1934; FRÖHLICH P. Math. és Term. tud. Ért. **LII**. 789. 1935.

huzamosan halad-e az emissziósávok temperaturaváltozásával.⁴ Jelen dolgozatomban fent említett Rhodulin Orange N festék szilárd zselatinoldatának abszorpciójára vonatkozó vizsgálataimat, s azok eddigi eredményeit közlöm. Az abszorpciót a látható spektrumban, az ultraibolyában 240 $\mu\mu$ -ig és a vörösben 800 $\mu\mu$ -ig, +100° C-nál, szobahőmérsékleten és cseppfolyós levegő által hűtött térben —160° C-nál mértem.

2. Kísérleti berendezés.

Méréseimet fényelektromos cella segítségével végeztem. A kísérleteknél használt eszközöket, s azok felépítését 1. és 2. ábra mutatja. (I. tábla.) Az *L* fényforrás által kibocsátott fényből az M_1 monochromator segítségével kiválasztjuk a kívánt hullámhosszúságot, s ezt a monochromatikus fényt egy lencse segítségével párhuzamosá téve, az *F* foszforra bocsátjuk. Gerjesztő fényvel való mérés esetén a foszfor által emittált fluoreszcencia-, illetőleg foszforeszcenciafény kirekesztése végett a foszforon áthaladt fényt ismét egy monochromatoron, M_2 -n bocsátjuk át, s így visszük a *Z* cellára. A fotoelektromos áramot *E* fonalas elektrométer méri.

Fényforrásként az ultraibolyában és részben a látható spektrumban is egy Zeiss-féle, 110 voltos, 150 milliamperes, kapilláris égővel bíró higanylámpát, kiegészítésként a láthatóban és a vörösben egy 12 voltos, 7.5 amperes, vonalasan kiképezett spirálissal bíró izzólámpát használtam. Mindkét égő alakja alkalmas volt arra, hogy a monochromator részére való leképezés minimális fényvesztéssel történjen.

Az egész berendezésben quarzoptikát használtam. M_1 egy HILGER-féle egyprizmás, tükörrel ellátott monochromator, melyen a fényhullámhossz skálázott dobról közvetlenül leolvasható. M_2 egy POHL szerint készült kettős monochromator, melynek középső résehez tartozó skálát hullámhosszra hitelesítettem.

Ultraibolyában 240 $\mu\mu$ —314 $\mu\mu$ közben quarzcellát használtam

⁴ Folyékony festékoldatok fluoreszcenciájára vonatkozóan lásd: J. R. JENNES, Phys. Rev. **34**, 1275, 1929; W. E. SPEAS, Phys. Rev. **31**, 569, 1928.

kadmium—argon töltéssel (GÜNTHER és TEGETMEYER-gyártmány) $314\mu\mu$ — $800\mu\mu$ közben feltűnően nagy mérési intervallummal bíró, speciálisan készített üvegcellát caesium—argon töltéssel (INFRAM-gyártmány).

A fonalas elektrométer (WULF-féle) 50 sk/1 Volt érzékenységre volt beállítva. Ez a magas érzékenység és a fotocellák argontöltése tette lehetővé, hogy a higanylámpa gyengébb vonalait is használhattam annak ellenére, hogy a fénynek két monochromatoron kellett áthaladnia.

A megfestett, szilárd halmazállapotú zselatinlemezket,¹ vagyis a vizsgálandó foszfort egy fémkeretben helyeztem el, mely pontosan beleillett egy duplafalú fémdoboz (2. ábra F) belső terébe. A kettős fal által alkotott külső tér fűtőtestek, illetőleg hűtőanyag befogadására szolgál. A fény útjának szabaddá tételére ezt a külső teret egy-egy hengerpalást szeli át. Az ily módon létrejövő hengeres tér közvetlenül csatlakozik a foszfort tartalmazó belső térhez, s kívülről ezt a teret egy-egy quarzablak zárja el. $+100^{\circ}$ C hőmérsékletet elektromos fűtéssel állítottam elő, mely hőmérséklethez cseppfolyós levegőt használtam, mely a fémedény nagy hővezető képessége miatt csak -160° C-t adott a belső térben. A higany-, illetőleg pentánhőmérő egy vastag nemezdugón keresztül nyúlt be közvetlenül a foszfor mellé.

3. Általános megjegyzések.

Vizsgálataimban a legnagyobb nehézséget az a körülmény okozta, hogy a zselatin belső szerkezete nagyon inhomogén. A molekulakomplexumok, úgynevezett micellák és a köztük kialakuló kapilláriszerű hézagok egészen szabálytalanul épülnek fel. Ezért igen sok preparátumot kellett kimérni, s a 3. ábra grafikonaiban mutatkozó szórások lényegében ezen szabálytalan belső szerkezetből erednek. Bár a lemezek mind azonos körülmények között készültek, voltak olyanok, melyeknek vastagságingadozása nem volt nagyobb a megengedett normálisnál, (a használt lemezek

¹ Készítésének módját lásd: FRÖHLICH P., Math. és Term. tud. Ért. XLVII, 80, 1930.

vastagsága 0·375—0·040 mm, egy-egy lemez vastagságingadozása 0·003 mm) s a rajtuk áthaladó fényel szemben mégis úgy viselkedtek, mint egy lencse. Ez a hatás a fény útjába helyezett ernyőn látható, de e nélkül is könnyen ki lehetett válogatni az ilyen lemezeket azáltal, hogy minden mérést a lemez függőleges tengely körüli elforgatása után megismételtem, s csak ha a két adat eltérése elég kicsiny volt, tartottam meg középtértéküket.

A TYNDALL-effektusnak az abszorpcióra való befolyását részben azáltal küszöböltem ki, hogy végeredményben festékes és tiszta zselatin abszorpciójának különbségét határoztam meg, másrészt igyekeztem megvalósítani a többi szükséges feltételt,² a fény körülbelül 16 mm átmérőjű körön, tehát elég nagy felületen esett a foszforra és a megvilágított rész oldalt saját anyagával érintkezett, vagyis nem tartalmazta a lemez szélét, végül csak 0·4 mm-nél vékonyabb lemezekkel dolgoztam.

—160° C-on vizsgált lemezeket ismét szobahőmérsékletre hozva a nagymértékű páralecsapódás miatt újabb méréshez nem lehetett használni. Néhány esetben a lemezt hűtés után a fémdobozzal együtt hagytam felmelegedni, s így a lecsapódást elkerülve, sikerült megállapítani, hogy az abszorpció hűtés előtt és után szobahőmérsékleten változatlan, vagyis a folyamat reverzibilis. +100° C-ra melegítve a zselatinlemezt, utána a szobahőmérsékleten mért abszorpciót nem kaptam vissza, bár a lemezen szemmel látható változás nem történt. Ez az irreverzibilitás sok esetben kicsiny mértékű volt, pl. egy 0·040 mm festetlen zselatinlemeznél 254 $\mu\mu$ -nél a foszforon átjutott fény és a primér fény hányadosa, vagyis az átteresztőképesség (Durchlässigkeit) +100° C-on 0·128, +20° C-on, melegítés előtt 0·270, melegítés után 0·255 ; de sokszor előfordult hogy az eredeti érték megközelítőleg sem tért vissza, hanem a lemez lehülés után a +100° C-on mért értéket tartotta meg. Úgy láttam, hogy a jelenséget más ismeretlen tényezőkön kívül a temperálás módja és időtartama is befolyásolják, mivel azonban a +100° C-on mért érték órákon át +100° C-on tartott lemezen sem változott meg és azonos körülmények (lemezvastagság) között

¹ Über den Einfluss der diffusen Ausbreitung auf Absorptionsmessungen. Handb. d. Exp. Phys. XXIII/1. 686, 1928.

nem mutatott a reverzibilitás mértékétől való függést, a $+100^{\circ}$ C-on mért abszorpciót a melegítés előtti $+20^{\circ}$ C-on mért értékkel hasonlítottam össze, tekintet nélkül arra, hogy melegítés után $+20^{\circ}$ C-on milyen érték adódott.

$+100^{\circ}$ C-t $\pm 2^{\circ}$, -160° C-t $\pm 5^{\circ}$ pontossággal állítottam elő. a szobahőmérséklet $+18^{\circ}$ — $+23^{\circ}$ C között ingadozott. Annak megállapítására, hogy a zselatinlemez mennyi idő után veszi fel a hőmérő által jelzett hőmérsékletet, két azonos típusú hőmérő közül az egyik alsó gömbjét a mérendő lemezeknek megfelelő vastagságú zselatinnal vontam be, s a kettőn egyszerre észleltem a hőmérsékletváltozást.

A foszfort tartalmazó doboz ablakain a lecsapodást az ablakot körülvevő elektromos fűtőtesttel akadályoztam meg. Más helyeken, mint pl. a fotocellát tartalmazó dobozban hasonló célból foszforpentoxidot alkalmaztam.

Alacsony hőmérsékleten ügyelni kellett, hogy a cseppfolyós levegő felszínéről párolgás által távozó ködszerű levegőgomolyagok a fény útjába ne kerüljenek, ezért a foszfort tartalmazó doboz fölött egy nagy ernyőt s ezen vattát helyeztem el, mellyel a cseppfolyós levegőt tartalmazó tér nyílását jól körülkerítettem. Az ablakok közelében még külön fémhengerekkel is szabaddá tettem a fény útját.

Vakuumcellák a festett lemezek nagy abszorpciója következtében erősen legyengített fény intenzitásának mérésére nem elég érzékenyek. A gázzal töltött cellák használatával szemben emelt kifogás, illetve óvás¹ az általam használt nem-stacionárius elektrométerkapcsolásnál² a vezető nagy ellenállás (Ableitwiderstand) kiiktatása miatt nagyrészt nem jön számításba. A cella két pólusa közötti potenciálkülönbség — kadmiumcellánál 90 volt, caesiumcellánál 75 volt — mérés közben az elektrométer magas érzékenysége miatt alig változik 1 volttal, (ugyanis 50 skála volt a maximális elektrométerkitérés), ezen belül konstans fénycsugár mellett a fotoáram konstansnak adódott. A gázzal töltött cellák megbízhatósága az általam használt feszültségek mellett abból is kitűnt,

¹ R. SEWIG: Objektive Photometrie, 16, 1935.

² R. SEWIG, l. c. 51.

hogy fenti caesiumcella segítségével kimért spektrumrészben egészen más feszültség-intenzitás görbével bíró rubidium-, illetve káliumcellával végeztem kontrollméréseket, s az eredmények nagyon jól reprodukálódtak.

Mint ismeretes, a foszfort monochromatikus fényel gerjesztve is az emisszió teljes színképe jelenik meg, csak természetesen az ez esetben kicsiny gerjesztő fénynek megfelelő csekély intenzitással. Ezt az emissziót rekeszti ki a foszfor és a cella közötti második monochromator, kivéve a mérőfény hullámhosszintervallumába eső emissziót, de az ebből eredő hiba minden esetben elhanyagolható, annál is inkább, mert STOKES törvényének megfelelően az abszorpció és emissziósáv egymásbanyúlása estén is ez utóbbinak legalább is súlypontja a hosszabb hullámok felé tolódik. A második monochromator a kadmiumcella kisebb érzékenysége miatt az ultravioletumban kiiktattam. Ez nem okozott hibát, mert a kadmiumcella az emissziósávok spektrumintervallumában¹ teljesen érzéketlen.

Annak ellenőrzésére, hogy az abszorpció meghatározásához használt fényforrás intenzitása mérés közben változik-e, a primérfényerősséget minden esetben a foszforra a fény útjába helyezése előtt és után is megmértem. Ez az eljárás kielégítőnek bizonyult; olyan berendezést, mellyel a primér fényintenzitást az abszorpció által legyengített fény intenzitásával egy időben lehet mérni (két cellás módszer), nem alkalmaztam.

Figyelemmel kellett lenni a fény tisztaságára is, különösen ott, ahol az abszorpció a hullámhosszal erősen változik. Ezt a monochromator résszélességének alkalmas megválasztásával értem el. A vörösben, ahol a diszperzió erős csökkenése miatt a monochromatoron átbocsátott fény a legkevésbé monochromatikus, az izzólámpa emisszióspektruma igen intenzív, s így a résszélesség csökkentésének nem volt semmi akadálya.

A cella megvilágítása által létrejött fotoáram az elektrométer feltöltődési sebességével arányos. Az így kapott értéket korrigálni kellett az ú. n. sötétmenet miatt, bár ez a korrekció a cella meg-

¹ P. FRÖHLICH, Acta Chem. Min. Phys. Univ. Szeged. 4, 1, 1934; FRÖHLICH P., Math. és Term. tud. Ért. LII, 789, 1935.

felelő szigetelése következtében csak igen gyenge áramok esetén volt számottevő.

4. Mérési adatok feldolgoása.

Legyen a foszforba bejutó fény intenzitása J_0 , az abszorpció után megmaradt fény intenzitása J , a foszfor vastagsága d , az abszorpciokoefficiens α , akkor mint ismeretes $J = J_0 e^{-\alpha d}$ és ebből

$$\alpha = \frac{\log \frac{J_0}{J}}{d \log e}. \quad (1)$$

Ha az általam mért fényintenzitás, mielőtt a foszfor a fény útjába került J'_0 és miután a foszfort közbetettem J' , ezen értékeket az 1) formulába nem helyettesíthetem be, mert a foszforba bejutó, illetve az abszorpció után megmaradt fény a foszfor első illetve második felületén történő reflexió következtében J'_0 illetve J' -től különböző. Olyan oldatoknál, ahol a tiszta oldószer abszorpciója zéró, a reflexióból származó hibát ki lehet küszöbölni oly módon, hogy a primér fény intenzitásának meghatározásánál a fény útjába teszem az üres oldószert, feltéve hogy a reflexió oldószer és oldat esetén azonos. Az üres zselatin azonban maga is abszorbeál fényt és így a reflexió mellett saját abszorpcióját is figyelembe kell venni. Végeredményben a festékes és üres zselatin abszorpciokoefficiensének különbségét ($\alpha_f - \alpha_z$)-t kell meghatároznom, ahol a reflexió α_f -ben és α_z -ben is ki van küszöbölve. Könnyen belátható és a későbbiekben számításaimból is ki fog tűnni, hogy ha sikerülne mindig pontosan egyenlő vastagságú festékes és üres zselatinlemezt előállítani és ha feltételezhető, hogy festékes és üres zselatin esetén a reflexió azonos mértékű, akkor ($\alpha_f - \alpha_z$) különbségben a reflexió szerepe egyszerűen kiesik, anélkül, hogy azt külön kellene számításba venni. Azonban a vastagságra vonatkozó feltétel teljesítése — különösen figyelembe véve a használt preparatumok nagy számát — igen körülményes, s mint lentebb eredményeim mutatják, a reflexió üres és festett zselatin esetén, főképp némely hullámhossznál, lényegesen különböző. Ezért más módszerhez kellett folyamodnom.

Nézzük meg először is, hogy hogyan befolyásolja a reflexió az abszorpciókoefficiensre vonatkozó eredményt. Mivel a foszfor felületén reflektált fény arányos a ráeső primér fénnel, így

$$J_0 = J'_0 - kJ'_0 \quad (2)$$

J_0 behatol a foszforba, ennek egy része abszorbeálódik, s a megmaradó J fényenergia a foszfor második felületen ismét visszaverődést szenved, s J helyett

$$J' = J - kJ \quad (3)$$

intenzitást mértem. J_0 és J értékét 2) és 3)-ból 1)-be helyettesítve

$$a = \frac{\log \frac{J'_0}{J'}}{d \log e} + \frac{\log (1 - k)^2}{d \log e} \quad (4)$$

$\frac{\log \frac{J'_0}{J'}}{d \log e} = a'$ az abszorpciókoefficiensnek a mérési adatokból közvetlen adódó megközelítő értéke, melyben a reflexió nincs figyelembe véve. Mivel $0 < k < 1$, $\frac{\log (1 - k)^2}{d \log e}$ negatív. Jelöljük

$\left| \frac{\log (1 - k)^2}{\log e} \right|$ -t c -vel, akkor

$$a = a' - \frac{c}{d}. \quad (4a)$$

a a tulajdonképpen keresett abszorpciókoefficiens független az abszorbeáló réteg vastagságától, s mint láttuk, a reflexióból származó hibát sem tartalmazza már. 4a) egyenlet jobboldala — figyelembe véve a második tagot — csak úgy lehet független a reflexiótól és lemezvastagságtól, ha a' függvénye c -nek és d -nek. Valóban a mérési adatokból adódó a' függ a reflexió mértékétől, de ugyanazon reflexió mellett is (tehát ugyanolyan hullámhosszúságú fény és azonos anyagi minőségű preparatum esetén) különböző a' értéket kapok, a szerint, hogy milyen vastagságú réteggel dolgozom, annak ellenére, hogy a' egységnyi rétegvastagságra vonatkozik.

A 4a) egyenletből kitűnik, hogy a már fentebb említett esetben, ha t. i. oldatból és oldószerből azonos vastagságú réteget

veszünk, és a reflexió is azonos, az abszorpciókoefficiensek különbözőségéből a $\frac{c}{d}$ tag egyszerűen kiesik. Mivel az általam használt festékfoszforoknál e feltételek nincsenek teljesítve, külön az üres zselatin és külön a festékfoszfor abszorpcióját a következőképpen határoztam meg. 4a) egyenletet átírva

$$a' = c \frac{1}{d} + a. \quad (4b)$$

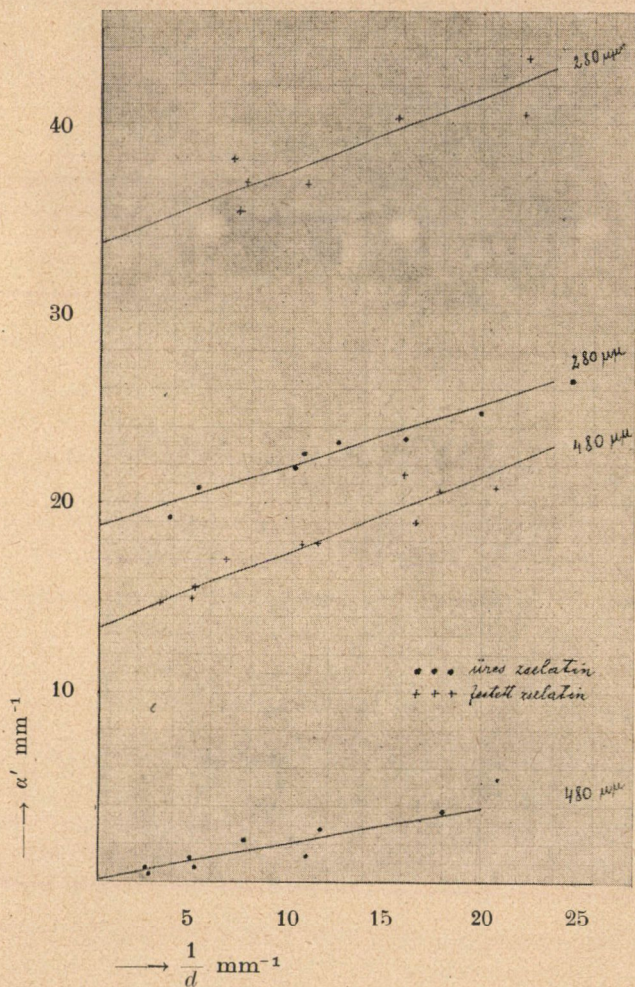
Az ismeretlen abszorpciójú anyagból különböző vastagságú lemezeket veszek, tehát változtatom $\frac{1}{d}$ -t, a mérési adatokból adódó a' is változni fog, az így kapott $\left(\frac{1}{d}, a'\right)$ értékpárokból adódó pontok a 4b) egyenlet által meghatározott egyenesen fekszenek. Ezen egyenesnek az $\frac{1}{d}$ tengellyel alkotott hajlásszöge jellemző a reflexióra, s az a' tengelyből lementzett rész adja a keresett a -t.¹

5. Eredmények.

A méréseknél használt festékoldatok koncentrációja $10^{-2.5}$ gramm festék per 1 cm^3 száraz zselatin² volt. Áttekinthetőség végett a 3. ábrán csak két hullámhosszra, $480\mu\mu$ -ra, illetve $280\mu\mu$ -re vonatkozó $\left(a', \frac{1}{d}\right)$ mérési pontokat tüntettem fel 20° C hőmérséklet esetén. Az ezen pontokon átmenő egyeneseknek az a' tengellyel képezett metszetét, vagyis a keresett a abszorpciókoefficiensét és

¹ A 4b) egyenlet levezetésénél feltételeztük, hogy a független a rétegvastagságtól (BOUGUER—LAMBERT-féle törvény), úgyszintén c , a reflexióra jellemző állandó. Azáltal, hogy a mérésekből adódó $\left(\frac{1}{d}, a'\right)$ pontok tényleg egy egyenesen fekszenek, 4b) egyenlet s vele az említett feltételek igazolódtak.

² Arany D. G. F. márkájú zselatint használtam.



3. ábra.

az egyenesek iránytangensét, vagyis a reflexióra jellemző c konstansit az összes vizsgált hullámhosszra a 3. ábrának megfelelő módon határoztam meg, s az eredményeket 20° C hőmérsékleten üres zselatinra az 1. táblázatban, festett zselatinra a 2. táblázatban foglaltam össze.

1. táblázat.

λ $\mu\mu$	Üres zselatin			
	$\alpha_{20^\circ\text{C}} \text{ cm}^{-1}$	$c_{20^\circ\text{C}}$	$\alpha_{100^\circ\text{C}} - \alpha_{20^\circ\text{C}}$	$\alpha_{20^\circ\text{C}} - \alpha_{-180^\circ\text{C}}$
800	0.2	0.09		
700	0.2	0.10		
600	0.2	0.11		
579	0.1	0.14	0.41	
546	0.2	0.17	0.53	
480	0.1	0.18	0.37	
436	0.3	0.19	0.57	
405	0.8	0.20		
365	1.6	0.24	1.06	
334	3.5	0.24		
313	5.0	0.29	1.14	
302	6.8	0.32		
297	7.8	0.34		
289	11.3	0.36	3.33	
280	18.8	0.32	2.30	1.14
275	20.0	0.31	3.39	
270	21.2	0.36	4.00	1.20
265	23.1	0.36	4.61	0.52
254	26.3	0.36	14.38	1.88
240 ¹	? 45.0			15.00

Mérési hiba határán belül esik

Mivel $600\mu\mu$ — $800\mu\mu$ között a festett zselatin (2. táblázat) lényegesebb abszorpciót nem mutat, ebben a spektrumintervallumban az üres zselatint csak néhány helyen és mindkettőt csak szobahőmérsékleten vizsgáltam.

1. és 2. táblázat 4. és 5. oszlopában az abszorpciókoefficiensnek a hőmérséklettel való megváltozása van feltüntetve. Ez a megváltozás sok esetben kisebb, mint a hiba, mely az α abszorpció-

¹ Az abszorpció magas értéke miatt csak vékony lemezen mértem, s így c -t nem tudtam meghatározni. α megállapításához a szomszédos $254 \mu\mu$ -höz tartozó c -t használtam.

2. táblázat.

λ $\mu\mu$	Festett zselatin			
	$\alpha_{20^{\circ}\text{C}} \text{mm}^{-1}$	$c_{20^{\circ}\text{C}}$	$\alpha_{100^{\circ}\text{C}} - \alpha_{20^{\circ}\text{C}}$	$\alpha_{20^{\circ}\text{C}} - \alpha_{-100^{\circ}\text{C}}$
800	0.5	0.09		
775	0.5			
750	0.5			
725	0.3			
700	0.5	0.09		
675	0.6			
650	0.5			
625	0.4			
600	0.8	0.07		
579	0.7	0.10		
546	0.6	0.13	0.65	0.24
530	1.9	0.19	0.98	0.51
520	4.6	0.25	2.00	1.25
510	9.1	0.29	2.13	1.62
500	13.7	0.39	1.64	0.00
496	15.6		1.50	-0.65
492	15.7	0.40	1.53	-1.65
480	13.4	0.38	0.85	-0.69
460	9.5	0.29	0.12	-0.62
436	5.4	0.12	0.70	-0.19
405	3.1	0.10	0.43	-0.30
365	3.0	0.12	0.78	
334	4.8	0.13	1.74	0.42
313	10.2	0.12	2.65	0.50
289	23.6	0.24	4.93	0.67
280	33.7	0.38	4.94	1.30
270	40.5	0.44	5.01	-0.35
265	39.9	0.53	5.31	-0.05
254	34.4	0.38	12.25	1.22
240 ¹	? 50.0			

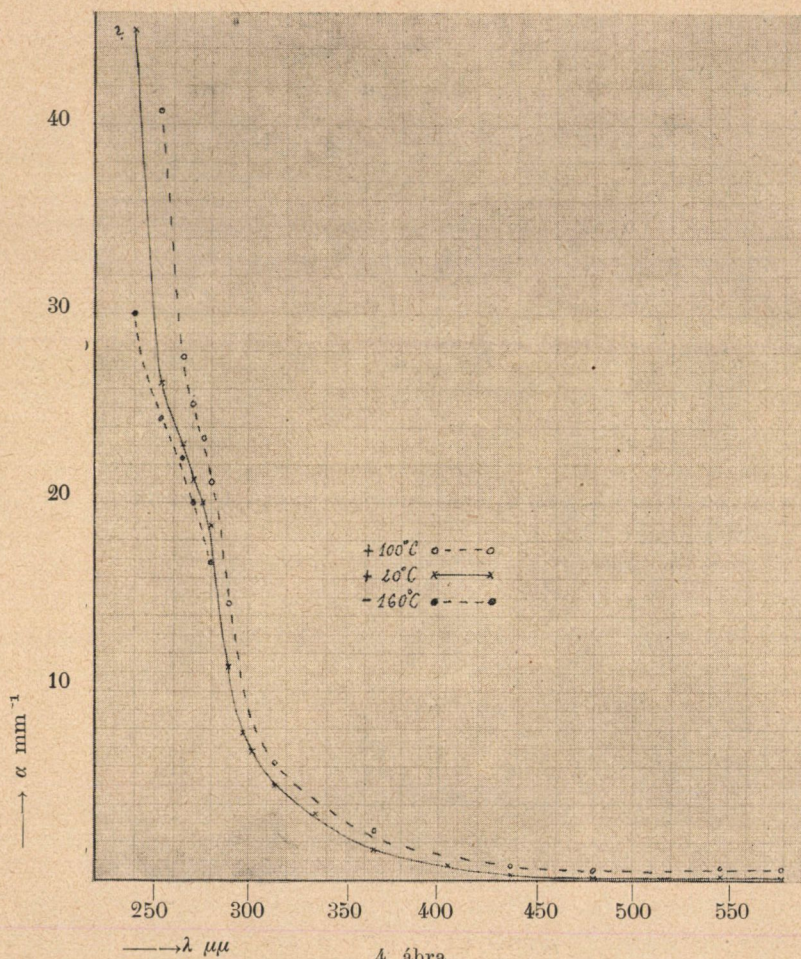
¹ Mint 1. táblázatnál.

koefficiens meghatározásánál a 3. ábrán látható szórás következtében fellép, azonban kívül esik az egyes preparatumokhoz tartozó α' mérési hibáján. Mivel pedig α' (100°C)— α' (20°C) illetve α' (20°C)— α' (-160°C) különbség függetlennek mutatkozik d -től, a lemezzvastagságtól. (ezt minden hullámhossznál kontrolláltam), ez azt jelenti, hogy a mérési hiba határán belül c független a temperaturától és α -nak a hőmérséklettel való megváltozása helyett α' megváltozását határozhatjuk meg. Az eljárás tehát pl. $+100^\circ \text{C}$ -nál az volt, hogy minden egyes hullámhossznál különböző vastagságú lemezekre meghatároztam α' (20°C)-t, majd ugyanezen lemezekre α' (100°C)-t. α' (100°C)— α' (20°C) különbség különböző d mellett a mérési hiba határán belül konstansnak adódott, s így egyszerűen a különböző vastagságú lemezeknél kapott α' (100°C)— α' (20°C) különbségek középértékét tüntettem fel az 1. és 2. táblázat 4. oszlopában. illetve $+100^\circ \text{C}$ helyett -160°C -on dolgozva a táblázatok 5. oszlopában.

A 4. ábra mutatja az 1. táblázat adatai alapján az üres zselatin abszorpcióját, mely a látható spektrumban jelentéktelen, az ultraibolyában meredeken emelkedik.¹ A görbe növekvő hőmérséklettel hosszabb hullámok felé tolódik.

A festett zselatinra vonatkozó 2. táblázatban található adatokból levonva az üres zselatinra jellemző megfelelő adatokat, megkapjuk tisztán a festék befolyását az abszorpcióra, vagyis a zselatinba ágyazott festék abszorpcióját, melyet 5. ábra mutat. Mint ebből látszik, szobahőmérsékleten összesen két — eléggé széles, de jól kiemelkedő, éles maximummal bíró — sáv jelentkezik, az egyik maximuma a láthatóban $494\mu\mu$ -nél 15.6 mm^{-1} , a másiké az ultraibolyában $270\mu\mu$ -nél 19.3 mm^{-1} . A két sáv alakja hasonló egymáshoz, bár az ultraibolyában fekvő valamivel keskenyebb és magasabb, s ennek. ellentétben a hosszabb hullámú sávval, a rövidebb hullámok felé eső szára meredekebb. A hőmérsékletet $+20^\circ \text{C}$ -ről $+100^\circ \text{C}$ -ra emelve, a görbe az egész spektrumban a hosszabb hullámok felé, $+20^\circ \text{C}$ -ről -160°C -ra csökkentve, a rövi-

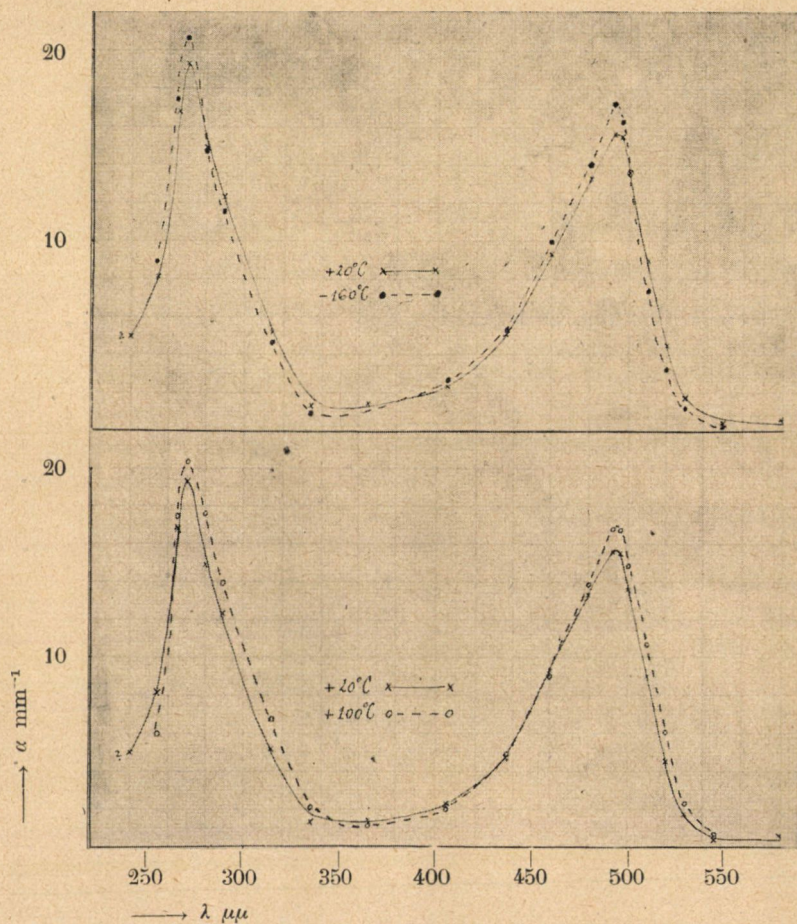
¹ Szigorú kontrollmérésekkel megállapítottam, hogy a görbe $270\mu\mu$ környezetében fellépő inflexiója nem származik fényszennyeződésből.



debb hullámok felé tolódik.¹ Az eltolódás a spektrum különböző helyein különböző mértékű, a sávok alacsonyabb temperaturánál valamivel keskenyebbek.²

¹ Szilárd szénsav segítségével -40°C -nál is végeztem méréseket, az abszorpció megváltozása azonban a mérési hiba határán belül maradt.

² Ennek megfelelően a különböző hőmérsékletre tartozó görbék metszik egymást, s áttekinthetőség végett az 5. ábrán a $+100^\circ\text{C}$ -nak és -160°C -nak megfelelő görbékét kiválasztottam.



5. ábra.

Mint fentiekből látható, az abszorpciósávok a hőmérséklet változásával egyszerűen követik a KÖNIGSBERGER-féle törvényt,¹ s a foszforeszcencia-amissziósávoknál jelentkező nagymértékű változás² itt sem a spektrális helyzetben, sem az összintenzitásban nem mutatkozik. Úgy látszik, hogy az abszorpció- és foszforesz-

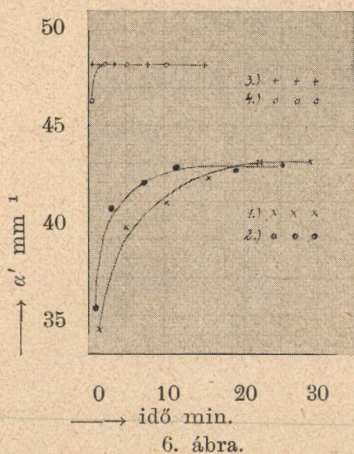
¹ KÖNIGSBERGER, Ann. d. Phys. **4**, 796, 1901.

² P. FRÖHLICH, Acta Chem. Min. Phys. Univ. Szeged, **4**, 1, 1934; FRÖHLICH P. Math. és Term. tud. Ért. **LII**, 789, 1935.

cencia emissziósávok spektrális helyzete között a zselatinfoszforoknál is hiányzik minden kapcsolat éppúgy, mint a LENARD-féle foszforoknál,¹ amit ez utóbbiaknál azzal magyaráznak,² hogy az energiát átvevő, rezonanciaképes elektron nem azonos az atomról leszakadó, emissziót létrehozó elektronnal, s az utóbbinak lényegesen kisebb erőtere következtében különböző a kétféle elektron közvetlen környezetének hatása.

6. Az abszorpció megváltozása megvilágítás közben.

Fent részletezett vizsgálataim közben azt tapasztaltam, hogy a festékfoszfor abszorpciója mérés közben megváltozik. Az α' a mérőfényrel való megvilágítás hatására fokozatosan nő, s bizonyos idő múlva maximális konstans értéket ér el. Ha a foszfor elé ernyőt téve a mérőfénytől elzárom, megfelelő idő után α' ismét előbbi kisebb értékeit veszi fel.



6. ábra.

Nagyobb intenzitású fényrel végezve a kísérletet, α' maximuma rövidebb idő alatt következik be, tehát α' mint az idő függvénye, meredekebben emelkedik, azonban érdekes, hogy α'_{\max} értéke független a mérőfény intenzitásától. A 6. ábra 1. és 2. görbéje mutatja $265\mu\mu$ hullámhossznál α' nek a megvilágítási időtől való függését

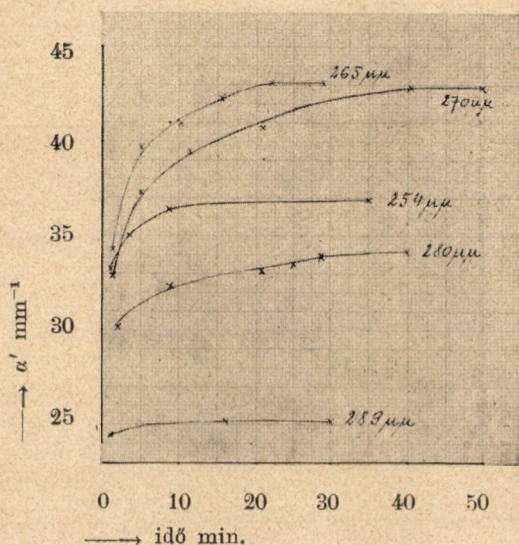
egy 0.150 mm vastag festékfoszforra vonatkozóan, ahol a fényintenzitások viszonya $J_2/J_1 = 23.8/14.3$. α'_{\max} mindkét esetben kb. 43 mm^{-1} -nek adódott. Ha a foszfort nemcsak a $265\mu\mu$ hullámhosszúságú mérőfény hatásának tettem ki, hanem huzamosan közvetlenül a higanylámpa koncentrált fényének útjába helyeztem,

¹ Kivéve a Stokes törvényt, mely mindkét esetben fennáll.

² Handbuch d. Exp. Phys. **XXIII**/1. 698.

utána az abszorpciót megmérve fenti α'_{\max} érték adódott változatlanul.

A 6. ábra 1. görbéjére vonatkozó kísérletsorozat után a foszfort 1 óra 45 percen át sötétben tartva α' 43 mm^{-1} -ről 36.2-re csökkent, további 1 órán belül eredeti 34.3 mm^{-1} értékét vette fel. A foszfor állapotában történt megváltozás tehát csak hosszabb idő után szűnik meg teljesen.



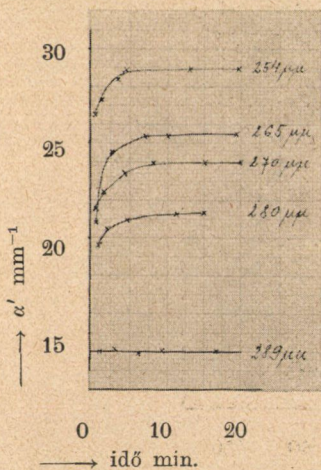
7. ábra.

Vékonyabb lemezeknél az abszorpció változása sokáig egyáltalán nem mutatkozott, ennek oka az volt, hogy az általam használt mérőfény minden hullámhossznál elég intenzív volt ahhoz, hogy az α' maximuma praktice rögtön beálljon. Egy 0.060 mm vastag foszforra vonatkozó eredményt ugyancsak 265 μm -nél a 6. ábra 3. görbéje mutat, mely lényegében egyenes. 4. görbét úgy kaptam, hogy a fényintenzitást ugyanezen preparátumnál 14.3/3.7 arányban lecsökkentettem. (1. és 3. görbénél a fényintenzitások megegyeztek.) Vékonyabb lemeznél tehát α' gyorsabban éri el maximumát, illetve lényegesen kisebb fényintenzitás alkalmas csak

arra, hogy α' lassan emelkedjék, α'_{\max} azonban itt is független a fény intenzitásától.

A 7. ábra egy 0-150 mm vastag festett lemezre vonatkozóan adja α' -nek a megvilágítási idővel való változását különböző hullámhosszak mellett. Az abszorpció változását a látható spektrumban is észleltem, itt most csak az ultrabolyára vonatkozó adatokat közlöm.

Az effektus üres zselatin esetén is megvan. Összehasonlíthatóság végett egy ugyanacsak 0-150 mm vastag üres zselatinlemezre vonatkozóan tüntetem fel az eredményeket a 8. ábrán ugyanazon hullámhosszak mellett.



8. ábra.

Ahhoz, hogy az abszorpció változásának a hullámhossztól való függését quantitative megállapítsam a fényintenzitások figyelembevételével, további vizsgálatokra lesz szükségem, e vizsgálatok már folyamatban vannak.

Az azonban néhány törvényszerűséget így is láthatunk. Mivel a 7. és 8. ábrán szereplő görbéknél a lemezvastagság egyező volt, és azonos hullámhossznál közel azonos volt a fényintenzitás, megállapítható, hogy üres zselatinban a maximális abszorbeálóképesség

állapota mindig hamarabb következik be, és az α' görbe emelkedése α'_{\max} -ig mindig kisebb, mint festett zselatinnál. Ebből talán arra lehet következtetni, hogy nagyobb abszorpció esetén lassúbb, de végeredményben nagyobb a változás. Ezt mutatja az is, hogy a görbék emelkedése üres zselatinnál (8. ábra) rövidebb hullámhosszak, tehát nagyobb abszorpció-értékek felé mind nagyobb, kivéve 254 μ -nál, ahol viszont qualitative is kétségtelenül megállapíthatóan legintenzívebb volt a mérőfény. Az a tény, hogy 265, 270 és 280 μ -nál, tehát a zselatinba ágyazott festék ultrabolya abszorpciósávjának maximumánál és annak környezetében a festett zselatin α' -jének a megvilágítás következtében történt

összmegeváltozása az üres zselatinéhoz képest lényegesen nagyobb, míg 254 és 289 $\mu\mu$ -nál az üres és festett zselatinnak megfelelő görbék között a különbség sokkal kisebb, arra enged következtetni, hogy maga a festék csak annyiban befolyásolja az effektust, amennyiben az abszorpciót növeli.

A 6., 7. és 8. ábrák grafikonjai nem α abszorpciókoefficiensre, hanem a reflexiótól, s így bizonyos mértékben a lemezvastagságtól is függő α' -re vonatkoznak. Ha α -t akarjuk ismerni, mint a megvilágítási idő függvényét, külön vizsgálat tárgyát képezi hogy a reflexió független-e a megvilágítási időtől. Feltéve, hogy csak az abszorpció változik a megvilágítás következtében, a reflexió nem, a 6., 7. és 8. ábra görbéit egyszerűen egy az ordinatatengelyvel párhuzamos — $\frac{c}{d}$ nagyságú translációnak kell alávetni, hogy α' helyett α megfelelő értékeit kapjuk. Mivel dolgozatom 5. fejezetében szereplő α' értékek az itt bizonyos megvilágítás után konstansnak adódó α'_{\max} -kal azonosak, fenti translációt a 6. ábra 1—2., illetőleg 3—4. görbepárjaira alkalmazva ezek a görbék (a 2. táblázatban 265 $\mu\mu$ -nak megfelelő c értéket és a használt lemezek vastagságát figyelembe véve) oly módon tolnak el, hogy maximális konstans részük összeesik. A görbék egyébként nem kerülnek fedésbe, mert menetük fentebbiek szerint függ a megvilágító fény intenzitásától, és azonos intenzitás mellett (6. ábra 1., 3. görbe) a lemezvastagságtól. α'_{\max} azonban független a fényerősségtől, s feltettem, hogy a lemezvastagságtól is független, ha a reflexiót figyelembe veszem. Ezt a feltevést lényegesen felhasználtam, amikor α'_{\max} -ra alkalmaztam a 4. fejezet 4b) egyenletét, viszont azzal, hogy a 3. ábrán feltüntetett egyeneseket megkaptam, feltevésem beigazolódott.

Mint fentiekből kitűnik, dolgozatom 5. fejezetében szereplő eredmények a festett, illetve üres zselatinlemezek abszorpcióját abban az állapotban adják, melybe a lemezek megfelelő ideig tartó megvilágítás után kerültek. Ez a körülmény az emissziósávokkal való összehasonlítás szempontjából nem volt hátrányos, mert az emisszióvizsgálatoknál használt intenzív megvilágítás¹ következ-

¹ P. FRÖHLICH. Acta Chem. Min. Phys. Univ. Szeged. 4, 7, 1934.

tében a foszfor igen rövid idő alatt kerül abba az állapotba, melyben az abszorpció maximális, s azután az emisszióvizsgálat egész ideje alatt az energiafelvétel ilyen állapotban történik.

Az abszorpció megváltozása LENARD-féle foszforoknál is fellép megvilágítás közben, és pedig gerjesztő fény esetén az abszorpció (Erregende Absorption) a gerjesztett állapot fokozásával csökken. Viszont a gerjesztett állapotot kioltó fényvel megvilágítva a foszfort, az abszorpció (Auslöschende Absorption) teligerjesztettség esetén a legnagyobb, s amint e fény hatására csökken a gerjesztett centrumok száma, csökken az abszorpció is. (A fénynek azonos hullámhossz mellett lehet gerjesztő és kioltó hatása is.) Festett kőszókristályoknál ugyanilyen értelmű abszorpcióváltozást észleltek.¹ Egészen kétségtelen, hogy az általam talált effektus ettől teljesen különböző, hiszen a zselatinfoszfornál teljesen gerjesztetlen állapotból kiindulva növekedett az abszorpció a megvilágítás hatására, s bizonyos idő után bekövetkezett egy egyensúlyi állapot, melynek megfelelő α'_{\max} a fény intenzitásától függetlennek adódott, bár az alkalmazott gyenge megvilágítás mellett a foszfor semmiesetre sem volt teligerjesztve.

A jelenség sokkal inkább látszik összefüggésben lenni azzal a FRÖHLICH és GYULAI által talált hatással,² mely szerint egy előgerjesztett zselatinfoszfor — bár ultravörös besugárzásra emissziót (Ausleuchten) nem ad — újból megvilágítva intenzívebben foszforeszkál, mint az előbb sötétben tartott foszfor. Vizsgálataim szerint az előgerjesztés az abszorpcióképességet növeli, s ebben az állapotban gerjesztve a foszfort, minden bizonnyal a nagyobb energiafelvétel következménye az intenzívebb emisszió. E mellett szól az a körülmény is, hogy az előgerjesztettség állapotának megszűnése az idő folyamán körülbelül ugyanolyan mértékű az abszorpciónál³ mint az emissziónál.⁴

¹ Z. GYULAI, ZS. f. Phys. 33, 251, 1925, és 35, 411, 1926.

² P. FRÖHLICH és Z. GYULAI, ZS. f. Phys. 104, 549, 1937.

³ Jelen dolgozat 6. fejezet 3. bekezdés.

⁴ P. FRÖHLICH és Z. GYULAI l. c. Fig. 2.

7. Összefoglalás.

Zselatinfoszforok abszorpciójának meghatározására részletesen kidolgoztam egy módszert, mellyel a zselatin kolloid voltából származó zavaró hatások ellenére is jól sikerült kimutatnom igen kis temperaturahatást.

Az üres zselatin abszorpciója a látható spektrumban jelentéktelen, az ultraibolya felé erősen nő.

A zselatinba beágyazott Rhodulin Orange N festék 240μ és 800μ között két hasonló strukturájú abszorpciósávot mutat, egyet a láthatóban és egy eddig ismeretlent az ultraibolyában.

Az abszorpciót $+100^\circ\text{C}$ -, $+20^\circ\text{C}$ - és -160°C -on mértem üres és festékes zselatin esetén, a sávok a KÖNIGSBERGER-féle törvénynek megfelelően a hőmérséklet csökkenésével — igen kis mértékben — rövidebb hullámok felé tolódnak.

Az abszorpció- és foszforeszcencia emissziósávok között a hőmérséklet változásával kapcsolat nem mutatkozik. Hogy az abszorpció és fluoreszcencia emisszió között ilyen szempontból van-e összefüggés, az a folyamatban lévő vizsgálatokból fog kitűnni.

Végül egy eddig más foszforokon nem tapasztalt jelenséget találtam, mely szerint az abszorpció fény hatására fokozatosan nő, s bizonyos idő után, mely idő függ a fényintenzitástól és a lemezvastagságtól, egy maximumot ér el, a maximum értéke azonban független a fényintenzitástól és a lemezvastagságtól. Ez a fokozott abszorpcióképesség huzamosan fennáll a megvilágítás után is, bár az idővel fokozatosan csökken. A hatás festett és üres zselatin esetén is megvan, s festett zselatinnál kapcsolatba hozható egy mások által az emisszióra vonatkozóan talált előgerjesztési effektussal. Üres zselatin ez utóbbi szempontból még nincs megvizsgálva.

Az abszorpció meghatározásának más koncentrációkra való kiterjesztése, valamint a gerjesztési effektussal kapcsolatban néhány kérdés tisztázása folyamatban vannak.

*

Dolgozatom a szegedi m. kir. Ferenc József Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében készült. Öszinte köszönettel tartozom

DR. FRÖHLICH PÁL egyet. ny. r. tanár úr Óméltóságának, egyrészt, hogy mint az intézet igazgatója dolgozatom elkészítését külső feltételek teljesítésével lehetővé tette, másrészt mint tanítványa szeretném meleg hálámat kifejezni azért, hogy tanulmányaimban irányítani, e dolgozat tárgykörébe bevezetni s állandó érdeklődésével és tanácsaival munkámban segíteni szíves volt. A zselatinlemezeket URBÁN ERZSÉBET és BÁNOS GIZELLA úrhölgyek készítették nagy gondnal és hozzáértéssel; kérem, fogadják ez úton is hálás köszönetemet.

Szeged, 1937. november hó.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13-án tartott üléséből.)

LICHTABSORPTION DER GELATINE-FARBSTOFFPHOSPHOREN.

Von H. MISCHUNG.

Es wird eine ausführliche Methode für Absorptionsmessungen der gelatinösen Farbstofflösungen gegeben, durch welche der störende Einfluss der Eigenemission und der der Reflexion eliminiert wird.

Die Absorption wurde für ungefärbte und mit Rhodulin Orange N Farbstoff gefärbte Gelatine im Spektralbereiche von $240 \mu\mu$ bis $800 \mu\mu$, bei $+100^\circ \text{C}$, $+20^\circ \text{C}$ und -160°C gemessen. Die Absorption der ungefärbten Gelatine ist im sichtbaren Gebiet unbedeutend, steigt aber im ultravioletten steil hinauf. Der in Gelatine eingebettete Farbstoff selbst hat zwei Absorptionsbanden, eine im sichtbaren und eine bisher unbekannte im ultravioletten Spektrum, beide mit einem gut ausgeprägten Maximum und einander ähnlicher Struktur.

Die Absorptionsbanden der Farbstofflösung und auch die der ungefärbten Gelatine verschieben sich mit zunehmender Temperatur gegen längere Wellen, sie folgen also dem allgemeinen KÖNIGSBERGERSCHEN Gesetz. Die Verschiebung ist sehr klein, und zeigt mit den Temperaturänderungen der Phosphoreszenzbanden keinen Zusammenhang.

Es zeigte sich bei Belichtung der Phosphore mit der Belichtungszeit eine Änderung der Absorption, und zwar ein allmähliches Steigen bis zu einem Maximum, das bei weiterer Belichtung konstant bleibt. Die Absorptionsänderung ist reversibel, ihr Lauf hängt von der Intensität des Lichtes und von der Dicke des Präparates ab, der Wert des Maximums ist aber von diesen unab-

hängig. Letzterer scheint vielmehr von der Grösse der Absorption selbst bei der betreffenden Wellenlänge abzuhängen. Die Absorptionsänderung infolge der Belichtung ist von der bei den Lenardphosphoren vorkommenden Änderung ganz verschieden, und ist wahrscheinlich mit dem von andren Autoren bei Phosphoreszenzemissionsbanden gefundenen so genannten Vorerregungsprozess in Zusammenhang.

Weitere Untersuchungen sind im Gange.

Szeged, Institut für Experimentalphysik der Franz Joseph Universität. 1937. November.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dec. 1937.)

A DIFFUZIÓS POTENCIÁL KISZÁMÍTÁSA A DEBYE—HÜCKEL-ELMÉLET ALAPJÁN.

SZABÓ ZOLTÁN-161.

Az átvitelrel bíró láncok modern elméletét termodinamikai alapon TAYLOR¹ fejtette ki. Ezen vizsgálatok eredményeképpen ő megállapította, hogy az átvitelrel bíró láncok semmi felvilágosítást sem nyújtanak az ionaktivitásokra vonatkozólag, miután az elektromotoros erő csak az átviteli szám és a középaktivitás függvénye. Kétségtelen, hogy tisztán termodinamikai alapon az átvitelrel bíró galvánelem elektromotoros erője nem bontható fel az egyes összetevő potenciálok értékeire. Ezt a megállapítást helytelen irányba általánosította GUGGENHEIM,² aki kimondta, hogy az ionaktivitások meghatározása nemcsak lehetetlen feladat, hanem célnélküli is, mert az ionaktivitásoknak nem tulajdonítható fizikai értelem. Amikor ionaktivitásokról beszélünk, az mindig valamilyen konvenció eredménye.

Az ionaktivitások termodinamikai meghatározását a diffúziós potenciál jelenléte hiúsítja meg. Ez termodinamikailag csak ideális oldatoknál számítható ki és az eredmény azonos a kinetikus úton számítottal. Ez vezetett aztán ahhoz a másik helytelen véleményhez, hogy a diffúziós potenciálnak a termodinamikai értelmezése a nem ideális oldatokra is vonatkoztatható. Ez kétségtelenül helytelen álláspont, mert a termodinamikai elveket olyan esetekben is alkalmazták, ahol azok érvényességének előfeltételei hiányoznak. A probléma ezen oldalára HERMANS és OOSTERHOFF³ mutattak rá egy újabban megjelent dolgozatunkban.

¹ P. B. TAYLOR : J. phys. Chem. 31. 1478. 1927.

² E. A. GUGGENHEIM : J. phys. Chem. 33. 842. 1929., 34. 1758. 1930. Phil. Mag, 22. 933. 1936.

³ J. J. HERMANS és L. J. OOSTERHOFF : Phil. Mag. 24. 304. 1937.

Másrésről az ionaktivitások fontossága nem tagadható és nyilvánvaló, hogy a diffúziós potenciál meghatározásával az ionaktivitások is nemcsak értelmezhetők, hanem meghatározhatók is lesznek. Már pedig a diffúziós potenciál független meghatározása, ami alatt az ionaktivitások ismerete nélkül véghezvihető meghatározása értendő, elvileg nem lehetetlen. Kísérleti szempontból M. QUINTIN⁴ és a jelen dolgozat szerzője⁵ igyekeztek a probléma megoldásához közelebb jutni, míg a diffúziós potenciálok elméleti kiszámításának lehetőségeit HERMANS⁶ vizsgálta.

HERMANS az elektrolitek diffúziójának általános elméletéből indul ki, melyet az elektrolitek modern elmélete alapján ONSAGER és FUOSS⁷ építettek ki. Ezen az alapon természetes, hogy a penetrációs nyomás kiszámításánál a koncentrációk helyett az aktivitásokat kell figyelembe venni. A probléma ezen termodinamikai általánosításához még hozzájárul a DEBYE—HÜCKEL-féle ionatmoszférától származó elektroforetikus hatás számításbavétele. Ekkor az ion mozgásegyenlete lesz:

$$v_i = - \frac{kT}{\rho_i} \text{grad} \ln(f_i n_i) - \frac{e_i}{\rho_i} \text{grad} \varphi + \frac{e_i x}{6\pi\eta} \text{grad} \varphi, \quad (1)$$

hol k a BOLZMANN-féle állandó, T az abszolút hőmérséklet, ρ_i egy surlódási tényező, mely az ionmozgékonyssággal fordítva arányos, f_i az i anyag aktivitási koefficiense n_i koncentrációnál, e_i az ion töltése, η az oldószer belső surlódási együtthatója és végül x a DEBYE—HÜCKEL-elmélet karakterisztikus mennyisége. A fenti egyenlet integrálja lesz:

$$\varphi = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \frac{l_1 |z_1| - l_2 |z_2|}{l_1 |z_1| + l_2 |z_2|} \frac{e_i^2 x}{2DkT} + \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{3\pi\eta} x \right\} \quad (2)$$

hol l az ionmozgékonyságok, D a dielektromos állandó.

⁴ M. QUINTIN: J. Chim. phys. **33**. 433. 1936.

⁵ SZABÓ Z.: Mat. és Természettud. Ért. **LIII**. 757. 1935., **LV**. 766. 1937. Magyar Chem. Folyóirat. **42**. 1936.

⁶ J. J. HERMANS: Dissertation Leiden 1937. Zts. f. phys. Chem. **A**. **176**. 55. 1936.

⁷ L. ONSAGER és R. FUOSS: J. Phys. Chem. **36**. 2763. 1932.

Ezen integrációnál, mely HERMANS-tól származik, a DEBYE—HÜCKEL-elmélet eredményei csak első közelítésben vannak figyelembevéve és ezért csak igen híg oldatokra alkalmazhatók.

Általánosabb és természetesen a kísérleti lehetőségekhez közelebb álló eredményt nyerünk, ha DEBYE—HÜCKEL-elmélet második közelítését használjuk a mozgásegyenlet felállításánál. Még általánosabb lesz a diffúziós potenciál egyenlete, ha a dielektromos állandó változását is figyelembe vesszük, amikor egy a koncentrációban lineáris tag is fellép.

A DEBYE—HÜCKEL-elmélet második közelítésű alakja szerint az aktivitási koefficiens értéke

$$-\log f = \frac{e^2}{2DkT} \frac{x}{1+ax} = \frac{u\sqrt{c}}{1+a\sqrt{2c}}, \quad (3)$$

hol a az iónátmérője.

Ha a dielektromos állandó a koncentrációval változik, akkor az aktivitási koefficiens általános alakja lesz:

$$-\log f = \frac{u\sqrt{c}}{1+a\sqrt{2c}} + 2bc. \quad (4)$$

Nagy koncentrációknál azonban még ez a bővített alak sem adja meg pontosan az aktivitási koefficiens értékét, hanem egy logaritmikus tag is hozzájárul. 0.1 molaritás alatt ez a logaritmikus tag olyan kicsiny, hogy nem jön számításba. Ennél nagyobb koncentrációknál már figyelembe kell vennünk. Ekkor tehát az aktivitási koefficiens lesz:

$$-\log f = \frac{u\sqrt{c}}{1+a\sqrt{2c}} + 2bc - \log(1+k'm). \quad (5)$$

Ezek után a diffúziós potenciál egyenletének általános alakja második közelítésben a következő lesz:

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \left\{ \frac{kT}{e_i} \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| - l_2|z_2|}{l_1|z_1| + l_2|z_2|} \frac{e_i^2}{2DkT} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8 \cdot 10^{-8}}{3\pi\gamma} \right] \frac{x}{1+ax} \right\}, \quad (6)$$

illetve

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| - l_2|z_2|}{l_1/|z_1| - l_2/|z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} \right\}. \quad (7)$$

A harmadik közelítésben:

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| - l_2|z_2|}{l_1/|z_1| - l_2/|z_2|} \frac{e_i^2}{2DkT} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8 \cdot 10^{-8}}{3\pi\eta} \right] \frac{x}{1 + ax} + 2bc \right\}, \quad (8)$$

illetve

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| - l_2|z_2|}{l_1/|z_1| - l_2/|z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} + 2bc \right\}. \quad (9)$$

Negyedik közelítésben:

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| - l_2|z_2|}{l_1/|z_1| - l_2/|z_2|} \frac{e_i^2}{2DkT} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8 \cdot 10^{-8}}{3\pi\eta} \right] \frac{x}{1 + ax} + 2bc - \log(1 + k'c) \right\}, \quad (10)$$

illetve

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1|z_1| + l_2|z_2|}{l_1/|z_1| - l_2/|z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 8}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} + 2bc - \log(1 + k'c) \right\} \quad (11)$$

(A negyedik közelítés utolsó tagjában, miután közelítő számításról van szó, az egyszerűség kedvéért a moláris koncentráció m helyett a közönséges koncentrációval c -vel számolhatunk.)

Ezen általános egyenleteknek a sósavra vonatkozó különleges alakjaival már egy előző dolgozatomban¹ foglalkoztam. Meg-

¹ SZABÓ Z.: Mat. és Természettud. Ért. LV. 766. 1937.

állapítottam, hogy a harmadik közelítésű alak a tapasztalással jó megegyezésben van egészen 0.2 mol koncentrációig.

Egy másik dolgozatomban¹ foglalkoztam a nátriumklorid és a káliumklorid ionjainak aktivitásával, amikor is a sósavra már előbb kidolgozott eljárással megállapítottam,² hogy a káliumklorid ionjainak aktivitása 1.0 moláris, a nátriumklorid ionjainak aktivitása pedig 0.5 moláris koncentrációig egyenlő.

Ugyanott a diffúziós potenciálra a következő tapasztalati képletek voltak felállíthatók:

$$NaCl: \quad \varepsilon = 12.29 \log c_1/c_2 \quad (12)$$

$$KCl: \quad \varepsilon = 1.04 \log c_1/c_2. \quad (13)$$

Kérdés, hogy ezen tapasztalati egyenletek a fenti elméleti egyenletekkel milyen összefüggésben vannak.

A nátriumkloridoldatok között fellépő diffúziós potenciálok elméleti kiszámításához helyettesítsük be a fenti egyenletekbe a megfelelő

$$l_{Na} = 50.10$$

$$l_{Cl} = 76.32$$

$$u = 0.5067$$

$$a = 0.837$$

$$b = 0.0316$$

$$\eta = 0.008937$$

$$h' = 0.036$$

értékeket.³ Ekkor 25°C-nál lesz:

$$\varepsilon = \text{konst} - 12.26 \left\{ \log c - \frac{0.096 \sqrt{c}}{1 + 1.183 \sqrt{c}} \right\}, \quad (14)$$

illetve

$$\varepsilon = \text{konst} - 12.26 \left\{ \log c - \frac{0.096 \sqrt{c}}{1 + 1.183 \sqrt{c}} + 0.0632c \right\} \quad (15)$$

¹ SZABÓ Z.: Zts. f. phys. Chem. A. 176. 125. 1936.

² SZABÓ Z.: Zts. f. phys. Chem. A. 174. 22. 1935.

³ H. S. HARNED és L. F. NIMS: J. Amer. Chem. Soc. 54. 423. 1932.

és végül

$$\varepsilon = \text{konst} - 12.26 \left\{ \log c - \frac{0.096\sqrt{c}}{1+1.183\sqrt{c}} + 0.0632c - \log(1+0.036c) \right\} \quad (16)$$

míg az első közelítést képviselő eredeti HERMANS-féle egyenlet:

$$\varepsilon = \text{konst} - 12.26 \{ \log c - 0.096\sqrt{c} \}. \quad (17)$$

Káliumklorid esetében a behelyettesítendő értékek lesznek: ¹

$$\begin{aligned} l_k &= 73.50 \\ l_{Cl} &= 76.32 \\ u &= 0.504 \\ a &= 0.76 \\ b &= 0.0171 \\ \eta &= 0.008937 \\ k' &= 0.036. \end{aligned}$$

Ekkor a második közelítés

$$\varepsilon = \text{konst} - 1.11 \left\{ \log c - \frac{0.160\sqrt{c}}{1+1.075\sqrt{c}} \right\}, \quad (18)$$

a harmadik közelítés

$$\varepsilon = \text{konst} - 1.11 \left\{ \log c - \frac{0.160\sqrt{c}}{1+1.075\sqrt{c}} + 0.0342c \right\} \quad (19)$$

és végül a negyedik közelítés

$$\varepsilon = \text{konst} - 1.11 \left\{ \log c - \frac{0.160\sqrt{c}}{1+1.075\sqrt{c}} + 0.0342c - \log(1+0.036c) \right\}. \quad (20)$$

A HERMANS-féle eredeti egyenlet:

$$\varepsilon = \text{konst} - 1.11 \{ \log c - 0.160\sqrt{c} \} \quad (21)$$

Az alábbi táblázatok tartalmazzák a kísérletileg nyert, valamint az egyes közelítésekkel számított, diffúziós potenciál értékeket.

¹ H. M. SPENCER: J. Amer. Chem. Soc. 57. 1161. 1935.

Táblázat.

Koncentráció <i>mol</i>	I. köz. <i>mV</i>	II. köz. <i>mV</i>	III. köz. <i>mV</i>	IV. köz. <i>mV</i>	Kísérli. talált. <i>mV</i>
0·001	24·19	24·29	24·37	24·37	
0·002	20·51	20·61	20·69	20·69	
0·005	15·66	15·76	15·84	15·84	16·02
0·01	12·01	12·10	12·17	12·17	12·30
0·02	8·37	8·44	8·50	8·50	8·63
0·05	3·58	3·63	3·67	3·67	3·70
0·1	Vonatkozási koncentráció				
0·2	3·53	3·65	3·72	3·69	3·68
0·5	8·11	8·39	8·69	8·60	8·69
1·0	11·46	11·99	12·68	12·50	12·55
2·0	14·66	15·60	17·07	16·70	(15·70)
3·0	16·44	17·71	19·94	19·40	(18·70)
0·001	2·17	2·19	2·19	2·19	
0·002	1·84	1·86	1·86	1·86	
0·005	1·39	1·41	1·41	1·41	1·33
0·01	1·07	1·09	1·09	1·09	1·03
0·02	0·74	0·75	0·75	0·75	0·71
0·05	0·31	0·32	0·32	0·32	0·27
0·1	Vonatkozási koncentráció				
0·2	0·32	0·33	0·34	0·34	0·27
0·5	0·72	0·75	0·77	0·77	0·70
1·0	0·99	1·06	1·10	1·08	1·07
2·0	1·29	1·38	1·46	1·42	1·41
4·0	1·48	1·71	1·86	1·79	1·80

Nátriumklorid

Káliumklorid

A zárójelbe tett értékek Harned-nak kevésbé pontos méréseiből származnak.

Látjuk, hogy nátriumklorid esetében az eredeti HERMANS-féle határtörvény sehol sem ad a kísérleti adatokkal egyező értékeket, még nagy hígításoknál sem. Ezért HERMANS a dolgozatában később egy önkényesen felvett állandóval számol:¹

$$\varepsilon = -0.09 - 12.26 \{ \log c_1/c_2 - 0.096 \sqrt{c} \}. \quad (22)$$

Nem túlságosan nagy koncentrációknál már a harmadik közelítés jól egyező értékeket ad, míg nagyobb koncentrációknál a negyedik közelítés érvényes. Nagy hígítások felé valamilyen szisztematikus eltérés látszik fennforogni az adatokban. Errevonatkozólag kézenfekvő az a magyarázat, hogy a sók ilyen nagy hígításban már hidrolizálnak² és ez természetesen az elektród-potenciált is befolyásolja. Ezért az eltérések nem tekinthetők lényegeseknek.

Mindenesetre az a körülmény, hogy a nagyobb közelítésű aktivitási koefficienssel számított diffúziós potenciálérték és a kísérleti adat között az eltérés csökken, arra enged következtetni, hogy az eltérés a diffúziós potenciál képletének hiányosságából származik, nem pedig a kísérleti érték hibás, illetve az a feltevés, melyet a kísérleti érték kiszámításánál felvettünk, tehát, hogy az iónaktivitási koefficiens és a középaktivitási koefficiens egyenlő, még az 1 moláris oldatnál is fennáll.

A káliumklorid esetében már a harmadik közelítés jó megegyezéssel adja vissza a megvizsgált koncentrációtartományban a kísérleti értékeket. A nagy hígítások felé mutatkozó csekély ($\Delta\varepsilon < 0.1$ mV) eltérés szintén a hidrolízis számlájára írható. Nagyon jó az egyezés egészen a telített oldatig, ha az aktivitási koefficiens kifejezésében a logaritmikus tagot is figyelembe vesszük.

Miután elméletileg a negyedik közelítéssel számított diffúziós potenciálok a kísérletileg talált adatokkal teljesen megegyeznek, ez arra mutat, hogy egyúttal az a feltevés, melyet a kísérleti adatok kiszámításánál az iónaktivitások és a középaktivitá-

¹ J. J. HERMANS : Dissertation, Leiden. 1937.

² Gmelin's Handbuch 22. 2. 454.

sok közötti egyenlőségre vonatkozólag felvetünk, szintén fennáll. És ezzel egyúttal a Mac INNES-féle hipotézis, mely a káliumklorid ionaktivitásait egyenlőknek tekintette, kísérleti igazolást nyert.

Az ionaktivitások eddig homályos és éppen ezért sokat vitatott fogalmi voltak a termodinamikának. A priori nem volt semmi lehetőség a nagyságukat illetőleg még feltevésekbe sem bocsátkozni, az egy káliumkloridot kivéve. A jelen vizsgálatok azt mutatják, hogy az ionaktivitások különbözősége nem szükségképeni jelenség. Olyan ionok, melyek tömegüket, nagyságukat és mozgékonyosságukat tekintve nem állanak messze egymástól, egyformán hidratálódnak és ezért egyformán is polározódhatnak. Természetesen az ion polározódása függ a partnerétől. Ezért nem várható, hogy ugyanazon ion különböző sóinak ugyanazon töménységű oldatában ugyanakkora aktivitással is bírjon. Nem lesz tehát az 1 moláris oldatban a nátriumklorid klóriójának aktivitása egyenlő az 1 moláris káliumkloridoldatban levő klórión aktivitásával. Az ionaktivitások termodinamikájának kiépítése még a jövő feladata.

Összefoglalás.

A HERMANS által a DEBYE—HÜCKEL-elmélet alapján levezetett diffúziós potenciálegyenlet általánosítható azáltal, hogy az ionok átmérőjét, valamint a dielektromos állandónak a koncentrációval való változását is figyelembe vesszük. Ekkor a diffúziós potenciál számára különböző közelítésű egyenleteket kapunk. 0.1 moláris koncentráció alatt a harmadik, 0.1 moláris koncentráció felett a negyedik közelítés érvényes:

III. közelítés:

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1 |z_1|}{l_1 / |z_1|} - \frac{l_2 |z_2|}{l_2 / |z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 3}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + u\sqrt{2c}} + 2bc \right\}.$$

IV. közelítés:

$$\varepsilon = \text{konst} - \frac{l_1 - l_2}{|z_1| + |z_2|} \frac{kT}{e_i} \left\{ mc - \left[\frac{l_1 |z_1| - l_2 |z_2|}{l_1 |z_1| - l_2 |z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 3}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} + 2bc - \log(1 + k'c) \right\},$$

ahol l_1 és l_2 az ionok mozgékonyaságai, u , a , b és k' az aktivitási koeficiensben szereplő és az anyagra jellemző állandók, η az oldószer belső surlódási együtthatója.

Az elméletileg számított és a kísérletileg talált diffúziós potenciálok teljes megegyezést mutatnak, amiből következik, hogy a nátriumkloridnál 1·0 moláris, káliumkloridnál 4 moláris oldatig az ionaktivitási koeficiensnek egyenlők.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13.-án tartott üléséből.)

BERECHNUNG DER DIFFUSIONSPOTENTIALE AUF GRUND DER DEBYE—HÜCKEL-SCHEN THEORIE.

Von ZOLTÁN SZABÓ.

Zusammenfassung.

Die von HERMANS auf Grund der DEBYE—HÜCKEL-schen Theorie abgeleitete Gleichung für das Diffusionspotential kann erweitert werden, wenn der Durchmesser der Ionen und die Änderung der Dielektrizitätskonstante mit der Konzentration berücksichtigt werden. So sind für das Diffusionspotential Gleichungen erhältlich, die verschiedene Näherungen darstellen. Im Allgemeinen ist unter 0·1 mol Konzentration die dritte Näherung, darüber die vierte Näherung zu verwenden.

III. Näh.:

$$\epsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1 |z_1| - l_2 |z_2|}{l_1 / |z_1| - l_2 / |z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 3}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} + 2bc \right\}.$$

IV. Näh.:

$$\epsilon = \text{konst} - \frac{\frac{l_1}{|z_1|} - \frac{l_2}{|z_2|}}{l_1 + l_2} \frac{kT}{e_i} \left\{ \ln c - \left[\frac{l_1 |z_1| - l_2 |z_2|}{l_1 / |z_1| - l_2 / |z_2|} - \frac{|z_1| + |z_2|}{l_1 + l_2} \frac{15 \cdot 3}{3\pi\eta} \right] \frac{u\sqrt{c}}{1 + a\sqrt{2c}} + 2bc - \log(1 + k'c) \right\}$$

wo l_1 und l_2 die Ionenbeweglichkeiten, u , a , b und k' die Konstanten der Aktivitätskoeffizientengleichung sind, η der Koeffizient der inneren Reibung ist. Die theoretisch berechneten und experimentell gefundenen Daten weisen eine vollständige Übereinstimmung auf, woraus die Folgerung gezogen werden kann, dass die Ionenaktivitäten des Natriumchlorids bis 1·0 Mol, die Ionenaktivitäten des Kaliumchlorids bis zur Sättigung einander gleich sind.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. December 1937.)

A CHINACETOPHENONMONOMETHYLAETHER ELŐÁLLÍTÁSA.¹

MAUTHNER NÁNDOR I. tagtól.

Rövid ideje, hogy GORIS és CANAL² francia kutatók a *Primula acaulis*-ből egy új glukosidet különítettek el, amelynek hidrolizisekor aglykon gyanánt chinacetophenonmonomethylaethert (2-oxy, 5-methoxyacetophenon) (II) különítettek el. Ezen glukozid szerkezetére nézve az oxyketonglukosidek közé tartozik, amelyek képviselői közül már előzőleg szintézis útján előállítottam a *Pinus picea*-ból elkülönített glukosidet a piceint³ hasonlóképpen az *Apocynum androsefolium*-ból elkülönített androsint.⁴ Mindenekelőtt ezen új glukosid aglykonjának a szintézisével foglalkoztam. Négy szintézisét kísértem meg ezen ketonnak, amelyek közül az utolsó a vegyület nagyobb mennyiségben való előállítására is alkalmas. A két első szintézisét a ketonnak az acylgyökvándorlás módszerével végeztem. E célból diacetylhydrochinont nitrobenzolos oldatban aluminiumchlorid jelenlétében közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. Az acylgyök nem helyezkedett át a benzolmagba. A hydrochinonból dimethylsulfattal részleges metilezés útján előállított monomethylhydrochinont acetylszármazékává alakítjuk át. Az acetylszármazékból megkísértem aluminiumchlorid hatására a methylchinacetophenont előállítani, de a legérzékenyebb keton

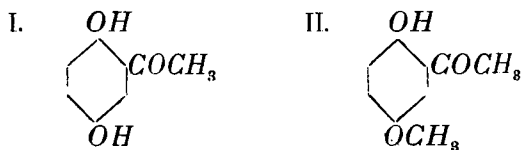
¹ A Pázmány Péter Tud.egyetem II. sz. vegytani intézetében készült-dolgozat.

² *Cent.* 1937. I. 359.

³ *Journ. für prakt. Chemie* (2) 88, 704. (1913.).

⁴ *Journ. für prakt. Chemie* (2) 110, 123. (1925.).

reagensekkel sem sikerült keton képződését kimutatni. Hasonlóképpen sikertelenül kísértem meg a HOESCH-féle módszer szerint hydrochinomonomethylaetherből és acetonitrilből a ketont előállítani. Végre sikerült a ketont a következő módon előállítani. Hydrochinonból jégcettel és zinkchloriddal a NENCKI—SILBER-féle reakció útján a chinacetophenont (I), állítottam elő. Azon megfigyelés alapján, hogy az ortho állásban helyettesített hidroxilgyököt sokkal nehezebben



lehet metilezni mint szabadon állót, chinacetophenont egy molekula dimethylsulfattal metileztem és így jó termeléssel chinacetophenonmethylestert (II) nyertem.

KISÉRLETI RÉSZ.

Chinacetophenonmonomethylaether.

A kiindulási anyag gyanánt szükséges diacetylhydrochinont a következő módon állítjuk elő : 30 g hydrochinont 60 cm³ acetylchloriddal egy óra hosszat visszafolyó hűtőcsővel a vízfürdőn hevítjük. A reakcióelegyet jégre öntjük, leszűrjük, vízzel jól ki-mossuk és kiszárítjuk. Olv. p. 121⁰¹

20 g diacetylhydrochinont 200 g nitrobenzolban oldunk és jéggel való hűtés közben 15—20 C° között 18 g finomra porított aluminiunchloridot egy fél óra alatt hozzáadagolunk. A reakció-edényt higanyzárral látjuk el és 24 óra hosszat közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. Ezután a reakció-elegyet jégre öntjük, tömény sósavat adunk hozzá és egy fél óra hosszat a vízfürdőn hevítjük. A lehűlt oldatot aetherrel kivonjuk és az aetheres oldatot kétszer 100 cm³ 7%-os natronlúggal kirázzuk. A lúgos oldatokat híg sósavval hűtés közben megsavanyítjuk és aetherrel kivonjuk. Az

¹ A. REYCHLER C. 1908. I. 1042.

aetheres oldatot natriumsulfattal szárítjuk, az aethert ledesztilláljuk és a visszamaradó terméknek vizsgálata p. nitrophenylhydrazinnel ketonra negatív eredményt adott. Nagyobb mennyiségű hidrocchinonmonomethylaether előállítására a következő eljárás bizonyult célszerűnek:

50 g hidrocchinont 200 cm³ 20 %-os natronlúgban oldunk és vízzel való hűtés közben $\frac{1}{2}$ óra hosszat 26 cm³ dimethylsulfattal összerázzuk. Ezután 5 g natriumhidroxid vizes oldatát adjuk hozzá és a reakciós-elegyet $\frac{1}{2}$ óra hosszat visszafolyó hűtőcsővel hevítjük. Lehűlés után az elegyet 50 cm³ 10 %-os natronlúggal lúgossá tesszük és aetherrel kivonjuk. Az aether lepárlása után 7.5 g hidrocchinondimethylaethert nyerünk. A lúgos oldatot megsavanyítjuk és a kiváló terméket választótölcsérben elkülönítjük. Az oldatot benzollal kivonjuk, mert ebben a hidrocchinon majdnem oldhatatlan, ellenben a monomethylhidrocchinonaether könnyen oldódik. A benzolos oldat szárítása után az oldószert ledesztilláljuk és a maradékot a fenti olajjal elegyítjük. Frakcionálva desztilláljuk, miközben a középső frakció 250—252 C°-on megy át. Termelés 28 g tiszta hidrocchinonmonomethylaether. Olv. p. 31—32 C°.¹

28 g hidrocchinonmonomethylaethert 56 cm³ acetylchloriddal 1 órahosszat visszafolyó hűtőcsővel a vízfürdőn hevítjük és azután frakcionálva desztilláljuk. A középső frakció 134—135 C°-on megy át 18 mm nyomás alatt.² Termelés 32 g 21.5 g acetylmonomethylhidrocchinont feloldunk 100 g nitrobenzolban és jeges vízzel való hűtés közben $\frac{1}{2}$ óra alatt 13 g porított alumíniumchloridot adunk hozzá. A reakciós-edényt higanyzárral látjuk el és 24 óra hosszat közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. A reakciós-elegyet a fenti módon dolgozzuk fel és a vizsgálatkor abban nem sikerült ketont kimutatni.

A HOESCH-féle szintézis eszközlésére 5 g monomethylhidrocchinont feloldunk 30 cm³ vízmentes aetherben 2 g megömlesztett zinkchloridot és 3 g acetomitritl adunk hozzá. A reakcióelegybe 5 óra hosszat szárított sósavgázt vezetünk be. A reakcióelegy feldolgozásakor csak változatlan kiindulási anyagot sikerült elkülöní-

¹ A. KLEMENC Cent. 1914, 1264.

² Loc. cit.

teni. NEUCKI és SIEBER¹ adatai a chinacetophenon előállítására vonatkozólag egészen tévesek, mert kísérleti adataik pontos betartása mellett 50 g hidrochinonból csak 0.5 g chinacetophenont sikerült elkülöníteni. Az alábbi módon egy sokkal jobb termelést érhetünk el, de a termelési hányad ez esetben sem jó. 50 g hidrochinont 75 g jégecettel és 75 g megömlesztett zinkchloriddal 3 óra hosszat 145—150 C°-ra hevítjük. Azután a reakcióelegyet sok vízbe öntjük és a következő napig állni hagyjuk. A kiváltott ketont leszűrjük és vízzel jól kimossuk. Termelés 19 g. A ketont körülbelül 1½ liter forró vízből kristályosítjuk át. Olv. p. 202 C°.

16.3 g ketont feloldunk 8.6 g natriumhidroxidból és 45 cm³ vízből készített oldatban, majd 9.6 cm³ dimethylsulfattal külső vízzel való hűtés közben 25 percig összerázzuk. Ezután a reakcióelegyet fél óra hosszat visszafolyó hűtőcsővel hevítjük. Az oldatot 20 cm³ 10 %-os natronlúggal lúgossá tesszük és aetherrel kivonjuk. A lúgos oldatot megsavanyítjuk, aetherrel kivonjuk és az aetheres oldatot vízmentes natriumsulfattal szárítjuk. Az aether lepárlása után visszamaradó olajos terméket porcelláncészébe öntjük, ahol az egynehány napi állás után megdermed. A terméket agyagtányérra kenjük és teljesen kihagyjuk száradni. Termelés 5 g. Ezután a ketont 1½ liter forró vízből kristályosítjuk át. A vegyület 50—51 C°-on olvadt meg mint KAUFFMANN és BEISWENGER megadták, akik a vegyületet kis mennyiségben mint mellékterméket nyerték acetylehloridnak dimethylhydrochinonra való hatásakor² a FRIEDEL és CRAFTS-féle módszer szerint

0.1643 g anyag adott: 0.3915 g CO₂-t és 0.0907 g H₂O-t.

A C₉H₁₀O₃ képlet alapján a számított értékek: C = 65.06 %, H = 6.02 %.

Kísérletileg talált értékek: C = 64.94 %, H = 6.12 %.

A fentebbi eredeti oldat lúgossá tételekor nyert aetheres kivonatot kétszer 10 %-os natronlúggal átrázzuk és azután az oldatokat megsavanyítjuk. Az oldat lehűlésekor sárga kristályok váltak

¹ Journ. für prakt. Chemie 23, 151, 583 (1881).

² Ber. 38, 789 (1905.).

ki (1.2 g), amelyeket meleg vízből kristályosítunk át. Olv. p. 50—51 C° és a fentebbi chinacetophenonmonomethylaetherrel azonosnak találtam.

A termék közelebbi jellemzésére a p. nitrophenylhydrazon igen alkalmas. Előállítására 0.5 g ketont feloldunk 10 cm³ 50 %-os ecetsavban és 0.5 g p. nitrophenylhydrazin ecetsavas (10 cm³ 50 %-os) oldatával elegyítjük. Rövid hevítés után a hydrazon vörös tűkben válik ki amelyet további tisztítás céljából alkoholból kristályosítunk át. Vörös tűkben válik ki, amelyek 215—216 C°-on olvadnak.

0.1360 g anyag adott: 16.5 cm³ nitrogént 15 C°-nál és 757 mm nyomásnál.

A $C_{15}H_{15}O_4N_3$ képlet alapján a számított érték: $N=13.95\%$.
Kísérletileg talált érték: $N=14.08\%$.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE DARSTELLUNG DES CHINACETOPHENONMONOMETHYLAETHERS.

Von F. MAUTHNER korr. Mitglied.

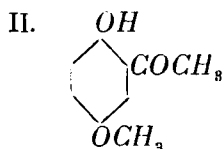
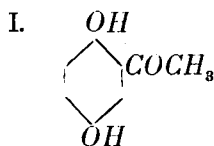
Vor kurzem hatten¹ GORIS und CANAL aus *Primula acaulis* ein neues Glukosid isoliert, welches bei der Spaltung als Aglykon 2-Oxy-5-methoxyacetophenon (Chinacetophenon monomethylaether) (II) gab. Dieses Glucosid gehört hiernach zu der Klasse der Oxyketonglucoside, von deren Vertretern ich bereits früher das Picein² das Glucosid von *Pinus picea* und das Androsin³ das aus *Apocynum androsemaifolium* isoliert wurde synthetisch dargestellt habe. Ich beschäftigte mich zunächst mit der Synthese des Aglykons dieses neuen Glucosids. Ich führte vier Synthesen aus von welchem die letzte zur Darstellung des Ketons sehr geeignet ist. Die zwei ersten Synthesen führte ich nach der Methode der Acylgruppenwanderung aus. Zu diesem Zwecke wurde Diacetylhydrochinon in nitrobenzolischer Lösung bei Gegenwart von Aluminiumchlorid bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Es trat keine Wanderung der Acylgruppe in den Kern ein. Aus dem Hydrochinon durch partielle Alkylierung mittelst Dimethylsulfat gewonnene Monomethylhydrochinon wurde in das Acetylderivat übergeführt. Bei dem Versuch daraus mittelst Aluminiumchlorid das Methylchinacetophenon zu gewinnen konnte mit dem empfindlichsten ketonreagenzien auch kein Keton nachgewiesen werden. Ebenso negativ verlief der Versuch das Keton aus Monomethyl-

¹ C. 1937. I. 359.

² Journ. für prakt. Chemie (2) 88, 764. (1913.).

³ Journ. für prakt. Chemie (2) 110, 123, (1925.).

ehydrochinon und Acetonitril nach der HOESCH'schen Methode zu gewinnen. Schliesslich führte folgender Weg zum gewünschtem Ziele. Aus Hydrochinon und Eisessig wurde bei Gegenwart von Zinkchlorid nach der NEUCKI—SIEBER'schen Methode Chinacetophenon (I) gewonnen. Auf Grund der früheren Beobachtung das ortho Substituirte Hydroxylgruppen schwerer Alkyliert werden als freistehende wurde Chinacetophenon mit ein Molekul Dimethylsulfat methyliert und lieferte so in guter Ausbente Chinacetophenonmonomethylaether (II).

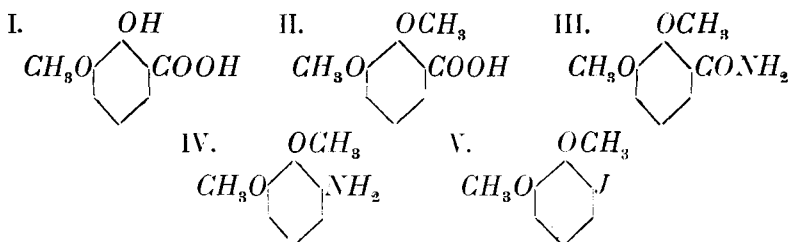


(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

A 6-JODVERATROL SZINTÉZISE.¹

MAUTHNER NÁNDOR I. tagtól.

Szintézisek céljára szükségem volt az eddig a szakirodalomban még nem ismertett 6-jodveratrolra. Az isomer vegyületet, a 4-jodveratrolt² igen könnyű előállítani jod és higanyoxid hatására veratrolból. Tekintve, hogy a 6-nitroveratrol nehezen hozzáférhető vegyület a szintézis eszközlése céljából a könnyen előállítható guajacol o. carbonsavból (I) indultam ki.



E vegyületet előző adataim³ szerint dimethylsulfattal metileztem veratrol o. carbonsavvá (II). A savból phosphorpentachlorid hatására jó termeléssel a chlorid⁴ keletkezik és ez utóbbi vegyület ammoniak hatására az amiddé (III) alakul át. A savamidből a HOFFMANN-fele reakció szerint natriumhypochlorit hatására 6-aminoveratrol (IV) képződött, amely vegyületből a diazo-reakció útján a 6-jodveratrolt (V) nyertem.

¹ A budapesti Pázmány-Péter tud. egyetem II. sz. vegytani intézetében készült dolgozat.

² SEER u. EHRENREICH 1913. I, 2135.

³ Mat. és Természettud. Ért. **43**, 358 ; Journal für prakt. Chemie 112, 58 (1926).

⁴ Mat. és Természettud. Ért. **43**, 358 ; Journal für prakt. Chemie 112, 62 (1926).

KISÉRLETI RÉSZ.

6-Aminoveratrol.

A fenti vegyület előállítására szükséges veratrol o-carbonsavat előző adataim¹ szerint állítottam elő guajacol o. carbonsavból dimethylsulfattal való metilezés útján. A savból phosphor-pentachloriddal² előállított és légritkitott térben való desztilláció útján tisztított terméket a következőképpen alakítjuk át amiddé:

20 g. o. veratrumsavchloridet feloldunk 50 cm³ víz- és alkoholmentes aetherben és keverés közben becsepegtetjük tömény ammoniakoldatba. A kiváltott amidet vízzel jól kimossuk, kevés meleg vízből kristályosítjuk át és agyagtányéron szárítjuk ki. Termelés 16 g. Olvadáspont 93—94 C°, előző adataimmal egyezőleg.³

Aminoveratrollá való átalakítására 17 g finommá porított amidet 150 cm³ natriumhypo-chloritoldattal (5 cm³ oldat fogyasztott 36·2 cm³ 1/10 n. As₂O₃ oldatot) 1³/₄ óra hosszat a rázógépen összerázzuk. Ezután kevés változatlan kiindulási anyagot leszűrünk (2·4 g) és a szűrlet 1/2 óra hosszat a vízfürdön hevítjük. Rövid idő múlva az amin olajcseppek alakjában válik ki az oldatból. A lehülés után a reakcióelegyet aetherrel kivonjuk és az oldatot natriumsulfattal szárítjuk. Az aethert ledesztilláljuk és a visszamaradó terméket vacuumban desztilláljuk, miközben a középső frakció 136—138 C°-on megy át 15 mm nyomás alatt. Termelés 6·2 g középső frakció. Szintelen olaj.

0·1355 g anyag adott: 11·3 cm³ nitrogént 16 C°-on 730 mm nyomás alatt.

A C₈H₁₁O₂N képlet alapján a számított érték: N=9·15%.
Kísérletileg talált érték. N = 9·29%.

¹ Mat. és Természettud. Ért. **43**, 358; Journal für prakt Chemie 112, 62 (1926).

² Loc. cit.

³ Loc. cit.

6-Jodveratrol.

7·7 g aminoveratrolt feloldunk 60 cm³ 10%-os kénsavban és 0 C°-on 3·5 g natriumnitrit 30 cm³ vizes oldatával diazotáljuk. A diazoniumoldatot 15 g jodkaliumnak 50 cm³ vízben való oldatába folytatjuk 50—60 C°-on, és még egy fél órát a vízfürdön hevítjük. A reakcióelegyet aetherrel kivonjuk, az aetheres oldatot hig natronlúggal átrázzuk és calciumchloriddal szárítjuk. Az aether lepárlása után visszamaradó olajat a vacuumban frakcionálva desztilláljuk, miközben a középső frakció 144—145 C°-on desztillál át 14 mm nyomás alatt. A párlat mihamar megdermed, ekkor agyagtányéron szárítjuk ki, majd petróleum-aetherből kristályosítjuk át. Világossárga lapocskákban válik ki, amelyek 45—46 C°-on olvadnak.

0·2101 g anyad adott: 0·1870 g *AgJ*-t.

A $C_8H_9O_2J$ képlet alapján a számított érték: $J = 48·08\%$.

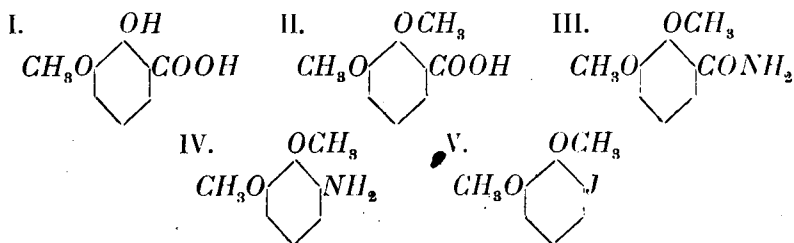
Kísérletileg talált értékek: $J = 48·20\%$.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25-én tartott üléséből.)

DIE SYNTHESE DES 6-JODVERATROLS.

Von F. MAUTHNER korr. Mitglied.

Für synthetische Zwecke benötigte ich das bisher in der Litteratur noch nicht beschriebene 6-Jodveratrol (V). Die isomere Verbindung des 4 Jodveratrol entsteht leicht aus Veratrol durch Einwirkung von Jod¹ und Quecksilberoxyd. Da das 6-Nitroveratrol schwer zugänglich ist, ging ich für die Synthese aus der leicht darstellbaren Guajacol o. carbonsäure aus. (I).



Diese Verbindung methylierte ich nach meinen früheren Angaben² mittelst Dimethylsulfat zur Veratrol o-carbonsäure (II). Aus der Säure entsteht mittelst Phosphorpentachlorid in guter Ausbeute das Chlorid³ und aus der letzten Verbindung mittelst Ammoniak das Amid (III). Das Säureamid ging nach der HOFFMANSchen Reaktion mittelst Natriumhypochlorit im 6-Amino-veratrol (IV) über, aus welcher Verbindung auf dem Wege der Diazoreaktion 6-Jodveratrol (V) gewonnen wurde.

¹ SEER und EHRENREICH, Centr. 1913. I, 2135.

² Journ. für prakt. Chemie (2) 112, 58 (1926).

³ F. MAUTHNER, Journ. für prakt. Chemie 112, 62 (1926).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

A HYDROCHININ MAGASABB HOMOLOGJAINAK VISELKEDÉSE A DIFFERENCIÁLÓ ALKYLEZÉSNÉL.

I. Aethylhydrocuprein.¹

KONEK FRIGYES I. tagtól.

A hydrochinin magasabb homologjainak tekinthetjük azokat a természetben elő nem forduló, hanem szintétikus úton nyert alkaloidokat, amelyek a chininből mesterséges hidrogénaddícióval keletkezett dihydrochininből methylfosztás útján előállított hydrocupreinnek magasabb alkylgyökökkel — aethyl, propyl anyl, oktyl, stb. — való éterifikáció révén nyerhetők. MORGENROTH-féle bázisoknak is szokás ezeket a hydrocupreinétereket nevezni, mivel ő volt az első, aki fiziologiai hatásukat beható összehasonlító tanulmány tárgyává tette.² Közöttük legismertebbek és farmakologiai szempontból legértékesebbek az aethylhydrocuprein vagy optochin, az amylszármazék vagy eucupin és a hosszabb oktylgyököt tartalmazó vuzin.

Legbehatóbban eddig az optochin lett tanulmányozva és trypanosomák és pneumokokkusokkal szemben az egész sorozat legbehatósabb tagjának bizonyult. Farmakologiai vonatkozásban hatása egészen chininszerű; valószínű hogy ezért kapta ez a hydro-

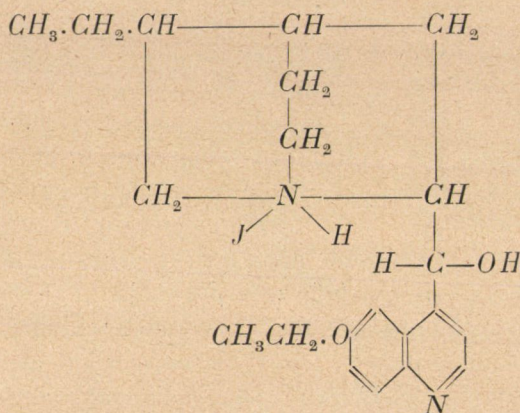
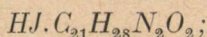
¹ VIII. közlemény a differenciáló alkylezés gyakorlati alkalmazásáról. A VII. közleményt: «Adatok a cinchona cuprea . . .» stb. lásd Mat. Termud. Ért. LVI. kötet (1937).

² MORGENROTH első kísérletei 1911, illetve 1917-ből datálódnak, egy a Német gyógyszerészegylet előtt tartott előadás nyomán.

cupreinéter gyógyszerési nevét is. Az optochin hatását legjobban illusztrálja, ha fontolóra vesszük, hogy képes még 1 : 1.000.000-hoz hígításban is a teljes virulenciában levő pneumokokkusokat végkép elpusztítani; miért is sikerrel alkalmazható mindama betegségek ellen gyógyszerül, amelyeknek okozói ezek vagy ezekhez hasonló baktériumok szoktak lenni.¹ Engem természetesen az optochinnek nem ez a kiváló baktericid hatása, hanem sokkal inkább az a magatartása érdekelt, amelyet ez a mesterséges cupreinszármazék a differenciáló alkylezéssel szemben tanusítani fog. Előző kísérleteimből kitűnt, hogy úgy a hydrochinin, amely az optochin alacsonyabb homologjának tekinthető, mint a hydrocuprein is, amely viszont nem más mint aethylfosztott optochin, a differenciáló alkylezésnek alávetve, egyező magatartást tanusítanak, amennyiben két izomér és eltérő színű, α - és β -monoiodmethy látot szolgáltatnak, azzal a különbséggel, hogy míg a hydrochinin β -jódmethy l származéka mint sárgaszínű kristályos test volt jellemezhető: addig a hydrocuprein megfelelő származéka eddig csak mint sárga olajos anyag jelentkezett jódhidrogénsavas sójának elbontásánál és semmiféle hajlamosságot a kristályos formába való átmenetre nem mutatott. Ezek szerint a probléma, amelyet per analogiam következtetéssel nem — hanem csakis kísérleti úton — lehetett teljes biztonsággal eldönteni, az volt, hogy az optochin vagy hydrocupreinaethyléter ez irányú viselkedésében a hydrochinin vagy pedig a hydrocuprein magatartását fogja-e követni, azaz hogy kristályos vagy pedig olajos test lesz-e a β -jódmethy l származéka? A kísérlet a feltett kérdésre megadta a választ és pedig az utóbbi lehetőség mellett döntött. Az optochin β -jódmethy látja csak olyan sárga olajos vegyület, mint amilyen magáé az anyavegyület, a hydrocupreiné; és ebben a viselkedésében tehát inkább bizonyult az utóbbi, mint a hydrochinin valódi származékának; jóllehet ez utóbbival homolog viszonyban van, ami pedig rendesen nagyobb fokú rokonságot jelent úgy kémiai mint fizikai tulajdonságokban.

¹ A Vereinigte «Chininfabriken ZIMMER & Co.», Frankfurt am Main magánközlése nyomán.

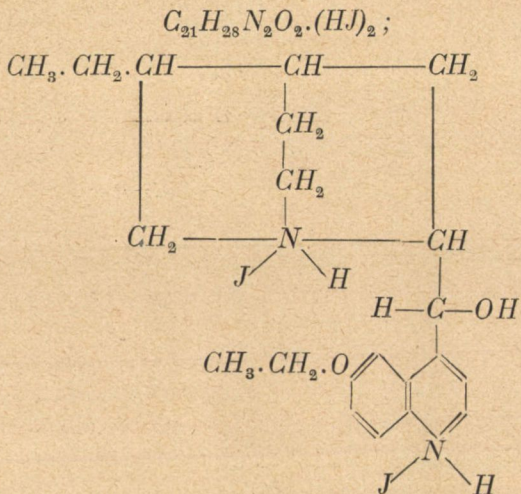
KÍSÉRLETI RÉSZ.

 α -Aethylhydrocuprein (optochin)-jódhydrát.

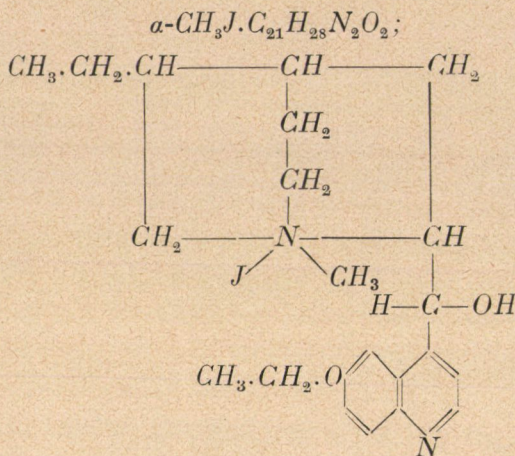
A kísérleteimhez használt optochin a «Vereinigte Chinin-fabriken Zimmer & Co.» Majna melletti frankfurti gyárából származott és hydrochininből, illetve a belőle methylfosztással kapott hydrocupreinnek aethylálásával lett előállítva. Kitüntető szíves-ségéért, amellyel nevezett alkaloid-gyár ezen készítményét rendelkezésemre bocsátotta, e helyen is hálás köszönetemet fejezem ki. Optochin basicum fehér vagy gyengén sárgás színű, erősen keserű ízű kristályos por, amely vízben jóformán oldhatatlan, alkohol, éter, kloroform, forró olajok és zsirokban ellenben jól oldódik. Savakkal is könnyen oldható sókat képez, amelyek között a chlorhydrát van leginkább használatban. Az α -jódhydrát előállítására is ezt a sót választottam kiindulási anyagul. Ha ezt az optochin-monochlorhydrátot feloldjuk kevés vízben (hidegben is könnyen oldódik) és egy molekulának megfelelő mennyiségű jódkáliummal elegyítjük, úgy rögtön kiválik fehér, nyúlós csapadék alakjában a jódhydrogénsavas só; amely azonban hosszabb ideig hidegnek kitéve sem szilárdult meg. (Alacsonyabb homologja, a hydrochinin is így viselkedik.) Egy ízben sikerült az amorph sót kevés methanolban oldva, színtelen kemény cukorszerű kristályokban is meg-

kapni; ezek azonban nem lettek elemezve, hanem methanosol oldatban mindjárt tovább feldolgozva.

Aethylhydrocuprein (optochin)-bijódhydrát.



Az optochinnek kétszer jódhidrogénsavas sóját eddig kristályos formában előállítani nem sikerült. Akár a szabad bázisból, akár annak monochlorhydrátjából indulunk ki, az eredmény mindig ugyanaz. A sok kísérleti próbálgatásból itt csak egyet sorolok fel példának: 1 gram optochinmonochlorhydrátot oldunk egy molekulának megfelelő 2.7 ccm normal sósavban, a kristályosan kiváló bichlorhydrátot pár csepp meleg vízzel eltüntetjük és a tiszta oldathoz a két molekulának megfelelő, 0.9 gram jódkáliumot adagolva, vörös olajos csapadék alakjában leválasztjuk az optochinbijódhydrátot, amely azonban eddig sem fagyasztással, sem más kristályosítási eljárással nem volt szilárd és elemezhető formába hozható.

α -Jódmethyl-aethylhydrocuprein (Optochin).

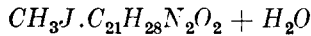
Eltérőleg anyavegyületétől, a hydrocupreintől, az optochin szintelen, α -jodmethylszármazéka metanolos oldatban többnyire csak sárga, sellakszerű massa alakjában keletkezett, amely forró vízben ugyan maradék nélkül oldódott, de kihülve ismét csak olajos emulzió, vagy olajos cseppek alakjában jelentkezett. Ha azonban nem alkoholos, hanem benzolos oldatban végezzük a reakciót, rögtön tiszta, kristályos termékhez juthatunk. 1 gram optochin basicum 4—5 ccm hideg benzolban tisztára oldódik és ha most az egy molekulának megfelelő jódmethylt cseppentjük hozzá, erős felmelegedés közben, pillanatok alatt tejszerű csapadék keletkezik, amelytől az oldat csakhamar egész tömegében megalvad. Ez az addíciós reakció ebben az esetben és ilyen körülmények között annyira pregnans és szembetűnő, hogy előadási kísérletnek is ajánlható annak illusztrálására, hogy mennyire exotherm reakció és épp ezért könnyű és gyors lefolyású folyamat az, amidón valamely tertiér bázisból egy quaternér vagy ammoniumbázis képződik; vagy midőn, más szóval a három vegyértékű nitrogén átmegy az ötvegyértékű fokozatba. Napi állás után a reakcióterméket benzollal felhígítva szűrőre visszük, jól kimossuk, exikatorban és 100° -on megszáritjuk; az így kapott fehér kristályok a kapillárisban $195\text{--}197^\circ$ -nál olvadtak vörös olajjá bomlás nélkül, de már

előbb lágyultak. Az elemzésnél a keresett vegyület összetételét mutatták.

Elemzés: 0·2118 g szárított anyag adott 0·1030 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 26·28%. A $CH_3J \cdot C_{21}H_{28}N_2O_2$ képletben a jód (theoret. érték) = 26·35 %.

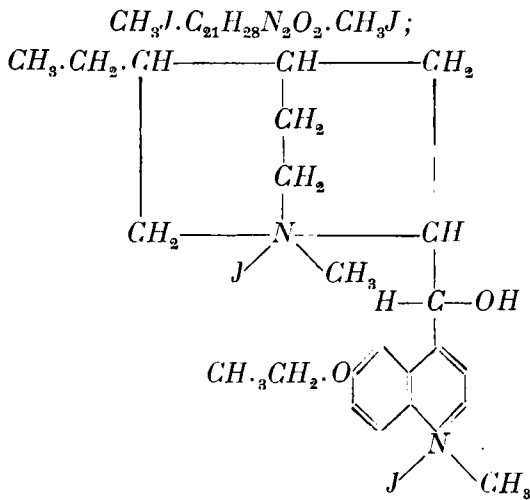
A benzolból kapott termék forró vízben olajos lesz, majd oldatba megy, kihűlve ismét csak olajosan válik ki, napok múlva azonban kristályos lesz. Ez a termék légszáraz állapotban a kapillárisban 195—197°-nál vörös olajjá olvadt; tehát ugyanott mint a benzolból kapott vegyület, amelytől abban különbözik, hogy egy molekula kristályvizet tartalmaz, míg az utóbbi kristályvízmentes.

Elemzés: 0·2100 g vízből kristályosított légszáraz anyag 120°-nál elvesztett 9·4 mg vizet, vagyis 4·48%-ot; a



képletben a $H_2O = 3·60\%$. 0·2002 g 120°-nál víztelenített anyag adott 97·2 mg jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 26·24%; a $CH_3J \cdot C_{21}H_{28}N_2O_2$ képletben a jód (theoret. érték) = 26·35%.

Aethylhydrocuprein (optochin)-dijódmethylát.



Okulva a hydrocupreinnel szerzett kísérleti tapasztalatokon, az optochin dijódmethylátját — amely talán legkarakterisztikusabb származéka — kezdetben úgy próbáltam előállítani, hogy kiindultam a vegytiszta, elemzett α -jódmethylátból és methanolos oldatát egy molekula jódmethyllel beforrasztott üvegcsővekben a forró vízfürdőben 1—2 óráig hevítettem. A csövek vörösszínű tiszta tartalma bepárolva, vörös firniszszerű anyagot hagyott vissza, amelyből forróvizes kioldással, sok fekete olajos oldhatatlan részek mellett, lehetett ugyan kristályos terméket is kapni, amely azonban további kristályosítással sem volt tiszta, elemezhető formába hozható. — Ezek után a balsikerű első kísérletek után megpróbáltam a keresett vegyületet úgy előállítani, hogy kiindultam a szabad bázisból és azt feles jódmethyllel nyomás alatt hevítettem a víz forrpontjára. Bár ez az eljárás a hydrocupreinnel szerzett kísérleti tapasztalatok után, első pillanatra nem látszott valami biztatónak, mégis célravezetőnek bizonyult. E végből a technikai optochinbázist benzolból való kristályosítással tisztítottam és ezt a terméket használtam fel kiindulási anyagul. Ennek methanolos oldatához a bombacsőben hozzámérve két molekula jódmethylt: a reakció azonnal — nagy hőfejlődéssel — magától is megindul és oly heves lesz, hogyha a csöveket gyorsan le nem forrasztjuk, nemcsak a jódmethyl, hanem az alkohol is eldesztillál; e közben, alig néhány pillanat alatt a színtelen oldat narancssárga, kristálytömeggé szilárdul. (Előadási kísérlet!) Miután a reakció lefolyásának külső jelei a mellett látszottak bizonyítani, hogy ilyen körülmények között — optochin és feles jódmethyl egymásra hatva, — az addíció nem áll meg a színtelen α -jódmethylát képződésénél, hanem tovább haladva befejeződik a β -nitrogéncentrum alkylálódása folytán, a sárgaszínű bijódmethylát keletkezésével: a csövek a szokottnál rövidebb ideig — két óra helyett csak fél óráig — lettek a forró vízfürdőben hevítve. Így vörös, teljesen tiszta oldatokat kapunk, amelyekből a reakciótermék csak teljes bepárlásuk után válik ki narancsszínű kristálytömeg alakjában. Ez azonban, eltérőleg az α -jódmethylátból kapott terméktől, forró vízben minden olajos bomlás nélkül maradéktalanul oldódik és hűlés közben eleve nsárga tűalakú kristályok alakjában csakhamar ki is válik. Hosszabb állás után leszűrjük, vízzel mossuk, levegőn és exsikatorban megszárit-

juk őket. A termelési eredmény csaknem kvantitatív. A nyílt kapillárisban 233—235°-nál olvadnak, illetve bomlanak, de már jóval előbb vörösödnek és feketednek.

Elemzésükből kitűnt, hogy légszáraz állapotban két molekula kristályvizet tartalmaznak, amely 120°-nál eltávozik; a szárításnál azonban — mint azt a jódmeghatározás mutatja — apró jódvesztések, úgy látszik, elkerülhetetlenek; erre vall az anyagnak, a szárítóban való gyenge megvörösödése is.

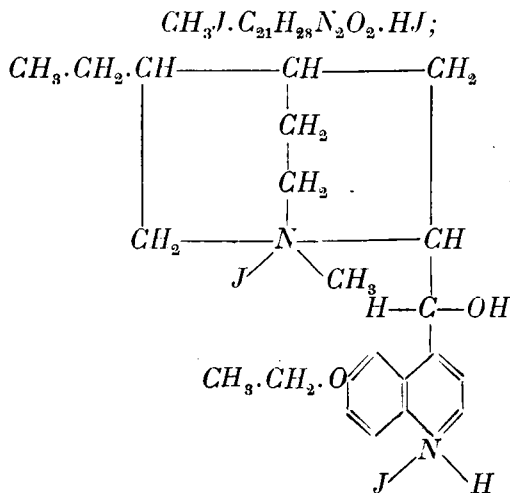
Elemzések: 0·2020 g exsikatorszáraz anyag 120°-nál elvesztett 10·2 mg vizet; H_2O (talált érték) = 5·05%; a



képletben a H_2O (theoret. érték) = 5·45%.

0·1914 g 120° száraz anyag adott 0·1418 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 40·04%; a $C_{21}H_{28}N_2O_2 \cdot (CH_3J)_2$ képletben a jód (theoret. érték) = 40·70%.

α -Jódmethyl-aethylhydrocuprein (optochin)- β -jódhidrát.

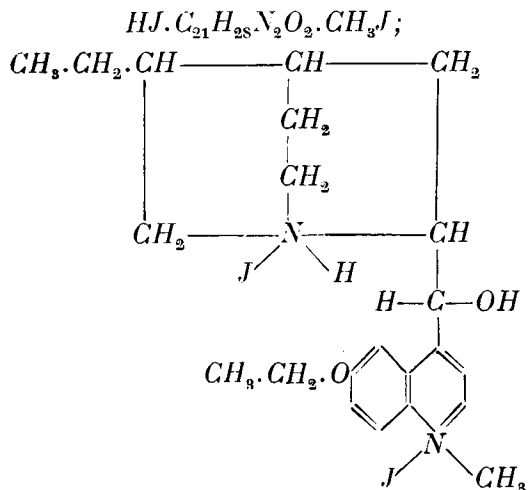


Eltérőleg a hydrocupreintől, amelynek korrespondáló jódmethylátsóját vegytiszta állapotban nem sikerült eddig előállítani (lásd az előző, VII. közleményt) aethere, az optochin minden nehéz-

ség nélkül, simán adta a mellékelt szerkezeti képletnek megfelelő származékot. A következő eljárás bizonyult célravezetőnek és egyben quantitativ eredményt is adott: feloldunk egy gram vízből átkristályosított és szárított α -jódmethyloptochint egy molekula — 2·1 ccm normál — sósavban; a kiváló sárga kristályos chlorhydrátot kevés forró vízzel ismét oldatba visszük és azon melegen adunk hozzá egy molekula — 0·34 gram — jódkálit lehetőleg kevés, vízben oldva, mire a jóldhydrát azonnal kicsapódik; annyira, hogy az oldat egész tömegében élénksárga magmává alvad. Lenutsoljuk és forró vízben oldjuk; hűlve szép fényes csillagokká csoportosult borostyánkőszárga hosszú tűalakú kristályok alakjában válik ki az új vegyület. Levegőn és kénsavexsikátorban teljesen kiszáritva, súlyuk egy gram volt. Nyílt kapillárisban 238—240° között olvadtak teljes bomlás közben, de már 200° körül feketednek. Lúgokkal az új só regenerálja a változatlan α -jódmethyloptochint. Elemzésre az exsikátorban és 120°-nál kiszáritott só lett felhasználva.

Elemzés: 0·2006 g 120° száraz anyag adott 0·1546 g jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 41·65%; a $CH_3J \cdot C_{21}H_{28}N_2O_2 \cdot HJ$ képletben a jód (theor. érték) = 41·64%.

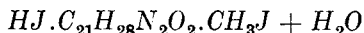
β -Jódmethyl-aethylhydrocuprein (optochin)- α -jóldhydrát.



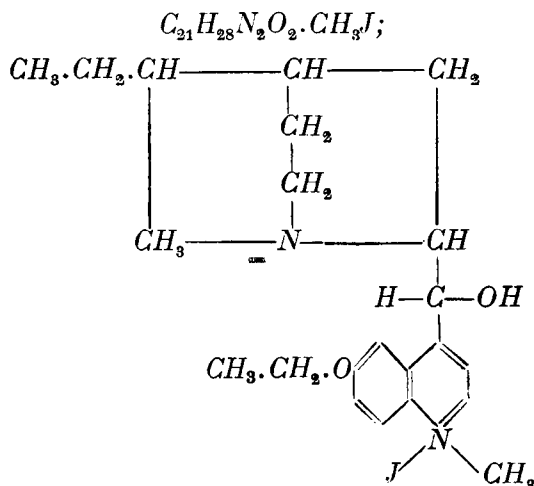
Ez az optochinjódmetihylátjódhydrát, amely az előző fejezetben leírt korrespondáló sóval izomér, az által van jellemezve, amint az kitűnik a mellékelt szerkezeti képletből — hogy a savionokat a molekula chinuklidin felében, vagyis α -helyzetben, a jódmetihyl ionjait pedig a molekula chinolinfelében, vagyis β -helyzetben tartalmazza (az α -, illetve β -N-atomhoz kötve). Eltérőleg a hydrocupreintől, amelynek megfelelő jódmetihylsóját könnyű volt előállítani, tisztítani és elemezni, aethylétere, az optochin annál több nehézséget okozott. A terjedelmes kísérleti anyagból itt csak egy esetet sorolok fel, amely aránylag még a legjobb eredményt adta, amennyiben végeredményben mégis csak elemezhető vegyülethez vezetett. E célból kiindultam az optochin α -chlorhydrátjából és azt koncentrált vizes oldatban egy molekulának megfelelő jódkáliummal átalakítottam a korrespondáló jódhydrogénsóvá.

Ez első pillanatra szilárd test alakjában csapódik ugyan ki, de csakhamar nyúlós kaucsukszerű masszává lesz, amelyből a bezárt vizet úgy kell kidagasztani. Ezt az annyira amennyire víztelenített anyagot feloldottam forró methyllalkoholban és valamivel több mint egy molekula jódmetihyllel bombacsőben 1—2 óráig a forró vízfürdőben hevítettem. A csövek tiszta világos barnásvörös folyós tartalmát szárazra pároltam; maradékot forró vízzel digéráltam (többnyire maradék nélkül oldódott), amelyből az új vegyület rendszeren vörös olaj alakjában válik ki, a művelet egyszer-kétszeri megismétlésével sem változik az eredmény. Több napi állás után egy ízben a kivált olaj mégis csak kristályos lett. Lenutsoljuk, kevés vízzel kimossuk és exsikatorban kénsav alatt megszáritjuk. Az így nyert kristályok a nyílt kapillárisban 175—178° közt olvadnak vörös olajjává, de már 150° körül lágyulnak. Ha vizes oldatukat normál nátronnal óvatosan titrálva elbontjuk, a szabad optochin- β -jódmetihylátot kapjuk sárga olaj alakjában. Ezek a kristályok, kerültek elemzésre.

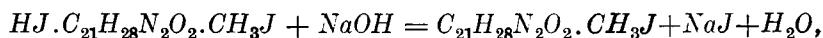
Elemzés: 66·2 mg 100° száraz anyag adott: 40·6 mg jódezüstöt, amiből a jód (talált érték) = 40·49%; a



képletben a jód (theor. érték) = 40·44%. A kristályvíz közvetlen meghatározása — 100-nál magasabb hőfokon — az anyag elbomlása miatt nem sikerült.

β -Jódmethyl-aethylhydrocuprein (optochin).

Az optochinneket ezt a sárgaszínű jódakylátját, amely — mint az a mellékelt szerkezeti képletből kitűnik — a halogénalkylt a chinolin-gyűrű nitrogénjéhez kötve tartalmazza, eddig kristályos formában előállítani nem sikerült. Ebben a magatartásában az optochin teljesen egyezik anyavegyületével, a hydrocupreinnel, amelynek korrospondeáló származéka szintén olajos vegyület (lásd az előző közleményt a hydrocupreintről, M. T. E. LVI. kötet (1937); és eltér alacsonyabb homologjától a hydrochinintől, amelynek β -jódmethylátja kristályos halmazállapotú (v. ö. M. T. E. LIV. kötet (1936) 447. lap). Ha az előző fejezetben leírt sót, a β -jódmethyl-optochin- α -jódhidrátot pontosan ezen egyenlet szerint:



akár szilárd állapotban, akár vizes vagy alkoholos oldatban elbontjuk, mindig csak sárgásbarna olajos termékek keletkeznek, amelyeket eddig sem különböző oldószerekből való kristályosítással, sem más fogásokkal kristályos alakba hozni nem sikerült. Nem tartom azonban kizártnak, hogy ez véletlenül még sikerülhet. De már az eddigi eredményekből is kitűnik, hogy az optochinben, a hydrocuprein aethyléterében is, akárcsak a többi ez irányban

eddig megvizsgált chinaalkaloidban, két szerkezetileg lényegesen különböző nitrogéncentrumnak kell léteznie, amelyek különböző színű, jódmethylszármazékaik révén pontosan és élesen jellemezhetők.

Nem lesz talán érdektelen tanulmány tárgyává tenni az optochin magasabb homologjainak a differenciáló alkylezésnél való magatartását, amiből kitűnik majd, hogy az alkoxy csoportban levő öt szénatomos amyl-gyök (eucupin) vagy a nyolc szénatomos oktyl-gyök (vuzin) mennyire és milyen irányban gyakorolnak befolyást a művelet lefolyására, illetőleg annak végső termékeire?

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25-én tartott üléséből.)

ÜBER DAS VERHALTEN DER HÖHEREN HYDROCHININ HOMOLOGEN BEI DER DIFFERENZIRENDEN ALKYLIRUNG.

Von FRITZ v. KONEK, korr. Mitglied.

Im weiteren Verfolg seiner Versuche über differenzierende Alkylierung bizotischer Alkaloide, berichtet Vortragender über seine Erfahrungen mit dem Aethyläther des Hydrocupreins, dem Optochin, welches als nächsthöheres Homologes des Hydrochinins aufzufassen ist.

Sein Ausgangsmaterial stammte aus den «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co.» Frankfurt a. Main — wofür er auch an dieser Stelle bestens dankt- und war nach eigenem Verfahren durch Entmethylieren und darauffolgendes Aethylieren aus Hydrochinin gewonnen. Aus seinen experimentellen Resultaten folgt, dass auch dieses halbkünstliche Alkaloid zwei isomere grundverschiedene Jodmethylate liefert, nämlich ein farbloses α - und ein gelbgefärbtes β ; welches letzteres bisher allerdings nur in ölicher Form erhalten werden konnte. Optochin gleicht somit in diesem seinem Verhalten seiner engeren Muttersubstanz, dem Hydrocuprein und differiert von seinem nächstniederem Homologen, dem Hydrochinin, welches nach Vortragendem ein krystallisiertes β -Jodmethylat liefert.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

AZ ELMÉLETI ÉS GYAKORLATI HIDRAULIKA MÓDSZEREL.

ROHRINGER SÁNDOR 1. tagtól.

Aristotelesnek sokszor emlegetett négy eleme közül az emberi életfolyamatára egyik sem volt oly átalakító hatású, mint a víz, melynek éltető erejét egyetlen állati és növényi szervezet sem nélkülözheti, amely lehetőségessé tette, hogy az egymástól távolakó népek könnyen érintkezhessenek, a gazdasági és kulturális javak kicseréltesse, miáltal az általános emberi kultúra nagymérvű felvirágzásának alaptényezője lett és mindig az is marad.

Azok a károk, amelyeket hatalmas folyók árvizei vagy tengerárok okoztak, félelmetessé is tették a vizet, azonban minél tovább halad az emberi művelődés, annál szűkebb területre szorulnak a vízkárok, annál nagyobb lesz a víznek úgy éltető, mint gazdasági erőforrásnak értéke.

Árvizekről a legrégebb idők óta vannak feljegyzések, de ugyanígy évezredek óta dívik a víznek hajózásra, öntözésre és malmok hajtására való felhasználása is. Ennek dacára évszázadokon át sem az elméleti hidraulika, sem annak gyakorlati alkalmazása nem fejlődött oly mértékben, ahogyan azt fontossága indokoltta tette volna.

Archimedesnek a víz felhajtó erejére vonatkozó felfedezésén kívül az ókorból alig maradt ránk több, mint egyes a csatornák célszerű esésére vonatkozó adatok, melyek Vitruvius 8-ik könyvében található.

Kétségtelen, hogy a rómaiak nagyszerű aqueductjai vagy a mórok spanyol öntözőművei nem épülhettek hidraulikai tudás nélkül, mégis nagyobb tudományos fellendülés csak a geniális

LEONARDO DA VINCI korától számít, aki állítólag a kamarazsilip feltalálója is volt.

A XVII. században főleg olaszok, GALILEI, az ő tanítványai TORRICELLI, GUILLELMINI, a XVIII. században a franciák törnek elő D'ALEMBERT, DUPUIT, COULOMB, CHÉZY, továbbá a német EULER és Svájcban BERNOULLI DÁNIEL és JÁNOS. A XIX. században PONCELET, DARCY, BAZIN, Németországban EYTELWEIN, HAGEN, FRANZIUS.

E fényes elmék mindegyikéhez hozzáfűződik egy-egy hidraulikai elvnek a formulázása, de rendszeres, az elvek alapján felépített hidromechanika csak a XIX. század második felében és a XX. században, napjainkban fejlődött ki.

A XVIII. századig jóformán csak TORRICELLMEK az edényekből kifolyó vízsugár sebességére vonatkozó

$$v = \sqrt{2gh}$$

tétele volt ismeretes, ahol a sebesség a «*h*» magasságról szabadon eső vízcsepp végsebessége.

Hasonló elmaradottság jellemezte a gyakorlati hidraulikát is, az elmélet és gyakorlat külön utakon jártak.

A gyakorlat, főleg a folyószabályozás, mellőzve a tudományos alapot, a tapasztalatot tolta előtérbe, amely részletmegfigyeléseken alapult és bizonyos misztikumot is vittek be a vízi művek építésébe, ahol minden kérdés önálló probléma volt, amelyet csak egyesek egyéni tapasztalata tudott megoldani, innen eredt a gyakorlati hidraulikának a régi német elnevezése is «Die Wasserbaukunst», vagyis vízépítőművészet.

Később az elméletet alkalmazták erőszakosan a vízfolyásokra ahelyett, hogy a vízfolyások megfigyeléséből gazdagították volna az elméletet.

És csak a XIX. század második felében akadtak olyan kiváló tudományos képzettségű mérnökök, mint a francia FARGUE és GIRARDON, akik velük született meglátó képességükkel tudtak olvasni a természet könyvében, megértették a mederben folyó víz igazi törvényeit.

Igazi nagy változást az elméleti és gyakorlati hidraulika fejlődésében a gazdasági élet fellendülése hozott létre. A hatalmasan

fejlődött ipar és kereskedelem nagyméretű hajózó csatornákat, zsilipeket, folyók hajózhatóvá tételét, nagy kikötőket, vízierők felhasználását kívánta meg. A víznek egészségügyi fontossága ugyancsak halaszthatatlan feladatok egész sorát vetette fel, amelyek csak a legmagasabb elméleti és éles megfigyelésen alapuló gyakorlati tudás volt képes megoldani.

Az elméletet és gyakorlatot azonban először össze kellett egyeztetni, mert külön utakon jártak. Az elméleti hidrodinamika megállapításai egy képzeleti médiumra — a tökéletes folyadékra — vonatkoznak, mely hézag nélküli, összenyomhatatlan és belső surlódás — viszkozitás — nélküli, holott a valóságos folyadék, pl. a víz nem összenyomhatatlan és belső viszkozitása van, mely nem elegendő ugyan a külső erők szétválasztó hatása ellen, viszont a víz mozgását szabálytalanul befolyásolja. Az edényfalak érdessége és a belső surlódás idézik fel a turbulenciát, amelynek a számításba való bevitele ezideig még alig sikerült s így a klasszikus hidrodinamika kénytelen volt a képzeleti tökéletes folyadék elmélete mellett maradni, ha eredményt akart elérni, mely eredmények a gyakorlatnak segítségére vannak ugyan, de nem képesek minden kérdésre megfelelni s így az elmélet és gyakorlat közti különbséget együttthatókkal kellett pótolni.

Az elméleti hidrodinamikának egyik alaptétele a permanens — rossz németes szóval stacioner — vízmozgást jellemző folytonosság (continuitás).

Ezzel kapcsolatban alapvető fontosságúak a vízmozgásnak EULERTŐL származó általános alapegyenletei, melyek voltaképpen a mechanikának alaptételei: tömeg szorozva gyorsulással egyenlő az erővel. Sajnos, az EULER és ezekkel lényegileg azonos LAGRANGE-féle egyenletek csupán egyes speciális esetekben lévén integrálhatók, használhatóságuk korlátozva van. Az esetek túlnyomó részében a vízre a nehézségi erő és a centrifugális erő hatnak, ha csak a nehézségi erő hat, az EULER-féle egyenletek leegyszerűsödnek és rájövünk a BERNOULLI DÁNIELRŐL elnevezett energia egyenletre.

A BERNOULLI-féle tétel — bizonyos koncesszióval — ha ugyanis egy vízelem sebessége helyébe egy egész keresztiszelvényen átfolyó víz átlagsebességét tesszük, a gyakorlatban igen nagy területen használható.

Az elméleti hidraulika másik alapvető segédeszköze a szilárd testek mechanikájából átvett impulzus tétel, a mozgásmennyiségek időbeli megváltozásának kifejezése.

A felsorolt alapvető szabályok a potenciálos vízmozgások területén felmerülő legtöbb feladat megoldására alkalmasak.

A talajban szivárgó víz mozgása is bizonyos határokon belül, amíg a szivárgás sebessége csekély, ugyancsak a potenciálos mozgások körébe tartozik.

A potenciálos mozgáson kívül eső mozgások mint a hullámmozgás és örvénylés kutatása HELMHOLTZ, KIRCHOFF, KÁRMÁN és mások vizsgálódása alapján szellemes megoldásokra vezettek, azonban ezek a gyakorlati hidraulikát csak másodsorban érdeklik.

Az elméleti hidraulika mai fejlődésében a konform ábrázolás a komplex változós függvények segítségével újabb feladatokat képes megoldani, ennek dacára a természetes folyadékmozgás jelenségeinek magyarázata még nem volt kielégítő. A gyakorlati élet kívánalmai és az elmélet eredményei közt olyan hézagok keletkeztek, amelyek méltán vetették fel némelyek részéről azt az észrevételt, hogy van-e értéke olyan tudományos megállapításoknak, amelyek a valósággal homlokegyenest ellenkeznek.

Említettük a turbulenciát, mely az egyszerű potenciálos mozgás képét elhomályosítja, viszont a turbulens mozgás matematikai kifejezését ma még nem sikerült elérni.

De továbbmenet vannak a potenciálos mozgásoknak is olyan alakjai, amelyeknél a kontinuitás és erre alapított elmélet sem tartó fenn.

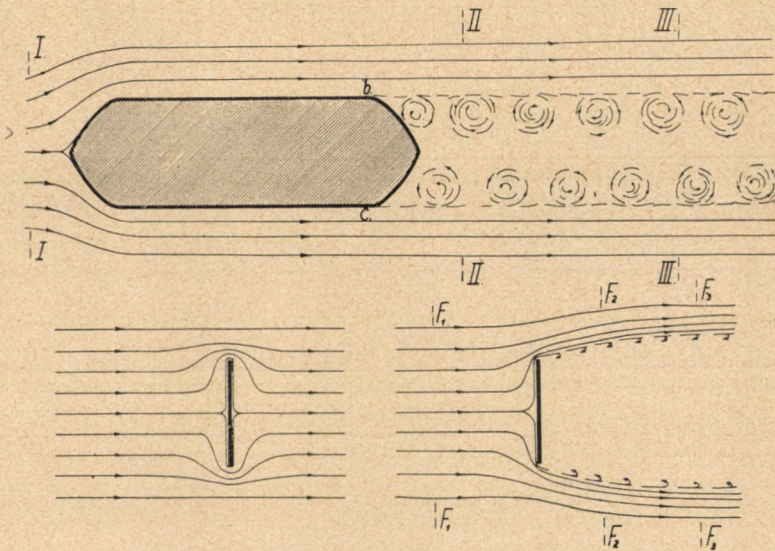
Ha a Lánchídon áthaladva egyik pillérnél megállunk, láthatjuk a pillér elején a megduzzadt vízszint és ketté váló víztömeget, amely sebesen folyik a pillér mellett. Annak alsó felén a sebesség csökken és a nyomás növekszik s körülbelül ezen a ponton keletkezik a $b-c$ szakadási lap (lásd 1. sz. rajz), amelyről befelé nyugodt a víz, a másik oldalon pedig folyó víz van. A szakadási lap belső felületén a bizonytalan egyensúlyi helyzet miatt befelé irányuló örvények keletkeznek, amelyek bizonyos körülmények közt, így ha tengelyeik nem szemben, hanem váltakozva fekszenek, állandó jellegűek s az úgynevezett KÁRMÁN-féle örvényutakat alkotják.

A kontinuitás szerint kell, hogy I, II, és III szelvényekben :

$$F_I v_I = F_{II} v_{II} = F_{III} v_{III}$$

legyen.

Azonban a pillér mögötti holt terek nem hogy kiesnek, hanem ellentétes értelmű mozgás áll be, nyilvánvaló, hogy itt az EULER-féle elmélet alaptétele a kontinuitás nem található meg.



1. és 2. sz. rajz.

Ilyen szakadási felület általában kifejlődik akkor, ha rohanó vízt fut végig stagnáló víz mellett és bizonyos mértékig kifejlődik akkor is, ha rohanó víz folyó vízzel érintkezik.

Szembevetendő a kontinuitás megszüntése, amikor a folyadékba lemezt állítunk be (lásd 2. sz. rajz) ; melyet az EULER-féle klasszikus hidromechanika szerint a víz körülflowik, holott a valóságban a lemez mögött holt tér keletkezik.

A szakadási felület egyik oldalán v sebességgel folyik a víz, másik oldalán — végtelen kis távolban — álló víz van.

Hasonló jelenségek törvényszerűségének kutatása oda vezetett, hogy a tisztán teoretikus alapról a kísérleti fizika terére, a valóságos folyadék viselkedésének kutatására tértek át.

Új elméletek keletkeztek, aminő a PRANDTL göttingai tanártól eredő határsebesség elmélet, melyeket főképpen laboratóriumi kísérletek segítségével oldottak meg.

A laboratóriumi kutatás nagy előnye, hogy áttekinthetőbb, a víz belsejében történő mozgások megfigyelhetők, — pl. üvegcsatornában — a mérések pontosabban végrehajthatók, változtatások a vízmozgáson hasonlíthatatlanul egyszerűbben és olcsóbban végezhetők, mint a természetben. És amióta sikerült a valóság és az elmélet közt tudományos laboratóriumi munkával hidat építeni, azóta lendült fel az elmélet és gyakorlat fejlődése egyaránt.

A fordulat kezdete a hasonlósági elmélet bevezetése volt, amely korszak OSBORNE REYNOLDS fellépésével kezdődik.

Ha a laboratóriumban képesek vagyunk előállítani valamely csővezeték, folyómedret, zsilipet vagy turbinát oly módon, hogy az geometriailag a természetben lévővel úgy méreteiben, mint felületében teljesen hasonló legyen s ha a modellen átfolyó víz mozgása ugyancsak hasonló a természetben folyó vízéhez, vagyis azonos helyen a természetben és modellben a vízmozgás ugyanaz, akkor megvan a mechanikai hasonlóság és az összekötő kapocs, amelynek segítségével a laboratórium műtárgyán észlelt mozgások a modellmérték arányában átvihetők a természetre.

OSBORNE REYNOLDS angol és VERMONT HARCOUR francia professzorok voltak az elsők, akik határozott lépést tettek abban az irányban, hogy geometriailag és mechanikailag hasonló vízmozgások közt összefüggést állítsanak fel, melynek alapján a modellben észlelt jelenségekből a természetre lehet következtetni.

Előbbi a Mersey folyón, utóbbi a Szajján végzett kísérleti méréseket. Az 1884. évi Majna-Frankfurtban tartott nemzetközi hajózási kongresszus nagy helyesléssel fogadta REYNOLDS és VERMONT HARCOUR modell tanulmányait, pedig REYNOLDS folyómodellje csupán 6 láb hosszúságú, VERMONT HARCOUR modellje pedig nagyon kisméretű 1:40,000 arányú volt és mégis kialakultak a víz befolyatása után azok a mederágak, amik a természetben is megvoltak, mert a természet törvényei bármily kisméretű, de helyesen szerkesztett modellben érvényesülnek.

Ezzel meg volt adva az út arra, hogy a gyakorlati hidraulika nehéz kérdései, melyek sokszáz millió pengőt emésztettek fel a

különböző országokban, a laboratóriumokból legyenek irányíthatók s az elmélet továbbfejlesztésére egy a lefolyást érzékeltető eszköz álljon rendelkezésre.

REYNOLDS kutatásai világosságot derítettek a vízmozgások különböző alakjaira is. Ő állapította meg a határokat a lamináris vízmozgás, a közönséges folyás között s ezzel sok jelenség kapott magyarázatot, ezt kiegészítette a rohanó vízmozgást jellemző hullámsebességnek, mint határértéknek a vizsgálatokba való bevezetése.

A vízmozgások összehasonlításánál jellemző arányszámokat — karakterisztikákat — állítanak fel az erőviszonyok alapján abból kiindulva, hogy a természetben és modellben a folyadék térfogategységére ható súly (nyomó) erők rendre S_1 és S_2 , a surlódási erők R_1 és R_2 és a mozgató erők (gyorsulások) G_1 és G_2 , akkor egyensúly esetén mindkét helyen

$$S_1 + R_1 + G_1 = 0 = S_2 + R_2 + G_2 \quad (1)$$

A mechanikai hasonlóság esetében:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (2)$$

A δ sűrűségű folyadék térfogategységére ható erő:

$$\delta v \frac{\partial v}{\partial x} = \text{tömeg} \times \text{gyorsulás}$$

a belső surlódás (viszkozitási ellenállás) NEWTON szerint:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

és ennek a z mélységgel való változása:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Gyorsulásokra az arányos

$$\frac{\partial v^2}{L} \quad \text{és} \quad \frac{\partial v^2}{l}$$

a surlódásokra

$$\frac{\mu V}{L^2} \text{ és } \frac{\mu v}{l^2}$$

kifejezéseket vezethetjük be, ahol V és v a sebességek, L és l jellemző hosszak (pl. csőátmérő), μ a viszkozitási tényező, $\frac{\mu}{\delta} = \nu$ a POISEUILLE-féle szám, akkor a fentiek szerint a gyorsulások és surlódás kifejezői közti arányszám:

$$\frac{\frac{\partial V^2}{L}}{\frac{\mu V}{L^2}} = \frac{\frac{\partial v^2}{l}}{\frac{\mu v}{l^2}} = \frac{VL}{\nu} = \frac{vl}{\nu} = R$$

dimenzió nélküli szám a REYNOLDS-féle szám — karakterisztika, — amelyet REYNOLDS elsősorban csövekben való mozgásokra hozott le, ahol főleg a surlódási erők a túlnyomóak.

REYNOLDS csövekre azt találta, hogy ha a

$$\frac{VL}{\nu} < 2000,$$

akkor a vízmozgás vízszálas, azaz lamináris, ha ezen az értéken felül van, akkor turbulens, vagyis olyan, mint a valóságban az esetek túlnyomó száma.

Két vízmozgás között tehát a mechanikai hasonlóság fennáll, ha a két erőcsoport arányszáma — a REYNOLDS-féle szám — a valóságban és a modellben ugyanaz.

Itt meg kell jegyezni, hogy aszerint, hogy milyen erők túlnyomóak valamely vízmozgás létrehozásában, más kapcsolatokat is kerestek a hasonlóság megállapítására. Így ha a súlyerők hatása a túlnyomó, mint például nyílt vízfolyások, duzzasztó művek, hajó hullámmellenállásnál a gyorsulások és súlyerők aránya a térfogategységre vonatkoztatva

$$\frac{\frac{\partial V^2}{L}}{\partial g} = \frac{V^2}{Lg}$$

a FROUDE-féle szám.

Ahol a kapilláris erők jelentékenyek pl. hajlott vízfelületeknél, hullámoknál

$$\frac{\partial V^2}{L} : \frac{T}{L^2} = \frac{\partial V^2 L}{T}$$

a WEBER-féle jellemző számot kapjuk, mely kifejezésben T a kapillaritási állandó.

Könnyen beigazolható, hogy mechanikai hasonlósági karakterisztika valamennyi erőcsoport figyelembevételével nem állítható fel, mert ellentmondások jönnek létre, azonban a fő erőcsoportnak, mely túlnyomó szerepet játszik, kell a természetben és modellben mechanikailag hasonlónak lenni, vagyis bizonyos megalkuvásra van szükség, ezért csak a fő jellemvonások összehasonlítására szorítkozhatunk.

Ennek dacára a modelltanulmányokkal nagy, az elmélet kifejlődésére is fontos eredményeket értek el, a gyakorlat pedig ma már csak a modellkísérlet által hitelesített eredményeket fogadja el.

Ma már az egész világon minden jelentékenyebb tudományos központban, főleg egyetemi kutató intézetekként vannak rendszeresítve vízépítési laboratóriumok, melyek közül a legelsők Németországban, Drezdában ENGELS tanár, Karlsruheban REHBOCK, Berlinben KREY, Darmstadtban KOCH nagynevű tanárok létesítette laboratóriumok, Franciaországban a toulousei 1908-ban épített laboratórium s ezenkívül Ausztriában, Olaszországban, az északi államokban, de különösen nagy pénzáldozatokkal Amerikában létesültek laboratóriumok, amelyek nem csupán gyakorlati célokat szolgáltak, hanem nagy lépésekkel vitték előre a tudományt, tisztázták a fogalmakat s szem elől elrejtett mozgásokat előtártak, törvényt szabtak rájuk és lehetővé tették a hidromechanikának a gyakorlatot is kielégítő további fejlődését.

Még fontosabb a modellkísérlet szerepe ott, ahol a viszkozitáson és turbulencián kívül még egy harmadik tényező, a meder megbonthatósága is belép a feltételek csoportjába, pl. földbe ásott csatornák, folyómedrek vizsgálatánál, duzzasztógátak és zsilipek alapjainak aláüregelés elleni biztosításánál, ahol az elmélet számára egyedül a modellkísérlet mutatta meg a kutatás eredményes útját. Például a duzzasztógátáról lebukó vagy az utófeneket nagy

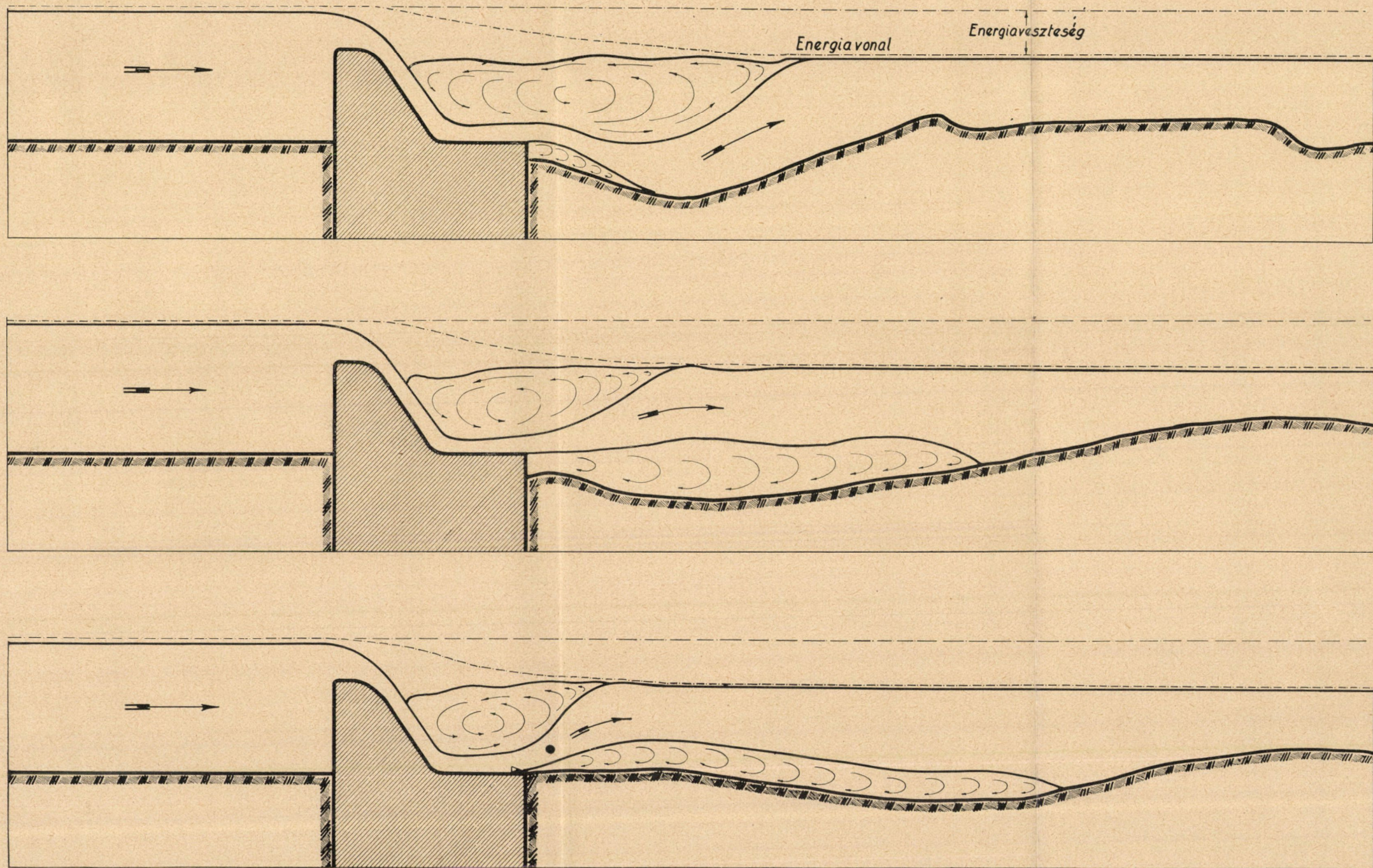
sebességgel elhagyó vízszög a folytatólag következő mederfeneket megbolygatja, az így keletkezett üregben lesüllyed, felette egy vízszintes tengelyű vízszög keletkezik, amely kép megfelelő kiüregelés után megváltozik, a vízszög a felszínre kerül s a vízszög alatt egy másik, fenékhenger áll elő (lásd 3. sz. rajz). A vízszög eme játékánál a vízszög és a vele érintkező vízszög között szakadási felületek állnak elő, e bonyolult jelenségek magyarázatát és elméletét csupán laboratóriumi kísérletekkel lehet feldolgozni.

A folyószabályozás terén FARGUE francia mérnök a múlt század hatvanas éveiben volt az első, aki már laboratóriumi megfigyelés és egyúttal a természet beható tanulmányozása alapján állított fel helyes elveket. Az általa szerkesztett kis folyó modellben — «La petite riviere du Bordeaux» — mely még a modellszabályok ismerete nélkül készült, tanulmányozta a folyómeder kialakulását.

Az egyenes irányban folyó víz elméletileg labilis egyensúlyi helyzetben van, mert hogy az egyenes irányban maradjon, ahhoz szükséges, hogy mindkét part a víz mozgató erejével szemben egyenlő ellenállást tanúsítson. Ez azonban csak teljesen homogén szerkezetű medernél volna lehetséges, amilyen a valóságban nincs és ezért, ahol a part kevésbé ellenálló, ott szükségképpen partszagatás és kanyarulat keletkezik.

A külföldön igen jelentékeny összeget szánnak laboratóriumi tanulmányozásra. Itt például az Egyesült Államok vicksburgi laboratóriumát említem, ahol a Mississippi szabályozásához építettek nagyméretű modelleket, hasonlóképpen a Hoang Ho-folyó szabályozása is nagyméretű modelleken lesz tanulmányozva.

A Műegyetem Vízépítéstani Laboratóriuma, ahol hasonló kérdések kutatása állandóan folyik, a nagy koncepciójú miniszternek gróf Klebelsberg Kunónak köszöni létét, aki erre irányuló javaslataimat már a természettudományi kongresszuson készségesen magáévé tette, a Természettudományi Kutatási Alapból kezdetben egy szerényebb, majd későbbben a tanszéki dotáció takarékos felhasználásával és külső megbízások kapcsán sikerült egy nagyobb és a kutatási igényeket jelentékeny mértékben kielégítő második laboratóriumot is építeni, melynek haszna nem csupán az oktatásra, hanem közhasznú feladatok megoldására és további kutatásra is alkalmas.



3. sz. rajz.

A laboratóriumi kutatások rendszerint négy főcsoportra oszthatók, és pedig:

1. A vízfolyás vizsgálata csatornáknak, csövekben, gátakon, zsilipeken.

2. A folyó medrének rendezése (hajózás, árvédelem, partbiztosítás) érdekében végzendő munkálatok.

3. A talajban szivárgó vízzel kapcsolatos kérdések vizsgálata.

4. Az oktatás, mely laboratóriumi gyakorlat nélkül kevésbé eredményes.

Az 1. és 3. alá tartozó vizsgálatok a hasonlóság fennforgása esetén quantitative és qualitative is megoldásokat adnak és nagymértékben előrevitték az elméletet is.

A folyómedrek modelljeinél már ritkán beszélhetünk geometriai hasonlóságról, vagyis a tér három irányban azonosan kibébitett méretéről s természetesen akkor még kevésbé szólhatunk mechanikai hasonlóságról, aminek folyománya, hogy a folyószabályozással kapcsolatos modelleket torzított mértékben kell készítenünk úgy, hogy a hossz és szélességi méretek azonos arányban csökkennek, a mélységi méretek pedig kisebb mértékben.

A geometriai és mechanikai hasonlóság feltételétől tehát el kell tekinteni, de ennek dacára vannak más támpontok, amelyek biztosítják az eredményt, ha nem is quantitative, de legalább qualitative. A jó qualitativ eredmény azonban rendszeren jó quantitativ eredményt von maga után.

Folyókra FARGUE azt a törvényt állapította meg, hogy a mélységek kifejlődése szoros összefüggésben van a meder kanyarulataival és a jól fejlődött medrek a természetben is az egymásután következő kanyarulatok sorozatát mutatják. Ezek a kanyarulatok FARGUE szerint olyképpen fejlesztendők ki, hogy az inflexiós pontoktól kezdve a kanyarulat tetőpontja felé, a görbület mértéke nagyobbodjék s e célból ajánlja fokozatosan változó görbületű vonalak alkalmazását. Ezeknek a görbéknek és általában a vonalazásnak a megállapítása az előadottak alapján elméletileg is lehetséges, azonban igazi kritériumot csak a laboratóriumi kísérlet adhat, ahol a megfelelő mértékben készített és mozgó — tehát hordalékból előállított — mederben a kifejlődött kanyarulatok egymással összehasonlíthatók.

Két szempont van, amelyben a külföldi laboratóriumoktól eltérő irányt követ a Műegyetem laboratóriuma. Az egyik az, hogy a modellszabályok helyett hordalékos folyómederben eredmények elérésére szükségesnek és elegendőnek találjuk a FARGUE-féle szabályok megtartását a modellalakításnál.

A másik a hordalék kérdése, vagyis a mozgó fenék. Sokhelyt arra törekszenek, hogy amint a medret kisebbített mértékben állítják elő, ugyanúgy kisebbítsék a fenéken mozgó hordaléket is, aminek lisztszerű finom anyag lesz az eredménye, amelyben az egyes homokszemek már nem mozognak külön-külön, hanem az egész tömeg a finom szemcsék közti tapadás folytán együtt mozog a fenéken hullámokhoz hasonló lépcsők keletkeznek (Riffelbildung), amelyek elhomályosítják a mederalakulás igazi képét.

Ha már teljes geometriai és mechanikai hasonlóság nem tartható fenn, akkor nincs célja annak sem, hogy a hordalék arányosan kisebbítették, hanem ellenkezőleg durvább hordalékból készül a modell fenéke, mint amilyen a természetben volt. Így például a dunai vagy tiszai finom homok helyébe egy durvább anyagot is lehet használni a mesterséges folyómodellben.

Természetesen ezzel együtt jár az is, hogy nagyobb lévén a modellben a homokszem súlya, mint a természetben, az esést kell ehhez mérten úgy fokozni, hogy a modellben is meglegyen a durvább szemű homokot mozgató erő, másrészt a mozgás turbulens vagy rohanó maradjon úgy, mint a természetben.

A modellesésnek olyannak kell lennie tehát, hogy a mozgás jellege ne változzék, másrészt, hogy a folyóvízre alkalmazható CHÉZY-féle képlet szerinti sebesség

$$v = c \sqrt{RiJ}$$

kisebb legyen a

$$v_h = \sqrt{gn}$$

hullámsebességnél, ami egyben a rohanó mozgás kifejezése is.

$$v \leq v_h \text{ -ből}$$

következik, hogy az J relativ esés

$$J < \frac{g}{c^2}.$$

Másrésztől az esés úgy választandó meg, hogy a modellben a hordalék megmozduljon, ennek feltétele, ha d a modellhordalék, D a mederbeli hordalék átlagos átmérője, a hordalékmozgató képesség a folyóban a fenék 1 m²-re M mélységnél:

$$S = 1000 M J$$

és a modellben:

$$s = 1000 m i,$$

akkor, hogy a hordalékmozgató képesség arányos legyen az ellenállással, vagyis a hordalék súlyával, illetőleg átmérőjével

$$\frac{d}{D} = \frac{km_i}{KMJ} = \frac{s}{S}$$

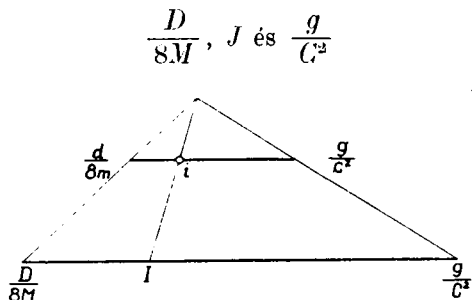
KREY tanárnak a berlini hidrotechnikai laboratóriumban végzett kísérletei szerint célszerű, ha

$$\frac{d}{8m} < i.$$

Eszerint a két határ, amelyek közé az i esés felveendő a modellben

$$\frac{d}{8m} < i < \frac{g}{c^2}.$$

Az i esést grafikusán megkaphatjuk (lásd 4. sz. rajz); ha a természetes mederre vonatkozó azonos



4. sz. rajz.

értékeket egy vízszintes tengelyre felrakjuk, egy másik párhuzamos egyenesre pedig a modellre érvényes

$$\frac{d}{8m} \text{ és } \frac{g}{c^2}$$

értékeket. A megfelelő pontokat összekötve az i érték a hasonlóság alapján kiadódik.

Nehézséget okoz a d és D homokátmérő megválasztása, mert ezek a számok a vegyes elosztású homokkal egyenértékű homokszemek átmérői, amely egyenérték úgy értendő, hogy az egyenletesen d vagy D átmérőjű homokból a víz ugyanolyan súlyú mennyiséget mozgat, mint a vegyes szemű hordalékból.

Végzett kísérleteink szerint ez a helyettesítő szemmagyság d_m (a mértékadó szemmagyság) azonos azzal a szemmagysággal, mely az egész hordalékalmazban a legnagyobb súllyal szereplő anyagnak az átmérője s ha a mértékadó szem átmérője most már d_m , akkor az i két határértéke lesz végérvényesen

$$\frac{d_m}{8m} < i < \frac{g}{c^2}.$$

A József Nádor Műegyetem vízépítéstani laboratóriuma 10 éves fennállása óta fokozatos fejlődésével az oktatás intenzívitását fokozta s emellett 9 nagyobb szabású és több kisebb tanulmányt végzett, melyek közül csak néhányat említek fel.

Így a Duna folyam bogyzslói átvágása és megjavítása, ahol a hajóút iránynak erős törése volt és ennek egyenletesebbé tétele volt a cél (lásd 5. sz. rajz), amely el lett érve a laboratóriumi kísérlet alapján kiépített sarkantyúkkal.

Egy a Velencei Nemzetközi Belhajózási Kongresszusra kidolgozott és a Kongresszus által kiadott értekezés arról szól, hogy két A és B pont között adott esés mellett a folyó milyen kanyarulatokban vezetendő, hogy a hajózás érdekei a legjobb kielégítést kapják (lásd 6. sz. rajz).

Érdekes és csak hosszas elméleti számítás után oldható meg a Rábaszabályozó Társulat által kitűzött feladat, hogy a Nick község határában a Rábán nagy költséggel kiépített modern duzzasztógát

képes lesz-e a gát építése előtti időben előfordult 1925. évi legnagyobb árvizet úgy átvezetni, hogy az káros duzzadást ne okozzon.

Itt előbb a tulajdonképeni kérdés előfeltételét, az 1925. évi árvíz mennyiségét aposteriori kellett modellkísérlet alapján megállapítani öt esztendővel az árvíz lefolyása után és az $1130 \text{ m}^3/\text{sec}$ -ban megállapított legnagyobb árvíz, melynek nagyságát elméletileg $800\text{—}1400 \text{ m}^3/\text{sec}$ közt keresték, a modell szerint káros duzzadás nélkül folyik le az új mederben (lásd 7a. és 7b. sz. rajz).

A legutóbbi tanulmányok tárgya az a duzzasztózsilip, amelyet a Körös folyón Békésszentandrás közelében építenek a Földművelésügyi Minisztérium Vízügyi Műszaki Főosztályának tervei szerint, a Körös folyó vizének hajózási és öntözési célokból történő megduzzasztására.

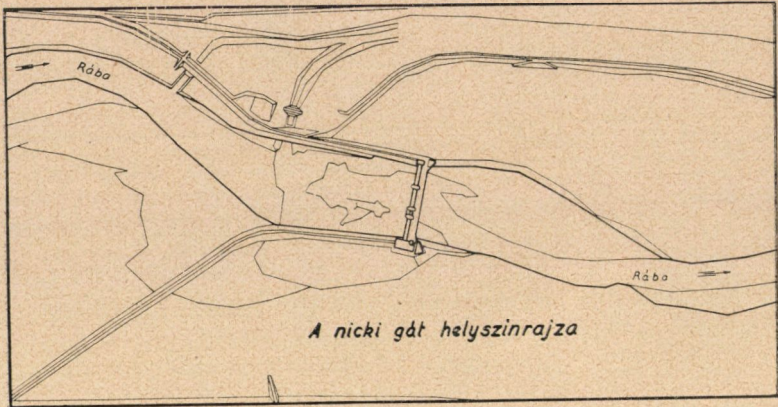
A zsilip 1:25 mértékben torzítás nélkül készült betonból, melynek érdessége külön csiszolással a minimálisra lett csökkentve.

Előtanulmányok történtek a természetben elérhető simaság és a modellben elérhető simaság összehasonlítására.

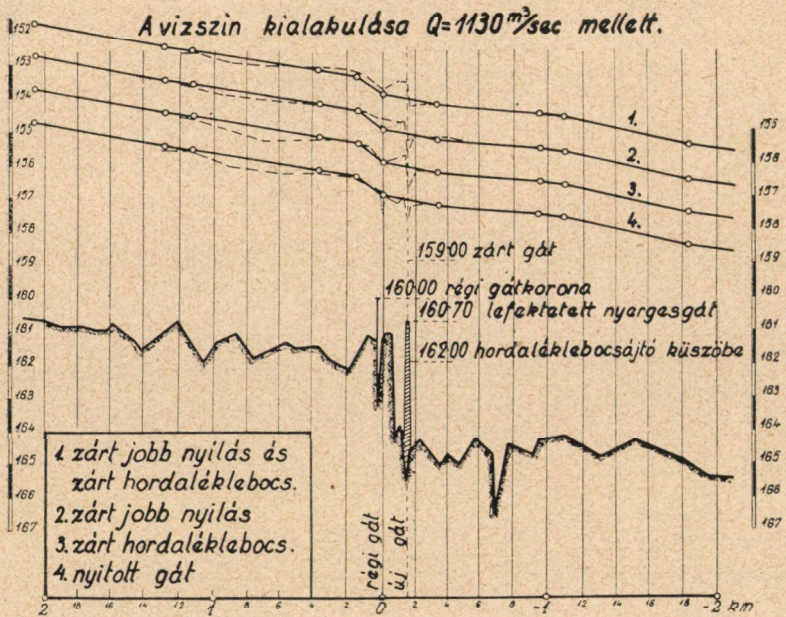
Amint a 8. sz. rajz mutatja a zsilip két nyílású, mindkét nyílásban egy-egy alsó és felső tábla, vagyis két részes tábla van, melyek külön mozgathatók. A kisebb vizeket a gát koronáján buktatják át, amely fokozatosan lejjebb szállítható, de körülbelül $190 \text{ m}^3/\text{sec}$ víz érkezésénél már az alsó tábla is meg lesz emelve s akkor alul is bocsátható át víz.

A zsiliptáblák után jön az utófenék vagy csillapítómedence, mely csésze alakú s ezután a fenék kiüregelése ellen egy sakk-táblához hasonló burkolat, mely egymás mellé helyezett, de nem összekötött 1.0 és 0.8 m oldalélű beton tömbökből áll, melyek egyszerűen a meder fenékre vannak letéve. A beton tömböket alulról határolja egy sor 5 m hosszú és 1 m átmérőjű kővel töltött drótszak, melyek az esetleges aláüregelésnél lejjebb szállnak és az üreget betöltik.

A tanulmány egyik része arra irányult, hogy a zsilipen át nagy sebességgel — közel 10 méter/sec-al — átsurruló víz sebessége, annyira csökkentendő, hogy ha a beton tömb biztosítást elhagyja, már nagyobb üregeléseket ne idézzen elő. Tehát a mozgási energia káros feleslege elpusztítandó. Ez az elpusztítás részben azáltal következik be, hogy az utófenék medencéje mély és csésze alakú

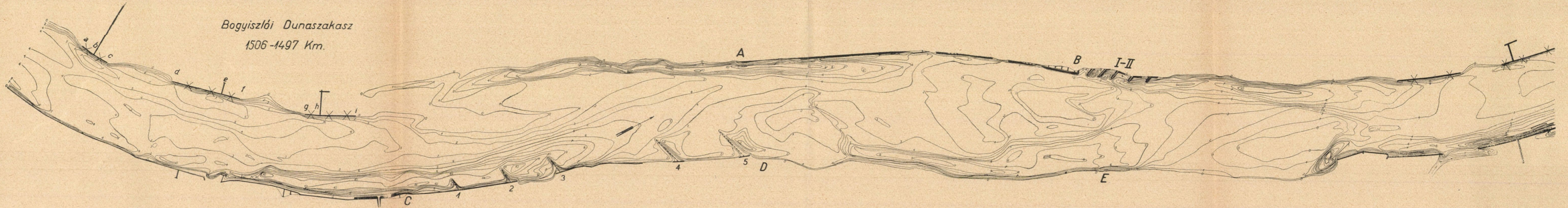


7 a. sz. rajz.

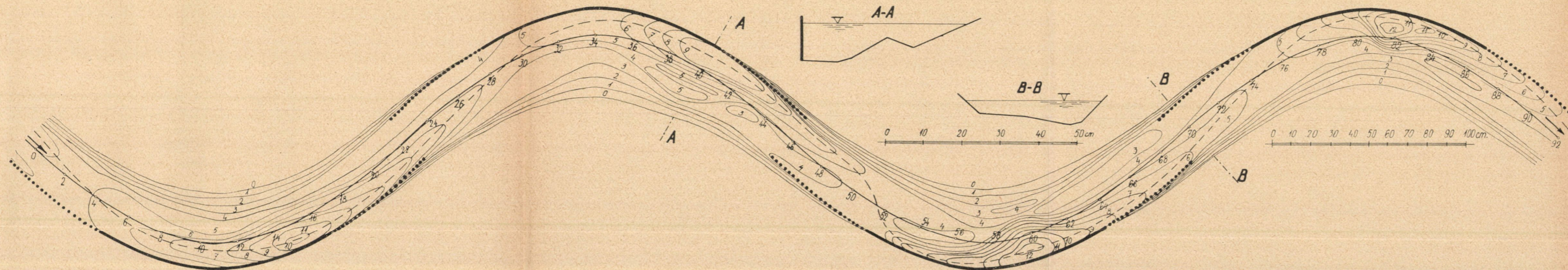


7 b. sz. rajz.

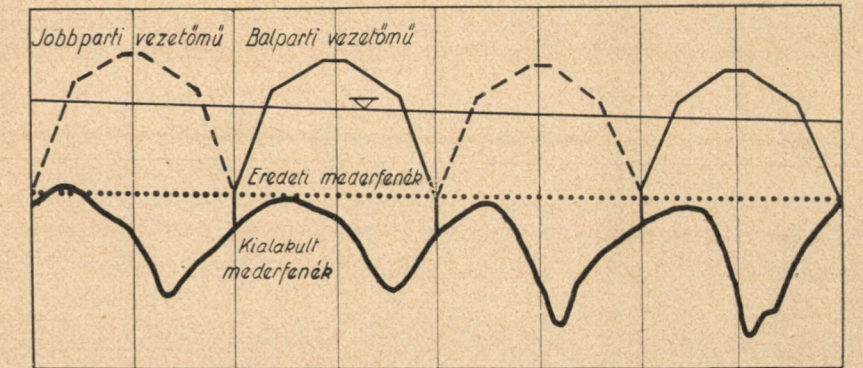
Bogyiszlói Dunaszakasz
1506-1497 Km.



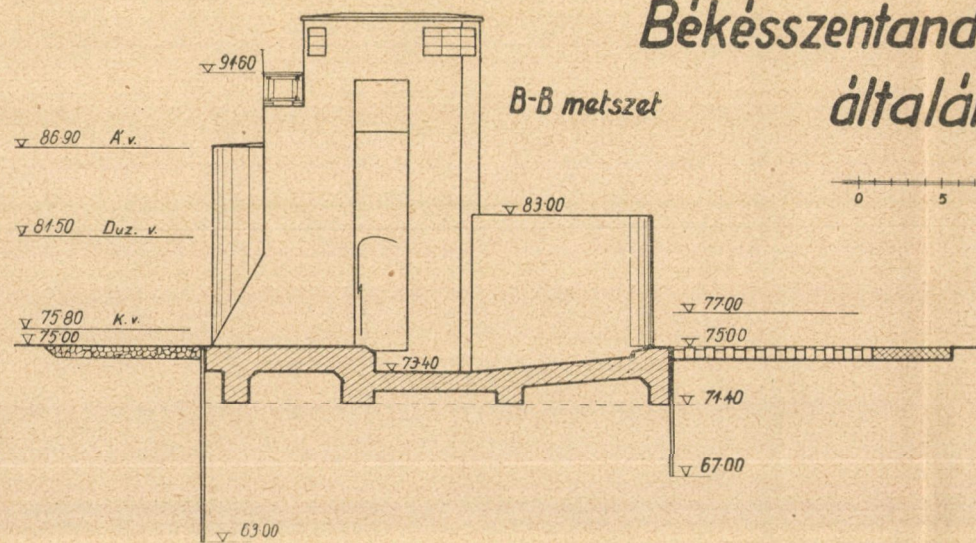
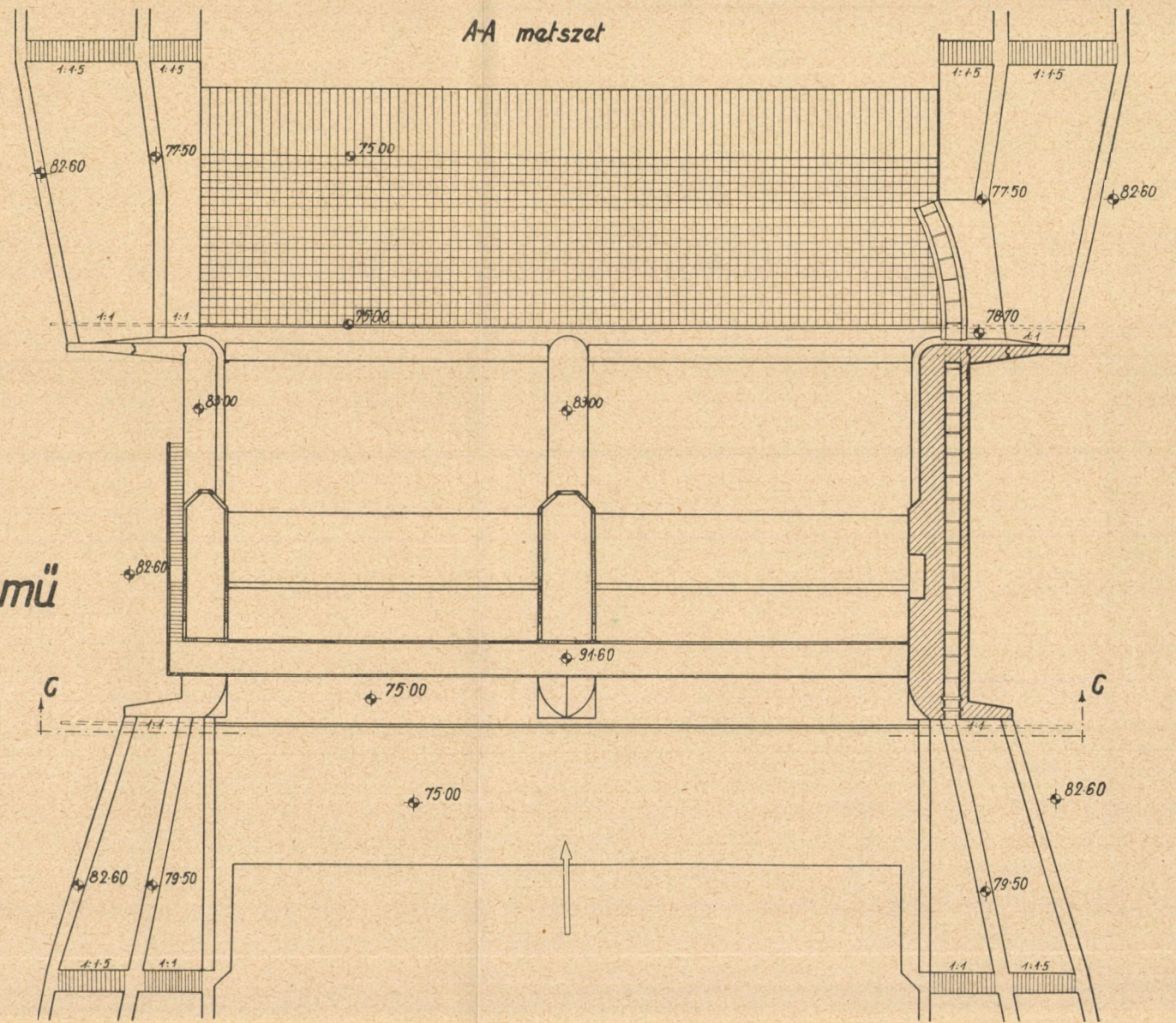
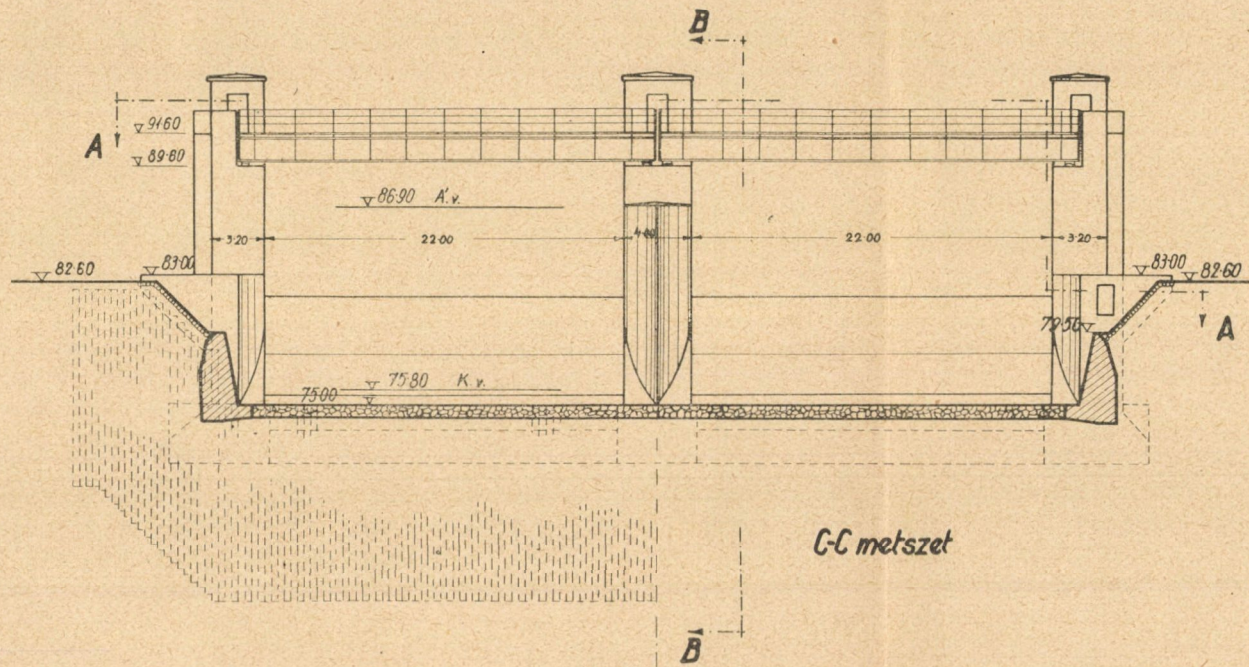
5. sz. rajz.



6. sz. rajz.



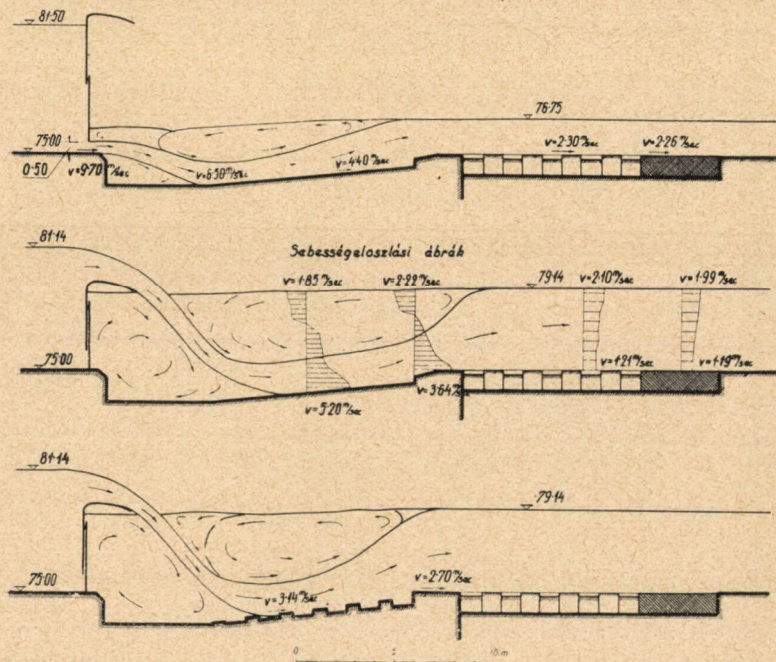




**Békésszentandrás duzzasztómű
általános terve.**

8. sz. rajz.

s a benne lévő vizet a zsilipen átsurranó víz kénytelen útjából eltolni s a leszakadó vízrészekből egy felső, horizontális tengelyű ú. n. fedőhenger képződik, melynek mozgatása a rohanó vízsugár energiájának nagy részét már felemészti. Fontos, hogy a henger átmérője minél nagyobb legyen. A másik energia csökkentés a fenéken áll be, ahová különböző akadályokat építünk (lásd 9. sz.

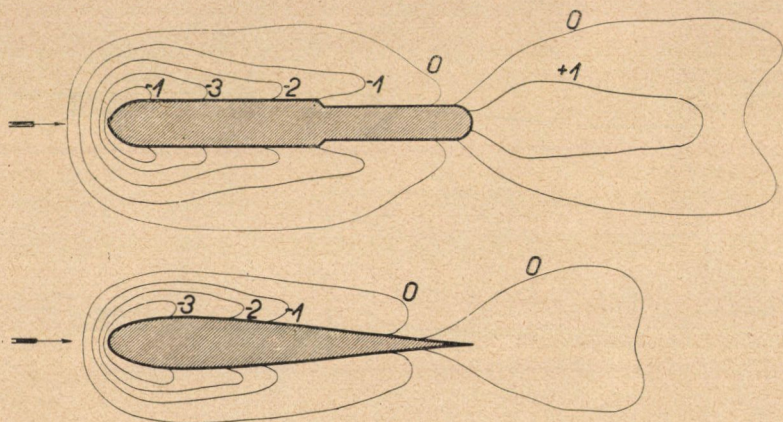


9. sz. rajz.

rajz). Kívánatosnak mutatkozott az energiának a csillapítómedencében további csökkentése, vagyis nem elégedtünk meg a fedőhengerrel, miután a sebességek diagrammja azt mutatta, hogy a fenéken nem csökkent a sebesség oly mértékben, mint a sugár és henger közti szakadási felületen, ebből következett, hogy a fenékre akadályokat — bordákat — ajánlatos beépíteni. Az akadályok egyes éles tömbök vagy a fenéken keresztbe menő éles bordák, a fenék mesterséges kiemelkedései.

A keletkezett mozgásokat vizsgálva a vizet megfestettük, a hengerek hosszát lemérhettük, a sebességet PITOT-féle csővel mértük s a fenti rajzon látható képeket kaptuk, melyek igen előnyösen tüntetik fel a bordás fenék energiacsökkentő voltát, ebből folyólag a fedőhenger rövid, ami azt jelenti, hogy a víz rohanása már az alsó küszöb előtt végetér.

A különféle változatok összehasonlítása biztos támpontot nyújt a legcélszerűbb megoldás kikeresésére és végrehajtására.



10. sz. rajz.

Még néhány szót a duzzasztóművet ketté választó pillérről. Bevett szokás, hogy a 10. rajzon látható pilléralakot tervezik, holott ha a pillér felülete, mint határoló felület nem áramvonalas, azzal örvénylő vízmozgás és a fenék túlságos kimélyülése jár. Ettől itt ugyan nem kell tartani, mert a fenékburkolat szilárd, de hogy mégis az áramvonalas pilléralak mennyivel előnyösebb a szokásos pilléralaknál, azt a 10. sz. rajz mutatja, amelyen az áramvonalas pillér és a szokásos gyakorlati pilléralak hatása a természetes folyó fenekére világosan látható.

Az aerodinamikában úgy szintén a hajó építészetben a gyors menetek megkívánták a legcélszerűbb szárny vagy hajóalagnak a megállapítását és kifejlődött egy teoria, mely a konform ábrázolás segítségével állapítja meg a legmegfelelőbb áramvonalas alakot.

Jelen esetben a pillér legcélszerűbb alakjának, alapul véve a pillérnek tervezett hosszát és a szükséges szélességi méreteket, a rajzban látható ponty alakot kaptuk, melynek meghatározására a TREFFTZ-féle grafikus eljárást alkalmaztuk és így sikerült a vízfolyás és hordalékmozgás szempontjából leginkább megfelelő alakot kikeresni, amely ha egyéb szempontok nem volnának, hidak pillérei számára, de különösen zsilipek, árapasztók válaszfalai számára mechanikailag és költségek szempontjából is megfelelőbb alakot adják.

A közelmúltban ESCANDE toulousei egyetemi tanár egy értekezése jelent meg hasonló választópillérek célszerű alakjáról, amikor itt már a kísérletek folyamatban voltak. Az ESCANDE-féle tanulmány ugyanezt az alakot ajánlja.

Jellemző, hogy az ember évezredek óta látta a hal (ichtioid) alakot, mondhatni a pontynak alakját anélkül, hogy eszébe jutott volna ezt a természettől alkotott legcélszerűbb határfelületet valahol a vízepítésben felhasználni.

Különösen nagy sebességű folyónál, ahol a helytelen alaku pillér duzzasztása folytán a vízszín tetemesen megemelkedik, indokolt a pillérek elején is a szokásosnál célszerűbb alakot formálni, amelyet laboratóriumi kísérletek alapján lehet kifejleszteni.

Tekintetes Akadémia!

Az előadottakban, bár igen szűk keretben vázolni kívántam az elméleti és gyakorlati hidraulika módszereit, s ezzel azt a küzdelmet, amelyet az emberi tudás a hidraulika terén a természettel folytat, hogy a folyadék energiájának különbözőképpen megnyilvánuló alakját megismerje, leírja és törvényként felállítsa. Hosszú és a befejezéstől még távol lévő küzdelem ez, mely a fizika új megfigyeléseit és meglátásait, a matematika új formulázásait igényli.

Vajjon elkedvetlenítő és fárasztó-e ez a küzdelem? Nem, ellenkezőleg felemelő, buzdító mikor látjuk ugyan az elénk tornyosuló akadályokat, de érezzük, hogy minden lépéssel sikerül megismerni a fenséges természetnek egy-egy rejtett részét s hogy nem meddő az ember küzdelmes munkája.

Azt mondják, hogy a nagy NEWTONt megkérdezték, hogy egy-egy felfedezése után hogyan érzi magát, mire ő a nagy embert jellemző szerénységgel azt mondotta, úgy érzem magamat, mint a nagy óceán partján játszó gyermek, aki a sok kavics között egy-egy szebbet talál. Valóban a fenséges természet óceánjának partján egy-egy kavicsot találni, abban gyönyörködni s azt hasznossá tenni az ember földi munkájának legszebb része, mely az embert szerénnyé, de munkájában reménykedővé teszi és igazolja MADÁCH IMRE nagy művének filozófiáját: «Ember küzdj és bízva bízzál».

(M. T. Akadémia III. osztályának 1937. május 27-én tartott üléséből.)

DIE METHODEN DER THEORETISCHEN UND PRAKTISCHEN HIDRAULIK.

Von ALEX. ROHRINGER, Korr. Mitglied.

Der Verfasser schildert die Entwicklung der theoretischen Hidraulik und behauptet, dass nachdem die Untersuchungen der theoretischen Hidraulik auf eine unzusammendrückbare und reibungslose Flüssigkeit gegründet sind, die theoretische Hidraulik oder Hidromechanik die Forderungen des praktischen Lebens nicht befriedigen kann, ja dass sogar scharfe Gegensätze zwischen dieser Theorie und der Wirklichkeit entstehen.

Die verschiedenen Resultate von Theorie und Praxis können nur durch Laboratoriums-Versuche in Einklang gebracht werden. Deshalb werden die Pläne der neuen grosszügigen Wasserbauten mittels Modellen Laboratoriums Untersuchungen unterworfen, wodurch die praktische Erfassung der Probleme erheblich erleichtert wird. Durch dieses Verfahren erhält auch die Theorie neue Anregungen für ihre weitere Entwicklung.

Im Laufe des Vortrages bezeichnet der Verfasser die Gesetze der Modellähnlichkeit und die Methode nach welcher im Wasserbaulaboratorium der Budapester Technischen Universität Studien mittels Modellen mit verzerrem Masstabe durchgeführt wurden. Endlich wird eine Reihe von Aufgaben erwähnt, welche aus der Praxis stammend im Laboratorium untersucht wurden.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 27. Maj. 1937.)

A KÖVES VESEELÉGTELENSÉGRŐL.

ILLYÉS GÉZÁ+61.

(Székfoglaló értekezés.)

A vese szerepe a szervezetben az, hogy a fehérjeanyagcseréből származó végső bomlástermékeket a vérből kiválassza a szervezetnek víztartalmát egyensúlyban tartsa, valamint a vér anorganikus sótartalmát szabályozza. Ezeken kívül fontos szerepe van a szervezet savbasis egyensúlyának fenntartásában is. Ezen fontos feladatok elvégzéséhez szükséges, hogy nagymennyiségű vér áramolja át. Felteszik azt, hogy percenként a veséken egy liter körüli vér megy át, ami 24 órában 1500 liter vérnek felel meg. Lehetővé teszi ezt a vese anatómiai helyzete, mert közel van az aortához és a vena cava-hoz, artériája és vénája rövid s benne az áramlás olyan nagy, hogy egy és ugyanazon vérrészeeskék az időegység alatt sokkal gyakrabban fordulnak itt meg, mint más szervekben. Ezen 1500 liter vér egy napi átáramlásának eredménye pedig átlagban 1 és $\frac{1}{2}$ liter napi vizeletmennyiség.

Újabb felfogásunk a veseműködésről nemcsak elméleti elgondolásokon alapszik, de bizonyos objectív tények is rendelkezésre állanak. Amerikai kutatóknak sikerült fejlett mikroszkopos technikával glomerulus, illetve tubulus punctióval azokból folyadékot nyerni, sőt a tubulusok különböző részeit (I- és II-rendű tubulus contortust, Henle kacsot) is sikerült megpungálni. Az így kapott folyadékok vegyi elemzéséből meg lehetett tudni, hogy milyen anyagot tartalmaz a glomerulus, illetve a tubulus folyadék. SNAPPER szerint a glomerulusban rendkívül híg folyadék van, mely fehérjementes, de chloridokat és cukrot tartalmaz s egyébként megfelel a vérplasma ultrafiltratumának. A glomerulus egy hártya,

melyen át 200 ccm folyadék szűrődik át percenként, ami 24 óra alatt 288 liter folyadékot tesz ki, ebből azonban csak 1 ccm vizelet képződik, világos tehát, hogy 199 cmm folyadéknak vissza kell szívódnia a tubulusokban. Tényleg a tubulusokban azután a víz legnagyobb része s az ott kiválasztott chloridok és szőlőcukor is vissza szívódnak s azonkívül a tubulushám által egyes anyagok ki is választatnak. Ilyen a hippursav, az ammonia és a huyany.

A hippursav és ammonia mint ilyenek a vérben nincsenek jelen, tehát nem választodhatnak ki a glomerulusszűrletben, azok a vesében képződnek s a tubulushám választja ki őket. A hippursav benzoesavból és glycocollból tevődik össze s mint látni fogjuk jelenléte fontos hogy kőképződés ne jöhessen létre, az ammonia pedig az ureumból, illetve aminosavakból származik, maga a vese termeli a szükséghez képest s nagy szerepe van a szervezet sav-basis egyensúlyának fenntartásában. Normalis étrend mellett az áthasonítás alatt sokkal több savgyök keletkezik mint alkali. A szükséges basist, ami a vizeletbeli chlorid- és sulfat ionokat közömbösíti, maga a vese készíti ammonia formájában. Minél több savgyök választódik ki a vizelettel, annál több ammonia képződik a vesében. Veseelégteletenségnél az ammoniaképződés hiányos s a savgyökök kiválasztása nagymennyiségű fix basist (*Na*, *K*, *Ca*) von el a vérplasmától, ami acidosishoz vezet.

Igen komplikált folyamatnak kell e szerint a vesében, főleg a vesecsatornácskákban végbemenni, hogy a glomerulusokban képződött nagy mennyiségű híg folyadékot átváltoztassa a hólyagban található koncentrált vizeletté, midőn olyan hydrogenionconcentrációbeli különbség jön létre, hogy a vérplasma 7.4 p_H -ja átváltozzék a normalis vizeletben található 4.8 p_H -ra.

Érdekesekek azok a kísérletek, melyek a vese beidegzésére, illetve a vesének az idegek útján beálló működési zavarára vonatkoznak. Tudjuk, hogy a vese idegeinek izgatására erős véredényösszehuzódás, a vese megkisebbedése, a vizeletmennyiség csökkenése, muló fehérjevizelés, sőt vérvizelés állhat elő, cylindert azonban soha sem lehet találni; az idegek átvágására pedig a véredények kitágulnak, amit arteriographia útján jól ki lehet mutatni, a vese nagyobb, duzzadtabb lesz, bő vizeletkiválasztás indul meg. Ezen működészavarok főleg vasomotoricus befolyásra sok felől

válthatók ki, miután a veseideg a plexus solaris útján más szervek idegeivel szoros együttműködésben van.

Az idegbefolyások szerepe ezen múltó veseműködési zavaroknál legjobban bizonyítható HAMBURGER szerint az orthostatikus albuminuria előidézésével. Nyúlnál, tengerimalacnál, kutyanál, ha azokat egy ideig függőleges helyzetben tartjuk fejjel lefelé orthostatikus albuminuria lép fel néha vörösvérsejtekkel, de cylinderek soha sincsenek. Ha azonban az állatnál a veseidegeket enervatio, illetve decapsulatio útján előzetesen átvágták, akkor nem lép fel orthostatikus albuminuria. Látjuk azt is, hogy az enervatio (a vesébe lépő idegek átintszése a hylusba való belépésük előtt) után egy múltó hyperfunctio lép fel a vesében, ami polyuriával, a chlorés nitrogentartalmú anyagok bővebb kiválasztásával jár. Később ez elmúlik, de az enervationak a vese későbbi működésére semmiféle káros hatása nincsen.

Veseelégtelenségnél a normalis functiók kisebb-nagyobb mértékben megzavartatnak, ami az egész szervezetet súlyosan érinti. Kő által okozott insufficientiánál az általa fenntartott vizelet-pangás, a nyomásfokozódás a vesében a fentebb említett ideges behatások már csekélyebb fokú anatómiai elváltozásnál is súlyos tüneteket okozhatnak, melyek megfelelő beavatkozásra gyorsan és tartósan rendbe hozhatók (relativ insufficientia); máskor nagyobb veseállománypusztulás esetében a rosszabbodás előrehaladó, ami vagy csak mulólag vagy sehogysem állítható meg.

A kőképződés magyarázata szorosan összefügg a veseműködés újabbban felderített részleteivel.

Tudjuk azt, hogy a vizelet egy túltelített sóoldat vagyis annyi sót képes oldatban tartani, amit vízben oldva tartani nem tudunk. Vannak azonban sók, melyeknek vizes oldata nagyobb oldóképességgel bír mint a víz. Ilyen sók a natrium salicyl, natrium benzoicum, natrium hippuricum s az ureum. Ezeket elnevezték hydrotropikus anyagoknak. A vizelet tehát azért tud túltelített állapotban maradni, mert benne hydrotropikus anyagok vannak. Calcium oxalatot vízben feloldani alig lehet, ellenben a vizeletben bizonyos mennyiségben oldatban van jelen. A másik anyag, ami a vizelet túltelítetttségét fenntartja, a colloidok jelenléte a vizeletben. Vannak labilis, könnyebben kicsapódó colloidok, ilyenek a mucin és

fibrinogen, stabil colloidok: a nucleinsav, chondroitin-kénsav s az urochrom mint colloidos festőanyag. Túltelített vizeletben a labilis colloidok könnyen kicsapódnak, képezik a kőnek a magját, erre kicsapódó sók rakódnak rá, majd ismét colloid válik ki s így keletkezik a réteges kő. A hydrotropikus anyagok, különösen a vesében keletkezett hippursav, stabilizálni képes a könnyen kicsapódó labilis colloidokat s ezáltal a kőképződést megakadályozza, illetve növekedésüket gátolja. A natrium benzoicum régen ismert és alkalmazott szer kőképződés ellen, amely ha a tápszerekkel bekerült glyccollal összekerül, belőle hippursav keletkezik s innen van a jó hatása.

A kőképződésben fontos szerep jut még az infectiónak és a pangásnak. Egyes bacteriumfajták, proteus Hauseri, staphylo-, streptococcusok a vizeletbeli ureumot úgy bontják szét, hogy belőle ammonia keletkezik s az így létrejött alkalikus vizeletből könnyen kicsapódnak a phosphatok. A vizeletpangásnak a vesében pedig ott van a szerepe, hogy a kicsapódott sók nem mosatnak ki a veséből mint normális viszonyok között, hanem leülepednek, összeállanak s növekedésre van alkalom. A nagyobbodó kő lefolyásbeli akadályt okozván megint fokozza a vizeletpangást s így elősegíti a vese pusztulását.

Meg kell még említeni bizonyos anyagcsere zavarokat, hol a sókiválasztás fokozott a vizeletben. Ilyen a köszvény vagy cystinuria vagy a parathyreoidea túlműködése, hol bőséges calcium- és phosphatképződés mutatkozik.

Nézzük most azokat a *kőbonctani* elváltozásokat, melyeket a kő a vesében létrehoz. Felületes szemlélésnél már meg lehet állapítani, hogy a kő jelenléte egyrészt mechanikusan horzsolja, sérti a nyálkahártyát s a veseállományt, másrészt pusztítja azáltal, hogy benne vizeletlefolyásbeli akadályt hoz létre.

A kialakult kőbonctani elváltozás egyik formája az, midőn az egész vese kisebb lesz, zsugorodik, az állomány pusztulása következtében.

A másik alaknál a vesekörüli zsír nagyon megszaporodik, kötőszövetesen elfajul, a hylusbeli zsír benyomul a vesében, elfoglalja a pusztuló veseállomány helyét s végül azt majdnem teljesen fibrolipomás tömeggé alakítja át, melyben ott fekszik a kisebb-nagyobb vesekő.

Leggyakoribb alakja azonban az, midőn a kő elzárja a lefolyást s akkor az egész vese vagy egyes részei pangó vizelettel telt kisebb-nagyobb vékonyfalu zsákká alakulnak át a veseállomány megfelelő pusztulásával.

Lényegesen gyorsabb a pusztító hatás akkor, ha a köves vese inficiálódik, mi igen könnyen bekövetkezik, midőn egyszerű pyelonephritis vagy kisebb-nagyobb tályogok keletkeznek, melyek egymásba olvadva a vese egy genyedő zsákká lesz vagy áttörve a környezetbe súlyos vesekörüli genyedés keletkezik.

A szövettani képen látjuk, hogy a pangás, illetve fokozódó nyomás következtében a puha veseállomány a merev rostos vesekörüli tokhoz nyomatik, a glomerulusok ellapulnak, a vesecatornácskák a retrograd pangás következtében kitágulnak, hámjuk ellapul, majd elsovad s helyüket az interstitialis kötőszövet foglalja el. A glomerulus- és tubulus-rendszer ilyen pusztulása mellett érthető, hogy a vese működése lényegesen alább száll. Egyoldali vesekőnél is a másik vesében — különösen genyedés esetében — előbb-utóbb gyulladásos elváltozások keletkeznek. Kétoldali vesekőnél vagy solitár vesében pedig az ilyen vesepusztulás mellett a működési elégtelenség hamar bekövetkezik.

Normalis viszonyok között a veseműködésben a glomerulusoknak és tubulusoknak csak egy része vesz részt, a többi tartalékként van ott, hogy szükség esetén nagyobb megterhelésnél ez a rész is igénybe vétessék s a vese a ráhármló feladatot akadály nélkül elvégezhesse. Köves vesénél, de más természetű vesebetegségnél is, — midőn az állomány pusztul, lassan bekövetkezik a veseinsufficiencia. Ez a fogalom KORÁNYI SÁNDORTÓL származik, átment a közhasználatba, s azt jelenti, hogy a vesék a betegség okozta pusztulás fokához képest lassan elégtelenek lesznek ahhoz, hogy a szervezetbeli vesemunkát elvégezzék. Egyoldali vesekőnél ez nem szokott bekövetkezni, mert a másik ép vese tökéletesen elég ahhoz, hogy a veseműködés rendben legyen. Köves veseinsufficiencia akkor szokott bekövetkezni, midőn mind a két vese beteg vagy pedig az egyik vese már régebben elpusztult vagy el lett távolítva, tehát solitár veséről van szó.

Köves betegeknél, hol a leggyakoribb kórbonctani elváltozás az, hogy eldugaszolása következtében vagy az egész vesében vagy

csak egyes részeiben vizelet pangás keletkezik az a szövetpusztulás következik be, amit elhanyagolt prostatatúltengésben szenvedők-nél látunk, midőn a pangás, illetve nyomásfokozódás következtében az állomány összenyomatik, a tubularis rendszerben keletkező retrograd pangás folytán lelapul a vesecatorna köbalakú hámja s éppen a tubularis rendszer funkciója szenved legtöbbször, hol pedig a víz visszafelszívódása, illetve a fontos vizeletanyagok kiválasztása történik. Ennek következménye, hogy a vese elveszti koncentráló képességét; a vérben azonban egyideig retentio még nincsen, ha a glomerulus rendszer még rendben van, mert sok folyadékkal, híg vizeletben még képes a vese arra, hogy a 24 órán át képződött salak mennyiségét kiválassza, tehát az egyensúly állapotát fenntartsa. Ilyenkor nagy szomjusági érzés lép fel a betegek csak folyékony táplálékot vesznek magukhoz szívesen, mert szájuk, torkuk száraz s szilárd ételeket csak nehézséggel tudnak lenyelni. Ezen kiszáradási érzés a legkorábbi tünetek egyike, mert a vese a szövetekből veszi el a vizet, ami a compensált állapot fenntartásához szükséges s ezért mutatkozik a nagy szárazsági, illetve szomjúsági érzés.

Ezen relativ insufficientia állapotában, — ha kellő időben segítség érkezik — javítani lehet a helyzeten, sőt legtöbbször bámulatos jó eredményt lehet elérni, mert a kő eltávolításával, illetve a pangás megszűntetésével, felszabadulván a nyomás alól, a veseműködés megint helyreáll. Célszerű ilyenkor, de még súlyosabb esetben is műtétként az enervatiót, sőt a vesedecapsulatiót is elvégezni, melynek múltó következménye a vesedények kitágulása, a vese jobb vérellátása, működésének javulása, ami a gyorsabb regeneratiót nagyban elősegíti.

Egy 51 éves férfinél, kinél 15 év előtt más helyen kő miatt jobboldali veseműtétet végeztek s kinél ugyanazon vesét 1 év előtt újra operálták, felvételekor a másik vesében nagy korallkő volt alacsony fajsúlyú vizelettel. Vér $\delta=0.60$. $mN=0.72$. Nagy szomjúsági érzés, leromlás, apró lázak, jobboldalt genyedő vesesipoly. Az intravenás pyelographia baloldalt elég jó kiválasztást mutatott s habár nagy kövek voltak a felső pólusban, az alsó vesefél még meg volt. 1936 május 4-én a balvese feltárása, a nagy kő eltávolítása, mely alkalommal a felső pólusban pangás s vékony vese-

állomány találtatott az alsó pólus ép volt; gyógyult. Szeptember 2-án a jobb genyedő, lázakat fenntartó s a másik rendbe hozott balvesét is fenyegető sipolyos elpusztult vese eltávolítása után félévre 15 kilót hízott és jól érzi magát.

31 éves nőnél máshol 2 év előtt a balvesét genyedés miatt eltávolították. Jelentkezéskor kő a solitár jobbvesében, sok geny a vizeletben, nagy mennyiségű vizelet, fajsúly 1010, $\delta=0.60$, $mN=0.77$. Pyelographia a tágult veseüreg mellett elég állományt mutatott, ezért a kő műtéti eltávolítása a solitár veséből; állomány elég jó. Gyógyult. 11 év óta teljesen jól érzi magát.

Súlyosabb a helyzet akkor, ha a pangó vizelet inficiált s a beteget magas lázak gyötrik. Vannak eseteim, hol bevezetett ureterkatheterrel sikerült a záró ureter- vagy vesemedencekövet eltolni, a pangást megszüntetni s pár napi bennhagyással olyan kedvező állapotot teremteni, hogy a kő eltávolítását célzó műtéti beavatkozás kedvezőbb viszonyok között történhetett meg.

Még súlyosabban azon esetek, hol a kőképződéshez infectio is társulván, nem annyira a pangás okozta működési zavar, mint inkább a gyulladás okozta előrehaladt veseszövet pusztulás volt az insufficiencia oka. Ilyen esetekben a műtétnél vagy azt a típust találjuk, hol a hylusbeli zsír benyomulván a vesébe, valamint a vesekörüli zsír megszaporodván állományt már alig találunk; másik típus az, midőn zsugorodó kicsi vesét látunk, melyben a kő fekszik. A műtét után regeneratio tehát már nem várható, mert irreparabilis veseállomány pusztulást találtunk. Ezen viszonyokat előre megállapítani sokszor nem lehet s ha a beteg általános állapota még megengedi, megkíséreljük a kő műtéti eltávolítását azon tudatban, hogy ez az egyetlen útja a gyógyulás lehetőségének; enélkül a beteg feltétlenül elpusztul a fokozódó veseromlás következtében.

33 éves betegnél 1 év előtt a jobboldalon vesekőeltávolítás; a vese tág üregekből, vékony állományból állott. Felvételkor baloldalon is vesekövet találunk, a beteg sokat hányt és szomjazik. Bal veséből a követ operative eltávolítjuk. Egy ideig jobban van, később azonban uraemiás tünetek lépnek fel; 3 héttel a műtét után $\delta=0.62$, $mN=0.78$, a negyedik héten előrehaladó uraemiában meghalt.

45 éves férfinél, hol a jobb vese genyedés miatt $\frac{1}{2}$ év előtt el lett távolítva, a meglevő bal vesében nagy kövek és sok geny, de amellet elég jó functios eredmény volt; $\delta=0.59$, $mN=47$ m %, vizelet fajsúlya 1015. A kő pyelo-nephrotomia útján lett eltávolítva. A műtét jól ment, utána 6 nappal a beteg lassan uraemiás lesz, $\delta=0.63$. $mN=140$ mg %, xanthoprotein = 90. Véres székelés lép fel s a nyolcadik napon meghalt. Boncolásnál a meglevő vesében a glomerulusok körül lebenyes magvú leukocyták nagyobb tömegben, a kanyargós vesecsövek hámsajtjei duzzadtak, sejtmag halványan festődik, az egyenes vesecsövek alsó szakaszaiban a lumenben is láthatók lebenyes magvú leukocyták. Az uraemia, illetve a halálnak oka a műtét után fellépett kezdődő heveny vesegyulladás volt, mely ismeretlen okból a meglevő állományban fejlődött s amely az uraemia oka volt.

Legsúlyosabb veseműködési zavart akkor találunk, ha anuriás állapotban kapjuk a beteget, mely vagy úgy lép fel, hogy mindkét vese elzáródik vagy úgy, hogy csak egyik vese záródik el s a másikban reflectorikus anuria áll be vagy végre úgy, ha solitár vese záródik el. Ezen esetekben, ha gyors segítség nem jön, a beteg feltétlenül elpusztul. A segítség állhat egyszerű ureterkatheterezésben, mellyel, ha sikerül a beékelt követ kimozdítani, helyreáll a diuresis s a momentán életveszély elmúlt. Ha ilyen úton nem érünk el célt, akkor a műtéti feltárásnak van helye, mellyel kedvező esetben nemcsak a vizelet lefolyását állapíthatjuk helyre, de az elzáródást okozó követ is eltávolíthatjuk. Súlyos és sürgős esetben, ha az elzáró kő kedvezőtlen helyen, az ureter kismedencében levő szakaszában fekszik, a kő eltávolítását későbbre hagyhatjuk s megelégszünk azzal, ha az uretert a csípőtányér feletti szakaszában valahol kinyitjuk s egy Nelaton-kathetert belé helyezve a vizelet lefolyását helyreállítjuk. Több esetben láttam solitár vese esetében, hogy ilyen életmentő műtét után a kő pár nap múlva magától eltávozott s akkor 1—2 napra ureterkathetert vezetve fel az uretersipoly záródott.

A veseinsufficiencia megállapítására szolgáló vizsgálati módszereink elég megbízhatók főleg akkor, ha többféle vizsgálatot végezzünk. Erre szükség van azért, mert nem rendelkezünk egy olyan módszerrel sem, amelyből a vesék sokféle részletműködését

egyszerre megállapítani tudjuk. A vizsgálatok egy része a vizelet útján, másik része a vér útján történik. A vérvizsgálat mintegy ellenőrzi a vizeletvizsgálat útján nyert adatokat. A vese ugyanis a vérből választja ki a vizelet útján eltávolítandó anyagokat. Ha azokat megtaláljuk elegendő mennyiségben a vizeletben, akkor nem maradnak vissza a vérben, ha ellenben a vizeletben hiányznak vagy nincsenek jelen kellő koncentrációban, akkor mint visszamaradt mérgeket legtöbbször megtaláljuk azokat a vérben. A szövetekben is visszamaradhatnak mérges anyagok, ezeknek mennyiségét nem mindig tudjuk megállapítani, de veseinsufficienciánál már nemcsak a szövetekben, de a vérben is vannak visszamaradt vizeletbeli alkotórészek, melyeket pedig ki tudunk mutatni.

A vizsgálati módszerek közül legegyszerűbb a vizelet napi mennyiségének és fajsúlyának megállapítása, mert veseinsufficienciánál éppen a compensáló polyuria miatt nagyon megszaporodik a vizelet napi mennyisége a 2500—3000 körül szokott lenni, a fajsúly pedig alacsony (1010 körül), mert az insufficienciás vese elvesztette koncentráló képességét.

Ha már a vízkiválasztó képesség is csökkent, az azelőtt bőséges vizelet mennyisége leszáll, mert már a glomerulusok is pusztulóban vannak, akkor már az uraemia közelsége fenyeget.

A megterhelési próbákat azért alkalmazzuk, hogy megállapítsuk a vese tartalék működési képességét. Ilyen a koncentrálási-hígítási próba, melyet az én módszerem szerint alkalmazunk s amelynél főleg a koncentrálási képesség megállapítására helyezünk súlyt, mert a hígítás lefolyásában extrarenalis tényezők zavarólag is szerepelhetnek.

Egyszerű festékpróba az indigocarmin befecskendezése, melyet akár intravenásan, akár intramuscularisan alkalmazunk. Elég jó közvetlen tájékoztatást nyújt, habár éppen köves betegeknél néha kiválasztásában nagyobb késés mutatkozik, mint amit a veseállomány állapota indokolna. Ezenkívül használjuk az ureterkatheter felvezetésével separált vesevizeletek fagypontjának összehasonlító meghatározását s a separált vizeletek üledékének megvizsgálását.

Veseinsufficienciára gyanus betegnél mindig megvizsgáljuk a vért is. A vérfagypont meghatározásából megtudjuk annak

molecularis concentrációját. Normális viszonyok között 0.56 fokon találjuk a vér fagypontját, ami 0.60—0.70-ig süllyed le veseinsufficiencia esetén. Mindig meghatározzuk a maradék nitrogént a vérben, amely normálisan 20—40 mg %-nak felel meg s amely 100—200 mg %-ig is felemelkedhetik, ha retentio van a vérben. Olyan betegeknel, kik sokat hánynak nagy a konyhasós és sósavveszteség, melynek következtében hypochloreaemia áll be, ami a vér ureum, — illetve *mN* tartalmának megnövekedését is okozza. Ezen tünet számbavevése nagyon fontos, mert egyszerű módon, konyhasónak intravenás adagolásával gyorsan megszűnik a hányás és csökken a vérbeli ureum, illetve *mN* retentio. Nagyon gyakran szoktunk ilyen irányban beavatkozni s jó eredményt érünk el.

Fontos még a xantoproteinreactio alkalmazása is. BECHER rájött arra, hogy uraemiánál nagy szerepet játszanak a bélbeli fehérjerothadásból származó bomlástermékek, a phenol, kresol, diphenol és az aromás oxysavak, melyek acidosist idézhetnek elő, ha a pusztuló vese ammoniatermelő képessége csökkent. Ezen mérgező anyagok kimutatására a vérsavóból egyszerű eljárás: a colorimetrikus úton végzett xantoproteinreactio. Azt találtuk, hogy nagyobb mennyiségben való megjelenése a prognosist súlyossá teszi, mert az uraemia közelségét mutatja.

Ezen functionalis vizsgálati módszereken kívül fontos még a vese anatómiai állapotának a meghatározása is, amit egyszerű tapintással vagy a Röntgenfelvétellel, illetve contrastanyagok bejuttatása útján érünk el.

Az egyszerű Röntgenfelvétel tájékoztat sok részletről a vesét és a köveket illetőleg, de finomabb részletekben kapunk felvilágosítást a pyelographia útján, melyet ha lehet alulról az ureterkatheter felvezetése és contrastanyag befeeszkendezése útján végzünk el, ha ez nem vihető keresztül, de sokszor különben is elvégezzük az intravenás pyelographiát, midőn a vénába feeszkendezett magas jódtartalmú anyagot a vese kiválasztja anélkül, hogy az anyag decomponálnék s anélkül, hogy a szervezetben mérgezést okozna.

Ez úton előre láthatjuk, hogy a vesék anatómiai szempontból milyen állapotban vannak, hogy a kezdődő insufficiencia vajjon

egy relatív és javítható állapotot jelent-e vagy pedig az előrehaladó és feltartóztatlan vesepusztulásnak kezdeti jele-e s összehasonlítva a functios eredményekkel pontos tervet csinálhatunk arról, hogy operatív- vagy nem operatív-kezelés céljából mikor és hogyan avatkozzunk be.

Sajnos vannak olyan rosszindulatú esetek, hol nem annyira a kő okozta pangás, mint inkább a vese állományának pusztulása okozza a veseelégtelenséget, hol az eltávolított kő gyorsan recidivál, hol a műtét után a megmaradó veseállományban acut nephritis lép fel s ahol az orvosi beavatkozás lehetősége veget ér, hol a szervezet pusztulása feltartóztatlan.

Szomorú volt egy 58 éves falusi orvos esete, ki sok elfoglaltsága mellett a kisebb-nagyobb tüneteknek nem tulajdonított jelentőséget s mikor egy ízben véres vizelete miatt nagy szomjúsági érzéssel jelentkezett, a Röntgenvizsgálattal mindkét vesét teljesen kitöltő nagy korallkővet találtunk. Pyelographia alig mutatott pangást, ellenben maga a veseállomány már elvékonyodott, elpusztult a nagy kő nyomása következtében, hogy azt a megterhelést, amit egy műtéti beavatkozás jelent, már nem bírta volna el s így kénytelenek voltunk a lényeges segítség lehetőségéről lemondani.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy kétoldali vesekő megbetegedésnél vagy solitár köves vesénél nem kell megvárni, míg a veseelégtelenség bekövetkezik; ha azonban már tünetei jelentkeznek olyankor kell a beteget bajától operatív úton megszabadítani, mikor a veseelégtelenség még csak relatív. Ilyenkor a kő okozta vizeletpangás olyan súlyos működési zavart tart fenn, melyet ha megszüntetünk a kő eltávolításával, a vese felszabadulván a nyomás alól, összeszedi magát s helyre áll a jó működési képesség, megszűnik a veseinsufficiencia. Minél előbb operálunk annál több veseállományt tudunk megmenteni, s így nemcsak múló eredményt érünk el, hanem tartós egészséget, munkabírást biztosíthatunk az illető egyéneknek. Még a legsúlyosabbnak látszó esetben is az összes egyéni adottságnak gondos számba vételével mérlegeljük a műtéti beavatkozás lehetőségét, meg kell gondolnunk azt, hogy a kő által okozott veseelégtelenség nem javítható csak úgy, ha a követ, ami

fenntartja a vizelet pangást, genyedést onnan eltávolítjuk; itt nem úgy van mint például a prostatatúltengésnél fennálló insufficienciánál, ahol esetleg megfelelő kezeléssel a veseműködési zavar megjavítható. Köves elégtelenségénél, ha a kő eltávolításáról lemondunk, ez a betegnek feltétlen pusztulását jelenti. Persze határt szab a beavatkozás lehetőségének a szervezet, főleg a szív rossz állapota, amely a műtétet ily viszonyok között mindig nagyon kockázatosá teszi, de mégis azt kell mondani, hogy ha csak némi lehetősége is van a műtéti beavatkozásnak, azt el kell végezni, mert ez az egyetlen módja a javulás lehetőségének.

Ismertetem még az eredményeimet.

Összes vese- és ureterkő eseteim száma: 1656.

Ebből műtétre került 949, kik közül meghalt 4·5%.

Köves veseinsufficiencia: 91 eset, ebből

egyoldali kő (a másik vese is beteg): 31 eset

kétoldali kő: 36 «

solitár vesében kő volt: 15 «

anuria: 9 «

Operálva lett 60 eset, ezek közül meghalt 19=31·6%, vagyis meg lehetett menteni a különben biztosan elpusztuló betegek 68·4%-át. A nem operáltak mind meghaltak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. október 27-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE NIERENINSUFFIZIENZ BEI STEINNIERE.

Von G. v. ILLYÉS.

Zusammenfassend können wir sagen, dass in Fällen von doppelseitiger Nierensteinerkrankung oder solitärer Steinnieren das Auftreten der Niereninsuffizienz nicht abgewartet werden soll, melden sich jedoch schon die Symptome dieser, soll der Kranke noch zu diesem Zeitpunkte von seinem Übel befreit werden, in welchem die Insuffizienz noch eine relative ist. In diesen Fällen hält die zufolge des Steines entstandene Harnstauung eine sehr hochgradige Funktionsstörung aufrecht, sofern aber diese durch Entfernung des Steines behoben wird und so die Niere, vom Drucke befreit, sich erholt hat, die gute Funktionsfähigkeit sich wieder einstellt und die Niereninsuffizienz verschwindet. Je früher wir operieren, um so mehr Nierenparenchym können wir retten, wodurch nicht nur ein vorübergehendes Resultat erzielt wird, sondern wird der betreffenden Person andauernde Gesundheit und Arbeitsfähigkeit sichern können. Selbst in den sich als allerschwerst gestaltenden Fällen sollen wir nach sorgfältiger Inanbetrachtung aller individuellen Gegebenheiten die Möglichkeiten eines operativen Eingriffes erwägen, wir müssen bedenken, dass die durch den Stein verursachte Niereninsuffizienz nur so verbessert werden kann, wenn der Stein, der die Harnstauung und Eiterung aufrecht hält, von dort entfernt wird; hier verhält es sich nicht so, wie z. B. bei der Insuffizienz bei Prostata-Hypertrophie, wo mittels entsprechender Behandlung die Funktionsstörung der Nieren verbessert werden kann. Sofern wir bei Steininsuffizienz auf die Entfernung des Steines verzichten, ist dies mit dem unbedingten Zugrundegehen des Kranken gleichbedeutend. Natürlich werden den

Möglichkeiten des Eingriffes durch den Organismus, hauptsächlich durch den schlechten Zustand des Herzens — durch welchen die Aussichten der Operation unter solchen Umständen immer sehr riskant werden — Schranken gestellt, wir müssen aber dennoch sagen, dass sofern nur eine geringe Möglichkeit eines operativen Eingriffes vorliegt, diese ausgeführt werden muss, denn dies ist der einzige Weg zur Möglichkeit der Besserung.

Bekanntmachung meiner Resultate.

Zahl meiner sämtlichen Nieren- und Uretersteinen 1656.

Davon kamen 949 zur Operation, wovon 4·5% starben.

Stein- Niereninsuffizienz: 91 Fälle, davon waren	
einseitiger Stein (auch die andere Niere ist krank)	31 Fälle
doppelseitiger Stein	36 «
Stein der solitären Niere	15 «
Anurie	9 «

Operiert wurden 60 Fälle, davon starben 19: 31·6%, das heist 68·4% der ansonst bestimmt zugrundegehenden Kranken konnten gerettet werden. Die nicht operierten starben alle.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Oktober 1937.

ADATOK A JACOBSON-FÉLE SZERV ÖSSZEHASONLÍTÓ ANATOMIÁJÁHOZ.

ZIMMERMANN ÁGOSTON r. tagtól.

(Négy képpel.)

Az emlősállatok, egyben az ember egyik legjellemzőbb csökevényes szervének a JACOBSON-féle szervet tartják (LENHOSSÉK¹³), melyet emberen még JACOBSON LAJOS LEVIN (1783—1843) kopenhágai orvos előt már RUYSCHE és SÖMMERING 1703-ban írt le (JACOBSON makroszkopos leírása 1811-ből való⁷), kik azonban a szaglószervezhez való viszonyát nem ismerték fel. LEYDIG (1857) emlősökön e szerv mikroszkopos szerkezetét vizsgálta és írta le. Azóta sokan foglalkoztak a JACOBSON-szervvel, magyar részről különösen BALOGH KÁLMÁN¹, MIHÁLKOVICS GÉZA^{17, 18, 19}, LENHOSSÉK MIHÁLY¹³ és NAVRATIL DEZSŐ²⁰ erre vonatkozó munkái érdemelnek említést.

A JACOBSON-féle szerv az orrsövény tövében, elől és alul, ventroapicalisan az orrreg lélekző részében, *pars respiratoria*, elhelyezett szagló részlet (MIHÁLKOVICS). Helyzete itt állandó. Az ekecsonttal szomszédos helyeződése alapján az Anatomische Gesellschaft nomenklatura-bizottsága *organon vomeronasale* névvel jelölte meg. Általában az orrregbe nyílik, részben szaglóhámval bélelt, mirigyekkel és a nervus olfactorius egy hozzátérő ágával ellátva.

A gerincesek sorában a halakon hiányzik (KERKHOF¹¹). A szerzők szerint egybehangzóan *amphirhin*-állatokon jelenik meg. Az Amphibiákon gyengén fejlett (SEYDEL²²). A Reptilek közül némelyeken erősen, másokon (teknősbékán, krokodiluson) alig fejlődött ki, egyeseken már porcba foglalt (SLUITER²³, NAVRATIL²⁰), az orrüregtől különálló, a szájüregbe nyíló szerv, Sauriusokon

kagylószerűen öblösödő nyílással. MIHÁLKOVICS¹⁷, COHN⁴ és mások madarakon, részben embryonális állapotban (NAVRATIL²⁰), vizsgálták és írták le a JACOBSON-féle szervet, mely itt gyengén fejlett; a madarak szaglása hasonlóképen gyenge.

Az emlősökön legbehatóbban MIHÁLKOVICS¹⁷ terjedelmes munkájában ismertette a JACOBSON-féle szervet, melyet különösen a juh-, de ezenkívül kutya-, macska-, házinyul-, egér-, sertés-, marha-stb. embryókon vizsgált és mint vakon végződő hámesövet írt le, melyet a JACOBSON-féle porc több-kevésbé körülfoglal. Rágcsálókön az orrüregbe, egyebeken a STENSON-féle járatba, a *ductus nasopalatinus*ba és így az orr- és szájüregbe nyílik. Ismertette a szerv érzéki hámját, ennek összefüggését a szaglófonalakkal, megállapítván, hogy a juh szaglősejtjeinek basalis vége olfactoriusrostokba folytatódik. LENHOSSEK¹³ 30 mm-es házinyülembryon GOLGI eljárásával a JACOBSON-szervet kibélelő hámrétegben támasztó- és szaglősejteket, továbbá terminális idegrostokat mutatott ki, melyek a szerv felületéig húzódnak. NAVRATIL²⁰, KOELLIKER, MIHÁLKOVICS, KALLIUS⁸ emberi embryókon állapították meg a JACOBSON-szerv jelenlétét, felnőtt emberen MERKEL¹⁶, MANGAKIS¹⁵ vizsgálta és mutatta ki nyomait, míg GEGENBAUR⁶ és mások kétségbevonták a JACOBSON-szerv előfordulását az emberen. Kétségtelen, hogy a fetuson megjelenik, a későbbi fejlődés során azonban elsorvad, eltűnik, néha a *torus vomeronasalis* alakjában észrevehető; a rhinológiában e *locus Kisselbach*nak nevezett merevedő szövet mint orrvérzésre hajlamos és állítólag az *ulcus perforans saepti* keletkezésénél is szerepet játszó részlet pathologiai jelentőségű.

A JACOBSON-féle szerv *fejlődésére* vonatkozó adatok röviden a következőkben foglalhatók össze. Fejlődése a szaglógödör medialis falán jelentkező barázdából indul ki. Amikor a szaglógödör tömlővé alakul, a barázda a mélybe húzódik és vakon végződő csővé lesz, szélei egyesülnek. Medialis falán szaglőhám alakul ki, de még szaglőszőrök és mirigyek nélkül. Állatokon ezután a cső általában még tovább nő caudalis arányban, míg apicalisan a STENSON-féle járatral lép összeköttetésbe. Emberen ellenben embryonalisan éri el fejlődése tetőfokát, ezután hanyatlani kezd (KEIBEL—MALL¹⁰). Az ovalis harántmetszetű cső medialis fala utóbb megvastagodik, hámja szaporodik és mirigyek fejlődnek. Az orrsövényporcból ki-

növesssel alakul ki a JACOBSON-féle pore, nem pedig a vomerből, mint azt NUSBAUM leírta.

A JACOBSON-féle szerv morphológiája és élettana az aránylag nagyszámú vizsgálat ellenére még ma sem tekinthető tisztázottnak, csökevényes voltához is kétség fér. A vezetésem alatt álló intézetben KARPFER KONRÁDNak⁹ a házinyúl, részben DETÁR JÁNOSnak⁵ a házimadarak orrüregére és ennek melléköbleire vonatkozó vizsgálatai kapcsán alkalom nyílt a JACOBSON-féle szervvel is behatóbban foglalkozni. KARPFERrel⁹ 42 esetben házinyúl orrfenekén, az orrsövény két oldalán mindenkor pozitív eredménnyel kerestük fel e szervet, később még 8 esetben, főleg a postembryonalis



1. kép. Házinyúl koponyájának hosszanti metszete. Az orrsövényen a JACOBSON-féle szervhez (*) térő szaglóróst dichotomiás osztódása, mögötte az ekecsont szárnya.

növekedésére, illetőleg az extrauterinalis életben bekövetkező változásaira terjeszkedtem ki különösebben, melyekből esetleg működésére lehetne következtetést vonni. Ez újabb vizsgálataim az újszülött, egynapos, 2 hetes, 4 hetes, 3 hónapos, egyéves, két $1\frac{1}{2}$ éves és egy körülbelül 5 évesnek mondott házinyúl orrüregére, illetőleg JACOBSON-szervére terjednek ki.

A lehetőleg életmelegen vizsgálatra került házinyúl fején a szemgödörök síkja előtt harántirányban, ezután a mediansíkkal párhuzamosan, hosszant átfűrészelve az orrüreg falát, a kemény szájpadláson hozzáférhetővé vált a JACOBSON-féle szerv (l. az 1. képen). A szövettani vizsgálatokhoz SCHAFFER-féle fixálóban rögzítve, salétromsavban 2—3 napig decalcinálásra kerültek a

készítmények, melyek azután 5% Na_2SO_4 -ben közömbösítve és áramló vízben kimosva, paraffinba ágyaztattak, belőlük frontális sorozatmetszetek készültek. Ezek haematoxylin-eosinnal, van GIESON szerint, KARFFER⁹ metszetein RAMON y CAJAL szerint 3% kalium bichromicum-, 1% osmiumsav- és 3% ezüstnitrátoldattal kezeltettek.

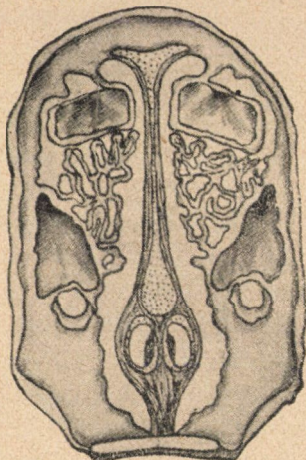
A házinyúl JACOBSON-féle szerve erősen fejlett. Helyzete nem változik a későbbi korban sem: az orrsövény tövében kétoldalt, a vomer és az orrsövény találkozási helyén, a kemény szájpadláson, (l. az 1. képen) az ekecsont és az orr nyálkahártyája között foglal helyet. az orrüregbe bedomborodó szerv alakjában, porc csőben, *cartilago vomeronasalis* v. *parasaephalis*, rejtve (l. az 1—3. képen). Kifejlett házinyúlon hossza 15—20 mm, a JACOBSON-porc vastagsága pedig középértékben 1.5 mm, a cső lumenének harántátmérője középértékben 0.15, magassági átmérője pedig 0.45 mm. Nyílása ovális és, ellentétben a többi vizsgált emlőállat JACOBSON-szervének nyílásával, nem a STENSON-járatba vezet, hanem szabadon az orrüregbe nyílik. Ezután hátrafelé fokozatosan tágul a cső ürtere, legnagyobb tágasságát hosszanti lefutásának közepétáján éri el, majd ismét kissé szűkül, míg végül vakon végződik. Harántmetszete az ovális nyílást követőleg kezdetben inkább kerekdeddé válik, ezután ovális (l. a 2. és 3. képen), majd vesealakot ölt, vak vége felé pedig ismét kerekdeddé lesz az itt szűkült részlete.

A JACOBSON-féle porc aboralisan túlnyúlik, hátrább terjed, mint a JACOBSON-féle szerv. Kívül sűrű, erős, tömött *perichondrium* foglalja azt körül, mely az orrsövényporc perichondriumába megy át (l. a 2. képen). A porc nemcsak áthidalja, hanem teljesen körül foglálja a házinyúl JACOBSON-féle szervét. Vak vége fölött 3—4 nagyobb ér vehető észre, melyek elágazódásaikkal körülhálózzák. Ezenkívül még a *nervus olfactorius* egy ága követhető az orrsövény oldalán a JACOBSON-féle szervhez; ez ág 5—10 mm-es lefutás után két ágra oszlik, melyek ismét két-két ágra válva térnek a JACOBSON-féle szervbe (l. az 1. képen). Ez idegen kívül még a *n. trigeminus* maxillaris ágából is jutnak idegrostok a JACOBSON-féle szervhez.

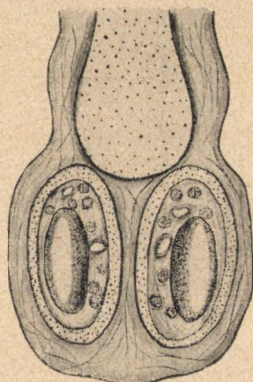
A JACOBSON-féle porc belső falára, mint az valamennyi metszeten kitűnik, a JACOBSON-féle szerv nem fekszik reá közvetet-

lenül, hanem a kettő között *laza kötőszövet*, erekkel, idegekkel, sok serosus mirigyvel található (1. a 2. képen).

A JACOBSON-féle szerv apicalis *nyílása* házinyúlön az orrsövény elülső részén az alsó orrjáratban éles határ nélkül folytatódik az orr nyálkahártyájába, tehát nem létesít összeköttetést a száj üreggel (itt említtem meg, hogy az Ungulatak közül az *Equida-*



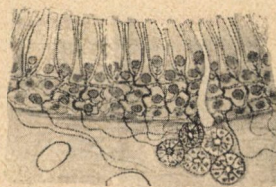
2. kép. Házinyúl koponyájának keresztmetszete, a foghíjas szél utolsó harmadában. Az orrsövényporc tövében a két JACOBSON-féle porc, közös perichondriumba foglaltan, alattuk az állcsontok szájpaplási nyúlványai.



3. kép. Házinyúl fejének keresztmetszet-részlete, félig vázlatosan, a foghíjas szél közepétájáról. A porcos orrsövény tövében kétoldalt a JACOBSON-féle porcba foglalt JACOBSON-féle szerv, mirigyekkel, véreerekkel, csillangós hámmal.

kon sem közlekedik a szájüreggel, mert bár a STENSON-féle menetbe vezet, ez azonban az Equidakon a szájüreg felé zárt²⁵). A JACOBSON-féle szerv ovális bejáratán túl a többrétegű kövezethám fokozatosan hengerhámba megy át, mely a cső lateralis falán a *respiratorius hám*hoz hasonlóan többrétegű csillangós hengerhámba követhető, míg a medialis falon *érzéki, szaglóhám* különböztethető meg (1. a 4. képen). A lateralis fal csillangós hengerhámja 20—25 mm magas; a hengerhámsejtek magja tojásdad alakú, közben kehelysejtek is

fordulnak elő, elszórtan, de helyenként többen egymás mellett is. A medialis falat borító, valamivel magasabb, 30—50 μ -os érzéki hám keskeny sejtjei, a laza kötőszövetből szintén membrana basalis által határoltatnak el (l. a 4. képen). A medialis fal erősebb bedomborodása következtében a cső lumene kissé vesealakúvá lesz (l. a 2. képen); dorsalisán és ventralisan pedig sekély barázda különböztethető meg, mely a medialis és lateralis hámréteget némileg elkülöníti, bár a kettő élesebb határ nélkül megy át egymásba. A hámalatti laza kötőszövetben *serosus mirigyek*, helyenként körben gyűrűszerűen elrendeződve, foglalnak helyet, erek társaságában (l. a 4. képen). A mirigyek kivezetőcsövei legnagyobb részben az előbb jelzett barázdákba nyílnak, egyesek a szerv lateralis falán. A hámréteg és a porc fal közötti többé-kevésbé széles, laza kötőszöveti rétegben látható arteriák és vénák hosszanti lefutásúak. A *venák* vérrel teltek, faluk erősebb, a medialis falon helyenként több rétegben fordulnak elő. A JACOBSON-szerv vak végét körülfogaló vénák erősebbek, egyesek lumene tágabb, mint a vak vége felé szűkülő JACOBSON-szervé, ezek szinte cavernosus szerkezetet mutatnak. Evvel szemben a szintén nagy számban található *arteriák* kisebbek. Injiciált készítményeken kimutatható, hogy a JACOBSON-szerv erei az arteria és a vena palatinából kerülnek. A laza kötőszövetben az arteriák és vénák mellett idegek haránt- vagy ferde metszetei is láthatók. A JACOBSON-féle szerv vak vége felé szűkül a lumen, a hám fokozatosan megszűnik, úgyhogy vak végén csupán alkatnélküli hártya béleli ki.



4. kép. Házinyúl JACOBSON-féle szervének nyálkahártyájából medialis falrészlet, félig vázlatosan. Csillangós érzéki hámsejtek, közöttük támasztó és alapi pótsejtek, idegfonatok, savós mirigyek, tág vénák.

Az újabban *különböző korú anyag*on végzett vizsgálatok főbb adatai röviden a következőkben foglalhatók össze.

Az újszülött *egymápos házinyúl* JACOBSON-szervének nyílásán a többretegű csillangós, respiratorius hengerhám caudolateralisan többretegű laphámba megy át. A JACOBSON-szerv hossza 8-9 mm,

finom, keskeny harántátmérője 45μ , hámrétege átlag 20μ vastag. Hátrább apró serosus mirigyek jelennek meg elszórtan a kötőszövetben, melyek hengeres, vagy pyramisalakú sejtjeinek közepén kerek sejtanyag látható, a sejtek plasmája szemecskés; kivezetőcsövíük köbhámmal bélelt. Hátrább medialisán a regio olfactoriaéhoz hasonló szaglősejtek tűnnek fel, ellenben a laterális falon változatlanul folytatódik tovább a respiratorius hám. A cső vége felé a medialis falon is egyrétegű hengerhám található.

A *kéthetes házinnyúlón* a JACOBSON-szerv hossza $9\cdot2$ mm, harántátmérője 126μ , hámrétegének vastagsága átlag 25μ . A mirigyek közel a nyíláshoz jelennek meg. A medialis falon szaglőhám, a laterálisán lélekző hengerhám található; a mirigyek a JACOBSON-szerv végéig terjednek.

A *néggyhetes házinnyúlón* a JACOBSON-szerv hossza $14\cdot8$ mm, nyílása ovalis, átmérője $120\times 85\mu$. Itt a többrétegű kövezethám 26μ vastag. A hámréteg hátrább egyrétegű hengerhámmá lesz, medialisán szaglőhám különböztethető meg, a mirigyek mindinkább nagyobb számban jelennek meg és gyűrűszerűen rendeződnek el, kivezetőcsöveik tágulnak, átmérőjük a caudalis részen közel oly nagy, mint a JACOBSON-szerv átmérője. A vak végén is vannak még mirigyek.

A *háromhónapos házinnyúlón* $19\cdot6$ mm a JACOBSON-szerv hossza. Nyílásán többrétegű hám néhány mm után laterálisán lélekzőhám, medialisán szaglőhám, meggyát. Kezdetén kevesebb, hátrább több a mirigy, ott, ahol a hám alacsonyabbá és egyrétegűvé lesz.

Az *1 és $1\frac{1}{2}$ éves házinnyúlókon* a JACOBSON-szerv hossza $19-20$ mm, az ovalis nyílását borító többrétegű laphám 31μ magas. Az első mirigyek közel a nyíláshoz a dorsalis falon jelennek meg, ahol a laphám a laterális fal respiratorius hámjába meggyát, medialisán még egy darabon laphám látható, csak ezután alakul át a dorsalis falról kiterjedten szaglőhámmá. A medialis falon a hám legmagasabb átmérője 40μ , a laterális falon 28μ . A mirigyek, amelyek eleinte inkább dorsalisán mutatkoznak, a ventralis falban is elterjednek, a vak végét is mirigyek veszik körül. A vak vég felé a hám egyrétegű hengerhámmá alakul.

Az *idős, 5 évesnek mondott házinnyúló* JACOBSON-szerve $22\cdot4$ mm

hosszú. Tojásdad alakú nyílásának átmérője $284 \times 190 \mu$. A többrétegű laphám 51μ vastag, három mm-nyire a lateralis falon lélekzőhámra folytatódik, valamivel hátrább a medialis falon is hengeressé lesz és szaglóhámmá alakul nagyobb terjedelemben. E helyen mutatkoznak a mirigyek is a kötőszövetben. Már 6 mm-nyire a nyílástól a medialis fal hámja szaglóhám. A medialis falban nyiroksejthalmazok is különböztethetők meg, ilyen a lateralis oldalon kevesebb található. Hátrafelé a hámréteg vastagsága csökken, egyrétegű hengerhámmá alakul át, mirigyek foglalják körül, melyek a dorsalis kötőszövetben nagyobb mennyiségben található, kivezetőcsöveik többnyire dorsalisán és ventralisan, ritkábban az oldalsó falakon különböztethetők meg.

A JACOBSON-féle szerv medialis falában KARPFER⁹ RAMON y CAJAL redukción módszerével orsóalakú *szaglősejteket* különböztetett meg, amelyeknek ovális nagy magja körül protoplasmás szegély látható, szabad végén 6—8 protoplasmacsík, a BRUNN-féle szaglőszőrök vagy pálcikák nyúlnak ki, míg másik végükön idegfonállal függ össze (l. a 4. képen), plexusszá egyesülve a szaglőfonalakba megy át, mint ez a GOLGI-féle chromezüst a RAMON y CAJAL-féle redukción eljárással kimutatható. A szaglősejtek közötti *támasztősejtek* hengeres oszlopszerűek, egyesek keskenyebbek, vájtak; ovális magjuk világos folt alakjában tűnik elő, elmosódott határú. A szaglősejtek a hámréteg mindkét határáig húzódnak, basalisán talpszerűen kiszélesednek. Végül a *basalis pótszejtek* a szaglő- és támasztősejtek hézagait töltik ki, csillagalakúak, nagy ovális, erősen szemecskés maggal (l. a 4. képen). A *nervus olfactorius*on kívül a JACOBSON-szervben található *trigemínus*-rostok vastagabbak, végükön kis csomóval, vagy kiálló csappal, e rostok társulnak az olfactorius rostjaihoz.

A JACOBSON-féle szerv *mirigyei* az orr szaglónyálkahártyájának BOWMAN-féle *glandulae olfactoriae*hoz hasonlíthatók, melyek szintén tisztán serosus mirigyek, falukat egyrétegű hám borítja, plasmájuk finoman szemecskés, magjuk gömbölyű (l. a 4. képen). Vannak, kik a glandula lateralis nasi-val, a STENO- vagy KANGRO-féle miriggyel vetik egybe.

Az imént előadottakból kitűnik, hogy a JACOBSON-féle szerv a vizsgált esetekben a születés után *a haladó korral nem csökkent*.

hanem ellenkezőleg, még kissé növekedett is. A nyílásán levő lap-hám lateralisan lélekzöhámmá, medialisan nagyobb terjedelemben szaglóhámmá alakult, majd a lumen szűkülésével egyrétegű henger-hámmá lett. A szaglóhám területe a szerv terjedelmével együtt nőtt, a mirigyek mennyisége a kor szerint alig változott. A házinýúlon is tehát megállapítható úgy, mint azt kutyán ZIEGLER²⁴ kimutatta, hogy a JACOBSON-féle szerv a haladó korról nem marad vissza a fejlődésében, hanem egyideig tovább nő, eredeti alaki viszonyait megtartja, szaglóhámja jól fejlett. Mindezek következtében tehát nem tekinthető működés nélküli, csökevényes szervnek, mint az emberen, ahol csak embryonalis korban fejlődött ki.

Legyen szabad evvel kapcsolatban a JACOBSON-féle szerv *élet-tani jelentőségére*, szerepére kitérni. A JACOBSON-féle szerv működéséről eddig még semmi bizonyosat nem tudunk. JACOBSON⁷ maga járulékos szaglószervnek tekintette, melynek feladata az orr nyálkahártyájának nedvesen tartása. Már MIHÁLKOVICS¹⁷, LENHOSSÉK¹³, ZUCKERKANDL²⁷, BROMAN²³ és mások általában ezenkívül szagló működést tételeznek fel, mert a szerv falában szaglóhamot és idegvégződéseket mutattak ki. *Phylogéniai fejlődése* is némileg erre látszik utalni. A gerinces állatok ősei vizilakók voltak, természet-szerűen ehhez képest fejük elülső része volt az, amely úszáskor leghamarabb szerezhetett tudomást a környező közeg mivoltáról és az alkalmas zsákmány közelségéről. Ez életfenntartó működés ellátására szolgált a szaglás érzéke, melynek végkészüléke védettebb helyen, bemélyesztve foglalt helyet. A JACOBSON-féle szerv első nyomai farkatlan kétéltűeken mutathatók ki, benne pálcadomú szaglősejtek, finom száralakú nyúlványokkal, valóban a szaglőnyálkahártyához hasonló képet mutatnak. Miután a szaglőnyálkahártya csak nedvesen képes szaglőingert felfogni és a JACOBSON-szervben is nagyszámú mirigy mutatható ki, ez a körülmény is a mellett látszik szólni, hogy a JACOBSON-féle szerv a szaglás mellék-szerve lehet. A legtöbb állatfajon, kígyókon, gyíkokon, emlősökön a JACOBSON-féle szerv elülső vége a STENSON-féle szájpadrési csatornába vezet, mely a szájúreg tetején nyílik; ebből ismét arra következtettek, hogy a JACOBSON-féle szerv feladata a szájúregbe felvett tápszer ellenőrzése szaglás útján. Ennek azonban ellene szól, hogy pl. a rágesáloknak jólfejlett JACOBSON-szerve nem a száj-

padlási csatornába vezet, hanem az orrsővény mellett az alsó orrjáratba nyílik.

BROMAN² kísérletes vizsgálattal igyekezett a JACOBSON-féle szerv működését megállapítani. Az orrüregbe vitt tussoldat behatolt a JACOBSON-féle szervbe, ha az állattal kiirtása előtt erős, illó, szaglóanyagot, aethert lehelletett be, míg ilyen belehelletés nélkül a JACOBSON-féle szerv tussmentes maradt. E jelenség a mellett szól, hogy a tussoldat nem egyszerű diffúzióval jutott a JACOBSON-szervbe, hanem activ beszívással és csak bizonyos szagú anyagok ingerére. A beszívásnál a JACOBSON-szerv erős vénái szerepelhetnek, melyek mediajukban sok sima izomsejtet foglalnak magukban. A szaganyagot állítólag a mirigyek váladéka szállítja az érzéki sejtekhez. BROMAN ezek alapján a JACOBSON-féle szervet a szárazföldi élethez alkalmazkodott, akkomodált vízi szaglószervecnek, *Wassergeruchsorgan*, tekinti, melynek a szimatolásnál van jelentősége.

A szaglás érzékszervére azonban mai ismereteink szerint csupán aromás illóanyagok hatnak, MINETT szerint gáznemű anyagok; a JACOBSON-féle szerv lumenében pedig sohasem található levegő (KERKHOFF¹¹), hanem csak savós folyadék.

Az orrüreg regio olfactoriajának és a JACOBSON-féle szervnek szaglóhámja egyébként nem teljesen egyforma, előbbiben sokkal több a szaglósejt, ezek magvai 6—10 rétegben tűnnek fel egymás fölött, míg a JACOBSON-féle szervben a szaglóhám kevésbé differenciált, sejtjei alig 2—3 rétegben foglalnak helyet. A regio olfactoria támasztósejtjei pigmentet foglalnak magukban, a JACOBSON-féle szerv medialis falában pigment nincs. A regio olfactoria hátnjában a basalis sejtek jobban elkülönülnek és nagyobb számban találhatóak, mint a JACOBSON-féle szervben. Némileg a szaglóműködés mellett szólhatna az, hogy az emberen a szaglás aránylag gyengén fejlett és a JACOBSON-szerv is csökevényes, a ragadozókon ellenben úgy a periferiás, mint a középponti része a szaglás készülékének jóval tökéletesebb, hasonlóképpen a JACOBSON-szerv is jól fejlett. A szaglás szervének fejlődése az életviszonyokhoz való alkalmazkodást mutatja, az emberen az agyvelő főszerepe, hatásmas kifejlődése mellett az egyes érzékszervek tökéletesség dolgában alábbszálltak vagy más működés szolgálatába álltak, az orr-

üreg az ember lélekzésére sokkal fontosabb, mint a szaglás ellátására. Evvel szemben ragadozókon a zsákmány felkeresése, a veszedelem elől való menekülés stb. esetén az érzékszervek, így különösen a szaglószerző nagy jelentőségű. Makrosztatikus állatokon az orrüreg szaglónyálkahártyája terjedelmesebb, mint a lélekzőnyálkahártya terjedelme.

Némelyek szerint a JACOBSON-féle szerv különösen az eleség felkeresésénél játszik szerepet. MIHÁLKOVICS¹⁷ azonban házinyúlón, NAVRATIL²⁰ pedig macskán izzó dróttal elpusztította a JACOBSON-féle szervet, mely beavatkozás után az állatok éppenúgy reagáltak az eleség szagára, mint azelőtt, pedig a boncolással való ellenőrzés megállapította, hogy a JACOBSON-féle szerv valóban elpusztult.

A szaglószerző működés ellen szól az a körülmény is, hogy a JACOBSON-féle szerv szűk nyílásán levegő, vagy gázok nehezen, alig hatolhatnak be, a szaglás tehát nagyon lassan mehetne csak végbe.

Nagyon valószínűnek látszik, hogy a JACOBSON-féle szerv *tájékozódásra*, orientálásra szolgálhat, ezért a földön, vagy a földben élő állatokon, rágcsálókon, rovarevőkön (vakondok, egér), kígyókon fejlett erősebben, míg a levegőben élő madarakon alig fejlett ki; utóbbiakon a látás készüléke, a szem fokozottabb mértékben fejlődött ki és szolgál a tájékozódásra, míg a vakondokon a látóérzők szerve elcsenevészedett. MIHÁLKOVICS találoan jegyzi meg, hogy olyan érzékszervről, mely nekünk nincs meg, működéséről nem lehet helyes képzetünk, valószínűnek látszik, hogy a JACOBSON-féle szerv a szagláshoz hasonló tájékozódásra szolgáló érzékszerv.

Összefoglalás. A JACOBSON-féle szerv úgy házinyúlfetusokon, mint fiatalabb és idősebb házinyúlakon is, az orrsövény tövéen, kétoldalt, a kemény szájpadráson, porcos csőbe foglaltan fellelhető. A születés után megmarad, sőt tovább nő, hossza 8 mm-től 22 mm-ig terjed. Ovális nyílása itt az alsó orrjáratba, nem a STENSON-féle járatba vezet, tehát a szájjüreggel nem áll összeköttetésben. Üre hátrafelé kezdetben tágul, majd szűkül, végül vakon végződik. A hozzátérő szájpadrási erek közül a vénák erősebben fejlettek. A nervus olfactorius külön ágat bocsát a JACOBSON-szerzőhez, mely ág dichotomiásan oszlik. A bejáraton túl a kövezethám

a vastagabb medialis falon érzéki hámba, lateralisán respiratorius hámba megy át; közben kehelysejtek is fordulnak elő. A hámesövet körülvevő laza kötőszövetben serosus mirigyek találhatók. A haladó korról a szerv terjedelmével együtt az érzéki hám területe növekedik. A házinyúl JACOBSON-féle szerve tehát nem csökevényes szerv.

Irodalom.

1. BALOGH C., Das JACOBSON'sche Organ des Schafes. Wien. Akad. Sitzungsbericht 42. Nr. 3. 1860.
2. BROMAN, J., Das Organon vomero-nasale JACOBSONII ein Wassergeruchsorgan. Anatomische Hefte 58. 1920.
3. BRUNN, A., Die Endigung der Olfactoriusfasern im JACOBSON'sche Organ des Schafes. Archiv für mikroskopische Anatomie 39. 1932.
4. COHN, Fr., Zur Entwicklungsgeschichte des Geruchsorgans des Hühnchens. Archiv für mikroskopische Anatomie 49., 1902.
5. DETÁR J., A házimadarak orrüregéről és ennek melléköbleiről. Állatorvosdoktori értekezés. Budapest, 1933.
6. GEGENBAUR, K., Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. I. 1898. II. 1901.
7. JACOBSON, L., Description anatom. d'un organ observé chez les Mammifères. Annal. des mus. d'hist. nat. Vol. 18. Paris, 1811.
8. KALLIUS, E., Geruchsorgan, im Handbuch der Anat. des Menschen. 51. Abt., 2. Teil, 1905.
9. KARPFER K., A házinyúl orrürege és ennek melléköblei. Állatorvosdoktori értekezés. Budapest, 1921.
10. KEIBEL—MALL, Handbuch der Entwicklungsgeschichte des Menschen. 1911.
11. KERKHOFF, H., Beitrag zur Kenntnis des Baues und der Funktion des JACOBSON'schen Organs. Zeitschrift für mikroskopisch-anatomische Forschung, 1. 1924.
12. KRAUSE, W., Die Anatomie des Kaninchens in topographischer und operativer Hinsicht. II. Auflage, 1884.
13. LENIHOSSEK, M., Die Nervenursprünge und Endigungen im JACOBSON'schen Organ des Kaninchens. Anatomischer Anzeiger 7. 1892.
14. LEYDIG, Fr., Zübel und JACOBSON'sches Organ einiger Reptilien. Archiv für mikroskopische Anatomie 50. 1897.
15. MANGAKIS, M., Ein Fall von JACOBSON'schen Organ beim Erwachsenen. Anatomischer Anzeiger 21. 1902.
16. MERKEL, Fr., JACOBSON'sches Organ und Papilla palatina beim Menschen. Anatomische Hefte 1. 1892.
17. MIHÁLKOVICS, V., Nasenhöhle und JACOBSON'sches Organ. Eine morphologische Studie. Anatomische Hefte 11. 1899.

18. MIHÁLKOVICS V., Az orrüreg fejlődése. Magy. Tud. Akad. Értesítő 14. 1896.
19. MIHÁLKOVICS V., A gerincesek szaglószerve. Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz 29. 1897.
20. NAVRATIL, D., Über das JACOBSON'sche Organ der Wirbeltiere. Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte 81. 1926.
21. RAMSER, R., Zur Anatomie des JACOBSON'schen Organs beim Hunde. Berlin 1935.
22. SEYDEL, O., Über die Nasenhöhle und das JACOBSON'sche Organ der Amphibien. Morphologische Jahrbücher 23. 1895.
23. SLUITER, C. TH., Das JACOBSON'sche Organ im Crocodilus porosus. Anatomischer Anzeiger 7. 1892.
24. ZIEGLER, H., Die Entwicklung des JACOBSON'schen Organs beim Schäferhunde nach der Geburt. Berlin, 1936.
25. ZIMMERMANN Á., Háziállatok anatómiája. II. kiadás, 1923.
26. ZIMMERMANN Á., Fejlődéstan. II. kiadás, 1922.
27. ZIMMERMANN Á., A házinnyúl természetrajza. Budapest, 1927.
28. ZUCKERKANDL, O., Das JACOBSON'sche Organ. Ergebnisse der Anatomie und Entwicklungsgeschichte 18. 1908.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. okt. 25-én tartott üléséből.)

ZUR VERGLEICHENDEN ANATOMIE DES JACOBSON-SCHEN ORGANS.

Von A. ZIMMERMANN, o. Mitglied.

Das JACOBSON'sche Organ stellt nach LENHOSSÉK beim Menschen eines der charakteristischsten *Rudimentärorganen* dar. Bei menschliche Feten embryonal angelegt, noch ganz deutlich vorhanden, verschwindet es bei Erwachsenen, mit einigen Ausnahmen. Anders verhält es sich jedoch bei den *makrosomatischen* Tieren.

Seit mehreren Jahren mit der *Anatomie des Kaninchens* beschäftigt, wurden neuerdings wiederholt Untersuchungen am JACOBSON'schen Organ des Kaninchens vorgenommen, mit besonderer Rücksicht auf jene Veränderungen, die während dem postembryonalen Leben *mit dem zunehmenden Alter* auftreten, um nachzuweisen, ob es auch hier zu einem rudimentären, funktionslosen Organ wird.

Frühere eingehende Untersuchungen von MIHÁLKOVICS und LENHOSSÉK an Kaninchenembryonen beziehen sich besonders auf die embryonale Entwicklung und die Innervation (mit der Golgi'schen Methode dargestellt). KARPFFER beschrieb unter meiner Anleitung hauptsächlich die makroskopischen Verhältnisse, teilweise auch die histologische Struktur der Nasenhöhle und ihrer Nebenhöhlen, sowie jene des JACOBSON'schen Organs an 42 Kaninchen, wozu nun an weiteren *acht* Kaninchen, im Alter von einem Tag (neugeboren) bis mehrere (angeblich fünf) Jahre, histologische Untersuchungen mit näheren Massangaben zukommen.

Das JACOBSON'sche Organ liegt auch beim Kaninchen zu beiden

Seiten der Nasenscheidewand dicht ober der Gaumenplatte in der Nähe des Pflugscharbeins (daher sein Name *Organon vomeronasale*). Es stellt einen blind endenden Epithelschlauch dar, der bei den Nagern vorne nicht in den Stenson'schen *Ductus nasopalatinus* (wie bei Huftieren, Raubtieren, u. A.), sondern unmittelbar in die Nasenhöhle im unteren Nasengang mündet.

Bei der meist ovalen Öffnung des JACOBSON'schen Organs findet sich beim Kaninchen mehrschichtiges Plattenepithel vor, welches allmählig in einem *Zylinderepithel* übergeht; nachher differenziert sich das Epithel an den beiden Seitenwänden derart, dass an der breiteren *medialen* Hälfte *Riechepithel*, Sinnesepithel, mit Stützzellen, Brunn'schen Haarzellen und Ergänzungszellen, an der etwas ausgebuchteten *lateralen* Wand (daher der nierenförmige Querschnitt) aber *Respirationsepithel* erscheint; gegen den blinden Ende tritt einschichtiges *Zylinderepithel* auf. Im Epithel finden sich auch noch *Kelchzellen* vor. Der Epithelschlauch wird von lockeren Bindegewebe umgeben, in welchem ein erhebliches Lager von *serösen Drüsen*, Arterien, stärkeren Venen, die stellenweise nahezu als kavernöses Schwellgewebe erscheinen, stellenweise Lymphzellenanhäufungen, *Olfactorius-* und *Trigeminusfasern* sich vorfinden. Darauf folgt der vom Nasenscheidewandknorpel hervorgehende Knorpelüberzug, *Cartilago vomeronasalis* oder *parasaeptalis*.

Die Masse, die Länge des JACOBSON'schen Organs nimmt beim Kaninchen während der postnatalen Entwicklung noch zu, ebenso wächst auch die mit Sinnesepithel ausgekleidete Zone und auch das Drüsengewebe erstreckt sich weiter. Das JACOBSON'sche Organ bleibt also mit den zunehmenden Alter des Kaninchens *funktionsfähig* weiter erhalten, Sinnes- und Respirationsepithel, Drüsen sind im hohen Alter, wie bei ganz jungen Tieren, vorhanden. Diese *Funktion* soll es nach den meisten Autoren als *Geruchsorgan* ausüben, dafür spricht die Innervation, das Riechepithel, dagegen aber der seröse Inhalt, der den Epithelschlauch ausfüllt, denn Geruch wird durch gasartigen Körpern verbreitet, solche können jedoch hier sehr schwer, wenn überhaupt eindringen. Manche behaupten, dass das JACOBSON'sche Organ als *Orientierungswerkzeug* betrachtet werden soll, da es zumeist bei Tieren gut entwickelt erscheint, die am

oder im Boden leben, s. B. beim Maulwurf, bei Mäusen, Schlangen, u. A. (NAVRATIL). Doch MIHÁLKOVICS bemerkt wohl treffend, dass wir über ein Sinnesorgan das wir nicht selbst besitzen, keine richtige Vorstellung haben können. Das eine steht aber fest, dass das JACOBSON'sche Organ beim Kaninchen *kein rudimentäres*, sondern ein funktionstüchtiges Organ darstellt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 25. Okt. 1937.)

A PROTOPLAZMA NÉHÁNY TULAJDONSÁGÁRÓL.

ENTZ GÉZA r. tagtól.

Ezt a kis összefoglaló dolgozatot azzal a cézzal írtam, hogy igazi jóbarátom, NIERSTRASS HUGÓ utrechti egyetemi professzor 30 éves tanári jubileuma alkalmával — több más jóbarát és kártárs dolgozatával együtt — őszinte tiszteletünk, igaz vonzódásunk és meleg barátságunk jeléül neki átnyujtsuk. Ezért arra törekedtem benne, hogy közvetlenül és kendőzetlenül tájékoztassam a jóbarátot arról, ami legközvetlenebbül érdekel és foglalkoztat. Sajnos, az évfordulót ő nem érte meg. Váratlanul elhunyt. Neki tiszteletünknek ezt a szerény jelét sem tudjuk már átnyujtani.

A baráti kör úgy határozott, hogy sorainkat emlékének szenteljük és az összegyűjtött dolgozatokat kiadjuk. Mert ez a dolgozat egy jóbarátnak íródott, abban egyes olyan gondolatok is fel vannak jegyezve, melyek a távolálló, szigorú kritikus előtt naivnak, mások előtt tudákosoknak tűnhetnek fel. Lehetséges, hogy ildomosabb lett volna ezt az egynéhány, inkább intim jellegű megjegyzést a nyomtatásból elhagyni. De nekem úgy tetszik, hogy a kegyelet ellen vétenék, ha a Megboldogultnak szánt sorokon változtatnék. Közlöm változatlanul. Megnyugtat az a tudat, hogy a legbölcsebb is naiv dadogó és csak tudákos a nagy Természet igazságaival szemben.

Protistologiai tanulmányaim közben több ízben tettem olyan megfigyeléseket, melyek az eleven protoplazmán játszódnak le s a protoplazma, sejtmag vagy egyes autoplasmaticus sejtszervek (ostorok, csillangók, fibrillák) viselkedésére vonatkoznak. Oly megfigyeléseim is vannak, melyek a sejtnak, vagy alkatrészeinek növe-

kedésével vagy elhalási jelenségeivel állanak kapcsolatban. Mint-hogy e megfigyelések elszórva jelentek meg különböző protistologiai munkáimban és magára az élő anyagra, a protoplazmára vonatkoznak, nem csupán protistologusokat, de zoologusokat, botanikusokat, biologusokat, cytologusokat egyaránt érdekellhetik, különösen pedig a protoplazma sajátosságainak kutatóit. ERNST KÜSTER, Akadémiánk külső tagja, 1935-ben megjelent összefoglaló munkájában: «Die Pflanzenzelle. Vorlesungen über normale und pathogene Cytomorphologie und Cytogenese» ismételt hivatkozik néhány e tárgykörre vonatkozó tanulmányomra s ezt előszavában külön is kiemeli. KÜSTER, ki — mint írja — munkájában teljességre nem törekedett, csak példákat ad egyes problémák megoldási kísérleteiről, csupán néhány dolgotatomra hivatkozik s mint botanikus, a zoologiai megfigyeléseket éppen csak érinti. A protoplazma sajátosságai közül nem egy, pl. a kontrakció jelenségei, a maguk tisztaságában, eleven szervezeteken, sok esetben zoologiai-protistologiai objectumokon figyelhetők meg legjobban. E tények indítottak arra, hogy közzétégyem eredetileg csak baráti körnek szánt mindama megfigyeléseim összefoglalását, melyek az élő protoplazma sajátosságaira vonatkoznak és annak viselkedésére vetnek némi fényt.

A protoplazma sajátosságaira vonatkozó s az irodalmi felsorolásban felemlített dolgozataimban elszórtan közzétett megfigyeléseimet, melyekhez néhány más szerzőtől való megjegyzést is hozzáfűzök, az alábbi fejezetekben foglalom össze:

1. A protoplazma összehúzódó képességéről;
2. a protoplazma mechanikai működéséről;
3. bizonyos élő plazmaképződmények hasadó-képességéről;
4. egyes sejtképződmények spirális szerkezetéről; általános megjegyzések a protoplazma szerkezetéről;
5. a protoplazmának külső nyomás okozta összehúzódásáról s belső kiterjedéséről;
6. a plazma «lépes» (wabig) és vacuolumos szerkezetének előállításáról;
7. a táplálékvacuolumok keletkezéséről;
8. a protoplazma consistentiájáról és permeabilitásának megváltozásáról;

9. a protoplazma elhalási jelenségeiről.

Mindezeket a megjegyzéseket a jelzett sorrendben pontonként tárgyalom.

*

1. A protoplazma összehúzódó-képessége, annak egyik alapvető tulajdonsága, DUJARDIN klasszikus leírása óta ismert. Általánosan elfogadott, hogy a protoplazma összehúzódása lassabban vagy gyorsabban, de mindig fokozatosan, successive történik, hasonlóan a simaizomrost összehúzódásához; vagyis úgy megy végbe, mint valamely viscosus anyag összehúzódása (JORDAN, 1922—1930). E «viscosus összehúzódástól» eltérő módon lefolyó contractiót egy Heliozoaszerű véglényen, a Vampyrellidium vagans-on volt alkalmam megfigyelni. Ezt a kis Amoeba-szerű szervezetet alkalmmalig Vibriók pusztíthatják. «Azok az egyének, amelyekbe Bacteriumok (Vibriók) nyomultak, elgömbölyödnek, kevés állabat bocsátanak, egy helyben maradnak. A Vibriók a Vampyrellidium protoplasmájában egy elgömbölyödött részben — mintegy vacuolumban — láthatók és itt bukdácsolva mozognak (16. ábra). Ez a mozgás kezdetben lassú, azonban fokozatosan gyorsul s végül valóban szédületes gyorsaságú hemzsegésbe megy át. A fertőzött Vampyrellidium e közben egy-egy állabat bocsátott, majd mintha össze akart volna húzódni, egyet rándult. Ezután a sajátos rándulás után egy pillanatra megszűnt a Vibriók hemzsegése, csakhamar azonban újult erővel tört ki. Most a Vibriókat körülfogó vacuolum plasmaburka megszakadt, a Vibriók bele jutottak a Vampyrellidium «csupas» plasmájába és már mostan az egész Vampyrellidium-sejtben mindenütt láthatók voltak s folytatták örületes táncukat. Ez a mozgás azonban már csak néhány pillanatig tartott, mert a Vampyrellidium, mondhatnám, görcsös összerándulás után valószínűleg felrobbant és a Vibriók a környező vízbe jutottak s ott az elpusztult Vampyrellidium foszlányait rajzolták körül.» (ENTZ, 1912. a. p. 438—439.). E meglepő játékot öt ízben figyelhettem meg. Ez esetben egy amoeboid szervezeten a plazma összehúzódása nem valamely viscosus anyag összehúzódásához hasonlóan folyt le, hanem gyorsan, energikusan, mondhatni görcsösen éspedig fibrillák nélkül.

Hogy a protoplazma gyors, görcsös összehúzódása a plazma életképességéhez kötött sajátosság s fibrillák nélkül is lejátszódhat, azt bizonyos Tintinnidák nyelén tett megfigyeléseim is igazolják (ENTZ, 1909. p. 153—156. és p. 140.). Ugyanekkor azonban nem hallgatom el azt, hogy FAURÉ FREMIET (1908. TEN KATE, 1927 p. 411. után) a Tintinnidium inquilinumnál a nyélben, fibrillák jelenlétét mutatta ki. Ezt magam más fajokról szintén megállapítottam (ENTZ l. c.). Meg kell azonban jegyezni, hogy e Tintinnidák ú. n. kocsányának ezt a görcsös összehúzódását mindig csak akkor figyeltem meg, amikor már a fibrillák eltűntek belőle.

Mikor ENGELMANN azt írja, hogy: «Bei langsamer Kontraktion werden die Fibrillen stark «wellig», was in diesem Falle durch das Zusammenziehen des Corticalplasmas zustandekommen soll» (v. ö. TEN KATE l. c. p. 409), azt jelenti ki tulajdonképpen, hogy a rángatózómozgás (Zuckungsbewegung) aktív fibrilla-tevékenységgel nem kapcsolatos és hallgatólagosan felteszi, hogy az összehúzódás maga, fibrillák tevékenysége nélkül játszódik le.

H. N. MAIER, felsorolva egyes Ciliatákat, melyeken nem talált fibrillákat, megjegyzi, hogy: «Hier scheint also die Beweglichkeit nicht auf spezifische Kontraktionsgebilde zurückgeführt werden zu können». (v. ö. TEN KATE l. c. p. 410.).

Ma határozottan még nem tudjuk, hogy a plazma, valamint a plazmatermékek összehúzódása miben áll. HIRSCH felfogása szerint az összehúzódás jelensége a nyugalomban lévő plazmarészecskék (micellák) tömege eltolódásán alapszik (1929. p. 160.). Vajjon részecskéknek ilyen eltolódása nem történhet-e meg fibrillákra való differenciálás nélkül is?

Általánosan elfogadott tényként szerepel az, hogy a contractilis vacuolum kiürülését a vacuolum falának összehúzódása idézi elő. Ez a megállapítás magában foglalja azt a feltevést, hogy a vacuolum fala maga, tehát a protoplazma, összehúzóköny. Ha azonban a vacuolum falában fibrillák vannak, mint azt S. AWERNIZEW és R. MUTAFOWA (1914. p. 117. Taf. 10. Fig. 8., 10.) a Metadinium mediumon kimutatta, a contractilis vacuolum összehúzódása — a szerzők véleménye szerint — a fibrillák jelenlétével és működésével függ össze.

Contractilis vacuolumok összehúzódásával kapcsolatosan érde-

kes megfigyeléseim vannak a *Hydramoeba hydroxénán* (ENTZ 1911. p. 842.). E szervezeten a contractilis vacuolum összehúzódásával egyidejűleg az amoeba testének felületén dudorodásszerű pseudopodiumok jelentek meg. E jelenségnek magyarázata az lehet, hogy az ectoplazmáról, illetőleg a pelliculáról a vacuolumtól okozott nyomás az entoplazmára tétetik át, aminek következtében nem csupán folyadékiürítés megy végbe, hanem anyageltolás is. E jelenség arra is reámutat, hogy ez *Amoebán* a contractilis vacuolum kiürülés alkalmával annak nem csupán fala húzódik össze, hanem az *Amoeba* egész plazmája.

2. Ha valamely véglény testén a pellicula külső nyomásával szemben igen erős belső feszültség is működik, ami létrejöhet pl. felmelegítés, vagy heves kémiai folyamatok következtében, a belső nyomás fölülkerekedhetik s valóságos «explosio» következhet be, mint ezt bakteriumoktól megtámadott *Vampyrellidiumon* megfigyeltem (lásd fent). Hogy a protoplasmának ezt az explosiót kiváltó görcsös összehúzódása nem az élő sejtanyag működéséhez kötött jelenség, mutatja az a megfigyelésem, hogy hasonló explosio sejtmagvától megfosztott *Amoeba hydroxénán* is lejátszódhat (ENTZ, 1912. p. 844.).

Az ismertetett jelenségek azt igazolják, hogy legalább bizonyos esetekben a fibrilla nélküli, nem differenciált protoplazma nem úgy viselkedik, mint valamely viscosus folyadék, hanem mint energikus összehúzódásra alkalmas és képes anyag.

A plazma összehúzókonyságával hozható kapcsolatba az a sajátos ténykedés is, melyet az *Amoeba vespertilióról* (A. entzii IVANIÓ) írtam le (ENTZ 1925.a.), amely jelenség a felvett táplálék mechanikai feldarabolását eredményezi. Ez a jelenség, HIRSCH (1929. p. 480.) «plasmaperistaltika» névvel jelölte meg, a protoplasmának egészen sajátos összehúzódásával, részecskéinek sajátos eltolódásával lehet kapcsolatos, mechanizmusa azonban előttem ismeretlen. Az *Amoeba* testében — amint néhány esetben megfigyeltem — ha az említett *Amoeba Cyclidiumot* kebelezett be, nem keletkezett a felvett táplálék körül folyadék-összefolyás következtében táplálékvacuolum, hanem a plazma a táplálékot közvetlenül és szorosan körülfogta. Ezután kezdetét vette a plazmában az a sajátos jelenség, HIRSCHTÓL «peristaltikus»-nak nevezett

mozgás, melynek következménye, hogy a látszólag kevésbé szívós táplálék közepén befűződött majd két részre szakadt. E jelenség mindaddig ismétlődött, míg a táplálék parányi (1—2 μ átmérőjű) részecskékre aprózódott fel.

3. A protoplazma felépítésével, szerkezetével lehet kapcsolatban az a megfigyelésem, melyet a *Gymnodinium coronatum* ostorán tettem (ENTZ, 1934. a.). E *Gymnodinium*nak, mint a legtöbb *Gymnodinium*nak rendesen egy hossz- és egy spirális ostora van. Ha azonban a szerkezetet odaszárítjuk (mely eljárás ostorok konzerválására egyes festési módszereknél szokásos), akkor nagy százalékszámban találunk olyan egyéneket is, melyeknek a spirális ostorukon kívül nem egy, de két hosszostoruk van. Az a megfigyelés, hogy valamely Dinoflagellatának két hosszostora lehet, nem újság. Hasonló feljegyzések édesvizi *Ceratium*okról is ismeretesek, (HUBER und NIPKOW, vide ENTZ 1934. a.), sőt OHNO egy oly *Gymnodinium* fajt írt le (*Gymnodinium biciliatum*, vide ENTZ 1934. a.), melynek állandóan két hosszostora van. Ami ez esetben figyelemre méltó, az az, hogy a *Gymnodinium coronatum*-on a két hosszostor keletkezése lépésről lépésre követhető. Megállapíthattam, hogy e faj rendszerint körhengeres hosszostorának keresztmetszete odaszárítás közben megváltozik, a keresztmetszet ellapul, elliptikussá válik s ez az ellapult, szalagalakú ostor hosszában kettéhasad. Ez a hasadási folyamat valami olyanféle jelenség, mint a chromosomák hosszirányú hasadása a karyokinesis alkalmával, amely jelenség lefolyása mint a chromosomák hosszirányú hasadása, általánosan ismert. A *Gymnodinium coronatum* hosszostora kettéhasadásának érdekessége felfogásom szerint abban áll, hogy ez esetben tulajdonképpen egy cytoplazmaképződmény — ha az ostor annak tekinthető (v. ö. HARTMANN (1917): «Die Geisseln sind kernendogenen Ursprunges») — hosszirányú hasadása figyelhető meg.

4. Újabb időben vált ismeretessé, hogy legalább egyes szervezetek chromosomái bonyolult spirális szerkezetet tüntetnek fel, (KÜSTER, 1935. p. 165., PÁTAU, 1937. p. 98.). Sokat vitatott kérdés az, hogy a nem differenciált protoplazma, bizonyos sejtszervecskék, illetőleg plazmatermékek spirális szerkezetűek lehetnek-e. Újabb vizsgálatok megállapították, hogy tiszta fehérjék és más anyagok

is tüntethetnek fel megfelelő körülmények között spirális szerkezetet; ezek a körülmények: egyfelől egy belső feszítő erő, másfelől egy külső szorító erő egybejátszása. A mechanikusok kimutatták, hogy nemcsak fehérjék, de homogén anyagok mindannyiszor, valahányszor mechanikailag az említett módon vétetnek igénybe, részeikben ilyen elrendeződésűek. A legtöbb protoplazmakutató véleménye szerint az eleven protoplazmában alkatrészeinek valamely szabályos elrendeződése nem ismerhető fel, noha FAYOD francia bűvár már 1891-ben közétette a protoplazma finom spirális szerkezetére vonatkozó megfigyeléseit, 1907-ben pedig id. ENTZ GÉZA publikálta mintegy négy évtizedre terjedő s nagymennyiségű szervezeten végzett hasonló vizsgálatainak töredékét. E munkák megjelenése idején, ma már mintegy 40 éve, az a felfogás volt általános, hogy a működő protoplazma mindig folyadék, már pedig folyadéknak valamelyes állandó szerkezete úgyszólván elképzelhetetlen. Ma azonban, mikor tudjuk, hogy a működő protoplazma nemcsak hígfolyós, de sajtyszerű (CALKINS, 1926.) állományú is lehet, nem látszik lehetetlennek, hogy a működő protoplazma, legalább bizonyos körülmények között, határozott szerkezetet tüntessen fel. Hogy a protoplazmának — legalább is bizonyos körülmények között — van, ill. lehet valamely szerkezete, arra nézve a kutatók ma már meglehetősen egyetértenek, de hogy e szerkezet milyen és hogyan jó létre, az még nincsen eldöntve. Az is kérdéses, hogy vajjon valamennyi élőlényben ugyanazon protoplazmaszerkezet található-e, vagy pedig különböző. Növényi szervezeten, nevezetesen Bacillariaceákon, Desmidiáceákon, de állati véglények között Ciliátákon is az ú. n. sculptura, illetőleg pellicula szerkezetének nagy változatossága talán arra utal, hogy felületi plazmarétegük szerkezete is igen változatos lehet.

5. A protoplazmának az idegen részek hozzákeveredés nélküli tiszta protoplazma része azért tűnik fel hyalinnak és homogénnek, mert alkatrészei oly aprók, hogy azokat nagyítóinkkal elkülöníteni nem tudjuk. Ilyen hyalin állományú a véglények legkülső protoplazmarétege, az ectoplazma, melyről azonban tudjuk, hogy a legnagyobb könnyűséggel alakulhat át szemecskés entoplazmává. A protoplazmának az a része, mely a véglényeket kívülről borítja, nemcsak homogén, de egyszersmind a legjobban ki van téve a

belsőnyomás és a kívülről ható felületi nyomás (összehúzóadás) hatásának. Ennek következtében ez a protoplazmarész tüntetheti fel legtisztábban a homogén anyagoknak ilyen körülmények között jelentkező szabályos elrendeződésű mikrostrukturáját. Ez a mechanikai feltételeiktől függő szerkezet kísérletileg anorganikus, illetőleg élettelen anyagokon elő is idézhető törvényei pedig matematikailag kifejezhetők (REJTŐ, 1898.).

6. Hogy a protoplazma a külső hatásokra és azok változásaira milyen nagy mértékben reagál, arra jó példát szolgáltatnak egyes véglények, ha azokat a tárgylemezre szárítjuk, mint azt magam a *Gymnodinium Zachariasi*-n tapasztaltam (ENTZ, 1930. s. p. 207—208.). Odaszárítás alkalmával, legalábbis e szervezeten, a protoplazma «lépes» szerkezetűvé válik azáltal, hogy benne vacuolumok keletkeznek. E vacuolumok a protoplazma tömegét annyira megnagyobbítják, hogy az odaszáradt példányok kerülete (körvonala) 2—3-szor akkora nő, mint a szabadon rajzó szervezeteké. Ez nyilván megduzzadáson alapszik, mely nemcsak a protoplazmán, hanem a magállományon is megállapítható, jóllehet a mag, illetőleg a chromosomák megduzzadása lassabban megy végbe, mint a plazmáé és nem is olyan nagyméretű, mint a protoplazmáé. Bizonyos idő elteltével mégis megállapítható, hogy a chromosomák megnyúltak s főként szélességükben növekedtek meg, de egyúttal tömörségükből veszíthettek, amire abból lehet következtetni, hogy kevésbé élénken festődnek. Duzzadás alkalmával a chromosomák is lépes szerkezetűekké váltak és végül hosszirányban ketté hasadnak. Említettem, hogy a *Gymnodinium coronatum* ostorának kettéhasadása hasonló módon történhetik, de e jelenségekből nem lehet az ostorok viselkedésére vonatkozó általános következtetéseket vonni. Ugyanis a *Peridinium Borgei*-n éppen úgy, mint a *Ceratium hirundinellá*-n az ostor legalább elpusztulása alkalmával nem a leírt módon megy tönkre s duzzad meg, hanem úgy, hogy benne egymástól távolabb egyes megnagyobbodó vacuolumok jelennek meg, melyek utóbb külön-külön explodálnak (ENTZ, 1930. a. p. 221—222.). Az «ostorvacuolumok» megpukkadása azáltal keletkezik, hogy a folyadékfelvétel következtében az ostort kívülről bevonó felduzzasztott protoplazma összehúzódni törekszik, ami végeredményben e vacuolumok explodálását eredményezi.

7. A véglények plazmájában az elnyelt táplálék körül a legismertebb esetekben folyadék gyülemlik meg, körülötte ú. n. emésztóvacuolum keletkezik. Különösen apró táplálékkal élő, leginkább baktériumfaló véglényeken lehet ezt az emésztóvacuolum kialakulást megállapítani. De képződhetik emésztóvacuolum nagyobb táplálékrészek körül is. Sok esetben azonban nagyobb táplálék körül nem alakul ki emésztóvacuolum, hanem a protoplazma közvetlenül fogja körül a táplálékot. Az *Amoeba vespertilio*-val kapcsolatban már utaltam e megfigyelésekre, melyet IVANIČ megerősített (l. c.). Hasonló, bár más tekintetben eltérő az a táplálkozási mód, melyet az *Oovorus copepodorum*-on figyeltem meg (ENTZ, 1930.). E szervezet táplálékát, Copepoda peték plazmáját, úgyszólván saját protoplazmájába szippantja be. Olyanféle táplálékfelvétel ez, amilyent egyes Acinetákról COLLIN (1912. p. 260, Fig. LXXI.) jegyzett fel. Az Acineták t. i. zsákmányukhoz azáltal jutnak hozzá, hogy a kürtömódra kitágult szívókán át az emésztő nedvek hatására folyékonyvá vált táplálék mintegy szívásra a protoplazmába vonul s abban helyet foglal anélkül, hogy emésztő vacuolum venné körül. МИХАÉЛOFF (1936. p. 47—51.) szerint a *Vampyrellidium spirogyrae* is ugyancsak szívással veszi fel és kebelezi be táplálékát.

8. A táplálkozással kapcsolatos megfigyelések némi fényt vetnek a protoplazma konsistenciájának kérdésére is. Ha az elnyelő és elnyelt szervezet protoplazmája állományának folyóssági állapota között jóformán nincsen különbség, mindkettő körülbelül egyformán szívós vagy folyós állományú, úgy az elnyelő protoplazmájában elkeveredik az elnyelt protoplazma ugyannyira, hogy a kétféle plazmát elkülöníteni nem lehet, hasonlóan ahhoz, ahogy két isogaméta protoplazmája copulatio alkalmával egységes plazmatestté egyesül. E jelenség lefolyásának benyomása az, hogy a kétféle protoplazma keveredése olyan módon megy végbe, mintha két, egymással keveredő folyadékot öntöttünk volna össze. Ezt a jelenséget az *Oovorus* és a tőle megtámadott Copepoda-pete plazmájának átáramlása közben való viselkedésén tapasztaltam (ENTZ, 1930.). A megtámadott Copepoda-pete plazmája oly rohamosan áramlott át a megtámadó «gomba» plazmájába, hogy a kétféle protoplazma között már az átáramlás közben se lehetett különb-

séget megállapítani. Ha az elnyelő szervezet protoplazmája szívósabb, mint a zsákmányé, az elnyelő plazmájának peristaltikus mozgása azt valósággal darabokra szaggatja, mint azt a *Cyclidiumot* elnyelt *Amoeba vespertilio*-n megfigyelhettem (l. fentebb). Ha azonban a zsákmány protoplazmája szívósabb az elnyelőnél, a kettő között olyan, nyilván emésztőnedvekből keletkező emésztővacuolum jó létre, mint az a baktériumokat faló véglényekről (*Ciliaták*, *Vampyrellidium*) ismeretes.

Igen érdekes a bekebelezésnek az az esete, amikor valamely véglény fajtársát nyeli el. E kannibalizmus egyes *Amoebákról* (IVANIC, 1927.) és *Ciliatákról* (STENTOR) ismeretes (GELEI, 1925.). Ilyenkor a táplálék körül emésztővacuolum képződik. Az elnyelt fajrokon protoplazma, melynek konszistenciája pedig ugyanolyan mint a táplálkozó egyéné, még sem keveredik a felvevőével, mint ahogyan történt az *Oovorus* táplálékbekebelezése alkalmával, hanem az emésztő vacuolumban lefolyó normális emésztés folyamán alkatrészeire építetik le és csak ezután szívódik fel. E sajátosságos tüneteknek, annak t. i. hogy a fajilag azonos plazma nem keveredik egymással, oka az lehet, hogy a bekebelezett protoplazmatömeg valamilyen módon védekezik a megemésztés ellen, talán ellenálló anyaggal, védőburokkal veszi magát körül, de lehet az is, hogy valamely védő-emésztéselleni anyagot (ellentestet, Antikörper) termel. Sok esetben kétségen kívül a bekebelezettől kiválasztott nyálkaburok szerepel védelmi berendezés gyanánt. E nyálkaburok vegyi természetéről esetre eltérő lehet, hiszen nyálkák képződhetnek pectin és egyéb anyagokból is. Pectose-nyálkaburkot termelnek például egyes különben cellulózeburkot készítő véglények, ha az őket körülvevő folyadékban koncentrációváltozás áll be. Megfigyelhettem ezt a *Peridinium Willei*-n. P. Borgei-n, *Gymnodinium Zachariasii*-n, (ENTZ, 1930. a. p. 230.), de már régen ismert e nyálkaburoktermelés jelensége *Dinoflagellatákról*, *Desmidiáceákról* s más növényi szervezetekről is.

Úgy látszik, hogy bizonyos feltételek mellett pl. elhalás alkalmával, narkotikumok behatása alkalmával a protoplazma legkülső rétegének átbocsátóképessége, permeabilitása megváltozik úgyannyira, hogy az folyadékot enged át a plazmába, aminek következtében a protoplazma durva szerkezete megváltozik, üregescskés.

sőt lépes lesz, felduzzad, «felfuvódik», amint ezt a *Gymnodinium tenuissimum*-on és *G. Zachariasi*-n megállapíthattam (ENTZ, 1930 a. p. 232.). Ez a folyamat, t. i. a folyadékkal való felduzzadás egy bizonyos állapot eléréséig megfordítható, reversibilis lehet, mert pl. az így felduzzasztott *Paramaecium* egy bizonyos idő múlva, friss víz hozzáadásával még normális állapotúra változtatható vissza és így megmenthető, éppenúgy, mint a *Ceratium hirundinella*-nak oly egyénei is, melyeknek hosszbarázdája mentén a kinyomuló plazmaduzzanattól ú. n. sérve «Bruchsack» képződött, (ENTZ, 1930. a. p. 220.). Meg kell még jegyezni, hogy mindkét említett szervezet protoplazmája e tapasztalatok szerint bizonyos fokú rugalmasságával is kitűnik (v. ö. ENTZ, 1930. a., vonal alatti megjegyzés).

A plazma felülete egyes véglényeken tapadós lehet (v. ö. ENTZ, 1930. a. p. 225.). E tulajdonságnak tudható be az, hogy a *Ceratium hirundinella* hosszbarázdája mentén kilépő sérvszerű plazmatömlő- (Plasmabruchsack)-höz idegen testek, sőt egy másik, hasonló állapotban lévő *Ceratium* is hozzátapadhat.

9. Végezetül a plazma elhalásával kapcsolatos megfigyeléseimet említem fel. E jelenség lejátszódás közben úgy látszik, a plazma folyadéktartalma fontos szerepű. A tőlem megfigyelt véglények protoplazmájának elhalása különbözőképpen történhetett:

a) Plasmolysissel, mely állapot hypertoniás oldatban jó létre. Ez esetben a protoplazma összezsugorodik, hasonlóan ahhoz, ahogy ez meg nem felelő töménységű oldatokkal való rögzítések alkalmával történni szokott.

b) Egyszerű megalvadással (coagulatio), ami leggyakrabban a protoplazma túlhevítésére stb. következik be. Ez esetben a protoplazma sol állapotából irreversibilisen megy át gel állapotba. A protoplazma elkocsonyásodása (gelificatioja) nem mindig vezet szükségképpen annak pusztulásához, mint azt egyes kísérletek mutatják. M. A. van HERWERDEN ugyanis békaporonytok hámsajtjeinek, valamint Amoebák magvát is reversibilisen kocsonyásította el. Úgy látszik, hogy a nyugalmi állapotok pl. betokzódás alkalmával a vízelvonás (a contractilis vacuolumok útján való vízkiürítés) szintén reversibilis gelificatióra vezethet.

c) Ha a plazmába folyadék jut, ami KÜSTER (1935, p. 17.)

szerint hypotoniás oldatban történik és vezetéki vízzel való kezelés alkalmával is végbemegy, akkor kétféle változás mehet végbe:

I. Folyadékbehatolás alkalmával a protoplazma homogén strukturája lépassé változik. Ilyen jelenséget magam a *Gymnodinium Zachariasii*-ről és *G. tenuissimum*-ról jegyeztem fel (lásd fent). Ebben az esetben a plazmába egy ideig több, néha éppen sok ponton át nyomul be folyadék, később azonban a behatolása megszűnik. Ilyen módon a protoplazmában sok, de apró vacuolum keletkezik, melyek megjelenése és sűrűen egymás mellé való helyezkedése utóbb a plazmának «lépes» szerkezetét okozza. Úgy látszik, hogy a *Peridinium Borgei* ostorának a Duna víz hozzáadására történő elhalása alkalmával szintén több ponton jut folyadék a plazmába, ami azonban az ostort csak helyenként duzzasztja fel. (ENTZ, 1928.).

II. Történhetik vízbehatolás úgy is, hogy a sejt mintegy tömlővé duzzad meg s még több folyadékfelvétellel a plazma híg folyóssá válik, utóbb a szó legszorosabb értelmében szétfolyik. Ilyen esetet a *Peridinium* (= *Glenodinium*) *aciculiferum*-on figyelhettem meg (ENTZ, 1930. a. p. 212.). Ha azonban a plazma állományának konszistenciája tömörebb, hogysem ez megtörténhetnék, akkor ú. n. sérvtömlő (*Bruchsack*) keletkezik rajta, mely megnagyobodhatik s végül, mint egy felfújt hólyag, szintén megpukkad. (ENTZ 1930.).

Mindezekből arra lehet tehát következtetni, hogy a folyadékbehatolás vagy egyetlen helyen s akkor nagy mennyiségben vagy több ponton s akkor igen kis mennyiségben történik.

Sajátságos ellentmondás látszik abban a jelenségben, hogy folyadék hatol a protoplazmába beszáradás alkalmával is, noha a környező folyadék tömörségének emelkedése azt vonhatná maga után, hogy a plazmából folyadék vonatnék el. Ez a vízfelvonás azonban, úgy látszik, nem történik meg, hanem ellenkezőképpen a plazma ez esetben is folyadékot vesz fel. Valószínűleg a sejthártyán kellett valamely változásnak végbemennie, aminek következtében az több folyadékot enged át, mint normális körülmények között; a sejthártya permeabilitása változhat tehát meg, éppen úgy, mint narkotikumok hatásának alkalmával is. E változás mibenléte

talán abban áll, hogy a hárttyában egyes olyan anyagok oldódnak fel, illetőleg oldódnak belőle ki, amelyek a víz behatolásának eddig útját állták, ennek megtörténte után a vízbehatolás fokozottabbá válhat. Folyadék behatolás alkalmával bizonyos autoplasmatiskus plazmaképződmények is szétfolyhatnak, mely jelenséget a Collo-dictyon triciliatum ostorán figyeltem meg, amely Flagellata ostorának külső burka ez alkalommal úgy viselkedik, mint valamely felolvadó szilárd anyag (Entz, 1934. Taf. I. Fig. 18.).

Beszáradás okának keresése közben nem szabad elfelednünk, hogy ez alkalommal a vízben elnyelt oxgyén és a különböző sók nyilván elegendő mennyiségben állanak a szervezet rendelkezésére, de sóoldó vízben van hiány s a plazma sói koncentrációjának emelkedése következtében pusztul el. Ugyanis a plazma sókoncentrációjának emelkedése vízfelvételt von maga után, ami mindaddig folytatódik, míg a behatoló folyadék a plazmát, a «lépek» plazmafalát szét nem repesztí.

Összefoglalás.

A tanulmány a protoplazmának néhány olyan sajátására vonatkozik, melyek az élő állományon és pedig a legtöbb esetben az elevenen állapították meg. Ilyenek: állományának minősége (consistentia), alaktani és biológiai viselkedése a felvett táplálék és néhány más külvilági biológiai hatással szemben.

1. Az eleven, fibrillákra el nem különült protoplazma nemcsak a viscosus anyagok összehúzódásával megegyező lassú, de fibrillaris szerkezetű plazmamódosulattal megegyező, erélyes összehúzódásra is képes, fibrillákra való elkülönülés nélkül is.

2. Az eleven protoplazma állományának állapota (consistentiája) tevékeny állapotban is igen különböző lehet, hígfolyóstól (Oovorus) majdnem sajtyszerű szilárdságúig (Opalina). Az állomány minősége, állapota szabja meg a táplálék feldolgozásának módját: merevebb összeállású, consistensebb plazma a nála lágyabb képlékenyebb plazmát mechanikailag aprózhatja fel (az Amoeba Entziutól elnyelt Cyclidium); a híg állományú plazma valósággal egybeolvadhat a vele azonos hígságú táplálékkal (Oovorus és Copepoda pete); ha az elnyelt plazmája tömörebb az elnyelőénél vagy azonos tömörségű az elnyelő szervezet plazmájával, akkor kémiai

úton, emésztő vacuolumban történik az emésztés (*Bacterium* faló Ciliaták, *Stentor* kannibalizmusa).

3. Egyes véglények (*Dinoflagellaták*) eleven protoplazmatikus szervei (autoplazmatikus szervek), mint az ostorok, melyek hyalin és homogén-szerkezetűnek tűnnek fel (*Gymnodinium coronatum*), hosszirányban hasadhatnak, olyanféleképpen, mint a mag chromosomái az osztódás metafázisában.

4—5. Homogén- és hyalin-plazma és az autoplazmatikus képződmények több szerzőtől (FAYOD, id. ENTZ G.) leírt spirális szerkezetű felépítése nyilván összehasonlítható a chromosomáknak újabb időben megállapított spirális felépítésével és létrejöttük valószínűleg hasonló, nyilván mechanikai okokra is vezethető vissza.

6. A protoplazma lépes (wabig) és vacuolumos, valamint a *Dinoflagellaták* chromosomáinak hasonló szerkezete mesterségesen előidézhető.

7. A táplálék-vacuolumok keletkezése vagy elmaradása az elnyelő és elnyelt plazma, az elnyelő és elnyelt szervezet consistenciájától függ. Híg folyós vagy híg folyóssá változtatott táplálékot sok esetben beszívással kebelez be a táplálkozó véglény.

8. A protoplazma consistentiája egy és ugyanazon véglény életében (tevékeny és szabadon mozgó állapotú, cysta) eltérő lehet éppen úgy, mint a külső plazmaburok permeabilitásának foka is.

9. A plazma és plazmaképződmények elhalási jelenségei igen különbözőek lehetnek. Még az egyszerű odaszárítás vagy a környező közeg concentratio-változása is más módon nyilvánul s módja nemcsak attól függ, hogy milyen viszonyok között milyen szerv pusztul el, mert két eltérő faj ostora e tekintetből másként viselkedhetik. Ez arra utal, hogy morphologiailag azonos szervek hyalin és homogénnek látszó plazmája biológiai tekintetből eltérő lehet. Mintha minden egyes fajnak plazmaconstructioja is más volna úgy, mint rokonfajok chromosomáinak is lehetnek eltérő génjei. Eltérő sajátságok a plazma felépítésében (microstructurájában) is jelentkezhetnek.

Irodalom.

AWERINZEW, S., and R. MUTAFOWA 1914. Material zur Kenntniss der Infusorien aus dem Magen der Wiederkauer. I. Arch. Prot. kunde 33. p. 109—204. Taf. 9—10.

CALKINS, G. N. 1926.: The biology of the Protozoa. London.

COLLIN, B. 1912.: Étude morphologique sur les Acinétiens, II. Morphologie, Physiologie, Systematique. Arch. Zool. expérim. et gen. 51. p. 1—457. pl. I—VI.

ENTZ GÉZA sen. 1907.: Über einige patagonische Protozoen. Math. Naturwiss. Berichte aus Ungarn 21. p. 84—112, 2 Taf. 7. Textfig.

ENTZ GÉZA, 1908. A Tintinnidák szervezete. Math. és Term.-tud. Közl. 29. p. 1—138. 1—13. tábla.

ENTZ GÉZA, 1909. Studien über Organisation und Biologie der Tintinniden. Arch. Prot. kunde 15. p. 93—226. Mit. 14 Taf. u. 2 Textfig.

ENTZ GÉZA, 1910. Egy édesvizi Gymnodiniumról. Állattani Közl. 9. p. 157—163. III. tábla, 1 szövegrajz.

ENTZ GÉZA, 1911. Hydrát pusztító Amoeba. Math. Term.-tud. Ért. 29, p. 836—868. Két tábla, két szövegműközi ábra.

ENTZ GÉZA, 1912. Über eine neue Amoeba auf Süßwasser-Polypen (Hydra oligactis Pall.). Arch. Prot. kunde 27. p. 19—47. Mit 2 Taf. und 2 Textfig.

ENTZ GÉZA, 1912a. Vampyrellidium vagans szervezetéről és életmódjáról. Math. és Term.-tud. Ért. 30. p. 430—440. Egy tábla.

ENTZ GÉZA, 1913.: Über Bau- und Lebensweise von Vampyrellidium vagans. Arch. Prot. kunde 29. p. 387—398. Mit einer Tafel.

ENTZ GÉZA, 1913a.: Über ein Süßwasser-Gymnodinium. Arch. Prot. kunde 29. p. 399—406. Mit einer Tafel und einer Textfig.

ENTZ GÉZA, 1925.: Über Cysten und Encystierung der Süßwasser Ceratien. Arch. Prot. kunde 51. p. 133—183. Mit 50 Textfig.

ENTZ GÉZA, 1925a.: Über Nahrungszerkleinerung im Plasma einer Amoeba (Amoeba vespertilio Pen.) Zool. Anz. 63. p. 332—336. Fig. 2.

ENTZ GÉZA, 1927.: Über Struktur und Funktion der Membranulae der Tintinniden, speziell von Petalotricha ampulla. X-e Congr. Internat. Zool. Budapest, 1927. p. 887—895. Fig. 1—11.

ENTZ GÉZA, 1928.: Über den Bau und über die Tätigkeit der Geißeln der Peridineen. Annal. Protist. 1. p. 1—21. Fig. 1—29.

ENTZ GÉZA, 1930.: Über schnelles Wachstum und rasche Entwicklung eines Phycomycetenprotisten Oovorus copepodorum (n. gen., n. sp.). Arch. Prot. kunde 69. p. 175—194. Mit einer Tafel.

ENTZ GÉZA, 1930a.: Über gehemmte Lebens- und Absterbeerscheinungen einiger Dinoflagellaten. A Dinoflagelláták korlátozó létfeltételek közötti élettevékenységéről és elhalási jelenségeiről. Magyar Biológiai Kutatóintézet Munkái 3. I. p. 206—243. 67 ábrával.

ENTZ GÉZA, 1931.: Miért pusztulnak ki véglénytenyészetek? Szt. István Akad. Mennyiség—Term.-tud. osztályánál felolv. 2. 9. p. 1—15. 8 ábrával.

ENTZ GÉZA, 1931a.: Analyse des Wachstums und der Teilung einer Population sowie eines Individuums des Protisten *Ceratium hirundinella* unter natürlichen Verhältnissen. Arch. Prot. kunde 94, p. 311—359. Mit 12 Kurven und 18 Textfig.

ENTZ GÉZA, 1932. Bemerkungen über Nahrungszerkleinerung im Plasma einiger Protozoen. XI. Congr. Internat. Zool. Padova, 1930. 2. p. 967—977. Mit der Taf. 29.

ENTZ GÉZA, 1933. Über Veränderung von Volum und Oberfläche beim Wachstum, der Teilung und Encystierung eines Protisten (*Ceratium hirundinella*). Arch. Prot. kunde 79. p. 380—390. Hierzu 6 Textfig. und 1 Kurve.

ENTZ GÉZA, 1934. Az ostor és protoplasma növekedéséről. Über das Wachstum der Geißel und des Protoplasmas. Math. és Term.-tud. Közl. vonatk. hazai visz. 37. 3. p. 1—64. 12 táblával.

ENTZ GÉZA és SEBESTYÉN O., 1934.: Über ein *Gymnodinium* mit «drei» Geißeln. Egy «három»-ostoros *Gymnodinium*ról. Magyar Biol. Kutatóint. Munkái 7. 1. p. 19—56. 46 ábra, 16 görbe és 6 táblázattal.

FAYOD, V. 1891.: Structure du Protoplasma vivant. Rev. gén. du Botanique. III. Livre. du 15 mai.

GELEI, J. 1925.: Über den Kannibalismus der Stentoren. Arch. Prot. kunde 52. p. 404—417. Mit 8 Textfig.

HARTMANN, M. 1911.: Die Konstitution der Protistenkerne und ihre Bedeutung für die Zellenlehre. G. FISCHER, Jena.

HARTMANN—SCHILLING 1917.: Die pathogenen Protozoen. J. SPRINGER, Jena.

van HERWERDEN, M. A. 1927.: Umkehrbare Gelatinierung durch Temperaturerhöhung bei einer Süßwasseramoeba. Protoplasma 2. p. 271—277. 2 Textfig.

HIRSCH, G. CH. 1929.: Leerboek der algemeene dierkunde. Utrecht, Oesthoek.

IVANIĆ, M. 1927.: Über den Kannibalismus bei *Amoeba verrucosa* (Ehrbg.), nebst Bemerkungen über den Kannibalismus bei Protozoen im allgemeinem. Zool. Anz. 74. p. 313—321.

IVANIĆ, M. 1936.: Über die mittels cystostomähnlicher Gebilde vorkommende Gefangennahme und Einverleibung der Nahrung und deren Zerkleinerung bei einer Süßwasseramoeba (*Amoeba entzii* sp. nov.). Cellule 44. p. 367—386.

JORDAN, H. J. 1922.: Der Tonus glatter Muskeln bei wirbellosen (hohlorganartigen) Tieren. Arch. Néerlandaises d. Physiol. de l'Homme et des Animaux 7. p. 314.

JORDAN, H. J. 1926.: Die Physiologie des Nerven-Muskelsystems

bei den niederen Wirbellosen. Verhandl. Zool. Gesellsch. 31. Jahresversamml. Kiel. p. 108—124.

JORDAN, H. J. 1930.: De Tonus van gladde spieren als bijzondere functie. Vers. van de gew. vergadering d. Afdeeling Naturkunde 39. No 8.

TEN KATE, C. G. B. 1927.: Über das Fibrillensystem der Ciliaten. Arch. Prot. kunde 57. p. 362—426.

KÜSTER, E. 1935.: Die Pflanzenzelle. Vorlesungen über normale und pathogene Zytomorphologie und Zytogenese. G. FISCHER. Jena

MIHAÉLOFF, S. 1936.: Contribution a l'étude de protozoaires. Bull. inst. Egypt, 18. p. 45—57.

PÁTAU, K. Dr. 1937.: Über die Natur der sog. Anisosporen der Radiolarien. Verh. d. Deutsch. Zool. Ges. p. 93—98.

REJTŐ SÁNDOR, 1898.: A tárgy felszínén levő erővonalak keletkezésének módja és törvénye. Magyar Mérnök- és Építészegylet Közlönye.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DES PROTOPLASMAS.

Von GÉZA ENTZ.

Die Arbeit erscheint in extenso auch in deutscher Sprache, in dem Gedenkbuch für weil. Prof. Dr. H. Fr. NIERSTRASZ. Die zusammenfassenden Resultate wurden aber in der deutschen Auflage — aus technischen Gründen — nicht mitgeteilt, so dass deren Übersetzung und Publikation angezeigt zu sein scheint.

Diese Studie beschäftigt sich mit solchen Eigenschaften des Protoplasmas, von welchen fast alle am lebenden Plasma festgestellt wurden. Als solche sind besprochen die Konsistenz des Plasmas, dessen morphologisches und biologisches Verhalten gegenüber der einverleibten Nahrung und gegen einige andere biologische Eingriffe. Die Resultate sind, wie folgt :

1. Das lebende, nicht in Fibrillen differenzierte Plasma kann sich nicht nur langsam zusammenziehen, so wie ein visköser Stoff, sondern ist auch zu kräftiger, energischer, krampfhafter Kontraktion fähig.

2. Die Konstitution und Konsistenz des sich in Aktivität befindlichen Protoplasmas kann recht verschieden sein : an Oovorus ist das Plasma fast flüssig, an Opalina käseartig. Die Konsistenz des Protoplasmas bestimmt die Methode der Nahrungsverarbeitung : ein zäheres Protoplasma kann ein weicheres und plastischeres Protoplasma mechanisch zerkleinern (so wird *Cyclidium* von *Amoeba Entzii* mechanisch zerkleinert); ein flüssiges Plasma kann sich mit einem mit ihm gleich flüssigen Plasma der verschlungenen Nahrung sozusagen vereinigen (Oovorus und Copepoden-Ei); ist das Plasma der als Nahrung verschlungenen, konsistenter, oder von gleicher Konsistenz, dann wird die Nahrung chemisch in einer Nahrungsvacuole verarbeitet, wie dies an mit Bakterien sich ernährenden Ciliaten und beim Kannibalismus von *Stentor* festgestellt wurde.

3. Einige autoplasmatische Organellen, wie Geisseln, Cilien,

welche aus hyalinem, homogenem Plasma bestehen, konnten sich bei *Gymnodinium coronatum* der Länge nach ähnlich teilen, wie Chromosomen in der Metaphase.

4—5. Als Bau des homogenen und hyalinen Plasmas, sowie ähnlicher, autoplasmatischer Organellen wurde von mehreren Autoren (Fayod, ENTZ G. sen.) eine Spiralstruktur angegeben; dieser Bau lässt sich vielleicht mit der Spiralstruktur des in neuerer Zeit mitgeteilten Baues der Chromosomen identifizieren und kann wahrscheinlich auf ähnliche, vielleicht rein mechanische Gründe zurückgeführt werden.

6. Der wabige und vacuolige Bau des Protoplasmas, sowie auch der ähnliche Bau der Chromosomen einiger Dinoflagellaten kann artifiziell erzeugt werden.

7. Das Entstehen der Nahrungsvacuole, sowie auch das Ausbleiben des Entstehens von Nahrungsvacuolen hängt von dem Verhältnisse der Plasmakonsistenz des Verschlingers und des Verschlungenen ab. Düninflüssige, oder dünnflüssig gemachte Nahrung wird in gewissen Fällen von dem sich ernährenden Protisten im wahren Sinne des Wortes eingesogen.

8. Die Konsistenz des Protoplasmas kann sich im Leben auch an derselben Protisten-Art stark verändern (Cyste, bewegliche Form) und damit auch die Permiabilität des Plasmas.

9. Die Absterbeerscheinungen des Plasmas, sowie die der autoplasmatischen Gebilde können sehr verschieden sein. Einfaches Hintrocknen, Veränderung der Konzentration kann auch an nahe verwandten Arten andere Erscheinungen hervorrufen. Dies hängt nicht nur davon ab, welches Organ und unter welchen Verhältnissen zugrunde geht, sondern auch von Arteigenschaften; Geißeln zweier Dinoflagellaten-Arten können sich unter gleichen Bedingungen ganz anders verhalten. Dies deutet darauf hin, dass das hyaline und homogene Plasma morphologisch gleichwertiger Organellen sich in biologischer Hinsicht ganz anders benehmen kann, wie wenn die micelläre Plasmakonstruktion einer jeden Art verschieden wäre.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. November 1937.)

ADATOK A KEMÉNYAGYVELŐBUROK VÉNÁS ÖBLEINEK ÖSSZEHASONLÍTÓ ANATOMIÁJÁHOZ.

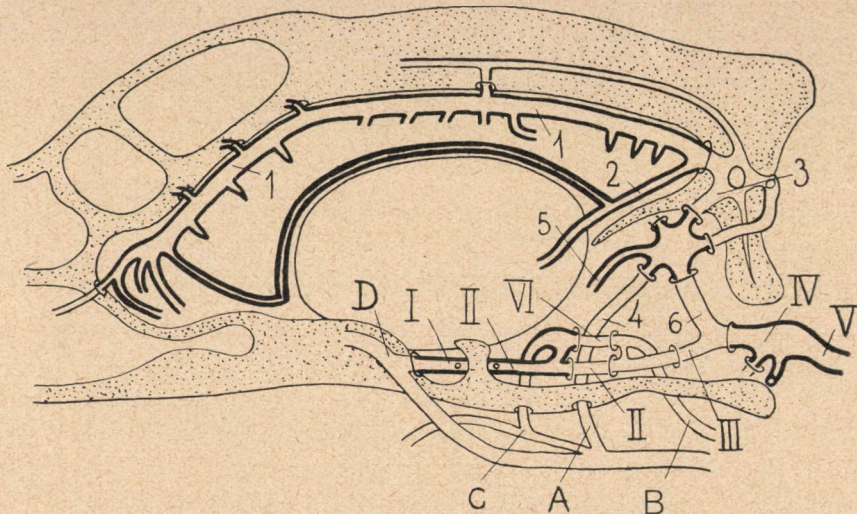
ZIMMERMANN GUSZTÁV-tól.

(3 képpel.)

A kemény agyvelőburok vénás öblei, *sinus venosi durae matris encephali*, a vénarendszerbe beiktatott speciális szerkezetű, működésű és jelentőségű érrészletek. E véröblök egy része *gyűjti* az agyvelő vénáit, másik része az ily módon a sinusrendszerbe juttatott vér *továbbítására* szolgál, harmadik félesége pedig mint *anastomosis* szerepel az egyes sinusok, valamint köztük és a fejténák között. Az egész sinusrendszerből a vért a fej vénái vezetik tovább, melyek számos összeköttetéssel, különösen a koponyaalapon, közlekedésben állnak velük. A vénás véröblöknek ürege állandóan tág, a véráramlás állandósága így biztosított, összenyomatásnak nincsenek kitéve, mint a legtöbb, más helyen előforduló vénák, tehát megfelelő szabályozás révén az agyvelővénák vérét folytonosan képesek felvenni; billentyűik nincsenek. Egy részük a koponyaüregben belül általában elő nem forduló epiduralis üreggel (22) homolog helyen található (*epiduralis sinusok*), más részük az agykoponya falában haladó csatornáknak fut le (*canalis-sinusok*).

A *kutya* kemény agyvelőburokának vénás öbleire vonatkozó vizsgálataim szerves kapcsolatban állnak a koponyaüreg reliefjéről (21) és a kemény agyvelőburok működésbeli szerkezetéről (22) végzetekkel. A vénás véröblöket egyrészt makroszkopos *preparativ úton*, másrészt *korróziós* készítményeken tettem vizsgálat tárgyává 25 különböző korú és nagyságú kutyán. A korróziós készítmények a SCHUMMER-féle *plastoid-eljárással* (14) készültek.

A kutya kemény agyvelőburkának vénás öblei, sinus venosi durae matris encephali canis, *dorsalis* és *ventralis rendszerbe* foglalhatók. A két rendszer közül az agyvelő vénás vérének felvételében és továbbításában a *dorsalis systema* szerepel, míg a *ventralis* az előbbivel való összeköttetése, esetleg összeköttetési révén, mint anastomosis fogható fel, másfelől pedig ez utóbbinak egy része



1. kép. A kutya kemény agyvelőburkának vénás öblei (vázlatosan). 1. sinus sagittalis, 2. s. rectus, 3. s. transversus, 4. s. temporalis, 5. s. petrosus dorsalis, 6. s. condyloideus dorsalis; I. s. cavernosus, II. s. petrosus ventralis, III. s. condyloideus ventralis, IV. s. occipitalis ventralis, V. s. columnae vertebralis, VI. s. caroticus; A. v. cerebralis dorsalis, B. v. cerebralis ventralis aboralis, C. v. cerebralis ventralis oralis, D. v. cerebralis orbitalis.

a belső fejarteria, arteria carotis interna, felvételével az agyvelő vérellátásának szabályozásában eképpen is vesz részt (18).

A **dorsalis sinusrendszer** része a felső sarlóöböl, *sinus sagittalis* (1. az 1. és 2. képen I.), a sarlónyúlvány alapi szélén halad a dura mater két lemeze és a periosteum között. A rostacsontnak kevésbé kiemelkedő kakastaraján több kisebb párhuzamos ággal indul ki, ezekhez járul esetenként a rostalabyrinthból még egy gyenge, csupán korróziós készítményeken kimutatható ág (1. az 1. képen I.).

Az ethmoidalis harántköteg (22) mentén haladó nagyobb gyökere esetenként a vena corporis callosival is közlekedik (l. az 1. képen). A sinus sagittalis a két oldali crista frontoethmoidalis interna találkozási helyétől (a szaglóagyvelő sarlónyulványától) kezdődően a mediansíkban mint egységes üregű vezeték húzódik caudalis irányban. A foramen impar változatos alakulásának megfelelően (21) a sinus transversusba való torkolata variabilis. Járulékos lyukak esetén ezeken is haladnak át a lyuk nagyságának megfelelő kisebb, nagyobb ágak (l. a 2. képen). A sinus sagittalis a diploéból, a falxból és az agyvelőből eredő vénákat vesz fel. Utóbbiak kétféle módon jutnak hozzá, egyrészt közvetlenül, másrészt a sinus rectus közvetítésével. A nasalis, dorsalis agyvelővénák változatos számban és elrendeződésben, végső epiduralis helyeződésű részletekkel caudalis irányba kanyarodva ömlenek a sinus sagittalisba. A koszorúvarrat helyének megfelelően merőleges lefutással ömlik a *v. cerebri dorsalis media* belé; ez szedi össze legnagyobb részben az agyvelő külső felületéről a vénás vért, ezen kívül még gyakran kapcsolatban áll a koponyatető lemezei között haladó nagy diploévénatörzsekkel is. A *vena cerebri dorsalis caudalis* csupán néha jelenik meg, ekkor is gyakran páratlanul, ívben caudalis irányba kanyarodva torkollik a sinus sagittalisba. A dorsalis agyvelővénákon kívül, melyek az agyvelő lateralis felületén szedik össze a vért, még a fissura longitudinalis szomszédságában levő részről is, tehát az agyvelőhasadékból — az agyvelő medialis felületéről is — térnek vénák a felső hosszanti véröbölhöz. Ez utóbbiak rendszeren a falxból származó vénákkal közösen végződnek.

Az egyenes érvezeték, *sinus rectus* (l. az 1. és 2. képen 2.) az agyvelő vénái közül a *vena cerebri magna* és a *vena corporis callosa* veszi fel. Utóbbi néha a sarlónyulvány szabad szélén haladó *vena longitudinalis ventralis* helyettesíti (l. az 1. képen 2.). A sinus rectus érterülete közlekedik a sinus petrosus dorsaliséval is, szimmetrikusan ventrolateralisan haladó ágak révén, melyeket korróziós készítményeken sikerült kimutatnom. A sinus rectus rendszeren a foramen impar előtt a sinus sagittalisba ömlik, előfordul azonban, hogy külön ömlik a sinus transversusba, ekkor vagy a mediansíkban halad, vagy el is tér a mediansíktól, úgyhogy a sinus temporalisba jut.

A dorsalis véröbölrendszer vérét a kisagysátor alapi szélén lefutó, a meatus temporalisban (21) haladó harántvérvezeték, *sinus transversus* és halántéki vérvezetékek, *sinus temporalis*ok rendszere (l. az 1. és 2. képen 3., 4.) gyűjti össze, hogy ezt a v. cerebrialis dorsalisba (A) vezesse. E rendszernek a canalis transversusban haladó része a sinus transversus (l. az 1. és 2. képen 3.), a pars temporalis meatus temporalisban lefutó részlete pedig a sinus temporalis (4). Agyvelői és a diploéból származó ágak önlenek e sinusokba; előbbi képviseli a sinus sagittalis és a sinus petrosus ventralis, utóbbiak pedig mint parietális nagy diploëvnátörzsek (l. a 2. képen vonalkázottan) és mint apróbb csontvénák ömlenek belé. Az oldalankint egyedül, vagy párosan előforduló *parietalis nagy diploëvnák* a vena cerebri dorsalis media útján a sinus sagittaliszal való összeköttetésük révén, mint ennek collateralisai foghatók fel. A nagy parietalis diploëvnák a homlokcsont területéről származó kisebb ágakkal indulnak ki, melyek a koszorúvarrat táján egyesülnek mindkét oldalon egy-egy törzssé. Caudolateralis lefutás után ez vagy a sinus transversusba, vagy a sinus temporalisba ömlik. A fali nagy diploëvna lefutása leginkább a harmadik ívelt barázdának megfelelő és így a sulcus ectomarginalisba beemelkedő jugum cerebralet követi. A sinus temporalisba való beömlése előtt a diploëvnának a végső részlete gyakran már nem a csontban, hanem epiduralis helyzetésben a falcsont megfelelő barázdájában halad. Lehetséges hogy a diploëvnák nem divergálnak caudalis lefutásuk közben, hanem a sinus sagittaliszal nagyjában párhuzamosak (l. a 2. képen a belső párt). A nyakszirtpikkelyből számos kisebb diploëvna ömlik a sinus transversusba, ezeknek a nyílásai között specialis helyet foglal el a néha előforduló foramen nuchale canalis transversiken (21) áthaladó összeköttetés a sinus transversus és a foramen supramastoideumon áthaladó vena között (l. az 1. képen 3. táján), ennek az összeköttetésnek, mint a sinus transversus kiegészítő ereinek van jelentősége. Még egy collateralis ér fordul elő a sinus transversusszal kapcsolatosan, ez a nyakszirti felső vérvezeték, *sinus occipitalis dorsalis*, amely a sulcus és canalis supramastoideuson (21) keresztül köti össze a sinus transversust a sinus condyloideus dorsalisszal.

A sinus transversus lateralis irányban a halántéki vérvezeté-

kekbe, *sinus temporales*be (1. az 1. és 2. képen 4.) folytatódik. Ezek az előbbivel szemben nasoventralis irányulást vesznek. E vérből a *pars temporalis meatus temporalis*ba halad, ehhez képet két részre oszlik, ezek az epiduralis- és a csatorna-részlete (1. az 1. és 2.



2. kép. A kutya kemény agyvelőburka vénás öbleinek dorsalis rendszere (vázlatosan); jelzések mint az 1. képen.

képen 4.). Az előbbi nevezetes csomópont, számos sinusnak találkozásául szolgál, gyakran orsószerű tágulatot mutat. A *canalis temporalis lateralis ventralis* zárt részében tovahaladó részlete keskenyebb, ez a halántékjáratot elhagyva a *vena cerebri dorsalis*ba ömlik (1. az 1., 2. és 3. képen A), amely a kutyán a *vena maxillaris interna* ága.

A sziklacsonti felső véröböl, *sinus petrosus dorsalis*, (l. az 1. és 2. képen 5.) szedi össze az agyvelő alapján levő vénák vérét és pedig a vena cerebri anterior és media egyesüléséből kialakuló *vena basilaris cerebri* (tulajdonképen ennek egyenes folytatása a sziklacsonti felső érvezeték), továbbá a *vena nervi trigeminii* és a *vena rhinalis posteriort*. Lefutásában a sinus petrosus dorsalis némileg hasonlít egy másik közvetlenül agyvelővénákat felvevő véröbölhöz, a sinus rectushoz. Mindkettő a kisagy sátorban halad a nyulvány szabad szélétől ennek alapi széle felé, radialis irányban; míg azonban a sinus rectus median-helyeződésű és szabályos lefutásában a kisagy sátor nagyagyvelői felületén húzódik, addig a sziklacsonti felső érvezeték páros és oldalt, a sziklacsonti taraj mentén halad a halántékjáratban lefutó gyűjtő sinushoz. A crista petrosan kiemelkedő csontlemezhez képest változatos helyzetet mutat, amennyiben ennek nagyagyvelői felületéről a kisagyvelői felületére csavarodik át a caudolateralis részén.

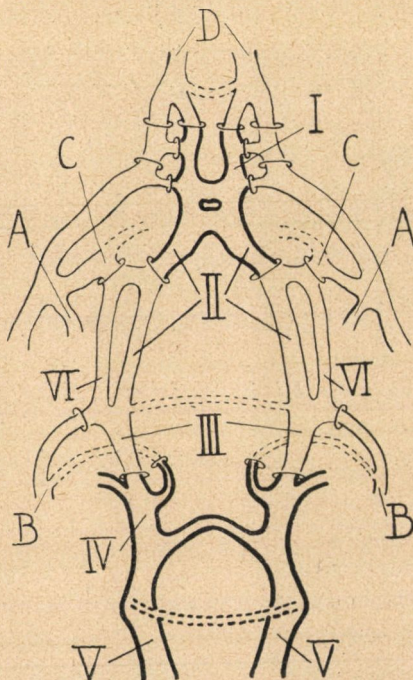
A sinus temporalisba ömlik még a fent jelzett helyen a bütökcsonatornának a dorsalis és a ventralis véröbölrendszert összekötő vénás vezetéke, *sinus condyloideus dorsalis* (l. az 1. és 2. képen 6.). A sinus condyloideus a csonttani részben ismertetett sulcus és canalis condyloideusban halad (21), közben a foramen supramastoidéumon át a nyakszirtesont külső tarkói felületére ágat bocsát (l. az 1. és 2. képen), ez a fent jelzett módon összeköttetésben állhat a sinus transversusszal (l. az 1. képen 3.), miáltal collateralis vérkeringés létesül a haránt véröbölrendszerrel párhuzamosan. A sinus condyloideus dorsalis ritkán két ággal is torkolhat a sinus temporalisba.

A dorsalis és ventralis sinusrendszer a bütökcsonatorna vénás vezetékén kívül is még összeköttetésben állhat egymással. Ilyen közlekedés a sziklacsont nasoventralis csúcsán a *sinus petrosus dorsalis* és *ventralis* között esetenként, ritkán előfordul. Ugyancsak lehetséges még egy harmadik összeköttetés is a dorsalis és a ventralis sinusrendszer között és pedig a *sinus condyloideus ventralis* és a *sinus petrosus dorsalis* között.

A **ventralis érvezetékrendszer** két párhuzamos törzset alkot, melyek apicalisan a szemgödör vénáiból indulnak ki. E két törzs a koponya alapon található lyukakon keresztül sokszoros össze-

köttetésben áll a v. maxillaris interna területével, caudalisan pedig a gerincevelő vénás öbleibe megy át. Külső összeköttetésein kívül a két, nagyjában párhuzamos törzset számos intra- és extracranialis harántág köti össze.

A rekeszes vérvezeték, *sinus cavernosus* (1. az 1. és 3. képen I) epiduralis helyeződésben a fissura orbitalistól, a töröknyereg két oldalán, a sulcus basalisban caudalis irányban húzódik. A dorsum sellae előtt a kétoldali sinus cavernosust *sinus intercavernosus caudalis* köti össze egymással (1. a 3. képen). Ez utóbbiból a töröknyereg támlája előtt levő lyukon keresztül a sphenoidalen át vékony ág halad a v. maxillaris interna gyökeréhez. Egy esetben sem volt azonban található sinus intercavernosus nasalis. A sinus cavernosusban halad az *arteria carotis interna* (18), amely egyes kötőszöveti kötegekkel a sinus falához rögzített; e részében kevésbé kanyarultós lefutású. Nasalisan, közel a processus clinoideus nasalishoz, átfúrja a carotis a sinus cavernosust és a durat, hogy a subduralis üregbe lépjen. A fissura orbitalison keresztül a v. cerebialis orbitalisszal áll a rekeszes vérvezeték kapcsolatban (1. az 1. és 3. képen D), és ezenkívül még két jóval kisebb összeköttetése is van a sinus cavernosusnak a v. maxillaris interna szemgödri ágával, ezek a foramen rotundumon és a foramen ovalen keresztülhaladó apró ágak (1. a 3. képen). A sinus cavernosust dorsolateralisan a fissura orbitalison áthaladó idegek



3. kép. A kutya kemény agyvelőburka vénás öbleinek ventralis rendszere (vázlatosan); jelzések mint az 1. képen.

A fissura orbitalison keresztül a v. cerebialis orbitalisszal áll a rekeszes vérvezeték kapcsolatban (1. az 1. és 3. képen D), és ezenkívül még két jóval kisebb összeköttetése is van a sinus cavernosusnak a v. maxillaris interna szemgödri ágával, ezek a foramen rotundumon és a foramen ovalen keresztülhaladó apró ágak (1. a 3. képen). A sinus cavernosust dorsolateralisan a fissura orbitalison áthaladó idegek

kísérik, melyeknek közelebbi topographiájára vonatkozóan előző közleményemre utalok (22).

A töröknyereg támlájának síkjáról caudalisan a sinus cavernosus a sziklacsonti alsó véröbölbe, *sinus petrosus ventralis* (l. az 1. és 3. képen *II.*) folytatódik. E vérvezetéknek két részlete van és pedig egy apicalis epiduralis- és egy caudalis csatornarészlete. Ezen kívül a kétoldali sinust harántág köti össze, mely mindig jelen van, de különböző fejlettségben, aszerint, hogy milyen mértékben érintkezik a két sziklacsonti vérvezetéknek elülső epiduralis szakasza egymással. Az összekötő részből ritka esetekben median haladó, caudalis irányban az öreglyuk felé huzódó és elágazódás után a sinus interoccipitalis ventralisba ömlő, epiduralis ág található. A sinus petrosus ventralis a töröknyereg támlájától kiindulóan divergálóan halad a sziklacsont ventromedialisan kiemelkedő hegye irányában. E helyen lateralis irányban a belső fejverőér csatornájában haladó vénás vezetéket, a *sinus caroticust* (l. az 1. és 3. képen *VI.*) bocsátja. Ugyancsak innen indul ki az egyik legnagyobb elvezető véna, amely a canalis caroticus nasalis részén halad át, a *vena foraminis carotici externi*, terjedelménél és kiemelkedő jelentőségénél fogva külön névvel, mint *vena cerebralis ventralis oralis* (l. az 1. és 3. képen *C.*) jelölhető meg; ez a vena maxillaris internaba vezet. A sziklacsonti alsó vérvezeték az os petrosum nasomedialisan irányuló csúcsa alatt epiduralis részletéből csatornarészletébe megy át, medialis szélén azonban fokozatosan keskenyedő csíkban még epiduralisan is előtűnik. Előfordul az is, hogy végig, a fissura petrobasilarisig terjedően epiduralis helyeződésben marad e sinus, abban az esetben, ha a sziklacsont és a basioccipitale megfelelő részletei nem érintkeznek egymással. A sinus caroticus (l. az 1. és 3. képen *VI.*) a canalis caroticuson való áthaladása után ismét egyesül a sinus petrosus ventralisszal, az egyesülés helyéről indul ki a *vena cerebralis ventralis aboralis* (l. az 1. és 3. képen *B.*), amely számos apró párhuzamos ágból áll és ezek valamennyien a garat vénás fonatja útján a vena jugularis internaba vezetik a vért. A vena cerebralis ventralis aboralis az oralis társánál jóval gyengébb. A kétoldali sziklacsonti alsó vérvezetéket a fissura petrobasilaris magasságában a csonton keresztülhaladó harántág köti össze.

A sinus petrosus ventralisnak a basioccipitale lateralis szélén haladó barázdájában (21) tovahaladó törzse a canalis condyloideus ventralisba való belépésétől kezdve mint az alsó bütyökesatorna vénás vezetéke, *sinus condyloideus ventralis* (l. az 1. és 3. képen III.), jelölhető meg. E részlet áll a dorsalis rendszerrel a sinus condyloideus dorsalis révén összeköttetésben. A sinus condyloideus ventralis a foramen condyloideum caudalen kilépve mint nyakszirti alsó érvezeték, *sinus occipitalis ventralis* (l. az 1. és 3. képen IV.) folytatja útját. A sinusrendszernek e része a koponyaüregben belül található szabad epiduralis üregben foglal helyet (21), caudalisan pedig a *sinus columnae vertebralis*ban folytatódik. Ventralisan és esetenként dorsalisán is a kétoldali sinust *sinus interoccipitalis ventralis inferior*, illetőleg *superior* köti össze (l. a 3. képen IV.). A foramen hypoglossin át a vena condyloidea vezet el a nyakszirti alsó érvezetékéből.

A sinusok úgy nasalis, mint lateralis, illetőleg ventralis irányban összeköttetésben állnak az arc vénáival. Ez elvezető erek rendszere számos anastomosist alkot és így a vénás vér kedvező elfolyását minden irányban biztosítja. A sinusok vérének továbbításában egyrészt a v. vertebralisszal egyesült v. *jugularis interna* szerepel, másrészt pedig a v. *jugularis externa* ágai közül leginkább a v. maxillaris interna, míg ezzel szemben a v. maxillaris externa a két. v. facialisnak (superficialis és profunda) a szengödör ereivel való anastomosisa révén csupán a nasalis irányban való vérelvezetés által bír jelentőséggel. Elülről hátrafelé haladó sorrendben — nasocaudalisan haladva — kerülnek az elvezető vénák ismertetésre. Ezeket a viszonyokat különösen a korróziós készítményeken lehetett a legmegfelelőbben tanulmányozni.

A v. facialis superficialis egyik ága a v. *angularis oculi*, nem végág, hanem a belső szemszögletben a szengödörbe térve, az itt található erekkel bő és sokszoros anastomosisban áll, közvetlen folytatása a v. *angularis oculi*nak pedig a v. *ophthalmica dorsalis*. A v. facialis profunda a járomív alatt jut be a szengödörbe, hol a v. *ophthalmica ventralis*ba folytatódik. A két v. *ophthalmica* a medialis oldalon összeköttetésben áll egymással. Hasonlóképen anastomozáló ágat találni a chiasma opticumnak megfelelően a két vena *ophthalmica ventralis* között (l. a 3. képen D. és D. között). A v. *ophthalmica* nem alkotnak fonatot, mint régebbi szerzők fel-

tételezték, hanem csupán tágult érszakasz található az orbitában ennek a helyén. A *fissura orbitalis* előtt a *v. ophthalmica dorsalis* és *ventralis* egyesülnek egymással, hogy mint *v. cerebialis orbitalis* (l. az 1. és 3. képen *D.*) lépjenek a *fissura orbitalis*on át a *sinus cavernosus*szal összeköttetésbe.

A nagyobb területről vénás vért összegyűjtő *v. maxillaris interna* két főága a *szemgödri* és a *szájpadlási ág*. Előbbi a *v. cerebialis orbitalis*ból (l. a 3. képen *D.*) lép ki és a *canalis alaris*on halad keresztül, hol az apró *v. foraminis rotundi* csatlakozik hozzá (l. a 3. képen). Elhagyva a szárnycsatornát több, egymással párhuzamos ágra oszlik, melyek mind a *foramen postglenoidale* irányában haladnak, e lyuk környékén egyesül a *v. cerebialis dorsalisszal* (l. a 3. képen *A.*). Majd *ventrolateralisan* haladva, a *v. maxillaris externa*val találkozik és a *v. jugularis externa*ba megy át.

A *szájpadlási ág* a *velum palatinum*ban levő fonattal indul ki és ugyancsak a *foramen postglenoidale* felé tart, hol a másik két ággal egyesül (l. az 1. és 3. képen). Útközben felveszi a *foramen caroticum externum*on kilépő *v. cerebialis ventralis oralist* (l. az 1. és 3. képen *C.*), amely a nagyon gyenge *v. foraminis rotundi* és ovalisszal szemben a *ventralis sinusrendszernek* egyik legerősebb elvezető ere (l. az 1. és 3. képen *C.*).

A *ventralis sinusrendszer*től a *vena vertebralis-* és *v. jugularis interna*hoz térő ágak a több apró érből álló *v. cerebialis ventralis aboralis* (l. az 1. és 3. képen *B.*) és a *v. condyloidea* (ugyanott vonalkázottan), előbbi a *fissura petrobasilaris*on, utóbbi a *canalis hypoglossin* halad keresztül. Mindkettő aránylag gyenge ér, amely a *sinus petrosus ventralis*ból, illetőleg a *sinus occipitalis ventralis*ból vezet el.

Mind a *sinusok szerkezete*, mind ezeknek elrendezése, valamint összeköttetések a *fej vénáinak* és egymásközött az *agyvelő vénás* vérének megfelelő továbbítását célozzák, különösen a leírt számos *anastomosis* révén. A *dorsalis véröblrendszer* veszi fel közvetlenül az *agyvelővénákat*, a *ventralis rendszer* pedig csupán mint *anastomosis* szerepel. Közönségesen *egy összeköttetés* van a két rendszer között, néha előfordul azonban *egy második*, sőt kivételesen *egy harmadik* is.

Irodalom.

1. BRADLEY O. CH., Topographical Anatomy of the Dog. II. Edition. London, 1927.
2. BRÜCKNER, C., Die Kopfarterien des Hundes unter spezieller Berücksichtigung derer des Bulbus und der Schädelhöhle. Inaug. Diss. Dresden, 1909.
3. DENNSTEDT, A., Die Sinus durae matris der Haussäugetiere. Inaug. Diss. Wiesbaden, 1903.
4. ELLENBERGER, W. und BAUM, H., Systematische und topographische Anatomie des Hundes. Berlin, 1895.
5. HOFMANN, M., Zur vergleichenden Anatomie der Gehirn- und Rückenmarksvenen der Vertebraten. Zeitschr. f. Morphologie und Anthropologie, III. kötet, 239—299. oldal, 1901.
6. KOLLER, R., Zur vergleichenden Anatomie der Hypophysenumgebung. Zeitschr. f. Anatomie und Entwicklungsgeschichte, 65. kötet 183—203. oldal. 1922.
7. MANNU, A., Il. confluenti dei seni della dura madre le suo variazioni e il suo significato. Internat. Monatschr. f. Anat. und Physiol. 24 kötet, 304—395. oldal. 1907.
8. MOBILIO, C., Di alcune particolarità riguardanti le giugulari interne dei mammiferi domestici. Arch. Scintif. della Regia Soc. ed Accad. Vet. Italiana. 6. kötet. 3—14. oldal. 1908.
9. MOBILIO, C., Della circolazione venosa della testa negli equini. Tesi. di lib. doc. Torino, 1909.
10. MOBILIO, C., Della circolazione venosa della testa. Archiv. Scintif. della Regia Soc. ed Accad. Vet. Italiana. 7. kötet 3—34. oldal. 1909.
11. MÖCKEL, O., Die Venen des Kopfes des Pferdes und ihre Variationen. Inaug. Diss. Dresden, 1909.
12. POHLE, C., Das Venensystem des Hundes. Inaug. Diss. Dresden, 1920.
13. RUEDI, M., Topographie, Bau und Funktion der Art. carotis interna des Pferdes. Inaug. Diss. Zürich, 1922.
14. SCHUMMER, A., Ein neues Mittel («Plastoid») und Verfahren zur Herstellung korrosionsanatomischer Präparate. Anatomischer Anzeiger, 81. kötet, 177—201. oldal. 1935.
15. SCHUMMER, A. u. ZIMMERMANN G., Weitere Untersuchungen über die Sinus durae matris, Diploë- und Kopfvenen des Hundes mittels der Korrosionsmethode. Zeitschr. f. Anatomie und Entwicklungsgeschichte 107. kötet, 1—6. oldal, 1937.
16. SZAKÁLL GY., A koponyaüreg vivőereinek bonctana a háziállatokban. Közlemények az összehasonlító élet- és körtan köréből, 3. kötet, 142—161. oldal, 1899.

17. ZIETZSCHMANN, O., Handbuch der Anatomie des Hundes. I. kötet, Berlin, 1936.

18. ZIMMERMANN Á., Adatok a belső fejarteria anatómiájához. Matematikai és Természettudományi Értesítő. 42. kötet. 1925.

19. ZIMMERMANN Á., Összehasonlító vizsgálatok a kemény agyvelőburok vénás öbleiről (különös tekintettel a vizsgálati módszerekre). Közlemények az öh. élet- és körtan köréből, 28. kötet, 269—282. oldal, 1937.

20. ZIMMERMANN G., Über die Dura mater encephali und die Sinus der Schädelhöhle des Hundes. Zeitschr. f. Anatomie und Entwicklungsgeschichte, 106. kötet, 107—137. oldal, 1936.

21. ZIMMERMANN G., Adatok a koponyaüreg összehasonlító csonttanához (a kutya koponyájának belső reliefje). Matematikai és Természettudományi Értesítő, 55. kötet, 811—836. oldal, 1937.

22. ZIMMERMANN G., Adatok a kemény agyvelőburok működésbeli szerkezetéről, Matematikai és Természettudományi Értesítő, 56. kötet, 262—286. oldal, 1937.

Ezekon kívül anthropotómiai és veterináranatómiai tankönyvek magyar, német, olasz, francia és angol nyelven.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

BEITRÄGE ZUR VERGLEICHENDEN ANATOMIE DER SINUS DURAE MATRIS.

Von GUSTAV ZIMMERMANN.

Die harte Hirnhaut des Hundes enthält ein dorsales und ein ventrales Blutleitersystem. Von diesen venösen Leitungsröhren nehmen Gehirnvenen nur folgende Anteile des *dorsalen Systems* auf: *Sinus sagittalis* (vom dorsalen Bereiche, von der dorsalen und lateralen Gehirnoberfläche und aus der Mantelspalte), *Sinus rectus* (vom mittleren Bereiche, von den Gehirnkammern, vom Gehirnbalken und von den tiefen Gehirnvenen), *Sinus petrosus dorsalis* (vom ventralen Bereiche, von der basalen Gehirnoberfläche). Sämtliche Sinus, die Gehirnvenen aufnehmen, ziehen in *dorsocaudaler Richtung*, wo die Sammelstelle des Venenblutes in dem, im Meatus temporalis verlaufenden Blutleitersystem zu treffen ist. In den reich ausgebildeten Kollateralkreislauf werden auch die grossen parietalen Diploëvenenstämme miteinbezogen.

Das *ventrale System* wird lediglich aus topographischen Gründen zu den Sinus durae matris gerechnet und demgemäss kommen seine einzelnen Teile als Anastomosen zu den dorsalen System und zu den ausserhalb der Schädelhöhle liegenden Venen in Betracht. Von Wichtigkeit erscheint es, dass die innere Kopfarterie in Teile des ventralen Sinussystems eingebettet verläuft.

Beim *Abfluss des Sinussystems* hat den grössten Teil die *V. maxillaris interna*, denn diese führt hauptsächlich das Venenblut der Schädelhöhle ab. Eines der mächtigsten Abflüsse stellt die *V. cerebialis dorsalis* dar, die aus dem Meatus temporalis heraustritt.

Weitere Abflüsse von Bedeutung sind im Gebiet der V. maxillaris interna die *V. cerebralis ventralis oralis*. Zu den Augenvenen zieht die *V. cerebralis orbitalis*. Zum Gebiet der V. jugularis interna führt die *V. cerebralis ventralis aboralis*, die jedoch überaus schwach erscheint. Demgegenüber bilden die mächtigsten Abflüsse die paarig entspringenden, beiderseitig vorhandenen *Wirbelblutleiter*.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarische Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

MIMOMYS NEWTONI ÉS LAGURUS PANNONICUS, KÉT FELSŐPLIOCÉNKORI POCOKFAJ.

KORMOS TIVADAR-tól.

A II. és III. táblával.

A rágcsálók egyik legnépesebb csoportjába: a *Microti*-családba tartozó pocok-nemek egy részét gyökeres, más részét pedig gyökértelen zápfogak jellemzik. Ugyanez az eset áll fenn bizonyos mértékig a nyulaknál is, melyeknek a paleogénkori ősei még gyökeresfogúak voltak, míg a ma élő fajok zápfogai már kivétel nélkül gyökértelenek s az eredeti gyökeres, brachyodont fogazat emlékei csupán a tejfogazat gyökérnyomaiban jelentkeznek.

A pockok őstörténetét csak a pliocén-korig követhetjük vissza, de már ott is azt tapasztaljuk, hogy a földtörténetileg legidősebb nemek hozzátartozói kivétel nélkül gyökeres fogúak. Joggal következtethetett ebből MÉHELY arra, hogy a gyökeresfogú pockok a törzsfejlődés alacsonyabb fokán állnak, mint az állandó fogazatú, gyökeretlen fogakkal jellemzettek. MÉHELY volt az első kutató, aki rámutatott arra, hogy a «modernebb», gyökeretlen fogú alakok az ősi, gyökeresfogúak leszármazottai. Újabban HINTON angol zoológus és palaeontológus széles alapokon kiépítette a *Microti*-csoport rendszerét és döntő érveléssel támasztotta alá a pockok törzsfejlődésének menetét.

Bár a ma élő pocokfajok túlnyomó része gyökeretlen zápfogakkal jellemzett s a gyökeresfogúak — pl. a mi erdei pockunk — immár alárendelt szerepet játszanak az előbbieket mellett, a legrégibb felsőpliocénkori gyökeresfogú *Dolomys*- és *Mimomys*-fajokkal egy időben már elszórtan gyökeretlenfogú alakok is mutatkoznak.

Hazánkban a geológiaiilag legidősebb fauna, melyben pocok-maradványok szerepelnek, a beremendi, csarnótai és villányi. Erre a faunára rendkívül jellemzők a kivétel nélkül gyökeresfogú *Mimomys*-ok és *Dolomys*-ok, így a villányi faunára kiváltképpen a kistermetű *Mimomys Newtoni* FORSYTH MAJOR, mely annak egyik leggyakoribb, sokszáz állkapoccsal és koponyatöredékekkel képviselt tagja. Előfordul ez a faj Beremend faunájában is, de ott — minthogy ez a fauna korántsem oly bőséges, mint a villányi — sokkal ritkább. Ellenben már MÉHELY említette, hogy Beremenden egy gyökeretlenfogú pocok maradványai is előkerültek. Az én vizsgálataim során sikerült a szóbanlevő fajt közelebről megvilágítanom. Kiderült, hogy nem a napjainkban nálunk is élő *Microtus* genus képviselőjéről, hanem a fosszilis alakban eleddig nem ismert *Lagurus*-nem egy új fajáról van szó, melyet *Lagurus pannonicus*-nak neveztem el. Ez a genus napjainkban Déloroszországtól kezdve Középázsiaig, valamint Észak-Amerikában honos és számos élő faja ismeretes.

A nagytekintetű Akadémia ezévi szíves támogatásával végzett helyszíni és házi vizsgálataim során elsősorban azt a kérdést tanulmányoztam, hogy a fogazat rágófelületi rajzában mutatkozó feltűnő hasonlatosság figyelembevételével minő kapcsolatokra következtethetünk a gyökeresfogú *Mimomys Newtoni* és a vele egyidőben fellépő, de előbbi jóval túlélt *Lagurus pannonicus* között?

Erre vonatkozó, nagyon részletes tanulmányaim során sikerült kimutatnom, hogy a magyarországi fosszilis *Lagurus pannonicus* egyrészt a gyökeresfogú *Mimomys Newtoni*-val, másrészt pedig a ma élő *Lagurus*-okkal közeli rokonságban van. Nagyon valószínűnek látszik az is, hogy a *Lagurus pannonicus* a *Mimomys Newtoni*-nak egyenes leszármazottja, anit a zápfogak szabásának nagy megegyezése tanusít. A különbség lényegében csupán az, hogy a *Mimomys Newtoni* zápfogai még gyökeresek, míg a *Lagurus*-éi gyökértámasztékukat már elvesztették és — miként a mai mezei pocok, a nyulak és más rágeszálók zápfogai — a koptatást fokozatos utána-növekedéssel pótló, végig zománchüvelybe foglalt gyökeretlen fogakká alakultak át.

A felsőpliocénkori *Lagurus* kapcsolatai a ma élő fajokhoz még

kiderítésre várnak, annál is inkább, mert a fosszilis faj legfiatalabb alakja nem — mint azt várhattuk volna — a déleurópai-ázsiai *Lagurus lagurus*-hoz, hanem különösképpen a szibériai *Lagurus luteus*-hoz áll közelebb.

A rokonsági kapcsolatok végleges tisztázása természetesen csakis az esetben válnék lehetővé, ha sikerülne Délkelet-Európában és főként Ázsiában fosszilis *Lagurus*-maradványokra bukkanni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

MIMOMYS NEWTONI F. MAJOR UND LAGURUS
PANNONICUS KORM., ZWEI GLEICHZEITIGE
VERWANDTE WÜHLMÄUSE VON VERSCHIEDENER
PHYLOGENETISCHEN ENTWICKLUNG.

Von THEODOR KORMOS. (Budapest).

Mit den Tafeln II. und III.

Über das Vorkommen von *Mimomys* («*Microtomys*») *Newtoni*, einer im Jahr 1902 durch FORSYTH MAJOR aus dem Cromerian von West Runton (England) beschriebenen wurzelzähnigen Wühlmaus, in Ungarn hat zuerst v. MÉHELÝ berichtet. Er erwähnt zwei linke Mandibel dieser Species, deren eine durch PETÉNYI in Bere-mend, die andere durch den Verfasser dieser Zeilen am Nagy-harsányberg bei Villány gesammelt wurde. Erstere ist Eigentum des Naturhistorischen Museums in Wien, wogegen die zweite sich im Besitz der Kgl. Ung. Geologischen Anstalt befindet. Beide sind auf Taf. VIII (Fig. 1—3) in MÉHELÝ's «*Fibrinae Hungariae*»(1) zur Abbildung gelangt. Ich konnte die von mir gesammelten Mandibel unter den Materialien der Kgl. Ung. Geolog. Anstalt trotz eifrigen Suchens nicht wiederfinden, fand dagegen ein Gläschen mit einigen, noch von HOFFMAN gesammelten Wühlmausresten, welchen eine Etikette mit NEHRING's Handschrift beigegeben war. Letztere lautet: «*Arvicola* sp. NHRG. Harsanyberg» (Inventar No. Ob/98 ad 5/1901). In dem betreffenden Gläschen befinden sich, neben einem Femur, einem Humerus, sowie zwei unbestimmbaren Unterkieferbruchstücken zwei Belege, welche tatsächlich auf *Mimomys Newtoni* bezogen werden müssen: eine rechte Mandibel mit der vollständigen Backenzahnreihe, sowie ein ebenfalls rechter m^1 .

Ich muss an diese Stelle erwähnen, dass im alten Malnkalk-

steinbruch am Ostfusse des Nagyharsányberges eigentlich zwei, nebeneinander liegende Fundstellen von verschiedener petrographischen Beschaffenheit sich befinden. Die erste ist eine Brecciensäule, welche aus — mit Terrarossa fest verkitteten — Kalktrümmern besteht und ausser wenigen Resten von Hasen, Wühlmäusen usw., eine Unmenge von Schlangen- und Froschresten enthält. Die andere, die eigentliche Hauptfundstelle, befindet sich gegenüber dieser Brecciensäule in einem etwas höheren Niveau, wo die Spalten und kleinen Höhlungen des Kalksteins mit einem lichtbraunen Sediment ausgefüllt sind und tausende von Knochen (vorwiegend Hasen-, Hamster- und Wühlmausreste) enthalten, resp. enthalten haben.

Ich kann mich heute nicht mehr entsinnen, welche Objekte mir seinerzeit — es sind schon vierundzwanzig Jahre her — aus der Brecciensäule in die Hände kamen ; sicher waren es aber deren nur wenige. Wo HOFFMAN den Typus-Unterkiefer von *Prospalax* fand, ist mir auch nicht bekannt. Sicher ist es nur, dass ich aus der erwähnten Brecciensäule während der letzten fünfzehn Jahre ausser Schlangenresten niemals etwas brauchbares sammeln konnte, wogegen die, mit dem braunen Kalkdetritus ausgefüllten «Fuchslöcher» wiederholt reichhaltiges Material lieferten. Unter den, an diese Stelle gesammelten vielen Hundert Belegen gelang es mir jedoch nie auch die geringste Spur von *Mimomys pliocaenicus*, *Mimomys Newtoni* und *Prospalax priscus*, welche durch MÉHELÿ vom Nagyharsányberg signalisiert wurden, zu finden. Ich muss deshalb annehmen, dass die, von MÉHELÿ erwähnten Überreste obiger Arten aus der, höchstwahrscheinlich etwas älteren, Brecciensäule stammen. Ich rechnete 1911 mit der Möglichkeit eines Altersunterschiedes zwischen den zwei, knapp nebeneinander liegenden, Fundorte nicht und unterliess es die, aus der Brecciensäule stammenden Belege separat zu halten. Der wirkliche Sachverhalt kann infolgedessen heute, leider, nicht mehr eruiert werden. Da ich jedoch, durch einen glücklichen Zufall im April 1931 an der Südwand des Steinbruches am Villányer Kalkberg sichere Spuren einer — sich gegenüber der dortigen Hauptfundstelle befindlichen — jüngereren Tiergesellschaft entdeckte, wird das vermeintliche Verhältnis der zwei Fundstellen am Fusse des Nagyharsányberges

durch diesen analogen Fall tüchtig unterstützt. Denn darüber, dass die lezt hin entdeckte «Südwand-Fauna» des Villányer Kalkberges entschieden jünger als jene der Hauptfundstelle an der Nordseite ist, kann kein Zweifel bestehen. In dieser jüngeren Fauna, welche mit den «Fuchsloch-Ausfüllungen» des Nagyharsányberges gleichhalt zu sein scheint, sind die Gattungen *Pitymys*, *Microtus* und *Lagurus* häufig, dagegen findet man darin keine Spur von den älteren *Mimomys*-Arten, (*M. pliocaenicus*, *M. Reidi*, *M. Newtoni*), von *Desmana Nehringi*, *Prospalax priscus*, *Pannonictis* etc. *Mimomys intermedius*, der wahrscheinliche unmittelbare Stammvater der Gattung *Arvicola*, kommt dagegen in den Villányer Bergen ausschliesslich in dieser, allerdings jüngeren, Tiergesellschaft vor.

In der Fauna der Hauptfundstelle am Kalkberg (Nordseite) ist *Mimomys Newtoni* der häufigste Vertreter seiner Gattung. Ich konnte dort während der letzten 15 Jahre mehrere Hundert Unterkiefer und etwa zwei Dutzend Craniumfragmente dieses interessanten Tierchens sammeln. Von dieser unvergleichlich reichen Belegserie übersandte ich einiges Herrn HINTON (London) zur Überprüfung, der die Richtigkeit der Bestimmung bestätigte. Bezüglich der ihm mitgeteilten Schädelreste teilte mir Herr HINTON mit, dass ihm solche bevor nie vorgelegen sind, und er diese besonders sorgfältig untersucht hat. Er schreibt mir diesbezüglich: «So I have carefully examined these fragments and think you have correctly determined them as *M. Newtoni*.»

Auf Grund meines überaus reichen Untersuchungsmaterials ist die grosse Übereinstimmung der ungarischen Exemplare mit den englischen evident, mit dem einzigen, bereits von HINTON (2) erwähnten Unterschied, dass die Backenzahn-Synklinalen der ersteren nicht mit Zement erfüllt sind. Prof. v. MÉHELY hat die ihm vorgelegenen Zähne von *Mimomys Newtoni* auch ohne Zementbelag abgebildet, erklärt aber trotzdem, dass «der Innenwinkel der Einbuchtungen mit Zement ausgefüllt ist, so dass diese Art schon hierdurch von *Mimomys Petényii* entfernt, hingegen sehr nahe gebracht wird zu dem jugendlichen *Microtomys pusillus* (Taf. VII, Fig. 6 und 7), aber das Schmelzspitzchen der letzteren Art ist doch ganz anders.» (I, S. 224.)

Zur Erklärung dieser Zeilen finden wir an derselben Seite eine Fussnote folgenden Inhaltes:

!«Als ich meine Studien begann, hatte ich noch keine Ahnung davon, wie wichtig das Vorhandensein oder Fehlen des Zementbelages ist und da ich bestrebt war alle Zähne möglichst rein und blank zu präparieren, glaube ich mich zu erinnern, dass ich den Zementbesatz der Zähne herauskratzte; indessen verblieben auf dem Exemplar des Wiener Hofmuseums noch soviel Überreste, dass ein ursprüngliches Vorhandensein des Zementbesatzes wahrscheinlich erscheint.»

Ich bin nicht in der Lage, das hier gesagte bestätigen zu können. Die spärlichen Überreste, welche an den sauber geputzten Zähnen des von MÉHELÝ untersuchten Beremender Kiefers noch wahrzunehmen sind, erwiesen sich unter stärkerer Vergrösserung als Spuren der roten Matrix (Terrarossa), nicht aber von Zement, und unter den übrigen, mir zur Verfügung stehenden vielen Hundert Zähnen habe ich k e i n e n e i n z i g e n auch nur mit Spuren einer Zementeinlagerung gefunden. Professor v. MÉHELÝ dürfte sich demnach schlecht erinnert haben; aber sei dem es, wie immer: sämtliche, mir bisher in die Hände gelangten Zähne des Baranyaer *Mimomys Newtoni* sind durch das absolute Fehlen einer Zementablagerung gekennzeichnet.

Wenn auch dieser Unterschied zwischen den englischen und ungarischen Exemplaren sicher seinen Grund hat, welche sich vielleicht — eben im Sinne v. MÉHELÝ's — auf eine Verschiedenheit der Nahrung zurückzuführen ist, kann das Fehlen dieses s e k u n d ä r e n Merkmales bei der völligen Übereinstimmung der Zahnstruktur meines Erachtens keine Veranlassung zur Trennung der zwei Formen geben, umsoweniger, da ja doch meine Exemplare auch von Herrn Kollegen HINTON, dem der Speciestypus vorliegt, als *Mimomys Newtoni* anerkannt wurden. Es könnte höchstens davon die Rede sein, den südungarischen *Mimomys Newtoni* als eine Lokalrasse der englischen Stammform aufzufassen, in welchem Falle letztere *Mimomys Newtoni hungaricus* genannt werden könnte.

Die Alveolarlänge der oberen Zahnreihe meiner Villányer Exemplare beträgt 5·9 mm; die der unteren variiert, bei einer breiten Belegserie zwischen 5·2—5·9; die Länge des unteren m_1 ist 2·3—2·7 mm. HINTON gibt die Länge der unteren Zahnreihe mit

etwa 5.5 mm an (2, S. 375) und bemerkt, dass diese 6.0 mm nicht übersteigt. Die ungarischen Exemplare stimmen demzufolge in Bezug auf ihre Grösse haargenau mit jenen aus England überein. Diese Grösse ist die einer Feldmaus (*Microtus arvalis*) und gleicht annähernd jener von *Mimomys pusillus*, bleibt jedoch etwas hinter derselben zurück. *Mimomys Newtoni* ist demnach die kleinste der bisher bekannt gewordenen Arten des Genus *Mimomys*. Sämtliche mir vorliegende Exemplare sind Seitenwurzler (im Sinne v. MÉHELY'S).

Der erste untere Backenzahn ist im Jugendalter jenem von *Mimomys Reidi* und *Mimomys pusillus* sehr ähnlich, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Prismenfalte der Vorderschlinge weiter, die labiale Schmelzspitze derselben mehr abgerundet und kräftiger entwickelt ist und, dass die Inselfalte mit der aus dieser entstehenden Schmelzinsel überhaupt nicht mehr zur Entwicklung gelangt. Die labiale Schmelzspitze der Vorderschleife geht mit dem Älterwerden des Tieres bald in Verlust und ist bei vielen Exemplaren überhaupt nicht vorhanden. In diesem Stadium ist der Zahn *Arvicola*-ähnlich, bloss verhältnismässig schmaler. Die Vorderschleife ist caudalwärts fast vollkommen abgeschnürt, zwischen derselben und der Hinterschleife sind drei geschlossene Dreiecke vorhanden.

Sehr charakteristisch ist die Gestalt des m_2 . Die vorderste Aussenprisma ist nämlich in Form eines Trapezoids entwickelt, zwischen welchem und der Hinterschleife sich drei, fast ganz oder vollkommen geschlossene Dreiecke sich befinden. Ebenso gestaltet sich der m_3 , nur ist hier die Trapezoidform der vordersten Labialprisma oft nicht so ausgeprägt, wie auf dem m_2 .

Von den Maxillarzähnen ist der m^1 durch zwei Innen- und Aussensynklinalen — mit drei geschlossenen Dreiecken — charakterisiert; wogegen der m^2 nur eine Innensynklinale (mit zwei geschlossenen Dreiecken) besitzt. Diese Zähne sind also von normaler Entwicklung.

Interessanter ist das Kauflächenbild des m^3 , an welchem drei innere und drei äussere Schmelzvorsprünge zu beobachten sind und welche dadurch — wenngleich mit einer gewissen Reduktion der hintersten Innenausbuchtung und der mittleren Aussenantikli-

nale — einigermassen sich dem *Dolomys*-Typus nähert. Das ist unso bemerkenswerter, weil neben der hinteren Innensynklinale des m^3 des auf Taf I, Fig. I. abgebildeten vollständigsten Schädelfragmentes von Villány-Kalkberg beiderseits je ein Trichterchen im Dentin wahrzunehmen ist. Diese sprechen allerdings dafür, dass hier die hintere Innenbucht am Anfang viel tiefer eingeschnitten war und später durch *Insulation* abgeschnürt wurde. Diese Beobachtung ist insofern von Wichtigkeit, weil dadurch das Vorhandensein einer, an *Mimomys pliocaenicus* und *Mimomys Reidi* erinnernden Reduktion (vergl., 1, Taf. III, Fig. 3) erwiesen ist. Ein ähnlicher Fall der jugendlichen Zahnkomplika-tionen ist — wie wir bereits gesehen haben — von MÉHELÿ (1, Taf. IV., Fig. 10) auch bei *Dolomys episcopalis* nachgewiesen worden.

Sämtliche Zähne von *Mimomys Newtoni* — auch der m^1 — sind zweiwurzellig. Die Wurzelbildung ist bei dieser Form sehr reduziert, d. i. sie beginnt verhältnismässig spät.

Die labiale Schmelzspitze (*Mimomyskante*) an der Vorder-schleife des m_1 kann mitunter schon im Jugendalter verschwinden. An einer von zwei juvenilen Mandibeln, welche noch durch starke Konfluenz der Dentinfelder gekennzeichnet sind, ist die frühzeitige Rückbildung dieser Schmelzspitze gut zu beobachten.

Auf Grund der Craniumfragmente können auch an dem — bisher unbekannt gewesenen — Schädel dieses Tierchens einige bemerkenswerte Beobachtungen gemacht werden. Die mir vor-liegenden rostralen Partien mit teilweise erhaltenem Maxillare, Intermaxillare, Frontale und Nasale, zeigen — mit rezenten Formen verglichen — die grösste Ähnlichkeit mit *Evotomys*; von den fossilen Formen steht aber denselben *Mimomys pusil-lus* am nächsten.

Das Gaumendach ist sehr schmal; mit einem, sich flach er-hebenden, Mitteldamm, sowie je einer, zwischen diesem und den Alveolarteilen der Maxillae dahinziehenden, seichten Lateralgrube; Gaumenschuppe mit zwei tiefen Seitengruben, nach vorn fast bis zur dritten (hintersten) Innenantiklinale des m^1 reichend; das ganze Rostrum gedrun-gen, welche Eigenschaft besonders durch die laterale Kürze des Intermaxillare ausgeprägt ist; unterer Teil

des Maxillarfortsatzes massiv; Foramina incisiva verhältnismässig sehr weit; Processus palatinus des Intermaxillare sehr stark entwickelt; Nasenöffnung breit und flach; der sich an den oberen Rand des Maxillarfortsatzes anlehrende Vorderteil des Frontale mit kräftiger Muskelanhafte; Nagezähne ziemlich breit und stark gebogen.

Sehr bemerkenswert sind die relativ überaus weiten Foramina incisiva. Rezenten Schädel von *Evotomys*, *Arvicola*, *Microtus* und *Pitymys* zum Vergleich heranziehend, finde ich, dass bei diesen die Verhältniszahl (Längen- und Breitenindex) der Foramina incisiva zwischen 3·33—5·24 variiert, wogegen dieser Ziffer bei *Mimomys Newtoni* sehr beständig 3·00—3·14 ist.

Die eigenartige, für verschiedene Tierformen der Villányer Fauna bezeichnende Tendenz zur Ausbildung eines kurzen, gedrungenen Rostrums ist demnach — Hand in Hand mit der Gebissreduktion — auch an *Mimomys Newtoni* zu beobachten. Es dürfte keinem Zweifel unterliegen, dass diese, hier sehr häufige Erscheinung irgendwie mit der Nahrung zusammenhängt; dass aber die Ursache derselben gerade in diesem Falle in einem feuchteren Klima und in einer Pflanzennahrung weicherer Konsistenz zu suchen wäre — wie das seitens v. MÉHELÿ behauptet wurde (I, S. 137) — ist kaum denkbar. Denn abgesehen davon, dass die genannte (oberpliocäne) Tiergesellschaft der Villányer Gegend für ein recht warmes Mediterranklima mit langen, trockenen Sommern und darauffolgenden, verkarstenden Regenperioden spricht, kommt *Mimomys Newtoni* mit solchen Wühlmausarten (*Mimomys pliocaenicus*, *Mimomys Reidi* (= *Petényii*) *Dolomys episcopalis*) zusammen vor, welche eben nach MÉHELÿ als Hauptbeweise für trockene «Steppenperioden» angeführt worden sind. Und wenn auch die authentische Provenienz des erwähnten Unterkiefers von *Mimomys Newtoni* vom Nagyharsányberg nicht mehr eruiert werden kann, muss ein «nachträgliches Aneinander-raten» (I, S. 225) der verschiedenen Wühlmausformen der Villány-Kalkberger Fauna a priori für ausgeschlossen gelten. Denn: erstens ist die Fauna der ganzen Ausfüllung von oben bis unten vollkommen einheitlich und zweitens habe ich sämtliche Belege eigenhändig ausgegraben und kann nicht ausdrücklich genug betonen, dass

die meisten Überreste von Wühlmäusen, kleinen Hamstern, Spitzmäusen usw. in den Ausfüllungen der Spalten, Löcher und Höhlungen nesterweise eingebettet lagen. In diesen Nestern sind *Hypolagus*, *Allocrietus*, *Prospalax*, *Citellus*, *Beremendia*, *Petényia* etc., sowie *Mimomys pliocaenicus*, *M. Newtoni*, *M. pusillus*, *M. Reidi*, *Dolomys episcopalis* usw. nebeneinander gelegen. Von einer nachträglichen (natürlichen) Vermengung der Fossilien kann hier nicht die Rede sein, umso weniger, da der ganze, einheitliche oberpliocäne Komplex von einer diskordanten, jungpleistocänen Lössdecke überlagert und bedeckt war.

In bezug auf seine stammesgeschichtliche Stufe ist *Mimomys Newtoni* unzweifelhaft eine «modernere» Form als *M. pliocaenicus*, aber nicht in dem Sinne, wie es v. MÉHELÛ dachte, sondern als eine höher spezialisierte Form ein- und derselben Tiergesellschaft.

*

PETÉNYI sammelte seinerzeit in Beremend unter anderen auch einige Überreste einer Wühlmaus mit wurzellosen Zähnen, welche von NEHRING mit vier verschiedenen *Mimomys*-Arten zusammen als «*Arvicola glareolus*» bestimmt wurden.

MÉHELÛ, der gelegentlich der Bearbeitung seiner «*Fibrinae*» zwei — dem Wiener Naturhistorischen Hofmuseum angehörende — Unterkiefer dieser Form zur Untersuchung bekam, glaubte in denselben eine *Microtus*-Art erkennen zu können und legte den Belegen ein Zettelchen mit der Bemerkung: «*Microtus* sp.» bei. Er erwähnt diese Funde auf S. 157 seiner mehrfach zitierten Monographie(1).

Einen rechten Unterkiefer derselben Art sammelte v. MÉHELÛ im Mai 1904 in Beremend eigenhändig und versah denselben mit der Etikette; «*Microtus* n. sp.» Dieses Stück befindet sich im Besitz des Ung. Nationalmuseums und ist mir, zusammen mit fünf weiteren Mandibeln, welche v. MÉHELÛ gleichfalls im Jahr 1904 am Nagyarsányberg gesammelt und auch als «*Microtus* n. sp.» bezeichnet hat, seitens Herrn Privatdozenten ÉNIK bereitwilligst zur Bearbeitung überlassen worden.

Obwohl die Zähne der Beremender und Nagyarsányberger

Exemplare etwas verschieden sind, fiel mir sofort die grosse Ähnlichkeit zwischen den zwei Formen auf. Überraschender Weise war aber die Ähnlichkeit des Kauflächenbildes dieser Form mit jenem des wurzelähnigen *Mimomys Newtoni* noch auffalender und dieser Umstand verursachte mir anfangs nicht wenig Kopferbrechen.

In den letzten Jahren gelang es mir dann, eine Anzahl Unterkiefer dieser «*Microtus*»-Form am Nagyharsányberg eigenhändig zu erbeuten, unter welchen sich mehrere mit vollständigen Zahnreihen sich befanden. Da mir die Zugehörigkeit dieser wurzellosen Wühlmaus zur Gattung *Microtus* durchweg nicht einleuchtend erschien, blätterte ich in den einschlägigen Werken MILLER's und HINTON's nach und fand zu meiner grossen Überraschung, dass das Gebiss der Exemplare vom Nagyharsányberg jenen des rezenten *Lagurus luteus* (EVERSMANN), das Kauflächenbild der Bremen der Zähne dagegen dem von *Lagurus lagurus* (PALLAS) auffallend nahe steht. Ich übersandte darauf drei meiner ziemlich defekten Mandibeln vom Nagyharsányberg, sowie ein Maxillenfragment von Püspökfürdő unter der Bezeichnung «*Lagurus pannonicus* n. sp.» zur Überprüfung an Herrn Kollegen HINTON in London und erhielt bald darauf folgende Antwort:

«I have today examined Nos. 24 and 25 which you are inclined to refer to *Lagurus*. Such remains are always extraordinarily difficult to determine; and on many occasions I, too, have thought for a time that I was dealing with a fossil *Lagurus*. But I have yet to see one. Your specimens appear to me to be referable to *Pitymys*, or possibly to a new genus, rather more primitive than *Pitymys*, in that the cheek-teeth lack cement. But I would not describe it without further material. That the lower jaws cannot be *Lagurus* is shown by the fact that m_1 has only three closed triangles followed by a confluent pair between the anterior and posterior loops; while in the upper teeth I see no trace of the intermediate tubercles which are so characteristic a feature of the upper molar of this genus.»

Dieses, auf Grund der mitgeteilten mangelhaften Belege verfasste Urteil betrückte mich momentan ein wenig. Ich war nämlich selbst schuld daran, dass Herr HINTON in den Resten *Lagurus* nicht

erkennen konnte, da ich die damals noch einzige Mandibel mit vollständiger Zahnreihe, welche für meine generische Bestimmung massgebend war, vorerst der Post nicht anvertrauen wagte. Entmutigt wurde ich jedoch nicht, denn ich war der festen Überzeugung, doch mit dem ersten fossilen *Lagurus* zu tun zu haben.

Da meine Vorräte an Wühlmausresten vom Nagyharsányberg mehrmals durchgestöbert waren und unter denselben damals nichts mehr zu erhoffen war, musste ich mich wieder einmal an die unerschöpfliche «Fundgrube» von Püspökfürdő wenden, welche mir auch in bezug auf die Spitzmäuse (*Beremendia*, *Petényia*, *Sorex margaritodon*) so glänzende Hilfe leistete. Und tatsächlich, das von dort stammende klassische Material hat mich auch diesmal ausgeholfen: einige zur fraglichen Gattung gehörende Unterkiefer waren bald in meinen Händen. Zuerst fand ich nur Exemplare der Beremender Form, später aber kamen auch solche zum Vorschein, welche haargenau jenen vom Nagyharsányberg glichen. Ich machte mich mit gesteigertem Eifer an die Präparation und als das ganze Material durchgearbeitet war, standen mir schon etwa 200 Unterkiefer, zwei Craniumfragmente und viele lose Zähne dieses eigentümlichen Nagers zur Verfügung.

Nun sandte ich einige Mandibel mit kompletten Zahnreihen, sowie einige Photographien an Herrn HINTON und erhielt darauf folgende Antwort:

«Dealing first with the *Lagurus*, about which I wrote before, I have to say that I now agree with you; further material, letter of February 8th, photographs and the duplicates you have sent are quite convincing».

Das Vorhandensein der Gattung *Lagurus* im ungarischen «Cromerian» wurde also demnach auch seitens HINTON als erwiesen anerkannt, was mich unso mehr freut, da ich inzwischen — der Richtigkeit meiner Auffassung bewusst, bereits einen kurzen Bericht über diese Entdeckung erstattete.(3)

Seitdem gelang es mir, eine Anzahl weiterer *Lagurus*-Reste am Nagyharsányberg auszugraben und im Frühjahr 1931 entdeckte ich auch an der Südwand des Villány-Kalkberger Steinbruches eine Stelle, wo diese Gattung in einer — der Fauna des Nagyharsány-

berges entspsehenden — Tiergesellschaft noch häufiger vertreten ist. Zu Pfingsten 1931 besuchte ich mit meinem, seitdem, leider, so früh dahingeshiedenen Freund Freiherr v. FEJÉRVÁRY nochmals die alte Fundstelle am Somlyóberg bei Püspökfürdő und sammelte bei dieser Gelegenheit weitere *Lagurus*-Reste. Schliesslich konnte dann diese Gattung auch bei der Revision der präglazialen Wühlmausreste von Brassó, sowie von Carlopago im kroatischen Küstenland festgestellt werden (4, 5) so, dass dieses Genus — ebenso wie *Beremendia* — bereits aus sämtlichen Horizonten des Cromerians einwandfrei vorliegt. Im letzten Jahr kam endlich die Gattung *Lagurus* auch aus dem Oberpliocän Deutschlands zum Vorschein.(6)

Nach dem obigen Rückblick müssen noch vor der Besprechung der mir vorliegenden Belegserien und der phylogenetischen und zoogeographischen Besprechung derselben, einige Bemerkungen über die Geschichte und heutige Verbreitung der meines Wissens früher fossil nicht bekannt gewesenen Gattung *Lagurus* vorausgeschickt werden.

Es muss vor allem bemerkt werden, dass gelegentlich der Wiederherstellung des generischen Namens *Lagurus* (Ann. & Mag. Nat. Hist. 6th. ser., 1895.) THOMAS die Art *lagurus* als Gattungstypus angibt. MILLER (North American Fauna No. 12, 1896, Washington) hält das für äusserst fraglich, da GLOGER's *Lagurus migratorius* mit dem von LICHTENSTEIN identisch (EVERSMANN's Reise nach Buchara, S. 123. 1823) und letzterer nichts anderes als *Microtus (Lagurus) luteus* (EVERSMANN) ist.

PALLAS berichtete im Band I. seiner «Reisen» (S. 704) bereits im Jahr 1773 über «*Mus Lagurus*», welcher dann 1778 in dem grundlegenden Werk «*Novae species quadrupedum e glirium ordine*»(7) auf den Seiten 210—217 ausführlich beschrieben und auf Taf. XIIIa auch abgebildet wurde.

Im ersten Drittel des vorigen Jahrhunderts ist PALLAS' «*Mus Lagurus*», seiner äusserlichen Lemming-Ähnlichkeit wegen, mit der Gattung *Lemmus* verwechselt worden. Das beweist eine Fussnote von de SELYS-LONGCHAMPS (8, S. 84) folgenden Inhaltes:

«M. Duvernoy classe cependant les Lemmings parmi les Rats-Taupes, en raison de leurs ongles forts et de leurs molaires qui ont des racines; mais cette séparation ne semble pas légitime, puisque

les pieds du *Lemmus lagurus* sont semblables á ceux des Campagnols, et que les dents de l'*Arvicola rubidus* ont des racines lorsque l'animal est adulte.»¹

Erst im Jahr 1841 erkannte GLOGER, dass dieses Nagetier von der Gattung *Mus*, wie auch von *Lemmus* getrennt werden muss und errichtete für dasselbe das neue Genus *Lagurus*, welches 1895 durch MERRIAM zu einer Untergattung degradiert wurde. Trotzdem erzählt NEHRING (9, S. 185) noch 1890 über den «kleinen Steppenlemming» («*Myodes lagurus*»), welcher seines Wissens in unserem Diluvium nicht nachgewiesen ist. Er meint, dass dieses Tier — mit *Ellobius talpinus*, *Spalax typhlus*, *Meriones tamaricinus* und *Erinaceus auritus* zusammen — «den südlichen bezw. südöstlichen, wärmeren Steppen-Gegenden anzugehören und deshalb in der subarktischen Steppen-Fauna des postglacialen Mittel-Europa zu fehlen scheint.»

Die neue Erhöhung auf den Gattungsrang ist in HINTON'S Monographie (2, S. 97) bereits wieder durchgeführt und das Genus auf zwei Untergattungen (*Lagurus* und *Lemmiscus*) geteilt worden. *Lagurus* ist mehr Lemming-ähnlich, mit kürzerem Schweif und vier geschlossenen Dreiecken im dritten unteren Backenzahn; wogegen *Lemmiscus* durch einen längeren Schweif und drei geschlossene Dreiecke im m_3 gekennzeichnet ist. Die altweltlichen *Lagurus*-Arten (*L. lagurus*, *L. luteus*, *L. Przewalskii*) sind ausserdem durch den viel kürzeren Schweif — meist kürzer als der Hinterfuss (10, S. 51) — gekennzeichnet. Diese Eigenschaft verleiht ihnen eine oberflächliche Lemming-Ähnlichkeit, wodurch unter anderen, wie gesagt, auch NEHRING verleitet wurde, diese Tiere als Lemminge zu betrachten. Er behauptet, dass der «kleine Steppen-Lemming» (*Lagurus lagurus*) zusammen mit *Lagurus luteus* «zwischen den echten, nordischen Lemmingen und den Feldmäusen (*Arvicola*) eine gewisse Vermittelung herstellt» (9, S. 86).

¹ Die französischen Zoologen scheinen seinerzeit geglaubt zu haben, die Lemminge besässen bewurzelte Zähne; die Einreihung derselben unter die *Spalacidae* («Rats-Taupes») erscheint uns heute ebenso unmöglich, wie die Auffassung BAILLON'S (Mém. Soc. Em., Abbeville, 1834), nach welcher seinerseits *Clethrionomys glareolus* («*Eratomyx rubidus*») mit *Lagurus* zusammen zu *Lemmus* gestellt wurde.

Aus Nordamerika sind die ersten *Lagurus*-Arten durch COUES und COOPER 1868 unter dem generischen Namen *Arvicola* bekannt geworden (*Lagurus curtatus*, *L. pauperrimus*). Später sind weitere Formen, u. zw. *Lagurus pallidus* durch MERRIAM, *Lagurus intermedius* durch TAYLOR und *Lagurus artemisiae* durch ANTHONY von dort beschrieben worden. Die geographische Verbreitung der neuweltlichen Arten erstreckt sich über die halbariden Distrikte des nordwestlichen Nord-Amerika. Die östlichsten Dokumente ihres Vorkommens in Nord-Amerika stammen von Nord-Dakota und dem nordwestlichen Colorado. In den White Mountains von Kalifornien sind diese Tierchen noch zwischen 8000 und 10,500 Fuss Höhe anzutreffen (11, S. 201).

Lagurus lagurus ist nach NEHRING hauptsächlich in den aralokaspischen Steppen zuhause. Nach EVERSMANN soll er zwar bis zur Breite von Orenburg nordwärts hinaufgehen, dort aber sehr selten sein, dagegen ist er häufig in den Steppen am unteren Uralffluss. *Lagurus luteus* ist ein mehr südliches Element der Fauna der in Betracht kommenden Steppengebiete und geht nach EVERSMANN kaum weiter nordwärts, als bis zum 47. nördl. Breitengrade. (9, S. 86—87).

Nach HINTON (2, S. 68—70) ist *Lagurus* eine in Ost-Europa, Asien und Nordwest-Amerika weitverbreitete, in mancher Hinsicht sehr primitive, in anderer Hinsicht hochspezialisierte, auffallend isolierte Gattung. Sie zeigt im ganzen enge Beziehungen zu *Microtus* und dessen nächsten Verwandten, sowie gewisse Anzeichen einer Abstammung von einer primitiven, *Phenacomys*-ähnlichen Wühlmausform. In bezug auf seine äussere Gestalt stellt *Lagurus* eine, zur fossorialen Lebensweise modifizierte Form dar; die ganze Erscheinung des Tieres ist sehr Lemming-ähnlich; der Schädel in Dorsal-Ansicht auffallend *Dicrostonyx*-artig gebaut. Das Gaumendach ist, wie bei *Microtus*; Mandibel normal, aber mit ziemlich kleinem Angularfortsatz.

Die Backenzähne bleiben lebenslang wurzellos und sind ausserordentlich hochkronig; der Schmelz ist differenziert wie in *Microtus*, jedoch ohne Zementbelag. Das Kauflächenbild ist durch die weiten Synklinalen, die perfekte Alternation der Schmelzprismen, und meistens durch das «Verharren» deutlicher

Spuren von intermediären Höckern in m^{1-2} gut gekennzeichnet. Mit den eigenen Worten HINTON's: « m^1 and m^2 apart from the generic peculiarities are normal, but the second inner fold of m^1 and the inner fold of m^2 are usually complicated by a vestige of the «protoconule» (cusp y) » (Monograph, p. 70). Der m^3 ist einfacher, mit drei oder vier äusseren und zwei oder drei inneren Antiklinalen. Die Beschaffenheit der oberen Zähne und besonders die des m^3 zeigt grosse Ähnlichkeit mit jener der Gattung *Alticola*. Am ersten unteren Backenzahn sind 5 geschlossene Dreiecke vorhanden (wie bei *Microtus*); m_2 normal; die Aus- und Einbuchtungen am m_3 weniger reduziert als gewöhnlich.

Die bisher bekannten *lebenden* Repräsentanten der Gattung sind:

- Lagurus lagurus* (PALLAS), Westsibirien, Zentralasien,
- Lagurus luteus* (EVERSMANN), Osteuropa, Turkestan, Aralgebiet,
- Lagurus Przewalskii* (BÜCHNER), Zentralasien,
- Lagurus curtatus* (COUES), westl. Nord-Amerika,
- Lagurus pauperrimus* (COOPER), westl. Nord-Amerika,
- Lagurus pallidus* (MERRIAM), westl. Nord-Amerika,
- Lagurus intermedius* (TAYLOR), westl. Nord-Amerika,
- Lagurus artemisiae* (ANTHONY), westl. Nord-Amerika.

Zum Vergleich mit den fossilen Resten konnte durch die Bereitwilligkeit des Herrn Privatdozenten Dr. ÉHRK, Kustoden am Nationalmuseum in Budapest, ein Schädel mit den dazu gehörenden Unterkieferästen eines männlichen Exemplars von *Lagurus lagurus* (PALLAS) aus Semipalatinsk (Westsibirien) herangezogen werden.

Der Typus von *Lagurus pannonicus* KORM. ist ein Schädelfragment mit den beiderseitigen m^{1-2} und mit Spuren des «Protoconulus» vom Somlyóberg bei Püspökfürdő (12, S. 246).

Vergleicht man den Schädel von *Lagurus lagurus* mit dem Typus von *Lagurus pannonicus*, so lassen sich zwischen den beiden namhafte Unterschiede vermerken. Diese bestehen der Hauptsache nach in Form und Grösse der Foramina incisiva und in der Gestalt des Gaumendaches. Am fossilen Schädelbruchstück sind nämlich die Fora-

mina incisiva um ein beträchtliches länger und, besonders vorn, auch weiter. Das Gaumendach desselben ist dagegen viel schmaler, wie am rezenten Schädel; die Palato-maxillarnaht kommt ein wenig mehr nach vorn (zwischen m^1 und m^2) zu liegen, als bei *Lagurus lagurus*; der Mitteldamm ist viel breiter als bei dem letzteren; die Lateralfurche bedeutend enger. Nach den Abbildungen urteilend, scheint *Lagurus pannonicus* in bezug auf seine obigen Merkmale *Lagurus luteus* etwas näher zu stehen.

Von den oberen Backenzähnen haben sich im Typusexemplar nur m^1 und m^2 vorgefunden, gelegentlich meiner letzten Sammel-
exkursion zu Pfingsten 1931 gelang es mir aber am Somlyóberg bei Püspökfürdő ein Craniumfragment zu sammeln, in welchem neben dem rechten m^1 und m^2 auch der linke m^2 und m^3 enthalten sind. Ausserdem liegen mir jetzt auch lose m^3 von Püspökfürdő vor und auch am Kalkberg bei Villány (Südseite des Steinbruches) gelang es mir zwei solche zu erbeuten, was um so erfreulicher ist, weil eben der m^3 für die Identifizierung der Gattung von ausschlaggebender Wichtigkeit ist. Dieser Zahn ist stets mehr oder weniger vereinfacht, erinnert gewissermassen an *Alticola* und ist für das Genus *Lagurus* in hohem Masse charakteristisch. Die Ähnlichkeit dieses Zahnes, besonders in bezug auf einzelne asiatische Arten, mit jenem von *Alticola* ist bereits 1896 durch MILLER hervor-
gehoben worden. Er äussert sich über diese Frage (10, S. 51) folgenderweise:

«The posterior maxillary tooth differs considerably in form among the various species. In certain American species the loops and angles are arranged exactly as in *M. (Arvicola) terrestris*, while in *M. przewalskii* and *M. luteus* the tooth, although retaining the same number of elements, is remarkably like that of some of the species of *Alticola*.» «This resemblance to *Alticola* results from the unusual elongation of the posterior loop. In *Microtus lagurus* there are three tightly closed triangles, and the terminal loop has a well developed salient angle on each side at the base.»

Bei HINTON (2, S. 70) lesen wir diesbezüglich folgendes: « m^3 is more or less simplified, with three or four outer and two or three inner salient angles. In general appearance the upper molars, particularly m^3 , show a strong likeness to those of *Alticola*.»

Der erste obere Backenzahn unseres Fossils besteht — wie bei sämtlichen rezenten *Lagurus*-Arten — aus drei Innen- und drei Aussen-Antiklinalen, zwischen welchen je zwei, weite und tiefe Einbuchtungen sich befinden. Die dritte Lateralausbuchtung ist caudalwärts in einem Stiel ausgezogen, mittels welchem der Zahn sich an den zweiten Backenzahn anlehnt. Die Dreiecke sind fast ganz oder vollkommen geschlossen. In der zweiten Innensynklinale des m^1 ist am Typus-Exemplar, sowie auch am Schädelbruchstück von Villány-Kalkberg (Südseite) eine kleine Schmelzausbuchtung, die «Spur des Protoconulus» im Sinne HINTON's wahrzunehmen. An dem betreffenden Zahn der drei anderen Schädelbruchstücke von Püspökfürdő ist diese höckerartige Schmelzausbuchtung nicht vorhanden.

Der m^2 besteht aus zwei Innen- und drei Aussen-Antiklinalen, zwischen welchen auf der Aussenseite zwei Einbuchtungen und auf der Innenseite eine Synklinale sich befinden. In der Innensynklinale dieses Zahnes ist am Typus-Exemplar, ferner an einem weiteren Maxillenfragment von Püspökfürdő, sowie auch an dem bereits erwähnten Villány-Kalkberger Exemplar deutlich die Spur des — für *Lagurus* charakteristischen — höckerartigen Schmelzvorsprunges zu beobachten. An den übrigen Belegen fehlt die Spur desselben auch am zweiten oberen Backenzahn. Die Dreiecke dieses Zahnes sind ebenfalls geschlossen; seine dritte Aussensynklinale lehnt sich mit ihrem Stiel an den dritten Backenzahn an.

Der m^3 besteht aus drei äusseren und zwei inneren Antiklinalen, zwischen welchen sich auf der Aussenseite zwei Synklinalen befinden. Auf der Innenseite ist bloss eine, tiefe Einbuchtung vorhanden, in welcher keine Spur eines höckerartigen Schmelzvorsprunges beobachtet werden kann. Die hintere Partie des Zahnes ist sehr vereinfacht und besteht aus einem ziemlich langen, hinter den zwei letzten Antiklinalen beginnenden, caudalwärts etwas verbreiterten Stiel. Dieses Kauflächenbild entspricht vollkommen jenem des m^3 von *Lagurus luteus* (vergl. 10, S. 50, fig. 25 c und 2, S. 70, fig. 43 a), d. i. der hintere Stiel des Zahnes ist flachrandig, ohne weiteren Ausbuchtungen, wogegen derselbe bei *Lagurus lagurus* (10, S. 50, fig. 25 b) aussen und innen mit einer vierten, resp.

dritten Antiklinale verstärkt ist. Eine Andeutung auf den letzteren Grundplan findet sich bloss an einem m^3 von Villány-Kalkberg (Südseite), bei welchem der etwas verkürzte caudale Stiel mit einer äusseren und einer inneren, schwachen Längsrippe verziert erscheint, wodurch das Kauflächenbild beiderseits einen kleinen Schmelzvorsprung erkennen lässt.

An den übrigen Exemplaren ist die Gestalt des m^3 von jenem des *Lagurus luteus* nicht abweichend und zeigt tatsächlich viel Ähnlichkeit mit dem dritten oberen Backenzahn gewisser *Alticola*-Arten, insbesondere mit dem von *Alticola Stracheyi* (2, S. 302, fig. 2 a und 16).

Die Länge der zwei ersten Backenzähne beträgt 3.46—3.75, die des m^3 1.54—1.86 mm.

In der Form, Stärke und Krümmung des Nagezahnes ist, gegenüber *Lagurus lagurus*, kein Unterschied wahrzunehmen.

Der *Unterkiefer* des fossilen Tieres ist von charakteristischer Beschaffenheit. Der Symphysenteil desselben ist kräftig, gedrunken; vor dem ersten Backenzahn — an der lingualen Seite — meist mit einer Grube und einem, sich in der Mitte derselben befindlichen Nervenforamen; Angularfortsatz kurz, breit und im allgemeinen viel kräftiger als bei *Microtus* oder *Pitymys*, vielleicht noch etwas stärker, wie bei *Lagurus lagurus*; m_3 nicht so weit lingualwärts verschoben, wie bei *Microtus*; Nagezahn bis zum Foramen alveolare oder noch etwas darüber hinaufreichend; das Foramen alveolare *Pitymys*-artig mehr labial liegend (wie bei *Lagurus lagurus*); an der Labialseite, in der Gegend des m_2 , sind 2—4 Nervenforamina vorhanden. Die Länge des Unterkiefers beträgt — von der Spitze des Nagezahnes bis zum Condylus gemessen — 15—17 mm.

Der erste untere Backenzahn ist im allgemeinen jenem von *Lagurus luteus* (2, S. 70, fig. 43 b) auffallend ähnlich, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Dentinfelder des, hinter der Kappe der Vorderschleife sich befindlichen Antiklinal-Paares bei *Lagurus panonicus* stets *Pitymys*-artig konfluent sind und dadurch hier bloss drei geschlossene Dreiecke (statt fünf!) bestehen. Die Ausbildung der Vorderschleife ist sehr variabel. Die geologisch ältesten Exemplare von Beremend

besitzen eine ziemlich tief eingeschnürte, fast runde Kappe, welche auf der Labialseite spitzförmig ausgezogen ist. Hinter der Kappe ist das, bereits erwähnte, konfluente Antiklinalpaar zu beobachten, worauf dann drei, mehr oder weniger geschlossene Dreiecke und schliesslich die Hinterschleife, folgen. Mit der Schmelzspitze der Vorderkappe sind also in diesem Falle je vier Ausbuchtungen, beiderseits mit 3—3 Synklinalen, vorhanden. Bei einer Anzahl der geologisch etwas jüngeren Belege von Püspökfürdő ist die soeben geschilderte Anordnung der Zahnelemente zu beobachten, wogegen die Vorderkappe des m_1 an den meisten von dort stammenden Exemplaren durch das Fehlen der labialen Schmelzspitze gekennzeichnet ist. In diesem Fall sind also bloss drei äussere und vier innere Antiklinale vorhanden. Die zwei Typen sind durch Übergänge miteinander verbunden. Die geologisch jüngsten Exemplare vom Nagyarsányberg und von der Südseite des Villányer Kalkberges endlich zeigen ausnahmslos die einfachere (reduzierte) Gestalt, bei welcher die labiale Schmelzspitze nicht entwickelt ist. Die Kappe selbst ist meistens auf beiden Seiten tief eingeschnürt, in der Längsachse mehr oder weniger ausgezogen und etwas querstehend, ähnlich wie das auf Fig. 43 b in der HIXTON'schen Monographie (2, S. 70) zu sehen ist. In manchen Fällen — besonders an einzelnen Zähnen von Püspökfürdő — ist die Abschnürung der Vorderkappe nicht so tiefgreifend wie gewöhnlich, wodurch eine Konfluenz derselben mit dem vordersten Antiklinalpaar. *Arvicola*-artig, bestehen bleibt.

Von hohem Interesse ist der m_1 eines juvenilen Tieres von Püspökfürdő (Taf 1, Fig. 5), an dessen vorderster Aussenantiklinale ein kleiner Schmelzvorsprung, d. i. die Spur der ursprünglichen *Mimomys*-Kante, mit der, sich hinter demselben sich befindlichen, seichten Prismenfalte zu beobachten ist. Dieses Bild erinnert lebhaft an jenes, welches an einem jungen m_1 von *Mimomys Newtoni* des British Museums (2, S. 354, Fig. 99, 18) zum Ausdruck gelangt.

Am zweiten und dritten unteren Backenzahn sind je drei äussere und innere Ausbuchtungen mit 2—2, zwischen demselben

liegenden Synklinalen vorhanden. Vor der Hinterschleife befinden sich an beiden Zähnen vier, mehr oder weniger geschlossene Dreiecke, deren vorderstes eigentlich mehr trapezoidförmig und meist in einem langen Stiel ausgezogen ist, mittels welchem sich der m_2 auf die Hinterschleife des m_1 , der m_3 aber auf den m_2 anlehnt.

Die Schmelzprismen sämtlicher Zähne, besonders die der unteren, sind in der Längsachse sehr auseinander gezogen, wodurch weit klaffende, tiefe Einbuchtungen entstehen. Diese Eigenschaft der Zähne ist — besonders am m_3 — oft derart extrem, dass dadurch eine Konfluenz sämtlicher Dentinfelder über den ganzen Zahn bestehen bleibt. Ähnlich der rezenten Arten, ist auch bei dem fossilen *Lagurus pannonicus* keine Zementablagerung in den Zahnsynklinalen vorhanden.

Die Alveolarlänge der unteren Zahnreihen variiert zwischen 5·2—5·9 mm. Die Zahnreihe der mir vorliegenden rezenten *Lagurus*-Mandibel ist 5·8 mm lang.

Abgesehen von den wurzellosen Zähnen, erinnert *Lagurus pannonicus* in bezug auf den Bauplan seiner Molaren auffallend an *Mimomys Newtoni*, bei welchem die Zahnprismen in der Längsachse beinahe ebenso auseinander gezogen sind. Die Exemplare mit dem Schmelzvorsprung am m_1 sehen den durchschnittlichen von *Mimomys Newtoni* besonders ähnlich (vergl. 1, Taf. VIII, Fig. 1). Unterstützt wird diese Ähnlichkeit auch durch den m_1 des oben erwähnten juvenilen Unterkiefers von Püspökfürdő, welcher durch das Vorhandensein einer schwachen Mimomyskante — offenbar als Rückschlag — *Mimomys Newtoni* noch näher zu stehen kommt.

Solange *Lagurus pannonicus* mir nur in seiner primitiveren Form von Beremend und in der mehr reduzierten, «moderneren» vom Nagyharsányberg vorlag, war ich fest überzeugt, mit zwei verschiedenen Arten zu tun zu haben. Mit dem Auffinden dieser beiden — durch eine geschlossene Übergangsreihe miteinander verbundenen — Endformen in der Fauna von Püspökfürdő fällt diese Möglichkeit natürlich weg. Es

kann sich m. E. vielmehr um einen, noch in stammesgeschichtlicher Entwicklung begriffenen Kollektivtypus handeln, welcher neben heute nicht mehr auftretenden altertümlichen Merkmalen gewissermassen auch solche Charaktere aufweist, die bereits die spätere Entzweispaltung anzudeuten scheinen und möglicherweise schon den Weg der Ausbildung zu den heutigen zwei Subgenera der Gattung *Lagurus* markieren.

Wie bereits erwähnt, kommt in Beremend meines Wissens nur die altertümlichere, am Nagyharsányberg und an der Südseite des Kalkberges (Villány) aber nur die mehr evoluierte Form vor, wogegen in der Fauna von Püspökfürdő die beiden nebeneinander vorhanden sind! Diese Tatsache verdient umsomehr Aufmerksamkeit, da dieser Entwicklungsgang auch der festgestellten stratigraphischen Reihenfolge der Faunen vollkommen entspricht. Um diesen Entwicklungsgang besser zu veranschaulichen, habe ich den Prozentsatz der altertümlicheren und moderneren Exemplare von Püspökfürdő unter 200 Mandibeln (103 rechte, 97 linke) festgestellt und in einer tabellarischen Übersicht mit den Belegen von Beremend, dem Nagyharsányberg und der Südseite des Kalkberges bei Villány der geologischen Reihenfolge entsprechend zusammengestellt. Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, dass während sämtliche in Beremend gefundene Reste der primitiven und jene vom Nagyharsányberg und Villány-Kalkberg der mehr evoluierten Form angehören, unter den zahlreichen Belegen von Püspökfürdő — d. i. des erdgeschichtlichen Übergangshorizontes — 28% «primitive», 15·5% Übergänge und 56·5% «moderne» Exemplare nachgewiesen werden konnten.

Tabellarische Übersicht der Entwicklung des ersten unteren Backenzahnes
 (m₁) bei *Lagurus pannonicus* KORM.

Fundort	Horizont	Stückzahl insgesamt	«Primitiv»	Übergänge		«Modern»	%
				%	%		
Beremend	Unteres Cromerian	3	3	100	—	—	—
Püspökfürdő	Mittleres Cromerian	200	56	28	31	15.5	113
Nagyharsányberg	Oberes Cromerian	10	—	—	—	10	100
Villány-Kalkberg (Südseite)	Oberes Cromerian	27	—	—	—	27	100

Wenn wir auch in der «modernen» Form, welche in der Fauna von Püspökfürdő überwiegt, in jener des Nagyharsányberges und an der Südseite des Villányer Kalkberges jedoch bereits ausschliesslich ist, gegenüber der primitiveren entschieden mit einer, durch Reduktion hervorgerufenen, «fertigen» Mutation zu tun haben, kann diese, durch Übergänge verbundene Formenreihe als eine Art aufgefasst werden, welche sich möglicherweise als gemeinsamer Ausgangspunkt der rezenten eurasiatischen *Lagurus*-Arten erweisen wird. Die, bei *Lagurus pannonicus* nachgewiesene jugendliche Zahnkomplikation (*Mimomys*-Kante), sowie der Umstand, dass diese ausgestorbene Form in bezug auf ihre Gebiss-Struktur dem wurzelähnigen *Mimomys Newtoni* noch sehr nahe steht, sprechen allenfalls dafür, dass wir in *Lagurus pannonicus* mit einer sehr altertümlichen Form der Gruppe zu tun haben. Neben *Pitymys* und *Arvicola* scheint eben *Lagurus* eine der ältesten Gattungen zu sein, deren Vertreter durch wurzellose Backenzähne gekennzeichnet sind. Auffallend ist es nur, dass die Spuren der intermediären Höcker («Protoconulus» bei HINTON), welche nach HINTON bei den rezenten Repräsentanten der Gattung stets vorhanden sind und von ihm als lebenslang persistierende Rückschlagserscheinungen gedeutet werden, bei der fossilen Form nur in einzelnen Fällen nachzu-

weisen waren. Ich halte es demzufolge für nicht ausgeschlossen, dass dieses Merkmal bei den rezenten Vertretern der Gruppe nicht als Rückschlagserscheinung, sondern eher als ein, durch Adaptation neu erworbenes Merkmal aufzufassen ist, welche bei der oberpliocänen Form zwar schon in Entwicklung begriffen, aber noch nicht ganz fixiert war.

Wenn auch die Zahnreduktion im allgemeinen als Zeichen einer höheren Entwicklungsstufe betrachtet werden kann, sind uns auch viele Fälle bekannt, in welchen an Säugetierzähnen eine adaptive Ausbildung von Sekundärhöckern zustande kommt. Eine ähnliche Erscheinung könnte bei *Lagurus* unso wahrscheinlicher sein, da die lebenslang persistierenden Spuren solcher Sekundärhöcker allein für diese Gattung bezeichnend sind und bei den übrigen Microtinae bisher nur in Ausnahmefällen (z. B. bei *Arvicola*, 2, S. 111, Fig. 59) nachgewiesen werden konnten, wogegen andere, bloss im Jugendalter vorhandene und infolgedessen als Rückschläge aufzufassende Zahnkomplikationen bei den verschiedensten fossilen und rezenten Formen zu beobachten sind.

Der durch sein *Mimomys*-artiges Gaumendach, die Spuren der *Mimomys*-Kante (Prismenfalte) und die stets konfluenten ersten (vordersten) Schmelzprismen des m_1 charakterisierte *Lagurus pannonicus* zeigt — trotz seiner grossen Übereinstimmung mit dem mehr evoluierten *Lagurus luteus* — gewisse Merkmale, auf Grund welcher auch an eine generische Abtrennung der fossilen Form von der rezenten Gattung gedacht werden könnte. Nachdem aber mir von den lebenden Arten aus Autopsie bloss *Lagurus lagurus* bekannt ist und besonders über das jugendliche Gebiss der rezenten Formen keine Anhaltspunkte zur Verfügung stehen, möchte ich diese Trennung einstweilen nicht durchführen. Für den Fall, dass die fossile Art nicht in die rezente Gattung *Lagurus* einverleibt werden könnte, schlage ich für die erstere die Aufstellung eines neuen Genus vor, welches dann *Prolagurus* genannt werden soll.

Dass *Lagurus pannonicus* einerseits mit *Mimomys Newtoni*, andererseits mir den rezenten *Lagurus*-Arten nahe verwandt ist, erscheint mir als evident; ja man könnte sogar an eine gewisse ver-

wandschaftliche Beziehung mit der Gattung *Pitymys* denken. Dass unsere fossile Form ein — möglicherweise direkter — Abkömmling von *Mimomys Newtoni* ist, erscheint ebenfalls als sehr wahrscheinlich. Die näheren Beziehungen zu den rezenten Formen müssen dagegen einer sehr eingehenden Prüfung unterzogen werden, umsomehr, da die Endform unserer Art nicht dem osteuropäisch-asiatischen *Lagurus lagurus*, sondern eigentümlicherweise dem sibirischen *Lagurus luteus* näher zu stehen scheint.

Um Licht in diesen Fragenkomplex bringen zu können, wäre vor allem die Entdeckung osteuropäisch-asiatischer fossiler Formen erforderlich.

Literaturnachweis.

1. MÉHELÛ, L. v.: Fibrinae Hungariae. Ann. Mus. Nat. Hung. XII. Bpest, 1914.
2. HINTON, M. A. C.: Monograph of Voles and Lemmings (Microtinae) living and extinct. Vol. I. London (British Museum), 1926.
3. KORMOS, TH.: Beiträge zur Praglazialfauna des Somlyoberges bei Puspokfurdo. Allattani Közlemények, XXVII. S. 60. Budapest, 1930.
4. KORMOS, TH.: Revision der präglazialen Wühlmäuse vom Gesprengberg bei Brasso in Siebenbürgen. Palaeontol. Zeitschrift. Bd. 15. Berlin, 1933.
5. KORMOS, TH.: Nuove tracce di una «Forest Bed»-Fauna nella regione Adriatica. Le Grotte d' Italia. XI. Milano. 1933.
6. HELLER, FL.: Eine oberpliocäne Wirbeltierfauna aus Rheinhessen. N. Jahrb. f. Min. etc. Beil. Bd. 76. Abt. B. 1936.
7. PALLAS, P. S.: Novae species quadrupedum e glirium ordine etc. Erlangen. 1778.
8. SELYS-LONGCHAMPS, EDM. de: Études de Micromammalogie. Revue des musaraignes, des rats et des campagnoles etc. Paris, 1839.
9. NEHRING, A.: Tundren und Steppen der Jetzt- und Vorzeit. Berlin, 1890.
10. MILLER, GERRIT S.: Genera and Subgenera of Voles and Lemmings. North American Fauna. No. 12. U. S. Departm. of Agricult. Washington, 1896.
11. HALL, E. R.: Notes on the life history of the sake-brush meadow mouse (*Lagurus*). Journ. of Mammal., Vol. 9., No 3., New-York, 1928.
12. KORMOS, TH.: Diagnosen neuer Sangetiere von Puspokfurdo. Ann. Mus. Nat. Hung., XXVII. Budapest, 1930.

Tafel II.

Fig. 1. *Mimomys Newtoni* F. MAJ. Cranium. Villány-Kalkberg, Nordseite. Ung. Nat. Mus. Zool. Abt. Nr. 3805.

Fig. 1a. *M. Newtoni* F. MAJ., Rechte obere Zahnreihe des auf Fig. 1. abgebildeten Craniums.

Fig. 2. *M. Newtoni* F. MAJ. Rechte untere Zahnreihe eines Unterkiefers von Villány-Kalkberg (Nordseite).

Fig. 3—4. *M. Newtoni* F. MAJ. Zwei m_1 dext. Villány-Kalkberg (Nordseite).

Fig. 5. *Lagurus pannonicus* KORM. Püspökfürdő. Juveniler m_1 dext. mit «*Mimomys*-Kante».

Fig. 6—7. *M. Newtoni* F. MAJ. Villány-Kalkberg, Nordseite. Zwei m_1 dext. mit «*Mimomys*-Kante».

Fig. 8. *M. Newtoni* F. MAJ. Villány-Kalkberg, Nordseite; m^3 dext. ohne Schmelzinsel.

Fig. 9. *M. Newtoni* F. MAJ. Villány-Kalkberg, Nordseite; m^3 dext. mit Schmelzinsel.

Sämtliche Originale befinden sich im Besitz der Zool. Abteilung des Ung. Nationalmuseums. Fig. 8 Nr. 3831, alle übrigen Nr. 3805. ausser Fig. 5 (Nr. 3810.).

Originalzeichnungen von Frl. M. MOTTL. Vergrößerung bei Fig. 1.: 5:1, bei allen übrigen: 11:1.

Tafel III.

Fig. 1. *Lagurus pannonicus* KORMOS. Linke untere Zahnreihe vom Nagyharsányberg; m_1 mit reduzierter (moderner) Vorderkappe.

Fig. 2. *Lagurus pannonicus* KORMOS. Rechte untere Zahnreihe von Villány-Kalkberg (Nordseite); m_1 mit primitiver Vorderkappe.

Fig. 3. *Lagurus pannonicus* KORMOS. Rechte untere Zahnreihe von Villány-Kalkberg (Nordseite); m_1 reduziert.

Fig. 4—5. *Lagurus pannonicus* KORMOS. Linker (4) und rechter (5) m_1 von Püspökfürdő.

Fig. 6. *Lagurus pannonicus* KORMOS. Linke obere Zahnreihe von Villány-Kalkberg (Nordseite).

Fig. 7. *Lagurus pannonicus* KORMOS, m^3 sin. vom Nagyharsányberg.

Fig. 8. *Lagurus pannonicus* KORMOS, m^3 sin. von Püspökfürdő.

Fig. 6—8. zeigen die Charakteristische — gegenüber jener von *Mim. Newtoni* äusserst reduzierte — Hinterschleife des m^3 . Sämtliche Originale befinden sich im Besitz der Zool. Abteilung des Ung. Nationalmuseums (Nr. 3810.). Originalzeichnungen von Frl. M. MOTTL. Vergrößerung bei allen Figuren 11:1.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

A FERDE MEGVILÁGÍTÁS NÉHÁNY HATÁSÁRÓL PÁRHUZAMOS POLÁROS FÉNYBEN.

SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR-től (Sopron).

Ismeretes, hogy parányi ásványszemekben a kettőtörés meghatározása nehézségekkel jár, mert a pontos optikai orientációt kellőképpen nem őrizhetjük ellen. Minthogy ilyenkor a tengelyképet alig figyelhetjük meg és az univerzálisztalt sem használhatjuk, az orientáció meghatározása céljából a legmagasabb interferenciaszínű szem kikeresésére vagyunk csupán utalva.

Az alábbiakban vizsgálni fogjuk, hogy miként határozható meg a pontos optikai orientáció még ebben az esetben is ferde átvilágítás segítségével párhuzamos poláros¹ fényben. Másrészt pedig látni fogjuk, hogy a ferde megvilágítás önkénytelen téves alkalmazása az útkülönbség-méréseknél hibát okozhat akkor is, ha az orientációt a szokásos módon, konvergens fényben a tengelykép alapján megállapítottuk.

Már SCHROEDER van der KOLK² utalt arra, hogy bizonyos esetekben az optikai orientáció, a karakter és az egy-, ill. kéttengelyűség is meghatározható a ferde megvilágítás segítségével. U. i. a ferde, optikailag egytengelyű metszeteken az útkülönbség csökken,

¹ Tudvalevően az ú. n. «párhuzamos poláros megvilágítás» esetében is bizonyos mértékig «konvergens» fényel dolgozunk. Az ilyen «párhuzamos» fénynyalákból szűkítünk ki különféle ferde nyalábokat pl. SCHNEIDERHÖRN tolófényszűkítőjével.

² J. L. C. SCHROEDER van der KOLK: Über die Vortheile schiefer Beleuchtung bei der Untersuchung von Dünnschliffen im parallelen polarisierten Lichte. Zeitschr. für wiss. Mikroskopie, VIII. 1891. pp. 456—458.

az egyik-, nő a másik irányban, ha a megvilágító fénynyalábot az optikai tengellyel párhuzamos rezgésirányban forgatjuk, viszont mindkét irányban nő az útkülönbség, ha a forgatás az opt. tengelyre merőleges rezgésirányban történik. Ha megállapítjuk, hogy az így meghatározott opt. tengely irányával a kisebbik, vagy a nagyobbik törésmutató esik-e egybe, akkor a kettőstörés karaktere is kiadódik. Arra is rámutatott, hogy az optikailag kéttengelyű ferde metszeteknél az interferenciaszinek eme változása mindkét rezgésirányban asszimmetrikusan történik.

FEDOROV³ is foglalkozott a párhuzamos poláros fényben történő ferde megvilágítás kérdésével. Ő azonban, mint ismeretes, a ferde átvilágítást főleg viszonylagosan alkalmazta olyan módon, hogy magát az ásványmetszetet forgatta, amiből az újabban nagyon elterjedt univerzálmodszere fejlődött ki. Az ilyen viszonylagos ferde megvilágítást egyébként SCHROEDER van der KOLK⁴ és tanítványa⁵ is alkalmazták. Ők azonban a forgatást nem forgatóasztal, hanem üvegfélgömb segítségével végezték.

SCHNEIDERHÖHN⁶ a ferde megvilágítás hatását tanulmányozta a különböző orientációjú ásványszemek esetére. Minthogy azonban ő a fénysugár úthosszúságának növekedését a ferde átvilágításakor nem vette kellőképp tekintetbe, megállapításai, mint WRIGHT (lásd alább) kimutatta, nem mindenben helytállóak. Egyébként látni fogjuk, hogy SCHNEIDERHÖHN sémái is érvényesek, csak hogy nem vékonycsiszolatokra, hanem gömbalakú szemekre, centrális beállítás mellett. — SCHNEIDERHÖHN a ferde megvilágítás céljaira az EXNER-féle mikrorefraktometerhez hasonló készüléket, az ú. n. «tolófényszűkítő»-t szerkesztette.

³ E. v. FEDOROV: Einfaches Verfahren zur Bestimmung des absoluten optischen Zeichens eines unregelmässigen Mineralkörnchens in Dünnschliffen, Zeitschr. für Kryst. etc. XXIV. 1895. pp. 603—605.

⁴ J. L. C. SCHROEDER van der KOLK: Zur Systembestimmung mikroskopischer Krystalle, Zeitschr. für wiss. Mikr. XII, 1895. pp. 188—192.

⁵ E. G. A. ten SIETHOFF: Beitrag zur Krystalluntersuchung im convergenten polarisierten Lichte. Centralbl. für. Min. etc. 1903. pp. 657—658.

⁶ H. SCHNEIDERHÖHN: Die Beobachtung der Interferenzfarben schiefer Strahlenbündel als diagnostisches Hilfsmittel bei mikroskopischen Mineraluntersuchungen, Zeitschr. für Kryst. Bd. L. 1912. pp. 231—241.

WRIGHT⁷ elsősorban a ferde megvilágítás különféle módjait vizsgálta. Rámutatott továbbá arra, hogy az optikai tengelysíkkal párhuzamos planparallel metszetekben — eltérően SCHNEIDERHÖHN megállapításától — csak az első bisektrixszel párhuzamos főrengési irányban jelentkezik ferde megvilágításkor az interferenciaszín esése, ellenben a II. bisektrixszel párhuzamos főrengési irányban az interferenciaszín emelkedik. Bebizonyította továbbá, hogy párhuzamos poláros fényben ferde megvilágítás hatására általában ugyanazok az interferenciaszín-változások észlelhetők, amelyeket poláros fényben a tengelyképen látunk. A ferde megvilágítás alkalmazása párhuzamos poláros fényben ezért szerinte nem jelent semmiféle előnyt a tengelyképekkel szemben.

Habár WRIGHT eme utóbbi felfogását is sok esetre vonatkozóan helyesnek ismerhetjük el, mégis rámutathatunk arra, hogy pl. olyankor, amikor a tengelykép többé már nem állítható elő a szokott élességgel, a párhuzamos poláros fényben alkalmazott ferde átvilágítás még gyakran jó szolgálatot tehet a mikroszkopos ásványhatározásnál. Ez vonatkozik igen kis ásványszemekre, továbbá azokra az ásványokra, amelyek keskeny lécekből állanak. Ezzel az eljárással pl. kalcitba ágyazott (!) $14\ \mu$ átmérőjű kvarcsemen, továbbá ugyancsak kalcitba ágyazott $6\ \mu$ széles csillámlemezen is végeztem meghatározást.

A párhuzamos poláros fényben ferde megvilágításkor jelentkező interferenciaszínváltozások megfigyelését valamilyen — pl. BEREK-féle — kompenzátor alkalmazásával tehetjük érzékenyebbé. A BEREK-féle kompenzátorral történő mérés esetünkben azonban rendszerint csak akkor eléggé érzékeny, ha nem teljes kompenzációra, hanem túlkompenzálas által az érzékeny ibolya-színre végezzük a beállítást. Ilyen beállítással a BEREK-féle kompenzátor addíciós helyzetben is használható olyan szemeknél, amelyeknek interferenciaszíne magában nem magasabb az érzékeny ibolyánál. Ez utóbbi esetben azonban tekintetbe veendő, hogy a kompenzátoron jelentkező nagyobb forgatási szögnek kisebb útkülönbség

⁷ F. E. Wright: Oblique illumination in petrographic microscope work, Amer. Journ. of Science, vol. 35, 1913. pp. 63—82.

felel meg. (A BEREK-kompenzátor érzékenységének ilyen módon való növeléséről részletesebben más helyen szólunk.)

Az ilyen gyakorlati alkalmazhatásokra való tekintettel megállapítottam a ferde megvilágítással észlelhető fontosabb diagnosztikai jelenségeket különböző optikai jellegekre és orientációkra nézve. Kiderült, hogy a jelenségek és egyszersmind a meghatározási lehetőségek lényegesen különböznek aszerint, hogy planparallelnek tekinthető vékonycsiszolatot, vagy többé-kevésbé gömbalakúnak tekinthető szabad üledékszemet vizsgálunk-e. Planparallel lemezeknél ugyanis az interferenciaszint a fénysugár által a kristályban megtett út hosszúságának növekedése is befolyásolja. Gömbalakú szemeknél viszont a gömb középpontjára történő beállítás esetén a fénysugárnak a kristályban megtett úthosszúságát állandónak tekinthetjük a különböző irányokban. A gömb legmagasabban (vagy legalacsonyabban) fekvő pontjának beállítása esetén pedig a fénysugárnak a kristályban megtett útja annál kisebb, minél ferdebb az átvilágítás.

Az alkalmazandó eljárás a következő: meghatározzuk a rezgésirányokat (α és γ) és vizsgáljuk az interferenciaszínváltozásokat mindkét rezgésirányban, tehát diagonális állásban fokozatosan elferdülő megvilágítás mellett. A ferde átvilágítást akár a tükör elforgatásával, akár fokozatos oldalas fényszűkítés útján eszközölhetjük. A megfigyelést mind a két síkban a centrális megvilágítástól számított mindkét (+ és —) irányban elvégezzük. (Egy másik eljárási módot adott meg SCHROEDER van der KOLK. Eszerint a tükröt egy bizonyos szöggel elforgatva állandó ferde átvilágítást alkalmazunk és a színváltozásokat a különböző irányokban a tárgyasztal elforgatásával eszközöljük.)

A színváltozások lehetnek: 1. mindkét rezgésirányban mindkét oldal felé különbözőek: aszimmetrikus helyzet, 2. az egyik rezgésiránynak két (t. i. a + és —) oldalán egyenlők: monoszimmetrikus helyzet és 3. mindkét rezgésirányban a két-két oldal felé egyenlők: diszimmetrikus helyzet. E tekintetben a planparallel lemezek nem különböznek a gömbalakú szemektől.

1. Aszimmetrikusan viselkednek az optikailag kéttengelyű kristályok ferde metszetei.

2. Monoszimmetrikusak egyrészt az optikailag egytengelyű

kristályok ferde metszetei és másrészt az optikailag kéttengelyű kristályoknak valamelyik opt. szimmetriatengellyel párhuzamos metszetei.

3. Diszimetrikusak egyrészt az optikailag egytengelyű kristályoknak a tengellyel párhuzamos vagy arra merőleges metszetei és másrészt az optikailag kéttengelyű kristályoknak valamelyik opt. szimmetriatengelyre, vagy egyik binormálisra merőleges metszetei.

Diszimetrikusak tehát az ú. n. *orientált metszetek*. Ezeknek közelebbi meghatározása az alábbi táblázat szerint történhetik. E táblázatból kiténik, hogy az ilyen diszimetrikus szemek különféleképpen viselkednek aszerint, hogy planparallel metszetek, vagy pedig gömbalakú szemek alakjában vizsgáljuk-e őket. (A táblázat csak a gyakorlatban előforduló, kisebb mértékben ferde megvilágítás eseteit tünteti fel.) Amint látható a táblázatból, a centrális

A ferde megvilágításnál jelentkező fontosabb diszimetrikus interferenciaszínváltozások.

Orientáció		Kétfőtörés karaktere	Gömbalakú (szabad) szemeknél		Planparallel metszeteknél	
			γ'	α'	γ'	α'
Opt. egy- tengelyű	$e \parallel$	+	csökken	változatlan	csökken	nő
		-	változatlan	csökken	emelkedik	csökken
Optikailag kéttengelyűeknél	$\beta \perp$	+	erősebben csökken	gyengébben csökken	csökken	emelkedik
		-	gyengébben csökken	erősebben csökken	emelkedik	csökken
		\pm^*	csökken	csökken	változatlan	változatlan
	$\alpha \perp$	+	csökken	gyengén emelkedik	csökken	emelkedik
		-	csökken	emelkedik	csökken	emelkedik
	$\gamma \perp$	+	emelkedik	csökken	emelkedik	csökken
-		gyengén emelkedik	csökken	emelkedik	csökken	

* $2V=90^\circ$.

megvilágítású gömbalakú szemeken lényegileg olyan jelenségeket észlelhetünk, amelyeket SCHNEIDERHÖHN a vékonycsiszolati szemekre nézve tételezett fel. Az is kitűnik e táblázatból, hogy gömbalakú szemeken az optikai egy-, ill. két-tengelyűség, továbbá az optikai (+ vagy —) jelleg és végül az optikai orientáció ilyen módon könnyen meghatározható; viszont planpallellel lemezeken csak 3 esetet különböztethetünk meg, nevezetesen:

1. Az útkülönbség növekedik az α' , csökken a γ' irányban. Ez esetben vagy optikailag egytengelyű + karakterű kristálynak az opt. tengellyel párhuzamos metszetével, vagy optikailag kéttengelyű, + karakterű kristálynak $\beta \perp$ metszetével, vagy pedig kéttengelyű (akár +, akár — karakterű) kristálynak $\alpha \perp$ metszetével van dolgunk.

2. Az útkülönbség csökken az α' , nő a γ' irányban. Ez esetben vagy optikailag egytengelyű, — karakterű kristálynak a tengellyel párhuzamos metszetéről, vagy kéttengelyű, — karakterű kristálynak a $\beta \perp$ metszetéről, vagy pedig kéttengelyű (akár +, akár — karakterű) $\gamma \perp$ metszetről van szó.

3. Ha az interferenciaszín mindkét rezgés irányban, mindkét oldal felé változatlan marad, akkor a táblázat szerint kéttengelyű, 90° -os tengelyszögű kristálynak a $\beta \perp$ metszetét vizsgáljuk. Megjegyzendő azonban, hogy gyakorlatilag az összes alacsony interferenciaszínű szemem csak gyenge színváltozás észlelhető.

(Az optikai tengelyre, ill. a binormálisok egyikére merőleges metszetek tulajdonképpen külön 4. esetet képviselnek. Minthogy azonban ezeknek a metszeteknek a viselkedése ferde megvilágítás esetében közvetlenül belátható, ezért a táblázatban ezt az esetet nem tüntettük fel.)

Mindebből láthatjuk, hogy az eddigi felfogástól eltérően a két főrezgési iránnyal párhuzamos síkban történő ferde átvilágítással, párhuzamos poláros fényben, a vékonycsiszolati szemeknek sem az optikailag egy- vagy kéttengelyűsége, sem az optikai karaktere, sem pedig a közelebbi orientációja nem állapítható meg. A közelebbi meghatározáshoz, (az α' , ill. γ' irányok ismeretén kívül) még egy adat szükséges. Tekintettel a kis szemeken végzendő meghatározásokra, ilyen pótló adatként a kettőtörésnek a kérdéses ásvány többi szemeihez viszonyított relatív nagyságát használhatjuk fel

célszerűen. Ha a disszimmetrikus szem kettőtörése maximális, akkor a metszet az optikai tengellyel, ill. az opt. tengelysíkkal párhuzamos és ferde megvilágítással a táblázat alapján a karaktere is megállapítható. Ilyen szemeknél azonban az egy-, vagy kéttengelyűséget nem állapíthatjuk meg a ferde átvilágítás útján. Ha a disszimmetrikus szem kettőtörése nem maximális, hanem intermedier, akkor a metszet csakis kéttengelyű lehet és a ferde átvilágítási sémából azt is megállapíthatjuk, hogy α -ra, vagy γ -ramerőleges-e. Ez esetben viszont a karakter nem határozható meg.

Nagyon kis $2V$ -értékek esetén a kettőtörés viszonylagos magasságát nem állapíthatjuk meg egykönnyen, minthogy nagysága vagy az α -ra merőlegesen csaknem olyan nagy, mint β -ra merőlegesen (pozitív karakter), vagy pedig γ -ra merőlegesen csaknem olyan nagy, mint β -ra merőlegesen (negatív karakter). Ilyenkor tehát a karakter állapítható meg biztosan. U. i. az az interferenciaszínváltozás, amely a $\beta \perp$ metszeteknél $+$ karakternek felel meg, minden nagy kettőtörésű disszimmetrikus metszeten az ásvány $+$ karakterét jelenti, tehát olyankor is, ha a metszet α -ra volna merőleges. Viszont a $\beta \perp$ metszeteknél negatív karakternek megfelelő változás a $\gamma \perp$ metszeteknél is negatív karaktert jelent.

A kis $2V$ -értékek a ferde megvilágítás útján a $\beta \perp$ metszetekben az útkülönbségnek erősebb növekedéséből ill. csökkenéséből ismerhetők fel. A szem- ill. metszetvastagság ismerete esetében tehát a ferde megvilágítás alkalmazásával az optikai tengelyszöget is megbecsülhetjük hozzávetőlegesen. Ehhez azonban nemcsak az interferenciaszín változásának kompenzátoros mérése, hanem a megvilágítás ferdeségének a számszerű ismerete is szükséges.

Az eljárás használhatóságát vékonycsiszolatoknál korlátozza az a körülmény, hogy a ferde átvilágításnál igen kis szemek esetében előáll a szomszédos szem egyidejű átvilágításának a veszélye.

A ferde megvilágítás eme gyakorlati alkalmazásainál olyan pontosan juszálható készüléket használhatunk, amelynek segítségével az átvilágítás ferdeségét mennyilegesen lehet változtatni. Nemcsak a tengelyszög becsléséhez szükséges ilyen készülék. A szimmetrikus interferenciaszínváltozások is csak akkor ismerhetők fel biztosan, ha az átvilágítás pontosan a diagonális síkban mozdul el. Ellenkező esetben pl. ferde egytengelyű metszetenél monószim-

metrikus változás helyett asszimmetrikusat észlelhetünk, tehát kéttengelyűséget vélhetünk felismerni. A szerző a ferde megvilágításhoz az egyik diagonális síkban forgatható síktükört használt, amelynek forgástengelye fokbeosztással és noniusszal van ellátva. A másik diagonálállás vizsgálata a készülékkel a tárgyasztalnak 90°-os elforgatása útján történt.

*

Az eddigiek alapján is nyilvánvaló, hogy a mikroszkopos útkülönbségmeghatározások szokásos módja nem lehet mindig kifogástalan. Nem elégséges u. i. a szem orientált helyzetét a konvergens fényben, a tengelykép alapján megállapítani és azután párhuzamos poláros megvilágításra áttérve az útkülönbséget közvetlenül mérni, mert ugyanazon tengelyképnek a tükrözete szerint sokféle interferenciaszín felelhet meg a párhuzamos poláros fényben.⁸ Míg a tengelykép helyzete nem változik lényegesen a tükrözés elforgatásakor, addig ugyanezen forgatáskor a párhuzamos poláros fényben észlelt interferenciaszín lényegesen változhat. Eme interferenciaszínnek közül nyilván az képviseli a tengelyképen észlelt orientációnak valóban megfelelő kettőtörést, amely pontosan centrális átvilágítás mellett jelentkezik. A gyakorlatban azonban akaratlanul is gyakran többé-kevésbé ferde megvilágítást alkalmazunk. Így pl. a tengelykép éles megvilágítása céljából nappali fény használatánál a tükröt gyakran kell mozgatnunk. Általában a legintenzívebb megvilágítás nem mindig centrális.

Ez a hiba az optikai tengellyel-, (ill. a kéttengelyű ásványoknál az opt. tengelysikkel) párhuzamos metszeteken túlnyomóan csak kisebb, gyakorlatilag rendszerint elhanyagolható lehet. A bisektrixekre merőleges metszeteken azonban jelentékenyebbé válhatik, különösen akkor, ha az átvilágítás valamely kis tengelyszögű ásványnak az I. bisektrixére merőleges metszetén az optikai normálissal párhuzamos főregezésirányban ferdült el. A kettőtörés értékének a %-os változása ugyanis az optikai normálisra- ill. egytengelyűeknél az opt. tengelyre merőleges irány körül sokkal

⁸ V. ö.: G. W. GRABHAM: An improved form of petrological microscope: with some general notes on the illumination of microscope, *Min. Mag.* XV., 1910. pp. 335—349. különösen pp. 339—341.

kevésbé gyors, mint a bisektrixek körül. Ennek megfelelően a β -ra merőleges, ill. egytengelyűeknél az opt. tengellyel párhuzamos metszetek tengelyképében is az izokromák száma (sűrűsége) kisebb, mint egyébként ugyanolyan körülmények közt a bisektrixekre merőleges tengelyképekben. A ferde átvilágítás tehát különösen a $\gamma - \beta$ és $\beta - \alpha$ értékek meghatározásánál kerülendő.

Szemünk a ferde átvilágításból származó interferenciaszíneltolódásokat még alig veszi észre, amikor az ebből adódó hiba a kettőstörés értékében már több egész %-ot elérhet. Ez kitűnik a következő példából. A feladat egy csillámféleség $\gamma - \alpha$ értékének a meghatározása. A méréshez használandó $\beta \perp$ egyén vastagságának meghatározása céljából egy szomszédos c -vel \perp kvarcsem útkülönbségét mérjük. Ez centrális átvilágítás esetén $320 \mu\mu$ útkülönbséget adna, helyett azonban a tükörnek az α' -tel \parallel síkban történt 7 és $1/2^\circ$ -os elforgatása következtében $331 \mu\mu$ -t mérünk. A vastagság tehát 35.55μ helyett 36.67μ -nak adódik. Ugyanezen helytelen tükörállással azután a csillámon $1380 \mu\mu$ helyett $1337 \mu\mu$ útkülönbséget kapunk és így $\gamma - \alpha$ értékét 0.0388 helyett 0.0364 -nek állapítjuk meg.

Ezen a példán a szemünk számára alig észrevehető interferencia színeltolódásból keletkezett hibát mutattunk be, amelynél a mérések e hiba szempontjából a legkevésbé veszélyes helyzetű metszeteken történtek. Említettük azonban, hogy különösen az I. bisektrixre \perp metszeteken a hiba sokkal nagyobb lehet és a fenti tükörállás mellett a 10%-ot is jóval meghaladhatja.

A kettőstörés meghatározásánál tehát elvileg olyan megvilágítás mellett kellene áttérni a konvergens fényről a párhuzamosra, amely mindkettőre nézve szigorúan centrális. Minthogy azonban ez gyakorlatilag nehezen vihető ki, ezért úgy járhatunk el, hogy az útkülönbséget nem párhuzamos, hanem konvergens fényben mérjük, éspedig a diagonális állásnál a tengelykép közepén észlelhető interferenciaszín alapján.

(Készült a Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kar ásvány-földtani tanszékén. Igazgató: Vendl Miklós.)

ÜBER EINIGE WIRKUNGEN
DER SCHIEFEN BELEUCHTUNG IM PARALLELEN
POLARISIERTEN LICHT.

Von E. SZÁDECZKY-KARDOSS.

Die Arbeit erscheint im Zentralbl. f. Mineralogie etc.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie
der Wissenschaften, den 7. Juni 1937.)

SZARVASKŐI AMFIBOLOLIT.

SZENTPÉTERY ZSIGMOND I. tagtól.

A IV. és V. táblával.

Az amfibololit, ez a túlnyomó részben amfibolból álló tűzere-
désű kőzet, több helyen előfordul a szarvaskői (Bükkhegység) erő-
sen differenciált gabbroid vonulatban, mint tipikus differenciáló-
dási termék.

Az itteni előfordulásra nézve a rendelkezésemre álló irodalom-
ban mindössze egyetlen adatot találtam, de még ennél is kérdéses
a pontos lelőhely: KALECSINSZKY SÁNDOR u. i. egy amfibolelem-
zéssel kapcsolatban megemlíti (1), hogy a megelemzett példányt
SZABÓ JÓZSEF Szarvaskő vidékén telérből gyűjtötte. Ebből és a
szűkszavú leírásból («Sötétbarna színű, tompa fényű, kristályos
tömeg, helyenként zöldes erekkel van befutva, egészen átlátszat-
lan és merev.») legfeljebb csak gyaníthatom, hogy talán az alább
ismertetendő Majorlápának (a Majorhegy déli végét határoló árok-
nak) a felső előfordulásáról lehet szó. Ebben a telérszerű (slirtelér)
előfordulásban gyakoriak a tisztán kiválasztható nagy amfibol-
kristályok és töredékek. Meg kell azonban említenem azt is, hogy
a szarvaskői Újhatárvölgyben a dioritos és gabbroidális telérek-
ben és slirtelérekben is nagyon gyakoriak a kiválasztható, több
cm-es amfibolkristályok. Kérdéses tehát még az is, hogy valóban
amfibololithból került volna ki a megelemzett amfibol, amelyhez
egyébként egyik innen származó amfibolnak újabban készített elem-
zése sem hasonlít.

Az 1936. év előtti kutatásaim alapján írott és a Tudományos
Akadémia előtt is bemutatott értekezésemben (6) a titánmagnetites
kőzetek tárgyalása során csak névszerint említettem meg két amfi-
bololit előfordulást, minden részletes leírás nélkül, miután még egys

tisztázni való kérdések merültek fel és akkor még a vegyi elemzések se készültek el a gyűjtött anyagból.

1936. év őszén és 1937. tavaszán újra átkutattam a vidéket, de most csak az amfibololit előfordulások tanulmányozása céljából. Ezekben az időkben részben az erdőirtással, részben más körülményekkel (bőséges esőzés stb.) kapcsolatban nagyon kedvező kutatási viszonyok voltak a máskor nagyon eltakart és nehezen járható Majorlápában. A kis patak ekkor az elejétől kezdve egészen a karbonüledékből álló nagy sziklagátig (a hídtól számított kb. 282 m-ig) igen jó feltárásokat nyújtott. Ezek a viszonyok tették lehetővé, hogy a Majorláp alsó felében a már előzőleg megismert lelőhelyeket részletesen tanulmányozhattam és új lelőhelyeket is találhattam. Érdekes, hogy az ároknak más időkben jól járható felső része a sziklagát felett éppen ekkor erősen eltakart és mélyen posványos volt. A másik fontos lelőhelyen, a vaskapui¹ (Zsindelorom, Kecsefark) bányatáróban pedig az ottani titánvasérc kutatásával kapcsolatban tekintélyes mennyiségű anyagot bányásztak ki, aminek következtében üde kőzetfelületek kerülhettek vizsgálat alá.

A majorlápai egyik slir kőzetéhez (129 m) a leírás szerint is nagyon hasonló amfibololitfajtát írt le MAURITZ BÉLA a ditrói szienitömegeből, mint bázikus differenciálódási terméket, amelyre nézve ő hozta be a magyar irodalomba a hornblendit elnevezést (2, 3).

ELŐFORDULÁSI VISZONYOK. A Majorlápában e kőzetek, az egészen apró foltokat nem számítva, 3 tekintélyesebb slirben találhatóak.

Az alsó előfordulás a 127 m-nél kezdődik (az országút hídjától számítva) és gabbróidális átmeneti kőzetével együtt kb. 4 m szélességben látható az árok É-i oldalán. A nagyszemű (átlag 10 mm-es) amfibololit a szélein gabbróamfibololitba, ez amfibol-gabbróba megy át. Az előfordulás slirjellegű, de nagyon szabálytalan, egyes nyúlványszerű részek is vannak rajta, melyeknek

¹ Voltaképpen csak a Majorlápát nevezik Kecsefarknak, míg a hegy többi részének Zsindelbányaorom a neve, itt van a peridotitbánya is. Az irodalomba a Kecsefark elnevezés került be.

anyaga szintén fokozatosan megy át a végeredményben gabbróba. A differenciálódási magmamaradék a gabbróamfibololitban többhelyütt alkotott vékony plagiaplitos teléreket, ereket és fészkeket.

A legüdébben megmaradt az amfibololit a slir N_γ-i oldalán, míg a keleti oldalon, éppígy befelé a hegyoldalba (É felé) néhol préhnites erek járták át, de egyébként is elváltozott és elmállott, könnyen szétporlasztható limonitos anyaggá lett. A préhnitanyag az árok szintje felett kb. 1 m-re annyira túlsúlyba jutott, hogy elhatárolja az üde részt v. 40 cm vastagságban, de alatta ismét megjelenik az üde kőzet. Az előfordulás pados kifejlődésű, mint a majorlápai eruptív tömeg általában. Gyakori a dörzsbreccsiás szerkezet, de gyakoriak a vetődések is kifényesedett csúszási felületekkel. Az árok déli oldalán ezen a helyen már csak gabbróamfibololit van, amely szintén amfibolgabbróba megy át. Magában az amfibololit slirben is vannak földpátos részek, egészen szabálytalan eloszlásban, látszólag egyes fészkekben.

Nem messze a peridotitslirtól, az árok déli oldalán, a 141 m-nél kezdődik a középső amfibololit-előfordulás, amely az eddig ismertek közül a legtekintélyesebb. A kb. 6·5 m széles slirnek átlag 15 mm-es szemnagyságú kőzete mindkét oldalán vékony sávban (1—1·5 m) gabbróamfibololitba megy át, fokozatosan kisebbedő szemnagysággal. Az előfordulás egyes helyein egészen szabálytalan (talán a sokszoros vetődés folytán szabálytalan) eloszlásban és formában a főtömegnél nagyobb szemű (50 mm-ig) részletek is vannak, melyek fokozatosan mennek át a normális nagyszemű kőzetbe.

A slir lefelé is terjed a patak szintje alá, míg felfelé kb. 3 m magasságban gabbróamfibololitba megy át. Az árok E-i oldalának gabbróamfibololitja rövidesen átmegy préhnites gabbróba. A préhnitesezés magában az amfibololitban csak nagyon szórványos. A gyakori dörzsbreccsiás sávok vagy egészen sűrűek vagy már megaszko-posan is a porfiroshoz hasonlók. Ebben az előfordulásban nemcsak a széli fáciesben, a gabbróamfibololitban, de magában az amfibololitban is találtam aplitos injekciókat, vékony telérszerű plagiaplit-ereket, melyek körül az amfibololit is tartalmaz néha elég sok földpátot.

A patak harmadik jelentékenyebb amfibololitlelőhelye a 230

m-nél kezdődik az árok É-i oldalán. Jelenlegi állapotában 1.5—2 m szélességben látható. Erősen össze van törve. Ez a hely különben is a dinamikailag legerősebben megtámadott rész az eruptív testet átszelő majorlápai feltárásban. Csakis a Ny-i oldalon találtam mintegy kisebb fészkekben eléggé ép és meglehetősen üde kőzeteket, amelyek a sziklatömegből leválasztható nagyobb daraboknak úgyszólván a magjai. Helyenként gömbös elválásnak a gyenge nyomait is észre lehet venni.

Ennek a felső előfordulásnak a közepe felé tekintélyes, néhol félméteres, majdnem teljesen préhnitesedett (helyesebben: préhnites-kálcitos-kvarcos anyaggá változott) telér van, amely elég meredeken áll ki a szétálló amfibololitból. A telér eredeti kőzete a talált szórványos maradványok alapján: femikus ásványokban nagyon szegény dioritporfirit, máshol anortózit. Az amfibololit helyenként ennek a telérnek a határán a legnagyobb szemű és nagy amfibolszemeket és töredékeket néhol az eredeti dioritos-anortózit anyag, legtöbb helyen azonban a préhnit veszi körül.

A préhnitesedés, valószínűleg a dioritos-anortózit telér mentén, a patak déli oldalán is folytatódik a gabbróid kőzetben, amelyet a préhnitesedett telérből kiinduló apró préhniterek néhol egészen áthálóznak, mint magát az elváltozott amfibololitot is. Az É-i oldalon a mellékkőzet gabbróamfibololit, amfibolgabbró, majd igen sűrű amfiboldiallagabbró. Mindezek kivétel nélkül erősen dörzsbreccsiások.

Az előfordulás minőségét közelebről pontosan meghatározni nehéz a nagyfokú dinamikai hatás miatt, amihez még erős vegyi elváltozás is járul, úgy az ultrabázitnál, mint a mellékkőzeteknél. Leginkább slirtelérnek nevezhetem. Bizonyos, hogy megvan az átmenet a gabbró felé a gabbróamfibololiton keresztül, de ez nagyon gyors. Az előfordulás határatól már félméterre sűrű gabbró van, amely itt-ott éppúgy, mint az amfibololit, piritet is tartalmaz, sőt erősen piritisedett részletek is akadnak. A pirit a patak szintjéhez közel az egész kőzettel együtt limonitos anyaggá változott. Ugyancsak ilyen átmenetet tapasztaltam felfelé, a karbonüledék takaró felé is, ahol legfelül aprószemű bázisos gabbró érintkezik az üledékkel, amely itt néhol földpátos csillámszarukó lett.

Az észlelt viszonyokból az következik, hogy először történt

a szétszakadozott amfibololitban az utólag préhnitesedett dioritos-anortozitos telér kepződése. Csak azután mentek végbe az erősebb dinamikai folyamatok, aminek következtében egyes övekben az összes kőzetek összetöredeztek, kisebb elvetődések is bekövetkeztek (ezeket különösen a préhnites ereknél lehet jól látni), maga az amfibololit pedig néhol egészen összemorzsolódott, mondhatni: itt-ott elmázolódott. Nagyjában tehát az egész lelőhely deformálódott. Még leginkább megmaradtak a préhnitesedett telér melletti részek, továbbá a préhniterekkel erősen átszótt kőzetek. A préhnit tehát még védte a lelőhelyet, habár kisebb mértékben maga is összetöredezett. Megjegyzendő, hogy sem az ultrabázittal közvetlenül érintkező préhnitben, sem pedig a préhnites erekben nincs pirit, tehát a piritképződés valószínűleg még a dioritos telér préhnitesedése előtt történt.

A vaskapui bányatárónak amfibololitjai pontosan beillenek az itteni ultrabázitok közé, azokból fokozatosan fejlődnek ki és azokba fokozatosan mennek át. A slires kifejlődésre legfeljebb következtetni lehet a fokozatos kőzetváltozások alapján. A különböző összetételű részek elhelyezkedése leginkább elég meredeken felállított pados kiképződéshez hasonlít. Gyakori az elvetődés, kifényesedett csúszási felületekkel, de gyakoriak a szabálytalan irányú dörzsbreccsiás sávok is. A bányatáró ultrabázitja is meglehetősen össze van tehát törve, amit különben a tárónak sok helyén ki lehet mutatni (6).

A táró amfibololitjait is jellemzi, hogy általában véve is nagyszeműek, mindig sokkal nagyobb az átlagos szemnagyságuk, mint mellékkőzeteik közül a peridotitét, sőt nagyobb szeműek olykor a piroxenitnél is. De jellemzi e kőzeteket az is, hogy az említett mellékkőzeteknél jóval savanyúbbak, jellemzi a kis magnetittartalom és az is, hogy anyaguk, összetevő ásványaik egymáshoz való viszonya nagyon változó és rövid úton mennek át mellékkőzeteikbe. Typikus amfibololit a tárónak nem sok helyén (9·75, 14—14·5, 15·3, 16 és 21·7 m-es szakaszoknál) fordul elő. Jóval nagyobb számmal vannak a peridotitba (pl. a 15, 17, 28·5 stb m-es szakaszoknál) vagy piroxenitbe (14·7 15·7, 21·2 stb. m-es szakaszoknál) átvezető fajták.

Többször előfordul az amfibololit az Újhatárvölgy slires

gabbrójában is, de mindig csak kicsiny helyeken. Olyan tömegekben, mint a Majorlápában és a bányatáróban, itt eddig még nem találtam. A legérdekesebb és könnyen megközelíthető előfordulás a Tóbérchegy ÉK-i részén, a patak Ny-i oldalának felsőbb sziklatömegében van a 720 m körül (a völgy torkolatától számítva). Itt a gabbróban hatalmas slirfészkek és slirszerű részek vannak, amelyeknek egészen savanyú, néha anortózitos kőzetei körül több dm nagyságú sötétszínű részek vannak. Ezekből a földpát sokszor teljesen hiányzik és lényegileg amfiboból és diallágból állanak. Az amfibol gyakrabban uralkodik, néha pedig majdnem egyedüli alkotórész. Vannak azonban piroxenitrészek is.

Ezeknek a bázisos részeknek a származása a hiszterogenetikussal kapcsolatos kikapcsolódásra vezethető vissza. A megszilárdulás folyamán ugyanis az egyes elszigetelt helyekre összegyűlő ásványképzők magukkal vonták a szomszédos magmarészekből a szálikus alkatrészeket és így ezekben a közvetlenül érintkező magmarészekben csak a bázisos komponensek maradtak meg. Az így képződött ultrabázisos részek a slir belseje felé rövidesen átmennek olyan plagioklászkőzetekbe (dioritpegmatit, plagiopematit, kvareplagiopematit oligoklászit stb.), melyekben kevés a femikus ásvány, vagy nincsen is. A slirtől kifelé ellenben normális gabbróba mennek át az ultrabázisos részek.

AMFIBOLOLITFAJTÁK. E kőzetek részletes fiziográfiáját más helyütt fogom tárgyalni, itt röviden csak a következőket említem:

A majorlápai alsó előfordulás (129 m táján) földpátmentes amfibololitja túlnyomó részben, vagy majdnem teljesen (95%-ig) közönséges barna vagy sötétbarna amfibolból áll, amelyhez rendszeren csak igen kevés egyéb ásvány (titánmagnetit, apatit stb.) járul, tehát a kőzet közelebbi neve **hornblendit** (ROSENBUSCH), melyben azonban olivint sehol se tudtam kimutatni. A földpátos hornblendit plagioklásztartalma rendszeren csekély, elfekintve a gabbrókhöz átvezető széli fáciesektől, csak ritkán emelkedik 6% fölé. A földpátos hornblendit némely részében az apatit nagyon felszaporodik, 10%-ig is felemelkedik, míg ugyanezen részlet másik darabjában, sőt néha ugyanazon kézi példány másik részében már csak kevés van. Így azután csak bizonyos merészséggel lehet az apatit hornblendit elnevezést használni. A monoklin

piroxén: diopszid itt az alsó előfordulásban nagyon ritka és minimális. A gyűjtött gazdag anyagban mindössze is csak pár példány érdemli meg a diopszidos hornblendit elnevezést. A gabbrók felé vezető **gabbróhornblendit** szintén közönséges barna amfibolt tartalmaz, e mellett kevés diopszidot, ill. diallagot. A földpátos hornblendittől a földpát mennyiségén kívül abban is különbözik, hogy plagioklásza bázisosabb (Ab_{45} -ig).

Fentebb említettem, hogy a gabbróhornblenditek egyes helyein plagiaplitos anyagot találtam finom telérékben, egyes erőkben és fészkekben. Ezeknek földpátja uralkodólag oligoklászandezin (Ab_{65} körül), olyan, mint a hornblenditekben szórványosan előforduló földpát. *A hornblenditek földpátját eme azonosságának, de főképpen megjelenési körülményeinek alapján injekciói terméknek kell tartanom.* Ez a földpát nagyon különbözik a szomszédos gabbrók és gabbróhornblenditek jóval bázisosabb és idősebb plagioklászától. A viszonyok tisztázása végett behatóan tanulmányoztam a femikus ásványok felszaporodása következtében a gabbróból kifejlődő, de viszont aplitos anyaggal injiciált gabbróhornblenditek földpátját. Tudnunk kell itt azt, hogy az injiciált gabbróhornblenditek meglehetősen, vagy éppen erősen elváltak; a préhnitesedés, szoszüritesedés, pritesedés stb. erősebben megtámadta ezeket, mint akár a szomszédos gabbrót, akár a hornblenditet. Mégis sikerült adatokat találni arra, hogy legalább is helyenként kétféle plagioklász van bennük: egy régibb, mely automorf az amfibollal, sőt legtöbbször a monoklin piroxénnel szemben is, labrador vagy ennél bázisosabb és egy fiatalabb, amely az eredeti femikus ásványokkal szemben mindig xenomorf, majdnem mindig üde, fajtája oligoklászandezin. Ezzel az utóbbival egyezik meg a hornblenditek földpátja legtöbb esetben.

Nagyjában hasonló hornblenditfajták alkotják a majorlápai középső lelőhelyet (140 m táján) is. A főkülönbség az alsó lelőhely kőzeteivel szemben az, hogy az alsóban általánosan elterjedt apatit itt még minimális mennyiségben is ritka, ellenben mindenütt megtaláljuk itt a titanitot. Bár a titanit utólagos ásvány, részben az elváltozó amfibol és magnetit kölcsönhatásából, részben magából az amfibolból származik, de mennyisége miatt számbaveendő, olykor annyi, hogy egyes kőzetek megérdemlik a **titanithornblendit**

nevet. Sőt vannak egyes nagyobb kőzetrészek, melyekben uralkodó a titanit, 50%-nál is több (68%-ig): **titanitit**, melyben még kevés amfibol, klorit, titánmagnetit és pirit van. Az aprószemű dörzsbreccsiák között, de ritkán a nagyszemű ép kőzetekben is vannak oly sok földpátot tartalmazó részletek, melyekre a gabbróhornblendit elnevezést lehetne használni. Ezek a kőzetek azonban felfogásom szerint nem egyenértékűek a slir szélén fellépő gabbróhornblenditekkel, t. i. főleg injekcióból származó savanyú plagioklász van bennük. Az előfordulás Ny-i részének egyes kőzeteiben sok a titánmagnetit, 18%-ig is felemelkedik: **titánmagnetithornblendit**, míg máshol mindenütt kevés, ami általában is jellemzi a vidék hornblenditjeit. Ritkán ugyan, de felszaporodik a diopszid is, kevés diallággal együtt v. anélkül: **diopszidhornblendit**.

A majorlápai legfelső (230 m táján) előfordulás amfibolitjának egy része tipikus hornblendit, olykor minimális földpáttal, más része **biotithornblendit** (lherzit LACROIX), 26%-ig emelkedő biotittartalommal, azután **piroxenhornblendit**, 18%-ig emelkedő monoklin piroxénnel: diallággal és diopsziddal melyekhez szórva nyosan kevés bronzit járul. A slirtelér Ny-i oldalán olyan kőzetet is találtam, amely lényegileg biotitból (kb. 46%) és titanitból (kb. 20%) áll, ezek mellett sok benne a másodlagos amfibol, kevés a klorit és kalcit, és olyan kőzetet is, melyben a biotit (kb. 35%) és titánmagnetit (kb. 8%) mellett uralkodik a klorit, kevés a másodlagos amfibol, igen kevés a szerpentin és apatit. Hogy ezek eredetileg biotititek, biotithornblenditek vagy biotitpiroxenitek voltak-e, azt eldönteni üde kőzetek hiányában lehetetlen. Talán a későbbi, mélyebbre hatoló kutatások ilyen kőzetet üde állapotban is napfényre hoznak. Mindössze azt emelem ki, hogy a klorit egy része leginkább biotitra valló megjelenésű pemin.

A bányatároló amfibololitjai között vannak ugyan olivinmentesek is, de csak kis mennyiségben és kevés helyen. Ezekben uralkodó a közönséges barna amfibol, de mindig meg lehetős sok a monoklin piroxén (főleg diallág, alárendelten diopszid, ritka a titánaugit felé hajló augit), ezek mellett bronzit, titánmagnetit a fontosabbak, közelebről tehát **diallághornblenditek**. A típusul választott kőzetben a barna amfibol 66%, piroxén 24%, titánmagnetit 7%, egyéb (apatit, biotit stb.) 3%. A piroxén gyakran megszaporodik és nagy-

jában egyenlő lesz az amfibollal: **piroxenithornblendit**. E kőzet bizonyos fokozatossággal, de rövid úton átmegy amfibolpiroxenitbe. Az olivintartalmú amfibololitok nagyobb számban vannak. Vanak ezek között olyanok, melyekben az olivin kb. 15%, uralkodik az amfibol (60—65% körül), jóval kevesebb a piroxén (diállág, diopszid, kevés augit) és a titánmagnetit. E kőzetek tehát nagyjában megfelelnek az **olivinpiroxénhornblendit** (cortlandtit TRÖGER) típusnak, azzal a megjegyzéssel, hogy a piroxének közül a hipersztén hiányzik, a bronzit is nagyon szórványos, akkor is minimális. Más helyeken nagyon felszaporodik az olivin; van olyan kőzet, amelyben 40% körül van, az amfibol valami kevéssel több, a piroxén és titánmagnetit kb. egyforma mennyiségű (7—8% körül). Megfelel tehát e kőzet a **peridotithornblendit** (schriesheimit TRÖGER) azzal a megjegyzéssel, hogy az amfibol nem zöld, hanem barna, a biotit legtöbbször hiányzik. Az amfibol zöldes színe a Vaskapu bányában mindig elváltozás eredménye. Ennek a kőzetnek átmenete a peridotitba általános jelenség. A poikilites szerkezet az emelkedő olivintartalommal arányosan mindinkább kifejezettebb.

Az Újhatárvölgyben a Tóbérc oldalán a példának felhozott amfibololit (720 m táján) fajtája **diállághornblendit**, amelyben a földpát néha hirtelen felszaporodik, máshol teljesen hiányzik, megfelelőleg a hiszterogenetikus slirek gyorsan változó jellegének. Olivinnek még nyoma sincs. Gyakran megy át amfiboldiállagitba, ez pedig amfibolgabbródiállagitba, de átmegy savanyú slirkőzetekbe is, mint említettem.

VEGYI VISZONYOK. Hogy a szarvaskői hornblenditek vegyi összetételét megismerjük, közlöm a megelemzettek közül 8 típusnak a vegyi elemzését. A megelemzendő példányok kiválasztásánál tekintettel voltam először arra, hogy a lehető legüdébb kerüljön elemzés alá, hiszen eltekintve a kloritosodástól, préhnitesedéstől stb., már csak maga az általános elszíntelenedés is meglehetősen vegyi különbségeket okozhat, — másodszer pedig arra, hogy különösen a bányatáróban, valamint a Tóbércen a folytonosan változó anyagú példányok közül lehetőleg a legállandóbbnak mutatkozó összetételű részt vegyük vizsgálat alá. Még így is kissé elváltozott darabokat kellett vennem a titanithornblenditből és a biotithornblenditből, mert ezek közül ezek voltak a legüdébbek. Az elemzéseket a veze-

tésém alatt álló intézet tanársegéde: POLNER ÖDÖN végezte a tőle megszokott szakszerűséggel és nagy pontossággal. A százalékokban megadott ásványos összetétel a kőzetnek több, olykor sok csiszolatán végzett mérés középeredménye.

1. Diallaghornblendit, Tóbérc É-i oldala. Az ásványos összetétel olyan, hogy uralkodik a barna amfibol (56%), hozzá elég sok diallág (23%), kevés plagioklász (5%), biotit (6%), és titanitosodó ilmenit (igen kevés magnetit) (10%) járul. Minimális az apatit rutil és cirkon. A kőzet tömötsége: 3-138.

2. Nagyszemű hornblendit (30 mm szemmagysággal), Majorlára 142 m. Összetétel: Barna amfibol 90%, titánmagnetit és igen kevés titanit 9%, préhnit, klorit 1%. Tömötség: 3-180.

3. Titanithornblendit, Majorlára 146 m. Összetétel: barna amfibol 81%, titanit és igen kevés titánmagnetit reliktum 13%, biotit, apatit, cirkon 3%, klorit, epidot 3%. Tömötség: 3-222.

4. Olivindiallaghornblendit (cortlandtit), Vaskapu bányatáró 14-5 m. Összetétel: barna amfibol 60%, diallág, kevés diopszid, augit, bronzit 18%, olivin 13%, titánmagnetit 8%, biotit, apatit 1%. Tömötség: 3-239.

5. Biotithornblendit (lherzit), Majorlára 231 m. Összetétel: barna amfibol 65%, biotit 19%, diallág 3%, titánmagnetit és kevés titanit rutil és cirkon 5%, klorit, epidot 8%. Tömötség: 3-178.

6. Titánmagnetithornblendit, Majorlára 230 m. Összetétel: barna amfibol 84%, titánmagnetit igen kevés titanittal 13%, apatit, rutil, epidot, klorit 3%. Tömötség: 3-235.

7. Diopszidhornblendit, Majorlára 143 m. Összetétel: barna amfibol 72%, diopszid és igen kevés diallág 21%, biotit és apatit 2%, titánmagnetit 5%. Tömötség: 3-198.

8. Apatitos hornblendit, Majorlára 129 m. Összetétel: barna amfibol 85%, plagioklász 3%, titánmagnetit (kissé titanitos) 6%, apatit 5%, klorit, epidot 1%. Tömötség: 3-170.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
SiO_2 ...	42·60	41·57	41·55	41·20	40·08	39·55	38·10	37·91
TiO_2 ...	6·30	3·75	7·25	4·70	2·62	5·11	2·72	3·94
Al_2O_3 ..	11·98	9·87	6·40	5·15	9·19	9·99	10·48	10·03
Fe_2O_3 ...	5·48	7·42	6·25	9·70	8·00	6·00	5·47	7·15
FeO ...	14·16	16·50	15·90	11·72	13·47	16·50	17·51	13·78
MnO ..	0·34	0·36	0·38	0·28	0·38	0·63	0·43	0·46
MgO ...	6·90	7·91	7·62	10·71	14·07	10·23	8·97	10·45
CaO ...	8·24	8·75	12·11	12·90	5·14	6·21	12·72	10·34
Na_2O ..	2·20	1·33	1·82	1·05	2·07	1·25	0·76	2·06
K_2O ...	nyom	0·07	0·20	0·15	0·74	0·50	0·09	0·24
P_2O_5 ...	0·00	0·00	0·21	0·30	nyom	nyom	0·00	1·95
H_2O ...	2·03	1·26	0·82	0·92	3·57	2·70	1·70	0·93
H_2O ...	0·18	0·89	0·19	0·74	0·49	0·95	0·74	0·32
	100·41	99·68	100·70	99·52	99·82	99·62	99·69	99·56

Az első, ami szembotűnik ezeknél az adatoknál, az, hogy ezek a hornblenditek jóval savanyúbbak, mint azok a peridotitok és piroxenitek, melyekkel a Majorlápában és a bányatáróban együtt fordulnak elő, (6). Míg a hornblenditekben a kovasav középértéke 40·32%, addig az itteni peridotitoké 30·20. Közös vonás a vidék többi ultrabázitjával a MgO aránylag kicsiny volta és a vasoxidok aránylag nagy mennyisége.

Ha azonban összehasonlítjuk ennek a 8 szarvaskői hornblendit elemzésnek a középértékét a ROSENBSCH (Gesteinslehre, 1923. p. 259.) és TRÖGER (5. p. 286, 288.) könyvében felsorolt 23 amfibololit elemzés középértékével, azt látjuk, hogy a szarvaskői hornblendit bázisosabb, titánsavban és vasoxidokban jóval gazdagabb, viszont MgO -ban és alkáliákban sokkal szegényebb. Ugyancsak érdekes összehasonlítást nyerhetünk akkor is, ha az említett ditrói hornblenditek 3 elemzésének (MAURITZ, HARWOOD és JANOVICI elemzése: 2, 3, 4.) középértékét nézzük. A ditrói hornblenditek kovasav-tartalma majdnem pontosan ugyanannyi, mint a szarvaskőieké, titánsavjuk csak kissé több. Jóval több azonban a CaO és MgO tartalmuk, mint a szarvaskőieké.



Eredeti elemzések középpértéke	Szarvaskő	Ditró	Rosenbusch Tröger
SiO_2	40.32	40.55	42.60
TiO_2	4.55	5.06	1.92
Al_2O_3	9.14	10.58	9.15
Fe_2O_3	6.93	4.17	6.63
FeO	14.94	8.97	9.18
MnO	0.41	0.12	0.40
MgO	9.61	12.05	14.02
CaO	9.55	13.50	10.24
Na_2O	1.57	1.71	2.12
K_2O	0.25	1.09	0.86
P_2O_5	0.31	0.35	0.36
H_2O	1.74	1.24	1.85
H_2O	0.56	0.11	0.28
Egyéb	—	0.57	0.37
	<u>99.88</u>	<u>100.07</u>	<u>99.98</u>

Mindkét csoporttal szemben feltűnő a szarvaskői kőzetekben az alkáliák egymáshoz való viszonya, amelyre már régebben rámutattam, hogy ez a szarvaskői kőzetvidék egyik fontos jellemző sajátossága: a Na_2O urakodása a K_2O felett a eruptív vonulatot felépítő gabbroid magmából származott differenciációs termékek közül úgy a savanyúbb, mint a bázisosabb tagokban általános jelenség.

Mindezen viszonyokról igen jó áttekintést adnak az A. OSANN-féle értékek is:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
<i>s</i>	51.53	48.05	49.25	46.51	44.69	47.38	43.05	43.60
<i>A</i>	2.32	1.44	1.98	1.15	2.63	1.67	0.86	2.27
<i>C</i>	5.35	4.85	1.96	2.00	3.12	4.75	5.75	4.01
<i>F</i>	33.13	39.37	42.77	47.06	43.81	39.78	43.73	42.92
<i>a</i>	1.5	1	1.3	0.5	1.5	1	0.5	1.5
<i>c</i>	4	3	1.3	1.5	2	3	3.5	2.5
<i>f</i>	24.5	26	27.4	28	26.5	26	26	26
<i>n</i>	10	9.7	9.3	9.1	8.1	7.9	9.1	9.3
sor	α	α	α	α	α	α	α	α
A_6C_2F	57.75	57.71	58.57	57.96	65.83	59.30	60.39	64.58
<i>k</i>	0.89	0.83	0.84	0.78	0.67	0.80	0.71	0.67
Típus	97	97	95	96	95	97	105	97
	585	585	570		570	585	612	585
Rokon- kőzet	horn- blen- dit	horn- blen- dit	horn- blen- dit		horn- blen- dit	horn- blen- dit	aveza- kit	horn- blen- dit

Az alkáliviszony mindegyiknél magas számot ad, még legkisebb a magnetithornblenditben, de ez is még jól az a sorozatba tartozik. Az alkáliák mennyisége (a), meglehetősen állandó, de e kőzetekben nem a földpátra vonatkozik, hiszen ez meglehetősen ritka, hanem az amfibol ill. biotit alkálitartalmára. Legkevesebb még az a értéke a 7. diopszidhornblenditnél, ahol a diopszid foglalja el az amfibol egy tekintélyes részének a helyét. Az 1. és 8. sz. hornblenditnél a plagioklász (Ab_{67} körül) okozza a valamivel nagyobb alkálitartalmat, az 5. sz. kőzetnél pedig a biotit. Az a típus, melyhez tartoznak, meglehetősen állandó, nagyrésztben a 95. Yamaska és 97. Schöllschitz típus tagjai mellett van a helyük. Meg kell jegyezni, hogy a 4. sz. hornblendithez hasonló kőzet nincs a 96. Koswinsky típusban, ahová pedig sorozni kellett típusformája miatt, mert az 580. Jacupirangit az ő 38-38% kovasavtartalmával nem illik hozzá, a 72. Radautal típusban pedig a típus tagjainak nagy kovasavtartalma ellenzi az ideosztást. A 7. sz. diopszidhornblendit pedig azért került a jóval bázisosabb 612. sz. avezacit mellé, mert OSANN rendszerében a közbülső csoportban (a 96. és 99. típusok között) nincsen adva képviselő az ilyen típusformájú kőzetre. Az s értéke nem feltétlen alap a kőzet beosztására, mert a szarvaskői hornblenditekben a normálisnál jóval több titánsav van, ami az s értékét nagyon megnöveli, azért jobb helyette az eredeti kovasavtartalmat tekintetbe venni.

A ditrói hornblenditekkal és a ROSENBUSCH—TRÖGER által felsorolt amfibololitokkal összehasonlítva, a következő képet kapjuk:

	Szarvaskő	Ditró	Rosenbusch Tröger
s	46.75	46.04	45.34
A	1.79	2.44	2.68
C	3.96	4.02	2.86
F	41.61	40.88	43.43
a	1	1.5	1.5
c	2.5	2.5	2
f	26.5	26	26.5
n	9.0	7.0	7.8
Sor	α	β	α
A_6C_2F ...	60.27	63.56	65.16
k	0.77	0.72	0.70
P_2O_5	0.14	0.16	0.15
Típus	95	95	95

Ezek között a valóban nagyon hasonló rokon csoportok között is megőrzi a szarvaskői hornblendit az önállóságát, még pedig elsősorban az alkáliszám (n) tekintetében, máskülönben közelebb áll a ditrói hornblenditekhez, mint a ROSENBUSCH—TRÖGER által felsorolt fajták középértékének viszonyszámaihoz. A kovasavhányadosa (k) azonban magasabb a kis A érték miatt, mint a másik két savcsoporté, így az összes savmennyiség száma (s) is a titán nagysága miatt.

A NIGGLI és BECKE-féle értékek a következők:

	1.	2.	3.	4	5.	6.	7.	8.
<i>si</i>	95	86	85	80	76	81	71	72
<i>ti</i>	10·5	5·8	11·2	6·8	3·7	8·0	3·8	5·0
<i>al</i>	16	12	7·5	6	10·5	12	11·5	11·5
<i>fm</i>	59·5	65·5	61·5	65	74	69·5	61·5	63·5
<i>c</i>	20	19·5	27	27	10·5	14	25·5	21
<i>alk</i>	4·5	3	4	2	5	3	1·5	4
<i>k</i>	—	0·03	0·06	0·09	0·23	0·20	0·07	0·07
<i>mg</i>	0·39	0·37	0·38	0·48	0·54	0·44	0·11	0·47
metszet	3	3	3	3	2	2	3	3
<i>gz</i>	—23	—26	—31	—28	—44	—31	—35	—44
ξ	20	15	11	8	15	15	13	16
η	36	31	34	33	21	26	37	33
ς	24	22	31	29	15	17	27	25
ρ_{011}	8·1	6·3	2·4	2·8	3·8	6·4	7·1	5·2
Magma	horn- blendit	hornb. ¹ issit	pirox. hornb.	pirox. hornb.	hornb. ho. per.	hornb. ho. per.	hornb. pirox.	hornb. issit

A magma kérdésének eldöntésénél 16 különböző értéket vettem alapul, az itt megadott értékeken kívül az értékek viszonyszámait is, mint aminő a $c : fm$, $c : alk$, $c : al$ stb., stb. Általában meglehetősen változatos képet nyújtanak ezek a hornblenditek a NIGGLI—BECKE-féle értékekben. Nagy különbségek vannak az egyes tagok között főleg a ti , al és c számoknál. Ezek azonban nem alapvetőek.

Az említett rokon kőzetek csoportjainak középértékeivel összehasonlítva, jól kitűnik a megegyezés és különbség:

¹ hornb. = hornblendites, pirox. = piroxenites, ho. per. = hornblenditperidotitos.

	Szarvaskő	Ditró	Rosenbusch, Tröger
<i>si</i>	80	78	80
<i>ti</i>	6·9	7·3	2·6
<i>al</i>	11	12	10
<i>fm</i>	65	55·5	64·5
<i>c</i>	20·5	28	20·5
<i>alk</i>	3·5	4·5	5
<i>k</i>	0·09	0·29	0·21
<i>mg</i>	0·44	0·63	0·61
metszet ..	3	4	3
<i>qz</i>	—33	—40	—41
ξ	14	16	15
η	31	40	30
ζ	24	32	25
\mathcal{P}_{011}	5·8	5·2	3·5

Minden hasonlóság mellett is feltűnik a *k* és *mg* viszony, ami annyira jellemző Szarvaskő összes eruptívumára, így a hornblenditekre is, úgy hogy ezeket még a rokon kőzetektől is megkülönbözteti.

A hornblendit egyik fontos differenciációs terméke a szarvaskői gabbróidális magmának. Helyzetét a szarvaskői eruptívumok között jól láthatjuk, ha a NIGGLI—БЕЧКЕ-féle értékek alapján összehasonlítjuk az itteni gabbrókkal és ultrabázitokkal, úgy ahogy ezeket a Tud. Akadémia által részben közölt (6. p. 92. és 7. p. 422—423) elemzések (21. drb) középértékeiből kiszámítottam:

	Gabbró (7 elemzés)	Tilait* (5 elemzés)	Hornblendit (8 elemzés)	Piroxenit (2 elemzés)	Peridotit (7 elemzés)
<i>si</i>	93	80	80	58	51
<i>al</i>	21·5	12·5	11	3	3
<i>fm</i>	50	62·5	65	78	88
<i>c</i>	23·5	21·5	20·5	17·5	8
<i>alk</i>	5	3·5	3·5	1·5	1
<i>k</i>	0·03	0·08	0·09	0·11	0·03
<i>mg</i>	0·35	0·38	0·44	0·48	0·38
metszet ..	4	3	3	2	1
<i>qz</i>	—27	—34	—33	—48	—53
ξ	26	16	14	4	4
η	45	34	31	20	11
ζ	28	25	24	19	9

* Tilait = gabbróid ultrabazit = gabbróperidotit, gabbrópiroxenit, gabbróhornblendit stb.

A differenciálódás menete általában is nagyon jónak mondható. A kovasavszám (*si*) fogyásával karöltve általában fogy az alkáliák (*alk*), a *Ca-* (*c*) és *Al-oxid* (*al*) száma és növekedik a *FeMg-oxidok* (*fm*) viszony száma. Az alkáli-viszony szám (*k*) igen alacsony értéke éppúgy jellemző sajátsága az itteni eruptívumoknak, mint a magnézia-viszony szám (*my*) aránylag kis értéke. A BECKE-féle vetítési adatok is jól mutatják ezt a differenciációs folyamatot; ezek alapján egyébként a pacifikus tartományba tartoznak. A BECKE—NIGGLI-féle számok közül a legtöbb érték bizonyítja, hogy a hornblenditék egészen jól beleillenek a szarvaskői eruptívumok közé, azokhoz szorosan, szervesen hozzátartoznak, közelebb-ről pedig közvetlenül csatlakoznak a gabbroid ultrabázitokhoz, melyektől a piroxeniték felé és ezeken át a peridotitok felé is meg van az átmenet.

Irodalom.

1. KALECSINSZKY SÁNDOR: Egy szarvaskői amfibol elemzése. Földtani Közlöny. XII. k. 196—198. I. Budapest, 1882.
2. MAURITZ BÉLA: Adatok a gyergyóditrói szienittömzs kémiai viszonyainak ismeretéhez. Akadémiai Mat. Természettudományi Értesítő. XXX. k. 624—626. I. Budapest, 1912.
3. MAURITZ—VENDL—HARWOOD: A ditrói szienit további petrokémiai vizsgálata. Akadémiai Mat. Természettudományi Értesítő. XLI. k. 72—73. I. Budapest, 1924.
4. V. JANOVICI: Etude s. l. mass. syenit. d. Ditrâu etc. Revue Muz. Geol. Min. al Universităţii din Cluj. IV. p. 37—50. Cluj. 1934.
5. E. TRÖGER: Spezielle Petrographie der Eruptivgesteine. Berlin, 1935.
6. SZENTPÉTERY ZSIGMOND: Titánmagnetites kőzetek a szarvaskői Vaskapu vidékéről. Akad. Mat. Természettudományi Értesítő. LVI. 1—41. I. Budapest, 1937.
7. SZENTPÉTERY ZSIGMOND: A bükkhegységi gabbroidtömeg kőzeteinek magnetikus képződése. Akad. Mat. Természettudományi Értesítő. XLIX. 399—429. I. Budapest, 1933.

TÁBLAMAGYARÁZAT.

IV. tábla.

1. Foltosan zöldülő barna amfibol. Az egyes foltok zónásan válnak világosabb zöldékké. A felső folt mellett finom vasércszálak, az alsó folt

mellett az az amfibol hasadásai mentén kivált hosszúkás titanitszemek láthatók. 1 Nicol, 38-szoros nagyítás. Majorlása 141 m.

2. Barna amfibol átváltozása tremolittá. Az átmenet itt gyors. Jellemző, hogy a magnetitszemek (baloldalt és alul) üdék maradtak. 1 Nic. 43 ×. Majorlása 146 m.

3. Elhalványult és széttört barna amfibol a bázis (001) szerinti ikerlemezséggel, ami jól mutatja az eltört rész elvetődését is. 1 Nic. 97 ×. Majorlása 141 m.

4. Ugyanaz + Nicolok közt, 131 ×.

5. Amfibolkristály széttörése flexuraszerű meghajlással. +Nic. 43 ×. Majorlása 129 m.

6. Foltosan zöldülő barna amfibol szétszakadási hézagában képződött aktinolitrostok. A szakadási hézagot kvarc tölti ki. A hézagba bele-tört amfiboldarabokból is aktinolit képződött. 1 Nic. 75 ×. Majorlása 230 m.

V. tábla.

1. Dörzsbreccsiás sávból részlet. Az amfibol töredékdarabok ragasztóanyaga maga a finom amfibol-törmelék. 1 Nic. 75 ×. Majorlása 128 m.

2. A dörzsbreccsiás sáv éles amfiboltöredékeit, valamint a magnetit, titanit-, epidot- és apatittöredékeket finom préhnitanyag ragasztja össze. 1 Nic. 22 ×. Majorlása 130 m.

3. A vékony plagiaplit-eret foltosan elváltozó amfibolkristályok kísérik. +Nic. 12 ×. Majorlása 141 m.

4. Hézagkitöltő plagioklász, barna amfibol korrodált oldalára ránőve. +Nic. 22 ×. Majorlása 129 m.

5. Foltosan elváltozó amfibolok közé benyúló apatit, felül titanittal. 1 Nic. 21 ×. Majorlása 129 m.

6. Titanitkristályok préhnites és aktinolitos hornblenditben. 1 Nic. 30 ×. Majorlása 146 m.

*

A vizsgálatokat a ROCKEFELLER-Alap műszereivel végeztem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

AMPHIBOLOLITH VON SZARVASKŐ.

Von: S. v. SZENTPÉTERY, korr. Mitglied.

Mit den Tafeln IV. und V.

Der Amphibololith kommt in der Gegend von Szarvaskő (Bükkgebirge, Ungarn) in der Majorlápa, im Stollen bei dem Vaskapu und im Újhatártal vor. Seine Lagerungsverhältnisse sind wechsellagernd, doch findet man ihn hauptsächlich in Schlieren.

Das Gestein hat viele Arten und Abarten, die miteinander durch Übergänge verbunden sind. Am häufigsten ist der normale Hornblendit, manchmal mit mehr als 90 % brauner Hornblende; häufig ist auch der Diallag (— Diopsid —) hornblendit. Im Vaskapustollen kommt der Cortlandtit und Schriesheimit an mehreren Stellen vor, die durch die Übergänge vielfach in Pyroxenit und Peridotit übergehen. Stellenweise erscheint auch der Lherzit, Titanomagnetithornblendit, Titanithornblendit, der feldspatführende Hornblendit usw. Der Titanithornblendit geht in Titanitit, der Lherzit in Titanitbiotitit über. Der Biotit ist nur an einigen Orten, der Titanit stets sekundär.

Ausser den dynamischen Umformungen sind die Hornblendite vielerorts auch chemisch stark umgewandelt. Die stärkste Umwandlungsweise ist die Prehnitisierung und die Serpentinisierung, es kommt aber stellenweise auch eine ziemlich starke Chloritisierung, Titanitisierung, Biotitisierung, Amphibolisierung, Pyritbildung, Verquarzung, Verkalkung usw. usw. vor.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. November 1937.)

ADATOK A MAGYARORSZAGI FŐBB TALAJTIPUSOK DINAMIKAI JELLEMZÉSÉHEZ.

III. A magyarországi lösztalajok degradációja.¹

KOTZMANN LÁSZLÓ-tól.

Talajtani vonatkozásban a degradáció fogalma a talajra ható tényezők oly dinamikai egyensúlyát jelzi, mely az eredetileg bázisokban gazdag, semleges reakciójú talaj kilúgzódását és fokozatos elsavanyodását eredményezi.

Ezt a jelenséget először KOSZTICSEV és KORSINSZKY az oroszországi steppe és erdőzóna határán tanulmányozták, ahol az átmeneti klimatikus viszonyok között az erdővegetáció a mezőségi jellegű területek rovására terjeszkedett. Az erdővel borított mezőségek talajai azután az erdő sajátos hatására kialakult nedvesebb viszonyok között, fokozatosan a kilúgzott erdőtalajok sajátosságait veszik fel, e mellett azonban az eredeti mezőségi talaj egykori jellege is felismerhető rajtuk. Az említett kutatók nyomán Oroszországban ezzel a kérdéssel sokan foglalkoztak (1) s újabban FLOW(2) és POPOVÁT(3) a mezőségi talajok hasonló okokra visszavezethető degradációját Románia területén is tanulmányozták.

Az irodalom csak kevés részletes adatot nyújt a degradált mezőségi talajok hazai előfordulására és jellegzetes sajátosságaira vonatkozólag. Nálunk ezt a kérdést eddig az orosz irodalom nyomán inkább csak általánosságban tárgyalták, holott az erdőségek-

¹ A m. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemnek dr. SIGMOND ELEK műegyetemi nyilv. tanár vezetése alatt álló talajlaboratóriumában készült dolgozat.

kel körülzárt Nagy Magyar Alföldön, a mai, többnyire mesterségesen kialakított erdőhatárokon belül nagy területet foglalnak el oly talajok, melyek mintegy átmenetet képeznek a tipikus mezőségi és erdei talajok között.

A degradáció jelenségeinek tanulmányozásánál célszerű azonos alapkőzetben kialakult talajokat vizsgálni s így kutatni azokat a jellegzetes változásokat, melyek a nedvesedő klíma hatására a talajszelvényen mutatkoznak. Erre a legalkalmasabbnak a löszön képződött talajok kínálkoznak, melyek hazánk legkülönbözőbb klímájú vidékein egyaránt előfordulnak. A lösztalajok e szempontból való tanulmányozását az is indokolja, hogy a legjellegzetesebb mezőségi talajaink szintén löszön fordulnak elő s azokra nézve részletes vizsgálati adatokkal rendelkezünk.(4)

Az idevágó ismereteink szerint a hazai löszlerakódások mind bázisokban gazdag képződmények, melyek több-kevesebb kalcium-, ill. magnéziumkarbonátot is tartalmaznak. Ha a degradáció fogalmát a bázisokban mutatkozó elszegényedésben jelöljük meg, úgy tulajdonképpen a lösz mint alapkőzet már a tipikus mezőségi talajok képződésénél is bizonyos mértékben degradálódik, mert bizonyosfokú kilúgzás ezekben a talajokban is kimutatható. Ez a kilúgzás azonban csak az elmálás folyamán képződött alkalisókra és a $CaCO_3$ egy részére szorítkozik. A másodlagos képződésű alumínium- (vas-) hidroszilikátok helyben maradnak s közelítőleg a teljes abszorpciós kapacitásúig bázisokkal, főleg Ca -al vannak telítve. A SIGMOND-féle általános dinamikai talajrendszerben éppen ezért a mezőségi talajok a Ca -talajnembe vannak sorolva.(5)

A degradációval kapcsolatos kilúgzódásnak tehát nem szabad az alapkőzet eredeti összetételére vonatkoztatott általános értelmezést adni, hanem a degradáció fogalmát a talaj aktív részében, azaz a másodlagos képződésű hidroszilikát-komplexumban mutatkozó kilúgzási jelenségekre kell korlátoznunk. A hidroszilikát-komplexum pedig mindaddig telített és stabil marad, amíg a talaj felső szintjeiben finom eloszlású (aktív) $CaCO_3$ van jelen, mert ez esetben a $CaCO_3$ mint puffer hat az elsavanyodással szemben s neutrális közeget biztosít a talajban azáltal, hogy a szervesanyag bomlásánál képződött szénsavat és savanyú humusztermékeket neutralizálja.

Nedvesebb viszonyok között ha a CaCO_3 a felső szintekből kilúgódik, pufferhatást csak a hidroszilikátok által megkötött bázisok fejthetnek ki. Ezzel kapcsolatban azonban a szilikátkomplexum bázisokban szegényedik s a folyamat egyensúlyától függően többé-kevésbé telítetlenné válik. A telítetlen «agyagsavak» önmagukban is savanyú kémhatásúak s így természetesen a savhatással szemben mutatkozó pufferképességük is a telítetlenség mértékének megfelelően csökken. Minél előrehaladottabb egyensúly alakul ki ebben az irányban, annál savanyúbb lesz a közeg a talaj felső szintjeiben s annál nagyobb mértékben szenvednek kilúgást az abszorbtíve kötött bázisok is. *E talajokban tehát a szilikátkomplexum savkarakterre jut érvényre s e talajok dinamikáját a hidrogén-ion szabja meg.* A SIGMOND-féle általános talajrendszer szerint ez jellemzi mindazokat a talajokat, melyek a hidrogén-talajnembe vannak összefoglalva. (5)

A kilúgódásnak ebben az előrehaladott stádiumában természetesen a humifikáció folyamán képződött savanyú humusztermékek is csak részben lesznek bázisokkal telítve. A telített állapotban stabil humuszvegyületekkel szemben a savanyú humusz mobilis és finom diszperziójú sol-ok alakjában lefelé vándorolhat a talaj mélyebb szintjeibe. A telítetlenség mértékének megfelelően azonban a hidroszilikátkomplexum is veszít stabilitásából és a humusz-savak védőhatása alatt szintén kolloid-diszperzióba juthat és kilúgást szenvedhet a talaj felső szintjeiből. A hidroszilikátokat alkotó SiO_2 , Al_2O_3 és Fe_2O_3 -nak ez a kilúgódása és egy mélyebb szintben való felhalmozódása jellegzetes kísérőjelensége a degradációnak s jellemző a savanyú közegben végbemenő talajkilúgódási folyamatra.

Hazai lösztalajaink között a legnagyobb mérvű degradációt azokon a löszterületeken figyelhetjük meg, melyek ma is erdővel vannak borítva. A mélyrétegű lösz mezőgazdasági művelésre kiválóan alkalmas lévén, hazánk területén mezőgazdasági művelés alatt áll csaknem mindenütt, ahol a domborzati viszonyok ezt megengedik. A lankás löszhátak erdőségeit az elmúlt századokban csaknem mindenütt kipusztították, viszont az ellenkező értelmű beavatkozásról, tehát mezősegi jellegű vagy kopár löszterületek mesterséges beerdősítéséről csak a legújabb időkben hallunk, s ma is

csak a vízmósásos kopár területek megkötésével kapcsolatban. Ilyenformán a löszterületeken álló mai erdőségek kétségkívül az illető terület természetes növényzetének felelnek meg s talajaik a jellegzetes mérsékelt égövi erdőtalajok főtípusába sorolhatók.

Nem ilyen világos a helyzet az alacsonyabb fokú degradációt mutató ama lösztalajainknál, melyek ma mezőgazdasági művelés alatt állnak. Ezeknél ugyanis gyakran vitás lehet az, hogy az elmúlt időkben minő természetes vagy mesterséges vegetációváltozás ment végbe a kérdéses területen. TREITZ (6) a Nagy Magyar Alföld egész területét «mesterséges mezőségek» övének nevezi, abból a ma már általánosan elfogadott és többek között KAÁN (7) által is részletesen bizonyított tényből kiindulva, hogy Alföldünkön a természetes erdőhatárok még a történelmi multban is mélyen belenyúltak a ma már mezőségi jellegű területekbe s csak az erdőirtással kapcsolatos mezőgazdasági kultúra terjedése szorította vissza az erdőt a mai mesterséges határokra. Ha a mesterséges jelző Alföldünk egész területére nem is általánosítható, mégis kétségtelen, hogy úgy az Alföld, mint a Dunántúl mezőgazdasági művelés alatt álló, degradált jellegű talajainak legnagyobb része valamikor erdőtalaj volt. Szigorúan az orosz iskola szerint értelmezett és erdő hatására degradálódó mezőségi talaj tehát hazánk területén ma már nem fordulhat elő, mert ha ilyen értelmű degradációs folyamat a multban fel is lépett, később az itt előforduló erdők kiirtásával a talaj az eredeti állapotba került vissza és bizonyos mértékig regradálódhatott. Alföldünkön tehát, mint arra már BALLENEGGER (8) is rámutatott, regradációs folyamatokkal is számolni kell s ez a körülmény az itt tárgyalandó törvényszerűségek felismerését nagyon megnehezíti.

A megvizsgált talajszelvények leírása.

A degradáció mértékének összehasonlító megállapítására alapnak ama vizsgálati eredményeket használjuk fel, melyeket a tipikus, löszön kialakult mezőségi talajainkra vonatkozólag már közöltünk. Ezen jellegzetes mezőségi, tehát degradációt nem mutató talajokkal ellentétben az alább leírt szintén löszön kialakult szelvények felső szintjeikben nem tartalmaznak $CaCO_3$ -ot.

1. sz. szelvény *Tiszaföldvár*ról. A talaj legfelső 0—15 cm-es szintje egy árnyalattal világosabb színű, mint az alatta lévő tömődöttebb szerkezetű 15—40 cm-es szint. A humusz színező hatása 100 cm mélységig terjed s fokozatosan halványodva ebben a szintben megy át a humuszos réteg a lösz eredeti sárga színébe. Az egész szelvény szerkezete morzsás jellegű. 60 cm mélységig a szelvény CaCO_3 mentes. A 110 cm-es szint sok mészkonkréció-t tartalmaz. Mezőgazdaságilag művelt terület.

2. sz. szelvény *Czibakházár*ról. A felső 20 cm-ig terjedő réteg rögeinek felülete szürkés árnyalatú s jól elkülönül az alatta levő sötétebb és barnás színezetű tömődöttebb szinttől. Száraz állapotban a 20—60 cm-es szint rögei sokkal keményebbek, mint a felette és alatta lévő szintekben. A humuszréteg mélysége 90 cm-ig terjed. 40 cm mélységig a szelvény CaCO_3 mentes. 100 cm-től lefelé sok mészkonkréció található. Mezőgazdaságilag művelt terület.

3. sz. szelvény *Hajdúdorog*ról. A 30—60 cm-es réteg sötétebb színűnek tűnik fel, mint a 30 cm-ig terjedő feltalaj. E sötétebb rétegtől kezdve lefelé a humuszos szint fokozatosan megy át a sárga lösz altalajba. 90 cm mélységig a szelvény CaCO_3 mentes. A szelvény mélyebb szintjeiben a mész elég egyenletes megoszlású, mészkonkréciók csak kis mennyiségben fordulnak elő. Általában az egész szelvény morzsalékos szerkezetű, de a 30—60 cm-es szintben a morzsák összeállóbbak és keményebbek. A terület mezőgazdasági művelés alatt áll.

4. sz. szelvény *Bicskér*ől. 35 cm-ig a szelvény világosszürke színű és morzsalékos szerkezettel bír. Ez alatt az előbbtől eltérő határozottan vöröses színű akkumulációs szint következik, mely csak a legfelső rétegében 45 cm-ig mutat némi humuszos színeződést. A vöröses árnyalat lefelé fokozatosan csökken s 135 cm-nél már CaCO_3 tartalmú sárgás lösz következik. Mezőgazdaságilag művelt terület. A vörösesbarna szint tömődött jellegű.

5. sz. szelvény *Nagykovácsir*ől. Kb. 40 éves lomberdő alatt (80% tölgy, 20% szil és kőris). A felső vékony alomtakaró vizsgálat tárgyát nem képezte. Ez alatt 5 cm mélységig humuszos szürke szint következik, mely sok nem humifikált növényi részeket is tartalmaz. Az 5—30 cm-es szint világos sárgásszürke színű kilúgzási szint, mely élesen elkülönül az alatta levő vörösesbarna színű fel-

halmozódási szinttől, mely lefelé világosodó színnel 150 cm mélységig terjed. 150 cm-nél minden átmenet nélkül élesen elhatárolt vonalban jelentkezik a $CaCO_3$, itt kezdődik a jellegzetes sárgás-színű lösz altalaj. A felhalmozódási szint itt is tömődött a többi szintekhez képest.

A fent leírt s általunk megvizsgált szelvényeken kívül egyes esetekben felhasználjuk egy *Sajószögedről* való jellegzetes löszön kialakult «degradált mezősségi talaj» adatait is, amelyeket ENDRÉDY(9) közölt.

A vizsgálati eredmények ismertetése.

A megvizsgált szelvényekben végbement kilúgzási folyamatokra s egyben a degradáció mértékére is az aciditás viszonyok s az abszorpciós komplexum telítettségi állapotának ismeretében következtethetünk. Vizsgálati eredményeink ismertetését tehát célszerű az idevágó adatokkal kezdeni s ezeknek ismeretében térni át a szelvények egyéb sajátosságainak tárgyalására.

Az 1. sz. táblázat a $CaCO_3$, ($MgCO_3$) megoszlását tünteti fel, valamint a meghatározott aciditási értékeket. Mint arra már az előbbiekben rámutattunk, e talajok esetében a $CaCO_3$ a felső szintekből kilúgzódott. A $CaCO_3$ -mentes felső réteg vastagsága az adott viszonyoknak megfelelő egyensúly szerint alakult ki s a megvizsgált talajok esetében 40—150 cm között változik. Mint az várható is volt, a vonatkozó *pH*-értékek és a hidrolitos aciditás értékeinek ez adatokkal való egybevetéséből általános következtetésként azt vonhatjuk le, hogy a $CaCO_3$ -kilúgzódás mélységnek növekedésével a felső szintek aciditása is emelkedik. Ez azonban csak általánosságban érvényes, mert pl. a *czibakházi* talaj 40 cm-ig kilúgzódva jelentékenyen nagyobb aciditást mutat, mint a *tiszaföldvári* talaj felső szintjei, holott ez utóbbi szelvény 60 cm mélységig $CaCO_3$ -mentes.

1. Táblázat. — Tabelle 1.
A talaj reakcióállapota
Reaktionszustand der Böden

A talaj eredete és szintjei Herkunft und Schichten der Böden	Összes karbonát CO_2 Ges. Karb. CO_2 %	pH		Hydrolitos aciditás γ_1 Hydr. Acidität			
		$CaCO_3$ %	$MgCO_3$ %				
Tisza- földvár	0—20	—	—	6.72	5.91	3.2	
	20—60	—	—	7.01	6.00	2.8	
	60—110	3.38	7.69	7.89	6.75	1.2	
	110—160	12.01	27.30	8.32	7.30	0.4	
	160—220	4.91	11.15	8.56	7.72	0.4	
Czibak- háza	0—15	—	—	6.02	5.51	8.8	
	15—40	—	—	6.45	5.90	5.4	
	40—100	2.10	4.78	7.51	6.46	1.0	
	100—140	6.89	15.66	8.32	7.80	0.8	
	140—200	9.96	22.63	8.40	7.76	0.5	
Hajdu- dorog	0—30	—	—	7.02	6.07	9.8	
	30—60	—	—	7.02	5.90	7.4	
	60—90	—	—	7.47	6.28	5.2	
	90—120	2.41	5.29	0.16	8.65	7.82	1.0
	120—150	4.71	10.17	0.48	8.65	8.30	0.4
	150—180	3.87	8.07	0.63	8.76	8.28	0.3
	180—210	2.73	5.72	0.42	8.80	8.36	0.3
Bicske	0—35	—	—	5.10	4.81	14.2	
	35—50	—	—	5.62	5.16	10.0	
	50—80	—	—	5.81	5.18	7.6	
	80—135	—	—	6.25	5.30	3.2	
	135—160	7.56	17.18	7.90	7.16	0.6	
	160—200	10.02	22.77	8.12	7.56	0.3	
Nagy- kovácsi	0—5	—	—	4.80	4.30	19.8	
	5—30	—	—	4.75	4.25	14.4	
	30—60	—	—	5.30	4.56	14.0	
	60—100	—	—	5.70	4.71	8.8	
	100—150	—	—	6.22	4.90	4.0	
	150—180	8.44	16.60	2.22	7.86	7.05	0.9
	180—210	9.27	18.26	2.41	8.32	7.50	0.5
	210—240	9.55	18.19	3.00	8.14	7.46	0.3
Sajó- szöged	0—15	—	—	6.1	5.6	11.7	
	15—40	—	—	6.4	6.0	7.9	
	40—70	—	—	8.1	7.7	1.0	
	70—90	0.13	0.3	8.4	8.1	—	
	90—130	9.42	21.4	8.1	7.9	—	

E talajok reakciója a legfelső szintben 4.80—7.02 pH között váltakozik, a hidrolitos aciditás y_1 értékei pedig 3,2—19,8 között mozognak. A két érték között szintén mutatkozik bizonyos összefüggés abban a formában, hogy az alacsonyabb pH -értékekhez magasabb y_1 -értékek tartoznak. Ez az összefüggés azonban nem általános érvényű s jelen esetben csak azért domborodik ki meglehetősen szembeütően, mert e talajok mind azonos alapkőzetten kialakult, tehát ebben a vonatkozásban egymáshoz közelálló képződmények. Ha ugyanis a talajban sem szabad ásványi sav, sem pedig Na_2CO_3 nincs jelen, úgy a talaj hidrogénionkoncentrációja, tehát a pH -értéke is a humusz-savak és a hydroszilikátkomplexum telítettségi állapota szerint változik, és pedig *csupán a telített és telítetlen vegyértékek egymáshoz való viszonya és nem azok abszolút nagysága szerint*. Ezzel szemben a hidrolitos aciditás a telítetlen vegyértékek abszolút nagyságával arányosan változik. Az itt vizsgált talajoknál az abszorpciós komplexum vegyértékét jelképező T érték, mint látni fogjuk, sokkal kisebb mértékben változik, mintha egymástól merőben különböző jellegű homok- és agyagtalajokat hasonlítanánk össze. Ezért itt a telítetlenség mértéke és a telítetlen vegyértékek abszolút nagysága közel párhuzamosan halad. Kimondottan alacsony és magas T -értékű homok-, ill. nehéz agyagtalajok esetében azonban ez az összefüggés nem jelentkezne.

Önmagában az aciditási értékek ismerete még nem szolgál biztos támpontként a degradáció mértékének megállapítására s azt ki kell egészítenünk az egyes talajsíntek telítettségének meghatározásával. Az abszorbtíve kötött bázisokat három szelvényben egyenként is meghatároztuk HISSINK (10) eljárása szerint, két szelvény esetében pedig csak az abszorbeált bázisok összegét határoztuk meg $n.BaCl_2$ -al, DI GLÉRIA (11) eljárása szerint. A két eljárás azonos alapelveken nyugszik s így az eredmények összehasonlíthatók egymással. A telítetlenséget (U_p) valamennyi talaj esetében egyöntetűen ammionabszorpcióval (12) határoztuk meg. A 2. és 3. táblázat a vonatkozó eredményeket foglalja össze.

2. Táblázat. — Tabelle 2.

*A talajok telítettségi állapota.**Der Sättigungszustand der Böden.*

A talaj eredete és szintjei <i>Herkunft und Schichten der Böden</i>	<i>S</i> nach Hissink szerint	<i>U_p</i> Ammon- absorb- ció	<i>T_p</i> <i>S + U_p</i>	<i>V_p</i> $\frac{100 \times S}{T_p}$	A kicserélhető kationok a <i>T_p</i> érték százalékában <i>Austauschbare Basen in % auf T_p berechnet</i>					
					<i>Ca</i>	<i>Mg</i>	<i>K</i>	<i>Na</i>	<i>H</i>	
Hajdudorog	0—30	18.59	3.61	22.20	83.74	67.76	11.80	1.93	2.25	16.26
	30—60	22.63	2.40	25.03	90.41	75.11	11.11	1.55	2.64	9.59
	60—90	20.82	2.02	22.84	91.15	74.96	11.82	1.44	2.93	8.85
	90—120	17.75	0.56	18.31	96.94	73.18	15.62	1.75	6.39	3.06
	120—150	11.99	0.40	12.39	96.78	25.84	40.35	2.26	28.33	3.22
	150—180	8.76	0.10	8.86	98.85	25.37	44.80	3.42	25.26	1.15
	180—210	6.89	0.10	6.99	98.57	19.03	54.26	3.12	22.16	1.43
Nagykovácsi	0—5	12.48	10.36	22.84	54.64	34.22	16.31	1.67	2.44	45.36
	5—30	6.32	4.80	11.12	56.83	35.08	18.46	1.22	2.07	43.17
	30—60	14.79	5.90	20.69	71.48	43.14	23.92	2.24	2.18	28.52
	60—100	15.16	6.32	21.48	70.57	41.16	24.80	2.12	2.49	29.43
	100—150	13.48	4.43	17.91	75.26	38.42	29.10	3.40	4.34	24.74
	150—180	13.43	0.04	13.47	99.70	58.26	33.12	3.60	4.72	0.30
	180—210	9.18	0.05	9.23	99.45	60.92	26.95	5.40	6.18	0.55
210—240	8.66	0.02	8.68	99.77	58.10	29.47	6.30	5.90	0.23	
Bicske	0—35	8.56	5.70	14.26	60.03	42.05	15.33	1.27	1.38	39.97
	35—50	14.42	5.02	19.44	74.18	43.30	27.16	1.80	1.92	25.82
	50—80	16.18	5.20	21.38	75.68	48.33	22.48	3.20	1.67	24.32
	80—135	13.16	3.32	16.48	79.85	37.81	36.09	2.91	3.04	20.15
	135—160	10.12	0.20	10.32	98.06	47.20	40.57	4.13	6.16	1.94
	160—200	10.18	0.10	10.28	99.02	51.43	37.90	3.27	6.42	0.98

3. Táblázat. — Tabelle 3.

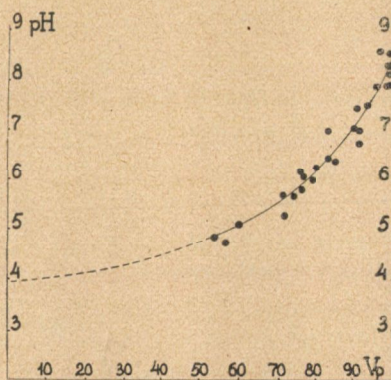
*A talajok telítettségi állapota.**Der Sättigungszustand der Böden.*

A talaj eredete és szintjei		S	U_p	T_p	V_p	A talaj eredete és szintjei		S	U_p	T_p	V_p
Herkunft und Schichten der Böden		mg ekv.	mg ekv.	mg ekv.	mg ekv.	Herkunft und Schichten der Böden		mg ekv.	mg ekv.	mg ekv.	V_p
Czibakháza	0—15	26.42	7.00	33.42	79.05	Tiszaföldvár	0—20	35.76	3.26	39.02	91.64
	15—40	32.03	6.29	38.32	83.59		20—60	34.05	3.37	37.42	90.99
	40—100	37.69	2.33	40.02	94.18		60—110	42.29	1.72	44.01	96.09
	100—140	41.58	0.30	41.88	99.28		110—160	43.10	0.20	43.30	99.54
	140—200	25.18	0.30	25.48	98.82		160—220	24.26	0.30	24.56	98.78

Az abszorbeált bázisok összege (S) és a bázissal helyettesíthető hidrogén mennyiségének (U_p) ismeretében kiszámíthatjuk egyrészt a talaj maximális abszorpciós kapacitását (T_p), másrészt a talaj százalékosan kifejezett telítettségét, a V_p -értéket is.

A V_p -érték szolgálhat a legjobban az abszorpciós komplexum elbázistalanodásának mértékéül. Míg a tipikus mezőszégi talajainknál ez az érték a felső szintekben is közelítőleg 100-nak mutatkozott, addig az itt tárgyalt talajok felső szintjeiben a kilúgzás mértékének megfelelően alacsonyabb V_p -értékeket kapunk.

A telítettség és a talajban uralkodó hidrogénionkoncentráció között, mint említettük, elméletileg is megokolt összefüggés áll fenn. A megvizsgált lösztalajok egyes szintjeinek pH és V_p -értéke között mutatkozó eme összefüggést az 1. sz. ábrán feltüntetett grafikon mutatja. Az itt tárgyalt talajokon kívül ezen feltün-



1. ábra.

tetést nyertek az ugyancsak löszön kialakult mezősi talajok felső szintjeinek már közölt adatai is. Ez utóbbi talajok alsó szintjeit azért nem tüntettük fel, mert vizsgálati adataink szerint e szintek már kissé szikes jellegűek és a szokásos eljárásokkal ki nem mutatható Na_2CO_3 kis mennyisége is az összefüggést eltorzíthatja.

Miután a grafikonon a hidrogenionkoncentráció logaritmikusságát (pH) van feltüntetve, a különben egyenes vonalú összefüggés logaritmikus görbe alakjában jelentkezik. Tényleges adatok alapján csupán a görbe 50—100%-os telítettségnek megfelelő részét rajzolhatjuk meg. A görbület mértékéből azonban, valamint abból, hogy a természetben 3,75 pH -nál magasabb hidrogenionkoncentrációt talajokon csak elvétve figyeltek meg, a görbe hiányzó részét is feltüntetjük. A pH -skálán lefelé haladva azonos pH -intervallumoknak emelkedő hidrogenionkoncentráció-változás felel meg, ezért a talajok telítettségében mutatkozó változásnak is az alacsonyabb pH -intervallumokban szükségképpen nagyobbak kell lennie, mint a neutrális pont közelében. A grafikonon is látható, hogy a telítettségnek 100-ról 50%-ra való esése kb. 3·5 pH -intervallum csökkenéssel van egybekötve, míg 50%-tól 0-ig a változás csak kb. 1 pH -intervallumra szorítkozik.

A legalacsonyabb V_p -érték (54, 64) az erdő alatt vett szelvény felső szintjében jelentkezik. Ha a Buda-környéki erdők, ahonnan a minta származik, nem is képviselik hazánk legnedvesebb erdő-típusát, mégis valószínű, hogy ez az érték már megközelíti azt a határt, ameddig lösztalajaink degradációja hazánk klimatikus viszonyai között általában eljuthat. Kellő számú adat hiányában természetesen ezt nem állíthatjuk határozottan s a következtetésünk csak azon alapszik, hogy a hazánk területén uralkodó lombdők alatt löszön csak elvétve figyelhetünk meg a talaj ásványi részében 4·0—4·5 pH közötti értékeket, ami 35—50% telítettségnek felel meg. Lösznél homokosabb jellegű alapkőzetben a viszonyok természetesen egészen mások lehetnek s ott valószínűleg az alacsonyabb telítettségi érték sem ritka.

A telítettségi és aciditási értékek alapján már rendezhetjük a megvizsgált talajszelvényeket a degradáció mértéke szerint. A 4. sz. táblázatban a szelvények a csökkenő telítettség, azaz V_p -érték alapján vannak felsorolva s feltüntetjük a vonatkozó egyéb

értékeket is. Valamennyi adat a szelvények legfelső szintjeire vonatkozik. Általában a felsorolt értékek csekély kivétellel azonos értelemben változnak, csupán a $CaCO_3$ kilúgzódásának mértéke változik meglehetősen rendszertelenül.

4. Táblázat. — Tabelle 4.

A talajszelvény származása <i>Herkunft der Böden</i>	Telítettség V_p <i>Unge-sättigkeit</i>	Hidrolitos aciditás y_1 <i>Hydrolitische Accidität</i>	pH vízben <i>im Wasser</i>	A $CaCO_3$ kilúgzódásának mélysége <i>Die Tiefe der Auslaugung des $CaCO_3$</i>
Tiszaföldvár	91·6	3·2	6·7	60 cm
Hajludorog	83·7	9·8	7·0	90 „
Czibakháza	79·0	8·8	6·0	40 „
Sajószöged	76·3	11·7	6·1	90 „
Bicske	60·0	14·2	5·1	135 „
Nagykovácsi	54·6	19·8	4·8	150 „

↑ fokozódó degradációs állapot
 ↓ Zsuhosodó degradációs állapot

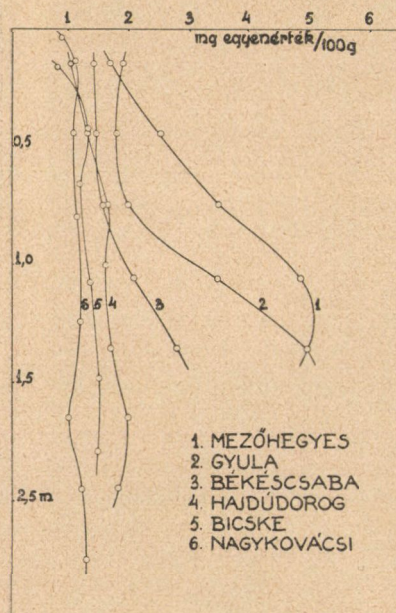
Ez utóbbi megfigyeléssel kapcsolatban két lehetőségre kell rámutatnunk. Először arra, hogy a $CaCO_3$ -nak aránylag csekély mélységig jelentkező kilúgzódása már előrehaladott degradációval lehet egybekapcsolva, mint azt a czibakházai talajszelvény esetében is megfigyelhetjük. Másrészt azonban azt is meg kell állapítanunk, hogy a $CaCO_3$ -nak a felső szintekből való hiánya nem jár együtt minden esetben a felső szintek talajtani értelemben vett degradációjával. A tiszaföldvári szelvény ugyanis gyakorlatilag telítettnek minősíthető annak ellenére, hogy a $CaCO_3$ 60 cm mélységig kilúgzódott belőle.

Az abszorpciós komplexumra vonatkozó és a 2. sz. táblázatban közölt adatokból eddig csak a telítettségi értékekkel foglalkoztunk s az abszorbeált bázisok milyenségi megoszlására nem tértünk ki. Miután az abszorbeált bázisok százalékos összetétele a talajvízben oldott kationok minőségi összetételével változik, az itt kimutatható törvényszerűségek csak a talaj vizes kivonatának ismeretében tárgyalhatók.

Az elektromos vezetőképesség szokásos meghatározásából a vízdíható összes só e talajok minden szintjében 0.1%-nál kevesebbnek adódott, a felső szintekben pedig a 0.05%-ot sem érte el. Miután e módszer csak megközelítő pontossággal adja meg a sók mennyiségét s a sók összetételére vonatkozólag egyáltalában nem nyújt tájékozódást, 3 szelvény szintjeiben a vízdíható kationok és anionok mennyiségét a szokásos módon vizes kivonatban is meghatároztuk. A meghatározás eredményeit az 5. sz. táblázat foglalja össze.

E részletes adatok alapján is elsősorban az állapítható meg, hogy e szelvények sótartalma nagyon alacsony s a *mélyebb szintekben sincs jelentékeny sófelhalmozódás*. A degradált talajok

tehát e tekintetben is határozottan különböznek a mezősi típusú lösztalajainktól, melyeknél a közölt adatok szerint a mélyebb szintekben határozott sóakkumuláció jelentkezik. (4) A 2. sz. ábra ezt a különbséget szemmel láthatóan bizonyítja. A degradált talajok sógörbéi egymáshoz viszonyítva nem mutatnak lényeges különbséget, de a nagysági sorrendjük általában a degradációnak az előbbieken meghatározott mértéke szerint alakul ki. Miután a degradáció kilúgzódással kapcsolatos s a kilúgzódás elsősorban a vízdíható sókra hat, ez az összefüggés nem szorul közelebbi magyarázatra.



2. ábra.

A vízdíható sók minőségi megoszlására vonatkozólag általában az állapítható meg, hogy a *Ca*-sóok viszonylagos mennyisége a mélység felé csökken, viszont a *Mg*-sóké emelkedik. A *Ca*- és *Mg*-sóok ekvivalens összege a legtöbb szintben felülmúlja ugyan a *Na*-sóok

mennyiségét, mindazonáltal az utóbbiak viszonylagos mennyisége is magas. Ezeket az adatokat a mezőségi talajainkra vonatkozólag megállapított adatainkkal összevetve láthatjuk, hogy, eltekintve az utóbbiak mélyebb szintjeiben mutatkozó határozott Na-só-akkumulációtól, a vizes oldat összetétele a degradáció folyamán nem változik lényegesen s a változás csupán a sók össz mennyiségének csökkenésére s a talajoldat hidrogénionkoncentrációjának emelkedésére szorítkozik. Ennek megfelelően az abszorbeált bázisok százalékos megoszlása sem változik, csupán az *abszorpciós komplexumhoz kapcsolt hidrogén növekedik a degradáció mértékével arányosan s a szelvény H-talaj jellege mindinkább kidomborodik.*

Az 5. sz. táblázat utolsó rovatában a meg nem határozott anionok százalékos mennyisége van feltüntetve, a kation ekvivalensekkel szemben mutatkozó hiány alapján. Ennek zöme szerves anionból adódik s a hiány változásából arra következtethetünk, hogy *a degradáció előrehaladtával a szerves anyag vízzeloldhatósága növekedik.*

A humusztartalomra vonatkozó részletes adataink számszerű közlésétől itt eltekintünk és csupán az összes humusztartalom változását mutatjuk be a 3. sz. ábrán. Ebből is kiténik, hogy a mezőségi talajainkra annyira jellemző humuszmegoszlás a degradált szelvényekben általában úgy módosul, hogy itt *a humusz mennyisége egy bizonyos mélységig közel állandó értéket mutat s csak azután csökken.* Az erdőtalaj humuszmegoszlása természetesen ismét egészen eltérő s a legfelső szintben, az alomtakaró alatt viszonylag magas humusz-felhalmozódást mutat.



3. ábra.

A mezőgazdasági művelés alatt álló degradált talajoknak sajátos humuszmegoszlásában kétségkívül az illuviáció is szerepet játszik, mely *a mobilis anorganikus alkotórészek mellett a humusznak is a mélyebb szintekben való felhalmozódását segíti elő.*

Az illuviációs szint kialakulásának mértékéről már az egyes

5. Táblázat. — Tabelle. 5.

*A vizes kivonat összetétele.**Die Zusammensetzung der Wasserextracte.*

A talaj szintjei és eredete <i>Herkunft und Schichten der Böden</i>	Vízben oldható kationok egyenérték %-a, az összes vízoldható kation mg. e. é-re számítva <i>Mg-äquivalente der Kationen in Prozenten d. Gesamt-Kationen</i>				Összes vízoldható kation mg. e. é.	Vízben oldható anionok egyenérték %-a, az összes vízoldható kationok mg. e. é-re számítva <i>Mg-äquivalente der Anionen in Prozenten d. Gesamt-Kationen</i>				
	Ca	Mg	K	Na		HCO ₃	Cl	SO ₄	Egyéb anion Nicht bestimmte Anione	
Hajdudorog	0—30	44·23	13·46	12·50	29·81	1·04	73·08	—	3·84	23·08
	30—60	50·38	17·56	6·87	25·19	1·31	73·28	—	12·97	13·75
	60—90	58·68	10·78	5·99	24·55	1·67	59·28	4·79	20·36	15·57
	90—120	49·70	12·12	6·67	31·51	1·65	49·70	10·91	40·61	—
	120—150	21·47	19·21	4·52	54·80	1·77	40·68	18·08	42·37	—
	150—180	17·98	25·10	5·22	51·70	2·02	43·52	16·12	39·18	1·18
	180—210	14·34	24·31	6·16	55·16	1·87	36·10	19·43	42·60	1·87
Nagykovácsi	0—5	25·28	34·06	7·86	32·80	0·91	43·95	10·12	13·19	32·74
	5—30	23·08	22·40	0·67	53·85	1·17	17·09	33·33	19·10	30·48
	30—60	26·41	28·68	2·46	42·45	1·06	18·87	33·02	12·26	35·85
	60—100	22·16	33·11	3·12	41·61	1·16	26·33	34·55	16·72	22·40
	100—150	24·56	32·68	4·51	38·25	1·20	25·14	29·78	28·88	26·20
	150—180	18·19	39·12	3·69	39·00	1·08	27·13	32·40	24·74	15·73
	180—210	19·07	36·17	4·51	40·25	1·26	24·16	29·52	31·16	15·16
210—240	15·30	40·52	4·37	39·81	1·34	21·84	26·10	42·63	9·43	
Bicske	0—35	47·74	16·91	8·14	27·21	0·87	57·15	8·71	9·62	24·52
	35—50	44·47	16·08	5·32	34·13	1·32	47·37	4·97	17·20	30·46
	50—80	40·71	19·55	4·56	35·18	1·19	43·62	5·16	30·07	21·15
	80—135	37·60	26·32	3·24	32·84	1·37	47·15	6·72	29·71	16·42
	135—160	26·87	24·80	8·17	40·16	1·56	42·74	13·14	37·50	6·57
	160—200	24·12	31·61	6·76	37·51	1·49	44·71	12·51	39·92	2·86

színtek mechanikai összetételének az összehasonlítása is tájékoztathat. Miután mobilizált állaptba csak a talaj kolloid-diszperziót megközelítő része kerülhet s az elmozdulás is csak erre a részre szorítkozhat, az itt alkalmazott mechanikai elemzést oly előkészítő eljárásnak kell megelőznie, mely lehetőleg az összes aggregátumokat felbontja s a maximális diszperzitást biztosítja. Vizsgálatainknál a «nemzetközi A» előkészítő eljárásnak *Robinson*(13) által módosított változatát alkalmaztuk, melynél az előzőleg hidrogénperoxid-dal és híg savval kezelt minta stabilizálása *NaOH*-oldattal történik. Az iszap- és nyersagyagfrakciót a pipettás módszerrel, a durva homokot pedig szitán különítettük el. Összehasonlítás céljából a 6. sz. táblázatban a mezőhegyesi nem degradált mezőségi szelvény hasonló módon meghatározott adatait is közöljük.

Az adatokból láthatjuk, hogy a degradált szelvényekben a «nyersagyag» mennyisége a felszín agyagtartalmával szemben egy bizonyos mélységben felhalmozódást mutat. Ilyen felhalmozódási szint még a tiszaföldvári alig degradált szelvényben is határozottan kimutatható, sőt ha mezőhegyesi szelvény adatait karbonát- és humuszmentes anyagra számítjuk, úgy a felszín alatt ebben is kismérvű agyafelhalmozódás jelentkezik. A mezőgazdasági művelés s az ezzel kapcsolatos állandó felszíni szántás ilyértelmű hatását a mezőségi talajokra *Ballenegger*(14) is megállapította. *Ilyenformán kismérvű agyafelhalmozódás mezőgazdasági kultúra alatt álló talajoknál még nem feltétlen jele a degradációnak.*

Az agyagfrakció felszaporodásának mértéke csak a mobilizált ásványi anyag összmenyiségéről tájékoztat. Ha az agyagásványokat felépítő kémiai alkotórészek, tehát SiO_2 , Al_2O_3 , Fe_2O_3 és a bázisok kilúgzódási és felhalmozódási viszonyait egyenként is ismerni akarjuk, úgy a mechanikai elemzést kémiai meghatározásokkal kell kiegészíteni. Az angol laboratóriumokban magát az elkülönített agyagfrakciót tárják fel, míg másutt a hidroszilikát-komplexumot sósavval bontják meg és a sósavas kivonat összetételéből következtetnek a mállási termékek mennyiségére és összetételére. Vizsgálataink során az utóbbi eljárást alkalmaztuk és két jellemző degradált szelvény sósavas kivonatának adatait a 7. sz. táblázatban közöljük.

Ha a sósavban oldható ásványi anyag mennyiségét össze-

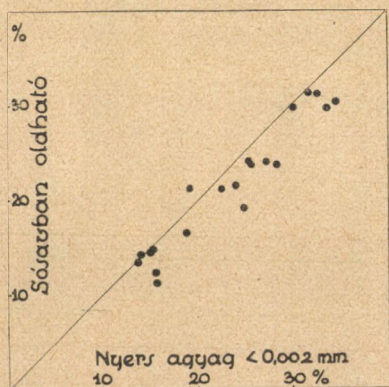
6. Táblázat. — Tabelle 6.

*A talajok mechanikai összetétele
(Nemzetközi .A. előkészítő elj.)*

*Die mechanische Zusammensetzung der Böden.
(Int. A Vorbereitungsmethode.)*

A talajok eredete és szintjei <i>Herkunft und Schichten der Böden</i>	CaCO_3 + MgCO_3	Humusz <i>Humus</i>	Durva homok	Finom homok	Izap	Nyers anyag <i>Rohton</i> < 0.002 mm	
			<i>Grobsand</i> 2.0–0.2 mm	<i>Feinsand</i> 0.2–0.02 mm	<i>Schluff</i> 0.02–0.002 mm		
	%	%	%	%	%	%	
Mezőhegyes	0–30	5.95	3.67	2.91	35.00	23.50	28.97
	30–60	13.97	2.12	3.10	27.26	24.65	28.90
	60–90	15.92	1.22	2.04	26.55	26.35	27.92
	90–120	16.05	0.84	3.31	27.57	25.30	26.93
	120–150	17.95	0.58	2.92	27.77	26.00	24.78
Tiszaoldali	0–20	—	3.50	—	22.70	30.20	43.60
	20–60	—	3.05	—	26.85	23.90	46.20
	60–110	7.69	1.80	—	24.71	22.10	43.70
	110–160	27.30	0.50	—	20.20	21.20	30.80
	160–220	11.15	0.26	—	35.79	26.40	26.40
Hajdúdorog	0–30	—	2.89	7.50	46.23	19.95	23.43
	30–60	—	2.77	5.91	43.01	20.70	27.61
	60–90	—	1.95	6.05	43.20	21.80	27.00
	90–120	5.45	1.11	4.82	42.24	22.30	24.08
	120–150	10.65	0.34	4.22	41.16	21.00	22.63
	150–180	8.70	0.30	4.56	44.81	21.10	20.53
	180–210	6.14	0.16	3.91	53.69	18.05	18.05
Czibakláza	0–15	—	3.26	—	26.54	25.00	45.20
	15–40	—	3.32	—	23.48	23.80	49.40
	40–100	4.78	1.89	—	21.83	23.40	48.10
	100–140	15.66	0.60	—	20.94	21.80	41.00
	140–200	22.63	0.22	—	33.35	23.00	20.80
Bioske	0–35	—	1.40	2.62	61.36	18.22	16.40
	35–50	—	0.96	3.16	56.73	16.30	22.85
	50–80	—	0.58	2.00	60.67	16.45	20.30
	80–135	—	0.32	3.55	64.18	14.15	17.80
	135–160	17.18	0.30	3.10	53.67	10.70	15.05
	160–200	22.27	0.20	3.80	51.13	8.95	13.65
Nagykovácsi	0–5	—	6.40	4.42	59.09	15.50	14.59
	5–30	—	1.27	5.16	65.04	13.20	15.33
	30–60	—	0.58	4.12	59.84	10.40	25.06
	60–100	—	0.42	4.48	65.76	10.75	18.59
	100–150	—	0.39	3.92	69.69	11.10	14.90
	150–180	18.82	0.40	3.42	56.70	9.20	11.46
	180–210	20.67	0.27	2.80	55.85	9.15	11.26
	210–240	21.19	0.20	3.20	53.08	10.30	12.03

hasonlítjuk a mechanikai elemzésnél nyert agyagfrakció mennyiségével (mindkét érték karbonát- és humuszmentes anyagra számítva), úgy a 4. sz. ábrán feltüntetett összefüggést kapjuk. A két eljárással meghatározott ásványi anyag össz mennyisége tehát közelítőleg párhuzamosan változik, az agyagfrakció azonban általában nagyobbnak mutatkozik, mint a sósavban oldható



4. ábra.

réssz. Ez összhangban van POPOVÂT(3) azon megállapításával, hogy a talajok 0.002 mm-nél kisebb szemcséi között több-kevesebb kvarc is van jelen, amire a sósav nem hat.

Ha a *mezőhegyesi* szelvény már közölt sósavas kivonatának adatait összevetjük a *hajdúdorogi* degradált, de még *mezősegi* jellegű, továbbá a *nagykovácsi* erősebben degra-

dált erdőtalaj itt közölt adataival, akkor láthatjuk, hogy az oldható SiO_2 , továbbá az Al_2O_3 , Fe_2O_3 és az összes egyéb alkotórészek kilúgzódása és egy mélyebb szintben való felhalmozódása egyenként is annál jellegzetesebben jelentkezik, minél előrehaladottabb degradációs folyamattal állunk szemben.

A sósavas kivonatból számított $\frac{SiO_2}{Al_2O_3 + Fe_2O_3}$ molekuláris arány alapján a hidroszilikát-komplexum összetételét jellemezhetjük. A hányados értéke a *mezőhegyesi* szelvénynél 2.27—2.39, a *hajdúdoroginál* 1.98—2.28, a *nagykovácsinál* pedig 1.88—2.37 között mozog. Általában a hányados értéke a mélység felé csökken. A három szelvény adatai egymással összehasonlítva nem mutatnak lényeges különbséget s így a sósavas kivonat összetétele alapján arra kell következtetnünk, hogy a hidroszilikátok összetételére a degradáció folyamata nincs hatással s a *komplexum a maga egészében változatlanul vándorol, vagy legalább is a vándorló alkotórészek egymáshoz való aránya változást nem szenved.*

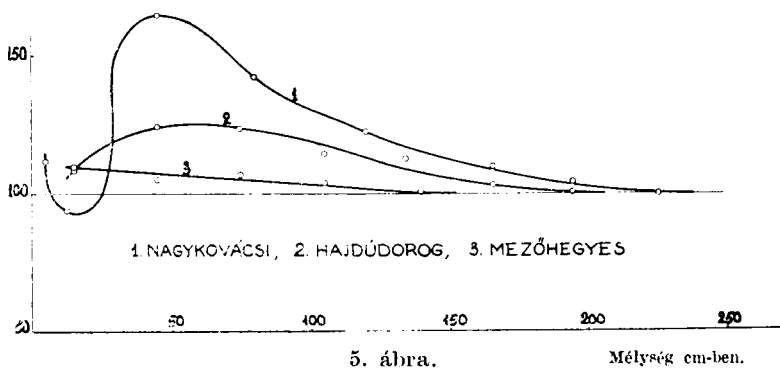
Az összes sósavban oldható anyag, vagy egyenként az oldható

7. táblázat. — Tabelle 7.

A sósavas kivonat összetétele. — Die Zusammensetzung des Salzsäureauszuges.

100 g 105 C°-on szárított talajban. — In % auf Trockenboden berechnet.															
Származási hely Herkunft	Hajdudorog							Nagykovácsi							
	Mélység cm Tiefe cm	0—30	30—60	60—90	90— 120	120— 150	150— 180	180— 210	0—5	5—30	30—60	60— 100	100— 150	150— 180	180— 210
Na ₂ O	0.23	0.34	0.32	0.37	0.40	0.40	0.39	0.24	0.26	0.40	0.49	0.45	0.46	0.38	0.40
K ₂ O	0.41	0.43	0.39	0.36	0.33	0.31	0.29	0.12	0.13	0.31	0.26	0.28	0.29	0.18	0.24
MgO	0.96	1.00	1.03	1.24	1.41	1.45	1.53	0.29	0.27	0.54	0.51	0.61	1.74	2.01	2.39
CaO	0.97	0.89	0.89	4.13	6.67	5.65	3.96	0.54	0.36	0.57	0.45	0.57	9.70	10.71	10.77
MnO	0.09	0.09	0.19	0.17	0.12	0.07	0.13	0.12	0.23	0.15	0.16	0.19	0.18	0.18	0.20
Al ₂ O ₃	3.67	4.02	4.25	3.91	3.66	3.49	3.67	2.51	2.58	3.98	3.49	3.15	2.42	2.50	2.37
Fe ₂ O ₃	3.23	4.00	3.64	3.24	3.24	3.33	3.39	1.36	1.06	2.57	2.26	2.02	1.33	1.35	1.42
SO ₃	0.09	0.10	0.08	0.08	0.12	0.13	0.10	0.07	0.09	0.06	0.06	0.05	0.09	0.11	0.11
P ₂ O ₅	0.13	0.12	0.14	0.09	0.10	0.12	0.13	0.07	0.07	0.11	0.10	0.08	0.12	0.14	0.13
CO ₂	—	—	—	2.41	4.71	3.87	2.73	—	—	—	—	—	8.44	9.27	9.55
SiO ₂ { old. löslich	7.67	8.74	8.75	7.76	7.24	6.81	6.81	4.68	4.14	7.32	6.29	5.47	3.99	3.68	3.55
TiO ₂	0.23	0.27	0.18	0.20	0.13	0.11	0.11	0.09	0.07	0.13	0.11	0.12	0.16	0.13	0.14
Oldhatatlan Unlöslich	76.39	74.43	74.87	71.40	67.81	71.41	73.90	81.99	87.57	80.68	83.11	84.93	69.29	68.38	66.76
Izz. veszt. Gühverlust	6.02	5.82	5.01	4.52	3.49	3.24	2.97	8.04	3.49	2.90	2.32	2.02	1.69	1.28	1.62
Összesen	100.09	100.25	99.74	99.88	99.43	100.39	100.13	100.12	100.32	99.72	99.61	99.94	99.90	100.30	99.63
Humusz } % Cx 172	2.89	2.77	1.95	1.11	0.34	0.30	0.16	6.40	1.27	0.58	0.42	0.39	0.40	0.27	0.20
CaCO ₃ %	—	—	—	5.29	10.17	8.07	5.72	—	—	—	—	—	16.60	18.26	18.19
MgCO ₃ %	—	—	—	0.16	0.48	0.63	0.42	—	—	—	—	—	2.22	2.41	3.00
Összesen	2.89	2.77	1.95	6.56	10.99	9.00	6.30	6.40	1.27	0.58	0.42	0.39	19.22	20.94	21.39

SiO_2 , Al_2O_3 , vagy Fe_2O_3 mennyiségeinek összehasonlításából egyaránt az adódik, hogy a málási komplexum a mezőhegyesi talajban a legnagyobb és a nagykovácsi erdőtalajnál a legkisebb. Ha e talajok elsődleges kőzetten alakultak volna ki, úgy ebből arra következtethetnénk, hogy az ásványok málása a mezőhegyesi viszonyok között gyorsabb, mint az erdőtalajok esetében. Másodlagos, sőt mint a budapestkörnyéki löszlerakódásokra nézve Vendl (15) megállapította, harmadlagos fekvésű alapkőzetnél azonban az alapkőzetnek egy eredeti elmálási fokával is számolnunk kell s valóban a fenti értelmű különbségek e talajoknál oly mélységben is kimutathatók, ahol talajtani szempontból már C szinttel, tehát az eredeti



és változatlan lösz jelenlétével számolunk. Löszön és általában alföldi viszonyaink között tehát a hidroszilikát-komplexum abszolút nagyságából nem következtethetünk a helyi málási folyamat erősségére.

Megkísérhetjük az elmálási viszonyokra következtetni úgy, hogy a felső rétegek mállási termékeinek mennyiségét ugyanazon alkatrészeknek a mélyebb rétegekben mutatkozó és már változatlan feltételezett mennyiségére, mint 100-ra vonatkoztatjuk. Az 5. sz. ábrán az oldható SiO_2 -ra ily módon kiszámított (humusz- és karbonátmentes talajra számítva) értékeket tüntetjük fel azzal, hogy az $Al_2O_3 + Fe_2O_3$ -re nézve hasonló értelmű összefüggés adódott.

Az ábrázolt összefüggés arra mutat, hogy minél degra-

dáltabb, tehát *minél nedvesebb és savanyúbb viszonyok között alakult ki a talaj, a málás folyamata annál élénkebb és előrehaladottabb állapotban van.*

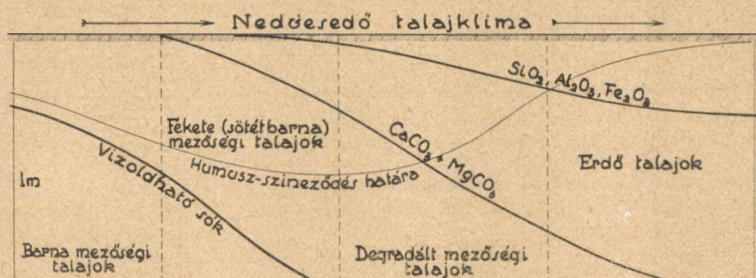
A degradáció klimatikus vonatkozásai.

Kétségtelen, hogy a talajok degradációjának egyensúlya elsősorban az uralkodó klimatikus viszonyoknak megfelelően alakul ki. Nagy általánosságban a degradáció annál erősebbnek mutatkozik, minél nedvesebb a kérdéses vidék klímája. Ez a különbség pl. a *mezőhegyesi* vagy *tiszaföldvári* és a *nagykovácsi* talajok előfordulási helyein uralkodó klímában jellegzetesen kidomborodik és nem szorul magyarázatra. A *tiszaföldvári* és *czibakházai* talajok mintavételi helye azonban mindössze 5 km-re fekszik egymástól, az uralkodó klíma tehát itt feltétlenül azonosnak vehető s e két talaj mégis különböző mérvű degradációt mutat. *A talaj belső klímájára tehát a helyi általános klímaviszonyokon kívül egyéb tényezők is befolyással vannak és ez az oka annak, hogy Alföldünkön közel azonos viszonyok között és azonos alapközetben is a degradáció különböző stádiumában lévő talajokat találunk.*

Azok között a tényezők között, melyek e szempontból szerepet játszanak, elsősorban az uralkodó domborzati viszonyokat kell mérlegelnünk. Egyébként azonos drain-viszonyokat tételezve fel, a depressziókban, ahol zivatarok vagy hirtelen hóolvadás alkalmával felületi vizek is összegyűlnek, a degradáció mindig erősebb mérvű, mint a környező magasabb fekvésű területeken, ahonnan a felületi vizek származnak. *A talajokba szivárgó nedvesség évi átlaga ennek megfelelően aránylag kis területeken belül is igen változatosan alakulhat ki.* Elősegítheti sok esetben a degradációt az alsóbb talajrétegek jó vízvezetőképessége is, mely a fölös nedvesség gyors elszivárgását és ezáltal a felső talajrétegek átmosását megkönnyíti. Az Alföldön a lösz sokszor csak 1—1½ m-es takaró alakjában fordul elő s ezeknél a *degradáció mértékét a lösz alatt fekvő réteg vízvezetőképessége is szabályozza.* Hasonló okra vezethető vissza az is, hogy *különböző azonos viszonyok között a homokosabb löszfélések vagy éppen homoktalajok mindig degradáltabbak, mint a kötöttebb talajfélések,* mely utóbbiaknál a felületi elfolyás mindig nagyobb s a lassúbb beszívár-

gás miatt a párolgás is jobban csökkenti a talajba kerülő víz mennyiségét.

A 6. sz. ábra a talajklíma nedvességi viszonyai és a degradáció mérve közötti összefüggést tünteti fel. Az összefüggés azonban csak arra az esetre érvényes, ha a kielégítő drain-viszonyok a talajban biztosítva vannak. Magasan álló és stagnáló talajvíz ugyanis a talajban uralkodó nedvesebb viszonyok ellenére is regradációs folyamatokat segíthet elő azáltal, hogy a kilúgzás lehetőségét csökkenti. Különösen vonatkozik ez a Nagy Magyar Alföld területére, ahol a talajvíz általában bázisokban gazdag és sok esetben kifejezetten magas sótartalom mellett erősen alkálikus reakciót mutat. Bázisokban szegény és horizontálisan mozgó talajvíz esetében természetesen



6. ábra.

a viszonyok mások lesznek s itt a magas talajvíz is degradálhatja a talajokat.

Az uralkodó vegetációnak, főleg az erdőnek a talajklímára gyakorolt hatása közismert. Miután az erdő a talajklímát nedvesebbé teszi, az erdő kiirtásával a talaj szárazabb viszonyok közé jut s ha az erdőt füves vegetáció előzte meg, a helyi viszonyok által megszabott eredeti állapot áll be. Az így szárazabbra változó viszonyok a talaj regradációját segítik elő. A regradálódó talajban az egyensúly az eredeti egyensúly felé törekszik, azon túl azonban semmiesetre sem juthat. Mivel pedig a természetben éles elhatárolások nincsenek s így nem valószínű, hogy a természetes erdőhatárok valaha is közvetlenül érintkeztek volna a száraz mezőségekkel, ez a vegetációváltozás mindig egy átmeneti klímaterületre szorítkozik,

ahol a klimatikus viszonyok már eleve is bizonyos mértékig degradált talajok kialakulását segítették elő.

A mezőségi-, degradált mezőségi- és erdőtalajok a kilúgzottság szempontjából csak fokozatbeli különbséget mutatnak s közöttük a természetben éles határ nincsen. Rendszertani szempontból a mezőségi és a degradált talajok elhatárolása a felső rétegek telítettségi állapota alapján eszközölhető. Kellő számú adat birtokában a határ valószínűleg a 90%-os telítettségi érték (V_p) körül fog kialakulni. A degradált mezőségi- és az erdőtalajok elhatárolása már sokkal körülményesebb. Ha nem a mai erdőhatárokat vesszük figyelembe, hanem a ma már mezőgazdaságilag művelt területeken is számolunk «erdőtalaj» előfordulásával, úgy a talaj morfológiájából kell megállapítanunk azt, hogy a talaj mezőségi jellegűnek tekinthető-e vagy sem. Irányadónak e szempontból a humuszréteg vastagsága és az akkumulációs szint ehhez viszonyított helyzete szolgálhat. A humusz színező hatása ugyanis a degradált mezőségi talajoknál a felhalmozódási szint alatt is mindig jelentkezik, tehát az erdőtalajokkal ellentétben; ezeknél a B-szintnek jellemző vörösbarna színe humusszal van fedve.

Irodalom.

1. GLINKA, K.: Die Typen der Bodenbildung. Borntraeger kiadv. Berlin, 1914.
2. FLOROW, N.: Über die Degradierung des Tshernosioms in den Waldsteppen. Anuarul Inst. Geol. al Romaniei. XI. 67. 1925.
3. POPOVÁT, M.: Degradation des sols de steppe. U. o. XVIII. 1933.
4. SIGMOND, E. és KOTZMANN, L.: Fekete (sötétbarna) mezőségi talajok. Math. Term. Tud. Ért. LIII. 70. 1935.
5. SIGMOND, E.: Általános Talajtan. Budapest, 1934.
6. TREITZ, P.: Magyarázó az országos átnézetes, klimazonális talaj-térképhez. A m. kir. Földtani Int. kiadv. 1924.
7. KAÁN, K.: A Magyar Alföld. Magy. Tud. Akad. kiadv. Budapest, 1927.
8. BALLENEGGER, R.: Adatok magyarországi talajok chemiai összetételének ismeretéhez. A m. kir. Föld. Int. 1916. évi jelentése.
9. ENDRÉDY, E.: A talajtani ismeretek rövid összefoglalása. Víz-ügy. Közl. 1937.
10. HISSINK, D. J.: Int. Mit. f. Bodenkunde XII. 81. 1922.

11. di GLERIA, J.: Tanulmány a talajok telítettségi fokának megismerésére. Kísérletügyi Közl. XXIX. 240. 1926.

12. di GLERIA, J. és KOTZMANN, L.: A talajok telítetlenségének meghatározása ammonabsorbciónal. Mezőg. Kut. V. 270. 1932.

13. ROBINSON, G. W.: The dispersion of soils in mechanical analysis. Trans. I. Com. Int. Soc. Soil Science, Versailles 1934.

14. BALLENEGGER, R.: Magyarországi talajtípusok chemiai összetételéről. Magy. Chem. Folyóirat. XXIII. 1917.

15. VENDL, A., TAKÁTS, T. és FÖLDVÁRI, A.: A budapestkörnyéki löszről. Math. Term. Tud. Ért. LII. 713. 1935.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

BEITRÄGE ZUR DYNAMISCHEN CHARAKTERISIERUNG DER WICHTIGSTEN UNGARISCHEN BODENTYPEN.

III. Die Degradation der ungarischen Lössböden.

Von LADISLAUS KOTZMANN.

Die vom *V* ausgeführten Untersuchungen beziehen sich auf die dynamischen Prozesse bei der Degradierung der in Ungarn vorkommenden Lössböden. Die Ergebnisse können in folgende Punkte zusammengefasst werden.

1. Die Auslaugung des $CaCO_3$ aus den oberen Bodenschichten ist zwar eine Vorbedingung der Degradation, ist aber doch nicht als ein sicheres Merkmal dieses Vorganges zu betrachten.

2. Die Degradation ist das Ergebniss eines, auch auf das Hydrosilikat-Komplex wirkenden, Auslaugungs-Prozesses und führt zur Verarmung des Komplexes an Basen. Damit wird das Absorptions-Komplex ungesättigt, wodurch wieder die saure Reaktion der oberen Bodenschichten bedingt wird. Die degradierten Böden gehören folglich zu den «Wasserstoff-Böden».

3. Das Auftreten des Illuvial-Schichtes ist als ein typisches Merkmal der Degradation zu betrachten, obwohl eine geringfügige Material-Verschiebung in den landwirtschaftlich bebauten, gesättigten Steppenschwarzerden auch nachzuweisen ist. Das Verhältniss der wandernden mobilen Bestandteile (SiO_2 , Al_2O_3 , Fe_2O_3) untereinander, wird durch die Illuviation wesentlich nicht geändert.

4. Die Degradation wird nicht durch das herrschende allgemeine Klima, sondern durch die Feuchtigkeits-Verhältnisse des durch örtliche Verhältnisse beeinflussten «Bodenklima» bedingt.

Die Ausbreitung der Waldgrenzen verursacht die Degradation der betreffenden Böden, die Verengung derselben hat eine Regradation zur Folge. Die Verschiebung der Waldgrenzen vollzieht sich aber zumeist unter ein Übergangs-Klima, wo die Böden — verglichen mit den trockenen Steppenschwarzerden — unabhängig von der Vegetationsänderung schon in einem gewissermassen degradiertem Zustande sich befinden.

5. Der Auslaugungs-Zustand der degradierten Steppen-Böden und Wald-Böden weist nur graduelle Unterschiede auf; in der Natur lässt sich keine scharfe Grenze zwischen beiden ziehen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK SAJÁTÉRTÉKEIROL.

BARTA JÓZSEF-től.

Egyszerű eljárást mutatok be az

$$y'' + \lambda A(x)y = 0 \quad (1)$$

differenciálegyenlet sajátértékeinek a becslésére,¹ ha az $y(x)$ függvény (existencia feltételezve) kielégíti a

$$\begin{aligned} cy(a) + Cy'(a) &= 0, \\ cy(b) + Cy'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

homogén lineáris határfeltételeket, ahol c és C állandók. $A(x)$ adott függvény, amelyről feltételezzük, hogy az $a \leq x \leq b$ intervallumban pozitív és akárhányszor differenciálható. Sajátértékeknek nevezik a λ parameter ama értékeit, amelyeknél a differenciálegyenletnek van zérustól különböző $y(x)$ megoldása, amely kielégíti a határfeltételeket. Az (1) egyenlet bármelyik sajátértékére vonatkozólag bebizonyítom a

$$\left(\frac{-f'''}{A(x)f} \right)_{\min} \leq \lambda \leq \left(\frac{-f'''}{A(x)f} \right)_{\max} \quad (3)$$

¹ Erre a differenciálegyenletre vonatkozólag általában lásd például: PICARD, É. Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, chap. II (Paris, Gauthier-Villars, 1930) vagy Picard, É. Traité d'analyse, tome III. chap. VI. — A sajátértékek becslésére vonatkozó újabb dolgozatok: TEMPLE, G. The computation of characteristic numbers and characteristic functions (Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 29, 1929). FUNK, P. Bemerkungen zur praktischen Berechnung des kleinsten Eigenwertes (Mitteil. des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslowakischen Republik, Brünn, 1931). TREFFTZ, E. Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten (Math. Ann. Bd. 108, 1933). COLLATZ, L. Schranken für den ersten Eigenwert bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Ingenieurarchiv, Bd. 8, Berlin, Springer, 1937).

képletet.² A min és max jelölések a zárójelben álló kifejezés legkisebb és legnagyobb értékeit jelölik az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Az $f(x)$ függvény az intervallumban kétszer differenciálható, kielégíti a

$$\begin{aligned} Cf(a) + Cf'(a) &= 0, \\ Cf(b) + Cf'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

homogén lineáris határfeltételeket. A határokon belül f ugyanannyiszor tűnik el, mint az illető λ -hoz tartozó y . A határokon belül, ahol f eltűnik, ott f' nem tűnik el. Egyébként f tetszőleges.

A (3) képlet alkalmazását speciális esetekben, amikor a legkisebb sajátértékről van szó, előző dolgozataimban^{3, 4, 5} ismertettem. Jelen dolgozatban a (3) képlet érvényességét az (1) egyenlet bármelyik sajátértékére vonatkozólag bizonyítom be.

Bizonyítás. Jelentse n azt a számot, ahányszor a határokon belül y eltűnik. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}$ jelentsék azokat a közbenső helyeket, ahol f vagy y eltűnik. Nevezzük ezeket a helyeket pólusoknak. (1)-ből

$$\lambda = \frac{-y''}{A(x)y},$$

amit így is írhatunk

$$\lambda = \frac{-f''}{A(x)f} + \frac{1}{A(x)} \cdot \frac{f''y - fy''}{fy}. \quad (5)$$

Vegyük szemügyre ennek az egyenletnek a legutolsó törtjét. A (3) képlet bebizonyítása végett nem kell mást tennünk, mint

² A sajátérték becslésének ezt a módját a legkisebb sajátérték felső korlátjára vonatkozólag, bonyolultabb eszközökkel, már bemutatta: SCHWARZ, H. A. *Gesammelte mathematische Abhandl.* Bd. I, p. 252. A SCHWARZ-féle fejtegetés parciális differenciálegyenletre vonatkozik, de kiterjeszthető közösleges differenciálegyenletre is, valamint a legkisebb sajátérték alsó korlátjára is.

³ BARTA J. Változó keresztmetszetű nyomott rúd rugalmas kihajlásáról (Magy. Tud. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője LV. kötet, 1937).

⁴ BARTA, J. Sur la vibration fondamentale d'une membrane (Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome 204, Paris, 1937).

⁵ BARTA, J. Über die elastische Grundschwingung eingespannter Stäbe (Ingenieurarchiv, Bd. 8, Berlin, Springer, 1937).

kimutatni azt, hogy az intervallumban a tört változtatja előjelét, vagy az intervallumban van olyan hely, ahol a tört értéke zérus.

Egyelőre tételezzük fel azt, hogy f és y nem tűnnek el ugyanazon a közbenső helyen, azaz

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n} < b.$$

Eme feltevés mellett azt állítjuk, hogy az intervallumban a tört változtatja előjelét. Állításunk igazolása végett vegyük szemügyre az

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{2n}, b)$$

szakaszokat és tételezzük fel az állításunk ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a tört értéke az intervallumban vagy mindenütt pozitív vagy mindenütt negatív. Ekkor, mivel a nevező előjele szakaszonként változik, a számláló előjele is szakaszonként változik. Következésképpen a számlálóból alkotott határozott integrálok, amelyek egy-egy szakaszra vonatkoznak, ugyancsak szakaszonként változtatják előjelüket. Az integrálok így írhatók

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''y - fy'') dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'y - fy') dx = [f'y - fy']_{x_i}^{x_{i+1}}.$$

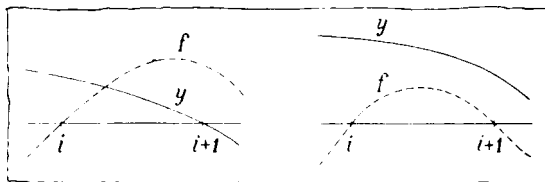
Tehát az integrálok értéke attól függ, hogy az $f'y - fy'$ kifejezés milyen értékeket vesz fel a pólusokban. Nevezzük a pólusokat pozitívoknak, illetőleg negatívoknak a szerint, amint ott az $f'y - fy'$ kifejezés értéke pozitív, illetőleg negatív. Megjegyezzük, hogy a bizonyításnál egyelőre $f'y - fy'$ értéke a pólusokban nem zérus, mert egyrészt feltevésünk szerint f és y nem tűnnek el ugyanabban a pólusban, másrészt tudjuk, hogy ott, ahol y eltűnik, y' nem tűnhetik el,⁶ amiért f -ről is feltehetjük, hogy ott, ahol f eltűnik, f' nem tűnik el.

Az 1. és 2. ábrákból kitűnik a következő szabály: Ha x_i és x_{i+1} pólusok mindegyike pozitív vagy mindegyike negatív, akkor

⁶ Ugyanis $y'' + \lambda A(x)y = 0$ egyenletből differenciálással $y''' + \lambda A(x)y' + \lambda A'(x)y = 0$ stb. következik. Ha valahol $y = 0$ és $y' = 0$ lenne, akkor ott $y'' = 0$, $y''' = 0$ stb. lenne, vagyis mindenütt $y = 0$ lenne.

az egyikben f , a másikban y tűnik el; ha pedig ellentétes előjelűek, akkor vagy mindegyikben f , vagy mindegyikben y tűnik el.

Ha $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ pólusok mind pozitívok (negatívok), de x_i, x_{i+k+1} pólusok nem pozitívok (nem negatívok), akkor k páratlan. Ha ugyanis k páros lenne, akkor az (x_i, x_{i+1}) szakaszra terjedő integrál pozitív (negatív) lenne, s az ettől számított k -adik szakaszra, vagyis az (x_{i+k}, x_{i+k+1}) szakaszra terjedő integrál negatív (pozitív) lenne, ami ellenkezne azzal, hogy minden második szakaszra terjedő integrál értéke megegyező előjelű. Ez más szóval azt jelenti, hogy a közvetlenül egymásután következő megegyező előjelű pólusok olyan csoportokat



1. ábra.

2. ábra.

alkotnak, amelyekben a pólusok száma páratlan. Például $n=6$ azaz tizenkét pólus esetében

$$+ + + - - - - - + - - - -$$

Egy-egy csoportba tartozó pólusokban f és y függvények, az említett szabályból kifolyólag, váltakozva tűnnek el. Tehát egy-egy csoport első és utolsó pólusában ugyanaz a függvény tűnik el, s ugyanaz a függvény tűnik el a szomszédos csoport első és utolsó pólusában is és így tovább. Vagyis mindegyik csoport szélső pólusaiban ugyanaz a függvény tűnik el, például

$$+ + + - - - - - + - - - -$$

$$f \ y \ f \ f \ y \ f \ y \ f \ f \ f \ y \ f$$

Így tehát vagy az az eset áll elő, hogy a határokon belül az egyik függvény többször tűnik el, mint a másik. De ez nem lehetséges, mert ellenkezik azzal a feltevésünkkel, hogy a határokon belül mindkét függvény ugyanannyiszor tűnik el. Vagy

pedig a határokon belül mindkét függvény ugyanannyiszor tűnik el. De ez sem lehetséges, mert így az összes pólus egyetlenegy csoportot alkot, például

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ f & y & f & y & f & y & f & y & f & y & f & y \end{array}$$

s az első és utolsó integrál értéke ellentétes előjelű, mert a határokon $f'y - fy'$ értéke (2)-ből kifolyólag zérus.

Ezzel hebizonyítottuk azt, hogy az (5) egyenlet utolsó törtje az intervallumban változtatja előjelét akkor, ha f és y nem tűnnek el ugyanazon a közbenső helyen. Ebből folytonos átmenettel az következik, hogy az intervallumban a tört változtatja előjelét vagy az intervallumban van olyan hely, ahol a tört értéke zérus, még akkor is, ha f és y eltűnhetnek ugyanazon a közbenső helyen.

Alkalmazás. Megmutatom, hogy miképpen alkalmazhatjuk a (3) képletet az (1) differenciálegyenlet sajátértékeinek a becslésére. Az f függvényt célszerűen úgy választjuk meg, hogy hozzávetőlegesen a sajátfüggvényt jelentse. Tehát az f függvényt vagy tetszőlegesen választjuk meg, vagy valamely megközelítő eljárással állapítjuk meg, ügyelvén arra, hogy az f függvény elégítse ki a határfeltételeket, a határokon belül ugyanannyiszor tűnjék el, mint y , de ahol f eltűnik, ott f' ne tűnjék el. Példaképpen legyen szó az

$$y'' = -(1 + 7x + 5x^2)y$$

differenciálegyenletről

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

határfeltételekkel. Azt a λ sajátértéket akarjuk becsülni, amelyhez tartozó y a határokon belül egyszer tűnik el.

Először: A tetszőleges függvény legyen $f = \sin 2\pi x$. Ekkor

$$\frac{-f''}{A(x)f} = \frac{4\pi^2}{1 + 7x + 5x^2}$$

Ennek a kifejezésnek az értéke a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban 3·04 és 39·48 között változik. Tehát (3) szerint

$$3 \cdot 04 < \lambda < 39 \cdot 48.$$

Másodszor: Ha a tetszőleges függvény $f = x(1-x)(9-25x^2)$, akkor

$$\frac{-f''}{A(x)f} = \frac{6+60x}{(1+7x+5x^2)(3x+2x^2-5x^3)},$$

ahonnan (3) szerint

$$4.12 < \lambda < +\infty.$$

Harmadszor: Próbálgatással könnyen találhatunk olyan f függvényt, amellyel a sajátérték még szűkebb korlátok közé szorítható. Ha

$$f = (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \sin \pi(x+x^2),$$

akkor

$$\frac{-f''}{A(x)f} = \frac{\pi^2(1+2x)^2 - 3(1+2x)^{-2}}{1+7x+5x^2},$$

amiből (3) szerint

$$6.76 < \lambda < 6.96.$$

A számtani közép

$$6.86,$$

amely érték 1.5% pontosságon belül közelíti meg λ pontos értékét. Próbálgatással a pontosság még tovább fokozható.

Az említett ^{3, 5} dolgozataimban olyan számpéldákat mutattam be, amelyeknél a (3) képlet felhasználásán alapuló sajátértékbecslés összekapcsolható a PICARD-féle fokozatos megközelítéssel.

ÜBER DIE EIGENWERTE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Von J. BARTA in Budapest (Ungarn).

In dieser Arbeit wird ein einfacher Weg für die Fehlerabschätzung bei der Berechnung von Eigenwerten angegeben. Ist y eine Eigenfunktion der Gleichung (1), welche die Grenzbedingungen (2) erfüllt, so gilt für den entsprechenden Eigenwert λ die Formel (3). f ist eine möglichst gute Näherung für y , welche dieselben Grenzbedingungen erfüllt und innerhalb der Grenzen ebenso oft verschwindet wie y . Also muss λ zwischen dem Kleinst- und dem Grösstwert des Ausdruckes

$$\frac{-f''}{A(x)f}$$

liegen. Man erhält dadurch nicht nur obere, sondern auch untere Schranke für den Eigenwert. Das Zahlenbeispiel erläutert die Einzelheiten des Verfahrens.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dezember 1937.)

RUGALMAS RENDSZEREK REZGÉSÉRŐL.

BARTA JÓZSEF-től.

I. Ha szabadságfok n , akkor a sajátrezgés x_1, x_2, \dots, x_n amplitudói a jólismert (1) egyenletrendszert elégítik ki. A $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn}$ együtthatók jelentésének a megvilágítása végett az egyenletrendszert a következőképpen vezetjük le.

A rugalmas alakzat tömegeit tekintsük pontszerű tömegeknek és jelöljük azokat m_1, m_2, \dots, m_n -nel. Tételezzük fel, hogy az alakzat kapcsolatai surlódásmentesek (ideális csuklók, teljes befogások stb.) Nevezzük ezt a rendszert S rendszernek. Ilyen rendszert alkot például a mindkét végén elmozdíthatatlanul befogott súlytalannak tekinthető rugalmas pálca, amelyhez anyagi pontoknak tekinthető n számú tömeg van rögzítve.

A kicsiny rugalmas elmozdulás hatásértékét jelöljük δ_{ik} -val (a műszaki rugalmasságtanban szokásos jelölésmód). E szerint δ_{ik} jelenti az m_i pont ama elmozdulásának az J_i irány szerinti vetületét, amelyet az m_k pontban támadó J_k irányú egységnyi nagyságú erő idéz elő.

Ha az m_1, m_2, \dots, m_n pontokban J_1, J_2, \dots, J_n irányú P_1, P_2, \dots, P_n nagyságú külső erők működnek, akkor az m_1, m_2, \dots, m_n pontok kicsiny rugalmas elmozdulásainak a J_1, J_2, \dots, J_n irányú vetületei

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n, \\ u_2 &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \dots + \delta_{2n}P_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_n &= \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nn}P_n. \end{aligned}$$

Fizikai okokból $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Ugyancsak fizikai okokból a

$$\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}, \left| \begin{array}{cc} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{array} \right|$$

mennyiségek közül egyik sem negatív. Bevezetvén a

$$P_1 = -m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}, P_2 = -m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2}, \dots, P_n = -m_n \frac{d^2 u_n}{dt^2}$$

tehetetlenségi erőket és a $\delta_{ik} m_i = c_{ik}$ jelölést használván, az

$$u_1 = x_1 \sin \sqrt{\lambda} t, u_2 = x_2 \sin \sqrt{\lambda} t, \dots, u_n = x_n \sin \sqrt{\lambda} t$$

helyettesítéssel n szabadságfok esetében az S rendszer sajátrezgéseire vonatkozólag a

$$\begin{aligned} \left(c_{11} - \frac{1}{\lambda}\right)x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= 0, \\ c_{21}x_1 + \left(c_{22} - \frac{1}{\lambda}\right)x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= 0, \quad (1) \\ \dots & \dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + \left(c_{nn} - \frac{1}{\lambda}\right)x_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenleteket nyerjük.

II. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt: «Ha az összes δ_{ik} , vagyis az összes c_{ik} pozitív, akkor a leglassúbb sajátrezgés kilengései megegyező előjelűek.»

A tételt először $n=2$ esetére fogjuk bebizonyítani; azután az 1, 2, ..., $n-1$ eseteiről az n esetére fogunk következtetni. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ a feladat sajátértékeit jelölik.

A tétel bebizonyítása végett tételezzük fel, hogy x_1 pozitív, x_2, x_3, \dots, x_n pedig nem pozitív és nem mind zérus. Az (1) első egyenletből negatív tagokat hagyván el, az S rendszer leglassúbb sajátrezgésére vonatkozólag a

$$\left(c_{11} - \frac{1}{\lambda_1}\right)x_1 > 0$$

egyenlőtlenséget nyerjük, amiből

$$c_{11} - \frac{1}{\lambda_1} > 0. \quad (2)$$

Az S rendszerből $x_2=0, x_3=0, \dots, x_n=0$ megszorítással keletkező S' rendszer leglassúbb sajátrezgésének az egyenlete

$$\left(c_{11} - \frac{1}{\lambda_1'}\right)x_1' = 0,$$

ahonnan

$$c_{11} - \frac{1}{\lambda_1'} = 0. \quad (3)$$

RAYLEIGH tétele¹ szerint

$$\lambda_1 \leq \lambda_1' \leq \lambda_n. \quad (4)$$

Ennek a figyelembevételével a (3) így írható

$$c_{11} - \frac{1}{\lambda_1} \leq 0,$$

ami ellentmond a (2)-nek. Tehát x_1 nem lehet pozitív akkor, ha x_2, x_3, \dots, x_n nem pozitív és nem mind zérus. Hasonló kijelentés természetesen nemcsak x_1 -re, hanem külön-külön bármely x_i -re is igaz. $n=2$ esetében x_1 akkor sem lehet pozitív, ha x_2 zérus; ugyanis $x_1 > 0, x_2 = 0$ esetében az (1) második egyenlet baloldala nem tűnhetne el. Ezzel tételünk $n=2$ esetére bebizonyítást nyert.

Mármost ugyancsak a bizonyítás végett tételezzük fel azt, hogy x_1, x_2, \dots, x_i pozitív, $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ pedig nem pozitív és nem mind zérus. Az (1) első i egyenletből negatív tagokat hagyván el, az S rendszer leglassúbb sajátrezgésére vonatkozólag most a

$$\begin{aligned} \left(c_{11} - \frac{1}{\lambda_1}\right)x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1i}x_i &> 0, \\ c_{21}x_1 + \left(c_{22} - \frac{1}{\lambda_1}\right)x_2 + \dots + c_{2i}x_i &> 0, \\ \dots &\dots \\ c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + \left(c_{ii} - \frac{1}{\lambda_1}\right)x_i &> 0 \end{aligned}$$

¹ LORD RAYLEIGH, Theory of sound, 2. edition, vol. I, § 92 a. — COURANT-HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Kap. V. § 3.2, Satz II.

egyenlőtlenségeket nyerjük. x_1, x_2, \dots, x_i -re nézve az egyenlőtlenségek mindegyike homogén lineáris; következésképpen

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{1}{\lambda_1} & c_{12} & \dots & c_{1i} \\ c_{21} & c_{22} - \frac{1}{\lambda_1} & \dots & c_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} - \frac{1}{\lambda_1} \end{vmatrix} > 0. \quad (5)$$

Az eredeti S rendszerből $x_{i+1}=0, x_{i+2}=0, \dots, x_n=0$ megszorítással keletkező rendszert jelöljük most is S' -vel. Az S' rendszer leglassúbb sajátrezgésének az egyenletei

$$\begin{aligned} \left(c_{11} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_1' + c_{12} x_2' + \dots + c_{1i} x_i' &= 0, \\ c_{21} x_1' + \left(c_{22} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_2' + \dots + c_{2i} x_i' &= 0, \\ \dots & \dots \\ c_{i1} x_1' + c_{i2} x_2' + \dots + \left(c_{ii} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_i' &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Az 1, 2, ..., $n-1$ eseteiről az n esetére akarván következtetni, tételezzük fel azt, hogy a tétel érvényes olyan rendszerekre, amelyeknek a szabadságfoka kisebb, mint n . E szerint a (6) egyenletekben x_1', x_2', \dots, x_i' megegyező előjelű. Ha x_1', x_2', \dots, x_i' pozitív, akkor (4) figyelembevételével a (6)-ból kifolyólag

$$\begin{aligned} \left(c_{11} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_1' + c_{12} x_2' + \dots + c_{1i} x_i' &\leq 0, \\ c_{21} x_1' + \left(c_{22} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_2' + \dots + c_{2i} x_i' &\leq 0, \\ \dots & \dots \\ c_{i1} x_1' + c_{i2} x_2' + \dots + \left(c_{ii} - \frac{1}{\lambda_1'}\right) x_i' &\leq 0. \end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{1}{\lambda_1} & c_{12} & \cdots & c_{1i} \\ c_{21} & c_{22} - \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & c_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} - \frac{1}{\lambda_1} \end{vmatrix} \leq 0,$$

ami ellentmond az (5)-nek. Tehát x_1, x_2, \dots, x_i nem lehet mind pozitív akkor, ha $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ nem pozitív és nem mind zérus. x_1, x_2, \dots, x_i akkor sem lehet mind pozitív, ha $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ mind zérus; ugyanis $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_i > 0, x_{i+1} = 0, \dots, x_n = 0$ esetben az (1) $i+1$ -edik egyenlet baloldala nem tűnhetne el. A követett gondolatmenet természetesen nemcsak x_1, x_2, \dots, x_i -re, hanem x_1, x_2, \dots, x_n -ből alkotott bármely más csoportra is alkalmazható. Ezzel tételünk általános n esetére is bizonyítást nyert.

III. Az elmondottak után külön részletezés nélkül is belátható az, hogy az iménti gondolatmenettel a következő tétel is bizonyítható: «*Ha az összes δ_{ik} , vagyis az összes c_{ik} pozitív, akkor a leggyorsabb sajátrezgés kilengései vegyes előjelűek.*»

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. nov. 22-én tartott üléséből.)

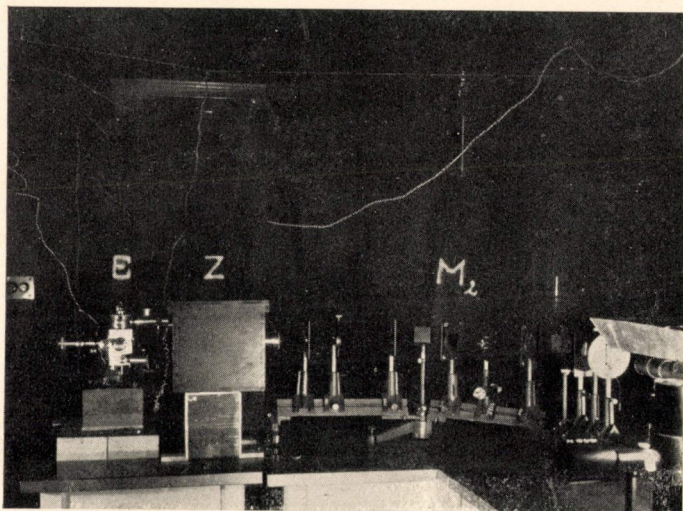


ÜBER DIE SCHWINGUNGEN ELASTISCHER SYSTEME.

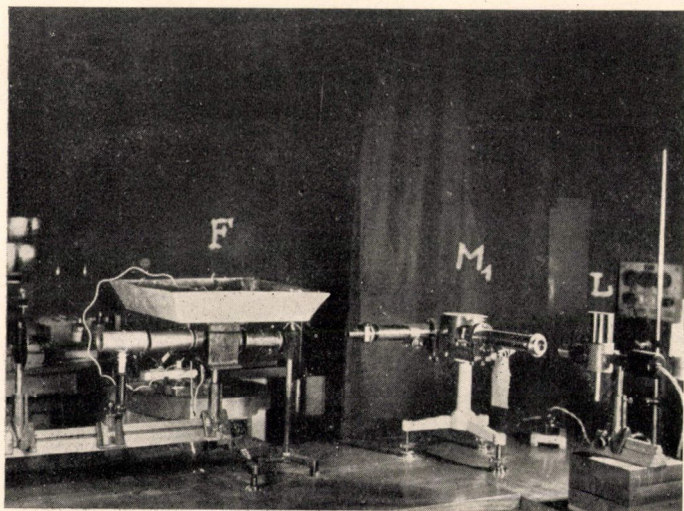
Von J. BARTA in Budapest (Ungarn).

Die Amplituden x_1, x_2, \dots, x_n der kleinen Eigenschwingungen eines Systems von n Freiheitsgraden lassen sich aus den Gleichungen (1) berechnen. Dieser Aufsatz enthält den mathematischen Beweis für den folgenden Satz: Sind sämtliche Koeffizienten c_{ik} positiv, so sind die Amplituden der langsamsten (bzw. schnellsten) Eigenschwingung von gleichen (bzw. gemischten) Vorzeichen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)



1. ábra.



2. ábra.¹

¹ Az 1. és 2. alatti fénykép elkészítéséért Csaplak Andor urnak tartozom köszönettel.

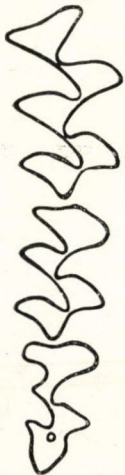


Fig. 1a.

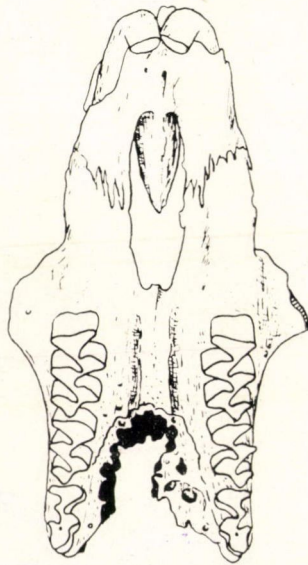


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 8.



Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 9.



Fig. 2.



Fig. 1.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 6.



Fig. 5.

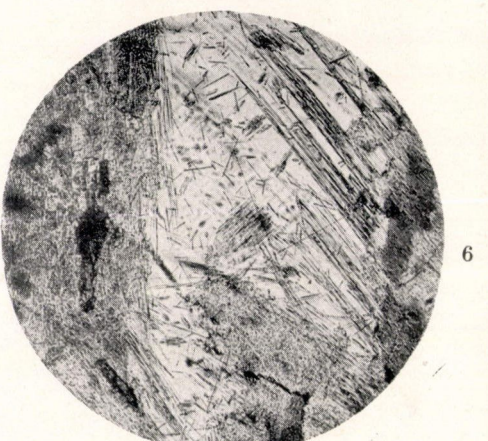
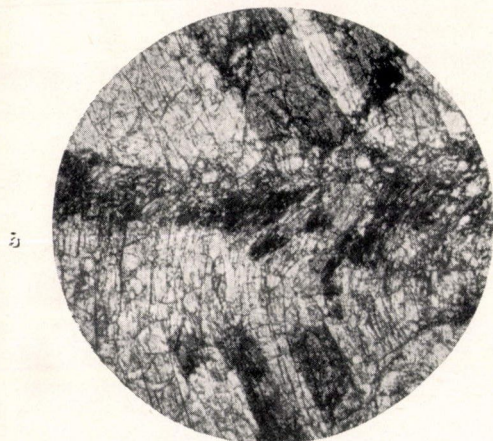
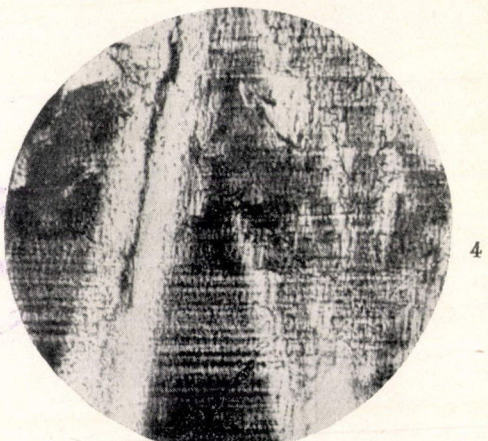
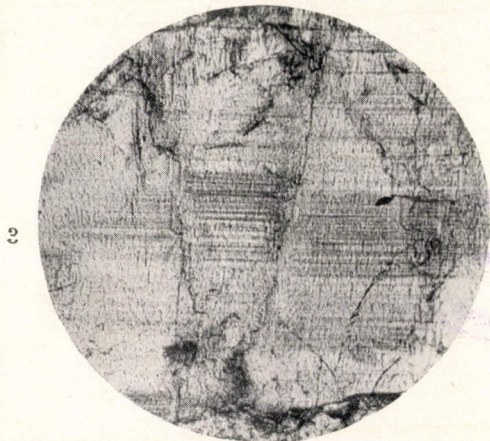
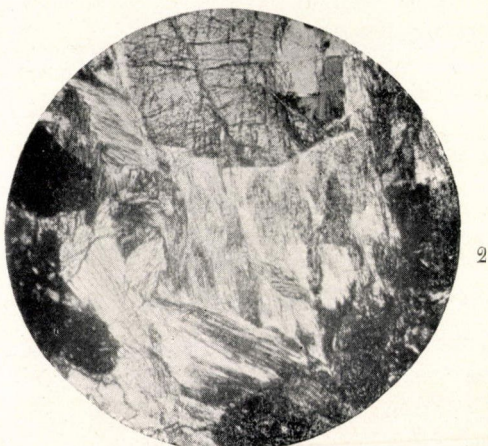
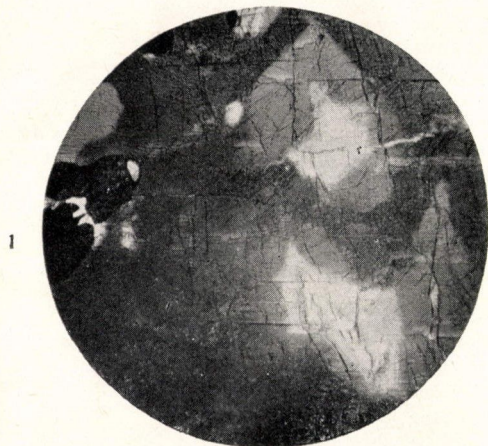


Fig. 7.

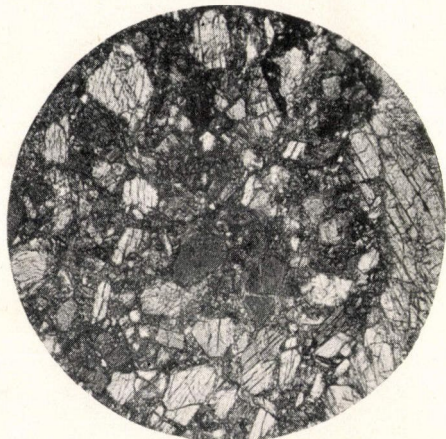


Fig. 8.





1



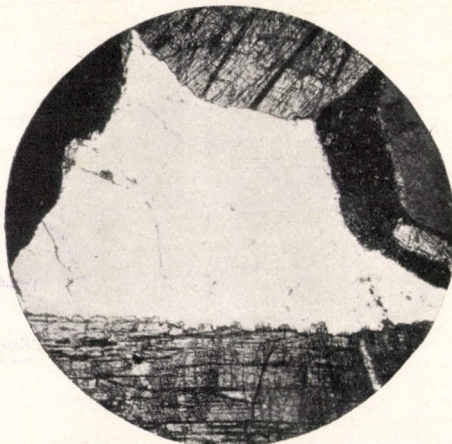
2



3



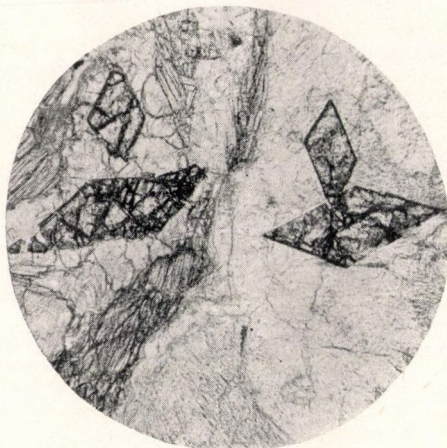
4



5



6



INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
BARTA, J.: Über die Eigenwerte der Differentialgleichungen	440
BARTA, J.: Über die Schwingungen elastischer Systeme	447
ENTZ, G.: Über einige Eigenschaften des Protoplasmas	337—338
GERŐ, L. siehe SCHMID, R.	
GOMBÁS, P.: Über eine statistische Methode zur Bestimmung der Polarisierbarkeit	158—165
GOMBÁS, P.: Bestimmung der Elektronenverteilung des <i>HCl</i> Moleküls	169—181
ILLYÉS, G.: Über Niereninsuffizienz bei Steinniere	302—303
JELITAI, J.: Briefe von GAUSS und ENCKE im ungarischen Landesarchiv.	144
KONEK, F.: Über das Verhalten der höheren Hydrochinin Homologen bei der differenzirenden Alkylierung	268
KORMOS, TH.: <i>Mimomys Newtoni</i> F. Major und <i>Lagurus Pannonicus</i> Korm., zwei gleichzeitige verwandte Wühlmäuse von verschiedener phylogenetischen Entwicklung	356—379
KOTZMANN, L.: Beiträge zur dynamischen Charakterisierung der wichtigsten ungarischen Bodentypen	432—433
LIPKA, ST.: Über die Nullstellen von Potenzreihen	87
MAUTHNER, F.: Über die Darstellung des Chinacetophenonmonomethyläthers.	250—251
MAUTHNER, F.: Die Synthese des 6-Jodveratrols	255
MISCHUNG, H.: Lichtabsorption der Gelatine-Farbstoffphosphoren	231—232
NÁRAY-SZABÓ, ST. V.: Beitrag zum Mechanismus der Wasserstoffüberspannung	154
NEUGEBUAER, TH.: Über die Berechnung der Energie des Methanmoleküls	183—188
RADOS, G.: Intuitive Herleitung verwickelter Determinantenrelationen	15—16
RADOS, G.: Über die Discriminanten der charakteristischen Gleichung einiger abgeleiteten bilinearen Formen	25—26
RADOS, G.: Die explicite Darstellung einiger Resolventen	37—38
RADOS, G.: Über cyklische orthogonale Substitutionen	48—50
RÉDEI, L.: Einige Mittelwertfragen in Bezug auf die Anzahl der durch 4-teilbaren Invarianten der absoluten Klassen-Gruppe im quadratischen Zahlkörper	103—104
ROHRINGER, A.: Die Methoden der theoretischen und praktischen Hydraulik	289
SCHMID, R., GERŐ, L. und ZEMPLÉN, J.: Die Dissoziationsenergie des <i>CN</i> -Moleküls	207—208
STRAUSZ, A. siehe NAGY, B. von Sz.	
SZABÓ, Z.: Berechnung der Diffusionspotentiale auf Grund der Debye-Hückel-schen Theorie	243—244
SZÁDECZKY-KARDOSS, E. v.: Über einige Wirkungen der schiefen Beleuchtung im parallelen polarisierten Licht	389
SZENTPÉTERY, S. v.: Amphibololith von Szarvaskő	407
NAGY, B. von Sz.: Über projektive Vielecke und Vieleiten	120
NAGY, B. von Sz. und STRAUZ, A.: Über einen Satz von H. BOHR	134—135
NAGY, J. von Sz.: Über ebene Vielecke, insbesondere über ebene einfache Vielecke	77—78
ZEMPLÉN, J. siehe SCHMID, R.	
ZIMMERMANN, A.: Zur vergleichenden Anatomie des Jacobson-schen Organs	317—319
ZIMMERMANN, G.: Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Sinus Durae Matris	351—352

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. — ÁBRAI V.

ORTHOGONÁLIS HELYETTESÍTÉS CYKLIKUS VOLTÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELEGENDŐ FELTÉTELE.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

A Matematikai és Természettudományi Értesítő jelen kötetében «Cyklikus orthogonális helyettesítésekről» című dolgozatomban a következő tételeket állítottam fel és hebizonyítottam.

1. Ha az

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n \quad (C)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

orthogonális helyettesítés együtthatói totálisan valós algebrai számok és karakterisztikus egyenletében a legmagasabb hatvány együtthatója 1, a többi együttható algebrai egész számok, akkor e helyettesítés cyklikus.

Ha valamely orthogonális helyettesítés együtthatóinak ez a két tulajdonsága meg van, akkor a helyettesítést röviden *F-tulajdonságúnak* fogjuk mondani. Az *F-tulajdonság* tehát az orthogonális helyettesítés cyklikus voltának elegendő feltétele.

2. *Két-méretű azaz binür helyettesítés esetében az F-tulajdonság az orthogonális helyettesítés cyklikus voltának egyszerűs mind szükséges feltétele is, ha determinánsa +1-gyel egyenlő.*

Hogyan áll az ügy *n*-méretű orthogonális helyettesítés esetében? Erre a kérdésre óhajtok a jelen értekezésben válaszolni.

Az idevágó vizsgálódásom eredményét a következő tétel fejezi ki:

3. *Arra, hogy a C orthogonális helyettesítés cyklikus le-*

gyen, szükséges és elegendő oly n -méretű valós orthogonális helyettesítés P létezése, amellyel képezvén a

$$PCP^{-1} = A$$

orthogonális helyettesítést, ez F -tulajdonságú legyen.

E feltétel szükséges voltának kimutatása körülményesebb előkészületeket igényel. E kimutatásban föl kellett használnom egy tételt, melyet STICKELBERGER LUDWIG 1877-ben megjelent becses és gazdag tartalmú értekezésében¹ felállított és bebizonyított. Tekintettel arra, hogy ez az értekezés a kereskedelmi forgalomban alig kapható és könyvtárakban is csak igen ritkán látható, dolgozatom megértéséhez egy részének ismerete pedig szükséges, «Die reducirte Form einer orthogonalen Form» című fejezetét rövid kivonathban és céljaimnak megfelelő alakban ismertetem.

I. STICKELBERGERNEK FÖLHASZNÁLANDÓ TÉTELEI.

1. Segéd-tétel. Valamely orthogonális helyettesítés determinánsának minden eleme a hozzá tartozó al-determinánstól legfeljebb előjelben különbözik.

Ha az

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n$$

($i=1, 2, \dots, n$)

lineár helyettesítés orthogonális, akkor az együtthatói a következő $\frac{(n+1)n}{2}$ számú feltételi egyenletet

$$c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \dots + c_{in}c_{kn} = \delta_{ik}$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $\delta_{ik}=1$, ha $i=k$; $\delta_{ik}=0$, ha $i \neq k$)

elégítik ki és a determinánsa

$$|c_{ik}| = \varepsilon,$$

ahol ε +1-gyel vagy -1-gyel egyenlő.

¹ LUDWIG STICKELBERGER: «Ueber reelle orthogonale Substitutionen» Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule für das Schuljahr 1877; Zürich.

Fennáll tehát a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 c_{11}c_{i1} + \dots + c_{1k-1}c_{ik-1} + c_{1k}c_{ik} + c_{1k+1}c_{ik+1} + \dots + c_{in}c_{in} &= 0 \\
 c_{21}c_{i1} + \dots + c_{2k-1}c_{ik-1} + c_{2k}c_{ik} + c_{2k+1}c_{ik+1} + \dots + c_{2n}c_{in} &= 0 \\
 \dots & \dots \\
 c_{i1}c_{i1} + \dots + c_{ik-1}c_{ik-1} + c_{ik}c_{ik} + c_{ik+1}c_{ik+1} + \dots + c_{in}c_{in} &= 1 \\
 \dots & \dots \\
 c_{n1}c_{i1} + \dots + c_{nk-1}c_{ik-1} + c_{nk}c_{ik} + c_{nk+1}c_{ik+1} + \dots + c_{nn}c_{in} &= 0.
 \end{aligned}$$

Ha a c_{ik} determináns

$$c_{ik}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$$

elemeinek al-determinánsaival rendre megszorozzuk a fölirt egyenleteket és azokat összeadjuk, a következő reláció adódik:

$$\varepsilon_{c_{ik}} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k-1} & 0 & c_{1k+1} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2k-2} & 0 & c_{2k+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ik-1} & 1 & c_{ik+1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk-1} & 0 & c_{nk+1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

mely a kimondott tétel helyességét igazolja.

2. segéd-tétel. *Ha valamely orthogonális helyettesítés első egyenletében csak az x_1 változó szerepel, akkor a többi egyenletében x_1 nem fordul elő.*

Ez annyit jelent, hogy ha

$$c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1n} = 0$$

akkor egyszersmind

$$c_{21} = c_{31} = \dots = c_{n1} = 0.$$

Ugyanis az 1. segéd-tétel értelmében a $c_{21}, c_{31}, \dots, c_{n1}$ együtt-hatók a $|c_{ik}|$ determinánsra vonatkozó al-determinánsaiktól legfeljebb előjelben különböznek, ezek pedig olyan $(n-1)$ -edfokú determinánsok, amelyek mindegyiküknek első sorában minden elem zérussal egyenlő.

3. segéd-tétel. *Ha valamely orthogonális helyettesítés első két egyenletében csak x_1 és x_2 fordul elő, akkor a többi egyenletében ezek a változók nem fordulnak elő.*

Ez annyit jelent, hogy a

$$c_{1\alpha} = c_{2\alpha} = 0$$

($\alpha = 3, 4, \dots, n$)

egyenlőségek a

$$c_{\beta 1} = c_{\beta 2} = 0$$

($\beta = 3, 4, \dots, n$)

egyenlőségeket maguk után vonják.

Ennek bebizonyítására elegendő annak a kimutatása, hogy a $c_{\beta 1}$ és $c_{\beta 2}$ elemeknek $(n-1)$ -edfokú aldeterminánsai a $|c_{ik}|$ n -edfokú determinánsban zérussal egyenlők. A $|c_{ik}|$ determináns első két sora következő:

$$\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0. \end{array}$$

Ha a $|c_{ik}|$ determináns első vagy második oszlopát elhagyjuk, akkor a nyerendő $(n-1)$ -edfokú aldetermináns első két sora oly matrixot alkot, melyben egy oszlop a zérustól különböző elemeket tartalmaz, az összes többi oszlopában minden elem zérussal egyenlő. E matrixnak tehát minden másodfokú determinánsa zérussal egyenlő. Ha tehát a nyert $(n-1)$ -edfokú aldeterminánst LAPLACE tétele alapján az első két sora szerint kifejtjük, zérust kapunk, amivel a 3. segédétel igazsága ki van mutatva.

4. Valós orthogonális helyettesítések Stichelberger-féle redukált alakja. Legyen ismét a C részletesen kiírva

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n \quad (C)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

valós orthogonális helyettesítés. A

$$c_{i1}p_1 + c_{i2}p_2 + \dots + c_{in}p_n = \lambda p_i \quad (1)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

homogén lineár egyenletrendszernek, melyben λ a

$$\varphi(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenletnek egyik gyöke, van egy

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

nem triviális megoldása. Ezt a λ gyökhöz tartozó pólusnak nevezzük. A pólusok száma tehát általánosságban n .

Ha az (1) alatti egyenleteket rendre a

$$c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \dots, c_{\alpha n}$$

együtthatókkal megszorozzuk és figyelünk arra, hogy C orthogonálisánál fogva

$$c_{\beta 1}c_{\alpha 2} + c_{\beta 2}c_{\alpha 2} + \dots + c_{\beta n}c_{\alpha n} \\ (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

zérussal vagy 1-gyel egyenlő, aszerint, amint $\beta \neq \alpha$, vagy $\beta = \alpha$ a következő egyenlőség adódik:

$$c_{\alpha 1}p_1 + c_{\alpha 2}p_2 + \dots + c_{\alpha n}p_n = \frac{1}{\lambda} p_\alpha. \quad (2)$$

$(\alpha = 1, 2, \dots, n).$

Ha továbbá az (1) alatti egyenleteket rendre a

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

számokkal megszorozzuk és összeadjuk, és ugyanezt tesszük a (2) alatti egyenletekkel, akkor a következő egyenlőségek adódnak

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \lambda \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha^2 \\ \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m c_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha^2,$$

ahonnan a

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha^2 = 0 \quad (3)$$

egyenlőség adódik, amelynek fontos következményei vannak. A (3) alatti egyenlőségből következik, hogy vagy

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

azaz

$$\lambda = \pm 1,$$

vagy pedig

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 0. \quad (4)$$

Az utóbbi esetben a (p_1, p_2, \dots, p_n) pólus nem tartozhatik a karakterisztikus egyenlet valós gyökéhez, mert ha valós gyökhöz tartoznék, kordinatái valós számok lennének, amelyek nem mindannyian zérussal egyenlők, amit a (4) alatti egyenlőség kizár.

Innen tehát a következő önmagában is érdekes és fontos tétel adódik, hogy *valós orthogonális helyettesítés karakterisztikus egyenletének ± 1 -től különböző gyökei képzetes számok.*

BRIOSCHI ismeretes tételénél fogva valós orthogonális helyettesítés karakterisztikus egyenletének összes gyökei abszolút értékre nézve 1-gyel egyenlők. Ilyen értelemben a

$$\varphi(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek gyökei így írhatók föl:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{i\vartheta_1} \quad \lambda_2 = e^{-i\vartheta_1} \dots \lambda_{2k-1} = e^{i\vartheta_k} \quad \lambda_{2k} = e^{-i\vartheta_k}; \\ \lambda_{2k+1} &= +1, \quad \lambda_{2k+2} = +1, \dots, \lambda_{2k+l} = +1; \\ \lambda_{2k+l+1} &= -1, \quad \lambda_{2k+l+1} = -1, \dots, \lambda_{2k+l+m} = -1, \end{aligned}$$

ahol a dolog természete szerint a komplex gyökök száma páros, a $+1$ gyök multiplicitása k -val, a -1 gyöke l -lel egyenlő és

$$2k + l + m = n.$$

A $\lambda_1 = e^{i\vartheta_1}$ gyökre nézve, a hozzátartozó pólus koordinátái komplex számok,

$$p_\alpha = p_{\alpha 1} + ip_{\alpha 2} \quad (\alpha=1, 2, \dots, n)$$

és mivel ezek a (4) alatti egyenletet kielégítik

$$(p_{11} + ip_{12})^2 + (p_{21} + ip_{22})^2 + \dots + (p_{n1} + ip_{n2})^2 = 0,$$

fennáll a következő két egyenlőség

$$\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha 1} p_{\alpha 2} = 0. \quad (5)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha 1}^2 = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha 2}^2; \quad (6)$$

mivel pedig az (1) egyenletek a p_α -knak csak viszonyszámait határozzák meg a p_1, p_2, \dots, p_n koordináták helyett a

$$\bar{p}_\alpha = \frac{p_\alpha}{\sqrt{\sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha=1, 2, \dots, n)}}^n p_{\alpha 1}}} = \frac{p_\alpha}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha 2}^2}}$$

koordinátákat választhatjuk, amikor a

$$\sum \bar{p}_{\alpha 1}^2 = 1, \quad \sum \bar{p}_{\alpha 2}^2 = 1, \quad \sum \bar{p}_{\alpha 1} \bar{p}_{\alpha 2} = 0$$

egyenlőségek fognak fennállani. A következékekben $\bar{p}_{\alpha 1}$ és $\bar{p}_{\alpha 2}$ helyett ismét $p_{\alpha 1}$, $p_{\alpha 2}$ -t írhatunk. A

$$\begin{matrix} p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1} \\ p_{12}, p_{22}, \dots, p_{n2} \end{matrix}$$

sorok $n-2$ alkalmasan választott

$$\begin{matrix} p_{1\alpha}, p_{2\alpha}, \dots, p_{n\alpha} \\ (\alpha=3, 4, \dots, n) \end{matrix}$$

sor hozzácsatolásával valós orthogonális matrixszá egészíthető ki, az ehhez tartozó orthogonális helyettesítést jelöljük P_1 -gyel.

Hozzuk most be X_β és Y_β változókat az

$$\begin{aligned} X_\beta &= p_{1\beta}x_1 + p_{2\beta}x_2 + \dots + p_{n\beta}x_n \\ Y_\beta &= p_{1\beta}y_1 + p_{2\beta}y_2 + \dots + p_{n\beta}y_n \\ &(\beta=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

a P_1 orthogonális helyettesítés segítségével, ahol az x_i és y_i változók a

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n \tag{C}$$

($i=1, 2, \dots, n$)

egyenletekkel függnek össze. Akkor

$$\begin{aligned} Y_1 + iY_2 &= p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + c_{an}x_n) p_\alpha = \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^n (c_{\alpha 1}x_1 + c_{\alpha 2}x_2 + \dots + c_{\alpha n}x_n) \right) p_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha 1}p_\alpha x_1 + \left(\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha 2}p_\alpha \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \right) y_n = \\ &= \lambda_1(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n), \end{aligned}$$

tehát

$$Y_1 + iY_2 = e^{i\vartheta_1}(X_1 + iX_2) = (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)(X_1 + iX_2)$$

és így

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cos \vartheta_1 - X_2 \sin \vartheta_1 \\ Y_2 &= X_1 \sin \vartheta_1 + X_2 \cos \vartheta_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Az Y_3, Y_4, \dots, Y_n változók a C helyettesítés igénybevételével így fejezhető ki

$$Y_\beta = a'_{\beta 1} X_1 + a'_{\beta 2} X_2 + \dots + a'_{\beta n} X_n. \quad (9)$$

($\beta=3, 4, \dots, n$)

A (8) és (9) alatti egyenletek együttesen a $P_1 C P_1^{-1}$ orthogonális helyettesítést alkotják. Mivel a (8) alatti egyenletekben csak az X_1 és X_2 változók fordulnak elő, a 3. segédtételnél fogva

$$a'_{\beta 1} = a'_{\beta 2} = 0,$$

($\beta=3, 4, \dots, n$)

úgy hogy a (9) alatti $n-2$ egyenlet így írható:

$$Y_\beta = a'_{\beta 3} X_3 + a'_{\beta 4} X_4 + \dots + a'_{\beta n} X_n \quad (A')$$

($\beta=3, 4, \dots, n$)

Az A_1 -gyel jelölt helyettesítés, mely már csak $(n-2)$ méretű, mint könnyen meggyőződhetünk, ismét orthogonális helyettesítés, úgyszintén a (8) alatti egyenletek kétméretű orthogonális helyettesítést szolgáltatnak. Ezt elemi orthogonális helyettesítésnek nevezzük.

Az eddigi reduciónak eredménye abban áll, hogy az eredeti n -méretű C helyett a $P_1 C P_1^{-1}$ egy széteső orthogonális helyettesítést szolgáltatott, amely szétesett a (8) alatti elemi és az $(n-2)$ -méretű A_1 orthogonális helyettesítésre.

Mivel a C és $P_1 C P_1^{-1}$ helyettesítések karakterisztikus egyenletei azonosak, az A_1 helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökeiből akként adódnak a C karakterisztikus egyenletének gyökeiből, hogy az $e^{i\vartheta_1}$ és $e^{-i\vartheta_1}$ gyököket elhagyjuk.

Az A_1 valós orthogonális helyettesítést ismét redukálhatjuk egy P'_2 valós orthogonális helyettesítés segítségével. Ismét az A' szétesik a

$$\begin{aligned} Y_3 &= X_3 \cos \vartheta_2 - X_4 \sin \vartheta_2 \\ Y_4 &= X_3 \sin \vartheta_2 + Y_4 \cos \vartheta_2 \end{aligned}$$

elemi orthogonális helyettesítésre és a $(n-4)$ -méretű

$$Y_\beta = a''_{\beta 5} X_5 + a''_{\beta 6} X_6 + \dots + a''_{\beta n} X_n \quad (A'_2)$$

$(\beta=5, 6, \dots, n)$

valós orthogonális helyettesítésre.

Ez így folytatható és k lépés után a

$$P'_k P'_{k-1} \dots P'_1 = P'$$

szorzattal transformálván a C helyettesítést, ez szétesik k számú elemi helyettesítésre és az $(n-2k)$ -méretű

$$Y_\beta = a^{(k-1)}_{\beta 2k+1} X_{2k+1} + \dots + a^{(k+1)}_{\beta n} X_n \quad (A'_k)$$

$(\beta=2k+1, 2k+2, \dots, n)$

valós orthogonális helyettesítésre. Ez utóbbi helyettesítés karakterisztikus egyenletének már csak az l multiplicitású $+1$ és az m multiplicitású -1 a gyökei.

Az A'_k helyettesítés karakterisztikus egyenletének $\lambda = +1$ gyökéhez tartozó pólus az

$$a_{\beta 2k+1} p_{2k+1} + a_{\beta 2k+2} p_{2k+2} + \dots + a_{\beta n} p_n = p_\beta$$

$(\beta=2k+1, 2k+2, \dots, n)$

homogen lineáregyenletrendszeret elégíti ki. Mivel ebből a p_α koordinátáknak csak viszonyai adódnak, föltehetjük, hogy

$$p_{2k+1}^2 + p_{2k+2}^2 + \dots + p_n^2 = 1.$$

Ha most a

$$p_{2k+1} p_{2k+2} p \dots p_n$$

sorban a $n-2k-1$ számú

$$p_{2k+1}^{(\alpha)} p_{2k+2}^{(\alpha)} \dots p_n^{(\alpha)}$$

sort hozzacsatoljuk úgy, hogy a

$$\| p_{2k+1}^{(\alpha)}, p_{2k+2}^{(\alpha)}, \dots, p_n^{(\alpha)} \|$$

$(\alpha=0, 1, \dots, n-2k+1) \quad (p = i^{(0)})$

orthogonális legyen, akkor e matrixhoz tartozó orthogonális helyettesítést P''_1 -vel jelöljük. Ha az

$$Y_\alpha = p_{2k+1}^{(\alpha)} y_{2k+1} + \dots + p_n^{(\alpha)} y_n$$

$$X_\alpha = p_{2k+1}^{(\alpha)} x_{2k+1} + \dots + p_n^{(\alpha)} y_n$$

$(\alpha=0, 1, \dots, n-2k-1)$

változókat behozzuk, akkor egyszerű számítás mutatja, hogy a $P_1'' A_k' P''^{-1}$ orthogonális helyettesítés szétesik az

$$Y_{2k+1} = X_{2k+1}$$

elemi helyettesítésre és egy olyan $(n-2k-1)$ -méretű valós orthogonális helyettesítésre, melynek egyenleteiben a 2. segédételnél fogva a X_{2k+1} változó már nem fordul elő.

Ez az eljárás ismételhető és ha a $P_1'' P_1''^{-1} \dots P_1'' = P''$ jelölést használjuk a

$$P'' A_k' P''^{-1} = A_k'$$

orthogonális helyettesítésre jutunk, melynek karakterisztikus egyenlete már csak a $\lambda = -1$ m -szeres gyököt tartalmazza és amely szétesik az

$$X_{2k+1} = Y_{2k+1}, X_{2k+2} = Y_{2k+2}, \dots, X_{2k+l} = Y_{2k+l}$$

elemi helyettesítésekre.

Itt ismét találhat m számú P_1''' , P_2''' , ..., P_m''' valós orthogonális helyettesítés oly módon, hogy e helyettesítés összetételét P''' -mel jelölve

$$P''' A P'''^{-1} = A''',$$

szétesik az

$$X_{2k+l+1} = -Y_{2k+m+1}, X_{2k+m+2} = -Y_{2k+m+2}, \dots, X_n = -Y_n$$

elemi helyettesítésekre.

Ha most a P' , P'' , P''' helyettesítések összetételét P' -vel jelöljük, akkor

$$P C P^{-1} = A, \quad (10)$$

ahol az A helyettesítés részletesen kiírva a következő:

A

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= X_1 \cos \vartheta_1 - X_1 \sin \vartheta_1 \\
 Y_2 &= X_1 \sin \vartheta_1 + X \cos \vartheta_1 \\
 Y_3 &= X_3 \cos \vartheta_2 - X_4 \sin \vartheta_2 \\
 Y_4 &= X_3 \sin \vartheta_2 + X \sin \vartheta_2 \\
 &\dots \\
 Y_{2k+l} &= X_{2k-1} \cos \vartheta_n - X_{2k} \sin \vartheta_n \\
 Y_{2k} &= X_{2k-1} \cos \vartheta_n - X_{2k} \sin \vartheta_n \\
 Y_{2k+1} &= X_{2k+1} \\
 &\dots \\
 Y_{2k+l} &= X_{2k+l} \\
 Y_{2k+l+1} &= -X_{2k+l} \\
 &\dots \\
 Y_n &= -X_n
 \end{aligned}$$

Ez a valós C orthogonális helyettesítés STICKELBERGER-féle redukált alakja. Igen figyelemreméltó körülmény, hogy e redukált helyettesítés együtthatói egyedül a C karakterisztikus egyenletnek gyökeitől függők, úgy hogy hasonló orthogonális helyettesítésnek közös redukált alakjuk van.

A FŐTÉTEL BEBIZONYÍTÁSA.

1. A bevezetésben fölállított tétel feltételeinek szükséges volta.

Kiindulva abból a föltevésből, hogy a valós C orthogonális helyettesítés ciklikus, azaz hogy létezik olyan ν egész szám, amelyre nézve

$$C^\nu = E, \quad (11)$$

ahol E az azonos helyettesítés, be fogjuk bizonyítani, hogy létezik oly valós orthogonális P helyettesítés, amelyre nézve a

$$PCP^{-1} = \Omega$$

helyettesítésnek megvan az F -tulajdonsága, amivel a bevezetésben 3. alatt fölállított feltétel szükséges volta be lesz bizonyítva.

Legyen P a C helyettesítés redukált alakjára vezető orthogonális helyettesítés, akkor fennál az I. fejezet (10) alatti egyenlősége, amelyben A a C helyettesítés redukált helyettesítését jelenti. Ha az A helyettesítést ν -ször ismételjük, a következő adódik:

$$\begin{aligned} A^\nu &= (PCP^{-1})(PCP^{-1}) \dots (PCP^{-1})^{(\nu\text{-ször})} = \\ &= PC^\nu P^{-1} = PEP^{-1} = E. \end{aligned}$$

Tehát

$$A^\nu = E,$$

azaz $A^\nu = E$ helyettesítések együtthatói azonosak. Az A^ν helyettesítés, mint egyszerű számítás mutatja, részletesen kiírva a következő

$$Y_1 = X_1 \cos \nu \vartheta_1 - X_2 \sin \nu \vartheta_1$$

$$Y_2 = X_1 \sin \nu \vartheta_1 - X_2 \cos \nu \vartheta_1$$

$$Y_{2k-1} = X_{2k} \cos \nu \vartheta_k - X_{2k} \sin \nu \vartheta_k$$

$$Y_{2k} = X_{2k} \cos \nu \vartheta_k - X_{2k} \sin \nu \vartheta_k$$

$$Y_{2k+l} = X_{2k+l}$$

$$Y_{2k+l} = Y_{2k+l}$$

$$Y_{2k+l+1} = (-1)^l X_{2k+l+1}$$

$$Y_n = (-1)^{\nu} X_n$$

Tehát fennállanak a következő egyenlőségek:

$$\cos \nu \vartheta_1 = 1 \quad \cos \nu \vartheta_2 = 1, \dots, \cos \nu \vartheta_k = 1$$

$$\sin \nu \vartheta_1 = 0 \quad \sin \nu \vartheta_2 = 0, \dots, \sin \nu \vartheta_k = 0,$$

úgy hogy

$$\nu \vartheta_1 \equiv 0, \nu \vartheta_2 \equiv 0, \dots, \nu \vartheta_k \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

tehát

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$$

a $\frac{2\pi}{\nu}$ egészszámú többszörösei; de mint a cosinus és sinus osztási problémáinak megoldásából ismeretes a $\frac{2\pi}{\nu}$ cosinus és sinus függvényei olyan algebrai számok, amelyek összes konjugált értékeikkel együtt valós számok, kimondhatjuk, hogy az *A helyettesítés összes együtthatói totalisan valós algebrai számok.*

Hogy az *A* karakterisztikus egyenletében a legmagasabb hatvány együtthatója 1-gyel egyenlő, a többi együtthatók algebrai egész számok igen egyszerűen mutatható ki.

Ugyanis, ha *C* ciklikus helyettesítés, akkor ismeretes tétel értelmében karakterisztikus egyenletének gyökei egységgyökök; tehát együtthatói egységgyököknek elemi szimmetrikus függvényei. Mivel pedig minden egységgyök algebrai egész szám és algebrai egész számoknak racionális egész együtthatós egész kifejezései ismét algebrai egész számok, kimondhatjuk, hogy a *C* karakterisztikus egyenletének az első együtthatót (mely 1-gyel egyenlő) követő összes együtthatói algebrai egész számok. Ezzel ki van

mutatva, hogy az A helyettesítés F -tulajdonságú és ezzel bebizonyítva, hogy a szóbanforgó feltétel csakugyan szükséges feltétel.

Ennek az eredménynek közlése után feltűnő lehet, hogy a bevezetésben említett 2. tétel szerint, melyet a «Cyklikus orthogonális helyettesítésekről» című dolgozatban bizonyítottam, kétméretű orthogonális $+1$ determinánssal bíró helyettesítések esetében azok ciklikus voltak az F -tulajdonság fennállása nemcsak elegendő, hanem szükséges feltétele is. Ennek a magyarázatával tartozom. Ha C kétméretű helyettesítés, akkor az imént közölt fejtegetések szerint ciklikus voltára szükséges egy oly P valós orthogonális helyettesítés létezése, amellyel képezvén a

$$PCP^{-1} = A$$

helyettesítést, ez F -tulajdonságú. Mivel kétméretű orthogonális helyettesítések fölcserélhetők

$$A = CPP^{-1} = CE = C$$

azaz már a C F -tulajdonságú; 2-nél többméretű orthogonális helyettesítések általánosságban nem cserélhetők fel.

2. A feltétel elegendő volta.

A bevezetésben említett 1. tétel értelmében minden orthogonális helyettesítés, mely F -tulajdonságú ciklikus. Ha tehát a

$$PCP^{-1} = A \tag{12}$$

egyenlőségben szereplő A helyettesítés F -tulajdonságú, van olyan ν egész szám, amelyre nézve

$$A^\nu = E, \tag{13}$$

ahol E az azonos helyettesítés.

A (12) alatti egyenlőségből következik, hogy

$$C = P^{-1}AP$$

és így

$$C^\nu = (P^{-1}AP) (P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^\nu P,$$

(ν -szór)

vagú a (13) alatti egyenlet figyelembe vételével

$$C^r = P^{-1}EP = P^{-1}P = E$$

amely egyenlet C ciklikus volta mellett tanúskodik. Ezzel azonban a feltétel elegendő volta is be van bizonyítva és így a bevezetésben 3.-nak fölállított tétel helyességét kimutattuk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. jan. 24-én tartott üléséből.)

DIE NOTWENDIGEN UND HINREICHENDEN BEDINGUNGEN DAFÜR DASS EINE ORTHOGONALE SUBSTITUTION CYKLISCH SEI.

Von E. Mitglied GUSTAV RADOS.

Im vorstehenden Aufsatz wurde der Nachweis für das folgende Theorem geführt:

1. *Eine orthogonale Substitution C ist dann und nur dann cyclisch, wenn eine reelle orthogonale Substitution P gefunden werden kann, durch die C transformirt zu einer Substitution A von der Beschaffenheit führt, dass ihre Coefficienten total-reelle algebraische Zahlen und in ihrer charakteristischen Gleichung der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich 1, alle andere Coefficienten ganze algebraische Zahlen sind.*

Diese Eigenschaft der Substitution A möge im nachfolgenden kurz mit F -Eigenschaft benannt werden. Cyclisch nenne ich eine Substitution, wenn eine gewisse Anzahl ihrer Wiederholung zur identischen Substitution führt; total-reell soll eine algebraische Zahl genannt werden, wenn sie und ihre konjugierten Werte reelle Zahlen sind.

Der Beweis dieses Theorems stützt sich auf die folgenden Sätze:

2. *Wenn die orthogonale Substitution A die F -Eigenschaft besitzt, so ist sie cyclisch.*¹

3. Satz von LUDWIG STIECKELBERGER,² *Ist C eine reelle*

¹ GUSTAV RADOS, «Ueber cyclische Substitutionen». Math. u. Naturw. Ber. Bd. LVII.

² LUDWIG STIECKELBERGER, «Ueber reelle orthogonale Substitutionen». Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule für das Schuljahr 1877/78. Zürich 1878, pag. VI.

orthogonale Substitution und sind die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung

$$\lambda_1 = e^{i\vartheta}, \lambda = e^{-i\vartheta}, \dots, \lambda_{2k-1} = e^{i\vartheta_k}, \lambda_{2k} = e^{-i\vartheta_k}, 1, -1$$

(+1 von der Multiplizität l , -1 von der Multiplizität m),

(bekanntlich kann eine reelle orthogonale Substitution ausser den Wurzeln +1 und -1 nach dem Satze von BRIOSCI¹ nur Komplexe Wurzeln vom absoluten Wert 1 haben), so kann eine reelle orthogonale Substitution gefunden werden für die

$$PCP^{-1} = A \tag{g_1}$$

ist und A die nachfolgende Substitution bedeutet :

$$\left. \begin{aligned} Y_{2\alpha-1} &= X_{2\alpha-1} \cos \vartheta_\alpha - X_{2\alpha} \sin \vartheta_\alpha \\ Y_{2\alpha} &= X_{2\alpha-1} \sin \vartheta_\alpha + X_{2\alpha} \cos \vartheta_\alpha \\ &\quad (\alpha=1, 2, \dots, k) \\ Y_{2k+\beta} &= X_{2k+\beta} \\ &\quad (\beta=1, 2, \dots, l) \\ Y_{2k-l+\gamma} &= -X_{2k+l+\gamma} \\ &\quad (\gamma=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} A$$

Um den Nachweis für die Notwendigkeit der Bedingungen des 1. Satzes zu führen, setzen wir voraus, das C cyklisch sei eine Gleichung

$$C^\nu = E \tag{g_2}$$

bestehe, wo ν eine positive ganze hohl; E die identische Substitution ist. Aus der Gleichung (g_1) folgt

$$A^\nu = PC^\nu P^{-1}$$

und in Hinsicht auf (g_2)

$$A^\nu = PEP^{-1} = E. \tag{g_3}$$

Indem man die Substitution A^ν bildet, kann diese ausführlich folgendermassen hingeschrieben werden

$$\left. \begin{aligned} Y_{2\alpha-1} &= X_{2\alpha-1} \cos \nu\vartheta_\alpha + X_{2\alpha} \sin \nu\vartheta_\alpha \\ Y_{2\alpha} &= X_{2\alpha-1} \sin \nu\vartheta_\alpha + X_{2\alpha} \cos \nu\vartheta_\alpha \\ &\quad (\alpha=1, 2, \dots, k) \\ Y_{2k+\beta} &= X_{2k+\beta} \\ &\quad (\beta=1, 2, \dots, l) \\ Y_{2k+l+\gamma} &= -X_{2k+l+\gamma} \\ &\quad (\gamma=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} A^\nu$$

¹ BRIOSCI, Lionv. Journal Bd. 19, pag. 253.

Soll (g_3) bestehen, so muss

$$\nu \vartheta_\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

sein, also

$$\vartheta_\alpha = \frac{2k_\alpha\pi}{\nu} \quad (k_\alpha \text{ ganz u. rational})$$

sein. Die Coëffizienten von A sind $\cos \frac{2k_\alpha\pi}{\nu}$, $\sin \frac{2k_\alpha\pi}{\nu}$ und diese sind bekanntlich total-reelle algebraische Zahlen.

Da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer cyklischen Substitution Einheitswurzeln sind, so sind die Coëffizienten derselben elementare symmetrische Functionen von Einheitswurzeln, also von ganzen algebraischen Zahlen und als solche auch selbst ganze algebraische Zahlen.

A besitzt daher die F -Eigenschaft. Somit ist die Bedingung des Satzes 1. als notwendig erwiesen.

Dass sie auch hinreichend ist, ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Wir setzen von A die F -Eigenschaft voraus. Nach Satz 2. gibt es eine positive ganze Zahl für die

$$A^\nu = E. \tag{g.}$$

Aus (g_1) folgt

$$C = P^{-1}A^\nu P$$

und hieraus

$$C^\nu = P^{-1}A^\nu P$$

und in Hinblick auf (g_4)

$$C^\nu = P^{-1}EP = E$$

d. h. C ist cyklisch.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Januar 1938.)

BRIOSCHI FRANCESCO EGYIK TÉTELÉNEK RÖVID BIZONYÍTÁSA.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

BRIOSCHI állította föl azt a tételt, hogy *valós orthogonális helyettesítés karakterisztikus egyenlete minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő*. Ennek a tételnek rövid bebizonyításáról lesz szó.

Legyen

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n$$

($i=1, 2, \dots, n$)

ilyen valós orthogonális helyettesítés, úgyhogy

$$c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \dots + c_{in}c_{kn} = \delta_{ik}$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $\delta_{ik}=1$, ha $i=k$; $\delta_{ik}=0$, ha $i \neq k$).

(1)

Legyen ennek karakterisztikus egyenlete

$$\varphi(x) = \text{Det.}(c_{ik} - \delta_{ik}x) = 0$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

és

$$\lambda = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ennek tetszésszerinti gyöke, úgyhogy $\varphi(\lambda) = 0$. Ha $\varphi(\lambda)^2$ soronkénti szorzással képezzük és a

$$\varphi(\lambda)^2 = [\text{Det.}(c_{ik} - \delta_{ik}\lambda)] = \text{Det.}(a_{ik})$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

jelölést alkalmazzuk, akkor az (1) egyenletek figyelembe vételével írhatjuk

$$a_{ii} = 1 - 2c_{ii}\lambda + \lambda^2 - \dots - \lambda \left[2c_{ii} - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right]$$

($i=1, 2, \dots, n$)

$$a_{ik} = -\lambda (u_{ik} + u_{ki}),$$

úgyhogy

$$\varphi(\lambda)^2 = (-\lambda)^n \text{Det.} \left[(c_{ik} + c_{ki}) - \delta_{ik} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0.$$

Mivel $\varphi(0) = \text{Det.} (c_{ik}) = \pm 1$ és így $\lambda \neq 0$ kell, hogy

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi,$$

mint a $\text{Det.} (c_{ik} + c_{ki} - \delta_{ik}z) = 0$ secularis egyenletnek gyöke, valós száma, tehát $r - \frac{1}{r} = 0$ vagy $r^2 = 1$ és így $|\lambda| = r = 1$. q. e. d.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. febr. 21-én tartott üléséből.)

KURZER BEWEIS EINES THEOREMS VON F. BRIOSCHI.

Von GUSTAV RADOS E. Mitglied.

Von BRIOSCHI rührt der Satz her, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer reellen orthogonalen Substitution den absoluten Wert Eins haben. Es sei

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n$$

($i=1, 2, \dots, n$)

eine solche Substitution, so dass die Gleichungen

$$c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \cdots + c_{in}c_{kn} = \delta_{ik} \tag{1}$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $\delta_{ik}=1$, wenn $i=k$; $\delta_{ik}=0$, wenn $i \neq k$)

bestehen. Ihre charakteristische Gleichung ist

$$\varphi(x) = \text{Det.}(c_{ik} - \delta_{ik}x) = 0.$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

Es sei

$$\lambda = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

eine beliebige ihrer Wurzeln, so dass $\varphi(\lambda)=0$ ist. Bildet man durch reihenweise Multiplication

$$\varphi(\lambda)^2 = [\text{Det.}(c_{ik} - \delta_{ik}\lambda)] = \text{Det.}(a_{ik})$$

($i, k=1, 2, \dots, n$)

so wird in Anbetracht der Gleichungen (1)

$$a_{ii} = 1 - 2c_{ii}\lambda + \lambda^2 = -\lambda \left[2c_{ii} - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right]$$

($i=1, 2, \dots, n$)

$$a_{ik} = -\lambda(a_{ik} + a_{ki})$$

($i, k=1, 2, \dots, n$; $i \neq k$)

und somit

$$\varphi(\lambda)^2 = (-\lambda)^n \text{Det.} \left[(c_{ik} + c_{ki}) - \delta_{ik} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0,$$

(i, k=1, 2, \dots, n)

und da $\varphi(0) = \text{Det.}(c_{ik}) = \pm 1$ und daher auch von Null verschieden ist, muss

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi$$

als Wurzel der secularen Gleichung $\text{Det.}(c_{ik} + c_{ki} - \delta_{ik}z) = 0$ reell sein, daher die Gleichungen

$$r - \frac{1}{r} = 0, \quad r^2 = 1, \quad r = |\lambda| = 1. \quad \text{q. e. d.}$$

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Feb. 1938.)

UNITÁRIUS MATRIX SPEKTRUMÁRÓL.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

Valamely

$$A = \|a_{gh}\| \\ (g, h=1, 2, \dots, n)$$

matrix unitárius matrixnak neveztetik, ha az

$$\bar{A} = \|\bar{a}_{gh}\| \\ (g, h=1, 2, \dots, n)$$

konjugált matrixának¹ transzponált matrixával, az

$$\bar{A}' = \|\bar{a}_{1h}, \bar{a}_{2h}, \dots, \bar{a}_{nh}\| \\ (h=1, 2, \dots, n)$$

matrixszal, való szorzata az egységmatrixszal egyenlő, azaz fennáll a következő egyenlőség

$$A\bar{A}' = E,$$

ahol

$$E = \|\delta_{gh}\| \\ (g, h=1, 2, \dots, n; \delta_{gh}=1, \text{ ha } g=h; \delta_{gh}=0, \text{ ha } g \neq h).$$

Az \bar{A}' matrix az A matrix kísérő matrixa nevet viseli, úgyhogy az A matrix unitárius, ha kísérő matrixával való össze-tétele az egységmatrix.

Nyilvánvaló, hogy az A unitárius matrix elemei között a következő $\frac{n(n+1)}{2}$ számú feltételi egyenlet áll fenn:

$$a_{g1}\bar{a}_{h1} + a_{g2}\bar{a}_{h2} + \dots + a_{gn}\bar{a}_{hn} = \delta_{gh} \\ (g, h=1, 2, \dots, n; \delta_{gh}=1, \text{ ha } g=h; \delta_{gh}=0, \text{ ha } g \neq h).$$

¹ Tetszésszerinti komplex mennyiségnek u -nak konjugált értékét \bar{u} -val jelöljük.

Közvetlenül látható, hogy valós unitárius matrix egyszersmind orthogonális.

BRIOSCHI tétele alapján ismeretes, hogy valós orthogonális matrix spektrumában minden sajátértéknek abszolút értéke 1-gyel egyenlő, ami annyit jelent, hogy a karakterisztikus egyenlete minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő.

Ez a tétel kiterjeszthető unitárius matrixokra, amennyiben — mint az alábbiakban ki fogom mutatni — képzetes elemek unitárius matrixaira is áll a tétel:

Unitárius matrix karakterisztikus egyenlete minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő.

A tárgyalás folyamatossága érdekében külön kis fejezetben előrebocsátok két, a bebizonyításban felhasználandó, segéd-tételt.

I. FELHASZNÁLANDÓ SEGÉDTÉTELEK.

1. Segéd-tétel. *Unitárius matrix determinánsának abszolút értéke 1-gyel egyenlő.*

Az

$$A\bar{A}' = E$$

egyenlőség maga után vonja a

$$\det.(A) \cdot \det.(\bar{A}') = \det.(E);$$

mivel pedig

$$\det.(\bar{A}') = \overline{\det.(A')} = \overline{\det.(A)}$$

$$\det.(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

következik

$$\det.(A) \cdot \overline{\det.(A)} = 1,$$

azaz

$$|\det.(A)|^2 = 1,$$

és így csakugyan

$$|\det.(A)| = +1.$$

2. Segéd-tétel. HERMITE-féle matrix karakterisztikus egyenletének összes gyökei valós számok. Ennek az ismeretes tételnek következő egyszerű bebizonyítását közlöm.¹

A

$$C = \|c_{gh}\|$$

(g, h=1, 2, ..., n)

matrix HERMITE-féle, ha az összes

$$c_{hg} = \bar{c}_{gh}$$

(g, h=1, 2, ..., n)

egyenlőségek fennállanak.

Legyen λ a C karakterisztikus egyenletének, a

$$\det.(C - xE) = 0$$

egyenletnek, tetszésszerű gyöke, akkor a

$$c_{g1}x_1 + c_{g2}x_2 + \dots + c_{gn}x_n = \lambda x_g$$

(g=1, 2, ..., n)

homogén lineár egyenletrendszernek vannak nem-triviális megoldásai is. Legyen egy ilyen

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n,$$

úgyhogy

$$\sum_{g=1}^n |\xi_g|^2 \neq 0,$$

és az

$$c_{g1}\xi_1 + c_{g2}\xi_2 + \dots + c_{gn}\xi_n = \lambda \xi_g$$

(g=1, 2, ..., n)

(1)

egyenlőségek fennállanak.

Az (1) alatti egyenlőségeknél fogva helyes a következő egyenlőség:

$$B = \sum_{g=1}^n (c_{g1}\xi_1 + c_{g2}\xi_2 + \dots + c_{gn}\xi_n) \bar{\xi}_g = \lambda \sum_{g=1}^n \xi_g \bar{\xi}_g,$$

amelyben szereplő B bilineár kifejezésről könnyen kimutatható, hogy értéke valós szám. Ugyanis B -nek konjugált értéke \bar{B} a következő:

$$\bar{B} = \sum_{g=1}^n (\bar{c}_{g1}\bar{\xi}_1 + \bar{c}_{g2}\bar{\xi}_2 + \dots + \bar{c}_{gn}\bar{\xi}_n) \xi_g,$$

¹ V. ö. RADOS GUSZTÁV «A Laplace-féle egyenlet gyökeiről», Math. és Phys. Lapok I. köt. 354. l.

és mivel

$$\begin{aligned} \bar{c}_{gh} &= c_{hg} \\ \bar{B} &= \sum_{g=1}^n (c_{1g}\bar{\xi}_1 + c_{2g}\bar{\xi}_2 + \dots + c_{ng}\bar{\xi}_n) \xi_g = \\ &= \sum_{h=1}^n (c_{h1}\xi_1 + c_{h2}\xi_2 + \dots + c_{hn}\xi_n) \bar{\xi}_h, \end{aligned}$$

tehát

$$\bar{B} = B,$$

és így B csakugyan valós és mivel $\sum |\xi_g|^2 \neq 0$

$$\lambda = \frac{B}{\sum_{g=1}^n |\xi_g|^2}$$

mint két valós szám hányadosa maga is valós.

II. A FŐTÉTEL BEBIZONYÍTÁSA.

Legyen az

$$A = \| a_{gh} \|$$

($g, h = 1, 2, \dots, n$)

matrix unitárius, azaz legyen

$$A\bar{A}' = E; \tag{2}$$

legyen továbbá

$$\lambda = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

az A karakterisztikns egyenletének, az

$$\Phi(x) \equiv \det.(A - xE) = 0$$

egyenletnek, tetszésszerinti gyöke, úgyhogy

$$\Phi(\lambda) = \det.(A - \lambda E) = 0. \tag{3}$$

Ez az egyenlőség mutatja, hogy $\lambda \neq 0$. Mert föltéve, hogy

$$\lambda = 0$$

a (3) alatti egyenlőségből

$$\det.(A) = 0$$

következnék. Ez azonban ellenkezik 1. segédtételünkkel, amelyek értelmében

$$|\det.(A)| = 1.$$

Közvetlenül belátható, hogyha sikerül kimutatnunk, hogy a

$$\Psi(x) \equiv \Phi(x) \det.(\bar{A}' - xE) = 0$$

egyenlet minden gyökének abszolút értéke 1-gyel egyenlő, akkor főtételünk is be lesz bizonyítva. $\Psi(x)$ a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \det.(A - xE) \cdot \det.(\bar{A}' - xE) = \\ &= \det. [(A - xE)(\bar{A}' - xE)] = \\ &= \det.(A\bar{A}' - x\bar{A}' - xA + x^2E), \end{aligned}$$

és a (2) alatti egyenlőségre való tekintettel

$$\Psi(x) = \det. [(1+x^2)E - (A + \bar{A}')x],$$

tehát

$$\Psi(\lambda) = \det. [(1+\lambda^2)E - (A + \bar{A}')x] = 0,$$

és mivel $\lambda \neq 0$, innen következik, hogy

$$\det. \left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) E - (A + \bar{A}') \right] = 0. \quad (4)$$

Az $A + \bar{A}'$ matrix részletesen kiírva a következő:

$$A + \bar{A}' = \begin{vmatrix} a_{11} + \bar{a}_{11} & a_{12} + \bar{a}_{21} & a_{13} + \bar{a}_{31} \dots & a_{1n} + \bar{a}_{n1} \\ a_{21} + \bar{a}_{12} & a_{22} + \bar{a}_{22} & a_{23} + \bar{a}_{32} \dots & a_{2n} + \bar{a}_{n2} \\ a_{31} + \bar{a}_{13} & a_{32} + \bar{a}_{23} & a_{33} + \bar{a}_{33} \dots & a_{3n} + \bar{a}_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + \bar{a}_{1n} & a_{n2} + \bar{a}_{2n} & a_{n3} + \bar{a}_{3n} \dots & a_{nn} + \bar{a}_{nn} \end{vmatrix};$$

látható tehát, hogy g -dik sor h -dik eleme a h -dik sor g -dik elemének a konjugált értéke, mert

$$\overline{a_{gh} + \bar{a}_{hg}} = a_{gh} + \bar{a}_{hg} = a_{hg} + \bar{a}_{gh},$$

$(g, h=1, 2, \dots, n).$

Így tehát $A + \bar{A}'$ HERMITE-féle matrix és a (4) alatti egyenlet, ha benne a

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = (\rho + \rho^{-1}) \cos \varphi + i(\rho - \rho^{-1}) \sin \varphi \quad (5)$$

mennyiséget ismeretlennek tekintjük HERMITE-féle matrix karakterisztikus egyenlete. De akkor 2. segédtételünk értelmében az (5) alatti szám valós, tehát

$$\varrho - \varrho^{-1} = 0,$$

azaz

$$\varrho^2 = 1$$

és így

$$\varrho = |\lambda| = 1,$$

amivel főtételünk teljesen be van bizonyítva.¹

¹ Csak a korrektura olvasásakor tudtam meg, hogy JULIA GASTON, kiváló francia matematikus, a jelen dolgozatban foglalt tételt már 1936-ban, «Introduction mathématique aux théories quantiques» című művének 180. lapján közölte és bebizonyította. A midőn JULIA GASTON ur prioritását feltétlenül elismerem, megjegyzem, hogy én e tételt tőle függetlenül találtam és hogy az én bebizonyításom az övével szemben elemibb tételek fölhasználásával jut célhoz.

ÜBER DAS SPEKTRUM EINER UNITÄREN MATRIX.

Von GUSTAV RADOS Ehrenmitglied.

Im vorstehenden Aufsatz wird der folgende Satz bewiesen:
Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer unitären Matrix haben alle den absoluten Wert 1.

Ist A eine unitäre Matrix, sodass

$$A\bar{A}' = E \quad (1)$$

ist, wo \bar{A}' die konjugierte Matrix der transponierten Matrix von A und E die Einheitsmatrix bedeuten, so kann das Produkt

$$\Psi(\lambda) = \det. (A - \lambda E) \det. (\bar{A}' - \lambda E)$$

folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) &= \det. [(A - \lambda E)(\bar{A}' - \lambda E)] = \\ &= \det. [(1 + \lambda^2)E - (A + \bar{A}')\lambda'] = \\ &= \lambda^n \det. \left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) E - (A + \bar{A}') \right]. \end{aligned}$$

Ist nun λ eine beliebige Wurzel der charakteristischen Gleichung (von A wegen (1) sicherlich von Null verschieden), so muss

$$\det. \left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) E - (A + \bar{A}') \right] = 0$$

sein. Da $A + \bar{A}'$ eine HERMITE-sche Matrix ist, muss also $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ reell sein. Ist

$$\lambda = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |\lambda|,$$

so muss demnach

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi$$

reell sein. Daher muss

$$r - \frac{1}{r} = 0$$

und

$$r^2 = 1,$$

also

$$r = |\lambda| = 1$$

sein.¹

¹ Den im obigen bewiesenen Satz hat bereits Herr GASTON JULIA im Jahre 1936 aufgestellt und bewiesen (S. GASTON JULIA-S «Introduction mathématique aux théories quantiques» betitelttes Buch pag. 180.). Ich möchte bemerken, das mein Beweis sich elementarerer Hilfsmittel bedient als der seine.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Mai 1938.)

A JORDAN-FÉLE GÖRBETÉTELÉRŐL.

RIESZ FRIGYES r. tagtól.

Bevezetés.

Jordan tétele azt mondja ki, hogy *minden kettőspont nélküli, folytonos zárt görbe*, rövidebben: minden JORDAN-görbe *a síkot pontosan két tartományra osztja fel*. A jelen dolgozatban ennek a tételnek számos bebizonyítását eggyel gyarapítjuk. Bizonyításunk a sík pontjainak a görbére nézve számított rendje (más néven indexe) szerinti megkülönböztetésén alapszik. Több részletmeggondolást különböző szerzők régebbi bizonyításaiból veszünk át és csak két új gondolatot vetünk fel; az egyik az, hogy a leglényegesebb meggondolásokban már eleve csak két esetet különböztetünk meg azáltal, hogy a pontokat rendjüknek csupán *párossága*, vagyis páros vagy páratlan volta szerint és nem pontos értéke szerint osztályozzuk; a második az, hogy a két eset közül az egyiket a másikra a $z' = \frac{1}{z}$ *inverzió* segítségével vezetjük vissza.

Módszerünk alkalmazható arra az általánosabb problémára is, mely a síknak tetszésszerű zárt halmaz létesítése szétbontásával foglalkozik és amelyen át speciálisan a többszörös pontokkal bíró folytonos görbék által eszközölt szétbontások vizsgálatához jutunk el. Nem sikerült megállapítanom, vajjon eredményeink maguk újak-e. Mindenesetre ismertetem azokat, már csak módszerünk illusztrálása végett is.

1. A Jordan-féle tétel bebizonyítása.

Mindenekelőtt idézzük emlékezetünkbe a pontoknak megadott zárt görbére számított rendjére vonatkozó legegyszerűbb tudnivalókat.

Legyen adva egy tetszésszerű, zárt vagy nem zárt, kettőspont nélküli vagy kettősponttal bíró, folytonos $AB = l$ görbe és egy nem a görbén fekvő P pont. Tudjuk, hogy a PM vektor irányának változása, mialatt az M pont végigfut az l görbén, meghatározott véges mennyiség. Ez a változás, mely az l görbének két ívre való osztása esetében nyilvánvalóan additív, pl. úgy számítható ki, hogy az l görbét az M_i pontok segítségével ($i = 1, 2, \dots, n; M_0 = A, M_n = B$) olyan $M_{i-1}M_i$ ívekre daraboljuk szét, amelyeknek átmérője, azaz legnagyobb húrja, kisebb, mint a P pontnak a görbétől való távolsága és a megfelelő előjellel ellátott $M_{i-1}PM_i$ hegyes szögeket összeadjuk. Ha $A=B$, akkor ez az összeg $2m\pi$ alakú, ahol m pozitív vagy negatív egész szám vagy 0; ezt az m számot mondjuk a P pontnak a zárt l görbére vonatkozó *rendjének*. A P pont rendje nem változik, ha a P pont folytonosan mozog a nélkül, hogy az l görbével találkoznék; pontosan egy egységgel változik (növekszik vagy fogy), ha az l görbének van egy egyenesdarab része és a mozgó P pont ezen átlép, a nélkül, hogy a görbe kiegészítő ívével találkoznék. Ebből csaknem közvetlenül származtatható a JORDAN-tétel egyszerű zárt törtvonal esetére, amikor is a külső tartományt azok a pontok alkotják, amelyeknek rendje 0, a belsőt pedig azok, amelyeknek rendje az egység és pedig 1 vagy -1 a zárt törtvonal körülfutási értelme szerint. Ami ismét az általános esetet illeti, arra az adódik, hogy $m = 0$, mihelyt a P pont az l görbétől elég messze esik, többek között, mihelyt az l görbe a P pontból π -nél kisebb szög alatt látszik, vagy ami ugyanaz, mihelyt az l görbe és a P pont egymástól egy egyenes vonallal elválaszthatók.

Tegyük már most fel, hogy az l görbe JORDAN-féle, tehát kettőspont nélküli folytonos zárt görbe. A JORDAN-tétel bebizonyításához mindenekelőtt azt kell átlátnunk, hogy *van 0-rendű és van egységrendű pont a görbére nézve és hogy ennél fogva a görbe a síkot legalább két tartományra osztja szét*. Minthogy minden elég távol fekvő pont 0-rendű, csak egy egységrendű pontot kell még megtalálnunk. Ismételjük meg azt a lényegében HADAMARD-tól eredő meggondolást, amelyet E.

SCHMIDT hozott nagyon egyszerű alakra.¹ Legyen d egy a görbével nem találkozó egyenes és P legyen egy pont, melyet d a görbétől elválaszt. A P pontból húzzuk meg az a, b, c , az l görbét metsző félegyeneseket, melyeknek metszéspontjai a d egyenessel A, B és C és első metszéspontjaik az l görbével A_1, B_1, C_1 ; a jelöléseket úgy választottuk, hogy A, B és C a d egyenesen a mondott sorrendben következzenek. Továbbá legyen B_2 a b félegyenes utolsó metszéspontja az $A_1B_1C_1$ ívvel és legyen B' egy ugyanezen a félegyenesen B_2 -n túl fekvő, de olyan pont, hogy a B_2B' egyenesdarab B_2 -n túl már ne találja a görbét. Ez a B' pont először is 0-rendű arra az $l_1 = A_1B_1C_1CAA_1$ zárt vonalra nézve, amelyet az $A_1B_1C_1$ ívből és a C_1C, CA és AA_1 egyenesdarabokból rakunk össze; valóban, továbbhaladhatunk a b félegyenes mentén a végtelen felé a nélkül, hogy az l vonallal találkoznánk. Másodszor a B' pont egységrendű az $l_2 = A_1ACC_1A_1$ zárt vonalra nézve, mely az A_1A, AC és CC_1 , az imént már az l_1 összeállításában szerepelt, de az ellenkező irányban haladó egyenesdarabokból és az l görbének az imént szerepelt $A_1B_1C_1$ ívét kiegészítő C_1A_1 ívéből van összetéve. Valóban, ha P -ből elindulva végighaladunk a PB_1 egyenesdarabon, azután az $A_1B_1C_1$ ív B_1B_2 részívén és végül a B_2B' egyenesdarabon, akkor a 0-rendű P pontból úgy értünk el a B' pontba, hogy az l_2 zárt vonalat csak a B pontban találtuk és ott egy egyenesdarabját léptük át, úgy hogy tehát a rend pontosan egy egységgel változott. Összefoglalva, a B' pont 0-rendű az l_1 -re és egységrendű az l_2 -re nézve, és mivel még a C_1CAA_1 és A_1ACC_1 utak egymást lerontják, összeadással adódik, hogy B' egységrendű az l görbére nézve.

Ezekután úgy bizonyítjuk be JORDAN tételét, hogy megmutatjuk, hogy *bármely két az l görbére nézve páros rendű pont ugyanabban a kiegészítő tartományban fekszik, azaz egymással folytonos úton összeköthető az l görbe elkerülésével és hogy ugyanez áll bármely két páratlan rendű pontra is.*

¹ E. SCHMIDT, Über den JORDANSCHEN Kurvensatz, *Sitzungsberichte d. preuß. Akad. d. Wiss.*, 1923, phys.-math. Klasse, 318—329. o., 2. §.

Ami az első állítást illeti, mindenekelőtt világos, hogy elég megmutatnunk, hogy minden párosrendű P pont összeköthető a végtelennel az l görbe elkerülésével. E végett jelöljük 2ε -nal a P pont távolságát az l görbétől. Választhatjuk a pozitív δ mennyiséget úgy, hogy először is $\delta < \varepsilon$ és másodsor minden olyan az l görbén fekvő A, B pontpárra, melyekre $\overline{AB} \leq 2\delta$, az AB ívek közül legalább az egyiknek az átmérője kisebb legyen mint ε .¹ Ezután borítsuk be a síkot egy δ -oldalú szabályos háromszögekből álló hálóval és tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek akár csak egy belső vagy kerületi pontjuk az l görbén fekszik.² Legyen $p = A_1A_2 \dots A_nA_1$, az ezek által a háromszögek által alkotott összefüggő tartomány külső kerülete; a jelölést úgy választjuk, hogy a p vonalat alkotó A_iA_{i+1} egyenesdarabok ($A_{n+1} = A_1$) a tekintett háromszögek közül a p vonalhoz támaszkodóknak egy-egy oldala. Legyen még B_i az l görbének egy az A_iA_{i+1} oldalhoz tartozó háromszögben vagy határán fekvő, különben tetszésszerű pontja. Tekintsük az $A_iA_{i+1}B_i$ háromszögek kerületeit és az $A_{i+1}B_{i+1}B_i$ zárt vonalakat; az utóbbiak a B_iA_{i+1} és $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesdarabokból és az l görbe két $B_{i+1}B_i$ ívének ($B_{n+1} = B_1$) egyikeből állnak, amelyet úgy választunk, hogy átmérője kisebb legyen, mint ε . Az ilyen választás azért lehetséges, mert $\overline{B_iB_{i+1}} \leq \overline{B_iA_{i+1}} + \overline{A_{i+1}B_{i+1}} < 2\delta$. Ezekután nyilvánvaló, hogy a PB_i egyenesdarab felező merőlegese elválasztja a P pontot úgy az $A_iA_{i+1}B_i$ háromszögtől,

¹ Ezt a jól ismert tényt pl. így bizonyíthatjuk be. Az l JORDAN-görbe egy l' körön, pl. az egységkörön ábrázolható folytonosan és egyértelműen. Ennél fogva a megadott ε -hoz van olyan pozitív η , hogy mihelyt az l görbén fekvő M, N pontok M', N' képeire $\overline{M'N'} < \eta$, akkor $\overline{MN} < \varepsilon$, továbbá ehhez az η -hoz van olyan pozitív δ , hogy mihelyt $\overline{MN} < 2\delta$, akkor $\overline{M'N'} < \eta$. Ha már most az l görbe A, B pontjaira $\overline{AB} < 2\delta$, tehát $\overline{A'B'} < \eta$, akkor a kisebbik $A'B'$ köríven fekvő M', N' pontokra ugyancsak $\overline{M'N'} < \eta$ és ezért az l görbe megfelelő AB ívén fekvő M, N pontokra $\overline{MN} < \varepsilon$, qu. e. d.

² Az itt következő gondolatmenet részben hasonlít ahhoz a megfontoláshoz, amellyel PÁL GYULA bizonyította be az egyszerű JORDAN-ívekre vonatkozó ismeretes tételt, hogy t. i. az ilyen ív a síkot nem darabolja szét; l. J. PÁL, Zur Topologie der Ebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, 1 (1922—23), 226—239. o., speciálisan 230—231. o.

mint az $A_{i+1}B_{i+1}B_i$ zárt vonaltól és így a P pont 0-rendű úgy a tekintett háromszögkerületekre, mint az $A_{i+1}B_{i+1}B_i$ zárt vonalakra nézve. Már most ennek a két fajta, összesen $2n$ zárt vonalnak megfelelő értelemben való befutása, ha a kétszer, ellenkező értelemben befutott egyenesdarabokat kiselejtezzük, egyenlőértékű két zárt vonal befutásával, éspedig egyrészt a p vonaléval, másrészt az l görbe $B_{i+1}B_i$ íveiből összetett $B_nB_{n-1}\dots B_1B_n$ vonaléval. Ennélfogva a P pont rendje a p vonalra nézve ugyanaz, mint a $B_1B_2\dots B_nB_1$ vonalra nézve. Továbbá a P pont rendje a második vonalra nézve csak páros számmal, t. i. csak az l görbére nézve való rendjének valamely egész számú többszörösével változhatik, ha a B_iB_{i+1} ívek egyike vagy másika helyébe a kiegészítő ívet tesszük. Ezért a párosság szempontjából az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az összes íveket az l görbén a görbe eredeti körülfutási értelmében futjuk be, amikor is vonalunk befutása egyszerűen az l görbének egyszer vagy többször való körülfutása. Tehát a P pont vonalunkra nézve páros rendű és ezért ugyancsak páros rendű a p poligonvonalra nézve is. De a p vonal egyszerű zárt poligon; az ilyenre pedig minden páros rendű pont pontosan 0-rendű és külső pont, vagyis összeköthető a végtelennel olyan folytonos úttal, pl. törtvonallal, mely teljesen a p vonalon kívül fekszik, amely tehát az l vonalal sem találkozik.

Ezzel megmutattuk, hogy minden az l vonalra nézve páros rendű pont az l kiegészítő tartományai közül egy és ugyanabba, t. i. abba tartozik, amely a végtelenbe nyúlik.

A páratlan rendű pontok kérdését az előbbire vezetjük vissza és pedig a következő jelenség alapján. Vessük alá a síkot a $z' = \frac{1}{z}$ inverziónak és tegyük fel, hogy a $z = 0$ kezdőpont nincs az l görbén; legyen l' az l görbe megfelelője; a P és Q pontok, amelyekről ugyancsak feltesszük, hogy nem fekszenek az l görbén, menjenek át a P' és Q' pontokba. Azt állítom, hogy a P és Q pontoknak a l görbére való rendjeinek különbsége változatlan marad, ha P, Q és l helyébe a P', Q' pontokat és az l' görbét tesszük. Elegendő különben azt az esetet tekintenünk, amikor Q a kezdőpontba esik és megmutatnunk,

hogy ebben az esetben a P pont rendje az l' görbére nézve egyenlő a P pontnak és a kezdőpontnak az l görbére való rendjeinek különbségével.

Jelöljük m -vel a P pont képzetes koordinátáját; a P' ponté nyilvánvalóan $\frac{1}{w}$. Legyen továbbá $z_1 z_2$ az l görbe egy íve; feltesszük, hogy az ív bármely két pontja a P pontból és a kezdőpontból $\frac{\pi}{2}$ -nél kisebb szög alatt látszik és még azt is, hogy ugyanez érvényes az ív megfelelőjére és a p' pontra. Mivel a kettősviszony az inverzióval nem változik, azért $(z_1 w z_2 0) = = \left(\frac{1}{z_1} \frac{1}{w} \frac{1}{z_2} \infty \right)$ és speciálisan a kettősviszony argumentuma is invariáns mod 2π . Vagyis a z_1 és z_2 pontoknak a P és Q pontokból való hegyes látószögeinek a különbsége pontosan egyenlő az $\frac{1}{z_1}$ és $\frac{1}{z_2}$ pontoknak a P' pontból való hegyes látószögével. Ebből az l görbére vonatkozó állításunk elég kis átmérőjű ívekre való felbontással nyilvánvaló módon következik.

Alkalmazzuk eredményünket arra az esetre, mikor a kezdőpont és a P pont az l JORDAN-görbére nézve páratlan rendűek. Eredményünk szerint akkor a P' pont páros rendű az l' JORDAN-görbére nézve és ennél fogva előző eredményünk szerint a P' pontból folytonos úton mehetünk a végtelenbe a nélkül hogy az l' görbével találkoznánk. Ebből inverzióval olyan folytonos út adódik, mely a P' pontot a kezdőponttal köti össze az l görbe elkerülésével. Ez pedig, mivel koordinátakezdőpont gyanánt bármely páratlan rendű pontot választhattuk, egyszerűen azt jelenti, hogy ugyanúgy, mint a páros rendű pontok, a páratlan rendűek is egyetlen tartományt alkotnak.

Ezzel a JORDAN-féle tételt bebizonyítottuk.

2. A sík szétदारabolása tetszésszerinti zárt halmaz vagy folytonos görbe által.

Tekintsük most általánosabban a síknak egy korlátos, zárt, egyébként tetszésszerinti e halmaz által létesített felbontását véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok tartományra.

A P és Q pontok feküdjenek ezek közül bármelyikben, de ugyanabban és legyen c egy a két pontot összekötő, az illető tartományon belül haladó folytonos út. Jelentse ε a c útnak az e halmaztól való távolságát. Tekintsünk egy $p = A_1 A_2 \dots A_n A_1$ zárt törtvonalat, amelynek A_1, A_2, \dots, A_n szögpontjai az e halmazból valók és $A_i A_{i+1}$ oldalai ($A_{n+1} = A_1$) kisebbek mint ε . Bizonyos, hogy a p törtvonal nem találkozik a c úttal; ennél fogva a P és Q pontok egyenlő rendűek a zárt p vonalra nézve. Tehát annak, hogy a P és Q pontok ugyanabba a tartományba essenek, szükséges feltétele, hogy a két pont egyenlőrendű legyen minden az e halmazba beírt, elég kis oldalakból álló zárt törtvonalra nézve; természetesen ez a rend általában függ a p törtvonal megválasztásától. Azt állítom, hogy feltételünk nemcsak szükséges, hanem elegendő is; sőt a pontos megegyezés helyett elég csak azt feltenni, hogy a két pont rendje ugyanolyan párosságú.

Állításunk bebizonyítására tekintsünk először egy olyan P pontot, amely 0-rendű minden elég kis oldalú beírt zárt törtvonalra nézve. Nyilvánvaló, hogy vannak ilyen pontok, pl. minden olyan pont, melyet egy alkalmas egyenessel el lehet választani az e halmaztól. Legyen $2\varepsilon_1$ a P pont távolsága az e halmaztól és borítsuk be a síkot ismét egy ε_1 -nél kisebb δ oldalú szabályos háromszögekből álló hálóval; tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek belsejében vagy kerületén van az e halmaznak legalább egy pontja. Ezek a háromszögek együtt egy vagy több poligon-tartományt alkotnak; legyenek p_1, p_2, \dots, p_m ezeknek külső kerületei. Tekintsük pl. a $p_1 = A_1 A_2 \dots A_n A_1$ kerületet, ahol A_i -vel hálónknak azokat a szögpontjait jelöltük, amelyek a p_1 vonalon fekszenek és pedig az ezen való sorrendjükben. Az $A_i A_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1$) oldalhoz tartozó, a p_1 kerületen belül fekvő hálóháromszög mindenesetre tartalmazza az e halmaznak legalább egy B pontját. Minthogy a P pont rendje az $A_i A_{i+1} B_i$ és $A_{i+1} B_{i+1} B_i$ háromszögekre nézve nyilvánvalóan 0, azért a P pont rendje a p_1 kerületre nézve ugyanaz, mint a $B_1 B_2 \dots B_n B_1$, az e halmazba beírt zárt törtvonalra nézve; ennél fogva és feltevésünk alapján ez a rend 0. Ugyanez áll a P pontnak a p_2, \dots, p_m kerületekre nézve számított rendjére is. Tehát a P pont a p_i poligonokon kívül fekszik

és így összeköthető a végtelennel olyan folytonos úttal, pl. törtvonallal, mely nem hatol be egyik p_i poligon belsejébe sem és így nincs az e halmazzal közös pontja.

Két P és Q pont esete, melyek feltételünknek eleget tesznek, az imént tekintett speciális esetre ugyanazzal a megfontalással vezethető vissza, mint amelyet a JORDAN-görbe esetében alkalmaztunk, t. i. a $z' = \frac{1}{z}$ inverzióval, amelynél a koordináta-kezdőpontot a Q pontba helyezzük.

Összefoglalva, bebizonyítottuk, hogy *annak, hogy a korlátos, zárt e halmaz ne válassza el egymástól a P és Q pontokat, szükséges és elegendő feltétele az, hogy a két pont rendje egyenlő párosságú legyen bármely elég kis oldalú, az e halmazba beírt, zárt törtvonatra nézve* (maga a párosság általában függ a törtvonal megválasztásától).

Jegyezzük még meg, hogy az a feltevés, hogy az e halmaz korlátos, könnyen elejthető.

Tekintsük most azt a speciális esetet, amikor az e halmaz egy az

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

egyenletekkel megadott folytonos l görbe pontjainak összessége. Erre az esetre az imént nyert szükséges és elegendő feltételből egy másikat származtatunk, amely többek között magában foglalja azt a tényt, hogy a JORDAN-féle görbe a síkot legfeljebb két részre osztja, valamint azt a tételt is, hogy egy JORDAN-féle görbeív a síkot egyáltalában nem darabolja szét.

Hogy feltételünket kimondhassuk, nevezzük mindenekelőtt *huroknak* az l görbének minden olyan, egy $t_1 \leq t \leq t_2$ paraméterköznek megfelelő ívét, amelyre $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, vagyis amelynek kezdőpontja és végpontja összeesnek. *Ahhoz, hogy a P és Q pontokat az l görbe ne válassza el egymástól, szükséges és elegendő, hogy a két pont rendje valamennyi hurokra nézve ugyanolyan párosságú legyen* (természetesen ez a párosság általában függ az illető hurok megválasztásától).

Feltételünk szükséges volta nyilvánvaló. Annak megmutatására, hogy elegendő is, először egy segédtevényt bizonyítunk be. *Minden pozitív ε -hoz megadható olyan δ , hogy a folytonos l*

görbe bármely két olyan A, B pontjához, melyeknek egymástól való távolsága kisebb, mint δ , van az l görbén olyan C pont, hogy az AC és BC ívek közül legalább egy-egynek az átmérője kisebb, mint ε . Valóban, az ezzel ellenkező feltevés alapján, kiválasztással, a paramétereknek két olyan $\{t_i\}$ és $\{t'_i\}$, a t^ és t^{**} határértékekhez tartó sorozatát adhatnók meg, melyekre a t_i és t'_i értékeknek megfelelő A_i és B_i pontok távolsága 0-hoz tartana és másrészt az A_i, B_i párok egyikéhez sem léteznék a görbén a segédételben részletezett sajátosságú C pont. Ennek azonban ellentmond az a tény, hogy a t^* és t^{**} értékeknek nyilvánvalóan ugyanegy pont felel meg és ha ezzel a ponttal próbálkozunk C pont gyanánt, akkor a hosszúságra 0 felé tartó $t_i t^*$ és $t'_i t^{**}$ közöknek megfelelő $A_i C, B_i C$ ívek átmérői az $x(t), y(t)$ függvények folytonossága miatt ugyancsak 0 felé tartanak.*

Miután így segédételünket bebizonyítottuk, tekintsünk két olyan P és Q pontot, melyek feltételünket kielégítik, azaz amelyeknek rendje bármely hurokra nézve egyforma párosságú, és tegyük fel, hogy az l görbétől való távolságuk nagyobb, mint 2ε . Legyen δ a segédétel szerint ehhez az ε -hoz tartozó mennyiség. Azt állítom, hogy a két pont rendje egyforma párosságú minden olyan $p = A_1 A_2 \dots A_n A_1$, az l görbébe beirt zárt törtvonallra nézve, amelynek $A_i A_{i+1}$ oldalai ($A_{n+1} = A_n$) δ -nál kisebbek és hogy ennél fogva, az imént bebizonyított általános tétel alapján, a két pontot az l görbe nem választja el egymástól. Valóban, segédételünk szerint, a t_i, t'_i, t''_i, t'''_i paraméterértékek úgy választhatók, hogy a t_i és t'_i értékeknek rendre az A_i pontok feleljenek meg, a t''_i, t'''_i értékeknek pedig olyan C_i pontok, hogy a $t''_i t'_i$ és $t'''_i t_{i+1}$ paraméterközöknek megfelelő $A_i C_i$ és $C_i A_{i+1}$ ívek átmérői ε -nál kisebbek legyenek. Ennél fogva a PC_i , ill. QC_i közök felező merőlegesei a P , ill. Q pontokat elválasztják az $A_i A_{i+1}$ egyenesdarabból és az imént említett $A_{i+1} C_i$ és $C_i A_i$ ívekből összerakott $A_i A_{i+1} C_i A_i$ zárt vonaltól; tehát a P és Q pontok erre a vonalra nézve 0-rendűek. Ebből pedig az következik, hogy annak a megmutatására, hogy a két pont rendje ugyanegy párosságú a p zárt törtvonallra nézve, a p vonal helyett az $A_i C_i$ és $C_i A_{i+1}$ ívekből összetett $A_1 C_1 A_2 C_2 \dots A_n C_n A_1$ zárt vonalat tekinthetjük. Továbbá, feltevé-

sünk alapján, még beiktathatjuk a $t_i t'_i$ és $t''_i t'''_i$ paraméterközöknek megfelelő $A_i A_i$ és $C_i C_i$ hurkokat is; valóban, ezáltal a kérdéses rendek csak ugyanolyan párosságú értékekkel változhatnak meg. Az így keletkezett l vonal olyan ívekből van összerakva, amelyeknek megfelelő paraméterközök zárt ciklust alkotnak, amiből nyilvánvaló módon adódik, hogy a P és Q pontok rendje az l vonalra nézve 0 (éppúgy, mint bármely más, nem az l vonalon fekvő, ponté is). Tehát kell, hogy már eredetileg a két pontnak a p vonalra való rendjei is ugyanegy párosságúak lett legyenek. Minthogy végül p gyanánt bármely az l görbébe beírt elég kis oldalú zárt törtvonalat választhattuk, azért az előzőleg bebizonyított tétel szerint az l görbe nem választja el egymástól a két pontot. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Eredményünkből közvetlenül adódik még a következő tétel:

Ha két pont olyan helyzetű, hogy azokat az l görbe hurkai közül egyik sem választja el egymástól, akkor azokat nem választja el egymástól maga az l görbe sem.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. január 24-én tartott üléséből.)

SUR LE THÉORÈME DE JORDAN.

Par FRÉDÉRIC RIESZ, membre de l'Académie.

1. Démonstration du théorème que toute ligne continue fermée sans point double décompose le plan précisément en deux domaines. La démonstration est fondée sur la classification des points suivant leur ordre par rapport à la courbe. Beaucoup des détails sont empruntés à des démonstrations antérieures, dues à divers auteurs ; les seules idées nouvelles qui interviennent sont, d'abord, de ne distinguer, a priori, qu'entre deux cas possibles et cela en classant les points, au lieu de la valeur exacte de leur ordre, selon la parité de ce dernier et puis de réduire l'un des deux cas à l'autre à l'aide d'une inversion.

2. Application de la méthode au problème de la décomposition du plan par un ensemble fermé ou par une ligne continue d'ailleurs quelconques.

Une version française de cette Note paraîtra dans les *Acta Scientiarum Mathematicarum* de l'Université de Szeged.

EGY ÚJ SZÁMELMÉLETI JEL, ALKALMAZÁSSAL A MÁSODFOKÚ SZÁMTESTEK ELMÉLETÉRE. II.¹

RÉDEI LÁSZLÓ-tól (Budapest).

A jelenlevő dolgozatban azzal a sokat tárgyalt kérdéssel foglalkozom, hogy a D diszkriminánsú $R(\sqrt{D})$ 2-odfoku számtestben létezik-e -1 normával bíró egység. Tudvalevőleg ez a kérdés egyértelmű azzal, hogy a

$$t^2 - du^2 = -1 \quad (1)$$

PELL-féle egyenlet megoldható-e, ahol $2 \nmid D$ mellett $d=D$, $2 \mid D$ mellett $d = \frac{1}{4}D$. Az régóta ismert, hogy ha a D -nek van negatív törzsdiskriminánstényezője, akkor az (1) megoldhatatlan. Ezért a jövőben feltételezzük, hogy a D minden törzsdiskriminánstényezője pozitív. Ugyancsak rég ismeretes, hogy az (1) akkor és csak akkor megoldható, ha a \sqrt{D} közönséges lánctörtkifejtésében a periódus tagszáma páratlan. Ennek a kritériumnak nagy fogalmi egyszerűsége mellett súlyos hátránya az, hogy az alkalmazáshoz általában szükséges a periódus tényleges kiszámítása, ami nagy D esetében szinte leküzdhetetlen nehézséggel járhat. Az ez alapon számított táblázatok közül a legterjedelmesebb N. NIELSEN-től² való, amely felöleli a 10000 alatt levő d -ket.

¹ Ennek a dolgozatnak első része megjelent ebben az Értesítőben, 56 (1937), 807–845. Ezt I-gyel fogom idézni.

² N. NIELSEN, Recherches numériques sur certaines formes quadratiques, Copenhague (1931), 160. Ebben észrevettem a következő hibákat: A 9. oldalon kimaradt $6322^2=61, 51$, a 11. oldalon 7294 helyett 7274 veendő, a 9. és 10. oldalakról $6338=67, 43$, illetve $6505=77, 24$, $6505^2=76, 27$, $6605=77, 26$, $6605^2=67, 46$ a 16. oldal megfelelő helyére teendők.

Ugyancsak nem lehetséges a lánctörtekritérium alapján tűrhető jó megbecslést adni az (1) megoldhatóságának gyakoriságáról. Ilyen megbecslések T. NAGELL-től³ erednek, de más úton (l. alább) én sokkal jobbakat nyertem.⁴

Ezek szerint a kérdés a lánctörtekritériummal távolról sem tekinthető eldöntöttnek, s tényleg több kísérlet történt más irányban. Így P. EPSTEIN⁵ szerint az összes olyan d -k, amelyekre (1) megoldható, azok az $A^2 + B^2$ számok, amelyekre fennáll egy

$$(x^2 - y^2)A - 2xyB = 1$$

egyenlet, ahol A, B, x, y egészek, A, B pozitívok, s minden olyan d -hez egyetlen A, B pár tartozik (v. ö. ⁶). Ez a tétel láthatólag nem nyújt jól használható kritériumot. NAGELL⁴ megadott olyan $ax^2 + bx + c$ kifejezéseket, amelyek minden egész x mellett csupa olyan d -t adnak, amelyekre (1) megoldható (v. ö. ⁶). Ilyen úton a kérdés megoldása ugyancsak alig remélhető.

Néhány éve jelentős vizsgálatok vannak egy másik irányban, amely DIRICHLET-re⁷ nyúl vissza s kongruenciafeltételekre törekszik, a diszkrimináns törzstényezőiből alakított hatványmaradékjelekből akarva leolvasni az (1) megoldhatóságának feltételét. Nevezetes az, hogy az ilyen természetű eddigi feltételekben bizonyos összefüggések derültek ki az (1) megoldhatósága és az $R(\sqrt{D})$ test (szűkebb értelemben) abszolút osztálycsoportja között, még pedig ez utóbbiból a talált összefüggésekbe belezajtszottak a 2-, 4-, 8-cal osztható csoportinvariánsok e_2, e_4, e_8 számosságai, s maguk a vizsgálatok is ezzel a másik kérdéssel többé-kevésbé párhuzamosan haladtak. Egyébként ezek a kongruenciafeltételek kétfélék: egy részük megad olyan D -ket, ame-

³ T. NAGELL, Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, Arkiv för Mat., 23B/6 (1932), 1—5.

⁴ RÉDEI L., Néhány középértékkérdésről másodfokú számtestekben ez az Ért., 54 (1936), 45—112.

⁵ P. EPSTEIN, Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, Journ. f. d. Math., 171 (1934), 243—252.

⁶ RÉDEI L., A $t^2 - du^2 = -1$ PEIL-féle egyenletről, ez az Ért., 54 (1936), 1—42.

⁷ L. DIRICHLET, Ges. Werke, I, 219—236.

lyekre (1) megoldható (DIRICHLET-nél csak ilyenek vannak), más részük kizár bizonyos D-ket, mint amelyekre az (1) megoldhatatlan. Az utóbbiban A. SCHOLZ-é⁸ az elsőség. Ismertetem ezeknek a vizsgálatoknak főbb állomásait.

Rég ismeretes mindenekelőtt a következő:

a. Az (1) megoldható akkor, ha a D törzsszámok, amely utóbbi egyértelmű azzal, hogy $e_2=0$.

DIRICHLET⁷ tekintette a 2 vagy 3 törzsszámok szorzatából álló D-ket. Megállapításai például a $D=pq$ ($p, q \equiv 1 \pmod{4}$ alakú pozitív törzsszámok) esetben a következők: az (1) megoldható 1. ha $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, 2. ha $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right)_4 = \left(\frac{q}{p}\right)_4 = -1$. Tölem valók DIRICHLET tételeinek következő általánosításai, az $R(\sqrt{D})$ osztálycsoportjával való összefüggések megállapításával együtt:

b. Az (1) megoldható akkor, ha nincs 2-odfajú valódi D-felbontás, amely utóbbi egyértelmű azzal, hogy $e_4=0$.⁹

c. Az (1) megoldható akkor, ha van legalább egy D_1, D_2 2-odfajú valódi D-felbontás (azaz $e_4 \geq 1$) és minden ilyenre $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$, amely utóbbiból $e_8=0$ következik.¹⁰

Később SCHOLZ-tól⁸ is megjelent c-nek egy bizonyítása.

Észrevettem továbbá a következőt:⁴

d. A c az $e_4 \geq 3$ esetben nem alkalmazható (mert a $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$ feltétel 3 független D-felbontásra ellenmondó).

Kimutattam azt is,¹¹ hogy végtelen sok olyan $R(\sqrt{D})$ van, amelyre e_2, e_4, e_8 tetszés szerint előre adottak (természetesen az $e_2 \geq e_4 \geq e_8 \geq 0$ korlátozással), s így a d a c alkalmazhatóságának tényleges korlátozását jelenti.

⁸ A. SCHOLZ, Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Zeitschr., 39 (1935), 95—111.

⁹ RÉDEI L.: A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről, ez az Ért., 48 (1931), 648—680.

¹⁰ L. az I. 3 alatt idézett dolgozatot.

¹¹ RÉDEI L., Másodfokú számtestek osztálycsoportjának 2-, 4- és 8-cal osztható invariánsai, ez az Ért., 56 (1937), 848—852.

SCHOLZ⁸ megállapította, hogy a

$$D = pq \cdot \binom{p}{q} = 1, \binom{p}{q}_4 \binom{q}{p}_4 = -1$$

esetben az (1) nem megoldható, majd, miután én erről az első eredményről értesültem, ő⁸ és én¹² egyidőben találtuk s különböző utakon bebizonyítottuk a következő általánosítást:

e. Az (1) nem megoldható akkor, ha van olyan D_1, D_2 2-odfajú D-felbontás, amelyre $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$, amely utóbbiból $e_4 > e_8 (\geq 0)$ következik.

Mindezek a kongruenciafeltételek tökéletes egyszerűségűek s, amint ezt kimutattam,⁴ az eseteknek nem is egészen $\frac{1}{2}$ részét hagyják elintézetlenül (aszimptotikus értelemben!). Belőlük ugyanott jónak mondható megbecslést nyertem azoknak a D-knek gyakoriságára, amelyekre az (1) megoldható, illetve, amelyekre (1) nem megoldható; itt derült ki először, hogy közülük az előbbieket gyakoribbak.

Sajnos azonban, mint erre SCHOLZ⁸ rámutatott, ezek a kongruenciafeltételek tovább nem szaporíthatók, amennyiben (racionális) hatványmaradékjelekre szorítkozunk.

Most sikerült az I-ben bevezetett $\{ \}$ jel segítségével egy tételt találnom, amely nagymértékű általánosítása a c -nek. (Ez lehetséges azért, mert a $\{ \}$ jel különös esetekben $(-)_4$ jelbe megy át.) A c -nek eme általánosítása olyan esetekben is alkalmazható, amikor $e_4 \geq 3$ (v. ö. α). A $\{ \}$ jel kiszámítása elég könnyen végezhető, s így új eredményem jól használható. Így különösen lehetségessé válik az eddigi megbecslések finomítása, amire máskor óhajtok visszatérni.

Valójában az fog történni, hogy egyetlen tételt fogok felállítani, amely a c mondott általánosításán kívül az e -t is tartalmazza, egységes fogalmazásban. Az e felölelése a bizonyításban, ami amúgy is nagyon egyszerű, semmi külön fáradságot nem okoz. Nevezetes ez azért, mert eddig a c és e mind SCHOLZ-nál, mind nálam külön megfontolásokat kívántak.

¹² I. az I. 5 alatt idézett dolgozatot.

Egyszersmind szorosabbá fog válni az e_s -cal való összefüggés; többek közt elintézést fognak nyerni mindazok az esetek, amikor $e_s=0$. Mégpedig ugyanaz az M_4 matrix, amelyből az I V. tétel szerint meghatározható e_s , fog felvilágosításokkal szolgálni az (1) megoldhatóságára nézve; az előbbi kérdés az M_4 oszlopaiban tükröződött, az utóbbi az M_4 soraival kerül függésbe.

Mindezek után azt kell mondani, hogy megtaláltam az eddigi kongruenciafeltételek közös magvát, s kétségtelen, hogy a $\{ \}$ jel megfelelő általánosítása után az (1) megoldhatóságának kérdése teljes elintézést fog nyerni.

Még megjegyzem, hogy a felsorolt megelőző vizsgálatok csaknem kivétel nélkül olyan d -kre is ki vannak terjesztve, amelyek többszörös törzstényezőket is tartalmaznak, sőt az itt elmondottak némelyike csak úgy helytálló, ha ilyen d -ket is megengedve gondolunk. Erre nézve pontos felvilágosításul az idézett helyek szolgálnak. Ugyancsak az itt következők is általánosíthatók ebben az irányban, amire máskor fogok visszatérni.

*

Ismeretes, hogy a d -nek egy és csakis egy olyan l -nél nagyobb m osztója van, amellyel

$$mx^2 - ny^2 = 1 \quad (mn=d) \quad (2)$$

x, y egész számokban megoldható. Ezután is bármilyen m mellett legyen az n $mn=d$ által értelmezve. Minthogy az (1) a $du^2 - t^2 = 1$ alakban írható, azért ez nem egyéb, mint a (2)-nek az $m=d$ esete, s így az (1) megoldható akkor és csak akkor, ha a (2)-ben megengedhető m egyenlő d -vel. Ezért azt az m -et a d l -nél nagyobb osztói közül, amelyre (2) megoldható, elnevezem a d (egyszersmind a D) PELL-féle osztójának. Akkor az eredeti kérdés helyett vehetjük a PELL-féle osztó meghatározásának kérdését, amely amannál nyilvánvalóan élesebb.

Ha m a D PELL-féle osztója, akkor m, n 2-odfajú D-felbontás. (Ezt természetesen úgy gondolom, hogy 2 D mellett a szükség szerint m vagy n helyébe $4m$, illetve $4n$ veendő, úgy hogy m, n -ből D-felbontás álljon elő. Később is hasonló pontatlanság ilyen értelemben helyreigazítva gondolandó.) Világos ez

a (2)-ből mindenekelőtt páratlan D-re, s ugyancsak könnyen belátható az állítás páros D-re is.

Észrevevesszük az I I. tétel alapján, hogy tetszésszerinti D_1, D_2 valódi D-felbontás mellett a $\{D_1, D_2, m\}$ jel ($m \mid d; m > 1$) akkor és csak akkor létezik, ha D_1, D_2 és m, n 2-odfajú D-felbontások.

A bebizonyítandó tétel a következő:

Tétel. A D PELL-féle osztóját m -mel jelölve, minden D_1, D_2 2-odfajú D-felbontásra fennáll

$$\{D_1, D_2, m\} = 1. \tag{3}$$

Ebből az (1) megoldhatóságára, illetve a D PELL-féle osztójára nézve a következő feltételek állnak elő:

1) Ha a (3) a d -nek egyetlen m valódi osztójára sem teljesül, akkor d a D PELL-féle osztója, azaz az (1) megoldható.

2) Ha a (3) $m=d$ mellett nem teljesül, akkor a D PELL-féle osztója kisebb d -nél, azaz (1) nem megoldható,

3) Ha a d -nek csak egyetlen olyan (1)-nél nagyobb m osztója van, amelyre a (3) teljesül, akkor ez az m a D PELL-féle osztója.

Természetesen a 3) az 1)-et magában foglalja.

Még a bizonyítás előtt rá akarok mutatni a fentebb említett összefüggésekre. Az I (38) most a következő alakban vehető fel:

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{D_1, E_1, D_1\} & \{D_2, E_2, D_1\} & \cdots & \{D_{e_4}, E_{e_4}, D_1\} \\ \{D_1, E_1, D_2\} \\ \vdots \\ \{D_1, E_1, D_{e_4}\} \\ \{D_1, E_1, D\}^* & & & \{D_{e_4}, E_{e_4}, D\} \end{pmatrix},$$

ahol $A_i = D_i, E_i$ ($i=1, 2, \dots, e_4$) a 2-odfajú D-felbontások csoportjának egy független bázisa. Hogy az M_4 -et helyesen adtuk meg, az abból látszik, hogy az M_4 minden eleme létezik és a $D_1, D_2, \dots, D_{e_4}, D$ számok 2-függetlenek. Legyen

$$v_{D_i} \quad (i=1, 2, \dots, e_4 + 1)$$

és

$$v_{A_k} \quad (k=1, 2, \dots, e_4)$$

az M_k i -dik sor-, illetve k -dik oszlopvektora, ahol $D_{e_i+1} = D$ értendő. Ha m diszkriminánsszám, $m \mid D$ és $m \equiv 1 \pmod{4}$ $D = D_a D_b \dots D_h$, akkor legyen $v_m = v_{D_a} v_{D_b} \dots v_{D_h}$; világos, hogy v_m pontosan azokra az m -ekre van értelmezve, amelyekre m, n 2-odfajú D -felbontás, kizárva az $m=1$ esetet. Ha pedig Δ 2-odfajú D -felbontás, s így $\Delta = \Delta_a \Delta_b \dots \Delta_h$, akkor legyen $v_\Delta = v_{\Delta_a} v_{\Delta_b} \dots v_{\Delta_h}$; különösen $\Delta=1, D$ mellett $v_\Delta=1$, ahol az 1 a csupa 1-ből álló vektort jelöli. Akkor az I III. és V. tételek és a fenti tétel szerint fennáll a következő:

f. Egy Δ 2-odfajú D -felbontás akkor és csak akkor 3-odfajú, ha a v_Δ (oszlop-) vektorszorzat $= 1$; az ilyen Δ -k számossága 2^{e_s} . A (3) akkor és csak akkor áll fenn, ha a v_m (sor-) vektorszorzat $= 1$; az ilyen m -ek számossága $2^{e_s+1} - 1$. Következésképpen a tétel 3) esete szerint akkor és csak akkor válik a D PELL-féle osztója a (3) feltétel által adottá, ha $e_s=0$, amikor is 1) és 2) szerint az (1) megoldhatóságának kérdése feleletet nyer. Ha pedig $e_s \geq 1$, akkor az 1) alkalmazhatatlan (a 2) esetleg alkalmazható).

A továbbiakhoz feljegyzem, hogy

$$\{E_1, D_1, D_1\} = \{D_1, E_1, D_1\} = \{D_1, D_1, E_1\} = \left(\frac{E_1}{D_1} \right)_4, \quad (4)$$

ahol D_1, E_1 bármilyen 2-odfajú D -felbontás, de a $2 \mid D_1$ esetben az itteni harmadik $\{ \}$ jel törlendő. Ezeket $2 \nmid D$ mellett láttuk I 23.-ban, s a számítás a $2 \mid D$ esetben is könnyen elvégezhető.

E szerint s az I III. tétel miatt (az M_k utolsó sora) v_D nem egyéb, mint a $\left(\frac{D_i}{E_i} \right)_4 \left(\frac{E_i}{D_i} \right)_4$ ($i=1, 2, \dots, e_i$) elemek összessége. A tételbeli 2) tehát pontosan azt mondja, hogy ha van egy D_i, E_i , amelyre az itteni $(-)_4(-)_4$ szorzat $= -1$, akkor az (1) nem megoldható. Minthogy pedig a 2-odfajú D -felbontások csoportjának bármely az 1, D -től különböző eleme tagja egy alkalmasan választott független bázisnak, azért látjuk, hogy ez a 2) azonos e -vel.

Egyszersmind látjuk, hogy az 1) a következő kényelmesebb alakban mondható ki:

c. Az (1) megoldható akkor, ha van 2-odfajú D -felbontás (azaz $e_i > 0$) s ezeknek egy D_i, E_i ($i=1, 2, \dots, e_i$) független

rendszerére $\left(\frac{D_i}{E_i}\right)_4 \left(\frac{E_i}{D_i}\right)_4 = 1$ (amikor minden 2-odfajú D-felbontásra hasonló teljesül) és az M_4 matrix első e_4 sora multiplikatív értelemben független (amely utóbbi pontosan azt jelenti, hogy $e_8=0$).

Azt, hogy e' tartalmazza e -t, legkönnyebben az eredeti 1) alapján mutathatjuk ki. Ha ugyanis minden D_1, D_2 2-odfajú valódi D-felbontásra $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$, akkor (4) szerint a (3) egyetlen $m=D_1$ (vagy $m=D_2$) értékre sem teljesül, s így érvényre jut az 1).

Az $e_4=1$ esetben e' nem általánosabb e -nél, különösen tehát a $D=pq$ esetre a tétel semmi újat nem ad. Ellenben $e_4=2$ mellett e' már több esetet ölel fel, mint e (az $e_4 \geq 3$ esetben természetesen hasonló igaz, tekintettel d -re). Legyen ugyanis $D = p_1 p_2 p_3$, ahol p_1, p_2, p_3 $4l+1$ alakú pozitív törzsszámok, egymásnak páronként négyzetes maradékai. Akkor $p_1, p_2 p_3; p_2, p_1 p_3$ 2-odfajú D-felbontások s így $e_4=2$. Ha az $(ik) = \left(\frac{p_i}{p_k}\right)_4$ ($i, k=1, 2, 3; i \neq k$), $a = \{p_1, p_2, p_3\}$ jelölést használjuk, akkor a e' alatti feltételek a következők:

$$(12)(21) = (13)(31) = (23)(32);$$

a

$$\begin{pmatrix} (21)(31) & (21)a \\ (12)a & (12)(32) \end{pmatrix}$$

matrix multiplikatív rangja 2. E szerint a jelen D mellett a e -n túlmenően a következőt nyerjük: Az (1) megoldható, ha $(ik)(ki) = 1$ ($1 \leq i < k \leq 3$) és a előjele ellenkezik (12)+(13)+(23) előjelével. Ilyen például $D = 5 \cdot 29 \cdot 181$, amelyre fennáll $\left(\frac{5}{29}\right)_4 = \left(\frac{29}{5}\right)_4 = -1$, $\{5, 29, 181\} = -1$, s a hiányzó $(-)_4$ jelek értéke 1. Tényleg $162^2 - 5 \cdot 29 \cdot 181 = -1$.

Bizonyítás. Legyen m a D PELL-féle osztója s legyen D_1, D_2 egy tetszésszerű 2-odfajú D-felbontás. Legyen

$$w = \{D_1, D_2, m\}.$$

Kimutatandó, hogy $w=1$. Feltehető, hogy D_1, D_2 valódi D-felbontás, mert különben máris $w=1$. Feltehető az is, hogy D_1 páratlan,

mert különben az I II. tétel alapján a D_1, D_2 felcserélésével célt érünk.

Az egyöntetűség kedvéért legyen $M = m(2 \nmid m)$, illetve $M = 4m(2 \mid m)$. Akkor $w = \{D_1, D_2, M\}$. Az I IV. tétel szerint $w = \{D_1, M, D_2\}$ ¹³ s így az I II. tétel szerint

$$w = \{M, D_1, D_2\}. \quad (5)$$

Meghatározhatók az r, s, t, u pozitív egész számok úgy, hogy

$$\begin{aligned} d &= rstu, \\ M &\equiv rs, & (rs > 1) \\ D_1 &= rt, & (rt > 1, 2 \nmid rt) \\ D_2 &\equiv su, & (su > 1) \end{aligned}$$

ahol akkor r, s, t, u páronként relatív prímek és négyzetmentesek. Az r, s, t, u mindig az $R(\sqrt{rs})$ testbeli olyan egész ideált fognak jelenteni, amelyeknek normája r, s, t , illetve u . Közülük r, s meghatározottak és t, u is léteznek, mert $M, \frac{D}{M}$ 2-odfajú D-felbontás, de ezek többféleképpen választhatók.

Tekintem a (2) egy bizonyos megoldását. Nyilvánvalóan

$$2 \nmid x.$$

A szerint, amint rs páros vagy páratlan, legyen

$$\beta = 1 + x\sqrt{rs}, \quad (2 \nmid rs)$$

illetve

$$\beta = \frac{1}{2}(1 + x\sqrt{rs}). \quad (2 \mid rs)$$

Akkor β racionális osztótól mentes egész szám és (2) miatt

$$\beta = b^{\circ}tu,$$

¹³ Ezt ott csupán a $2 \nmid D$ esetre bizonyítottuk be. Ha $2 \mid D$, amikor is $2 \mid D_2$, de $2 \nmid M$, akkor a bizonyítás hasonlóan elvégezhető, ha a négyzetes reciprocitás tétel «második kiegészítését» (I. НЕККЕ, Vorl. ü. d. Theorie d. alg. Zahlen (1923), Satz 175) is figyelembe vesszük. Ha még $2 \mid M$ is fennáll, akkor az előbbi miatt fennáll $\{D_1, D_2, DM\} = \{D_1, DM, D_2\}$. Minthogy (4) s az I II. és III. tételek miatt $\{D_1, D_2, D\} = \{D_1, D, D_2\}$, azért ismét az I III. tétel szerint a fenti összefüggés most is érvényes.

ahol b egész ideál $R(\sqrt{rs})$ -ben, s a t, u ezzel határozott jelentést nyertek.

Legyen a olyan pozitív normájú páratlan egész szám $R(\sqrt{rs})$ -ben, amelyre $a \equiv 1 \pmod{4}$, $a \equiv \bar{1} \pmod{4}$, $a\beta$ racionális osztótól mentes.

Ilyen a létezését így látjuk be. Az (5) létezése miatt az I. tétel és I (2') alapján van egy olyan a_1 szám az $R(\sqrt{rs})$ -ben, amelyre $N_{R(\sqrt{rs})} a_1 \equiv \bar{1} \pmod{4}$, $a_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $a_1 \equiv \bar{1} \pmod{4}$, ahol $\bar{1}$ is egy olyan egész ideál $R(\sqrt{rs})$ -ben, amelynek normája t . Akkor van két t_1, t_2 egész ideál $R(\sqrt{rs})$ -ben úgy, hogy $t = t_1 t_2$, $\bar{t} = \bar{t}_1 \bar{t}_2$. Továbbá fennáll $a_1 = a_1^2 \bar{t}_1$, ahol a_1 ideál az $R(\sqrt{rs})$ -ben. Választunk egy c racionális osztótól mentes egész ideált az $R(\sqrt{rs})$ -ben úgy, hogy c prim legyen $2b'rst'u'$ -höz és $c = \gamma a_1 t_2^{-1}$, ahol γ egy szám az $R(\sqrt{rs})$ -ből. Nyilvánvaló, hogy $a = a_1 \gamma^2 t_2^{-1}$ a célnak megfelel, ahol $t_2 = N_{R(\sqrt{rs})} t_2$, mert $a = c^2 \bar{t}$ és $a\beta = (cbt)^2 ru$.

Akkor (5) miatt az I. tétel szerint

$$w = \{rs, rt, su\} = \left(\frac{a}{\bar{1}u'} \right),$$

továbbá

$$\begin{aligned} a &= ru + b\sqrt{rs}, \\ r^2 u^2 - rsb^2 &= rtc^2, \quad (2 \nmid a, 2 \mid b, 2 \nmid c) \end{aligned}$$

ahol a, b, c páronként relativ prim egész számok, és ha még a $2 \nmid rs$, $2 \nmid rs$ eseteknek megfelelően $a\beta$ -t, illetve $a \cdot 2\beta$ -t az $re + f\sqrt{rs}$ alakban írjuk, akkor a (2) figyelembevételével

$$r^2 e^2 - rsf^2 = -rug^2,$$

ahol e, f, g páronként relativ prim egész számok, s különösen

$$e = a + sbx. \quad (2 \nmid e)$$

Érvényes

$$\left(\frac{a}{\bar{1}} \right) = \left(\frac{ra + b\sqrt{rs}}{\bar{1}} \right) = \left(\frac{ra}{\bar{1}} \right) = \left(\frac{ra}{s} \right),$$

ami akkor is helyes, ha $2 \mid s$, mert akkor $a \equiv 1 \pmod{4}$ miatt $4 \nmid b$.

Továbbá u, β miatt $u' \mid \beta'$, $u' \mid 1 - x\sqrt{rs}$, s így

$$\left(\frac{a}{u'} \right) = \left(\frac{ra + b\sqrt{rs}}{u'} \right) = \left(\frac{ra + rsbx}{u'} \right) = \left(\frac{re}{u} \right),$$

ami akkor is helyes, ha $2 \mid u$, mert ha 1 az u' páros törzs-ideáltényezője az $R(\sqrt{rs})$ -ben, akkor $2 \nmid rs$ miatt $1^3 \mid 1 - x\sqrt{rs}$, továbbá $1 = \left(\frac{D_1}{2}\right) = \left(\frac{rt}{2}\right)$ miatt most is $4 \mid b$.

Ezek szerint

$$w = \left(\frac{ra}{s}\right) \left(\frac{re}{u}\right) = \left(\frac{r}{su}\right) \left(\frac{a}{s}\right) \left(\frac{e}{u}\right).$$

Mint hogy $1 = \left(\frac{D_2}{r}\right) = \left(\frac{su}{r}\right)$, azért $\left(\frac{r}{su}\right) = 1$. Továbbá

$$re^2 - sf^2 = -ug^2$$

és $2 \nmid e$ miatt

$$1 = \left(\frac{su}{e}\right) = \left(\frac{e}{su}\right) = \left(\frac{e}{s}\right) \left(\frac{e}{u}\right) = \left(\frac{a+sbx}{s}\right) \left(\frac{e}{u}\right) = \left(\frac{a}{s}\right) \left(\frac{e}{u}\right),$$

ami akkor is helyes, ha $2 \mid su$, mert akkor, mint már ezt említettük, $4 \mid b$, s így $a \equiv 1 \pmod{4}$ miatt egyben $a \equiv 1 \pmod{4}$, $e \equiv 1 \pmod{4}$. Ezek szerint $w = 1$, amivel a bizonyítás megtörtént.

EIN NEUES ZAHLENTHEORETISCHES SYMBOL
MIT ANWENDUNG AUF DIE THEORIE
DER QUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER. II.

Von L. RÉDEI in Budapest.

Im ersten Teil (dieser Ber., 56 (1937), 807—845) habe ich die Anzahl e_8 der durch 8 teilbaren Invarianten der (im engeren Sinne) absoluten Klassengruppe eines quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ von der beliebigen Diskriminante D mit Hilfe von dem dort eingeführten Zeichen $\{ \}$ bestimmt. Dasselbe Zeichen entscheidet, wenn auch nicht immer, über die Norm N_ε der Grundeinheit in $R(\sqrt{D})$; hierbei sei D eine «kritische» Diskriminante, d. h. eine solche positive, die keine positive Primzahl der Gestalt $4l+3$ enthält. Bekanntlich hat D einen einzigen quadratfreien positiven Teiler $m (> 1)$ so, dass

$$mx^2 - ny^2 = 1 \tag{1}$$

in ganz rationalen Zahlen x, y lösbar ist, wo $mn=d$ und $d = D (2 \nmid D)$, bzw. $d = \frac{1}{4} D (2 \mid D)$ ist. Es genügt festzustellen, ob dieses $m =$ oder $< d$ ist, denn dementsprechend ist $N_\varepsilon = -1$ oder 1 . Es gilt der Satz: Für das in (1) zulässige m besteht

$$\{D_1, D_2, m\} = 1$$

mit jeder D -Zerfällung D_1, D_2 von der zweiten Art. Dieser Satz enthält all die bisherigen Kongruenzbedingungen von DIRICHLET—SCHOLZ—RÉDEI für das Vorzeichen von N_ε (diese Bedingungen sind in vierten Potenzrestsymbolen $(\frac{\cdot}{\cdot})_4$ ausge-

drückt, die ein Spezialfall von $\{ \}$ sind) und ist eine Verallgemeinerung von ihnen. Es ist dadurch $N\varepsilon$ unter anderem bekannt geworden, wenn $e_g = 0$, was bisher nicht der Fall war. Der Beweis geht kaum über zwei Seiten, wo doch die bisherigen Betrachtungen von weniger Allgemeinheit ziemlich weitläufig waren. Es ist zu hoffen, dass nach einer Verallgemeinerung des Zeichens $\{ \}$ alle Fälle zu erledigen werden.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Febr. 1938.)

BERNOULLI DÁNIEL ÉS CLAIRAUT LEVELEI TELEKI JÓZSEF GRÓFHOZ.

JELITAI JÓZSEF-től.

Az alább közölt három levelet a gyömrői Teleki-levéltárból másoltam. Akadémiánk első elnöke nagyatyjának szólnak, a 200 évvel ezelőtt született TELEKI JÓZSEF grófnak, aki ifjú korában BERNOULLI DÁNIELTől és CLAIRAUTTól tanult matematikát. A Matematikai és Fizikai Lapokban kivonatossan közölt utinaplóiban részletesen beszámol ezekről a tanulmányairól. Majd egyévi bázeli tartózkodása után már Németalföldről több levelet váltott BERNOULLI DÁNIELEL. Utinaplója szerint Leidenbe pl. két levele érkezett tőle. Ez a levélváltás folytatódott Párizsból is, hazulról is. Mindebből, sajnos, eddig csak az alábbi két levél került elő. Ezeket BERNOULLI DÁNIEL 1763- és 1766-ban írja Bázélból, az elsőt Szirákra (Nógrád-m.), a másodikat Nagyszébenbe. Az első levelet a címzett mostoha nagybátyja, a későbbi kancellár és könyvtáralapító: TELEKI SÁMUEL gróf hozta magával Bázélból, ahol majd négyéves külföldi tanulmányútjáról hazatérőben 1763. máj. 7 és 24. közt megpihent. A levélben BERNOULLI DÁNIEL szerencsét kíván TELEKI JÓZSEF grófnak első gyermeke (Johanna) születéséhez. E levéllel d'ALEMBERT egyes munkáit is megkapta JÓZSEF gróf, aki a himlőoltással kapcsolatos híres vitában d'ALEMBERT támadásai ellen akarta megvédeni szeretett mesterét: BERNOULLI DÁNIELT. Úgy látszik, LA CONDAMINE is résztvevő volt e védőirat szerkesztésében, amelynek TELEKI JÓZSEFTől származó kézírata az ú. n. gothai gyűjteményben van. Utóbbit 1936-ban a bázeli egyetemi könyvtár szerezte meg.

Az itt közölt első levélben egy matematikai feladat is előfor-

dul: $y = x^{\frac{1}{2}}$ szélső értékének meghatározása. A megoldás a $\log x = I$ egyenletre vezet. Itt a «log» jel az akkori «hiperbolikus» logaritmust jelenti, amelyet ma «természetes»-nek hívunk. Mind a két elnevezés MERCATOR-tól származik 1668-ból. Ennek a logaritmusrendszernek alapja annak a végtelen sornak az összege, amely éppen BERNOULLI DÁNIEL-nek 1728. jan. 30-án GOLDBACH-hoz írt levelében szerepel először. Mai «e» jele EULERTől való 1728-ból. Ezt a jelölést F. CAJORI szerint (A history of mathematical notations, Vol. II. 1929. p. 13.) BERNOULLI DÁNIEL már 1760-ban használta. Itt a levélben nem használja. Számértékének a tizedespont utáni hetedik jegyét is tévesen írja föl; a helyes érték: 8.

Ezek után lássuk az első levelet:

A Monsieur Monsieur Joseph Comte Teleky de Szel: à Szirák par Vienne, Aszod.

Bale ce 13. may 1763.

Monsieur

Je ne laisserai pas partir Mons^r. le Comte SAMUEL sans lui remettre une lettre pour Vous, qui servira de reponse à celle que Vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 30.^e mars. Je Vous fais d'abord mille complimens, mon cher et Illustre Comte, de la naissance de Mad^{elle} TELEKY Votre fille. Vous redoutez les devoirs de Pere et moi j'ai l'honneur de Vous assurer que Vous remplirez tres parfaitement sans Vous en apercevoir; J'ai toujours admiré et adoré la Providence, qui fait faire aux ames bien nées tout ce qui tend au mieux; plus les peines, qu'Elle leur impose, sont rudes, plus on sent de plaisir à s'y soumettre. Si vous ne reconnoissez pas cette verité par Vous meme, chaque instant de la part de Madame la Comtesse Votre chere Epouse doit Vous en avoir convaincu: sans doute que cette moitié de l'humanité, que l'autre distingue par le titre de beau sexe, est la moitié la plus chérie de la Providence, à l'égard de cette verité. Tous vos soins Paternels, quelques parfaits qu'ils soyent par eux memes, comparez les avec ceux de Madame la Comtesse; leur restera-t-il le moindre prix? mais aussy, si vous pouviez voir la joye de son coeur, quelque grande que soit la Votre, l'autre la surpassera infiniment. Dieu conserve le Pere,

la mere et toute votre chere Posterité et la comble de ses plus precieuses benedictions.

Mons^r de la Condamine est parti pour l'Angleterre, où il fera un sejour de quelques mois. C'est autant de delay de l'apologie qui doit paroître sous Votre illustre nom: Monsieur Votre Oncle apportera avec lui les opuscles de Dalembert, que vous pouvez lire à loisir. Cette affaire ne doit pas Vous donner le moindre embarras; j'aurai soin que rien ne se passe qui soit indigne du nom de l'Auteur.

J'ai encor des complimens à vous faire sur la nouvelle dignité de Chambellan de la Reine, que Sa Majesté Imperiale vient de Vous accorder: les complimens sont d'autant plus sinceres, que Vous ne fonctionerez que rarement.

Je pars demain pour faire un petit tour dans la Suisse interieure: les affaires qui me restent à regler ne me permettent pas d'etre plus long. La solution du premier probleme, dont vous dites n'avoir pas pu venir à bout, ne depend que de la differentiation des quantités exponentielles. Voici cette solution:

Il s'agit de faire un *maximum* du nombre $a^{\frac{1}{x}}$: il faut donc que la differentielle de cette quantité soit = 0; Supposez $x^{\frac{1}{x}} = y$ et vous aurez $\frac{1}{x} \log. x = \log. y$: En differentiant cette equation on obtient $-\frac{dx}{xx} \log. x + \frac{dx}{xx} = \frac{dy}{y} = \frac{dy}{a^{\frac{1}{x}}}$: Donc dy (la differentielle de la quantité proposée $a^{\frac{1}{x}}$) = $a^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{dx}{xx} \log. x + \frac{dx}{xx} \right) = 0$, ce qui donne, en divisant par $\frac{a^{\frac{1}{x}} dx}{xx}$, cette equation $-\log. x + 1 = 0$ ou bien $\log. x = 1$: vous vous souviendrez sans doute qu'il s'agit ici des logarithmes qu'on appelle hyperboliques; La conclusion est donc, que le logarithme hyperbolique du nombre cherché doit etre egal à l'unité: dans l'analyse on demontre que ce nombre est egal à cette suite $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$ et comme un nombre infini de problemes conduisent à la meme suite, on l'a calcule fort exactement; elle est en fraction decimale 2,7182817, qui fait par consequent le nombre cherché.

J'ai l'honneur d'être avec un respectueux attachement
Monsieur Votre tres humble et tres-Obéissant serviteur

DANIEL BERNOULLI.

Mon frere m'a chargé de Vous presenter ses respects, faites agréer, je vous prie, les miens à Madame la Comtesse, Votre digne Epouse.

Második levelében már nem vet föl BERNOULLI DÁNIEL matematikai problémákat tanítványának, mert a megoldásukkal járó erőfeszítés árthatna közben gyöngére fordult egészségének. Betegsége leírt tüneteit képzeldésnek minősíti. A maga esetével igyekszik megnyugtatni. Úgy 28 éves korában ő is állandóan nyugtalan volt és kevés álmú, lefogyott, szédült. Nagy levertsége majd két évig tartott. Maga sem tudja már, mi állította talpra; mindenestre pörösködés, bánkódás, ülő életmód, megerőltető szellemi munka helyett séta, meleg ledörzsölés, tejszín, könnyű fizikai kísérletezés, kerti munka ajánlatos. Igen dicséri KIS GERGELYT, a marosvásárhelyi kollégium későbbi tanárát, aki akkor a gróf ajánlásával és támogatásával tanult Bázelen.

A Monsieur Monsieur Joseph Comte Teleky &c. A Hermanstadt.

Monsieur

Si la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire m'a fait d'abord un tres sensible plaisir par les assurances, qu'elle renferme de la continuation de cette bienveillance et amitié dont vous m'avez honoré des notre premiere connoissance, cette meme lettre m'a fort allarmé et atristé par les mauvais etat de santé, dont vous vous plaignez. J'espere cependant mon cher Comte, que vos frayeurs sont mal fondées; je ne vois dans la description que vous me faites de vos maux, que des simptoms hipocondriaques; Si votre medecin avoit remarqué les moindres indices de phthisie, il ne vous auroit pas fait saigner; mais sans entrer la dessus dans aucun raisonnement, je citerai pour vous tranquiliser mon propre exemple; j'étois de votre age quand je fus attaqué des memes maux; j'avois des inquietudes continuelles, peu de sommeil, je tombois de chair et je souffrois on ne peut pas plus, de terribles vertiges;

les accès en étoient quelque fois brusques et assommans, comme si j'avois été frappé d'un coup de massue, j'étois malade de corps et d'esprit, craignant tantôt la phtisie, tantôt l'hidropisie, tantôt un coup d'apoplexie &c. C'est ainsi que j'ai passé près de deux ans dans un grand accablement, quand je commençois à me remettre sans pouvoir dire à quel remède je pouvois être redevable de mon retablisement. Je me suis fait saigner quelquesfois, mais toujours sans succès; je me souviens que les hémétiques m'ont soulagé dans mes vertiges causés par les nerfs de l'estomac irrités; je crois que la promenade, les frictions avec des linges chauds, l'usage du petit lait vous feront autant de bien, que les procès, le chagrin, la vie sédentaire et une trop forte application d'esprit pourroient vous nuire; je n'ai garde de vous proposer de problèmes de mathématique: les problèmes aisés ne vous amuseroient pas et ils vous nuiroient, s'ils demandoient une longue méditation; tachez plutôt de vous amuser par des expériences physiques avec quelque petite pompe pneumatique, une petite machine électrique, avec des aimans tant naturels qu'artificiels; des baromètres, thermomètres: tachez de prendre du goût pour toutes les connoissances d'agriculture; vous verrez quel est l'avantage et la supériorité d'un esprit mathématique; vos succès vous amuseront en même tems que vous vous rendrez utile à la société.

Je vous suis bien obligé, Monsieur, de la bonté que vous avez eue, de me procurer la connoissance de M^r GREGOIRE KISS; je l'ai trouvé fort prévenant tant du côté des mœurs que des connoissances; vous ne sauriez mieux choisir pour l'éducation de M^r votre fils; je vous fais mes complimens sur les trois aimables rejettons de l'illustre Famille TELEKY; avec de tels trésors du ciel pouvez vous vous laisser abattre par des petits maux passagers; à vos plaintes je ne reconnois plus ce cher Comte autrefois si philosophe et si chrétien; hâtez vous de vous rendre à vous même, à Mad^e la Comtesse et à vos chers enfans. Mon frère est fort sensible à l'honneur de votre souvenir et m'a chargé de vous présenter ses respects; Oserois-je vous prier de présenter les miens à M^r le Comte SAMUEL, quand vous le verrez ou que vous lui écrirez; je ne saurois vous exprimer, combien la mémoire de cet illustre et respectable comte m'est chère et je me flatte d'avoir toujours

quelque part à l'honneur de sa bienveillance. Je ne m'en flatte pas moins à votre egard et je vous supplie d'être bien persuadé, que c'est avec un tres respectueux devouement et le zele le plus tendre, que j'ai l'honneur d'être Monsieur votre tres humble et tres obéissant serviteur

Bale ce ce 20 aout 1766.

DANIEL BERNOULLI.

CLAIRAUT is dicsérettel emlékezik meg alább közölt levelében TELEKI JÓZSEF gróf készülő védőiratáról. Értesíti, hogy HARRISON inga-óráinak tanulmányozására CAMUS és BERTHOUD Angliába utaztak. CLAIRAUT akkor a Hold mozgásával foglalkozott; idevágó híres munkái: *Théorie de la lune* (1752) és *Mémoire sur le problème des trois corps* (1759).

*Monsieur le Comte Joseph Teleki Chambellan de Sa M. [ajesté]
I. [imperiale] a Hermanstadt Transilvanie par Vienne*

Monsieur

Il ne faut aucun calcul pour trouver le tems où vos lettres arrivent à propos. Elles me font toujours un plaisir constant et très considerable. Vous suivrés donc sur ce point votre inclination. Et vous sérés sur que je serai toujours infinement sensible aux marques de souvenir que vous me donnerés. M^r Votre Oncle pourra vous dire combien nous avons parlé souvent de Vous ensemble, Ainsi qu'avec la logarithmiere qui se ressouvient toujours de vous avec le plus grand plaisir du monde. Nous vous faisons l'une et l'autre mille complimens sur Votre nouvelle dignité de Pere, Quant on a d'aussi bons moules que ceux de votre famille, on ne sauront trop les employer. Voila déjà 3 comtes TELEKI que nous voyons, tous d'un caracter charmant, Faites nous en donc bien vite d'Autres, En envoyés nous les. Puisse-je en voir plusieurs generations!

Je suis charmé de vous voir continuer votre gout pour le Calcul et vous exhorte fort à le cultiver dans vos momens de loisir. M^r de la Condamine me dit que vous vous occupés a defendre Votre Ami M^r BERNOULLI, c'est un bon usage à faire de votre tems, et la besogne me paroît d'ailleurs avantageuse. Car son adversaire

a donné bien prise contre lui. Son memoire sur les probabilités me revolte. On pretend qu'un nommé Harrisson a fait a Londres la decouverte d'une pendule singuliere qui va à merveilles en Mer, et qui par consequent peutetre d'une grande utilité pour la mesure des Longitudes, On envoye de Paris M^r CAMES avec un nommé BERTHOD horloger pour examiner cette machine. Pour moi j'attaque toujours le même probleme avec la Lune, et j'avais publier [publié] des Tables de son mouvement qui semblent assés juste [s] pour approcher aussi considerablement du but. Lorsqu'elles paroissent j'aurais l'honneur de vous les envoyer En attendant j'ai l'honneur de vous assurer du sincère et respectueux attachement avec le quel j'ai l'honneur d'être

27 Aout 1763

Monsieur

Votre très humble et très obeissant
serviteur CLAIRAUT

Je vous fais mes sinceres complimentens sur votre nouvelle dignité et vous souhaite toutes les Clefs de ce monde ci y et de l'autre, pourvu que vous ne preniér [preniez] pas possessori de ces dernieres de longtems d'ici.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1938. február 21-én tartott üléséből.)

BRIEFE VON DANIEL BERNOULLI UND CLAIRAUT
AN GRAF JOSEF TELEKI.

Von JOSEF JELITAI.

Graf JOSEF TELEKI (1738—96) erhielt während seiner Studien in Basel neun Monate Privatunterricht von DANIEL BERNOULLI über Mathematik. In Paris löste er von CLAIRAUT regelmässig gestellte Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Er wechselte seit 1760 mit seinen Lehrern mehrere Briefe. Die oben wiedergegebenen Briefe befinden sich im Teleki-Archiv zu Gyömrő in Ungarn.

Budapest, 6. 1. 1938.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Feber 1938.)

EGY ERŐ ÁLTAL ELŐIDÉZHETŐ LEGNAGYOBB RUGALMAS ELMOZDULÁSRÓL.

BARTA JÓZSEF-től.

E dolgozatban tárgyalt tételek tartalma kézenfekvő ugyan, de a tételek kijelentése és bebizonyítása a szakirodalomban tudomásunk szerint ezideig hiányzott. A tételek olyan alakzatra vonatkoznak, amely egy vagy több rugalmas szilárd testből áll. Feltételezzük, hogy az alakzat elemeinek a viszonylagos elmozdulását, valamint az egész alakzatnak a maga egészében való elmozdulását súrlódás nélküli kényszerfeltételek (sima csúszólap, ideális csukló, tökéletes befogás stb.) teszik lehetetlenné.

Első tétel: «Ha az erő nagysága adott, de az iránya és támadáspontja esetleges, akkor az erő által előidézhető egyáltalában legnagyobb elmozdulás az erő támadáspontjában keletkezik, s annak az iránya megegyezik az erő irányával.»

Második tétel: «Ha az erő nagysága és iránya adott, de a támadáspontja esetleges, akkor az erő által előidézhető, az erő iránya szerinti egyáltalában legnagyobb elmozdulásvetület az erő támadáspontjában keletkezik.»

Harmadik tétel: «Ha az erő nagysága és támadáspontja adott, de az iránya esetleges, akkor az erő által az erő támadáspontjában előidézhető legnagyobb elmozdulás iránya megegyezik az erő irányával.»

A tételek bebizonyítását a műszaki alkalmazásoknál előforduló alakzatok (rudak, rácsostartók, lemezek stb.) esetére végezzük el; ezeknél az alakzat valamely pontjában támadó koncentrált erő az alakzat többi pontjaiban ugyanolyan nagyságrendű elmozdulást idéz elő, mint a saját támadáspontjában. Általános alakú rugalmas szilárd test esetében, ahol a matematikai rugalmasságtan szerint a koncentrált erő a saját támadás-

pontjában végtelen nagy elmozdulást idéz elő, a tételek érvényesége magától értetődik.

Egyszerűség kedvéért a bizonyításnál feltételezhetjük, hogy egységnyi erőről van szó. A rugalmas elmozdulás hatásfüggvényét jelöljük a műszaki rugalmasságtan szokása szerint δ_{ab} -vel. Eszerint δ_{ab} jelenti az a pont elmozdulásának az a irány szerinti vetületét, amelyet a b pontban támadó β irányú egységnyi B erő idéz elő. Az alakzatra vonatkozó feltevéseink mellett felírhatjuk a

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (1)$$

egyenletet, amely a MAXWELL-féle felcserélhetőségi tételt fejezi ki.

Az a pont legyen olyan pont, amelyben egyáltalában legnagyobb elmozdulás keletkezik, s ennek az irányát jelöljük α -val. Az első tétel bebizonyítása érdekében tegyük fel, hogy ezt az elmozdulást nem a pontban támadó erő, hanem a ponttól különböző b pontban támadó B erő, vagy nem α irányú, hanem α -tól különböző β irányú B erő idézi elő. Így ennek az egyáltalában legnagyobb elmozdulásnak a nagyságát δ_{ab} -vel jelölhetjük. Feltevéseink szerint

$$\delta_{aa} < \delta_{ab}. \quad (2)$$

Az (1)-ből kifolyólag δ_{ba} is egyáltalában legnagyobb elmozdulás. Ezért

$$\delta_{bb} \leq \delta_{ba}. \quad (3)$$

Kimutatjuk, hogy a (2) és (3) kijelentések mindegyike nem állhat fenn. E célból vegyük szemügyre a

$$(\delta_{aa}A + \delta_{ab}B)A + (\delta_{ba}A + \delta_{bb}B)B$$

kifejezést, amely tetszőleges A, B erők esetében az alakváltozási energia kétszeres értékét adja meg. Az energia értéke pozitív lévén, a kifejezés mint A és B homogén quadratikusan függvénye definit pozitív. Tehát a

$$\begin{array}{cc} \delta_{aa} & \delta_{ab} \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} \end{array}$$

elemekből alkotott determináns

$$\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}\delta_{ba} > 0 \quad (4)$$

és ennek a főminorai

$$\delta_{aa} > 0, \delta_{bb} > 0.$$

A (2) és (3) összeszorzásából

$$\delta_{aa}\delta_{bb} < \delta_{ab}\delta_{ba}$$

azaz

$$\delta_{aa}\delta_{bb} - \delta_{ab}\delta_{ba} < 0$$

egyenlőtlenség következik, ami a (4) egyenlőtlenségnek ellentmond. Ebből tehát az állapítható meg, hogy a (2) és (3) kijelentések mindegyike nem állhat fenn, s ezért az első tétel tartalmával ellenkező feltevésünk sem lehet helyes. Ezzel az első tétel bebizonyítást nyert.

Az elmondottak után külön részletezés nélkül belátható az, hogy az első tétel bizonyításánál követett gondolatmenettel a második és harmadik tétel is bebizonyítható. A harmadik tétel az elmozdulási ellipszoid és az elmozdulási ellipszis érdekes tulajdonságát fejezi ki (az elmozdulási ellipszoidra és az elmozdulási ellipsziszre vonatkozólag lásd például: Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften, IV. 4, C 29 a, Theorie der Baukonstruktionen, p. 493).

Alkalmazás. A rugalmas alakváltozásnak az itt bemutatott tulajdonsága a tartószerkezetek rugalmasságtanában ilyenfajta feladatokkal kapcsolatos: Meghatározandó az egy esetleges helyzetű erővel előidézhető legnagyobb áthajlás. Más szóval a

$$\delta = f(a, b)$$

áthajlás legnagyobb értéke kerestetik. Az áthajlás két pont helyétől függ; az a pont jelenti az áthajlás helyét, b pont jelenti az erő helyét. A tételek szerint az előidézhető legnagyobb áthajlás helye azonos az azt előidéző erő helyével. Így már csak

$$\delta = f(a, a)$$

alakú függvénnyel kell foglalkozni. Tehát a tételek alkalmazásával a szóban lévő kétváltozós feladat visszavezethető egyváltozós feladatra.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. április 11-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE GRÖSSTE ELASTISCHE VERSCHIEBUNG INFOLGE EINER KRAFT.

Von J. BARTA in Budapest (Ungarn).

Es wird bewiesen, dass unter den üblichen Bedingungen der technischen Trägerlehre gilt der folgende Satz: Ist die Grösse (bzw. die Grösse und Richtung) der konzentrierten Kraft gegeben, so entsteht die überaus grösste Verschiebung (bzw. die überaus grösste Verschiebungskomponente nach Richtung dieser Kraft) im Angriffspunkte der Kraft.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften von 11. April 1938.)

ELEKTRONSOKSZOROZÓ MINT ELEKTRONSZÁMLÁLÓ.

BAY ZOLTÁN I. tagtól.

Székfoglaló értekezés.

Bevezetés.

Az eddig ismert összes korpuszkulaszámláló berendezések közös elve, hogy a vizsgálandó részecske egy gáztérben ionokat hoz létre, melyek összes töltése a mérés érzékenységi határa fölött van, az észlelés jelenti a számlálási effektust.

Ez elvre felépített számláló csövek a következő csoportokba sorozhatók:

1. *Ionizációs kamra. (Greinacher-számláló.)* A cső gázterébe bejuto nagy sebességű részecske létrehoz cca 10^4 ionpárt, ezek töltését a cső elektromos tere csupán összegyűjti. Az elektrodák feltöltődésének ideje cca. 10^{-3} sec, a feszültséglökés amplitúdója néhány mikrovolt.

2. *Multiplikációs számlálók.* A nagy sebességű primér rész által létrehozott ionokat az elektrodákon lévő feszültség annyira gyorsítja, hogy azok egyenként újra nagyszámú ionpárt hoznak létre. A jelenség lefolyásának ideje 10^{-4} – 10^{-1} sec.¹

a) Ha a feszültség a cső gyulladási feszültsége *alatt* van, akkor a töltéssokszorozás proporcionális (*proporcionális számláló*).

b) Ha a feszültség a cső gyulladási feszültsége *felett* van ugyan, de az áramkör külső elemei az áramerősségeket kis értékre limitálják,² akkor egy koronakisülés³ indul meg, mely a fel-

¹ A. TROST: Zs. f. techn. Phys. 16. 407. 1935. és Handb. d. Phys. XXII. 1. 161. 1933.

² W. SCHULTZE: Zs. f. Phys. 78. 92. 1932.

³ S. WERNER: Zs. f. Phys. 90. 384. 1934. és 92. 105. 1934.

lépő pozitív tértöltés¹ hatása folytán kialszik. (*Geiger-Müller számláló.*)

A mondott elvből, mely eddig kizárólagosan szerepelt korpuszkulaszámlálóknál, következik ezeknek két alaptulajdonsága:

1. A jelenségnek szükségképpen egy gáztérben kell lefolynia, ami magát a jelenséget sokszor a kívánt mértéken felül zavarja, (pl. kis sebességű elektronoknál).

2. Az ionizáció időbeli lefolyása a számlálás időbeli felbontóképességét korlátozza, ami különösen koincidencia-számlálásoknál a mérhetőségnek határt szab.

Ezekhez járul, hogy olyan számlálóknál, amelyeknél a katódnak szükségképpen kis kilépési munkával kell bírnia (foton-számláló l. 24. lap), adszorbeált gázzrétegek a kilépési munkát erősen befolyásolják, ami a reprodukálhatóságot csökkenti, vagy lehetetlenné teszi.

A jelenleg ismert számlálási módszerek hibáinak elkerülése céljából jelen dolgozat egy olyan módszert ismertet, melynél a szükséges töltéssokszorozás vákuumban megy végbe, a szekundér elektronemissziós multiplikáció elve alapján. Az új számlálási módszer lehetővé teszi lassú elektronok számlálását vákuumban, csupán vákuumprocesszusok segítségével és a gázos számláló felbontóképességét három-négy nagyságrenddel múlja felül. A berendezés, mint foton-számláló az érzékenységi tartományt az ultravörösre is kiterjeszti s az eddigi legjobb ibolyaérezkenységet az ultravörösben is egy nagyságrenddel felülmúlja.

Elektronsokszorozók.

A szekundér elektronemissziós multiplikáció jelensége 1900 óta ismeretes. (LENARD, HULL és Von BAYER vizsgálatai.)

Elektronsokszorozót először SLEPIAN² javasolt oly elrendezésben, hogy egy elektródasoron az elektronok száma egymás után szekundér emisszióval sokszorozódik. Ha egy lemezen a multiplikációs faktor τ és a lemezek száma n , akkor, ha a jelenlegben az n -szes elektronok résztvesznek, a sokszorozás τ^n .

¹ A. HIPPEL: Zs. f. Phys. 97. 455. 1935.

² SLEPIAN: Patent No. 1.450, 265. 1923. U. S. A.

Mivel az első multiplikátoroknál ez utóbbi feltétel nem teljesült, ZWORJIN¹ olyan multiplikátort szerkesztett, mely az egyes lemezekről jövő elektronokat a következő lemezre elektronoptikailag (főképpen mágnesoptikával) fókusszálja, így a τ^n sokszorozást tényleg meg is kapja. Elektromos optikával WEISS² szerkesztett multiplikátort; az elektródák itt hálóalakra vannak kiképezve, az elektronok egy része itt multiplikáció nélkül halad tovább, úgyhogy a multiplikációs faktor kisebb annál, mint amit a szekundér-emissziós réteg nyújtana. Tehát ugyanolyan szándékolt összes sokszorozás esetén a lemezek száma nagyobb.

Szekundér emissziós réteg rendszerint $Ag-Cs_2O-Cs$; használatosak elvértve rubidiumrétegek is.

Ezek a multiplikátorok a televízióban nyertek a legujabb időben alkalmazást, ahol a közvetlen áramerősítés által a fotoérzékenység alsó határa az egyszerű fotocellákhoz képest cca. $2 \cdot 10^2$ -szer csökken.

A kísérletek terve és kivitele.

Ha az eddig csupán makroszkópicusan, tehát igen sok elektronból álló áramok erősítésére használt elektronsokszorozót egyes, individuális elektronok kimutatására akarjuk használni, akkor a következő nehézségek állanak elő:

1. *A termikus elektronemisszió.* A szokásos $Ag-Cs_2O-Cs$ elektródákat megtartva már szobahőmérsékleten oly nagy a termikus elektronemisszió, hogy az az észlelést lehetetlenné teszi. E réteg kilépési munkája irodalmi adatok szerint $\varphi=0.75$ Voltra tehető, a RICHARDSON-egyenlet A állandója $A=9.8 \cdot 10^{-2}$ Amp cm^2 grad. E két érték elfogadásával számolt elektronemissziót cm^2 -ként az 1. táblázat mutatja. Látható innen, hogy szobahőmérsékleten $1 cm^2$ területű elektródákkal számolva már az első lemez elektronemissziója $N=10^{10} sec^{-1}$, melynek multiplikációja τ^n , az *i-elik* lemezeről jövő termikus elektronok

¹ V. K. ZWORJIN: Proc. Inst. Radio Eng. 24. 351. 1936.

² G. WEISS: Zs. f. Techn. Phys. 17. 623. 1936. és Fernsehen u. Tonfilm 7. No. 6. 1936.

1. táblázat.

Az $Ag-Cs_2O-Cs$ réteg thermikus emissziója.

Hőmérséklet K	273	150	120
Emittált elektronok száma $/cm^2$	10^{10}	0.35	$6 \cdot 7 \cdot 10^{-10}$

kilépése és multiplikációja folytán az utolsó lemezre jutó elektronok száma $N\tau^{n-i+1}$, melyek összegezve az anódon viszonylag nagy áramot hoznak létre. Esetünkben ennek az áramnak mért értéke $17 \cdot 10^{-6}$ Amp., ami megfelel az általában elérhető $\tau \sim 3$ értéknek. Ennek az áramnak a statisztikus ingadozása, ha azt az egyszerű söréthatás formulájával számoljuk (ZWORYKIN közelítő módszere, melyet újabb vizsgálatok megerősíteni látszanak)¹ az egy elektrontól származó τ^n amplitudót sokszorosán felülmúlja.

E nehézséget elháríthatjuk, amint azt az 1. tábla mutatja, ha a kísérletet a folyékony levegő hőmérsékletén végezzük el.

Ha nem akarjuk kihasználni a caesiumnak fotoemisszió szempontjából kitűnő sajátosságait, akkor a thermikus elektronemissziót csökkenthetjük oly réteg választásával, amelynek szekundáremissziója megfelelő, de kilépési munkája oly nagy, hogy szobahőmérsékleten a thermikus elektronemisszió elhanyagolható. Figyelembe véve, hogy (9. lap) a zéróeffektus 1 min.-ra redukálható, felállíthatjuk mint követelményt, hogy a thermikus emisszió se legyen nagyobb. A követelmény valószínűleg kielégíthető úgy, hogy a mellett még foton számlálók céljaira is kellő érzékenységet nyerjünk. Ily irányú vizsgálatok folyamatban vannak.*

2. *Átvezetési áramok.* Ezek kétféleképpen zavarhatnak.

a) Nem állandó jellegű átvezetési ellenállás esetén az anódvezetékét kisülésszerű áramlökések érik, melyek amplitudója a mérendő lökésekénél nagyobb is lehet, ami a mérést zavarja.

¹ W. SCHOCKLEY and J. R. PIERCE: Proc. Inst. Radio Ing. 26. 321. 1938.

* *Megjegyzés a korrekturánál.* Azóta az itt felvetett kérdés megoldást nyert, amennyiben sikerült olyan sokszorozókat szerkeszteni, amelyek lehetővé tették szobahőmérsékleten az elektronszámlálást. Lásd Z. BAY Nature 141 1011 jun. 4. 1938.

b) Az állandó jellegű átvezetési ellenálláson (R) thermikus ellenállás zaj (JOHNSON-effektus) lép fel, melynek a mérendő lökések amplitudójánál legalább egy nagyságrenddel kisebbnek kell lennie, hogy a mérést ne zavarja. Esetünkben a feltétel: $R \gg 10^8$ ohm, (10^8 ohm az erősítő csatoló ellenállása), míg az izolációs ellenállás kísérletileg talált értéke 10^{15} ohm. Kellő nagy átvezetési ellenállást biztosított egy oly berendezés, melynél a multiplikatort üvegeköpenybe építve száraz N_2 atmoszférába helyeztük.

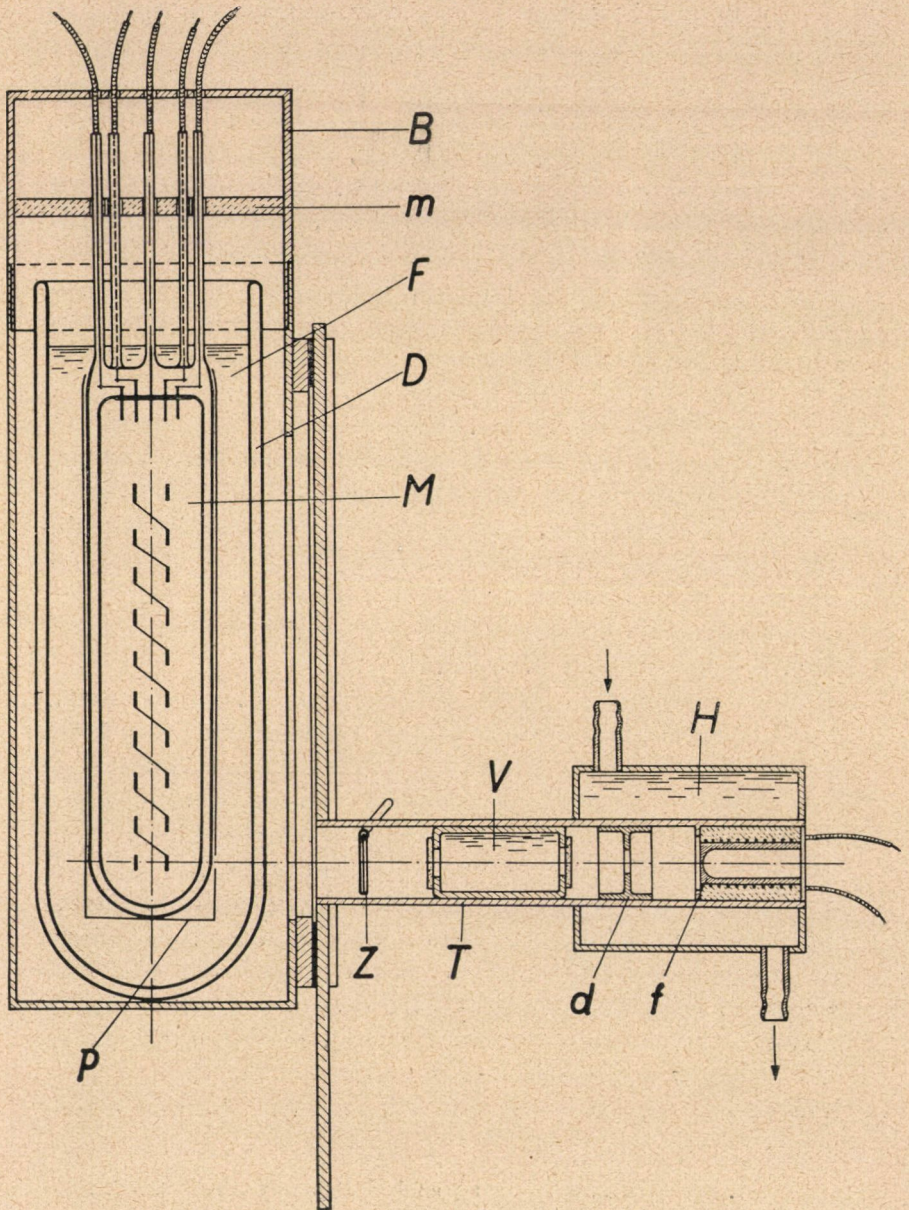
3. A *téremisszió*. Ismeretes, hogy elektromos tér hatására egy hideg fémből elektronok lépnek ki.¹ 10^6 V/cm térerősségnél az emisszió makroszkópikus módszerekkel mérhető.^{2 3} Kis térerősségeknél mérések nincsenek, de feltételezhető, hogy egy oly érzékeny módszernél, amelynél már egyes elektronok jelenléte kimutatható, a téremisszió már néhány száz Volt cm-nél is zavarhat. E kérdésre csupán maguk a kísérletek adtak választ olyan értelemben, hogy az első elektródákon lévő feszültségek eléggé kicsinyre választhatók úgy, hogy a szekundéremisszió a kívánt értéket eléri és ugyanakkor még a téremisszió nem zavar. A feszültség emelésével a téremisszió beáll és mérhető. A méréseket l. a 9. lapon.

A *kísérletek kivitele*. A berendezést az 1. ábra mutatja. Az M elektronsokszorozó a D DEWAR üvegben lévő F folyékony levegőbe merül. A mágneses teret elektromágnes szolgáltatja, mely a rajzból hiányzik. A mágneses erővonalak merőlegesek a rajz síkjára. Az árambevezetések a B sárgaréz hüvely felső részén elszigetelve mennek át. A sokszorozót a már említett üvegburok veszi körül, melynek a felső részén elhelyezett üvegcső toldalékain, felül beforrasztva, lépnek át a bevezető drótok. Az üvegburok kívül p fekete papirköpenybe van burkolva, amelyet a folyékony levegő közvetlenül hűt. A feketeköpeny részben a diffúz fény elkerülésére szolgál, részben a vákuumban lévő, tehát kizárólagosan sugárzás útján lehűlő elektródák lehűlésének meggyorsítására. Ha a burok nem borítaná a sok-

¹ W. SCHOTTKY u. H. ROTHE: Handb. d. Exp. Phys. XIII. 2. 257. 1928.

² F. ROTHER: Ann. d. Phys. 81. 317. 1926.

³ R. A. MILLIKAN a. C. F. EYRING: Phys. Rev. 27. 51. 1926.



1. ábra.

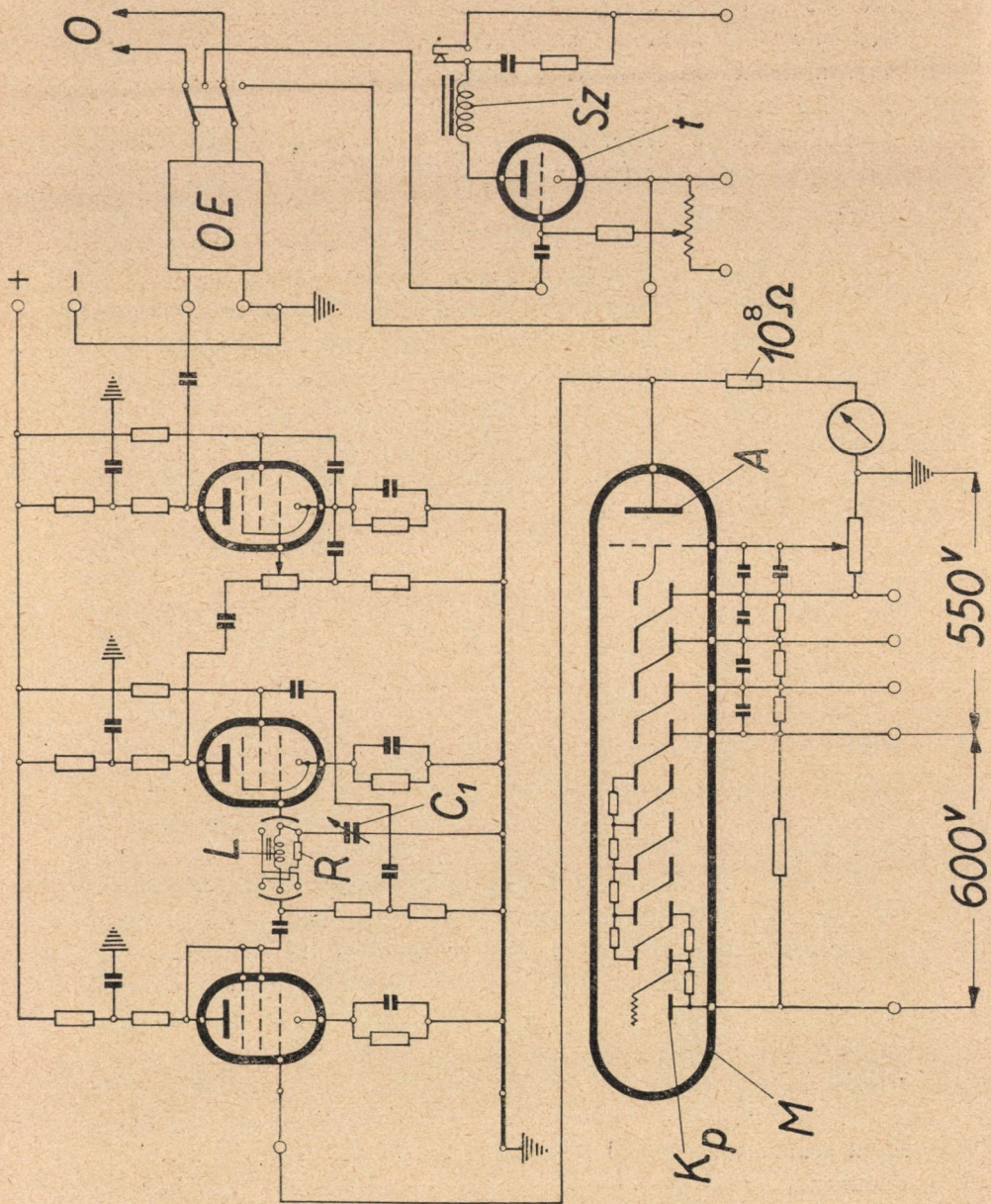
szorozó felső részét, úgy az felülről az m micalex gyűrű és a rézköpeny felső ürege állandó, cca. szobahőmérsékletű besugárzásának volna kitéve. A fekete köpenyen s a DEWAR-edény ezüstözésén megfelelő ablakok vannak hagyva a fény besugárzásának lehetővé tételére. A fény a T sárgaréz toldalékból jön, hol egy f fényforrás (kis izzólámpa, vagy fekete test) helyezhető el. A hosszúhullámú ultravörös besugárzás elkerülésére V vízszűrő szolgál, a T tubus felmelegedését a H vízhűtő akadályozza meg. d diafragma, Z pedig fényzár.

A berendezés teljes kapcsolását a 2. ábra mutatja. A multiplikátor anódenállásán fellépő feszültséglökéseket galvanikus csatolással egy háromcsöves változtatható sáv szélességű erősítő erősíti, miáltal a lökések már hangszóróval is jól hallhatók. Ha a készülék katódsugároszcillográfot működtet, akkor ehhez további három fokozatos OE erősítő szolgál. Ugyanez az erősítés elegendő egy t thyratronnal kapcsolt Sz telefonszámláló működtetésére.

A használt elektronsokszorozók 9 fokozatosak voltak, részben a Radio Corporation of America gyártmányai (ZWORYKIN-féle mágneses rendszer), részben saját laboratóriumunk készítményei. A használt mágneses térerősség cca. 200 gauss.

A berendezés működése a következő:

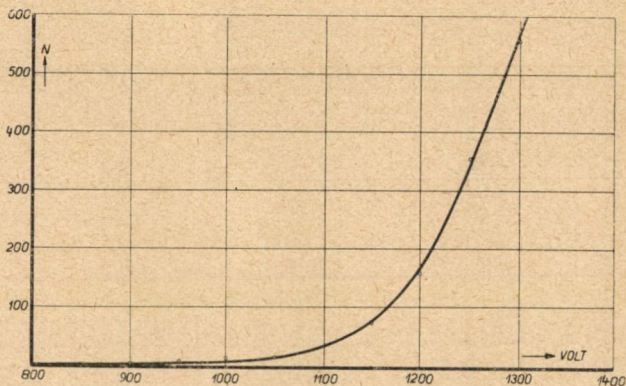
Szobahőmérsékleten való bekapcsoláskor a caesium thermikus emissziója következtében viszonylag nagy egyenáram folyik az anódenálláson. (l. 4. lap.) Mivel az erősítő az egyenáramú komponenst nem viszi át, a katódsugároszcillográfon csupán az igen nagy, a műszer mérési tartományát erősen túlhaladó söréthatás látszik. A folyékony levegő-hűtést megkezdve, jól megfigyelhető, hogy a sörétingadozás kisebbedik, jeléül annak, hogy a thermikus áram csökkent. Söréthatásnál az ingadozás mindkétoldali, tehát ha a katódsugár időeltérése vízszintes, akkor fel- és lefelé egyaránt fellép. A további hűtés folyamán elérkezünk egy olyan hőmérséklethez, ahol az ingadozás mindinkább egyirányú lesz, jeléül annak, hogy most már nem söréthatással, hanem *diszkrét egyoldaliú feszültséglökésekkel van dolgunk*. Ezek száma a további hűtéssel egyre csökken, egészen a null-effektusig, mikor néhány lökés látható percenként. A lökések az *erősítő* söréthatásából, mely a nullvonal állandó kicsiny inga-



dozását okozza, egy-két nagyságrenddel kiemelkednek. Ha most a T tubusból fényt ejtünk be, akkor a lökések száma a bejuttatott fotonok számának megfelelően szaporodik és számlálható.

A készülék γ sugarakra is érzékeny, egyéb rádióaktív sugárzást még nem próbáltunk.

A *nulleffektus és téremisszió*. Zérus külső megvilágítás esetén a lökések percnkénti számát a 3. ábra mutatja. A görbe kezdete a készülék igen kicsiny nulleffektusát adja, ami mindaddig, amíg a csőre alkalmazott összefeszítés 950 Voltot el nem ér, percnként *cca. egy lökést tesz ki*. A feszültséget tovább



3. ábra.

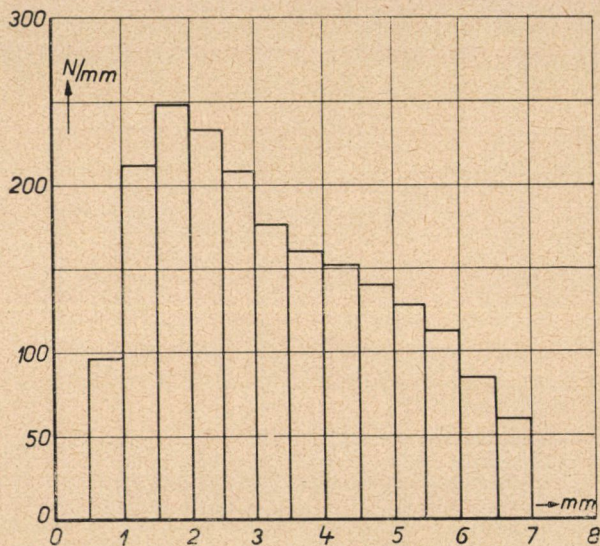
emelve a lökések száma eleinte lassan, később egyre gyorsabban növekszik s reprodukálhatóan a 3. ábrában látható értékeket adja. E lökések nyilván a 5. lapon említett téremisszió jelenlétét mutatják és egyúttal jó módszert adnak a téremisszió jelenségének kis térerősségek esetén való mérésére vákuumban, ami mindeddig nem volt lehetséges.

Hogy a tulajdonképpen értelemben vett, tehát a téremisszió levonásával nyert, nulleffektust kozmikus sugárzás okozza-e, azt további vizsgálatok vannak hivatva eldönteni.

A *lökések amplitúdói* statisztikus ingadozást mutatnak, megfelelően a szekundér emisszió statisztikus ingadozásának. A jelenség egy külön vizsgálat tárgyát fogja képezni, itt csupán néhány megfigyelési adatot óhajtunk közölni, melyek a berende-

zésnek elektronszámlálásra való felhasználása szempontjából elvileg fontosak. A 4. ábra nagyszámú lökésnek a különböző amplitudóértékekre való eloszlását szemlélteti. Az adatokat mozgó filmre fotografálással és az egyes amplitudók megméréseivel vetjük fel.

Fontos eredmény, hogy az amplitudóeloszlás maximuma nem a zérus amplitudónál van. A maximumtól balra, kis amplitudók felé, a lökések száma gyorsan csökken. Így elegendő egy



4. ábra.

számlálásnál az amplitudókat egy küszöbértéktől felfelé figyelembe venni (pl. a thyatronszámláló előfeszültségét egy meghatározott értékre állítani), miáltal csak kicsiny és korrekcióval figyelembe vehető hibát követünk el.

A berendezés felbontóképessége.

Gáztöltésű számlálóknál az egyszer megindult lökés lefolyását további elektronoknak a katódból való kilépése nem befolyásolja, ennél fogva a lökés időtartama alatt esetleg érkező újabb elektronokra a számolócső hatástalan. Az a legkisebb idő,

melynek el kell telnie egy lökés megindulása pillanatától számítva, hogy a számolócső egy újabb elektront számlálhasson, az ú. n. *felbontóképesség*. A GEIGER—MÜLLER-számlálócsövek lökéstartama általában nem kisebb, mint 10^{-4} sec; a lökés kioltása után is szükséges még egy nyugalmi időtartam, úgy hogy a lökések száma alig haladhatja meg a 300—400-at sec.-ként.¹ NEHER és HARPER-nek² sikerült egy elektroncsöves kapcsolással ezt az értéket egy nagyságrenddel emelni. Egy ilyen értelemben vett határ az elektronsokszorozónál nincs. A katódból kilépő elektronok sokszorozási processzusa egymástól független, egy lökés időtartama alatt kilépő újabb elektronra nézve az elektronszámláló hatásos marad. A kilépő elektronok számának tetszésszerű szaporításakor az anódra jutó elektronok száma arányos lesz a kilépő elektronok számával: *a műszer a számlálóberendezésből a fényintenzitásmérő berendezésbe folytonosan megy át.*

Felmerülhet azonban itt is a kérdés: melyik az a legkisebb időtartam, melynek el kell telnie, hogy a katódból egymásután kilépő két elektron az anódon két diszkrét (egymástól megkülönböztethető) lökést hozzon létre?

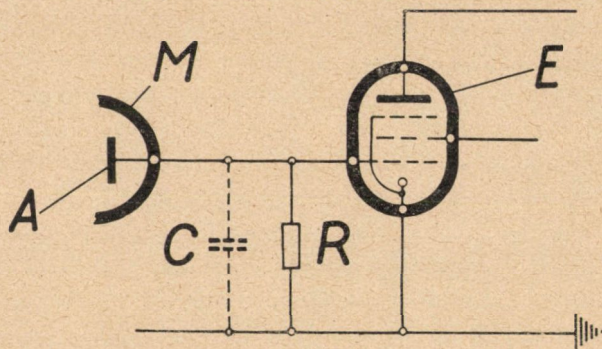
Az elektronmultiplikáció mechanizmusa két ok miatt mutat időbeli szórást. Egyik az elektronok repülési idejének, másik a szekundér elektronemisszió lefolyási idejének statisztikus szórása. Mindkét szórást különböző körülmények, mint pl. az alkalmazott feszültség befolyásolhatják. E jelenségekből eddig mindössze az ismeretes, hogy az elektronsokszorozó frekvencia-görbéje néhány száz megaciklusig konstans,³ tehát a két említett időbeli szórás együtt nem tehet ki többet, mint 10^{-8} sec.-ot, azaz a katódból kilépő egy elektron által kiváltott s az anódra jutó elektronok az anódot $\tau < 10^{-8}$ sec idő alatt töltik fel. Ez az igen alacsony érték reprezentálja az elektronsokszorozó felbontóképességét a második értelemben. Egy olyan érték, mely *a gáztöltésű számláló csövek felbontóképességénél 3—4 nagyságrenddel jobb.*

¹ GORDON L. LOCHER: Phys. Rev. IV. 42. 545. 1932.

² H. W. NEHER and W. W. HARPER: Phys. Rev. 49. 940. 1936.

³ ZWORYKIN: loc. cit.

E nagy felbontóképességet természetesen csak akkor használhatjuk ki, ha a cső összes multiplikációja oly mértékű, hogy az anódra jutó feszültséglökés felülmúlja a használt mérőműszer (oszcillograf) statisztikus zavarait s megfelel a mérőműszer érzékenységének. Mivel ez az elektronsokszorozók mai technikája mellett még nagy követelmény, célszerű az anódra jutó feszültséglökést az elektronsöves erősítőtechnika eszközeivel felerősítve a mérőműszerbe vezetni. Ki fogjuk mutatni, hogy a szekundéremissziós áramerősítés részben való helyettesítése a rácsvezérléses feszültségerősítéssel a lökéseket ugyan könnyen megfigyelhetővé teszi, de a berendezés felbontóképességét elvileg rontja.



5. ábra.

A legegyszerűbb kapcsolás, mellyel az elektronsöves erősítőt az elektronsokszorozó után kapcsoljuk, az 5. ábrán látható. A az M elektronsokszorozó anódja, a ráé jutó q töltés a C kapacitást feltölti, a töltés az R ellenálláson át, mely egyúttal az E audionső rácsellenállása, kisül. C alsó határa a sokszorozó kimenőés az audionső bemenő kapacitásainak összege. R felső határa a megvalósítható legnagyobb izolációs ellenállás.

A feszültséglökés időbeni lefolyása:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{Rq}{t_0} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad \text{ha } 0 \leq t < t_0 \\ V &= \frac{Rq}{t_0} (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}, \quad \text{ha } t \geq t_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ahol t_0 a C kapacitás feltöltésének ideje, az elektronsokszorozó említett időszórása: $t_0 = 10^{-8}$ sec. C nagyságrendje $10 \text{ cm} \approx 10^{-11} \text{ F}$, R könnyen megvalósítható értéke 10^{+12} ohm, azaz $R \cdot C \sim 10$ sec. A görbe tehát egy 10^{-8} sec alatti gyors emelkedést és egynéhány sec. alatti lassú csökkenést mutat. Tekintettel t_0 és $R \cdot C$ sok nagyságrenddel különböző értékeire, a maximális emelkedés nagy közelítéssel

$$V_{\max} = \frac{q}{C}. \quad (2)$$

A számítások egyszerűsítése céljából helyettesítsük az (1) alatti feszültséglökést egy végtelen gyors emelkedéssel $t = 0$ időpillanatban és egy azután következő konstans értékkel, azaz legyen

$$V = 0, \text{ ha } t < 0, \quad V = \frac{q}{C} = a, \text{ ha } t \geq 0. \quad (3)$$

A következőkben (3) görbét röviden *egységilökésnek* fogjuk nevezni. Az elhanyagolásokra az eredmény diszkussziójánál visszatérünk.

Egy ilyen lökés FOURIER-integrálja ismeretesen

$$V = a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right). \quad (4)$$

Legyen az erősítőben lévő kapcsolási elemek rezonancia amplitudója $r(\omega)$ s bírjon oly tulajdonsággal, hogy csupán egy ω_1 és ω_2 közötti sávon legyen zérustól különböző és pozitív, míg a sávon kívül zérus. (Sávszűrő.) ZOBEL¹ szerint a komponensek fáziskésésére általában jellemző, hogy az a frekvenciával növekszik. Sávszűrőknél a legtöbb esetben elegendő pontossággal felvehetjük,² hogy a fáziskésés a frekvenciával lineárisan növekszik.

$$\varphi = t_0(\omega - \omega_0) + \varphi. \quad (5)$$

A sávszűrők elméletéből ismeretes,² hogy $\varphi_0 = n\pi$, vagyis csupán a komponensek előjelére nézve bir fontossággal, amit itt figyel-

¹ I. Zobel: Bell System Techn. Journ. 2. 1. 1923.

² K. KÜPFMÜLLER: Elektrische Nachrichten Technik 1. 141. 1924.

men kívül hagyhatunk. A t_0 jelenléte megfelel az időkoordináta egyöntetű eltolásának, amit itt, ahol bennünket csupán a kapott görbe alakja érdekel, szintén figyelmen kívül hagyhatunk.

Ilyen feltételek mellett a sávszűrő kimenő oldalán fellépő lökés

$$x = a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right), \quad (6)$$

hol a «nulla-frekvenciás» $\frac{1}{2}$ komponens csak akkor veendő figyelembe, ha a sáv a zérus frekvenciát is tartalmazza.

(6)-ot t szerint differenciálva nyerjük, hogy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (7)$$

A differenciálhányados legnagyobb értéke

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_m = \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r(\omega) d\omega. \quad (8)$$

(8)-ből látható, hogy a legnagyobb meredekség, melyet egy bemenő egység-lökés esetén a feszültséggörbe a sávszűrő kimenő oldalán elérhet a bemenő feszültségugrásnak és a rezonancia görbe területe π -ed részének szorzata.

Egy végtelen gyors feszültségugrást a sávszűrő tehát csak akkor ad hűen vissza, ha a sávzélesség végtelen nagy; véges sávzélesség esetén a kimenő feszültség lassabban változik, mint a bemenő. Ha a bemenő feszültség nem végtelen gyorsan változik, akkor amplitudospektruma erősebben csökken, mint $\frac{1}{\omega}$, így $\left(\frac{dx}{dt} \right)_m$ a (8) által adott értéknél csak kisebb lehet.

Bármily bonyolult lehet általában a (7) alatti integrál, zérus helyeire nézve egy aránylag egyszerű észrevételt tehetünk.

Legyen egy kicsiny t értéknél $\Omega > \omega_2$ az a frekvencia, melynél $\cos \omega t$ az első zérus helyét eléri, azaz

$$\cos \Omega t = 0, \quad \Omega t = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

t növelésével Ω csökken és mindaddig, míg a sávszűrő ω_2 felső határát el nem éri, a (7) alatti integrál pozitív. Ha Ω továbbcsökken és

$$\omega_1 < \Omega < \omega_2$$

akkor az integrált két részre bonthatjuk

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} r(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_{\omega_1}^{\Omega} r(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_{\Omega}^{\omega_2} r(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (11)$$

ahol az első integrál pozitív, a második negatív. Az $\omega_1 \geq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ igen általános feltevés mellett t növelésével az (ω_1, ω_2) intervallumban a $\cos \omega t$ -nek újabb gyöke nem lesz, tehát van olyan $\Omega = \Omega'$, amelyre

$$\int_{\omega_1}^{\Omega'} \cos \omega t' r(\omega) d\omega = - \int_{\Omega'}^{\omega_2} \cos \omega t' r(\omega) d\omega. \quad (12)$$

Így a $t' = \frac{\pi}{2\Omega'}$ érték megadja a differenciáhányados első zéró helyét. Sávszűrőknél az $r(\omega)$ majdnem mindig szimmetrikus és ebben az esetben a fenti megfontolás az $\omega_1 \geq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ megszorítás nélkül is érvényes, továbbá

$$\Omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad t' = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}. \quad (13)$$

Ami a maximális amplitudót illeti, KÜPFMÜLLER¹ végzett el becsléseket, melyeknek eredménye

$$1. \quad x_{\max} = \frac{a}{\pi\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r(\omega) d\omega, \quad \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad (14)$$

2. ha $\omega_1 = 0$ és a rezonanciagörbe téglalapalakú, azaz

$$r(\omega) = 1, \text{ ha } \omega \leq \omega_2 \text{ és } r(\omega) = 0, \text{ ha } \omega > \omega_2, \quad (15)$$

akkor a maximális amplitudó közelítőleg a , amelynek elérése után a feszültség kis ingadozásoktól eltekintve ezen az értéken meg is marad.

¹ KÜPFMÜLLER loc. cit.

Az 1. esetben a görbe lefolyását KÜPFMÜLLER nem vizsgálja, mivel pedig annak ismeretére később szükségünk lesz, foglalkozunk röviden a kérdéssel.

Idealizáljuk a rezonanciagörbét úgy, hogy

$$\begin{aligned} r(\omega) &= 1, \quad \text{ha } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ r(\omega) &= 0, \quad \text{ha } \omega < \omega_1, \quad \omega > \omega_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Ekkor

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t \, d\omega = \frac{2a}{\pi t} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t, \quad (17)$$

amiből látjuk, hogy a differenciálhányados kétféle frekvenciával oszcillál

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{és} \quad \Omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}. \quad (18)$$

Hasonló, azonban csupán közelítő kifejezést kapunk x -re, ha az

$$x = \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega \quad (19)$$

kifejezésben az integrandus nevezőjét — egy szűk sávra szorítva — $\omega = \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ konstans értéknek vesszük. Akkor

$$x = \frac{a}{\pi \Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin \omega t \, d\omega = \frac{2a}{\pi \Omega t} \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \quad (20)$$

A görbe a (18) által adott kétféle frekvenciával oszcillál, az $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ frekvenciájú «nagyfrekvenciás» rezgések burkoló görbéje

$$\frac{\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t}{t} \quad (21)$$

által van adva, ami egy «alacsonyfrekvenciájú» lebegés, az időben egyre csökkenő amplitudóval. A nagyfrekvenciás amplitudó első nulla helyét eléri, ha $\sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t = 0$ azaz, ha

$$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \dots \quad (22)$$

Ha tehát — tekintettel a csillapodásra — csupán az első lebegés lefolyásáig vesszük a keletkezett feszültséglökést figyelembe, akkor ennek időtartamát (22) adja, míg a maximális kitérés elérésének idejét a (13) formula adja meg.

A sávszűrő kimenő oldalán ily módon ismerve a feszültséglökés lefolyását, rátérhetünk a mérhetőség alsó határának megvizsgálására. A mérés pontosságát kétféle ingadozás korlátozza.

1. *JOHNSON-effektus*. Az 5. ábra szerinti bemenő körben az ingadozás négyzetes közepe

$$\bar{y}^2 = K \int_0^{\infty} \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega, \quad (23)$$

ahol $K = \frac{2kT}{\pi}$, ha ω körfrekvencia, k a BOLTZMANN-féle állandó, T az abszolút hőmérséklet. A sávszűrő (16) alatti definícióját véve alapul

$$y^2 = K \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} d\omega = \frac{K}{C} (\text{arc tg } \omega_2 RC - \text{arc tg } \omega_1 RC). \quad (24)$$

Ha $\omega_1 = 0$, tehát a sávszűrő tartalmazza a zérus frekvenciát, akkor

$$\bar{y}^2 = \frac{K}{C} \text{arc tg } \omega_2 RC, \quad (25)$$

ami, tekintettel RC nagy értékére, az ω_2 növelésével rohamosan tart a

$$\frac{K}{C} \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

határértékhez.

2. *Az első elektroncső sűrűhatása*. Ennek kifejezése a (15) alatti sávszűrőre nézve:

$$\bar{y}^2 = K' \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = K' (\omega_2 - \omega_1), \quad (27)$$

ahol \bar{y}^2 a rácsra vonatkoztatott feszültség-ingadozás kvadrátikus közepe, K' értéke:

$$K' = \frac{2kT}{\pi} R_{ekv} \quad (28)$$

és R_{ekv} a cső zaj szempontból ekvivalens ellenállása. R_{ekv} a ma használatos csöveknél cca. 2000 ohmra tehető.

Ha most a sávszűrő kimenő oldalára oszcillográfot helyezünk s az erősítést úgy választjuk, hogy a kapott feszültség-ingadozások megfeleljenek az oszcillográf érzékenységének, továbbá, — optimalis esetet tételezve fel — hogy az oszcillográf frekvenciafüggése az itt számbajövő egész frekvenciatartományban állandó, akkor a mérhetőség alsó határát nyilván az a követelmény adja, hogy a kapott feszültséglökés maximuma nagyobb legyen, mint a statisztikus ingadozás. Azaz

$$x_m \geq \varrho \sqrt{\overline{ij^2} + \overline{j'^2}}, \quad (29)$$

ahol ϱ a mérés szándékolt pontosságát kifejező, 1-nél nagyobb szám.

a) $\omega_1 = 0$. Ez eset tárgyalásánál fokozottabb mértékben akarjuk kihasználni a lökés (3) alatti egység-lökés jellegét, itt tehát felvesszük, hogy R végtelen nagy, vagyis, hogy elvben egy elektrométeres mérésről van szó; ekkor a bemenőkör JOHNSON-spektruma a zérus frekvenciára húzódik össze, ami csupán a műszer zérus helyzetének bizonytalanságát okozza, de a mérésben nincs szerepe.

Mivel itt $x_{\max} \sim a$ (15. lap), a mérhetőség feltétele:

$$a \geq \varrho \sqrt{K' \omega_2}. \quad (30)$$

Ugyanakkor (13) alapján a maximum eléréséhez szükséges idő

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_2}, \quad (31)$$

tehát:

$$a \sqrt{\tau} \geq \varrho \sqrt{K' \pi} = \text{Konst.} \quad (32)$$

(32) a galvanométerek elméletéből ismeretes szabály¹ kiter-

¹ F. ZERNIKE Zs. f. Phys. 40. 628. 1926.

F. ZERNIKE Zs. f. Pys. 79. 516. 1932.

G. ISING Phil. Mag. (7) 1. 827. 1926.

M. CZERNY Ann. d. Phys. 12. 993. 1932.

M. CZERNY Zs. f. techn. Phys. 14. 436. 1933.

jesztése elektroncsöves erősítőkre. A szabály azt fejezi ki, hogy *egy elektroncsöves erősítő sávszélességének csökkentése útján elvileg tetszésszerűtlen kicsiny feszültségeket (töltéseket) mérhetünk, de a mérhetőség alsó határának csökkentésével szükségképpen együtt jár a mérés idejének növelése. A mérés időtartama fordítva arányosan növekszik a sávszélességgel, a mérhetőség alsó határa pedig fordított arányban csökken a mérési idő négyzetgyökével.* A galvanométerkör összes ellenállása helyébe itt az elektroncső JOHNSON-ellenállása (zaj szempontból ekvivalens ellenállása) lép; a konstansok pontosabb összehasonlítása csak azonos rezonanciagörbék esetén volna lehetséges.

$$b) \omega_1 > 0. \text{ Itt } x_{\text{max}} = \frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Omega} = \frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}} \quad [(4) \text{ for-}]$$

mula]. A mérhetőség feltétele:

$$\frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}} \geq \varrho \sqrt{y^2 + y'^2} \quad (33)$$

tekintettel (24) formulára R elvileg mindig megválasztható oly nagyra, hogy \bar{y}^2 elhanyagolható legyen \bar{y}'^2 -hez képest. Hogy e követelménynek gyakorlatilag is eleget tehetünk, az látható a 2. táblázatból.

Ilyen feltételek mellett

$$\frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \varrho \sqrt{\bar{y}'^2} = \varrho \sqrt{K'(\omega_2 - \omega_1)}, \quad (34)$$

azaz

$$\frac{a}{\pi} \frac{1}{\Omega} \geq \varrho \sqrt{K'} \frac{1}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}}, \quad (35)$$

$$a \geq \pi \varrho \sqrt{K'} \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}}.$$

Ugyanekkor (13) alapján a maximum eléréséhez szükséges idő

$$\tau = \frac{\pi}{2\Omega}, \quad (36)$$

azaz a mérhetőség feltétele

$$a\tau \geq \varrho \frac{\pi^2}{2} \sqrt{K'} \frac{1}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}}. \quad (37)$$

A mérhetőség alsó határa itt csökken a sáv szélesség növelésével, azonban a sáv szélesség növelése állandó \mathcal{Q} mellett nyilván ω_1 csökkenését vonja maga után, vagyis az itteni *b*) eset *a*) eset felé közeledik, amiből látható, hogy az itt elérhető pontosság kisebb, a mérhetőség alsó határa itt magasabban van. Ezt az átmenetet még külön vizsgáljuk meg. (13) alapján

$$x_{\max} = \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}}{\omega} d\omega, \quad (38)$$

$$x_{\max} < \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}}{\omega} d\omega = a \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}.$$

Másfelől

$$\begin{aligned} x_{\max} &> \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \frac{\sin \omega \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}}{\omega} d\omega \geq \frac{a}{\pi} \int_{\omega_1}^{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2} d\omega = \\ &= \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} - \omega_1 \right) \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Azaz

$$\frac{a}{\pi} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} < x_{\max} < a \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (40)$$

Legyen most ω_1 kicsiny ω_2 -höz képest, akkor

$$\frac{a}{\pi} < x_{\max} < a, \quad (41)$$

mely becslés elegendő pontosságú, ha az itteni nagyságrendi megfontolásokhoz használjuk. A mérhetőség feltétele itt (13) alapján, mivel

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2} \sim \frac{\pi}{\omega_2} \quad (42)$$

és

$$a \sqrt{\tau} \geq \varrho \sqrt{K'} \pi \quad (43)$$

lesz, ami a (41) becslés π -szeres bizonytalanságától eltekintve (32)-vel megegyező formula.

Vegyük még figyelembe azon közelítés hatását, amelyet okozott, hogy az elektronsokszorozó anódján fellépő feszültséggörbe nem a (3), hanem a valóságban az (1) egyenletek által van adva.

Az (1) görbe spektruma középfrekvenciáknál ugyanaz marad, mint (3)-é, a nem végtelen gyors ugrás miatt a nagyfrekvenciás komponensek gyorsabban esnek, mint $\frac{1}{\omega}$, a véges kifutási idő miatt, pedig az alacsonyfrekvenciás komponensek lassabban nőnek, mint $\frac{1}{\omega}$. Az elsőnek az a következménye, hogy a sávszűrő kimenő oldalán a feszültség végtelen nagy sávzélesség mellett sem mutathat meredekebb emelkedést, mint az (1) görbe, a másodiknak pedig az a következménye, hogy a (43) és (32) formulákban szereplő mérési idő nem lehet nagyobb, mint nagyságrendben RC ; a mérhetőség alsó határa tehát nem csökkenthető minden határon túl.

Visszatérve a felbontóképességre, az eddigiekből nyilvánvaló, hogyha a mérhetőség alsó határa közelében tartózkodunk, akkor az elektronsokszorozó anódjára jövő két lökést csak az esetben tudjuk megkülönböztetni, ha az időtartam, mely őket elválasztja, nagyságrendben a (43) és (32) formulákból adódó τ . Az elektronsokszorozás mértékét a szekundér elektronemissziós áramsokszorozás elve alapján növelve, az erősítő rácsára jutó lökések egyre nagyobbodnak, ezért egyre nagyobb sávzélesség mellett egyre kisebb τ időtorzítással, azaz egyre nagyobb felbontóképességgel erősíthetjük tovább őket. Oszcillográffal való mérésnél a feszültséggörbében előforduló legmeredekebb változásokat kell megfigyelni, így tehát nem zavar, ha a sávszűrő a zérus frekvenciát is tartalmazza. (I. HOFFMANN-elektrometer). Ha azonban a lökéseket különválva, diszkrétan akarjuk megkapni, akkor gondoskodnunk kell arról, hogy a feszültség a maximum elérése után a nulltengelyre hamar visszaessék. Elérjük ezt a 16. lapon tárgyalt esetben [(22) formula], ahol az első zérus hely a

$$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (44)$$

időben következik be. Használva a 20. lapon lévő átmenetet, ahol $\omega_1 \ll \omega_2$, az első maximum elérésének ideje

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_2}, \quad (45)$$

az első zérus hely pedig

$$t = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\tau, \quad (46)$$

azaz a lökés lényegében (az utána következő egyre csökkenő amplitudókat elhagyva) 2τ idő alatt játszódik le. A felbontóképesség tehát nagyságrend szerint ugyanaz marad.

A 2. táblázat a fenti megfontolások alapján kiszámított alsó érzékenységi határokat adja különböző felbontóképességek mellett. A táblázat első sora azokat az időket adja, mely alatt a lökés a sávszűrő kimenő oldalán a maximumát eléri, tehát a (43) formulában lévő τ értékeket. A sávszűrő alsó és felső frekvencia határait a második, illetve harmadik sor tartalmazza. A hozzájuk kiszámított alsó érzékenységi határok $\rho = 1$ -el számolva a negyedik sorban található. Ez értékek $C = 2 \cdot 10^{-11} F$ kapacitás mellett a még kimutatható elektronok számára vannak átszámolva. Az utolsó sorban vannak feltüntetve azok az ellenállásértékek, melyek mellett a JOHNSON-zaj négyzetes közepe a söréthatás négyzetes közepével egyenlő.

2. táblázat.

Lökés időtartama	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	sec.
Sáv/űrő alsó határa	10^3	10^3	10^3	10^3	$\sim 5 \cdot 10^2$	$\sim 5 \cdot 10$	~ 5	sec^{-1}
Sávszűrő felső határa	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$\sim 5 \cdot 10^3$	$\sim 5 \cdot 10^2$	$\sim 5 \cdot 10$	sec^{-1}
Érzékenység határa ($\rho=1$)	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 6 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 6 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10$	$1 \cdot 6 \cdot 10$	5	elektron
Szükséges ellenállás	$6 \cdot 2 \cdot 10^5$	$6 \cdot 2 \cdot 10^6$	$6 \cdot 2 \cdot 10^7$	$6 \cdot 2 \cdot 10^8$	$1 \cdot 2 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 2 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 2 \cdot 10^{14}$	Ω

A táblázat szerint az elektronsokszorozó teljes felbontóképességének kihasználására — ha $\rho = 10$, azaz azt akarjuk, hogy a lökés amplitudója 10-szerese legyen a közepes zajfeszültségnek — oly sávszűrő szükséges, melynek sáv szélessége 10^7 — 10^8 sec^{-1} között van s a mérhető legkisebb lökés 50.000 elektron töltése, így tehát legalább 50,000-szeres áramsokszorozású multiplikátorra van szükség. Ez az érték caesium sokszorozók-nál 10—12 fokozatot tesz szükségessé, amit a mai technika már tud szolgáltatni.

A mérés időtartamának növelésével a multiplikációs faktor csökken. Szerző kísérletei körülbelül a táblázat harmadik oszlopában lévő adatokat valósították meg: a multiplikációs tényező kilenc fokozatú caesiumsokszorozónál cca. 10^4 , az erősítő frekvencia határai 10^3 sec^{-1} és néhányszor 10^5 sec^{-1} , (a különböző kísérletekben változtathatóak), a bevezető ellenállás 10^6 ohm. Látható a táblázatból, hogy a felbontóképesség ilyen körülmények között 10^{-8} sec nagyságrendű. Érdekes lehetőségre mutatnak rá a táblázat utolsó oszlopai. Ha megelégszünk 10^{-4} sec felbontóképességgel, ami nem rosszabb, mint a GEIGER—MÜLLER-csővéké általában, akkor körülbelül 500-szoros multiplikációra van szükségünk, 10^{11} ohm izolációs ellenállás mellett. Mindkét érték könnyen elérhető akkor is, ha nem használjuk ki a caesium jó szekundér elektronemissziós képességét, ami nagy kilépési munkával bíró felület választását és így a szobahőmérsékleten való alkalmazást engedi meg (4. lap).

Kiemeljük még a táblázat utolsó oszlopát, mely szerint $R = 10^{14}$ ohm alkalmazása mellett (ami szintén megvalósítható; kísérleteinkben a sokszorozó anódjának izolációs ellenállása 10^{15} ohm volt) 50 elektron töltése már jól kimutatható, ha a felbontóképesség nagyságrendje 10^{-2} sec. Hogy az irodalomban nagyobb értékek szerepelnek alsó határkénti, nyilván annak tulajdonítható, hogy a szerzők a sáv szélesség szűkítésének előnyeit nem vették figyelembe.

Alkalmazás: a berendezés, mint foton számláló.

A GEIGER—MÜLLER fényquantum-számláló berendezéseknek újabb időben kiterjedt irodalma van.¹⁻⁹ Ultraibolya quantumok számlálása nem ütközik nehézségekbe, mivel nagy kilépési munkával bíró fotokatód alkalmazható. Látható quantumok számlálására közelfekvően alkalifémek jönnek számításba, a kis kilépési munkával és a kilépő elektronok kicsiny sebességével azonban számos nehézség van egybekötve. A legnagyobb nehézséget az alkalikatódon dsorbeált gázzréteg okozza,^{2,8} mely a kilépési munkát nem reprodukálhatóan változtatja. A kilépési munka számlálás közben is változik, az áthaladó áram hatására a csőben keletkező pozitív ionok a katódra jutnak és a kilépési munka csökkenését eredményezik.¹⁰

A cső működését zavarja, hogy a kisülésnek saját fénye van, tehát az egyszer kiváltott lökés önmagát folytatja,¹¹ ami a felbontóképesség csökkenését vonja maga után.

Ugyancsak a kis kilépési munka következménye, hogy a feszültség-intervallum, amelyben a cső a számlálási effektust mutatja, kicsiny, a «feszültség-plateau» szélessége 10—100 Volt.¹² A kicsiny elektronsebesség miatt a fotoelektronok számottevő része nem vált ki számlálási effektust, hanem a gázmolekulák-

¹ B. RAJEWSKY: Zs. f. Phys. **63**. 576. 1930. és Phys. Zs. **32**. 121. 1931.

² GORDON L. LOCHER: Phys. Rev. **42**. 525. 1932.

³ W. CHRISTOPH u. W. HANELE: Phys. Zs. **34**. 644. 1933.

⁴ K. W. HAUSSER u. K. H. KREUCHEN: Zs. f. techn. Phys. **15**. 20. 1934.

⁵ M. W. KAREV u. S. F. Rodionov: Zs. f. Phys. **92**. 615. 1934.

⁶ K. H. KREUCHEN: Zs. f. Phys. **94**. 549. 1935. és **97**, 625. 1935.

⁷ A. KOLIN: Rev. Scient. Instr. **6**. 230. 1935.

⁸ W. CHRISTOPH: Ann. d. Phys. **23**. 747. 1935.

⁹ W. CHRISTOPH: Phys. Zs. **37** 265. 1936.

¹⁰ K. O. KIEPENHEUER: Zs. f. Phys. **107**. 145. 1937.

¹¹ GORDON L. LOCHER: loc. cit.

W. CRISTOPH u. W. HANELE: loc. cit.

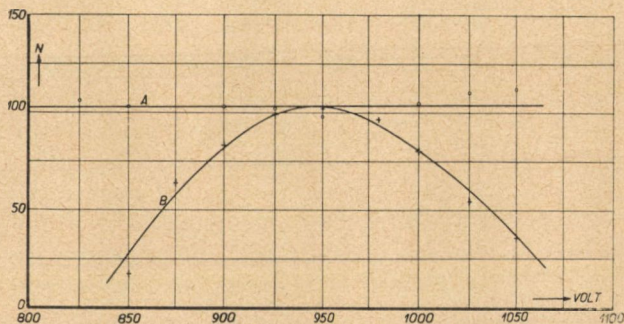
K. H. KREUCHEN: loc. cit.

¹² GORDON L. LOCHER: Ann. d. Phys. loc. cit.

W. CRISTOPH: Ann. d. Phys. loc. cit.

kal ütközve¹ a katódra jut vissza, ami a számolócső érzékenységét csökkenti. A nehézségek, különösen az öngerjesztés elkerülése céljából KIEPENHEUER² oly berendezést konstruált, melynél a fotoelektronok vákuumban lépnek ki, majd 25 kilovoltra felgyorsítva egy LENARD-ablakon át egy gázos számlálócsőbe jutnak. Természetes, hogy e bonyolult berendezés felbontóképesége nem jobb, mint más gáztöltésű számlálóké.

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy az itt leírt elektron-számláló berendezéssel mindezek a nehézségek elkerülhetők és egy jól reprodukálható foton-számláló nyerhető, mely a caesium



6. ábra.

összes jó tulajdonságait kihasználva az eddigieknél jobb érzékenységet és annak kiterjesztését a vörösre, sőt ultravörösre is adja.

A berendezés érzékenységének megmérése úgy történt, hogy egy néhány száz fokra melegíthető fekete test sugárzását ejtettük a fotokatódra. A katód melegedését elkerülendő, a hosszú hullámú ultravöröset vízsűrővel nyelttük el. Jellemző a készülék érzékenységére, hogy egy 0.5 cm^2 felületű, 200° C hőmérsékletű feketetest «fényének» $d\omega = 1.45 \cdot 10^{-5}$ kupszögbe eső részét már kimutatta.

A számlálásnak az alkalmazott feszültségtől való függetlenségét a 6. ábra mutatja. Az A görbe szerint az észlelt lökések

¹ GORDON L. LOCHER : loc. cit.

W. CRISTOPH : Phys. Zs. loc. cit.

² K. O. KIEPENHEUER loc. cit.

száma a mért 350 Volt szélességű tartományban független a feszültségtől. Természetesen szükséges, hogy a mágneses teret a mindenkori feszültségnek megfelelően állítsuk be. Amennyiben ezt elmulasztjuk, a B görbe adódik. Mindaddig, míg a 8. lapon említett téremisszió fel nem lép, csupán a lökések amplitudója változik a feszültséggel, míg a lökések száma *állandó marad*.

Az érzékenység meghatározására az említett fekete test szolgáltat, melynek spektrumában a fotonok számának eloszlását a hőmérséklet és hullámhossz függvényeként a PLANCK-formulából számoltuk. A víz abszorpciós görbéjének és az $Ag-Cs_2O-Cs$ réteg relatív fényérzékenységének¹ ismeretével $\lambda = 8000 \text{ \AA}$ -re (a caesium vörös maximumának helye) adódott, hogy az érzékenység

$$A = 75 \frac{\text{foton}}{\text{elektron}}$$

A KIEPENHEUER² által talált érték kék fényre $A = 4000 \text{ fot/el}$, míg KREUCHEN³ adatai szerint az ultrabolyva számlálóknál megvalósítható érték $10^4 - 10^6 \text{ fot/el}$ nagyságrendben mozog.

BARNES és CZERNY⁴ az emberi szem érzékenységeinek átlagos (egyénenként változó) alsó határát $\lambda = 5300 \text{ \AA}$ -nél (a szem érzékenységének maximuma zöldben) sec.-ként 80–150 fotonban állapítják meg. H. BUISSON⁵ észlelései szerint 350 fot/sec., H. N. RUSSELL⁶ szerint 215 fot/sec., P. REEVES⁷ szerint 480 fot sec. az alsó határ. Az általunk talált érték $\lambda = 5300 \text{ \AA}$ -re átszámítva 130 fot/el-t ad, s ha figyelembe vesszük, hogy a null-effektusunk kb. 1/60 el sec., akkor láthatjuk, hogy az eszközünkkel *mérhető* fényintenzitás alsó határa lényegesen alatta van a szem által észlelhető legkisebb fényintenzitásnak.

¹ W. KLUGE: Zs. f. techn. Phys. **16**. 184. 1935.

² K. O. KIEPENHEUER loc. cit.

³ K. H. KREUCHEN loc. cit.

⁴ R. BOWLING BARNES und M. CZERNY: Zs. f. Phys. **79**. 436. 1932.

⁵ H. BUISSON: Journ. de Phys. **7**. 67. 1917.

⁶ H. N. RUSSELL: Astrophys. Journ. **45**. 60. 1917.

⁷ P. REEVES: Astrophys. Journ. **46**. 167. 1917.

Műszerünk felülmúlja a fotografikus lemezek érzékenységét is. Ezeknél kék fényben 100—200 fotonra van szükség,¹ hogy egy ezüst szemcse létrejöjjön, és még egy oly mérésnél is, melynél az ezüst szemcséket számláljuk, alsó határt szab a mérésnek a lemezben mindig jelenlévő fátýolszemcsék száma, ami az itteni nulleffektusnál magasabb alsó határt szab meg.

Megragadom e helyen is az alkalmat, hogy munkatársaimnak, DALLOS GYÖRGY, HORVÁTH ANTAL, dr. GRÜNWARD GÉZA és dr. SZEPESI ZOLTÁN uraknak, kik a munka elvégzésében segítségemre voltak, köszönetemet fejezzem ki.

Újpest, 1938. április 11.

Az Egyesült Izzólámpa és Villamossági R. T. Kutatólaboratóriuma.

¹ J. EGGERT u. W. RAHTS: Handb. der Phys. 19. 594. 1927.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. április 11-én tartott üléséből.)

ELEKTRONENVERVIELFACHER ALS ELEKTRONENZÄHLER.

Von ZOLTÁN BAY.

Es wird ein neues Prinzip für die Konstruktion von Korpulkularzähler angegeben. Das Prinzip besteht darin, dass man für die Vervielfachung der zu zählenden Elektronen die sekundäre Elektronenmultiplikation verwendet. Wenn man für die Vervielfachung von Elektronen die neulich in der Television bekannt gewordenen Elektronenvervielfacher mit $Ag-Cs_2O-Cs$ Schicht anwenden will, so stösst man auf Schwierigkeiten. Die thermische Elektronenemission beträgt bei solchen Schichten — aus der Richardson'schen Formel mit $A = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ Amp/cm}^2 \text{ grad}$ und $\varphi = 0.75 \text{ Volt}$ berechnet — rund 10^{10} El/cm^2 bei Zimmertemperatur, was einem Anodenstrom von ca. 10^{-5} Amp , bei einem zehnstufigen Vervielfacher entspricht und was die Zählung von einzelnen Elektronen völlig unmöglich macht. Jedoch kann diese Schwierigkeit leicht umgegangen werden, wenn man den Vervielfacher mit flüssiger Luft abkühlt, da die Richardson'sche Gleichung schon bei einer Temperatur von 120° K eine Elektronenemission von $6.7 \cdot 10^{-10} \text{ El cm}^2$ ergibt.

Unter solchen Vorsichtsmassregeln arbeitet der Vervielfacher, als Elektronenzähler vorzüglich. Bei einem Gesamtvervielfachungsfaktor von 10^4 bekommt man an der Anode einen Spannungsstoss von rund $50 \mu \text{ Volt}$, was sich nach der allgemeinen Verstärkungstechnik leicht weiter verstärken lässt. Die Beobachtung der einzelnen Stösse geschah entweder mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen, oder durch einen Thyatron mit entsprechendem elektromagnetischem Zählwerk. Der Dunkeleffekt betrug

unter guten Arbeitsbedingungen 1 Stoss/Min., entsprechend wahrscheinlich der kosmischen Strahlung. Der Apparat gestattete auch die Zählung von γ Quanten.

Die theoretische Discussion der nach dem Multiplikator angewandten Röhrenverstärkung zeigt, dass die untere Grenze a der Messempfindlichkeit mit der zur Messung nötigen Zeitdauer τ durch die Gleichung

$$a \sqrt{\tau} = \text{const.}$$

verknüpft ist. τ ist der Frequenzbreite umgekehrt proportional. Daraus folgt, dass das hohe Auflösungsvermögen des Vervielfachers, das nur durch die Laufzeit der Elektronen bedingt ist und mindestens 10^{-8} sec beträgt, vollständig ausgenutzt werden kann, wenn die Frequenzbreite des Verstärkers entsprechend gross gewählt wird, was natürlich eine entsprechend hohe Vervielfachung des Multiplikators notwendig macht. Im Falle eines kleineren Multiplikationsfaktors kann zwar die gewünschte beliebige Empfindlichkeit erreicht werden, jedoch nur auf Kosten des Auflösungsvermögens. Tab. 2. zeigt die diesbezüglichen zusammengehörigen Werte.

Die Anwendung des Apparates als Lichtquantenzähler ergibt eine Ausbeute von rund 75 Phot./Elektron im roten Maximum (8000 Å) der Empfindlichkeitskurve der Silber-Cs-Schicht. Durch diese hohe Empfindlichkeit und durch die vorzügliche Reproduzierbarkeit stellt der Apparat den zurzeit besten Lichtquantenzähler dar.

Újpest, den 11. April 1938.

Forschungslaboratorium der Vereinigten Glühlampen und Elektrizitäts A.-G.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. April 1938.)

AZ ACÉLÖTVÖZÉS FEJLŐDÉSÉNEK IRÁNYA, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL AZ ACÉL KOPÁSÁRA ÉS HŐÁLLÓSÁGÁRA.

COTEL ERNŐ-től.

Több mint tíz évvel ezelőtt azt írtam a «Természettudományi Közlöny» egyik számában, hogy a kultúra szempontjából tulajdonképpen a vas, illetőleg az acél az igazi *«nemes»-fém*, minthogy *«a fémanyagok közül a vas és az acél az, amelyik az emberiség legnemesebb gondolatát, a haladást, legközvetlenül szolgálja, munkálja, támogatja»*. Amilyen kétségtelen, hogy a vas technológiájának nagy-szerű fejlődését a kultúrélet tökéletesedése *tette szükségessé*, éppen úgy egészen bizonyos az is, hogy a kultúrélet mai fejlettségét csakis a vas és az acél fizikai, technológiai tulajdonságainak állandó javulása *tette lehetővé*. Az emberi civilizáció és a vasötvözés fejlődése között szoros összefüggés, benső kapcsolat állapítható meg.

Akkori megállapításaimat az azóta elmúlt évtized fejlődési fokozatai is teljes mértékben igazolták. A technikai kultúrának állandóan olyan újabb igényei vannak, amelyek az acélötvözés tudományát állandóan újabb kutatásokra ösztönzik. Hogy a mozgató erők közül itt csak a két legjellemzőbbet ragadjam ki, rámutatok a közúti és főleg légi közlekedés soha nyugvópontra nem jutó sebességnövelő igényeire és a haditechnika támadó és védő eszközeinek folytonosan növekvő anyagminőségi kívánalmaira. Az acélötvözés terén sohasem állhat be a nyugalom, mint-hogy örökké élni fog az a paradox kívánság, amely minden páncélon áthatoló lövedékanyagot akar ugyanakkor, amikor egy másik haditechnikai telepen olyan páncélsanyagot keresnek, amelyet semmiféle lövedék sem üthet át!

Ha ehhez hozzávesszük azokat a jelentős érdekeket, amelyek a technikának ahhoz az igyekezetéhez fűződnek, hogy újabb konstrukcióihoz rozsa-, sav- és tűzálló acélt, nagy húzószilárdságú, de ugyanakkor nagy rugalmassággal is rendelkező acélt, az eddigiek-nél nagyobb koptató-ellenállású acélt, a rádiókészülékek számára pedig jó mágnesacélt kaphasson, kitérül előttünk az a mozgalmas kép, amelyet az acélötvözés mai helyzete és annak várható fejlődése nyújt.

Az emberi civilizáció legnagyobb anyagának, az acélnek — csodás tulajdonságai mellett — általában két nagy gyöngéje van: az egyik a *nagy fajsúly*, a másik a *rozsdásodása*. Természetes tehát a kohászoknak az az igyekezete, hogy ezen a két gyöngén segítsenek.

A fajsúly az elemi anyagnak olyan sajátja, amelyen ötvözéssel nem, illetőleg csak alig változtathatunk. Kerülő úton azonban még ehhez a kérdéshez is hozzáférkezhetünk úgy, hogy megfelelő ötvözéssel az acél húzószilárdságát és rugalmassági határát növeljük, amivel elérjük azt, hogy ugyanakkora terheléshez kisebb keresztmetszvényű, tehát kisebb súlyú acélszerkezet is elegendő lesz. A 0.8—1.0% szilíciumot tartalmazó, ú. n. *épitőacél*, mint a könnyebb, súlyban csökkentett, teherviselő acélszerkezetek anyaga igen jól bevált és használata állandóan terjedőben van. Az acél rugalmassági határának növelésében tehát olyan eszközünk van, amelynek segítségével mindig csökkenthetjük a szerkezethez szükséges acélmennyiség súlyát, feltéve, hogy az ötvözés költsége kisebb, mint a megtakarított acélmennyiség ára. A teherviselő szerkezet statikai határfokán kívül tehát az acélangag metallurgiai és gazdasági határfoka is gondosan figyelembe veendő.

A *rozsdálló acélok* gyártását — szabatos módszerrel és rendszeresen — a világhírű essen KRUPP-gyár indította meg a világháború idején. Az acél második nagy gyöngéje a rozsdásodás, ma már tökéletesen megszüntethető; az egész művelet tisztán gazdaságosság kérdése. Minthogy az acél csupán drágább anyagokkal, *nikkellel* és *krómmal* való ötvözés révén tehető rozsdállóvá, kétségtelen, hogy a rozsdállóvátétel csak értékesebb, illetőleg csak olyan acéltárgyak gyártása kapcsán lehet megokolt, amelyek eddig drága fémekből (ezüstből, nikkelből) készültek. A ma

használatos rozsdáálló evőeszközök acélananyagában 0.15% karbon mellett rendszeren kb. 15% króm van. *A rozsdáálló késpengék* anyaga ugyanennyi krómot, de háromszor annyi karbont (kb. 0.45%) tartalmaz. *A saválló acélok* anyagában az előbbi ötvözőelemeken kívül 4—20% molybdén is van.

A rozsdá- és saválló acélok csoportjával kapcsolatban kell megemlítenünk az ugyancsak mindjobban előtérbe kerülő *tűzálló*, helyesebben *hőálló acélokat* is, minthogy a hőállóság *kémiai* feltételei körülbelül olyanok, mint a savállóság és méginkább mint a rozsdállóság feltételei. Hőállóknak azokat az acélokat mondjuk, amelyek 600°-nál nagyobb hőmérsékletű égésterményekben (lángban, füstben) hosszú időn át sem korrodálódnak számbavehető mértékben. A hőálló acéloknak ez a becses tulajdonsága onnan ered, hogy a megfelelő ötvözés hatóanyagai a meleg gázok behatására olyan kémiai összetételű *reveréteget* hoznak létre a meleg gáztérben álló acél felületén, amely reveréteg rendkívül tömör, az acél főtömegéhez szívósan tapadó és repedésre nem hajlamos. Ez a reveréteg az, amely az acéltárgy főtömegét a gázok további maróhatásától tartósan elzárja. A megfelelően ötvözött hőálló acél hőállósága annál erőteljesebb, minél kevesebb a ferro- és a ferrioxid az egyébként természetesen oxidokból álló felületi reverétegben. A közönséges acélok ferro-ferrioxid-jellegű revéje ugyanis lazaállományú, porózus és erősen repedezésre hajlamos. A hőállóságot biztosító reveréteg szívóssága, rugalmassága annál fontosabb, minél nagyobbak annak a korrodáló gáztérnek hőingadozásai, amelyben az acélnak tartós teherviselő szerepet óhajtunk biztosítani.

Kétségtelen, hogy a melegehatásra képződő reverétegnek — magas hőmérsékletű gáztérben — csakis akkor lehet igazi és erőteljes védőhatása, ha a fentebb említett fizikai tulajdonságokkal bíró reve anyaga olyan kémiai összetételű, hogy a nagy hőmérsékletet — éppen kémiai jellegénél fogva — megolvadás nélkül elbírhassa. A legnagyobb hőmérsékletekben tehát csak olyan reverétegnek lehet az acél anyagát védelmező hatása, amelynek anyagában döntő szerepet kaphatnak *a kerámiában is tűzállónak ismert oxidok*, amilyenek az alumíniumoxid, a magnéziumoxid és a kvasav. Ez a körülmény ezidőszerint nem részesül figyelemben. Így

például az olyan hengeres acéltestek,¹ amelyeknek nagy belső nyomást és ugyanakkor nagy hőmérsékletet is kell bírniok, az egész világon *krómnikkel* — acélból készülnek, holott ennek az acélötvözetnek tűzállósága nem elegendő nagyobb hőfokok kielégítően tartós elviselésére. A huszadik század eddigi évtizedeiben ezen a téren a döntő szempont az erősen megnövekedett belső nyomással kapcsolatos nagy szilárdság és lehetőleg nagy szívósság feltétele volt. Ez — meggyőződés szerint — ma már részben téves, részben meghaladott álláspont, mert a tapasztalat azt mutatja, hogy az ilyen hengeres acéltestek nem szétszakadás, vagy maradó tágulás következtében válnak használhatatlanná, hanem anyaguk hőállóságának fogyatékosága miatt. Belső felületükön ugyanis hosszabb-rövidebb használat után repedezések, kipergések és helyenkénti megolvadások mutatkoznak, ami az anyag kellő hőállóságának kétségtelen hiányára mutat.

Ha a kérdéses anyagot *szilíciumacélból* készítenék, a következő előnyöket biztosíthatnók : Az ismétlődő gyújtások és robbanások nyomán keletkező nagy hőmérséklet hatására a szilíciumacélból való henger belső felületén olyan védő reveréteg, vagy inkább *filmréteg* képződik, amelynek hatóanyaga — a tűzálló kovasav — megvédi a henger főtömegét a további oxidálódástól, elégéstől, megégéstől. A szilícium, mint a vasnál könnyebben oxidálódó és stabilisabb oxidot alkotó elem, nemcsak a vasötvözet megolvasztott oldatában, hanem szilárd oldatában is *gyorsabban és korábban* fog oxidálódni, mint a vasötvözet egyéb kísérő elemei, illetőleg gyorsabban és korábban mint maga a vas. Amint a MARTIN-acélglyártás során a kemence megolvadt, higanfolyó, acélfürdőjében az adag szilíciumtartalmának gyors és kiadós kiegészése, oxidálódása védi meg az acélt az oxidálódástól és ezzel minőségének megromlásától, éppenúgy a hideg állapotú szilárd szilíciumacélt is csak az acél szilíciumtartalmának gyors és *előresiető* felületi oxidációja védi meg a további oxidálástól, tönkremenéstől, ha az acél nagyhőmérsékletű oxydáló gáztérbe kerül. Az acél szilíciumtartalmának előresiető oxydálódása következtében a szilíciumacél tűzbenálló felü-

¹ Belsőégésű motorok hengerei. Robbanáskor a hőmérséklet a 2000 C°-ot is elérheti.

letén olyan reve fog képződni, amelyben *sokkal több, néha sokszorta több a szilícium* (illetőleg ennek oxydálódásából keletkezett *kovasav és szilikát*), mint magában az acélban. Intézetem egyik doktorjelöltje, BENESCH FERENC főmérnök, kívánságomra megvizsgálta a 4% szilíciumot tartalmazó acélok felületi oxydálódását 400, 600 és 800°-os hőmérsékleten és azt találta, hogy az acél szilíciumtartalmának előresietése a magasabb hőmérsékleten sokkal erőteljesebb, mint a vizsgálat körébe vont alacsonyabb hőmérsékleteken, ami a szilíciumacél hőállóságának további előnyös mellékjelensége. *A magasabb hőmérsékleteken tehát a szilíciumacél védő reverétege esetleg kizárólag szilikátokból áll és a vas szabad oxidjait nem is tartalmazza többé.*

Az elmondottaknak nagy gyakorlati jelentőségük kell hogy legyen és azt hiszem, hogy az acélötvözés terén a szilíciumacélnek a jövőben gyorsan fokozódó nagy jelentősége lesz. Az acélnek szilíciummal való ötvözése különben is a legolcsóbb ötvözési módok egyike és éppen ezért feltűnő, hogy az acélötvözésnek ez a területe maradt eddig viszonylag a legelhanyagoltabb. Magyarországon a szilíciumacélok gyártása és vizsgálata már csak azért is új lendületet kaphat, mert éppen a legutóbbi hetekben alakult meg az első magyar *ferroszilíciumgyár* és minden remény meg van rá, hogy a szilíciumacélok ötvözőanyagát, a ferroszilíciumot nem kell ezentúl külföldről behozni. A szilíciumacéloknak — mint már említettem — szilárdsági tulajdonságai is olyan értékesek, hogy a szilíciumacélok ötvözeteinek kutatása ezen a vonalon is a legszebb kilátásokkal kecsegtethet.

Ha most áttérünk az acélnek tartós surlódó igénybevételek hatása alatt beálló *kopására*, meg kell állapítanunk, hogy a nagyobb koptatóellenállás biztosítása érdekében eddig jóval több történt, mint az acél hőállóságának fokozása terén. Ez természetes is, hiszen az emberiség évezredek óta figyeli az acél kopását, míg nagy hőmérsékletekkel — amelyek az acélt is érintik — csak talán száz év óta dolgozik.

Az acél kopásának kérdésével a *Széchenyi Tud. Társaságtól* kapott megbízás alapján foglalkoztam. Koptatóműszer gyanánt a többkamrás forgó acéldobot választottam, mert meggyőződésem szerint egyedül ez a berendezés biztosíthatja a próbadarabok töké-

letesen azonos módon történő, egyidejű és egyben tökéletesen azonos időtartamú koptató igénybevételét. Csakis ez a módszer alkalmas arra is, hogy a próbakockák egyidejű, azonos mértékű és időtartamú hidegmegmunkálását is biztosítsa, a próbakockáknak az acéldob belső felületén való folytonos görgetése révén.

1. táblázat.

Az acélróbák vegyi összetétele.

A próba jele	C	Mn	Si	Cu	P	S
	tartalom %-ban					
1	0.90	0.33	0.01	0.25	0.03	0.035
2	0.78	0.34	0.01	0.27	0.01	0.030
3	0.70	0.37	0.01	0.23	0.01	0.030
4	0.60	0.41	0.01	0.24	0.01	0.030
5	0.46	0.43	0.01	0.24	0.01	0.030
6	0.41	0.43	0.01	0.24	0.01	0.025

2. táblázat.

A koptató kísérlet adatai és eredményei.

A próba jele	C tartalma	Brinell-keménység		Súlyvesztesség %-ban			A koptatás arányszáma a koptatás végén	Mikroszövet
		a lágyítás után	a koptatás végén	70	140	190		
1	0.90	184	204	2.41	4.58	5.97	1.01	szálas perlit, kezdődő cementit-háló
2	0.78	205	226	2.38	4.57	5.89	1.00	szálas perlit
3	0.70	178	202	2.61	5.01	6.53	1.11	szálas perlit, gyenge ferrit-háló
4	0.60	174	184	2.66	5.07	6.62	1.12	szálas perlit, erősebb ferrit-háló
5	0.46	143	158	2.59	4.93	6.53	1.11	szemcsés szerkezetű ferrit és perlit
6	0.61	139	146	2.74	5.24	6.91	1.17	mint 5.-nél, de a ferrit túlsúlyban

Az acélpróbál vegyi összetételét az I. táblázat tünteti fel. A számozás sorrendjében készült acélkockák — benzinben való alapos mosás után — a megfelelő számmal jelzett koptatókamrákba kerültek, ahol súlyuk négyszeresének megfelelő mennyiségű szemcsés korund (smirgli) várta a próbákat.

A motorral hajtott koptatódob percenkénti fordulatszáma 84, illetőleg óránkénti fordulatszáma kereken 5000 volt.

A koptatás eredményeit a hozzátartozó adatokkal együtt a II. táblázat mutatja.

Erdekes, hogy a 0·46 és 0·70% karbonhatárok közé eső acélpróbák (3., 4., 5. sz.) kopásának számértékei alig mutatnak eltérést egymástól. Ebből arra lehet következtetni, hogy *a kopás mértéke mindaddig közel állandó, amíg a szövetségben a ferrit határozottan hálós jellegű.* A kopás csak akkor csökken egyszerre jelentős mértékben, ha a ferrit a szövetségből eltűnően van, vagyis 0·7%-nál nagyobb karbontartalmaknál; viszont csak akkor növekszik meg a kopás erősen, ha a szövetségben a ferrit már nem hálót, hanem egymásbafolyó mezőket alkot. Ebből világosan következik, hogy az ötvözetlen sínacél legkisebb kopásának legkedvezőbb feltétele a tiszta perlitese szövetség megközelítésében áll rendelkezésünkre. Ha a sín hibátlan gyártású, és anyaga fertőzvényektől mentes, egyáltalában nem kell attól tartanunk, hogy az ilyen nagy karbon-tartalmú sínekből álló pályán gyakoribb lesz a sintörés.

A M. Á. V. jelenlegi vonalain, minthogy ezek túlnyomórészen alföldi jellegű és nagy görbületi sugarú kanyarulatokkal épült pályák, síneiknek kopása tehát amúgy is rendkívül csekély, céltalan lenne ilyen rendkívül nagy kopási szilárdságú sínek alkalmazása, mivel ilyen nagykeménységű sínek gyártása nagyobb hengerkopással, nagyobb munkafogyasztással, szerelőműhelyi megoldozása pedig jelentékenyen nagyobb szerszámkopással, vég-eredményben tehát jelentékeny költségtöbblettel jár.

Vizsgálataim alapján megállapítottam, hogy *a koptatás olyan lassú «mechanikai oldás»-nak tekinthető, amelynek során a koptatott anyag különböző keménységű szövetelemei különböző sebességgel «oldódnak ki» az anyag tömegéből.* Közelebről megvilágítva: *minél keményebb az ötvözött acél valamely szöveteleme, annál később fog az a koptatás hatására «kioldódni» az acél szövetségéből és viszont minél*

lágýabb valamelyik szövetalkotó, annál gyorsabban fog kikopni az acél főtömegéből. Minél közelebb állnak tehát valamely állandó üzemi igénybevétel technológiai feltetelei az így elgondolt eszményi koptatófolyamat feltételeihez, annál inkább tekinthetjük azt az üzemi igénybevételt igazi koptatásnak. Ha a fokozatos keménység szerinti mechanikai «kioldás» lehetősége, feltétele nincs meg, akkor az acél anyagrészcskéinek fokozatos eltávolítása már nem tekinthető igazi koptatásnak, hanem sokkal inkább megmunkálásnak. A sínek vasútüzemi igénybevétele éppen ezért csak egyenesvonalú, vízszintes pályákon és tiszta «gördülés» esetében tekinthető a koptatáshoz közelálló folyamatnak, míg a hegyi és kanyarulatós pályarészek igénybevétele megmunkálásnak kell tartanunk. *A hegyi pályák sínanyagának megválasztásában tehát nem az acél keménységét és kopási ellenállását, hanem egyedül a megmunkálhatóságát kell és szabad irányadónak tekintenünk.* A viszonylagosan kis keménységű, de igen nehezen megmunkálható 12%-os mangánacéloknak a nehéz hegyi pályákon elért kitűnő tartóssága éppen elég bizonyíték lehet ebben a kérdésben.

Ha az elmondottakat összefoglaljuk, arra az eredményre jutunk, hogy az acélötvözés legfejlődésképesebb területe a nagy koptató ellenállású, de főleg a rozsdálló és a hőálló acélok gyártása. Ezen a területen a kutatómunka még igen értékes eredményekhez juthat. Minden jel arra mutat, hogy *az eddig elhanyagolt szilíciumacél néz a legnagyobb fejlődési lehetőség elé.*

Irodalom.

1. COTEL E : Az acél kopásának kérdése. Anyagvizsgálók Közlönye 1934. évfolyamának 7. és 8. számaiban.
2. COTEL E : La Question de l'usure des rails d'acier, Revue de Métallurgie. Paris, 1935. évf 137 oldal
3. COTEL E : A Martin-acélgártás. Sopron, 1937.
4. ED. HOUDREMONT: Sonderstahlkunde. Berlin, 1935.
5. K. DAEVES: Werkstoffhandbuch Stahl u. Eisen, Düsseldorf, 1937.
6. E. SCHEIL u. K. KIWIT: Einfluss von Legierungszusätzen auf das Zundern des Eisens, Archiv für das Eisenhüttenwesen. 9. évf. 405, o.
7. W SWINNING: Konstruktion u. Werkstoff der Geschützrohre. Berlin, 1934.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. ápr. 11-én tartott üléséből.)

DIE ENTWICKLUNGSMÖGLICHKEITEN
DER STAHLLEGIERUNGEN MIT BESONDERER
RÜCKSICHT AUF DIE HITZEBESTÄNDIGKEIT UND
VERSCHLEISSFESTIGKEIT DES STAHLSES.

Von ERNST COTEL.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der Berg- und Hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin-József-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften Band X. 1938.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. Apr. 1938.)

A PNEUMATIKUS SZÉNELOKÉSZÍTÉS MECHANIKAI ALAPEGYENLETEI.

FINKEY JÓZSEF I. tagtól.

I. Bevezetés.

Egy 1924-ben megjelent könyvemben¹ részletesen kifejtettem a nedves ércelőkészítés mechanikai alapelveit és alapegyenleteit. A száraz vagy pneumatikus mechanikai eljárás az ércelőkészítésben akkor sem bírt, ma sem bír fontossággal, a szénelőkészítésben azonban újabban mindjobban elterjed a gyakorlatban,² miért is indokoltnak tartom ennek az eljárásnak is a tudományos kidolgozását, ami nemcsak elméleti, hanem gyakorlati szempontból is nagy fontossággal bír.

Mechanikai előkészítés alatt általában azt az előkészítő eljárást értjük, mellyel a kellőleg feltárt nyersérc vagy nyersszén ásványtani vagy közettani komponenseit a *fajsúlyuk* alapján választjuk szét egymástól. Nedves eljárásnál *vízben*, pneumatikus eljárásnál pedig *levegőben* történik az előkészítés.

Hogy az alapegyenletek gyakorlatilag alkalmazhatók legyenek, azok meghatározásánál figyelembe kell venni mindazokat a feltételeket, melyek mellett a pneumatikus szénelőkészítés végbemegy.

Az egyenletekben szereplő mennyiségeket — értekezésem

¹ J. FINKEY: Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung. Berlin, 1924. Angol fordítása 1930-ban, orosz fordítása pedig 1932-ben jelent meg. Ezt a könyvemet a következőkben *Grundlagen* cím alatt fogom idézni.

² FINKEY J.: A száraz előkészítés alkalmazása hazai szénbányászattunkban. Bányászati és Kohászati Lapok, 1933. 24. sz.

céljára való tekintettel — *technikai egységekben* kifejezve adom meg, vagyis a hosszúság egysége a cm, az idő egysége a sec, az erő (súly) egysége pedig a gr,¹ úgyhogy 1 gr = 981 dyn. A fizikai állandók numerikus értékeinek és dimenziójának meghatározásánál ez mindig figyelembe veendő.

Mivel a levegőnek úgy fajsúlya, mint viszkozitása lényegesen függ a hőmérséklettől, azért számításaimat a következőkben 20 C°-ra vonatkoztatom. Ezen hőmérséklet és 1 kg/cm² nyomás mellett a levegő fajsúlya

$$\Delta = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ gr/cm}^3,$$

viszkozitása pedig²

$$\eta = 0.183 \cdot 10^{-6} \text{ gr. sec/cm}^2.$$

A pneumatikus szénelőkészítés nyersanyagának fajsúlya (szén és meddő)

$$\delta = 1.2 - 2.8,$$

átmérője pedig

$$d = 0.05 - 8 \text{ cm}$$

között van.

8 cm-nél nagyobb szemeknél nem indokolt a mechanikai eljárás, 0.05 cm-en alól pedig már nem ad jó eredményt, illetőleg ez a rész mint előkészítetlen szállópor fogható fel.

A következőkben mindig tekintettel leszek az előbb megadott értékekre és határookra.

II. Az esési végsebesség.

Az esési végsebesség a változó esési sebességnek határértéke. Ez a két érték tulajdonképpen csak $t = \infty$ idő alatt lesz egymással egyenlő. A nedves ércelőkészítés feltételei mellett azonban az esési sebesség vízben igen rövid idő (a sec néhány század része) alatt olyan mértékben megközelíti a végsebességet,

¹ A gramm-tömegtől való megkülönböztetés végett jelölöm gr-rel g helyett.

² Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch. Berlin, 1935. 25. kiadás. I. k. 333. l.

hogy gyakorlatilag elhanyagolható hibával, a változó esési sebesség helyett rendszerint az állandó végsebességgel számolhatunk.

A nedves ércelőkészítésben a végsebességet az ásványszem átmérőjének nagysága szerint rendszerint a NEWTON- és a STOKES-féle képletekkel határozzák meg.

Vízben való esésnél a d átmérőjű és $\delta > 1$ fajsúlyú gömb végsebessége NEWTON képlete szerint:¹

$$v_n = \sqrt{\frac{2gd(\delta - 1)}{\Delta}}, \quad (1)$$

hol Δ a víz fajsúlya. Levegőnél Δ elhanyagolható δ mellett. Figyelembe véve g és Δ számértékét, nyerjük *levegőre*:

$$v_n = 1278 \sqrt{d\delta} \text{ cm/sec.} \quad (2)$$

Ez a képlet, mint ismeretes, a sebesség négyzetével arányos hidromechanikai ellenállás figyelembevételével vezethető le.

STOKES képlete szerint,² mely a sebesség első hatványával arányos folyadéksúrlódást veszi figyelembe, a végsebesség:

$$v_s = \frac{d^2(\delta - 1)}{18\eta}. \quad (3)$$

Levegőnél Δ ismét elhanyagolható δ mellett. Ha még figyelembe vesszük η -nak I. alatt megadott számértékét, akkor, ugyancsak *levegőre*, nyerjük:

$$v_s = 303000\delta d^2 \text{ cm/sec.} \quad (4)$$

NEWTON képlete gyakorlatilag d -nek egy meghatározott értéke, a *kritikus átmérő* fölött, STOKES képlete pedig az alatt használható. A kritikus átmérő a

$$v_n = v_s$$

feltételből határozható meg.³

¹ *Grundlagen*, 18—23. l. Az előkészítésben RITTINGER-féle képletnek is nevezik.

² G. G. STOKES: Velocity of a sphere falling through a viscous liquid. *Math. and Phys. Papers*. Cambridge, 1901. 60. l. és *Grundlagen* 37—40. l.

³ *Grundlagen*, 46—47. l.

Ha ekkor d helyett D -t írunk, a 2. és 4. egyenlethől nyerjük, hogy *levegőben* való esésnél a *kritikus átmérő*:

$$D = \frac{0.0261}{\sqrt[3]{\delta}} \text{ cm.} \quad (5)$$

Nyilvánvaló azonban, hogy a STOKES-féle képlet alkalmazhatóságának a felső határa a valóságban az (5) egyenlet által megadott érték alatt van, mert úgy v_n -nek, mint v_s -nek egy másodrendű parabolát meghatározó képlete csak megközelítő képlet. Előbbi ugyanis nem veszi figyelembe a folyadéksúrlódást, utóbbi pedig a sebesség négyzetével arányos ellenállást. Figyelembe véve az I. alatt megadott $\delta = 1.2 - 2.8$ értéket, az (5) egyenlet szerint a kritikus átmérő két szélső értéke lesz:

$$D = 0.025 - 0.018 \text{ cm.}$$

Mindkét érték kisebb az I. alatt megadott 0.05 cm-nél, ami azt jelenti, hogy a *pneumatikus szélelőkészítés elméleti tárgyalásánál a STOKES-féle képletet figyelmen kívül hagyhatjuk.*

Az a kérdés azonban, hogy ebben az esetben a NEWTON-féle képletet minden további feltétel nélkül alkalmazhatjuk-e, még közelebbi vizsgálatot igényel.

Egy 1926-ban megjelent értekezésemben¹ kimutattam, hogyha esés közben úgy a folyadéksúrlódást, mint a sebesség négyzetével arányos ellenállást is figyelembe vesszük, az esési végsebesség a következő általános képlettel fejezhető ki:

$$v_f = C \left[\sqrt{\frac{C^2}{4K^2d^2} + d(\delta - J)} - \frac{C}{2Kd} \right], \quad (6)$$

hol C és K a NEWTON- és STOKES-féle képletek együtthatói, tehát levegőre:

$$C = 1278 \text{ és } K = 303000.$$

Levegőben való esésnél J elhanyagolható δ mellett, úgyhogy e képlet alakja levegőre:

$$v_f = C \left[\sqrt{\frac{C^2}{4K^2d^2} + d\delta} - \frac{C}{2Kd} \right]. \quad (7)$$

¹ J. FINKEY: Die allgemeine Formel der Endgeschwindigkeit. Montanistische Rundschau, 1926. 7. sz.

Ez a képlet, mint szélső értéket, magában foglalja úgy a STOKES-, mint a NEWTON-féle képletet. Ugyanis:

$$\sqrt{\frac{C^2}{4K^2d^2} + d\delta} = \frac{C}{2Kd} \sqrt{1 + \frac{4K^2d^3\delta}{C^2}}.$$

Ha a négyzetgyökös kifejezést hatványsorba fejtjük és a d -nek hatodik és magasabb hatványait tartalmazó tagokat elhanyagoljuk, akkor nyerjük, hogy

$$v_f = K\delta d^2 = v_s.$$

Ha pedig $\frac{C^2}{4K^2d^2}$ értéke $d\delta$ mellett, azaz $\frac{C}{2Kd}$ értéke $d\delta$ mellett elhanyagolható, akkor

$$v_f = C\sqrt{d\delta} = v_n.$$

Ezt a képletet alkalmazva, legfeljebb $10\sqrt{x}$ % hibát követünk el, ha

$$\frac{C^2}{4K^2d^2} \leq \frac{x d \delta}{100},$$

vagyis, ha

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{100C^2}{4xK^2\delta}}. \quad (8)$$

Ha $x=1$, akkor az elkövetett hiba legfeljebb 10%. Ebben az esetben

$$\frac{C^2}{4K^2d^2} \leq \frac{d\delta}{100},$$

tehát

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{25C^2}{K^2\delta}},$$

azaz C és K értékeit behelyettesítve:

$$d \geq \frac{0.0728}{\sqrt[3]{\delta}} \text{ cm}, \quad (9)$$

vagy az (5) képlet szerint:

$$d \geq 2.79/l. \quad (10)$$

A fajsúlyoknak előbb megadott szélső értékeivel számítva, nyerjük a (9) vagy (10) egyenlőtlenségből, hogy

$$d \geq 0.07 - 0.05 \text{ cm.}$$

Mivel a pneumatikus szélelőkészítésnél a gyakorlati szem-nagyság 8—0.05 cm között van, azért látjuk, hogy a *száraz szélelőkészítésnél használhatjuk általában az esési végsebesség-nek NEWTON-féle képletét.*

III. Az esési sebesség.

Az esési végsebesség, mint határérték, úgy a nedves, mint a száraz előkészítésnek egyik legfontosabb mechanikai fogalma. Az előbbi vizsgálatokkal annyit már megállapítottunk, hogy a pneumatikus szélelőkészítésnél elég csupán a NEWTON-féle képletet figyelembe venni, de közelebbről meg kell vizsgálnunk azt a kérdést is, hogy gyakorlatilag kielégítő pontossággal milyen feltételek mellett lehet a változó esési sebességet az állandó végsebességgel helyettesíteni?

Mivel a következőkben az esési végsebességnek csak a NEWTON-féle képletét fogom alkalmazni, azért annak értékét a továbbiakban v , a változó esési sebességet c , az esési utat h , az időt pedig t által fogom jelölni. A nedves előkészítéssel szemben továbbra is figyelembe veendő, hogy Δ elhanyagolható δ mellett.

Idézett könyvem megállapítása szerint ebben az esetben¹ (levegőben) az *esési sebesség*:

$$c = v \cdot \operatorname{tgh} \frac{gt}{v}, \quad (11)$$

a t idő alatt megtett út pedig:

$$h = \frac{v^2}{g} \cdot \log \cosh \frac{gt}{v}. \quad (12)$$

Kimutattam azt is, hogy 1.2%-nál kisebb hiba elkövetésével, gyakorlatilag $c=v$, ha

$$t \geq \frac{2.5v}{g}. \quad (13)$$

¹ Grundlagen, 22. és 26. l.

0·1–8 cm átmérő és 1·2–2·8 fajsúly mellett, a 2., 13. és 12. egyenletekből kiszámított értékeket a következő 1. táblázatban állítottam össze.

1. táblázat.

d cm	δ	v cm/sec	t sec	h cm
0·1	1·2	443	0·13	358
0·1	2·8	676	1·72	845
8·0	1·2	3960	10·09	28137
8·0	2·8	6049	15·40	67548

Ha tekintetbe vesszük, hogy a száraz szénelőkészítésben az ásványszemek esési magassága ritkán haladja meg a 100 cm-t, sőt gyakran annál jóval kisebb, akkor beláthatjuk az 1. táblázat adataiból, hogy az esési végsebesség értékét a pneumatikus szénelőkészítésben nem használhatjuk olyan értelemben és vonatkozásban, mint a nedves ércelőkészítésben. Hiszen a lehetséges esési úton még az egészen finom ásványszemek esési sebessége sem közelíti meg kellő mértékben a végsebességet, annál kevésbé lehet ezen rövid úton a végsebességet megközelítőleg középsebességnek tekinteni.

Ez tehát azt jelenti, hogy a megadott feltételek mellett az esési út nem számítható ki a

$$h = vt,$$

hanem a

$$h = \int c \cdot dt$$

egyenletből. *Ez azonban távolról sem jelenti azt, hogy az esési végsebesség fogalmának a száraz szénelőkészítésben semmi jelentősége nincsen. Sőt, amint ki fogom mutatni, gyakorlatilag éppen azok a feltételek bírnak különös fontossággal, melyek mellett az eredmény az esési végsebességgel összefüggésbe hozható.*

Az eddigiekben közölt képletek gyakorlati alkalmazásánál tekintetbe kell még venni a következőket is.

A (2) egyenlet $C=1278$ együtthatója *síma gömbfelületre* érvényes, d pedig a gömb átmérőjét jelenti. A szén és meddő darabok alakja azonban sohasem gömb, rendszerint szabálytalan poliéder, felülete sem síma. Az ekvivalens gömbátmérő, vagy a középátmérő meghatározása gyakorlatilag nagy nehézséggel járna. A gyakorlatban valamely szén vagy meddő darab átmérője alatt annak a szitának a lyukbőségét értik, melyen az illető darab közvetlenül átesett, de a következő közvetlenül kisebb lyukbőségű szitán rajta maradt.

Az eddigi képletekkel kifejezett törvényszerűségek természetesen ebben az esetben is érvényesek maradnak, csupán C értékét kell helyesen megválasztani.

Szénnek levegőben való esésére nem áll rendelkezésünkre kellő számú és kifogástalan kísérleti adat, úgyhogy egyelőre a nedves ércelőkészítésből ismert, s már kifogástalanul tisztázott összefüggést vehetjük figyelembe.

E szerint¹ a NEWTON-féle képlet együtthatója szabálytalan alakú ércszemekre átlagban 55%-a a síma gömbre vonatkoztatott értéknek. Ennek alapján gyakorlati számításoknál a $C=703$ együtthatót kell alkalmazni. A

$$v = 703 \sqrt{d\delta} \quad (2a)$$

képlet figyelembevételével az 1. táblázat adatai a következőképpen módosulnak (1. a 2. táblázatot).

2. táblázat.

d cm	δ	v cm sec	t sec	h cm
0.1	1.2	244	0.62	110
0.1	2.8	372	0.95	256
8.0	1.2	2178	5.55	8760
8.0	2.8	3327	8.47	20440

¹ *Grundlagen* 34. l.

A 2. táblázat adataiból látjuk, hogy az 1. táblázatból levont általános következtetések semmi módosításra nem szorulnak.

IV. Az együttüledés szerinti osztályozás.

Ha vízszintes vagy gyengén lejtős, állandó sebességű vízáramba különböző végsebességű ásványszemeket bocsátunk ($\delta > 1$), azokat a vízáram általában különböző távolságra szállítja el, míg feneket érnek. Az *egyenlő távolságra elszállított ásványszemek együttüledő ásványszemek*, s az osztályozásnak ez a módja az ú. n. együttüledés szerinti osztályozás.

A nedves ércelőkészítés feltételei mellett az együttüledés szerinti osztályozás *végsebesség szerint való osztályozás*,¹ azaz ebben az esetben az *együttüledő ásványszemek egyenlő esési végsebességgel bírnak*; és a vízáram az egyes ásványszemeket annál nagyobb távolságra szállítja el, minél kisebb az esési végsebességük.

Levegőáramban is lehet együttüledés szerint osztályozni. Legyen z esési magasság h , az esés irányára merőleges légáram állandó sebessége pedig V . Egy v végsebességgel bíró ásványszem nyugvó levegőben a h magasságról a 12. egyenlet szerint:

$$t = \frac{v}{g} \cdot \arg \cosh e^{hg/v^2} \quad (14)$$

idő alatt esik le, s ugyanezen idő alatt a légáram irányában

$$s = Vt = \frac{Vv}{g} \cdot \arg \cosh e^{hg/v^2} \quad (15)$$

utat megtéve ér feneket. Egy másik, v' végsebességű ásványszem által hasonlóan megtett út ($h = \text{konstans}$):

$$s' = \frac{Vv'}{g} \cdot \arg \cosh e^{hg/v'^2}$$

Ha ez a két ásványszem együttüledő, akkor $s = s'$ azaz

$$\frac{v}{v'} = \frac{\arg \cosh e^{hg/v'^2}}{\arg \cosh e^{hg/v^2}} \quad (16)$$

¹ *Grundlagen*, 86—100. l.

A $v=v'$ feltétel kielégíti a 16. egyenletet, nyilvánvaló azonban, hogy nem ez az egyedül lehetséges megoldás, mert ha v -t vagy v' -et növelem, akkor a jobboldali tört nevezője, illetőleg számlálója kisebbedik és viszont.

Meg kell tehát vizsgálnunk, hogy milyen feltételek mellett érvényes a $v=v'$ megoldás, illetőleg *mikor fogja a nagyobb vége sebességű ásványszem a kisebb vége sebességűt esés közben megelőzni*, mert ekkor a különböző vége sebességű ásványszemeknek a légáram által való elszállítása az előbb megadott módon fog végbemenni.

A 12. egyenlet szerint ugyanannyi idő alatt ($t = \text{konstans}$) v növekedésével h akkor fog növekedni, hogyha

$$\frac{dh}{dv} = \frac{2v}{g} \cdot \log \cosh \frac{gt}{v} - t \cdot \operatorname{tgh} \frac{gt}{v} > 0, \quad (17)$$

Látjuk, hogyha $\lim t=0$, akkor az első, + előjelű tag elsőrendű, a második, - előjelű tag pedig másodrendű végtelen kis mennyiség, azaz t -nek igen kicsiny értéke mellett a 17. feltétel teljesítve van. Ha azonban t fokozatosan növekedik, a fenti érték nulla, majd negatív lesz. A további részletes feltételeket néhány megközelítő képlet bevezetésével fogom meghatározni.

I. feltevés. *Ha az esés igen rövid ideig tart*, úgyhogy a 12. egyenlet \cosh függvényének argumentuma is igen kicsiny, akkor megközelítően írhatjuk, hogy

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Ha ezt behelyettesítjük a 12. egyenletbe, nyerjük, hogy

$$h = \frac{v^3}{g} \cdot \log \left(1 + \frac{g^2 t^2}{2v^2} \right), \quad (18)$$

úgyhogy ekkor a 17. feltételnek a

$$\frac{dh}{dv} = \frac{2v}{g} \cdot \log \left(1 + \frac{g^2 t^2}{2v^2} \right) - \frac{2gvt^2}{2v^2 + g^2 t^2} > 0 \quad (19)$$

feltétel fog megfelelni, ahonnan

$$\log \left(1 + \frac{g^2 t^2}{2v^2} \right) > \frac{g^2 t^2}{2v^2 + g^2 t^2}. \quad (20)$$

Feltevésünknek megfelelően bevezethetjük még az

$$e^x = 1 + x$$

megközelítő képletet is, mikor nyerjük további feltétel gyanánt:

$$2u^2 + g^2 t^2 > 2v^2, \quad (21)$$

mely feltétel minden esetben teljesítve van.

Látjuk tehát, hogyha az esés igen rövid ideig tart, akkor a nagyobb fajsúlyú ásványszem mindig megelőzi a kisebb fajsúlyút.

II. feltevés. Ha az esés hosszabb ideig tart, úgyhogy a 12. egyenlet cosh függvényének argumentuma > 1 , azaz

$$u < gt, \quad (22)$$

akkor megközelítően (12%, illetőleg ennél kisebb hibával) írhatjuk, hogy

$$\cosh u = \frac{e^x}{2},$$

amit a (12) egyenletbe helyettesítve nyerjük, hogy

$$h = vt - \frac{v^2 \cdot \log 2}{g}. \quad (23)$$

Annak a feltétele mármint, hogy a nagyobb végsebességű ásvány a kisebb végsebességűt megelőzze, a 23. egyenlet szerint:

$$\frac{dh}{dv} = t - \frac{2v \cdot \log 2}{g} > 0, \quad (24)$$

vagy (23)-ból behelyettesítve t értékét:

$$v < \sqrt{\frac{gh}{\log 2}}. \quad (25)$$

g és $\log 2$ számértékeinek behelyettesítése után lesz:

$$v < 37.6 \sqrt{h}. \quad (26)$$

Látjuk tehát, hogyha az esés hosszabb ideig tart, akkor a nagyobb végsebességű ásvány csak abban az esetben előzi meg

a kisebb végsebességűt, ha a végsebesség kisebb a (25) és (26) képletek által megadott értéknél.

A (22) és (23) képletek szerint a *II. feltevés* viszont akkor helytálló, ha

$$v < \sqrt{\frac{gh}{1 - \log 2}}, \quad (27)$$

azaz

$$v < 56\sqrt{h}. \quad (28)$$

Természetes azonban, hogy ez még nem jelenti azt, hogy mielőtt nagyobb v a fenti értéknél, akkor már az I. feltevés érvényes, mert a $\cosh v$ függvény nem ugrásszerűen változik, tehát az I. és II. feltevés között van egy intervallum, melyen belől e két feltevésből levezetett következtetések nem helyesek.

Mindaddig, amíg a meghatározott feltételek mellett maradunk, az *együttülepedés szerinti osztályozás esési végsebesség szerint való osztályozás lesz.*

*

Legyen két ilyen együttülepedő ásványszem átmérője d és d' , fajsúlya pedig δ és δ' akkor a 2. egyenletből:

$$\frac{d}{d'} = \frac{\delta'}{\delta}, \quad (29)$$

vagyis ebben az esetben az együttülepedő ásványszemek átmérője fordított arányban van a fajsúllyal.

Ha továbbá $\delta = \delta'$, akkor a fenti egyenletből

$$d = d',$$

tehát ilyen feltétel, azaz *ugyanazon fajsúly mellett az együttülepedés szerinti osztályozás nem egyéb, mint szemnagyság szerint való osztályozás.*

Ezen alapszik a *légszeparátoroknak* a működése. A légszeparátorokat a száraz szénélőkészítésben a finom szénpor leválasztására alkalmazzák. Ennek végsebessége igen kicsiny, viszont az esési magasság, tehát az esési idő is elég nagy. Ha például $h = 100$ cm, akkor a (28) képlet szerint

$$v < 560 \text{ cm/sec.}$$

Összehasonlítva ezt az értéket a 2. táblázat adataival, látjuk, hogy itten a II. feltevésből nyert képleteket kell alkalmazni. h ugyanezen értéke mellett a maximális végsebesség, mely mellett a szemnagyság szerinti osztályozás végbemegy, a (26) képletből

$$v_{\max} = 376 \text{ cm/sec}$$

lehet, aminek — $\delta = 1.3$ fajsúly mellett — megfelel a (2a) egyenlet szerint

$$d = 0.28 \text{ cm}$$

átmérő. Látjuk tehát, hogy a légszeparátor durva por leválasztására kevésbé alkalmas.

V. Az ülepités.

Az ülepitést a nedves ércelőkészítésben évszázadok óta alkalmazzák. Már AGRICOLA említést tesz róla, 1556-ban megjelent «De re metallica» című híres munkájában. Az ülepitőgépek fokozatos tökéletesítésével maga az eljárás is mind tökéletesebb lett, s úgy a nedves ércelőkészítésben, mint a nedves szénelőkészítésben igen jó eredménnyel alkalmazzák.

A feltárt és *szemnagyság szerinti osztályozott* nyersanyagot megfelelő rétegvastagságban helyezik az ülepitőgép szitájára, melyet a szitán áthaladó függélyes vízáram felemel, s az egyes szemek lefelé haladó vízáramban, vagy nyugvó vízben süllyednek. Süllyedés közben az ásványszemek fajsúly szerint rendeződnek el, úgyhogy a legalsó rétegbe a legnagyobb fajsúlyú, a legfelső rétegbe pedig a legkisebb fajsúlyú szemek kerülnek.

Az ülepités elvileg elvégezhető *légáramban* is. Ennek a száraz eljárásnak előnye a nedves eljárással szemben, hogy itt nincsen szükség vízre, vízvezetéki hálózatra, szivattyúra; elmarad a nedves termények víztelenítése, s az ehhez szükséges berendezés; nincsen iszapképződés, tehát nem kellene derítőmedencék, szűrőberendezések; téli időben nem kell a tartályok, vízvezetékek befagyásától tartani stb.

Az első pneumatikus ülepitőgépet KROM szerkesztette 1868-ban, melyet a Felső-tó vidéki rézércbányáknál használtak, bár

kevésbé jó eredménnyel. Azóta az ércelőkészítésben számos, különböző típusú pneumatikus ülepítőgéppel kísérleteztek, a nélkül azonban, hogy bármelyikkel is kifogástalan eredmény lett volna elérhető.

A szénelőkészítésben ellenben legújabbán különböző típusú pneumatikus ülepítőgépekkel vagy légszérékkel¹ igen jó eredményt értek el, úgyhogy a pneumatikus ülepítés ma a szénelőkészítésnek egyik legfontosabb eljárása, mely az előbb már felsorolt, gyakorlati szempontból igen nagyfontosságú előnyökkel bír. Tapasztalat szerint ez az eljárás — a legfinomabb portól eltekintve — mintegy 6—8 cm szemnagyságig jó eredménnyel használható, azontúl azonban kevésbé jó az eredmény. Ez azonban gyakorlati szempontból nem lényeges, mert ezen határon felül már a kézi válogatás is jó eredménnyel alkalmazható.

Az ülepítés folyamatának pontos matematikai tárgyalása még a nedves eljárásnál is igen nehéz és hosszadalmas,² pedig a viszonyok ottan aránylag egyszerűbbek, mint a száraz eljárásnál. Éppen ezért a következőkben csak néhány alapvető, s gyakorlati szempontból különösen fontos tétel megállapítására fogok szorítkozni.

A légszér szitáján átáramló levegő az azon levő nyersszénréteget felemeli, mégpedig a különböző szén vagy meddő darabokat — több tényezőtől függő — különböző magasságra. Ezután az egyes darabok megközelítőleg nyugvó (esetleg igen kis sebességű) levegőben esnek lefelé. A fajsúly szerint való elrendezés — az előbb megadott értelemben — akkor fog végbemenni, ha a nagyobb fajsúlyú, tehát nagyobb végsebességű³ ásványszem ugyanazon idő alatt nagyobb útát tesz meg lefelé, mint a kisebb fajsúlyú, tehát kisebb végsebességű ásványszem.

Ennek feltétele lényegében ugyanaz, mint a IV. alatt tárgyalt, s a (17), (19), (24) és (27) képletek által meghatározott feltétel.

¹ Ez a két elnevezés ugyanazt a készüléket jelenti. A gyakorlatban mindkettő egyformán el van terjedve.

² *Grundlagen*, 100—165. l.

³ A (2) képlet szerint, ha d állandó, v annál nagyobb, minél nagyobb δ .

Az ezekből nyert képleteket azonban nem lehet minden további megfontolás nélkül alkalmazni.

Amíg ugyanis például a légszeparátoroknál a finom por-szemek aránylag *nagykiterjedésű térben*, szabadon mozoghatnak, addig a pneumatikus ülepítésnél — éppenúgy, mint a hidraulikus ülepítésnél is — az ásványszemek még mozgás közben is sűrűn kitöltik a rendelkezésükre álló teret.

Ebben az esetben a (2) és (2a) képletek által meghatározott, s eddig alkalmazott *abszolút végsebesség* helyett a *relatív végsebességgel* kell számolnunk, melynek értéke:

$$v_r = \vartheta v, \quad (30)$$

hol $\vartheta < 1$, egy az ásványszemek elrendeződésétől függő együttható.

Idézett könyvemben,¹ különböző feltételek mellett kiszámítottam, hogy ϑ értéke 0·08 és 0·21 között lehet. Az ülepítés tényleges viszonyainak a legkisebb érték felel meg a legjobban, miért is a következőkben a

$$\vartheta = 0\cdot08$$

értékkel fogok számolni. Ez tehát azt jelenti, hogy ülepítésnél az ásványszemek valódi végsebessége csak 8%-a az abszolút értéknek, *s az esési sebesség is jóval kisebb* a (11) képlet által meghatározottnál. A (11) és (12) képlet által meghatározott törvényszerűség azonban ekkor is érvényes, ha v helyett v_r értékét helyettesítjük be.

Ekkor tehát a (26) feltétel helyett írható, hogy

$$v\vartheta < 37\cdot6\sqrt{h},$$

vagy ϑ előbbi értékét figyelembe véve:

$$v < 470\sqrt{h}. \quad (31)$$

Hasonlóan kell átalakítanunk a (28) feltételt is, amikor nyerjük, hogy

$$v < 700\sqrt{h}. \quad (32)$$

¹ *Grundlagen*, 116—121. l.

Ülepítésnél az esési magasság, mely annál nagyobb, minél durvább osztályt ülepítünk, jóval kisebb ugyan, mint légszeparátoroknál, de nem szabad figyelmen kívül hagynunk azt sem, hogy a relatív végsebesség is jóval kisebb, mint az abszolút végsebesség, vagyis meg kell vizsgálnunk a II. feltevés érvényességét.

Igen finom osztálynál, ha $h=1$ cm, a (32) képlet szerint:

$$v < 700 \text{ cm sec,}$$

míg igen durva ($d=7-8$ cm) osztálynál, ha $h=25$ cm,

$$v < 3500 \text{ cm/sec.}$$

Ha összehasonlítjuk ezeket az adatokat a 2. táblázat adataival, akkor látjuk, hogy a *pneumatikus szénülepítésnél a II. feltevés képleteit kell alkalmaznunk.*

Ha ismét $h=25$ cm, akkor a (31) képlet szerint a legnagyobb végsebesség, melynél a fajsúly szerint való elrendeződés még jól végbemegy:

$$v_{\max} = 2350 \text{ cm/sec,}$$

aminek $\delta=1.5$ átlagos fajsúly (nyerszén) mellett megfelel a (2a) képlet szerint:

$$d = 7.45 \text{ cm,}$$

vagyis ezen túl az ülepítés már kevésbé jó eredményt ad, ami jól megegyezik a már említett gyakorlati megfigyeléssel.

Az ülepítés további feltétele, amint már láttuk, az előzetes szemnagyság szerinti osztályozás, amit azonban nem lehet tökéletesen elvégezni, miért is gyakorlati szempontból nagy fontossággal bír annak a megállapítása, hogy *az ülepítés előtt milyen pontosságú osztályozásra van szükség?*

Az ülepítés feltétele az előbbieket szerint az, hogy

$$v'_r \geq v_r$$

legyen, hol v'_r a nagyobb, v_r pedig a kisebb fajsúlyú ásvány szem relatív végsebessége. Ekkor pedig a (2) képlet szerint:

$$\frac{d}{d'} \leq \frac{\delta'}{\delta},$$

tehát ezen kifejezés jobboldali értéke tekinthető az ülepítést megelőző osztályozásnál használt szitasorozat hányadosának (q) legnagyobb értéke gyanánt.

A nyersszénben levő tiszta szén fajsúlya általában $\delta = 1.2 - 1.6$, a meddő fajsúlya pedig $\delta' = 1.8 - 2.8$ között változik, úgyhogy ennek megfelelően a szitasorozat hányadosának szélső értékei:

$$q = 1.12 - 2.33,$$

mely értékeket semmi esetre sem célszerű lényegesen megnövelni, különben kevésbé jó eredményt nyerünk. Pneumatikus ülepítésnél tehát a q hányados értéke általában jóval kisebb, mint hidraulikus ülepítésnél, mert például, amint kimutattam,¹ ha a szén fajsúlya 1.2, a meddőé pedig 2.7, akkor hidraulikus ülepítésnél $q = 17.5$ is lehet. Látjuk tehát, hogy pneumatikus ülepítőgépeknél részletesebb előosztályozásra van szükség, mint hidraulikus ülepítőgépeknél. Ezért a pneumatikus eljárás alkalmazása inkább könnyen mosható szeneknél indokolt, ahol a tiszta szén és meddő fajsúlya között aránylag nagy a különbség; míg nehezen mosható szeneknél célszerűbb a nedves előkészítés alkalmazása.

A légszér szitája alatt levő légszekerénybe befújtatott levegő túlnyomása addig növekedik, míg egyenlő lesz a szitán levő szénréteg nyomásával, amikor is a réteget felemeli. Tekintettel arra, hogy a szitán levő laza anyag az elfoglalt térnek körülbelül a felét tölti ki, ez a szükséges legkisebb *túlnyomás*:

$$p = 0.5H\delta \text{ gr/cm}^2, \quad (33)$$

hol H a rétegmagasság cm-ben, δ pedig az átlagos fajsúly.

Ha például $H = 20$ cm és $\delta = 1.5$, akkor

$$p = 15 \text{ gr/cm}^2 = 150 \text{ kg/m}^2.$$

Amikor a szitán levő anyag felemelkedett, a levegő

$$u = \sqrt{\frac{2gp}{J}} = 1278 \sqrt{p} \quad (34)$$

¹ *Grundlagen*, 155. l.

kezdő sebességgel áramlik ki a küllégre, de a nyomás hirtelen csökkenése következtében ez a sebesség is hirtelen, erősen csökken. Az előbbi példa adatai mellett

$$u = 4954 \text{ cm/sec}$$

a légáram kezdősebessége. A nyomás és sebesség kellő mértékű csökkenése után a felemelt ásványszemek visszaesnek a szitára, annak nyílásait elzárják, amikor az előbbi folyamat megismétlődik. A szitán levő anyag tehát akkor is lüktető mozgást végez, ha a légszekrénybe folytonosan vezetjük be a sűrített levegőt.

Alkalmazhatunk lüktető légáramot is — pulzátor közbeiktatásával, — ekkor azonban a sűrített levegő percnkénti lüktetéseinek a száma egyenlő kell hogy legyen a szitán levő anyag saját lüktetési számával, ellenkező esetben megzavarjuk az ülepítés folyamatát, s nem kapunk kellő eredményt. Ha azonban a lüktetések számát helyesen állapítjuk meg, úgyhogy mechanikai rezonanciát létesítünk, akkor energiamegtakarítást érhetünk el.

Éppen ezért legújában mind gyakrabban használják a lüktető légárammal működő légszéreket. A pulzátort kísérleti úton pontosan be lehet szabályozni (rezonancia!), gyártástechnikai szempontból mégis igen nagy fontossággal bír, hogy a percnkénti lüktetések számát megközelítőleg már előre ismerjük.

Vizsgálataim szerint ez a következő módon határozható meg. Ha a II. feltevésnek megfelelő (23) képletbe v helyett v_1 -et írunk, akkor nyerjük, hogy

$$t = \frac{h}{\vartheta v} + \frac{\vartheta v \cdot \log 2}{g} \quad (35)$$

az esési idő, hol $\vartheta = 0.08$. Ha ehhez még hozzáadjuk az emelkedési időt, úgy kapjuk egy lüktetési periódus teljes idejét.

Üzemben levő légszéreknél tett megfigyeléseim szerint a szérlapon levő anyag emelkedési ideje körülbelül egyenlő az esési idővel, úgyhogy e szerint a percnkénti lüktetési szám:

$$n = \frac{30}{t}. \quad (36)$$

Ha például $h=1$ cm és $v=200$ cm/sec, akkor a (35) és (36) képletek szerint:

$$t = 0.073 \text{ sec} \quad \text{és} \quad n = 411 \text{ min}^{-1}.$$

Ha pedig $h = 25$ cm és $v = 1500$ cm/sec, akkor:

$$t = 0.28 \text{ sec} \quad \text{és} \quad n = 107 \text{ min}^{-1}.$$

Látjuk tehát, hogy minél finomabb szemű anyagot üleptünk, annál nagyobb a percnkénti lüktetési szám és viszont.

VI. Összefoglalás.

Az előzőkben kifejtettem a pneumatikus szénelőkészítés alapegyenleteit. A konkrét számértékeket egy bizonytalanság terheli, a (2a) egyenlet együtthatója, melyet megfelelő kísérletek hiányában, *indokolt* becslés alapján vettem fel. A kiszámított értékeknek a tapasztalati adatokkal való jó megegyezése azonban azt igazolja, hogy a becsült érték közel jár a valóságoshoz. Közelebbi kísérletek adatai legfeljebb néhány százalék eltérést eredményezhetnek. Mindez azonban mit sem változtat az általam megállapított egyenletek által kifejezett törvényszerűségek lényegén.

Megállapítottam, hogy a pneumatikus szénelőkészítés feltételei mellett az esési végsebességnek csak Newton-féle képlete bír érvénnyel, jóllehet ezt a tényleges sebesség meg sem közelíti. Megállapítottam azonban azt is, hogy bizonyos gyakorlati szempontból igen fontos feltételek mellett ez a végsebesség különös jelentőséggel bír.

Kimutattam, hogy a légszeparátorok durva por leválasztására kevésbé alkalmasak.

Meghatároztam a pneumatikus üleptetés lehetőségének a feltételeit, amelyek a végsebességnek csak adott nagyságon alóli értéke mellett érhetőek el. Ezzel megmagyaráztam azt is, hogy bizonyos szemnagyságon felül miért rosszabbodik az eredmény.

Meghatároztam az üleptetést megelőző osztályozás szükséges pontosságát, a sűrített levegő megkivánt túlnyomását, sebességét és az üleptetőgép szitáján mozgó anyag saját lüktetési számát.

**DIE MECHANISCHEN GRUNDGLEICHUNGEN
DER PNEUMATISCHEN KOHLENAUFBEREITUNG.**

Von JOSEF FINKEY korr. Mitglied.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin-Josef Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Bd. X. 1838.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. April 1938.)

MOLYBDÉNBEN OLDÓDÓ NITROGÉN TECHNOLOGIAI EFFEKTUSA.

TÚRY PÁL-tól.

A molybdén-nitrogén-rendszert már eddig is többen, több szempontból vizsgálták és tanulmányozták. Bár e kérdéssel foglalkozó szerzők egy része preparátumaikat ammoniának molybdénre való behatása útján állították elő, ezen munkákból is már az következtethető, hogy molybdén bizonyos körülmények között, bár korlátolt mennyiségben, közvetlenül molekuláris nitrogénből is, nitrogént vesz fel. Főleg G. HÄGG (1) munkái alapján tudjuk, hogy nitrogén molybdénnel nitrideket képezhet. G. HÄGG ezeket a nitrideket ammoniának molybdén porokra, általában igen hosszú időtartamokig terjedő behatása útján állította elő. Az ezeken meg-ejtett Röntgenvizsgálatok idáig a $Mo-N_2$ rendszernél 3 inter-mediär nitrid-fázis (β , γ , δ) existenciáját igazolták. Mindezen niri-dek közös vonása az, hogy aránylag instabil vegyületek, képződési-hője valószínűleg egyiknek sem nagyobb, mint 15—25 kcal pro-gramm-atom nitrogén. (2) és (3) Hiszen részben éppen ezen instabi-litásuknak köszönik, hogy az ammonia szintézis katalizatorának céljára alkalmas alapanyagul szolgálnak. SIEVERS és ZAPF (4) mérései szerint, úgy a β , mint a γ fázis disszociációs nyomása 1000° C-nál már lényegesen nagyobb, mint 1 Atm., úgyhogy ezen nitridek 1000° C fölötti hőmérsékleteken 1 Atm. nyomású nitrogénben már semmiesetre sem existencia-képesek.

Molekuláris nitrogénből közvetlenül történő nitrogénfel-vétellel legújabban és legkimerítőbben A. SIEVERTS és G. ZAPF (4) foglalkoztak. Vizsgálataikat molybdénporokkal, lemezekkel és drótokkal végezték és a nitrogénfelvétel feltételeit, körülményeit

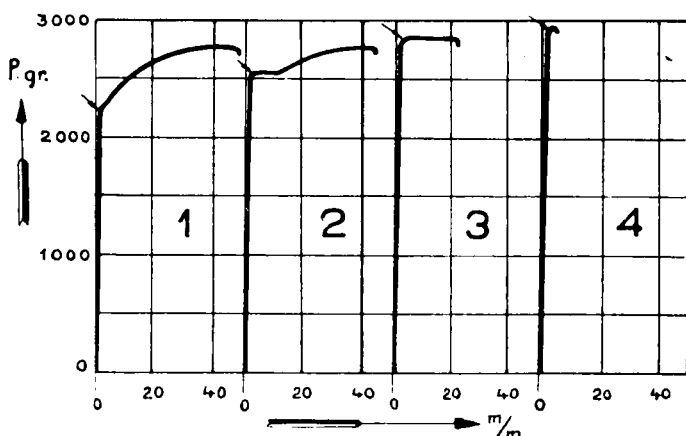
és mértékét általában 700—1200° C között fekvő temperatura területen tanulmányozták. Eredményeikből kitűnik, hogy molybdén molekuláris nitrogénből, bár igen csekély mennyiségben még 1200° C-nál is nitrogént képes felvenni, de a nitrogénfelvétellel és az egyensúlyi időkkel kapcsolatban közölt adataik még egyazon molybdén drótp próba esetében is tág határok között ingadoznak. Úgy HÄGG, mint SIEVERTS és ZAPP egyöntetűen azt állapítják meg, hogy molekuláris nitrogénből igen kis mennyiségben felvett nitrogént tartalmazó molybdéndrótok Röntgenképei csakis az α molybdén (tisza, 100%-os *Mo.*) vonalait adják, a nélkül, hogy ezek helyzetéből a rács bármiféle deformációjára is lehetne következtetni. SIEVERTS és ZAPP ezenkívül ily kis mennyiségben nitrogént tartalmazó molybdéndrótok technológiai sajátosságait is vizsgálták. Hajtogatási kísérleteik eredménye szerint azonban ezek semmiben sem különböztek oly dróroktól, melyek nitrogént egyáltalában nem tartalmaztak.

Úgy a Röntgen, mint a technológiai vizsgálatok eddigi eredményei tehát abban foglalhatók röviden össze, hogy molekuláris nitrogénből 1200° C-nál, vagy e fölött történő nitrogénfelvételnek semmiféle jelentőség nem tulajdonítható.

A következőkben azon kísérleti munkákat ismertetjük, melyek folyamán kiderült, hogy molybdén molekuláris nitrogénből, bár igen csekély mértékben, a technikai praxisban alkalmazott, 1200° C-nál jóval magasabban fekvő temperaturáknál is, teljesen definiált mennyiségben nitrogént vesz fel, és hogy a felvett nitrogén, ellenében az eddigi megfigyelésekkel, a molybdéndrótok technológiai sajátosságait mélyreható mértékben befolyásolja. A kísérleti eredmények értelmezésével kapcsolatban pedig arra a kérdésre is feleletet adunk, mi az oka annak, hogy nitrogénnek molybdénre kifejett, a következőkben ismertetett effektusa mindezideig felismeretlenül maradt.

Kísérleteinket 0.2 mm molybdéndrótokkal végeztük, melyeket 1000—1900° C között fekvő, különböző hőfokoknál, 1 Atm. nyomású H_2 -ben illetőleg N_2 -ben, különben teljesen azonos körülmények között izzítottunk s a H_2 -ben, illetőleg N_2 -ben kezelt drótoakat szakítási próbák alapján egymással összehasonlítottuk. Egy a későbbiekben közölt körülményre való tekintettel gondosan ügyel-

tünk arra, hogy a nitrogénben izzított drótok a szakítási próba megejtése előtt *semmiféle* permanens deformációt (pl. kismértékű hajlítást) ne szenvedjenek. Kísérleteink nagy részét előzőleg már H_2 -ben, Ar -ban, vagy vácuumban rekrisztallizált *polikristályos* szerkezetű, valamint *nagy-*, illetőleg *egykristályos* drótokkal végeztük, mégpedig oly körülmények között, hogy a drótok a H_2 -ben, illetőleg N_2 -ben foganatosított összehasonlító izzításuk folyamán már *semmiféle további strukturaváltozáson* sem mentek keresztül, miáltal lehetővé vált, hogy a nitrogénfelvételt s annak a drótra



1. ábra. Nitrogénben 1300 C°-nál 0, 20, 40 és 60 mp-ig izzított, előzetesen rekrisztallizált polikristályos drótok szakítási diagramjai.

kifejtett technológiai hatását *rekrisztallizációs folyamatoktól függetlenül* tanulmányozhattuk.

A polikristályos drótok átlagos kristálynagysága 15—20 μ -nak felelt meg, tehát lényegesen kisebb volt, mint a kísérletekhez felhasznált drót átmérője (0,2 mm), amennyiben így a drót keresztmetszetére 80—120 szemcse esett. A nagykristályos drótok átlagos kristályhossza ezzel szemben 6—10 mm-nek felelt meg, vagyis a drót keresztmetszetét egészen kitöltő kristályok 30—50-szeresen hosszabbak voltak, mint a drót átmérője.

Az 1. ábra a polikristályos drótokkal végzett kísérletek eredményét tünteti fel. Magának a kísérletekhez felhasznált ú. n. alap-

drótnak szakítási diagrammját az ábra 1 sz. görbéje szemlélteti. Az abszcisszán a 200 mm kezdeti hosszúságú drótdarabnak a szakítási kísérlet folyamán szenvedett és mm-ben kifejezett megnyúlásai, az ordinátán pedig az egyes megnyúlási értékek előidézéséhez szükséges terhelőerő értékei vannak feltüntetve. Az ábrából látható, hogy a kísérletekhez felhasznált alapdrót tetemes mértékben nyújtható, szakadási nyúlása kb. 25%, továbbá olyan sajátosságú, hogy növekedő nyúlások előidézéséhez, folyton növekedő erők szükségesek. Az ábrán feltüntetett nyíl a drót *folyási* (rugalmassági) határát jelzi. Mindaddig, míg a drótra kifejtett húzóerő a folyási határ értékét el nem éri, a drót megnyúlása tisztán rugalmas természetű. Amint azonban a terhelőerő értéke a folyási határt túllépi, a drót a szakító kísérlet folyamán olyan természetű megnyúlásokat is szenved, melyek tehermentesítés után már nem tűnnek el, vagyis plasztikus (maradandó) megnyúlást is. Az alapdrótok közül egyeseket már most H_2 -ben, másokat pedig N_2 -ben, rajtuk átbocsátott elektromos áram segítségével $1300^\circ C$ -nál 20, 40 és 60 mp-ig izzítottunk s az egyes drótmintákat ezt követően elszakítottuk. A H_2 -ben izzított drótok szakítási diagrammjai mindenik esetben teljesen azonosak voltak az alapdrót diagrammjával (1. ábra, 1. görbe), úgyhogy azokat újból külön fel sem tűntettük. E kísérletsorozat egyfelől tehát a hidrogénfelvétel hatástalan voltát mutatja, másfelől azonban arról is bizonyosságot nyújt, hogy a drótban ez izzítás folyamán semminemű struktúraváltozás nem állott elő. A N_2 -ben ugyancsak $1300^\circ C$ -nál 20, 40 és 60 mp-ig izzított drótok szakítási diagrammjait az 1. ábra 2., 3. és 4. sz. görbéje tünteti fel. A 60 mp-nél hosszabb ideig izzított drótok szakítási diagrammjai a 4. görbével szemben további változást már nem mutattak.

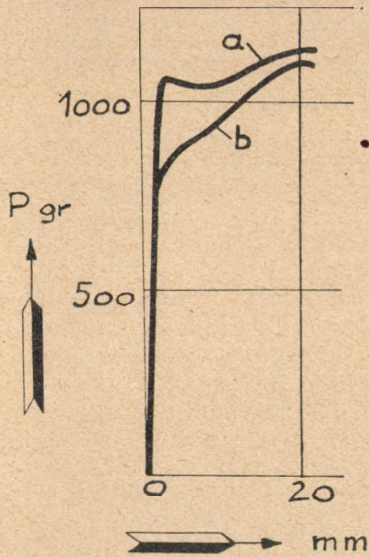
A diagrammsorozat meggyőzően szemlélteti, hogy N_2 -ben való izzítás folyamányaképpen a drótok *technológiai sajátosságai*, a kezelés időtartamától függően *lényegbevágó változásokon mennek keresztül*: a folyási határ (a diagrammoknak a nyilacskákkal megjelölt pontjai) és a szakító erő értéke egyre emelkedik s ezzel egyidejűleg a nyúlási értékek csökkennek s 60 mp-es izzítási időtartam után a drót nyújthatósága megszűnik s az teljesen rideg anyag módjára viselkedik.

Súlymérésekkel meggyőződünk róla, hogy a kísérleteinkhez felhasznált polikristályos drót az 1300°C -nál 60 mp -ig foganatosított nitrogénbehatás folyamányaképpen 0.007 súly % nitrogént vesz fel. Ez a mennyiség 0.05 Atom % N_2 -nek illetőleg 5.75 cm^3 norm. állapotú nitrogénnek felel meg 100 g molybdén fémre vonatkoztatva. Ez az érték ennél a hőfoknál, 1 Atm. nyomású nitrogénben egyben kb. az egyensúlyi koncentrációnak is felel meg, amennyiben egyrészt további izzításnál, mint már említettük, a drótok szakítási szilárdsága már nem emelkedik, másrészt pedig, mint a drót külső rétegeinek lemarással történt fokozatos eltávolításával kapcsolatos kísérleteink folyamán találtuk, 1300°C -nál 1 pernyi izzítás után már teljes koncentrációbeli kiegyenlítődés áll elő. Mivel 1 Atm. nyomású nitrogénben az egyensúlyi koncentrációnak (nitrogén-telítettség) megfelelő nitrogén-disszociációs nyomás éppen 1 Atm. magasabb hőfokokhoz nyilván ennél kisebb, alacsonyabb hőfokokhoz pedig ennél nagyobb egyensúlyi koncentrációk tartoznak. Mivel a molybdén nitridjei 1000°C fölötti hőmérsékleteken 1 Atm. N_2 nyomásnál már nem existenciaképesek, jelen kísérleti körülményeink között ($1000\text{—}1900^{\circ}\text{C}$, 1 Atm. N_2) felvett igen kis nitrogénmennyiségek csakis homogén oldatok alakjában juthatnak a molybdénbe. Az a tény továbbá, hogy a rendkívül csekély mértékben felvett nitrogén az ismertetett s tudomásunk szerint hasonló területen eddig még nem tapasztalt nagy effektust fejt ki, valószínűvé teszi, hogy a nitrogén ú. n. *aktivált* állapotában kerül bele a molybdén rácsába. Inaktív molybdén *molekulák* (mint záródmányok) ilyen parányi mennyiségben nem fejthetnek ki ekkora mértékű technológiai hatást.

A 2. ábra nagykristályos dróton végzett mérések eredményét tünteti fel. Az *a* jelű görbe 1400°C -nál N_2 -ben 3 percig, a *b* jelű pedig, azonos körülmények között, de H_2 -ben izzított drót szakítási diagrammját szemlélteti. A polikristályos drótoknál tapasztalt főeffektus: a folyási határ megnövekedése, mint látható, nagykristályos drótnál is hasonló módon jelentkezik. A maximálisan elérhető effektus azonban nagykristályos drótnál kisebb. Míg ugyanis polikristályos drótoknál a folyási határ értéke nitrogénben való kezeléssel $700\text{—}1000\text{ g}$ -mal, addig nagykristályos drótoknál csak $300\text{—}400\text{ g}$ -mal volt emelhető. Lényeges különbség a kétfajta

drót viselkedése között azonban az, hogy nagykristályos drótok nitrogénben való kezelésük folyamánaképpen telítettségük elérése után sem jutnak el abba jellegzetes «rideg» állapotba (1. ábra 4. sz. görbe), melyet a húzó igénybevételekkel szemben tanúsított nyújthatóság teljes megszűnése jellemez.

Izzítási kísérleteinket igen tiszta nitrogénben és felületileg gondosan tisztított molybdén-fonalakkal végeztük, mert úgy talál-



2. ábra. H_2 -ben (b), ill. N_2 -ben (a) azonos körülmények között, $1400^\circ C$ -nál 3 percig izzított nagykristályos drótok szakítási diagrammjai.

tuk, hogy akár a nitrogénnek, akár pedig a drót felületének parányi kis mennyiségben jelenlevő szennyezései, mint H_2O , O_2 , C , illetve szénvegyületek, organikus gázok a nitrogénfelvételt s így az effektus időbeli kialakulását igen jelentős mértékben gátolták. Hogy általában az egyensúlyi koncentrációk eléréséhez a mi kísérleteinknél aránytalanul rövidebb időre volt szükség, mint a többi szerzők munkáinál, az, úgy hisszük, szintén ebben a körülményben leli magyarázatát. Ezek a gázban, illetve a drót felületén jelenlevő parányi szennyezések a nitrogénnek a drót belsejébe való behatolását nyilván oly módon gátolják, hogy a nitrogénnek a molybdén fém felületén végbemenő aktiválását, illetve aktivált adsorpcióját (W. FRANKENBURGER 2) szerint az ammonia-katalizis «legnehezebb» elemi folyamatát hátráltatólag befolyásolják.

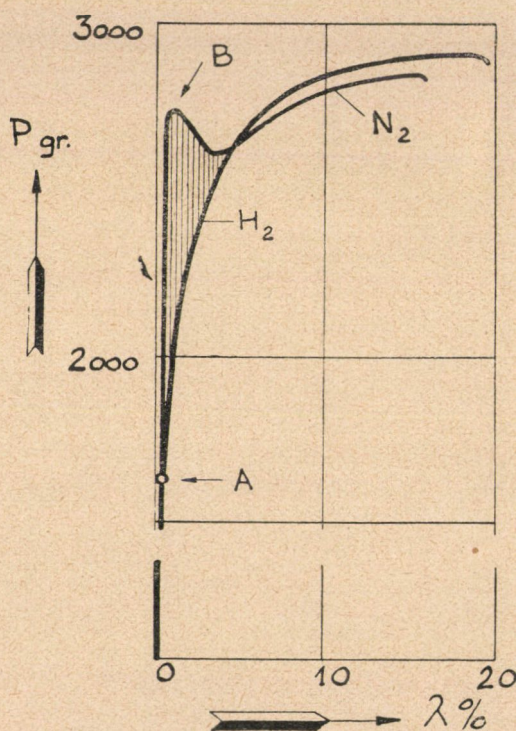
Bár a nitrogénfelvétel következtében, mint főleg polikristályos drótok magatartásából láttuk, jóformán a drót összes főbb technológiai sajátosságai lényegesen megváltoznak, a *primaer* effektus mégis egyedül abban áll, hogy a drót rugalmassági (folyási) határa a felvett nitrogén mennyiségétől függően fokozatosan mind magasabbá és magasabbá válik, s amikor már a rugalmassági határ

addig az értékig fokozódott, mely kb. a nitrogénmentes drót szakítási keménységének felel meg, a drót nyújthatósága teljesen megszűnik. Ily, húzó igénybevételekkel szemben ridegen viselkedő drótokat azonban más természetű igénybevételeknek is alávetve, azt az érdekes megfigyelést szereztük, hogy ezek pl. *hajlítással* éppoly mértékben deformálhatók, tehát éppoly plasztikusak, akár csak a nitrogénmentesek. A hajlító kísérleteket oly módon végeztük, hogy pl. egy a «rideg» fokozatig izzított drótot (1. ábra, 4. görbe) egy 15—20 mm-es csigán, egyszer vagy többször is ide-oda átvezettünk. A hajlításnak alávetett, nitrogéntartalmu drótokat már most szakítási próbának alávetve, azt a meglepő eredményt találtuk, hogy ezek a szakítási kísérlet folyamán teljesen úgy viselkedtek, mintha nitrogénben előzőleg egyáltalában nem is lettek volna kezelve (1. ábra, 1. görbe), vagyis másszóval ez azt jelenti, hogy ezen egyszerű mechanikai beavatkozás eredményeképpen a drótoknak húzó igénybevétellel szemben tanúsított ridegsége (1. ábra, 4. diagramm) eltűnt.

Bár a most elmondottak szerint hajlítással utólagosan deformált nitrogéntartalmu molybdén-drótok szakítási próbájuk megítélése alapján, különben ugyanolyan hőkezeléseknek alávetett *nitrogénmentes* drótoktól egyáltalában nem különböztethetők meg, mégis számos egyéb viszonylatukban nagyon is jól «emlékeznek» arra, hogy nitrogéntartalmuak. Igen szemléltetően derül ez ki pl. ily drótok nitrogén-atmoszférában foganatosított újbóli kezelésénél. Ha ugyanis ilyen «mechanikus» úton (hajlítással) regenerált drótokat újból abba a jellegzetes «rideg» állapotba akarunk juttatni (1. ábra, 4. diagramm), mint aminőben közvetlenül az első ízben foganatosított, 1 percig tartó nitrogénben történt kezelésük után voltak, úgy ennek elérése céljából elegendő a drótot éppen csak «felvillantani», ami 1—2 mp-es, vagy még ennél is rövidebb ideig tartó izzításnak felel meg. Ez az «impulsus» már elegendő ahhoz, hogy az *első*, 1 perces igénybevevő nitrogénkezelés folyamán elért «rideg» fokozatig újból eljussunk.

Nitrogénben kezelt drótoknak a szakítási kísérletnél megfigyelt ridegsége tehát *specifikus* ridegség s csakis húzó igénybevételekkel szemben jelentkezik, s mint láttuk, mechanikai beavatkozással teljesen eltüntethető. Láttuk ezt a meghajlított drótok

viselkedésével kapcsolatban, de látható ez a nitrogénes drótoknak a szakítási kísérlet közben tanúsított magatartásából is, ha csak arról gondoskodunk, hogy a regisztráló készülék a drót elszakítása közben, ne csak folyton *növekedő*, hanem *csökkenő* erőhatásokat is



3. ábra. H_2 -ben és N_2 -ben azonos körülmények között, $1400^\circ C$ -nál 10 mp-ig izzított polikristályos drótok szakítási diagrammjai. A nitrogénben kezelt drótnál a nyújtáshoz szükséges erő a rugalmassági határ átlépése után csökken.

indikálni tudjon. A 3. ábrában H_2 egy nitrogénmentes, N_2 pedig egy, különben teljesen azonos polikristályos szerkezetű, nitrogéntartalmú, de még nem telített molybdén-drót szakítási diagramm-jait tünteti fel. Mint látható, a nitrogénfelvétel következtében a drót rugalmassági határa az A pontból a B pontba helyeződött át,

ami másszóval azt jelenti, hogy a nitrogéntartalmú drótban (N_2) a maradandó deformáció nem az A , hanem az ennél lényegesen magasabban fekvő B pontnak megfelelő terhelésnél veszi csak kezdetét. A diagramm további lefolyásából azonban az is látható, hogy amint a külső terhelés a B pontnak megfelelő «küszöböt» átlépi, a drót további, mégpedig most már maradandó természetű deformációjához szükséges erő, a B pontban már elért értékhez képest hirtelen csökkenni kezd csakhamar arra az értékre esik vissza s a továbbiakban olyan mértékben változik, mint amely egy nitrogénmentes drót deformálásához (H_2 jelű görbe) szükséges.

Hajtogatási kísérleteink folyamán észlelt megfigyelésünk, t. i. a nitrogénben kezelt drótok mechanikus beavatkozás útján fogatosított regenerálása, a most elmondottak alapján világosan érthetővé válik. A hajtogatás folyamán u. i. a drótot, bár igen csekély mértékben, de mégis maradandóan deformáltuk, másszóval kifejezve a drót minden térfogat elemében a B küszöböt átléptük, úgyhogy az, meghajlítása után végrehajtott szakítási próbánál éppen oly tulajdonságúnak mutatkozik, mint egy különben ugyanolyan termikus kezelésnek alávetett, de nitrogénmentes drót.

Minden valószínűség szerint a most ismertetett s az irodalomban mindezideig nem tárgyalt effektusban kell keresni annak a magyarázatát, hogy molybdén által igen kis mennyiségekben oldott nitrogénnek, főleg technológiai rációkban nyilvánuló hatása idáig felismeretlenül maradt. Molybdén-fonalaknak, rendszerint nitrogéntartalmú gáztérben fogatosított hőkezelését célzó technikai izzító készülékek apparatív kivitele u. i. a megfelelő fonálvezetés biztosítása céljából mindig szükségessé teszi görgők illetőleg csévék alkalmazását, minek folytán az izzított drót többé-kevésbé maradandó deformációt (hajlítást) szenved. Mivel azonban mint láttuk, a nitrogén-effektust már kismértékű maradandó hajlító igénybevételek is teljesen eltüntetik, érthető, hogy a technikai praxisban alkalmazott apparátusokon, nitrogénáramban vagy nitrogéntartalmú gázkeverékekben izzított molybdén-fonalak technológiai sajátosságai semmiben sem különböznek olyan molybdén-fonalakétól, melyeknek izzítása nitrogénmentes atmoszférában történt.

Mivel, mint láttuk, a nitrogénfelvétel következtében fellépő technológiai elváltozások úgy polikristályos, mint nagykristályos drótok esetében egyaránt észlelhetők, ezeknek oka semmiesetre sem a nitrogénnek tisztán a határfelületekkel szemben tanúsított specifikus magatartásában keresendő. A nitrogén technológiai effektusának mibenlétét ezek szerint abban foglalhatjuk össze, hogy a molybdénbe, illetőleg annak rácsrendszerébe minimális — pár ezredpercentnyi — mennyiségben behatoló és ott elhelyezkedő N atomok, a rácsrendszer maradandó alakváltozásának *megindításához* szükséges erőszükségletet, más szóval annak rugalmassági (folyási) határát igen lényeges mértékben megnövelik. Ily irányú keményítőképességüket azonban elvesztik, amint a rácsrendszerben a maradandó deformációk ténylegesen megindulnak. A N atomok azonban ezen elvesztett keményítőhatásukat egy igen rövid ideig foganatosított hőkezeléssel, termikus «impulsussal», újból teljes mértékben visszanyerik.

Külső megjelenésében a nitrogénnek a drótra kifejtett technológiai hatása hasonló ahhoz, mint aminőt «hideg megmunkálás», vagy pedig finoman eloszló *záródmányok* (mint pl. thoriumoxid záródmányok wolframban) okoznak. Mint ismeretes, hideg megmunkálásnak alávetett drótokon is, a megmunkálás fokától függően, hasonló technológiai változások észlelhetők, mint amelyeneket a nitrogénfelvételnél láttunk: a rugalmassági (folyási) határ és a szakítóerő fokozatosan nőnek, a (maradandó) nyújthatóság mértéke ellenben ezzel egyidejűleg állandóan csökken. Ezek szerint növekedő nitrogénfelvétel technológiai hatása egyenértékű volna ugyancsak növekedő mértékben alkalmazott «hideg» megmunkálásával. A hasonlóság azonban csak látszólagos s a nitrogén-effektus hatása lényegében véve teljesen eltérő attól, mint amilyent hideg megmunkálás okoz. A kétféle jelenség megnyilvánulási formájában a főkülönbség az, hogy míg a nitrogénfelvétel következtében csakis a plasztikus alakváltozás *megindításához*, addig egy hideg megmunkálás folyamánaképpen ezenkívül még a plasztikus folyás *fenntartásához* szükségelt erő is megnövekszik. A nitrogén-effektus mechanikus beavatkozással eltüntethető, a hideg megmunkálás hatása bármely további mechanikai beavatkozással csak növelhető. Hőkezeléssel hideg

megmunkálás hatása eltüntethető, viszont egy eltüntetett nitrogén-effektus újból előhívható.

Bár polikristályos és nagykristályos molybdén nitrogénfelvétel, illetőleg effektus szempontjából qualitative egyformán viselkednek, mégis quantitativ értelemben a kettő között eléggé lényeges különbség mutatkozik. Egykristálynál a nitrogéntelítettség hosszabb ideig tartó behatás után érhető el a technológiai effektus abszolút mértéke is kisebb, mint polikristályos molybdénnél. Így tehát nitrogénmegkötés és elért effektus szempontjából a *határfelületeknek*, melyek úgy struktúra-, mint energetikai szempontból bizonyára kitüntetett helyek, a molybdén-nitrogénrendszer-nél, ha nem is kizárólagos, de mindenesetre *kiváltságos* szerep tulajdonítandó. Ez a kísérleti eredményünk részben alátámasztja és megerősíti azon feltevések helyességét, melyekkel heterogén katalízissel foglalkozó kutatók a katalizátor felületének aktivitását illetőleg jelenleg általában élnek. Ezek szerint a különösen aktív felületi részleteket az jellemzi, hogy ezek irreguláris atomtávolságokkal vannak kitüntetve és egy megfelelő aktiváló hatás egyik főfeltételének éppen az anomális rácsávolságok létesítését tekintik. (Aktivátor hatás (2)). M. SCHWAB és E. PIETSCH a nagy aktivitású részek székhelyeinek főleg a fázishatár felületeket jelölik meg. (5) A N_2 —*Mo* rendszerrel foglalkozó szerzőknek azon egyöntetű megállapítása, hogy különbözőképpen kezelt molybdén fajták (hengerelt lemez, izzítatlan, illetőleg izzított drót stb.) nitrogénfelvételnél különböző módon viselkednek (4), nézetünk szerint főképpen abban leli magyarázatát, hogy *egy-*, illetőleg *polikristály* egymástól eltérőleg viselkednek, mégpedig oly értelemben, hogy a határfelületek nitrogénmegkötés szempontjából aktívabbak.

A dolgozat az Egyesült Izzó és Villamosságai R. T. Kutató Osztályában készült.

Ujpest. 1938 május 10.

Irodalom.

1. G. HÄGG: Röntgenuntersuchungen über Molybdän- und Wolframnitride. Z. F. Phys. Chem. B. 7., 1930, 339.
 2. W. FRANKENBURGER: Zum heutigen Stand der Theorie der Ammoniak-Katalyse. Z. f. Elektrochem, 1933. Nr. 1., 2., 5.
 3. B. NEUMANN, C. KRÖGER u. H. KUNZ: Die Bildungswärmen der Nitride. V. Die Verbrennungswärmen einiger Metalle und Metallnitride. Z. f. Anorg. Chem. B. 218. 1934., S. 387.
 4. A. SIEVERTS und G. ZAFF: Molybdän und Stickstoff. Z. f. Anorg. Chem. 229. H. 2. Okt. 1936.
 5. G. M. Schwab: Katalyse vom Standpunkt der chemischen Kinetik. J. Springer, Berlin. 1931.
-

(A. M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. máj. 16-án tartott üléséből.)

TECHNOLOGICAL EFFECT OF NITROGEN DISSOLVED IN MOLYBDENUM.

By PAUL TÚRY.

Molybdenum wires of 0.2 mm diameter have been treated at high temperatures in molecular nitrogen of very high degree of purity, the time of heating being varied from few seconds up to few minutes. It is shown, that during this treatment the wire dissolves very small amount of nitrogen in form of the atomic state, the quantity absorbed being not more than few thousands percent by weight. Testing the behaviour of the wires under tensile stress, it is found, that the nitrogen present changes in a substantial manner the fundamental properties of the wire, raising the elastic limit, i. e. the point at which plastic flow commences, up to the value of the ultimate strength, thus rendering the wire completely brittle. It is shown further that the hardening effect of nitrogen is specific in its nature and gradually ceases to exist once time plastic flow begins to take place in the metal. This gives the explanation for the experimental fact found that wires permanently deformed after being treated in nitrogen, behave exactly so during their tensile test, as do wires, which have been not treated in nitrogen at all. But the hardening effect thus destroyed can be fully reestablished by flashing the wires few seconds in any inert atmosphere.

It is shown, that polycrystalline wires harden in a greater degree, and react more readily with nitrogen, as do single crystal wires. In other words this means, that the role plaid by the grain boundaries in the *Mo-N* system is specific one in its nature as against that of the crystal lattice, which fact in turn has some bearing on the catalytic action of molybdenum on ammonia synthesis.

(Paper presented to the meeting of the III. Class of The Hungarian Academy of Sciences on May 10, 1938.)

KOLORIMETRIÁS ALUMINIUMMEGHATÁROZÁS ERIOCHROMCYANIN-R-REL.

MILLNER TIVADAR-tól.

Már régen ismeretes az aluminiumhydroxydnak az a tulajdonsága, hogy egyes szerves festékekkel addig még kevésbé felderített összetételű, rendkívül élénkszinű reakciótermékeket, ú. n. lakkokat alkot.¹ Azok között a szerves festékek között, amelyeket ezen az alapon kvalitatív aluminium-reagensekül ajánlottak^{2,3} az először E. EEGRIWE² által javasolt *Eriochromcyanin-R* reakciója érzékenységénél fogva kiemelkedő helyet foglal el. Eriochromcyanin-R-rel 1 cm³ oldatban 0,5 γ aluminium (= 0,0005 mg Al) még kétségtelenül kimutatható.⁴ F. ALTEN és munkatársai^{3,5} ennek a reakciónak alapján quantitativ kolorimetriás aluminiummeghatározó eljárást dolgoztak ki, módszerükkel azonban 5 γ -nál kisebb aluminiummennyiségek már nem határozhatók meg.

A következőkben azokat a vizsgálatokat ismertetem, amelyek az aluminiumhydroxyd és Eriochromcyanin-R között lefolyó reakció tüzetesebb megismerése útján egyrészt rávezettek arra az új, általános összefüggésre, amely szerint a kolorimetriás mérések adatai kémiai vegyületképződés esetén kiértékelendők, másrészt rávezettek egy olyan kolorimetriás aluminiummeghatá-

¹ THAN KÁROLY: A Kisérleti Chemia Elemei. II. köt. 264. (1906).

² E. EEGRIWE: Z. anal. Chem. 76. 438. (1929).

³ F. ALTEN, H. WEILAND, K. KNIPPENBERG: Z. anal. Chem. 96. 91. (1934).

⁴ E. EEGRIWE: Z. anal. Chem. 108. 268. (1937).

⁵ F. ALTEN, B. WANDROWSKY, E. HILLE: Z. angew. Chem. 48. 273. (1935).

rozó módszerre, amely lehetővé teszi 15—1 γ *Al* meghatározását ± 0.25 γ *Al* abszolút hibával, amely tehát az EGGRIWE-féle kvalitatív Eriochromcyanin-R-reakció érzékenységét teljes mértékben hasznosítja.

*

Vizsgáljuk meg, miként változik — egyébként azonos körülmények között — egyrészt az Eriochromcyanin-R vizes oldatának, másrészt valamely adott *Al*-mennyiségből képződő lakk vizes oldatának extinkciója⁶ a festékkoncentráció fokozatos növelésével.

Mérjük egy 25 cm³-es mérőlombikba 2.00 cm³-t egy 0.0448 g $AlCl_3 \cdot 6H_2O/l$ összetételű aluminiumchloridoldatból és 1.25 cm³-t egy 3 hétig állott 1.000 g *Eriochromcyanin-R/l* összetételű festékoldatból, cseppentsünk hozzá 2 csepp 2*n*-*HCl*-at és a savanyú, sárgaszínű oldathoz — amelyben így éppen 10 γ *Al* és 1250 γ Eriochromcyanin-R van oldva — elegyítsünk szürkés átmeneti szín eléréséig cseppenként 2*n*-*NaOH*-ot, majd lúgosítsuk meg az oldatot még egy csepp 2*n*-*NaOH*-dal. A most lilás-kékszínű oldathoz adjunk 15 cm³ olyan nátriumacetát-ecetsav-pufferoldatot,⁷ amelynek savanyúsági foka $p_H = 5.4$, majd töltsük fel 25 cm³-re. Így olyan élénk lilaszínű lakkoldatot nyerünk, amelynek színe egyideig fokozódik, majd mintegy 20 óra után megállapodik.

Készítsünk pontosan ily módon egy olyan lakksorozatot, amelynek egyes tagjai 50 γ -tól 2000 γ -ig növekvő Eriochromcyanin-R-mennyiségek mellett mind egyformán 10 γ *Al*-ot tartalmaznak, valamint egy olyan lakksorozatot, amelynek egyes

⁶ Az oldatok extinkcióját a rájuk eső fény intenzitásának (I_0) és a rájuk keresztülhatoló fény intenzitásának (I) mért arányából az

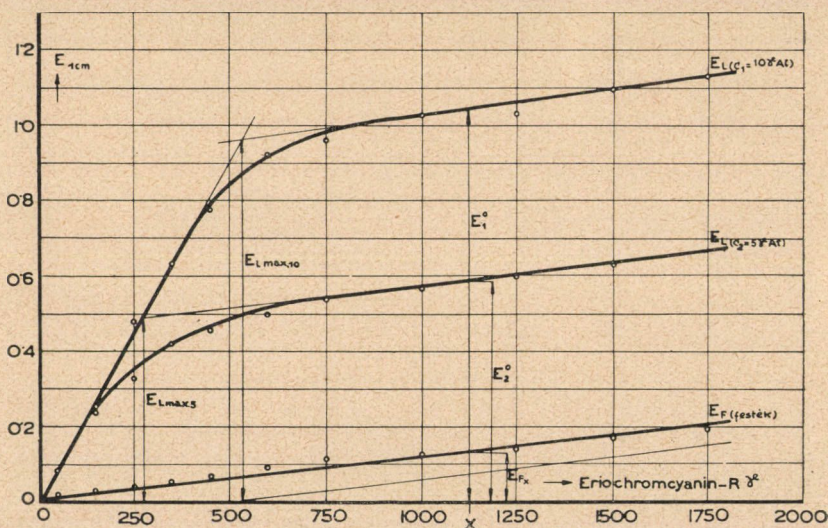
$$E = -\log \frac{I}{I_0}$$

összefüggéssel számítjuk.

⁷ $p_H = 5.4$ savanyúsági foka a literenként 14.02 g $CH_3 \cdot COONa \cdot 3H_2O$ és 1.74 g $CH_3 \cdot COOH$ tartalmú pufferoldatnak van. L. E. Mislovitzer, Die Bestimmung der Wasserstoffionenkonzentration von Flüssigkeiten. 309. (1928).

tagjai ugyancsak 50 γ -tól 2000 γ -ig növekvő Eriochromcyanin-R-mennyiségek mellett mind 5 γ Al-ot tartalmaznak és végül egy olyan festéksorozatot, amelynek egyes tagjai az 50 γ -tól 2000 γ -ig növekvő Eriochromcyanin-R-mennyiségek mellett alumíniumot nem tartalmaznak.

Ha ezeknek az oldatoknak a tiszta vízhez mért extinkcióját egy ZEISS-féle PULFRICH-lépcsősfotométer segítségével 1 cm-es küvettában az S.53.jelű zöld színszűrővel 20 órai állás után



1. ábra.

meghatározzuk és a nyert értékeket a festékmennyiség függvényeként ábrázoljuk, az 1. ábrát nyerjük.

Az 1. ábra lakkextinkciógörbéi arra mutatnak, hogy egy adott alumíniummennyiség a növekvő festékmennyiségekből csak egy megszabott mennyiséget köt meg élénk színeződés közben. Az $E_{L(c_1=10\gamma Al)}$ -extinkciógörbe szerint például 10 γ Al éppen 520 γ Eriochromcyanin-R-et tud élénk színeződéssel megkötni. Nagyszámú ilyen mérés tanúsága szerint általában egy súlyrész Al 50–52 súlyrész Eriochromcyanin-R-et köt meg élénk színeződéssel. Mivel ez a súlyarány jól egyezik egy Al \equiv (Eriochrom-

cyanin-R)₃ összetételű kémiai vegyület megfelelő súlyarányával $\left(\frac{3 \times 470}{27} = 52.2\right)$, a lakkextinciógörbék a mellett szólnak, hogy az élénkszinű ú. n. Aluminium-Eriochromcyanin-R-lakk egy jól definiált kémiai vegyület, amelyben minden aluminiumatom három Eriochromcyanin-R-molekulát tart megkötve.

Ennek megfelelően a lakkextinciógörbék kezdő ága egy meredek egyenes. Attól a ponttól kezdve, ahol az összes *Al* az *Al* \equiv (Eriochromcyanin-R)₃-vegyületté alakult és a festékfelesleg már csak a szabad festékre jellemző csekélyebb mértékben növeli az oldat színeződését: innen kezdve az extinciógörbe egy, a szabad festék extincióegyenesével párhuzamos, gyengén emelkedő ágban folytatódik. A két ág metszéspontja azt a lakkextincióértéket ($E_{L \max}$) adja meg, amely kizárólag a teljesen lakká alakult aluminiummennyiségtől származik. Két tetszőleges aluminiummennyiség (c_1 és c_2) aránya ennél fogva megegyezik $E_{L \max}$ -értékeik arányával:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{E_{L \max 1}}{E_{L \max 2}}. \quad (1)$$

Ez az összefüggés alkalmasnak látszik analitikai felhasználásra. Azonban egyetlen $E_{L \max}$ -érték meghatározása egy teljes E_L -görbe felvételét, tehát a meghatározandó aluminiummennyiség felaprózását teszi szükségessé. Ez pedig az érzékenység rovására megy.

E mellett azonban az 1. ábra geometriai viszonyaiból — amelyek a megszabott súlyarányok szerint lefolyó, tehát pl. kémiai vegyületképződéssel járó színreakciókra általánosan jellemzőek — levezethető egy másik, analitikai célra jól használható egyszerű összefüggés is. Általános és geometriai arányossági tételekkel igazolható, hogy

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{E_{L \max 1}}{E_{L \max 2}} = \frac{E_1^0 - E_{F_r}}{E_2^0 - E_{F_r}}. \quad (2)$$

E szerint két, ugyanazon (feleslegben lévő) festékmennyiséggel (*x* Eriochromcyanin-R) lakká alakított aluminiummennyiség (c_1 és c_2) arányát a lakkoldatok extinciójából (E_1^0 és E_2^0) egy olyan, a teljes festékmennyiség extincióját jelentő E_{F_r}

korrekcióstag segítségével kaphatjuk meg, amely az oldatról oldatra nagyon is változó, kismértékű festékfelesleg ellenére egy *állandó* és az oldatokban jelen sem lévő szabad festékmennyiség (x) extinkcióját veszi számításba.

Ehhez az összefüggéshez természetesen geometriai megfontolásoktól függetlenül is eljuthatunk. Ha egy alumínium-Eriochromcyanin-R-lakkoldatban, amelyben c mol alumínium és f mol festék van oldva, 1 mol Al n mol festéket köt meg, akkor az 1 cm-re vonatkozó oldat-extinkció E° a lakk rész-extinkciójából λc és a feleslegben maradt nem kötött festék részextinkciójából $\mu(f-nc)$ tevődik össze

$$E^\circ = \lambda c + \mu(f-nc)$$

azaz

$$E^\circ = (\lambda - n\mu)c + \mu f \quad (3)$$

egyenletek szerint, ahol λ és μ a lakk és festék molaris extinkció-koefficiensét jelentik. Mivel (3)-ban μf a teljes festékmennyiségnek 1 cm-re eső, eddig E_F -fel jelölt extinkcióját jelenti és a $(\lambda - n\mu)c$ tag szintén extinkció-dimenziójú, a (3) összefüggés

$$E^\circ - E_F = (\lambda - n\mu)c$$

alakban is írható. Ebből a két tetszőleges alumíniummennyiség (c_1 és c_2) és ezek lakkoldatainak extinkciója (E_1° és E_2°) között azonos, feleslegben alkalmazott festékmennyiség esetén fennálló (2) összefüggés általános alakja

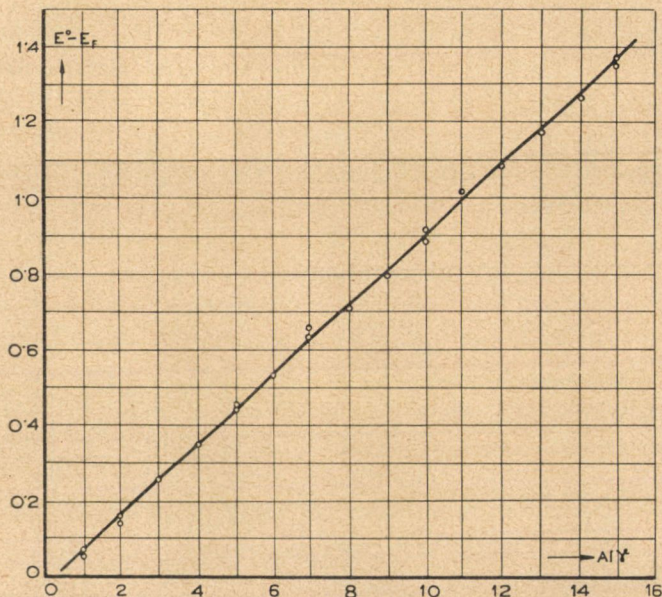
$$\frac{E_1^\circ - E_F}{E_2^\circ - E_F} = \frac{c_1}{c_2}$$

közvetlenül adódik.

A (2) összefüggés helyességének ellenőrzésére az elől közölt előírás szerint egyrészt 1—15 γ -ig terjedő alumíniummennyiségekből feleslegben alkalmazott Eriochromcyanin-R-rel lakkoldatokat készítünk, másrészt ugyanezen festékmennyiségek oldatait alumínium nélkül is elkészítjük, a lakk- és festékoldatok extinkcióit megmérjük, azután az egyes c alumíniummennyiségek $E^\circ - E_F$ -értékeit két-két összetartozó mérésből kiszámítjuk és az alumíniummennyiségek függvényeként ábrázoljuk. Az ily módon nyert 2. ábra a (2) összefüggés alkalmazhatóságát igazolja,

mert a kísérletileg meghatározott pontok egy a koordináta rendszer kezdőpontjából induló egyenesen helyezkednek el.

Valamely ismeretlen aluminiummennyiség analitikai meghatározása ezután a (2) összefüggés alapján a 2. ábra segítségével oly módon történhetik, hogy két extinkciómérésből megállapítva $E^{\circ} - E_F$ -értékét, az ehhez tartozó aluminiummennyiséget a 2. ábrán leolvassuk. A 2. ábra tanúsága szerint 1—15



2. ábra.

γ -ig terjedő aluminiummennyiségek ily módon $\pm 0.25 \gamma$ Al abszolút hibával határozhatók meg. Ennek a jelentékeny érzékenységnek az eléréséhez nagyban hozzájárul az a körülmény, hogy a méréseket a közölt módszer szerint egészen kis festékfelesleggekkel lehet elvégezni.

*

Már javasolták,⁸ hogy olyan színreakcióra alapított kolorimetriás meghatározásoknál, amelyeknél egy szintelen anyag egy

⁸ A. P. MUSSAKIN: Z. anal. Chem. **105**, 351. (1936).

festékekkel élénkszinű reakcióterméket ad, alkalmazzuk a festéket oly nagy feleslegben, hogy koncentrációja állandónak legyen tekinthető annak ellenére, hogy kisebb-nagyobb része a reakciótermékben lekötetik és ily körülmények között a szintelen anyag koncentrációját az oldatok extinkcióiból az

$$\frac{E_1^0}{E_2^0} = \frac{c_1 + a}{c_2 + a} \quad (4)$$

összefüggéssel számítsuk ki. Azaz tekintsük úgy a nagy festékfelesleg okozta állandó alapszint, mintha azt egy a koncentrációjú szintelen anyagból keletkezett élénkszinű reakciótermék okozná.

Lényegében ugyanezt a formulát javasolták⁹ minden olyan kolorimetriás meghatározáshoz, melynél az alapoldatnak mérhető saját extinkciója van.

A (4) összefüggés a korrekciós tagjának értéke attól függ, mennyire színes az alapoldat, és nyilvánvalónak látszik, hogy maga (4) összefüggés csak akkor alkalmazható, ha a festék oly nagy feleslegben van jelen, hogy az oldatok alapszíne változó hatóanyagkoncentráció (c_1, c_2) ... mellett is állandó.

A kémiai vegyületképződéssel járó alumínium-Eriochromcyanin-R-színreakcióra alapított és az előzőekben ismertetett kolorimetriás alumíniummeghatározásnál az oldatok állandó alapszínéről szó sincs. Ennélfogva úgy tűnik, hogy nem is alkalmazható a (4) összefüggés. Láttuk azonban, hogy ilyenkor a (2) egyenlet érvényes

$$\frac{E_1^0 - E_{F_x}}{E_2^0 - E_{F_x}} = \frac{c_1}{c_2},$$

amely pedig az

$$\frac{E_1^0}{E_2^0} = \frac{c_1 + a'}{c_2 + a'} \quad (5)$$

alakban is írható, vagyis forma szerint a (4) összefüggéssel azonos. Azonban az (5) egyenlet a' korrekciós tagja a (2) és (5) egyenletek szerint

$$a' = E_{F_x} \cdot \frac{c_2 - c_1}{E_2^0 - E_1^0}$$

⁹ M. WINKLER: Chem. Ztg. 56. 86. (1932).

nem azt az alumíniumkoncentrációt jelenti, amely az oldatok állandó alapszínének felel meg (hiszen az oldatoknak állandó alapszínük nincs is) hanem azt az alumíniumkoncentrációt, amely az oldatokhoz adott összes festékmennyiség saját extinkcióját képes előidézni.

Az (5) összefüggés a' korrekciós tagjának értéke tehát független attól, hogy mennyire színes az alapoldat, és maga az (5) összefüggés olyan körülmények között is alkalmazható, amikor az oldatok alapszíne a változó hatóanyagkoncentráció (c_1, c_2, \dots) mellett maga is változó, azonban csakis akkor, ha ki van elégítve az a feltétel, hogy a színreakció megszabott arányok szerint folyik le.

Ezért minden olyan esetben, amikor valamely színreakciónál kétségtelen, hogy az oldatoknak állandó alapszínük nincs és a kolorimetriás mérési adataik mégis kielégítik a (2) vagy (5) összefüggést, biztosan következtethetünk arra, hogy a megvizsgált színreakció megszabott arányok szerint, pl. kémiai vegyületképződéssel folyik le. Ily módon közelebbről még nem ismert színreakciók kémiai felderítésére nyílik lehetőség.

A dolgozat az Egyesült Izzólámpa és Villamossági R. T. kutatólaboratóriumában készült.

Újpest, 1937. dec. 10.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13-án tartott üléséből.)

KOLORIMETRISCHE ALUMINIUMBESTIMMUNG MITTELS ERIOCHROMCYANIN-R.

Von TIVADAR MILLNER.

Es wird mit kolorimetrischer Mikroanalyse die chemische Natur des Aluminium-Eriochromcyanin R-Farblackes aufgeklärt.

Der Aluminium-Eriochromcyanin-R-Farblack hat (bei $p_H=5.4$) konstante Zusammensetzung entsprechend der stöchiometrischen Verbindung: $Al \equiv (\text{Eriochromcyanin-R})_3$. Am Beispiel dieses Farblackes werden die allgemeingültigen quantitativen Unterlagen für kolorimetrische Bestimmungen für den Fall konstanter Farblackzusammensetzung entwickelt. Es wird gezeigt, dass die Extinktionsdifferenz $E^\circ - E_F$ der mit ein und derselben überäquivalenten Farbstoffmenge bereiteten Farblacklösung (E°) und Farbstofflösung (E_F) vom Farbstoffüberschuss prinzipiell unabhängig ist und gemäss der Gleichung

$$\frac{E_1^\circ - E_F}{E_2^\circ - E_F} = \frac{c_1}{c_2}$$

ein direktes Mass der im Farblack enthaltenen Aluminiummenge darstellt.

Es wird auf Grund dieser Gleichung eine kolorimetrische Aluminiumbestimmungsmethode angegeben, welche eine bis auf $\pm 25 \gamma$ Al genaue Bestimmung kleinster Aluminiummengen von 15γ Al bis 1γ Al ermöglicht.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der
Wissenschaften vom 13. December, 1937.)

RADONKONCENTRÁCIÓMÉRÉSEK A SZENT GELLÉRT-, SZENT IMRE- ÉS A RUDAS-FÜRDŐ LEVEGŐJÉN.

KOSMATH WALTER-től és WEBER ALFRÉD-től.

A grazi egyetem ásványtani-kőzettani intézetéből, vezető ANGEL FERENC.

Az alább részletezett méréseket 1936. dec. 25.-e és 1937 jan. 31.-e közt négy ionizációs kamrával és ugyanazokkal a módszerekkel végeztük, melyekkel 1935-ben Badgasteinben dolgoztunk.¹ A kapott eredmények rövid összefoglalása a következő:

Budapest levegőjének radontartalma nem haladja meg azt a határt, melyet minden más, különösebb radioaktivitásbeli sajátosságot nélkülöző helyen észlelni lehet. Érvényes ez pl. a Szent Gellért-szállónak a fürdőtől távolabb eső helyiségeire nézve is, melyeknek levegőradontartalma 2—10 Aer² közé esik.

Lényegesen más a helyzet a fürdésre szolgáló helyiségek levegőjénél. Ezeknek radontartalma a fürdőmedencének vízzel történő megtöltése alkalmából lényeges emelkedést mutat (45—2300 Aer). A radontartalmat természetesen a medence megtöltésének módja és a helyiségek szellőzési viszonyai lényegesen befolyásolják.

A forrásmedencék terének levegőjében magától értetődően a legmagasabb a radontartalom (2000—90000 Aer-ig), mint ez a német szöveghez csatolt összefoglaló táblázatból kivethető.

Megállapítottuk végül néhány fürdő- és ivókúra céljára használt víz radontartalmát is. Ezeket az eredményeket WESZELSZKY 1933-ban végzett méréseivel összehasonlítva, a legtöbb esetben nem mutatkoztak lényegesebb eltérések.

¹ Irodalmi idézeteket l. a német szöveg végén.

² 1 Aer = $1.3 \cdot 10^{-16}$ Curie/cm³.

DIE RADONKONZENTRATIONEN IM LUFTMILIEU DER BUDAPESTER RADIUMBÄDER SZENT GELLÉRT, SZENT IMRE UND RUDAS.

Von WALTER KOSMATH und ALFRED WEBER.

(Aus dem Mineralogisch-Petrographischen Institut der Universität Graz
Vorstand: Prof. Dr. FRANZ ANGEL.)

Einleitung.

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse der Radonmessungen bekanntgegeben, die in der Zeit vom 25. Dezember 1936 bis 31. Jänner 1937 in den radioaktiven Thermalbädern von Budapest: Szent Gellért, Szent Imre und Rudas durchgeführt wurden. In Budapest wurde mit demselben Messapparat aber mit 4 Ionisationskammern und denselben Methoden wie im April 1935 in Badgastein gearbeitet. Es wurden zur ersten Orientierung Luftproben aus den Badekabinen, den Türkischen Dampfbädern, Schwimmhallen, Quellstollen, Quellbecken der Budapester Radiumbäder und aus dem Räumlichkeiten des Kurhotels Szent Gellért in Budapest untersucht und dadurch die Luftradonstrukturen der Budapester Radiumbäder erkannt.

Damit die einzelnen Radiumkurorte damit beginnen können, sich richtig mit ihrer Radioaktivitätsfrage zu beschäftigen, müssen die einzelnen Radiumkurorte auch ihre Luftradonstrukturen kennen. (Siehe «Pflanzenphysiologische Beiträge zur Beurteilung der biologischen, bzw. balneologischen Bedeutung der Radioaktivität der Kur von Badgastein.»)

Ergebnisse.

I. Die Radioaktivität des Erdbodens, der Radongehalt der Bodenluft, die Radonexhalation aus dem Erdboden und der Radongehalt

der Freiluft in Budapest. Aus der Übereinstimmung der Werte der «natürlichen Aufladung», und der «natürlichen Aufladung mit Freiluft»,¹ die in Budapest festgestellt wurden, mit jenen von Graz, darf, da Graz ein Ort ohne radioaktive Besonderheit ist, geschlossen werden, dass die Radioaktivität des Erdbodens und der Gesteine, der Radongehalt der Bodenluft, die Radonexhalation aus dem Erdboden und der Radongehalt der Freiluft in Budapest im allgemeinen normal sind, d. h. Werte erreichen, die den Werten an Orten ohne radioaktive Eigentümlichkeiten entsprechen.

II. Die radioaktiven Besonderheiten in Budapest. Nur in den radioaktiven Thermalbädern von Budapest: Szent Gellért, Szent Imre und Rudas sind in der Luft der Baderäume der Quellbecken und Quellstollen und in der Nähe derselben und an den Ursprungstellen der Trinkquellen auch in der Freiluft erhöhte Radonkonzentrationen vorhanden, die durch die Radonabgabe des radonhaltigen Thermalwassers an die Luft der genannten Räumlichkeiten und Gebiete bedingt sind.

1. Die Radonkonzentrationen im Luftmilieu des Kurhotels Szent Gellért in Budapest. Aus der Tabelle 1, in der die Mittelwerte der

Tabelle 1.

Kurhotel St. Gellért	Lufradon in Aer Mittelwerte	Zahl der Messungen
Hotelzimmer _ _ _	3·7	5
Hall _ _ _ _ _	6·2	3
Musikzimmer _ _ _	2·2	3
Restaurant _ _ _	7·1	3
Foyer _ _ _ _ _	3·5	2
Gesamtmittel	4·5	16

¹ Unter der «natürlichen Aufladung» ist der elektrometrische Effekt im Messapparat zu verstehen, der durch die durchdringende Strahlung der Umgebung, die Gefässtrahlung und die Höhenstrahlung bedingt ist, wenn die Kammern mit entemantierter Freiluft gefüllt sind und unter

Luft radonmessungen, die an verschiedenen Tagen zu verschiedenen Tagesstunden durchgeführt wurden, vermerkt sind, sieht man, dass in den Hotelzimmern und in den anderen Aufenthaltsräumen des Kurhotels Szent Gellért: Musikzimmer, Lesezimmer, Gesellschaftsräumen, Foyer, Restaurant, Hall normale Radonkonzentrationen in der Luft vorhanden sind, die zwischen 2 und 10 Aer¹ schwanken. Es sind dies Werte, die in der Luft der Wohnräume an Orten ohne radioaktive Eigentümlichkeiten anzutreffen sind. Dies ist verständlich, weil das Kurhotel den modernen hygienischen Forderungen genügend durch eine Ventilationsanlage ständig gut gelüftet wird. So kann es in den Räumlichkeiten dieses Hotels zu keiner Ansammlung von Radon kommen, das durch die Badehalle, die das Kurhotel mit dem Heilbad verbindet, aus den Radiumheilbädertrakten in das Kurhotel durch den Luftaustausch hineingelangt. Andererseits ist ein starker Luftaustausch zwischen dem Heilbad und der Kurhotel Szent Gellért nicht möglich, da das Heilbad nur durch die Tür, welche die Badehalle von Kurhotel trennt, mit dem Kurhotel verbunden ist. Diese Tür ist überdies fast ständig geschlossen.

2. Die Radonkonzentrationen in der Luft der Badekabinen der Budapester Radiumbäder: Szent Gellért, Szent Imre und Rudas während des Badens.

Die Kabinen der Einzelbädertrakte des Heilbades St. Gellért sind einander baulich und auch hinsichtlich der Wasserversorgung kongruent. Dasselbe gilt auch für die Kabinen der Juventusbäder im Rudas und für die kleinen, mittleren und grossen Kabinenbäder im St. Imre. Die Badekabinen in Rudas und Szent Imre sind durch eine Zwischenwand, die mit einer Tür versehen ist, in

«natürlicher Aufladung mit Freiluft» ist der Aufladeeffekt zu verstehen, der durch die eben genannten Strahlungen und durch das Radon samt den Zerfallsprodukten hervorgerufen wird, das in den Kammern vorhanden ist, wenn diese radonhaltige Freiluft enthalten.

¹ 1 Aer = 1.3×10^{-16} Curie/ccm. Das ist der mittlere Radongehalt der Freiluft in der Nähe des Erdbodens an Orten ohne radioaktive Besonderheit.

einen Auskleideraum und Baderaum geteilt, was in den Einzelbäder im Szent Gellért nicht der Fall ist.

Unter den Kabinenbädern wurde jeweilig eine Kabine für die Luftradonuntersuchungen gewählt und in dieser an verschiedenen Tagen zu verschiedenen Tagesstunden mehrmals aufeinanderfolgend mehrere Luftproben entnommen. Die erste Luftprobe jeder Messerie wurde im Auskleideraum am Ruhebett unmittelbar vor dem Einlassen des Thermalwassers in die Badewanne abgesaugt. Dann wurde die Kabinentür und in den Kabinen mit einem eigenen Baderaum auch die Tür dieses Raumes geschlossen und dann mit der Füllung der Badewanne begonnen. Diese Türen blieben während einer Messerie bis zur Beendigung der letzten Luftprobenentnahme geschlossen. Die zweite Luftprobe wurde gleich nach Beendigung der Wannenfüllung 10 cm über der Oberfläche des Badewassers und die dritte Luftprobe 20 Minuten später an derselben Stelle aufgefangen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der Tabelle 2 vermerkt. In der Spalte «vor» dieser Tabelle sind die Mittelwerte der ersten Luftproben, in der Spalte «nach» dieselben der zweiten Luftproben und in der Spalte «später» die Mittelwerte der dritten Luftproben der Messerien in Aer eingetragen. In der Spalte «nach» sind in der Klammer die berechneten Luftradonkonzentrationen angeführt, die sich nach der Gleichung $I \rho = \rho_0 + 2800 (r_1 - r_2) \cdot \frac{v}{V}$

berechnen lassen unter der Annahme, dass sich das Radon, welches während der Wannenfüllung vom einströmenden Thermalwasser an die Luft der Kabine bzw. des Baderaumes abgegeben wird, aus diesem nicht entweicht. Die Gleichung I ergeben Überlegungen, die bereits in der Arbeit «Das radioaktive Klima und das radioaktive Milieu von Badgastein, seine bioklimatische und balneologische Bedeutung» angegeben sind. ρ_0 bedeutet in der Gleichung I den gemessenen mittleren Luftradonwert unmittelbar vor dem Einlassen des Thermalwassers in die Badewanne ausgedrückt in Aer, r_1 den Radongehalt des in die Wanne einströmenden Thermalwassers, r_2 denselben des Badewassers in ME,¹ v das Volumen des

¹ ME = Mache Einheiten.

Tabelle 2.

Das Lufradon in den Kabinenbädern der Budapester Radiumbäder.

Thermalbad	Lufradon in Aer			Zahl der Messserien	D in Aer Stunden	ϱ_m in Aer	r_1 r_2		v	V	Wannenfüllung
	vor	nach	später				in ME				
<i>St. Gellért</i>											
Einzelbad _ _ _ _ _	18	45 (55)	42	5	30	43	1.4	0.4	800	60.000	von oben stark sprudelnd in 4 Minuten
Einzelbad im Kurhotel	5	120 (200)	50	5	57	86	3.5	1.5	700	20.000	von oben stark sprudelnd in 6 Minuten
<i>Rudas</i>											
Juventusbad _ _ _ _ _	50	308 (400)	300	6	160	245	9.0	5.0	500	16.000	von oben sprudelnd in 25 Minuten
<i>St. Imre</i>											
Kleine Kabine _ _ _ _ _	50	232 (665)	167	5	114	170	9.4	5.0	500	10.000	von oben schwach sprudelnd in 20 Min.
Mittlere Kabine _ _ _ _ _	91	650 (1323)	197	4	280	425	9.4	5.0	1000	10.000	von oben sprudelnd in 4 Minuten
Grosse Kabine bei der üblichen Wannenfüllung	174	883 (1400)	644	5	520	780	9.4	5.0	2000	20.000	von unten in 10 Min.
Grosse Kabine neue Wannenfüllung _ _ _ _ _	155	2300 (2675)	1700	5	1265	1900	9.4	0.4	2000	20.000	von oben stark sprudelnd in 10 Minuten.

Badewassers und V das Volumen des Luftraumes der Badekabine bzw. des Baderaumes in Liter. In der Tabelle 2 sind auch die in der Gleichung I enthaltenen Grössen v , V , r_1 und r_2 zusammengestellt und auch die Luftradondosis D in Aer Stunden und die mittlere Luftradonkonzentration ρ_m in Aer, welchen ein Badegast während eines Aufenthaltes im Baderaum von 40 Minuten vom Zeitpunkt des Beginnes der Wannenfällung an gerechnet ausgesetzt ist, angegeben.

Das Luftradon in den Thermaleinzelbädern des Budapestes Radiumbades Szent Gellért während des Badens. Die Tabelle 2 zeigt, dass das Luftradon in diesen Kabinen während der Wannenfällung in 4 Minuten von 18 Aer auf 45 Aer ansteigt und dann während der Wasserbades in den folgenden 20 Minuten nur langsam auf 42 Aer abklingt. Dies ist auf das grosse Luftvolumen der Kabine und den verhältnissmässig geringen Luftaustausch der Kabinenluft mit der Freiluft und Gangluft durch die Türen und Fensterfugen der Kabine zurückzuführen. Deshalb ist auch die Differenz zwischen dem gemessenen und dem berechneten Luftradonwert in diesen Kabinen nicht besonders gross.

Das Luftradon in den Thermaleinzelbädern des Budapestes Radiumbades Szent Gellért, in denen künstliche Kohlensäurebäder verabfolgt werden. In diesen Thermaleinzelbädern, in welchen künstliche Kohlensäurebäder gegeben werden, sind während des Badens dieselben Luftradonverhältnisse, wie in den eben besprochenen natürlichen Thermaleinzelbädern von St. Gellért anzutreffen.

Das Luftradon in den Badekabinen, die an ein Hotelzimmer des Kurhotels St. Gellért angeschlossen sind, während des Badens. In diesen Badekabinen steigt das Luftradon (Tab. 2) während der Wannenfällung in 6 Minuten von 5 Aer auf 120 Aer und klingt dann in den darauffolgenden 20 Minuten sehr rasch auf 50 Aer ab. Dies erklärt sich daraus, dass diese Badekabinen an die Ventilationsanlagen des Kurhotels St. Gellért angeschlossen sind. Aus diesem Grunde besteht auch zwischen dem gemessenen und den berechneten Luftradonwert eine relativ grosse Differenz.

Das Luftradon in den Juventusbädern des Heilbades Rudas während des Badens. In Baderaum dieser Kabinen steigt das Luftradon während der Wannenfällung in 25 Minuten vom 50 Aer auf

308 Aer und klingt dann in den folgenden 20 Minuten sehr langsam auf 300 Aer ab. (Tab. 2.) Die grosse Differenz zwischen der gemessenen und berechneten Luftaktivität im Baderaum der Juventusbäder wird verständlich, wenn man bedenkt, dass in diesen Bädern die Wannenfällung 25 Min. dauert, so dass während dieser Zeit durch die Türspalten der Tür des Baderaumes viel Radon aus dem Baderaum in den Auskleideraum entweichen kann. Dieser Luftaustausch wird vor allem während der Wannenfällung sehr rege sein, da das einströmende warme Thermalwasser zwischen der Luft im Baderaum und derselben im Auskleideraum Lufttemperaturdifferenzen schafft, wodurch relativ starke Wärmeströmungen zwischen diesen Räumen auftreten können. Nach Beendigung der Wannenfällung ist zwischen der Luft im Bade- und Auskleideraum ein Temperatúrausgleich eingetreten und dadurch der Luftaustausch durch Wärmeströmungen nicht mehr vorhanden. So erklärt sich auch, dass das Luftradon nach Beendigung der Wannenfällung in den nachfolgenden 20 Minuten im Baderaum praktisch konstant bleibt.

Das Luftradon in den kleinen Kabinenbädern des Heilbades Szent Imre während des Badens. In diesen Kabinen steigt das Luftradon während der Wannenfällung in 20 Minuten von 50 Aer auf 232 Aer und klingt dann in den folgenden 20 Minuten rasch auf 167 Aer ab. (Tab. 2.).

Der für den Baderaum dieser kleinen Kabinen berechnete Luftradonwert ist ungefähr 2.5 grösser als der darin gemessene Wert. Da der Auskleideraum, dessen Luftraum ebenso gross ist, wie derselbe des Baderaumes durch eine nicht gut schliessende Tür vom Baderaume getrennt ist, kann sich das Radon, das während der Wannenfällung in 20 Minuten aus dem einströmenden Thermalwasser abgegeben wird, auf den ganzen Kabinenraum verteilen, der doppelt so gross ist, wie der Baderaum, für den die Berechnung durchgeführt ist. So sind in Baderaum nur 300 Aer zu erwarten, ein Wert der noch immer um 70 Aer grösser ist, als der gemessene Wert. Diese 70 Aer entweichen während der Wannenfällung von 20 Minuten aus der Badekabine durch die Tür und Fensterfugen, da die Fenstern und Türen in diesen Kabinen nicht besonders gut schliessen.



Das Luftradon in den mittleren Kabinen des Heilbades Szent Imre während des Badens. In diesen Kabinen steigt das Luftradon während der Wannenfällung in 4 Minuten von 91 Aer auf 650 Aer und klingt dann in den folgenden 20 Minuten während des Wasserbades rasch auf 197 Aer ab (Tab. 2).

Bezüglich des Schliessens der Fenster und Türen in diesen Kabinenbädern gilt dasselbe, wie für die kleinen Kabinen dieses Heilbades. Ausserdem ist oberhalb der Kabinentür, die in den Auskleideraum führt, ein grosser Ausschnitt in der Wand zur Ventilation freigelassen, so dass sich die Luft im Auskleideraum ständig im regsten Austausch mit der Gangluft dieses Bädertraktes befindet. In den Querwänden des Baderaumes, welche diesen von den benachbarten trennt, sind oben an der Decke Spalten freigelassen, so dass durch diese hindurch eine Luftzirkulation aus dem Baderaum einer Kabine in die Baderäume der benachbarten Kabinen möglich ist. So wird sowohl das rasche Abklingen der Luftaktivität in den Baderäumen dieser mittleren Kabinen während des Wasserbades und auch der grosse Unterschied zwischen dem berechneten und gemessenen Luftradonwert verständlich.

Das Luftradon in den grossen Kabinen des Heilbades Szent Imre während des Badens. Bei der derzeit üblichen Fällungsart der Baderwannen in diesen grossen Kabinenbädern steigt das Luftradon von 174 Aer während der Wannenfällung innerhalb 10 Minuten auf 883 Aer und klingt dann rasch während des Wasserbades in den folgenden 20 Minuten auf 644 Aer ab. (Tab. 2.) Auch in diesen Kabinen schliessen die Türen nicht besonders gut, daher ist es erklärlich, dass der gemessene Luftradonwert mit der berechneten Luftaktivität einen grossen Unterschied zeigt und die Luftaktivität während des Wasserbades stark abklingt.

Das Luftradon in den grossen Badekabinen im Heilbad Szent Imre bei einer neuen Fällungsart der Badewanne. Wird die Badewanne in diesem grossen Badekabinen sprudelnd von oben gefüllt und durch eine einfache Vorrichtung das einströmende Thermalwasser fast vollständig entemanirt, so steigt das Luftradon in diesem Baderaum während der Fällung der Badewanne in 10 Minuten von 150 Aer auf 2300 Aer, und klingt dann während des Wasserbades in 20 Minuten rasch auf 1700 Aer ab.

3. Das Luftradon in den Türkischen Dampfbädern der Budapester Radiumbäder St. Gellért, St. Imre und Rudas.

In den Türkischen Dampfbädern wurden an verschiedenen Tagen und zu verschiedenen Tagesstunden während des Betriebes an verschiedenen Stellen des Baderaumes in der Nähe der Wasseroberfläche der Basins und an den Ruhestellen in Sitzhöhe mehrere Luftproben entnommen. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in der Tabelle 3 zusammengestellt, in welcher das Gesamtmittel aus

Tabelle 3.

Das Luftradon in den Türkischen Dampfbädern.

Dampfbäder	Luftradon in Aer			Schwan- kung	Zahl der Mes- sungen	D Aer Stunden	ρ_m in Aer
	Mittel.	Max.	Min.				
St. Gellért.....	58	64	50	0·78	10	116	58
St. Imre	752	1000	650	0·65	11	1504	752
Rudas	1645	1750	1300	0·74	14	3290	1645

den entsprechenden Einzelmessungen in der Spalte «Mittel», das Maximum in der Spalte «Max.» und das Minimum in der Spalte «Min.» eingetragen sind. Die Spalte «Schwankung» enthält das Verhältniss des Minimums zum Maximum. In dieser Tabelle 3 sind auch die Luftradondosen D in Aer Stunden und die mittleren Luftradonkonzentrationen ρ_m eines Thermalbades in diesen Bädern angegeben. Da sich die Badegäste in den Budapester Dampfbädern im Baderaume durchschnittlich 2 Stunden aufhalten, so sind die D- und ρ_m -Werte eines Türkischen Dampfbades für die Aufenthaltsdauer von 2 Stunden berechnet.

In den Baderäumen der Türkischen Dampfbäder im St. Gellért, St. Imre und Rudas konnte festgestellt werden, dass während des Betriebes in den Baderäumen dieser Bäder die Luftaktivität weder zeitlich, noch örtlich stark variiert, dh. praktisch konstant ist. Die zeitliche Konstanz ist darauf zurückzuführen, dass dem Badebasins der Dampfbäder während des Betriebes ständig neues

Thermalwasser sprudelnd zuströmt, dieses Wasser Emanation an den Luftraum abgibt und so ein ständig wirkender Emanator desselben ist, der in der Zeiteinheit durchschnittlich gerade soviel Emanation dem Baderaume zuführt als in der Zeiteinheit aus dem Luftraum der Baderäume durch die Ventilation und den Luftaustausch beim Ein- und Ausgehen der Badegäste in die Umgebung entweicht.

Zu dem mittleren Luftradonkonzentrationen in den 3 türkischen Dampfbädern ist zu bemerken, dass diese Mittelwerte als Endwerte aufzufassen sind, die sich in der Früh zu Beginn des Badebetriebes in den einzelnen Baderäumen einstellen, auf welche das Luftradon in diesen Räumen von Zeitpunkt der Beendigung der Basinsfüllungen bis zum Beginn des Badebetriebes abklingen. Die mittlere Luftaktivität in einem Türkischen Dampfbad ist durch den Radongehalt des bei der Füllung in die Badebasins einströmenden Thermalwassers, durch die Füllungsart und die dadurch bedingte Radonabgabe des Thermalwassers während der Basinsfüllung an den Luftraum durch das Verhältniss des Luftraumes im Baderaum zum Volumen des Badewassers in den Basins und durch die Ventilationsverhältnisse während der Füllung und bis zu Betriebsbeginn bestimmt. (Siehe Gleichung I.)

Das Luftradon im Baderaum des «Türkischen Dampfbades» in Heilbad St. Gellért. Die mittlere Luftaktivität in diesem Dampfbad beträgt 58 Aer, das Minimum 50 Aer und das Maximum 64 Aer. Die Schwankung von 0.78 zeigt, dass die Luftaktivität in diesem Raum praktisch als konstant anzusehen ist. Das Badewasser in den beiden Basins hat in Mittel 1.2 ME. und das während des Betriebes zufließende Thermalwasser 1.7 ME.

Das Luftradon im «Türkischen Dampfbad» des Heilbades St. Imre. Die mittlere Luftaktivität dieses Dampfbades beträgt 752 Aer, das Maximum 1000 Aer und das Minimum 520 Aer. Auch in diesem Bad schwankt die Luftaktivität weder zeitlich noch örtlich zwischen weiten Grenzen. Das Badewasser in den Basins hat in Mittel 3.4 ME.

Das Luftradon im «Türkischen Dampfbad» des Heilbades Rudas. Die mittlere Luftaktivität in diesem Bad beträgt 1645 Aer, das Minimum 1300 Aer und das Maximum 1750 Aer. Die zeitliche und

örtliche Schwankung der Luftaktivität ist in diesem Baderaum ebenfalls klein. Das Badewasser im Basin hat 4·5 ME und das während des Betriebes dem Basin zufließende Thermalwasser 9·4 ME.

Im Ruheraum des Türkischen Dampfbades in Rudas wurden 205 Aer festgestellt.

4. Das Luftradon in den Schwimmhallen der Budapester Radiumbäder. Die Luftradonuntersuchungen in den Schwimmhallen und die Verarbeitung der Messresultate dieser Untersuchungen erfolgt ebenso wie dies bei den Türkischen Dampfbädern geschehen ist. Zu den gemessenen mittleren Luftaktivitäten in den Schwimmhallen der Budapester Radiumbäder und der festgestellten zeitlichen Konstanz derselben gelten dieselben Bemerkungen, die zu den mittleren Luftaktivitäten der türkischen Dampfbäder gemacht wurden. Die Wasserversorgung der Schwimmbasins ist derjenigen der türkischen Dampfbäder ähnlich.

Tabelle 4.

Das Luftradon in den Schwimmhallen der Budapester Radiumbäder.

Schwimmbad	Luftradon in Aer			Schwan- kung	Zahl der Mes- sungen	D in Aer Stunden	Q m in Aer
	Mittel.	Max.	Min.				
St. Gellért	28	31	26	0·83	17	56	28
Rudas	360	375	340	0·90	6	720	360

Das Luftradon in der Schwimmhalle des Heilbades St. Gellért. Die mittlere Luftaktivität beträgt in dieser Schwimmhalle 28 Aer, das Maximum 31 Aer und das Minimum 26 Aer. Das Luftradon variiert demnach in dieser Schwimmhalle während des Betriebes weder zeitlich noch örtlich stark. Das während des Betriebes einströmende Thermalwasser hat eine Aktivität von 2·3 ME. Das Wasser des Schwimmbasins hat sowohl im Luftperlenbad, als auch im anderen Teil des Schwimmbasins wegen der entemanierenden Wirkung der Luftperlen nur 0·1 ME.

Das Luftradon in der Schwimmhalle des Heilbades Rudas. Die

mittlere Luftradonkonzentration in der Rudas Schwimmhalle beträgt 360 Aer, das Maximum 375 Aer und das Minimum 340 Aer. Auch in dieser Schwimmhalle variiert das Luftradon weder zeitlich noch örtlich stark.

5. Das Luftradon in den Schlammbehandlungsräumen des Heilbades Szent Gellért. Das Luftradon im Schlammbehandlungsraum II. Klasse. In diesem Schlammbehandlungsraum wurden an verschiedenen Tagen und verschiedenen Tagesstunden während des Betriebes Luftproben über den Liegestellen abgesaugt. Der Mittelwert aus diesen 8 Messungen beträgt: 20 Aer, das Minimum 11 Aer und das Maximum 30 Aer. Die Luftaktivität in diesem Raum schwankt somit im Verhältnis 1 zu 3. Die mittlere Luftradonkonzentration in diesem Raume wird aufrecht erhalten nicht etwa durch eine Radonabgabe, die man aus dem radioaktiven Schlamm während der Bereitung der Schlamm packungen in diesen Behandlungsraum vermuten könnte, sondern sie ist durch die Radonabgabe des einströmenden Thermalwassers in die Badewanne dieses Raumes, in der jeder Patient nach der Schlammbehandlung ein Thermalbad nimmt, bedingt, also ein Thermalwasser- und kein Schlammeffekt.

Das Luftradon in den Schlammbehandlungskabinen der I. Klasse. Die Luftradonmessungen in den Kabinen während der Schlamm packung ergaben einen Mittelwert von nur 10 Aer. Dieser verhältnismässig kleine Wert zeigt, dass eine starke Radonabgabe des radioaktiven Schlammes an die Kabinenluft weder während der Bereitung der Schlamm packung noch während der Schlammbehandlung stattfindet.

Nach der Schlammbehandlung nimmt der Patient ein Thermalbad in der Badewanne der Kabine, in der er die Schlammbehandlung mitgemacht hat. Während des Thermalbades sind in diesen Schlammbehandlungskabinen dieselben Luftradonverhältnisse anzutreffen, wie sie in der Thermaleinzelnbädern dieses Heilbades gefunden wurden.

6. Das Luftradon in der grossen Badehalle des Heilbades Szent Gellért. In der Badehalle wurden nach denselben Gesichtspunkten, wie in den Schwimmhallen Luftradonmessungen durchgeführt.

Während des Badebetriebes ist das Luftradon in der Badehalle zeitlich und örtlich praktisch konstant und erhält seinen Mittelwert von 17 Aer durch das Radon, das aus den anliegenden Baderäumen Dampfbädern, Schwimmhalle, Thermaleinzelbädern und den Schlammbehandlungsräumen während des Betriebes entweicht. Bei Betriebslosigkeit also an Sonn- und Feiertagen nachmittags wurden in der Badehalle im Mittel nur 6 Aer gemessen, was aus dem Vorangehenden verständlich ist.

7. Das Luftradon in einigen Quellbecken und Quellstollen der Budapester Radiumbäder.

Das Luftradon im Quellbeckenraum des Heilbades Szent Gellért.

Im Quellbecken dieses Heilbades wurden 4 Luftproben in der Nähe der Wasseroberfläche an verschiedenen Tagen abgesaugt. Das Mittel aus diesen Messungen beträgt 20 000 Aer, das Maximum 20.400 Aer und das Minimum 19 600 Aer. Die Aktivität ist in diesem Raum praktisch als konstant zu bezeichnen. Die mittlere Luftaktivität dieses Quellbeckenraumes ist eine Aktivität, die die höchste in Badgastein gemessene Luftaktivität im Quellursprung der Elisabeth-Hauptquelle (20 400 Aer) erreicht.

Das Luftradon in Quellbecken der Hungariaquelle im Heilbad Rudas. Im Quellbecken der Hungariaquelle wurden im Mittel 24 000 Aer gemessen in den Luftproben, die aus dem Quellbeckenraum abgesaugt wurden, indem die Glasplatte, die lose eine kleine Öffnung, welche die Hungaria Trinkhalle mit dem Quellbeckenraum verbindet, an einer Seite gerade soweit vom Rand dieser Öffnung abgeschoben wurde, so dass durch den so entstandenen kleinen Spalt ein Gummischlauch eingeführt werden konnte. Der Wert von 24.000 ist somit ein Wert der sicherlich bedeutend kleiner sein dürfte, als die Luftaktivität im Inneren dieses Quellbeckens, da er im Luftaustauschgebiet zwischen der Quellbeckenluft und der radonarmen Luft der Trinkhalle festgestellt wurde. In der Hungaria-Trinkhalle wurden 94 Aer gemessen.

Das Luftradon in Quellbecken der Gül Baba Quelle im Heilbad Rudas. Aus diesem Quellbecken, das oben mit einer Glasplatte abgedeckt ist, wurden einige Luftproben ebenso, wie aus dem Hungaria Quellbecken abgesaugt. Der Mittelwert aus diesen 4 Messungen beträgt 2075 Aer. Im Inneren dieses Quellbeckens sind

sicherlich bedeutend höhere Luftaktivitäten vorhanden, da dieser Wert ebenfalls in einem Luftaustauschgebiete gefunden wurde.

Das Luftradon in den Quellstollen im Gebiete des Rudasbades.

Im Törökstollen wurde im Ursprung der Rákóczi-Quelle in der Luft 1300 Aer festgestellt. Für die Neugestaltung des Radiumbades Rudas schien es vom Interesse festzustellen, welche Radonkonzentrationen sich im Törökstollen einstellen könnten, wenn dessen Eingänge abgeschlossen werden. Aus dem Inneren des abgeschlossenen Törökstollens wurden mittels einer für diese Untersuchungen eigens angelegten Rohrleitung 2 bzw. 4 Tage nach der Schließung des Stollens 4 Luftproben abgesaugt, die einen Mittelwert von 14 700 Aer mit einem Minimum von 12 000 Aer und einen Maximum von 17 400 Aer ergaben. Der Luftradonwert in diesem abgeschlossenen Törökstollen schwankte demnach relativ stark. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Luftraum des abgeschlossenen Törökstollens noch mit der Luft des Kanals verbunden war, in dem das Wasser der Rákóczi- und Mustafa-Quelle in das gemeinsame Sammelbecken aller Badequellen des Rudas Heilbades abfließt.

Die König Mathias-Quelle entspringt in einem Stollen in dem eine mittlere Luftaktivität von 7633 Aer aus 4 Messungen ermittelt werden konnte. Das Maximum beträgt 8400 Aer und das Minimum 7500 Aer. Die Luftaktivität in diesem Stollen schwankt nur sehr wenig, da dieser abgeschlossen ist.

Im abgedeckten Quellfassungsraum der König Mathiasquelle, der vor dem Quellstollen liegt und in dem das Quellwasser aus einem Quellbecken sprudelnd in ein kleines Sammelbecken abströmt, aus dem es dann durch ein Abflussrohr erst in den Kanal abfließt, der zu gemeinsamen Sammelbecken aller Badequellen des Rudas führt, konnte eine Luftaktivität von 90 000 Aer ermittelt werden. Der Quellfassungsraum war vom Quellstollen durch eine Querwand abgetrennt, so dass ein reger Luftaustausch zwischen der Luft in Quellfassungsraum und der Stollenluft nicht stattfinden konnte. Vergleicht man die Stollenluftwerte im Rudasgebiet mit denselben von Badgastein (2030 bis 20 400 Aer) so sieht man, dass die Rudaswerte der Grössenordnung nach mit den Gasteinerwerten

übereinstimmen, wenn man von der Luftaktivität des Quellfassungsraumes der König Mathiasquelle absieht, dessen Luftaktivität fast 5-mal höher ist, als der höchste Stollenluftwert von Badgastein.

Zusammenfassend erhält man das Ergebnis, dass die Luftaktivitäten in den Quellstollen und Quellbecken der Budapester Radiumbäder der Grössenordnung nach mit denselben von Badgastein übereinstimmen.

III. Überblick.

Um einen Überblick über die Vielgestaltigkeit der Luftradondosen und — Konzentrationen im Luftmilieu der Budapester Radiumbäder: St. Gellért, St. Imre und Rudas zu erhalten, sind in der nachfolgenden Tabelle 5 die Thermalbäder der Budapester Radiumbäder den Luftradondosen nach steigend geordnet vermerkt und den Thermalbädern von Badgastein gegenüber gestellt. In der Tabelle 6 sind die mittleren Luftradonkonzentrationen in den Quellstollen und Quellbecken der Budapester Radiumbäder und die Luftradonkonzentrationen in den Quellstollen von Badgastein eingetragen.

Aus diesen Tabellen 5 und 6 erkennt man, dass das Luftradon im Luftmilieu der Budapester Radiumbädern: St. Gellért, St. Imre und Rudas zwischen weiten Grenzen schwankt und in vielen Räumlichkeiten und Gebieten Luftradonkonzentrationen und Dosen zeigt, die im Luftmilieu von Badgastein vorhanden sind.

Der Radongehalt der Thermalquellen der Budapester Radiumbäder. In den Wässern der Thermalquellen die in den Budapester Radiumbädern balneotherapeutisch zu Trink- und Badekuren verwendet werden, wurden im Ursprung folgende Konzentrationen gemessen:

Trinkquellen: Árpád: 11·4 ME., Attila: 18·0 ME.

Trink- und Badequellen: Juventus: 9·5 ME., Gül Baba: 14·9 ME., Hungaria: 14·3 ME.

Badequellen: Kossuth: 11·2 ME., Udvari: 17·0 ME., Beatrix: 18·8 ME., Rákóczi: 12·5 ME., Rákóczi mit Mustafa: 16·0 ME., König Mathias: 18·0 ME.

Quellbecken im Szent Gellért, mit dessen Wasser alle Badestellen dieses Heilbades gespeist werden: 8·5 ME.

Quellbecken in St. Imre, mit dessen Wasser alle Badestellen dieses Heilbades versorgt werden: 9·8 ME.

Tabelle 5.

Thermalbäder	Luft-radon-dosis <i>D</i> in Aer Stunden	Mittlere Luft-radon konzentration in Aer.
Kurhotel St. Gellért		4·5
<i>1. Thermalbäder in Budapest</i>		
Thermal-einzelbad St. Gellért	30	43
Schwimmbad St. Gellért	56	28
Badekabine Kurhotel St. Gellért	57	86
Kleine Kabine St. Imre	114	170
Dampfbad St. Gellért	116	58
Juventushad Rudas	160	245
Mittlere Kabine St. Imre	280	425
Grosse Kabine St. Imre		
übliche Wannenfüllung	520	780
Schwimmbad Rudas	720	360
Grosse Kabine St. Imre		
neue Wannenfüllung	1265	1900
Dampf-bad St. Imre	1504	752
Dampf-bad Rudas	3290	1645
<i>2. Thermalbäder in Badgastein</i>		
Badgastein klein	330	500
Badgastein gross	1000	1500

Die Zahlen 330 und 500 dürften sich auf ein Gasteiner Thermalbad beziehen, bei dem die Badewanne von unten gefüllt wird. Die Zahlen bei Badgastein gross 1000 und 1500 beziehen sich auf ein Gasteiner Thermalbad, bei dem die Badewanne von oben sprudelnd gefüllt wird.

Die Dianaquelle: Die bisher unbenützte Dianaquelle hat 52·3 ME. und ist somit nicht nur die stärkste radioaktive Therme, sondern auch die stärkste radioaktive Quelle Ungarns.

Den eben angeführten Aktivitätswerten der Quellwässer stehen einige Werte von WESZELSZKY gegenüber, die in der Tabelle 7

Tabelle 6.

	Mittlere Lufttraden- konzentration in Aer.
Budapest:	
Quellbecken St. Gellért	20.000
Quellbecken Hungária	24.000
Quellbecken der Gül Baba	2.075
Törökstollen offen	1.300
Törökstollen geschlossen	14.700
König Mathias-Stollen	7.633
Quellfassungsraum, der König Mathias-Quelle	90.000
Badgastein:	
Reissacher-Stollen	2.030
Rudolf-Stollen	2.900
Franz Josef-Stollen	11.350
Elisabeth-Stollen	20.400

eingetragen sind. Aus dieser Gegenüberstellung geht hervor, dass die Aktivitäten der Thermen der Budapester Radiumbäder zeitlich mehr oder minder stark variieren.

Die Quellaktivitäten von Badgastein sind ungefähr 10-mal höher, als dieselben der radioaktiven Thermen von Budapest.

Tabelle 7.

Der Radongehalt einiger Quellen der Budapester Radiumbäder
nach WESZELSZKY.

Q u e l l e	Radongehalt in ME. 1933.
Árpád	13·3
König Mathias	18·2
Beatrix	19·3
Gül Baba	18·4
Rákóczi	30·0
Hungária	15·2

Trotzdem ist das Luftmilieu der Budapester Radiumbäder hinsichtlich des Luftradons mit dem Luftmilieu von Badgastein gleichwertig. Vielleicht ist gerade diese Gleichwertigkeit die Ursache der Heilerfolge in den Budapester Radiumbädern.

IV. Zusammenfassung :

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse der Radonmessungen, die in der Zeit vom 25. Dezember 1936 bis 31. Jänner 1937 im Luftmilieu der Thermalbäder von Budapest : St. Gellért, St. Imre und Rudas durchgeführt wurden, bekanntgegeben. Es konnte festgestellt werden, dass das Luftradon im Luftmilieu der Budapester Radiumbäder zwischen weiten Grenzen schwankt und in vielen Räumlichkeiten und Gebieten Werte erricht, die im Luftmilieu von Badgastein gemessen wurden. Durch die vorliegende Untersuchung ist auch gezeigt, dass ein Radiumkurort mit einer relativ kleinen Radioaktivität seiner Quellen, wenn er entsprechende bauliche Anlagen besitzt, hinsichtlich des Luftradons Radiumkurorten mit aktiveren Quellen äquivalent sein kann. Die vorliegenden Budapester Ergebnisse konnten nur mit Badgastein verglichen werden, da den Verfassern bis zur Fertigstellung des Manuskriptes dieser Arbeit nur die Luftradonstruktur von Badgastein bekannt war.

Die vorliegende Untersuchung in den Städtischen Radiumbädern von Budapest wurde vor allem von folgenden Persönlichkeiten gefördert :

Dr. KÁROLY SZENDY, Bürgermeister von Budapest. — Dr. LUDWIG von PAP, Chefarzt der städtischen Heilbäder und Heilquellen und seine Mitarbeiter. — Dr. vitéz ANDREAS von TÓTH, Landtagsabgeordneter Budapest. — GÉZA von BÁNLAKY, Generaldirektor der städtischen Heilbäder von Budapest. — KÁLLAY, Generaldirektor-Stellvertreter der städtischen Heilbäder von Budapest. — Dr. MIKLÓS FRANK, Direktor der Kurkommission der Heilbäder und Kurorte von Budapest. — Frau Dr. GITTA von TÓTH, Budapest.

Die Verfasser danken den genannten Persönlichkeiten auch an dieser Stelle wärmstens für die Förderung der vorliegenden Untersuchung.

Unser besonderer Dank für die verständnisvolle Förderung

dieser Arbeit gilt Herrn Univ. Prof. Dr. FRANZ ANGEL Graz, Herrn Univ. Prof. Dr. JULIUS GRÓH, (Budapest) und Herrn Univ. Prof. Dr. GEORG v. HEVESY (Kopenhagen.).

Nachtrag: Aus drucktechnischen Gründen war es leider nicht mehr möglich schon in dieser Arbeit die neugeschaffene balneologische Luftradoneinheit «Aer» abzuändern, damit diese sich zahlenmässig möglichst einfach an das internationale «Curie» und «Millimikrocurie» anschliesst. Diese Abänderung des «Aer» ist durch ERICH WOLLMANN, Berlin beim 1. internationalen Bäder-Kongress in Budapest angeregt worden.

Literaturverzeichnis.

JÓZSEF EBNER: Der Wasserertrag der Hungaria-Quelle in Budapest. Zeitschr. f. Hydrologie, XIII. S. 61, 1933. Budapest.

M. v. PÁLFY: Schwankungen in der Wassermenge der Thermalquellen von Budapest, Zeitschrift f. Hydrologie, IX. S. 162. 1929. Budapest.

GYULA WESZELSZKY: Die chemischen Verhältnisse der Budapester Mineralquellen, Zeitschrift f. Hydrologie, IV—VI. S. 113. 1924.

GYULA WESZELSZKY: Die Radioaktivität der Budapester Hungaria-Quelle, Ebenda IV—VI. S. 133. 1924. és 1926. Budapest.

Dr. LUDWIG von PAP: Hauptstädtisches St. Gellért Heilbad, Nr. 5. VI. Jahrg., 1936. Magyar Kórház, Budapest.

St. MEYER und E. SCHWEIDLER: Radioaktivität, Verlag G. B. Teubner, Leipzig, Berlin, 1927.

V. F. HESS: Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen, Verlag Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1926.

WALTER KOSMATH und OTTO GERKE: Das radioaktive Klima und das radioaktive Milieu von Badgastein, seine bioklimatische und balneologische Bedeutung, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. i. Wien, Abt. IIa, Bd. 144, S. 339. 1935.

WALTER KOSMATH, VOLKMAR HARTMAIR und OTTO GERKE: Pflanzenphysiologische Beiträge zur Beurteilung der biologischen bzw. balneologischen Bedeutung der Radioaktivität der Kur von Badgastein, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Abt. I. Bd. 145. S. 101. 1936.

ALFRED WEBER: Neue Beobachtungen über den Radiumgehalt des Quellsedimentes Reissacherit der Thermen von Badgastein, Akad. Anzeig. Nr. 26. d. Akad. d. Wiss. in Wien, 1935.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 22. Nov. 1937.)

A KLÓRMONOXID TERMÍKUS BOMLÁSÁRÓL.

BODENSTEIN MAX-tól és SZABÓ ZOLTÁN-tól. (Berlin)

Bevezetés.

A klórmonoxid bomlását eddig kétféle szempontból vizsgálták: fotokémiai és termikus úton. Míg a fotokémiai bomlás BODENSTEIN és KISTIAKOWSKY, valamint SCHUMACHER és munkatársai vizsgálatai alapján már meglehetősen tisztázott kérdésnek látszik a termikus bomlás mechanizmusa még ma is kiderítetlen. A fotokémiai bomlás mechanizmusának megállapítását az tette lehetővé, hogy a különböző hullámhosszúságokon elnyelt energiamennyiségekhez sikerült azokat a primér reakciókat megtalálni, amelyek által a gerjesztett lánc tagjainak száma a fotokémiai hatásokkal jól megegyezett.

HINSHELWOOD és munkatársai¹ szerint a klórmonoxid termikus bomlása homogén gázreakció, mely a kezdetén indukciós periódussal bír és lényegében véve bimolekulás jellegű. HINSHELWOOD azt vizsgálta, hogy egy bizonyos percentuális elbomláshoz szükséges idő milyen összefüggésben van a kezdeti nyomással. Ezen vizsgálatokból az derült ki, hogy a reakció lefolyása a különböző nyomásnál és hőmérsékleten végzett kísérleteknél azonos és a sebességet meghatározó láncreakció mind bimolekuláris jellegűek. Felrajzolva a

$$\frac{x_1}{a_1} = k t a_1$$

¹ C. N. HINSHELWOOD és CH. R. PRICHARD, J. chem. Soc. London 123. 2730. 1923.

C. N. HINSHELWOOD és J. HUGHES, J. chem. Soc. London 125. 1841. 1925.

egyenletet, ahol x_1 az elbomlott anyag mennyisége, a_1 a kezdeti koncentráció, t az idő és k a sebességi állandó, különböző nyomásoknál és hőmérsékleteknél ugyanazt a görbét kapta, amely azonban annak megfelelőleg, hogy a k növekszik, nem volt egyenes. A k ezen viselkedése a reakció lánccmechanizmusa mellett bizonyít. Magát a k értékét HINSHELWOOD nem számította ki.

BEAVER és STIEGER,² miután bimolekulás állandó kiszámítása nekik sem sikerült, a reakció utolsó harmadára monomolekuláris állandót számítottak ki, mely azonban a kezdeti nyomással arányosan nőtt. Ez arra mutat, hogy a reakció ezen szakaszában szintén bimolekulás jellegű, de itt az egyik partner állandó koncentrációjú. Ez a partner valamilyen közti-termék, melynek koncentrációja a kezdeti nyomással és egyúttal az explodált gáz mennyiségével is arányos. Éppen ezért a BEAVER és STIEGER-féle monomolekulás állandókat az explodált gáz mennyiségével elosztva a kezdeti nyomástól független állandókat kapunk.

A láncreakcióelmélet törvényeit a BEAVER és STIEGER adataira alkalmazva SEMENOFF³ megállapította, hogy a reakció sebessége az elágazó láncok sebességének törvénye szerint növekszik, de ez nem vezet explózióhoz, azaz a reakció egy degenerált explózió. Ezen SEMENOFF-féle leírás azonban csak formális jellegű, a közti termékek mibenlétére, melyek a reakcióláncokat tovább fejlesztik és elágazáshoz viszik, semmi felvilágosítással sem szolgál. BEAVER és STIEGER erre vonatkozólag diszkutáltak néhány feltevést, melyek azonban egyáltalában nem voltak bebizonyíthatók.

Mindezek a szerzők figyelmen kívül hagyták a reakció kezdeti szakaszának tüzetesebb kísérleti vizsgálatát. Már pedig abból, hogy a reakció jellege elejétől végig bimolekulás jellegű, továbbá, hogy meglehetősen hosszú indukciós periódussal kezdődik, arra következtethetünk, hogy a reakciómechanizmus kifejlődése aránylag hosszú időt vesz igénybe és így a kezdeti stádiumban az alapreakció magában tanulmányozható. Már eleve feltételezhetjük, hogy az alapreakció tiszta bimolekulás reakció, melynek a vizs-

² J. J. BEAVER és G. STIEGER, Zts. physik. Chemie B. 12. 93. 1931.

³ N. SEMENOFF, Chemical Kinetics and Chain Reactions. Oxford 1935.

gálatára itt kényelmes alkalom nyílik. Miután a tiszta bimolekulás reakció száma igen kevés, érdemesnek látszott ezen vizsgálatokat elvégezni, melyek a reakciósebesség elméleti tárgyalásához szolgáltatathatnak értékes adatokat.

A kísérletek kivitele.

A kísérletekhez igen egyszerű, ilyen fajta vizsgálatoknál szokásos készüléket használtunk.⁴ Miután a reakció térfogatváltozás közben folyik le, a sebességet a nyomás megváltozásával mérhetjük. Ezért a reakcióedényhez BODENSTEIN-féle igen érzékeny kvarcmanométert kapcsoltunk, melyet mint nullműszert alkalmaztunk. A kompenzáló nyomást precíziós tükörskálával ellátott higanymanométeren olvastuk le. Az igen kis nyomáskülönbségek mérésére párhuzamosan kapcsolt brómnaftalinmanométert használtunk, melyet az előbbi higanymanométerrel kalibráltunk. A reakció-edény kb. 250 cm³ ürtartalmú hengeres üvegedény volt, mely olajtermosztátba merült. A termosztát hőfoka tízedfokra volt állandó. A készülék leszivatása higanygőzszivattyúval történt. A készülék egyes részeit BODENSTEIN-féle üvegszelepek választották el egymástól.

A klórmonoxidot a BODENSTEIN és KISTIAKOWSKY⁵ által megadott eljárás szerint készítettük. Az izzított higanyoxidot vízszintes csőrendszerben ráztuk és közben kénsavval szárított klórt vezettünk át felette. A klórt kb. kétannyi száraz levegővel hígítottuk és a készülékben 30 mm Hg nyomást tartottunk fenn. A már reagált gázt alkohol-szénsav keverékkel hűtött szedőben cseppfolyósítottuk. A cseppfolyós klórmonoxid még tetemes mennyiségű klórt tartalmaz oldva, ezért először deflegmatorszerűen kiképezett desztilláló készülékben a klór nagyobb részét eltávolítottuk. A már töményített klórmonoxidot vákuumban fracionáltuk, amikor is a desztillálható anyagot —30° C-on, a szedőt —184° C-on tartottuk.

⁴ A gázreakciókinetikai vizsgálatoknál használatos eszközök, készülékek és eljárások ismertetését lásd: SZABÓ Z.: Gázreakciók kinetikai vizsgálata. Magyar Chemiai Folyóirat. (Sajtó alatt.)

⁵ M. BODENSTEIN és G. KISTIAKOWSKY, Zts. phvsik. Chemie 116. 273. 1925.

Az előpárlatot mindaddig elszivattuk, míg az a klór jellemző sárga kristályait mutatta. A klórmonoxid kristályai sötétvörös színűek. A gáz tisztasága, koncentrációja a reakció végnyomásának észleléséből volt számítható. Ugyanis a végnyomás és a kezdeti nyomás közötti különbség kettővel szorozva a klórmonoxid kezdeti parciális nyomását adja meg. Ez, miután a klórmonoxidunk mindig tartalmazott klórt, a közvetlenül mért kezdeti nyomástól különbözött.

A kísérletek kivitele akként történt, hogy a reakcióedénybe, melyet akkora vakuumra szivattunk le, hogy a szikrainduktor már nem tudott kisülést létesíteni, a megfelelő mennyiségű klórmonoxidot gyorsan bedeszilláltuk, a hozzátartozó üvegszelepet lezártuk és ettől az időponttól számítottuk az időt. A hőmérséklettől és nyomástól függően a klórmonoxid különböző sebességgel bomlott, de mindig úgy, hogy a kísérlet kezdetén a sebesség állandó maradt, tehát a nyomásnövekedés, mely az elbomlott klórmonoxid felével egyenlő, az idővel arányos volt. Később a sebesség erősen növekedni kezdett, amikor a további észleléseket beszüntettük, csak a végnyomást mértük újra, mely a koncentráció meghatározáshoz volt szükséges. Magasabb hőmérsékleten a teljes bomlás néhány óra alatt végbement, alacsonyabb hőmérsékleten pedig kb. 12—24 óráig tartott.

A kísérletek eredményei.

A kísérleti adatokból a

$$-\frac{d[Cl_2O]}{dt} = k[Cl_2O]^2$$

egyenlet integrált alakja alapján számítjuk ki a k sebességi állandót. Az állandók, pontról pontra számolva addig, amíg a jelenlevő klórmonoxidnak kb. 10%-a elbomlott, olyan értékeket adnak, melyek függetlenek a kezdeti nyomástól, tehát a bimolekuláris reakció jellegét mutatják. A következő táblázatban a mérési eredmények vannak összefoglalva és t jelenti a reakció kezdete óta eltelt időt percekben, p_{Cl_2O} a nyomást, k a sebességi állandót.

I. táblázat.

21. kísérlet. 83° C.										
<i>t</i>	0	8	16	24	32	40	48	perc		
<i>pCl₂O</i>	366·0	361·0	358·0	356·0	350·0	346·0	341·0			
<i>k. 10⁵</i>	0·40	0·30	0·39	0·35	0·38	0·58		K. é. 0·41		
22. kísérlet. 83° C.										
<i>t</i>	0	10	20	30	41	54	80	perc		
<i>pCl₂O</i>	266·8	264	261	259	256	253	247			
<i>k. 10⁵</i>	0·37	0·37	0·36	0·38	0·42	0·47	0·37	K. é. 0·38		
23. kísérlet. 83° C.										
<i>t</i>	0	15	30	45	60	75	90	perc		
<i>pCl₂O</i>	216·8	213·6	211·6	209·0	206·0	203·6	201·0			
<i>k. 10⁵</i>	0·46	0·44	0·39	0·43	0·40	0·42		K. é. 0·42		
7. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	10	15	20	25	30	perc		
<i>pCl₂O</i>	292·6	288·4	284·0	280·2	274·6	270·4	265·4			
<i>k. 10⁵</i>	0·99	1·07	0·95	1·44	1·13	1·39		K. é. 1·20		
8. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	10	20	30	40	50	63	70	80	perc
<i>pCl₂O</i>	98·2	97·0	96·3	95·5	94·6	93·4	91·8	91·0	90·0	
<i>k. 10⁵</i>	1·26	0·79	0·79	1·04	1·38	1·38	1·37	1·27		K. é. 1·15
11. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	11	15	20			perc		
<i>pCl₂O</i>	332·2	323·8	317·0	312·2	305·6					
<i>k. 10⁵</i>	1·56	1·10	1·20	1·38					K. é. 1·23	
12. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	10	15	20	25		perc		
<i>pCl₂O</i>	321·4	314·0	309·2	304·4	298·2	292·2				
<i>k. 10⁵</i>	1·46	0·99	1·02	1·36	1·37				K. é. 1·18	
13. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	10	15	20	25		perc		
<i>pCl₂O</i>	390·8	384·2	377·0	369·4	361·4	352·2				
<i>k. 10⁵</i>	0·88	0·99	1·09	1·19	1·44				K. é. 1·18	
14. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	15	30	45			perc		
<i>pCl₂O</i>	169·0	167·4	164·0	158·8	154·7					
<i>k. 10⁵</i>	1·42	1·24	1·33	1·11					K. é. 1·23	
15. kísérlet. 98° C.										
<i>t</i>	0	5	10	20	30	40		perc		
<i>pCl₂O</i>	251·2	247·6	244·4	239·2	232·8	226·2				
<i>k. 10⁵</i>	1·15	1·06	0·89	1·15	1·25				K. é. 1·09	

16. kísérlet. 120° C.						
<i>t</i>	0	5	10	15		perc
<i>pCl₂O</i>	194·4	186·2	178·2	168·6		
k. 10 ⁵	4·5	4·8	6·3			K. é. 5·3
17. kísérlet. 120° C.						
<i>t</i>	0	2	4	6		perc
<i>pCl₂O</i>	337·4	325·8	314·6	303·4		
k. 10 ⁵	5·3	5·4	5·7			K. é. 5·5
18. kísérlet. 120° C.						
<i>t</i>	0	2	4	6	8	perc
<i>pCl₂O</i>	268·6	261·0	255·2	249·2	242·2	
k. 10 ⁵	5·4	4·3	4·7	5·8		K. é. 5·1
19. kísérlet. 120° C.						
<i>t</i>	0	5	10	15		perc
<i>pCl₂O</i>	119·0	115·8	112·8	109·8		
k. 10 ⁵	4·6	4·6	4·8			K. é. 4·7
20. kísérlet. 120° C.						
<i>t</i>	0	2	4	5	6	perc
<i>pCl₂O</i>	339·0	326·6	320·0	314·4	306·8	
k. 10 ⁵	5·6	6·1	5·7	7·8		K. é. 6·3
24. kísérlet. 140° C.						
<i>t</i>	0	2	6	8·5		perc
<i>pCl₂O</i>	56·40	54·60	52·60	50·64		
k. 10 ⁵	28	18	23			K. é. 23
25. kísérlet. 140° C.						
<i>t</i>	0	3	5	7		perc
<i>pCl₂O</i>	72·2	69·86	68·20	66·38		
k. 10 ⁵	15	18	13			K. é. 15
26. kísérlet. 140° C.						
<i>t</i>	0	2	3	4		perc
<i>pCl₂O</i>	118·2	113·2	110·6	108·0		
k. 10 ⁵	10	20	21			K. é. 20
27. kísérlet. 140° C.						
<i>t</i>	0	2·17	2·66			perc
<i>pCl₂O</i>	175·2	162·0	159·8			
k. 10 ⁵	21	17				K. é. 19
28. kísérlet. 140° C.						
<i>t</i>	0	2·5	4·0	8		perc
<i>pCl₂O</i>	58·6	56·64	55·6	52·5		
k. 10 ⁵	23	22	26			K. é. 24

Az egyes hőmérsékletekhez tartozó sebességi állandókat, valamint ezeknek a további számításokhoz felhasznált középértékeit a 2. táblázat tartalmazza.

2. táblázat.

83° C	pCl_2O	366.0	266.8	216.8							
	k. 10^5	0.41	0.38	0.42							K. é. 0.403
98° C	pCl_2O	390.8	332.2	321.4	292.6	251.2	169.0	98.2			
	k. 10^5	1.18	1.23	1.18	1.20	1.09	1.23	1.15			K. é. 1.19
120° C	pCl_2O	339.0	337.4	268.6	194.4	119.0					
	k. 10^5	6.3	5.5	5.1	5.3	4.7					K. é. 5.45
140° C	pCl_2O	175.2	118.2	72.2	58.6	56.4					
	k. 10^5	19	20	15	24	23					K. é. 20.2

A kísérleti eredmények tárgyalása.

Miután tehát a kísérleti adatokból számított sebességi állandók a nyomástól függetlenek, azaz a bimolekulás reakció sajátosságait mutatják, kérdés, hogy miképpen kezelhető a reakció gázelméleti szempontból? A kinetikus gázelmélet alapján kiszámítható a bimolekulás reakció ütközési száma, valamint a kísérletileg meghatározható aktiválási energia figyelembevételével a sztérikus faktor.⁶

Miután a gázelméleti számolások mindig mol/liter koncentráció és másodperc, mint időegységre vonatkoznak, a fenti mm Hg koncentrációegységre és percre, mint időegységre, számolt sebességi állandókat ezen új egységre kell átszámítanunk, ami a

$$k_c = k_{\text{mol/liter.sec}} = \frac{k_{\text{m/m Hg/cm}^3 \text{ min.}} \cdot 760 \cdot 22.41 \cdot T}{273 \cdot 60}$$

képlet alapján történik, hol T az abszolút hőmérséklet. A számítások eredménye a 3. táblázat 2. rovatában található.

A reakció ütközési számának kiszámítása a következő:

$$Z = 5 \cdot 64 \cdot 10^{28} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 \cdot M_2}} \cdot s_1 s_2 \sqrt{T}$$

⁶ A gázreakciók kinetikus gázelmélet alapján történő tárgyalásának egyes részleteire vonatkozólag lásd: SZABÓ ZOLTÁN: Gázreakciók kinetikai vizsgálata. Magyar Chemiai Folyóirat.

egyenlet alapján történt. A Cl_2O molekula átmérőjét $3.5 \cdot 10^{-8}$ cm-nek véve $T=1^\circ$ abs. hőmérséklethez az ütközési szám logaritmusáa $\log Z=10.02$ -nek adódott, megint mol/liter sec. egységben kifejezve.

Az aktiválási energia a sebességi állandók temperaturakoefficienséből számítva 21.230 kal.-nak adódik.

A sebességi állandó elméleti kifejezése

$$\log k_c = - \frac{Q}{4.571 \cdot T} + \frac{1}{2} T + \log Z + \log f$$

ahol Q az aktiválási energia, T az abszolút hőmérséklet, Z az ütközési szám és f a sztérikus faktor. A kísérletileg talált k_c , Q és T értékeket behelyettesítve a sztérikus faktor értékére $\log f=-1.32$, azaz $f \sim 0.05$ -t kapunk, mely a többi bimolekuláris reakciók kísérletileg talált vagy elméletileg számított sztérikus faktorával összehasonlítva igen plauzibilis érték.

Ezen sztérikus faktor felhasználásával a sebességi állandók elméletileg számított értékei a következők lesznek. (3. rovat.)

3. táblázat.

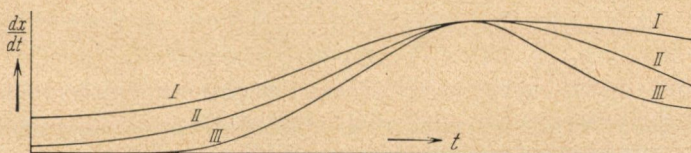
T	356°	371°	393°	413°
$\log k_c$ talált	- 2.83	- 2.34	- 1.65	- 1.06
$\log k_c$ számított	- 2.86	- 2.34	- 1.66	1.06

Ezen eredmények figyelembevételével igazoltnak látszik a bevezetésben vázolt feltevésünk, hogy a klórmonoxid termikus bomlásának kezdeti periódusa tényleg egy tiszta bimolekulás reakciót reprezentál. A ténylegesen megkapott bimolekulás sebességi állandók, a sztérikus faktor igen valószínűértéke mind e mellett szólanak. Azonban, hogy mindezen adatok dacára a reakció már kezdetben sem tiszta bimolekulás jellegű és a fenti értékek csak véletlen folytán voltak így kiszámíthatók, az a következő elgondolásokból lesz nyilvánvaló.

Ha összehasonlítjuk a saját méréseinket a BEAVER és STIEGER-

féle mérésekkel úgy, hogy az utóbbiaknál a reakció sebességét, melyet ezek a szerzők a reakcióknak csak későbbi szakaszában kezdtek el mérni, $t=0$ időpontra extrapoláljuk, akkor ezen kezdeti sebességek sokkal, mintegy tízszer kisebbek, mint a mi kísérleteinknél nyert sebességek. Az extrapolációtól, bármennyire is bizonytalan az, ez az eltérés nem származhat. Ha pedig a reakció teljes lefutását hasonlítjuk össze a két esetben, akkor szintén lényeges különbséget találunk a kétféle mérés között. Míg BEAVER és STIEGER-nél a sebesség a maximumát akkor éri el, amikor a bomlás körülbelül már 50—60%-ra előre haladt, addig nálunk már 30%-os bomlás után már nem emelkedik tovább a reakció sebessége, továbbá maga a sebesség megváltozása sem olyan nagy mértékű, mint BEAVER és STIEGER-nél. A sebesség-idő-görbe nálunk sokkal laposabb, mint az említett szerzőknél. Néhány BEAVER és STIEGER-féle mérés, melyeknél a szükséges adatok közölve vannak, tüzetesebb tanulmányozásából pedig az is kiderült, hogy az ő méréseiknél a sebesség mindjárt emelkedik, kezdetben átmenetileg sem bír állandó értékkel, míg nálunk 10% bomlásig a sebesség állandó maradt.

Ismét más lefolyást mutatnak azok a kísérletek, melyeket HINSELWOOD és PRICHARD végeztek. Az egyetlen mérés, melynek



1. ábra.

az adatait részletesen közölték,⁷ ugyanolyan irányban, mint a BEAVER és STIEGER-féle mérések, de még nagyobb mértékben tér el a mi méréseinktől. A következő ábrán szemléltethetjük a különböző kísérletek lefolyását (1. ábra). Mind a három kísérlet közelítőleg ugyanazon koncentrációnál lett végrehajtva, de különböző hőmérsékleteknél. Az összehasonlítás kedvéért a sebesség- és idő-

⁷ HINSELWOOD és PRICHARD, loc. cit. 2732. oldal.

skálát úgy választottuk meg, hogy az idők a maximum eléréséhez szükséges idők törtrészében, a sebességek pedig a maximális sebességek törtrészében vannak számolva.

A különböző szerzők által talált különböző reakciótípusok és sebességek a fal hatásával magyarázhatók. BEAVER és STIEGER közölnek ugyan egy kettősmérést, amikor is egyébként azonos körülmények között a klórmonoxid bomlását először kvarcedényben, aztán üvegedényben mérték. A kvarcedénynél a felületnek a térfogathoz való viszonya minimum volt, míg az üvegedény üvegcsereppel lévén töltve, az arány sokkal nagyobb volt. A kétféle edényben mért sebességek 10—20%-ra egyeztek meg egymással, egyébként pedig a kísérleti hibájuk 10—15% között ingadozott. Ezt az eredményt is csak akkor tudták elérni, ha a reakcióedény falát meghatározott módon kezelték. Miután egy homogén gázreakció sokkal pontosabban reprodukálható, ezen mérésekből is, a BEAVER és STIEGER állításaival ellentétben, a fal hatására kell következtetnünk.

A fal hatása kettős lehet.³ Hatással lehet a reakcióláncok keletkezésére, valamint a láncok letörésére, de befolyásolhatja a fal a láncok elágazását is. Ezen hatások bizonyos esetekben egymást közelítőleg kiegyenlíthetik, de általában a kompenzáció nem teljes és ekkor a reakciósebesség-idő-görbe a legkülönbözőbb alakot veheti fel. Ezen az alapon értelmezhető a három különböző lefutású reakciógörbe is. A három különböző körülmények között végrehajtott kísérleteknél a falak biztosan különböző állapotban voltak. A mi kísérleteinknél a falak, a nagyteljesítményű diffúziós szivattyú által magasabb hőmérsékletnél szivattva, nagymértékben megtisztultak, gáztalanítottak. BEAVER és STIEGER a reakcióedényben egy éjszakán át klórmonoxidot tartottak, aztán leszivatták és csak ezután fűtötték fel azt a kísérlet hőmérsékletére. Nyilvánvaló, hogy ezen eljárással a falakon adszorbeálódott gázréteg nem távozhatott el teljes mértékben. Még inkább fennállt ez az eset a HINSHELWOOD-ék méréseinél, akik kvarcmanométer helyett kénsavas

³ A fal hatásának a láncreakcióelmélet alapján történő tárgyalását illetőleg lásd: SZABÓ Z.: Gázreakciók kinetikai vizsgálata. Magyar Chemiai Polyóirat.

manométerrel, üvegszelepek helyett üvegcsapokkal és sokkal kisebb teljesítményű szivattyúval dolgoztak. A mi kísérleteinknél tehát a fal a legaktívabb lévén igen nagy mértékben tudta a reakció sebességét befolyásolni. A reakció folyamán azonban a fal újra adszorbeál és így a hatása csökken, minek következtében a lánc-elágazások által előidézett sebességnövekedés csak lassanként és nem teljes mértékben tud érvényesülni. Ezáltal egy kiegyenlített sebesség eloszlás jön létre, míg a másik két kísérletnél a mindinkább növekvő láncelágazások a reakció sebességét erősen megnövelik.

Ezek alapján tehát megállapíthatjuk, hogy a klórmonoxid termikus bomlásánál már a kezdeti szakaszban is láncreakciók keletkeznek úgy, hogy a reakció, a fenti szám adatok ellenére sem tiszta bimolekulás jellegű. A fenti látszólagos bimolekulás jelleg onnan származhat, hogy a láncok kezdetben többnyire egyforma hosszúak. Miután azonban a láncok elágaznak, amint azt a SEMENOFF-féle analízis is mutatja, a klórmonoxid termikus bomlásának teljes reakciómechanizmusát a mai eszközeinkkel ki nem deríthetjük, miután a nem-elágazó láncoknál bevált eljárás az elágazó láncokra nem alkalmazható.

Összefoglalás.

HINSHELWOOD és munkatársai, valamint BEAVER és STIEGER méréseinek alapján az várható, hogy a klórmonoxid termikus bomlása, mely a reakció későbbi szakaszában egy degenerált explózió sajátosságait mutatja, a kezdeti stádiumban tiszta bimolekulás reakció. Ezért különösen gondos mérések történtek a kezdeti stádiumban a reakciósebesség meghatározására. A mérési adatok alapján a bimolekulás tárgyalás tényleg lehetséges is volt, azonban a reakció már itt is láncreakció, amit a fal hatása mutat, ha a méréseinket az említett szerzők adataival összehasonlítjuk.

Berlin, Egyetemi fizikai kémiai intézet.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. márc. 21-én tartott üléséből.)

ÜBER DEN THERMISCHEN ZERFALL DES CHLORMONOXYDS.

Von M. BODENSTEIN und Z. SZABÓ.

Nach den Untersuchungen von HINSELWOOD und Mitarbeitern, sowie von BEAVER und STIEGER ist es zu erwarten, dass der thermische Zerfall des Chlormonoxys, der im späteren Verlauf der Reaktion die Charakteristika einer degenerierten Explosion besitzt, im Anfangsstadium eine reine bimolekulare Reaktion ist. Deshalb wurden sehr sorgfältige Versuche angestellt zur Messung der Reaktionsgeschwindigkeit im Anfangsstadium. Die Messergebnisse haben tatsächlich eine bimolekulare Behandlung der Reaktion ermöglicht, doch ist die Reaktion schon vom Anfang an eine Kettenreaktion, was aus der Wirkung der Wand zu folgern ist, wenn unsere Messergebnisse mit den der genannten Autoren verglichen werden.

Berlin, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21 März. 1938.)

A SZÉNOXID ÚJ SÁVJAIRÓL.

SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND-tól.

I. Mint egy előzetes közleményünkben (1) jelentettük volt, ha ritkított neon-gázban, amely nyomokban oxigént is tartalmaz, szénelektrodok között GEISSLER-kisülést létesítünk, a 2600 Å-tól kb. 3300 Å-ig terjedő spektrálvidéken egy eddig ismeretlen rendszer sávjai jelennek meg. Az új sávok — ellentétben a szén-oxidnak ebben a hullámhossztartományban észlelhető többi sávrendszereivel — vörös felé árnyékoltak és legszembetűnőbben mutatkoznak az (ibolya felé árnyékolt) ú. n. III. pozitív sávok fejei előtt. Egy további rövid közleményünkben (2) már arról is beszámolhattunk, hogy az új sávok egy ${}^3\Sigma \rightarrow {}^3\Pi$ átmenetnek megfelelő szerkezetet mutatnak, valamint, hogy az új sávrendszer végállapota azonos a CO molekula összes triplétt sávjainál szerephez jutó $a^3\Pi_{\text{norm}}$ állapottal, amelynek legalsó ($v=0$, $J=0$) termemelete a CO $X^1\Sigma'$ alapállapota felett — mint azt egy régebbi dolgozatunkban (3) megállapítottuk volt — 48477.9 cm^{-1} -nyire fekszik a CO molekula energiaszkémájában.

Jelen dolgozat tárgyát az új sávok rotációs analízise és az abból levonható következtetések képezik. A beható és minden részletre kiterjedő vizsgálat szükségességét indokolja az a — már az előzetes rövid közleményben is említett — körülmény, hogy az új sávok kezdőállapotai éppen abba az energiamagasságba esnek, ahol, mint azt már ugyancsak kifejtettük volt, a CO molekula $b^3\Sigma'$ termjén mutatkozó perturbációk alapján az $a^3\Sigma'$ -term magas vibrációs emeleit kell várnunk. A molekulaszervezetnek a sávos színekép útján való kutatása szempontjából általános jelentőségűnek kell tekintenünk már annak az igazolását is, hogy a perturbációk alapján mintegy «bejósolt» energia-

magasságokban tényleg található, és pedig éppen a számított állandókkal jellemzett molekulatermek; hogy ezenfelül még egy molekulaterm magas vibrációs emeleteiről közvetlen kísérleti adatokhoz is juthatunk, az viszont a disszociációs energiának a spektrumból való meghatározhatósága szempontjából bír különös érdekekkel.

II. Legnagyobb intenzitással jelentkeznek az új CO -sávok közül az a kettő, amelyik a III. poz. rendszerbeli $(0,1)$ és $(1,0)$ sávok feje előtt foglal helyet, kb. 2980 \AA , ill. 2670 \AA -nél. A $(0,0)$ és $(0,2)$ sávok előttiek már lényegesen gyengébbek. Az első tekintetre (valamint nem eléggé kiexponált, a kisebb intenzitású sávoknál pedig úgyszólván minden felvételen) bonyolultnak látszó szerkezet közelebbi vizsgálatra világosan mutatja, hogy a sáv-vonalak számos ágba sorakozva minden sávban három, egymástól (az ibolya felől kezdődőleg) mintegy 37 , ill. 29 cm^{-1} -nyire lévő «nullahely»-ből indulnak ki, az $a^3\Pi$ végállapotnak megfelelőleg. Egy $^3\Sigma \rightarrow ^3\Pi$ átmenet az elmélet szerint maximálisan 27 ágat eredményez, amelyek közül azonban némelyek össze is eshetnek. Ha a $^3\Sigma$ term nem bír észlelhető spinfelbontással, az ágak száma — mint az a III. pozitív rendszer esetében be is következik — 15 -re redukálódik. A jelen esetben a különálló és több rotációs kvantumszámnál is megfigyelhető ágak száma a huszat mindenkor meghaladja és csupán az elméletileg is leggyöngébbnek adódó szélső szatellit ágak, amelyek a K rotációs kvantumszám 3 egységgel való ugrásainak felelnek meg, vonják ki magukat többé-kevésbé az észlelés alól.

A 2980 \AA - és 2670 \AA -nél fekvő új sávok vonalainak hullám-számait itt nem közöljük.

Ezeket az ugyancsak az intézetben kimért $(4)(5)$ ú. n. « $3A$ » sávok kimérési adataival együtt másutt megjelenő dolgozatunkban adjuk majd meg. Az ágak közül több, különösen az 1 -es végállapotindexűek, szorosan egymás nyomában halad; ezáltal nyerik e sávok a többiektől elütő megjelenési formájukat: egyenletesen növekvő közökben jellegzetes, előbb csaknem egyetlen vastag vonalnak tűnő, majd szétváló vonalesoportozatok fel-lépését.

A szokásos végállapot-kombinációdifferenciákat képezve arra

az érdekes eredményre jutunk, hogy a 2980 \AA -nél (azaz a (0,1) III. poz. sáv előtt) helyetfoglaló sáv végállapota azonos az $a^3\Pi(v=1)$ vibrációs termmel és a 2670 \AA -nél fekvő (az (1,0) III. poz. vagy másképp «5B» sáv feje előtti) sáv pedig az $a^3\Pi(v=0)$ vibrációs állapottal. A végállapotkombinációdifferenciákból még az is kitűnik, hogy az új sávok P és R , ill. O , Q és S ágai az $a^3\Pi$ terméknek ugyanazon J -típusú dublettkomponenseihez tartoznak, mint a III. poz. sávok megfelelő P és R , ill. O , Q és S ágai, azaz az új sávok kezdőállapotának ugyanaz a szimmetriája, mint a $b^3\Sigma$ terméké; mivel pedig ez utóbbi a CO molekula alap $X^1\Sigma^+$ termjével kombinálódik, szimmetriája «plusz», tehát az új sávok kezdőállapota is $^3\Sigma^+$ kell, hogy legyen.

A $^3\Sigma^+$ felső állapot spinfelbomlásának számértékeit az ugyanazon K' kezdő rotációs kvantumszámhoz tartozó emeletokről induló és közös végállapotra érkező vonalak hullámszámban kifejezett távolságai, pl. $Q_1(K) - Q_{21}(K)$, ill. ${}^4Q_{32}(K) - R_2(K)$, stb. adják. Megállapítható ily módon, hogy a spinfelbomlás a rotációs kvantumszámtól úgyszólván teljesen független. Nagysága és előjele viszont olyan, hogy a meghatározott K -hoz tartozó három term: $F_1(K=J+1)$, $F_2(K=J)$ és $F_3(K=J-1)$ közül az F_3 fekszik legmagasabban, valamivel alatta az F_1 term és e kettő távolságánál mintegy háromszorta nagyobb távolságban, legalul, az F_3 term. A két analizált sávban az $F_1 - F_2$, illetőleg $F_3 - F_2$ termdifferenciák középértékei:

	2980 \AA	2670 \AA
$F_1 - F_2$	0.80 cm^{-1}	1.05 cm^{-1}
$F_3 - F_2$	1.08 cm^{-1}	1.43 cm^{-1}

azaz abban a sávban találkozunk nagyobb spinfelbomlással, amelynek a kezdőállapota a CO molekula energiaszkémájában magasabban, a disszociációs határhoz tehát közelebb fekszik; ennek a körülménynek bizonyos fontossága van az új sávok kezdőállapotához tartozó disszociációs határ megállapítása szempontjából.

Az 1. és 2. táblázatok a $^3\Sigma^+$ kezdőállapotra vonatkozó $A_2F'(K)$ kombinációdifferenciákat tartalmazzák, az összes rendelkezésre álló ágakból képezve. Mint látható, az egyezés egy-egy

1. táblázat.
 $\alpha^3 \Sigma^+ (v=30), \Delta_2 F(K).$

K	$R_1(K) -$ $-P_1(K)$	${}^s R_{21}(K) -$ $-{}^o P_{21}(K)$	${}^q R_{12}(K) -$ $-{}^o P_{12}(K)$	$R_2(K) -$ $-P_2(K)$	${}^s R_{32}(K) -$ $-{}^o P_{32}(K)$	${}^p R_{13}(K) -$ $-{}^s P_{13}(K)$	${}^q R_{23}(K) -$ $-{}^o P_{23}(K)$	$R_3(K) -$ $-P_3(K)$	Középérték	B
1	7.60			7.68					7.64	1.273
2	10.75			11.02			10.76		10.84	1.084
3	13.99			13.33			14.47	14.50	14.07	1.005
4	17.13			16.92		17.33	17.00	17.97	17.27	0.959
5	20.05			20.47		20.25	19.66	20.06	20.10	0.914
6	23.17	23.07	23.42	23.90	23.24		22.63	22.68	23.16	0.891
7	26.71	26.36	26.74	26.93	26.73		26.15	26.63	26.61	0.887
8	29.53	29.06	29.99	29.86	30.08		29.16	29.32	29.57	0.870
9	33.03		33.36	32.08	31.75		31.92	32.73	32.48	0.855
10	35.85		35.61	35.96	35.06		35.59	35.61	35.61	0.848
11	38.74		39.44	38.87	39.07		38.88	38.96	38.99	0.848
12	42.33			41.87	42.46			42.30	42.24	0.845
13	44.96			44.72				44.57	44.75	0.829
14	48.12								48.12	0.830
15	51.89								51.89	0.837

2. Táblázat.

$\alpha'^3 \Sigma^+ (v=34), A_2 F(K).$

K	$R_1(K) -$ $-P_1(K)$	$^s P_{31}(K) -$ $-^o P_{31}(K)$	$^T R_{31}(K) -$ $-^R P_{31}(K)$	$^o R_{12}(K) -$ $^o P_{12}(K)$	$R_2(K) -$ $-P_2(K)$	$^s R_{32}(K) -$ $-^o P_{32}(K)$	$^o R_{23}(K) -$ $-^o P_{23}(K)$	$R_3(K) -$ $-P_3(K)$	Közép- érték	B
1	6·76			6·95	6·09				6·60	1·100
2	9·94			10·54	10·49				10·32	1·032
3	13·49			14·14	14·49	14·29		13·48	13·98	0·999
4	16·65			17·67	17·29	16·47		17·43	17·10	0·950
5	19·99	19·76		20·18	20·16	20·08		20·18	20·06	0·912
6	23·01	23·51		24·51	24·66	24·02	22·81	23·78	23·47	0·903
7	27·12	27·87		27·56	26·69	27·14	26·57	26·13	27·01	0·900
8	29·50	30·78		29·85	28·85	28·77	28·93	29·77	29·63	0·872
9	32·38	33·36	33·10	32·20	31·94	31·53	32·47	31·69	32·33	0·851
10	34·41	34·98	34·93	34·59	34·43	34·74		34·31	34·63	0·825
11	36·91	36·08			37·14	37·12	37·14	37·45	36·97	0·804
12	39·63				39·35	39·03	38·70	39·52	39·25	0·785
13	41·98	43·32						41·90	42·40	0·785
14	44·65				44·25			44·59	44·50	0·767
15	47·23	47·51			46·82			46·91	47·12	0·760
16	49·63	49·82							49·73	0·754

K értéknél, az α^3II végállapot különböző triplett-komponenseihez tartozó ágak esetében is igen jó, ami a kezdőállapot Σ -karakterét bizonyítja. Ugyanolyan végállapotindexű, de kezdőállapot szempontjából rendre 1,2 és 3 indexű, azonos K -hoz tartozó $A_2F(K)$ differenciák középértéke viszont az elmélet szerint a $4B(K+1/2)$ formulával közelíthető meg, ahol B a szóbanforgó $^3\Sigma$ molekulaterm effektív rotációs állandója. Az 1. és 2. táblázatok utolsóelőtti rovatai tartalmazzák a középértékeket, az utolsó rovat pedig a $B = \frac{A_2F(K)}{4(K+1/2)}$ formula alapján számított mennyiségeket. Feltűnik már most mindenekelőtt, hogy ezek a K rotációs kvantumszámmal eleinte gyorsabban, majd mind lassabban változnak. E jelenség okát az eddigiek alapján csakis perturbációkban kereshetjük, amelyek éppen a legalacsonyabb rotációs kvantumszámokhoz tartozó állapotokban éreztetik legjobban a hatásukat. Tekintve továbbá, hogy a perturbációkra vonatkozó elméleti vizsgálatok szerint, ha a perturbáló és perturbált molekulatermek A pályakvantumszáma ± 1 -gyel különbözik, akkor a «zérusrotációjú» állapotokon a perturbáció egyáltalán nem mutatkozhat, viszont azonos A esetében a «nullahely» mindig perturbálva van, azt a következtetést is levonhatjuk, hogy az új sávok kezdő $^3\Sigma$ -állapotait perturbáló termek maguk is $^3\Sigma$ -termek, amely konklúzió, mint az alábbiakból kitűnik, az új sávoknak a CO színkép termjeihez való hozzárendelése szempontjából nagyjelentőségű.

Mint az 1. és 2. táblázat utolsó rovata mutatja, a rotációs állandó értékei az új sávok kezdőállapotán — a perturbált helyektől eltekintve — még 1 cm^{-1} -nél is kisebbnek adódnak, azaz jóval kisebbnek, mint a CO molekula bármelyik eddig ismeretes termjének állandója. Általánosan tapasztalt tény viszont, hogy a rotációs felbontással (a rotációs állandó tulajdonképpen ezt fejezi ki) a vibrációs tagozottság nagyjában arányos és így azt kell várnunk, hogy az új sávok $^3\Sigma$ kezdőállapotán a vibrációs termemeletek is jóval sűrűbben kövessék egymást, mint a többi CO állapotokon.

A 2980 \AA -nél fekvő sáv nullahelyének hullámszámát az $\alpha^3II(v=1)$ termnek a CO nivószkémában elfoglalt magasságához,

a 2679 Å-nél fekvő sáv nullahelyének hullámszámát pedig az $a^3\Pi(v=0)$ term magasságához kell hozzáadnunk, hogy az új sávok kezdőállapotainak energiamagasságát a CO nivószkémában megkapjuk:

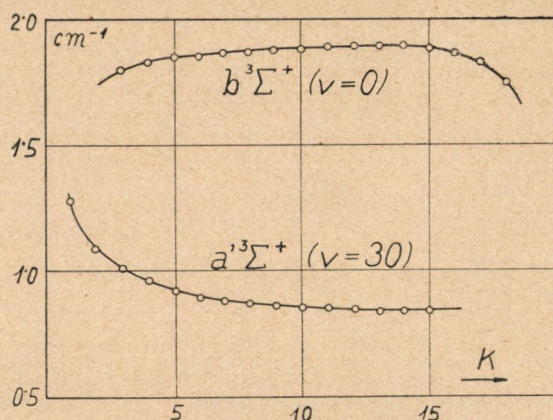
$$\begin{aligned} 2980 \text{ \AA} + a^3\Pi(v=1): & 33510 + 50193 = 83703 \text{ cm}^{-1}, \\ 2670 \text{ \AA} + a^3\Pi(v=0): & 37400 + 48478 = 85878 \text{ cm}^{-1}. \end{aligned}$$

Ez az egymástól 2175 cm^{-1} -nyire fekvő két term semmiesetre sem lehet a sávok kezdőállapotának két egymás után következő vibrációs kvantumszámhoz tartozó emelete. Tekintetbe véve ugyanis egyrészt a kis rotációs állandót, másrészt a rotációs és vibrációs állandók szokásos arányát, arra kell következtetnünk, hogy a két emelet vibrációs kvantumszám tekintetében legalább három-négy egységgel fog különbözni egymástól. Kérdés már most, vajjon a közbülső emeletek nem adnak-e magukról életjelt további sávok révén? Rövid számítás mutatja, hogy ha a közbülső és a megfelelően extrapolált további felsőbb emeleteknek a fentiek szerint becsült magasságát az $a^3\Pi$ állapot $v=0$ és $v=1$ termemeleteivel kombináljuk, a számított sávok várható helyei a spektrumban a III. pozitív rendszer sávvonalai közé esnek. Közülük többnek a helyén tényleg jellegzetes vonalcsoportozatok ismerhetők fel, különösen olyan felvételeken, amelyek a III. poz. rendszer sávjait csak alacsonyabb rotációs emeletekig kifejlődve mutatják.

Végigtekintve már most a CO molekula ismert termjeinek sorozatain, könnyen megállapíthatjuk (v. ö. például már idézett dolgozatunknak 18. táblázatával), hogy pontosan a jelen dolgozatban kísérletileg meghatározott energiamagasságokban található az $a^3\Sigma^+$ állapotnak a $b^3\Sigma$ termen okozott perturbációk alapján számított magasabb ($v=30$ -on felüli) vibrációs emeletei. Az egyezés, mint az alábbi összehasonlítás mutatja, sem a vibrációs termemeletmagasságok, sem a rotációs állandók tekintetében nem hagy semmi kívánnivalót sem hátra és teljes mértékben igazolja a perturbációk alapján történő energiamagasság- és állandó-kiszámításokat.

	termmagasság		B	
	perturbációkból	rotációs analízisből	perturbációkból	rotációs analízisből
$v = 30$	83655 cm^{-1}	83703 cm^{-1}	0.845 cm^{-1}	0.835 cm^{-1}
$v = 34$	85865 cm^{-1}	85878 cm^{-1}	0.720 cm^{-1}	0.740 cm^{-1}

BEER-nek ugyancsak az intézetből kikerült dolgozata szerint (6) a két kimért sáv felső állapotának megfelelő $a'^3\Sigma^+$ emeletek a $v=30$, illetőleg 34-es vibrációs kvantumszámhoz tartoznak. Ezek szerint tehát a 2980 Å-nél (a (0, 1) III. poz. sáv feje előtt) fekvő új sáv az $a'^3\Sigma^+(v=30) \rightarrow a^3\Pi(v=1)$, a 2670 Å-nél (az (1, 0) III. poz. sáv előtt) fekvő az $a'^3\Sigma^+(v=34) \rightarrow a^3\Pi(v=0)$,



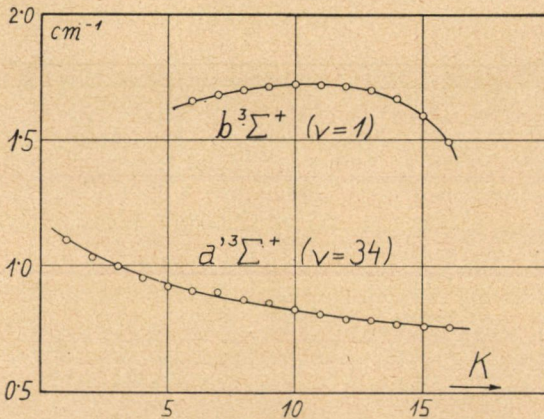
1. ábra.

a (0, 0) előtti a $30 \rightarrow 0$, a (0, 2) előtti a $30 \rightarrow 2$ átmenetnek felel meg stb.

Megemlíthetjük még, hogy az $a'^3\Sigma^+$ term «plusz» karaktere, amelyet eddig csak a perturbációkból vezettünk le, most kísérleti igazolást nyert az új sávok kombinációdifferenciái alapján. Nevezetes továbbá, hogy mint ahogyan az $a'^3\Sigma^+$ termek által a $b^3\Sigma^+$ termeken okozott perturbációk felismerhetők a $b^3\Sigma^+ \rightarrow a^3\Pi$ (III. poz.) sávokon, éppúgy az új $a'^3\Sigma^+ \rightarrow a^3\Pi$ sávokon is felismerhetők a $b^3\Sigma^+$ termekkel való kölcsönhatás okozta perturbációk. A perturbációnak ez a kölcsönös volta jól látszik akkor, ha összehasonlítjuk az egymást perturbáló $b^3\Sigma(v=0)$ és $a'^3\Sigma(v=30)$, illetőleg $b^3\Sigma(v=1)$ és $a'^3\Sigma(v=34)$ termeken a

$B = \frac{A_2 F(K)}{4(K + 1/2)}$ értékek alakulását, mint K függvényeit. Ily módon készült az új és a III. poz. sávok kimérései alapján az 1. és 2. ábra.

A perturbációk elméletének követelményei szerint az egymást metsző termék rotációs «állandói» a metszés helyén (ami a tapasztalat szerint a $b^3\Sigma(v=0) - a'^3\Sigma(v=30)$ esetben éppen a nullahely közvetlen közelébe, a $b^3\Sigma(v=1) - a'^3\Sigma(v=34)$ esetben pedig már a «negatív rotációs kvantumszámok tartományába» jut) közelednek egymáshoz. A $b^3\Sigma$ termekre vonatkozó görbék-



2. ábra.

nek a magasabb rotációs kvantumszámoknál bekövetkező újólajos lehajlása az újabb $a'^3\Sigma$ átmetzések következménye, teljes összhangban a már idézett előző dolgozatunkban közölt ábrával, mely az a' és b termék kölcsönös metszéseit perturbációk megfigyelésén alapuló számítások segítségével tünteti fel.

Az $a'^3\Sigma^+$ term — mint azt megelőző dolgozatunkban kifejtettük — a $C(^5S) + O(^3P)$ atomtermkombinációba disszociál. Tekintetbe véve az $O(^3P)$ term invert voltát, triplettfelbontását, valamint a C és O atomterm ellentett szimmetriáját, a következő módon rendelhetjük a $C(^5S_u) + O(^3P_g)_{\text{inv}}$ atomtermkombináció komponenseihez a belőle leszármaztatható $a'^3\Sigma^+$ és $d^3\Pi_{\text{inv}}$ molekulatermék triplettkomponenseit:

Atomtermkomponensek :	Molekulatermek (HUND szerint) :	
	c) eset	a) és b) eset
${}^3P_0 + {}^5S$	0^-	
${}^3P_1 + {}^5S$	0^+	${}^3\Sigma^+$
${}^3P_2 + {}^5S$	<div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px dashed black; padding: 2px;"> 0^- </div> 1 2 </div>	${}^3\Pi_{inv.}$

Mint látható, ez a hozzárendelés teljes összhangban van az $\alpha' {}^3\Sigma^+$ term kísérletileg talált $F'_3 > F'_1 \gg F'_2$ sorrendjével, valamint azzal, hogy ennek a termnek a tripléttfelbontása erősen nő a ν vibrációs kvantumszámmal.

*

Jelen dolgozat a m. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült, mely felszerelésének egy részét az Országos Természettudományi Tanács, a Széchenyi Tudományos Társaság és a Rockefeller Alapítvány támogatásának köszöni és POGÁNY BÉLA műegyetemi ny. r. tanár vezetése alatt áll.

Irodalom.

1. R. SCHMID, L. GERŐ, Naturwissenschaften **25**. 90. 1937.
2. R. SCHMID, L. GERŐ, Nature **140**. 508. 1937.
3. SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND, Mat. és Term. Tud. Ért. LV. 691-1937.
4. R. SCHMID, L. GERŐ, Nature **139**. 928. 1937.
5. SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND, Mat. és Term. Tud. Ért., LVI. 854, 1937.
6. BEER BORBÁLA ZSUZSANNA, Mat. és Term. Tud. Ért. LVI. 525. 1937.

—————

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13-án tartott üléséből.)

*Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.
Institutsleiter Prof. B. POGÁNY.*

ÜBER DIE NEUEN BANDEN DES CO-MOLEKÜLS.

Von R. SCHMID und L. GERŐ in Budapest.

Vorliegende Arbeit enthält die Messungsergebnisse und Deutung der neuen rotabschattierten CO-Banden, über deren Entdeckung und wahrscheinlichste Struktur in zwei kurzen vorläufigen Mitteilungen schon berichtet worden ist. Ausgemessen und analysiert wurden die Banden bei 2980 Å und 2670 Å. Von den theoretisch möglichen 27 Zweigen zeigten sich mehr als 20 einer Identifizierung zugänglich. Die unteren Zustände dieser Banden (und noch weiteren, die aber wegen Überlagerungen nur teilweise beobachtet werden konnten) ergeben sich als mit den $a^3\Pi(v=0, 1, \dots)$ Termen identisch. Die oberen Zustände sind $^3\Sigma^+$ Terme mit einer Termordnung $F_3 > F_1 \gg F_2$, die genau bei den Energiewerten des CO-Moleküls zu liegen kommen, wo — auf Grund von Störungen, beobachtet am $b^3\Sigma^-$ -Term des CO — die höhere Schwingungszustände des $a'^3\Sigma^-$ Termes zu erwarten sind. Die Übereinstimmung der Rotations- und Schwingungskonstanten zwischen Vorhersage und Experiment ist sehr gut. Auch die gegenseitigen Störungen entsprechender $b^3\Sigma^+$ - und $a'^3\Sigma^+$ -Terme können in überzeugendster Weise (vergl. Fig. 1. u. 2. des Textes) demonstriert werden. Die Wichtigkeit der vorliegenden Untersuchung liegt darin, dass einerseits die auf Grund von bloss Störungen (also indirekt) vorausgesagte Energiehöhen und charakteristische Konstanten bisher unbekannter Terme durch direkte Experimente auf glänzendster Weise verifiziert wurden,

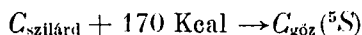
wodurch zur Standhaftigkeit der Deutung der Störungsbeobachtungen wesentliches beigetragen wurde und andererseits weil hiermit zum ersten male im *CO* Spektrum solche Energiezustände zur Emission von gut ausmessbaren Banden anzuregen gelang, die selber schon dicht vor der Dissoziationsgrenze des betreffenden Termes liegen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dec. 1937.)

SZÉNTARTALMÚ VEGYÜLETEK ÉS GYÖKÖK KÉPZŐDÉSI ÉS DISSZOCIÁCIÓS ENERGIÁIRÓL II.

SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND-tól.

Két előző dolgozatunkban (1) (2) kimutattuk, hogy a termikus, elektronütköztetési és spektroszkópai úton nyert, a képződési és disszociációs energiákra vonatkozó kísérleti adatok a széntartalmú vegyületek és gyökök egész sorára ellentmondás nélküli rendszerbe foglalhatók, ha a szénpárolgásra és a CO disszociációra a következő, spektroszkópai úton nyert két reakciót vesszük alapul:



és



A jelen dolgozat további vegyületekre terjeszti ki a vizsgálatokat. Minthogy időközben a legutóbb már tárgyalt cianhidrogén gázon elektronütköztetési kísérleteket is végeztek, szükségesnek látszott a HCN molekulára visszatérni annál is inkább, mivel az új vizsgálatok mindenben igazolták az előző dolgozatunkban (az abszorpciós szinkép alapján) számított értékeket. Az SO_2 molekulára — bár nem széntartalmú — szintén ki kellett terjeszteni vizsgálatainkat, mert disszociációs energiájának ismeretére a szén- és kéntartalmú vegyületek szempontjából volt szükségünk.

Ciánhidrogén.

Legújabban KUSCH, HUSTRULID és TATE (3) végeztek a HCN molekulán elektronütköztetési kísérleteket. Az 1. táblázat a szokásos beosztásban tartalmazza az észlelt ionok megjelenési potenciáljait, az ütköztetési folyamat termékeit, energiaszükségletét, továbbá a mért és számított energiák különbségét. A 2. táblázat a keletkezési potenciálok kiszámításánál felhasznált energiaértékeket tartalmazza, elektronvolt és kilogrammkalória egységekben.

1. táblázat. Ciánhidrogén.

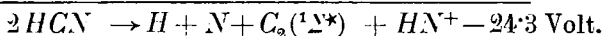
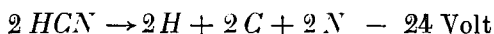
Ion	Keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet	Δ	
HCN^+	13.7 ± 0.1	HCN^+	$I(HCN)$	13.7	0
CN^+	20.1 ± 0.2	$CN(B^2\Sigma)^+ + H$	$I(CN[B^2\Sigma]) + A(CN[B^2\Sigma]) + Sp(H)$	20.3	0
NH^+	24.9 ± 0.5	$2HCN \rightarrow NH^+ + C_2(^1\Sigma^*) + N + H$	$I(NH) + 2D(HCN) - D(C_2[^1\Sigma^*]) - D(NH)$	24.8	0
N^+	25.6 ± 0.5	$N^+ + C + H$	$I(N) + D(HCN)$	26.5	-0.4
CH^+	21.8 ± 0.5	$CH(^4\Sigma^-)^+ + N$	$I(CH[^4\Sigma^-]) + D(HCN) - D(CH)$	21.2	+0.1
C^+	23.8 ± 0.5	$C(^5S)^+ + N + H$	$I(C[^5S]) + D(HCN)$	24.2	0

2. táblázat. Ciánhidrogén.

	Volt	Kcal
$I(HCN)$ -----	13.7	315
$I(CN[B^2\Sigma])$ -----	13.0	299
$I(NH)$ -----	14.0	322
$I(N)$ -----	14.5	334
$I(CH[^4\Sigma^-])$ -----	13.5	311
$I(C[^5S])$ -----	12.2	281
$Sp(H)$ -----	4.3	99
$A(CN[B^2\Sigma])$ -----	3.0	69
$D(HCN)$ -----	12.0	276
$D(CH)$ -----	4.3	99
$D(NH)$ -----	5.2	120
$D(C_2[^1\Sigma^*])$ -----	8.0	184

A HCN^+ ion keletkezési potenciálja 13.7 ± 0.1 Volt; ez egyszersmind a HCN molekula ionizációs potenciálja is. CN^+ iont 20.1 ± 0.2 Voltnál észleltek. Ha a $C-H$ kötés felbontásához szükséges 4.3 Voltot, a CN gyöknek $B^2\Sigma$ állapotba való gerjesztéséhez szükséges 3 Voltot és a CN mintegy 13 Voltnyi ionizációs energiáját összeadjuk, 20.3 Voltot kapunk.

Az NH^+ iont 24.9 ± 0.5 Voltnál észlelték, igaz, hogy az összes többi ionokhoz képest elenyészően csekély mennyiségben. Ezt a keletkezési potenciált semmiképpen sem tudjuk értelmezni egy elemi aktusban lefolyó primér jelenséggel még akkor sem, ha feltesszük, hogy a HCN izomérjeként kis mennyiségben esetleg jelenlévő HNC molekula bomlásterméke. A HIN ionizációs energiájára ugyanis $18-19$ Volt adódnék, ami ellenemond minden eddigi tapasztalatunknak. Nagyon valószínűnek látszik tehát, hogy az NH^+ ion — ha megjelenése egyáltalán reális — komplikáltabb szekundér reakciók útján jön létre. Feltehetjük pl., hogy egyszerre két HCN molekula bomlik fel egy ugyanazon elektron hatására, ami 24 Volt energiának felel meg; a két C -atom (5S állapotban) $C_2(^1\Sigma^*)$ molekulává egyesül; a HN ionizációs energiájára 13.5 Voltot véve:

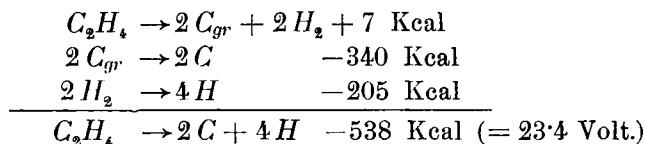


N^+ ion 25.6 ± 0.5 Voltnál keletkezik, míg a HCN teljes disszociációs energiájának (12 Volt) és az N atom ionizációs potenciáljának (14.5 Volt) összege 26.5 Volt. Ugyanígy a C^+ ionra $12 + 12.2 = 24.2$ Volt adódik (az 5S állapot ionizációs energiáját véve figyelembe), míg az észlelés 23.8 ± 0.5 Voltnál történt.

CH^+ ion 21.8 ± 0.5 Voltnál jelent meg. A $C \equiv N$ kötés felbontásához 8.1 Volt, a CH ionizálásához 13.5 Volt kell, így az összes energiaszükséglet 21.6 Volt.

Etilén.

Disszociációs energiája:



Az etilén ultrabolya abszorpciós szinképén PRICE (4) 1750 Å-nél predisszociációt észlelt. Szerinte ennél a 162 Kcal-nyi energiamagasságnál az etilén két CH_2 gyökre bomlik. Ha ezt a bomlási energiát a fenti disszociációmunkából levonjuk, egy-egy $C-H$ kötésre 94 Kcal marad, a metánban kapott 99 Kcal-val szemben, ami jó egyezésben van a kémiai tapasztalattal.

Ugyanabban az energiamagasságban, ahol PRICE predisszociációt észlelt, azaz kb. 162 Kcal-nál, HILGENDORFF szerint (5) kontinuum található az etilén abszorpciós szinképén. Hasonló kontinuumok találhatóak az etilén halogénderivátumainak szinképén is, még pedig a $C_2H_2Cl_2$ -ben 120 Kcal, a $C_2H_2Br_2$ -ben pedig 107 Kcal energiamagasságban.

Ha az etilénről két H -atomot leválasztunk, az ehhez szükséges energia a fentiek szerint $2 \times 94 = 188$ Kcal lenne. Mint-hogy azonban közben az etilén $C=C$ kötése az acetilén $C \equiv C$ kötésbe megy át, a kettő közötti mintegy 25 Kcal visszatérül, úgyhogy a disszociáció energiaszüksége kb. $188 - 25 = 163$ Kcal, jó egyezésben a kontinuum helyével.

A metánderivátumokban talált $C-Cl$ és $C-Br$ kötések a $C-H$ kötés csökkenésével arányosan 75-ről 72 és 66-ról 64 Kcal-ra csökkentve, a $C_2H_2Cl_2$ és $C_2H_2Br_2$ -nek alapállapotú acetilénre és két alapállapotú halogénatomra való disszociáltatásához szükséges energia: $2 \times 72 - 25 = 119$ Kcal és $2 \times 64 - 25 = 103$ Kcal, ismét jó egyezésben a 120 Kcal, illetve 107 Kcal-nál talált két kontinuummal.

KUSCH, HUSTBLUD és TATE etilénben végzett elektronütöztetési kísérleteinek eredményeit, illetve azok értelmezését a 3. és 4. táblázat tartalmazza. Valamennyi ion keletkezési potenciálját sikerült alapfeltevéseink segítségével kielégítő pontosság-

3. táblázat. Etilén.

Ion	Keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet	<i>A</i>
$C_2H_4^+$	$10\cdot80 \pm 0\cdot05$	$C_2H_4^+$	$I(C_2H_4)$	10·8 0
$C_2H_3^+$	$14\cdot1 \pm 0\cdot1$	$C_2H_3^+ + H$	$I(C_2H_3) + Sp(H)$ Etilén	14·1 0
$C_2H_2^+$	$13\cdot4 \pm 0\cdot2$	$C_2H_2^+ + H_2$	$I(C_2H_2) + D(C_2H_4) - D(C_2H_3) - D(H_2)$	13·3 0
C_2H^+	$19\cdot2 \pm 1\cdot0$	$C_2H^+ + H_2 + H$	$I(CH_2) + D(C_2H_4) - D(C_2H_3) - D(H_2) + Sp(H)$ Acetilén	19·6 0
C_2^+	$26\cdot4 \pm 1\cdot0$	$C_2(^1\Sigma^*)^+ + 4H$	$I([C_2(^1\Sigma^*)] + D(C_2H_4) - D(C_2[^1\Sigma^*]))$	26·9 0
CH_3^+	$19\cdot2 \pm 0\cdot3$	$CH_3[^5S]^+ + CH_2[^5S]$	$I(CH_2[^5S]) + Sp(CH_3[^5S])$	19·7 -0·2
CH^+	$22\cdot9 \pm 0\cdot5$	$CH(^4\Sigma^-)^+ + H + CH_2[^5S]$	$I(CH[^4\Sigma^-]) + D(C_2H_4) - D(CH_2) - D(CH)$	23·5 -0·1
C^+	$24\cdot6 \pm 0\cdot5$	$C(^5S)^+ + 2H + CH_2[^3P]$	$I(C[^5S]) + D(C_2H_4) - D(CH_2) - A(CH_2[^5S])$	25·0 0
H_2^+	$22\cdot4 \pm 1\cdot5$	$H_2^+ + H_2 + C(^1\Sigma^*)$	$I(H_2) + D(C_2H_4) - D(C_2[^1\Sigma^*]) - 2D(H_2)$	21·8 0
H^+	$26\cdot2 \pm 1\cdot5$	$H^+ + H + C(^5S) + CH_2[^3P]$	$I(H) + D(C_2H_4) - D(CH_2) - A(CH_2[^5S])$	26·3 0
H^+	$28\cdot2 \pm 1\cdot5$	$H^+ + H + C(^5S) + CH_2[^5S]$	$I(H) + D(C_2H_4) - D(CH_2)$	28·3 0

41*

SZÉNTARTALMÚ VEGYÜLETEK ÉS GYÖKÖK.

641

gal és plauzibilis módon megmagyarázni. Egy-egy $C=H$ kötésre a fentiek szerint $99 \text{ Kcal} = 4.3 \text{ Volt}$, illetve $94 \text{ Kcal} = 4.1 \text{ Volt}$ számítottunk a szerint, hogy az illető gyök egy vagy két szénatomot tartalmaz-e. Ahol a két C -atom mellől legalább két H -atom vált le, ott a $C=C$ és $C\equiv C$ kötések energiakülönbségének megfelelő mintegy 1.1 elektronvoltot levontuk a számított energiaszükségletből.

4. táblázat. Etilén.

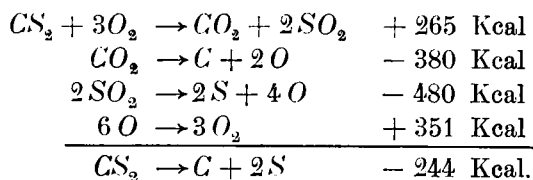
	Volt	Kcal
$I(C_2H_4)$ -----	10.8	249
$I(C_2H_3)$ -----	10.0	230
$I(C_2H_2)$ -----	11.2	258
$I(C_2H)$ -----	11.5	265
$I(C_2[{}^1\Sigma^*])$ -----	11.5	265
$I(CH_2[{}^5S])$ -----	13.5	311
$I(CH[{}^4\Sigma^-])$ -----	13.0	299
$I(C[{}^5S])$ -----	12.2	281
$I(H_2)$ -----	15.4	354
$I(H)$ -----	13.5	311
$Sp(H)$ etilén -----	4.1	94
$Sp(H)$ acetilén -----	6.0	138
$Sp(CH_2[{}^5S])$ -----	6.2	143
$D(C_2H_4)$ -----	23.4	538
$D(C_2H_2)$ -----	16.8	387
$D(H_2)$ -----	4.5	104
$D(C_2[{}^1\Sigma^*])$ -----	8.0	184
$D(CH_2)$ -----	8.6	198
$D(CH)$ -----	4.3	99
$A(CH_2[{}^5S])$ -----	2.0	46

Szénkéneg.

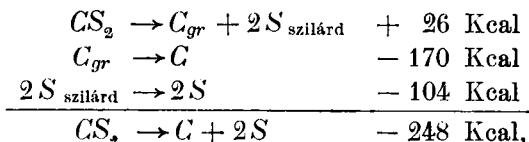
CS_2 -ben SMYTH és BLEWETT (6) végeztek elektronütköztetési kísérleteket. A kénatom ionizációs potenciálja spektroszkópiai adatok révén ismeretes, úgyhogy az S^+ ion keletkezési energiájából az egyik kénatomnak a CS_2 -ről való leválasztásához szükséges energia 3·5 Voltnak adódik; melléktermék ennél a folyamatnál az alapállapotú CS . Ha azonban nem ütközéssel, hanem pl. termikus úton disszociáltatjuk a CS_2 -t, akkor — a CO_2 analogiájára — nem a $CS(X^1\Sigma)$ alapállapotba fog disszociálni, hanem egy magasabban fekvő $^3\Sigma$ állapotba, mely a CO $\alpha'^3\Sigma^+$ állapotának felel meg; ugyanis a 3P állapotú kénből és a $^1\Sigma$ állapotú CS -ből nem származhat a CS_2 $^1\Sigma$ alapállapota.

Termikusan disszociált CS_2 gázban végzett elektronütköztetési kísérletek a CS ionizációs potenciálját $10\cdot6 \pm 0\cdot3$ Voltban állapították meg. A CS_2 -ben $14\cdot7 \pm 0\cdot5$ Voltnál talált CS^+ ion keletkezési potenciálja tehát összeegyeztethető az egy kénatom leválasztására nyert fenti értékkel.

$D(CS_2)$ a következő két módon számítható:¹



Vagy:



azaz középértékben $D(CS_2) = 246 \text{ Kcal} = 10\cdot7 \text{ Volt}$. A C^+ ion keletkezési potenciálja ily módon 19·7 Voltra adódik, $C^+(^4P) + S_2$ disszociációs termékeket feltételezve; a fennmaradó kinetikai energia $1\cdot8 \pm 1\cdot0 \text{ Volt}$.

¹ A termokémiai adatok a LANDOLT—BÖRNSTEIN-féle kézikönyvből valók (7); az SO_2 -re nézve l. a következő fejezetet.

5. táblázat. Szénkéneg.

Ion	Keletkezési potenciál	Összes ütköztetési termék	Energiaszükséglet	Δ
CS_2^+	10.4 ± 0.2	CS_2^+	$I(CS_2)$	10.4 0
CS^+	14.7 ± 0.5	$CS^+ + S$	$I(CS) + Sp(S)$	14.1 +0.1
S^+	14.0 ± 0.5	$S^+ + CS$	$I(S) + Sp(S)$	13.8 0
C^+	21.5 ± 1.0	$C^+(^4P) + S_2$	$I[C(^5S)] + D(CS_2) - D(S_2)$	19.7 +0.8

6. táblázat. Szénkéneg.

	Volt	Kcal
$I(CS_2)$ _ _ _ _ _	10.4	239
$I(CS)$ _ _ _ _ _	10.6	244
$I(S)$ _ _ _ _ _	10.3	237
$Sp(S)$ _ _ _ _ _	3.5	80
$D(CS_2)$ _ _ _ _ _	10.7	246
$D(S_2)$ _ _ _ _ _	3.2	74

A CS_2 abszorpciós spektrumában 2068 Å-nél predisszociáció észlelhető, (8) mely minden valószínűség szerint a $CS_2 \rightarrow CS + S$ folyamat energiamagasságában lép fel. Minthogy a CS_2 és CS alapállapota — a CO_2 és CO -hoz hasonlóan — $^1\Sigma$ term, a leváló S atomnak valószínűleg 1S , de mindenesetre szingulett állapotban kell lennie. RUDY (9) szerint a kén 1S termje 19033 cm^{-1} -re van 3P alapállapota fölött, azaz energiája 54 Kcal. Tehát:

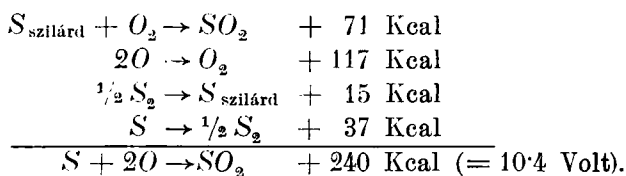


ami a predisszociáció 137 Kcal energiamagasságával jól meg-
egyezik.

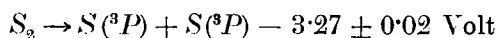
Kéndioxid.

Bár nem széntartalmú vegyület, de disszociációs energiáját mégis meg kell e helyen határoznunk, mivel az előző fejezet-

ben annak számértékét felhasználtuk és az eddigi adatok — a kén disszociációs energiájának helytelen értelmezése folytán — hibásak voltak.



A kén égéshőjét BICHOWSKY és ROSSINI (10) munkájából, párolgási hőjét PARKS és HUFFMANN (11) monografiájából vettük. A kétatomos kénmolekula disszociációs energiája predisszociációkból számítható. ROSEN, DÉSRANT és DUCHESNE (12) szerint a kénsávkon észlelt predisszociációkból az alapállapot felett 4.41 ± 0.02 Voltnyira fekvő disszociációs határra lehet következtetni. Mivel ezen a határon alul is észlelhető predisszociáció, disszociációs termék gyanánt csak az $S(^3P) + S(^1D)$ atomtermek kombináció jöhet tekintetbe. Az $S(^1D)$ term magassága RUEDY (9) szerint $9240 \text{ cm}^{-1} = 1.14$ Volt, a kétatomos kén disszociációja tehát az



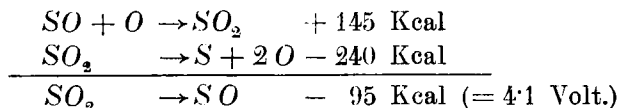
egyenlet szerint megy végbe.

Mint GOLDFINGER, JEUNEHOMME és ROSEN (13) kimutatták, egyedül ez a disszociációs energia felel meg az összes kísérleti adatoknak. MONTGOMERY és KASSEL (14) 4.45 Volt disszociációs energiát véve alapul, kiszámították az $S_2 \leftrightarrow 2S$ egyensúly állapotait, azonban mintegy három nagyságrenddel kisebb értékeket kaptak, mint ami NERNST és v. WARTENBERG mérései alapján várható. GOLDFINGER, JEUNEHOMME és ROSEN 3.2 Volt disszociációs energiával újra számították $\log K$ -t és a tapasztalattal egyező eredményre jutottak.

Az SO_2 színképén HENRY (15) 1950 \AA körül észlelt predisszociációt, ami kb. 6.33 Voltnak, illetőleg 145 Kcal-nak felel meg. Disszociációs termékek gyanánt ebben az energiamagasságban csak $SO + O$ jöhetnek tekintetbe, még pedig mindkettő alapállapotban. Az $SO_2 \rightarrow S + O_2$ reakció energiaszükséglete

ugyanis $D(SO_2) - D(O_2) = 123$ Kcal, $SO_2 \rightarrow SO + O(^1D)$ folyamat feltételezése esetén pedig az SO disszociációs energiájára $D(SO) = D(SO_2) + A[O(^1D)] - 145 = 138$ Kcal adódnék, az SO szinképén pedig jóval alacsonyabban észlelhető már predisszociáció.

Az SO molekula disszociációs energiája:

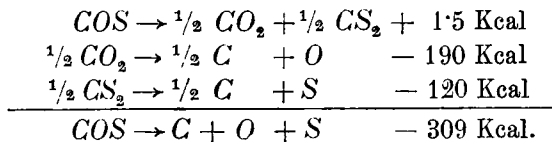


MARTIN (18) az SO szinképén $41520 \text{ cm}^{-1} = 5.13 \text{ Volt} = 118 \text{ Kcal}$ energiamagasságban talált predisszociációt. Feltéve, hogy ez a predisszociáció $S(^1D) + O(^3P)$ atomokba történik, az SO disszociációs energiája $32280 \text{ cm}^{-1} = 3.99 \text{ Volt}$ nak adódik. Tekintve $D(SO_2)$ valószínű hibahatárait, ez igen jó megegyezésnek mondható. Megnyugtató ez az eredmény azért is, mert ilyen módon az SO disszociációs energiája az S_2 molekula 3.29 Volt os és az O_2 molekula 5.09 Volt os disszociációs energiája közé került.

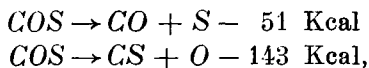
SO_2 -ben SMYTH és MUELLER (17) végeztek elektronütköztetési kísérleteket. A keletkezési potenciálok számításánál annak idején felhasznált szám adatok nem voltak megbízhatóak; a jelen dolgozat pontosabb adataival is lényegében ugyanazokra az eredményekre juthatunk.

Karbonilszulfid.

A COS disszociációs energiája a következőképpen adódik:

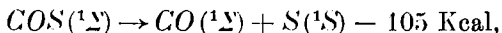


$D(COS)$ -ből a CO , illetve CS disszociációs energiáit levonva, a következő két bomlási folyamatra jutunk:



minthogy az előző fejezet alapján $D(CS) = D(CS_2) - Sp(S) = 7.2$ Volt.

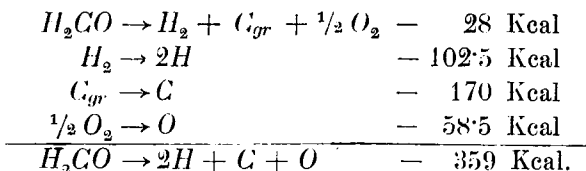
A COS abszorpciós szinképén LOCHTE-HOLTGREVEN, BAWN és EASTWOOD (18) $2550 \pm 20 \text{ \AA}$ -nél egy erős kontinuum vörös felé eső határát figyelték meg, mely szerintük a molekula fotokémiai disszociációjához tartozik. A fenti hullámhossznak megfelelő energia, 3.84 Volt vagy 111 ± 1 Kcal, nem egyezik azonban meg a fenti két bomlási energia egyikével sem. Minthogy az alapállapotú COS molekula — a CO_2 és CS_2 -höz hasonlóan — $^1\Sigma$ állapotban van, a CO és CS alapállapota pedig szintén $^1\Sigma$, a CS_2 -nél mondottak értelmében a következő fotokémia disszociációra következtethetünk:



ami — tekintve a kontinuumhatárok megállapításának nehézségeit — igen jó egyezésnek tekinthető.

Formaldehid.

Disszociációs energia:

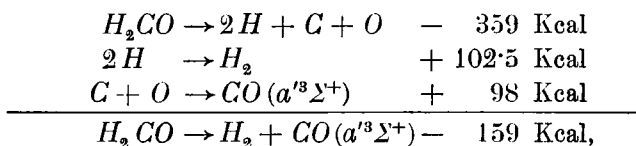


A két H -atom leválasztásához szükséges energiát ebből úgy kapjuk, hogy a karbonil-gyök képződési energiáját, azaz a $CO(a^3\Sigma^+)$ term disszociációs energiáját belőle levonjuk:

$$Sp(H) = \frac{D(H_2CO) - D[CO(a^3\Sigma^+)]}{2} = 130 \text{ Kcal.}$$

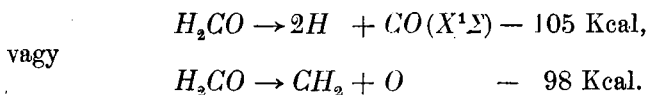
A formaldehid abszorpciós szinképén 1740 \AA és 2750 \AA -nél találtak predisszociációt (19) (20), azaz 163 Kcal és 104 Kcal energiamagasságban. Minthogy egy-egy H atom leválasztásához 130 Kcal szükséges, egyik határ sem tartozhat a $H_2CO \rightarrow H + HCO$ reakcióhoz.

HENRI (21) szerint az aldehidekben és ketonokban a karbonil-gyök $a^3\Pi$ és $a^3\Sigma$ elektronállapotokban szerepel. A CO csoport magtávolságára és alaprezgésére ugyanis ezekben a vegyületekben mindenütt a két tripllett CO-term magtávolsága és ω rezgésszáma adódott, nem pedig a CO alapállapoté. Még ha NOYES (22) és MULLIKEN (23) nyomán ezt a frekvenciaegyezést nem is tekintjük döntő érvnek, a szerves vegyületekben szereplő 5S szénre való tekintettel mégis arra kell következtetnünk, hogy a karbonil-gyök elektronkonfigurációja a $C(^5S) + O(^3P)$ atomokból felépített $CO(a^3\Sigma^+)$ termékhez hasonló. Ha tehát a formaldehid két hidrogénje egyidőben leválik, a CO csoport $a^3\Sigma$ állapotban marad vissza. Ha feltesszük, hogy nem két H-atom, hanem H_2 molekula keletkezik, akkor a felbomlás energiaszükséglete:



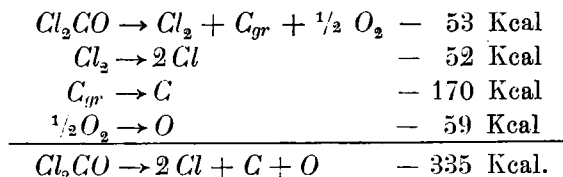
ami jól megegyezik az 1740 A-nél talált predisszociáció 163 Kcal-ás energiamagasságával.

A 104 Kcal-nál talált predisszociációt a következő két folyamat valamelyikéhez rendelhetjük:

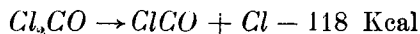


Foszgén.

A foszgén disszociációs energiája:

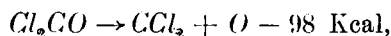


Feltéve, hogy a CO csoport itt is $a'^3\Sigma^+$ állapotban van jelen, egy Cl atom leválasztása



szerint megy végbe. Ennek a folyamatnak megfelelően 2380 Å-nél, azaz 119 Kcal energiamagasságban van a foszgén abszorpciós szinképén egy kontinuumnak vörös felé eső határa. (24)

A 2750 Å-nél talált predisszociáció (25) értelmezése itt csak a CO kötés 98 Kcal-nyi energiájának felszabadulásával történhet:

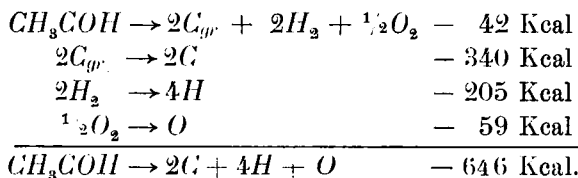


predisszociáció 2750 Å-nél ... 104 K-cal.

A formaldehid és foszgén hasonló szerkezete valószínűvé teszi, hogy a formaldehidben 2750 Å-nél észlelt predisszociáció második értelmezése a helyes és ott is a $C=O$ kötésre jellemző, kb. 98 Kcal energiamagasságon felül esik szét a molekula. Erre mutat különben, hogy csaknem valamennyi gázalakú aldehid abszorpciós szinképén észlelhető 2750 Å körül predisszociáció vagy kontinuum határ, illetve maximum, így az acetaldehidben 2750 Å körül folytonos abszorpció maximuma, krotonaldehidben 2750 Å-től ibolya felé kontinuum stb.

Acetaldehid.

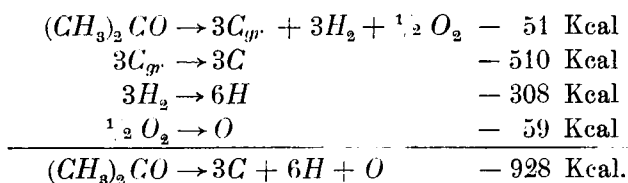
Disszociációs energiája:



A metil-gyök 297 Kcal és a karbonil-gyök 98 Kcal képződési energiáját levonva, a hidrogén-karbonil és metil-karbonil kötésre együttvéve 251 Kcal marad. A $H-CO$ kötésre a formaldehidnél mintegy 130 Kcal-t találtunk, a CH_3-CO kötésre tehát kb. 120 Kcal jut.

Acetaldehydhen 3300 Å-nél, azaz 86 Kcal-nál találtak predisszociációt. Látnivaló, hogy ez az energia egyetlen k6tés felbon-
tására sem elégséges. Mint egyetlen lehetséges megoldást, a
metánban végzett elektronütköztesési kísérletek interpretálásánál
jól bevált feltevést alkalmazhatjuk: fel kell tennünk, hogy az
organikus vegyületekben szereplő CH_3 -gyökben levő szén 5S
állapotú, szabad CH_3 -ban azonban 3P szén is lehet jelen.
A CH_3 -nak ez az utóbbi elektronállapota, mint láttuk, néhány
Volttal alacsonyabban van, mint a négyértékű szénhez tartozó
módosulat. A predisszociáció a CH_3 -nak ebbe az alacsonyabb
energiájú módosulatába történik.

Aceton.



Levonva ebből kétszer 237 Kcal-t, mint a metil gyökök és 98
Kcal-t, mint a karbonil gyök képződési energiáját, marad egy-
egy $CH_3 - CO$ k6tésre 118 Kcal, az acetaldehydnél nyert kb.
120 Kcal-val szemben.

Jelen dolgozat a m. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaság-
tudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült, mely felszerelé-
sének egy részét az Országos Természettudományi Tanács, a
Széchenyi Tudományos Társaság és a Rockefeller-Alapítvány
támogatásának köszöni és Pogány Béla műegyetemi ny. r. tanár
vezetése alatt áll.

Irodalom.

1. SCHMID REZSŐ és GERŐ LORÁND, Mat és Term. Tud. Ért., nyomás
alatt.
2. SCHMID REZSŐ, GERŐ LORÁND és M. ZEMPLÉN JOLÁN, Mat. és Term.
Tud. Ért., nyomás alatt.
3. P. KUSCH, A, HUSTRULD, J. T. TATE, Phys. Rev. 52. 843. 1937.

4. W. C. PRICE, *Phys. Rev.* **47**, 444. 1935.
5. H. J. HILGENDORFF, *ZS. f. Phys.* **95**, 781. 1935.
6. H. D. SMYTH, J. P. BLEWETT, *Phys. Rev.* **46**, 276. 1934.
6. LANDOLT—BÖRNSTEIN: *Physikalisch-Chemische Tabellen.*
8. H. SPONER, *Molekülspektren I.*
9. J. E. RUEDY, *Phys. Rev.* **44**, 757. 1933.
10. F. R. BICHOWSKY and F. D. ROSSINI: *The Thermochemistry of Chemical Substances.* NY. 1936.
11. G. S. PARKS and H. M. HUFFMAN: *The Free Energies of Some Organic Compounds,* NY. 1932.
12. B. ROSEN, M. DÉsirANT, J. DUCHESNE, *Phys. Rev.* **48**, 916. 1935.
13. P. GOLDFINGER, W. JEUNEHOMME, B. ROSEN, *Nature* **138**, 205. 1936.
14. MONTGOMERY and KASSEL, *Journ. Chem. Phys.* **2**, 417. 1944.
15. J. FRANCK, H. SPONER, E. TELLER, *ZS. f. Phys. Chemie (B)* **18**, 88, 1932.
16. E. W. MARTIN, *Phys. Rev.* **41**, 167. 1932.
17. H. D. SMYTH, D. W. MUELLER, *Phys. Rev.* **43**, 221. 1933.
18. W. LOCHTE-HOLTGREVEN, C. E. H. BAWN, E. EASTWOOD, *Nature* **129**, 869. 1932.
19. W. C. PRICE, *Phys. Rev.* **46**, 529. 1934.
20. V. HENRI, S. A. SCHOU, *ZS. f. Phys.* **49**, 774. 1928.
21. V. HENRI, *CR.* **199**, 849. 1934.; **203**, 67. 1936.
22. W. A. NOYES, *Journ. Phys. Chem.* **41**, 81. 1937.
23. R. S. MULLIKEN, *Journ. Phys. Chem.* **41**, 305. 1937.
24. V. HENRI, H. de LÁSZLÓ, *Proc. Roy. Soc. (A)* **128**, 192. 1930.
25. V. HENRI. *Structure des Molécules,* Paris, 1925.

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1937 december 13-án tartott üléséből.)

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl.
Ungarischen Universität für technische und
Wirtschaftswissenschaften.)

ÜBER DIE BILDUNGS- UND SPALTUNGSENERGIEN VON ORGANISCHEN VERBINDUNGEN UND RADIKALE. II.

Von R. SCHMID und L. GERŐ in Budapest.

Die in einer vorhergehenden Arbeit (Mat. Naturwiss. Anzeiger LVI. 1937.) begonnene Untersuchungen über die Deutung der Dissoziationsdaten (ermittelt durch Elektronenstossversuche und spektroskopische Untersuchungen) der Kohleenthaltenden Verbindungen werden hier fortgesetzt. Die hier mitgeteilten Ergebnisse einbegriffen, umfasst das auf Grund der Beziehung $CO + 11.06 \text{ Volt} \rightarrow C(^5S) + O(^3P)$ aufgestellte widerspruchsfreie System der Dissoziationsenergien bis jetzt die folgende Moleküle: CO , CO_2 , CN , CH_4 , C_2H_6 , C_2H_4 , C_2H_2 , CH_3Cl , CH_3Br , CH_3I , CH_2Cl_2 , CH_2Br_2 , CH_2I_2 , $CHCl_3$, $CHBr_3$, CHI_3 , CCl_4 , CBr_4 , CI_4 , HCN , C_2N_2 , CS_2 , COS , H_2CO , $COCl_2$, CH_3COH , $(CH_3)_2CO$, ausserdem SO_2 und S_2 , die zwar Kohlenstoff nicht enthalten, aber infolge ihrer Wichtigkeit in der Bildung von CS_2 und COS mitberücksichtigt werden mussten. Da mit den hier aufgezählten Verbindungen die Anzahl der zur Zeit überblickbare Ergebnisse liefernden, experimentell untersuchten Fälle ziemlich erschöpft ist, mag nun die Gültigkeit des Prinzipes — aufgestellt von uns in der vorhergehenden Arbeit, wonach die Grundzustände von den kohleenthaltenden Molekülen ohne Valenzanomalie aus $(1s^2 2s^2 2p^3)^5S$ C-Atome, von denen mit anomalen Valenzverhältnissen dagegen aus der Konfiguration $(1s^2 2s^2 2p^2)$ aufgebaut sein sollen — sozusagen auf die ganze organische Chemie ausgedehnt angenommen werden.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der
Wissenschaften am 13. Dec. 1937.)

A POLLUCIT, $CsAlSi_2O_6 \cdot xH_2O$, SZERKEZETE.

NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN-tól.

A ritka cézium egyetlen ásványa az Elba szigetén és egy amerikai lelőhelyen (Rumford, Maine, U. S. A.) található pollucit, amely 32—36% Cs_2O -t tartalmaz. Ennek a szilikátnak az összetételét régebben $H_2C_4Al_4Si_9O_{27}$ képlettel adták meg és ez a formula található az összes tankönyvekben is. GOSSNER és REINDL,¹ továbbá STRUNZ² röntgenográfiai vizsgálatokkal bebizonyították, hogy a pollucitban — éppúgy, mint sok más szilikátban — Si és Al izomorf módon helyettesíthetik egymást. Ennek figyelembevételével adódik a helyes $CsAlSi_2O_6$ összetétel, amelyhez még a változó mennyiségben jelenlevő víz is hozzájárul.

Az említett szerzők a pollucit kristályszerkezetét meghatározni nem tudták, csak a leucittal $KAlSi_2O_6$ és az analcittal $NaAlSi_2O_6 \cdot H_2O$ való rokonságra mutatnak rá. Az analcít szerkezetét W. H. TAYLOR határozta meg³ és STRUNZ meg is kísérte ennek a szerkezetnek alapján a pollucitét is megállapítani, de csak annyit tudott kimutatni, hogy a pollucit szerkezete nem azonos a TAYLOR által megadott analcít-szerkezettel.

Kívánatosnak látszott a dolgok ilyen állása mellett a pollucit szerkezetét behatóbb vizsgálat tárgyává tenni. Erre a célra egy a dr. F. KRANTZ (Bonn) cégtől beszerzett, kb. 2 g súlyú átlátszó, bár hiányosan kiképződött kristályt használtam, amelyen azonban több lap kétségtelenül felismerhető volt és pedig a kocka (100)

¹ GOSSNER u. REINDL, Zbl. Mineral. 1932 330.

² STRUNZ, Z.: Kristallogr. (A) 95 1 (1936).

³ TAYLOR, W. H.: Z. Kristallogr. 74 1 (1930).

és a deltoid-huszonnégyes (211) lapjai. A pollucitot általában a szabályos rendszerbe sorolják, a ritka kristályok valóban szabályos formákat mutatnak, ú. m. (100), (110), (210) és (211), optikailag izotrópok. Egy a British Museumból származó Buckfield, Oxford Co., Maine, U. S. A. lelőhelyű töredékből készített 0.5 mm vastag parallel csiszolat optikai vizsgálatánál keresztezett nikolok közt az anizotrópia legcsekélyebb jelét sem találtam. A röntgenográfiai vizsgálat mégis azt bizonyítja, hogy a kristály csak pszeudoköbös szimmetriájú (l. alább).

STRUNZ porfelvétel alapján arra a következtetésre jutott, hogy a pollucit a szabályos rendszer holoéderes osztályának $O_h^{10} - Ia\bar{3}d$ tércsoportjához tartozik. Indexelt reflexióinak száma azonban csekély és ezek közt is számos egyidejűleg több reflexiót jelent, amelyek a porfelvételnél egymásra esnek és meg nem különböztethetők. Az elemi kocka élét $a=13.71 \text{ \AA}$ -nek találta.

Felvételeimhez az említett kristály kockalapját a (001) tengely körül 15° -kal oszcilláltam és 10 cm effektív átmérőjű hengeres filmen kapott reflexiókat BERNAL módszerével grafikusán indexeltem. A felvételekhez részben $Cu K\alpha$ -sugárzását, részben $Mo K\alpha$ -sugarait használtam, a kétféle sugárással kapott felvételek egymást jól kiegészítették. Az intenzitásokat gondos becslés útján határoztam meg. A kapott számos reflexió (l. Táblázat) alapján $a=13.74 \text{ \AA}$, ami STRUNZ fenti adatával a kísérleti hibák határán belül jól egyezik. Csak olyan reflexiók lépnek fel, amelyeknél $(h+k+l)$ páros; (hko) reflexiók csak $k=2n$ és $h=2n$, (hhl) reflexiók csak $(2h+l)=4n$ esetén jelennek meg. Ezek szerint a pollucit tércsoportja valóban O_h^{10} .

Ha már most ezen az alapon meg akarjuk határozni a pollucit szerkezetét, akkor először is az elemi testben található «molekulák» számát állapítjuk meg. Tekintettel arra, hogy a pollucit fajsúlya 2.90—3.03, az elemi testben 16 $CsAlSi_2O_6$ foglal helyet, ezenkívül még 4.0—6.6 molekula víz is. Egyenlőre figyelmen kívül hagyva a vizet, 16 Cs , 16 Al , 32 Si és 96 O -iónt kell az elemi cellában elhelyeznünk. Az O_h^{10} tércsoportban rendelkezésre álló helyzetek közt valóban található két 16-os és egy 32-s pozíció, így tehát látszólag egyszerű volna az elhelyezés kérdése. Itt azonban ugyanarra a nehézségre találunk, mint aminő az analcit szerkezetének a

megállapításánál mutatkozott: a 16-os és 32-s helyzetek mind a trigonális tengelyeken foglalnak helyet. Így tehát az összes pozitív ionok a trigonális tengelyekre kerülnének, amiáltal egymástól való átlagos távolságuk mindössze 1.5 \AA egységet tenne ki. Ez nyilvánvalólag nem lehet igaz, mert hisz a Cs-ion ismert sugara 1.7 \AA , de egyébként is valószínűtlen volna a pozitív ionok ilyen különös elrendezése.

Itt tehát segítségül kell vennünk az analcittal való hasonlóságot, amely valóban nagyon szembeeszkő. Megegyezik a kémiai képlet (a víztartalmat nem számítva), a tércsoport és az elemi test éllhosszúsága, mely az analcitról 13.7 \AA .

TAYLOR az analcitról szerkezetének meghatározásánál abból indult ki, hogy a szilikátokban Si és Al ionok izomorf módon helyettesíthetik egymást a SiO_4 és AlO_3 -tetraéderek méreteinek hasonlósága folytán. Természetesen a vegyértékek egyensúlyának fenntartása végett ugyanakkor a többi kationok száma is megfelelően változik. Az aluminiumion és a szilíciumion szóróképessége oly közel állanak egymáshoz, hogy a különbség még abszolút intenzitásmérésekkel sem mutatható ki. Így tehát jogosultnak látszik az az eljárás, hogy a 16 Al és a 32 Si-iont összefoglalva egy 48-as pozícióba helyezük, miáltal a digonális tengelyekre kerülnek és így elegendő hely marad az összes ionok számára. — Ez az eljárás természetesen nem felel meg a szabályos O_h^{10} tércsoport követelményeinek, mert azonos ionok helyett különbözőket (bár nagyon hasonlókat) helyez egy összetartozó 48-as csoportba. Ezáltal a valódi szimmetria szabályos helyett már csak tetragonális lesz, azonban az eltérés a Si és Al ionok hasonlósága miatt oly csekély, hogy ki nem mutatható. Az oxigénionok megfelelő elhelyezésével egy Si-Al-O-tetraéderekből álló összefüggő térbeli váz keletkezik, amelynek hézagaiban kell a nátriumionoknak és a vízmolekuláknak elhelyezkedni. TAYLOR a nátriumionokat egy 24-es pozícióba helyezi és azt állítja, hogy ennek a pozíciónak csak $\frac{2}{3}$ -része van betöltve; tetragonális szimmetria esetén erre megvan a lehetőség. Hogy azonban ez az állítás csakugyan megfelel-e a valóságnak, azzal alább fogok foglalkozni.

STRUNZ ezek után a TAYLOR-féle szerkezet szerint kiszámította

több reflexió intenzitását — a nátriumionok helyébe a céziumokat téve — és így néhány esetben jó egyezést, több reflexiónál azonban igen nagy különbségeket kapott. Így tehát bizonyos, hogy a pollucit szerkezete nem lehet azonos az analcitnak TAYLOR által megadott szerkezetével.

Kutatásaim során az egyes kristályról kapott számos reflexió módot nyújtott a kérdés alaposabb megvizsgálására. Miután a pollucit és az analcit szerkezete közt az ismertett analógiák alapján feltétlenül nagy hasonlóságnak kell fennállani, megkíséreltem a TAYLOR-féle analcit-szerkezetet olyképpen módosítani, hogy a szerkezet vázát megtartva a Cs-ionok és a vízmolekulák helyzetét változtassam. A szerkezet pszeudoköbös karakterét figyelembe véve, az O_h^{10} tércsoport strukturfaktorával végezhetjük a számításokat; a strukturfaktor általános alakja (I. Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstruktur) a következő módon egyszerűsíthető (x, y, z a ponthelyzet koordinátái):

1a) Ha $h+k+l=4n$, melyek közül l páros, akkor ha h és k is páros,

$$A=16 [(\cos 2\pi hx \cos 2\pi ky \cos 2\pi lz + \\ + \cos 2\pi lx \cos 2\pi hy \cos 2\pi kz + \\ + \cos 2\pi kx \cos 2\pi ly \cos 2\pi hz) + \\ + (\cos 2\pi kx \cos 2\pi hy \cos 2\pi lz + \\ + \cos 2\pi hx \cos 2\pi ly \cos 2\pi kz + \\ + \cos 2\pi lx \cos 2\pi ky \cos 2\pi hz)] = 16 (C+D)$$

1b) Ha $h+k+l=4n$ és h és k páratlanok, akkor

$$A=-16 [(\cos 2\pi hx \sin 2\pi ky \sin 2\pi lz + \\ + \sin 2\pi lx \cos 2\pi hy \sin 2\pi kz + \\ + \sin 2\pi kx \sin 2\pi ly \cos 2\pi hz) + \\ + (\cos 2\pi kx \sin 2\pi hy \sin 2\pi lz + \\ + \sin 2\pi hx \sin 2\pi ly \cos 2\pi kz + \\ + \sin 2\pi lx \cos 2\pi ky \sin 2\pi hz)] = -16 (E+F)$$

2a) Ha $h+k+l=4n+2$ és mind a három index páros, akkor

$$A = 16 (C-D)$$

2b) Ha $h+k+l=4n+2$ és h és k páratlanok, akkor

$$A = -(E-F).$$

Ezek a kifejezések a speciális helyzetekre vonatkozólag még tovább is egyszerűsíthetők.

Mínt hogy a TAYLOR-féle analcit-szerkezet szilárd vázát alkotó $Si-Al-O$ -tetraéderek elhelyezése a valóságnak kétségtelenül megfelelő, amint ezt az analcit reflexióintenzitásainak jól egyező megfigyelt és számított értékei bizonyítják és ezenfelül térbelileg is kielégíti az ionvegyületek ismert követelményeit, a szerkezetnek ezt a részét a pollucitnál is azonosnak tekintetem és megkíséréltem a Cs -ionokat és a vízmolekulákat különböző más, az O_h^{10} tércsoportban lehetséges pozíciókba helyezve az így számítható intenzitásokat a találtakkal összehasonlítani. — A Cs -ionokat a 16-os $(b) \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8}$ stb. pozícióba helyezve az így számított intenzitások a találtakkal kitűnően egyeznek, mint ezt az 1. Táblázatból mintegy 70 reflexióra összeállítva láthatjuk. Ezzel tehát a pollucit szerkezete kétségtelenül bebizonyosodott.

Az ionok koordinátái az O_h^{10} tércsoport szerint

$$16 Cs: (b) \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \text{ stb.};$$

$$48 (Si, Al): (y) x, \frac{1}{4} - x, \frac{1}{8} \text{ stb.}, \quad x = 0.661;$$

$$96 O: (h) xyz \text{ stb.}, \quad x = 0.111, \quad y = 0.131, \quad z = 0.722.$$

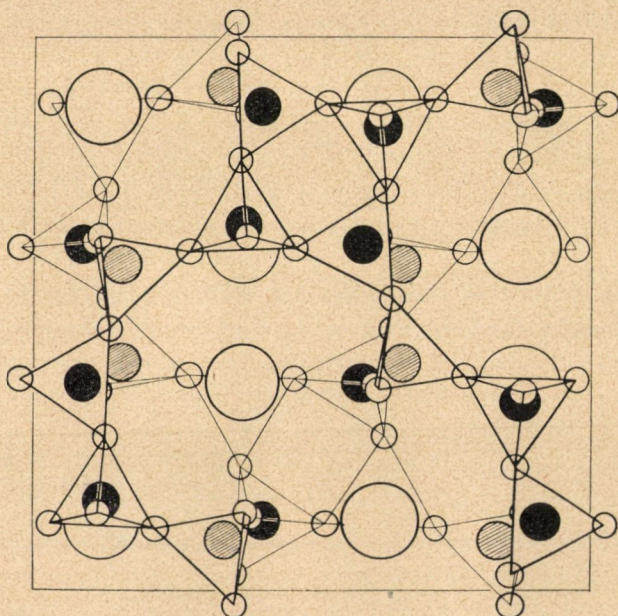
Mínt hogy azonban a kristály valójában csak tetragonális, az O_h^{10} tércentrált tetragonális alcsoportja, a D_{4h}^{20} tércsoport felel meg a valódi szimmetriának. Ezen az alapon készült az 1. rajz. Ebben a 32 Si egy csoportba és a 16 Al ugyancsak egy csoportba kerülnek; így Si_4O_{12} összetételű négyes tetraédercsoportok keletkeznek, amelyeket AlO_4 tetraéderek tartanak össze oly módon, hogy két oxigénjük közös egy-egy szilíciumhoz tartozó oxigénnel. A 96 oxigén ugyancsak három általános helyzetű csoportot képez. Megjegyzendő, hogy az Internationale Tabellen z. Bestimmung v. Kristallstrukturen elfogadott konvenciója szerint a D_{4h}^{20} tércsoport kezdőpontja nem szimmetriaközponthban van; ezért a koordinátákat úgy kell transzformálni, hogy az x -koordináták változatlanok maradnak, a köbös y -koordinátákból $\frac{1}{2}$ -et, a köbös z -koordináták-

1. táblázat.

A pollucit reflexióintenzitásainak számított ($F^2\theta_{10}^{-2}$) és becsült Int_b értékei.*

hkl	sin θ	θ	F	$F^2\theta_{10}^{-2}$	Int_b	hkl	sin θ	θ	F	$F^2\theta_{10}^{-2}$	Int_b
112	0.138	7.2	-117	10.1	4	192	521	1.3	-112	1.6	2
220	160	6.1	-57	2.0	3	556	521	1.3	257	8.6	4
132	210	4.5	-330	49.0	12	176	521	1.3	-277	10.0	6
400	224	4.2	-1386	581	20	664	527	1.3	87	0.99	3
420	252	3.7	66	1.6	3	574	534	1.3	-79	0.81	1
332	263	3.4	570	105	15	158	534	1.3	-31	0.12	0
224	276	3.3	45	0.67	2	392	545	1.3	136	2.4	2
134	286	3.0	-99	2.9	4-5	376	545	1.3	366	17.4	8
152	308	2.8	223	14.2	5	448	551	1.2	457	25	9
140	320	2.8	843	198	20	358	558	1.2	-59	0.42	1-2
352	347	2.4	-342	28	6	194	558	1.2	-37	0.16	1
116	347	2.4	143	4.9	4	860	564	1.2	153	2.8	4
620	358	2.3	84	1.6	3	1, 1, 10	567	1.2	-388	18.1	9
154	365	2.2	31	0.21	1-2	772	567	1.2	485	28.2	10
136	382	2.1	276	16	6	1020	576	1.1	-58	0.37	1-2
444	391	2.1	-489	50.3	12	1, 3, 10	591	1.1	-381	16.0	9
354	397	2.0	44	0.39	1	1040	608	1.0	-111	1.23	2
640	405	2.0	138	3.8	5	3, 3, 10	610	1.0	396	15.7	8
336	413	1.9	-428	34.8	12	880	637	1.0	546	29.8	10
552	413	1.9	-298	16.9	6	776	654	1.0	-364	13.2	9
172	413	1.9	322	19.7	8	1, 5, 10	634	1.0	396	15.7	8
246	422	1.9	-67	0.85	1-2	3, 5, 10	654	1.0	338	11.4	8
372	443	1.75	-502	44.1	12	1060	656	1.0	78	0.61	2
156	443	1.75	-148	3.84	4	1200	676	1.0	-550	30.2	7
800	449	1.7	904	139	20	884	676	1.0	-481	23.1	10
174	456	1.7	119	2.41	4	1220	685	1.0	94	0.89	2
820	465	1.7	-75	0.96	4	5510	691	1.0	420	17.6	10
356	472	1.6	260	10.8	4	2212	697	1.0	26	0.06	1
660	481	1.6	-110	1.94	3-4	1240	713	1.0	444	19.7	6
228	481	1.6	-36	0.21	1-2	1080	722	1.0	109	1.18	3
138	485	1.5	114	1.95	3-4	4412	750	1.0	-372	13.8	6
374	485	1.5	-42	0.26	1	1260	757	1.0	-161	2.58	4
572	499	1.45	-363	19.2	8	1, 1, 14	791	1.1	290	9.2	7
840	504	1.45	-659	63	12	10100	797	1.1	-62	0.42	2
248	513	1.4	40	0.22	2	3, 3, 14	826	1.2	-296	10.5	5

A tükrözési szögek $Cu K\alpha$ sugárzásra vonatkoznak; $\theta = \frac{1 + \cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}$



1. rajz.

ból pedig $\frac{2}{3}$ -ot le kell vonni, hogy a tetragonális koordinátákat megkapjuk. A végleges koordináták a $I_{\frac{20}{h}}$ tércsoportban tehát

16 Cs: (f)	$x, x, \frac{1}{2}$,	$x = 0.125$;		
16 Al: (f)		$x = 0.339$;		
32 Si: (g)	x, y, z ;	$x = 0.125$,	$y = 0.411$,	$z = 0.224$;
32 O I (g)		$x = 0.119$,	$y = 0.111$,	$z = 0.653$;
32 O II (g)		$x = 0.131$,	$y = 0.472$,	$z = 0.736$;
32 O III (g)		$x = 0.278$,	$y = 0.139$,	$z = 0.756$.

Az elemi testben levő víz kötése azonban laza és az egyszer eltávolított vizet a pollucit pora nem abszorbeálja újra, holott szerkezetében változás a porfelvétel tanúsága szerint nem történt (STRUNZ, loc. cit.). Ezt a vízmennyiséget az intenzitásoknál számításba venni azonban viszonylagosan csekély szóróképesége miatt alig lehet. Megjegyzendő még az is, hogy a tetragonális szerkezetben csekély paraméter-módosítással elérhető az, hogy az Al-O távolság kissé nagyobb legyen a Si-O távolságnál,

mely a köbös szerkezetben azonos. Az ilyen csekély paraméter-változás azonban a számított F -értékekben sem okozna jelentékeny változást és így kísérletileg nem volna ellenőrizhető, ezért a pszeudoköbös koordináták tetragonális rendszerben lehetséges módosításától eltekintettem.

Miután a pollucit szerkezete a számított és talált intenzitások jó egyezése folytán biztosítottnak látszik, felmerül az a kérdés, hogy vajjon tényleg különbözik-e a pollucitban és az analcitban az alkálifém-ionok és a vízmolekulák elhelyeződése. Meg kell tehát vizsgálni azokat az érveket, amelyeknek alapján TAYLOR a 16 Na-iont és a 16 vízmolekulát az általa megadott helyekre tette. A nátriumionok és a vízmolekulák szóróképessége ugyanis kevésbé különbözik, úgyhogy ennek alapján nem is lehetett volna a kérdést szabatosan eldönteni. TAYLOR a nátriumionok számára a (b) pozíciót azért nem tartja megfelelőnek, mert ekkor távolságuk az őket körülvevő 12 oxigéniontól $3\cdot50 \text{ \AA}$ volna, holott az ionok «sugarainak» összege ennél lényegesen kisebb, mert 6-os koordinációban GOLDSCHMID szerint $2\cdot30 \text{ \AA}$. Itt azonban nem 6-os, hanem 12-s koordinációval van dolgunk és ilyen esetben a távolságok lényegesen nagyobbak is lehetnek; így pl. az α carnegieitben (NaAlSi_4) mely ugyancsak pszeudoköbös, a Na-ionok átlagos távolsága az őket körülvevő 12 O-iontól $3\cdot06 \text{ \AA}$.¹ Másik érve TAYLORNak az, hogy az analcitból tömény AgNO_3 oldattal való hevítés útján előállítható ezüst-analcit, amelyben a nátrium ezüsttel van kicserélve, az ő általa javasolt szerkezetnek megfelelő reflexióintenzitásokat mutat. Ehhez meg kell jegyezni azt, hogy itt csak porfelvétel lehetséges, amely aránylag kevés felhasználható reflexiót mutat (20 vonal) és ezek közt is van 6—8, amely nem jól egyezik a számított intenzitással. Azonban sokkal súlyosabb kifogás az, hogy semmivel sem bizonyítható, hogy az ezüst a komplikált rácsban csakugyan pontosan a nátrium helyét foglalja el, mikor különböző elhelyezkedési lehetőségek állanak rendelkezésére. Ami pedig TAYLORNak víztelenített analcitról készített felvételét illeti, a felhasznált 21 reflexiónál észlelhető csekély intenzitás-változás

¹ Z. f. Kristallographie. Strukturbericht 2, 1928—32. 158. o.

megint nem elegendő ahhoz, hogy biztos következtetést vonjunk le belőle a vízmolekulák pozíciójára nézve. Így tehát az analcitra nézve is teljesen fennáll az a lehetőség, hogy benn a Na -ionok és a vízmolekulák helyzete TAYLOR szerkezetéhez képest fel van cserélve. Az alábbi kis táblázat mutatja, hogy az új, pollucithoz hasonló szerkezettel éppoly jól egyező intenzitásokat kapunk, mint TAYLOR szerkezetével:

hkl	F Taylor	F új	Int Taylor	hkl	F Taylor	F új	Int Taylor
112	174	169	5-6	136	-51	-17	1
220	-105	-97	4	444	-29	-29	1
132	45	21	1	354	44	44	1
400	-692	-732	10	640	212	186	4
420	-26	-4	0	336	-183	-191	3-4
332	299	305	6	552	-53	-61	0
224	90	76	3	172	77	85	1-2
134	-99	-99	3	246	-31	-41	1
152	-124	-94	3	372	-192	-228	4
440	191	239	4	156	162	126	2-3
352	-79	-85	2	800	458	458	8
116	-111	-105	3	174	119	119	3
620	44	57	1-2	820	-75	-75	3
154	31	31	1	660	143	-129	3

A többi reflexióknál a különbség még csekélyebb lesz. — Ezek szerint tehát az analcit szerkezete éppúgy lehet a pollucithoz teljesen hasonló, mint ettől eltérő és a TAYLOR-félével azonos. Van azonban egy érdekes kísérleti tapasztalat, mely a pollucithoz hasonló szerkezetet támogatja. Az analcit sokszor mutat «optikai anomáliát» vagyis pseudoköbös alakja ellenére kettős törést. A csiszolatok ilyenkor több szektorra bomlanak a polárizált fényben. Vízgőzben való hevítés ezt az anomáliát eltünteti és a kristály teljesen izotróppá válik. Ezt úgy magyarázhatjuk, hogy az optikai anomáliát az okozza, hogy a víz egy 24-es helyzetet csak részben

tölt ki az ilyen kettősen törő analcitrkristályban. Ha vízgőzben hevítjük a kristályt, akkor a hiányzó vízmennyiséget felveszi és ezáltal rácsszerkezete már csak a *Si* és *Al* ionok közti különbség következtében tér el a valóban köbös szerkezettől, ez azonban oly csekély különbség, hogy az optikai úton ki nem mutatható.

A megadott pollucit-szerkezetben a *Cs* távolsága 12 *O*-tól 3·50 Å, a *Si-O* (ill. *Al-O*) távolság 1·60—1·63 Å, az *O—O* távolságok 2·60—2·62 Å közt mozognak, ami az ismert ionátmérőkkel jó egyezésben van.

PÓCZA JENŐ és SASVÁRI KÁLMÁN uraknak segítségéért e helyen is köszönetemet fejezem ki. Hálás köszönettel tartozom a Széchenyi Tudományos Társaságnak, a Rockefeller-Alapnak és a szegedi Természettudományi Kutatási Bizottságnak munkám anyagi támogatásáért.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. ápr. 11-én tartott üléséből.)

DIE STRUKTUR DES POLLUCITS $CsAlSi_2O_6 \cdot xH_2O$.

Von ST. v. NÁRAY-SZABÓ.

Pollucit kristallisiert pseudokubisch in der Raumgruppe C_{4h}^{10} mit $a=13.74 \text{ \AA}$. Die Struktur wurde an einem Einkristall von Elba durch Schwenkaufnahmen untersucht. Es ergab sich ein räumliches *Si-Al-O*-Gerüst ebenso wie im Analcit nach TAYLOR, doch nehmen im Pollucit die *Cs*-Ionen die Stellen $(b) \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8}$ ein. Koordinaten s. im ungarischen Text. Etwa 70 beobachtete Reflexionsintensitäten stimmen mit den berechneten gut überein. — Es werden verschiedene Gründe dafür angegeben, dass Analcit die gleiche Struktur (auch betreffend der Lagen der Natriumionen) wie Pollucit hat.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. Apr. 1938.)

A KRYOLITH Na_3AlF_6 SZERKEZETE.

NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN- és SASVÁRI KÁLMÁN-tól.

Néhány évvel ezelőtt MENZER (1) meghatározta a kryolith elemi testét és tércsoportját, sőt megadott egy teljes szerkezetet is, a nélkül azonban, hogy ezt a szerkezetet bármiféle kísérleti adatokkal támogatta volna. MENZER kryolith-szerkezetét az irodalom súlyos kritika tárgyává tette (2, 3) és így kívánatosnak látszott ennek a fontos ásványnak szerkezetét újabb, alapos vizsgálat tárgyává tenni.

Vizsgálatunk céljára egy kb. 2·5 mm hosszú és 1 mm széles, víztiszta grönlandi kryolith-kristályt használtunk fel, amelyen az (110), (011) és (001) lapok jól ki voltak fejlődve. A kristály átengedéséért e helyen is hálás köszönetünket fejezzük ki dr. Zsivny Viktor úrnak, a Magyar Nemzeti Múzeum igazgató-őrének.

A kryolith KRENNER JÓZSEF (4) szerint monoklin holoéderez szimmetriájú, tengelyaránya:

$$a : b : c = 0\cdot96625 : 1 : 1\cdot38824,$$
$$\beta = 90^\circ 11'.$$

A (001) lapra merőlegesen beeső sugárnyalábbal készített LAUE-felvétel valóban monoklin szimmetriát mutat.

További vizsgálataink céljára oszcillációs felvételeket készítettünk molybdaen $K\alpha$ -sugárzással a három tengely, továbbá az [110] irány körül. Az egyes felvételek 15° -os oszcillációval készültek, lehetőleg teljesen azonos körülmények között. A felvételeket BERNAL grafikus módszerével értékeltük ki, a kapott tengelyhosszúságok

$$\begin{aligned}
 a &= 5.46 \text{ \AA} & V &= 239.0 \text{ \AA}^3, Z = 2.034 \sim 2 \\
 b &= 5.61 & \beta &\sim 90^\circ \\
 c &= 7.80 & \text{Számított sűrűség } d_{\text{r}} &= 2.899.
 \end{aligned}$$

A tengelyarány

$$a : b : c = 0.9725 : 1 : 1.390,$$

amely a kísérleti hibák határain belül jól egyezik KRENNER adataival.

A [110] irány körül készült felvételekből kapott identitás-távolság $I_{110} = 7.70 \text{ \AA}$, a számított pedig 7.82 \AA ; ebből következik, hogy a (001) lap nincsen centrálva.

Mint hogy a kryolith abszorpciója a $Mo K\alpha = 0.710 \text{ \AA}$ hullámhosszúságra már csekély, a reflexiók megfigyelt intenzitásai megbízható értékeket adnak. A talált reflexiók az 1. táblázatban vannak összefoglalva, ahol $\theta = (1 + \cos^2 2\vartheta)/\sin 2\vartheta$, F a reflexiónak az általunk meghatározott szerkezet alapján kiszámított strukturamplitudója, tehát $F^2\theta$ a számított intenzitás (önkényes egységekben) és I_b a reflexió vizuálisan becsült intenzitása.

A talált reflexiók jegyzékéből látható, hogy a (0k0) reflexiók csak $k =$ páros esetében lépnek fel, a (h0l) reflexiók pedig csak akkor ha $h + l$ páros. Ezek a kioltások a $C_{2h}^5 - P2_1/n$ tércsoportra jellemzők (feltéve természetesen, hogy a kristály a holoéderes osztályba tartozik, ami ellen semmiféle adat sem szól). MENZER viszont azt állítja, hogy a tércsoport C_{2h}^1 vagy C_{2h}^2 , ami csak akkor volna lehetséges, ha a (h0l) sorozatban észlelt kioltást nem a tércsoport sajátosságai, hanem az atomkoordinátáknak speciális értékei okoznák. A MENZER által megadott koordinátákkal azonban a (h0l) sorozatban $h + l$ páratlan reflexióknál általában nem kapunk zérus intenzitást; viszont az ő koordinátaival zérus volna minden (0kl) reflexió intenzitása, ha k vagy l páratlan, továbbá minden (hk0), ha $h + k$ páratlan stb. Mint az 1. táblázatból látható, számos esetben lépnek fel olyan (0kl) és (hk0) reflexiók, amelyek a MENZER-féle szerkezet valósága esetén hiányozni kellene. Nyilvánvaló tehát, hogy ez a szerkezet hamis.

1. Táblázat.

A kryolith reflexióinak számított és vizuálisan becstelt intenzitásai.

hkl	$\sin\theta$	$\frac{\sin\theta}{\lambda}$	θ	F	$F^2\theta \cdot 10^{-3}$	I_b
200	131	185	7.55	+ 53	21.2	12
400	263	370	3.5	+ 40	5.7	6
600	395	556	2.0	+ 27	1.5	3
800	526	740	1.35	+ 11	0.16	1
1000	658	926	1.05	+ 9	0.1	0.5
020	127	178	7.7	+ 45	15.6	12
040	254	358	3.6	+ 30	3.24	5
060	381	536	2.15	+ 9	0.17	2
080	507	715	1.45	+ 4	0.03	0.5
0100	634	894	1.0	- 1	0	0
002	091	129	11.0	+ 26	7.4	9
004	182	256	5.25	+ 92	44.4	20
006	274	386	3.3	- 3	0.03	3
008	366	516	2.3	+ 22	1.1	3
0010	457	644	1.7	+ 1	-	0.5
0012	548	772	1.3	+ 8	0.1	0
110	091	128	11.0	+ 24	6.4	10
120	143	201	6.9	+ 25	4.3	7
210	146	205	6.7	- 42	11.8	10
220	183	258	5.25	+ 77	31.0	20
130	201	284	4.7	+ 33	5.1	9
310	207	292	4.6	+ 20	1.8	3
230	231	326	4.0	+ 3	0.04	0.5
320	235	331	3.9	- 20	1.6	4
140	262	370	3.5	- 25	2.2	8
410	270	381	3.4	+ 8	0.2	3
240	286	404	3.15	+ 31	3.0	6
101	080	113	12.6	+ 20	5.0	10
101	080	113	12.6	+ 13	2.1	7
103	152	214	6.3	+ 37	8.6	12
103	152	214	6.3	- 45	12.7	12
202	160	226	6.0	- 33	6.5	9
202	160	226	6.0	- 45	12.2	15
301	203	228	4.7	- 21	2.1	6
301	203	228	4.7	+ 16	1.2	1
204	225	317	4.15	+ 66	18.0	15
204	225	317	4.15	+ 29	3.5	6
105	238	335	3.9	+ 25	2.4	4
105	238	335	3.9	- 20	1.6	3
303	241	339	3.85	+ 18	1.2	3
303	241	339	3.85	- 4	0.06	2

1. Táblázat. (Folytatás)

hkl	$\sin\theta$	$\frac{\sin\theta}{\lambda}$	θ	F	$F^2\theta \cdot 10^{-3}$	I_0
011	078	110	12.8	+ 21	5.6	10
012	111	157	9.0	- 9	0.7	0
021	135	190	7.3	- 7	0.4	0.5
013	151	213	6.4	- 5	0.2	4
022	156	220	6.2	- 34	7.2	9
023	187	263	5.1	- 18	1.7	4
014	193	273	4.95	+ 17	1.4	3
031	196	276	4.9	- 5	0.1	1
032	211	298	4.5	- 15	1.0	3
024	222	313	4.4	+ 49	10.5	15
033	234	330	3.9	- 15	0.9	3
015	237	335	3.9	+ 28	3.0	4
025	262	368	3.5	- 9	0.3	1
016	281	397	3.5	- 5	0.1	0.5
111	102	144	9.6	- 13	1.6	3
11 $\bar{1}$	102	144	9.6	+ 15	2.2	4
112	129	182	7.6	+ 38	11.0	15
11 $\bar{2}$	129	182	7.6	+ 39	11.6	15
121	150	211	6.4	- 23	3.4	8
12 $\bar{1}$	150	211	6.4	+ 9	0.5	6
211	153	215	6.35	- 22	3.1	10
21 $\bar{1}$	153	215	6.35	+ 17	1.8	5
113	165	232	5.85	+ 42	10.0	10
11 $\bar{3}$	165	232	5.85	- 22	2.8	4
122	170	240	5.65	+ 21	2.5	5
12 $\bar{2}$	170	240	5.65	+ 41	9.5	10
212	172	243	5.55	- 19	2.0	4
21 $\bar{2}$	172	243	5.55	- 20	2.2	4
221	188	267	5.1	+ 8	0.3	3
22 $\bar{1}$	188	267	5.1	- 16	1.3	3
213	200	282	4.75	- 12	0.7	2
21 $\bar{3}$	200	282	4.75	- 22	2.3	4
114	204	288	4.6	+ 25	2.8	7
11 $\bar{4}$	204	288	4.6	+ 6	0.2	1
222	204	288	4.6	- 5	0.1	1
22 $\bar{2}$	204	288	4.6	+ 34	5.3	10
131	206	291	4.6	- 29	3.9	7
13 $\bar{1}$	206	291	4.6	+ 56	14.4	12
311	212	300	4.45	- 39	6.8	9
31 $\bar{1}$	212	300	4.45	+ 2	0.02	1

A $C_{2n}^5 - P_{2,1}^2$, n térsoport strukturfaktora általános esetben

$$A = 4 \cos 2\pi \left(hx + lz + \frac{h+k+l}{4} \right) \cos 2\pi \left(ky - \frac{h+k+l}{4} \right).$$

Tekintve, hogy h , k és l egész számok, a képlet a következő módon egyszerűsíthető:

$$A = \begin{cases} -4 \sin 2\pi (hx + lz) \sin 2\pi ky, & \text{ha } h+k+l \text{ páratlan,} \\ 4 \cos 2\pi (hx + lz) \cos 2\pi ky, & \text{ha } h+k+l \text{ páros.} \end{cases}$$

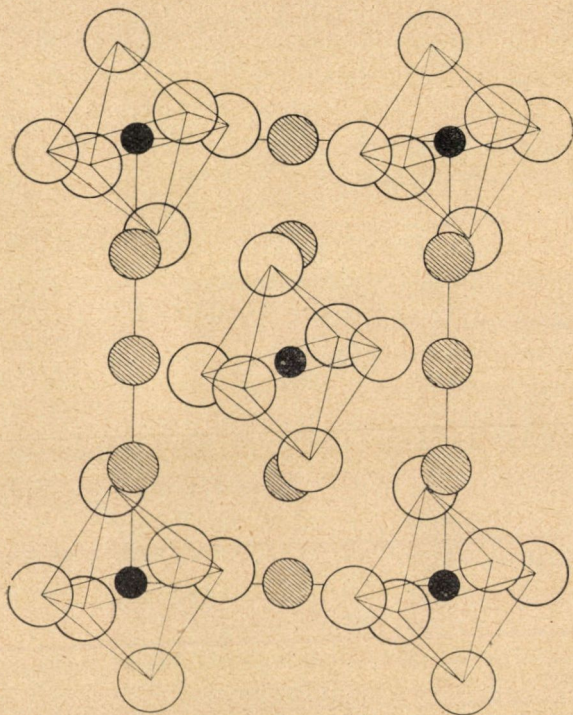
Most már felmerül az a kérdés, hogy miként lehet az elemi testben levő 2 molekulát, vagyis 2 Al , 6 Na és 12 F iónt elhelyezni oly módon, hogy a kordinátaikkal számított intenzitások megegyezzenek a talált intenzitásokkal. A $C_{2n}^5 - P_{2,1}^2/n$ térsoportban kettős és négyes ponthelyzetek vannak; előbbieket a szimmetriaközpontokban, utóbbiak általános helyzetben:

$$\begin{aligned} 2: & (a) 000, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}; (b) 0\frac{1}{2}0, \frac{1}{2}0\frac{1}{2}; (c) 00\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\frac{1}{2}0; (d) \frac{1}{2}00, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \\ 4: & xyz; \bar{x}\bar{y}\bar{z}; \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z; \frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z. \end{aligned}$$

A két Al ión tehát csak szimmetriaközpontokban lehet, ugyancsak kettő a Na iónok közül is; meghatározandó tehát 4 Na és 12 F ión helyzete.

Tekintettel a sok meghatározandó paraméterre, csak úgy remélhetünk eredményt, ha az intenzitásokon kívül felhasználjuk az iónok átmérőinek ismert adatait, ami teljesen jogosult.

Kiindulásul elhelyezzük az Al iónokat az (a) helyzetben; hogy a 2 Na ión ezektől lehetőleg távol legyen, a (c) helyzetbe tesszük őket. Az $Al-F$ távolság az ismert iónátmérők alapján mintegy 1.80 Å, a $Na-F$ távolság 2.20 Å. Ha most ezekkel a távolságokkal gömböket vonunk a 2 Al és 2 Na ión középpontjai körül, akkor ezen gömbök metszésvonalain lesz a F iónok mértani helye. Figyelembe véve még azt is, hogy a F iónok egymástól való távolsága mintegy 2.60 Å legyen, kiválaszthatjuk a lehetséges helyzeteket, amelyek persze bizonyos határok közt mozognak. Hosszas intenzitás számítások segítségével meghatároztuk azokat a koordinátákat, amelyek a legjobb egyezést adták a gondosan becsült, talált reflexióintenzitásokkal. Az illeszkedés ebben a kristályban igen szoros, amit már az elemi test



1. ábra.

térfogatából is látunk, mert a 12 F és az ugyancsak nagy 6 Na íont összefoglalva, egyre-egyre csak $13\cdot28 \text{ \AA}^3$ térfogat esik.

Számításaink végeredménye az, hogy a 4 Na , továbbá a 12 F íon általános pozíciókban foglal helyet és az íonkordináták a következők:

$$\begin{array}{ll}
 2 Al & 000; & 4 F_I & (0\cdot065, 0\cdot06, 0\cdot22); \\
 2 Na_I & 0, 0, 0\cdot50; & 4 F_{II} & (-0\cdot29, 0\cdot16, 0\cdot03); \\
 4 Na_{II} & (0\cdot50, -0\cdot55, 0\cdot24); & 4 F_{III} & (0\cdot15, 0\cdot28, -0\cdot006).
 \end{array}$$

A talált szerkezet szerint a kryolith nátriumíonokból és komplex AlF_6 íonokból épül fel, utóbbiak majdnem szabályos

¹ Számításainkban a BRAGG és WEST által megadott empirikus szóróképességeket használtuk (5).

oktaédereket alkotnak, amelyek középpontjában foglal helyet az aluminium. Az $Al-F$ távolság 1.79, 1.82 és 1.83 Å, ami jó egyezésben van az eddig talált értékekkel; pl. kryolithionitban $Na_3Al_2Li_3F_{12}$, amely a szabályos rendszerben kristályosodik gránáttal azonos szerkezettel, az $Al-F$ távolság 1.80 Å (6). Az oktaédereken belül a fluoriónak távolságai egymástól 2.505, 2.56, 2.566 és 2.62 Å.

A szimmetriaközpontokban levő $2Na$ iónt $6F$ ión veszi körül majdnem szabályos oktaéder alakjában, az $Na-F$ távolságok itt 2.233, 2.233, 2.235, 2.235, 2.32 és 2.32 Å. Az általános helyzetben levő nátriumionokat hat fluorión veszi körül szabálytalan módon, távolságaik a nátriumiótól 2.21, 2.34, 2.35, 2.466, 2.47 és 2.68. Å. Két másik fluorión 2.78 és 2.88 Å távolságban található.

Megjegyezzük itt, hogy a MENZER által ajánlott szerkezet a távolságok szempontjából is hibás, mert pl. a $F-F$ távolságok azonos oktaéderben 2.24 és 3.3 Å, mindegyik teljesen kivülesik a lehetséges határokon (2.50–2.70 Å) egy $Na-F$ távolság pedig 2.06 Å, ami ugyancsak túl kicsi.

Szerkezetünket az 1. rajz mutatja, amelyen jól láthatók az AlF_6 oktaéderek. Az aluminiumionokat kis, fekete körök, a nátriumionokat középnagy, sraffozott körök és a fluoriókat nagy, üres körök ábrázolják.

Munkánk a Széchenyi-Társaság és a Rockefeller-Alap támogatásával készült.

Irodalom.

1. MENZER, Fortschr. Miner. 13, 56. (1929).
2. EWALD—HERMANN, Strukturbericht 1913—28. 793. o.
3. WYCKOFF, The Structure of Crystals II. ed. 308. o.
4. KRENNER, N. Jahrb. f. Miner. 1877, 504.
5. BRAGG, WEST, Z. f. Kristall. 69, 118. (1928.)
6. MENZER, u. o. 75, 265. (1930).

DIE STRUKTUR DES KRYOLITHS Na_3AlF_6 .

Von St. v. NÁRAY-SZABÓ und K. SASVÁRI.

Die von MENZER für Kryolith angegebene Struktur ist wegen der unzutreffenden Wahl der Raumgruppe falsch. Eine Neubestimmung ergab $a=5.46 \text{ \AA}$, $b=5.61 \text{ \AA}$, $c=7.80 \text{ \AA}$, $\beta = 90^\circ 11'$, Raumgruppe $C_{2h}^5 - P2_1/n$, $d_{r\ddot{o}} = 2.899$. Die Struktur besteht aus oktaederförmigen AlF_6^- -Ionen und zwei Arten von Na -Ionen, Parameterwerte s. im ungarischen Text. Die berechneten und gefundenen Intensitäten zeigen gute Übereinstimmung (Tabelle 1).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dec. 1937.)

A HESPERIDINNEK ÉS A NEOHESPERIDINNEK SZERKEZETE.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

A hesperidint először az éretlen narancs és citrom héjából különítették el.¹ Később kiderült, hogy a legkülönbébb növény-családok képviselőinek részeiben fellelhető kisebb, nagyobb mennyiségben és egyike a legelterjedtebb glükozidoknak.² Legkényelmesebb anyaga az előállításának az éretlen keserű narancs.

A hesperidin szerkezetére vonatkozólag megjelent nagyszámú kutatás közül csak azokat sorolom fel, amelyek jelen dolgozatomnál közvetlenül fontossággal bírnak. WILL³ megállapította, hogy a hesperidin savas hidrolízis hatására a *hesperetin*nek nevezett aglükonon kívül *rhamnóz*-t és *glükóz*-t szolgáltat. E. KING és A. ROBERTSON⁴ megmethylezték a hesperidint, és a methylterméknek hidrolízise útján igyekeztek a szerkezetét megállapítani. Methyltermékük methoxyltartalma csak 32·4% volt a számított 42·13%-al szemben, jelölül annak, hogy csak az aglükon methyleződött meg teljesen, a cukorrész nem. Ennek következtében vizsgálataik csak az aglükon szerkezetére vonatkozhattak. Ennek alapján a methylezett aglükonra nézve a következő szerkezet adó-

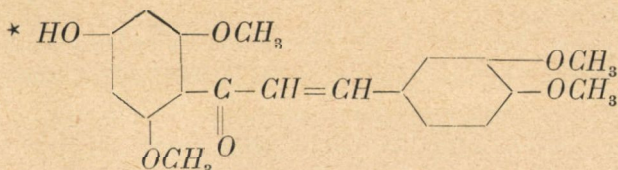
¹ LEBRETON Journ. d. Pharmacie 14, 377 (1828).

² G. KRAUS, Jahrbuch f. wissenschaft. Botanik 8, 421 (1872); PFEFFER: Botanische Zeitung 32, 534 (1874); MICA: Just. Botan. Jahresbericht 1878 I 20.; MEYER: Abh. Naturforscher Ges. Halle 15, 452 (1882); MODRAKOWSKY: Poln. Atchiv f. biol. u. med. Wiss. 1905. III.; HARTWICH: Archiv f. Pharm. 62, 821 (1883); Részletes irodalmi adatgyűjtemény a hesperidin előfordulásáról: O. A. OESTERLE és G. WANDER Helv. chim. Acta VIII. 519 (1925), továbbá G. WANDER zürichi doktori értekezés 1925.

³ WILL: Bez. d. Deutsch. Chem. Ges. 20, 1186 (1887).

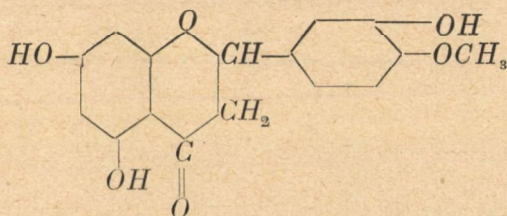
⁴ KING és ROBERTSON: Journ. chem. Soc. London 1931, 1704.

dott ki, (I.) mely azt bizonyítja, hogy a rhamnóz és glükóz a hesperidinben egy bióz formájában van kötve és hogy ez a bióz a magon a csillaggal jelölt helyen kapcsolódik glükozidszerűen az aglükonhoz.

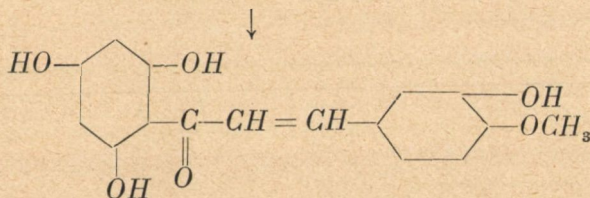


I. Trimethylhesperetin.

Az eredeti hesperidinben azonban az aglükon nem az előző képletben megadott chalkon formában van jelen, hanem a flavonformában¹ (II) amely a methylezés folyamán a lúg hatására alakul chalkonná, amint az a következő képletekből (III) látható :



II. flavonformája a hesperetinnek.



III. chalkonformája a hesperetinnek.

Jelen vizsgálatok célja volt a bióz szerkezetének megállapítása, ami egyszersmind a hesperidin szerkezetének teljes tisztázásához vezetessen. Ezt a célt kétféle úton igyekeztem elérni. Először meg-

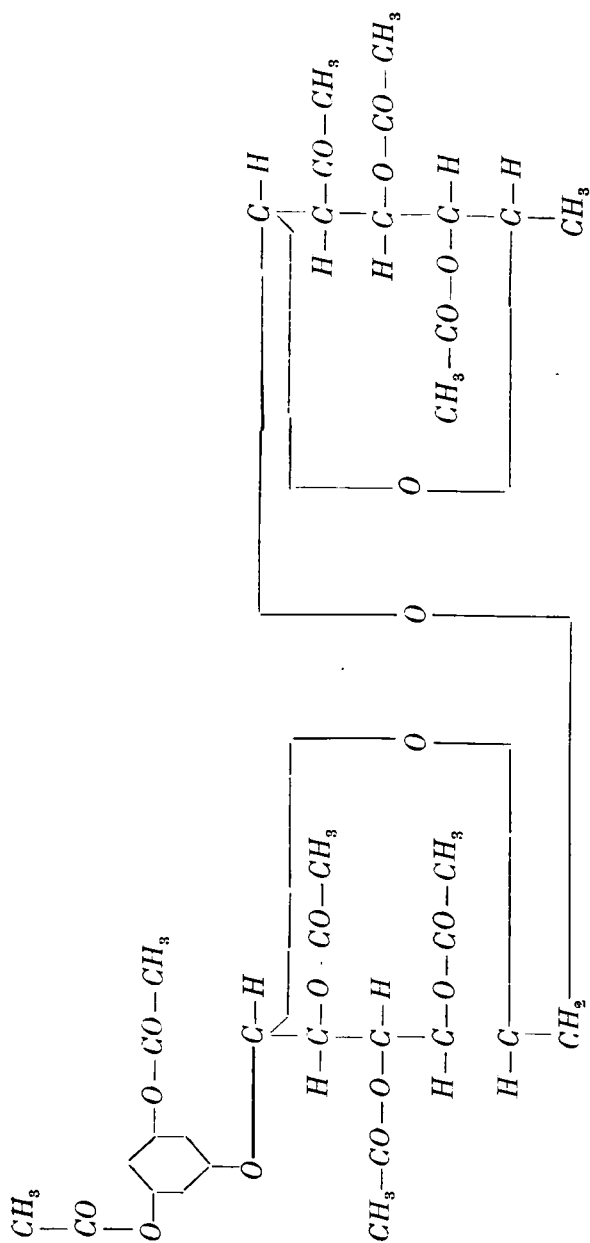
¹ ASAHINA és INABUSE: Journ. chem. Soc. Jap. 49, 11 (1929); ASAHINA, SHINODA és INABUSE: Journ. chem. Soc. Jap. 48, 207 (1928); Chem. Zentralbl. 1929 I. 2429.

methyleztem a hesperidint dimethylsulfattal és lúggal, majd hosszabb időn keresztül és ismételten jódmethyllel és ezüstoxidral amíg a termék methyltartalma a legmagasabb értéket elérte. Ez sikerült is, és a methylezett terméket kristályos állapotban is kinyertem.

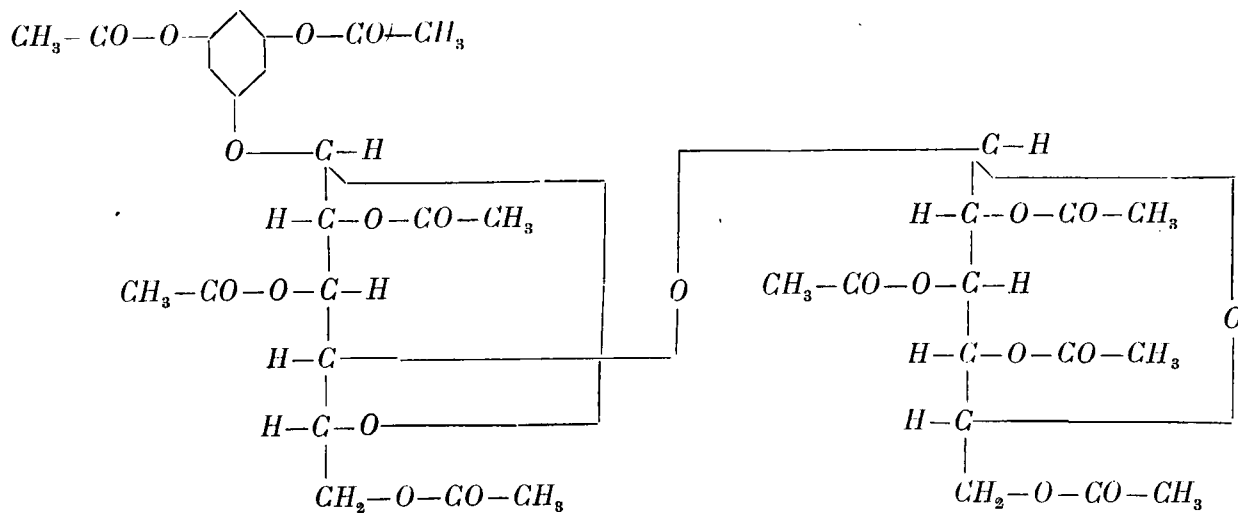
A teljesen methylezett terméket savas hidrolízisnek alávetve a methylezett monószok forgatóképességének és redukciójának összehasonlítása a rutinból nyert methylezett terméknek hidrolízis után nyert methylezett monózaival, arra az eredményre vezetett, hogy a hesperidinben a bióz azonos a rutinban jelenlévő *rutinózzal*. Az azonosság a következő adatokból világlik ki, ahol még a rutinóz methylezése útján és annak hidrolízise alkalmával nyert termékek adatai is össze vannak foglalva, egyszersmind a neohesperidinre vonatkozó értékek. A hidrolíziseket 50%-os ecetsavval végeztem, melyben 5%-nyi sósav volt oldva, forralás útján. A hidrolízis tartamát az órák fejezik ki.

	2 óra		4 óra		6 óra	
	$[\alpha]_D$	red %	$[\alpha]_D$	red %	$[\alpha]_D$	red %
Methylezett rutinóz	39·43°	9·66	36·73°	9·44	—	—
Methylezett rutin	38·12	9·53	39·75	10·86	38·58	9·47
Methylezett hesperidin	41·63	8·60	37·32	6·92	—	—
Methylezett neohesperidin	44·35	22·24	40·82	22·86	—	—

A másik út melyet a bióz szerkezetének felderítése céljából követtem, a hesperidinnek báriumhidroxiddal való bontása, amely a rutinózphloroglucinglükózidjához vezetett. A vegyület maga, sem pedig acetatja (IV) nem volt kristályosan kinyerhető. De összetétele és tulajdonságai azt mutatják, hogy a várt termékről van szó. Összehasonlításképpen előállítottam a még ismeretlen



IV. rutinóz- β -phloroglucid-acetat, phloroglucin- β -rutinosid-acetat.



V. cellobióz- β -phloroglucidacetat, phloroglucin- β -cellobiozid-acetat.

phloroglucin- β -cellobiozidacetatot (V) és ennek adataiból számítottam ki a *phloroglucin-rutinozidacetat* forgatóképességét, a következő módon, a molekuláris forgatóképességek: $[\alpha]_M$ igénybevételel:

α -Acetobromrutinóz: $[\alpha]_D^{18} = +90,68^\circ$ chloroformban. (Lásd Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. 70, 1100 (1937)). Mol. súly: 641,18; $[\alpha]_M = +58,150$.

α -Acetobrom cellobióz: $[\alpha]_D^{19} = +90,5^\circ$ chloroformban. (Lásd Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. 62, 988 (1929)). Mol. súly: 699,32; $[\alpha]_M = +63,300$.

Enneaacetyl-phloroglucin- β -1-cellobiozid: $[\alpha]_D^{20} = -36,0^\circ$ chloroformban. (Lásd jelen dolgozat kísérleti részét a 694. lapon.)

Mol. súly 828,52; $[\alpha]_M = -29,800$. Ezen adatok alapján a baritos bontásnál nyert *Oktaacetyl-phloroglucin- β -1 rutinóz* moláris forgatása kiadódik a következőképen:

$$[\alpha]_M = -29,800 - 63,300 + 58,150 = -34,950.$$

$$M = 770,3; [\alpha]_D = -\frac{34,950}{770,3} = -45,37^\circ \text{ chloroformban.}$$

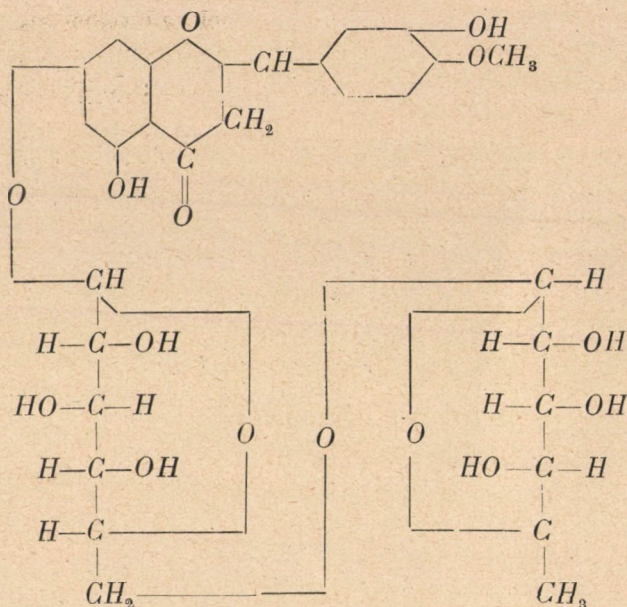
A talált forgatóképesség: $[\alpha]_D^{19} = -44,05^\circ$ chloroformban.

Mindezek alapján a hesperidinnek szerkezete a *hesperetin-rutinozidnak* adódik ki a következő (VI) szimbólum szerint.

A *neohesperidint* nemrégén különítették el ugyancsak az éretlen keserű narancsból.¹ Könnyebben oldódik, s ezért könnyebben tisztítható. Olvadáspontja állandó olvadáspontig tisztítva 244° , forgatóképessége magasabb a hesperidinénél. Összetétele és teljes hidrolízis után nyert komponensei ugyanazok, mint az igazi hesperidinnél, $1/2\%$ -os kénsavas hidrolízisnél azonban másképen viselkedik, mint a hesperidin, amennyiben 2 órai forralás alkalmával rhamnóz szakad le róla és az oldat lehülésekor a hesperetinglükózidja különíthető el. Ezt a lépcsőzetes hidrolízist a hesperidin nem mutatja. Ott csak változatlan hesperidint, vagy végső hidrolízis-termékeket lehetett elkülöníteni, közbeeső terméket nem.

Feladatomból volt eldönteni, hogy szerkezetileg mi a különbség

¹ FINN KOLLE és KRIS. E. GLOPPE: Pharm. Zentralhalle 77, 421 (1936).

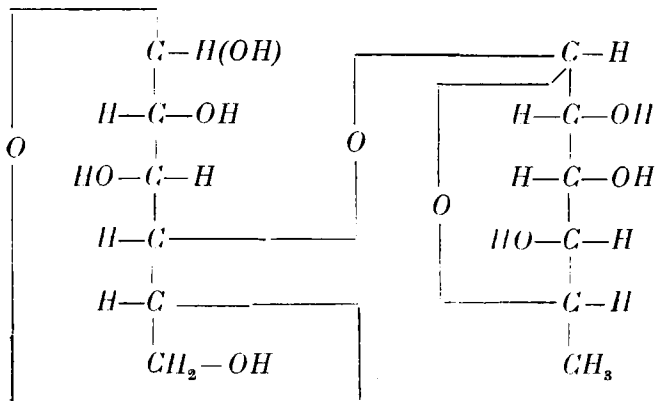


VI. hesperidin, hesperetin-rutinozid.

a két vegyület között. Ismét a methylezést és a methyltermékek hidrolízis útján szolgáltatott termékeit használtam fel, és azoknak tulajdonságaiból következtettem a neohesperidin szerkezetére. A neohesperidin először dimethylszulfáttal majd methyljodid és ezüstoxiddal megmethylezhető a nonamethoxy-vegyületig, melynek talált methoxyltartalma 41·8%, a számított 42·13%-al szemben. Ennek a vegyületnek sósavas, 50%-os ecetsavval való hidrolízissel nyert adatai az előző összeállításban, a hesperidinnél megvannak. Ebből látszik, hogy a neohesperidin erősen kiugrik a sorból hidrolízistermékeinek magas redukálóképességével. Ez a szembeszökően magas redukció, régebben végzett vizsgálataim alapján¹ csakis a 2, 3, 6-trimethylglükóznál volt észlelhető, melynek 4-es hidroxilja szabad, miért is az eddig még ismeretlen bióznak szerkezete minden valószínűség szerint a VII. szimbolumnak felel meg.

¹ GÉZA. ZEMPLÉN és GÉZA BRAUN: Bericht der Deutschn. chem. Gesellschaft 58, 2566 (1925).

A neohesperidinnek első kutatói a közbeeső terméknek, a hesperetinglükozidnak elkülönítésével bebizonyították, hogy, ha a két monóz bióz alakjában van kötve, akkor ebben a monóznak sorrendje ugyanaz mint a rutinóban, vagyis egy rhamnózidoglükózról van szó. Nyitva volt t. i. a másik lehetőség, hogy a monóznak külön-külön hidroxilokhoz kapcsolódnak az aglukonban. Utóbbi lehetőség megdőlt a hidrolizistermékeknek magas redukálóképessége következtében, amennyiben a szőlőcukor 4-es hidroxylja nem viselhet aglukont. E szerint a neohesperidinben egy új rhamnózidoglükóz szerepel, az *1-l-rhamnózido-4-d-glükóz*, melynek szerkezetét a VII. szimbólum fejezi ki és melyet *neohesperidóz* névvel jelölök.



VII. *1-l-rhamnózido-4-d-glükóz* = neohesperidóz.

Ez a neohesperidóz kapcsolódik be glükozidikusan a hesperetinnek valamely szabad hidroxiljához. Hogy melyikhez, az jelen vizsgálatok alapján még bizonytalan.

A kísérletek folyamán szükségem volt a rhamnóznak redukcióstábellájára. Ezt a kísérleti rész végén közlöm.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

Kísérletek hesperidinnel.

Hesperidin methylezése.

A methylezés nagyjában a rutin methylezésénél leírt eljárás szerint történt, azzal a különbséggel, hogy az egyes methylezések időtartamát lerövidítettük. Kiindultunk 5 g hesperidinből, melyet először 10 ccm dimethylsulfattal és 9 g nátriumhidroxiddal methyleztünk 21 ccm víz jelenlétében 3 óra hosszat. A második methylezés ugyanannyi dimethylsulfat és nátriumhidroxid oldattal történt 2 óra alatt, a harmadik kétszeres methylezőszer-adaggal 2 óra alatt, a negyedik ismét a második methylezés megismétlése volt. A chloroformos oldatok maradékát (4, 6 g) tovább methyleztük methyljodidos oldatban aktív ezüstoxidral két ízben 8—8 napig. Az anyagot az ezüstsók közül acetonnal kioldva, az acetonos oldatokat szárazra párolva vákuumban, a visszamaradó szirup meleg acetontól kristályosan vált ki. A leszívott kristálytömeget 20 ccm abs. alkoholból kristályosítottuk át. Termelés 1·2 g színtelen kristályok, melyeknek olvadáspontja 177—180°. A terméket újból átkristályosítjuk 25 ccm forró alkoholból, mire az olvadáspont 180—181°-ra emelkedett és a termelés 1 g-ra súlyed. A termék oldódik meleg methylalkoholban, hidegen kevésbé. Könnyen oldható chloroformban, nagyon nehezen vízben, és benzinben.

$$[\alpha]_D^{27} = - \frac{0.80 \times 10}{0.1988} = - 40.04^\circ \text{ chloroformban.}$$

A termék vákuumpisztolyban 100°-on 5 óra hosszat szárítva következő methylyszámokat adott:

I. 2·600 mg: 7·980 mg. *AgJ.*; II. 2,735 mg: 8·400 mg *AgJ.*; III. 1·750 mg: 5·440 mg *AgJ.*; IV. 1·550 mg: 4·805 mg *AgJ.*

Oktamethylhesperidinre $C_{36}H_{50}O_{10}$ (722·40)-re számított methoxytartalom (9 methyl): 38·65%. Nonamethylhesperidinre $C_{47}H_{52}O_{15}$ (736·42)-re számított methoxytartalom (10 methoxyl) 42·13%.

Talált methoxytartalom: I. 40·55%; II. 40·58%; III. 41·07%; IV. 40·83%.

Methylezett hesperidin hidrolizise.

A) 0·5046 g methylezett hesperidint, mely a hidrolizis után 0·2992 g trimethylglükóz + trimethylrhamnóz-keveréknek felel meg, feloldottunk 5 ccm jégcetben, hozzáadtunk 5 ccm 5%-os sósavat és 2 óra hosszat forraltuk visszacsépegő hűtőn. 10 ccm víz hozzáadása után az aglükon vöröses gyanta alakjában válik ki. A szüredéket 0·1 g carboventtel összerázva $\frac{1}{2}$ óra hosszat állni hagyjuk, majd a szüredéket további 0·1 g carboventtel még egy félórát derítjük. A szüredék majdnem teljesen színtelen.

$$[\alpha]_D^{21} = + \frac{1 \cdot 37 \times 20}{2 \cdot 2 \times 0 \cdot 2992} = + 41 \cdot 63^\circ$$

redukcióképesség: 15 ccm: 6·10 ccm n'_{10} $KMnO_4=0,0193$ g glükóz = 8·60% (glükóz=100).

B) A következő kísérlet 4 órás forralásos hidrolizis volt. Bemérés 0·4972 g, ami megfelel 0·2948 g trimethylmonózkeveréknek. Feldolgozás az előbbivel azonos.

$$[\alpha]_D^{20} = + \frac{0 \cdot 55 \times 20}{0 \cdot 2940} = + 37 \cdot 32^\circ,$$

redukcióképesség: 10 ccm: 3·26 ccm n'_{10} $KMnO_4=0,0102$ g glükóz = 6·92% (glükóz=100).

Hesperidin báriumhidroxidos bontása.

A) 10 g tiszta hesperidint 40 g átkristályosított báriumhidroxiddal és 130 ccm desztillált vízzel bontunk. A hesperidint tartalmazó lombikból 1 óra hosszat kiűzzük először nitrogénnel a levegőt, majd a hűtő tetején beöntjük a báriumhydroxidnak a vízben kiforralt oldatát és vízfürdőn melegítjük. A hesperidin azonnal oldódik élénk vörös színnel. A bontás 12 óra hosszat tartott állandóan nitrogénáramban. Ezalatt az oldat megsötétedett és igen kevés kiválás mutatkozott. A szüredéket 25 ccm 1 rész kénsav és 2 rész víz elegyével megsavanyítjuk kongóra, majd báriumacetáttal a szüredékből pontosan kicsapjuk a kénsav feleslegét és a szüredéket csökkentett nyomás alatt 50 ccm-re pároljuk be. Az oldatot először 15, majd két ízben 10 ccm chloroformmal

kioldjuk és teljesen bepároljuk, majd absz. alkoholban oldjuk, a csekély mennyiségű oldhatatlan részről leszűrjük és az alkoholos oldatot csökkentett nyomás mellett teljesen bepároljuk. A maradék súlya 3·7 g. A phloroglucinrhamnózidoglükozidra (mol. súly 434·2) számított kitermelés 52%. A maradékot megacetilezzük 10 ccm piridin és 15 ccm ecetsavanhidriddel 1 óra hosszat tartó vízfürdőn való melegítés útján, majd a reakciókeveréket 100 cm vízbe öntjük, a vizet többször cseréljük és az oldhatatlan részt szétdolgozzuk. Nyerünk 3·9 g amorf port, mely az oktaacetyl-phloroglucin-rhamnózido-glükozidnak (mol. súly 770,3) felel meg. Kitermelés 30·9%.

Redukcióképesség. Hidrolízis előtt. 0·1024 g: 0·50 ccm $\frac{n}{11}$ $KMnO_4$ = 0·0015 g glükóz = 1·5% (glükóz = 100).

Hidrolízis után. 0·1134 g-ot forralunk 10 cm 5%-os sósavval 2 óra hosszat, redukció 9·8 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ = 0·0317 g glükóz = 28·0% (glükóz = 100).

A vegytiszta anyagra vonatkoztatott számított redukció

$$\frac{(180·1 + 164·09) \times 100}{770·3} = 44·7\%$$

Rhamnóztartalom meghatározása. 0·4562 g adott a TOLLENS-féle módszerrel meghatározva 0·0190 g metylfurfuroolphloroglucidot, ami megfelel 8·05% rhamnóznak. Mivel phloroglucin jelenlétében, amint azt az alábbi kísérletek igazolják, a metylfurfuroolnak egy része mindjárt a forraláskor megkötődik és csak 35% desztillálhat át, ezt az értéket átszámítva, kapunk rhamnózt: 23·0%-ot oktaacetyl-phloroglucin-rhamnózido-glükozidra (770·3) számított rhamnóztartalom: 21·3%.

Forgatóképesség

$$[\alpha]_D^{20} = - \frac{0·82 \times 10}{0·2054} = - 39·92^\circ \text{ acetonban.}$$

B) Az A) kísérlettel teljesen azonos bontást végezve, a termék tulajdonságai a következők voltak:

Redukció. Hidrolízis előtt. 0·1960 g: 0·7 ccm. $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ = 0·0022 g = 1·1% (glükóz = 100).

Hidrolízis után. 0·0958 g: 9·43 ccm $KMnO_4$ = 0·0305 g = 31·85% (glükóz = 100).

Forgatóképesség.

$$[\alpha]_D^{19} = - \frac{0.78 \times 10}{0.2052} = 38.01^\circ \text{ acetonban,}$$

$$[\alpha]_D^{19} = - \frac{0.91 \times 10}{0.2066} = -44.05^\circ \text{ chloroformban.}$$

Hesperidin ecetsavas hidrolizise.

2 g hesperidint 200 ccm 10%-os ecetsavval forralunk és időnként meghatározzuk az oldat redukcióképességét. A számított cukortartalom 56.41%. 63.5 órai forralás után a redukció 12.5%; 193.5 órai forralás után a redukció 20%.

Rhamnózmeghatározás phloroglucintartalmú vegyületekben.

Heptaacetyl-rutinóz, mol. súly 620.29; Phloroglucinacetát, mol. súly 252.1. A kísérleteket úgy végeztük, hogy a heptaacetyl-rutinóz és a phloroglucinacetát mindig molekuláris-arányban legyenek.

1) 0,6198 g rutinózacetát (=0,1638 g rhamnóz) + 0,2522 g phloroglucinacetát. A TOLLENS-féle disztillációnál adott 0.0346 g methylfurfurol-phloroglucidot, ami a számított phloroglucidmennyiségnek csak 35,66 %-a. A többi methylfurfurol már a desztilláció folyamán vegyül a jelenlévő phloroglucinnal és azért nem desztillálható át.

2) 0.3102 g rutinózacetát (=0.0820 g rhamnóz) + 0.1270 g phloroglucinacetát. Adott 0.0130 g methylfurfurolphloroglucidot, ami a számított mennyiségnek 34.18%-a.

Kísérletek neohesperidinnel.**A neohesperidin előállítása.**

1.5 kg durva porrá (dara nagyság) őrölt száraz, éretlen keserű narancsot (*Fructus aurantiae amarae immaturi*) beáztatunk chloroformba, hogy a folyadék éppen ellepje, majd másfél nap múlva az anyagot leszívátjuk, chloroformmal kimossuk és megszáritjuk. Az ily módon zsírtól és az illóolajtól nagyrészt mentesített anyagot állandóan kioldó extraháló készülékben (Soxlet rézapparátus) absz.

alkohollal vonjuk ki 24—24 óra hosszat. Az első 4—5 kioldás eredményét érdemes neohesperidinre feldolgozni, a további vonadékok már csak hesperidint tartalmaznak. Az 1. és 2. oldatot együtt besűrítjük kb. 500 ccm-re. Az oldatból néhány heti állás után nyers neohesperidin válik ki, melyet leszivatás után addig kristályosítunk át 50%-os forró alkoholból, amíg olvadáspontja a 244°-ot eléri. Ugyanígy dolgozzuk fel a többi, még neohesperidint tartalmazó vonadékokat.

A neohesperidinnek részleges és teljes hidrolizise.

1·0060 g neohesperidint 25 ccm 2·5%-os kénsavval visszacsepegtető hűtőn forralunk 2 óra hosszat, majd a meleg oldatot vattán átfuttatjuk, a szüredéket pedig 2 napig állni hagyjuk. A kristályos kiválást leszivatjuk és vákuumexszikkátorban phosphorpentoxyd fölött megszáritjuk (0·6169 g; a számított mennyiség: 0·7940 g). Az anyagot 50%-os alkoholból átkristályosítva kapjuk a tiszta hesperetinglükózidot, vagy glükohesperetint, melyet 130°-nál megszáritunk.

Redukálóképesség hidrolizis után. 0·1020 g-ot 2 óra hosszat forraltunk visszacsepegtető hűtőn 10 ccm 5%-os sósavval; elfogyott 11·69 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4 = 0,0383$ g glükóz = 37·63% (glükóz=100). A számított redukálóképesség 38·8%.

Forgatóképesség hidrolizis után. 0·1018 g-ot 10 ccm 0·5%-os kénsavval hidrolizáltunk 2 óra hosszat. $[\alpha]_D^{20} = +48,2^\circ$, redukálóképesség: 31·31% glükózra számítva. A számított forgatóképesség $[\alpha]_D = +52,5^\circ$.

Az aglükon vizsgálata. A hidrolizis folyamán kivált termék leszűrve és vákuumexszikkátorban phosphorpentoxyd fölött megszáritva 0·0628 g; számított mennyiség 0·0638 g. Olvadáspontja a hesperetinnek megfelelő: 227°.

A neohesperidin methylezése.

10 g neohesperidint a rutinnál leírt módon methyleztünk meg 50 ccm dimethylsulfáttal és 48 g nátriumhidroxiddal 100 ccm vízben. 1 órán belül hozzácepegtettük a dimethylszulfátos neohesperidinhez a lúgnak $\frac{1}{3}$ részét, miközben a kezdeti 10°-ról szoba-

hőmérsékletre emelkedett a vízfürdő hőfoka. Utánna 1½ órán belül hozzácepegtettük a lúg második harmadát, miközben a hőfokot 30 fokon tartottuk. Ezután 2 és fél óra alatt lassan felemeltük a vízfürdő hőfokát 30°-ról 70°-ra és eközben hozzácepegtettük a lúg harmadik részletét. Most rövid időn belül 95—100°-ra melegítettük a fürdőt és ezen a hőfokon tartottuk ½ óra hosszat. Másnap újból methyleztünk 25 ccm dimethylszulfáttal és 24 g nátriumhidroxidnak 50 ccm vízben való oldatával, végül következő nap harmadszori methylezést végeztünk ugyanezekkel az anyagmennyiségekkel. A reakciókeveréket a rutinnál leírt módon dolgoztuk fel. A chloroformos oldat maradéka világossárga üveg szerű tömeg, súlya 10·1 g. Egy mintájának vákuumban 100°-on való megszáritása után a methoxyltartalma 38·65%. Az anyagot tovább methyleztük jódmethyles oldatban aktív ezüstoxiddal 1 hétig, majd a szüredéket feldolgozva nyertünk 8·6 g anyagot, melyből mintát szárítva 100°-nál vákuumban a következő methoxyl tartalmakat állapítottunk meg.

I. 0·0432 g: 0·1372 g *AgJ*; II. 0·0490 g: 0·1544 g *AgJ*;
III. 1·260 mg: 4·015 mg *AgJ*; IV. 2·060 mg: 6·570 mg *AgJ*.

Oktamethoxyneohesperidinre $C_{38}H_{50}O_{15}$ -re számított methoxyl-tartalom (9 methoxyl): 38·65%.

Nonamethoxyneohesperidinre $C_{37}H_{52}O_{15}$ -re számított methoxyl-tartalom (10 methoxyl): 42·13%.

Talált methoxyltartalom: I. 41·97%; II. 41·63%; III. 42·10%;
IV. 42·14%.

Forgatóképesség:

$$[\alpha]_D^{21} = - \frac{3 \cdot 42 \times 10}{0 \cdot 5854} = - 59 \cdot 44^\circ \text{ alkoholban.}$$

A methylezett neohesperidin hidrolizise.

I. 0·5888 g anyagot feloldunk 10 ccm alkoholban. Az oldatból 2 ccm-t 25 ccm 2·5%-os sósavval 6 óra hosszat forralunk visszacepegő hűtőn. A hidrolizis folyamán az oldatok összeöntésekor előálló zavarodás sűrű olajseppé áll össze, amely végig megmarad és levegőn színeződik. A szüredék szolgált polározásra és a redukálc-

képesség meghatározására. Az oldatban levő trimethylmonózok mennyisége 0·0685 g.

$$[\alpha]_D = + \frac{0\cdot30 \times 27}{0\cdot0685 \times 2\cdot2} = + 53\cdot75^\circ$$

redukálóképesség. 20 ccm oldat, mely 0,0507 g methylmonózt tartalmaz, fogyaszt 4·02 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ -ot = 0·0127 glükóz; 25·0% (glükóz=100).

II. Bemérés 0·5786 feloldva 10 ccm alkoholban. Az oldatból 2 ccm-t forralunk 8 óra hosszat 25 ccm 2·5%-os sósavval. A 2 ccm-ben levő methylmonózok súlya 0·0673 g.

$$[\alpha]_D^{22} = + \frac{0\cdot30 \times 27}{0\cdot0673 \times 2\cdot2} = 54\cdot7^\circ$$

redukálóképesség: 20 ccm oldat, mely 0·0499 g methylmonózt tartalmaz, fogyaszt 3,97 ccm $KMnO_4$ -ot = 0,0125 g glükóz; 25,1% (glükóz=100).

Hidrolizisek ecetsavas-vizes közegben. III. 2 órás forralás.

A bemérés volt 0,5040 g, ami megfelel 0,2931 g methylmonóznak. Az anyagot 5 ccm jégcetben oldottuk és 5 ccm 5%-os sósavval 2 óra hosszat forraljuk. Ezután 10 ccm vízzel hígítjuk, mire gyanúsítás, vörösszínű kiválás következik be. Először 1 óra hosszat szobahőmérsékleten derítjük 0·2 g derítőszén hozzáadása után, majd másodszer 0·1 g hozzáadása után,

$$[\alpha]_D^{18} = + \frac{1\cdot43 \times 20}{0\cdot2931 \times 2\cdot2} = + 44\cdot35^\circ$$

redukálóképesség: 10 ccm fogyaszt 11·06 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ -ot = 0·0326 g glükóz; 22·24% (glükóz=100).

IV. 4 órás forralás. Bemérés 0·5054 g = 0·2940 g monóz.

$$[\alpha]_D^{30} = + \frac{0\cdot60 \times 20}{0\cdot2940} = + 40\cdot82^\circ$$

redukálóképesség: 10 ccm fogyaszt 10·36 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ -ot = 0·0336 g glükóz; 22·86% (glükóz=100).

β -Heptaacetyl-rutinóz (β -Heptaacetyl- β -1-*l*-rhamnózido-6-*d*-glükóz) methylezése (Faragó).

250 ccm-es gömblombikban, melyben gyorsjárású keverő mozog, 10 g rutinózacetátot elkeverünk 21 g dimethylszulfáttal, miközben a keveréket jegesvízzel $+10^{\circ}$ -ra hűtjük és 20 g nátriumhidroxidnak 39 ccm vízben való oldatából másfél óra alatt 11 ccm lúgot csepegtetünk hozzá, miközben a keverék szobahőfokot ér el. A keverést most folytatjuk lúgadagolás nélkül 3 óra hosszat szobahőfokon, majd a fürdő hőfokát 30° -ra emelve a fennmaradt lúgot 2 óra alatt belecsepegtetjük. Mikor ennek a lúgnak háromnegyedrésze benne van, lassan emeljük a fürdő hőmérsékletét, úgy hogy a 2 óra eltelte után 70° -os legyen. Most gyorsabban emeljük a fürdő hőmérsékletét és 90 — 100° között tartjuk $\frac{1}{2}$ óra hosszat.

Másnap újból megmethylezzük a keveréket 21 g dimethylszulfáttal és ugyanolyan mennyiségű és összetételű lúggal, mint az első methylezésnél, de a methylezés tartamát 3 óráig csökkentjük. Végül harmadnap a második methylezésnek megfelelő módon harmadszor is methylezünk. A reakciótér levegő helyett az összes műveleteknél nitrogénnel van töltve.

A kivált nátriumszulfátot leszivatjuk, szét dolgozzuk 50 ccm chloroformmal, újból leszivatjuk és ezzel a chloroformmal kioldjuk a vizes oldatot. A műveletet megismételjük egyszer 50, kétszer 40 és egyszer 30 ccm chloroformmal, végül a vizes oldatot még ötször kirázzuk 30—30 ccm chloroformmal. Az egyesített chloroformos oldatokat chlorcalciummal megszáritjuk és a szüredéket vákuumban szárazra pároljuk. Nyerünk 4,7 g halványsárga szirupot.

Most következik a jodmethyllel és ezüstoxiddal való methylezés. Az anyagot feloldjuk 40 ccm jodmethylben és 10 g ezüstoxiddal visszacspegeő hűtőn forraljuk 24 óra hosszat, majd 6 g ezüstoxid hozzáadása után további 24 óra hosszat. Lehülés után a csapadékról az oldatot leszivatjuk, a csapadékot chloroformmal alaposan ki-mossuk és az oldatokat csökkentett nyomáson szárazra pároljuk. A maradék 4,4 g. *Heptamethyl-rutinóz* (I. (Faragó)).

Egy másik kísérletsorozathoz előállítottunk *Heptamethyl-rutinózt* (II. Tettamanti) olyképpen, hogy 5 g rutinózacetátot

10 ccm dimethylszulfáttal és 9 g nátriumhydroxydnak 21 ccm-ben való vizes oldatával methyleztünk meg 4 ízben egymásután ugyan-csak nitrogénatmoszférában. Egy-egy methylezés kezdődött 30°-on és 1,5—2 óra alatt felmentünk a hőfokkal úgy, hogy az utolsó félóra alatt a fürdő hőmérséklete 100°. A feldolgozás úgy történt, mint az I. készítménynél. A további methylezés methyljodiddal és ezüstoxiddal 1 hétig tartott. Nyertünk 2·5 g szirupot (73%-os kitermelés), melyet vákuumpisztolyban 80°-on szárítottunk meg.

Heptamethyl rutinózzal végzett kísérletek.

A heptamethylrutinóz halványárga szirup, amely vízben, methyl- és aethylalkoholban, chloroformban, benzolban könnyen oldódik; meleg petroléterben kissé oldható, lehüléskor olajosan kiválik.

Methoxytartalom meghatározás.

I. *Faragó* jelzésű készítményben:

A) 0·0480 g : 0·1816 g *AgI*; B) 0·0640 g : 0·2474 g *AgJ*.

Heptamethylrutinózra, $C_{19}H_{36}O_{10}$ (mol. súly: 424·29) számított methoxytartalom: 51·19%; talált methoxytartalom: A) 49·88%; B) 50·60%.

II. *Tettamanti* jelzésű készítményben:

C) 1·585 mg : 6·245 mg *AgJ*; D) 2·660 mg : 10·355 mg *AgJ*.

számított methoxytartalom: 51·19%; talált methoxytartalom: C) 52·06%; D) 52·44%.

Forgatóképesség és redukálóképesség meghatározások hidrolízis után.

Vizes oldatban az I. *Faragó* készítménnyel 0·5362 heptamethylrutinóz 10 ccm vízben:

$$[\alpha]_D^{18} = + \frac{0\cdot14 \times 10}{0\cdot5362} = +2\cdot61^\circ \text{ vízben}$$

Az oldat 8 ccm-éhez 15 ccm 5%-os sósavat és 7 ccm vizet adunk, hogy az összsósvartalom 2·5%-os legyen és 2 óra hosszat forraljuk visszacsepegő hűtőn. Az oldatban volt 0·4290 g hepta-

methyrlutinóz, mely hidrolízis után 0·4330 trimethylglükóz + trimethylrhamnózt ad.

$$[\alpha]_D^{19} = + \frac{1\cdot62 \times 30}{0\cdot4330 \times 2\cdot2} = + 51\cdot01^\circ$$

A redukálóképesség meghatározására a fenti oldatnak 20 ccm-ét használtuk, melyben 0·2887 g hidrolizált heptamethylrutinóz van. Ez fogyasztott 10·46 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ -ot = 0·0340 g glükóz = 11,8% (glükóz = 100).

Hidrolízis vizes-alkoholos oldatban az I. Faragó készítménnyel. Erre azért volt szükség, mert a methylezett rutin és a methylezett neohesperidin vízben nem oldódnak és az összehasonlítás csak vizes-alkoholos oldatban volt lehetséges.

A) Heptamethylrutinózból 0·6118 g-ot feloldunk 10 ccm alkoholban:

$$[\alpha]_D^{16} = - \frac{1\cdot3 \times 10}{0\cdot6118} = - 21\cdot25^\circ.$$

Az oldatból 3 ccm-t 25 ccm 2·5%-os vizes sósavval forraltuk 3 óra hosszat visszacsepegő hűtőn. Az oldatban 0·1835 g methylezett rutinóz van forralás előtt. Hidrolízis után pedig 0·1853 trimethyl vegyület keverék:

$$[\alpha]_D^{17} = + \frac{0\cdot67 \times 28}{0\cdot1853 \times 2\cdot2} = + 46\cdot02^\circ.$$

B) A kísérletet megismételtük, hidrolízis előtt: $[\alpha]_a = - 21\cdot25^\circ$, hidrolízis után: $[\alpha]_D = + 46\cdot17^\circ$.

A redukcióképességek meghatározásánál a hidrolizált A) és B) oldatokat használtuk fel.

A) 20 ccm-ben van 0·1311 g heptamethylrutinóz. Hidrolízis után 0·1320 trimethylcukorkeverék.

Ez fogyaszt 2·54 ccm $\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ -ot = 0·008 g glükóz; = 6·05% (glükóz = 100). B)-nél a redukció: 5·86 % (glükóz = 100).

Hidrolízis vizes-ecetsavas oldatban a II. Tettamanti jelzésű készítményben. Ez a kísérletsorozat a hesperidinnél nyert eredményekkel való összehasonlítás miatt volt szükséges.

1. 0·5070 g heptamethylrutinózt, amely megfelel 0·5118 g

trimethylglükóz + trimethylrhannóznak, feloldtunk 5 ccm jég-ecet + 5 ccm 5%-os sósav keverékében és 2 órát forraltuk visszacsépegő hűtőn, majd lehűlés után 10 ccm vízzel való felhígítás után 0.1 g derítőszénnel 1 órát hagytuk hidegen állni, majd a szüredéket megpolároztuk és egy részletében meghatároztuk a redukeiót.

$$[\alpha]_D^{20} = + \frac{2.22 \times 20}{2.2 \times 0.5118} = + 39.43^\circ.$$

Redukció: az oldat 15 ccm-re fogyaszt 11.35 ccm $n_{10} KMnO_4 = 0.0372$ g glükóz; 9.66% (glükóz=100).

2. 4 órai forralás: Bemérés 0.3654 g; ez megfelel 0.3688 g trimethylglükóz + trimethylrhannóznak.

Feldolgozás, mint az előbbi kísérletnél.

$$[\alpha]_D^{21} = + \frac{1.49 \times 20}{2.2 \times 0.3688} = + 36.73^\circ.$$

Redukció: 10 ccm fogyaszt 5.48 ccm $n_{10} KMnO_4$ -ot = 0.0174 g glükóz; 9.44% (glükóz=100).

A rutin methylezése.

A methylezéseket a levegőnek lehetőleg tökéletes kizárásával kell végeznünk, mert lóg hatására a rutin nagyon érzékeny. 10 g rutint megmethylezünk 50 ccm dimethylszulfáttal és 48 g nátriumhidroxidnak 100 ccm vízben való oldatával, mégpedig a következőképen. 5 g rutinhoz hozzáadjuk a dimethylszulfátot, és + 10°-os fürdőben 1 óra alatt belecsepegtetjük erős keverés közben a lúgot 1/3-át, miközben a reakciókeverék szobahőmérsékletre emelkedik. Most adjuk hozzá a második 5 g rutint, 1/2 óráig keverjük tovább, majd a vízfürdő hőfokát 30°-ra emelve 1 1/2 óra alatt belecsepegtetjük a lúg második harmadát. Ezután 2 1/2 óra alatt lassan emeljük a hőfokot 70°-ra miközben az utolsó harmadát a lúgnak belecsepegtetjük a reakciókeverékbe. Most gyorsan 95—100°-ra emelve a fürdő hőfokát, azon tartjuk 1/2 óra hosszat, majd szobahőmérsékletre hűtjük.

A második methylezés teljesen hasonló körülmények között.

történik 25 ccm dimethylszulfáttal és 50 ccm vízben oldott 24 g nátriumhidroxiddal.

A harmadik methylezés a másodiknak pontos ismétlése.

Másnap a nátriumszulfátot leszivatjuk és ugyanolyan körülmények között chloroformozzuk ki, amint az a rutinóz methylezésénél le van írva. A végén nyerünk 8·1 g methylterméket, melynek methoxyltartalma még csak 32% a kívánt theoretikus 41·34% helyett.

A terméket tovább methylezzük 50 ccm methyljodidban oldva 25 g ezüstcarbonáttal való forralás útján 48 óra hosszat. A methoxyltartalom felemelkedik 35%-ra.

A terméket másodszer methylezzük 30 ccm jódmethylben oldva 3 g ezüstcarbonattal való forralás útján. Mindennap újból 3 g ezüstcarbonátot adunk a reakciókeverékhez; összesen 5 napig methylezünk, mire a methoxyltartalom 36·5% -ra emelkedik.

Még kétszer methylezzük a terméket tovább methyljodidban oldva, de ezüstcarbonat helyett HELFERICH—KLEIN-féle aktiv ezüstoxidot használva. Az első ilyen methylezés 1 hétig, a második ismét 1 hétig tartott. Az elsőnek végtermékénél a methoxylszám 39·6%-ra emelkedett, a második methylezés eredménye a következő methoxylszámokat adta:

I. 0·0440 g : 0·1324 g *AgJ*; II. 0·0404 g : 0·1232 g.

Dekamethylrutinra: $C_{37}H_{50}O_{16}$ (mol. súly 750·40) számított methoxyl 41·34%; talált methoxyl I. 39·76% és II. 40·28%.

Ezt a *dekamethylrutin* készítményt I. *Faragónak* nevezzük a következőkben.

Egy másik kísérletsorozatban előállított *dekamethylrutin* a II. *Tettamanti* jelzést viseli. Ez a készítmény úgy állott elő, hogy 10 g rutint 20 ccm dimethylszulfáttal és 42 ccm vízben oldott 18 g nátriumhidroxiddal egymásután háromszor megmethyleztünk, majd egy hétig methyleztük methyljodidos oldatban HELFERICH-féle ezüstoxiddal. Termelés 7·7 g, a számítottnak 62·6%-a. Methoxyl-meghatározásnál a következő értékeket adta:

A) 2·315 mg : 6·590 mg *AgJ*; B) 2·410 mg : 6·910 mg *AgJ*.

Dekamethylrutinra $C_{37}H_{50}O_{16}$ (750·40) számított methoxyl-tartalom: 41·34%; talált methoxyltartalom: A) 37·61%; B) 37·88%.

Újra methyleztük 8 napig methyljodidos oldatban, ezüst-oxiddal, mire a termék már kellőképen megmethyleződött, amint azt a következő eredmények mutatják.

C) 2·895 mg; 9,270 mg *AgJ*; D) 2·610 mg; 8·385 mg *AgJ*.

Dekamethylrutinra számított methoxyltartalom: 41·34%; talált methoxyltartalom: C) 42·31%; D) 42·45%.

A methylezett rutinkészítmények hidrolizise.

A methylezett rutinkészítmények hidrolizise I. Kísérlet az I. Faragó jézésű készítménnyel 0·5346 g methylezett rutint feloldotunk 10 ccm alkoholban. Ennek az oldatnak forgatóképessége:

$$[\alpha]_D^{19} = - \frac{1 \cdot 75 \times 10}{0 \cdot 5346} = - 32 \cdot 75^\circ \text{ alkoholban}$$

Az oldatból 3 ccm-t 25 ccm 2·5%-os sósavval 3 óra hosszat forraltunk visszacsepegő hűtőn. Hidrolizis közben az oldat tetején olajos kiválás mutatkozott, mely lehülés után megdermedt, azonfelül az oldatból még utólag pelyhes csapadék vált ki, mely mikroszkóp alatt kristályosnak mutatkozott. Ennek az oldatnak szűrés után meghatározott forgatóképessége a következő volt. A 3 ccm-ben 0·0907 g heptamethylrutinóznak megfelelő hidrolizált methylmonóznak vannak; ennek alapján a bemérés 0·0915 g methylmonóz. A meghatározás 22 cm-es csőben történt.

$$[\alpha]_D^{19} = + \frac{0 \cdot 36 \times 28}{0 \cdot 0915 \times 2 \cdot 2} = + 50 \cdot 05^\circ.$$

Ugyanebből az oldatból történt a redukálóképesség meghatározása. 20 ccm-re, amely 0·0654 methylezett monóznak felel meg, fogyott 1·36 ccm $\frac{n}{10}$ *KMnO₄* oldat=0·0042 g glükóz. A redukálóképesség tehát 6·4% (glükóz=100).

A kísérlet megismétlése a következő eredményt szolgáltatatta: $[\alpha]_D = +51 \cdot 47^\circ$ és redukálóképesség: 6·7%.

II. *Kísérletek a II. Tettamenti jézésű készítménnyel.*

Ezek a kísérletek nem vizes oldatban, hanem vízzel hígított

ecetsavas oldatban történtek, mivel a methylezett hesperidin csak ilyen körülmények között oldódik, s így az összehasonlítások céljából ezekre az adatokra is szükség volt.

A kísérleteket úgy végeztük, hogy kb. 0·5 g methylezett rutint feloldottunk 5 ccm jégecetben, hozzáadtunk 5 ccm 5%-os sósavat, különböző ideig forraltuk visszacsepegő hűtőn, majd az oldatot felhigítjuk 10 ccm vízzel, mire pelyhes csapadék válik ki. Ennek szüredékét derítés céljából 0·2 derítőszénnel 1, vagy 1·5 óráig hagytuk szobahőmérsékleten állni és a szüredékét megpolároztuk, egy részében pedig meghatároztuk a redukálóképességet.

A) 2 órás forralás eredménye: Bemérés 0·4964 g, ebben van hidrolízis után 0·2833 g trimethylglükóz + trimethylrhamnóz keverék.

$$[\alpha]_D^{18} = + \frac{0\cdot54 \times 20}{0\cdot2833} = + 38\cdot12^\circ.$$

Redukálóképesség: 10 ccm fogyaszt 4·30 ccm. $\frac{n}{10} KMnO_4$ -ot = 0·0135 g glükóz; 9·53% (glükóz=100).

B) 4 órás forralás eredménye: Bemérés 0·4936 g, ebben van hidrolízis után 0·2816 g trimethylglükóz + trimethylrhamnóz keverék.

$$[\alpha]_D^{18} = + \frac{0\cdot56 \times 20}{0\cdot2816} = + 34\cdot75^\circ.$$

Redukálóképesség: 10 ccm fogyaszt 4·86 ccm. $\frac{n}{10} KMnO_4$ -et = 0·0153 g glükóz; 10,86% (glükóz=100).

C) 6 órás forralás eredménye: 0·4996 g, ebben van hidrolízis után 0·2852 g trimethylglükóz + trimethylrhamnóz keverék.

$$[\alpha]_D^{18} = + \frac{0\cdot55 \times 20}{0\cdot2852} = + 38\cdot58^\circ.$$

Redukálóképesség: 10 ccm fogyaszt 4·30 ccm. $\frac{n}{10} KMnO_4$ -ot. = 0·0135 g glükóz; 9·47% (glükóz=100).

Enneaacetyl-phloroglucin- β -1-cellobiosid (V. szimbolum).

6 g acetobromcellobiózt (1 Mol) és 3·3 g vízmentes phloroglucint (2·5 Mol) feloldottuk 45 ccm acetonban és az oldathoz apró részletekben hozzáadtunk 1·5 g káliumhidroxidnak 24 ccm vízben való oldatát.¹ A lúgos oldatból mindig csak annyi jutott a reakciókeverékbe, hogy rázógépen rázva homogén oldat keletkezzék. Az adagolás 6 órát vett igénybe. További 1 órai állás után az oldatot 500 ccm vízbe öntöttük, mire szintelen csapadék vált ki. Az oldatot 4 ccm ecetsavval való megsavanyítás után háromszor kiráztuk 50 ccm benzollal, a benzolos oldatot nátriumsulfáttal való szárítás után csökkentett nyomás alatt bepároltuk. A 6·3 g-nyi kissé sárgás szirupot 6 ccm absz. pyridinnel és 18 ccm ecetsavanhydriddel 1 óra hosszat vízfürdőn melegítettük, majd 100 ccm vízbe öntöttük. Másnap a kivált csapadékot leszivattuk és megszáritottuk. Termelés 4 g. Redukálóképessége 12%. A redukáló termékeket alkohollal való többszöri kifőzés útján csaknem teljesen el lehet távolítani. Az oldatlanul maradt már csak 0·9%-nyi redukciót mutató anyagot meleg chloroformban oldottuk és meleg alkoholt öntve hozzá, lehüléskor hosszú, szintelen tükben válik ki a termék (0·65 g). Hajszálcsőben melegítve 218°-nál zsugorodik, 226°-nál meniscusképződés, 231°-nál szintelen folyadék.

$$[\alpha]_D^{20} = - \frac{0\cdot75\cdot10}{0\cdot2082} = - 36\cdot0^\circ \text{ chloroformban.}$$

Rhamnóz redukciós táblázata.

A meghatározások BERTRAND szerint készültek, oly módon, hogy a bemért rhamnózhidrátot mindig 20 ccm vízben oldva elegyítettük 20 ccm Bertrand I. és 20 ccm Bertrand II. oldattal, majd 3 perces forralás után a keletkező cuprooxyd csapadékot leszűrve Bertrand III oldatban oldottuk és $\frac{n}{10} KMnO_4$ oldattal megtitráltuk. Fontos, hogy a forrás lassan induljon meg, különben rossz értéket kapunk, mert az edény oldalán a folyadék felett lepedék jelenik meg, mely nem vihető a szűrőre.

¹ HELGERICH WEBER Ber. Deutsch. chem. Ges. 69, 1411 (1936.)

Rhamnózhidrát mg.	Rhamnóz mg.	n/10 $KMnO_4$ ccm.-ben
10.09	9.1	2.64
11.6	10.4	3.20
17.6	15.85	4.70
20.19	18.2	5.13
22.7	20.45	6.08
27.2	24.5	7.2
33.8	30.45	8.96
38.2	34.45	10.02
45.5	41.0	12.10
50.5	45.5	13.43
54.8	49.4	14.43
55.4	49.9	14.50
60.0	54.1	15.75
66.2	59.65	17.34
70.7	63.7	18.30
77.3	69.65	20.25
88.6	79.85	23.05
100.0	90.1	25.64
100.95	91.0	25.85

A leírt kísérletek végrehajtásánál dr. GERECS ÁRPÁD, TETTA-MANTI ALBIN vegyész-mérnök urak, továbbá dr. FARAGÓ ZSUZSANNA voltak segítségemre, miért is nekik meleg köszönetet mondok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. dec. 13-án tartott üléséből.)

ÜBER DIE KONSTITUTION DES HESPERIDINS UND DES NEOHESPERIDINS.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. M.

Hesperidin enthält eine glykosidisch gebundene Biose, die nach den Ergebnissen der vollständigen Methylierung und Vergleich der entstehenden Spaltungsprodukten mit methylierter Rutinose und methyliertem Rutin sich als *Rutinose* erwies. Zu demselben Ergebniss führten die vergleichende Spaltungsversuche des Hesperidins und Rutins mit Barytwasser. Das unlängst aufgefundene Neohesperidin enthält ebenfalls eine glykosidisch gebundene Biose, sie ist aber konstitutiv verschieden von Rutinose und stellt aller Wahrscheinlichkeit nach eine neue Biose, Rhamnosido-4-Glukose dar, die *Neohesperidose* genannt werden soll. Die Arbeit erscheint demnächst in den Berichten der Deutschen Chemischen Gesellschaft.

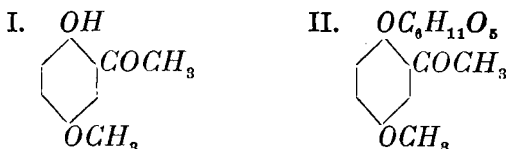
(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 13. Dez. 1937.)

A

GLUKO-CHINACETOPHENONMONOMETHYLAETHER SZINTÉZISE.¹

MAUTHNER NÁNDOR I. tagtól.

Két évvel ezelőtt GORIS és CANAL² francia kutatók a *Primula acaulis*-ből egy új glukosidet különítettek el, amelynek hidrolizise útján aglykon gyanánt chinacetophenonmonomethylaethert (2-oxy 5-methoxyacetophenon) (I) nyertek. Rövid ideje, hogy közzétettem,³ ezen oxyketon egy célszerű előállítási módját és azóta ezen glukosid szintézisével foglalkozom. A glukosid szintézisét egy eljárás szerint végeztem,⁴ amelyet már régebben használtam a picein szintézisének. E célból chinacetophenonmonomethylaethert



lúgos, acetonos, vizes közegben α -acetobromglukozzal kondenzáltam és így a tetraacetyl-gluko-chinacetophenonmonomethylaethert nyertem. Ha ezen acetylszármazékot hosszabb ideig összerázzuk híg baritvízzel közönséges hőmérsékleten, úgy jó termeléssel a glukosid (II) képzőszött.

¹ A budapesti Pázmány Péter Tud. egyetem II. sz. kémiai intézetében készült dolgozat.

² Chem. Centralbl. 1937. I. 359.

³ Math. és Term. Értesítő 1938.; Journ. für prakt. Chemie 149, 324. (1937.).

⁴ Math. és Term. Értesítő 32., 41. (1914.); Journal für prakt. Chemie 76., 4. (1913.).

KÍSÉRLETI RÉSZ.

Tetraacetyl-glukochinacetophenonmonomethylaether.

3 g. chinacetophenonmonomethylaethert és 9 g acetobrom-glukoset 20 cm³ tiszta acetonban oldunk. Ezen oldathoz külső hűtés közben +5 C°-nál 0·9 natriumhidroxidnek 10 cm³ vízben való oldatát rázás közben hozzáadagoljuk. Ezután mindjárt 10 cm³ acetont adunk hozzá és 5 perc múlva újból 20 cm³-t. Végül 5 perc múlva 15 cm³ vizet három adagban hozzáöntünk. Ezen kísérleti körülmények között a reakcióselegy az egész 5 órai reakció tartalom alatt teljesen homogén maradt. Ezután az acetont vacuumban közönséges hőmérsékleten ledesztilláljuk és a visszamaradó olajszerű terméket többször hideg vízzel jól ki-mossuk. Az olajat meleg methylalkoholban oldjuk csontszénnel színtelenítjük és vízzel a beálló kristályosodásig elegyítjük. Termelés 0·5 g. Egynapi állás után a tetraacetylszármazékot leszűrjük és további tisztítás céljából híg methylalkoholból kristályosítjuk át. A tetraacetyl glukochinacetophenonmonomethylaether színtelen tükben válik ki amelyek 159—160 C°-on olvadnak.

3·985 mg anyag adott: 8·045 mg CO₂, 2·230 mg H₂O-t.

A C₂₃H₃₂O₁₂ képlet alapján a számított értékek:

$$C = 55\cdot20\%, \quad H = 6\cdot40\%.$$

Kísérletileg talált értékek: C = 55·05%, H = 6·21%.

Glucochinacetophenonmonomethylaether.

2 g finomra porított tetraacetylglukosidet 18 óra hosszat 150 cm³ 6%-os baritvízzel a rázógépen összerázunk. Ezután egy kevés oldatlan termékről szűrünk és az oldatba 2 óra hosszat a fölös bariumhidroxid eltávolítására széndioxidet vezetünk be. A bariumcarbonatot leszűrjük és az oldatot légritkított térben 40 C° hőmérsékleten kis térfogatra bepárologtatjuk. Az oldatot porcellán-csészében vacuumexsiccatorban tömény kénsav felett teljesen beszáritjuk. A visszamaradó terméket finomra porítjuk és sok ecetsav-aethylesterrel a vízfürdőn kivonjuk. Az oldatot töményítjük mi-

közben a glukosid kiváltott. Termelés 0·8 g. A glukosid további tisztítása céljából még egyszer ecetsaverhylesterből kristályosítjuk át. A glukochinacetophenonmonomethylaether színtelen tűket képez amelyek 139—140 C°-on olvadnak.

4·790 mg anyag adott: 9·620 mg CO_2 -t és 2·675 mg H_2O -t.

A $C_{15}H_{20}O_8$ képlet alapján a számított értékek: $C = 54·87\%$, $H = 6·09\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C = 54·73\%$, $H = 6·24\%$.

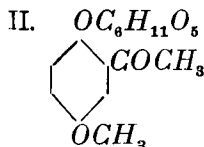
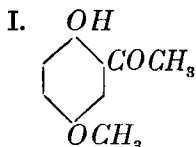
A glukosid igen könnyen oldódik vízben és alkoholban. Aetherben majdnem oldhatatlan.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. február 11-én tartott üléséből.)

DIE SYNTHESE DES GLUCO- CHINACETOPHENONMONOMETHYLAETHERS.

Von F. MAUTHNER korresp. Mitglied.

Vor zwei Jahren haben GORIS und CANAL¹ aus *Primula acaulis* ein neues Glucosid isoliert, das bei der Spaltung als Aglykon Chinacetophenonmonomethyläther (2-Oxy 5-methoxyacetophenon) (I) ergab. Vor kurzem teilte ich eine zweckmässige Darstellungsweise² dieses Oxyketons mit und beschäftige mich seitdem mit der Synthese des Glucosides. Ich benützte ein Verfahren welches ich vor längerer Zeit bei der Synthese des Piceins³ verwendet habe. Zu



diesem zwecke wurde Chinacetophenonmonomethyl aether in alkalisch acetonisch wässriger Lösung mit α -Acetobromglucose kondensiert und lieferte so das Tetraacetylglucochinacetophenonmonomethylaether. Beim längeren Schütteln des Acetylderivates mit verdünnter Barytlauge bei gewöhnlicher Temperatur entstand in guter Ausbeute das Glucosid (II).

¹ Chem. Centralbl. 1937. I. 359.

² Journ. für prakt. Chemie 149., 324. (1937.).

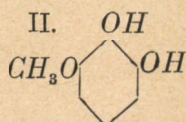
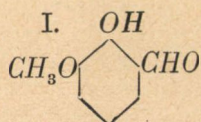
³ Journ. für prakt. Chemie 88., 764. (1913.).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Feber 1938.)

A 4-METHYLPYROGALLOLALDEHID EGY ÚJ SZINTÉZISE.¹

MAUTHNER NÁNDOR I. tag-tól.

Egynehány év előtt a Math. és Term. Értesítőben közzétettem² a 4-methylpyrogallolaldehid szintézisét. E szintézishez szükséges 1-methylpyrogallolaethert gallussavból állítottam elő hosszas és körülményes módon. Vizsgálatok, a melyeket már régebben az o. vanillinnel³ végeztem most egy igen egyszerű új előállítási módjához vezettek az 1-methylpyrogallolaethernek és a megfelelő aldehidnek. Ha o. vanillinre (I) lúgos közegben hidrogenszuperoxidet hagyunk hatni úgy az aldehidesoport helyére a hidroxil gyök lép



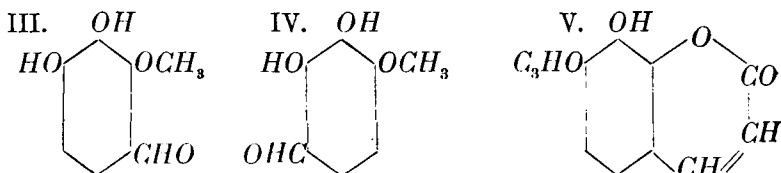
és igen jó eredménnyel 1-methylpyrogallolaether (II) képződik. Az 1-methylpyrogallolaetherből (II) a GATTERMANN-féle módosított aldehidszintézis szerint zinkeyaniddal és sósav gázzal a 4-methylpyrogallolaldehid képződött. Az aldehidből teljes metilezéskor trimethylpyrogallolaldehid képződött, ezáltal az isomerek száma kettőre redukálódott: 2-methylpyrogallolaldehidre (III) vagy 4-

¹ A budapesti Pázmány Péter Tud. egyetem II. sz. kémiai intézetében készült dolgozat.

² Math. és Term. Értesítő 55., 186. (1936.); Journal für prakt. Chemie 145., 313. (1936.).

³ Math. és Term. Értesítő 43., 358. (1926.); Journal für prakt. Chemie 112., 60. (1926.).

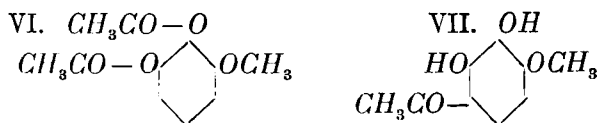
methylypyrogallolaldehide (IV). A következő kísérlettel a helyes szerkezeti képletet is meg lehetett állapítani. Az aldehidből natriumacetattal és ecetsavanhidriddel való hevítés által a PERKIN-féle reakció útján 7-methoxy 8-oxycumarin (V) képződött. Tekintve,



hogy ez egy ortho-condenzációstermék, úgy szükségképpen az aldehidnél is az aldehidgyöknek a szabad hidroxylesoporthoz ortho állásban kell lenni és az aldehid szerkezetét így mint 4-methylypyrogallolt állapítottam meg.

Az aldehidnek malonsavval és anilinnel való hevítésekor 2, 3-oxy-4-methoxy fahéjsav képződött.

Tekintve, hogy a fentebbi módon nagyobb mennyiségű 1-methylypyrogallaether birtokába jutottam így még az acylgyök vándorlását is vizsgáltam előző¹ ez irányú munkáim kiegészítése-



képpen, amidón alumíniumchlorid hatására nitrobenzolos oldatban már közönséges hőmérsékleten is 4-methylgallacetophenon (VII) képződött.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

1-methylypyrogallaether.

10 g o. vanillint 57.5 cm³ normal natronlúgban oldunk és az oldathoz 75 cm³ 3%-os hidrogensuperoxidoldatot adunk. A reakció elegyet egy órát állni hagyjuk és ezután az oldatot natriumbicar-

¹ Math. és Term. Értesítő 50., 468. (1933.); 50., 480. (1933.) 51., 289. (1914.); Journ. für prakt. Chemie (2) 136., 205. (1933.); 136., 213. (1933.); 139., 293. (1934.).

bonattal telítjük. Az oldatot háromszor aetherrel kivonjuk és az aetheres kivonatot kétszer 40%-os natriumbisulfitoldattal átrázzuk és vízmentes natriumsulfattal szárítjuk. Az aether lepárlása után visszamaradó terméket vacuumban desztilláljuk, miközben a termék 136—137 C°-on desztillál át. Termelés 6.6 g. Olv. p. 38—40 C°.²

4-methylpyrogallolaldehid.

3 g 1-methylpyrogallolaethert feloldunk 50 cm³ tömény aetherben 8 g porított zinkcyanidet (KAHLBAUM-féle 100 C°-on szárítva) adunk hozzá és két óra hosszat száraz sósavgázt vezetünk a reakcióelegybe, miközben a reakcióstermék olajszerű állapotban válik ki. A reakciósfolyadékot leöntjük és az olajat kétszer tömény aetherrel kimossuk. Ezután a ketimid szétbontására 100 cm³ vizet adunk a reakcióelegyhez és 15 percig forraljuk. Az oldatot háromszor aetherrel kivonjuk és az aetheres oldatot kétszer 40%-os natriumbisulfitoldattal átrázzuk. A bisulfitoldatot tömény sósavval megsavanyítjuk és egynehányszor aetherrel kivonjuk. Az aethert ledesztilláljuk és a visszamaradó aldehidet (0.7 g) kevés meleg vízből kristályosítjuk át miközben csontszénnel színtelenítjük. Olv. p. 118—119 C° mint előzőleg megadtam.³ 4,225 mg anyag adott: 8.900 mg CO₂-t és 1.810 mg H₂O-t.

A C₈H₈O₂ képlet alapján a számított értékek: C=57.14%, H=4.76%.

Kísérletileg talált értékek: C=57.42%, H=4.76%.

Az aldehid szerkezetének megállapítása céljából, a PERKIN-féle reakció útján, a következő módon a megfelelő cumarinszármazékot nyertem: 2 g methylpyrogallolaldehidet 12 cm³ ecetsavanhydriddel és 4 g vízmentes ecetsavsnatriummal olajfürdőben előbb 2 óra hosszat 120 C°-ra majd 8 órát 180 C°-ra hevítettem.

A reakcióelegyet 80 cm³ vízzel elegyítjük és az oldatot egynehány napig +2 C°-nál állni hagyjuk, miközben 0.3 g acetyl-származék vállott ki. A visszamaradó olajat 400 cm³ vízzel kifőzzük és az oldatot egynehány napig +2 C°-on állni hagyjuk, miköz-

² HERZIG u. POLLAK Monatsh. Chem. 23., 701.; 25., 506.

³ Journ. für prakt. Chemie 145, 313 (1936).

ben 1·1 g anyag vállott ki. Mind a két terméket agyagtányéron szárítjuk ki és a következőképpen szappanosítjuk el: 0·5 g acetyl-származékot 10 cm³ methylokoholban oldunk, 5 cm³ tömény só-savval elegyítjük és 5 percig a vízfürdőn visszafolyó hűtőcsővel hevítjük. Ezután vízzel elegyítjük és többször aetherrel kivonjuk. Az aetheres oldatot vízmentes natriumsulfattal szárítjuk és az oldószeret ledesztilláljuk. A visszamaradó terméket előbb 50 cm³ ligroinnal kivonjuk, miáltal 0·05 g még tisztátalan terméket eltávolítunk. Ezután a visszamaradó terméket sok forró ligroinból kristályosítjuk át és csontszénnel szintelenítjük. Termelés 0·2 g.

A vegyület szintelen tűkben válik ki, amelyek 169—170 C°-on olvadnak.

4·900 mg anyag adott: 11·250 mg CO₂-t és 1·900 mg H₂O-t.

A C₁₀H₈O₄ képlet alapján a számított értékek: C=62·5%, H=4·16%.

Kísérletileg talált értékek: C=62·65%, H=4·30%.

Az analízis alapján a vegyület 7-methoxy 8-oxycumarin.

1 g 4-methylpyrogallolaldehidet 2 cm³ alkoholban oldunk, 0·6 g malonsavat és 0·6 g anilint adunk hozzá és félóráig a vízfürdőn hevítjük. Egy napi állás után a reakcióelegyet 25 cm³ vízzel és 2 cm³ tömény sósavval elegyítjük, majd rövid ideig a vízfürdőn hevítjük. A lehülés után a terméket leszűrjük és vízzel jól kimosuk. Termelés 1·1 g. Sok meleg vízből kristályosítjuk át, miközben a 4-methoxy 56-dioxyfahéjsav sárga tűkben válik ki amelyek 264—265 C°-on olvadnak.

0·1535 g anyag adott: 0·3214 g CO₂-t és 0·0690 g H₂O-t.

A C₁₀H₁₀O₅ képlet alapján a számított értékek: C=57·14%, H=4·76%.

Kísérletileg talált értékek: C=57·08%, H=4·99%.

4-methylgallacetophenon.

20 g 1-methylpyrogallolt 40 g acetylchloriddal 1 óra hosszat a vízfürdőn visszafolyó hűtőcsővel hevítjük és azután a terméket vacuumban desztilláljuk. Termelés 19 g. 11 g diacetyl 1-methylpyrogallolt 50 g nitrobenzolban oldunk és jéggel való hűtés közben 6 g porított aluminiumchloridet egy fél óra leforgása alatt hozzá-

adagolunk. A reakciósedényt higanyzárral látjuk el és 24 óra hossz-
 szat közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. Ezután a reakció-
 elegyet jégre öntjük tömény sósavval elegyítjük, egy fél órát a
 vízfürdőn hevítjük és végül a nitrobenzolt vízgőzzel ledesztillál-
 juk. A desztillációs lombikban a kihülés után 5 g oxyketon vállott
 ki, a többit (0.9 g) az oldatnak aetherrel való kivonása útján nyer-
 jük. A termék további tisztítása céljából meleg vízből kristályo-
 sítjuk át. A vegyület 132—133 C°-on olvadt és összes tulajdonságai-
 ban¹ azonosnak bizonyult a 4-methylgallacetophenonnal.

0.1388 g anyag adott: 0.3011 g CO_2 -t és 0.0665 g H_2O -t.

A $C_9H_{10}O_4$ képlet alapján a számított értékek: $C=59.34\%$,
 $H=5.49\%$.

Kísérletileg talált értékek: $C=59.16\%$, $H=5.81\%$.

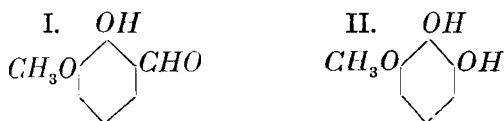
¹ PERKIN a. WILSON J. Chem. Soc. 83., 129.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. február 21-én tartott üléséből.)

ÜBER EINE NEUE SYNTHESE DES 4-METHYLPYROGALLOLALDEHYDES.

Von F. MAUTHNER korresp. Mitglied.

Vor einigen Jahren beschrieb ich die Synthese¹ des 4-Methylpyrogallolaldehyds. Den zu dieser Synthese nöthigen 1-Methylpyrogalloläther stellte ich aus Gallussaure auf umständlichen Wege dar. Untersuchungen die ich vor längerer Zeit über o. Vanillin² veröffentlichte führten mich jetzt zu einer sehr einfachen Darstellungsweise des 1-Methylpyrogalloläthers und des entsprechenden Aldehyds. Lässt man auf o. Vanillin (I) in alkalischer Lösung

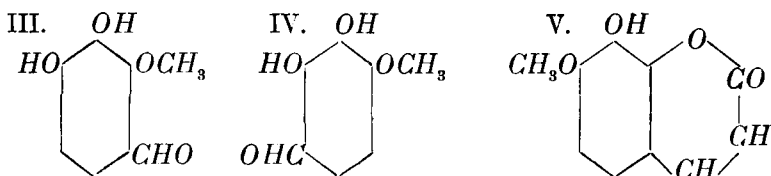


Wasserstoffsperoxyd einwirken so entsteht daraus durch Ersatz des Aldehydradikales durch die Hydroxylgruppe in sehr guter Ausbeute 1-Methylpyrogalloläther (II). Aus dem 1-Methylpyrogalloläther entstand nach der modifizierten GATTERMANN'Schen Synthese mittelst Zinkcyanid und Salzsäuregas der 4-Methylpyrogallolaldehyd. Auf Grund der vollständigen Methylierung des Aldehyds wobei Trimethylpyrogallolaldehyd entstand konnte der Eintritt der Aldehydgruppe auf zwei Isomere beschränkt werden, nämlich 2-Methylpyrogallolaldehyd (III) oder 4-Methylpyrogallolaldehyd (IV). Jetzt konnte auch durch nachfolgenden Versuch

¹ Journ. für prakt. Chemie 145., 313. (1936.).

² Journ. für prakt. Chemie 112., 60. (1926.).

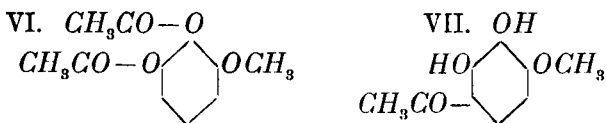
eine Entscheidung für die letzte Formel getroffen werden. Durch Erhitzen des Aldehyds mit essigsauerm Natrium und Essigsäureanhydrid nach der PERKINSCHEN Reaktion entstand bei dieser Reaktion 7-Methoxy 8-oxycumarin (V). Da dies ein orthokondensations-



produkt ist so muss beim Aldehyd die Aldehydgruppe in ortho Stellung zum freien Hydroxyl stehen und die Konstitution des Aldehyds ist endgültig als 4-Methylpyrogallolaldehyd festgestellt.

Beim Erhitzen des Aldehyds mit Malonsäure und Anilin entstand daraus 2, 3-Oxy 4-methoxyzimmtsäure.

Da ich im Besitze von grösseren Mengen von 1-Methylpyrogalloläther war, untersuchte ich zur Ergänzung meiner früheren diesbezüglichen Untersuchungen¹ auch die Wanderung der Acetylgruppe beim Diacetyl-1-monomethylpyrogalloläther (VI) wobei



bei gewöhnlicher Temperatur in nitrobenzolischer Lösung durch Aluminiumchlorid Umlagerung in 4-Methylgallacetophenon (VII) erfolgte.

¹ Journal für prakt. Chemie 136., 205. (1933.); 136., 213. (1933.); 139., 293. (1934.).

A PÁRANYOMÁS ÉS A NEDVESSÉG ÉVI JÁRÁSA A FÖLDÖN.

SZÁVA-KOVÁTS JÓZSEF-től.

I. Bevezetés.

Ez a tanulmány az 1920—1929. évsorozat megfigyelésein alapszik. A felhasznált anyag nagy részét a központi intézetek évkönyveiből merítettem. Különféle kiegészítésekért és egyéb közlésekért több intézet őszinte hálára kötelezett.

Dacára az óvatos megválasztásnak, a periódust nem lehetett egészen egységesen megtartani. Az U. R. S. S. területén 1900—12, Franciaországban 1906—1920, Braziliában 1910—1924, Ausztráliában 1905—1914 évjáratú megfigyeléseket kellett beállítani.

Ezeknek a normálperiódusra való visszavezetése azonban a kiszámított csekély differenciák miatt nem kívánt külön korrekciót.

Az évkönyvek szerkesztésében és közlésmódjában mutatkozó eltérések az abszolút nedvesség mértékegységében, az állomások földrajzi hosszúságának és tengerszínfeletti magasságának meghatározásában érezhető nehézségeket okoztak.

A 10 éves közép valószínű hibáinak számításai azt mutatták, hogy azok nem nagyobbak, mint a jogosan várható műszerhibák, úgyhogy egy 10 éves periódus a szándékolt célokra elégséges.

A megvizsgált állomások száma kereken 6000. Eloszlásuk eléggé egyenlőtlen, de azért kevés kivétellel mindenütt elegendő sűrű. Csupán a sivatagokban és az arktikus vidékeken gyér az eloszlás, ott viszont az egyforma viszonyok kevés állomás adataival is jól kifejeződnek. Relative sűrűbb a hálózat, de az összetettebb éghajlati viszonyok miatt mégis elégtelen Kínában, Abessziniában, a Kongó-medencében, Canadában és Dél-Amerika északi

részen általában. Legsűrűbb a hálózat Nyugat- és Közép-Európában, továbbá Japánban, mert ott átlag 5-ször annyi az állomás, mint hasonló nagyságú és egyébként jól feltárt más területeken.

Az anyag kritikája — mint szokásos — a megfelelő fekvésű állomások számszerű és grafikai összehasonlításából állott. Ilyen módon a különbségeikben nagyon eltérő értékeket ki lehetett küszöbölni. Az ilyen értékek száma aránylag kevés volt, ami a felhasznált anyag jóságáról tanuskodik. További redukciók, vagy korrekciók elvből nem kerültek sorra.

A magaslati fekvés befolyásának kirekesztésére sem alkalmaztam redukciót, mert ez a relatív nedvességre nézve különben is csak kétes értékű lehetett volna. Hogy az észlelt adatok mellett ki lehessen tartani, a magasság befolyásának kirekesztése végett 400 m-nél magasabban fekvő állomások nem kerültek be az ábrázolásba.

Az óceánokra vonatkozó értékek számításból erednek. A páranymásra vonatkozó számításnak a vízfelszín hőmérsékletén levő maximális gőznyomás volt az alapja, amely a sótartalom, 1.5 m magasság és a szélerősség szerint redukáltatott. A nedvességre nézve a vízfelszín feletti levegőhőmérséklet volt irányadó. A kapott értékek közvetlenül a tengerpartokon, valamint az óceáni szigeteken igen jól egyeztek az észlelt értékekkel.

A feldolgozás a felszín komplikáltsága, illetve a megfigyelőhálózat sűrűsége szerint: 1:1.000.000 és 1:3.000.000 mértékű munkatérképeken történt. Ezek eredményei megfelelő eljárással Merkátortvetületű 1 : 100.000.000 közép mértékű térképekre kerültek át.

Mind a páranymás, mind a nedvesség eloszlása csak az ellentétes évszakok ábrázolására készült el, hogy az előidézésükért felelős tényezők befolyása erősen kidomborodjék. Az évi közepes eloszlás vizsgálatát épp azért mellőztem, mert itt az oki háttér jellegzetességei elmosódtak.

A vizsgálat eredményének bemutatása előtt két új fogalom, helyesebben elnevezés bevezetése látszik szükségesnek, amelyek az eloszlás ábrázolásával kapcsolatban merülnek fel. Az ábrázolás a HUMBOLDTtól származó és alkalmasságánál fogva sokszorosan felhasznált egyenlő állapotú görbék rendszere szerint történt s így

egyenlő páratartalmú és egyenlő nedvességű vonalakra támaszkodik. A következőkben az egyenlő páratartalmú vonalakat a hagyományos szóképzés szerint: *izovaporáknak*, az egyenlő nedveséget ábrázoló vonalakat pedig: *izohumidáknak* fogom nevezni. Ezekkel az elnevezésekkel nemcsak ennek a dolgozatnak a fejtegetései lesznek egyszerűbbek, hanem bizonyára később is használható fogalmak válnak belőlük.

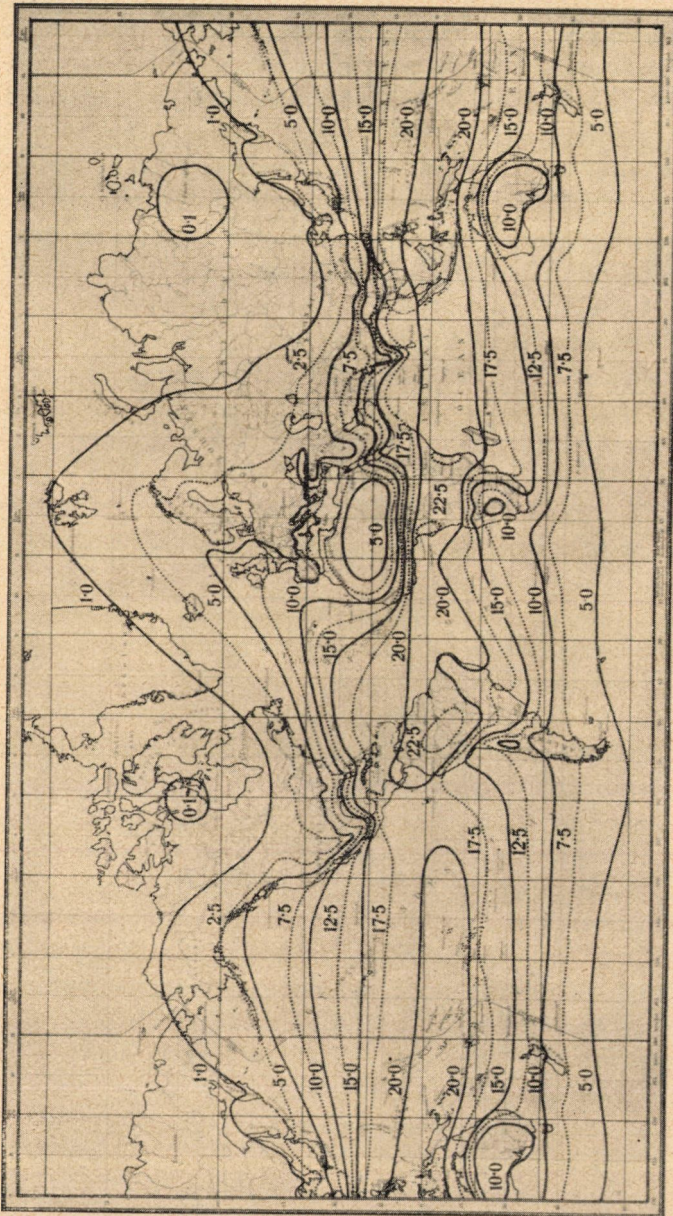
II. A páranymás eloszlása.

Izovaporák.

A páranymás földrajzi elterjedését az 1. és 2. ábra tünteti fel. A térképeken az izovaporák 2·5 mm-es térközökben jelennek meg. Az 1·0 mm-es és 0·1 mm-es értékek az alacsony hőmérsékletű területek kisebb párákészletei miatt kaptak helyet. A könnyebb áttekintés kedvéért az egész számértékű görbét folytonos vonallal, a törtszámúakat pontozott vonallal húztam meg.

Az eloszlás legfőbb jellemvonása mind a januáriusi, mind a júliusi térképen a zónális szerkezet, mert ez a hőmérséklettel való szoros kapcsolat következménye. Mivel a páratermelés és a párafelvétel elsősorban a hőmérséklettől függ, az izovaporák szorosan csatlakoznak az izotermákhoz s így a levegő vízgőztartalma általában az egyenlítő felől a pólusok felé csökken. A hőmérséklettel megszabott zónális rendből azonban egyes területek kilépnek és önálló viselkedésükkel elkülönülnek környezetüktől. Ebben a tekintetben legfeltűnőbbek azok a különbségek, amelyek a tengerek és a szárazföldek, valamint a szubtrópusok és a szomszédos szélességek között mutatkoznak. Hasonlóképp élesek azok az ellentétek is, amelyeket monzunbefolyások idéznek elő. Ezeknek a területeknek egyéni magatartása kizárólag vízzel való ellátottságuk különböző mértékében és módjában rejlik s így a páranymás földrajzi eloszlásában a *hőmérséklet* mellett az *egyes vidékek vízháztartása* is döntő szerepet játszik.

A szárazföld és a tenger közötti ellentét legkifejezettebb a közepes és magas szélességekben télen, mert akkor az izovaporák az óceánokon a pólus felé, a kontinenseken az egyenlítő felé hajol-



I. ábra. A párányomás eloszlása januáriusban.

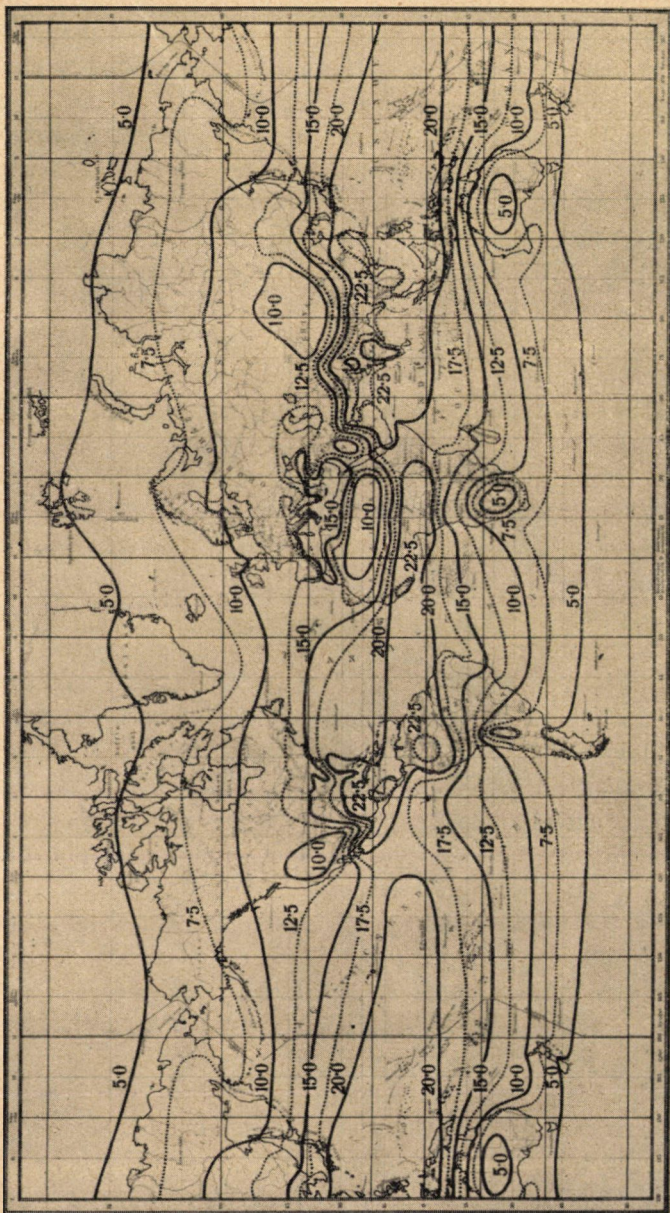
nak, vagyis a tengerek felett a levegőben több, a szárazföld felett kevesebb a pára. A kontinentális kiszáradásnak Szibériában és Canadában van a centruma, mert ott a levegő 0·1 mm-es páratöltés mellett megközelíti az abszolút szárazságot. Nyáron ellenkező a helyzet, habár a kétféle felszín közötti ellentét sokkal kevésbé éles. Ekkor az óceánok feletti levegőben kevesebb a pára és a szárazföld felettiben több. Ezt mutatja a júliusi 7·5-es és 10 m-es izovapora, mert ezek Észak-Amerikában és Euráziában jóval északabbra nyomulnak, mint az Atlanti- és a Csendes óceánon.

A szárazföld és a tenger közötti évszakos ellentét a déli féltekén természetesen csak Dél-Amerika legdélibb vidékén jelentkezhetik, a kontinens keskenysége miatt azonban ott is csak erőtellenül.

A közepes szélességektől az egyenlítő felé, a szubtrópokban, mivel ott a leszálló légmozgások és a velük kapcsolatos passzátrendszer uralma miatt a vízellátás általában gyér, esetleg egyes területeken teljesen hiányzik, a szárazföld felett a levegő az egész év folyamán lényegesen szárazabb, mint a tenger felett. Különösen száraz a sivatagi vidékeken, mert ott az elégtelen, illetve teljesen hiányzó vízkészletekből a rendkívül magas hőmérsékletek nem képesek párákat termelni. Ezek a víz- és páraszegény területek a megfelelő félteke nyarán kiterjeszkednek, télen összezsugorodnak. Szárazságuk középpontját télen az 5 mm-es, nyáron a 10 mm-es izovapora rendszerint zárt alakzattal jelzi.

A szubtrópusi vízgazdaság és páraellátás a partvidékeken lényegesen más, mint kontinentális fekvésben. Télen, amikor a magas nyomás és a leszálló légmozgások övezete a Napot követve alacsonyabb szélességekbe húzódik vissza, a szubtrópusi partokon gyakran esik az eső. Ennek hatását látjuk az izovaporák helyzetén Észak- és Dél-Amerika, Dél-Afrika és Ausztrália nyugati oldalán. Ez a nedvesebb partvidék azonban mindenütt csak egy keskeny szegélyre korlátozódik. Csupán a Földközi tenger mentén — ennek a kontinensek közé való mély benyomulása miatt — húzódik be a téli eső a kontinensbe, ezt a januáriusi térképen a 7·5-es izovapora hosszú beöblösődéssel jelzi.

A kontinensek keleti partjain a szubtrópusi eső sokkal gyengébben jelentkezik, vagy éppen el is marad, mert ezek a területek



2. ábra. A párányomás eloszlása júliusban.

a vízháztartás egy másik fontos szabályozójának, a monzunnak hatásmezejébe tartoznak.

A forró égöv víz- és páragazdagságát a magasértékű 20 mm-es izovapora ábrázolja és a térképeken a Nap járását követő meridionális eltolódásokat mutatja. A tengerek felett a párayomás azonban éppen csak átlépi a 20 mm-es határt, de a szárazföldeken a 22·5 mm-es értékek is megjelennek és arról tanuskodnak, hogy ebben az övezetben a szárazföldek felett nagyobb páratöltésű a levegő, mint az óceánok felett. Ez a jelenség, amely — miként előbb láttuk — nyáron a közepes és magas szélességeken is jelentkezik, több tényező hatásának összetevődéséből ered. Nagy szerepet játszik benne elsősorban a kétféle felszín közötti hőmérsékletkülönbség, mert az a szárazföld felett a levegő javára erősen tágitja a párafelvétel kerekeit. Támogatja továbbá a trópusi esőzésekből, a magasabb szélességeken a kontinentális nyári esőkből származó vízkészlet, mert ez a talajban tartalékkolt vízmennyiségekkel együtt, a vegetáció közbejöttével hatalmasan megnőtt párologtató felületről táplálja a magas hőmérsékletek mohóságát. És végül nagy szerepe van itt a szélbefolyásoknak és azokon keresztül a levegő keveredésének is. A légmozgások ugyanis az óceánokon mindig erőteljesebbek, mint a kontinensen, s így a levegő kicserélődése, vele a kitermelt párák elszállítása a tengerek felett sokkal intenzívebb, mint a szárazföldek felett.

A zónális rend további megzavarói a kétféle felszín között kifejlődő monzunrendszerek, mert ezek télen szárítják, nyáron nedvesítik az elárasztott területeket. A téli monzun a magasabb szélességeken jut erőteljesebben szóhoz s Kelet-Ázsiában és Észak-Amerika keleti részén mint száraz, kontinentális szél jelentkezik. A januáriusi izovaporák jól szemléltetik a keleti oldalak szárazságát a nyugatiakkal szemben. Az alacsony szélességeken élesen jelentkezik a téli monzun Elő-Indiában, mert ott a januáriusi izovaporák erősen jelzik a szárazságot. A nyári monzun az alacsonyabb szélességeken fejlődik ki erőteljesen és ott avatkozik be döntő módon az izovaporák elhelyeződésébe. A hatalmas dél-ázsiai nyári monzun rengeteg eső- és páratömegei létrehozzák azt a nagy páragazdagságot, amit a júliusi térképen a 22·5 mm-es izovaporák jeleznek az Arab-tenger északi partszegélyén, a Hindosztán-alföldön,

valamint Hátsó-India és Délkelet-Ázsia széles területein. Erős nyári monzun-tevékenységet jeleznek továbbá a térképek a Szenegambiai partvidéken, Észak-Amerikában, Mexikó mindkét oldalán, továbbá a déli féltekén Kelet-Afrikában.

A páraelosztás szabályos rendjét megbontják végül a magas hegyvidékek, de ezeknek befolyása az ábrázolásból kirekesztetett. Ez a befolyás, mint ismeretes, abból áll, hogy a magaslati vidékek alacsonyabban fekvő környezetükhöz képest kisebb páraakészletekkel rendelkeznek. Az összefüggést a HANN-féle formula fejezi ki. Sem a térképek mérete, sem pedig az izovaporák értéktávolsága nem kedvezett annak, hogy ebben a tekintetben részletekbe mehessünk. A jelenség különben is annyira ismert, hogy a páraelosztásban betöltött szerepe nem kíván több megvilágítást.

Az óceánokon keresztülfutó izovaporák sokkal jobban megőrzik nyugodt rétegződésüket, mint a szárazföld feletti és többnyire csak a nagy szárazföldi zavarok közelében mutatnak erősebb elhajlásokat. Kisebb kitérítések a párhuzamos körök irányából azonban az óceánok felett is megfigyelhetők és szinte kivétel nélkül a tengeráramlásokkal vannak összefüggésben. A trópusi és szubtrópusi vízcirkuláció ezekben a szélességekben a kontinensek keleti partjait melegíti, nyugati partjait pedig hűsíti s ez a páraelosztásban is erősen visszaüt. Az izovaporák a keleti partoknál a magas szélességek felé, a nyugati partoknál az egyenlítő felé kanyarodnak, azaz: előbbieket párában gazdagok, utóbbiak szegények. Különösen szembeűnő még a melegáramlások északi kiágazásainak a Golf- és Kuro Sivo-áramoknak hatása a januáriusi térképen, mert ott a meleg víz feletti nagyobb páratöltés jól megfigyelhető.

III. A nedvesség eloszlása.

Izohumidák.

A nedvesség földrajzi eloszlását a 3. és 4. ábra tünteti fel. A térképeken az izohumidákat 10%-os térközökben rajzoltam meg. A 85%-os érték az erősen nedves területek pontosabb elhatárolása végett szerepel. A 75%-os izohumida a januáriusi térképen kivételesen azért kapott helyet, hogy a kelet-sibériai különleges viszo-

nyokat élesebben lehessen vele kifejezésre juttatni. A könnyebb áttekintés kedvéért az 50%-nál kisebb nedvességű területeket pontozással, a 85%-nál nagyobbakat vonalkázással különítettem el.

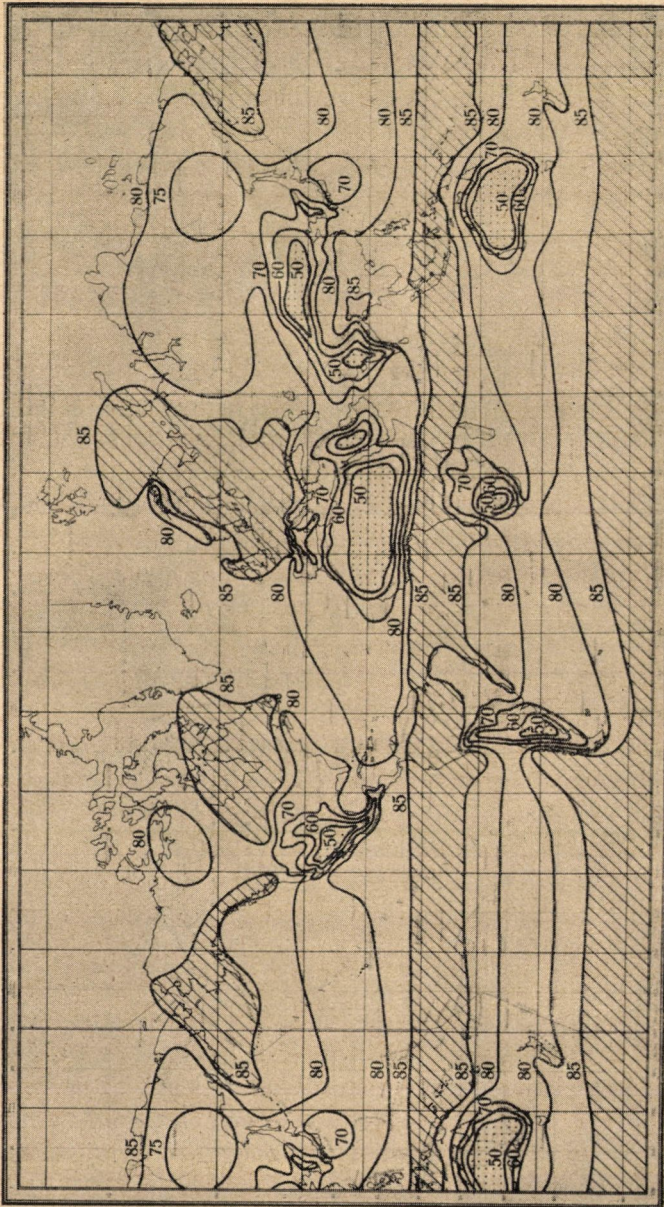
Mind a két térképen az eloszlás legfőbb jellemvonása a zónális szerkezet, ez azonban lényegesen eltér attól, amit az izovaporák követnek. Az egyenlítő tájékán magasértékű izohumidák övezete fekszik. Innen kezdve a nedvesség északra és délre csökken és a szubtrópusokban minimumát éri el. Majd a pólusok felé ismét növekszik és a magas szélességekben megközelítőleg ugyanolyan nedvességi állapotot találunk, mint az egyenlítőn.

A nedvességnek ez a zónális eloszlása az általános atmoszférikus cirkulációval függ össze. Az egyenlítő vidékén a felszálló légmozgásokkal, a szubtrópusokban a leszállókkal. A magas szélességeknek többnyire a pólus felé irányított légáramlásai pedig fokozatosan lehűlnek és így magasabb nedvességre tesznek szert.

Azok a tényezők, amelyek az izovaporák zónális elrendeződését megzavarják, fontos szerepet kapnak az izohumidák kiképzésében is. Elsősorban kell említeni itt a kétféle felszín okozta, eltérő fizikai állapotok befolyását. Ezek okozzák azt, hogy a magas szélességek nagy nedvességű övezete az északi féltekén nem összefüggő terület, hanem széttagolt. Nyáron általában az óceánok felett van a nagy nedvesség, télen a szárazföldeken. A téli eloszlás különben térképünk alapján az idevonatkozó eddigi megállapítások bizonyos fokú kiigazítását teszi szükségessé.

Ismert jellemvonása a kontinentális télnek, hogy a levegő csökkenő párákészlet mellett sem lesz szárazabb, hanem a fokozódó hideg és a vele együtt csökkenő páraszükséglet miatt a kontinens belseje felé nedvességében még gyarapszik. A nedvességnek és tényezőinek ez az összefüggése azonban a 3. ábra szerint a kontinenseken befelé haladva csak bizonyos távolságig van érvényben, mert azon túl a levegő — a fokozódó kontinentális hideg ellenére is — fokozatosan egyre szárazabb lesz.

Az eurázsiai kontinens nyugati, európai oldalán egy nagy, — 85%-nál nagyobb nedvességű — terület helyezkedik el. A terület középvonalán (Észak-Francia-országtól a Fehér-tengerig) 90% fölé emelkedik a nedvesség. Azután kelet felé fokozatosan csökken s az Uralvidéken 80% alá, Kelet-Szibíriában 75% alá esik. A mini-



3. ábra. A nedvesség eloszlása januáriusban.

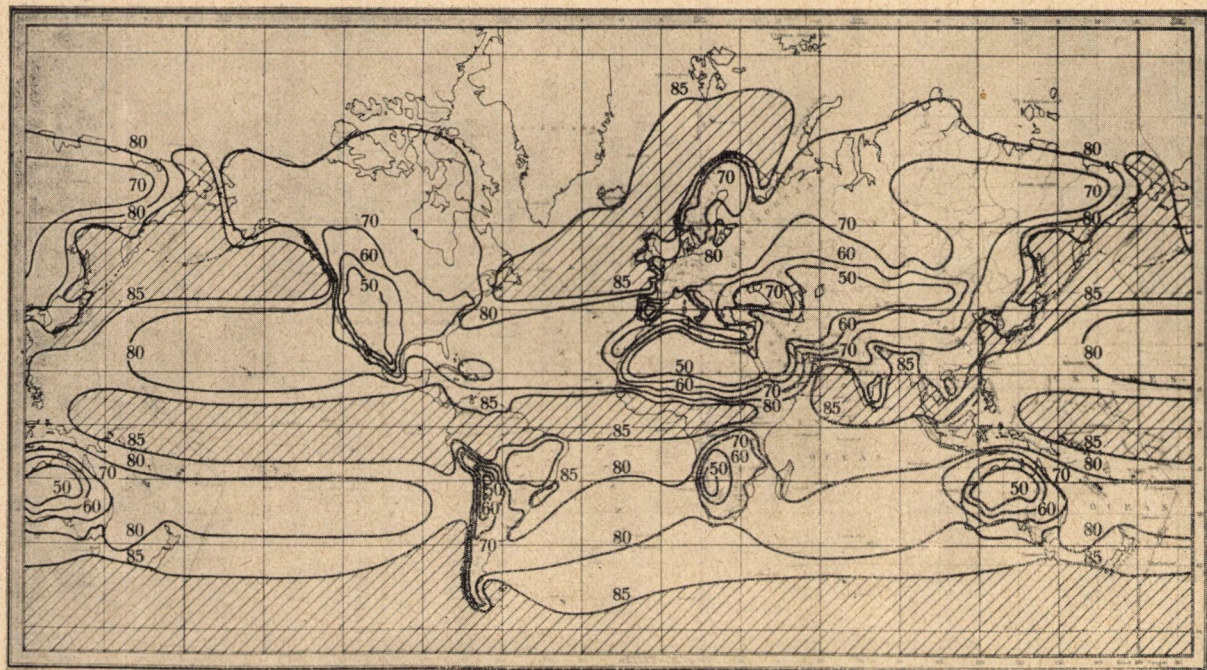
mum körülbelül összeesik azzal a rendkívüli módon páraszegény területtel, amelyet az 1. ábrán a 0·1 mm-es izovapora jelez. Tovább kelet felé a nedvesség ismét emelkedik és a partvidékeken újra megjelenik a 85%-os magas érték. A befagyott Bering-tenger természetesen kontinens módjára viselkedik.

Az észak-amerikai izohumidák szerkezete tökéletesen azonos az euráziaiakkal.

Hogy a szárazföldi hideg nedvességnövelő hatása egy bizonyos fokon túl megszűnik és a hideg további növekedésével a levegő nem közeledni, hanem távolodni kezd a telítettségi állapottól, az a párákészlet olyan nagymértékű megfogyatkozását tételezi fel, amelyet a hőmérséklet a nedvesség oldalán nem képes rekompenzálni. Ebből következik egyúttal, hogy a beálló nagy páraszegénységért a hőmérséklet nem lehet egyedül felelős, hanem abban más tényezők is közrejátszanak. A jelenség kétségkívül a két kontinensen uralkodó anticiklonális időjáráshelyzettel függ össze, mert ez a párábevitelnek és a páráképződésnek nem nyújt lehetőséget és ezáltal a páraellátást nagy területen akadályozza. Ehhez járul még, hogy a levegő turbulenciája itt jóformán hiányzik, ennek folytán párákhoz keveredés útján sem juthat, s így az anticiklon területe száraz folt gyanánt rögzítődik a kontinentális hideg súlypontjában.

A szárazföld nyári nedvességviszonyait ezekben a közepes és magasabb szélességekben elsősorban a hőmérséklet irányítja, mert a vízellátás rendszerint nem tudja a felfejlődő hőmérsékletek telítettségi hiányát lefedezni. Emiatt a nedvesség a szárazföld belseje felé fokozatosan csökken. A belső száraz területek azután beletorkolnak abba a nagy száraz övezetbe, amely a szubtrópusoktól kiindulva nyáron a kontinensek belseje felé nyomul.

A szubtrópusok vízszegénysége a nedvességben sokkal jobban kifejeződik, mint a párákészletekben. A sivatagokban 13—15%-os sokévi havi közepes sem ritkák. Száraz területeiket az 50%-os izohumidák foglalják körül, s vonulatukat csak egyes hegyvidékek, vagy tengerek szakítják meg. A kiadós téli esővel öntözött nyugati partvidékek kedvezőbb nedvessége természetesen jóval magasabb értékű izohumidákkal nyer kifejezést s gyakran megközelítik a 75 %-ot is.



4. ábra. A nedvesség eloszlása júliusban.

A forró égövön már nem a hőmérséklet, hanem kizárólag a vízgazdaság mérlege igazgatja a nedvességet. A szabályszerű és gazdag esőzések, a bőséges talajvíz, a nagy páratartalom, dús vegetáció mind okai és következményei az itten általában nagy és kiegyensúlyozott vízgazdaságnak és viszont magyarázata az itteni magasértékű izohumidáknak. Nedves, — 85%-os páratöltést meghaladó — övezet fogja körül itt a Földet s ez a Nap járását követve észak-déli irányban változtatja helyét.

A nedvesség zónális rendjének további megbontását okozzák a kétféle felszín között kifejlődő és egymást évszakosan váltogató monzun-szelek. A kontinensek belsejéből fújó száraz téli monzun hatását mutatják az izohumidák Észak-Amerika, de különösen Ázsia keleti oldalán, továbbá Elő-Indiában. A nyári monzun szerepét viszont leghatalmasabb kifejlődésének színhelyén, Dél-Ázsiában ábrázolják élesen. Az Indiai-óceánnak ez a hírneves szélrendszere magával ragadja a forró égövi nedves övet és azt helyzetéből kiszakítva, rázudítja a szárazföldre.

Az ázsiai forró égövi monzun nedves területe a kontinens keleti oldalán megszakítás nélkül átmegy a szubtrópusi, majd a mérsékelt övi monzun hatásterületére. Ez a tény világosan rácsfol arra a felfogásra, mintha a monzun kizárólag forró égövi szél lenne. A magas és közepes szélességekben az európai oldalon is megvan a monzun és ha az útjában álló hegységek víztartalmának nagy részétől meg nem fosztanak, hatását beljebb a kontinensen is jóval erősebben éreztetné.

A nedvesség réteges eloszlását megzavarják végül a hegységek, ezeknek hatását azonban a 400 m-en felüli állomások kirekesztésével az ábrázolásból kihagytuk.

A nedvességnek a magassággal való összefüggése meglehetősen bonyolult és egységes formulába nem is szorítható jelenség. Azokban a magasságokban, amelyekben rendszeresen keletkezik kondenzáció, a nedvesség magas. Ez a magasság a forróégövi esőterületen 1300—1600 m. Az esős évszakban a levegő itt szinte állandóan vízgőzzel telített. Magasabb szélességeken ez a nedves övezet nem ilyen kifejezett és nem is állandó. Télen egészen alacsony, nyáron jóval magasabb. A nedvesség vertikális magatartása itt nem is annyira a kondenzációs-nivóra, mint inkább dina-

mikus okokra vezethető vissza. A felszálló levegő ugyanis fokozatosan lehül és közeledik a telítettséghez. A leszálló levegőben fordított jelenség következik be. Mivel a magaslatokra nyáron a felszálló, télen a leszálló légmozgások jellemzők, a nedvesség a magassággal nyáron növekszik, télen csökken. Végeredményben a magaslatok és mélyebben fekvő környezetük között kifejezett évszakos ellentét alakul ki.

Az izohumidák zónális szerkezete az óceánokon sokkal jobban kifejlődik, mint a szárazföldeken, mivel az atmoszféra általános cirkulációja a tengereken zavartalanabban jut érvényre. Az egyenlítői nedves övezetet a szubtrópusi száraz követi, de ez itt korántsem mutat fel olyan alacsony értékeket, mint a szárazföldön. A kontinensek közelében azonban 70% alatti értékek a tengeren is előfordulnak. A szubtrópusoktól fölfelé az óceánok felett a levegő nedvessége évszakos változásokat tüntet fel: nyáron nagy a nedvesség, télen kisebb. Az ingadozás azonban alig haladja meg a 10 %-ot.

Az óceánok felett a nedvességeloszlásban fontos szerephez jutnak a tengeráramlások. A meleg áramlások alacsony földrajzi szélességről jutnak magasabb szélességre, tehát melegebb helyről hidegebbre. A hideg áramlások ellenkezőleg mozognak. Mindkét esetben tehát arról van szó, hogy a vízfelszín és a rajtafekvő levegő között hőmérsékletkülönbségek lépnek fel. Bár ezek a hőmérsékletkülönbségek a kétféle áramlás fölött ellenkező értelműek, a nedvességre egyaránt fokozólag hatnak. Különösen a hideg áramlások felett fejlődik ki nagyfokú nedvesség, a hideg vízfelszínnel érintkező levegő erős lehülése következtében. Feltűnő ez a jelenség a perui, loangói és szomáli, valamint a kaliforniai és a marokkói partokon, mert ott a hideg áramlások hatását mélységből feltörő, rendkívül alacsony hőmérsékletű vizek is fokozzák. Ezért olyan gyakoriak a ködök és borulások ezeken a vidékeken.

IV. Összefoglalás.

A légnedvesség eloszlását két fő tényező, a hőmérséklet és a vízháztartás szabályozza. A hőmérséklet dönti el a párabefogadás határát, a vízháztartás pedig a páratöltés mértékét. Mindkét

tényező maga is összetett jelenség, és számos ok eredője gyanánt jelentkezik.

A légnedvesség a szokásos két meghatározásban — tehát a párainyomásban és a nedvességben — egyaránt zónális elosztást követ, bár az eloszlás szerkezete a kétféle értelmezésben nem teljesen fedi egymást. A forróégövön a páratartalom és a nedvesség egyaránt nagy, mert nagy vízgazdagság és magas hőmérsékletek vannak jelen. A szubtrópusok felé mind a páratartalom, mind a nedvesség erősen csökken — különösen a szárazföldek belsejében — mert a magas hőmérséklettel itt szegényes vízháztartás áll szemben. Az eddig együtthaladó zónális elrendeződés a magas szélességekben szétválik és ellentétes irányt követ és igen csekély páratartalom mellett nagy nedvesség fejlődik ki. Az itteni alacsony hőmérsékletek párafeltevő képessége ugyanis olyan kicsi, hogy aránylag szerény vízkészletek is magas páratöltést hoznak létre.

A párainyomásban tehát *egy* magasértékű zóna van, az egyenlítőn, s onnan a pólusok felé fokozatosan csökken a párákészlet. Ezzel szemben a nedvességben *három* magasértékű övezet van: egy trópusi és két arktikus. A forróégövi nedves övet elsősorban a nagy vízbőség, az arktikusokat az alacsony hőmérsékletek hozzák létre.

A nedves övezetek közé ékelődnek be a szegény vízellátású, szubtrópusi száraz területek, s ezek a kontinenseken gyakran szélsőséges értékeket vesznek fel. A száraz és nedves zónák közötti átmenetet változó nedvességű, az év egy részén nedves, másik részén száraz területek adják. Az egyenlítői oldalon ilyen az egyperiódusú esők övezete, a poláris oldalon pedig a mérsékelt zóna közepes szélességekben fekvő része.

Az egyes övezetek vízgazdaságának állapota, valamint annak a különböző hőmérsékletek által való igénybevétele lényegesen eltérő. Az arktikus vidékeken az alacsony hőmérsékletű levegő a vízkészletnek csak jelentéktelen kis részét tudja magába venni, ezért a készlet nagyrésze a talajon és a talajban marad. A szubtrópusi száraz övben, — különösen a sivatagokban — a magas hőmérsékletű levegő mohón emészti meg az egész vízkészletet, úgyhogy a talajon és a talajban jóformán semmi sem marad. A trópusi öv rengeteg víztömegei viszont bőven ellátják vízzel nem-

csak a levegőt és a talajt, hanem a nagy vízigényű, buja növényzetet is.

A változó nedvességű területek, vagyis az egyperiódusú esők övezete és a mérsékelt öv említett része ebben a tekintetben is átmenetül szolgál. Az egyperiódusú öv ugyanis télen, a mérsékelt öv nyáron szubtrópusi sajátságokat vesz fel. Az ellentett évszakban viszont előbbin a trópusi vízbőség, utóbbin az arktikus nedvesség lesz úrrá.

Az eloszlás zónális rendjéből kiugró hegyvidékek és monszunterületek hőmérsékleti és vízgazdasági viszonyai pontosan beilleszthetők a fent bemutatott övezetekbe, mivel csupán azok sajátságait variálják és azokat térben és időben eltolják.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. márc. 21-én tartott üléséből.)

JÄHRLICHER GANG DES DAMFDRUCKES UND DER FEUCHTE AUF DER ERDE.

Von JOSEPH SZÁVA-KOVÁTS.

Diese Abhandlung ist auf die Beobachtungen der Periode 1920—1929 gegründet. Die Zahl der untersuchten Stationen beträgt rund 6000; die sich auf den Ozean beziehenden Werte wurden berechnet. Die Darstellung sowohl des Dampfdruckes, wie auch der Feuchte geschah durch Isolinien, welche der herkömmlichen Wortbildung gemäss *Isovaporen* und *Isohumiden* genannt wurden. Fig. 1 und 2 stellen die Isovaporen des Jänners, resp. Julis in mm-n, Fig. 3 und 4 die Isohumiden des Jänners, resp. Julis in %-n dar. Beide Isosysteme befolgen eine zonale Verteilung, die Konstruktion derselben ist aber verschieden. Im Dampfdruck gibt es namentlich *eine* Zone von hohem Werte: am Aequator, von wo der Dampf-vorrat gegen die Pole hin stufenweise abnimmt. In der Feuchte gibt es *drei* Gürtel von hohem Werte: einen tropischen und zwei arktische.

Die Studie erscheint in vollem Umfange in den «Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie».

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. März 1938.)

MAREK JÓZSEF R. T. BEMUTATÓ ISMERTETÉSE
A MANNINGER REZSŐ L. TAGGAL EGYÜTT MEGÍRT
«SPEZIELLE PATHOLOGIE UND THERAPIE DER HAUS-
TIERE» CÍM ALATT 7. KIADÁSBAN MEGJELENT MUNKA
TARTALMÁRÓL.

(Előterjesztetett a M. T. Akadémia III. osztályának 1938. június 20-án
tartott ülésén.)

Tizenhat esztendővel ezelőtt szerencsés voltam erről a helyről bemutatni a HUTYRA FERENCCEL együtt német nyelven megírt és GUSTAV FISCHER jénai cégnek 6. kiadásában megjelent háromkötetes állatorvosi belgyógyászatot. Ez alkalommal szerencsém van a munka 7. kiadását egészen röviden ismertetni és bemutatni, előrebocsátva azt, hogy HUTYRA FERENC, volt tiszteleti tag elhalálása folytán az addig általa szerkesztett, az 1. kötetet kitöltő járványtani rész megírását MANNINGER REZSŐ, HUTYRA volt tanítványa és már régen tanszéki utóda vállalta.

A kiadó cég késlekedése folytán a kézirat összeállítása teljes öt évet vett igénybe, minek következtében az időközben többé-kevésbé teljesen elkészült kéziratnak újabb és újabb átdolgozása vált szükségessé. Ez a körülmény és a munka terjedelmének a kedvezőtlen gazdasági viszonyok parancsolta lényeges csökkentése arra kényszerítették a szerzőket, hogy a szöveget a lehető leg-rövidebben, szinte mondatokkal és szavakkal takarékoskodva, elejétől végig teljesen újból megírják. Ez természetszerűleg nemcsak időtrabló, hanem rendkívül fárasztó újrafogalmazást követelt, ha azt akartuk, hogy az előző kiadások lényeges tudományos és gyakorlati megállapításai mellett a legújabb és korszerű kutatások eredményei mind megfelelő figyelemben részesüljenek. Ilyen módon

sikerült a 6. kiadásban három kötetre bővített munka tartalmát újból két kötetben elhelyezni, egyben pedig — erős a reményünk — vele az állatorvosi járvány- és belorvostan korszerű állását az olvasó elé tárni. Ezzel kapcsolatban megjegyezni óhajtom, hogy a munka a németen kívül még más öt idegen, nevezetesen angol, olasz, orosz, spanyol és török nyelven és részben több, egészen négy kiadásban is megjelent.

A munka tartalmát ebben a kiadásban is végig az önállóság jellegével ruháztuk fel, annyiban, hogy habár természetszerűleg mások kutatásainak megállapításait és megfigyeléseit szintén teljes mértékben értékesítettük, azokat saját kutatási eredményeink és gazdag tapasztalataink szűrőjén átbocsátva és saját észleleteinkkel kiegészítve illesztettük be a szövegbe.

Egyébként az összes fejezetek szövege általában lényegesen módosult és az újkori vívmányokhoz és kutatási eredményekhez alkalmazkodik. Különös figyelemben részesültek a köz- és állat-egészségügyi vonatkozásban elsősorban fontos fertőző járványos, valamint az élősködők okozta, az utóbbi időben különösen kiterjedten és alaposan tanulmányozott betegségek az emlős háziállatokban, a madarakban és az újabban mind kiterjedtebben tenyésztett prémes állatokban. Az egészen új fejezetek száma 59, az alapjukban egészen átdolgozott és módosított fejezeteké 92.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. jun. 20-án tartott üléséből.)

CSONTFEJLŐDÉS ÉS MECHANIKAI IGÉNYBEVÉTEL.¹

KROMPECHER ISTVÁN-tól.

Négy képpel.

VI. tábla.

I. Praeformatio. A fejlődés módjának összefüggése a mechanikai igénybevétellel. A nyomásos és húzásos csontfejlődés statikája.

A csontváz jelentékeny része az embryonalis és postembryonalis fejlődés folyamán is porcosan praeformált, a csontváznak egy másik részén pedig kötőszövetes praeformatiót látunk. Azzal a kérdéssel, hogy az egyes csontok miért voltak egyáltalában praeformálva, alig foglalkoztak részletesebben, mert erre a phylogenesis látszott meggyőző okként szerepelni.

Közvetlenebb kérdés volt, *hogy miért vannak egyes csontok porcosan, mások kötőszövetesen praeformálva.* E kérdésre senki sem tudott kielégítő választ adni. Voltak, akik phylogenetikai okokra hivatkoztak, de ez az érvelés távolról sem volt kielégítő, de még helytálló sem, mert ismeretessé vált, hogy alacsonyabbrendű állatok porcos vázrészei a magasabbrendűeken kötőszövetesen, még magasabbrendűeken ismét részben porcosan fejlődnek. Itt tehát más okok is közrejátszanak. Gondosabb megfigyelés azt is kiderítette, hogy ugyanazon csont különböző felületei más és más módon fejlődnek: például a csövescsontok diaphysise a végdarab felé, tehát hosszában chondralisan nő, míg ugyanazon csontrészt vastagsághelileg periostalisan, tehát kötőszövetesen fejlődik. E kér-

¹ A Kir. Magy. Orvosegyesület fennállásának 100-ik évfordulója alkalmából a Szenger Ede-pályadíjjal kitüntetett munka.

désben a tudomány a tények megállapításánál tovább nem tudott haladni. Félreértések elkerülése végett rögzítem, hogy a csont praeformatíóján azt értem, hogy a fejlődő fiatal csontréteg helyét előbb milyen szövet foglalta el. A tibia hossznövekedésénél pl. az epiphysislemez porcogója a praeformatív szövet (*chondralis* csontfejlődés), a tibia vastagságbeli növekedésénél viszont a csonthártya, ill. annak kötőszöveve szerepel praeformatív szövet gyanánt (*desmalis* csontfejlődés). A régebben használt «perichondralis csontfejlődés» elnevezést, ami azt akarja kifejezni, hogy a csont egy porcogós minta köré rakódik le, elhagyom, mert az újabb csontrétegek periostalis lerakódásánál nem jön számításba, hogy legbelül pore, vagy pedig — amint azt a koponya fedőcsontjain látjuk — esetleg agyvelő helyezkedik el. (A histogenetikailag félreértéshez vezető «perichondralis» megjelölés fenntartásával következetesen «pericerebralisnak» kellene e fedőcsontok fejlődés-módját jeleznünk.) A csontfejlődés módját tehát a szerint jelöljük meg, amilyen szövettípus a növekvő felületen a csontszövetet határolja. Ez alapon a csontfejlődésnek három módját különíthetjük el: 1. másodlagos csontfejlődés porcos praeformatio alapján, ahol a növekvő felületet porcogó határolja: *chondralis* csontfejlődés; 2. másodlagos csontfejlődés kötőszövetes praeformatio alapján, ahol a növekvő felületet kötőszövet (csonthártya) határolja: *desmalis* csontfejlődés; 3. elsődleges csontfejlődés, praeformatio nélkül, ahol a növekvő csontfelületet semmiféle kialakult, érett támasztószövetféleség nem határolja (tehát sem porcogó, sem kötőszövet), hanem csak az érhálózatot kísérő differenciálatlan sejtek vannak jelen, amelyek mindjárt valamennyien csontsejteké lesznek: *primaer angiogen*-csontfejlődés.

Egy korábbi munkámban már megállapítottam az egyes csontfejlődési módoknak a mechanikai viszonyokkal való összefüggését, nevezetesen azt, hogy a *chondralis* csontfejlődést a nyomásnak kitett csontfelületeken észleljük, a *desmalisat* a húzásnak (izom-és szalagtapadás) kitett csontfelületeken; a *primaer angiogen*-csontfejlődést pedig olyan csontfelületeken, amelyek semmiféle közvetlen mechanikai behatásnak, nevezetesen sem nyomásnak, sem húzásnak nincsenek kitéve. Ilyen helyeken rendszerint érhálózat határolja a növekvő csontfelületet.

Ez összefüggést a fejlődésmód és a mechanikai igénybevétel között az embryonalis és postembryonalis csontfejlődés rendszeres vizsgálatakor sikerült felfedeznem. Ez az összefüggés a vizsgálatok kiterjesztésével mindenütt leolvasható volt. Ezenkívül azonban a regeneratív csontképződésre (kallusképződésre) vonatkozó kísérleteket is végeztem (Magy. Sebésztársaság, 1935., M. Path. Társ. 1935., Orv. Hetilap 1936., Anat. Ges. 1935.), amelyek kimutatták, hogy egyazon helyen a kísérletileg előidézett *nyomás* hatására a regeneratív csontfejlődés *chondralisan* megy végbe, hogyha pedig ugyanott *húzóhatást* alkalmazunk, az a *desmalis* fejlődési módon való csontképződést váltja ki. Sőt sikerült kísérleteimben azt is kimutatnom, hogy a húzás alatt desmalisan megindult fejlődési mód a közben bekövetkezett nyomás hatására chondralisba csap át és viszont. E kísérletek, nemkülönben az ezekkel összevágó klinikai megfigyelések (PERNYÉSZ: M. Sebésztársaság. 1935., Orv. Hetilap, 1935. 50. sz.) most már minden kétséget kizárólag beigazolják, hogy a csontfejlődés módjának a mechanikai viszonyokkal való összefüggése csakugyan fennáll úgy, amint azt előbb vázoltam.

E megállapításnál továbbmenve, tekintsük most meg közelebbről, hogy mi a szerepe a nyomás alatti porcos, illetőleg húzás alatti kötőszövetes preformatiónak, vagyis hogy mi a mechanizmusa a nyomásos és a húzásos csontfejlődésnek. Milyen mechanikai berendezés biztosítja azt, hogy a csontfelszín az állandóan beható nyomás, illetőleg húzás ellenére is képes egyre növekedni, és hogy ebben a porcos, illetve kötőszövetes váznak mi a közvetlen szerepe.

A nyomásos csontfejlődés statikája. A nyomásos, porcosan előképezett csontfejlődés statikai berendezésének tárgyalása előtt irányítsuk figyelmünket azon anatómiai tényre, hogy a növekedés befejezése után a *kifejlődött* csontvázrendszeren is minden nyomásnak kitett csontfelületet porcogó von be. Tehát nemcsak minden ízület felületen található meg a porcogó, hanem valamennyi egyéb nyomásnak kitett csontfelületeken is, mint pl. a sulcus ossis cuboidein (a musculus peroneus longus ina nyomja) és más ehhez hasonló módon nyomásnak kitett csontfelületeken. Ennek a porcbevonatnak többek között az a szerepe, hogy plaszticitásánál fogva

átmeneti anyagot képezzen a lágyrészek és a merev csontállomány között.

A *növekvő* csont porcbevonatának azonban még egészen különleges statikai szerepe is van. A nyomás ugyanis a megterhelésnek kitett csontfelület porcétegét éri és az adja át a nyomást úgy, hogy az az alatt is, amíg a nyomás éri, annak az irányában, avval szemben növekedésre képes. Ez úgy lehetséges, hogy a porcogó — mint ismeretes — nem lap szerint határolódik a növekvő csontfelülettel, hanem nyulványokat, irányítógerendákat bocsát a csont mélyébe. Az irányítógerendákat azután alul hüvelyszerűen növi körül a fiatal csont és rögzíti (1. a 2. sz. ábrát). Az irányítógerendák rögzítése révén a szilárd összeköttetés a porcogó és a csont között biztosítva van. A rögzítésmódra nézve fontos az a körülmény, hogy az irányító gerendák széle legkevésbé sem egyenletes, hanem felületén a porcsejtek üregeinek megfelelő homorulatok, ill. az azokat elválasztó kiemelkedések váltakoznak. Az irányítógerendafelület tehát fogazott. Amikor a fiatal csont az irányítógerendát körülnövi, ezen fogazott felületnek minden hézagát kitölti, a csontsejtek oda betelepülnek, ott termelik a csontállományt, ami ép viszonyok között mindjárt elmeszesedve, mozgáshatárolt befogja az irányítógerenda végét. Az irányítógerenda tehát nemcsak az oldalirányban való elmozdulással szemben biztosított, hanem fogazott profilja révén elcsúszása a hossz tengely irányában is lehetetlen. Ezen így rögzített irányítógerenda mentén most köröskörül kúsznak fel a capillarisok körüli mesenchyma-sejtek és osteoblastokká determinálódva egyre magasabban telepsznek be az irányítógerendák porcsejtelhagyta vajúlataiba. Amint ez az enchondralis csontfejlődés leírásából ismeretes, a porcogónak a csonttal határos részén a kukoricásorokba rendeződött porcsejtek folytonosan pusztulva, újabb és újabb szakaszait hagyják csupaszon az irányítógerendának. E köré azután, a porcsejtek pusztulásával lépést tartva, rátelepsznek a fiatal csontsejtek. A mechanikai viszonyok megfigyeléséből kitűnik, hogy az irányítógerenda alul megfelelően rögzítve lévén, felső szakaszaira a rákúszó osteoblastok mindennemű lényeges közvetlen mechanikai igénybevételtől mentesen tudják a fiatal csontot építeni. Az alapállománytermelés folyamata, ill. az osteoblastoknak osteocytákká való

kialakulása az alul már beépített irányítógerenda ezen felsőbb szakaszán még a csont erős megterhelése alatt is, minden közvetlen behatástól mentesen, símán, zavartalanul folyhatik le.

Az irányítógerenda, ismeretes módon, fönt a porcogóból nyúlik ki. Annak tehát a porcogóból való kinyúlása és a még ép porclemezzel való mechanikai viszonya is érdemel valamelyes figyelmet. Ehhez előre kell bocsátani, hogy a porcogó maga olyan mesenchyma-származású primitív támasztószövet, amely a nyomást szerkezeténél fogva jól bírja. Sőt az embryologiai, csontfejlődési, histogenetikai és experimentalis vizsgálatok tanulsága szerint éppen a nyomás helyén fejlődik ki és ott növekedésre is képes. *A csontnak mint szervnek a tényleges növekedése valójában a porcogóra esik és a porcogó cserélődik ki a porccsonthatáron az imént vázolt módon csontszövetre.* A porcogó alapállománya a kukorica sorokba való rendeződés területén fokozatosan elmeszesedik, úgy-hogy a porclemez a reá nehezedő súlyt a saját alsó, egységes, elmeszesedett részének adja át. Ez elmeszesedett alsó porcrészen gyökerezve nyomulnak ki a diaphysis felé a felpuffadt porcsejtek elpusztulása után csupaszon maradó, már korábban elmeszesedett irányítógerendák, melyek az előbb leírtak szerint a csontépítés területét mechanikailag semlegesén hagyva, az alsó, már beépített végükön adják át a nyomást a már megszilárdult, megerősödött csontgerendáknak. Az összeköttetést tehát csak a nyomást jól bíró meszes gerendák létesítik, amelyek a porcsejtek pusztulása révén fönt mindig kibontakoznak, alul pedig a reájuk kúszó csont-hüvelybe egyre beleépítődnek. Ez a csontszövettel való behüvelyezés tehát felül mindig erősödik; amikor azonban az irányítógerenda már kellő magasságban be van fogva, akkor az elemi csontgerenda a szivacsos csontállománynak a növekedéssel és igénybevétellel kapcsolatban végbemenő állandó átépülése folytán részben vagy egészben lebontódik.

E statikai szerkezet *conditio sine qua non*-jának tekintjük az irányítógerendának és a csontszövetnek az ép viszonyok között mindig fellelhető merevségét. Hangsúlyoznunk kell már itt, hogy amennyiben akár az irányítógerenda, akár pedig a fiatal csont elmeszesedése zavart szenved, e berendezés alkalmatlanná válik. Ily esetben (pl. rhachitissnél) a berendezés csődöt mond, a növekvő

csont nem tud a physiologiailag az ízület felületének felől beható nyomásnak ellentállni és így benne többé-kevésbé súlyos roncsolások jönnek létre. E káros esetek egyúttal bizonyítékaul szolgálhatnak felfogásunk helyességének, mert azt mutatják, hogy e berendezésnek már a hibás, ill. tökéletlen volta esetén is a nyomott csontfelszínek képtelenek a normalis növekedésre.

A húzásos csontfejlődés statikája. A húzásos csontfejlődés statikájának ismertetésére térve át, mint említettük, a kötőszövetes, desmalis csontfejlődés módján növekszik itt a csontfelület. A fejlődési viszonyok ismertetése előtt állapítsuk meg itt is, hogy a *kifejlődött* csontvázrendszeren is minden húzásnak kitett csontfelület (in- vagy szalagtapadás) csonthártyával, tehát kötőszövettel bevont (nem pedig porcogóval, mint a nyomott felületeken) sőt ismeretes az is, hogy e területeken a kötőszöveti rostnyalábok mélyen beágyazottak a csontba, olyannyira, hogy nagyon erős húzásnál az in vagy szalag inkább a csontból szakít ki egy darabot, semhogy a csont felületéről leszakadjon. De hogyan kerültek ezek a rostnyalábok be a csont mélyébe? Magától értetődően a *fejlődés* folyamán. Ilyen fiatalabb növekvő, fejlődő képeket, ill. e húzás közben való csontfejlődésnek statikáját akarjuk éppen vizsgálni. A fejlődési folyamat követése, annak pontos ismerete a meglévő kép jobb megértését is hatékonyan elő fogja segíteni. Példának véve egy in vagy aponeurosisnak a fejlődő csontba való besugárzását, figyelemmel kísérhetjük, hogy a rostnyalábok kis mértékben széttérnek. A rostoknak a csonton kívüli és a csontban futó szakasza között irányeltérés, szöglettörés vagy számottevő elhajlás nincsen. (Még az izmok inainak a tapadásánál, ahol az izomműködés hatására elmozdult csont a helyzetét lényegesen megváltoztatta, ott is a különleges tapadási viszonyok és berendezések (rácsavarodás, kiterülés) révén a rostoknak csontonkívüli és csontonbelüli szakasza mindig egyirányú, a rostok befutása pedig párhuzamos marad. Egyik irányból ferdén a csontba hatoló in a visszája felé sohasem szenvedhet húzóhatást.) A csontfelületet ferdén érő, egymásközt nagyjából párhuzamosan futó rostnyalábok vége már csontszövettel, vagyis csontsejtekkal és az általuk termelt alapállománnyal van körülvéve, vagyis a csontszövetbe be vannak ágyazva. De akár ferdén érik a felületet, akár merőlegesen, miután a rostok egymással

nagyjában párhuzamosak és csak egy irányban húzódnak, a legfelületesebb osteoblastokat oldalirányban nem vonják. A rostok lefutásán ugyanis a következő három szakaszt kell itt egymástól elkülönítenünk: 1. a csontba már beágyazott részt, ahol is a rostnyalábokat egymástól kifejtett csontsejtek és az általuk termelt csontalapállomány választja el. Minthogy a collagen rostnyalábok hullámos lefutású rostokból állanak, a csontsejtek pedig a csontalapállományt (a diszmalis csontfejlődés pontosabb ismeretéből érthető módon) a rostnyalábok egyenetlen felületének minden egyes vájulatába beépítik, ebből következik, hogy a rostoknak ez első részlete rendkívül erősen rögzített. A rostokat a csontszövet oly erősen szövi itt körül, hogy azokat helyükből kiszakítani már nem is lehet. A rostok tehát a rájuk ható húzóerőt e mélyebb beágyazott részükben az őket körülfogó csontszövetnek adják át. 2. A rostok második szakasza a csont felületénél van. E területen nő appositionalisan a csont. Itt van az osteoblastok rétege. Itt termelik utóbbiak a csontalapállományt, tehát ez az a zóna, ahol a rostoknak egyre további szakasza lesz csonttal körülágyazott. Minthogy azonban a rostoknak a vége a csont mélyebb rétegeiben már rögzített, a húzóerő pedig — amint azt már előbb hangsúlyoztuk — mindig csak egy irányban hat, e szakasz a környezetéhez viszonyítva mechanikai szempontból semleges. Ezért tudnak itt az osteoblastokká determinált mesenchyma-származékok csontalapállományt termelve osteocytákká kialakulni. 3. Az inba vagy szalagba folytatódó harmadik rész az, amelyre a húzóerő hat. A rostokra ható feszülés, ill. húzás révén a közti területek nemesak tehermentesülnek, hanem védett helyzetbe is kerülnek.

Összehasonlítva a két képet, rajtuk szembeötlő elvi megegyezés észlelhető: a csontfelületen kívül helyezkedik el a praeformatív szövet, amelyre a közvetlen mechanikai igénybevétel hat (nyomáskor a porelemez, húzáskor az in), az folytatódik a praeformatív szövet kisugárzásaiba (nyomáskor a porcogós irányítógerendák, húzáskor a kötőszöveti collagen rostnyalábok), amelyek a rájuk ható mechanikai behatást nyomó, ill. húzószilárdságuknál fogva továbbítják, a nélkül, hogy a szomszédságukat megterhelnék, a végük pedig egyformán mozdíthatatlanul körülágyazott csontszövettel. Ez az egész csontindividuummal mereven összefüggő csontdarab veszi át

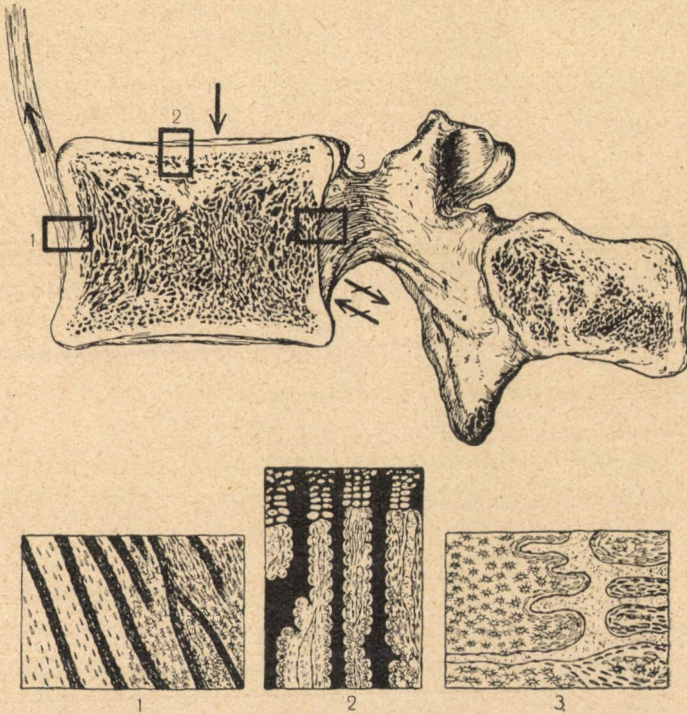
a nyomást, ill. húzást. A közti, semleges, átvívó szakaszon megy végbe mindkét esetben a csontfelület appositionalis növekedése. Úgy az állandóan kifeszített, mozdulatlan rostnyalábok, mint az ugyancsak mozdulatlan irányítógerendák között csak a legminimálisabb mechanikai behatás érheti a csontsejteket alapállomány-termelési tevékenységükben.

A primaer angiogen csontfejlődés viszonyai. Tekintsük meg harmadsorban a primaer angiogen csontfejlődés viszonyait, különös tekintettel az ott szereplő mechanikai viszonyokra. Bevezetőül már említettük, hogy a primaer angiogen csontfejlődés éppen azokon a csontfelületeken megy végbe, amely csontfelületeket közvetlen mechanikai igénybevétel nem éri. Távolról sem akarjuk azonban ezzel azt mondani, hogy az ott termelt csontszövet nem fog mechanikai igénybevételnek ellenállni; nagyon is fog, de olyan igénybevételeknek, amelyek nem a növekvő felület felől, hanem valamely erre merőleges irányból hatnak. Például a varrat felé tekintő csontfelületeken primaer angiogen módon termelt csontot a külső felület felől érheti közvetett igénybevétel; vagy a csigolyatest hátsó (gerincevelői) felületén képződött csontgerendák is részt vesznek az egyes csigolyákat érő megterhelés viselésében, de physiologiai körülmények között sohasem fogja a primaer angiogen módon fejlődő csigolyatest hátsó felületét a gerincevelő felől húzás vagy nyomás érni. E helyeken tehát sem a nyomást a mélyebb rétegeknek átadó porcos irányítógerendára, sem pedig a húzást a csont mélyébe hárító kötőszöveti collagen rostnyalábokra nincs szükség, hanem csakis osteoblastokra és az azokat nevelő érhalózatra.

II. A csontfejlődési mód és mechanikai igénybevétel összefüggésének bemutatása és megbeszélése a csontváz egyes csontjain.

Tekintsünk példa gyanánt egy még fejlődésben lévő csigolyát és kíséreljük meg arra alkalmazni, ill. arról leolvasni a fejlődésmódnak az igénybevétellel való fentebb vázolt összefüggését. A csigolya testének cranialis és caudalis felülete a csigolyaközötti porekoronokok közvetítésével a felette, illetőleg alatta lévő csigolya testével függ össze. Felülről és alulról állandó tetemes nyomásnak van ki-

téve, amit nemcsak fennálló vagy ülő helyzetben a test súlya idéz elő, hanem a törzs hosszanti izomzatának állandó tónusa is. A csigolyaközötti porcok rostos porcogóból áll, de ez a csigolya testének felső, ill. alsó felületével közvetlenül nem is érintkezik, «mert a csigolyatesteknek feléje tekintő felületét innen vastag



1. kép. A csontfejlődés módja függ a beható mechanikai erőktől. 1. húzásos helyen desmalis; 2. nyomásos helyen chondralis; 3. mechanikailag semleges helyen primaer a csontfejlődés.

üvegporcogóréteg fedi: a csigolya porctelepének el nem csontosodott része; csak ehhez illeszkedik a fibrocartilago» (LENHOSSÉK: Az ember anatómiája. I. kötet, 52. old. 1922). A csigolya testének alsó és felső, nyomásnak kitett felületei tehát chondralisan fejlődtek, sőt, mint nyomott felületek még a felnőtt korban is porc réteggel bevontak.

Tekintsük most meg az *elülső* felületet. Itt, mint ismeretes, a gerincoszlop egész hosszán a lig. longitudinale anterius fut: szóval a csontot kötőszövet határolja. E szalag vet gátat a gerincoszlop túlzott hátrahajlításának, miután a csigolyák elülső felületét egymáshoz rögzíti. A fiatalabb embryonalis korban a csigolya mindenestül porcos volt ugyan, de az elülső felületét már akkor is a rostos szerkezetű porchártya vonja be, ami az akkor még csekélyebb fokú húzásnak ellen tudott állani. De már a születés előtt csontos a csigolya testének elülső felülete és azt az egész élet folyamán beléje sugárzó kötőszöveti collagen rostnyalábok határolják. Kétségtelen, hogy e szalag feszülése révén a csigolyák ez elülső felületét *húzóhatás* éri. A csontfejlődés módja itt *desmalis*. A csontfelületet nem porcogó, hanem kötőszövetből álló csonthártya, ill. szalag vonja be.

A csigolya testének hátulsó, gerincevelő felé tekintő felületét *sem nyomás, sem húzás nem éri*. Található itt ugyan egy szalag. a lig. longitudinale posterius, ennek a csonttal való összefüggéséről azonban a következőket olvashatják: A csigolyatestekkel csak lazán függ össze, tőlük venás fonat választja el, csak a porcogókkal van szilárd összeköttetése. (LENHOSSÉK: ugyanott 53. old.) Itt, ahol a csontfelületet sem porcogó, sem kötőszövet nem vonja be, hanem közvetlenül az érhálózat, találjuk a *primaer angiogen csontfejlődést*. (L. az 1. képen.)

A *tibiára* a fenti elvek ugyancsak hamar vonatkozathatók. A tibiát rálépéskor és a hajlító és feszítő izmok synergismusa következtében az epiphysisek felől, vagyis hossznövekedésük irányából éri a nyomás. Ismeretes, hogy nemcsak a tibia, hanem az összes csövescsontok is hosszirányban, a porcos epiphysisvonalak mentén és a porcogóval bevont ízületfelületeken növekszenek. *Tehát ott, ahol a tibiát növekedés közben nyomás éri, a porcosan praeformált csontnövekedési módot találjuk*. A növekedés befejeztével az epiphysisporcogó eltűnik, a diaphysis és epiphysisek összeforrnak, de az ízületi felület felől továbbra is beható nyomás helyén a porcogóbevonat megmarad.

A tibia diaphysisét a rajta eredő izmok, aponeurosisok és fasciák közvetítésével különböző irányú húzás éri. E húzóhatás pedig olykor igen erős: lig. patellae proprium, pes anserinus, ízületi

szalagok, lábszárizmok eredése stb., de nem kicsinyelendő le a membrana interossea, valamint a fascia cruris feszülés által létrejövő húzása sem. A tibia egész diaphysisét, de még az epiphysisek porcogóval be nem vont, *húzásnak kitett felületeit is csonthártya, azaz kötőszövet vonja be, a csontfejlődés módja pedig itt a húzásnak megfelelő desmalis.*

Említésre méltó, hogy a tibia térdizület felé tekintő izületi felületének közepe táján az izületen belül futó keresztzalagok eredésén a húzásnak megfelelően megszűnik az izületi porcbevonat és helyet ad a desmalis szalageredésnek. Ugyancsak megemlíthető, hogy a tibiának a fibulával való proximális összeköttetésénél, ahol a fibula alátámasztja (nyomja) a tibia alsó felületét, porcogóval bevont izületes összeköttetés van, a distalis epiphysisek között ellenben, ahol a talus haránthenger izületi felülete a lábszárcsontok villáját szétfeszíti, a húzásnak megfelelően syndesmosis, azaz szalagos, kötőszövetes összeköttetés és a fejlődés folyamán desmalis csontfejlődés található.

Az anatomusok által eddig is jól ismert, de kellően nem értelmezett arra a tényre is rá kell mutatnom, hogy az incisura ischiadica minornak porcborítéka van, ami egyesegyedül a musculus obturator internus *nyomásának* tulajdonítható, mert hiszen a medencecsontnak minden más felületét (a nyomott izületi felületének kivételével) kötőszövet (csonthártya) borítja.

A fentemlített csontokhoz hasonlóan a csontváz számos más csontjának, ill. azok egyes részeinek csontosodási módja per analogiam minden nehézség nélkül logikus összhangba hozható a közvetlen mechanikai igénybevétellel.

Külön részletes tanulmányt igényelne a koponyacsontoknak a fejlődési és mechanikai igénybevétel szempontjából való megvizsgálása. E helyen csak egyetlenegy koponyacsontra, a nyak szirtsontra óhajtok rövid pár szóval, a részletezést elhagyva, rámutatni.

A nyakszirtcsont pikkelyrészének alsó felével a koponya-alap hátulsó gödrének jelentős részét képezi, a pikkely felső része azonban már a koponyaboltozat alkotásában vesz részt. Alsó része porcosan előképezett, a felső kötőszövetesen (LENHOSSÉK: Az ember anatómiája. 188. old.). Ezen eddig sok nehézséget okozott

ténynek a mechanikai igénybevétel szempontjából nagyon egyszerű a magyarázata: a kétféleképpen csontosodó rész határán, a *linea nuchae superior* mentén eredő *musculus trapezius* és a többi izom a felső részre húzóhatást gyakorol, azt a növekvő agyvelő is feszíti, tehát *desmalisan* nő. Az alsó rész azonban az izmok húzására neki-nyomul a gerincoszlopnak, mintegy beékelődik az izmok eredési és végpontja közé, amely nyomott helyzetének megfelelően porcosan előképezett telepe van. Csak egy pillantást kell ezután a többi koponyacsont fejlődés módjára vetnünk és tapasztalhatjuk, hogy a mechanikai igénybevétel szerint a többinek fejlődés módja is nem eredménytelenül lesz tanulmányozható.

III. A csontfejlődési mód és mechanikai igénybevétel összefüggése az ontogenesis és phylogensis különös szemmeltartásával.

Valamivel bonyolultabb a *clavicula* fejlődés módja, amennyiben ennél lehetetlen *phylogenetikai vonatkozásokat* figyelmen kívül hagyni.

Egybehangzó irodalmi adatok szerint az emberi embryón a legelső csontosodási mag — mint ismeretes — az embryonalis élet 7. hetében a *claviculán* jelenik meg. Középső része *desmalis* csontfejlődés alapján képződik. Később jelenik meg a két végén egy-egy porcos telep. Ennek a különös csontosodási módnak évtizedek óta sok kiváló kutató (GEGENBAUR, WIEDERSHEIM, GÖTTE, BRAUS stb.) kereste a magyarázatát. Különösen a múlt század második felében, tudatosan vagy az akkori általános természet-tudományi irányt öntudatlanul követve, HAECKEL phylogenetikai elgondolását szemmeltartva, a különféle fejlődés mód magyarázatát kizárólag a phylogenesisben keresték. A szervezet sok más csontjára nagyjából illettek a phylogenetikai alapon tett fejlődési elméletek, egyeseknél azonban igen súlyos nehézségek akadtak, aminek az áthidalására külön teoriák születtek. A kulcsont fejlődésének phylogenetikai alapon való magyarázása azonban még a kiegészítő teoriák beiktatásával sem látszott keresztülvihetőnek. Az *emberen* ugyanis, mint említettük, a *clavicula középrésze desmalisan*, két *végdarabja* pedig *porcosan* fejlődik, a *ló* *vestigium claviculae*-ja

desmalis pánt, porcós rész nélkül, *madarakon* a claviculának megfelelő csont minden porcós praeformatio nélkül *desmalisan* fejlődik. A hüllők egyes csoportjain (Chelonii, teknősök egy csoportja) *chondralis* fejlődésű a kulcscsont (WIEDERSHEIM), másokon (saurii) *kötőszövetes*. A kétéltűeken, a *békánál* például a *porcos claviculát desmalis csontvályú* veszi körül középső részében. Van — (GÖTTE szerint — olyan kétéltű is, amelyen a clavicula teljesen *hiányzik*. A *porcos halakon* ismét megtaláljuk a clavicula *porcos* telepét. Amikor a phylogenetikai sor tagjain egy vázrészre vonatkozólag a csontosodás módjának ekkora különbözőségét találjuk, nyilvánvaló, hogy a csontfejlődés módjának fajok szerinti, ugrásszerű változását phylogenetikai alapon nem tudjuk magyarázni, sőt meg kell állapítani, hogy ez a változás a phylogenetikai teoriával ellentétben van. Kísérreljük meg azonban a clavicula különböző csontosodási formáit az egyes fajokon, ill. individuumokon észlelhető functiókkal összefüggésbe hozni. A phylogenetikai kutatás során szinte kizárólag a csontokat, a mozgás passzív szerveit vizsgálták, a mozgás aktív szerveinek, az izmoknak a comparatív vizsgálata és phylogenetikában való felhasználása szinte érthetetlen módon háttérbe szorult. Pedig könnyen érthető, hogy az embryonalis fejlődés folyamán már élénk functiót kifejtő izomzat alakítólag fog hatni a mozgás passzív szerveinek a formálódására, kiváltképpen pedig annak fejlődési módjára.

Tekintsük meg például, mi a functionalis helyzete a *ló* *vestigium claviculae*-jének. Mint haránt-*desmalis* pánt be van iktatva a *musculus brachiocephalicus*ba. A *desmalis* telep teljesen összhangban van az izmok *húzóhatásával*. A *vest. clav.* két vége felől semmiféle nyomásos igénybevételnek nincs kitéve, miután a ló az elülső végtagját csak ingaszerűen mozgatja, *extendálja* és *flectálja*, *ab- és adductiót* azonban nem végez. — A *macska* más működést is végez elülső végtagjaival, nevezetesen *ab- és adducálja* (pofozó mozdulatot is végez). E működésénél a kulcscsont *desmalis* fejlődésű középső szakasza a *két vége felől* megtámasztásnak, *nyomásnak van kitéve*, amennyiben a lapocka és a szegycsont között a végtag adducálásakor nyomást szenved. Ennek megfelelően a macska kulcscsontjának két végén egy-egy kis *porcos* telep jelenik meg. A *madarakon* az elülső támasztószerepet a *coracoid* veszi át, amely-

nek végdarabjain jól kifejezett porcos ízületi felület van. A clavicularára (furcula) ilyenformán csak a húzásnak ellentálló szerep (izomtapadás) vár és ennek megfelelően *desmalis* (WIEDERSHEIM) fejlődésű.

Nagyon tanulságos, ha a *hüllők* claviculáját vesszük figyelembe. Itt a clavicula megtámasztásnak van kitéve a két végpontja felől (teknősbéka), e helyen porcos a telepe; ahol azonban a megtámasztást az erősebben kifejlődő coracoid látja el (*Hemidactylus verrucosus*, lásd WIEDERSHEIM, Lehrbuch d. vergleichenden Anatomie d. Wirbeltiere auf Grundlage der Entwicklungsgeschichte. G. Fischer Jena, 1882. S. 171—72, Abb. 122; 123) és a clavicula csak úgy helyezkedik el, hogy a két végén megtámaszkodni nem is képes, szalagos rögzítés mellett *desmalis* alapon fejlődik ki karcús csonttá.

Hosszadalmas volna a clavicula funkcióját és avval kapcsolatban a csontosodási módját a többi állaton követni. A lényegét, t. i. az igénybevétel és a csontfejlődési mód közötti összefüggést, a fenti adatok alapján is meg lehetett látni. Az ember kulcscsontjának fejlődése a fentiekből egyszerűen leolvasható: a *musculus trapezius*, *sternocleido-mastoideus* egyrészt és a *pectoralis major* — *deltoides* másrészt — közötti izomhúzás hatására *desmalisan* fejlődik a középrész. A *subelavius*, a váll rövid rotatorai és a felkar *adductorainak* a kifejlődése révén a clavicula a két vége felől nyomás hatásának van kitéve, mindeniken *porcos* telep képződik és a csontosodás ott *chondralis* úton megy végbe.

Bepillantást nyertünk a kulcscsont csontosodásának követésével a *phylogenesis*, *ontogenesis* és a *mechanikai igénybevétel kölcsönös viszonyának problémájába*. Az ontogenesisben, az egyén fejlődésében kétségtelenül vannak öröklött és veleszületett erők, amelyek eredményeként a szervezet egyes részei biológiai összhangban kifejlődésre jutnak. A múlt század második felében az igen nagy népszerűsége jutott phylogenetikai irány hatására HÆCKEL «biogenetikai alaptörvényének» értelmében az ember egyéni fejlődésének, ontogenesisének egyes phasisait phylogenetikai úton próbálták magyarázni, figyelmen kívül hagyva, hogy az egyén felépítése érdekében szükség van-e valamely embryonalis képletre, alakulásra vagy szövetsoporra (csontváz porcos praformatiója,

chorda dorsalis stb. stb.), vagy sem. Jelen fejlődéstani tanulmány alapján hovatovább oda jutunk, hogy túlsokat tulajdonítottak eddig a phylogenetikai recapitulációnak és hogy számos eddig *phylogenetikai maradványnak minősített alkotórész* az ontogenesis folyamán mechanikai, functionalis, strukturalis vagy más biológiai szempontból *elengedhetetlen kelléke az egyén kifejlődésének*. A csontok porcosan előképzett vázát ez újabb vizsgálatok szerint például már nem tekinthetjük csupán phylogenetikai recapitulációnak, a porcoshal-stádiumra utaló reminiscentiának, hanem a csontfejlődés *conditio sine qua non-jának*, mert — amint láttuk — a nyomásnak kitett felszíneken a csont másképpen nőni nem tud, mint csakis a chondralis csontfejlődés módján. A phylogenetikai példák is azt mutatják, hogy a csont praeformációja *az egyén felépítése érdekében*, a szükséges mechanikai igénybevételek szerint változóan hol desmalis, hol pedig chondralis, teljesen függetlenül attól, hogy a phylogenetikai sorban az a csont chondralis vagy desmalis megjelenésű volt-e. *A csontosodás módjának a phylogenetikai sorban sokhelyütt észlelhető hasonlósága egyszerűen abból magyarázható, hogy azoknak nagyjából hasonló az igénybevételük.*

Hasonló megvilágításban áll már ma a chorda dorsalis szerepe is. SPEEMAN, MANGOLD, BAUTZMANN és munkatársai vizsgálatainak az eredményét összefoglalva WEISSENBURG (1933) fejlődéstani tankönyvében a következőket írja (WEISSENBURG: *Entwicklungsgeschichte des Menschen*. p. 431, 4—17. sor): «Insbesondere fällt auch auf die Bedeutung der Chorda dorsalis ein neues Licht. Sie erscheint dort, wo sie nur den Vorläufer der sie später verdrängenden Wirbelsäule darstellt, nicht mehr nur als ein mehr oder minder rudimentäres Organ, das als historische Reminiszenz auf jungen Stadien auftritt, sondern, vorausgesetzt, dass man die an Amphibienkeimen gewonnenen Resultate verallgemeinern darf, ist sie als eine entwicklungsphysiologisch hochbedeutsame Anlage anzusehen, die für die Ausbildung der Achsenorgane, insbesondere der Medullarplatte, eine ausschlaggebende Rolle spielt. Zum mindesten bei den Amphibien scheint sie somit nicht nur morphologisch, sondern auch physiologisch die Zentralachse zu repräsentieren, um die sich das Bildungs geschehen vollzieht.»

Nevezett kutatók egészen más irányból kiindulva, eredményeik

révén a chorda dorsalist illetőleg hasonló eredményre jutottak. De ne feledjük, hogy WEISSENBERG már 1933-ban jutott a fent idézett következtetésre, ill. véleményre. Az e munkában kifejtett csontfejlődési vizsgálatok alapján most már néhány lépéssel tovább is haladhatunk, sőt a birtokunkban lévő adatok alapján kell is haladnunk. Nevezetesen meg kell állapítanunk, hogy a gerincoszlop a korai embryonalis állapottól kezdve a csecsemő-, gyermek- és ifjúkoron keresztül a szervezet kifejlődéséig a növekedés folyamán cranio-caudalis irányból állandó nyomásnak volt kitéve, a csigolyák tehát cranio-caudalis irányban csak porcos praeformatio alapján nőhettek. Az állandó nyomás a törzs izmainak tónusa és contractiója, valamint a testsúly révén adva van; a növekedés szükségessége fennáll; az adott viszonyok mellett tehát semmiféle más praeformatio vagy csontfejlődési mód nem lehetséges, mint csakis a nyomást jól viselő chondralis. Meg kell tehát állapítanunk, hogy a csigolyák cranio-caudalis felszínükön *szükségszerűen* porcosan praeformáltak, mert a porcos praeformatio az *egyetlen* mód, amelynek révén a csigolyák a nyomás behatása ellen növekedésre képesek. A következő lépés már önként adódik; a porcos gerincoszlopot *szükségszerűen* előzi meg a mesenchymás, mert a porcogó csak a differenciálatlan mesenchymás telepből alakul ki. A mesenchymás telepnek pedig, hogy pontosan egyirányban fejlődjék, valamilyen irányításra, egységes vázra van szüksége, hogy annak a mentén, egy síkban, egy irányban tudjon kialakulni. Fiatal embriók keresztmetszetein jól látni, hogy mint csoportosul. tömörül és sűrűsödik a mesenchyma a már mereven álló chorda köré.

Ezen egymásutáni stadiumokat és azoknak kialakulási módját és lehetőségét összevetve, arra a nyilvánvaló eredményre jutunk, hogy a csontos gerincoszlopot *szükségszerűen* előzi meg a porcos gerincoszlop, amely utóbbi viszont csak a mesenchymás telepből alakulhat ki, ennek a helyes elrendeződését pedig csak a chorda biztosíthatja. A régi begyökeresedett phylogenetikai theoria, amely a chordát, mint fejlődéstani reminiscentiát fogja fel, ezentúl is szerepelni fog, de a conservatív álláspont mellett is helyet kell engedni az új felfogás részére, amely szerint a chordának, valamint a mesenchymás és porcos gerincoszlopnak mint fejlődésphysiologiai szempontból igen jelentékeny telepnek is megvan a létjogo-

sultsága, sőt az *ontogenetikai szempontból való szükségessége is*. (Ehhez még megjegyezhető, hogy pl. a chorda dorsalis szükségességét csak az axialis mesenchyma összetömörülése szempontjából méltattuk, nem is szólva a velőlemez kifejlődését indukáló hatásáról stb.) Ez ontogenetikai felfogás minden újszerűsége ellenére is közvetlenebb, egyszerűbb és kézzelfoghatóbb a régi, bár megszokott phylogenetikai felfogásnál.

A gerincoszlop fejlődésének vizsgálatáról visszatérve az egyes csontok praeformatiójának tanulmányozására az eddigi fejtegetéseink beigazolása mellett még tovább is haladhatunk.

Annak az ismételt megállapításával ugyanis, hogy a praeformativ képletek megjelenésének a régi phylogenetikai magyarázata mellett megtalálható azoknak nélkülözhetetlen szükségessége is, felmerül a kérdés, hogy a két magyarázat, ill. felfogás milyen viszonyban van egymással: összeegyeztethetők-e, avagy ellentétben áll egymással a régi, phylogenetikai és az új, az ontogenetikai szempontból való célszerűségi felfogás. A chorda dorsalisnál mindkét felfogás megállhatott egymás mellett. A csontok praeformatiójánál a helyzet a következőképpen alakul: a csontok egy részénél az ontogenetikai szempontból való célszerűségi elv nyilvánvaló kidomborodása mellett (az alacsonyabbrendűeken is az igénybevétel hasonló lévén), a phylogenetikai *theoria* alkalmazható. A csontok egy másik részénél, mint például a részletesen tárgyalt kulcesontnál a csontok fejlődésmódja (elfogultsággal nem vádolható idegen szerzők egybehangzó adataiból kiolvasható, illetőleg összeállítható módon) mindenhol az *igénybevételnek megfelelően alakul* és így a porcos vagy kötőszövetes praeformatio az *ontogenesisnek* (a csont mechanikai igénybevétel közben való növekedésének) *elengedhetetlen feltétele* és phylogenetikai maradványként már alig fogható fel, mert az egyes csontok éppen *igénybevételük szerint*, a *phylogenesisből függetlenül*, sok helyen attól eltérően, hol chondralisan, hol pedig desmalisan fejlődnek. Ahol tehát az igénybevétel a phylogenesis szerint várható fejlődésmódtól eltérő, ott a phylogenetikai momentum rovására a csontfejlődés a közvetlen mechanikai igénybevétel szerint megy végbe.

Ezek az eredmények hovatovább oda fognak vezetni, hogy a mult századtól örökölt phylogenetikai beállítottságot levetve,

az embryo felépítésének, kifejlődésének folyamatát inkább mint öncélú folyamatot tekinthetjük. Megjegyezhető, hogy a célszerűségi (finalis) elvet a múlt században perhorreskálták az irodalomban, az utóbbi évtizedekben azonban egyre szélesebb tért hódít (lásd: PETER, Anat. Anz. 1936, Bd. 81. S. 318).

A causalis morphogenesis feladata, hogy szervről szervre haladva kiderítse, hogy az esetleg phylogenetikai maradványnak minősíthető szervek vagy telepek az embryo korai stadiumában végzett funktiók (mesonephros stb.) vagy a végleges szerv kialakításának, tehát az ontogenesisnek a szolgálatában nélkülözhetetlen szervek, illetőleg telepek-e (chorda stb.), vagy pedig valóban az ontogenesis szempontjából teljesen haszontalan és csak a HAECKEL-féle recapitulációs tannal magyarázható fajfejlődési reminiscenciák. A recapitulatio tana máris sokat veszített eredeti posztíójából, nem nehéz azonban megjósolni, hogy az újabb vizsgálatok újra alaposan fogják csökkenteni ez ingtag theoria jelentőségét. Mindenesetre kellő helyet kell adnia az új felfogásnak is, mely szerint az embryonalis fejlődés minden mozzanata — egymással magasabbrendű biológiai összhangban állva — *a kifejlesztendő individuum érdekében*, annak látószögéből tekintve, — *öncélú*. Az ontogenesisben hangsúlyozottan phylogenetikai visszapillantásokat kereső, sőt azokat a biogenesis alaptörvényévé emelni akaró álláspontnak tért kell engednie az ontogenesist öncélú folyamatnak tekintő felfogás számára. Visszapillantás helyett inkább egy előrepillantás számára kell helyet biztosítani, amennyiben a kialakuló individuum mellett annak leendő ivadécai is figyelembe veendőek, vagyis az individuumnak a kifejlődés szempontjából való öncélúságába a somaplasma mellé az idicplasma is beleértendő. A phylogenetikai és az ontogenetikai álláspont egymás mellé helyezésével a vizsgálataink szerint az az eredmény adódik, hogy a kettő legtöbb helyütt egymás mellett is megáll, ahol azonban a kettő antagonismusban van; ott az ontogenetikai erősebbnek, átütőnek bizonyul.

A phylogenetikai felfogással szemben az öncélú ontogenetikai felfogást állítottuk előtérbe. Az egyes szervek és testrészek kifejlődése folyamán azután kutathatjuk, hogy a biológiai összhangban való kialakulásánál, hol milyen mechanikai, kémiai vagy más-

természetű közvetlen hatás fog a formatív vagy biochemiai kifejlődésnél közrejátszani. A csontok praeformációjánál előtérbe kellett helyezni a mechanikai faktort. Történt pedig ez elsősorban azért, mert a csontváz szervezetünkben a *mozgás* passzív szervét képviseli. Mozgásszervek ismeretéhez és fejlődésüknek tanulmányozásához elsősorban a mechanikai viszonyok ismerete fog vezetni. A ki nem elégtő régi phylogenetikai felfogással szemben sikerült is a *mechanikai igénybevétel* előtérbe helyezésével a csontváz és összeköttetéseinek fejlődésére vonatkozólag új teoriát beállítani. Ennek előnye, hogy bármely csont tetszésszerinti részén azonnal közvetlenül alkalmazható, ill. leolvasható és így a felsorolt és azokkal hasonlósági viszonyban álló csontokra az már nemcsak mint *theoria* áll, hanem azokról mint *lelet* is olvasható. Mihelyt pedig a csontfejlődés és mechanikai igénybevétel közötti összefüggés az emberi szervezet valamennyi csontjára vonatkozólag hiánytalanul ki lesz mutatva, azt az emberi csontvázrendszerre vonatkozólag szabályként fogadhatjuk el. Ez igen nagy munkát, comparatív anatómiai és embryologiai szaktudást és körültekintést igénylő feladat még távolról sem fejeződött be, de az eddig célbavett csontokon az összefüggés oly frappáns módon domborodott ki, hogy ellentétes leletek felmerülése híján jogosultnak tűnik ez összefüggést a további dolgozás érdekében bizonyos fenntartással máris *szabályként elfogadni*. Különös jelentőséget kell ugyanis tulajdonítanunk a bevezetőleg említett kísérleti leletnek, amely dokumentálja, hogy a kísérletileg nyomás alá helyezett regeneratív csontfejlődés mindig chondralisan folyik le, húzás hatására mindig desmalisan, sőt a mechanikai viszonyok módosításával a csontfejlődés fajtája is az igénybevételnek megfelelően módosul.

E mechanikai felfogásnak a csontvázrendszer határával nem szűnik meg a jelentősége, sőt annak a mozgás aktív szerveinek, az izmoknak kialakulásával kapcsolatban ugyancsak kiemelkedő szerep jut. Az egyoldalúság jogos vádjának kiváltása nélkül nem lehet azonban a mechanikai viszonyoknak, pl. a zsigerek embryonalis és postembryonalis fejlődésében olyan értelemben döntő jelentőséget tulajdonítani, mint amilyen befolyásuk a csontok fejlődésmódjára van. A mechanikai tényezők jelentőségét Roux szellemében itt is kellő mértékben tekintetbe kell vennünk, ami mellett azonban

fentebb is említett más tényezők bírnak a biológiai egységgé való kifejlődésben jelentős organisatorikus hatással.

*

Kissé részletesebben kellett kitérnünk a csontfejlődésnek az ontogenesissel és phylogenesisssel való viszonyára. Szükségesnek látszott ez azért, mert az eddigi tudományos közvélemény szerint a csontok praeformációja phylogenetikai okokra vezethető vissza. Amidőn pedig most a csontfejlődésnek és a csontok praeformációjának a mechanikai viszonyokkal való összefüggését, sőt attól való függését írtuk le, akkor ez új fejlődésmechanikai theoria, illetőleg összefüggés és szabály ismertetése mellett a mult századból reánk maradt phylogenetikai felfogásnak az egyoldalúságát, sőt a helyenként mutatkozó tarthatatlanságát is részletesebben meg kellett világítani.

Összefoglalás.

1. A csontváz a kifejlődése folyamán, e vizsgálatok eredménye szerint, a régi phylogenetikai magyarázattal ellentétben, azért más szövettel praeformált, mert a csont a mechanikai igénybevétel (húzás vagy nyomás behatása) alatt csakis a praeformatív szövet védelme mellett, annak a csonttal határos felületén tud növekedni.

2. A *porcos* praeformatio szorosan és okilag összefügg a *nyomásos* igénybevétel alatti csontnövekedéssel. Az ismert csontfejlődési módok között a chondralis az egyetlen, amely különleges statikai berendezés révén megengedi, hogy a csont a nyomásnak kitett felületen, a beható nyomás ellenére is zavartalanul növekedhet. (E statikai berendezések vázlatát a mellékelt ábra mutatja be; részletesebb leírása a szövegben.) A *porcos* praeformatio tehát nem phylogenetikai okból, hanem szükségszerűen az ontogenesis érdekében, azért van, hogy a csontok a nyomásos igénybevétel mellett kifejlődhessenek.

3. A *kötőszövetes* praeformatio szorosan és okilag összefügg a *húzásos* igénybevétel alatti csontnövekedéssel. E statikai berendezés révén tud a csont a húzásnak kitett felületen is zavartalanul növekedni. (ennek vázlatát látható a 3. ábrán, a szövegben a leírás); a *kötőszövetes* praeformatio sem tekinthető tehát phylogenetikai

maradványnak, hanem ontogenetikailag célszerű és szükséges berendezés, amely lehetővé teszi, hogy a csontfelület a húzás behatása alatt is növekedhessék.

4. Minthogy a korábban közölt kísérleteim szerint a nyomásnak kitett regeneratív csontfejlődés mindig chondralisan ment végbe és a húzásnak kitéve mindig desmalisan, sőt az igénybevétel változtatására a fejlődésmód is megfelelően változik, a mechanikai igénybevétel és a fejlődésmód között az oki összefüggés jogosan megállapítható.

5. A csontfejlődésnek a mechanikai viszonyokkal való összefüggését a phylogenetikai recapitulációs tannal összehasonlítva a következőket lehet megállapítani: amíg egyrészt a fejlődésmódnak a mechanikai viszonyokkal való összefüggése az eddig vizsgált csontokon, illetőleg csontrészeken kivétel nélkül leolvasható volt, addig a recapitulációs theoria ezeknek csak egy részére alkalmazható, más csontokon, illetőleg csontrészekeken ellenben a recapitulációs theoria alapján várható praeformatiótól eltérőleg a csont a *mechanikai* viszonyoknak megfelelően fejlődött ki. A phylogenetikai recapitulatio szerint várható praeformatív magnak ilyenkor még a telepét sem lehet kimutatni. A phylogenetikai soron végigtekintve, a hasonló praeformatio csak a mechanikai szempontból hasonló igénybevételű csontrészeken található: nyilván ott is a hasonló mechanikai igénybevétellel áll oki összefüggésben. Eltérő igénybevételű helyeken a csontfejlődés módja a phylogenetikai sorban alacsonyabban álló lények csontfejlődési módjától eltérően a mechanikai viszonyok szerint alakul. Számos fejlődő csontra vonatkozó vizsgálat eredménye azt mutatta, hogy azon egymás mellett mindkét felfogás alkalmazható; ahol azonban a kettő között ütközés van, ott a phylogenetikai tényező háttérbeszorulásával az öncélú ontogenetikai felfogás szempontjából értékesíthető mechanikai behatások bizonyulnak átütő erejűeknek.

Irodalom.

BENNINGHOFF: Funktionelle Anpassung im Bereiche des Bindegewebes. Verh. d. Anat. Ges. 1931. (További munkák és irodalmi adatok jegyzéke.)

BENNINGHOFF: Funktionelle Anpassung. Handwörterbuch d. Naturwiss. 2. Aufl. Jena, 1933.

BOLK, GÖPPERT, KALLINS, LUBOSCH: Handbuch d. vergleichenden Anat. d. Wirbeltiere. Berlin u. Wien, 1931.

BONNET—PETER: Entwicklungsgeschichte.

GBIHARDT: Über funktionell wichtigere Anordnungsweisen. Arch. Entw. Mech. Bd. 11, 12, 20.

GEGENBAUR: Vergleichende Anatomie. Leipzig, 1898.

HERTWIG, O.: Das Werden der Organismen. Jena, 1922.

KROMPECHER: Die Knochenbildung. Jena, 1937. (További munkák és irod. adatok jegyzéke.)

LENHOSSÉK: Az ember anatómiája. Budapest, 1922—23.

MAREK—WELLMAN: Rhachitis. Budapest, 1930—32.

MOSKOFF: Beitr. z. Mechanik des Trachealskelettes d. Pferdes. Z. Anat. Bd. 99. 1933.

PERNYÉSZ: A csontvarratok indikációi és eredményei. Orv. Hetilap 1935, 50. sz.

PERNYÉSZ: Über die operative Behandlung der Knochenbrüche. in Krompecher: Die Knochenbildung. Jena, 1937.

PETERSEN: Die Organe des Skeletsystems. Möllendorff's Hdb. Berlin, 1930.

RUPPRICHT: Knochenzellen und Fortsätze der Odontoblasten. Verh. d. Anat. Ges. 1930.

ROUX: Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1895.

SCHAFFER, J.: Lehrbuch der Histologie. 1933.

TSCHULOK: Deszendenzlehre. Jena, 1922.

WEIDENREICH: Das Knochengewebe. Möllendorff's Hdb. 1930.

WIEDERSHEIM: Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. 1893.

ZIMMERMANN Á.: A háziállatok anatómiája. Budapest, 1920.

ZIMMERMANN G.: A macska csontjairól. Állattani Közlemények 31. köt. 1—2. füz. 1934.

Az I. tábla szövege.

2. kép. A nyomásos csontfejlődés statikájának sémája.

I. A *praeformativ szövet*: Porcogó. Ez veszi fel a külső felszínen a nyomást. A *praeformativ* porcogó sejtjei kukoricacsorszerűen rendeződnek, egyes szélesebb alapállományterületek, mint támasztógerendák fennmaradnak. A porcsejtek állandó pusztulásával a támasztógerendáknak egyre újabb és újabb darabjai maradnak csupaszon.

II. *Átépülési, illetőleg növekedési zóna*. Tengelye a támasztógerenda, amely a nyomást az I. zónából áthárítja a III. zónába. Ezen II. zóna támasztógerendán kívüli területe ilyenformán gyakorlatilag nyomásmentes, azért az építésre igen alkalmas.

1. A *praeformatív szövet lebontása*. A capillárisok pusztító phalanxa a porcejtsorokat válaszfalaikkal együtt lebontja.
 2. Az osteoblastokká determinált mesenchymasejtek, amelyeket a capillárisok hoztak magukkal, betelepülnek a támasztógerenda vájulataiba.
 3. A *csontnövekedés zónája*. A támasztógerendák közé telepedett osteoblastok csontalapállományt termelve osteocytákká lesznek. A támasztógerendák mentén egyre feljebb és feljebb kúszik a csonthüvely.
- III. *Csontszövet*. Szilárdan körülfogja a támasztógerendát és mint a csontindividuum szilárd alkotórésze felveszi a nyomást. A csontszövet nem homogen, hanem minden elemi csontgerenda tengelyében megtalálható a porcmaradvány.

3. kép A húzásos csontfejlődés statikájának sémája.

I. *Praeformációs szövet*: A kötőszöveti kollagen rostnyalábok, húzórostok veszik fel a kívülről (pl. az izom felől) beható húzást. A rostnyalábok közt látható egynéhány érkapilláris és differenciálatlan mesenchymasejt. A rostnyalábok a csont felszíne felé kissé divergálnak, így néhány rost kitér az ábra síkjából. A praeformatív szövetet képező kollagen rostnyalábok teljes egészükben, minden lebontás nélkül megmaradnak.

II. *Növekedési zóna*. Tengelye a kollagen rostnyaláb, amely a húzást az I. zónából áthárítja a III. zónába. Ezen II. zóna húzórostján kívüli területe gyakorlatilag húzásmentes és így az appositionális csontépülésre igen alkalmas.

A mesenchymasejtek osteoblastokká determinálódva csontalapállományt termelve, osteocytákká fejlődnek ki. A kollagen rostnyalábok-(húzórostok) egyre magasabban körülakódnak csontszövettel.

III. *Csontszövet*. Szilárdan körülfogja a húzórostokat és mint az egységes csontindividuum szilárd alkotórésze felveszi a húzást. Ez a csontszövet sem homogen, mert benne foglaltatnak a kötőszöveti kollagen húzórostok.

4. kép. A semleges mechanikai viszonyok között végbemenő, primaer angiogen csontfejlődés sémája.

I. *Növekedési zóna*. Dús kapillárishálózat. Az endothelesövön kívül osteoblastokká determinált mesenchymasejtek. Az érhálózat retrahálódik, az osteoblastok csontalapállományt termelve, mint osteocyták lemaradoznak. Sem nyomást viselő porcgerendák, sem pedig húzásnak ellenálló kötőszöveti rostnyalábok nem fordulnak elő, semmiféle érett praeformatív szövet nincs.

II. *Csontszövet*. Homogen, cytoosteonokból (csontsejtek a hozzájuk tartozó csontalapállománnyal) áll, semmiféle idegen szövetrészt (sem porcmaradványt, sem kötőszöveti rostnyaláb) nem tartalmaz. Az érhálózatból csak néhány tápláló ér marad meg.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. jan. 24-én tartott üléséből.)

KNOCHENBILDUNG UND MECHANISCHE INANSPRUCHNAHME.

Von STEFAN KROMPECHER.

Die knorpelige oder bindegewebige Praeformation der Skeletteile des Menschen ist auf jeweils obwaltende *mechanische* Einwirkungen zurückzuführen. Es wird dargestellt, dass an allen *druckbeanspruchten* Knochenoberflächen das Wachstum auf *knorpelig* vorgebildeter Grundlage vor sich geht. Daraufhin wird die Statik des druckfesten Knochenwachstums besprochen. An zugbeanspruchten Knochenflächen wächst der Knochen dagegen immer auf *bindegewebig* vorgebildeter Grundlage. Auch die Statik des zugbeanspruchten Knochenwachstums wird erörtert. An mechanisch neutralen Knochenflächen geht der Wachstumsvorgang primär angiogen vor sich.

In einem zweiten Teil werden obige Gesetzmässigkeiten an einzelnen Knochen des Menschen besprochen.

Im dritten Teil wird das Knochenwachstum von kausalmechanischem Standpunkte aus und mit Berücksichtigung der phylogenetischen Rekapitulationstheorie besprochen, wobei es sich an dem Beispiel des Schlüsselbeines (auf Grund literarischer Angaben) ergibt, dass ein Parallelismus der Bildungsarten nur in jenen Fällen nachzuweisen ist, wo den Skeletteilen eine gleiche Function zukommt. Wo aber an höherstehenden Tieren die Inanspruchnahme eine andere ist, wird auch der Knochen (das Schlüsselbein) anders aufgebaut (z. B. ohne knorpelige Anlage, rein bindegewebig, oder bindegewebig *und* knorpelig usw.). Die Praeformation der Knochen erfolgt immer der obwaltenden mechanischen Inanspruchnahme gemäss, ohne Rücksicht auf phylogenetische Reminiszenzen, vielmehr oft gegen eine der Rekapitulationstheorie entsprechende Erwartung. Ein Ergebnis dieses Abschnittes ist, dass die Praeformation der Knochen als ein Argument für die Rekapitulationstheorie nicht mehr herangezogen werden kann.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Jan. 1938.)

AZ UTÓBBI ÉVEK BALATONKUTATÁSÁRÓL.

ENTZ GÉZA r. t.-től.

Éppen száz évvel ezelőtt foglalkozott Mező-Komáromban ENTZ FERENC, Batthyányi Fülöp herceg uradalmanak orvosa, később akadémiank tagja: «A Siómellék vázlata, természetrajzi és orvosi szempontból» című tanulmánya írásán. A készülő munka pályázó mű volt egy kérdésre, amelyet Magyarország akkori első orvosa, STÁHLY IGNÁC írt ki és ENTZ művét 1847-ben 30 drb arannyal meg is koszorúzta. Ezt a nyomtatásban megjelent, PETRIK bibliographiája szerint nyolcadrét alakú tanulmányt, mindeztideig nem sikerült megszerezniem. Úgy látszik ma egyik nyilvános könyvtárunkban sincsen meg. Ellenben megvan 1851-ben a WACHTL DÁVID szerkesztésében megjelentő Zeitschrift für Natur- und Heilkunde in Ungarn című folyóirat II. évfolyama, amelynek 5-től a 11. számában, mintegy 22 kvartformatumú lapon: «Das Siógebiet in medicinisch-topographischer Beziehung» címen szerepel e munka német fordítása. Ebben a nyilván ma már kevesektől ismert tanulmányban a Sió melléke úgy van feldolgozva, mint ahogyan ma a Balatont szeretnők feldolgozva látni. ENTZ FERENC az 1831—1847. években tett megfigyeléseiből közli a vidék természetrajzi és orvosi szempontból fontos tényei összefoglalását, amelyeket az író egy-maga gyűjtött 16 évre terjedő megfigyelései alapján össze. A dolgot a maga idejében kimerítette tárgykörét.

Midőn én ma arról akarok beszámolni, hogy mit végeztünk a Tihanyi Magyar Biológiai Kutatóintézet 1927-ben való felállítása óta, mit tudunk ma tavunkról biológiai szempontból, el kell ismer-nem, hogy viszonylag kevesebbet, mint amennyit ENTZ FERENC megállapított száz évvel ezelőtt a Sió mellékéről. Pedig a lefolyt tíz év alatt egy egész tudósgárda foglalkozott Tihanyban biológiai kutatásokkal. A Magyar Biológiai Kutatóintézet évi jelentése szerint 1937. XII. 31-ig az intézetben 424 hazai és 141 külföldi, együttvéve 565 kutató dolgozott. Összesen 261 szerző 284 cikk-

ben 3112 oldalnyi terjedelmű dolgozatot hozott nyilvánosságra, egyedül az intézet kiadványaiban. Az intézet munkásságáról, alapításától 1934-ig, 1934-ben volt szerencsém a tekintetes Akadémiának beszámolni. Ez alkalommal nem az azóta végzett összes kutatásokat akarom ismertetni, csupán a legutóbb megjelent néhány dolgozatra akarom a tek. Akadémia figyelmét felhívni. Ezek:

1. ENTZ, G.: *Das Tierleben des Balaton-Sees*. Lisboa, 1936. Extr. des Comptes Rendus du XII^e Congrès International de Zoologie-, Lisbonne, 1935. — A másik pedig

2. ENTZ—KOTTÁSZ—SEBESTYÉN: *Quantitativ tanulmányok a Balaton bioestonján.* — A Magyar Biológiai Kutatóintézet Munkái, Vol. IX. 1937., — és ezekhez szervesen csatlakozik

3. HARANGHY, L.: *Édesvízi kagylóink és a Lithoglyphus naticoides Fer. mint a szabadvizek öntisztítási képességének tényezői.* — *Math. és Term. Tud. Értesítő*, 1936. LIV. p. 952—978.

A két első munka, melyek szerzőjeként egy, illetőleg három bűvár szerepel, gyűjtőmunka, mely a Tihanyban végzett kutatások, valamint irodalmi adatok kritikai felhasználása alapján készült. Egyik se egy ember egyedüli munkája, hanem a Tihany körül csoportosult biológusok munkásságának egybefoglalásából keletkezett synthesis. Az első munka a Balaton egész élőlény-világáról iparkodik vázlatos képet nyújtani. Egész sereg (28) munkatárs dolgozott azon. Ezek:

ÉHİK GY., ENTZ G., FEJÉRVÁRY-LÁNG A., GELEI J., HALLER L., HANKÓ B., HARANGHY L., HORVÁTH G., TEN KATE C. B. G., KOTTÁSZ J., LOVASSY S., LUDÁNY GY., MAUCHA R., MESCHKAT A., MIHÁLYI F., MOON H. P., MÜLLER S., SCHERFFEL A., SEBESTYÉN O., STILLER J., SZABÓ Z., SZÉKESSY V., VARGA L., VERZÁR FR., WAGNER J., WALTER H. U. E., WUNDER W., ZIH S. — akik részben eddig egyáltalában nem közölt adatokat, jegyzőkönyvi bejegyzéseket bocsátott rendelkezésre. Így készülhetett el ez a Balaton állat-életéről szóló 1897 óta első önálló kutatásokon alapuló vázlat.

A második tanulmánynak már a címlapján három szerző szerepel. Ebben a Balaton bioestonjáról szóló dolgozatban az anyaggyűjtés és adatszolgáltatás fárasztó és nagy türelmet igénylő meghatározó és számláló munkát dr. KOTTÁSZ JÓZSEF középiskolai tanár végezte, akinek munkásságát közvetlen felettes hatósága.

alkalmi szabadságolással, a vallás- és közoktatásügyi miniszter úr pedig segéllyel tette lehetővé. Ő rajta kívül WOYNÁROVICH ELEK is részesült még alkalmi segélyben. Adatok szolgáltatásával a mű teljesebb voltát lehetővé tette az említettekén kívül betűrendben a következő 23 szerző:

Dr. BOGA LAJOS, dr. DANIEL FRANZ, dr. ÉHÍK GYULA, özv. dr. br. FEJÉRVÁRY GÉZÁNÉ LÁNG ARANKA, GAMMEL ALAJOS, dr. GRAESER FRIGYES, dr. GRESCHIK JENŐ, dr. HOMONNAY NÁNDOR, dr. KELLER OSZKÁR, dr. KLEINER ENDRE, dr. KOL ERZSÉBET, dr. KOLOZSVÁRY GÁBOR, dr. LOVASSY SÁNDOR, dr. PONGRÁCZ SÁNDOR, dr. SCHMIDT ANTAL, dr. SZABÓ-PATAY JÓZSEF, dr. SZALAY LÁSZLÓ, dr. SEBESTYÉN OLGA, dr. SZÉKESSY VILMOS, dr. SZILÁDY ZOLTÁN, dr. VARGA LAJOS, dr. ZILÁHI-SEBESS GÉZA.

Különösen kiemelendő betűrendben dr. KOL E., dr. SEBESTYÉN O., dr. VARGA L. közreműködése.

Dr. KOL E. a moszatok illetőleg növényi természetű szervezetek revíziója és biológiai csoportosítását végezte.

Dr. SEBESTYÉN OLGA a kutatásnak az egész idő alatt mondhatnám lelke volt. Ő revidálta a számlálások eredményét, állította össze a táblázatokat, rajzolta meg a publikálásra alkalmas grafikonokat. Dr. SEBESTYÉN, mint ki az intézeti megfigyelési naplót is vezeti, ezt az adattárat is értékesítette.

Dr. VARGA LAJOS a zooplankton szervezeteinek biológiai csoportosításában és a táplálék-anyagforgalmi kérdéseket illetőleg bő tapasztalataiból adatokkal gazdagította a dolgozatot. Végül nem hagyhatom említés nélkül, hogy a fordítás revízióját dr. ROTARIDES MIHÁLYNÉN, az intézeti alkalmazottakon kívül dr. GRAESER FRIGYES is volt szíves ellenőrizni, valamint dr. WOLSKY SÁNDOR, aki dr. SEBESTYÉNNEL együtt a nyomdatechnikai munkát is végezte. Az egész mű irányítását és vezetését, valamint az eredmények felhasználását és egybefoglalását KOTTÁSZNAK legnagyobbbrészt ellenőrzött adatai alapján az I. osztály igazgatója végezte.

Ez az 1937-ben megjelent sestion-tanulmány azzal foglalkozik, hogy a Balatonban mennyi szervezet lebeg szabadon, akár, mint a plankton tagja, akár mint a fenékről felkavart és a planktonba csak belekerült szervezet. Hogy az élőlények mennyisége megállapíttassék, KOTTÁSZ egy éven át havonkénti, ill. két hetenkénti

gyűjtések növényeinek éppen úgy, mint állatainak fajait és azok egyéneit megszámlálta. E fáradtságos munkának eredménye beolvadt a 6 ábra, 16 szövegekőzi, 37 önálló táblázat, 83 görbecsoport, 3 táblán elhelyezett, 16 fényképezett ábra és 72 oldalt kitevő szövegbe. A terjedelem nem nagy, annál nagyobb a mindnyájunktól reáfordított munka. A nyersanyagnak az összegyűjtése már egymaga nagy munka. Mindez adatokat az esetleges hibák kiküszöbölése végett ellen kellett őriznünk, más évekből származó adatokkal, utána-számítással és a görbék ismét megrajzolásával. Mindezt dr. SEBESTYÉN OLGA végezte.

Külön kell kitérnem HARANGHY bakteriológiai kutatásaira. Az első bakteriológiai kutatásokat Tihanyban ZIH S. végezte. Ő azt vélte megállapíthatni, hogy tavunk önderítésében a Nap sugárzása döntő szerepű tényező, mert megöli, illetőleg kifejlődésretűtásukban meggátolja a baktériumokat. HARANGHY három nyáron át tanulmányozta a Balaton baktérium-flozáját nemcsak Tihanyból, de a tó egész kerületéből, a parthoz közel és távol vett víz- és iszappróbákban. Vizsgálataiból kitűnik, hogy a Balatonban a közönséges víz- és talaj-baktériumok kisebb vagy nagyobb egyénszámban mindenütt előfordulnak, úgy mint az más közép-európai tavakról is ismeretes. Szennyezett a tó vize a partjain, ott, ahol a víz stagnál, tehát a nádasokban, egyes kikötőkben, eléggé zárt öblökben, nagyobb emberi települések mentén. Ilyen helyeken található szennyvíz-baktériumok, de melegvérűekre pathogen baktériumok ma még a tónak csak egyik legerősebben szennyezett területéről ismeretesek. Hogy a vízébe kerülő szennyvezéstől hogyan tisztul meg tavunk, arra nézve tudnunk kell, mint HARANGHY kimutatta, hogy 1. tavunk nyílt vizének *pH*-koncentrációja olyan magas (8, 6), mely a melegvérűek pathogén baktériumainak tenyészésére nem alkalmas; 2. tavunk vizében igen sok az elnyelt O_2 , azzal állandóan telített; 3. a gyakori szelek felkorbácsolják tavunkat, aminek következtében időnként a mélyből is a napfény pusztító körébe jutnak az esetleg ott lévő pathogén csírák és végül 4. nagyszámú olyan szervezet él tavunkban, amelyek egymással olyan biológiai kapcsolatot alkotnak, melynek az az eredménye, hogy azok életműködése következtében a baktériumok elpusztíthatnak. Vonatkozik ez csirapusztító ciliatákra,

amelyek felfalják a baktériumokat és a velük azonos táplálkozás-módú, nagyszámú apróságfaló, örvényző szervezetre, amilyenek a rotatóriák, bryozoák, szivacsok és legfőképpen a kagylók. Ma tudjuk éspedig megint csak HARANGHYNak Tihanyban és Nápolyban végzett kísérleteiből és kutatásaiból, hogy a tóban nagy tömegben élő minden kagyló, elsősorban a vándorkagyló (*Dreissensia polymorpha*) pár óra alatt megtisztít kisebb mennyiségű vizet baktériumaitól, mert a kiválasztott nyálkájával leköti őket. A vándorkagyló csillangói csapkodása, állandóan termelt és a fenékre sülyedő nyálkája segítségével leülepíti a baktériumokat s a vizet így deríti. De csak deríti, mert a nyálkában a baktériumok, mint alkalmas tápanyagban tovább élhetnének. A leülepített nyálka azonban nem marad meg, mint ilyen, mert azt tavunknak egyik igen nagy egyénszámban élő csigája a *Lithoglyphus* bekebelezi és megemésztí. Ilyen módon egészen szokatlan biológiai derítés játszódik le a Balatonban. A derítésnek ZIR SÁNDORTól feltételezett az a módja, hogy a Nap sugárzása ölné meg a csírákat — HARANGHYNak erre vonatkozó kísérletei szerint, — nem állja ki a kritikát, mert a Balaton vize, mint azt szintén kísérletekkel HARANGHY kimutatta, állandóan annyira zavaros, hogy a fénysugárzás ilyen hatása bakteriológiai, bakteriocid szempontból nem jöhet nagyobb mértékben a víz 2—4 m-es mélysége miatt számításba. A bakteriophagának szerepéről — mint azt JENEY felteszi — egyelőre tavunkban mit se tudunk.

Az ENTZ—KOTTÁSZ—SEBESTYÉN-féle tanulmány arról is tanuskodik, hogy tavunkat még faunisztikai tekintetből se ismerjük úgy, mint ahogyan azt ma megkövetelhetnők. A tó faunájára vonatkozó táblázatos összeállítások közölt adatait remélhetőleg rövid időn belül faunisztikai tanulmányok adatai egészítik ki, de már a mai eredményekből is kitűnik, hogy a Balatonnak és környékének ma is elég gazdag, de nem kellően ismert a faunája. Ismerjük halait és a vízi szervezetek tetemes részét, de már a tóban és környékén élő többi gerincesről sem mondhatjuk ezt, még kevésbé a rovarokról. A Magyarországon élő mintegy 20 ezer állatfajból 2 ezer és néhány száz gyűjtetett a tóban és környékén.

Az eddigi vizsgálatok azt se tárják még egészen világosan elénk, hogy vajjon valamely ismert tótípusba beosztható-e Bala-

tonunk, vagy ami valószínűbb, olyan sok egyéni vonása van, amiért ez meg nem történhet.

A tó anyagforgalmáról, a táplálék eredéséről, a tónak biológiai feltételeiről, az említett tanulmányok alapján alkothatunk ugyan fogalmat magunknak, de egyben megállapíthatjuk, hogy feltétlenül jobban kell ismernünk a Balatonnak azokat a fizikó-kémiai viszonyait, amelyek a tó életének a fenntartását lehetővé teszik. Alapos további tanulmányra szorul a tó bakteriológiai kutatása, amely még ma a kezdet kezdetén van.

Az előadottakból következik, hogy a Kutatóintézet ú. n. I. osztályának és a hozzácsatlakozó munkatársaknak a jövőben célja az összefoglaló munka kiterjesztése és alkalmazása. Szükséges, illetőleg szükségesek 1. A tó környékének agrogeológiai felvétele; 2. A tó vize eredetének és fizikó-kémiai viszonyainak tanulmányozása; 3. Bakteriológiai vizsgálata; 4. a florisztikus és faunisztikus kutatása; 5. Megállapítandók a tó biotópjai, azok összetevődése és az összetevődés évenkénti, esetleg nagyobb időközökben való változása; 6. Minden egyes, a tóban élő szervezet biológiájának szorgos tanulmányozása; 7. Megállapítandók a biocoenozisok és azoknak a biotopokhoz való viszonya; 8. Tanulmányozandó a tó benépesedésének kérdése; 9. Meghatározandó a seston táplálóértéke és a tó egész anyagforgalma; Végül 10. Minthogy a tó egész vízrendszerével együtt alkot egy egységet, a tanulmányba be kell vonni a Balatonkörnyék egész vízrendszerének és a hozzátartozó földterület biológiai tanulmányozását is.

A program nagy, megvalósításához sokak munkája és lelkesedése kell, de ez egymaga nem elég, ahhoz anyagi támogatás is szükséges. De ez nem haszon nélküli költsékezés, mert a Balaton biológiájának ismerete, már csak a tó kihasználása szempontjából, alapvető fontosságú. E nélkül mindennemű balatoni propaganda-esinálás korai, tökéletlen, majdnem azt mondhatnám, kelően meg nem gondolt, szinte túlságosan merész vállalkozás.

DIE ERGEBNISSE DER BALATONFORSCHUNGEN IN DEN LETZTEN JAHREN.

Von GÉZA ENTZ.

Verfasser hatte im Jahre 1934. schon einen zusammenfassenden Übersicht darüber publiziert, womit sich das Ungarische Biologische Forschungsinstitut in Tihany seit der Zeit ihrer Gründung (1927) bis zu dem Jahre 1934 beschäftigte. Bei dieser Gelegenheit wird auf jene Resultate verwiesen, welche in einigen zusammenfassenden Arbeiten erschienen sind. Und zwar:

1. ENTZ, G.: «Das Tierleben des Balaton-Sees.» Extr. des Comptes Rendus du XII^e Congres International de Zoologie-Lisbonne, 1935. p. 263—309 mit 10 Textfiguren und Taf. VII—XII.

2. HARANGHY, L.: «Unsere Süßwassermuscheln und der Lithoglyphus naticoides Fer. als Faktoren der Selbstreinigungsfähigkeit der freien Gewässer»; Sep. Mathem. Naturw. Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1936. Ungarisch. p. 952—974. Deutsches Résumé. p. 975—978. Im ungarischen Texte mit 1—10 Tabellen.

3. ENTZ, G.—KOTTÁSZ J. und SEBESTYÉN O.: «Quantitative Untersuchungen am Bioseston des Balatons.» Arbeiten der I. Abteilung des Ungarischen Biologischen Forschungsinstitutes IX. Bd. Tihany, 1937. Ungarischer Text : p. 1—72, deutsch : p. 73—132. Mit 6 Figuren, 16 Tabellen im ungarischen Texte, sowie 37 separaten Tabellen, 87 Graphicons und 16 an drei Tafeln gruppiert Mikrofotos.

In dieser Zusammenfassung wird auf die Ergebnisse dieser Untersuchungen hingewiesen, es werden die in der gemeinschaftlichen Arbeit teilgenommen, Mitarbeiter aufgezählt und ihre Rolle

besprochen. Dann werden die Resultate zusammengefasst, auf die Lücken der bisherigen Untersuchungen hingewiesen und das zunächst in Arbeit nehmende Programm des Institutes gegeben. Nachdem alle behandelten Arbeiten in extenso auch deutsch erschienen sind, oder mit deutschem Resultat versehen sind, genügt dieser Hinweis auf die Originalarbeiten.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Jan. 1938.)

KISÉRLETI VIZSGÁLATOK A ROVAROK SZEMÉNEK FEJLŐDÉSELETTANI DETERMINÁCIÓJÁRÓL.

WOLSKY SÁNDOR-tól.

Célkitűzés, vizsgálati anyag és módszerek.

Korábbi vizsgálatok során, egyrészt a kecskerák, *Potamobius leptodactylus* ESCHH. szemének regenerációját tanulmányozva (WOLSKY 1932), másrészt különböző izeltlábúak (*Gammarus*, *Drosophila*) szemét befolyásoló örökítő tényezők morfológiai és fejlődéstani hatását vizsgálva (WOLSKY és HUXLEY 1934, 1936) arra az eredményre jutottunk, hogy az Arthropodák szemének normális kialakulásában fontos szerepet kell játszania a központi idegrendszer látószervi részének, a protocerebrum ú. n. látótraktusának (tractus opticus), amelyet régebbi szerzők ganglion opticumnak szoktak nevezni. Ezt a felfogást ma már számos érv támogatja (v. ö. WOLSKY 1935/1936), ezek azonban főleg a rákfélékre vonatkoznak, míg a rovarokra nézve az érvek még meglehetősen hézagosak (v. ö. HUXLEY és WOLSKY 1936).

Ezért kísérleteket végeztem a selyemlepke (*Bombyx mori* L.) bábjain ilyen irányban, azzal a céllal, hogy megállapítsam, vajjon a megfelelő agyrészek kiirtása az átalakulás (metamorphosis) kezdetén befolyásolja-e a szemek differenciálódásának normális menetét. A selyemlepkét azért választottam kísérleti anyagnak, mert bizonyos jelek (v. ö. 6. oldal) arra mutattak, hogy a lepkefélék különösen alkalmasak ilyenirányú kísérletekre, azonfelül a selyemlepke könnyen tenyészthető és ismert, kísérletileg is előidézhető polivoltinizmusa folytán az egész nyári időnyben nagy mennyiség-

ben állott rendelkezésemre.¹ A bábállapotot azért választottam a lárvaállapottal (hernyó) szemben, mert ilyenkor az állat mozdulatlansága és belső nyomásának megesőkkenése a szükséges műtéti beavatkozást könnyebbé teszik, másrészt, mivel az összetett szemnek mint tipikus imaginális szervnek a kidifferenciálódása amúgyis csak a bábállapotban, az átalakulás során megy végbe.

Az agy kiirtását a következőképpen végeztem: a begubózás utáni 4—5. napon, amidőn tapasztalataim szerint az utolsó vedlés már megtörtént és a báb éppen megalakult, a gubót felmetszettem. a bábót kivettem és a fej homloklebenyének oldalán egy hüvelykolló segítségével apró bemetszést tettem. A metszett seb a báb testében uralkodó nyomás következtében szétnyílt és rajta kevés testnedv buggyant ki, amely a seben víztiszta, zöldessárga csepp alakjában ült. A szétnyíló seben keresztül egy binokuláris preparáló mikroszkóppal bele lehetett látni a fej belsejébe, amit elősegített az a körülmény, hogy a seben ülő víztiszta csepp valósággal nagyító-lencseként működött. Ilyen módon jól fel lehetett ismerni a fejben az agy helyzetét, annál is inkább, mert a degenerálódó és visszahúzódó lárvaszemek (stemmata) feketés pigmentje ekkor már nagyjában a látótraktusra telepedett és élénken kivált a környező szintelen szövetek közül. A seben keresztül egy kiélesített ú. n. óráscsípesszel benyúlva az agy aránylag könnyen lecsíphető és eltávolítható, a nélkül, hogy más lényeges szerveket megsértenénk. Természetesen nem lehetett minden esetben pontosan ugyanolyan terjedelmű agyrészletet kiirtani, hanem e tekintetben különbségek voltak az egyes kísérletek közt, kezdve attól az esettől, amidőn csak a látótraktus egy része hiányzott, egészen addig, amidőn az egész protocerebrum féltékéjét eltávolítottam. Ezeket a különbségeket csak szövettanilag lehetett utólag ellenőrizni. A műtétet egyébként minden esetben csak a fej baloldalán végeztem el, úgy-hogy a jobboldal mindjárt kontrollként szolgált.

¹ A selyemlepke bábjai azért is alkalmasak, mert úgy látszik, hogy ellenállóbbak a műtéti beavatkozással szemben, mint más lepkék bábjai. Így pl. tájékoztató előkísérleteket végeztem a káposztalepke (*Pieris brassicae*) bábjain is, de ezek közt olyan nagy volt a halandóság, hogy kiterjedt vizsgálatra nem voltak alkalmasak.

A műtét után a bábokat egyenként embriócsészébe helyeztem és gondoskodtam, hogy zavartalanul fejlődhessenek tovább, főleg az első napokban, amidőn a legnagyobb volt a halandóság. Ugyanis a bábok vagy a műtét hatása alatt vagy szokatlan helyzetük folytán (gubójuktól megfosztva) a legkisebb ingerre is erős konvulziókkal reagáltak és ez sokszor olyan erős haemolympa-folyást okozott a nyílt seben keresztül, hogy a bábok valósággal «elvéreztek». Ez az elvérzés volt egyébként a legtöbbször a közvetlen oka a műtétek sikertelenségének, mert olyankor is bekövetkezett, ha a seb, vagy a belső szövetroncsolás igen nagy volt.

A tájékoztató előkísérletektől eltekintve, 35 bábbon végeztem el a műtétet és ezek közül 23-ból kelt ki lepke, úgyhogy a kísérleteknek csaknem pontosan $\frac{2}{3}$ része járt eredménnyel. A kikelt lepkéket lefejeztem és a fejeket külső morfológiai megfigyelés után BOUIN-féle folyadékban rögzítettem, majd PÉTERFI-féle módszer szerint (methybenzoátos celloidin és paraffin) beágyaztam és metszetsorozatokká dolgoztam fel. A metszeteket haemalaun-nal és eosin-nal festettem.

Vizsgálati eredmények.

Külső morfológiai megfigyelés alapján az eredményeket alig lehetett megítélni. Az esetek legnagyobb részében semmi különbséget sem lehetett észlelni a normális jobb- és látótraktustól megfosztott bal szem között. Mindkettő normális alakú és nagyságú volt és facettáik elrendeződése, illetőleg pigmentációjuk tekintetében sem mutattak semmiféle abnormitást. Egyes esetekben azonban már külsőleg is fel lehetett ismerni a műtét hatását. Így néha a műtött szem valamivel kisebb volt a kontrolnál (egy esetben egy karéj hiányzott a felső pereméből), több esetben pedig a pigmentáció tekintetében is különbség mutatkozott a normális szemhez képest. Nevezetesen szemtükrözéssel úgy tűnt fel, mintha a műtött szemben a pigment mélyebben foglalna helyet, s ennek következtében a szem a felületről nézve halványabbnak látszott. Különösen egy esetben mutatkozott feltűnő eltérés a két szem pigmentációja közt. Egy esetben, amidőn egyébként a szem kisebb is volt a normálisnál, a facetták rendje látszott kissé zavartnak

a szem felső részében, egy másik esetben pedig az egész szem rendkívül degenerált volt. Sokkal kisebb volt, mint a normális és a helyett, hogy erősen kidomborodó félgömböt alkotott volna, egészen lapos volt és a fejnek csak egy keskeny cikkelyét foglalta el. Felületének legnagyobb részét szemcsés chitin borította, amely főleg csak a kerületen volt pigmentes. Egészen olyan benyomást tett, mintha korai bábállapotban vesztegelt volna. A szemrégio felső harmadában volt azonban egy erősen kiemelkedő dudor, amelyen facettákat is fel lehetett ismerni, ezek azonban nem alkottak szabályos sorokat, hanem rendszertelenül voltak elszórva a dudor felületén.

A szövettani vizsgálat tette csak lehetővé, hogy az észleleteket pontosabban értelmezzem. Ekkor derült ki, hogy mennyire sikerült az egyes kísérletekben eltávolítani az agyat, továbbá hogy ez milyen elváltozásokat okozott a szem finomabb szerkezetében. Azt megállapíthattam, hogy a műtét az esetek legnagyobb részében elérte célját: a protocerebrum baloldali féltekéje vagy teljesen hiányzott, s helyét hólyagos kötőszövet, illetőleg nagy haemolympha-«ömlenyek» foglalták el, vagy legalábbis annyira sérült volt a félteke, főleg pedig a látótraktusa, hogy semmiesetre sem fejthetett ki normális hatást a szemre. Egyes esetekben azonban előfordult, hogy az agy a műtétnél alig sérült meg és az ilyen esetekben a szem is normális kialakulású volt, jeléül annak, hogy nem maga a műtéti beavatkozás (seb, szövetroncsolás, haemolympha-vesztés) okozta a szemben azokat az elváltozásokat, amelyeket az agy eltávolítása után lehetett megfigyelni.

A sikeres műtétnak a szemeken mutatkozó hatása minden esetben ki volt mutatható, noha rendszerint nem volt nagyon szembeötlő. Különösen a pigmentációbeli különbség ötlött fel, még olyankor is, ha az külsőleg nem volt felismerhető. A normális szemben a pigment mindig az ommatidiumok disztális részében volt található (az állatokat általában szórt nappali világítás mellett öltem meg), míg a rhabdomok teljesen pigmenttelenek voltak. Ezzel szemben a látótraktustól megfosztott szemben mindig mélyebb rétegbe húzódott a pigment és főtömege a bazális helyzetű rhabdomok körül foglalt helyet. Ahol a rhabdomok még aránylag normálisak voltak, ott a pigment inkább csak a disztális végükön volt felhalmozódva. Ez a jelenség valószínűleg arra vezethető

vissza, hogy az agy kiirtása következtében zavarok álltak be abban a mechanizmusban, amely normális körülmények közt a pigmentvándorlást szabályozza.

Ellenben a rhabdomok degenerációjával párhuzamosan még jobban lehúzdik proximális irányban a pigment és főleg a bazális hártján halmozódik fel nagy tömegekben. Ez a jelenség már nem állhat összefüggésben a megzavart pigmentvándorlással, hanem nyilván a retinulát körülvevő pigmentsejtek, az ú. n. másodlagos, vagy mellékpigmentsejtek bizonyos térhódítására vezethető vissza. A szövettani képekből határozottan úgy látszik, mintha szoros összefüggés állna fenn a retinula degenerációja és ezeknek a pigmentsejteknek a kiterjedése között: amilyen mértékben sorvad a retinula, úgy halad előre a pigmentsejtek térfoglalása. Erre a jelenségre már egy rákfélének, a *Gammarus chevreuxi* SEXTONNAK mutáns génnek hatására bekövetkező szemdegenerációjával kapcsolatban rámutattunk (WOLSKY és HUXLEY 1934) és azt egy ROUX-féle gondolattal, a szövetek közti egyensúly («versengés») elvével igyekeztünk megmagyarázni. A jelenség nyomait a *Drosophila melanogaster* MEIG. «bar» mutációjának egyes szemrégióiban is felismertük (WOLSKY és HUXLEY 1936), úgy látszik tehát, hogy a szövetek közti «versengés» általános jelenség és igen fontos szerepet játszik az izeltlábúak szemének kialakulásában.

Ilyen körülmények közt különösen nagy jelentősége van a retinuláris elemek, elsősorban a rhabdomok degenerációjának. Ez, bár rendszerint csak kis mértékben, de mégis megfigyelhető még azokban az esetekben is, midőn a műtétnek külsőleg semmi látható nyoma sem volt. A degeneráció abban áll, hogy az egyes rhabdomok megnyúlnak, elvékonyodnak, tipikus zömök, egyenletesen vastag pálcikaalakjukat elvesztve hosszúkás orsóalakot öltenek. Különösen a tövükön vékonyodnak el, míg disztális részük, amely a megnyúlás folytán sokszor egészen a kristálykúpok közelében fekszik, a rárakódott pigmenttől bunkószerűen megduzzadtan látszik. A degeneráció tekintetében azonban fokozatokat lehet megkülönböztetni, még ugyanazon szemben belül is. Míg egyes rhabdomok az említett degenerációt mutatják, addig mások alig térnek el a normálistól, legfeljebb annyiban, hogy szabályos sorokba való elrendeződésük megbomlik, különböző irányban elhajlanak,

ami a mikroszkópi képet kuszálttá teszi. Az esetek többségében a rhabdomok legnagyobb része a degenerációnak csak ezt a kezdő fokát éri el, míg erősen elsorvadt, megnagyult rhabdomok csak elvetve emelkednek ki közülök. Azonfelül a degeneráció legtöbbször nem egyenletes az egész szemben, hanem leginkább az antero-dorzális régiót érinti, míg a szem ventrális része rendszerint csaknem normális.

Erősen degenerált szemekben azonban ezek a regionális és kvantitativ különbségek elenyésznek; itt az összes retinuláris elemek maximálisan degenerálódtak. A retinulasejtek proximális része egészen fonalszerűen vékony és csak a rhabdomok disztális végének megfelelő szakaszuk szélesedik ki. Disztális nyúlványuk a kontrolhoz képest erősen megrövidült, úgyhogy az egész szem sokkal kevésbé domborodik ki, metszetben pedig sokkal alacsonyabb, mint a normális szem. Egyelőre nem sikerült közvetlen összefüggést kimutatnom a szemdegeneráció és az agy kiirtásának különböző fokozatai között. A különbségek oka valószínűleg inkább abban keresendő, hogy az egyes bábok a műtét időpontjában kissé eltérő korúak lehettek és azok, amelyeket korábbi stádiumban ért a műtét, jobban megsínylették az agy kiirtását, mint azok, amelyek csak valamivel későbbi fejlődési stádiumban jutottak erre a sorsra.

A szemek dioptrikus elemei, vagyis a cornealenesék és kristálykúpok még nagyfokú degeneráció esetén is meglehetősen normálisak maradnak, úgy alakjukat, mint elrendezésüket illetőleg. Legfeljebb a szabályos sorokba való elrendezésükben tapasztalható a külső megfigyelésnél említett csekély elváltozás.

Megbeszélés.

¶ Minthogy ez a közlemény csak előzetes jelentésnek tekintendő, korai volna még az elmondottakhoz messzemenő következtetéseket fűzni. Annyi kétségtelennek látszik, hogy a selyemlepke esetében a szem normális kidifferenciálódása szoros összefüggésben áll a hozzátartozó agyrészlettel és az a benyomásunk, mintha a látótraktusból egy «differenciálódási áram» (v. ö. GOLDSCHMIDT 1927, SEIDEL 1931) indulna ki, amely gondoskodik arról, hogy a

szem egyes szövetelemeinek kezdeményei kialakíthassák azokat a sajátlagos szerkezeteket, amelyek lehetőségei (potenciái) nyilván már korábbi időpont óta bennük szunnyadnak. Ez újabb megerősítést jelent a bevezetésben említett elméletünknek, amely a rovarszemek fejlődésében ilyen függő viszonyt, a Roux-féle értelemben vett függő kialakulást («abhängige Differenzierung») tételez fel (v. ö. Roux 1912.). Az ilyen függő viszony, amelyben valamely differenciálódás egy másik régióból kiinduló ú. n. indukció hatására következik be és amelynek legklasszikusabb esete az Amphibiák petéinek organizátora, ma már annyira és olyan sok esetben ismeretes, hogy feltételezése a rovarszemek esetében sem ütközhetik nehézségbe.

Első pillanatra talán különösnek látszik ugyan, hogy ilyen jelenséggel találkozunk olyan állatsoportban, amelynek az embrionális fejlődése tudvalevőleg szélsőségesen mozaik típusú. Azonban ma már ebben a tekintetben számos kivételt ismerünk (v. ö. SEIDEL 1936.) és még olyan egészen merev mozaikpetékben is, mint amilyen a légyféléké, kimutattak bizonyos regulációképességet (HOWLAND és SONNENBLICK 1936.). Ilyen módon elméletileg egyáltalán nincs kizárva az a lehetőség, hogy bizonyos rovaroknál bizonyos imaginális részletszerkezetek és így az összetett szem egyes szövetelei is csak a metamorphosis folyamán determináltak végleg és részleteikben, más kezdeményből jövő indució útján. Hogy ez valóban így lehet bizonyos rovarszemek esetében, azt már egyes szerzők korábbi vizsgálatai is valószínűvé tették, mint arra egy rövid közleményben nemrég rámutattunk (HUXLEY és WOLSKY 1936.). A *Drosophila* ugyan CHEVAIS (1937) azóta közölt vizsgálatai szerint úgy látszik nem tartozik ehhez a rovartípushoz, ellenben valószínűleg ide tartozik az *Ephestia* (lisztmoly) (PLAGGE 1936, SCHRADER 1938) és kétségtelenül erre vallanak az itt közölt vizsgálatok a *Bombyxra* vonatkozólag is. Tehát úgy látszik, hogy különösen egyes Lepidopterákban áll fenn szoros összefüggés a szemfejlődés és a központi idegrendszer között.

Ezzel kapcsolatban meg kell azonban említenem KOPEĆ (1922, 1923) vizsgálatait, aki a selyemlepke egy közeli rokonán, a gyapjaspillén (*Lymantria dispar* L.) végzett az itt közöltekhez hasonló kísérleteket túlnyomóan negatív eredménnyel. Kísérleti állataiban

a szem szerkezete az agy kiirtása ellenére teljesen normális volt, eltekintve egyes pigmentációbeli eltérésektől és az ú. n. idegnyaláb-réteg (a látósejtek proximális folytatása a bazális hártván belül) bizonyos rendellenességétől. KOPEČ módszere az enyémtől csak abban különbözött, hogy nem bábállapotban, hanem bebábozódás előtt álló hernyókon végezte kísérleteit. Eltérő megállapításainak tehát csak két oka lehet : vagy a fejlődési stádiumok közti, vagy a fajok közti különbség. Az előbbire aligha gondolhatunk, mivel ő korábbi fejlődési stádiumot vizsgált és elképzelhetetlen, hogy korábbi stádiumban a determináció előrehaladottabb legyen, mint később és más magyarázat is nehezen volna elképzelhető. Viszont az a lehetőség, hogy a szem determinációjának időpontja tekintetében faji különbségek vannak a *Bombyx* és a *Lymantria* között, könnyen elképzelhető, ha meggondoljuk, hogy milyen nagy különbség van pl. ugyanazon nembe tartozó két békafaj, a *Rana fusca* és a *Rana esculenta* között a szemlencse determinációja tekintetében.

Addig, amíg további összehasonlító vizsgálatok ebben a tekintetben nem állanak rendelkezésre, többet a kérdésről nem lehet mondani, nyilvánvaló azonban, hogy az itt közölt eredmények lényegét a más fajokon tett eltérő megállapítások tulajdonképpen nem érintik. Mindenesetre a különbségek mibenlétének felderítésére további vizsgálatokat indítottam meg.

Összefoglalás.

1. A selyemlepke (*Bombyx mori* L.) szemének differenciálódására gátlólag hat a központi idegrendszer látószervi részének (tractus opticus, protocerebrum) kiirtása a bábállapot kezdetén.

2. A gátlóhatás főleg a látósejteket (retinula) érinti, míg a másodlagos pigmentsejtek a retinula degenerációjával párhuzamosan inkább kiterjednek. A dioptrikus elemeket a degeneráció csak szélsőséges esetben és csak kis mértékben befolyásolja.

3. Az eredmények támogatják s megerősítik a szerzőnek azt a felfogását, hogy a központi idegrendszer indukáló hatást fejt ki bizonyos Arthropodák szemének differenciálódására.

Irodalom.

CHEVAIS, S (1937): «Sur la structure des yeux implantés de *Drosophila melanogaster*.» Arch. d'anat. microsc. **33**, 107.

(GOLDSCHMIDT, R (1927): «Physiologische Theorie der Vererbung.» Berlin, J. Springer.

HOWLAND, R. B. és B. P. SONNENBLICK (1936): «Experimental studies on development in *Drosophila melanogaster*. II. Regulation in the early egg.» Journ. exper. Zool. **73**, 109.

HUXLEY, J. és A. WOLSKY (1936): «Zur Frage der entwicklungsphysiologischen Determination des Arthropodenauges.» Biol. Cbl **56**, 571

KOPEĆ, ST. (1922): «Mutual relationship in the development of the brain and eyes of Lepidoptera.» Journ. exp. Zoöl. **36**, 459.

KOPEĆ, ST. (1923): «The influence of the nervous system on the development and regeneration of muscles and integument of Insects.» u. o. **37**, 15.

PLAGGE, E. (1936): «Transplantationen von Augenimaginalscheiben zwischen der schwarz- und der rotäugigen Rasse von *Ephesia kühniella* Z.» Biol. Cbl. **57**, 406.

ROUX, W. (1912): «Terminologie der Entwicklungsmechanik der Tiere und Pflanzen.» Leipzig, W. Engelmann.

SCHRADER, K. (1938): «Untersuchungen über die Normalentwicklung des Gehirns und Gehirnstransplantationen bei der Mehlmotte *Ephesia kühniella* Zeller nebst einigen Bemerkungen über das *Corpus allatum*.» Biol. Cbl. **58**, 52.

SEIDEL, F. (1931): «Die Reaktionsfolge im Determinationsgeschehen des Libellenkeims.» Verhandl. D. Zool. Ges. **1931**, 193.

SEIDEL, F. (1936): «Entwicklungsphysiologie des Insektenkeims.» u. o. **1936**, 291.

WOLSKY, A. (1932): «Experimentelle Erzeugung heteromorpher Regeneration am Auge des Sumpfkrebsses; zugleich Beiträge zur Kenntnis der Lebensgewohnheiten des Tieres.» Arb. Ung. Biol. Forschginst. **7**, 66.

WOLSKY, A. (1935—36): «Über Zusammenhänge zwischen Entwicklungsphysiologie und Genetik in der experimentellen Morphologie. Erörtert am Problem des *Crusta eenauges*.» u. o. **8**, 186.

WOLSKY, A. és J. S. HUXLEY (1934): «The structure and development of normal and mutant eyes in *Gammarus chevreuxi*.» Proc. Roy. Soc. B. **114**, 364.

WOLSKY, A. és J. S. HUXLEY (1936): «The structure of the non-facetted region in the bar-eye mutants of *Drosophila* and its bearing on the analysis of genic action upon arthropodan eyes.» Proc. Zool. Soc. London, **1936**, 485.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. ápr. 11-én tartott üléséből.)

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DIE ENTWICKLUNGSPHYSIOLOGISCHE
DETERMINATION DES INSEKTENAUGES.

Von ALEXANDER WOLSKY (Tihany).

Die hier nur vorläufig mitgeteilten Ergebnisse werden in deutscher Sprache ausführlich an anderer Stelle veröffentlicht.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. Apr. 1938.)

VASVÁRI MIKLÓS MÁSODIK KISÁZSIAI KUTATÓÚTJÁNAK ÁLLATTANI EREDMÉNYEI.

I. Puhatestű állatok (Mollusca).

WAGNER JÁNOS-tól.

VASVÁRI MIKLÓS második kisázsiai kutatóútjáról ismét hozott magával puhatestűeket, melyeket feldolgozás céljából nekem adott át. Bár ez a gyűjtés nem volt olyan eredményes mint az első, mert csak mintegy 300 darab állatot foglal magában, mégis megérdemli, hogy vele e helyen foglalkozzunk. Szerepelnek benne ugyanis olyan fajok, melyek a Magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményében mind-
eddig még nem voltak képviselve, s ezenfelül még egy, a tudományra új alfajt is sikerült az állatok között felfedeznem. A gyűjtés legnagyobb részét ez alkalommal is a szárazföldi tudóscsigák alkották, kívülük még számos vízicsigát és nagyobb kagylókat is zsákmányolt VASVÁRI. A gyűjtött állatok a következő termőhelyekről származnak: Stambul különböző pontjai, az Apolló-tó (Aboliont-tó) Brussa közelében, Ankara és környéke, Malatia (az Euphrates közelében), a Tigris mellett fekvő Djarbekr és Mardin.

A gyűjtésben a következő puhatestű-fajok szerepelnek:

1. *Theodoxus (Theodoxus) fluvialis* L. Karacabey (1 példány).
2. *Vivipara costae* HELDR. Apolló-tó (1 péld.)

E jellemző kisázsiai fajból mindössze egyetlen példány került elő. Hossza 30, szélessége 23 mm. A héj sajátságai közül nevezetes a résszerű, hasítókos köldök és a magas, tompa csúcsú tekeres. Varrata mélyen bevágott, öt kanyarulata fokozatosan növekszik, a felsők csak kevéssé domborúak. Nyílása körtealakú, felül szögletes, szájszéle egyszerű és éles. Alakja teljesen megegyezik a

ROSSMÄSSLER-féle Iconográfiában közölt rajzzal (7, 140. tábla, 1381. ábra).

A Magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményében eddig nem volt meg.

3. *Melanopsis (Melanopsis) praerosa* L. Karacabey (55 darab kisebb-nagyobb példány héja).

4. *Lymnaea (Stagnicola) palustris* MÜLL. Karacabey (2 péld.)

Két csúcsnélküli ház, valószínűleg nagyon erősen «mészoldó» vízből.

5. *Lymnaea (Stagnicola) palustris* MÜLL. var. Stambul (24 péld.)

Az előbbi fajnak egy kisebb, karcsúbb termetű változata nagy példányszámmal került elő Sztambulból. A *Lymnaea palustris* egész Európában és Ázsiában elterjedt s számos fajváltozatban található meg.

6. *Planorbis corneus* L. Karacabey (2 péld.)

Közepes nagyságú, tipikus példányok olajbarna színeződéssel.

7. *Tropidiscus planorbis* L. Karacabey (3 péld.)

8. *Segmentina nitida* MÜLL. Karacabey (1 péld.)

A *Planorbis*-félék Európában általánosan elterjedtek, de részben Ázsiában is megvannak. Így a *Planorbis corneus* egészen Szibériáig ismeretes, a *Tropidiscus planorbis* pedig megvan Nyugat-és Észak-Ázsiában Kelet-Turkesztánig és a Bajkálíg.

9. *Succinea Pfeifferi* Rm. Malatia (3 péld.)

Egész Európában messze elterjedt faj, mely Ázsiában főleg északon és a nyugati részekén található meg.

10. *Orcula mesopotamica* MOUSS. Mardin (8 péld.).

E Mezopotámiából ismert fajra jellemző, hogy háza csaknem hengeres alakú, felső kanyarulatai pedig erősen bordázottak, míg az alsók majdnem símák. Legnagyobb példányom hossza 8, szélessége pedig 3 mm. A Magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményében eddig még nem volt meg.

11. *Mastus (Mastus) carneolus* MOUSS. Ankara (1 péld.).

12. *Zebrina (Zebrina) detríta* MÜLL. Ankara (8 péld.).

13. *Zebrina (Zebrina) subdetríta* BGT. Ankara (2 péld.).

Ez az első ízben BOURGUIGNAT által ismertett faj a Magyar Nemzeti Múzeum gyűjteményéből mind eddig hiányzott. Rendkívül hasonlít a megelőzőhöz, csaknem olyan.

mint a *detrita* kicsinyben, de mégis könnyen megkülönböztethető attól. Felső kanyarulatai ugyanis erősebben domborodók, szájníylásának jobboldali felső sarkában pedig egy fogszerű kis kiemelkedést találunk. Szájpereme határozottabb kialakulású, szájszélének egy keskeny része visszahajlott. A szájníylás befejezett vonalai ilyen módon könnyen felismerhetővé teszik és minden kétséget kizárva megkülönböztetik a *detrita* fiatal alakjaitól. Az én példányaim hossza 14, illetve 13, szélességük pedig 7 mm volt. E faj főleg a Fekete-tenger körül elterülő országokból ismeretes.

14. *Chondrus zebra* OLIV. Ankara (1 péld.).

15. *Chondrus sagax* (FRIV.) PFR. Malatia (2 péld.).

Két fiatal állat héja, melyek még nem érték el teljes nagyságukat. E faj legelőször talált Ankarából származó példányait a Nemzeti Múzeum őrzi.

16. *Chondrus blandus Vasvárii* n. subspec. A törzsfajnál nagyobb és szélesebb.

A FRIVALDSZKY-féle gyűjteményből származó *Chondrus blandus*-t PFEIFFER írta le a Zeitschrift f. Malakozoologie 10. évfolyamában (1853, p. 149). Az eredeti, Amasia környékéről származó példányok a Nemzeti Múzeum gyűjteményében vannak s így ezeket könnyen összehasonlíthattam a VASVÁRI által gyűjtöttekkel. Az alaktani sajátságokban különben feltűnően megegyező héjak között meglehetősen nagyságbeli eltérések vannak, a Malatiából hozott példányok ugyanis valamennyien szélesebb, vaskosabb kifejlődésűek. A két termőhelyről származó házak méreteit az alábbi táblázat tünteti fel:

Amasiai héjak.			Malatai héjak.		
	Hosszúság	Szélesség		Hosszúság	Szélesség
1.	9.3 mm	3.5 mm	1.	9.9 mm	3.9 mm
2.	9.2 «	3.5 «	2.	10.0 «	4.2 «
3.	10.0 «	3.5 «	3.	10.0 «	4.2 «
4.	12.0 «	3.5 «	4.	10.5 «	4.5 «
5.	12.0 «	3.5 «	5.	13.0 «	4.5 «

A táblázatból világosan kitűnik, amit a példányok egymással való összevetése még jobban szemléltet, hogy a VASVÁRI által

gyűjtött héjak nemcsak hosszabbak, de lényegesen szélesebbek is az amasiai törzsfajnál. A *Chondrus blandus blandus* példányai valamennyien 3·5 mm szélesek, s ha a 4. és 5. számú házakat tekintjük is csak teljesen kinőtteknek, úgy a malatiaiak közül a legnagyobb és feltehetőleg az egyetlen növekedését befejezett példány ezeket is felülmúlja nemcsak szélességben, hanem hosszúságban is. A nagyságbeli különbségek alapján a Malatiából származó példányokat új alfaj képviselőinek tekintem, s ezt az alfajt a gyűjtő tiszteletére: *Chondrus blandus Vasvárii* n. subspec. néven kívánom az irodalomba bevezetni, az új alfaj típusául pedig az 5. számú példányt jelölöm meg.

Termőhely: Malatia, 1937 júliusában.

17. *Papillifera bidens* L. Stambul (12 péld.).

18. *Pleurodiscus balmei erdelii* ROY. Stambul (2 péld.).

19. *Discus rotundatus* MÜLL. Stambul (1 péld.).

Közép-, illetve nyugateurópai faj, melynek elterjedési határai kelet felé nem nagyon ismeretesek. Úgy látszik, hogy Oroszországból csaknem teljesen hiányzik, a Krimből azonban már irodalmi adatok is említik.

20. *Oxychilus cyprius borealis* KOV. Stambul (5 péld.).

Két kicsiny és három közepes nagyságú állat háza. A legnagyobbik átmérője 11 mm, magassága pedig 5 mm.

21. *Retinella camelina frondosula* MOUSS. Stambul (5 péld.).

22. *Retinella* sp. Stambul (9 péld.).

23. *Limax (Limax) flavus ecarinatus* BTRER. Stambul (10 különböző nagyságú állat).

24. *Agriolimax* sp. Stambul (1 péld.).

25. *Agriolimax berytensis* BGT. Ankara (10 péld.).

Az állatok valamennyien nagyon finom bőrűek, sötét barnás-szürkék vagy kékesszürkék, talpuk világosabb, de csak a középső pászta sárga teljesen, míg a szélsők színében a sárga és a szürke keveredik. Az állatok átlagos hossza 2—3 cm között változik. Anatómiai sajátosságai közül jellemző a penisfüggelék alakja, mely ebben a fajban rendkívül hosszú és elágazó.

26. *Milax (Subamalia) Strandii* H. WAGN. Stambul (6 egészen fiatal példány).

27. *Milax (Milax) gracilis* LEYD. Stambul (2 péld.).

Két teljesen kinőtt állat, élénk sárga nyálkával és tipikus színeződéssel. A *Milax gracilis* Stambul környékén úgy látszik egyáltalában nem ritka.

28. *Helicella (Cernuella) virgata variabilis* DRAP. Stambul (12 péld.), Karacabey (1. péld.).

A stambuliak között igen jól fejlett héjak akadnak, 17—18 mm-es átmérővel és 12 mm magassággal.

29. *Helicella (Helicella) spirula* WESTL. Karacabey (4 péld.), Ankara (6 péld.), Malatia (2 péld.).

E faj Kis-Ázsiában úgy látszik nagyon sok helyen elterjedt. A most vizsgált példányok között a legnagyobbak az ankaraiak.

30. *Helicella (Xeropicta) derbentina* KRYN. Stambul (5 péld.), Karacabey (3 péld.), Malatia (3 péld.).

31. *Helicella (Trochoidea) pyramidata* DRAP. Karacabey (4 péld.).

32. *Helicella* sp. Djarbekr (3 péld.).

Fenti helyről három darab fiatal állat háza került elő, feltűnően tarka, érdekes színeződéssel. Sajnos, a fiatal példányok héja alapján a fajt meghatározni nem volt lehetséges.

33. *Cochlicella acuta* MÜLL. Stambul (1 péld.).

34. *Theba (Theba) syriaca* EHRBG. Stambul (8 péld.).

E fajnak Stambulban nyolc, köztük több kopott héját gyűjtötte VASVÁRI. A bennük levő testmaradványokon bonctani vizsgálatokat már nem lehetett végezni.

35. *Theba (Theba) carthusiana* MÜLL. Karacabey (9 péld.).

Teljesen a hazaiakhoz hasonló, tipikus példányok.

36. *Theba (Theba) melitenensis* P. HESSE. Malatia (10 péld.).

Kinőtt és fiatal állatok házai, színezetük a szarusárgától a pirosbarnáig változik, utolsó kanyarulatuk közepén határozott világos sávval. Köldökük résalakú, részben fedett, ajkuk belül rózsaszínű, zománcszerű, kívül sárgán áttetsző. Az utolsó kanyarulat erősebb nagyítás alatt jól látható spirális díszítést visel. A legnagyobb kinőtt példány házának szélessége 11·5, magassága 8 mm, míg a kisebbek csak 8 mm szélességet és 5 mm magasságot értek el. Anatómiai sajátosságai közül fontos, hogy nyálkamirigyei többszörösen osztottak és epiphallusa rövid, vékony kis flagellumot

visel. A penisen visszahúzóizom nincsen. A *Theba melitenensis* eddig csak Malatia vidékéről ismeretes, ahonnan P. HESSE 1915-ben írta le. (2, p. 58—60). Múzeumunk gyűjteményéből eddig hiányzott.

37. *Theba (Paratheba) fruticola* KRYN. Gök-Sü, Djarbekrtől kb. 40 kilométernyire Mardin felé (2 fiatal állat háza).

38. *Theba (Paratheba) Rothi* PFR. Stambul (1 péld.).

Görögországban, a görög szigeteken és Kis-Ázsiában igen sok helyen előforduló faj, melynek több fajváltozata is ismeretes.

39. *Metatheba samsunensis* PFR. Ankara (4 péld.).

Erre az érdekes fajra jellemző, hogy epidermisen könnyen lehulló rövid szőrökkel fedett, melyeknek helye későbbben is látható a héjon. A ház 5—6, egyenletesen növekedő kanyarulatból áll, szaruszínű, finoman vonalkázott, kissé átlátszó, köldöke résalakú, részben fedett, nyílása belsejében fehér zománcperem fejlődött ki. Anatómiai bélyegei közül fontos, hogy penisfüggeléke nincsen, retraktora ellenben van, éppúgy, mint a többi *Metatheba*-fajnak. A *Metatheba samsunensis* főleg a Fekete-tenger környékén terjedt el, Brüssától egészen Batumig. A Nemzeti Múzeum gyűjteményéből eddig hiányzott.

40. *Eobania vermiculata* MÜLL. Stambul (6 péld.).

41. *Levantina (Assyriella) guttata* OLIV. Mardin (14 péld.).

Ez a faj főleg Felső-Mezopotámiában terjedt el, de már Djarbekrből, a Tigris felső vidékéről szintén ismeretes volt. Jellemző rá, hogy köldöke fedett, felülete pedig ráncolt, redőzött. VASVÁRI 14 példányát gyűjtötte, közülük a legnagyobb 32 mm átmérőt és 22 mm magasságot ér el.

42. *Levantina (Assyriella) Escheriana* MOUSS. Mardin (1 péld.).

Az előző fajtól abban különbözik, hogy tág köldöke van, héja pedig laposabb, vékonyabb és símább. A *guttatával* együtt fordul elő, de úgy látszik, hogy attól mindig jól elkülöníthető. A Nemzeti Múzeum gyűjteményében eddig még nem volt meg.

43. *Helix (Helix) figulina* (PARR.) RM. Stambul (3 péld.).

44. *Helix (Cryptomphalus) aspersa* MÜLL. Stambul (1 péld.).

45. *Unio tumidus* RETZ. Apolló-tó (7 péld.).

Európában általában mindenütt elterjedt faj, mely kelet felé egészen Szibériáig honos és a nagy ponto-káspi folyamokban is megvan.

46. *Anodonta cygnea* L. Apolló-tó (1 péld.).

Összefoglalás.

VASVÁRI MIKLÓS II. kisázsiai kutató-expedíciójának gyűjtése közel 300 darab puhatestűvel gazdagította a Nemzeti Múzeum Állattárának gyűjteményét. Ezek között néhány nagyon kevésbé ismert faj is van, olyanok, melyek múzeumunk gyűjteményéből eddig még hiányoztak. Ilyenek a *Vivipara costae*, *Orcula mesopotamica*, *Zebrina subdetríta*, *Theba melitenensis*, *Metatheba samsunensis* és a *Levantina Escheriana*. Közülük egyik-másik ma még a legnagyobb ritkaságok közé tartozik.

A gyűjtésből egy új alfaj is előkerült, nevezetesen a Malatiából leírt *Chondrus blandus Vasvárii* n. subspec., mely az amasiai törzsfajtól nagyobb termete által különbözik.

Állatföldrajzi szempontból VASVÁRI M. kutatóútja azért jelentős, mert az új termőhelyeken gyűjtött puhatestű állatok révén számos új adatot kaptunk egyes kevésbé ismert fajok elterjedéséhez.

Irodalom. — Literatur.

1. HESSE, P.: *Helix frequens* Mousson. Mitteil. Kaukas. Mus. 6. 1914.
2. HESSE, P.: Beschreibungen neuer Arten. Nachrbl. Deutsch. Malakozool. Ges. 47, 1915.
3. HESSE, P.: Nachtrag zum Genus *Levantina* Kob. (Aus Rossmässler's Iconographie. N. F. Bd. XXIII. 1920.).
4. HESSE, P.: Zur Anatomie und Systematik palaearktischer Stylommatophoren. Zoologica, 31, 1931.
5. HESSE, P.: Zur Anatomie und Systematik palaearktischer Stylommatophoren. Zoologica, 33, 1934.
6. PFEIFFER, L.: Diagnosen neuer Heliceen. Zeitschr. f. Malakozool. 10. 1853.
7. ROSSMÄSSLER, E. A.: Iconographie der Land & Süßwasser-Mollusken, usw. V. Wiesbaden, 1877.

8. SIMROTH, H.: Die von Herrn E. von Oertzen in Griechenland gesammelten Nacktschnecken. Abhandl. Senckenberg. Naturforsch. Ges. 16, 1891.

9. WAGNER, J.: Vasvári Miklós 1936. évi kisázsiai kutató útjának állattani eredményei. I. Puhatestű állatok (Mollusca). Matemat. Természettud. Értesítő LVI, 1937.

10. WESTERLUND, C. A.: Fauna der in der palaearktischen Region lebenden Binnenconchylien. 3, 1887. (Buliminus, Pupa. usw.)

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. máj. 16-án tartott üléséből.)

ZOOLOGISCHE ERGEBNISSE
DER ZWEITEN FORSCHUNGSREISE N. VASVÁRI'S
IN KLEINASIEN.

I. Weichtiere (Mollusca).

Von HANS WAGNER.

Auf seiner zweiten Forschungsreise im Jahre 1937 sammelte N. VASVÁRI in Kleinasien wieder verschiedene Molluskenarten (fast 300 Exemplare), die ich im Winter 1937/1938 bearbeiten konnte. Unter den Landschnecken befand sich auch eine neue Unterart von *Chondrus blandus*, die ich zu Ehren des Herrn Sammlers: *Chondrus blandus Vasvárii* n. subspec. benenne. Die Exemplare dieser neuen Unterart stammen von Malatia, und unterscheiden sich durch ihre grössere, breitere Gestalt von der Stammform. Erwähnungswert ist noch aus der Sammlung *Theba melitenensis* P. HESSE, eine Art, die erst im Jahre 1915 von Malatia beschrieben wurde. Von dieser seltenen Schnecke konnte VASVÁRI nicht weniger als 10 Exemplare erbeuten. Von den *Theba*-Formen wurden ausser *melitenensis* noch *carthusiana*, *syriaca*, *Rothi*, *fruticola* und *samsunensis* gesammelt. Auch gelangten mit der Ausbeute einige solche Formen in unsere Sammlung, die im Ungarischen Nationalmuseum noch nicht vertreten waren. Diese sind die folgenden: *Vivipara costae*, *Oracula mesopotamica*, *Zebrina subdetrita*, *Theba melitenensis*, *Metatheba samsunensis* und *Levantina Escheriana*.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Mai 1938.)

PAPYROTHECA MIRABILIS (BRUS.) ÉS SUCCINEA
GRACILIS (LÖRENT.) A SOPRONVIDÉKI ALSÓ
PONTUSI ÜLEDÉKEKBEN.

VITÁLIS ISTVÁN 1. tagtól.

Az 1859. évben SCHWABENAU lovag sajtó szerű, stanicli formájú, parányi kövületet küldött Sopron vidékéről a bécsi Hofmúzeumba, ahol azt évtizedeken át «problematikum»-ként őrizték. (10. p. 78)

Az 1892. évben BRUSINA is lelt ilyen parányi, papucsszerű fossiliákat Belgrádtól délre Ripanj község határában *Congeria subglobosa* PARTSCH, *Melanopsis fossilis* GMEL., *Melanopsis vindobonensis* FUCHS és parányi *orygocerasok* társaságában, vagyis alsó pontusi üledékben. (1, 2)

Az 1893. évben LÖRENTHEY Tinnyén talált ilyen különleges házacskákat (5) és éppen meghatározásukkal foglalkozott, amikor ugyanabban az évben megjelent BRUSINÁNAK egy kis, angol nyelven közölt cikke, amelyben a «problematikum»-ot megoldva, a papírvékony, stanicli-szerű, papucsformájú lapított házacskákat új csiga-nemként ismertette és *papyrotheca* elnevezéssel vezette be a szakirodalomba: $\pi\alpha\pi\rho\sigma$ = papíros; $\theta\acute{\eta}\chi\eta$ = doboz, stanicli. (2)

BRUSINA az 1893. évben ennek az új genusnak a jellegeit a következőképpen állapította meg: A héj (a ház) nagyon vékony, mintha egy darabka papírlapból állana. Alig csavart, köldöke nincsen. Apexből és egyetlen kanyarulatból áll. Az alak rendkívül különös és csak olyan lapított *succineához* volna hasonlítható, amely valamely meghosszabbodott *crepidula* alakját vette fel. Az apex sima, megnyúlt, mint az *acellé*. Egyetlen kanyarulata egyszerre széles szájba nyílik s tulajdonképpen ez alkotja az egész házat.

Ajkai nincsenek, a szájnylás szélei élesek. Az orsóalakú él, amely közvetlenül az apex alatt van kifejlődve, a száj felé húzódik s aránylag széles lemezt alkot, amely a száj hátsó részével hegyes szöget zár be. A száj külső széle lefelé kiterjedt, egyszerű, fölfelé hegyes szögbe nyúlik, septumszerű lemezt alkot; az orsóalakú élén találkozunk a már leírt lemezzel, azzal egyesül, de csak részben takarja s lapos tért hagy fedetlenül, amely bemélyedt csatornához hasonlít. — A héj kagylószerű, mert a külsején finom, koncentrikus, de nem egészen szabályos vonalkázást mutat, míg a belscje csaknem sima. (2. p. 4).

BRUSINA az 1893. évben ebből a rendkívül érdekes házacskájú és édes- vagy elegeyvízinek tekintett új csiganemből három fajt írt le és mutatott be rajzban. Ez a három új faj a következő: *Papyrotheca mirabilis* BRUS., *Papyrotheca pseudogyra* BRUS. és *Papyrotheca contraria* BRUS. (2. p. 4—6). Közülök a *Papyrotheca mirabilis* fajt vette genotípusnak.

Ez a különleges házacskájú, új csiganem a szakkörökben nagy érdeklődést keltett, majd több irányban vitát is provokált, amely még ma sem ért véget.

COSSMANN M. párisi palaeontologus véleménye szerint a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskáját a *pteropodák*hoz lehetne hasonlítani, ha a búbja nem lenne csavart, mint egyes gasteropodagenusé. A *papyrotheca* COSSMANN szerint is különleges és valóban csodálatos (*mirabilis*).

BOETTGER O. a kiváló német conchyliologus is elismerte, hogy a *papyrotheca* nagyon különleges. BOETTGER biztosra vette, hogy a *papyrotheca* édesvízi csiga volt és így kizártnak tartotta, hogy azt rokoni kapocs fűzhetné a *succinea*-, *omalonyx* et c. genushoz. Minthogy a *papyrotheca* házacskája papiros vékonyságú, BOETTGER úgy vélte, hogy nem lehetett fedele (*operculum*) és így a *navicella*-genusszal sem hozható rokoni kapcsolatba. BOETTGER véleménye szerint a *papyrotheca* csak a *limnaea* és a *lantzia* nemek közé helyezhető, de hangoztatta, hogy analógiát nem ismer sem az élő, sem a kihalt csigák között.

LŐRENTHEY I. a hazai pannóniai pontusi fauna egyik legkiválóbb specialista-kutatója az 1893. évben *Tinnyén* az alsó pontusi üledékekben, a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskáival együtt

egy, azokhoz nagyon hasonló parányi, új *succinea*-házacskát is talált, amelyet *Succinea gracilis* (nov. forma) névvel jelölt meg (5. p. 352.)

LŐRENTHEY az 1895. évben egyik kis közleményében új *succinea*-fajának és a *papyrotheca* genusnak a viszonyáról a következőket írta:

«A *Papyrothecát* gondolatban igen szépen magunk elé állíthatjuk, ha a tinnyei *Succinea gracilis* LŐRENT.-et képzeletben 360°-al balfelé kicsavarjuk úgy, hogy csak 1·5 kanyarulat maradjon meg. De viszont előállíthatnánk a *Succineát* is, ha a *Papyrothecát* jobb felé csavarnánk be 360°-ra, mert akkor az úgynevezett belső és külső lemez (septum) összesodorva a tengely képzéséhez járulna hozzá, míg a két csúcsba futó él a varratvonalat alkotná.» (4. p. 352).

Az 1902. évben BRUSINA is bemutatott *Succinea papyrotheca* n. sp. néven olyan, új csigafajt, amely mintegy átmenet a *papyrotheca* és a *succinea* genus között. (3. tab. I. fig. 5.)

LŐRENTHEY viszont ugyanabban az évben a budapesti pannóniai üledékek faunájáról írt monografiájában —1895. évi érvelésétől eltérően — a *Succinea gracilis* fajtát a *papyrotheca*-nemhez tartozónak vette. (6. p. 182.)

Ha összehasonlítjuk LŐRENTHEY említett monografiája XIII. tábla 9. és a XIV. tábla 3—4. ábráit, az itt említett *succinea* és *papyrotheca* házacskák — az átmenetre való tekintettel — a következőképpen volnának sorba állíthatók: 1. *Succinea papyrotheca* BRUS., 2. *Succinea (Papyrotheca) gracilis* LŐRENT., 3. *Papyrotheca pseudogyra* BRUS., 4. *Papyrotheca contraria* BRUS. és 5. *Papyrotheca mirabilis* BRUS.

Az 1903. évben RZEHAk Leobersdorf alsó pontusi üledékében lelt olyan embryonalis csigaházacska, amelyről akkor azt írta, hogy (?) *papyrotheca* vagy *Succinea papyrotheca* BRUS. faj lehet (9. p. 265). RZEHAk néhány évvel később TROLL lovaghoz intézett levelében úgy nyilatkozott, hogy a leobersdorfi embryonalis csigaházacska a *Papyrotheca gracilis* LŐRENT. fajhoz tartozik.

TROLL O. lovag az 1907. évben úgy vélekedett, hogy a *Succinea papyrotheca* BRUS. = *Papyrotheca gracilis* LŐRENT. (10. p. 78)

Az 1921. évben WENZ W. nagyon szép és gazdag mikrofauna-

gyűjteményt kapott *Leobersdorfból* feldolgozásra. Az anyagot EDLAUER gyűjtötte évek során át, nagy szorgalommal, főleg a nagy melanopsisok házában megőrződött fővenyből, homokból. A leobersdorfi mikrofauna tagjai között ott voltak a RZEHAK és TROLL által említett *papyrothecak* is, igen változatos formákban.

WENZ az eltérő életkorú papyrotheca-házacskák tanulmányozása alapján két következtetést vont le: 1. a leobersdorfi papyrothecák semmiesetre sem tartoznak a *Papyrotheca gracilis* LÖRENT. fajhoz, amint azt RZEHAK vélte, hanem a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. fajjal azonosak, 2. a leobersdorfi papyrotheca-házacskák annyira hasonlítanak egymáshoz, hogy fokozatosan kevésbé becsavarodott *succinea*-héjaknak tűnnek fel, amire egyébként LÖRENTHEY már 1895. évben reámutatott. (5. p. 352.)

WENZ később, az 1923. évben nemcsak LÖRENTHEY *Succinea*, illetve *Papyrotheca gracilis* fajtát azonosította BRUSINA *Succinea papyrothecájával*, úgy mint már előzetesen TROLL lovag, hanem ezt a két fajt BRUSINA *Papyrotheca pseudogyra* fajával is összevonta (12.). WENZ szerint tehát a *Succinea (Papyrotheca) gracilis* LÖRENT. = *Succinea papyrotheca* BRUS. = *Papyrotheca pseudogyra* BRUS. Ehhez az összevonáshoz csatlakozom, de azzal az eltéréssel, hogy mind a három fajt a *succinea*-nemhez tartozónak veszem, BRUSINA azon rajzai alapján, amelyeket a *Iconographia* Tab. I. Fig. 5. és 6. közölt.

*

Az irodalomban — amennyire az részemre hozzáférhető volt — semmi nyomát sem találtam annak, hogy SCHWABENAU 1859. évi lelete óta valaki Sopron vidékén *papyrothecát* talált volna. Annál nagyobb volt tehát az örömem, amikor a múlt évben nemcsak a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskáit leltem meg a nagy melanopsisok házában megőrződött mikrofauna tagjai között, hanem vele együtt a *Succinea gracilis* LÖRENT. házacskáit is.

Ámbár ennek a két érdekes parányi csigafajnak a házacskáiból 1. sopron—pozsonyi országúttól a Tómalom-fürdőhöz vezető autótút árkában és 2. Soprontól északra Fertőrákos község határában, Pius-major közelében tíz példányt sikerült a nagy melanopsis házak finom fővenyből kiszednem, azok között egy sem volt telje-

sen ép. Kimentem tehát Tinyére is, ahol a nagy melanopsis-házakban megőrzött mikrofauna között sikerült a *Succinea gracilis* LŐRENT. faj házacskájának egy ép példányát megleglennem. Így azután lehetővé vált a sopronvidéki töredékes házacskákat ezzel a tinnyei ép példánnyal összehasonlítani. Ezen összehasonlítás következtében nem csatlakozhatom ahhoz a véleményhez, hogy a *Succinea gracilis* LŐRENT. faj is papyrotheca. A papyrotheca és a succinea.genusok házacskái között ugyanis a következő eltérések vannak: 1. a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskája papucszerűen lapított, amint azt az 1c és 2b jelű kereszttszelvény is mutatja. A *Succinea gracilis* LŐRENT. házacskája viszont nem lapított, hanem tölcsérszerű, amint azt a 3c, 4c, 5c és a 6c kereszttszelvényei is tanúsítják. 2. A *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskája csak 1—1.5 kanyarulatból áll, holott a *Succinea gracilis* LŐRENT. héja 3 csavarulatot alkot. 3. A *Papyrotheca mirabilis* BRUS. héja a házacska nyílásának: «szájának» a belső szélén nem hajlik vissza (lásd az 1c és a 2b rajzot), hogy orsót alakítson, holott a *Succinea gracilis* LŐRENT. héjának a belső széle becsavarodik (lásd a 3c, 4c, 5c és a 6c rajzokat) és így a házacska tengelyét helyettesítő orsó alakul belőle.

Ezek alapján külön-külön fajként ismertetem a Sopron vidékén lelt *Papyrotheca mirabilis* BRUS. és a *Succinea gracilis* LŐRENT. házacskáit.

*

1. *Papyrotheca mirabilis* BRUSINA.

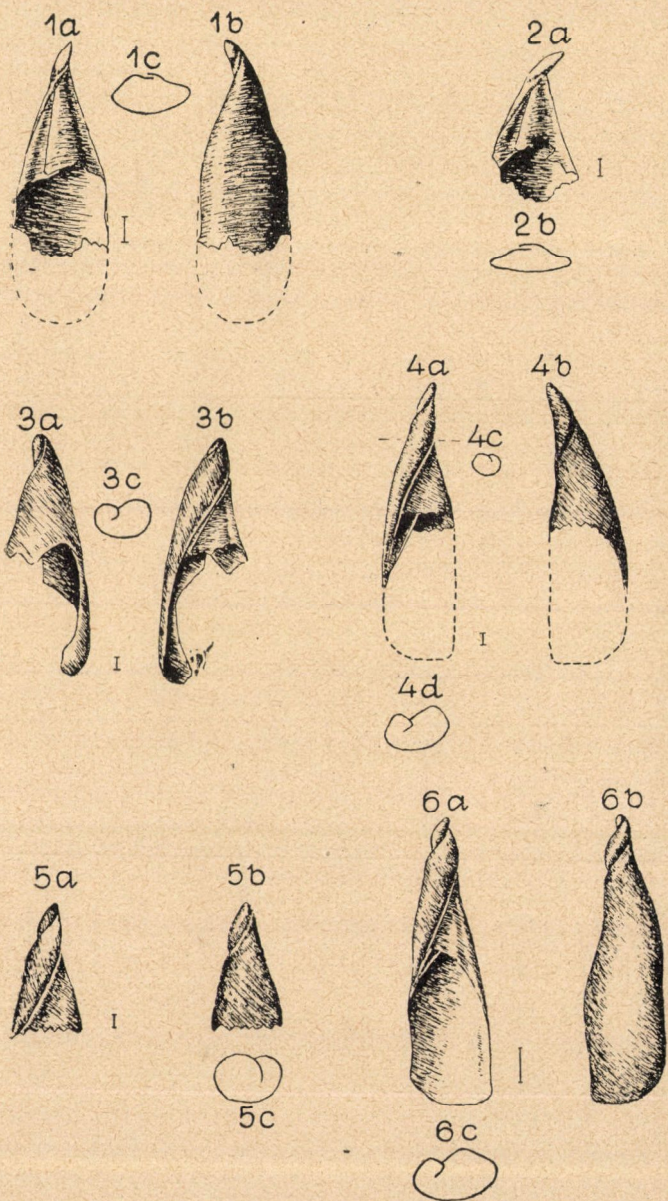
1893. — *Papyrotheca mirabilis* sp. nov. — BRUSINA: Papyrotheca, a new genus of Gasteropoda. The Conchologist. 1893. Vol. II. Pl. II. fig. 1—3.

1895. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — LŐRENTHEY: Nehány észrevétel a Papyrothecához. Földtani Közlöny. Budapest. XXV. k. 349. l.

1902. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — BRUSINA: Iconographia moll. foss. Tab. I. fig. 8—12.

1902. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — LŐRENTHEY: Die pannonische Fauna von Budapest. Palaeontographica. Bd. 48. Stuttgart. p. 182. Taf. XIII. Fig. 6—8.

1903. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — LŐRENTHEY: A szarmata és a pannón képződményeket áthidaló rétegek. Földt. Közl. XXXIII. k. p. 61.



1903. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — PAVLOVIĆ: Annales Géol. de la Péninsule Balkanique. Belgrade. Tome VI. Facs. 1. p. 326.

1904. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — HALAVÁTS: A magyar pontusi emelet általános és őslénytani irodalma. Budapest, 1904. p. 127.

1903. — ? *Papyrotheca*. — RZEHAK: Beitrag zur Kenntnis der Fauna der Congerienschichten von Leobersdorf. Verh. d. k. k. geol. R. A. Wien, 1903. Nr. 10. p. 265.

1907. — *Papyrotheca gracilis* TROLL (non LŐRENT). — TROLL: Die pontischen Ablagerungen von Leobersdorf und ihre Fauna. Jahrb. d. k. k. Geolog. Reichsanstalt Bd. 57. 1. Heft. Wien. 1907. p. 78.

1921. — *Papyrotheca mirabilis* Brus. — WENZ: Zur Fauna der pontischen Schichten von Leobersdorf. Senckenbergiana III. Frankfurt a. M.

1923. — *P. pyrotheca mirabilis* Brus. — WENZ: Gastropoda extramarina tertiaria (*Pompeckii*): Fossilium Catalogus I. Animalia p. 900—901.

Fertőrákos határában Pius-major közelében a *Melanopsis fossilis* GMEL. (= *Melanopsis Martiniana* Fér.) és a *Melanopsis vindobonensis* FUCHS házaiban 6 példányt találtam apró *congeriak*, parányi *limnocardiumok* és a mikrofauna más tagjai: *orygocerasok*, *fossarulusok*, *hydrobiák*, *limnaeak*, *planorbisok*, *valvák*, *neritínák*, *ostracodák* és *foraminiferák* társaságában. A makrofauna tagjai között ott leltem a *Congeria subglobosa* PARTSCH, a *Congeria Schmidtii* LŐRENT., az *Unio* cf. *Vásárhelyii* LŐRENT. és sok *melanopsis*-féle házáit. Mindezek a fossiliák az alsó pontusi emeletre jellemzők.

A Fertőrákoson lelt, viszonylag legépebb házacská (lásd az 1. rajzot) a háti táj felől nagyságra és alakra nézve teljesen megegyezik azzal a példánnyal, amelyet BRUSINA mutatott be Iconographiája Tab. I. fig. 12. — Elülről nézve a piusmajori házacská a BRUSINA által előlnézetben bemutatott négy példány közül a 11. rajzon feltüntetett házacskával egyezik meg a legjobban.

A fertőrákosi Pius-major közelében lelt többi *papyrotheca*-házacská közül a 2. rajzon olyat mutatok be, amelyen a búb a tengelyvonaltól erősen elhajlik.

A *papyrotheca* papucsszerűen összenyomott házacskáira igen jellemző az 1c és a 2b keresztmetszet.

A fertőrákosi Piusmajor közelében talált *Papyrotheca mirabilis* BRUS. papiros vékonyságú házacskái mind világos sárga színűek.

A soproni Tómalom-fürdőhöz vezető autót út árkában lelt *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskája hasonlít a fertőrákosi Pius-major közelében gyűjtött példányokhoz, de a spirája kevésbé csavart. A septum jól felismerhető. A házacskája színe nem sárgás, hanem fehéres és selymes fényű.

A *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskáit eddig a szerbiai, *Rípanj*, az ausztriai *Leobersdorf*, a pestvármegyei *Tinnye* és krassószörényvármegyei *Szócsán* határában gyűjtötték, ezekhez a lelőhelyekhez járul a sopronvármegyei *Fertőrákos* (Pius-major) és *Sopron* (Tómalom).

2. *Succinea gracilis* LÖRENT.

1893. — *Papyrotheca pseudogyra* Brus. — BRUSINA: The Conchologist, Vol. II. Pl. II. Fig. 4.

1895. — *Succinea gracilis* nova forma (nom. nud.) — LÖRENTHEY: Néhány észrevétel a Papyrothecáról. Földtani Közöny. XXV. k. 349. o.

1902. — *Succinea papyrotheca* Brus. — BRUSINA: Iconographia. Tab. I. Fig. 5.

1902. — *Papyrotheca pseudogyra* Brus. — BRUSINA: Iconographia. Tab. I. Fig. 6.

1902. — *Papyrotheca gracilis* nov. sp. — LÖRENTHEY: Palaeontographica. 48. Bd. p. 182. Taf. XIII. Fig. 9. és Taf. XIV. Fig. 3. és 4.

1903. — *Succinea gracilis* Lörent. — PAVLOVI: Ann. Géol. de la Péninsule Balkanique. Tome VI. Fasc. 1. p. 328.

1904. — *Papyrotheca gracilis* Lörent. — HALAVÁTS: Pontusi irodalom. p. 127.

1906. — *Papyrotheca gracilis* Lörent. — LÖRENTHEY: Math. és Term. Értesítő XXIV. k. 2. f. 311. o.

1923. — *Papyrotheca pseudogyra* Brus. — WENZ: Gastropoda extramarina tertiaria. p. 901.

A fertőrákosi Pius-major közelében a nagy melanopsis-házak fővenyében a már felsorolt, alsó pontusi fauna tagjai között a *Papyrotheca mirabilis* BRUS. házacskáival együtt három darab olyan töredékes csiga-házacskát találtam, amelyet a *Succinea gracilis*, illetve a *Papyrotheca gracilis* LÖRENT. fajról közölt rajzokhoz hasonlítottak.

A LÖRENTHEY által a Palaeontographica 48. k. Tab. XIII. Fig. 9. és a Tab. XIV. Fig. 3. és 4. rajzain bemutatott házacskák azon-

ban erősen eltérnek egymástól. Kimentem tehát Tinnyére és ott sikerült egy ép példányt gyűjtenem, amelyet a 6. rajz szemléltet.

A 3., 4. és az 5. rajzokon bemutatott fertőrákosi piusmajori töredékes példányok igen jól megegyeznek a tinnyei ép példánnyal. A ház, illetve a héj egyiknél sem lapított, mint a papyrothecánál, hanem tölsérszerű, úgy mint a succineáknál. Jól észlelhettem ezt a 4. rajzon bemutatott példányon, amelynek a spirája letörött s a törés helyén, amint azt a 4c rajz is mutatja, a keresztmetszet csaknem körképű. A házacska utolsó kanyarulata a szájnylást közrefogva, kissé ellapúl, de az átmetszete a háti tájon ott is körívet formál, amint azt a 3c, 4d, 5c keresztshelvények is tanúsítják. Jól szemléltetik ezek a keresztshelvények azt is, hogy a héj belső széle a spira kanyarulataiban nem egyenes, mint a papyrothecánál, hanem becsavarodik s az orsót helyettesíti. Ez is succinea-jelleg. Míg a papyrothecáknál csak 1—1.5 kanyarulat van, a szóban forgó házacskákön a héj 2.5—3 kanyarulatot alkot.

A 6. rajzon bemutatott *Succinea gracilis* LÖRENT. ép házacskája meglepően hasonlít a hazánkban élő succineák közül a *Succinea hungarica*, var. *hastata* HAZAY házacskájához; ezt a succinea-fajtát, a törzsalakkal együtt, nádon lelte HAZAY.

A *Succinea gracilis* LÖRENT, a «locus classicus»-ön: Tinnyén kívül hazánk területén csak most vált ismertté Fertőrákoson. Mind a két helyen az alsó pontusi üledékből. A vele WENZ által azonosított *Succinea papyrotheca* BRUS. és a *pseudogyra* BRUS. sp. a szerbiai Ripanijban fordul elő, ugyancsak az alsó pontusi emeletben.¹

Irodalom.

1. BRUSINA, S.: Frammenti di Malakologia terziaria Serbia. Annales Géologique de la Péninsule Balkanique. IV. k. Belgrad. 1893.

¹ Az alsó pontusi emelet képződményeit a magyar, az osztrák és a német stratigráfusok általában a *pliocén* alsó részéhez veszik; az olasz, francia, belga stb. szerzők ellenben a felső *miocén*hez. Egyes kutatóink, pl. GAÁL ISTVÁN, SCHRÉTER ZOLTÁN s mások Hazánk alsó pontusi üledékeit ugyancsak a felső miocén: a szarmata emelet felsőbb részének tekintik. GAÁL azonban legújabbán a sarmaticumot is a *pliocén*hez veszi.

2. BRUSINA, S.: Papyrotheca a new genus of Gastropoda from the pontic steppes of Servia. The Conchologist. 1893. Vol. II.
3. BRUSINA, S.: Iconographia molluscorum fossilium in telluria tertiaria Hungariae, Croatiae . . . inventorum. Zagrabiae. 1902.
4. HAZAY, JULIUS: Die Mollusken-Fauna von Budapest. Extra-Abdruck aus «Malakozoologische Blätter». Neue Folge. Dritter u. vierter Band. I. p. 63.
5. LŐRENTHEY IMRE: Néhány észrevétel a Papyrothecához. Földtani Közlöny. XXV. k. Budapest. 1895. p. 349—353.
6. LŐRENTHEY, E.: Die Pannonische Fauna von Budapest. Palaeontographica. Bd. 48. Stuttgart. 1901—1902. p. 137—256.
7. LŐRENTHEY IMRE: A szarmata és a pannoniai képződményeket áthidaló rétegeknek egy klasszikus helye Magyarországon. Földtani Közlöny. XXXIII. k. Budapest, 1903. p. 60—62.
8. PAVLOVIĆ, P. S.: Papyrotheca. Annales Géologiques de la Péninsule Balkanique. Tome VI. Fasc. 1. p. 326—328. Belgrade. 1903.
9. RZEHAŁ, A.: Beitrag zur Kenntnis der Fauna der Congerenschichten von Leobersdorf. Verhandl. d. k. k. geol. R. A. Wien. 1902. Nr. 10. p. 265.
10. TROLL, DR. O. RITTER: Die pontischen Ablagerungen von Leobersdorf und ihre Fauna. Jahrbuch der k. k. Geolog. Reichsanstalt. Bd. 57. Heft. 1. Wien. 1907. p. 78.
11. WENZ, W.: Zur Fauna der pontischen Schichten von Leobersdorf. Senckenbergiana. III. Frankfurt a. M. 1921.
12. WENZ, W.: Gastropoda extramarina tertiaria. (POMPECKI: Fossilium Catalogus. I Animalii. Berlin. 1923—1928. p. 900.)

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. május 16-án tartott üléséből.)

PAPYROTHECA MIRABILIS (BRUS.) UND SUCCINEA
GRACILIS (LÖRENT.) AUS DEN UNTERPONTISCHEN
ABLAGERUNGEN DER UMGEBUNG VON SOPRON.

Von I. v. VITÁLIS.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der
Berg- und Hüttenmännischen Abteilung der Kgl. ung. Palatin
Josef-Universität für technische und Wirtschafts-Wissenschaften.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissen-
schaften vom 16. Maj. 1938.)

AZ ELSŐ MAGYARORSZÁGI FOSSARULUSOK A FERTŐRÁKOSI ALSÓ PONTUSI ÜLEDÉKEKBEN.

VITÁLIS ISTVÁN I. tagtól.

Sopron város közelében, Fertőrákos község határában, Piusmajortól keletre, az erdő szélén, a kavicsos homokban Hazánk egyik legérdekesebb és legváltozatosabb alsó pontusi faunáját fedeztem fel. Különösen a *Melanopsis fossilis* GMELIN = *Melanopsis Martiniana* FÉR. és a *Melanopsis (Lyrcaea) vindobonensis* FUCHS tömegesen előforduló házaiban összegyűlemllett, egykori fővenyben leltem érdekes és szépen megőrzött fossilis csigaházacskákat és kagylóhéjacskákat.

A gazella szarvára emlékeztető alakú, parányi *orygocerasok* házacskáinak a legnagyobb részét itt gyűjtöttem. Itt bukkantrám rá a *papyrotheca* csiganem parányi, stanieliszzerű házacskáira is, amelyeket eddig a «locus classicus»: a szerbiai Ripanjon kívül csak a pestvármegyei Tinnye, a krassószörényvármegyei Szócsán, az alsóausztriai Leobersdorf és a morvaországi Gaya alsó pontusi üledékeiben találtak.

A sopronvidéki *orygocerasokat* megismertettem már. (1) A következő sorokban az első magyarországi *fossarulus*-házacskákat ismertetem, amelyeket ugyancsak Piusmajor közelében leltem a «*lyrcaea*»-házak fővenyében *orygocerasok*, *papyrothecak*, apró *congeriák*, parányi *limnocardiumok* és a microfauna más tagjai: *hydrobiák*, *limnaeák*, *planorbisok*, *valváták*, *neritinák*, *ostracodák*, *foraminiferák* társaságában.

A *fossarulus*-genus ismeretlen volt eddig Hazánk területén.

A *Fossarulus* csiganemet NEUMAYR MELICHOR ismerte fel az 1869. évben Dalmácia édesvízi márgájában. A genotípust *Fossarulus Stachei* n. sp. néven írta le (2) és rajzban is bemutatta (2. Taf. XII. Fig. 7). A csinos, apró, 7 mm magas és 5 mm vastag, gömbforma házacská hat kanyarulatból áll s a kanyarulatokon csigavonalban, hosszanti élek húzódnak végig, csomókkal díszítve. A házacská nyílása: a «szája» széles, tojásátmetszetű, kicsiny csurgóval. A házányílásának, a szájának a széle összefüggő, megvastagodott s visszátüremkedve megkettőződött peremet alkot.

BRUSINA SPIRIDIO, a Balkán-félsziget neogen, főleg pontusi faunájának néhai, fáradhatatlan kutatója már a következő 1870. évben nemcsak a *Fossarulus Stachei* NEUM. házacskáit lelte meg Miočić és Riabrić dalmát községek határában, hanem egy második fajt is felismert és azt *Fossarulus tricarinatus* n. sp. néven írta le (3). Az 1872. évben pedig *Fossarulus pullus* elnevezéssel harmadik új fajt ismertetett (4) és az említett két új *fossarulus*-fajt 1874. évben rajzban is bemutatta (5. tab. III. fig. 11—12 és 13—14).

BRUSINA e két, új *fossarulus*-fajának a házacskáján a csigavonalban csavarodó, hosszanti éleket nem díszítik csomók, mint a genotípuson: a *Fossarulus Stachei* NEUM házacskáján. A *fossarulus*-genus fogalmi köre tehát kitágult.

A későbbi években még kilenc új *fossarulus*-fajt ismert fel BRUSINA, éspedig az 1876. évben a *Fossarulus armillatus* és a *Fossarulus moniliferus* (6), az 1878. évben a *Fossarulus Grossei* (7), az 1882. évben a *Fossarulus auritus*, a *Fossarulus Eginæ*, a *Fossarulus Fuchsi*, a *Fossarulus Hoernesii* (8), az 1897. évben a *Fossarulus Buzolici* és a *Fossarulus Bulici* (9) fajt, továbbá a *Fossarulus Eginæ ecarinata* és a *Fossarulus Buzolici complanatus* varietásokat és azokat az 1897. és az 1902. évben rajzban is bemutatta (9. tab. VII. fig. 25—34 és tab. VIII. fig. 1—22. és 10. tab. XI. fig. 40—43).

Az 1907. évben a *Fossarulus tricarinatus gigas* n. f.-át írta le (11); ezt a varietást azonban rajzban nem mutatta be.

E 12 *fossarulus*-faj és 3 varietas közül a *Fossarulus Stachei*, a *Fossarulus Fuchsi*, a *Fossarulus Hoernesii*, a *Fossarulus auritus*, a *Fossarulus armillatus* és a *Fossarulus moniliferus* házacskáin a spirálisan csavarodó, hosszanti éleket csomók díszítik, a többi faj és varietas élein hiányzanak a csomók.

NEUMAYREN és BRUSINÁN kívül még az olasz PANTANELLI és a szerb PAVLOVIĆ lelt egy-egy új *fossarulus*-fajt.

PANTANELLI az 1886. évben az olaszországi Monterosiban, Siena mellett olyan épen megmaradt csigaházacszkákat talált, amelyek ugyan emlékeztettek a *statioa*- és az *emmericia*-nemek házacskáira, de azokkal nem voltak azonosíthatók. BRUSINA ezekben az olaszországi csigaházacszkákban új *fossarulus*-fajt ismert fel és azt *Fossarulus italicus* névvel jelölte. PANTANELLI leírása szerint a *Fossarulus italicus* BRUS. különleges fajt képvisel, amennyiben a házacská hat kanyarulata síma: a többi *fossarulus*-faj házacskáján csigavonalban végighúzóódó, hosszanti élek itt hiányzanak (12. p. 205. tav. fig. 13—15).¹

PAVLOVIĆ az 1903. évben Leskovčić szerb község határában talált új *fossarulus*-fajt és azt *Fossarulus tetracarinatus* néven írta le (13. p. 171 és 14. p. 593) és rajzban is bemutatta (13. tab. IV. fig. 6—8 és 14. Taf. II. Fig. 6—8). A szerbiai *Fossarulus tetracarinatus* PAVL. a csomókkal nem díszített, hosszanti élű fajok közé tartozik s BRUSINA *Fossarulus tricarinatus* fajától főleg abban tér el, hogy a házacská utolsó kanyarulatán nem három hosszanti él van, hanem négy: erre vonatkozik az elnevezése is.

Ezek szerint a fossilis *fossarulus*-fajokból eddigelé 14 fajt és 3 varietást ismerünk (15). Ezeknek a fossilis *fossarulus*-fajoknak a házacskái három csoportra oszthatók: az első *fossarulus*-csoporthoz azok a fajok tartoznak, amelyeknek a kanyarulatait csomós, hosszanti élek díszítik, a második csoport kanyarulatain csomónélküli élek vonulnak végig, a harmadik csoportnál a kanyarulatok símák: hosszanti él nem fut végig rajtuk, ezek tehát *emmericia*-jellegűek.

*

Bennünket közelről érdekel, hogy gróf SZÉCHENYI BÉLA kelet-ázsiai útja alkalmával id. LÓCZY LAJOS Kína édesvízi tavaiból

¹ Itt kell megemlítenem, hogy PANTANELLI, ú. m. az olasz, a francia, a belga stratigrafusok általában, a szóban forgó *pontusi* üledékeket a miocén felső részéhez veszik. Ugyancsak a középső és a felső szarmata lerakódásainak tekintetbe a hazai alsó pontusi üledékeket GAÁL ISTVÁN és SCHRÉTER ZOLTÁN is. GAÁL azonban legújabbban még a sarmaticumot is a pliocénhez veszi.

olyan *recens* molluscumokat hozott (16. I. p. 728), amelyek NEUMAYR (17) szerint erős rokonsági kapcsolattal azokhoz a felső harmadkori: pliocénkori fossilis csigákhoz és kagylókhoz, amelyek a legjellemzőbb alakokban Magyarországon, Szlavóniában, Boszniában, Dalmáciában és Romániában találhatók. Kína édesvízi csigái között különösen két élő genus hasonlít meglepően a kihalt dalmáciai pliocénformákhoz, t. i. a *fossarulus* és a *prososthenia*.

NEUMAYR a Kínából hozott *recens fossarulusok* között két új formát írt le és mutatott be rajzban, ú. m. a *Fossarulus Lóczyi* és a *Fossarulus sinensis* nova formákat. (16. II. k. 774—775. IV. t. 1. és III. t. 7. ábra.)

A *Fossarulus Lóczyi* házacskája — írta NEUMAYR — «oly meglepően összevág» a fossilis *Fossarulus tricarinatus* BRUS. fajával, hogy «első pillanatra csupán csekélyebb nagysága és vastagabb héja tűnik szembe, a nélkül, hogy ezeket a jelleget lényeges különbségeknél tekinthetnők». (16. II. k. p. 774.) A másik *recens* kínai *fossarulus*-faj, a *Fossarulus sinensis* — NEUMAYR szerint — a *Fossarulus pullus* BRUS. fossilis fajhoz hasonlít feltűnően.

*

A *fossarulus*-genus fossilis fajait eddig csak Dalmáciában, Hercegovinában, Szerbiában és Olaszországban találták, most sikerült megelni ezt a fajt Csonka-Magyarország területén is a sopronvármegyei Fertőrákos község határában, Pius-major közelében, éspedig két teljes és három töredékes példányban.

A Fertőrákoson lelt két teljes *fossarulus*-házacskát PAVLOVIĆ *Fossarulus tetracarinatus* fajához hasonlít a legjobban és így azzal azonosítható, amint az a következő sorokból is kitetszik.

*

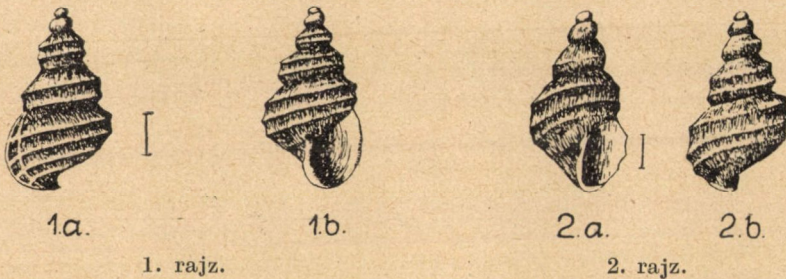
Fossarulus tetracarinatus PAVLOVIĆ.

1903. — *Fossarulus tetracarinatus* nov. spec. — Prof. P. S. PAVLOVIĆ szerb nyelven írt értekezése. Annales Géologiques de la Péninsule Balkanique. Belgrade. 1903. Tome. VI. Fasc. I. p. 171. tab. IV. fig. 6—8.

1908. — *Fossarulus tetracarinatus* nov. spec. — Prof. P. S. PAVLOVIĆ: Beiträge zur Fauna der Tertiärlagerungen in Alt-Serbien. — Annales Géologiques de la Péninsule Balkanique t. VI. fasc. 2. Belgrad, 1908. p. 593. Taf. II. Fig. 6—8.

A két teljesen ép fertőrákosi *fossarulus*-házacská közül a viszonylag nagyobbiknak (1a. és 1b.) az utolsó kanyarulatán négy, esomónélküli hosszanti él van, vagyis e tekintetben a *Fossarulus tetracarinatus* PAVLOVIĆ faj házacskájával megegyezik. A négy hosszanti él közül a fertőrákosi nagyobbacska ház utolsó kanyarulatán a csúcs felé néző két első hosszanti él a legerősebb, a harmadik él kissé gyengébb, a negyedik él egészen gyenge és az utolsó kanyarulatnak csak a végső részén vehető észre.

A fertőrákosi kisebb *fossarulus*-házacská utolsó kanyarulatán (l. a 2a és 2b. rajzot) első pillanatra csak három hosszanti él tűnik szembe. Ha azonban a házacskát kissé mozgatjuk, hogy különböző



megvilágításnál szemlélhessük, vékony vonalka alakjában felismerhetjük az utolsó kanyarulat bázis felőli részén a negyedik élt is.

PAVLOVIĆ azt írta, hogy az utolsóelőtti kanyarulatán két él és a két megelőző kanyarulatán csak 1—1 él észlelhető (13. p. 593). Ez a leírás ráillik a fertőrákosi kisebb *fossarulus* házacskájára is (l. a 2a. és a 2b. rajzot). A viszonylag nagyobb fertőrákosi *fossarulus*-házacskán azonban nemcsak az utolsóelőtti kanyarulatán van két él, hanem az azt megelőzőn is (l. az 1a. és az 1b. rajzokat).

PAVLOVIĆnak az a megjegyzése, hogy a *Fossarulus tetracarinatus* házacskáján az embryonális kanyarulatok domborúak és símák, ráillik a fertőrákosi mindkét, teljes *fossarulus*-házacská embryonális kanyarulataira is. A fertőrákosi nagyobb *fossarulus*-házacskán három ilyen domború és síma embryonális kanyarulat van, a kisebb házacskán csak kettő.

A fertőrákosi két teljes *fossarulus*-házacskán a három utolsó kanyarulat nem domború, hanem a két él által három részre osztva,

trapézszerű. A kanyarulatok között ékalakban, viszonylag erősen bemélyedő varrat van. A varratvonal bemélyedését PAVLOVIĆ rajzai is jól feltüntetik, ugyanígy az itt közölt 1. és 2. rajz is.

A *Fossarulus tetracarinatus* házacskáján a növekedési vonalak igen finomak, alig vehetők észre. Az 1a. rajzon bemutatott fertőrákosi nagyobb *fossarulus*-házacskán a külső ajak külső oldalán viszonylag erős borda észlelhető (1a. rajz), úgy mint a *Fossarulus tricarinatus* BRUS.-fajnak azon a házacskáján, amelyet BRUSINA 1874. évben mutatott be (5. tab. III. fig. 12). Ehhez hasonló borda észlelhető a *Fossarulus pullus* BRUS. (5. tab. III. fig. 14), sőt a *Fossarulus auritus* BRUS. (9. tab. VII. fig. 33) házacskáján is, az utolsó kanyarulat szegélyén, BRUSINA említett fajainál ez a bordaszerű megvastagodás — a rajz szerint — a külső ajak visszafelé, kifelé fordult része. A fertőrákosi nagyobb *fossarulus* házacskán a háznyílás külső pereme mögött fejlődött ki ez a borda, mint megvastagodott növekedési vonal. A fertőrákosi nagyobb *fossarulus* házacskán nemesak a legutolsó kanyarulaton, hanem az utolsóelőtti kanyarulaton is látható ilyen megvastagodott növekedési vonal: borda, úgy mint pl. a *Cerithium lignitarum* EICHW. = *Potamides bidentatus* DEFR. házáén. A fertőrákosi kisebb *fossarulus*-házacskán nem mutatkozik a növekedési vonalon ilyen megvastagodás.

PAVLOVIĆ rajzolója a szerbiai *Fossarulus tetracarinatus* házacskájáról kissé vázlatosnak látszó ábrát nyújt. BRUSINÁnak a *Fossarulus tricarinatus* házacskáiról 1874. és 1897. évben közölt ábrái pedig elég erősen eltérnek egymástól. Az 1874. évi rajz (5. tab. III. fig. 12.) a házacska utolsó kanyarulatán három hosszanti élt, a megelőző két kanyarulaton pedig 2—2 élt tüntet fel. Az 1897. évi rajz (9. tab. VIII. fig. 12.) szerint viszont az utolsó kanyarulaton három erősebb hosszanti él mellett, a bázis felé még két gyengébb él fejlődött ki, vagyis az utolsó kanyarulaton összesen öt él látható, az utolsóelőtti két kanyarulaton pedig 3—3 hosszanti él van. SANDBERGER 1875. évben közölt ábrája a *Fossarulus tricarinatus* BRUS. házacskájának az utolsó kanyarulatain három erős (túlzottan kiemelt) és két rövid hosszanti élt tüntet fel. (18. Taf. XXXII. Fig. 8).

Úgy látszik, hogy a hosszanti élek száma egy és ugyanazon

fossarulus-faj házacskáin is változik, vagyis hogy a *Fossarulus tricarinatus* BRUS. és a *Fossarulus tetracarinatus* PAVL. fajokat átmenetek kötik össze.

Csekély a különbség egyébiránt BRUSINA *Fossarulus tricarinatus* és a *Fossarulus Eginæ* faja között is. Ha ugyanis e két faj házacskájának az ábráit hasonlítjuk össze BRUSINA 1897. évben közölt rajzain (5. tab. VIII. fig. 7. és 11., valamint a 8. és 12.), meg kell állapítanunk, hogy a szembetűnő megegyezés mellett a eltérések egészen jelentéktelenek és a két *fossarulus*-faj: a *Fossarulus tricarinatus* és a *Fossarulus Eginæ* elkülönítését aligha indokolják.

A *Fossarulus tricarinatus* BRUS. és a *Fossarulus Eginæ* BRUS. házacskáin a szájperem, a külső és a belső ajak egyaránt megvastagodott, megkettőződött, kifelé, visszafelé fordulva kiszélesedett. A szerbiai *Fossarulus tetracarinatus* PAVL. ajkán ez a megvastagodás gyenge. A fertőrákosi nagyobb *fossarulus*-házacskán (1a és 1b) az ajkak megvastagodása és kifelé fordulása jól észrevehető, habár nem erős; a fertőrákosi kisebb házacskán (2a és 2b) az ajkak megvastagodása alig vehető észre.

BRUSINA *Fossarulus tricarinatus* és *Eginæ* fajának a házacskáin a külső és a belső ajak a csúcs felőli részen határozott csurgová nyúlik meg, a *Fossarulus tetracarinatus* PAVL. faj fertőrákosi két teljes házacskáján a külső és a belső ajak a csúcs felőli részen csak olyan szögletet alkot, mint pl. a *Fossarulus moniliferus* BRUS. házacskáján.

A fertőrákosi két teljes *fossarulus*-házacska jellegeit a következőkben foglalhatjuk össze:

A fertőrákosi nagyobb *fossarulus*-házacska 5.5 mm magas és 3 mm vastag, a kisebb házacska 4 mm magas és 2 mm vastag. A kisebb házacskán két, a nagyobb házacskán három embryonális kanyarulat van, amelyek domborúak és sínák. Az embryonális kanyarulat után három-három, hosszanti éllel díszített kanyarulat következik. A fertőrákosi nagyobb *fossarulus*-házacska összesen hat, a kisebb öt kanyarulatból áll. Az utolsó, erősen kitáguló kanyarulaton, a nagyobb házacskán négy hosszanti él van, erre vonatkozik a faj elnevezése is; a kisebb házacska utolsó kanyarulatán a negyedik él a bázis felől annyira vékony, hogy csak nehezen

vehető észre. A nagyobb házacska utolsóelőtti két kanyarulatán két-két hosszanti él van, a kisebb házacskánál csak az utolsóelőtti kanyarulatot látni két élt, az utolsóelőtti kanyarulatot megelőző kanyarulatot csak egy él látszik.

Az utolsó előtti és az azt megelőző kanyarulat a rajta kifejlődött két-két él és az erősen bemélyedő varratok következtében nem annyira körív-, mint inkább trapézszerű és így a házacska lépcsős formát nyer.

A ház nyílása, a «szája» ovális, az ajkak megvastagodásra, türemkedésre mutatnak hajlamot. Különösen a nagyobb fertőrákosi házacskán észlelhető ez. Az ajkak a csúcs felőli részen szögletet alkotnak, határozott csurgó nélkül. A szájperem alsó, bázisfelőli részén, sőt a külső ajkon is meg van a hajlam némi kiöblösődésre.

A házacskán a növekedési vonalak nagyon finomak, a fertőrákosi nagyobb házacskán a növekedési vonalak a két utolsó kanyarulatot bordává vastagodtak meg.

A köldök apró, tölcsérszerű, bemélyedő s elszűkülésre hajlik.

Irodalom.

1. VITÁLIS ISTVÁN: Orygocerasok a sopronvidéki alsópontusi üledékekben s elterjedésük Hazánkban és a környező országokban (Orygoceras-Arten in den unterpontischen Ablagerungen der Gegend von Sopron, ihre Verbreitung in Ungarn und den benachbarten Ländern). A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője. Budapest, 1936. LIV. k. p. 626—643.

2. NEUMAYR, DR. M.: Beiträge zur Kenntnis fossiler Binnenfaunen I. Die dalmatinischen Süßwassermergel. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanst. Bd. XIX. p. 355. Wien, 1869.

3. BRUSINA, S.: Monographie der Gattungen Emmericia und Fossarulus. Verhandl. der zool.-bot. Gesell. XX. Bd. Wien, 1870.

4. BRUSINA, S.: Naravoslovne critice sa sjevero-istočne obale Jadranskoga mora. Rad. jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti knj. XIX. p. 143. Zagreb, 1872.

5. BRUSINA, S.: Fossile Binnen-Mollusken aus Dalmatien, Kroatien und Slavonien. Mit 7 lit. Taf. Agram, 1874.

6. BRUSINA, S.: Description d'espèces nouvelles, provenant des terrains tertiaires de Dalmatie. Journal de Conch. Vol. XXIV. Paris, 1876.

7. BRUSINA, S.: Molluscorum fossilium species novae et emendatae

in tellure tertiaria Dalmatiae, Croatiae et Slavoniae inventae. Journ. de Conch. Vol. XXVI. Paris, 1878.

8. BRUSINA, S.: Orygoceras eine neue Gasteropodengattung der Melanopsiden-Mergel Dalmatiens. Mit 1 Tafel. Beiträge zur Paläontologie Österreich-Ungarns und des Orients. II. Bd. Wien, 1882.

9. BRUSINA, S.: Gragja za neogensku malakološku faunu Dalmacije, Hrvatske i Slavonije uz neke vrste iz Bosne, Hercegovine i Srbije. Zagreb, 1897.

10. BRUSINA, S.: Iconographia molluscorum fossilium in tellure tertiaria Hungariae, Croatiae, Slavoniae, Dalmatiae, Bosniae, Herzegovinae, Serbiae et Bulgariae inventorum. Zagrabiae, 1902.

11. BRUSINA, S.: Rad jugos. 169. Mat. Prirod. Razred. 4. p. 227.

12. PANTANELLI, D.: Monografia degli strati pontici del miocene superiore nell'Italia settentrionale e centrale. Memorie. Accad. scient. lett. ed arti Modena. s. 2. v. IV. 1886. p. 127—231.

13. PAVLOVIĆ, P. S.: Annales Géologiques de la Péninsule Balkanique. Tome VI. Facs. I. Belgrade, 1903. p. 171.

14. PAVLOVIĆ, P. S.: Beiträge zur Fauna der Tertiärlagerungen in Alt-Serbien. Annales Géologiques de la Péninsule Balkanique. t. VI. fasc. 2. Belgrad, 1908. p. 580—608.

15. WENZ, W.: Gastropoda extramarina tertiaria. (POMPECKI: Fossilium Catalogus. I. Animal. Berlin, 1923—1928.) p. 2157.

16. SZÉCHENYI BÉLA, GRÓF: Keletázsiai útjának tudományos eredményei. 1877—1880. Budapest, 1890. I. k. p. 728. és II. k. Budapest, 1897. p. 759—785.

17. NEUMAYR, M.: Über einige Süßwasserconchylien aus China. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie. Jahrgang 1883. Stuttgart, 1883. p. 21—26.

18. SANDBERGER, FRID.: Land- und Süßwasser-Conchylien der Vorwelt. Wiesbaden, 1870—1875.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. május 16-án tartott üléséből.)

DIE ERSTEN UNGARLÄNDISCHEN FOSSARULEN
AUS DEN UNTERPONTISCHEN ABLAGERUNGEN
VON FERTÖRÁKOS.

Von I. v. VITÁLIS.

Vorliegende Abhandlung erscheint in den Mitteilungen der
Berg- und Hüttenmännischen Abteilung der Kgl. ung. Palatin
Josef-Universität für technische und Wirtschafts-Wissenschaften.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissen-
schaften vom 16. Mai 1938.)

TANULMÁNYOK A FERDERÉTEGZÉSEKRŐL.

I. A fluviális ferderétegzések fajai és szemnagyság-eloszlási viszonyai.

SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR-től.

I. A ferderétegzések fajai és nomenklaturája. Minthogy a ferderétegzésekre vonatkozó nomenklatura még az újabb tankönyvekben sem egységes, határozzuk meg az itt használandó elnevezéseket.

Ferderétegzés alatt értjük a szedimentációsán létrejött, rendszerint mintegy 5—35°-os helyzetű rétegek komplexumát. Ezzel szembe nállnak az eredetileg többé-kevésbé vízszintesen lerakódott ú. n. *párhuzamos konkordáns rétegzések* és a szekundér úton, a szedimentáció után létrejött *álrétegzések*. Az álrétegzések közzé tartoznak pl. a strukturalaj-képződés folytán megjelenő «réteg»-képződések és rétegzavarodások.

A ferderétegzéseken belül az újabb szerzők általában különbséget tesznek a diagonális és a keresztrétegzések között. *Diagonális rétegzés* alatt értik azokat a típusokat, amelyeknél a ferderétegek két vízszintes, párhuzamos konkordáns rétegzésű pad közt helyezkednek el és általában azonos irányban, sőt rendszerint azonos szög alatt is lejtenek. *Keresztrétegzésnek* nevezik viszont azt a típust, melynél a rétegek lejtésiránya és rendszerint szöge is változik. Itt a lejtés nemcsak rétegpakkettenként, hanem gyakran egyetlen rétegen belül is változik, vagyis a rétegek ívesen meghajolnak.

Lényegileg ezen *alaktani* elkülönülésen alapul ANDRÉE rendszerezése, valamint a fluviális üledékekre vonatkozó saját beosztásom is.

ANDRÉE¹ a ferderétegzések közt megkülönböztet *egyszerű*

¹ *Andrée, K.*: Wesen, Ursachen und Arten der Schichtung, Geol. Rundschau, VI. (1915), pp. 351—397.

ferderétegzést is, amely azonban önmagában fosszilisán nem fordul elő, hanem mindig diagonális, esetleg keresztarétegzésekkel kapcsolódik. A keresztarétegzéseken belül pedig még a következő típusokat különíti el: 1. Kusza keresztarétegzés: többnyire ellentétes irányú, de íves hajlások nélküli rétegekkel, 2. (uralkodóan) *antiklinális keresztarétegzés*: felfelé domború, ívesen hajolt rétegekkel, 3. *szinklinális keresztarétegzés* (vagy: *teknőrétegzés*: Muldenschiebung) lefelé domború, ívesen hajolt rétegekkel.

Magam² a fluviális üledékeknél a keresztarétegzés eme altípusai közül igazi primér szedimentációs rétegzésnek csak az 1. és 3.-at találtam. A kusza keresztarétegzést (vagyis J. WALTHER «valódi keresztarétegzését») a részletesebb vizsgálat a diagonális rétegzés felé való átmeneti típusnak, sőt pontosabban a diagonális rétegzés egy altípusának mutatta, amelynél egy uralkodó lejtésirány mellett egy vele kb. ellentétes lejtésirány is megjelenik. Ezt a típust ezért «*ellentétes lejtésirányú diagonális rétegzés*»-nek nevezem. Kétséges azonban, hogy ez a típus az ANDRÉE-féle kusza keresztarétegzést teljesen magában foglalja-e. ANDRÉE ugyanis a kusza keresztarétegzésre a legkülönfélébb lejtésszögeket mondja jellemzőnek. Én viszont a lejtésszögek változását bizonyos mértékig csak látszólagosnak találtam, és csupán olyankor észleltem feltűnő mértékben, mikor a ferderétegek egymással szembenfekvő lejtésirányai kissé ingadoznak. Ez esetben ugyanis a különböző irányokban lejtő rétegek egy adott feltárási síkon különböző lejtésszögű nyomvonalak alakjában metsződnek el. Az ilyen ingadozások esetében azonban rendszerint már az ívesen hajló, szinklinális rétegek is megjelennek a sík ferderétegek mellett. Ez tehát egy második és pedig az *igazi átmeneti típust* képviseli a diagonális és az íves keresztarétegzés közt. Úgy látszik, hogy ebben az esetben az íves hajlású rétegek két szárnya egymással körülbelül ellentétes irányban lejt.

Az ANDRÉE-nál 2. alatt felsorolt antiklinális keresztarétegzési típust a fluviális rétegeknél mindig csak a pleisztocén periglaciális hatásokra utólagosan kialakult strukturalajképződménynek talál-

² Über Diagonal- und Kreuzschichtung, insbesondere bei fluviatilen Ablagerungen. Mitt. d. berg- u. hüttenm. Abt. Sopron, VII. (1935), pp. 111—137.



tam." Az antiklinális ferderétegzés tehát nem igazi ferderétegzésnek, hanem álrétegzésnek bizonyult.

Ily módon összesen 4 fontosabb fluviális ferderétegzési típust lehetett elkülöníteni: 1. a diagonális rétegzést, amely vonatkozó dolgozatomban 1a, 1b és az 1c altípusait foglalja magában, 2. diagonális rétegzést ellentétes lejtésirányokkal, amely idézett dolgozatomban a 2a. számú típusként szerepel, 3. az igazi átmeneti típust, amelyet idézett dolgozatomban 2b szám alatt soroltam fel és 4. a (szinklinális) íves keresztarétegzést, amelyet idézett dolgozatomban 3a, és 3b számokkal jelöltem.

Az amerikai szerzők elnevezései és rendszerezése a ferderétegzésekre nézve lényegesen különbözik az európaiak alaktani elnevezéseitől és rendszerezésétől. Ők «keresztarétegzés» (cross bedding, cross lamintion és néha helytelenül false bedding) alatt értik általában a ferde rétegzéseket; tehát a mi különböző diagonális és keresztarétegzéseinket együttvéve.

Az amerikai szerzők a ferderétegzések közelebbi beosztását főleg *genetikai* alapon igyekeznek végrehajtani, és az egyes típusokat is genetikai névvel különböztetik el egymástól. Ez azonban az elnevezésekbe is hipotetikus elemet visz be, ami különösen a geológiai alkalmazásban tévedéshez vezethet.

GRABAU⁴ pl. megkülönböztet deltarétegzést, torrenciális rétegzést és eolikus-rétegzést. Az első kettő kb. a diagonális rétegzésnek felel meg, beleértve ANDRÉE egyszerű ferderétegzését is. A delta-rétegzést ugyanis egyetlen, nagyméretű, ferderétegzésű pad jellemzi, alul és felül fokozatos átmenettel a vízszintes párhuzamos rétegzésbe. A torrenciális-rétegzés pedig a normális diagonális rétegzésnek felel meg, ferde és vízszintes rétegzésű padok többszörös váltakozásával. Az eolikus rétegzés kb. a keresztarétegzésnek felel meg. — Ezek az elnevezések nyilván hipotetikus, sőt gyakran téves elemet tartalmaznak. A keresztarétegzés pl. nemcsak az eolikus, hanem a fluviális üledékeknél is előfordul.

³ Pleistozäne Strukturbodenbildung in den ungarischen Tiefebene und im Wiener Becken, Földt. Közl. LXVI. (1936), pp. 213—228.

⁴ GRABAU, A. W.: Principles of stratigraphy, Newyork, 1913, pp. 701—706.

Ugyancsak genetikai típusokat különít el TWENHOFEL is.⁵

II. A ferderétegzéseknek megfelelő felületi formák. A ferderétegzés *keresztmetszeti* jelenség. Ha keletkezését aktuálisztikus úton, a képződés pillanatában vizsgáljuk, úgy felületi formát figyelünk meg. Ugyanazon jelenség tehát fosszilisán, keresztmetszeti feltárásban ferderétegzésként jelenik meg, míg récents állapotban az alább ismertetendő felületi formákként írják le.

A megfelelő felületi formák vizsgálata különböző tudomány-
szakokba nyúlik. E vizsgálatokat a ferderétegzések értelmezésére még alig használták fel. E szempontból a fontosabb eredményeket röviden a következőkben foglalhatjuk össze.

A ferderétegzéseknek megfelelő felületi formák, vagyis azok a képződmények, amelyekkel kapcsolatban ferderétegzések keletkeznek, a következők: 1. delták és törmelékkúpok, 2. különféle dűnák, barchanok és a velük rokon egyéb eolikus képződmények, 3. a folyók különböző homokzátonyai, 4. a különböző tágabb értelemben vett hullámbarázdák és végül általában: a kiemelkedések mellett lerakódó üledékek, nevezetesen 5. a korallzátonyok periferikus üledékei és 6. általában a térszíni egyenetlenségek, bemélyedések kitöltései.

A ferderétegzés mindig valamely felszíni egyenetlenséggel kapcsolatban keletkezik, mint a *kiemelkedés oldalán* lerakódó szabad résű üledéke.

A térszíni egyenetlenség természete szerint két esetet különböztethetünk meg. Egyik esetben a térszíni egyenetlenség a ferderétegzést létrehozó erőttől (áramtól, stacionér hullámozástól) *függetlenül*, már a ferderétegzésű üledék keletkezése előtt jelen volt. A másik esetben a felületi egyenetlenség maga is a ferderétegzésű üledéket *szállító erőnek a hatására*, tehát a ferderétegzéssel együtt keletkezik.

Az előbbi csoportba tartoznak a delták, törmelékkúpok, korallzátonyok ferderétegzései, a másodikba a dűnák-, homokzátonyok- és hullámbarázdákkal kapcsolatos ferderétegzések. Az előbbieket helyhez kötötték és ezért többé-kevésbé lokális elterjedésűek, az utóbbiak az eredeti felszíntől nagyobbára függetlenek és a szállító

⁵ TWENHOFEL, W. H.: Treatise on sedimentation. London, 1926.

erő mentén regionálisan kiterjedhetnek. Az előbbieket esetleges, egyszeri, periodikusan nem ismétlődő képződmények, az utóbbiak rendszerint szabályosan, periodikusan ismétlődnek. A fluviális ferderétegzések uralkodóan a 2. csoportba tartoznak és így a továbbiakban ezekkel lesz dolgunk.

A zátonyok, a dűnák és a hullámbarázdák az ú. n. HELMHOLTZ-féle hullámképződésre vezethetők vissza. A HELMHOLTZ-féle hullámok, mint ismeretes, két különböző fajsúlyú, egymáshoz képest viszonylagos mozgásban levő közeg határán lépnek fel és a minimális surlódást biztosító egyensúlyi felületet képviselik.

A kiemelkedésnek bizonyos esetekben (pl. némely dűnánál) itt is a ferderéteg képződése *előtt* meglévő magja van, valamely akadály, pl. kő, fűcsomó alakjában. Ez a mag azonban csak a kiemelkedés képződésének a megindulását befolyásolja, magának a keletkezett kiemelkedésnek mércetei, sőt esetleg a további kiemelkedéseknek helye is független lehet a kiindulási akadálytól. Az adott körülmények között tehát a kiemelkedés és a ferderétegzés képződése feltétlenül megtörténik, a kiindulási akadálytól függetlenül is. E ferderétegzések tehát különböznek a nagyság és hely tekintetében is határozott kiemelkedéshez kötött első csoportbeli ferderétegzésektől.

A magot képező akadálynál kialakul az ismeretes asszimetrikus profilú dűna vagy homokzátony, az enyhe lejtőjű luv- és a meredek lejtőjű lee-oldallal és a lee-lejtő előtti vízszintes tengelyű örvénnyel. A dűna, ill. homokzátony az áram irányában el is tolódhat. Sőt KING megfigyelései és BUCHER megfontolásai szerint a dűna lee-oldalán újabb tranzverzális dűnák is keletkezhetnek.⁶

Mínt hogy a hullámos felület az elmélet szerint a minimális surlódási, vagyis az egyensúlyi felületet képviseli, kialakulhat a hullámos felület gyakorlatilag síma felületen is.

Rendszerint ilyen síma felületen képződnek az eolikus és vízi *hullámbarázdák*, melyek a homokzátonyoktól és dűnáktól főleg csak kisebb méreteikben különböznek.

⁶ BUCHER, W. H.: On ripples and related sedimentary surface forms and their paleogeographic interpretation, Amer. Journ. of Sci. IV. Ser. XLVII. (1919), pp. 149—210, 241—269.

Hogy mikor keletkezik hullámbarázda és mikor homokzátony (ill. az eolikus lerakódásnál dűna), az még kevésbé ismeretes. Gyakran éppen a homokzátony, ill. dűna felületén jönnek létre a hullámbarázdák. Néha azonban a hullámbarázda, úgylátszik helyettesíti a dűnát, ill. a homokzátont.

Kézenfekvő feltételezni, hogy a nagyméretű, magas formák (dűnák, homokzátonyok) keletkezését a hordalék *surlódásának növekedése* elősegíti. Erre mutat REHBOCK⁷ megfigyelése is, mely szerint a kísérleti folyókban, mesterséges csatornáknál hullámbarázdák keletkeztek, ha hordalékanyag finom kvarehomok volt, viszont vándorzátonyok jöttek létre szitált és iszapolt horzszakő használatkor. Nyilvánvaló, hogy a horzszakő érdes felülete a surlódást növeli és ez a kis fajsúllyal párosulva, magasabb rézsűk létrejöttének kedvez.

A dűnák, homokzátonyok és hullámbarázdák közül utóbbiak képződési körülményeit ismerjük a legjobban. A természeti megfigyelések és kísérletek⁸ szerint a hullámbarázdák keletkezését az áram szállítóereje határozza meg. A *hullámbarázda* képződése egy határozott szállítóerő elérésével indul meg (első kritikus pont), egyidejűen a fenékhordalék mozgásának megindulásával. A keletkezett asszimmetrikus hullámbarázdák az áram irányában lefelé vándorolnak. A szállítóerő növekedésével második kritikus ponthoz jutunk, melynél a barázdák eltűnnek és fenékhordalék felülete újra *símává* válik. A szállítóerő további növekedése harmadik kritikus ponthoz vezet, amelynél a felület újból hullámossá válik. A most keletkezett *homokhullámok* keresztmetszete azonban többé-kevésbé szimmetrikus és a víz mélysége szerint részben felfelé, részben lefelé vándorolnak (regresszív és progresszív homokhullámok).

Az 1. és 3. kritikus pont közötti áramlási módot REHBOCK

⁷ REHBOCK, TH.: Bettbildung, Abfluss und Geschiebebewegung bei Wasserläufen, Zt. d. Deutsch. Geol. Ges. Bd. 81 (1929), pp. 497—472.

⁸ BLASIUS, H.: Über die Abhängigkeit der Formen der Riffeln und Geschiebebänke vom Gefälle, Zt. f. Bauwesen, Bd. 60. (1910), pp. 466—472.

GILBERT, G. K.: The transportation of débris by running water, Prof. Paper. U. S. Geol. Surv. vol. 86. (1914), pp. 1—263.

«Strömen»-nek, míg a 3. kritikuspont felettit pedig «Schiessen»-nek nevezi. Az előbbi főleg a folyóknak, az utóbbi pedig a *vadpatakoknak* az áramlási módja.⁹ A folyókra tehát túlnyomóan a hullámbarázdák (GILBERT dűnái), a vadpatakokra túlnyomóan a homokhullámok («antidünák») jellemzők.

A homokzátonyok, ill. az eolikus üledékek esetében a dűnák az 1. és 2. krit. pont közötti hullámbarázdákkal többé-kevésbé analog köpződményeknek látszanak. Ezt a feltevést támogatja a következő fejezetben részletesen tárgyalandó megfigyelés, hogy a diagonális rétegzésű fluviális üledékeknél szintén jelentkezik a fázisképződés, de ebben az esetben az 1. és 2. krit. pont közötti fázisnak megfelelő körülmények közt nem a hullámbarázdákra, hanem a homokzátonyokra visszavezethető ferderétegzések keletkeznek.

A fluviális ferderétegzések jelentékeny része ugyanis nem a hullámbarázdákkal, hanem inkább a fluviális homokzátonyokkal azonosíthatók. A hullámbarázdák méretei t. i. sokkal kisebbek a ferderétegzésekénél. A kísérletileg és a természetben megfigyelt vízi hullámbarázdák méretei BUCHER¹⁰ adatai szerint a következő határok közt mozognak: hullámhosszúság 1—30 cm, magasság (amplitudó) 0.1—5.6 cm. A ferderétegzésnél csak a magasság (amplitudó) figyelhető meg. Ennek is csak a minimumát adja meg a ferderétegzésű pad függőleges vastagsága, mert esetleges erozió esetén az eredeti amplitudó a ferderétegzésű pad vastagságánál nagyobb is lehetett. A ferderétegzésű padok vastagsága pedig gyakran elér $\frac{1}{2}$ m-t, sőt néha 1 m-t is meghalad. Ezek a ferderétegzések tehát nem a hullámbarázdáknak, hanem inkább a nagyobb méretű fluviális homokzátonyoknak s részben talán a homokhullámoknak (lásd KINDLE¹¹) felelhetnek meg.

E kérdésről részletesebben a következő fejezet szól.

III. A ferderétegzések szemnagysági viszonyai. Az előbbiekben leírt áramlási fázisoknak a ferderétegzések szempontjából

⁹ FORCHEIMER, PH.: *Hydraulik*, 1930. pp. 222. 541.

¹⁰ BUCHER, I. C.

¹¹ KINDLE, E. M.: *Recent and fossil ripple-mark*, Canada Geol. Surv. Mus. Bull. No. 25. (1917).

nagy fontosságuk van. Ezeknek teljesen megfelelő fázisok jelentkeznek ugyanis a természetben megfigyelhető diagonális rétegzéseken is. A diagonális rétegzésű üledékeken a legkisebb átlagszemnagyságú rétegek vízszintes, párhuzamos-konkordáns rétegzésűek; a ferderétegek közepes szemnagyságúak; a legdurvább (rendszerint kavicsos) rétegek pedig ismét vízszintes párhuzamos rétegzésűek, de rétegzésük a pad vízszintes alsó és felső határán belül rendszerint alig kivehető. A rétegzés tehát a szemnagyság függvénye. Minthogy a sebességnek, illetve a szállító erőnek a növekedését az üledékeken nyilván a szemnagyság növekedése képviseli: a legkisebb szemnagyságú vízszintes párhuzamos rétegek nyilván az első kritikus pont alatti üledékképződésnek felelnek meg, a közepes szemnagyságú ferderétegek az 1. és 2. krit. sebesség közti hullámbarázdák képződési fázisával, a durva párhuzamos vízszintes rétegek pedig a 2. kritikus pont feletti síma fázissal analogizálhatók.

A 3. kritikus pont feletti homokhullámoknak megfelelő rétegeket a diagonális rétegzéseken már nem találunk. Ez azonban érthető is. Egyrészt a 3. krit. pont feletti áramlási viszonyok főleg csak a vadpatakoknál jelentkeznek, folyóknál csak kivételesen. Másrészt, ha a homokhullámok létrejöttek is a folyókban, rendszerint nem maradhatnak meg. BUCHER vizsgálataiból ismeretes u. i., hogy a homokhullámok a folyók apadásakor, a 3. kritikus pont alatt instabilissá válnak. Belőlük tehát az alacsonyabb sebességnek megfelelő hullámbarázdák képződnek olyan módon, hogy a finomabb elegyrészek átrakódnak: a homokhullám eredetileg szimmetrikus profilja így asszimmetrikussá válik. Ilyenmódon a homokhullámokkal azonos nagyságrendű óriási hullámbarázdák képződnek, az ú. n. *meta-hullámbarázdák*, meta-ripples. Feltételezhető továbbá, hogyha az apadás lassú, úgy a homok-hullámok a síma-fázis vízszintes rétegeivé alakulnak át. Egyébként keresztmetszetben, azaz feltárásában a homokhullámok eredeti formájukban sem nagyon különbözhetnek a síma-fázis vízszintes rétegeitől. A homokhullámok szárnyai ugyanis csak egészen enyhe lejtésűek. BUCHER adatai alapján feltételezhetően $1\frac{3}{4}$ — 10° -osak, tehát, csaknem vízszintesnek látszó rétegeket alkotnak. Ha tehát a homokhullámok esetleg meg is maradnának, úgy a síma fázis rétegeitől feltételezhetően alig különböztethetők meg.

Az áramlási fázisok ilyen módon a hordalék szemmagyság szerinti szétkülönítését eredményezik a diagonális eredetű üledékeknel.

A keresztrétegzésű üledékeknel ez a szemmagysági elkülönülés nem észlelhető. Az áramlási fázisoknak itt semmiféle jele nem mutatkozik.

Eddigi megfigyeléseim szerint a keresztrétegzésű üledékek finomabb átlagszemmagyságukkal is különböznek a diagonális rétegzésektől. A keresztrétegzéseket főleg homokos és legfeljebb aprókavicsos üledékeknel találtam, míg a diagonális rétegzés durva kavicsos üledékeknel is gyakori.

E szemmagyságbeli különbséggel áll kapcsolatban az a feltűnő rétegzésbeli különbség, hogy a diagonális üledékek ferderétegei túlnyomóan síklapúak, egyenesek, míg a keresztrétegzésűeké rendszerint ívesen hajlottak. AUERBACH vizsgálataiból¹² ismeretes, hogy a szabad homokrézsük lejtőszöge annál nagyobb, minél kisebbek, könnyebbek és szögletesebbek a homokszemek. A lejtő vízszintes metszésvonalának konvexitása csökkenti, konkávitása növeli a lejtésszöget.

A durvább s így rendszerint görgetettebb szemű diagonálisan rétegzett üledékeknel tehát az eredeti íves hajlású lejtő meredekebb felső része kevésbé stabilis és ezért rendszerint megcsúszik. Ezáltal az íves hajlású lejtőprofil kiegyenesedik. (A megcsúzás általi kiegyenesedés gondolatával — bár nem ebben a vonatkozásban — EXNER-nél is találkozunk.¹³) A finomabb keresztrétegzett üledékeknel viszont az eredeti íves hajlású profilvonalak annál inkább is megmaradhatnak, mert ezeknek vízszintes metszésvonala konkáv.

A kereszt- és diagonális-rétegzések szemmagysági viszonyai legfeltűnőbben abban különböznek egymástól, hogy a diagonális rétegzéseknél az üledékanyag különböző átlagszemmagyságú pa-

¹² AUERBACH, F.: Die Gleichgewichtfiguren pulverförmiger Massen, Ann. d. Phys. 1901, Bd. 5., pp. 170—219.

¹³ EXNER, F. M.: Über die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flüssen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Abt. IIa, Bd. 134 (1925), pp. 165—203.

dokra tagolódik szét és az egyes padok rétegzési viszonyai is határozottak és jellemzők; ezzel szemben a keresztarétegzések esetében az összes rétegpakettek átlagos szemnagysági összetétele többé-kevésbé egyenlő, és itt egyáltalán nem jelennek meg a síma fázisra jellemző vízszintes-párhuzamos rétegek. Végeredményben ezért vannak a diagonális rétegzésű üledékek vízszintes padokra tagolva, a keresztarétegzésű üledékek pedig szabálytalan alakú rétegpakettek.

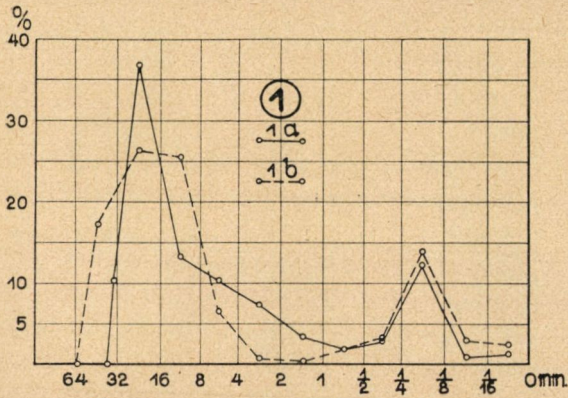
A feltűnő különbség a ferderétegzések alább kifejtendő elméletéből szükségszerűen és ellenmondás nélkül következik. Kifejtendő felfogásunk szerint ugyanis a diagonális rétegzések a többé-kevésbé egyenes, ill. szabálytalanul szétágazó folyószakaszokban keletkeznek, míg a keresztarétegzések a kanyargó szakaszokban, ill. olyan folyókban, amelyeknél az áram sodra a két part közt horizontális hullámvonalat, sőt néha egymás mellett *több ilyen* hullámvonalat ír le.

A hullámbarázdák és homokhullámok *bizonyos határozott* sebességeknél jelentkező vertikális hullámmozgás eredményeként lépnek fel. A diagonális rétegzéseknél tehát ferderéteg nem képződhet állandóan, hanem csak bizonyos sebességeknél. Ezzel szemben a kanyargó vízárámú folyókban a kanyarok által meghatározott *állandó* horizontális hullámmozgás jelentkezik és ez hozza létre az íves hajlású ferde-rétegeket. A kanyargó áramú folyókban a ferderétegzés képződésének előfeltétele tehát állandóan jelen van és így a síma fázis vízszintes rétegei egyáltalában nem jöhetnek létre.

A különféle rétegzésű padoknak a szemnagyság-eloszlási görbéi is jellemzők. E tekintetben alapul szolgált a Duna, Rába, Répce, Gyöngyös, Marcal, Mura, Dráva, Kiszamos, Maros és egy Sopronvidéki patak üledékein teljesen azonos eljárással készült 60 elemzés. Ezek közül itt csak néhány tipikus görbét mutatunk be.

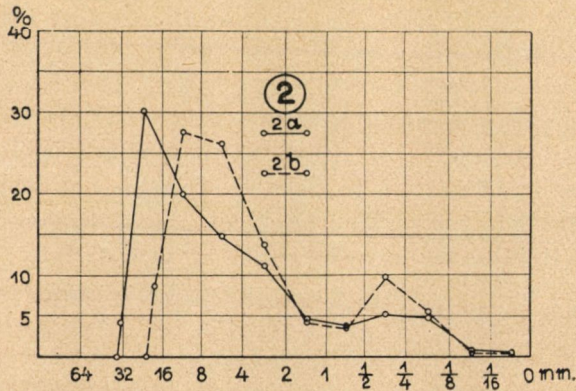
A diagonális rétegzésű üledékeknek úgy a durvább vízszintes-, mint a finomabb ferderétegzésű kavicsainál két mennyiségi maximum jelentkezik a padok átlagösszetételében (1—2. és 3b. ábra). Ezeket felső és alsó maximum néven fogjuk elkülöníteni, felső alatt a durvább maximumot értve.¹

A felső maximum az általam vizsgált esetekben főleg a 32—16 és 16—8 mm-osztályokra esik, azonban durvább (egészen 256 mm-ig),



1. ábra. Diagonális rétegzésű homokos kavics, pleisztocén Dunaüledék, Barátudvar (Mönchhof), vasuti kavicsbánya.

1a: vízszintes-párhuzamos rétegzésű durva üledék átlaga, 1b: ferde-rétegzésű pad átlaga.



2. ábra. Diagonális rétegzésű homokos kavics, pleisztocén Duna-üledék, Feketeerdőtől délre 2 km-re levő kavicsgödör, Moson megye.

2a: vízszintes párhuzamos rétegzésű durvább pad átlaga, 2b: ferde-rétegzésű pad átlaga.

és finomabb (2 mm-ig) is lehet. Ez a típus azonban folytatólag még homokos jellegű üledékekben is megjelenik és ilyenkor a felső maximum még alacsonyabb lehet. Így pl. BURRI-nál¹⁴ — akinek első típusa nyilván idetartozik — a Tessin homokjaira vonatkozó elemzések közt 1— $\frac{1}{2}$ mm-es felső maximumokat is találunk.

Az alsó maximum az esetek túlnyomó részében az $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{8}$ mm-es osztályra esik és csak ritkán durvább, de sohasem finomabb ennél. Ugyanez észlelhető az irodalomban talált idesorolható elemzéseken is. A $\frac{1}{2}$ mm-nél durvább alsó maximumot főleg csak kisebb folyóknál észleltem.

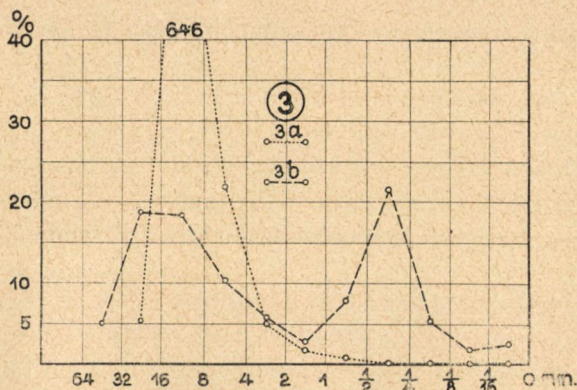
A felső maximum szemnagysága tehát erősen változik, míg az alsóé meglehetősen állandó.

A felső maximum nyilván a folyó fenekén «traktive» szállított anyagnak felel meg, az alsó maximum pedig a lebegő-iszapnak. (A folyók vizéből közvetlenül kinyert lebegő-iszap rendszerint valamivel finomabb maximumot mutat, mint az üledékek alsó maximuma, mert lebegő iszapként rendszerint a víz felülete közeléből kinyert anyagot határozzák meg, míg az üledékekben a fenékvízből lerakódott legdurvább lebegő-iszap található.)

A diagonális rétegzésű üledékek durvább vízszintes-párhuzamos és finomabb ferderétegzésű kavicsai közt a szemnagysági görbe alakja tekintetében is van különbség (1. és 2. ábra *a.* és *b.* görbéi). Ugyanazon rétegcsoport eme kétféle padjánál az alsó maximumok rendszerint ugyanarra az osztályra esnek, míg a felső maximum a vízszintes párhuzamos rétegeknél durvább és erősebben szortírozott, mint a ferderétegzésű padokban. A ferderétegzésű padokban tehát a felső maximum rendszerint nagyobb szemnagysági intervallumra kiterjedő, szélesebb haranggörbét képez, mint a síma fázis vízszintes rétegeinél. Az alsó maximum a ferderétegzésű padoknál ér el nagyobb százalékos mennyiséget és itt rendszerint osztályozottsága is nagyobb. A ferderétegzésű padoknál a két maximum közötti szemnagyságok mennyisége erősebben lecsökken, mint a vízszintesrétegzésű kavicspadokban.

A ferderétegzésű padok most leírt szemnagysági görbéi egy-

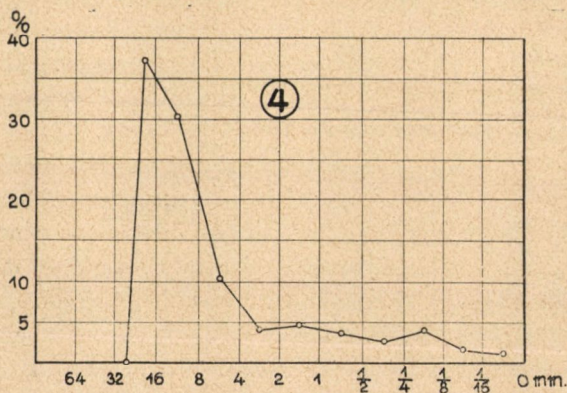
¹⁴ C. BURRI: Sedimentpetrographische Untersuchungen an alpinen Flussanden. Schweiz. Min. Petr. Mitt. IX. (1929). pp. 205—240.



3. ábra. Diagonális rétegzésű kavics, felsőpliocén Duna-üledék, Bana, Ördögásta hegyi nagy kavicsbánya, Komárom megye.

3a: egyetlen réteg összetétele, átmeneti diagonális rétegzésű üledék ferde-rétegzésű padjából, 3b: az előbbi ferde-rétegzésű pad egészének átlagösszetétele.

egy ilyen pad *egészének* átlagos szemnagysági eloszlását képviselik. Egy ilyen padon belül azonban a gyakran csak egyetlen kavics-sorból álló *egyes* rétegek viszont erősen szortírozott (3a. ábra), egy-maximumos görbéket adnak. Minthogy azonban az egymáson



4. ábra. Keresztrétegzésű homokos kavics, felsőpliocén Gyöngyös-üledék, Ják, kavicsgödör. (Vas megye.) (Szárasszítással.)

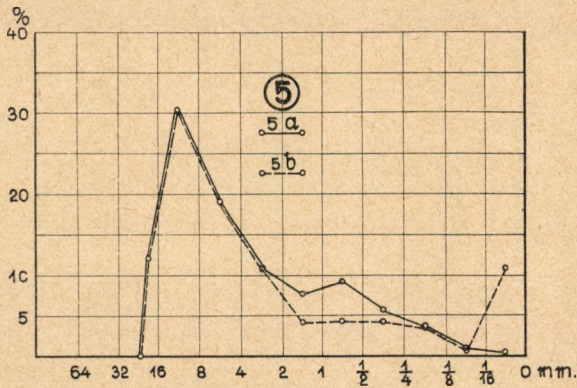
fekvő rétegek fokozatosan finomabb szeműek és az ilyen felfelé finomodó-szemű rétegesoportok periodikusan ismétlődve rakódnak egymásra («aszimmetrikus ritmikus repetíciós rétegzés», ANDRÉE), ezért a pad átlaga kevéssé szortírozott.

A diagonális rétegzések eme görbetípusait a következőképpen értelmezhetjük. A vízáram az első kritikus sebesség felett a fenékhordaléknak egyszerre különböző szemnagyságú finomabb és durvább elegyrészeit megmozgatja. Bárha e megmozgatott anyagot a zátony leoldala előtti vízszintes tengelyű örvény a lerakódás előtt szétkülönti, mégis a keletkező ferderétegzésű pad egészének átlag összetételében a vegyes szemnagyságú fenékhordalék széles kiterjedésű, aránylag lapos maximumot képez. Az apadás mélypontján a lebegő iszap is már csaknem akadálytalanul rakódik le, és egy másik (az alsó) maximumot eredményez.

Ha az áram sebessége a 2. kritikus értéket is meghaladja, úgy az eddig alig mozdított legdurvább szemnagyságok is mozgásba jönnek. Minthogy e legdurvább szemnagyságok a gyengébb áradások alkalmával visszamaradva viszonylag felhalmozódtak, a 2. kritikus sebesség felett lerakódó vízszintes rétegzésű padokban éppen ezek a szemnagyságok uralkodnak. A nagyobb sebesség következtében viszont a legkisebb szemnagyságok, nevezetesen az alsó maximum mennyisége megcsökken.

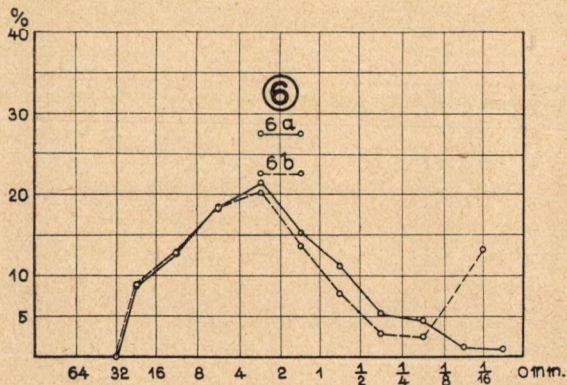
Egészen mások a viszonyok az eddig vizsgált keresztarétegzésű fluviális üledékekben (4—5—6. ábra). A rendelkezésre álló anyagban csak aránylag idős keresztarétegzésű kavicsos üledékek fordulnak elő. Lehetséges tehát, hogy a leírandó szemnagysági görbe alakját diagenetikus változások is befolyásolják.

Ezeknél rendszerint csak alig, vagy egyáltalán nem különíthető el a lebegő iszapnak megfelelő alsó maximum s ebben az esetben a görbét csak egyetlen maximumos, de rendszerint laposan szétnyúló görbe jellemzi, amely kismérvű szortírozást árul el. A keresztarétegzésekre jellemzőnek feltételezett különféle, de állandóan jelentkező hullám-, ill. örvénymozgások ilyen esetben a különféle szemnagyságokat folytonos mozgásban tarthatják, miáltal a fenékhordalék és lebegő iszap sem különül el egymástól élesen, sőt esetleg a lebegő iszap nem is rakódhat le véglegesen nagyobb mennyiségben.

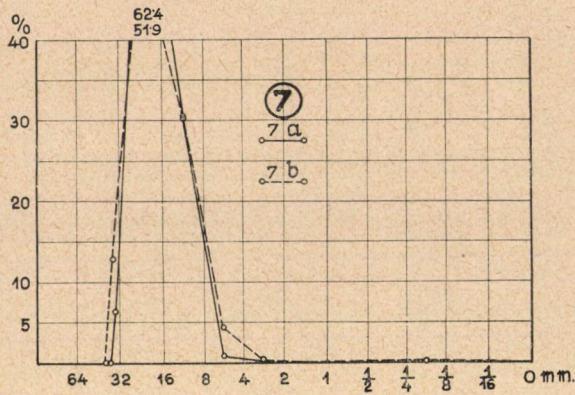


5. ábra. Keresztrétegzésű homokos kavics, felsőpliocén Gyöngyös-üledék, Kisunyomtól délkeletre 1 km-re. (Vas megye.)
5a: száraz szitálás, 5b: nedves szitálás.

Ezek szerint a fluviális üledékek közt három-féle szemmagysági görbetípust különböztethetünk meg. 1. A kétmaximumos típust, amely a diagonális rétegzésű üledékek vízszintes párhuzamos rétegzésű durvább kavicsos üledékeiben és ferderétegzésű finomabb kavicsos üledékeiben egyaránt jelentkezik, bárha eme kétféle üledék

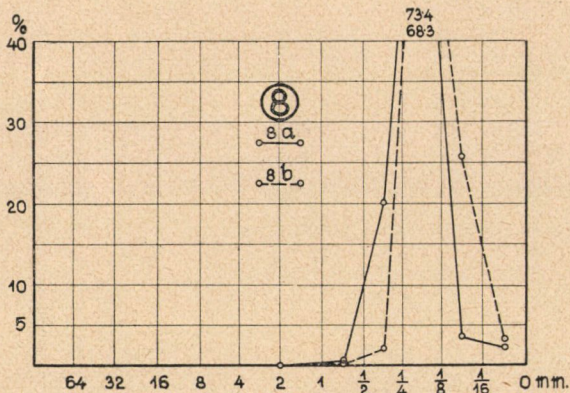


6. ábra. Keresztrétegzésű homokos kavics, felsőpliocén Gyöngyös-üledék, Egyházásradóctól északra, Géza majori kavicsbánya. (Vas megye.).
6a: száraz szitálás, 6b: nedves szitálás.



7. ábra 7a: Jelenkori Duna parti zátonyából, közép-vízszint feletti kavics, Rajkától keletre, (Moson megye.) 7b: Jelenkori Duna középzátonyából, közép-vízszint feletti kavics, Hainburg.

görbéinek alakja egyebekben különbözik is egymástól. Ez a típus valószínűleg *kizárólag* a fluviális üledékekre jellemző. 2. Az egy-maximumos, de csak kevésbé szortírozott üledékek típusát, amely-nél csak néha jelentkezik halványan egy gyöngye második maxi-mum. Ez a típus a keresztretegzésű kavicsos üledékekre vagy azok



8. ábra. 8a: Keresztretegzésű középpliocén homok, Tormápuszta (Sopron megye), 8b: Vízzintes párhuzamos rétegzésű homok a diagonális rétegzésű kavicsos üledékesoportból, Albertkáz mértől KÉK-re 1.5 km-re, (Moson megye.).

egy részére látszik jellemzőnek. 3. Az egymaximumos erősen szortírozott típust, amely a diagonális ferderétegű padokban jelentkezik akkor, ha nem a pad átlagos összetételét, hanem annak csak egyetlen rétegét vizsgáljuk.

Ez a 3. típus azonban másféle fluvialis üledékeknél is előfordul. Ilyen görbét kapunk t. i. akkor is, ha nem a folyó fenekén, hanem a normál vízszint felett, pl. a parton (7a. ábra), vagy szigeten (zátony tetején) (7b. ábra) lerakódott üledéket elemzünk. Ezekben az esetekben vízfedő hiányában a lebegő iszap egyáltalában nem rakódhat le és így alsó maximum nem fejlődik ki, sőt a hullámverés által a lerakódott anyag is erősen szortírozódik. A folyóparti üledék szemnagysági összetétele tehát a tenger és tóparti üledékekéhez hasonlít. Valószínűleg hasonló viszonyok jelentkeznek a zátonyfedő ú. n. «Sohlenplasterung» esetében is, ilyenkor azonban egy kisebbességű vékony vízréteg kimosó hatása érvényesülhet.

Végül természetesen egymaximumos görbékét kapunk általában a finomszemű homokos fluvialis üledékeknél, amelyeknél a traktive szállított fenékhordalék hiánya következtében felső maximum nem jelenhet meg. Ide tartoznak a diagonális rétegzésű üledékeknek az első kritikus pont alatt lerakódott vízszintes-párhuzamos rétegzésű legfinomabb szemű padjai, valamint a keresztarétegzésű homokok. Míg azonban a diagonális rétegzésű üledékek legfinomabb vízszintes rétegzésű padjaiban a lebegő iszapnak megfelelő mennyiségi maximum szemnagyságánál durvább anyag alig van (8b. ábra), addig a keresztarétegzésű homokokban a mennyiségi maximumnál durvább anyag gyakran még nagy százalékban szerepel, minthogy itt a lebegő iszap és a fenékhordalék keveredhet (8a. ábra).

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. febr. 21-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE ARTEN
UND KORNGRÖSSENVERTEILUNGSVERHÄLTNISSE
FLUVIATILER SCHRÄGSCHICHTUNGEN.

Von E. SZÁDECZKY—KARDOSS.

Die Arbeit erscheint in den Min. Petr. Mitt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Febr. 1938.)

TANULMÁNYOK A FERDERÉTEGZÉSEKRŐL.

II. Az egykori folyásirány meghatározása a ferderétegzések alapján.

SZÁDECZKY-KARDOSS ELEMÉR-től.

I. Bevezetés. Régóta ismeretes, hogy bizonyos ferderétegzések, nevezetesen ugyanezen cím alatt közölt első dolgozatomban¹ is említett «diagonális rétegzések» alapján a geológiai múlt folyóvizeinek a folyásirányai megállapíthatók.²

A ferderétegzések ilyen paleogeográfiai alkalmazása azonban általános módszerré nem fejlődött ki, mert csak ritkán látszott alkalmazhatónak, (noha a ferderétegzések nagy elterjedéséhez kétség nem férhet.)

A ferderétegzésekkel analog felületi formáknak, a tágabb értelemben vett hullámbarázdáknak a paleogeográfiai jelentőségét különösen amerikai kutatók kidomborították.³ E felületi formák-

¹ Ugyanezen folyóirat, ugyanezen kötete, pp. 799—816.

² A transzportirány ilyen meghatározásának néhány jellegzetesebb alkalmazását a következő példákön láthatjuk. W. M. DAVIS a ferderétegzések segítségével olyan newenglandi homokfelületek esetében állapította meg az egykori folyásirányt, amelyről feltételezhető volt, hogy az olvadó jég lerakódásai (Structure and origin of glacial sand plains. Bul. Soc. Geol. Amer. I. (1890), pp. 195—202.). K. KEILHACK az északapennini szarmatakorú deltakonglomerátok ferderétegzései alapján arra az eredményre jutott, hogy ezek az üledékek a lombard síkság felől származtak. (Lehrb. d. prakt. Geol. Bd. I. (1916), p. 76.). A WINKLER-HERMADEN a stájer medencében kimutatott pontusi korú «kapfensteini folyó» folyásirányát több helyen a ferderétegzések alapján állapította meg. (Über die sarmatischen und pontischen Ablagerungen im Südostteil des steirischen Beckens, Jahrb. d. Geol. B. A. Wien, Bd. 77. (1927.) pp. 393—456, különösen p. 430.

³ BUCHER, W. H.: On ripples and related sedimentary surface forms and their paleogeographic interpretation. Amer. Journ. of Sci. IV. Ser. XLVII. (1919). pp. 149—210 és 241—269..

nál a ferderétegzések szükségképen gyakoribbak, mert a felületi formák megmaradásához különleges tényezők szükségesek, amelyek a ferderétegzések megmaradása szempontjából nem játszanak szerepet.

A ferderétegzések paleogeografiai jelentősége szintén megérdemelne legalább is ekkora figyelmet: ezek alapján ugyanis lehetőség kínálkozik arra, hogy az egykori folyásirányokat, és ezzel együtt az általános lejtésirányokat a különféle formációk képződési idejére nézve meghatározzuk. Ezek a meghatározások pedig a geológiai múlt domborzati viszonyainak megállapítását tennék nagymértékben lehetővé. Eme eljárás jelentőségéhez a többi paleogeografiai módszerek sem pontosság, sem gyorsaság, sem pedig az adat dinamikus hordereje tekintetében nem hasonlíthatók.

II. Látszólagos és valódi lejtésirány. A folyásirányok meghatározására eddigelé főleg csak a diagonális rétegzéseket használták fel.

A gyakoribb keresztvétegzések és átmeneti jellegű rétegzések esetében viszont a rétegeknek határozott lejtésiránya nem volt kimutatható. A keresztvétegzéses feltárások egészen különféle lejtésirányú kuszált rétegei semmiféle szabályosságot nem árulnak el. De mindaddig, amíg az uralkodó elmélet szerint a keresztvétegzéseket eolikus képződményeknek tekintették, határozott lejtésirány nem is volt várható, hiszen közismert, hogy a szél iránya reudszerint nem állandó.

Amint azonban kiderült, hogy a keresztvétegzés fluviális eredetű is lehet, sőt, hogy az ilyen eredetű keresztvétegzés nagyon is elterjedt,⁴ a lejtésirányoknak eme szabálytalansága már tulajdonképpen ellenmondást jelentett a folyóknak többé-kevésbé határozott folyásirányával szemben. Az ellenmondás a folyók bizonyos irányváltozásaira, a meanderezésekre és metaripple-képződésre való utalással látszott egyideig elintézhetőnek.⁵ Nyilvánvaló azonban, hogy kielégítően ilyen módon sem magyarázható a fluviális kereszt-

⁴ Über Diagonal- und Kreuzschichtung, insbesondere bei fluviatilen Ablagerungen Mitt. d. berg- u. hüttenm. Abt. Sopron, VII. (1935), pp. 111—137.

⁵ PUCHER, l. c.

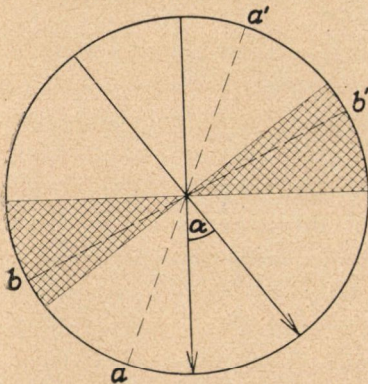
rétegzések állandó és már kis felületen belül is észlelhető szabálytalansága. Egyrészt ugyanis a kanyargó és szabálytalanul szétágazó folyók jelenlegi lerakódásain is többé-kevésbé határozott irány uralkodik, másrészt viszont a fluviális üledékek közt a szabálytalan rétegzések különösen gyakoriak.

Egy egyszerű elvi megfontolás alapján azonban fel lehet tételezni, hogy a keresztrétegzések szabálytalansága bizonyos mértékig csak látszólagos. A feltárásokban ugyanis a szemlélő síkbeli képet kap a rétegfelületek térbeli rendszeréről. A síkbeli feltárásokon a rétegek elmetsződési vonalai pedig egymáshoz képest csak kétféle viszonyban állhatnak, t. i. vagy azonos, vagy ellentétes irányban lejtnek. A síkbeli feltárásokon tehát bizonyos esetekben ellentétes lejtésűnek tűnhetnek fel az olyan rétegek nyomvonalai is, amelyek lejtésirányai a valóságban mindössze néhány fokos szög alatt divergálnak. Másrészt bizonyos körülmények közt a valóságban egymással csaknem ellentétes lejtésű rétegek nyomvonalai a feltárási síkon azonos irányú lejtésekkel jelentkezhetnek.

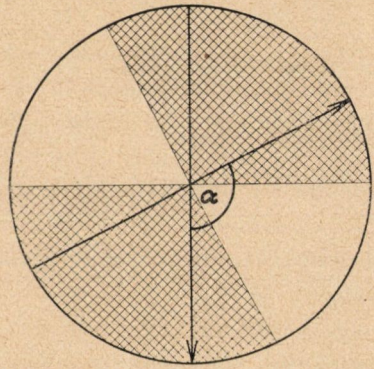
Vizsgálunk kell tehát, hogy a síkbeli képen milyen körülmények közt látunk egymással azonos, ill. ellentétes lejtésirányokat. Az egyszerűség kedvéért a feltételezhető sokféle lejtésirányú réteg közül csak a két szélsőséges lejtésirányút vegyük tekintetbe és jelöljük nyilakkal ezeknek a lejtésirányait. A nyíl tehát jelenti azt az irányt, amelyet a tektonikus eredetű ferde réteghelyzetnél dőlésnek neveznénk (1—2. ábra). Jelöljük továbbá szaggatott vonallal az általában függőlegesnek tekinthető feltárási sík metszetét a rajz síkjával. Határozzuk meg a két vizsgálandó réteg csapásvonalát (vékonyan kihúzott vonalak). A két csapásvonal a teret 4 részre, 4 körcikkre osztja. Ha a két lejtésirány egymással hegyesszöget zár be ($\alpha > 90^\circ$, 1. ábra), úgy valamely függőleges feltárási síkon észlelhető rétegnyomvonalak nyilván egymással azonos irányban — (bár túlnyomóan különböző szög alatt) — lejtnek, ha a feltárási sík azokban a körcikkekben fekszik, amelybe a rétegek lejtésirányai esnek (pl. $a—a'$). Viszont azokon a feltárási síkokon (pl. $b—b$), amelyek a rétegek lejtésirányait nem tartalmazó körcikkben fekszenek, a rétegek nyomvonalai egymással ellenkező irányban lejtnek. A bevonalkázott szög-intervallumon belül fekvő feltárási síkokon tehát látszólag ellentétes lejtést látunk,

noha a rétegek lejtésirányai a valóságban egymással csak hegyes szöveget zárnak be. E körcikknek a szögnyílása nyilván az α szöggel egyenlő.

Ha a két réteg lejtésiránya egymással tompaszöveget zár be ($180^\circ < \alpha < 90^\circ$, 2. ábra), úgy a látszólagos lejtésirányok akkor azonosak, ha a feltárási sík a lejtésirányokat nem tartalmazó körcikkben fekszik, viszont a lejtésirányok látszólag ellentétesek, ha a feltárási sík a lejtésirányokat is magukban foglaló körcikkre esik. Ilyenkor tehát az esetek nagyobb részében, (t. i. az α szög-



1. ábra.



2. ábra.

nyílású bevonalkázott körcikken belül) ellentétes a rétegek látszólagos lejtésiránya.

Egy aránylag kis mértékben divergáló rétegekből felépített kereszttrétegzés tehát a feltárási különböző irányú falain oly sok ellentétes rétegnyomvonalat mutat, hogy a megfigyelőben a teljes szabálytalanság benyomását kelti.

Egy másik pszichológiai tévedés még növeli a szabálytalanság érzetét. Szilárd kőzetből álló falon a ferde rétegfej-kibúvások asszimmetrikus váll-lapjai alapján azonnal felismerjük, hogy a rétegek ferdén állóak a feltárási síkhoz képest. Laza homokos kőzetben ilyen rétegfejek nem jelenhetnek meg és ezért minden rétegnyomvonal a feltárási merőleges helyzetű rétegnyomvonalnak a benyomását kelti. Ezt mutatja az is, hogy az irodalomban közölt ferderéteg-

rajzokon mondhatni soha nincs a rétegek lejtésiránya feltüntetve és a nyomvonalakat egyszerűen a rajzsíkra merőleges rétegek nyomaként értelmezik. A ferderétegzések főleg éppen az ilyen homokos kőzeteken jelennek meg.

Ha viszont a keresztétegzést csak egyetlen éspedig olyan sík tárja fel, amelyen a különböző helyzetű rétegek nyomvonalai egyirányban lejtnek, úgy azt nem is tekintjük keresztétegzésnek, minthogy így csak az egymást «keresztező» rétegek rendszerét nevezik. A «keresztétegzés» tehát szükségképpen a határozott lejtésirány nélküli ferderétegzés eseteként él a geológiai köztudatban.

Amikor a fenti megfontolások alapján a dunai aranykutató-sokkal kapcsolatban különféle «szabálytalan» ferderétegzések lejtésirányainak valódi térbeli helyzetét részletesen végigmértem, még a fenti megfontolások után is csaknem meglepő volt az eredmény: u. i. a legkuszáltabbnak látszó keresztétegzés esetében is kitűnt, hogy a rétegek lejtésirányai egy határozott irány körül szabályosan csoportosulnak. A 3. és 4. ábra mutatja egy-egy ilyen teljesen szabálytalannak látszó keresztétegződésű, középpliocénkorú homok feltárás különféle ferderétegeinek lejtésirányait, irány- és meredekség szerint. (3. ábra, Tormáspuszta, 4. ábra, Sopronkövesd). Ez az eredmény mindegyik vizsgált fluviális és fluviolakusztis formációra nézve érvényesnek bizonyult.

A mondottakat tehát abban foglalhatjuk össze, hogy 1. a ferderétegzések meghatározása és rendszertani elnevezése bizonyos mértékig csak a feltárási síkon észlelhető esetleges és részben megtévesztő (síkbeli) képen alapul. *Ugyanaz a ferderétegzési típus bizonyos feltárási síkon keresztétegzésnek, más síkon diagonális rétegzésnek mutatkozik.* 2. a rétegek lejtésirányai a legszabálytalanabbnak látszó ferderétegzési esetekben is egy uralkodó irány körül «szabályosan» csoportosulhatnak.

Az utóbbi megállapítás alapján tehát joggal feltételezhetjük, hogy a keresztétegzéseket is egy határozott, uralkodó folyásirányú áram hozta létre és hogy a keresztétegzések alapján is megállapítható ez az egykorú uralkodó folyásirány.

III. A különféle ferderétegzések (valódi) lejtésirányai. I. A diagonális rétegzéseknek megfelelő felületi formákat az előbbi dol-

gozatban részletesen leírtuk. Ezek szerint a kérdéses ferderétegek bizonyos hullámbarázdáknak ill. homokzátonyoknak a lee-oldalán lerakódott rétegeket képviselik. E feltevésnek teljesen megfelel a diagonális ferderétegek lejtésszöge is: leggyakrabban 20—35°. *A diagonális ferderétegek tehát az áram irányában lejtének, vagyis közvetlenül megadják az egykori folyásirányt.* Amint láttuk, a geológiai irodalomban ezt a körülményt a transzportirány meghatározására többször fel is használták. Az ilyen meghatározás mindig az (igazi vagy látszólagos) diagonális rétegzés alapján történt. A diagonális lejtésirány eme értelmezésének helyességét a kisalföldi és dunántúli folyókavicsokon is számos esetben igazolva láttam.

2. *A diagonális rétegzés ellentétes lejtésirányokkal* (Wirre Kreuzschichtung ANDRÉE, echte Kreuzschichtung JOH. WALTHER). E rétegzési típusnál a normális diagonális ferderétegek közt ellentétes lejtésirányú ferderétegek is megjelennek és pedig úgy látszik többnyire a ferderétegzésű pad felső részén. Az uralkodó ferderétegek lejtésiránya nyilván ismét a folyó normális folyásirányával párhuzamos.

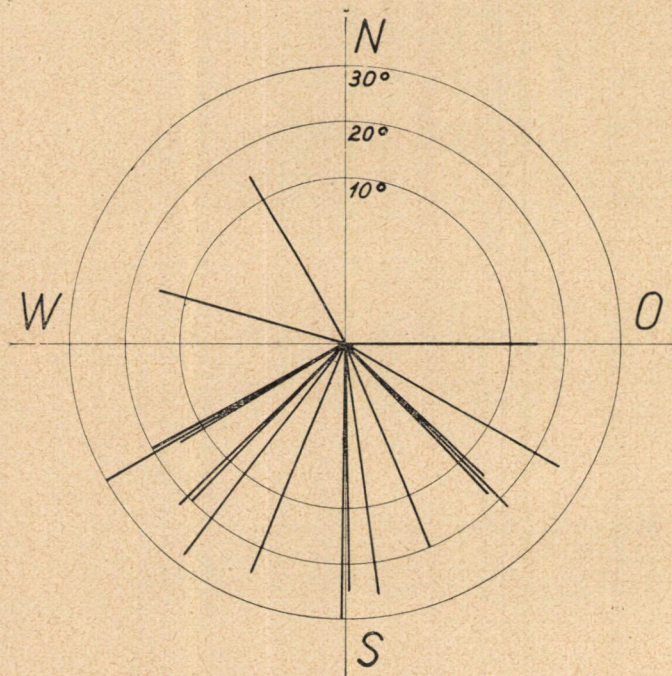
Az ellentétes lejtésirányú ferderétegek többféle módon is létrejöhetnek:

a) Legegyszerűbb és bizonyára a legtöbb esetben a valóság-
nak is legmegfelelőbb az a feltevés, hogy az ellentétes lejtésű rétegek a folyó olyan részének üledékét képviselik, ahol a folyásirány a folyók általános haladási irányával éppen ellentétes. Az ilyen szakaszok a folyókban nem éppen ritkák, minthogy a különböző függőleges tengelyű örvények mindig megnyúlnak a folyásirányban.⁶ Az ilyen ellentétes folyásirányok jelentkeznek pl. a folyó többékevésbé elkülönült öbleiben. Az ellentétes lejtésű rétegzés tehát ezekben az esetekben az ellentétes irányú áramban képződött normális lee-oldali rétegzést képviseli. Ilyen eseteket TWENHOFEL is említ.⁷

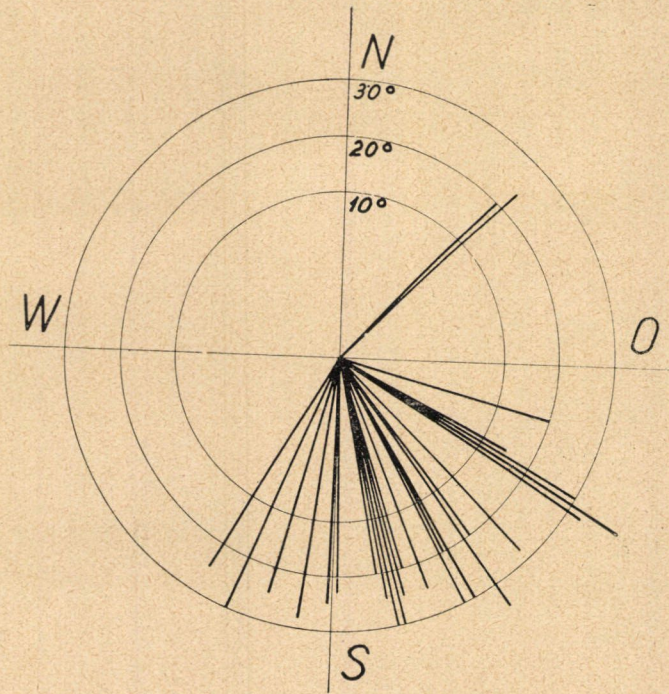
b) Létrejöhetnek azonban az ellentétes lejtésirányú ferde-

⁶ REHBOCK, TH.: Bettbildung, Abfluss und Geschiebebewegung bei Wasserläufen, Zt. d. D. Geol. Ges. Bd. 81. (1929), pp. 497—534.

⁷ TWENHOFEL, W. H.: Treatise on sedimentation, London, 1926.



3. ábra.



4. ábra.

rétegek a homokzátóny luv-oldali felületén is. E felületeken ugyanis az áram a homokot az apadás idején a kavics közüi kimossa és így a luv-felület mintegy kiköveződik, egy kavicsban dús felületi réteget képezve («Sohlenpflasterung»). Minthogy az ilyen luv-oldali rétegzés megjelenése erős szemnagysági különbségeken alapul, azért megtörténhet, hogy végeredményben csak a luv-oldali rétegzés marad felismerhető, a finomabb lee-oldali elmosódik. Ilyen esetet (már csak alig kivethető lee-oldali rétegzéssel) figyeltem meg pl. a Rába fiatal kavicsában (Rábamolnári stb.). A luv-oldali rétegzés felismerhető onnan, hogy rendszerint kevésbé meredek mint a lee-oldali réteg.

c) SPURR⁸ leírta az ellentétes lejtésű rétegek keletkezésének egy harmadik módját. Ismeretes, hogy a hullámbarázdák hullám völgyében főleg a durvább szemek, hullámhegyében főleg a finomabbak halmozódnak fel. SPURR kimutatta, hogy gyors lerakódás esetén a hullámvölgyek és hegyek szukcesszive egymásra rakódnak, miáltal ellentétes irányú ferderétegzés jön létre. A rendelkezésre álló leírások alapján feltételezhető, hogy ez is egy a b) alatt említett esettel párhuzamosítható luv-rétegzés.

d) TWENHOFEL⁹ végül utal arra a lehetőségre, hogy a 3. kritikus pont felett keletkező regresszív homokhullámokon is megjelenhet ferderétegzés, amely a folyásiránnyal feltételezhetően ellentétesen lejt, mert a lerakódás ebben az esetben a luv-oldalon történik. Az ilyen rétegzést a természetben eddig nem figyeltek meg. Más helyen már utaltunk arra,¹⁰ hogy a homokhullámok rétegeinek bizonyára csekély, a sima fázis üledékeihez hasonló lejtése van. Másrészt azt is említettük, hogy a homokhullámok eredeti formájukban rendszerint nem maradhatnak meg. Az ellentétes lejtések magyarázatára tehát ez a feltevés kevésbé látszik alkalmasnak.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a diagonális rétegzéseken észlelhető ferderéteg lejtésirányai túlnyomóan a folyásirány-

⁸ SPURR, J. E.: False bedding in stratified drift deposits, Am. Geol. 13. (1894), pp. 43—47, 201—206.

⁹ TWENHOFEL, l. c.

¹⁰ «A fluviális ferderétegzések fajai és szemnagyságeloszlási viszonyai» és «Über Diagonal- und Kreuzschichtung...» c. idézett dolgozataim.

nyal párhuzamosak, alárendelten pedig azzal éppen ellentétesek is lehetnek.

3. A diagonális- és keresztretegzések közti *átmeneti típusnál* a diagonális rétegzések ferderétegeivel rokon horizontális padok is előfordulnak, de ezek a rétegek már gyakran ívesen meghajlanak és lejtésirányai is gyakran ingadoznak. E padok rendszerint vastagabbak is, mint a diagonális rétegzések ferderétegű padjai és felül gyakran íves eróziós felületek határolják őket.

E típusra speciálisan azok a szinklinálisosan mindkét oldalra felhajló rétegekből felépített padok jellemzők, — bár nem éppen gyakoriak — melyek a típusos íves keresztretegzés rétegpakettjeinél jóval szélesebbek, (horizontális kiterjedésűek a 6 m-t is meghaladhatja), de azokkal körülbelül azonos magasságúak (vastagságúak). (Lásd az idézett németnyelvű dolgozatomban a 10. ábrát.) Az ilyen keresztmetszetenél a szinklinálisosan hajlott rétegek két szárnya az esetek egy részében feltételezhetően egymással kb. szembenéz, vagyis ugyanazon réteg két szárnyának lejtésiránya egymással 180° -ot zár be. Az ilyen padok a keresztzátányoknak, vagyis a két kanyar közti inflexiós ponton jelentkező gázlóknak a keresztmetszetével azonosíthatónak látszanak.

Ezt a feltevést két más megfigyelés is támogatja. Az egyik az, hogy az élő folyók partjain sok esetben a rétegzett fluviális jelenkori üledék a meder felé, azaz a folyásirányra merőlegesen enyhén lejt. A folyómeder típusos keresztmetszetei szerint pedig nyilván mélyebben, a kis-víz szintje alatti mederoldalon is lerakódnak a folyásirányra merőleges lejtésű rétegek és pedig itt már meredekebb szög alatt.

A másik vonatkozó megfigyelés oly keresztmetszetenek történt, melynek két egymással szembenéző szárnya nem egyenlő meredeken lejt. Ilyenkor a meredekebbik szárny üledéke durvább-szemű, mint a lankásabbé. (L. idézett dolgozatomban 5. ábrát.) Az ilyen keresztmetszet tehát pontosan megfelel a folyókanyarokban megfigyelhető szelvényeknek. Ezeknél tudvalevően a folyó külső, homorú partján meredekebb lejtőjű eróziós «Kolk» jelenik meg, kevesebb durva üledékkal, míg a belső, domború parton túlnyomóan finomszemű üledék halmozódik fel, azaz parti-zátány képződik.

Mindezek alapján indokoltnak látszik feltételezni, hogy az átmeneti rétegzési típusnál előfordulnak olyan íves hajlású rétegek is, amelyek meder-kitöltéseket képviselnek. és ezek lejtésiránya a folyásirányra kb. merőleges.

Az ilyen széles, mindkét oldalon felhajló rétegekből felépült paketteken azonban néha megfigyeltem, hogy a látszólag ellentétes lejtésű szárnyak egymással csak kb. derékszöget zárnak be. Ez az eset átmenetet képez a leírt mederkitöltésektől az alább tárgyalandó barchan-szerű homokzátonyok felé.

Az átmeneti típus egyéb említett rétegzéseit részben a diagonális, részben az íves keresztarétegződés rétegeivel azonosíthatjuk és lejtésirányaik értelmezésére nézve a megfelelő pontok alatti leírásokra utalok.

Végül arra nézve, hogy e típusnál az u. n. «ripple drift»-nek (l. alább) megfelelő luv- és lee-oldali lerakódások is előfordulnának, eddigelé semmiféle adatunk nincs.

4. A típusos íves keresztarétegzésnél a feltárási síkokon észlelhető kép erősen változik a sík iránya szerint. Az alábbiakban kimutatandó folyásiránnyal párhuzamos *hosszmetszeti kép* némileg a diagonális rétegzéshez hasonló, amennyiben a lejtések túlnyomóan egyirányúak. A rétegek azonban meggörbülnek. A lejtés-szög tehát az egyes rétegeken belül változik, nevezetesen lefelé csökken.

A folyásirányra merőleges *keresztmetszeti képet* viszont mindkét oldalra felhajló, tehát szinklinális rétegnyomvonalak jellemzik. Minthogy a folyásirányhoz képest *ferdén* álló síkokon is mindkét oldalra felhajló szinklinális keresztmetszetet látunk, ez a kép sokkal gyakoribb mint a hosszmetzeti.

A szóbanforgó íves keresztarétegzéshez hasonló keresztarétegzéseket tanulmányozott GILBERT¹¹ és azokat *oszcillációs hullámbarázdáknak* minősítette. Ábráin a rétegszárnyak részben mindkét irányban felhajlanak, mint az íves keresztarétegzések keresztmetszetén, részben azonban csak egyirányban hajlanak fel, mint a hosszmetzseteken. GILBERT az előbbieket normális oszcillációs hullámbarázdáknak, az utóbbiakat pedig erősebb egyirányú áram

¹¹ GILBERT, G. K.: Ripple marks and cross bedding. Bul. Soc. Geol. of Amer. 10. (1899), pp. 135—140.

hatására keletkezett oszcillációs hullámbarázdáknak tekinti. Feltevése szerint az utóbbiaknál az áram hatására az egyik szárnyon lerakódás, a másikon viszont erózió történik és ezért ezeket *«compound cross bedding»*-nek nevezik.

GILBERT compound cross bedding-jét BUCHER¹² esetleg a SORBY-féle ripple drift-tel hajlandó azonosítani, feltételezve, hogy e rétegeket egyidejűen luv- és lee-oldali lerakódás hozza létre. Ez a feltevés nyilván azt jelenti, hogy az ívesen hajlott rétegek egyik szárnya az áram irányával párhuzamosan, másik szárnya azzal ellentétesen lejt. Ez a felfogás tehát azon a hallgatólagos feltevésen alapul, hogy a két szárny egymással szembenéz, azaz lejtésirányai 180°-ot zárnak be.

Az íves keresztrétegzések keresztmetszete alapján valóban kézenfekvőnek is látszik ez a feltevés. A részletes vizsgálataim azonban egészen más credményt adtak. Főkép a Kisalföld és a Dunántúl fiatal harmad- és negyed-korú fluviális és fluviólakusztris üledékein végeztem számos mérést és ezek kivétel nélkül mind azt mutatták, hogy a szinklinális ívek két szárnyának lejtésiránya egymás felé *hegyes szög* alatt konvergál (3—4. ábra). A konvergencia az átlag 0.5—2.0 m hosszúságú íveken túlnyomóan 30—50°-nak adódott. *A szóbunforgó íves keresztrétegzés tehát csupa ferdén, de egymással többé-kevésbé párhuzamosan fekvő lapátalakúan görbült rétegből áll.*

GILBERT ábrái alapján fel lehet tételezni, hogy az ő kereszt-retegzései is hasonló szerkezetűek, de értelmezésükben az I. fejezetben említett pszichológiai tévedésnek esett áldozatul. A rétegek lejtésirányára u. i. méréseket nem közöl, a réteg helyzeteket tehát a síkbeli kép alapján nyilvánvalónak tartja. Mindaddig amíg ezekre nézve is mérések nem állanak rendelkezésre, e kérdésben határozott állást nem foglalhatunk. Kétségtelen azonban, hogy az általam vizsgált fluviális íves kereszt-retegzésre nézve nem állhat meg sem GILBERT, sem BUCHER értelmezése.

A szinklinális íves kereszt-retegek méréseim alapján tehát formailag az eolikus barchanok, sarlódünák lee-oldali rétegeihez hasonlíthatók. Tudvalevő, hogy az ilyen barchanszerű, a folyás-

¹² BUCHER, l. c.

irányban lefelé fecskefarkalakúan szétágazó vándorzátonyok a folyókban meglehetősen gyakoriak. BUCHER említi, hogy az 1. és 2. kritikus pont között keletkező mesterséges áramlási hullámbarázdák a keskeny csatornában szintén félhold alakúak. Leírása szerint azonban ezeknél a konvex oldal irányulna a folyásirányban lefelé.

E szempontból különösen fontosak BLASIUS vonatkozó vizsgálatai.¹³ Ő ugyanis kísérletileg kimutatta, hogy az eredetileg szabályos párhuzamos hullámbarázdák nem állandó formák, hanem lépcsősen elrendezett nyelvalakú formákra aprózódnak fel. Az ilyen — BUCHER által «linguoid»-nak elnevezett — hullámbarázdák leoldali meredek lejtői szintén ívesen hajlottak.

Mindezekben a képződményeken tehát olyan lee-oldali rétegek keletkeznek, amelyek keresztmetszetben nyilván az íves kereszt-rétegzés képét mutatják. Jogosan feltételezhetjük tehát, hogy az íves kereszt-rétegzések, legalább is nagyrésztben, a fecskefarkalakúan szétágazó homokzátonyok ill. ugyanilyen típusú hullámbarázdák keresztmetszeteit képviselik.

Az ilyen barchan-szerű képződményeknek genetikai viszonyait illetően tekintetbe veendő BLASIUSnak és EXNERnek azon megállapítása, hogy a lerakó vízáram útja ezeknél horizontálisan is hullámossá válik. BLASIUS ezt a jelenséget olyan egyenes vagy csak kissé kanyargó folyókkal hozza kapcsolatba, amelyeknek a két partján *belül* ír le a vízáram egy vagy több hullámvonalat és a homokzátonyok felváltva a jobb, majd a balpart közelében jelennek meg.¹⁴ EXNER pedig részletesen ábrázolta a fecskefarkú homokzátonyok képződésével kapcsolatos örvénymozgásokat is.¹⁵

¹³ BLASIUS, H.: Über die Abhängigkeit der Formen der Riffeln und Geschiebepänke vom Gefälle, Zt. f. Bauwesen, Bd. 60. (1910), pp. 466—472.

¹⁴ Erre nézve lásd ENGELS vizsgálatait is, ENGELS, H.: Untersuchungen über die Bettenbildung gerader und schwach gekrümmter Flusstrecken mit beweglicher Sohlen, Zt. f. Bauwesen, LV. (1905), pp. 663—680.

¹⁵ EXNER, M.: Über die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flüssen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa. Bd. 134. (1925.), pp. 165—203., Fig. 11, p. 190.

Végül megemlítjük, hogy BUCHER a különböző irányokban lejtő eróziós felületekkel tarkított rétegzési típust (tehát feltételezhetően valamilyen keresztarétegződést) *meta-hullámbarázdáknak* hajlandó tartani. Ez a felfogás az itt kifejtettekkel nincs ugyan ellenmondásban, de az indokok közelebbi kifejtése hiányában azt érdemlegesen ezidőszerint nem tárgyalhatjuk.

Mindezek alapján megállapíthatjuk az íves keresztarétegzés lejtésirányainak összefüggését is a folyásiránnyal: *a rétegek két szárnya az uralkodó folyásiránnyal jobbra és balra többé-kevésbé szimmetrikusan hegyesszöget zár be. Az ív legmélyebben fekvő lankásabb lejtésű középrésze pedig a folyásiránnyal többé-kevésbé párhuzamos.* A rétegzési diagrammokon ennek megfelelően gyakran a meredekebb lejtések némi halmozódását ismerhetjük fel két egymással hegyesszöget bezáró irányban. Minthogy azonban a szóbanforgó áramok meanderező tendenciájával kapcsolatban az uralkodó folyásirány kissé ingadozik, *a különböző rétegek lejtésirányai kb. félköríven belül divergálnak.*

Ezt a típust a Dunántúl és Kisalföld egyenletesen finomszemű pannon és középpliocén fluviolakusztis homokjain és különböző fiatalabb fluviális finomabb szemű kavicsain, pl. a Gyöngyösbalparti levanteikori kavicsstakarón, valamint pl. egyes Győrszabadhegy-vidéki pleisztocén Dunakavicsokon megfigyeltem. A lejtésirányok fenti értelmezésben a regionális palaeogeografiai viszonyokkal mindig jól összeegyeztethető folyásirányokat adtak.

Összefoglalóan megállapítható, hogy a vizsgált fluviális rétegzési típusok midegyikén meghatározhatjuk a ferderétegzések alapján az üledéket lerakó folyóvíz egykori folyásirányát. Nyilvánvaló azonban, hogy ilyenmódon a folyóvíznek csak egy lokális folyásirányát kapjuk meg. Vizsgálni kell tehát még azt, hogy ezek a helyi folyásirányok milyen viszonyban állnak a terület általános lejtésirányával. Következő (3.) dolgozatom fog e kérdéssel foglalkozni.

ÜBER DIE BESTIMMUNG
DER EINSTIGEN FLIESSRICHTUNG AUF GRUND
DER SCHRÄGSCHICHTUNGEN.

Von E. SZÁDECZKY—KARDOSS.

Die Arbeit erscheint im Neuen Jahrb. f. Min. Geol. und
Paläont.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissen-
schaften vom 21. Feb. 1938.)

•

TÖKÉLETES ÉRZŐELEMELK A MAGASABBRENDŰ CSILLÓSOK VILÁGÁBAN.

I. Tanulmány az Euplotes- és Aspidisca-fajok érzékszervecskéiről.

(40 képpel.)*

GELEI JÓZSEF r. tagtól.

A közelmúltban négy kisebb dolgozatban (1929, 1933, 1934 *a* és *c*) foglalkoztam a véglények érzőszervecskéivel. Ezekben a dolgozatokban lefektetett vizsgálatok három szempontból vitték előbbre a mi alsóbbrendű lényeink érzőképességére vonatkozó jelentős kérdéseket. Először is a legmagasabbrendű véglényekben, éspediglen a Hypotricha-csoport Euplotes nemzetségében bonyolódott és magasrendű érzőelemeket írtam le, melyek igen sok tekintetben hasonlóak a férgekben ismert, s főként részleteiben általam leírt, úgynevezett igazi szabad idegvégződésekhöz (GELEI, 1930). Másodszor, éppen az Euploteseiken végzett vizsgálataimmal kiderítettem, hogy az állatok kettéoszlása alkalmával az érzékszervecskéek az oszlásban azáltal vesznek részt, hogy alapi-testeik nagyobb számú oszláson (sarjadzáson) esnek át s az új alapi-testek szabályos eloszlásuk során érzősörtével szerelődnek fel. Harmadik, s talán legfontosabb tanúsága ezeknek a vizsgálatoknak az volt, hogy az érzősörték az érzékelés különböző lehetőségeinek megfelelően különböző irányokba különödnek szét: a tapintást elvég-

* E dolgozat I. részében a következő II. rész ábrái is figyelembe vették.

zik maguk a Csillók, s ennek következtében valószínűnek tartom, hogy igazi tapintósörték, mint tapogató elemek nem, vagy csak ritkán képződnek ki a Csillósokon. Semmi értelmét nem látjuk annak se, hogy a hő érzékelése végett helyhez kötött érzékszervecskékre, vagyis érzősörtékre volna szükség, s ezért nem látjuk semmi okát annak, hogy a hő irányába való tájékozódás végett külön érzősörték képződjenek. Fájdalomérzetről sem tudunk, még az alsóbbrendű sejtes lények világában sem, nemhogy a vég-lényekben kereshetnénk ilyesmit, illetőleg annak céljait szolgáló érzősörtéket. A Csillósoknak külön fényérzékszervük sincsen, legfeljebb talán az Ophryoglénák csoportjában beszélhetnénk ilyesmiről a szájnylással kapcsolatos fénytörő testek képében. Az érzékelés esetei közül e szerint fennmaradnak a különben egyebütt is legősibb érzékszervnek, nevezetesen a vegyi érzékelésnek vagy chemoreceptiónak és a tapintó-érezkelés, vagy tangoreceptio terén az áramérzéknek (rheoreceptio) és a nyomásérzetnek (premoreceptio), valamint a sajátérezkelésnek (proprioceptio) lehetőségei.

Az érzékszervek nagy többségét a helyhez kötöttség jellemzi. Különösen a vegyi érzékszervek nevezetesen arról, hogy azok a test melső végén, a táplálkozás szervének bejáratánál, a szájnylás közvetlen közelében, vagy éppen a szájúregben helyezkednek el. Tudjuk azt is, hogy a chemoreceptiót valóságos érzősörték szolgálják. Tudjuk azt is, hogy különösen éles érzékszervre e tekintetben a ragadozóknak van szükségük. Ezekkel az általános jelenségekkel van szorosan összekapcsolva az, hogy a Csillósok világában a ragadozók túlnyomó része a szájnylás közvetlen közelében, éspediglen rendszerint attól rézsut hátoldalt (igen sokszor dorso-sinistrálsan) érzősörtecsoporttal van felszerelve, olyan helyen, hogy az érzősálacsakkal áldozatát nem tapinthatja; ennek következtében ezeket az érzősörtéket, melyek igen gyakran nyálkás, mély barázdákban vannak elhelyezve, vegyi- éspediglen szaglósörtéknek tekintem. (Lásd: GELEI 1933, 1934a.)

Jelen dolgozatomban a vegyi érzőelemekkel nem foglalkozom, mivel vizsgálataim tárgyát képező Euplotes-fajok nem ragadozók, áldozataikat nem nyomon követő, hanem örvénylő állatok. Az örvénylőkön pediglen általánosságban semmiféle külön érzősörték ki nem alakulnak s így ott vegyiérezkészőrőket se ismerünk,

Hogy a vegyi érzősörtéket mégis felemlegettem, annak az a magyarázata, hogy a véglények vegyi érzékelése voltaképpen közvetlen céljában a helyváltoztatást szolgálja, amennyiben az az állat mozgásait irányítja. A helyváltoztatás pedig a véglénynek legjelentősebb feladata. Ha figyelemmel kísérünk élte során egy Csillóst, úgy csodálkozással állapítjuk meg, hogy az únosuntalan mozog, megállása, pihenése pillanatig sincsen; a véglény sosem alszik. Ezért természetesnek látszik, hogy a mozgás irányítására, legalább is a magasabbrendű véglényekben külön érzékszervek alakuljanak. E tekintetben vergődtek az Euplotesek vizsgálataim során nagy hírre, amennyiben ezeknek az állatoknak hátoldalán, a víz áramának kitett helyeken, előregöbülő érzősörték rendszerére (ezek különben már régen ismeretesek voltak) mutattam rá, melyek helyzetük, illetőleg állapotuk szerint csakis az áram-érzékelésnek (rheoreceptio) állhatnak szolgálatában (GÉLEI 1929 és 1934a). Közvetlen kísérleti bizonyítékokkal állításom támogatására itt sem szolgálhattam, csakúgy, miként akkoron sem állt módomban az Örvényféregek esetében igazolnom azt az állítást, midőn 1930-ban először mondtam ki ezekben az állatokban a sejteslányok legalsóbb rendű csoportjáról azt, hogy helyváltoztatásuk közben mozgásuk igazgatására áramérzősörtékkel vannak felszerelve. Akkor is csakis a helyzetüktől és a sörték alakjából következtettem erre a lehetőségre, s nem telt bele 7 esztendő, a königsbergi iskola kísérletek alapján szóról szóra igazolta az akkor kimondottakat.

A mozgás irányításának harmadik lehetősége magában a helyváltoztató szervben lehet adva azáltal, hogy az maga is érzi emagának állapotváltozásait és ezt mozgásirányításra használja fel. Ilyen ú. n. sajátérzékelési (proprioceptiv) elemeket a membranellák között már előttem leírt WETZEL (1925). Azoknak általános jelentőségét mégis én igazoltam, midőn ilyen proprioceptiv érzőtestecskéket nemcsak a membranellák, hanem a járólábaeszkák (cirrusok) mellett is felismertem s azokat részletesen ismertettem és mechanikai jelentőségükre rámutattam (1929, 1934a). Utóbb már ilyeneket a cytopharynx endoralis membránája mellett is nagyszámban találtam.

Ezeknek a sajátérzékelő szervecskének az alkata is külön-

leges, amennyiben azok az Euplotések esetében érzősörtéte-
nek. Hasonló elemeket azonban helyváltoztató szerveken kívül az
Euplotések hátoldalán is találtam. Mivel pedig ezek itt semminemű
proprioreceptiónak szolgálatában nem állhatnak, azonban belőlük
oszláskor sörtés áramérző elemek is keletkezhetnek, ezért nyilván-
való, hogy ezek a testoldali szabad receptorok valamiféle, egy-
részt az áramérzékeléssel, másrészt a sajátérzékeléssel rokon fel-
adatnak a szolgálatában állhatnak s így munkájuk az általános
egyetemleges tangoreceptio területére szorítkozik. Ilyen pedig
még csak egy van, nevezetesen a nyomásérzés. S ezért ezeket a
testoldalakon, a hasoldalon, valamint a garatban (cytopharynx)
fellépő elemeket, mint nyomásérzékszerveket jelöltem meg.

Érdeklődésemet ez a háromféle tangoreceptív szerv az utóbbi
időben a legkülönbözőbb vonatkozásokban és igen nagy mértékben
lebilincselte s ezért az utóbbi években nem mulasztottam el egyetlen
alkalmat sem, hogy ahol csak Euplotes-fajra találtam, abból
tenyészeteket ne állítsak elő. A kérdést alkati (morphologiai)
és helyzeti (topographiai) szempontból számos fajon és ismételten
újra tanulmányoztam, és pedig avégett, hogyha már élettani tekín-
tetben nem is tudom állításaimat kísérletileg igazolni, legalább
a szóbanforgó szervecskék általános és szabályos elterjedtségével
nyújtsak bizonyíték értékével bíró tapasztalatokat állításaim
támogatására. E közben sok aprólékos kérdésre is bukkantam,
amelyek vizsgálataimat még külön-külön mind hasznossá tették.

Vizsgálati módszereim régebbi dolgozataimból mind ismerete-
sek. Utalok különösbbe 1934-ben (c) megjelent nagyobb tanul-
mányomra. Jelen dolgozatomhoz a KLEIN-féle száraz, GELEI-
HORVÁTH-féle nedves ezüstöző eljárások, azután az én osmium-
toluidinkékes, osmium-gentianaibolyás és ezüst-osmium-formolos
eljárásaimat használtam. Több helyütt segítettem ki magamat
tanítványom, HORVÁTH JÁNOS által módosított eljárással, a
phosphorwolframsav-anilinkékes (toluidinkékes, gentianibolyás)
módszerekkel.

Vizsgálati állataim az *Euplotes muscicola* (1—7, 42—43.,
46—48., valamint 51-ik ábra), *E. novemcarinatus* (8—10. ábra),
E. harpa (11—13. ábra), *E. charon* (14—18. és 53-ik ábra), *E. pa-
tella* (19—23. és 49—50-ik ábra), *E. alatus* (24—28-ik ábra), *E. ele-*

gans (29—31-ik ábra), *E. eurystomus* (32—40., 44—45. és 54-ik ábra), végül pedig az *Aspidisca lyncaeus* (41-ik ábra) fajok körzetéből kerültek ki. Vizsgálataim során az egyes fajokat, tekintettel azoknak fogyatékos alkati ismerettanára, ilyen szempontból is alaposan figyelemre méltattam s azokat a német szövegben az érzékszervekre vonatkozó vizsgálat előtt részletesebben le is írtam, azért, hogy bárki utánam következő bűvár eredménycímét hiteles fajleírások alapján biztosan tudja ellenőrizni. E végett utalok a német szöveg megfelelő oldalaira.

Neuronema-rendszer.

Az Euplotések és az Aspidiscák neuroid-rácsrendszerre részben a KLEIN (1926, 1928, 1929, 1931), részben pedig a magam és TURNER (1933) vizsgálataiból ismeretesek. Tudjuk azt, hogy a hasoldalon egy irányítatlan, legfeljebb csak a test hosszában kihúzott hálószemekből álló rácsrendszer képződik (l. 3., 7., 13., 27., 28., 39., 40., 47., 48. és az 51-ik ábrát). A hátoldalon pedig az érzősörtesorok között hosszában futó kettős hálószemű, többé-kevésbé szabályos rácsrendszer fejlődik ki (l. 13., 31., 37., 40., 53. és 54-ik ábrát). Vizsgálataim ezen a téren csak a tekintetben jelentenek újdonságot, hogy két közelrokon fajon az *E. muscicolán* és *novemcarinatuson* az érzősörtesorok között több, éspediglen 4—5 (*muscicola*), sőt 7—8 (*novemcarinatus*) sor szabálytalan hálórendszer képződik, amint azt a 2. (*muscicola*) és a 10. (*novemcarinatus*) ábránk igazolja. Néhol a kétpáztás hálózatú állatok hátán is látunk egy-egy imitt-amott közbeiktatott harmadik, sőt negyedik hálószemecskét is; ezek azonban mindig szabálytalanul jelentkeznek, s rendszerint az anyaállatból az oszlás idején visszamaradt, az új hálószemek által el nem nyomott területeket jelentenek (l. a 4. és 52. ábrát).

A neuroid-hálózatnak a test felületi függelékeihez való viszonyáról a következőket jegyezhetjük meg. A hálószemek határvonalai semmi vonatkozásban nem igazodnak a testfelületi ormókhöz. Sem a hátoldal tarajélein, sem az oldal-, sem a homlokvonalakon, sem a membranellák közti ormókon hosszanti neuroidvonalak nem szaladnak, tehát a szálak nem támasztanak. Ennek követ-

keztében tehát a 7., 27., 31., 39., 40., valamint a 41., 49. ábránkon a rajz határvonalai csak az állat szélét jelzik. 37. ábránkon erre való tekintettel a test homlokszegélyét pontozva húztam ki. A rácsrendszer az ormókhoz legfeljebb abban igazodik, hogy a hátoldal sörtesoraitól jobbra mindig nagyobb hálószemek vannak, mint balra (ezt különösen a 31. ábránkon látjuk élesen), éspedig azért, mert a sörtesortól jobbra eső ormó képződése közben ki-nyújtja a már azelőtt megjelent hálószemeket.

A rácsrendszer egyes hálószemei a membranellákat és cirrusokat, valamint az érzősörték, illetőleg receptorok bejáratát oda-símuló és rendszerint nehezen festhető hálószemmel (*fibra propria*) veszik körül. Az *Aspidisca lyncaeus* hálózata igen ritkás, itt voltaképpen a neuroidrostok a cirrusokat és a membranellákat egymással valamint a hátoldali érzősörtéket szintén egymással közvetlen szálak útján kapcsolják össze, amint azt a 41. ábránkon látjuk.

A rácsrendszerről általában megállapíthatjuk, hogy annak százalata az állat helyváltoztató és érzőelemeit folyamatos rácsba kapcsolja össze. A rács szálai, régi nézeteimmel ellentétben, ingerültvezetők.

Érzőelemek (receptorok).

Mind az Euploteseken, mind pedig az Aspidiscákon sörtés, illetőleg sörtétlen elemeket különböztetünk meg. Az érzősörtés elemek a hátoldal bordái mellett, azoktól balra ú. n. érzősorokat formálnak, melyeknek elemeit a soron belül egymással a rácsrendszer egyenes lefutású délkörirányú, meridionális szálai kapcsolják össze. Már ezekbe a sörtés sorokba is sörtétlen receptorok vannak beiktatva a hát középtáján, inkább kissé a hátsó testfélbe átterjedőleg. Sörtétlen elemek azonban rendszeresen az állat hasoldalán, az örvényszerv membranellái között, az endoralis membranilla fölött, a cirrusok tövén, egynéhány állatban a cytopharynx dorsalis boltozatán és az örvényszervnek mintegy folytatásában, az állat baloldali szegőtarajának hasoldali során egy (esetleg két) szabad receptorsorban helyezkednek el.

A sörtés érzőelemek alkatáról a 41. ábránk nyújt felvilágosítást. E szerint az érzékszervecske egy előregöbülő érzősörtéből és annak alapján egy széles alapi testből áll. Az érzősörte töve

tölcsérszerű (*E. eurystomus*) vagy szabályosan hengerded (*E. muscicola*) hártvaszerű képletbe az ú. n. érzőhengerbe van elhelyezve. A henger valamicsoda plasmás anyaggal van kitöltve, mely a külső fölület felől erősebben színeződő s így talán tömör felső sapkaszerű rétegbe megy át. A cylinderhártya fala alsó felében vastagabb; oszlás alkalmával ez a vastag fél sarjadzásnak indul s hosszú tömlővé nyúlik ki, melyben az alapi testek elszaporodnak. Az érzőcylinder bejáratánál az érzősörte számára szűk rés képződik, s itt a pellicula az érzőhengert valószínűleg fedi. A bejárat körül ezenkívül a neuroidszálból a már az előbb említett hurok (*fibra circularis*) képződik, melynek tágassága rendszerint kisebb, mint a cylinder kerülete, de lehet azzal megégyező is.

A sörtétlen érzőelemek ugyanígy vannak alkotva, azzal a különbséggel, hogy bennük az érzősörte hiányzik, illetőleg azzal, hogy a cylinder sokesetben nagyon törpe, vagy éppen keskeny. Mivel oszlás alkalmával — mint említém — sörtétlen receptorokból is származhatnak sörtések, ezért a kettő között lényegbevágó különbséget tenni nem szabad. Ezt bizonyítja az átmeneti alakok léte is, amennyiben a sörtétlen szakaszok szélén gyakran látunk olyan elemeket, melyekben söрте csak a cylinder magasságáig van. Fel kell említenünk azt is, hogy a balfelőli első érzősor, amely mindig hasoldalt fekszik, rendszeresen egészen sörtétlen elemekből áll, azonban az *E. patella* és *eurystomus* esetében elég gyakran találunk olyan példányokat, melyekben a hátsó érzőelemek itt is kisebb-nagyobb, néha a sor szerint előlről hátrafelé nagyobbodó sörtékkal vannak ellátva (l. a 19. és 35. ábrát).

A hátoldal érzősörtesorai, ideszámítva a bal testszegély ventralis sorát is, az egyes állatfajokon jellegzetes számban lépnek fel, illetőleg, ahol a sorok száma váltakozó, az eltérés az átlaggal szembe legfeljebb csak egy, vagy két sorra terjed ki. Az *E. muscicolán* rendszeren 8 sörtesor képződik ki s amennyiben egyes állatokon 9 található, az attól van, mert a bal hasi sor gyakorta kettős. Bizonyos tekintetben az egyes sorokban az érzőelemek száma is jellemző; ez azonban már nagyobb variálásnak van alávetve. 4. ábránk az *E. muscicolára* vonatkozólag egy átlagállapotot tüntet fel. — Az *E. novemcarinatusnak* csak 7 receptor sora van. A sorok érzőelemeinek száma is felette alacsony, de ez is váltakozó. A fajra

vonatkozó átlagállapotot a 8. ábrán tanulmányozhatjuk. — Az *E. harpa* sörtesorainak száma valamennyi tanulmányozott állaté között a legmagasabb. A 12 sörtesort az egyes sorok érzőelemeinek átlagszámával a 12. ábránkon tanulmányozhatjuk. — Az *E. charon* szintén 8 sörtesorral rendelkezik, a sorokon belül igen alacsony átlagszámmal. A sorok elrendeződését 16—18. ábránkon figyelhetjük meg. Az átlagállapotot a 18. ábra mutatja be. — Az *E. patellának* is rendszerint 8, ritkán 9 receptorsora van. A különböző helyekről előkerült állatokra vonatkozólag két átlagpéldát a 20. és 22. ábrán ismerünk meg. — Az *Euplotes alatusnak* 9 receptorsora van, melyet a 25. ábra tár elénk. A sorok számában variabilitás s ezzel kapcsolatosan 10 érzősor annyiban mutatkozik hogy a bal első sor az *E. muscicola* példájára gyakorta kettős. — Az *E. elegansnak* 8 sörtesorát a 30. és 31. ábra szemlélteti. — A nagytestű *E. eury stomusnak* rendszeresen 10 sörtesora van, melyet a 34. és 35. ábra tár elénk. A vizsgált állatok között legkisebb sörtesorral rendelkezik az igen kicsiny testű *Aspidisca lyncaeus*, melynek 4 sörtesorát a 41. ábra mutatja be.

Az érzősorokban elhelyezkedő sörtétlen elemek fekvése és variabilitása meglehetősen nagy. Aránylag legkevesebbet találunk az *E. patellának* egy tisztai alakján (l. 20. á.), holott ezzel szemben a vízvezeték víztartójából kikerült *patella* (l. 22. á.) jóval több sörtétlen elemet tartalmaz. A sörtétlen elemek száma szélsőségesen felfozaporodik az *E. eleganson*, ahol úgyszólván csak a melső és hátsó testvégen találunk egy-egy sorban 3—4, illetőleg 2—2 sörtés elemet. Az *E. charon* is azok közé az állatok közé tartozik, melyekben a sörtés receptorok száma nagyon megfogyatkozik (l. a 16—18. ábrát). Ha végigtekintünk ábráinkon, megállapíthatjuk azt, hogy a hátoldalon jobbközépen legnagyobb a sörtés elemek száma. Különösen az *E. patellakon* és *muscicolákon* látunk példát arra, hogy egyes érzősorok a hát középtáján teljesen sörtések. Kétoldalt, de mindig feltűnőbben balfelől, nagyon megfogyatkozik a sörték száma. Az *E. eleganson* pl. a baloldali érzősorban egyetlen sörtés elemet látunk. A test középtájékán kívül a melső testvégen az örvényszerv árnyékában látunk egyes állatokon sörtétlen elemeket. Példaként erre az *E. muscicola* (4. ábra) és *harpa* (11., 12. ábra) hozható fel.

A hasoldalon, mint említettem, általán sörtétlen elemekkel találkozunk. Ezek itt a helyváltoztató szervekhez csatlakoznak, illetőleg egy sor a bal hasszélien a membranellaövhez símul. Ezeknek az ú. n. kötött receptoroknak viszonyát a cirrusokhoz a 3., 11., 27., 31., 38., 41., 47., 51. ábrán tanulmányozhatjuk. A felsorolt képek tanúsága szerint a szögletes, vagy esetleg megnyúlt lábkeresztmetszeteknek mindig a végein, illetőleg sarkain láthatjuk a receptorokat mindig a lábaeska közvetlen közelében. A járólábaeskák (cirrusok) aktív mozgásokat ezeknek a receptoroknak irányában végeznek.

A receptoroknak a membranellákhoz való viszonyát a 6., 7., 3., 27., 37., 46., 47., 48. és az 50. ábra tárja elénk nagy pontossággal. Ezzel a kérdéssel igen részletesen kellett foglalkoznom, mert az irodalomban alig találtam idevonatkozó adatokat. Itt is azt tapasztaljuk, hogy a receptorok az örvényszerv membranelláinak alapi részeihez épp oly feszesen vannak hozzásímulva, mint ahogy azt a cirrusok esetében láttuk. A membranellák általán hátra a peristomalis bejárat, vagy szájnnyílás felé csapkodnak. Ha a szájnnyílás felé néző oldalukat a közelebbi, vagyis a proximalis oldalnak tekintjük, akkor megállapíthatjuk azt, hogy az ellentétes (vagyis distalis, melső) laphoz receptor soha sem csatlakozik. A membranellák sarkán azonban hol peristomalisán, hol pedig kifele csőleg (dorsalisán) találunk receptorokat. A membranellák ugyanis aktív mozgásokat ebbe az irányba is végeznek. Így a membranellák különösen az örvényszerv hátoldali gallérrészén gyakorta nem a szájnnyílásfele sodornak, hanem az általános helyváltoztatás szolgáltatában fel-, illetőleg hátrafele a hátoldalra csapkodnak. Ennek megfelelőleg tapasztaljuk azt, hogy valamennyi állat hátoldali membranelláinak külső hátfelőli végén szélső állású receptorok képződnek ki (l. a 23., 34. és 36., 37. ábrát). Megjegyezhetjük azt is, hogy az örvényszerv két végén, tehát a melső testvégén és bent a garatban kicsiny (1, 2) a receptorok száma. Közvetlenül a cytopharynx előtt azonban a peristomalis mező hasoldali szakaszán négyre, néha ötre is felszaporodik a receptorok száma, ezek itt a belső peristomalis receptor kivételével mind a membranellák közé vannak beiktatva. (l. 23. és 50. ábrát). A garattölcsér jobbszegélyén találunk egy fajonként változó méretű endoralis membranellát, amelynek melső

végéhez, illetőleg alsó hosszanti széléhez szintén számos receptor csatlakozik, amint azt 7. és 23. ábránk tanúsítja. Ezek is feszesen hozzásímulnak a membranellához.

Mivel tanulmányom során egyetlen Euplotes-, illetőleg Aspidisca-fajt sem találtam, illetőleg sehol egyetlen helyváltoztató elemet : cirrust, vagy membranellát nem észleltem, melynek tövében sörtétlen receptor ki ne alakult volna és mivel ezek a receptorok különösen a membranellák és a hátulsó, testvégi, ú. n. analis cirrusok tanúsága szerint mindig a mozgáselemek aktív csapkodási oldalán lépnek fel és számuk a szervecske mozgási értékével egybehangzóan szaporodik: nyilvánvaló, hogy a receptorok a helyváltoztató szervecskék mozgásállapotával, mozgásirányával és mozgáserejével vannak szoros összeköttetésben s így világos, hogy ezeket proprioreceptoroknak kell tekintenünk.

Mirevalók azonban a hátoldal érzősorainak egészen hasonló alkotású sörtétlen elemei, s mire jó a bal hasszél egyetlen sörtétlen sora, valamint a garatban hátoldalt különösen a muscicolában és patellában megtalált sörtétlen sor? Mivel a propriorecepcio is lényegében nyomásérzeten alapszik s mivel különösen a garatban a nagyobb falatok nyelése alkalmával a tágulékony dorsalis hártya különösen ki van téve nyomáshatásoknak, nyilvánvalóan nem tévedek, ha a sörtétlen receptorokat nyomásérzetelemeknek (premoreceptorok) fogom fel.

Sensucysták.

Már 1929-ben megjelent dolgozatomban foglalkoztam azokkal a pálcikaszerű képletekkel, melyek az érzősörtéknek, illetőleg cirrusoknak a tövében, mint az igen régen ismert és részletesen leírt csillagképletek elemei jelentkeztek. A régi ismereteket a pálcikák elterjedésére nézve azzal egészítettem ki, hogy azok a membranellák között is éppen úgy feltalálhatók, mint a cirrusok tövén. Mivel a csillagok mindig a receptorok alapi részei körül képződnek ki (l. a 31., 36., 38., 43., 45. ábrákat), s a csillagok közepén mintegy az érzőhenger helyezkedik el, s amennyiben csillagképleteket a cirrusok és membranellák tövén is találunk,

azok ott is mindig a sörtétlen receptorral szorosán érintkeznek (l. a 31. és 38. ábrát), mindezekből már 1929-ben arra a felfogásra jutottam, hogy ezek a pálcikaszerű képletek az érzékeléssel állanak szoros összeköttetésben. Szerepüket az ingererősítésben kerestem s innen neveztem el e képleteket sensucystáknak. Ebben a felfogásomban nem zavart engemet akkor az a körülmény sem, hogy a képleteknek entoplasmátikus származását s ezzel kapcsolatban szolgálati helyükre való vándorlását (l. 36. és 43. ábra) fedeztem fel, egészen olyanképpen, mint ahogy a trichocystákról is tudjuk, hogy azok is az entoplasmában keletkeznek s onnan vándorolnak szolgálati helyükre.

Ebben a régi felfogásomban azonban jelen összehasonlító tanulmányaim alatt végzett észleleteim több vonatkozásban megrendítettek. Először is megismerkedtem olyan állatokkal, melyekben a háti érzősorokban nem mindenütt lehetett a receptorok tövén sensucystákat találni. Különösen a sörtétlen receptorok töve van némely állatban hiányosan sensucystákkal felszerelve, sőt itt sok esetben teljesen hiányoznak is ezek az elemek. Feltűnt az is, hogy az örvényszerv membranelláinak receptorai, különösen az egyes membranellák középrészén lévő receptorok, illetőleg általában a szájnnyílás szomszédságában és a száj mélyén lévő membranellák sensucystákkal nincsenek felszerelve.

Rendszeresen hiányzik az adoralis membranella sűrű receptorsora mellől is a sensucysták tömege. Tapasztaltam azt is, hogy az állatok élettani állapotváltozásával kapcsolatosan is változik ugyanazon fajban a sensucysták száma. Különösen a betokozódott állatokon láttam ezeknek az elemeknek nagymérvű fogyatkozását.

Ezt a számbeli variabilitást igen nagyfokúnak találtam ahhoz, semhogy azzal egy pontos munkára beállított szervet, minőknek az érzékszerveket általában ismerjük, tökéletesen szolgálni lehetne.

Ennek következtében felvetődött előttem a gondolat arra nézve, hogy itt vajjon nem az anyagforgalomnak, mondjuk talán a tektin-képzésnek valamely elemeivel van-e dolgunk. Ezért arra a közismert jelenségre való tekintettel, hogy éheztetés alkalmával az idegrendszernek és az érzékszerveknek alkatrészei szenvednek a legkevesebbet, az *E. eurystomus* egyik dúsan virágzó tenyészetének számos példányát éheztetésnek vetettem alá. Az éheztetés

előtt az állatok háti receptorsorainak sensucysta-tömegét a 43. ábra balfelén látható mikrophotogramma mutatja. Egy hét leforgása után az éheztetett állatok sensucysta-állománya erős megfogyatkozásnak volt kitéve, s még azokban az állatokban is, melyekben a kísérleti anyagban viszonylag legnagyobb mennyiség volt még a sensucysta-állomány, a 43b. ábra szerint igen erős fogyatkozás mutatkozott. Ha közelebről szemléljük ezeket a képeket, nyilván láthatjuk, hogy a koplalás alatt nemcsak a sensucysták száma fogyatkozott meg hatalmas mértékben, hanem egyúttal a képletek alakja is megváltozott. A degeneráció nyilvánvaló következményeként a pálcikaszerű elemekből felfújt gömbölyded vízenyős képletek jöttek létre.

Ezeknek a tapasztalatoknak a nyomán most már ott tartok, hogyha bár nem is tudom elvetni teljes mértékben a pálcikaszerű elemeknek sensorikus szerepét, mégis számolok azzal, hogy itt talán a tokképzés elemeivel van dolgunk, melyek a trichocysták példájára szintén az entoplasmában keletkeznek s onnan vándorolnak elő a testfelületre kiürítés végett. Ennek a felfogásnak következményeként már arra is gondolnunk kell, hogy akkor talán az ú. n. érzőcylinderek sem az érzékelésnek az elemei, hanem ezek is kiürítő csatornák, s nyílásuk kiürítő rések: pori secretorii-ként fogandók fel. Ezzel kapcsolatosan ez a jelenség, illetőleg alkati kiképződés a Glaucomák, illetőleg a Colpidiumok testén általam (1937) leírt elválasztó pórusok rendszerébe volna beiktatandó, azzal, hogy elválasztórészek érzősörték tövében is képződhetnek.

Amennyiben itt feltételesen beszélek és véglegesen egyik oldal felé sem hajlok, annak az a magyarázata, hogy bizonyítékaimat egyik irányban sem tekintem döntő jelentőségűeknek.

Az érzőelemek szaporodása.

Azt nem sikerült kiderítenem, hogy oszlás alkalmával a szervezet hasoldalán a helyváltoztató elemek körül elszórtan elszórt érzőelemek hogyan jönnek létre. Ezekre nézve vagy azt kell feltételeznünk, hogy a neuronémák illetékes pontjainak differenciálódási termékeként (KLEIN-féle elmélet) helyben keletkeznek, vagy pedig az anyaszervezetben a legközelebbi ponton szorú á-

latot teljesítő alapi test oszlási terméke vándorol a szükségnek megfelelő helyre és ott végül megfelelő mértékben elszaporodik. Van egy harmadik feltevés is, nevezetesen az, hogy a szervezet ősi állapotából, amikor az még sűrűbben volt csillós, a csillók elpusztulásával fentmaradtak az alapi testek, s így voltaképpen az egész neuronema-rendszernek csaknem minden pontján találhatunk ilyen inaktív alapi testet, mely az oszlás alkalmával a szükségnek megfelelően aktiválódnék a nélkül, hogy helyét lényegesen változtatná.

A hátoldal sörte- és érzőelemeinek meridionális sorában egészen nyilvánvalóan megoldottam az új érzőelemek létrejöttének kérdését. 1934-ben megjelent két dolgozatomban és jelen vizsgálataimmal (lásd 53. és 54. ábrát) világosan kiderítettem azt, hogy a szaporodás mindig a szolgálattevő érzőelemek alapi testéből indul ki. Ugyanott közöltem jelen dolgozatom II. részének 52-ik ábráját is; e 4 képem világossá teszi előttünk a szaporodás menetét. E szerint nem a hátoldal valamennyi receptorának részvételével történik az új leányszervezetek részére a szükséges receptor-mennyiség kitermelése, hanem a középtájon csak 5–10 anyareceptor részesedik az oszlásban. Ezek is a középtől a mellső és hátsó testrészt felé haladólag csökkenő arányban vesznek részt a szaporodásban. 52-ik ábránk *b* rajza értelmében oszláskor az érzőhenger belső toroka előre-hátrafelé tömlőt növeszt, amely tömlőben a basalis testek oszlással, vagy sarjadzással felszaporodnak, később a *c*) rajz tanúsága szerint minden egyes alapi test felett külön érzőhenger képződik, s a hengerek körül a *d*) rajzon és az 54. mikrophotogrammon feltüntetett módon külön neuroidhálózat alakul ki. Ez a hálózat folytonos terjeszkedés közben az anyahálózat helyét foglalja el, s a receptorok egymástól lassan eltávolodva a fiókaszerkezet méreteihez alkalmazkodott távolságokban sorakoznak.

KLEIN (1937) egy újabban megjelent dolgozatában az alapi testek szerepével foglalkozik. Eredményeimre semmi vonatkozásában ki nem tér, hanem a helyett a maga régi vizsgálataira utal. KLEIN igen sajnálatos módon a meglévő alapi testnek új alapi testek létrejöttében nem akar szerepet tulajdonítani. Szerinte a régi elpusztul, s helyett egy-egy anyaszervezeti alapi test helyén annyiszor képződik új receptor, ahány sörte annak helyébe fellép.

KLEIN-nak ezeket az eredményeit megmagyarázza az a kijelentése, hogy ezen dolgozatának sikerét is tisztán az ő módszerének köszönheti, mellyel régi dolgozatait is kizárólag írta. Erről a módszerről CHATTON (1929), LUND (1931), magam (1929a) és PÁRDU CZ (1934) megfelelő helyen megmondtuk véleményünket. Ma is csak képtelenségnek tartom, hogy ilyen finom viszonylatú kérdésben előbb beszárított készítmények alapján véleményt nyilváníthassunk. Én ellentétben KLEIN-nal, aki az általunk használatos nedves ezüstözési módszereket, valamint az osmium-anilinfestékes eljárásainkat, továbbá a CHATTON által alkalmazott DA FANO-féle módszert sosem alkalmazta, mindig dolgozom a KLEIN-féle eljárással is. S a mi itt szóban forgó kérdésünkre vonatkozólag ezzel az eljárással azt tapasztaltam, hogy az Euplopesek beszárításakor az érzőhenger plasmatis tartalma a hengerben igen gyakran féloldalra zsugorodik össze s a henger falára csapódik fel. Ezen tapasztalatom óta természetesen óvakodom attól, hogy a KLEIN-féle módszer után látottak alapján kísérlejem meg olyan kérdések megoldását, melyekre vonatkozó morphologiai átalakulások az érzőhenger fenékrészén játszódnak le. Azok a zsugorodásokból és az ott keletkezett csapadékokból előálló vonalak, szálak olyan tévedésekbe ejthetik a vizsgálót, melyekből semmiféle többezerszeres nagyítású lencsék igénybevételével sem tud kikeveredni. Én KLEIN-nak a dolgok ellenőrzésére vonatkozólag nem papiroson fekvő régi vizsgálati eredményeire való hivatkozását szeretném látni és nem finom nagyítások kiemelését, hanem olyan új módszerekre való rámutatást, amelyek sem a vizsgálót sem az optikai eszközt félre nem vezetik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. febr. 15-én tartott üléséből.)

Mit Unterstützung der Rockefeller-Stiftung.

VOLLKOMMENE SINNESELEMENTE BEI DEN HÖHEREN CILIATEN.

I. Studie über die Sinnessorganellen von *Euplates*-Arten.

Mit Abb. 1—40.¹

Von J. v. GELEI, Szeged.

Ich habe mich bislang in vier kleineren Aufsätzen (1929a, 1933, 1934a und c) mit den receptorischen Elementen der Ciliaten befasst. Seither wendete ich mich bei mancher Gelegenheit diesem Problem zu, besonders bei der Gattung *Euplates*, wo ich an vielen Arten die Tastsinneselemente studierte. Über diese interessanten Erfahrungen sei hier berichtet.

Technik. Es wurde nicht geschnitten, sondern es wurden Totalpräparate an Traggläsern mit der beschleunigten Trockenmethode von KLEIN (GELEI 1935) und in kleinen Glasröhrchen mit der Osmium-Silber- und Silber-Osmium-Formol-Methode von mir (GELEI 1934b), sowie mit meinem Osmium-Toluidinblau-, Osmium-Gentianaviolett- und Azureosin-Verfahren, weiterhin mit der Phosphorwolfram-Anilinblau-Methode von J. v. HORVÁTH verfertigt.

Die Osmium-Silber-Methode führe ich neuerdings in folgender Modifikation aus: zuerst Fixierung in meinem Formol-Osmium oder in einer 1%-igen Osmiumlösung (1 T. Fixierlösung + 5—9 T. Zuchtwasser) höchstens 30 Sec. lang (inklusive Zentrifuge), darauf

¹ Studie II. folgt im nächsten Heft. Sie enthält die Abb. 41—54; auf diese Figuren berufe ich mich auch in der vorliegenden Studie I.

nach Abgiessen, aber ohne Auswaschen conc. wäss. Sublimatlösung (1·5—2 Min.) und Reduktion in Silber an der Sonne. — Es kann auch in Sublimat-Osmium-Kaliumbichromat fixiert werden. — Bei Anwendung der erwähnten Anilinfarben fixiere ich mit APÁTHY's Sublimat-Osmium oder mit ALTMANN und FLEMMING 3—4 St., dann beize ich ohne Auswaschen in Alaun-Kalibichromat (1%:1%) von 30 Minuten bis 10 Stunden; 2-mal auswaschen in dest. Wasser. 1% Ammoniummolybdänat 12 St., auswaschen 1—2-mal; färben entweder in Anilinöl-Gentianaviolett nach WEIGERT oder wäss. Azureosin, wobei aus der Stammlösung zu je 1·5 ccm dest. Wassers je 1 Tropfen zugesetzt wird, bei 40—60 C° 2 Minuten lang (inkl. Centrifuge), Auswaschen, kurzes Abspülen in verdünntem Ammoniummolybd. (einige Tropfen der 1⁰/₆-igen Stammlösung in das Auswaschwasser) und Einschluss durch Alkohol und Xylol in Bals. can. — Diese Färbung ist also eine progressive und benötigt daher keine Differenzierung nach GRAM, sondern im Gegenteil eine Fixierung der Farbe mit nochmaligem Ammoniummolybdänat-Bad. Man kann den Grad der Färbung auch unter dem Mikroskop kontrollieren.

Ausserdem arbeitete ich mit meiner Silberosmiumformolmischung, wie ich es 1928 S. 484. angegeben habe. Wenn hier das Zuchtwasser mit der Höllesteinlösung einen Niederschlag gibt, so ist es ratsam, mit Formolosmium (GELEI 1936) voranzufixieren und erst nach der Zentrifuge das Sediment mit Silberosmiumformol aufzugliessen. Die Reduktion des Osmiums silbers kann man auch bei Zimmertemperatur ausführen. Bezüglich der Methodik lese man sonst in der genannten Arbeit (1928) nach. Was dort unerwähnt ist, bezieht sich auf das gründliche Auswaschen der Objekte nach der Osmiumreduktion. Die behandelten Tiere halten nämlich das Silber hartnäckig zurück, dasselbe wird später im Balsam colloidal suspendiert, wovon dann die Cilien bzw. Cirren eine unangenehme Nachfärbung bzw. einen körneligen Niederschlag erhalten. Daher entferne ich das Silbernitrat neuerdings durch mehrfaches Auswaschen sowohl in Wasser als in mehrmals gewechseltem Alkohol. — Zur Darstellung der Sensucysten verwendet man einerseits Silberosmium-Formol und Osmiumtoluidinblau nach Formolosmium (hierfür muss man alte Toluidinblaulösungen von verschiede-

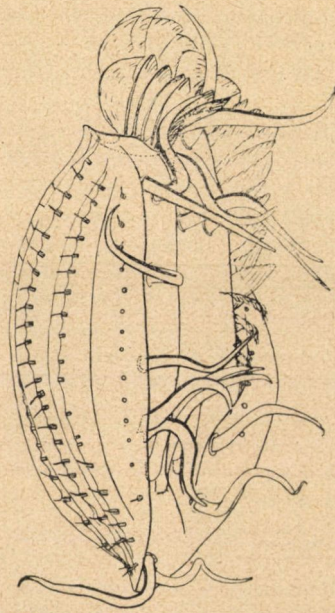
nen Fabriken ausprobieren). WEIGERT's Anilingentianaviolett darf nicht alt sein. Man nimmt dazu 11 ccm einer gesättigten alkoholischen (96%) Gentianaviolettlösung und vermengt dieselbe mit 100 ccm Anilinwasser (3 ccm Anilinöl in 10 ccm Alk. abs. gelöst und nachher mit 90 ccm dest. Wass. vermengt.) Ich vermenge die alkoholische Farblösung immer erst vor Gebrauch mit dem Anilinwasser.

Euplotes muscicola.

Morphologie. Das von KAHL unlängst beschriebene Tier ist in der Umgebung von Szeged oft zu finden, lässt sich im Laboratorium in Heu- und Pferdemitinfusionen leicht züchten; sein interciliäres Fasersystem ist gegenüber Silber sowohl bei der trockenen als auch bei den nassen Methoden stark empfindlich; ich habe vieles an diesen Tieren erlernt und daher empfiehlt sich dieses interessante Lebewesen im hohen Masse zur Untersuchung der sensorischen Elemente.

Da KAHL das Tier nicht ausführlich beschrieben hat, gebe ich einige Merkmale meines Materials an Hand der Abb. 1. an, damit man meine Tiere genau identifizieren könne.

Das Tier ist vom Rücken her kurz-lang ellipsoid, vorne schräg nach links abgeschnitten, von der Seite her Schildkröten(Emis)-ähnlich. Dorsal hat es 6 Rippen, selten 7; die Schneide der Rippen ist nach



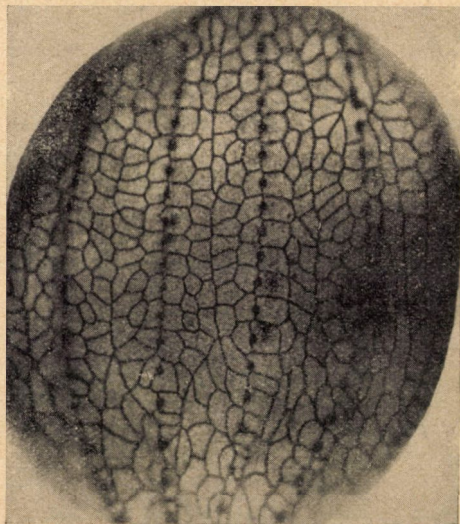
1. ábra. *E. muscicola* rézsút jobboldalról tekintve. Formolosmium-toluidinkék. Helyváltoztatószervek a hasoldalon. Érzékszervecskék sora hátoldalt; ezek sörtevégeinek magasságában a háti tarajok élvonalai. 500 ×.

Abb. 1. *E. muscicola* KAHL nach einem Formolosmium Präparat mit Toluidinblau angefärbt, halbrechts betrachtet. Dorsalkämme glatt und im Schatten der Kämme die Receptorenreihe mit der welligen Verbindungslinie. 500 x.

links umgeschlagen. Dazu gesellen sich die beiden Seitenkanten, von denen die linke gewöhnlich flügelähnlich hervorspringt. Zu jeder Rippe gehört je eine linksständige Receptorenreihe; aus dieser linksständigen Lagerung folgt, dass die linke erste Receptorenreihe ventral in der Umbiegung der Seitenflügel liegt. Die Receptorenreihen werde ich sowohl im Text als an den Abbildungen von links nach rechtsgehend numerieren und die linke Ventralreihe immer mit Nr. I versehen. Hier speziell gesellt sich zu dieser ventralen Reihe in seltenen Fällen noch eine innere, aus einigen Receptoren bestehende Reihe; wir werden diese hier bei der näheren Besprechung als die Sinnesreihe 0. Ranges bezeichnen. In den Receptorenreihen sind borstenlose und beborstete Elemente nach gewissen Regeln verteilt. — Die Ventralseite ist schwach gewölbt bis gerade glatt; hinten fällt sie in der Analgegend ab. Wir finden ventral zwei starke Längskrista (s. Abb. 1.), die eine ist die rechte Peristomlippe, die sich hinter den beiden Seitenfüßen nach links verschiebt; die andere läuft etwas rechts und schliesst die beiden lateralen Frontalfüße, die zwei Seitenfüße und drei von den Transversalcirren nach rechts aus und wendet sich hinten nach links der anderen Krista zu. Ausserdem finden wir auch neben den fünf Transversalcirren kurze Zinnen in variabler Höhe und Länge. Das Tier hat 18 Cirren, deren Lagerung an den Abbildungen leicht ablesbar ist. Ich möchte diese in folgende Gruppen teilen: vorn sind 7 Frontalcirren; drei von denselben sind an einem kurzen Bogen mit der Konkavität nach hinten vordeständig, vier stehen demgegenüber an einem ungekehrten Bogen. Je zwei Cirren liegen rechts und links lateral, die letzteren beinahe in der Fortsetzung des Wirbelorgans. Zwei (Anal-) Cirren finden wir hinten terminal. Die bekannten fünf Transversalcirren stehen, wie gewöhnlich, in einer Hakenform. Der After liegt hinter der rechten Transversalcirre (s. Abb. 3).

Das Peristom ist tief eingesenkt, nicht allzuweit und schlägt nach rechts vorne bloss um die drei vorderen Frontalcirren, in der Weise, dass der rechte Cirrus schon in der Fortsetzung der Membranellen liegt. Das Wirbelorgan macht $\frac{3}{5}$ — $\frac{3}{4}$ Körperlänge aus. Es ist im Durchschnitt aus 35 (32—39) Membranellen zusammengesetzt. Man kann sie nach ΑΡΑΤΗΝ-*s* Sublimatosmium (5 Min. lang) mit meiner Osmiumgentianaviolettmethodo vorzüglich färben. (I. Beize 5 Min., II. Beize 15 Stunden, 2 Tropfen Gentianaviolett zu 2 ccm dest. Wass., kalt bis 13 Min.. Auswaschen in 96% Alk.) Diese flügelähnlichen Elemente stehen hinten im Mundtrichter (Pharynx) dicht beieinander, seitlich und vorne aber lose nebeneinander. Die Membranellen bestehen aus doppelten Cilienreihen, peristomal gesellt sich aber vorne zu jeder Membranelle je eine kurze, im Cytopharynx schon lange dritte Cilienreihe, mit kurzen, stark färbaren Cilien. Die Membranellen sind an schiefen Pelliculärbalken eingepflanzt, deren Abhang dem Munde zuführt; daher zeigt ein sagittaler

Längsschnitt entlang des Wirbelorgans den Basalabschnitt treppenartig gestaltet. Von vorne her gerechnet sind die mittleren Membranellen u. zw. die 10—25. Glieder lateral in niedrigen Theken eingepflanzt, deren scharfe Kante von oben her betrachtet, besonders mit Toluidinblau und Gentianaviolett nach APÁTHY-S, ZENKER-S und HERMANN-S Flüssigkeit scharf hervortritt. Besonders von der Seite her betrachtet sieht man die Kanten scharf und glaubt man in ihrem optischen Querschnitt Sinnesstiftchen vor sich zu haben. — Die Receptoren des Wirbelorgans

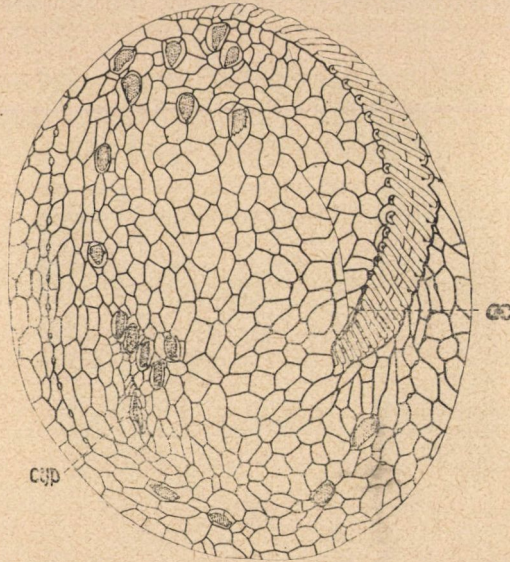


2. ábra *E. muscicola* hátoldalának neuroidrácsozata nedves ezüstöző eljárás alapján. A délkörvonalban helyezkedő pontsor érzősörték alapiteit jelzi. 700 ×.

Abb. 2. *E. muscicola*-Neuroides Gittersystem der Dorsalseite auf Grund der nassen Silbermethode. Die in meridionaler Richtung verlaufenden punktierten Reihen bezeichnen die Basalkörperchen der Tastborsten. 700 ×.

werden in Studie II. in besonderem Kapitel näher besprochen. Im Mundtrichter (Cytopharynx) befinden sich zwei Membranellen: rechts tief unter der Peristomlippe die dicke Endoralmembran und links eng neben dem Wirbelorgan oder sogar wie an denselben angeschaltet, die sog. adorale Cilienreihe. Diese gesellt sich zu den hintersten 12—15 Membranellen des Mundtrichters und ist äusserst schwer zu unterscheiden. Nur gute Gentianaviolettpräparate nach APÁTHY-S Osmium-Sublimat heben

die Cilien der adoralen Reihe hervor. In einem Falle mit 36 Membranellen konnte ich diese adorale Reihe neben den letzten 12 Membranellen beobachten. — Dorsal im Cytopharynx zeigen die nassen Silberpräparate 7—10 borstenlose Receptoren. (s. Abb. 6 die beiden Pfeile). Der Oesophagus steht senkrecht zur Endpartie des Wirbelorgans, ist also nach vorne und dorsal zurückgeschlagen (s. Abb. 6). Am Hals des Oesophagus entspringt eine dicke Schlundfaser, die nach rechts vorne umbiegt



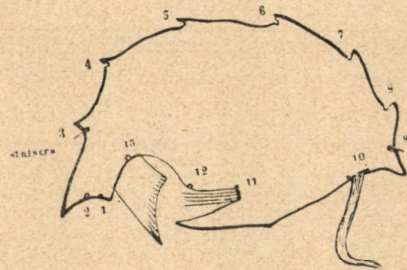
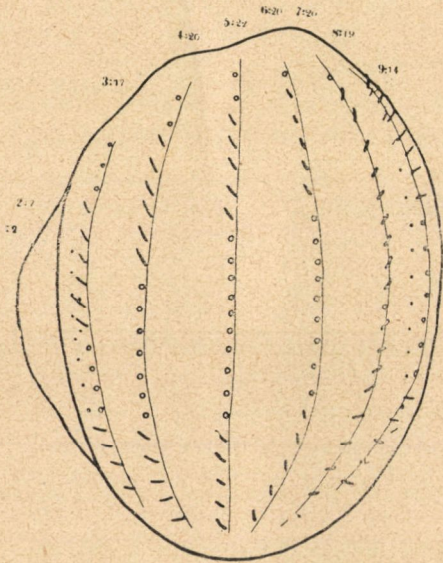
3. ábra. *E. muscicola* hasoldala a neuroidrácscsal, az örvényszerv alapvetületével és a cirruszok alapprészével. *ac* örvényszervmelletti csillósor, *cyp* cytopyge. 700.

Abb. 3. Bauchseite von *E. muscicola* nach der beschleunigten Trockenmethode von KLEIN-GELEI. *cyp* Cytopyge, *ac* adorale Cilienreihe. Weitere Details siehe auf Abb. 6.

und schliesslich in einer Spirale in die Nähe des Oesophagus zurückkehrt, indem sie unter der Endoralmembran endet. — Das Tier ernährt sich mit Flagellaten, Cyclidien, Uronema, Chilodon und kleinen Glaucomaarten, sowie auch Amöben.

Das Neuronemensystem. Zunächst führen uns Abb. 2 und 3 das Neuronemensystem des Tieres, einerseits an der Dorsal-, andererseits an der Ventralseite vor. Wir sehen an beiden Körperflächen ein verhältnismässig engmaschiges System. An der Ventral-

seite sind die Maschen ungerichtet, dorsal dagegen etwas quer ausgezogen und ausserdem längsgeordnet. Auffallend ist, dass an dem Dorsalfeld die Maschen zwischen den Kämmen nicht, wie für *Euplotes* üblich, zwei-, sondern mehrreihig (4—6-reihig) sind. Bemerkenswert ist weiterhin, dass im Peristomfeld die Maschen nicht kleiner sind, als sonst. Die



4. ábra. *E. muscicola* érzősörtésorai. 1—9 a számozott receptorsorok, a mellette álló kisebb számok az illető sor érzőelemeinek számát tünteti fel. Az 1. és a 2. receptorsor hasoldalt fekszik, s ezért kisebb gyűrűkkel van jelezve. 600 ×.

Abb. 4. *E. muscicola* von der Dorsalseite her betrachtet. 1—9 Receptorenreihen mit der angegebenen Zahl der Receptoren. Die Ringe bezeichnen die stiftchenlosen Receptoren. (Solche Ringe befinden sich sonst auch um die Stiftchen.) Die 1., 2. und 9. Receptorenreihe liegt unten, daher sind diese mit kleineren Ringeln oder Stiftchen bezeichnet. 600 ×.

5. ábra. *E. muscicola* optikai keresztmetszete az endorális hártya (11) magasságában, hátulról tekintve. Hátoldalt a tarajok keresztmetszete, balra az egyes tarajoktól receptorsorok (3—8). Az 1., 2. és 9. receptorsor nem tarajhoz csatlakozik. 10 járóláb (cirrus), talpi részén két sörtétlen receptorral. 12 és 13 szintén receptort jelöl. 500 ×.

Abb. 5. Optischer Querschnitt von *E. muscicola* in der Höhe der Endoralmembran (11), von hinten her betrachtet. Am Rücken die Querschnitte der Kämmen, links davon die Receptorenreihen: 3—8. Die Reihen 1, 2 und 9 sind nicht von Kämmen bedeckt. 10 Cirrus, basal mit zwei stiftchenlosen Receptoren. Auch neben 11 und 13 je ein Receptor. 12 stiftchenloses Receptor im Dorsalgewölbe des Pharynx. 500 ×.

Cytopyge ist an Silberpräparaten als eine kurze Längslinie oder in offenem Zustand als unregelmässiges rundliches Loch rechts von den Transversalcirren gut erkennbar. Sie ist mit einem Kranz von Silbermaschen umgeben (s. Abb. 3.), die das geöffnete Organ oft als Stücke von Kreisringen umstellen.

Die Lage der sensorischen Elemente bei *E. muscicola*. Diese treten einerseits in freien Reihen an der Dorsal- und ventrolateral auf, andererseits sind sie an die enge Nachbarschaft der Bewegungsorganellen gebunden; die vorerst erwähnten unterscheide ich als freie, die anderen als gebundene Receptoren.

Die freien Receptoren. Um die Lage derselben angeben zu können, müssen wir wissen, dass nach KAHL's Aufzeichnungen sechs Dorsalrippen oder Giebelbögen am Tier auftreten (s. Abb. 4 u. 5). Dazu gesellen sich die zwei lateralen Kämme, die die Dorsal- und Ventralseite scharf voneinander trennen; insgesamt muss man also mit 8 Längskämmen des Körpers rechnen. Die Receptoren sind dicht neben diesen Kämmen und zwar immer links davon gelagert. Entsprechend diesen 8 Giebelbögen finden wir 8 Receptorenreihen, von denen die linkslaterale — wie oben erwähnt — schon auf die richtige Ventralseite des Körpers fällt, da auch dieselbe links, also ventral vom Seitenkamm liegt. Einwärts von dieser ersten Sinnesreihe finden wir nicht selten auch eine Ersatzreihe mit wenigen (1—4) Sinneselementen. Von diesen 8—9 Receptorenreihen sieht man von der Rückenseite her bloss 6, ev. 5, die anderen sind von den stark vorgewölbten Körperseiten bzw. Seitenkämmen verdeckt. An Abb. 4 sind alle 9 Reihen angeführt, die drei verdeckten sind aber dünner gezeichnet.

Die Zahl der Receptoren wechselt in den Reihen stark. Auch die gleichen Receptorenreihen sind von Tier zu Tier einer Variation unterworfen, woraus folgt, dass auch die Gesamtzahl der Elemente individueller Variabilität unterliegt. Ich habe an 12 Exemplaren die 9 Tastborstenreihen genau analysiert und von links ausgehend folgende Grenzwerte gefunden: 0: 0—4 (Mittelwert 2), I: 4—8 (7) (diese waren die beiden ventralen Sinnesreihen), II: 15—18 (17), III: 18—23 (20), IV: 18—23 (22), V: 18—23 (20) VI: 18—23 (20), VII: 16—22 (19), VIII: 12—18 (14). Diese Mittelwerte

finden wir an Abb. 4. angeführt. Am dorsalen Mittelfeld finden wir also mehr Receptoren als seitlich. Hier sind die Receptorenreihen nicht nur länger, sondern die Receptoren stehen zugleich dichter beieinander als seitlich. Ich gebe hier schliesslich an drei Exemplaren (*A, B, C*) an, in welcher Zahl die Receptoren in den einzelnen Reihen tatsächlich gefunden wurden:

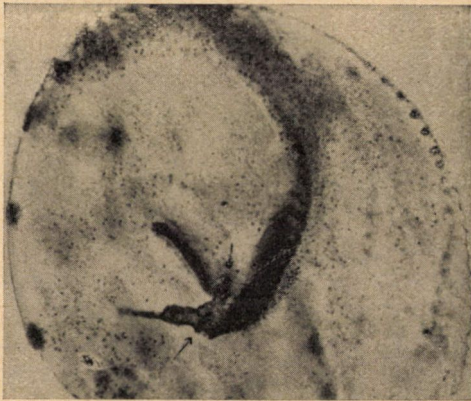
A 0, 6, 15, 18, 18, 18, 18, 16, 13 (122)

B 3, 9, 18, 21, 23, 22, 20, 20, 16 (152)

C 0, 8, 20, 21, 24, 23, 25, 23, 15 (159)

Ich bemerke schliesslich, dass am Dorsalgewölbe des Pharynx (Mundtrichter) in einer Längsreihe 4—6 borstenlose Receptoren erscheinen. Sie sind schwer färbbar und daher nur in günstigen Fällen, dann aber äusserst deutlich, sichtbar (s. Abb. 6).

Die gebundenen Receptoren. Zu jeder Bewe-



6. ábra. *E. muscicola* hasoldala és garattölesértájéka ezüstözött (Sublimat-Golgi) képen. A kép jobbszélén érzőhengerek árnyéka. Középpütt jobbfelől örvényszerv, balfelől endorális hártya alapja. Középpütt a két nyíl a cytopharynx hátoldali boltozatának receptorsorát mutatja. 700 ×.
Abb. 6. *E. muscicola*. Silberbild (Sublimat + Golgi) von der Gegend des Mundtrichters. Rechts das Wirbelorgan, links die Endoralmembran mit den blossen Receptoren. Der Pfeil weist auf die Receptorenreihe des Pharyngealdaches hin, links davon der nackte Oesophagus. Rechts an der Kante des Tieres einige Sinneszylinder der dritten Receptorenreihe. 700 ×.

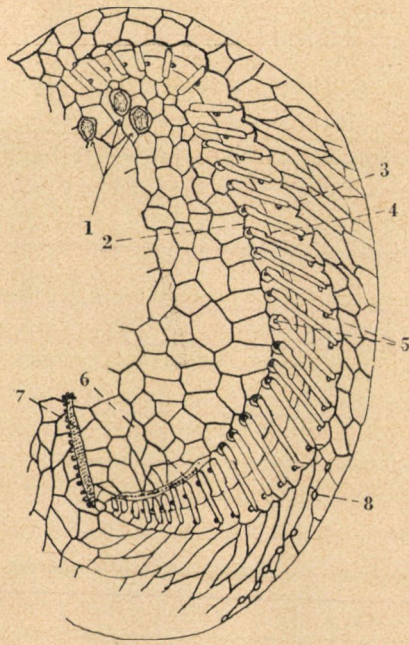
gungsorganelle gehören zwei bis mehrere Rezeptoren. Diese befinden sich selbstverständlich auf der Bauchseite des Tieres. Diese Rezeptoren treten als Sinnesgrübchen nahe zum Basalteil der Gehfüsse und Membranellen auf, immer in den neuroiden Ring (Zirkularfibrille von KLEIN, *Fibra propria mihi*) eingeschaltet.

Die Lage und die Zahl dieser Rezeptoren am Basalteil der Gehfüsse können wir an der beiliegenden Abb. 3 ablesen. Ich bemerke zu den an dieser Abbildung angeführten Ergebnissen, dass die gebundenen Rezeptoren bei *E. muscicola* bloss an Silberpräparaten feststellbar sind, da die Anilinfarben sehr schwach die Rezeptoren anfärben. Auch die Sternchengebilde werden mit den Anilinfarben nicht angefärbt, die sonst die besten Wegweiser zum Erkennen der Rezeptoren sind.

Die Silberbilder zeigen bezüglich der Anordnung der Rezeptoren um die Cirren ein ähnliches Bild, das uns schon GRIFFIN (1910) für *Euplotes Worcesteri* GRIFF. bezüglich der Sternchen in Fig. 4 angegeben hat. Die Rezeptoren scheinen um die Gehfüsse bunt, ganz regellos verteilt. Wenn wir jedoch den aktiven Hochschlag der Cirren beobachten, so bemerken wir bald, dass die Rezeptoren in der aktiven Bewegungsrichtung der Elemente gelagert sind. In dieser Beziehung möchte ich einerseits die beiden hinteren links-lateralen Füsse hervorheben, die immer eine pendelnde Bewegung ausführen, wo die Schwingungsrichtung von vorne nach hinten gerichtet ist und dementsprechend die beiden Rezeptoren vorne bzw. hinten liegen. Andererseits möchte ich aber auch auf den innersten (nahe zum Peristom gelagerten) Gehfuss unter den Frontalcirren mit den 5 einwärts gelagerten Rezeptoren hinweisen; dieser Cirrus ist gewissermassen als ein Mundwerkzeug beim Schlucken der Nahrung tätig: seine Schiebbewegung, indem er die gefangen genommene Nahrung in den Mundtrichter herunterschiebt, ist immer einwärts gerichtet, und damit steht parallel, dass hier sämtliche Rezeptoren einwärts gelagert sind.

Abb. 7 erklärt uns das gegenseitige Lageverhältnis zwischen den Membranellen und Rezeptoren. Wir sehen, dass im Wirbelorgan zwei Rezeptorenreihen: eine äussere und eine innere entlang laufen. Die innere Reihe ist bloss ventralwärts bis auf gegen 22 Membranellen ausgebreitet; die einzelnen Rezeptoren stehen medial end-

ständig, nur die hintersten, die in den Mundtrichter hineinlaufen, lagern sich in der Höhe der paroralen Cilien einwärts. — Gerade das umgekehrte geschieht mit der äusseren Reihe; die Glieder derselben verlassen nämlich am Vorderende des Körpers ihre endständige Lage und werden langsam mittelständig, oben sogar mehr einwärts gelagert. An den vordersten drei Membranellen treten an der Dorsalseite wieder endständige Receptoren auf



7. ábra. *E. muscicola* örvényszerve és annak környéke KLEIN—GELEI szerint előállított készítmény alapján. 1. a három mellső homlokcirrus. 2., 3. az örvényszerv határfibrillája. 4. az örvényszerv középrostja. 5. a külső és belső receptorsor. 6. adoralis csillósor. 7. endoralis membranella a tüskétlen receptorsorral. 8. a testnek 1. számú receptorsorá 450 ×. Abb. 7. Silberbild (KLEIN—GELEI) vom Wirbelorgan von *E. muscicola*, ausgeführt an Tieren, die in Ferrichlorid gebadet wurden. 1 die drei vorderen Frontalcirren. 2. und 3. die beiden Grenzfübrillen des Wirbelorgans. 4. die Medianfaser des Wirbelorgans. 5. die beiden Receptorenreihen. 6. die adoralis Wimperreihe. 7. die Endoralmembran mit den Receptoren, 8. die erste Receptorenreihe. 450 ×.

(diese könnten als dritte Reihe bezeichnet werden). — Im allgemeinen können wir den Verlauf dieser Receptorenreihen innerhalb des Wirbelorgans auch für spiral auffassen, indem die anfangs medial stehenden Receptoren später successiv lateral verlagert werden. Diese Verlagerung hängt damit zusammen, dass an Stellen, wo Receptoren in der Einzahl auftreten, diese mehr mittelständig gelagert werden. — Ich bemerke schliesslich, dass die einzelnen Receptoren entweder endständig, oder proximal zum Mund, aber nie distal gelagert sind. Diese Lage kehrt bei sämtlichen Euplotes-Arten zurück und hat, wie es in der Physiologie der Receptoren (Studie II) ausgeführt wird, eine allgemeine Bedeutung.

Auch die im Mundtrichter rechts gelagerte sog. endorale Membranelle ist dicht mit Receptoren besetzt. Unten, d. h. ventral an der Membranelle finden wir gegen 15 und vorne (rostral) 2—3 Receptoren. Diese Elemente sind klein und schwer färbbar.

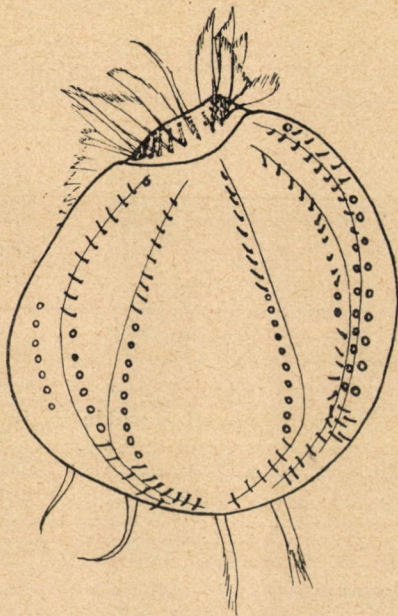
Die Verteilung der borstenlosen Receptoren in den Sinnesreihen. Wir haben die merkwürdige Tatsache festgestellt, dass zu den Bewegungsorganellen lauter borstenlose Sinneselemente gehören. Aber solche treten auch in den Borstenreihen auf und zwar in gewisser regelmässigen Verteilung. An Abb. 4 zeigen die Kreise borstenlose Elemente. Vor allem sind die zwei ventralen Reihen, die von links ausgehend erste (O-Ranges) und zweite immer und vollständig borstenlos, demgegenüber ist die siebente Reihe, welche dorsal rechts liegt, gewöhnlich vollständig beborstet; in den anderen Reihen ist der mittlere Abschnitt immer borstenlos. Auch vorne am Halsteil des Tieres finden wir gewöhnlich 1—2 borstenlose Receptoren. Die Verteilung der borstenlosen Receptoren in den Sinnesreihen führt uns Abb. 4 im Mittelwert nach 10 Exemplaren an.

Hier sehen wir, dass die vorderen borstenlosen Elemente von links nach rechts gehend so weit abnehmen, dass die rechten achten bis neunten Reihen schon auch vorne beborstet sind. An der Mittelregion nimmt dagegen die Zahl der Borstenlosen bis zur 6-ten, also bis zur linksdorsalen Reihe zu und fällt sprunghaft in der dorsolateralen Reihe oft bis zur 0 herab, um in den zwei letzten lateralen bzw. dextroventralen Reihen ihren Höhepunkt zu erreichen. Am hinteren Körperende haben die Reihen im Durchschnitt 5

Borsten, ausgenommen die 9-te Reihe, wo bloss eine Borste steht, die aber immer auftritt.

Euplotes novemcarinatus WANG.

Morphologie: Die Tiere sind in jenen Sphagnuminfusionen wiederholt aufgetreten, die aus dem Halasi-ér unweit der Gemeinde Pusztamér ges, hergestellt wurden. Die Gestalt der meisten Exemplare entspricht der auf Abb. 6 u. 7 dargestellten Form von WANG (1930), doch treten auch viel breitere Formen auf und zwar in extremen Fällen solche, deren Breite mit der Körperlänge übereinstimmt. (s. Abb. 8). Die Breite solcher Individuen rührt daher, dass solche Tiere nicht nur an ihrer linken, sondern auch an der rechten Seite geflügelt sind. Die grösste Länge meiner Exemplare beträgt $100\ \mu$ mit $75\ \mu$ Breite. Die kürzesten Exemplare waren $70\ \mu$ lang und $65\ \mu$ breit. Sonst jedoch erinnert das Tier — besonders die gestreckten Formen — an *E. muscicola*. Besonders die morphologische Gestaltung der Ventralseite ist derart übereinstimmend mit *E. muscicola*, dass sich mit Recht die Frage aufdrängt, ob die Aufstellung der neuen Art seitens WANG gerechtfertigt war. Mit Rücksicht auf diesen Umstand weise ich bezüglich der Gestaltung der Ventralseite von Wort zu Wort auf das von *E. muscicola* obenstehend angeführte. Auch



8. ábra. *E. novemcarinatus* hátoldaláról tekintve, az összes érzősorokkal. Osmium-gentianaibolya. 650 ×.

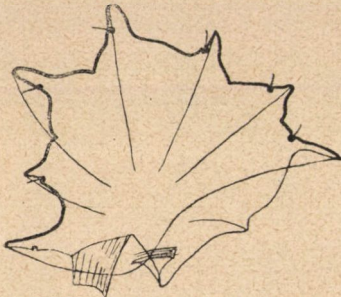
Abb. 8. *E. novemcarinatus* von der Dorsalseite her betrachtet mit den Receptorenreihen. Osmium-Gentianaviolett. 650 ×.

die Zahl der peristomalen Membranellen beträgt 35. Der einzige, aber scharfe Unterschied zwischen den erwähnten zwei Arten besteht in der Ausbildung der Dorsalrippen. *E. muscicola* besitzt 7 ganz niedrige Dorsalrippen, während an unserem Tier 5 ganz hohe Kämmen auftreten, wie

aus dem Vergleich von Abb. 9 mit 5 sofort ersichtlich ist. Von den 5 Dorsalkämmen sind besonders die drei mittleren an vielen Exemplaren erstaunlich hoch. Auch die beiden Lateralkämme (der 6. und 7. Kamm) sind stark entwickelt; ventral sieht man zwei starke Längskämme, die in ihrer Lage genau denen von *E. muscicola* entsprechen. Diese 5+2+2 Kämme gaben WANG Anlass zur Benennung *novemcarinatus*.

Das Tier ist in gleicher Masse Rechts- wie Linksdreher, aber es kann auch schaukelnd vorzüglich schwimmen, sogar translatorisch gleiten.

Es ist ein gutes saprobiontes Tier, welches in Gemeinschaft mit *V. microstoma* und *convallaria* lebt.



9. ábra. *E. novemcarinatus* hátulról tekintve a tarajokkal és a tarajok baloldalán elhelyezkedett receptorokkal. Hasoldalt az örvényszerv egyik membranellája és az endoralis membranella. Ezüst-Osmium-Formol.

650 ×.

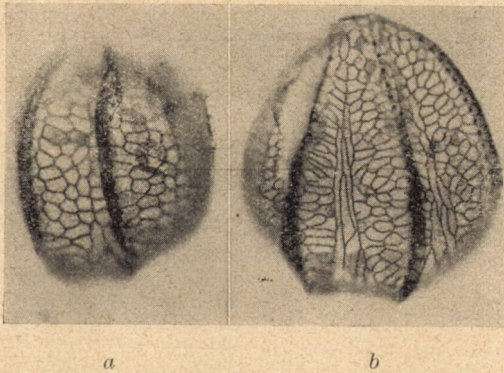
Abb. 9. *E. novemcarinatus* in Dorsalansicht mit den Kämmen und den linksständigen Rezeptoren. Ventraleine Membranelle des Wirbelorgans und die endorale Membranelle. Silberosmiumformol. 650 ×.

Receptoren: Unser Tier besitzt entsprechend seinen 7 Kämmen (5 Dorsal-, 2 Lateralkämme) 7 Rezeptorenreihen. Diese stehen, wie immer, links von den Rippen; dementsprechend fällt die laterale linke Reihe auch hier auf die Ventralfläche. (*E. muscicola* besitzt 8—9 Rezeptorenreihen.) Die Durchschnittszahl der Rezeptoren in den einzelnen Reihen steht höher, als bei *E. muscicola* u. zw.: I: 7, II: 21, III: 25, IV: 25, V: 25, VI: 21, VII: 21, Es gibt aber viele Exemplare (ja in einer Zucht das ganze Material), die den Mittelwert von *E. muscicola* schlagen.

Auch an diesem Tier unterscheiden wir beborstete und borstenfreie Rezeptoren. Die Verteilung derselben entspricht im grossen und ganzen der von *E. muscicola*; besonders auffallend ist die Übereinstimmung mit der drittletzten Reihe. Einen Unterschied können wir nur höchstens insofern feststellen, dass an *E. novemcarinatus* vorne im allgemeinen die stiftchenlosen Rezeptoren fehlen.

Die borstenfreien Rezeptoren der Cirren entsprechen, was Lage und Zahl anbelangt, vollkommen denjenigen von *E. musci-*

cola. Annähernd ähnlich ist auch die Ausrüstung der adoralen Membranellen mit Receptoren. Es besteht eine innere, an die Membranellen aussen endständig anschliessende Reihe, die von vorne gerechnet von der 8. Membranelle ausgeht, sowie eine äussere, deren Receptoren jedoch nicht aussen, sondern am Ende der Membranelle proximal gelagert sind. Letztere sind bei den ersten 8 Membranellen allein vorhanden und sind gegen die Endpartie



10. *a-b* ábra. *E. novemcarinatus* hátoldalának neuroid rácsa a receptor-sorokkal. *b*-ben a hosszában kihúzott rácsok az előző oszlásokból az anya-, ill. nagyanyaszervezettől visszamaradt elemek. Nedves ezüstöző eljárás Golgi-Sublimat. 500 ×.

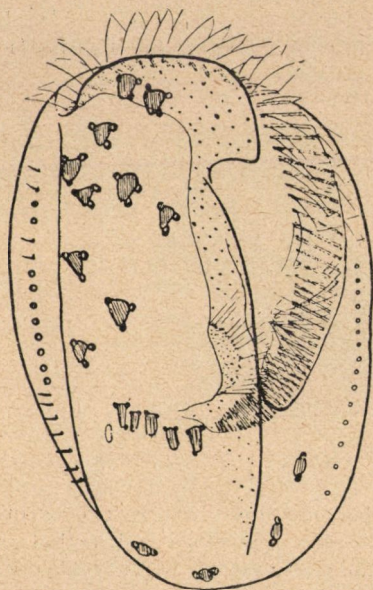
Abb. 10. *a* u. *b* *E. novemcarinatus*. Neuroidgitter der Dorsalseite mit den Receptorenreihen. In *b* in die Länge gezogene Maschen, Rückbleibsel der Mutter- oder Grossmutterindividuen aus früheren Teilungen. Nasse Silbermethode, Golgi-Sublimat. 500 ×.

des Strüdelorgans successiv einwärts gelagert (s. dasselbe bei *E. muscicola*).

Das Neuronemengitter: Auch das Neuronemengitter entspricht dem von *E. muscicola*, da dorsal auch hier kein Zweireihensystem zwischen dem Rippen entsteht, sondern mehrere Polygonreihen erscheinen. An Abb. 10 *a* und *b* sehen wir klar, dass die Polygone noch mehr vermehrt sind als bei *E. muscicola*, es treten 6—9 Reihen zwischen je 2 Rippen auf.

Euplotes harpa.

Morphologie: Das Tier habe ich in den vergangenen Jahren in der Umgebung von Szeged einigemal gefunden, doch immer nur in wenigen Exemplaren. Das letztmal fand sich dieses Tier im Herbst 1936 in etwas



11. ábra. *E. harpa* hasoldaláról tekintve; jobbfelől az örvényszerv, s a garat bejáratától balra az endoralis membranella. A cirrusok talpi része a szorosan hozzájuk csatlakozott receptorokkal. Jobb- és baloldalt a két szélső érzősor. Nedves ezüstöző eljárás. 400 ×.

Abb. 11. *E. harpa* in Ventralansicht. Rechts das Wirbelorgan, links vom Eingang des Cytopharynx die endorale Membranella. Fussabschnitt der Cirren mit den festanschliessenden Receptoren. Rechts und links die zwei seitlichen Receptorenreihen. Nasse Silbermethode. 400 ×.

grösserer Individuenzahl in einer Zucht, welche aus einem Materialgraben der Szegeder Ziegelbrennerei stammte. Ich untersuchte auch einige versilberte Exemplare aus dem Belső-tó in Tihany. — Die von mir gesammelten Exemplare sind äusserst ähnlich der von KAHL an Seite 630 angeführten Figur 1. Die von KAHL hervorgehobene rechte Lippe des vorderen Peristomfeldes tritt an unseren Tieren noch auffälliger hervor. (Abb. 11.) Einwärts von den zwei linken Caudalcirren läuft von hinten ein scharfkantiger Kamm gerade auf die erwähnte Lippe zu, ohne sich jedoch mit dieser zu vereinigen. Unter diesem Kamm befindet sich am unteren Peristomfeld eine innere Lippe, welche sich mitunter hervorhebt, mitunter jedoch vom Kamm bedeckt wird. — Die Stellung der Füsse entspricht vollständig jener von KAHL. Die Zahl der Membranellen der adoralen Zone schwankt zwischen 60 und 66. — Die Dorsalrippen treten nicht scharf hervor; auf der linken Seite scheinen sie oft zu fehlen. Ihre Zahl schwankt — wenn man die Lateralrippen hinzurechnet — zwischen 8 bis 12; mit Rücksicht auf die Zahl der Borstenreihen müssen wir die Grundzahl der Rippen in 12 feststellen.

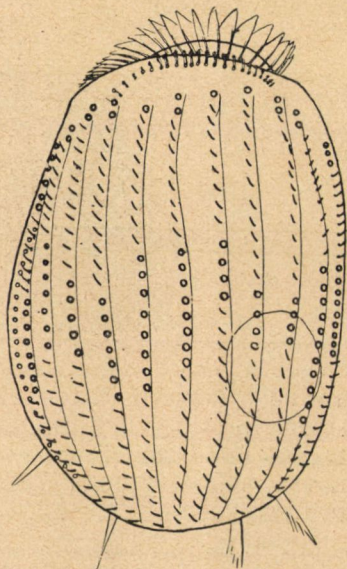
Die Receptoren: Das

Tier besitzt 12 Borstenreihen, von welchen die linke seitliche — wie immer — auch hier ventral verlagert ist. Auch bei diesem Tiere finden wir innerhalb einer Reihe sowohl borstenfreie als borstenbesetzte Sinneselemente. Die Verteilung derselben ist an Abbildung 12 im Durchschnitt angeführt, wobei 9 Exemplare berücksichtigt wurden. Das an der erwähnten Figur abgebildete Tier ist kein ideales, sondern ein reales Exemplar, welches zufälligerweise den Durchschnittszustand darstellte. Auch bei diesem Tier ist die linke ventrale Sinnesreihe vollständig borstenlos, sonst finden wir an der Dorsalseite vorne im Schatten des Wirbelorgans, sowie hinter der Körpermitte borstenlose Felder. Auch hier steigt die Zahl der seitlichen borstenlosen Elemente, aber nur etwas.

Von den Borstenreihen muss im allgemeinen hervorgehoben werden, dass die Grenze zwischen den borstenbesetzten und borstenfreien Elementen keine scharfe ist; man findet zwischen borstenfreien Gebilden oft auch borstenbesetzte und umgekehrt.

Im Wirbelorgan sind die borstenlosen Elemente in zwei Reihen ausgebildet. Jede Membranelle besitzt an ihrer Proximalseite je zwei Proprioceptoren, welche nahe zum Membranellenende, jedoch innerhalb der Reihe stehen; nur vorne am Kragen sehen wir die dorsalen Proprioceptoren ausserhalb des Organs, also distal endständig neben den Membranellen.

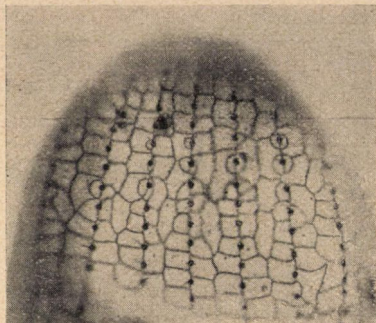
Das Neuronemengitter ist an der Rückenseite zweireihig. An wenigen Exemplaren finden wir doch auch eine dritte schmale



12 ábra. *E. harpa*, háti receptorsor Osmium-gentianaibolyás készítmény alapján. 400 ×.

Abb. 12. *E. harpa*, dorsale Receptorenreihe. Osmium-Gentiana-violett. 400 ×.

Mittelreihe. Dieselbe ist aber ein Rückbleibsel des mütterlichen Gittersystems, indem dasselbe gelegentlich der Teilung durch die neugebildeten zwei Maschen nicht vollständig unterdrückt wird. An manchen Tieren bleibt dieser Rest — wie uns dies Figur 13 darstellt — nur in Flecken erhalten.



13. ábra. *E. harpa*, a hátoldal neuroid rácsrendszere. Ezüstözés (Sublimát-Golgi) után. Az állat oszlás után az anyaállat mellső testfelét örökölte. Az oszláskor kiképződött receptorsorok új szakasza a kép középrészén lezáródik; a kis körrel körülvevett mellső receptorok már nem oszlottak, hanem az oszlás után csak megifjodtak. Előttük, a kép homálybavesző szélén az anyaszervezet megnemifjodott szakasza. 500 ×.

Abb. 13. *E. harpa*. Dorsales neuroides Gittersystem, nach einem Silberpräparat (Sublimat-Golgi). Das Tier erbt nach der Teilung die vordere Körperhälfte des Muttertieres. Der neue Abschnitt der während der Teilung gebildeten Receptorenreihen (hintere Körperhälfte) schliesst sich in der Mittelpartie des Bildes ab; die mit einem kleinen Kreis umgebenen vorderen Receptoren sind schon nicht geteilt, sondern nach der Teilung nur verjüngt. Davor, am verschwommenen Rand des Bildes der nicht verjüngte Abschnitt des Muttertieres. 500 ×.

Euplotes charon.

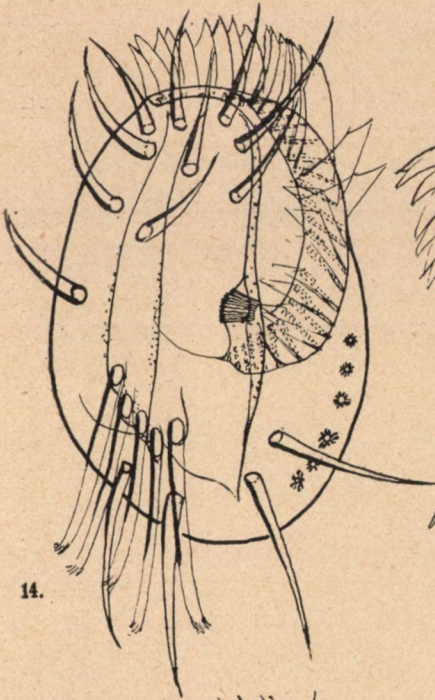
Morphologie: Das Tier ist wiederholt aus der Tisza an Gegenständen, wie Holzstücke von Fischerboten gefischt worden. Im Laboratorium vermehrt es sich polysaprobiontisch. Körperlänge ist gewöhnlich 60 μ , die Breite schwankt zwischen 40 und 45 μ . Der Form und den Ventralcirren nach passt der Speciescharakter genau (Abb. 14.) Nur die Zahl der Dorsalkämme ist nicht identisch. Unser Tier hat nämlich 6 (äusserst selten 5) dorsale und zwei scharfe Lateralkämme (Abb. 15.); demgegen-

über ist bei KAHL die Zahl der Dorsalkämme in 8—9 angegeben. Diese sollten zugleich scharf hervortreten. An meinen Tieren sieht man aber nur am hinteren Körperende die Kämme immer scharf hervortreten, an der Körpermitte sind dagegen an vielen Exemplaren 4 (3) Kämme \pm verschwunden (Abb. 16.), nur die zwei dorsolateralen treten auch hier scharf hervor. Vorne sieht man wieder jeden Kamm, aber nicht so scharf, als hinten, wenn wir die drei Querschnittserien an Abb. 18. näher betrachten, so wird uns bald klar, dass die Höhe der Kämme davon abhängt, wie sehr sich die Tiere vollgefressen haben; das rechte magere Exemplar ist nämlich mit ganz scharfen Kämmen ausgezeichnet. Die Kämme stehen im allgemeinen radial, sind also nicht nach links umgeschlagen. Im Peristom ist rechts eine kleine Lippe sichtbar, die erst hinten, an der Höhe der adoralen Membran schärfer wird. (Abb. 14. und 18.) Nach KAHL soll an *E. charon* diese Lippe fehlen. Ventral rechts laufen ausserdem noch zwei Kämme entlang, die laut Abb. 14. rechts von den Transversalcirren bzw. zwischen der 3. u. 4-ten Transversalcirre ausgehen. Auch die rechte Peristomallippe läuft als dritter Kamm aboralwärts weiter nach hinten. Neben den Transversalcirren finden wir noch vier kurze Kämme. Das Wirbelorgan ist mit verhältnismässig wenigen, weiter auseinander stehenden Membranellen ausgezeichnet; ich fand nie mehr als 30. Die Durchschnittszahl wird wohl in 28 festgelegt.

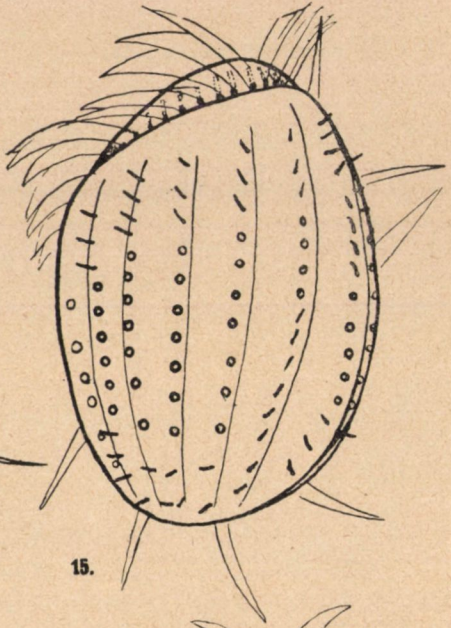
Die Receptoren: Das Tier besitzt 8 Sinnesreihen (Abb. 14—17); dies entspricht dem Umstand, dass sich insgesamt sechs Dorsal- und zwei Lateralkämme entwickelt haben. (Abb. 18.)

Alle Sinneselemente, auch die der Syncilien sind stark mit Sternchenfiguren versehen. Die linke Sinnesreihe (I. Reihe) liegt auch hier ventral und ist stets stiftchenlos (sehr selten treten hinten Stiftchen auf). Die achte steht rechts stets lateral und ist von der Ventralseite her unsichtbar (Abb. 14—17).

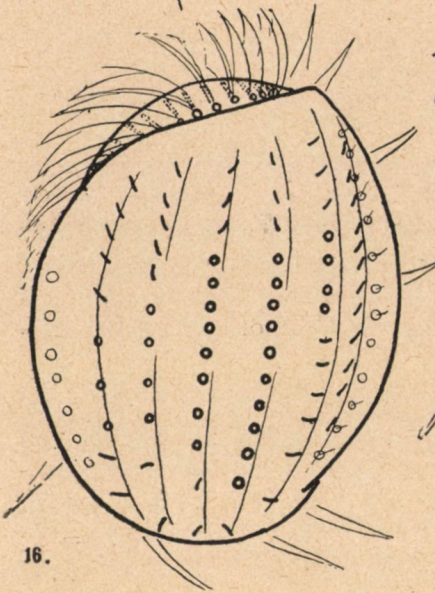
Das mittlere Dorsalfeld ist auch hier stiftchenlos. Und da nur am Mittelfeld, aber weder vorne noch hinten, stiftchenlose Sinnesorganellen vorhanden sind, können wir die Anordnung der beiderartigen Elemente der einzelnen Reihen mit 3 Ziffern leicht zum Ausdruck bringen, indem in jeder Sinnesreihe die erste Ziffer die vorderen bestifteten, die zweite die mittleren stiftchenlosen, und die dritte Zahl die hinteren stiftchenführenden Elemente bezeichnet: Abb. 17 = I: 0, 8, 0; II: 5, 3, 2; III: 5, 4, 2; IV: 3, 8, 2; V: 3, 10, 1; VI: 3, 4, 6; VII: 6, 0, 6; VIII: 8, 2, 3. — Abb 18 = I: 0, 6, 0; II: 3, 6, 4; III: 4, 7, 2; IV: 3, 7, 2; V: 3, 7, 2; VI: 3,



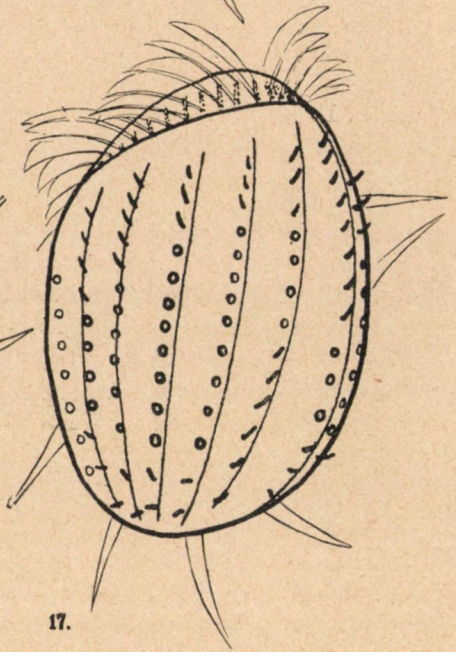
14.



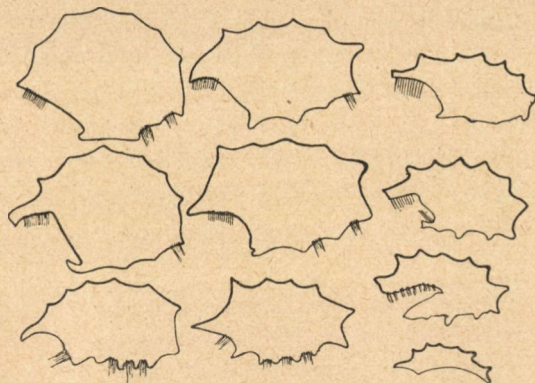
15.



16.



17.



18. ábra. *E. charon* keresztmetszetsorozat három különböző tápláltságú állaton. 500 ×.

Abb. 18. *E. charon*. Querschnittserie von drei verschieden genährten Tieren. 500 ×.

4, 8; VII: 8, 5, 3; VIII: 3, 7, 1. An drei weiteren Tieren fand ich folgende Verhältnisse: I: 0, 8, 2; II: 3, 5, 4; III: 4, 8, 2; IV: 3, 9, 2; V: 2, 10, 2; VI: 3, 6, 5; VII: 8, 5, 2; VII: 2, 10, 1. — I: 0, 7, 0; II: 5, 3, 2; III: 5, 4, 2; IV: 3, 8, 2; V: 3, 9, 1; VI: 3, 4, 6; VII: 8, 2, 3; VIII: 1, 10, 1. — I: 4, 3, 6; VII: 8, VIII: 1, 8, 1. — Im Durchschnitt finden wir für die einzelnen Reihen folgende Zahlen: I: 0, 7, 0 (7); II: 4, 4, 3 (11); III: 5, 6, 2 (13); IV: 3, 8, 2 (13); V: 3, 9, 2 (14); VI: 3, 4, 6 (13); VII: 8, 3, 3 (14); VIII: 3, 7, 1 (11). Dieser Durchschnittszustand ist an Abb. 17 verwirklicht.

14—17. ábra. *E. charon* has-, ill. hátoldaláról, a helyváltoztató elemekkel és az érzősorokkal. 15. és 16. egy-egy adott esetet, 17. átlagállapotot tüntet fel. A baloldali vékonyvonalú körök a ventralis sörtesort, 16-ban a jobboldali vékonyvonalú sor pedig a lateralis érzősort mutatja be. *Osmium-gentianaibolya*. 1000 ×.

Abb. 14—17. *E. charon* von der dorsalen bzw. ventralen Seite her betrachtet mit den Bewegungsorganellen und den Receptorenreihen. 15. und 16. stellt uns einen gegebenen Fall, 17. einen Durchschnittszustand dar. Die linksseitigen dünnen Kreise bezeichnen die ventrale Borstenreihe, die linksständige dünne Reihe in 16 jedoch bezeichnet die laterale Receptorenreihe. *Osmium-Gentianaviolett*. 1000 ×.

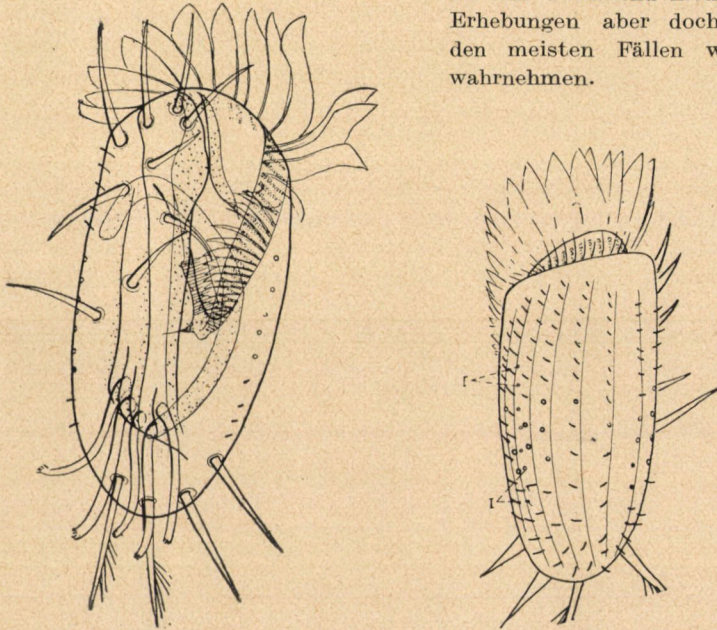
Aus den Angeführten folgt, dass *E. charon* sehr wenige Sinnesstifftchen besitzt ; in der linken Ventralreihe können wir 7 (stiftchenlose), in den beiden lateralen je 11 und in den Dorsalreihen je 13 Sinneselemente im Durchschnitt unterscheiden. Genau die Hälfte davon ist stiftchenlos, wodurch das Tier in dieser Hinsicht als Grenzvariante zu bezeichnen ist. Besonders entbehrt das dorsale Mittelfeld und die linke Seite der Stiftchen, wogegen die rechte dorsolaterale Reihe (d. h. die VII.) am meisten, manchmal wohl in 100% mit Sinneshaaren besetzt ist.

Die Membranellen sind mangelhaft mit Proprioceptoren besetzt. Man findet eigentlich bloss an den beiden Enden der einzelnen Membranellen Sinneselemente (die 10—13 proximalen Membranellen sind auch rückwärts [lateral] mit je einem Receptor [insges. mit je 3] versehen). Umso reichlicher sind die Cirren an ihren Basalteilen mit Sinneselementen (bzw. Sternchen) ausgerüstet.

Euplotes patella.

Morphologie: Ich habe das aus der Tisza stammende Tier auf Grund seiner Körperform, Stellung der adoralen Zone, Zahl (9) und Stellung der frontalen Ventralcirren und seines Chlorellengehaltes als solches determiniert. Caudalcirren treten in der Zahl 4 (selten 5) auf, von denen die beiden rechten medialwärts gefiedert sind. Auch die Transversalcirren sind an ihren Endteilen kurz aufgespalten. Im allgemeinen ist hervorzuheben, dass die Zahl und Lagerung der Cirren des ganzen Ventralfeldes stark mit dem Fall von *E. eurystomus* übereinstimmt. Auch die Grösse und Zusammensetzung des Wirbelorgans ist gleich. Aus diesem Grunde ist also fest darauf zu achten, dass bei *E. patella* keine sigmoide Krümmung im Ventralschenkel des Wirbelorgans hervortritt, sondern dieser Abschnitt scharf diagonal verläuft. Die ventralen Kämme sind an der Abb. 19 ablesbar. In der Begrenzung des Peristomfeldes konnte ich nicht nur die von den Autoren als wichtiges Merkmal hervorgehobene rechtsständige Lippe als scharfe Kante wahrnehmen, sondern innen im Mittelfeld auch eine mittlere, vordere, horizontale Pellicularmembran. (s. Abb. 19.) Die beiden sich gegenüber stehenden Lippen schliessen eine Vertiefung ein, in der nach meiner Beobachtung Flagellaten als Beute eingefangen bzw. festgehalten und dort ev. getötet werden (s. auch Stockes). Von der rechten Lippe läuft nach hinten eine Ventralrippe, die bei *E. eurystomus* fehlt. Ausserdem verlaufen noch zwei weitere Kämme rechtsseitig entlang des Ventralfeldes (s. Abb. 19.) Die Dorsalkämme waren an meinen Tieren im Leben kaum erkennbar (daher stand

ich anfänglich der Artzugehörigkeit der Tiere skeptisch gegenüber), höchstens die rechtslateralen konnte ich unterscheiden. An mit Toluidinblau oder Gentianaviolett gefärbten Präparaten konnte ich dieselben als eine auffallend niedrige Erhebungen aber doch in den meisten Fällen wohl wahrnehmen.



19—20. ábra. *E. patella* a Tiszából. Osmium-gentianaibolyás készítmény alapján. 19. ábra bal felén az érzősörték alapi részét az oldalszél elfödi. A 20. ábra bal felén az első receptorsor szintén födött helyzetben, vetületben a 3. és 4. receptorsor közé esik. 500 ×.

Abb. 19. u. 20. *E. patella* aus der Tisza. Osmium-Gentianaviolett-Präparat. Auf der linken Hälfte der Abb. 19. sind die Basalabschnitte der ersten Receptorenreihe von der Seitenkante bedeckt. Auf der linken Hälfte der Abb. 20. fällt die erste Receptorenreihe ebenfalls in verdecktem Zustand zwischen die 3. und 4. dorsale Receptorenreihe. 500 ×.

Auch meine Tiere sind sonst durch eine starke Variabilität ausgezeichnet.

Das Tier lebt an den Gegenständen des Flusses Tisza und in den eisernen W.C.-Behältern der Wasserleitung. Dem Fundort nach sind die Tiere so verschieden, dass ich die beiden unabhängig voneinander beschreibe.

Sie sind mit Chlorellen verschieden stark beladen. Die Form wechselt

zwischen kurz- und längsovoid stark. Die grössten Exemplare sind 150/50 μ gross. Die meisten Tiere sind hinten abgerundet, doch sieht man in der Höhe der inneren gefiederten Caudalcirren etwas spitz ausgezogene Exemplare nicht selten. Auch die Krümmung der Seitenlinie kann verschieden stark sein, indem die Tiere rechts mehr convex sind als links. Die linke Seite nähert sich manchmal dem geraden. Die Zahl der Membranellen des Wirbelorgans schwankt zwischen 35 und 40.

Meine Exemplare waren im Leben sternchenlos, obwohl *E. patella* als gutes Beispiel für Sternchengebilde, die die Sinnesstiftchen basal umzingeln, gilt. Selbst JAKOBSON und TURNER zeichnen starke Sternchen. Letzterer schrieb 1933 über das subpelliculäre Fibrillarsystem des Tieres. Ich konnte die Sternchen nicht einmal mit spezifischen Färbungsmethoden (Formolosmium-Silbernitrat [1927] oder Formolosmium-Toluidinblau) nachweisen. Ich konnte meine Exemplare überhaupt äusserst schwer versilbern. Der Basalapparat der sensorischen Elemente war dabei kaum angefärbt, die Neuronemen fielen TURNER gegenüber (1933) äusserst fein aus und daher konnte ich die gebundenen (stiftchenlosen) Rezeptoren kaum untersuchen. Die besten Resultate erhielt ich nach Formolosmium mit Toluidinblau und nach Osmiumsublimatefixierung mit Gentianaviolett, wenn nach J. v. HORVÁTH gleichzeitig während der Fixation mit Phosphorwolframsäure gebeizt wurde. Über die Verteilung der freien (dorsalen) Rezeptoren gaben diese Gentianaviolettbilder (s. Abb. 20.) folgende Auskünfte.

Die Rezeptoren: Das Tier besitzt gewöhnlich 8, nicht selten 9 Rezeptorenreihen. Die linke von diesen Reihen liegt ventral, u. zw. wie üblich in der Fortsetzung des Wirbelorgans, die anderen aber dorsal bzw. lateral. Auch hier unterscheiden wir zwischen borstenlosen und beborsteten Sinneselementen, deren Verteilung in einem gegebenen Fall an Abb. 20 vorgeführt ist. Da auch an diesem Tier bloss im mittleren Abschnitt die Stiftchen fehlen, vorne und hinten jedoch Stiftchen erscheinen, können wir auch hier ähnlich wie bei *E. charon* im folgenden für drei Tiere die Verteilung der Rezeptoren leicht angeben. In Klammer steht die Summe der Rezeptoren. (Das erste, hier mit *A* bezeichnete Tier entspricht zugleich der Abb. 20.) *A*. I: 0, 6, 2 (8); II: 7, 1, 6 (14); III: 9, 1, 4 (14); IV: 7, 2, 4 (13); V: 7, 3, 4 (14); VI: 7, 1, 6 (14); VII: 8, 1, 6 (15); VIII: 8, 4, 4 (16); IX: 4, 4, 2 (10). — *B*. I: 0, 10, 6 (16); II: 8, 2, 6 (16); III: 8, 0, 8 (16); IV: 9, 3, 4 (16); V: 9, 3, 4 (16); VI: 8, 1, 7 (15); VII: 9, 0, 10 (19); VIII: 9, 4, 8 (21). — *C*. I: 0, 8, 10 (18); II: 9, 0, 9 (18); III: 8, 1, 9 (18);

IV: 11, 1, 5 (17); V: 9, 3, 5 (17); VI: 7, 1, 7 (15); VII: 9, 0, 8 (17); VIII: 9, 0, 8 (17); VIII: 7, 5, 7 (19); IX: 7, 5, 6 (18).

Das Bild und die obigen Angaben unterrichten uns von folgendem: *Euplotes patella* gehört zu den mit Sinnesstiftchen relative am reichlichsten versehenen Euplotesarten. Die Receptoren sind so weit behaart, dass auch die linke, ventrale Sinnesreihe am Hinterende immer bestiftet ist, sogar bei Tier C, trägt mehr als die Hälfte der Sinnescylinder Härchen. Die stiftchenlosen Sinneselemente sind auch hier an der mittleren Körperregion beiderseits etwas seitlich und nach hinten verlagert; dabei ist das Tier rechts kahler als links. Die Sinneselemente stehen auch hier vorne etwas dichter als hinten. Die Sinnesreihen sind vorne nach rechts geschraubt, wie bei *E. eurystomus*.

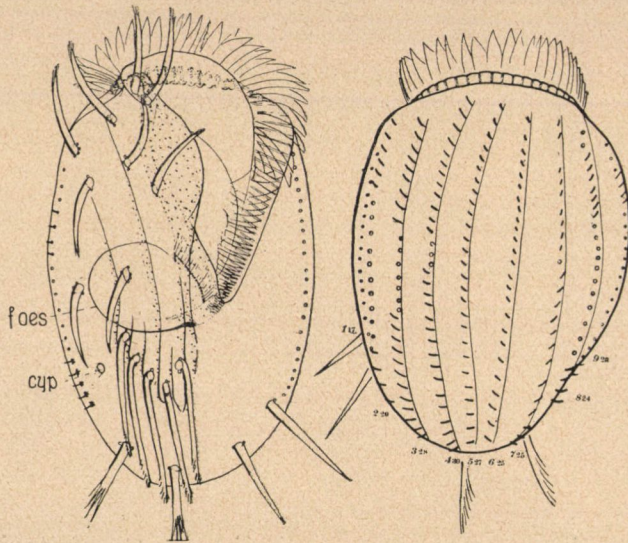
Euplotes patella ist für mich infolge zwei merkwürdiger Tatsachen ein wertvolles Tier geworden. Einerseits dadurch, dass in den Sinnescylindern sehr oft Doppelstiftchen auftreten (besonders im hinteren Körperteil), anderseits dadurch, dass auch freie, von den Sinnescylindern unabhängige Sinnes(?)-Stiftchen erscheinen. Auch diese treten in der hinteren Körperhälfte und besonders ventral links in der Nähe der Sinnesreihe auf.

Von den gebundenen Receptoren will ich so viel bemerken, dass diese schwer nachweisbar sind. Von den Cirren kann ich z. B. kaum ein sicheres Bild angeben, wie diese am Basalteil mit stiftchenlosen Elementen ausgerüstet sind.

Das Neuronemengitter: Von den Neuronemen gibt TURNER ein allgemeines Bild, demgemäss dorsal ein Doppelliniensystem erscheint (s. TURNER Fig. 1. und Plat. 1—2). Meine Silberbilder zeigen dasselbe. Auch ventral ist das Neuronemengitter weitmaschig, nur in der nächsten Nähe der Adoralmembranen sehen wir kleine Maschen. Auch die Cirren sind mit weiten Maschen umgeben und ausserdem sind sie auch mit einer inneren, schwer färbbaren Masche (Saumfaser) versehen; hier stehen die Receptoren. TURNER zeichnet an seiner Fig. 1. vor dem Wirbelorgan eine lose, weit stehende Saumfaser («anterior membranelle fibril») und eine hinten eng anschliessende Grenzfaser («posterior membranelle fibril»). An meinen Tieren trat am mittleren dorsalen Halsteil auch die hintere Faser lose, weit entfernt auf (siehe meine Fig.

49, 50 im Abschnitt II.) nur an den beiden Endpartien des Wirbelorgans sah ich die Grenzfaser entsprechend TURNERS Angaben in direkter Berührung mit den Membranellen.

Eine Varietät: In den eisernen Behältern der Wasserleitung im W. C. des Instituts konnte ich immer wieder eine grosse Varietät von *E. patella* fischen, die in vieler Hinsicht eine Ähnlichkeit mit *E. eury-*



21—22. ábra. *E. patella* has- és hátoldaláról, Formol-Osmium-gentianaibolya. 22. átlagábra tíz állat vizsgálatá alapján. *cyp* cytophyge; *foes* eosophagiális fibrilla: garatrost; 21-ben a cirrusok tövén receptorok. 350 ×.

Abb. 21—22. *E. patella*. Ventral- und Dorsalansicht nach Formol-Osmium-Gentianaviolett-Präparaten. Abb. 21. Receptoren bei den Cirren und der Endoralmembranellen, die des Wirbelorgans dagegen weggelassen. Abb. 22. Durchschnittsbild auf Grund von 10 Exemplaren. *cyp* Cytophyge, *foes* Fibra eosophagialis (Schlundfaser von BOZLER). 350 ×.

stomus besass (s. Abb. 21, 22). Es sind dies flach gewölbte dellenartige Tiere, an denen auch die Seitenkämme ventralwärts neigen. Die Dorsalkämme stehen kaum hervor. Man kann von denselben 5—6 unterscheiden. An mit Formol-osmium fixierten Exemplaren fand ich in Mikra folgende Längen-Breitenindexe: 145/105, 150/100, 155/100, 170/110. Aus dem Vergleich der Abb. 21 mit Abb. 19 können wir erfahren, dass die Lagerung

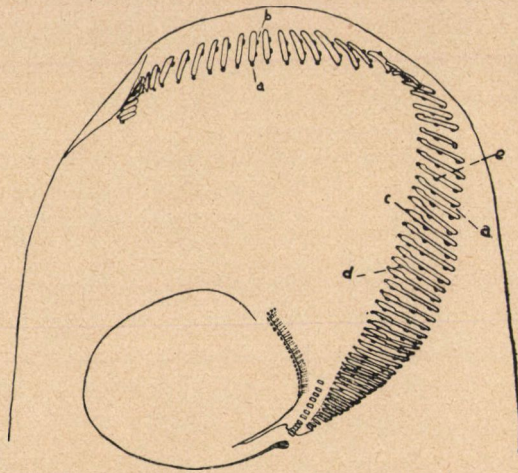
der Cirren ganz identisch ist. Hinten finden wir gewöhnlich vier, in 2% der Tiere 5 Cirren. Auch die Form des Wirbelorgans ist ähnlich der des Grundtypus. Es besitzt 60—70 Membranellen. Die Cirren sind ganz ähnlich galagert, wie bei der Grundform und wie bei *E. eurystomus* (Abb. 21.). Die Cytopyge liegt rechts vom zweiten Transversalcirrus und scheint — nach Formolosmiumpräparaten beurteilt, — in Form eines rundlichen Schlitzes immer geöffnet zu sein (s. Abb. 21.). — Die drei Ventrakämme laufen ganz identisch, wie bei der Form aus der Tisza. Bei der Grundform sprach ich von einem inneren Längskamm des Peristomfeldes (s. Abb. 19.), dies ist in der Wasserleitungsform nicht zu treffen. — Sternchen sind am Tier im Leben auch hier nie zu sehen, dagegen sind sie nach Formolosmium mit Gentianaviolett und nach Sublimat-Golgi mit Silber gut darstellbar. Daraus erhellt sich, dass die An- oder Abwesenheit von Sternchen nicht an lebenden Tieren, sondern immer an fixierten Praeparaten festzustellen ist. Sie treten hier nicht so regelmässig und nicht so massenhaft auf, wie bei *E. eurystomus*. KAHL zeichnet an seiner Abb. 18 in der aus der Elbe stammenden Form von *E. eurystomus* eine Reihe rundlicher Körner nahe dem Körpersaum entlang; dieselben sind auch hier zu finden.

Die Receptoren: Unsere Tiere sind in 80% mit 9, in 20% mit 8 Receptorenreihen ausgerüstet. Auf Grund von 10 Exemplaren mit 9 Borstenreihen habe ich ein Durchschnittsbild in Abb. 22. dargestellt. Sechs Borstenreihen liegen an Dorsalfeld, zwei lateral und eine sinistroventral (diese letztere ist mit kleinen Kreisen bezeichnet). Die Zahl der Sinneselemente ist in den einzelnen Reihen beträchtlich grösser als bei der Grundform aus der Tisza. Von links nach rechts fortschreitend finden wir im Mittelwert (gerechnet nach 10 Exemplaren) in den einzelnen Reihen an Zahl folgende Elemente: I: 17, II: 20, III: 28, IV: 30, V: 27, VI: 25, VII: 25, VIII: 24, IX: 23, wogegen sich bei der Grundform der Mittelwert um 16 bewegt.

Die Verteilung der borstenlosen Elemente ist an Abb. 22 ersichtlich. Wenn wir die hier wahrnehmbare Lage mit der der Abb. 19 vergleichen, so stellt sich bald heraus, dass an der Wasserleitungsform viel mehr borstenlose Elemente entstanden sind als an der Grundform, dass also die vorherige mehr spezialisiert ist.

Wenn wir diese spezialisierte Form mit *E. muscicola* vergleichen, so ergibt sich folgendes: 1. lateral sind beide Arten borstenlos; 2. rechts wächst nach aussen die Zahl der borstenlosen Elemente; 3. links ventral ist eine (bei *muscicola* sogar zwei) vollständig

borstenlose Receptorenreihe. Die beiden Arten unterscheiden sich in den folgenden: 1. Die Zahl der borstenlosen Elemente wächst bei *muscicola* nach rechts bzw. medialwärts, wogegen bei *patella* nach links. 2. Bei *muscicola* sind die Reihen vorne im allgemeinen borstenlos, doch mehr rechts als links so, dass sich in der VIII-ten und IX-ten Reihe schon keine borstenlosen Receptoren entwickeln; wogegen bei *patella* die meisten Reihen auch vorne beborstet sind,



23. ábra. *E. patella* örvényszerve és endoralis membranellája a garatrosttal. A membranellák mellett és a garat hátoldalán receptorok. Nedves ezüstözés Sublimat-Golgi után, a napon ezüstben redukálva. 850 ×.

Abb. 23. *E. patella*. Wirbelorgan und endorale Membranelle mit der krummen Schlundfaser. Receptoren neben den Membranellen und am Dorsalgewölbe des Pharynx. Nasse Silbermethode nach Sublimat-Golgi; Reduktion an der Sonne. 850 ×.

bloss rechts die zwei letzteren (VIII, IX) Reihen haben vorne 2—3 borstenlosen Receptoren. 3. An *muscicola* finden wir keine Receptorenreihen vollständig beborstet, wogegen bei *patella* die V-te und VI-te Reihe vollständig beborstet ist, bzw. am Mittelfelde einzelne Elemente so regellos leer sind, dass man hier für ein gegebenes Element keine mindestens 50%-ige Borstenlosigkeit feststellen kann. 4. All diese Unterschiede können wir mit einem wei-

teren in Einklang bringen, nämlich damit, dass *E. muscicola* hoch, *patella* dagegen flach gewölbt ist.

Das Wirbelorgan ist laut Abb. 23 sehr stark mit borstenlosen Elementen ausgerüstet. Vorne und hinten, wo die Membranellen kurz sind und eine gleichmässige aber einfache Arbeit ausführen, entwickeln sich bloss zwei Receptorenreihen, an der mittleren Gegend treten aber drei und vor dem Mundtrichter auf kurze Strecke sogar vier Reihen auf. Zwei Reihen liegen aussen, das heisst an das Ende der Membranellen angeheftet u. zw. vorne am Dorsalkragen die hintere Reihe (bis auf 25 Membranellen), von welcher am Ventralfeld die äussere Lateralreihe entsteht und dann vor dem Mundtrichter peristomal (d. h. einwärts) eine innere Reihe (c) aus gegen 25 Receptoren. Diese letztere Reihe hört an der paroralen Cilienreihe auf. Diese beiden Lateralreihen fassen am Ventralfeld zwei weitere inneren Reihen (d, e), von denen die innere (d) bis auf die hintersten 30—32 Membranellen ausgebreitet ist, die äussere dagegen schon am Kragen mit der 14. (11—15.) Membranelle angeht und erst im Mundtrichter aufhört. Die eine, die hintere war schon erwähnt. Die andere liegt vorne, verläuft aber etwas einwärts von den Endpartien der Membranellen. Diese letzte Reihe ist eigentlich in einer leichten Spiraltour angeordnet, indem sie vorne noch mittelständig ist, um hinten im Mundtrichter nach aussen zu schlagen.

Die endorale Membran ist ventral mit gegen 20 dicht gelagerten Receptoren besetzt und ausserdem befinden sich auch vorne an der Ecke gegen 3—5 Elemente. Auch am Dorsalteil des Mundtrichters sind 4—9 freie Receptoren anzutreffen.

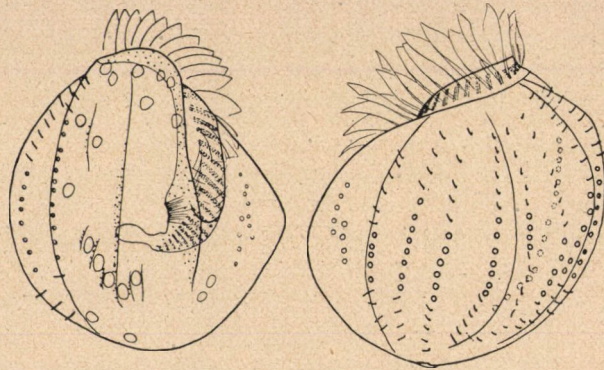
Die Ausrüstung der Cirrenfüsse mit Receptoren ist im allgemeinen bei beiden Formen gleich. Die wenigen unwesentlichen Unterschiede können wir beim Vergleich der Abb. 19, mit 21 leicht feststellen.

***Euplotes alatus* KAHL (1932.)**

Die Morphologie: Diese von KAHL in helgoländer Kulturen gefundene Art lebt in der Umgebung von Szeged in etwas natronhaltigen Gewässern. Sie soll im Freien äusserst spärlich vorkommen, da ich das Tier in frisch eingestellten Aquarien nie fand, sondern dasselbe erst immer später, wenn ein für Paramecium und Loxocephalus günstiger

sapropeler Zustand entstanden ist, auftrat. Das Tier lebt in der Zucht monatelang, vermehrt sich aber nie auffallend, so, dass eine ähnlich reiche Population, wie dies für *E. elegans*, *muscicola* oder *eurytomus* leicht zu erhalten ist, nie entstand. Es ist ein typisch kriechendes Wesen. Doch schwimmt es mit Hilfe seiner festen Seitenflügeln vorzüglich. Es kann wie eine Flugmaschine auch einen Gleitflug ausführen.

Das Tier bildet eine sehr gut charakterisierbare Art. KAHL bezeichnet auf Grund seiner Abb. 16. (S. 630) die hinten verschmälerte Form

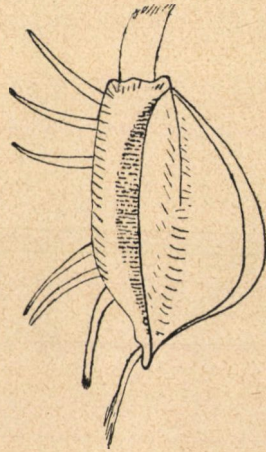


24—25. ábra. *E. alatus* has- és hátoldalról. Nedves ezüstözés Sublimat Golgi után napfényben. 25-ben a jobbszélső receptorsor fődött helyzetben a hasoldalra került s ezért pontozott veszőkkel, ill. körökkel van feltüntetve. A 24. ábra bal szélső érző sorát a mellette lévő taraj teljesen fődí. 270 ×.

Abb. 24—25. *E. alatus* in Ventral- und Dorsalansicht. Nasse Silbermethode nach Sublimat-Golgi, Reduktion in der Sonne. Auf 25 gelangt die rechtslaterale Receptorenreihe in bedecktem Zustand auf die Bauchseite und ist daher mit punktierten Strichen bzw. Kreisen dargestellt. Die linkslaterale Receptorenreihe auf Abb. 24 wird durch den daneben verlaufenden Kamm vollständig verdeckt. 270 ×.

als typisch. Solche Formen treten in unseren Populationen selten auf, sondern vielmehr umgekehrt, die Tiere sind hinten breiter. Sonst herrscht in der Körperform eine ziemlich grosse Variabilität zwischen Ei-Birnen- und rhomboiden oder rombischen Form. Gewöhnlich ist die letztere bezeichnend (s. Abb. 24.), wo die Hauptachse des Tieres mit der Längsachse des Rhomboids zusammenfällt und die obere rechte Seite die kürzere ist. KAHL's Exemplare waren 75—90 μ , unsere dagegen 55—70 μ lang. Sonst fanden wir in Mikra folgende Länge-Breitenindexe: 56/49, 55/53, 65/62, 66/64, 56/51. KAHL gibt 5 Dorsalrippen und 2 Seitenflügeln

an. Diese sind auch an unseren Tieren zu treffen und da die Seitenflügel homolog mit den Dorsalrippen sind, werden wir über 7 Rippen bezw. Kämmen sprechen. Demgegenüber wollen wir bemerken, dass am Tier 10 Receptorenreihen entwickelt sind, dementsprechend sollten — die Seitenkanten hinzugerechnet — auch zehn Rippen vorhanden sein. Wenn wir im Gegensatz hierzu nur sieben Rippen vorfinden, so bedeutet dies, dass sich entlang von drei (manchmal vier, Abb. 25.) Receptorenreihen keine oder nur ausnehmend niedrige Kämmen ausbilden. Das Tier ist mit zwei grossen Seitenflügeln ausgezeichnet (Abb. 24, 26), die dem Ausmasse nach sehr variabel sind; an unseren Tieren fallen sie meist grösser aus, als an KAHL's Zeichnung zu sehen ist. Diese Flügel machen manche Tiere auffallend breit so, dass die rhomboide Form in eine rhombische übergeht (S. Abb. 24), sogar verkehrt rhomboid wird, indem die perlaterale Achse länger als die Längsachse des Tieres wird. Nun ist die Frage, welchen von den 10 Rippen die zwei Seitenflügel entsprechen? Hierauf finden wir die Antwort in Abb. 24, wonach der linke Flügel der ersten, der rechte dagegen nicht der zehnten, sondern der vorletzten, also neunten Rippe entspricht. Die von KAHL angegebenen 5 Dorsalrippen bilden sich auf dem Gebiete der entlanglaufenden 7 Receptorenreihen aus. Von diesen zeichnet sich nach KAHL die von links gerechnete zweite durch ihre Stärke aus. In unserer Population variiert die Lage des mächtigsten Kammes zwischen 2. und 3. Dorsalkämmen (ohne Lateralkamm), doch ist auch hier gewöhnlich der zweite (mit dem Seitenkamm dritte) der höchste. Es kommt auch vor, dass die beiden Kämmen, also gemäss KAHL's Rechnung, der zweite und der dritte gleich hoch sind. Von 11 Tieren fand ich an 5 den zweiten, an 4 den dritten Dorsalkamm als den höchsten und an drei Tieren waren beide Dorsalkämme gleich hoch. Im allgemeinen sind diese beiden Kämmen immer höher als die anderen. Aber auch diese sind ungleich hoch. Der auf Fig. 25 dargestellte Fall zeigt uns ein Tier mit bloss 3 Dorsalkämmen, wobei zwischen je zwei Kämmen zwei Borstenreihen entlanglaufen, ohne durch eine Erhöhung begleitet zu sein. Die beiden Seitenflügeln sind immer die



26. ábra. *E. alatus* oldalnézetben (az örvényszerv kihagyásával). Élő állat után szabadon.

Abb. 26. *E. alatus* in Seitenansicht (mit Weglassung des Wirberolgens). Frei nach dem Leben.

höchsten. Diese laufen hinten nicht ineinander über, sondern der rechte überdeckt mit seinem Endschnitt den linken.

Die Bauchseite ist stark gewölbt, (s. Abb. 26) vorne dorsoventral breit, und fällt hinter den 5 Transversalcirren steil ab. Sie hat zwei starke Längskämme, einen links in der Fortsetzung des inneren Peristomalsaumes, und einen am Mittelfeld zwischen der dritten und vierten (von rechts gerechnet) Transversalcirre. Scheinbar läuft auch rechtsseitig ein dritter Ventralkamm entlang; dieser ist jedoch der eigentliche rechte

Lateralkamm, zu dem sich auch eine Receptorenreihe gesellt.

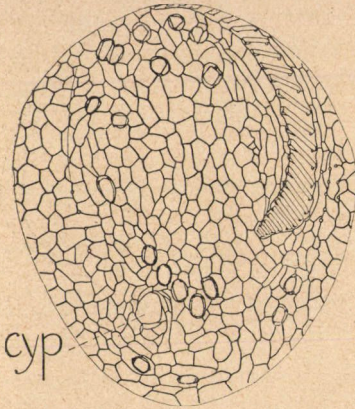
Die Zahl und Lage der Ventralcirren entspricht den Angaben von KAHL; einen kleinen Unterschied finden wir darin, dass an unseren Tieren die beiden vorderen Ventralcirren etwas mehr nach vorne verlagert sind. (vergl. meine Abb. 24 mit KAHL's Abb. 16, 17 S. 630). Als bestes diagnostisches Merkmal der Art könnte angeführt werden, dass die vier hinteren der sieben Frontalcirren ausnahmslos in einer geraden Schräglinie verlaufen.

Das Wirbelorgan besteht gewöhnlich aus 25 Membranellen. Diese stehen etwas weiter und sind auch im Cytopharynx gut abzählbar. Die Endoralmembran ist kurz, sie sitzt an einer Papille.

Das Neuronemengitter: Die Maschen des Neuronemengitters sind ventral im allgemeinen ungerichtet (Abb.

27—28), bloss in der Nähe des Wirbelorgans sehen wir der Länge nach ausgezogene Maschen. Sie sind in der peristomalen Mulde genau so gross gestaltet, als im allgemeinen am Ventralfelde. Dorsal sehen wir typische Doppelmaschen, die selbstverständlich an den hohen Kämmen und besonders rechts von den Receptorenreihen grösser sind als an den niedrigen.

Die Receptoren: Die Borsten zeigen folgende Eigen-



27. ábra. *E. alatus* hasoldalról KLEIN—GELEI-féle ezüstözö eljárás. Rajz a 28. ábrán látható mikrofotogramma ill. a készítmény alapján. 270 ×.

Abb. 27. *E. alatus*, Ventralseite nach der KLEIN—GELEI-schen Methode. Zeichnung nach dem auf Abb. 28 sichtbaren Mikrophotogramm bzw auf Grund des Präparats. 270 ×.

tümlichkeiten. Es sind 10 Reihen entwickelt. Von diesen liegen zwei, eventuell einer links ventral, es fällt aber auch die rechts über die Lateralrippe gelagerte Reihe eigentlich auf die Ventralfläche. Demgemäss sehen wir dorsal 8 Receptorenreihen. Auf Grund von fünf Exemplaren fand ich in den einzelnen Receptorenreihen an Zahl folgende Elemente: 0: 4, I: 5 (diese sind die beiden linken Ventralreihen, s. Abb. 24—25), II: 14, III: 15, IV: 17, V: 16, VI: 14, VII: 16, VIII: 19, IX: 19, X: 18.

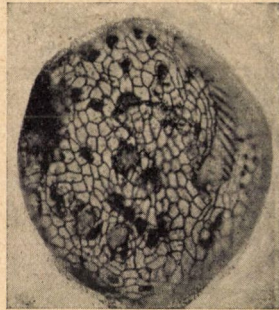
Man sieht also, dass die beiden linken Ventralreihen auch hier mit wenigen Receptoren ausgerüstet sind (siehe dasselbe bei *E. muscicola*); ich bemerke noch hierzu, dass auch die Variabilität der Zahl (0—7) hier die grösste ist. In einem Fall fehlte sogar die eine Reihe.

Die borstenlosen Receptoren sind im allgemeinen ähnlich verteilt, wie bei den anderen Arten. Aber die Variabilität in der Lagerung derselben ist so gross, dass man am Dorsalfeld kaum ein Durchschnittsbild herausbringen kann. Wir können nur so viel bemerken, dass die einzelnen Reihen mit Borsten anfangen und mit Borsten endigen, in der Mitte dagegen verschiedentlich kahl sind. Die beiden linken Ventralreihen sind immer kahl. Rechtsseitig sehen wir im allgemeinen mehr borstenlose Sinnescylinder. An Abb. 25 ist ein gegebener Fall ausgeführt, man sieht hier also keine Verallgemeinerung.

Die Proprioceptoren der Bewegungselemente treten an den Präparaten nicht so oft und nicht in solcher Stärke hervor, wie bei den anderen Arten. Was sichtbar war, zeigte — wie an Abb. 24 ersichtlich — ein ähnliches Bild wie bei *E. muscicola*.

Euplotes elegans KAHL.

Die Form habe ich in den eisernen Wasserbehältern der Wasserleitung unseres Institut aufgefunden. Das Tier lässt sich wie *Paramecium*



28. ábra.

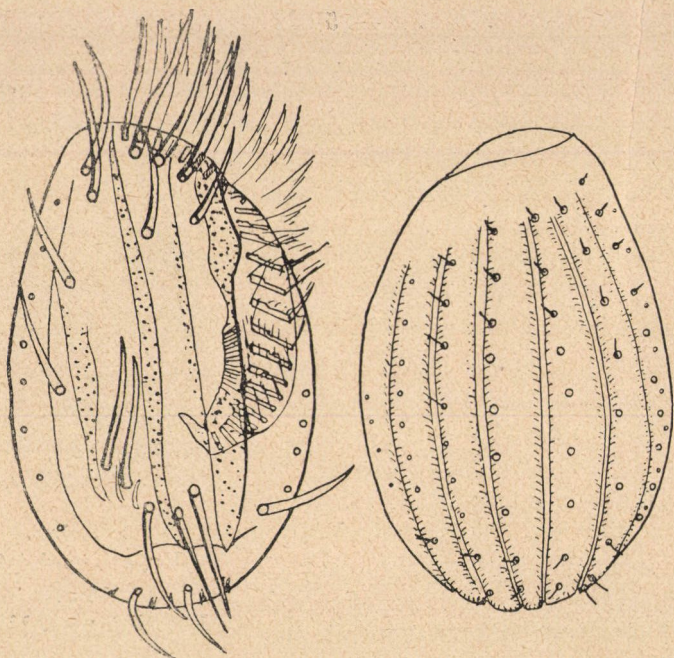
Ugyanaz mint 27.

Abb. 28.

Dasselbe wie Abb. 27.

in Heuinfusion gut züchten, vermehrt sich aber äusserst langsam und ist daher kein so günstiges Untersuchungsmaterial, als *E. muscicola*.

Morphologie: Unser Tier lässt sich folgenderweise charakterisieren (s. Abb. 29, 30.): Es ist ähnlich der *Forma typica*, welche KAHL aus den Sylter Meergräben und Strandtümpeln an der Kieler Förde beschrieben hat. Der Kragenteil ist aber nicht hervorspringend und läuft nicht so



29—30. ábra. *E. elegans* has- és hátoldalról Osmium-toluidinkékes eljárás után. 30-ban jobboldalt a szélső receptorsor a szegélytől fődve. 270 \times .
Abb. 29—30. *E. elegans* in Ventral- und Dorsalansicht nach Osmium-Toluidinblau. In Abb. 30 ist rechts die laterale Receptorenreihe von der Seitenkante verdeckt. 270 \times .

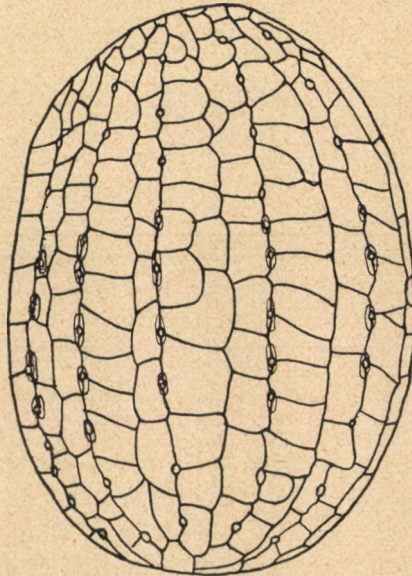
stark schräg nach links rückwärts, wie es an KAHL'S Abb. 20 (S. 630.) zu sehen ist. Die rechte Körperseite ist gerade. An dieser Stelle sind zwei seitliche Receptorenreihen gelagert. Dann folgen dorsal und links insgesamt 6 gewölbte Rippen, die an ihrer linken Seite Receptoren tragen. Die erste linke Rippe bildet zugleich die Kante des Tieres und daher fallen die Receptoren an ihre Ventralseite. Die Rippen sind an der linken Körperhälfte im allgemeinen mit tieferen Furchen getrennt. Wir

finden am ganzen Rückenpanzer insgesamt 8 Receptorenreihen, die alle mit Sternchen stark versehen sind. Das Wirbellorgan läuft vorne nicht auf die linke Ventralseite hinüber, sondern endigt dorsal beinahe mittelständig. Die Membranellen stehen im Organ weitläufiger; ich zählte deren höchstens 25. Die Anordnung der Gefüße entspricht vollständig dem, wie es an KAHL's Abb. 19. (S. 630.) angegeben ist. Auch die drei ventralen Längsrippen, die KAHL an seiner Zeichnung angibt, habe ich gleichfalls gefunden (siehe meine Abb. 29.). — Das Tier ist ein ausgesprochenes thigmotaktisches Wesen; mir gelang es nie, dasselbe unter dem Mikroskop zum Schwimmen zu bringen.

Receptoren und Maschensystem: Die Membranellen des Wirbelorgans und ebensowohl auch die Cirren sind an ihrem Basalteil immer mit Receptoren und mit dazugehörigen Sternchen versehen. Diese fand ich auch am Basalabschnitt der Endoralmembran. Die genaue Lagerung der Receptoren habe ich hier nicht studiert. Es ist mir nur ein besonderer Umstand aufgefallen, u. zw. dass an der Stelle, wo der hintere (innere) eigentliche Ventralcirrus stehen sollte, am kahlen Platz ein Receptor mit Sternchen vorhanden ist.

Das Dorsalfeld dieses Tieres hat verschiedene Überraschungen gebracht:

1. Die dorsale Felderung des Neuronemensystems ist ungleich. Links von den Receptorenreihen, also in den Rinnen, entwickeln sich enge und rechts, an den Rippen, breite Maschen (Abb. 31).



31. ábra. *E. elegans* a hátoldal neuroid rácsa nedves ezüstözö eljárás (Sublimat-Golgi után). Osztó állat 270 ×. Abb. 31. *E. elegans*. Dorsales neuroides Gitter am Silberbild. Teilungstier (Sublimat-Golgi). 270 ×.

2. Wo die Rinnen tief sind, lagern sich die Sternchengebilde bloß rechtseitig, also rippenständig.

3. Die Sinnesreihen sind aus auffallend wenigen Receptoren zusammengestellt. Durchschnittlich finden wir bloß 8 Receptoren. Von links nach rechts ausgehend fand ich an dem abgebildeten Tier (Abb. 30) folgende Zahlen der Receptoren: 4, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 8 (bei einem anderen Tier: 4, 7, 9, 9, 9, 9, 6). Unsere Abbildung 30 zeigt deutlich, inwiefern die Receptoren mit Borsten versehen sind. In den beiden lateralen Reihen I und VIII bilden sich keine Stiftchen aus. Gewöhnlich ist auch Reihe II stiftchenlos, nur an dem abgebildeten Tier finden wir hinten eine Borste. Sonst ist — wie an der Abbildung ersichtlich — das ganze dorsale Mittelfeld kahl.

4. In der Teilung nehmen bloß die drei bis vier (selten 5) mittleren, gewöhnlich stiftchenlosen Receptoren teil, also genau ein drittel. Im Durchschnitt stammen von jedem Receptor 4 Sprösslinge ab. Die Sensucysten umgeben während der Teilung lange das Rohr des Mutterreceptors. Was später mit ihnen geschieht, habe ich nicht verfolgt.

Die ventrale Felderung ist längsgerichtet. Rechts vom Munde, im allgemeinen also am Gebiete der Cirren können wir gegen 10 Längsfelder, links deren fünf unterscheiden. Im Peristomfelde ist die Felderung unregelmässig.

E. eurystomus.

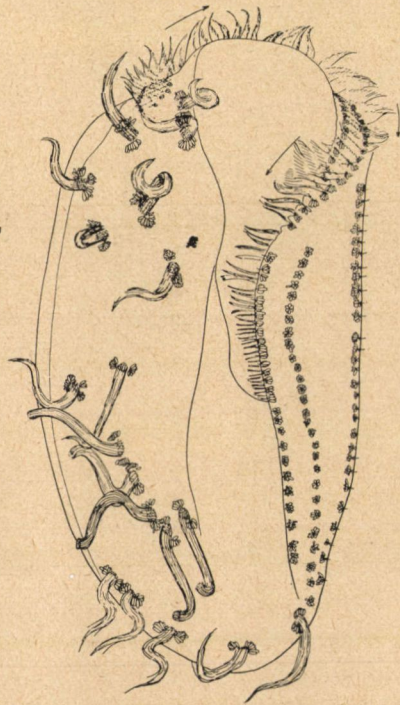
Das Tier ist euryhalin, lebt in unserer Gegend weit verbreitet in der Tisza, weiterhin in ihrem Überschwemmungsgebiet und in den toten Armen. Es tritt auch in schwach natronhaltigen Teichen: im Tápéi-ér und Vértó auf. Wir finden eine ovoide Form, die ähnlich wie die Elbform KAHL'S (s. Abb. 18 S. 638.) aussieht und eine *forma alata* (Abb. 32—34.). Das Tier hat eine grosse Form- und Bauähnlichkeit mit *E. patella*. Auch die Stellung der Cirren ist eine sehr ähnliche. Beide Tierarten sind äusserst flach und schwach dellenförmig, indem die Tiere ventral etwas konkav sind und auch die Seitenkanten abwärts neigen. Daher müssen wir die wenigen Unterschiede bei der Determination gut ins Auge fassen. Vor allem die sigmoide Form des Wirbelorgans am Ventralfeld, die für *eurystomus* bezeichnend ist. Dann den Umstand, dass bei *eurystomus* von der rechten Peristomlippe keine Rippe nach

hinten verläuft. Ein Ersatz dafür entsteht dadurch, dass von den 5 Transversalcirren drei Längskämme nach vorne ausgehen, wogegen bei *patella* bloss zwei entwickelt sind. Bei *patella* steht der innere caudale Spaltfuss ganz endständig, wogegen bei *eurystomus* auch derselbe rechts lateral verschoben ist. Die zwei hinteren «Ventralcirren» stehen an den hiesigen Exemplaren nicht hintereinander, wie an der Elbform, sondern einwärts transversal, wie bei *patella*. Äusserst bezeichnend ist für *eurystomus* auch der Verlauf und die Lage der Kernschleife, die an Abb. 34 dargestellt ist.

Die wohlentwickelten Exemplare von *eurystomus* besitzen einen 210/110 μ und 210/160 μ Längenbreitenindex, die kleinsten dagegen 170/125—190/140 μ . Die Zahl der Membranellen im Wirbelorgan schwankt zwischen 70—80. Die zum Mundtrichter proximalen Membranellen sind nicht mehr dorsoventral, sondern perlateral gestellt, sie schauen also mit ihrer Höhenachse im Peristomium medial einwärts. Das heisst also, dass das Basalband der Membranellen hier senkrecht: dorsoventral eingestellt ist.

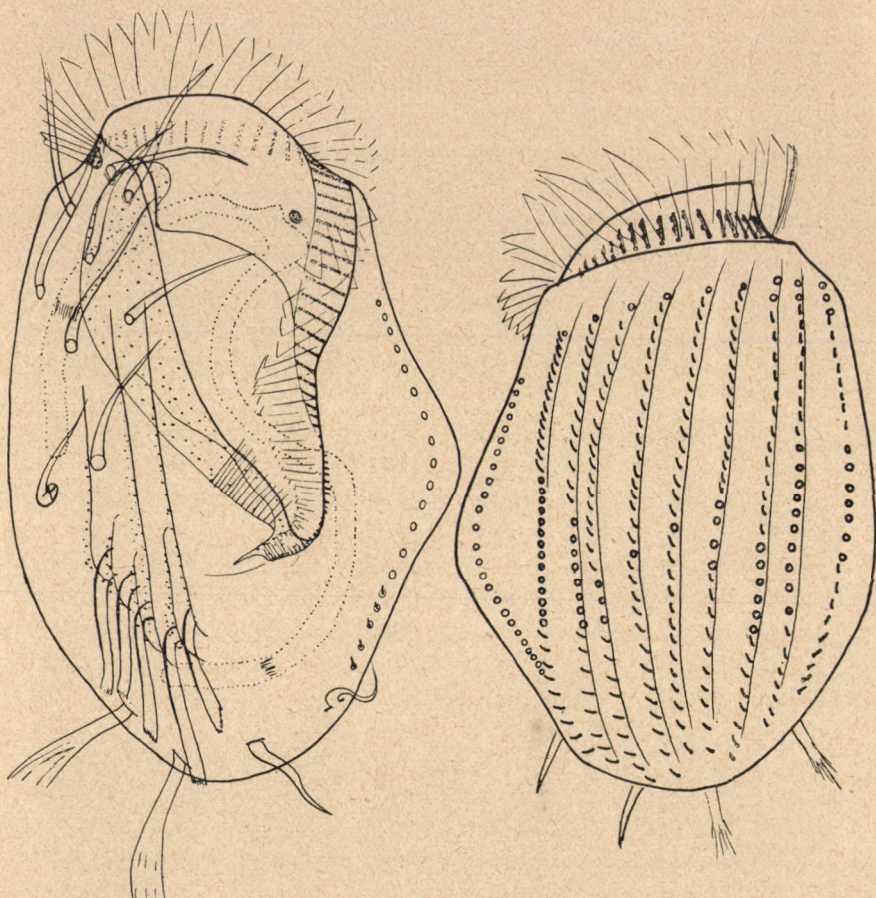
Das Tier ist mit Sternchen immer stark besetzt; diese sind auch im Leben gut sichtbar, welcher Umstand mir Gelegenheit zur Studie der Bildung dieser Elemente gab. Es gibt doch auch Zuchten, in denen keine Sternchen an den lebenden Exemplaren sichtbar sind, doch mit Silber-Osmium-Formol massenhaft dargestellt werden können.

Das Tier besitzt 10 mehr und minder scharfe, manchmal



32. ábra. *E. eurystomus* hasoldaláról Formol-Osmium-toluidinkék segítségével. Cirrusok, membranelák tövében sensucysták. Jobboldalt 3 érzősor sensucystákkal. 500 \times .

Abb. 32. *E. eurystomus* in Ventralansicht nach einem Formol-Osmium-Toluidinblau-Präparat. Am Basalteil der Cirren und Membranellen Sensucysten. 500 \times . Das Tier ist im Einschlussmedium krumm geworden.



33—34. ábra. *E. eurystomus* has- és hátoldaláról Osmium-gentianaibolyás készítmény után. 34. ábra átlagállat. 33: 350 ×, 34: 450 ×.
 Abb. 33. és 34. *E. eurystomus* in Ventral- und Dorsalansicht nach Osmium Gentianaviolett-Präparaten. Abb. 34 ein Durchschnittstier. 33: 350 ×
 34: 450 ×.

kaum sichtbare Dorsalrippen. In Präparaten werden die Tiere etwas ventralwärts gekrümmt (s. Abb. 32) und infolgedessen sind dann die zwei linken Rippen ventral heruntergeschoben und fallen gewissermassen in die Fortsetzung der linken Windung des Wirbelorgans (s. Abb. 32.)

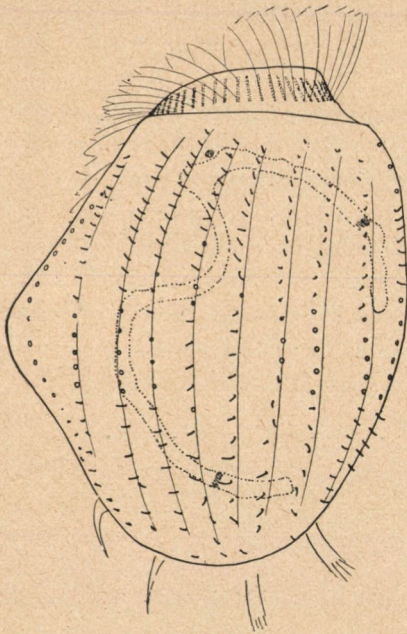
Die Receptoren: Das Tier ist mit zehn Borstenreihen versehen. Die linke Reihe liegt auch hier ventral. Aus ihrer linken Lage an den Rippen folgt, dass die Borsten, mit Ausnahme der zwei rechten Reihen nach links umgeschlagen sind. Die Reihen sind auch hier gegen die Körperenden hin etwas enger gefasst und verlaufen besonders hinten konvergent. Vorne biegen sie etwas nach rechts um, wie bei *patella*. Die Borsten biegen zweckdienlich nach vorne hin, bloss hinten stehen sie vom Körper ab. An Abb. 35 können wir eine genaue Lagerung der Borsten an diesem Tier feststellen; hier ist klar ersichtlich, dass diese vorne dichter beieinander stehen als hinten. An Abb. 34 sind dagegen die Borstenreihen schematisch angeführt. Die einzelnen Reihen sind mit einer grossen Zahl von Receptoren ausgerüstet; ich zählte bis zu 45 in der Gegend der dorsalen Mittellinie. Doch variiert die Zahl der Stiftchen von Tier zu Tier stark, in den mittleren Reihen z. B. zwischen 22 und 45. Auch innerhalb eines Organismus variiert die Zahl der Sinneshaare der Längsrippen nach der Lage der letzteren und zwar dadurch, dass gewisse seitliche Stiftchenreihen kürzer sind als die mittleren. An vier Exemplaren aus der Tisza habe ich die Zahl der Sinnesstiftchen in den einzelnen Längsreihen von links nach rechts gerechnet, wie folgt, festgestellt:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
23	33	35	35	35	33	33	30	22	22
26	32	31	32	33	29	32	28	24	25
26	33	34	34	30	28	29	30	28	26
33	42	45	45	45	42	42	30	28	28

An Abb. 35, wo ein Tier aus einem natronhaltigen Teich (Vértó) abgebildet ist, finden wir in der Reihe kleinere Ziffern: 19, 27, 24, 26, 25, 23, 23, 24, 21.

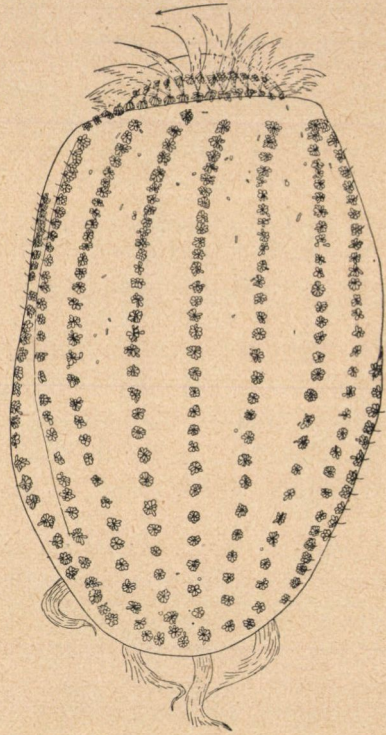
Auch im Falle von *E. eurystomus* finden wir sowohl borstenbesetzte als borstenlose Elemente, deren Verteilung im Mittelwert (berücksichtigt 6 Exemplare aus der Tisza) auf Fig. 34 angeführt ist. Hier sehen wir, dass in der linken, ventralständigen Sinnesreihe keine Borsten vorhanden sind. Wir sehen weiterhin, dass vorne, im Schatten des Wirbelorgans ebenfalls einzelne Borsten

fehlen, deren Zahl nach rechts etwas zunimmt (ich fand in der rechten, 10-ten Reihe höchstens 4 borstenlose Elemente). Weiterhin nehmen wir an der Figur wahr, dass die Sinnesreihen in der mittleren Körperregion (oder davon etwas rückwärts) ebenfalls borstenfrei sind u. zw. besonders an den beiden seitlichen Partien des Körpers. Die 5. u. 6. Reihe ist dagegen in mehr als in 50 v. H. der Fälle vollständig be-



35. ábra. *E. eurystomus* hátoldaláról, Vértói példány. Osmium-gentianaibolya.
350 ×.

Abb. 35. *E. eurystomus* in Dorsalansicht, ein Exemplar aus dem Vértó. Osmium-Gentianaviolett.
350 ×.



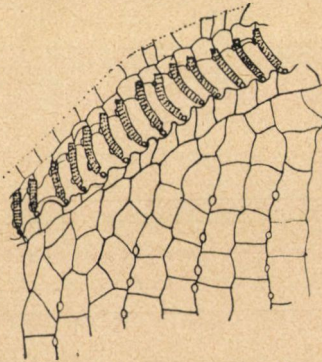
36. ábra. *E. eurystomus* hátoldaláról, Tiszai példány. Ezüst-Osmium-formolos eljárás. Csillagképletek a sensucystákkal. A testben elszórtan néhány sensucysta. 500 ×.

Abb. 36. *E. eurystomus*, Exemplar aus der Tisza in Dorsalansicht. Silber-Osmium-Formol-Verfahren. Sternchen mit Sensucysten. Im Körper verstreut einige Sensucysten. 500 ×.

borstet. Die Zahlen der mittleren borstenfreien Fläche gestalten sich im Mittelwert von der 2. Reihe an folgenderweise: 14, 8, 3, 1, 1, 4, 6, 10, 7.

Aus dem Vértó (Roter-Teich) stammen kürzere Exemplare. Hier war die Zahl der Receptoren in den einzelnen Reihen an einem Exemplar von links nach rechts folgende: 18 (13), 26 (5), 24 (5), 28 (4), 25 (1), 23 (1), 24 (2), 23 (5), 24 (5), 21 (6). An Abb. 34 sehen, wir folgende Verhältnisse: 19 (14), 27 (5), 24 (5), 26 (2, 3), 25 (1, 2, 1), 23 (1), 23 ($\frac{2}{2}$, 2), 23 (5), 24 (5), 21 (3, 6). In der Klammer stehen die mittleren stiftchenlosen Elemente der einzelnen Reihen. Die Zahl derselben ist hier verhältnismässig kleiner als bei den aus dem Flussbett der Tisza stammenden (s. Abb. 34). Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die linke ventrale Reihe hinten an 5 Receptoren mit Stiftchen versehen ist (s. auch Abb. 32) und weiterhin, dass auch vorne, im Schatten des Wirbelorgans bloss rechts 3 borstenlose Receptoren stehen. Diese Tiere sind also besser beborstet als jene aus der Tisza.

Sowohl das Wirbelorgan als die Cirren sind auch hier an ihrem Basalabschnitt mit borstenlosen Sinneselementen ausgerüstet. Diese fallen im Wirbelorgan — wie immer — proximal in die Richtung des aktiven Hochschlages (s. Abb. 37). Die genaue Lage der Receptoren sehen wir an Abb. 37 dargestellt. Diese Abbildung führt uns einen kleinen Abschnitt des vorderen Dorsalfeldes des Tieres mit einem kleinen Teil des Kragens vor. Die Basalabschnitte der Membranellen sind punktiert, die kleinen Kreise daneben bezeichnen die Receptoren. Wir sehen hier, dass die distalen (an

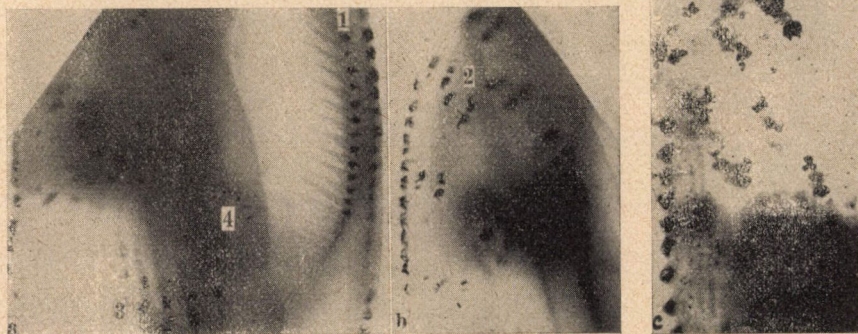


37. ábra. *E. euryostomus* (Tisza) membranellák viszonya a receptorokhoz, s a hátoldal receptorsorai, neuroidrács. KLEIN—GELEI ezüstöző eljárás 700 \times .
Abb. 37. *E. euryostomus* aus der Tisza. Beziehung der Membranellen zu den Receptoren; Receptorenreihen der Dorsal-seite, neuroides Gitter. KLEIN—GELEI-sche Silbermethode.
700 \times .

der Abb. rechts) Membranellen vorderhand mit je zwei Receptoren versehen sind; später, von der 7. Membranelle an tritt eine innere (etwas hintere) Receptorenreihe auf und die so entstandenen drei Receptorenreihen können bis zum Mund verfolgt werden. Laut Abb. 36 stehen am Kragen die hinteren Receptoren endständig an den Membranellen, weiter hinten, am Ventralfeld des Peristoms rücken aber dieselben etwas einwärts, so dass schliesslich die Membranellen nur an ihrer Hinterfläche mit Receptoren versehen sind.

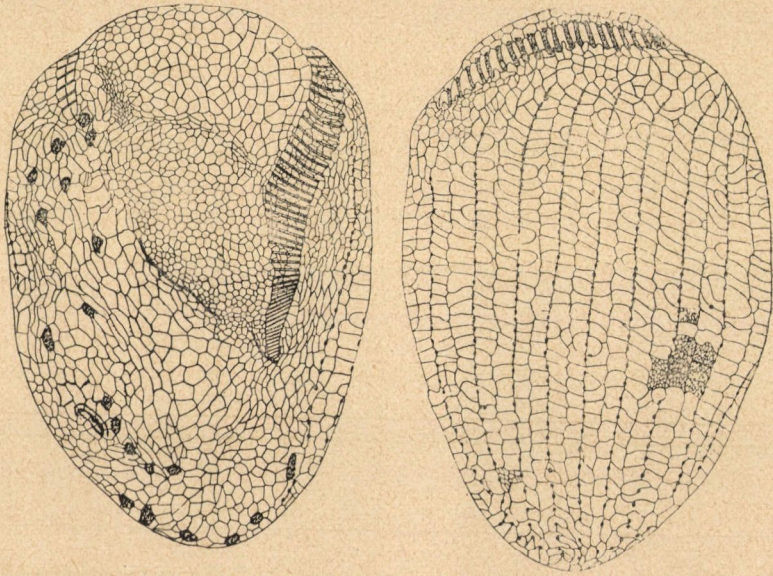
An Abb. 38 sind die Receptoren (mit Sensucysten) der Gehfüsse angeführt. Wenn wir die Verhältnisse mit *E. muscicola* vergleichen, so nehmen wir bald wahr, dass hier bei *E. eurystomus* die Ausrüstung der Cirren mit Proprioceptoren einfacher ist, da an einem Basalabschnitt höchstens je 3 Receptoren entstehen.

Das Neuronemengitter: In Abb. 39 und 40 sehen wir die Verteilung des Neuronemengitters nach einem Präparat mit KLEIN-S trockener Methode. Am Dorsalfeld sehen wir ein normales Doppelmaschensystem.



38. ábra. *E. eurystomus* hasoldal, Tiszai példány. A cirrusok és membranellák tövében fellépő csillagképletek. Mindenik képen balfelől az érzősor csillagcsoportjai. *a* és *b* Formol-Osmium-toluidinkék után, *c* pedig Ezüst-Osmium-Formol után. 500 ×.

Abb. 38. *E. eurystomus*, Exemplar aus der Tisza in Ventralansicht. Am Basalabschnitt der Cirren und Membranellen Sternchen. Auf jedem Bild links Sternchengruppen der Receptorenreihen. *a* u. *b* nach Formol-Osmium-Toluidinblau, *c* nach Silber-Osmium Formol. 500 ×.



39—40. ábra. *E. eurystomus* neuroid rácsrendszere és receptorszerelvénye a hasi és a hátoldalon KLEIN—GELEI-féle ezüstözés után. 500 ×.

Abb. 39—40. *E. eurystomus*, neuroides Gittersystem und Receptorenausrüstung auf der Ventral- und Dorsalseite nach der KLEIN—GELEI-schen Silbermethode. 500 ×.

Merkwürdig ist hier die Unregelmässigkeit des Körperendes dorsal (das Exemplar stammt von der hinteren Hälfte des Muttertieres), die allgemeine Regellosigkeit der Ventralfläche und weiterhin der Umstand, dass sich im Peristomfeld kleinere Maschen entwickeln als sonst.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 15. Februar 1937).

A NYÍRSÉG VEGETÁCIÓJA.

I. A Nyírség erdői.

(Összefoglalás.)

Berci SOÓ REZSŐ-től.

A debreceni egyetem Növénytani Intézete 1930. évben vezetésem alatt megkezdte az Alföld északkeleti, mészből szegény homokterületének, a Nyírségnek növényzozológiai és ökológiai kutatását. A Nyírség egységes, semihumid klímáján belül a talajnedvesség foka (kisebb mértékben más edaphikus sajátságok) és a mikroklimatikus viszonyok szerint látszólag ellentétes jellegű növényzövetkezetek: savanyú talajú homokpuszták, száraz pusztai tölgyesek, nyíresek, árnyas humuszos tölgy-, gyertyán- és nyír-szálerdők, nedves ligetek, mocsári és láprétek, és reliktumfajokban gazdag nyír- és fűzlápok stb. alakultak ki, igen változatos és érdekes kutatási területet nyújtva a geobotanikusnak. Hat éven át folytatott (1930—1935) kutatásaink florisztikai eredményei a Bot. Közl. 1934. 218—252. lapjain láttak napvilágot, a kiegészítő pótlások a Bot. Közl. 1937. évfolyamában jelennek meg. A nyírségi növényzövetkezetek áttekintését a Rübél-Festbandban (Ber. Schweiz. Bot. Ges. 1936. 111 ff.) közöltem, a debrecen-halápi kísérleti területünkön folytatott synökológiai vizsgálatok első közleménye ASZÓD LÁSZLÓ disszertációja (Acta Geobot. Hung. 1936. 75—107). Tíz különböző jellegzetes növényzövetkezet¹ talajának

¹ Kevert kőrsliget (*Fraxineto-Ulmetum*), láprétek (*Caricetum Goo-denowiiacutiformis* és *C. paradoxae drepanocladosum*), fűzláp (*Salicetum cinereae*, ill. *Betuleto-Salicetum*), pusztai erdő (*Quercetum roboris stepposum*), árnyas tölgyes és annak kultúrfaciése (*Q. r. umbrosum* és *urticosum*), akácós (*Robinietum*), homokbucka (*Festuceto-Corynephorietum*) és homoki legelő (*Festucetum pseudovinae potentillosum*).

fizikai és kémiai sajátosságait vizsgáltuk, a teljes kémiai elemzéseken kívül havonta határoztuk meg a talajsavanyúság periodikus változását, amit kiegészítenek a talaj víztartalmára és a hőmérsékletére vonatkozó adataink. Mikroklimatikai állomásainkon² a levegő-hőmérséklet, a relatív nedvesség, a telítettségi hiány, a párolgás, a fényintenzitás napi menetét és napi összegeit havonta egyszer egyidőben végzett összehasonlító méréseink határozták meg, amelyeket szelsebességi, inszolációs stb. mérések egészítették ki. A nyírségi vegetációtípusok mikroklímáját jellemző eredményeink, kb. 7600 mérési adat, táblázatos és grafikai feldolgozása elkészült, megjelentetése nagy terjedelme miatt késik, Aszód dolgozatában csak egy nap méréseinek összefoglaló adatai jelentek meg.

A Nyírség erdeinek javarésze vagy zárt, árnyas, kötöttebb, humuszosabb talajú *mesophil* tölgyes szálerdő (*Quercetum roboris umbrosum*)³ vagy nyiltabb, parkerdőjellegű, tisztásos, lazább homoktalajú, *xerophil*, *pusztai* erdő (*Q. r. stepposum*).⁴ Egyes ártéri-mocsári jellegű tölgyes állományok (*Q. r. hygrophilum*) képezik az átmenetet a florisztikailag érdekes kevert kőrísligetekhez (*Frazineto-Ulmetum*).⁵ amelyek ma már fogyóban vannak. A bükkösök szerepét a tölgyesek közepette található kis gyertyán-állományok (*Carpinetum betuli*) töltik be, ezekhez hasonlóan háttérbe szorultak az egykor elterjedtebb, szép nyíresek (*Betuletum pendulae*), amelyeknek ma csak egyetlen ősi állományát ismerjük. A kis kiterjedésű, de úgy tájképileg feltűnő, mint flóratörténetileg jelentős — Bátorliget reliktumfajainak termőhelyei — nyír- és fűzlápok (*Betuletum pendulae-pubescentis* és *Salicetum cinereae*) gyakran lárpkomplexeket alkotnak lárpretekkel (zsombékosokkal és *Menyanthes*-semlyékekkel), mint pl. Halápon.⁶

² A fentiekén kívül még nádas (*Phragmitetum*) és zsombékos (*Carietum Hudsonii*).

³ pH: 5·4 (*Urtica* facies, felszín, nov.) és 8·2 (*Convallaria* facies, 30 cm mélység, aug.) között változik.

⁴ pH: 5·1 (felszín, jan. — 7·1 (30 cm mélység, szept.) között változik.

⁵ Talaja meszes, pH: 7·6 (felszín, jan.) és 10·5 (50 cm mélység, aug.) közt.

⁶ pH: 6·15 (felszín, jan.) — 7·90 (30 cm mélység, szept.) között változik.

A nyírségi növényoszvetkezetek synökológiai viszonyait más tanulmányosorozatban óhajtván közreadni, jelen munkám kizárólag a szociológiai elemzések (felvételek) eredményeit közli. Tanulmányom három részre oszlik, jelen első az erdős vegetációt (*Lignosa*) tárgyalja, a második rész a rétek (*Herbosa*), a harmadik a puszták (*Deserta*) típusait fogja ismertetni. Az erdők szociológiai feldolgozása kereken 190 állományfelvételen alapul, — ami kb. 400 kvadrát (25 m^2) felvételnek felel meg — ezek teljes anyagának leközlésétől nagy terjedelmük miatt eltekintek, csupán a két legérdekesebb összetételű asszociáció, a nyír (*Betuletum pendulae-pubescentis*) és a fűz (*Salicetum cinereae*) lápok aránylag kisebbszámú állományainak (8, ill. 15) teljes analizisét adom közre. Az árnyas és a pusztai tölgyesek esetében egy-egy terület állományainak listáját adom az egész Nyírségre vonatkozó összesített lista mellett, így a *Quercetum roboris umbrosum*-nál a debreceni Nagyerdő (20 állomány, ill. erdőrésszel 60 kvadrátfelvétele alapján) a *Q. r. stepposum*-nál a debreceni Haláp—Nagycsere terület 12 állományának borítása (A—D) és sűrűség (Fr.) értékeit.

A kevert kőrísliget (*Fraxineto-Ulmetum*) 35 felvett állománya, ill. erdőrésszel Haláp—Nagycsere (5 állomány, 12 kvadrátfelvétel), Bátorliget (20 állomány) és Fényi erdő (10 állomány) területenként nyert összefoglalást. A nyíreserdők, gyertyánosok stb. aránylag kevés felvétele táblázatos elemzést nem tett lehetővé.

A nyírségi erdőtípusokról igen röviden már a magyarországi erdőtípusokról írt összefoglalásomban (Erd. Kis. 1934. 95) megemlékeztem, teljes felsorolásuk a kevert kőrísligetek, a nyír- és fűzlápok jellemző fajkombinációinak összeállításával együtt — mint előzetes közlemény — az 1936. szeptemberében Magyarországon tartott Erdészeti Kísérleti Intézetek Kongresszusának kiadványaként németül jelent meg.

1. *Quercetum roboris tibiscense* (*Q. tiliosum argenteae*) 1. a *Quercetum roboris umbrosum (convallariosum)*. Kocsányos tölgyesek, zárt, árnyas állományok. Konstansok (Fr. : 4—5): 34 faj. Subkonstans (Pr. : 3): 53 faj. I. rendű karakterfajok. (F: 4—5), azaz a *Q. roboris umbrosum* subasszociáció karakter- és differenciális fajai: 55. II. rendű karakterfajok (F: 3) vagy a *Quercion roboris* asszociációcsoport közös karakterfajai (Verbandscharakterarten)

vagy a *Quercetum roboris umbrosum*nak a *Fraxineto-Ulmetum*mal közös jellemző elemei, azaz a *Quercion* és *Salicion* közös karakterfajai.

A *Quercion roboris* nyírségi csoport-charakterfajai: 68. Ezen fajok egyrésze inkább a *Quercetum roboris umbrosum*ban, másrésze inkább a *Q. r. stepposum*ban otthonos. E szerint nyertek egyikben vagy másikban hármás hűségértéket. A *Quercetum roboris*, ill. a *Quercion* és *Fraxineto-Ulmetum*, ill. a *Salicion* közös nyírségi karakterfajai: 76.

Faciesek: 1. *Asperula odorata* (inkább a *Carpinetum*okban és a *Q. roboris hygrophilum*ban).

2. *Convallaria majalis-Polygonatum latifolium* (elterjedt).

3. *Salvia glutinosa-Stachys silvaticus* (elterjedt).

4. *Poa nemoralis* (gyakori).

5. *Agropyrum caninum-Brachypodium silvaticum* (gyakori).

6. *Lithospermum purpureo-coeruleum* (ritka).

7. *Pteridium aquilinum* (inkább a *Betuletum pendulae*ban, gyakran másodlagos).

8. *Urtica dioica* (közönséges kulturfacies).

9. *Rubus caesius* (kül. a *Q. r. hygrophilum*ban).

10. *Alopecurus pratensis-Poa trivialis* (ugyanott).

11. *Senecio nemorensis* (csak Nyíregyháza) szociációk.

A tavaszi aszpektusban a domináló fajok szerint helyenként a következő faciesek különböztethetők meg: *Ranunculus ficaria* (elterjedt), *Lamium purpureum* (gyakori, kulturfacies), *Anemone ranunculoides* (ritka), *Corydalis cava* (ritka). Felvétel: cca 90. A fajok száma, az akcidentalis idegen és ruderalis fajokon kívül kb. 360 edényes növény.

1b. *Quercetum roboris stepposum (festucetosum)*. Pusztai erdők, laza, parkerdőszerű állományok, ritkábban zárt tölgyesek, aljnövényzete *Festucetum sulcatae*. Konstansok (Pr.: 4—5): 53 faj. Subkonstans (Pr.: 3): 60 faj. I. rendű karakterfajok (F: 4—5): 27 faj. II. rendű karakterfajok vagy az előbbivel vagy a *Festucion sulcatae* gyeprétjeivel azonosak.

Facies: 1. *Anthoxanthum odoratum*. 2. *Hierochloë odorata*. 3. *Poa pratensis angustifolia*. 4. *Molinia coerulea major*. 5. *Carex*

*praeco*x szociációk. Felvétel 25. A fajok összes száma — mint fenn — kb. 240 edényes növény.

2. *Carpinetum betuli*. Gyertyánosok, rendszeren az árnyas tölgyesek gyertyános állományai, amelyekben *Asperula odorata* facies uralkodik. A *Quercetum roboris tibiscense umbrosum* konszociációjával is tekinthető.

3. *Betuletum pendulae*. Nyíreszek. Megfogyatkozott reliktum-állományok vagy azok sarjai, ökológiailag és florisztikailag majd a *Quercetum roboris umbrosum*hoz, majd a *Q. r. stepposum*hoz állanak közel, így mindkét növénytársulást jellemző fajából találunk. Karakterfaj I. rendű a *Betuletum*ban nincsen.

Facies: A *Quercetum roboris umbrosum* típusai: 1. *Asperula odorata* (Tornyospálca). 2. *Brachypodium silvaticum*. 3. *Urtica dioica* (mint kulturfacies). A *Q. r. stepposum* típusai: 4. *Anthoxanthum odoratum*. 5. *Poa pratensis angustifolia*. 6. *Festuca sulcata* szociációk. Felvétel: 8.

4. *Salicetum mixtum*. Kevert fűzesek. A Tisza mentének jellegzetes és gazdag kevert fűz (nyár-tölgy)-ligeteti a Nyírségen csak igen töredékesen alakultak ki, nagyobb folyóvizek hiányában. Felvételek hiányoznak.

5. *Alnetum glutinosae*. Égeresek. A fűzesekhez hasonlóan alárendelt szerepük van a Nyírségen az égerligeteknek is, a felvett három kis, erősen kultúrabefolyásolt állomány alapján a következő facieseket állapítottam meg:

1. *Rubus caesium* (elterjedt). 2. *Urtica dioica* (mint kulturfacies). 3. *Bidens tripartita* (helyenként domináns).

6. *Frazineto-Ulmetum*. Kevert kőrisligetek. Idesorozandók a nedves-ligetes tölgyállományok (*Quercetum roboris hygrophilum*), mint átmenet a *Q. r. umbrosum*hoz. Konstansok (K.: 4—5): 7 faj. Subkonstansok (K: 3): 10 faj. Karakterfajok: I. rendű (F: 4—5): 35.¹ II. rendű (F: 3), közös jellemző fajok az *Alni*onnal vagy a *Quercetum roboris umbrosum*mal, nagyobb dominanciával: 25. Konszociációk: *Populus tremula* és *Ulmus glabra* állományok.

¹ Ujabbán talált jellemző faj a *Lathyrus vernus* (Bátorliget, új a Nagy-Alföldre).

Facies: 1. *Carex acutiformis*. 2. *C. remota*. 3. *C. brizoides*. 4. *Rubus caesius*. 5. *Convallaria majalis*, de rendszeren *Polygonatum latifolium* nélkül. (Elterjedt kül. a *Q. r. umbrosum* felé hajló átmeneti állományokban.) 6a. *Hedera helix* (mint az előbbi, különösen a *Q. r. hygrophilumban*). 6b. *Asperula odorata* (csak a *Q. r. hygrophilumban*). 7. *Allium ursinum*. 8. *Asarum europaeum*. 9. *Aegopodium podagraria* szociációk. Felvételek: 35 állomány. A fajok összes száma, az akcidentális idegen fajokon kívül kereken 160.

7. *Betuletum pendulae-pubescentis (salicosum pentandrae)*. Nyírláp-ligetek. Bátorliget festői nyíresei, a Nyírség legérdekesebb fás növényzsövetkezete. Konstansok (K: 4—5): 7 faj. Subkonstansok (K: 3): 12 faj. Karakterfajok. I. rendű (F: 4—5): 4. II. rendű (F: 3): 7.

Facies: 1. *Nephrodium thelypteris* (hét felvétel). 2. *Calamagrostis canescens* (egy felvétel). A fajok összes száma cca. 90, az akcidentális fajok nélkül: 70.

8. *Salicetum cinereae (calamagrostidosum canescentis seu phragmitosum)* incl. *Betuleto-Salicetum cinereae*. Fűzláp-ligetek. Konstansok (K: 4—5): 8 faj. Subkonstans fajok (K: 3): 8 faj. Karakterfajok. I. rendű (F: 4—5): 10. II. rendű (F: 3): 15.

Facies: A eszterjeszintben, ill. a felső gypeszintben uralkodnak: *Salix cinerea*, *Calamagrostis canescens* (ritkán hiányzik) és *Phragmites vulgaris*, az alsó gypeszintben *Nephrodium thelypteris* és *Carex Hudsonii*, ritkábban (Haláp, Debrecen—Hajdusámson közti láp) *Carex paradoxa*.

Konszociáció: *Betuletum-Salicetum* (Haláp) lombkoronaszinttel, amelyben *Betula pendula* és *Populus tremula* uralkodnak. Aljnövényzetében a *Carex paradoxa* facies. A halápi láp így három növényzsövetkezet a *Betuletum pendulae*, a *Salicetum cinereae* és a *Caricetum paradoxae* asszociációkomplexe. Felvételek: 15 állomány. A fajok összes száma cca. 120, ill. az akcidentálisok nélkül 95.

A *Betuletum pendulae-pubescentis* és a *Salicetum cinereae* karakterfajainak együttese adja a láperdők, az *Alnion glutinosae* asszociációcsoport nyírségi karakterfajait.

A nyír- és fűzlápok további alkotó elemei a mocsári, lápréti és kis mértékben ligeti vegetáció, tehát a *Phragmition*, *Magno-caricion*, *Molinion* és *Salicion* fajaiból kerülnek ki.

Kultúrerdők:

9. *Robinietum pseudacaciae*. Akácok. Részletes vizsgálatunk tárgyát nem képezték. Akácaink florisztikai típusairól MAGYAR PÁL tanulmánya lesz hivatva képet adni.

Faciések: *Anthriscus trichosperma* (tavasszal), *Bromus sterilis*, *Poa pratensis angustifolia* etc.

10. *Pinetum silvestris*. Erdei-fenyvesek. Aljnövényzetük, bár teljesen másodlagos, érdekes összetételt mutat (v. ö. BOROS flóraműve 161—163) gazdag moha és páfrányflora leginkább a lengyelországi eredetű *Pinus silvestris* ültetvényekben található. Uralkodó facies a *Hylocomium proliferum*. Érdekes adventiv elemek: *Phytolacca americana* (pl. Téglás), *Pirola uniflora*, *Erechtites hieracifolia* (Nyírbakta).

A Nyírség erdői és erdőtípusai teljes terjedelmében megjelent az Erdészeti Kísérletek (1937. XXXIX. 337—380) folyóiratban, öt táblázattal.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1937. máj. 24-én tartott üléséből.)

DIE VEGETATION DES SANDGEBIETS NYÍRSÉG.

I. Die Wälder (Lignosa).

Von R. von SOÓ.

Das Botanische Institut der Universität Debrecen begann im Jahre 1930 die soziologisch-synökologische Erforschung der Vegetation des Nyírség, des nordöstlichen kalkarmen Sandgebiets des Alföld, wo in einem einheitlichen semihumiden Klima — je nach dem Grade der Bodenfeuchtigkeit und den mikroklimatischen Verhältnissen — Vegetationstypen scheinbar entgegengesetzten Charakters: acidiphile Sandpuszten, xerische Eichenwälder, Birkenhaine, schattige, humöse Eichen-, Hainbuchen- und Birkenhochwälder, feuchte Auenwälder, Sumpf- und Moorzweiden, an Reliktarten reichen Birken- und Weidemoore usw. nebeneinander bestehen. Die floristischen Ergebnisse unserer Forschungen wurden in der Zeitschrift «Botanikai Közlemények» 1934 und 1937, die Übersicht der Pflanzengesellschaften des Nyírség in dem Rübelfestband (Ber. Schweiz. Bot. Ges. 1936.), die synökologischen Ergebnisse der Forschungen in Debrecen—Haláp — als Dissertation von L. ASZÓD — in den Acta Geobot. Hung. 1936 veröffentlicht. Die Waldassoziationen und Waldtypen habe ich zum Kongress des Internationalen Verbandes Forstlicher Forschungsanstalten (1936) zusammengestellt.

Die synökologischen Verhältnisse, besonders die Bearbeitung unserer ausführlichen mikroklimatischen Messungen in Tabellen und Graphikons möchte ich anderswo veröffentlichen. Der I. Teil behandelt die Waldpflanzengesellschaften (Lignosa), der vollständige Text mit den Ergebnissen der soziologischen Analysen in Form synthetischer Tabellen ist in der Zeitschrift Erdészeti Kísérletek (Forstliche Versuche) 1937. 337—380 erschienen. Die soziologische Bearbeitung der Wälder umfasst rund 190 Bestandaufnahmen, die ungefähr 400 Quadrat(25 m)-Aufnahmen entsprechen. Der grösste Teil der Wälder des Nyírség sind entweder mesophile, geschlossene, schattige Eichenhochwälder (*Quercetum*

roboris umbrosum), auf mehr gebundenem, humösen Boden mit pH zwischen 5·4 und 8·2 oder xerophile, nicht geschlossene, parkwaldartige, lichtungreiche Eichensteppenwälder (*Q. r. stepposum*), auf lockerem Sandboden mit pH zwischen 5·1 und 7·1.

Einige sumpfige Eichenbestände (*Q. r. hygrophilum*) bilden die Übergänge zu den floristisch interessantesten gemischten Eschen-Ulmenauen (*Fraxineto-Ulmetum*) mit mehr kalkhaltigem Boden. Die Rolle der Buchenwälder spielen die sich inmitten der Eichenwälder befindenden kleinen Hainbuchenbestände (*Carpinetum betuli*), ebenso zurückgedrängt wurden auch die einst mehr verbreiteten schönen Birkenwälder (*Betuletum pendulae*), deren nur ein alter Bestand bekannt ist. Die kleinen, aber landschaftlich schönen, wie florengeschichtlich wichtigen Birken- und Weidenhaine (*Betuletum pendulae-pubescentis* und *Salicetum cinereae*) bilden oft Moorkomplexe mit Moorwiesen und *Menyanthes*-Schlenken. Unter den Kulturforsten sind zu nennen die Robinieten und die *Hylocomium*-reichen Kiefernbestände.

Übersicht der behandelten Assoziationen:

1. *Quercion roboris* (*Q. roboris-sessiliflorae* Br.—Bl.)
 - Quercetum roboris tibiscens?* (*Q. r. tiliosum argenteae*)
 - a) *convallariosum*
 - b) *festucetosum sulcatae*
 - c) *hygrophilum*
 - Carpinetum betuli*
 - Betuletum pendulae*
 2. *Salicion (Alnion incanae)* *Salicetum mixtum*
 - Alnetum glutinosae*
 - Fraxineto-Ulmetum*
 3. *Alnion glutinosae* *Betuletum pendulae-pubescentis (salicosum pentandrae)*
 - Salicetum cinereae (calamagrostidosum canescentis s. phragmitosum) incl.*
 - Betuleto-Salicetum*
- Culla:*
- Robinietum pseudacaciae*
 - Pinetum silvestris*

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Mai 1937.)

A NYÍRSÉG VEGETÁCIÓJA.

II. A Nyírség vízi, mocsári és réti növényyszövetkezetei.

(Összefoglalás.)

B. SOÓ REZSŐ-től.

A nyírségi növényyszövetkezetek szociológiai feldolgozásának első része az erdei vegetációtípusokat (*Lignosa*) foglalta magában (Erdészeti Kísérletek XXXIX. 1937. 337—380.). Jelen második rész a rétek illetőleg a *Herbosa* típusait ismerteti, beleértve a vízi és mocsári vegetációt. A xerotherm pusztai rétekről a harmadik részben: *Deserta* (homok- és szikespuszták) emlékezem meg.

Mesophil jellegű természetes kaszálók (*Arrhenatherion*) területünkön nincsenek, hacsak a *Festucetum pratensis* kevésbé nedves rétjeit nem tekintjük idetartozóknak, ezek viszont *Agrostis alba*—*Poa trivialis* konszociációjuk révén inkább az *Agrostidion albae*, a mocsárrétek federációjába sorozhatók.

A hínárvegetáció (a hydratophil növényyszövetkezetek összessége) ökológiai és szociológiai csoportosításáról másutt írtam (Magy. Biol. Int. Munkái II. 1928. 45—48 és VII. 1934. 137.). A rögzített Benthos (gyökerező limnophyta és amphiphyta) tagjai: az emers tündérrózsahínár és a submers nagyhínár szociológiailag a **Potamion eurosibiricum** asszociációs csoportba tartoznak, amelynek laza társulású állományai illetőleg szociációi igen változatos összetételű szövetkezetekké egyesülnek. A nem rögzített Pleuston: az emers vagy submers lebegő hínár a **Hydrocharition** federációt alkotja, tagjai azonban gyakrabban az előbbi csoport asszociációinak kísérőiként jelennek meg.

Áttekintés: 1. *Nupharetum-Castalietum*. Uralkodnak az emers, a víz felszínén szétterülő fajok, a submers és lebegő alakok háttérbe-

szorulnak, különösen a látható dominanciát illetőleg. Jellemzők: *Castalia alba*, *Hydrocharis morsusranae*, *Caldesia parnassifolia*, *Potamogeton natans*, *P. gramineus* ssp. *heterophyllus*.

Gyakoribb a következő assz.-val alkotott komplexe: a *Myriophylleto-Castalietum* (*Myriophylleto-Nupharetum* W. KOCH), amely a *Potamion* submers és emers fajait egy biotopban egyesíti. Egyes állományok már inkább a tündérrózsahínár és a lebegőhínár közös szövetkezeteinek tekinthetők, *Lemneto-Castalietum*.

2. *Myriophylleto-Potametum*. Az emers alakok háttérbe szorulnak, a *Potamogetonok* és *Myriophyllumok* dominálnak. Jellemzők: *Myriophyllum spicatum*, *Potamogeton crispus*, *P. gramineus* ssp. *graminifolius*, *P. lucens*, *Najas*-ok, *Alisma gramineum* f. *angustissimum* gyakoriak a félig lebegő *Ceratophyllumok*.

3. *Ranunculeto-Callitrichetum*, az apró rögzített emers vagy submers hínárok: *Ranunculus* (*Batrachium*) fajok, *Callitrichek*, *Elatinek* uralkodók.

4. *Parvipotameto-Zannichellietum*. A szikes tavak jellemző hínárja, uralkodnak, illetőleg jellemzők: *Potamogeton pectinatus*, *Zannichellia palustris*.

5. *Lemneto-Utricularietum*. Uralkodnak a lebegő, emers alakok. Tiszta állományai (*Lemna minor*, *L. gibba*, *Utricularia vulgaris*) ritkák, rendszeren az előbbi növénysszövetkezetekkel komplexekké olvadnak össze, pl. *Lemneto-Castalietum*.

A törpe kákák **Nanocyperion** asszociációcsoportját a tulajdonképeni Nyírségen csak fragmentárisan találjuk meg, kisebb *Cyperus fuscus*, *Pycneus flavescens*, *Juncus bufonius*-synusiumok alakjában, viszont a Tisza árterületén, a Nyírség szegélyén már kiterjedtebb *Schoenoplectetum supini* és *Heleocharidetum acicularis* állományokkal találkozunk, a kötöttebb iszapos agyagtalajon. Ezek sem képezték behatóbb szociológiai elemzés tárgyát, egy érdekes állomány (*Schoenoplectetum* a jellemző *Peplis*, *Elatine*, *Lindernia*, *Limosella* fajokkal) fajlistáját Vásárosnamény mellől BOROS (Nyírség fl. 141.) közli.

A szociológiailag feldolgozott *Herbosa* növénysszövetkezetek végeredményben négy federációba sorozhatók: I. *Phragmition vulgaris*. Nádasok. — II. *Magnocaricion*. Zsombékosok. — III. *Parvocaricion* = *Molinion coeruleae*. Láprétek. — IV. *Agrostidion albae*.

Mocsárrétek. Ökológiájukra vonatkozólag ASZÓD LÁSZLÓ (Acta Geobotanica Hungarica 1936. 75—107) disszertációja közölt adatokat. Talajuk nedves hűvös (v. ö. talajhő és talajnedvességértékek, 1. c. 82—84. o.), mésztelen, pH-értékek: *Caricetum paradoxae* 6. (nov.) — 7.9 (szept.) az A, 6.4 (nov.) — 7.8 (jún.) a B szintben (példa a Magnocaricionra). *C. Goodenowii* 7 (május) — 8 (szept.) az A, 6.8 (jan.) — 8.5 (szept.) a B szintben (példa a Parvocaricionra). Bátorliget (május): *Calamagrostidetum neglectae* 7.8 *Caricetum acutiformis* 6—6.5 *C. vesicariae* 6.5 *Festucetum pratensis* 6. A mikroklímikus viszonyokra vonatkozólag ez év folyamán megjelenő nagy ökológiai munkám ad áttekintést.

Az összes felvételek száma mintegy 240, az ezekből számított (szintétikus) asszociációlistákat 12 táblázat alakjában nagy terjedelmük miatt másutt fogom közreadni. A növényiszövetkezetek áttekintését lásd a német szövegben.

1. Phragmition.

A nyírségi nádasokban legelterjedtebb állományalkotó a nád, amelyet legtöbbször a *Calamagrostis canescens* kísér, a magyarföldi nádasok ritka karakterfaja, az *Urtica kioviensis* csak Bátorliget és a Fényi erdő nádasában (v. ö. Zólyomi Vasi Szemle I. 149, itt állományfelvétel), e szerint a *Phragmitetum*nak két szubasszociációját kell megkülönböztetnünk, a tipikus *Ph. vulgaris calamagrostidosum canescens* és a *Ph. vulgaris urticosum kioviensis* utóbbinál a Nyírségen ritka *Glyceria aquatica* konszociáció (*Phragmitetum glyceriosum*) is. Egyébként a nádat gyakran helyettesíti területünkön a gyékény, rendszeren a *Typha angustifolia*, ritkábban a *T. latifolia* — valamint a káka, a *Schoenoplectus lacustris*. Mint konszociációkat (*Ph. typhosum* és *schoenoplectosum*) — miután összetételük lényegében az igazi nádaséval azonos a *Phragmitetum*on belül kell tárgyalnunk.

A nádas (***Phragmitetum vulgaris*** sensu lato = *Scirpeto-Phragmitetum* W. KOCI) azaz a *Phragmition* asszociációs csoport jellemző fajkombinációja: Konstans és gyakori fajok (K: 3—5): *Phragmites*, *Typha angustifolia*, (*Carex Hudsonii*), *Alisma plantago-aquatica*, *Lytthrum salicaria*, (*Galium palustre*) I. rendű karakterfajok,

(F: 4—5): *Typha angustifolia*, *latifolia*, *Schoenoplectus lacustris*, *Glyceria aquatica*, *Urtica kioviensis* (egyben differenciális faj)-II. rendű karakterfajok (F: 3): *Phragmites*, *Calamagrostis canescens* (diff. faj), *Sparganium erectum*, *Butomus*; *Senecio paludosus*, *Chrysanthemum uliginosum* (a Ph. calamagrostidosum diff. fajai is) etc. Az edényes növényfajok száma, az akcidentális elemek leszámításával 45. A *Menyanthes*-semlyékkal tarkított nádast összetétele alapján a *Menyanthetumnál* tárgyalom, bár a *Phragmitetum* harmadik subass.-jául (*Ph. menyanthetosum*) is tekinthetnénk, legfontosabb karakterfaja a *Ligularia sibirica*.

A felvételek száma: 1. *Phragmitetum typicum* (calamagrostidosum): 5, 2. *Ph. urticosum kioviensis*: 3, 3. *Ph. typhosum*: 8, 4. *Ph. schoenoplectosum*: 4 állomány.

2. Magnocaricion.

A zombékosok, magassásnövényzövetkezetek a Nyírségen változatosak és érdekesek, elsősorban a batorligeti és halápi állományok, legszebb azonban a nyírbélteki «Zombékos» hatalmas tömege. Osztályozásuk nehéz, physiognomiailag a zombékolóságok növényzövetkezetei hasonlók, így a *Carex Hudsonii*, a *C. acutiformis*, a *C. paradoxa* állományai, amelyekhez a Nyírségen még a *Calamagrostis neglecta* zombékjai járulnak. A két utóbbiban megjelennek a *Menyanthes* semlyékei is, hogy végül önálló asszociációvá záruljanak *C. pseudocyperus*, *C. Hudsonii* vagy *Phragmites* kíséretében.

A nyírségi *Magnocaricion* federáció felosztása:

1. Caricetum Hudsonii. Azonos összetételű konszociáció: *C. acutiformis* (*C. ripariae*) a legelterjedtebb típus. A további asszociációkkal szemben a *Phragmition* elemek nagyobb számú fellépése (így *Schoenoplectus*, *Typha*, *Sparganium*, *Calamagrostis canescens*, *Stellaria aquatica*, *Oenanthe aquatica*, *Calystegia*) jellemzi, amelyek a továbbiakban már csak akcidentálisan szerepelnek. Rendesen tó- vagy árokparti zonációnak a nádassal érintkező tagjaként lép fel, ritkábban a láprétek mélyebb, nedvesebb részein, esetleg a *Salix cinerea* fűzlápok vagy a *Betula pubescens* nyírligetek tisztásain vagy határán. A *C. riparia* a *Caricetum acutiformison* belül helyenként nagy tömegével fációskepző.

Az asszociáció jellemző fajkombinációja a Nyírségen: Konstans és gyakori fajok (K: 3—5): *Carex Hudsonii*, *C. acutiformis*, *Phragmites*, *Agrostis alba*, *Alisma plantago-aquatica*, *Iris pseudacorus*, *Lythrum salicaria*, *Oenanthe aquatica*, *Lysimachia vulgaris*, *Lycopus europaeus*, *Galium palustre*. Karakterfajok (F: 4—5), *Carex riparia*, *C. utriculata*, egyébként a *Magnocaricion* többi ass.-val szemben a fenn felsorolt *Phragmition*-fajok. Az edényes növényfajok száma 44.

2. Calamagrostidetum neglectae. A Nyírség jellegzetes zombékosa, nagyobb állományokban ugyancsak Bátorligeten, itt leginkább *Carex pseudocyperus*sal és Halápon, itt *C. Hudsonii*val, e szerint két fáciesét különböztethetjük meg. A láprétek legmélyebb, legnedvesebb részein alakul ki, a zombékok közti vízben hínár is teremhet, akcidentálisan még nádasnövények is találhatók.

A jellemző fajkombináció hasonló, (K: 3—5): *Calamagrostis neglecta* (F: 5), *Carex Hudsonii*, *C. acutiformis*, *C. pseudocyperus* (F: 4), *Alisma*, *Polygonum amphibium*, *Lythrum salicaria*, *Lysimachia vulgaris*, *Mentha aquatica*, *Teucrium scordium*, *Galium palustre*, *Drepanocladus*. Az edényes növényfajok száma: 25.

3. Caricetum paradoxae (drepanocladosum) Magasabb fekvésű zombékosok, az eltűnő víz helyébe mohagyep (dominans *Drepanocladus*szal), ritkábban *Menyanthes sinusium* lép, a zombékok alacsonyak, néha már gyepébe egyesülnek. Leginkább a fűznyírlápok tisztásain, sőt Halápon azzal komplexbe egyesülve, Bátorligeten a nyírlápok közötti területen. A *Menyanthes*en kívül Bátorligeten a *C. paradoxa* mellett a *C. pseudocyperus* vagy a *C. elongata* lép fel nagyobb dominanciával, mint fáciesképző, előbbi átmegy a *Menyanthes* *caricetosum pseudocyperis*-ba, utóbbit esetleg konzociációul is tekinthetjük.

Jellemző fajkombinációjában egyes, itt már nagyobb szerepet játszó *Molinion*-elemek tűnnek fel, mint amelyek a többi *Magnocaricion*tól megkülönböztetik, I. rendű karakterfajokul a *C. paradoxa* és *C. elongata* tekinthető. K: 3—5: *Carex paradoxa*, *Phragmites*, *Agrostis alba*, *Caltha palustris*!, *Ranunculus repens*!, *Lythrum salicaria*, *Galium palustre*, *Equisetum palustre*!, *Nephrودیum thelypteris*, *Drepanocladus*. Az edényes növényfajok száma: 47, a mohoké 9.

4. Menyanthes trifoliatae néven azon állományokat fogalom össze, amelyek gyepszintjében a semlyékekben a *Menyanthes* állandó és legtöbbször nagyobb dominanciájú elem. Ezek: *Menyan-*

thetum caricetosum pseudocyperi, *caricetosum Hudsonii* és *phragmitetosum*. Viszont tekinthetjük valamennyit a kérdéses magnocaricetum illetőleg a nádas *Menyanthes*-semlyékekkel (synusiumokkal) tarkított subass.-jának, ez esetben nevük *Caricetum pseudocyperi menyanthetosum* (mint ilyen a *C. paradoxa*hoz áll a legközelebb), *C. Hudsonii menyanthetosum* és *Phragmitetum menyanthetosum*. Differenciális fajokul tekinthetők az elsöre: *Carex vesicaria*, a másodikra — de csak a kállósemlyén-nagymohosi állományokban — (a Nyírségen egyben karakterfajok is az ass.-ra nézve): *C. inflata*, *C. diandra*, *Cicuta*, a harmadikra a *Ligularia*.

Jellemző fajkombináció (K: 3—5): *Menyanthes* (F: 5) *Carex Hudsonii*, *C. pseudocyperus* (F: 4), *Alisma*, *Phragmites*, *Calltha*, *Lythrum salicaria*, *Lysimachia vulgaris*, *Galium palustre*, *Nephrodium thelypteris*. Az edényes növényfajok száma: 42.

Menyanthes synusiumok az előző két asszociációval is léphetnek korrelációba, azokkal komplexet alkotva.

A *Menyanthetum* típusaihoz áll legközelebb az 5. **Caricetum vesicariae**, amely Bátorliget láprétjeinek semlyékeiben elterjedt, helyenként nyír- vagy fűzlápokban is, miként a *Menyanthes* synusiumok, azok gyepszintjét alkotva. Karakterfajaiul tekinthetjük a *Carex vesicaria*-t és *C. inflata*-t. Jellemző fajkombinációjában még *Alisma*, *Lythrum*, *Lysimachia vulgaris*, *Mentha aquatica*, *Galium palustre*. Helyenként a *C. inflata* dominál, összetétele alapján ide veszem a *Juncus atratus* állományát is, mint konszociációkat. Az edényes fajok száma: 34.

6. Caricetum intermediae és a konszociációjául tekinthető *C. vulpinae* állományok physiognomiailag még inkább a *Magnocaricion*-hoz tartoznak, de már zárt gyepeket alkotnak, nem zsombékolnak s így átmenetet képeznek a *Parvocaricion* láprétekhez. Összetételükben mindenféle elemet találunk a nádasoktól a mocsári ruderaliák képviselőiig. (pl. *Rumex hydrolapathum* és *Bidens tripartita* faciesképzők, átmenet a *Bidentetum tripartiti*hez).

Jellemző fajkombináció (K: 4—5): *Carex intermedia*, *C. Hudsonii*, *Agrostis alba*, *Alisma*, *Ranunculus repens*, *Lythrum salicaria*, *Mentha aquatica-verticillata*, *Galium palustre*, *Drepanocladus*. Az edényes növényfajok száma: 31.

Összefoglalva: a *Magnocaricion* növényközvetkezeteinek flo-

risztikai felépítése igen hasonló, inkább ökológiaileg és physiognomiailag különböznek, elsősorban a dominans fajok alapján. Kisebbségben nagyobb gyakorisággal és borításban (A—D), sűrűséggel (Fr.) és az egyes ass.-kban különböző állandósággal (K) a legtöbb faj mind-egyik asszociációban megtalálható, azaz az eltérések inkább kvantitativék, mint kvalitatív jellegűek, ezért az asszociáció-charakterfajok illetőleg a differenciális fajok csekély száma. A federáció karakterfajaiul tekinthető : *Calamagrostis neglecta*, *Carex diandra*, *elongata*, *inflata* et ssp. *utriculata*, *intermedia*, *paradoxa*, *pseudocyperus*, *riparia*, *vesicaria*, *Menyanthes*, míg a *Phragmition*nal közös jellemző elemek (pl. *Alisma*, *Iris*, *Rumex hydrol.*, *Roripa amphibia*, *Lysimachia vulg.*) harmadrendű karakterfajok. A *Cicuta* és *Ligularia* szórványosan fűz- vagy nyírlápban is teremnek. Jellemző, hogy senlyék-asszociációk (*Menyanthetum*, *Caricetosum vesicariae*, *C. inflatae*) a zombék szövetkezetekkel (*C. Hudsonii-acuteformis*, *C. paradoxae*, *C. pseudocyperis*, *Calamagrostidetum neglectae*) komplexeket képeznek, sőt fűz- és nyírláppokkal is. Amennyiben az összes tárgyalt asszociációk és konszociációk elemzett állományait (kb. 120) egybevetjük, a következő fajokat tekinthetjük a federáció 3—5 állandóságú elemeinek : *Phragmites*, *Agrostis alba*, *Carex Hudsonii*, *C. pseudocyperus*, *Alisma*, *Caltha*, (*Ranunculus repens*), *Lythrum salicaria*, *Lysimachia vulgaris*, *Mentha aquatica* incl. *verticillata*, *Galium palustre*, *Drepanocladus*.

A felvételek száma: 1. *Caricetum Hudsonii* (10 állomány, 8 kvadrát); 2. *C. acuteformis-ripariae* (16 kvadrát); 3. *Calamagrostidetum neglectae* (14 kvadrát); 4. *Caricetum paradoxae* (28 kvadrát); 5. *Menyanthetum caric. pseudocyperis* (8 kvadrát); 6. *M. caric. Hudsonii* (2 állomány, 6 kvadrát); 7. *M. phragmitosum* (10 kvadrát); 8. *Caricetum vesicariae* (10 kvadrát); 9. *C. intermediae* (8 kvadrát); 10. *C. vulpinae* (5 kvadrát felvétel).

3. Parvocaricion = Molinion.

A sás-láprétek elterjedt típusa a zárt gyepű, nem zombékoló, dús mohaszintű *Carex acuteformis* (és *Hudsonii*) növényiszövetkezet, amelyet mint *Caricetum acuteformis agrostidosum*-ot a *Parvocaricion*- illetőleg a *Molinion*-csoport képviselőjének tarthatunk. A *Molinetum* a Nyírségben igen alárendelt szerepet játszik, helyette nem zombékoló sásoknak és mocsárrétek fűveinek (*Agrostis alba*

és *Poa trivialis*) állományait találjuk meg, ezek legérdekesebbje a *Caricetum Goodenowii*, utóbbi csak Bátorligeten és Halápon. Maga a *Molinietum* mint *M. caricetosum paniceae* — Nyugaton elterjedt típus — a mocsárrétekhez közeledik.

1. Caricetum acutiformis agrostidosum. A *Magnocaricion* (és egyes *Phragmition*) elemek fokozatos visszaszorulásával gyarapszik a *Molinion* illetőleg *Agrostidion*-fajok száma, a *Molinia* hiányzik, *Agrostis* uralkodik, helyenként a *Heleocharis palustris*nak a Tiszántúlon elterjedt konszociációja, — ezt a Nyírségen, ahol kisebb foltokon ritka, inkább fációsnek tekinthetjük, hasonlóan az *Eriophorum polystachyum*ban gazdag állományokat is. (*Caricetum acutiformis heleocharidosum* és *C. a. eriophorosum*) A *Parvocaricion* többi ass.-jától *Magnocaricion*-elemek fellépése (*Alisma*, *Iris*, *Roripa amphibia* etc.). különbözteti meg.

Jellemző fajkombinációja (K: 3—5): *Carex acutiformis*, *C. Hudsonii*, *Heleocharis palustris*, *Eriophorum polystachyum*, *Agrostis alba*, *Ranunculus repens*, *Caltha palustris*, *Lythrum salicaria*, *Lysimachia nummularia*, *Mentha aquatica* incl. *verticillata*, *Galium palustre*, *Bryum ventricosum*, *Drepanocladus*. I. rendű karakterfaj az *Eriophorum latifolium*, a *C. Goodenowii*val közös karakterfajok pl. *Epilobium palustre*, *Taraxacum palustre*, *Cirsium brachycephalum*. Edényes növényfajok száma: 44.

2. Caricetum Goodenowii. Uralkodik a *Carex Goodenowii*, mellette esetleg a *Poa trivialis*, a *Magnocaricion*-elemek eltűnnek, növekszik a *Molinion*-elemek száma és jelentősége (*Molinia*, *Carex panicea*, *Sanguisorba* et.) hasonlóan az *Agrostidion*-elemeké.

Jellemző fajkombinációja (K: 3—5) *Carex Goodenowii* (I. r. karakterfaj) *C. panicea*, *Poa trivialis*, *Lychnis flosculi*, *Caltha palustris*, *Ranunculus repens*, *R. acer*, *Angelica silvestris*, *Mentha aquatica-verticillata*, *Galium uliginosum*, *Cirsium canum*, *Equisetum palustre*, *Drepanocladus*. Edényes növényfajok száma: 48.

3. Molinietum caricetosum paniceae. Az uralkodó *Molinia* és *Carex panicea* mellett az *Eriophorum polystachyum* fációs-képző, különben a *Molinion* elemek dominanciája mellett az *Agrostidion* elemek mindjobban előtérbe kerülnek (*Lychnis*, *Ranunculus acer* *Cirsium canum* etc.).

Jellemző fajkombinációja (K: 3—5): *Carex panicea* (F: 4), *C. acutiformis*, *Molinia* (F: 5), *Lychnis flosculi*, *Ranunculus repens*, *R. acer*, *Sanguisorba officinalis* (F: 3—4), *Trifolium pratense*, *Vicia cracca*, *Lathyrus*

pratensis, *Linum catharticum*, *Angelica silvestris*, *Mentha aquatica-verticillata*, *Prunella vulgaris*, *Plantago lanceolata*, *Centaurea pannonica*, *Cirsium canum*, *Leontodon autumnalis*, *Equisetum palustre*. A *Drepanocladus* fokozatosan elmarad. Edényes növényfajok száma: 50.

Összefoglalva: A *Parvocaricion* illetve *Molinion* nyírségi asszociációi fokozatos átmeneti sorozatot képeznek a zombékosztól a mocsári rétekgig, mint ilyenek a láprétek tekintélyes területét borítják. (Zonáció a halápi réteken: 1. *Caricetum Hudsonii* vagy *Calamagrostidetum neglectae*. 2. *Caricetum acutiformis agrostidosum* 3. *Caricetum Goodenowii*. 4. *Molinetum caricetosum paniceae*). Jellemző az uralkodó sás és fűfajokon és a *Drepanocladuson* kívül a *Caltha palustris*, *Ranunculus repens*, sokszor az *Eriophorum polystachyum* nagy állandósága, ezeket a federáció II. rendű karakterfajainak tekinthetjük. I. rendű karakterfajai területünkön a fent említett asszociáció-karakterfajok. A dunántúl-kisalföldi karakterfajok (Soó: Balatonvidék, ZÓLYOMI: Hanság) nagyrésze a Nyírségen hiányzik vagy más növényközösségek tagja, külföldön *Agrostidion*ban teremnek, így *Dianthus superbus*, *Succisa pratensis*, *Orchis incarnatus*.

A felvételek száma. 1. *Caricetum acutiformis*: 22, 2. *C. Goodenowii*: 17 3. *Molinetum*: 12 kvadrátfelvétel.

4. *Agrostidion albae*.

A mohaszint elmaradásával a lápréteket a mocsárrétek váltják fel. Az *Agrostidion albae* federációnak számos állománya a Nyírség egész területén elterjedt, míg a láprétek inkább a reliktum lápterületeken (Bátorliget, Haláp stb.) maradtak fenn. A buckaközi völgyekben, nagyobb lapályokon, tavak és patakok mentén három főtípusba (ass.) osztható állományaikban a fűvek veszik át a sásoktól a vezérszerepet. Mélyebb részekben a *Carex distans* lehet domináns a *Poa trivialis* és *Agrostis alba* mellett (*Caricetum distantis*), majd — a nedvesség csökkenésével — a *Carex distans* elmarad, a *Festuca pratensis* és *Bromus pratensis (commutatus)* szaporodik; végül a *Festuca pratensis* és a *Poa trivialis* codominsak, helyenként a *Bromus pratensis*, ezek a szárazabb talajú örökzöld rétek: *Festucetum pratensis*. Utóbbit az *Arrhenatherion elatioris* federáció képviselőjéül is tekinthetjük, maga az

Arrhenatherum gyep csak mesterséges növényiszövetkezetként jelenik meg területünkön. A réttípusokat a domináns kétszikűek (nyári-őszi aszpektus) alapján választhatjuk szét.

1. Caricetum distansis samicum (*Agrostideto-Poetum trivialis caricetosum distantis*). Összetételében közel áll a *Molinietum*hoz, de annak jellegzetes elemei visszahúzódnak, uralkodnak a *Carex distans* (F: 4), a *Poa trivialis* vagy *Agrostis alba*, helyenként, mint fációskepző, a *Juncus compressus* (F: 3—4). Domináns kétszikűek: — fációskepek, réttípusok — *Ranunculus acer*, *Taraxacum officinale* tavasszal, *Daucus carota*, *Pastinaca sativa*, *Cirsium canum* nyárutón-ősszel (a sarjában). Jellemző fajkombináció (K: 3—5): az említett dominánsokon kívül: *Lychnis floscuculi*, *Ranunculus repens*, *Lysimachia nummularia*, *Equisetum palustre*. Asszociáció karakterfajai valójában nincsenek. Az edényes növényfajok száma 4²

1—2. *Agrostideto-Poetum trivialis* konzociáció összetétele kvalitative a *Festucetum pratensisszel* egyezik, csupán a dominánsok és egyes fajok A—D és K értékei mások. Néhány láprétnövény szórványosan: *Veratrum*, *Orchis incarnatus*, *Dianthus superbus*, etc. — mint nedvesebb átmeneti típusba még *Magnocaricion* elemek is vegyülnek.

2. Festucetum pratensis. A *Festuca pratensis* mellett vagy helyett uralkodik a *Poa trivialis*, faciesként a *Bromus pratensis*. Domináns kétszikűek lehetnek *Equisetum palustre*, *Ranunculus acer*, *Trifolium pratense*, illetőleg *Daucus*, *Pastinaca*, *Cirsium canum*, lokálisan más fajok (*Rhinanthus major*, *Galium verum* etc.) is. Jellemző fajkombináció (K: 3—5): — az említett dominánsokon kívül — *Lychnis floscuculi*, *Ranunculus repens*, *Trifolium repens*, *Plantago lanceolata*, *Senecio barbareaifolius*, *Leontodon hispidus*. Az előbbtől sok differenciális faj (valójában *Arrhenatherion*-fajok) különbözteti meg, így: *Festuca pratensis* (F: 4), *Poa pratensis*, *Bromus pratensis*, *Avenastrum pubescens*, *Cynosurus cristatus*, *Holcus lanatus*, *Juncus atratus*, *Orchis elegans* (F: 4), *Stellaria graminea*, *Trifolium campestre*, *Rhinanthus major* (ssp. *Borbásii*) (F: 4), *Galium verum*, *Knautia arvensis*, *Crepis biennis* (F: 4) etc. Az edényes növényfajok száma: 72.

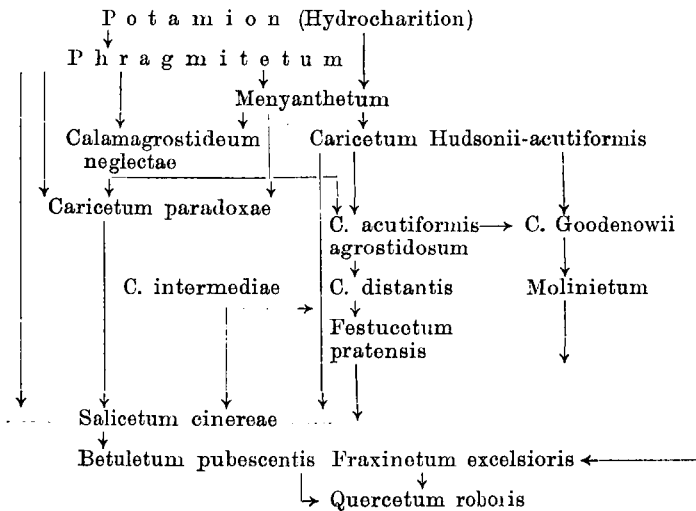
Felvételek száma: 1. *Caricetum distantis*: 16; 2. *Agrostideto-Poetum*: 15; 3. *Festucetum pratensis*: 16 kvadrát felvétel.

Az asszociációk elemzését egybevetve, a réti növényközvetkezősoportok állandó elemei így alakulnak: (K: 3—5.)

I. *Molinion* (*Parvocaricion*). *Carex panicea*, *Lychnis floscuculi*, *Ranunculus repens*, *R. acer*, *Caltha palustris*, *Angelica silvestris*, *Mentha aquatica-verticillata*, (*Galium uliginosum*), *Cirsium canum*, *Equisetum palustre*.

II. *Agrostidion* (incl. *Arrhenatherion*). *Poa trivialis*, *Agrostis alba*, *Lychnis floscuculi*, *Ranunculus acer*, *Cirsium canum*, *Equisetum palustre*.

A tárgyalt növényközvetkezők genetikai összefüggését a mellékelt szukcesszióséma ábrázolja.



A hydátogen szukcessziók összefoglaló vázlata.

(A láperdők és ligetek kialakulása, a nyírségi (kül. halápi és báttorligeti) helyszíni viszonyok, zonációk és korrelációk (komplexek) alapján következtetve. Leegyszerűsített összefoglalás.)

A nyírségi lápkutatásokban való lelkes közreműködéséért ZÓLYOMI BÁLINT, egyet. m. tanárt, akkori tanársegédemet illesse köszönet.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. máj. 16-án tartott üléséből.)

DIE VEGETATION DES SANDGEBIETS NYIRSÉG.

II. Wiesenpflanzengesellschaften (Herbosa).

Von R. v. SOÓ.

Der zweite Teil der soziologischen Bearbeitung der Vegetation des Nyírség behandelt die Wiesen (Herbosa), die Wasser- und Sumpfvegetation einschliessend. Natürliche mesophile Wiesen (*Arrhenatherion* Verband) fehlen im Gebiete, bzw. wurden die minder feuchten Wiesen des *Festucetum pratensis* zur Federation *Agrostidion albae* gezählt.

Die Wasserpflanzenvegetation, die Verbände des wurzelnden Benthos: *Potamion eurosibiricum* und des schwebenden Pleuston: *Hydrocharition* sind durch die folgenden Assoziationen vertreten: 1. Das emerse *Nuphareto-Castalietum*, oft Komplexe bildend mit den submersen Arten: *Myriophylleto-Castalietum* oder mit den frei schwimmenden Typen: *Lemneto-Castalietum*. — 2. Das submerse *Myriophylleto-Potametum* (grossgewachsene Typen). — 3. Das kleine, submers-emerse *Ranunculeto-Callitrichetum*. — 4. Das submerse *Parvipotameto-Zannichellietum*, im Wasser der Soda-seen. — 5. *Lemneto-Utricularietum*, die schwebenden Typen. Der Verband der Schlammbodenvegetation *Nanocyperion* ist nur fragmentarisch vertreten, mehr am Rande des Nyírség im Inundationsgebiete der Theiss, wo *Schoenoplectetum supini* und *Heleocharidetum acicularis* vorkommen.

Die Röhrichte (*Phragmition*) sind meist von *Calamagrostis canescens* begleitet, selten kommt die Charakterart der ungarischen Röhrichte: *Urtica kioviensis* vor, sonst wird *Phragmites* oft durch *Typha angustifolia* oder *Schoenoplectus lacustris*, selten durch *Typha latifolia* oder *Glyceria aquatica* ersetzt.

Mannigfaltig und interessant ist die Federation der bultenbildenden Gross-seggen (*Magnocaricion*). Die Assoziationen *Cari-cetum Hudsonii* (mit der Konsoziation *C. acutiformis-ripariae*),

C. paradoxae drepanocladosum, *Calamagrostidetum neglectae* bilden mit den Typen der Schlenkenvegetation: *Menyanthetum trifoliatae*, *Caricetum vesicariae* Komplexe, sonst sind sie mehr ökologisch und physiognomisch, als floristisch voneinander verschieden. Von den dominierenden Arten abgesehen, sind die meisten mit kleiner oder grösser Abundanz und Frequenz und mit verschiedener Konstanz in allen Assoziationen zu finden. Das *Caricetum intermediae* (nebst *C. vulpinae*) bildet den Übergang zu den moosreichen Moorbiesen, deren ausgedehnte Bestände durch kleinere, rasenbildende Seggen und Sumpfgräser gebildet sind, diese — wie *Caricetum acutiformis agrostidosum* und *C. Goodenowii* — gehören zum Verband *Parvocuricion* seu *Molinion*; typisches *Molinietum* (mit *Carex panicea*) ist im Gebiete selten.

Während Moorbiesen mehr in den langsam verschwindenden Reliktmoorgebieten (wie Haláp, Bátorliget usw.) zu finden sind, verbreiten sich die moosarmen Sumpfwiesen in den Tälern der Sandhügel, in den grösseren Niederungen usw., und zwar an feuchteren Stellen *Agrostis alba* und *Poa trivialis* mit dominierender *Carex distans*, an trockeneren *Festuca pratensis* und *Poa trivialis*, stellenweise *Bromus pratensis*, diese Assoziationen: *Caricetum distantis* und *Festucetum pratensis* mit der Konsoz. *Agrostideto-Poetum trivialis* sind die Vertreter des Verbandes *Agrostidion albae*.

Die charakteristischen Artkombinationen (konstante und subkonstante Arten und Charakterarten) wurden im ungarischen Texte bei jeder Assoziation und Federation aufgezählt, die vollständigen Analysen (Ergebnisse rund 240 Einzelaufnahmen in Form von 12 Tabellen) werden anderswo veröffentlicht.

Die Entstehung der Bruch- und Auenwälder nach der Zonationen und Korrelationen (Komplexe) der Wasser-, Sumpf- und Wiesengesellschaften zusammengestellt wird in Form eines Sukzessionschema (S. 907.) dargestellt.

Übersicht der behandelten Assoziationen:

- | | |
|------------------------|--|
| 1. <i>Phragmition.</i> | <i>Phragmitetum vulgaris calamagrostidosum canescentis</i> |
| | “ “ <i>urticosum kioviensis</i> |
| | “ “ (incl. <i>glyceriosum</i>) |
| | “ “ <i>typhosum (consoc.)</i> |
| | “ “ <i>schornoplectosum (consoc.)</i> |

2. *Magnocaricion.* *Caricetum Hudsonii* *C. acutiformis-ripariae*
(consoc.)
Calamagrostidetum neglectae
caric. pseudocyperi
(facies)
caric. Hudsonii (facies)
Caricetum paradoxae
drepanocladosum *menyanthosum* (facies)
caric. pseudocyperi
(facies)
caric. elongatae (facies)
Menyanthetum trifoliatae
caricetosum pseudocy-
peri
caricetosum Hudsonii
phragmitetosum
Caricetum vesicariae
caric. inflatae (consoc.)
juncosum atrati (consoc.)
Caricetum intermediae *C. vulpinae* (consoc.)
3. *Parvocaricion*
(resp. *Molinion*) *Caricetum acutiformis* *agrostidosum*
heleocharidosum (facies)
eriphorosum (facies)
C. Goodenoidii
Molinietum caricetosum paniceae
eriphorosum (facies)
4. *Agrostidion albae*
Agrostideto-Poetum trivialis
*caricetosum distantis*¹
juncosum compressi (facies)
*Festucetum pratensis*²
bromosum pratensis (facies)
Agrostideto-Poetum trivialis
(consoc.)

Wiesentypen: *Ranunculus acer*, *Taraxacum officinale*, *Daucus carota*, *Pastinaca sativa*, *Cirsium canum*.

Wiesentypen: *Equisetum palustre*, *Ranunculus acer*, *Trifolium pratense*, *Daucus*, *Pastinaca*, *Cirsium canum* etc.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Mai 1938.)

ANTIMONIT KISBÁNYÁRÓL ÉS BORPATAKRÓL. (SZATMÁR M.)

SZTRÓKAY KÁLMÁN től.

A szatmári bányavidék érctelepei fiatal-harmadkori eruptívumokhoz kötött hidrotermális ércelőfordulások. A telérek főérce galenit, szfalerit, pirit, chalkopirit; az antimonit némely bányában nagyobb szerephez jut ugyan, de inkább a járulékos ércek közé kell sorolnunk. Jól kristályosodva az antimonit több bányahelyen előfordult már és az irodalom kellő részletességgel fel is dolgozta. Különösen Felsőbánya egyike a legismertebb antimonit-lelőhelyeknek, de jó kristályos alakban fordult elő Kapnikbányán és Nagybányán is. A kisbányai antimonit nem egészen új előfordulás. Vannak régebbi példányok, melyek apró, egymáshoz illeszkedő kristályokalkotta antimonitkérgékből állnak. Néhány év óta pedig újabb előjövételként szép, több cm-es kristályegyedekből álló csoportozatok kerültek elő, melyekhez a magyar gyűjtemények KUPÁS GYULA ny. nagybányai főjegyző révén jutottak. A kisbányai antimonitelőfordulásról legelőször 1931-ben KOCH SÁNDOR emlékezik meg a bányahely ásványainak paragenetikai felsorolásában (9), majd VAVRINECZ GÁBOR közöl róla kémiai elemzést (10). Legutóbb pedig ZSIVNY VIKTOR a Szent István Akadémia IV. osztályának 1937 február hó 19-én tartott felolvasó ülésén «Újabb ásványelőfordulások Magyarországon» címmel bemutatott előzetes közleményében az utóbbi években előkerült kisbányai antimonit krisztallográfiai főjellemvonásairól is megemlékezett. Az előadás idejében azonban az alább ismertetendő vizsgálat éppen folyamatban volt, ezért kérésemre ZSIVNY V. igazgató úr szíves volt a részletes feldolgozást és közlést nekem átengedni. Szíveségéért e helyen is köszönetet mondok.

A kishányai antimonitról az előbbieken kívül más irodalmi adatunk nincsen; a borpataki előfordulás pedig teljesen új. A két lelőhely antimonitján végzett kristálytani vizsgálatok eredményeit az alábbiakban óhajtom ismertetni.

Kishánya.

A vizsgált antimonit-kristályok fehéres, kvarcos-karbonátos kérgen ülnek és az antimonitra olyannyira jellemző sugarasan szétálló kristálycsoportozatot alkotnak. Az egyes kristályok mérete a különböző példányokon változó. Leginkább 1—1.5 cm a hosszuk és 0.2—0.3 cm a szélességük, de az egyik csoportozat tagjai a 2—3 cm hosszúságot is elérik s ilyenkor 0.6—0.8 cm a szélességük. A «*c*»-tengely irányában nyúlt, a «*b*»-tengely felől kissé lapított, kardalakú a termetük. Frissek, üdék, élénken fénylenek, mérésre nagyon alkalmasak. Az alak-kombinációkra nagyon jellemző, hogy míg a prizmaöv nagyon gazdag formákban, addig jól mérhető piramis mindössze egy volt teljesen biztonsággal megállapítható. Összesen 12 mért kristályon az alábbi formák fordultak elő, ezek közt a csillaggal (*) jelzettek az antimonitra általában újak:

<i>a</i> (100)	<i>m</i> (110)	<i>v</i> (210)	<i>z</i> (320)	<i>h</i> (530)	*	(870)	<i>s</i> (113)
<i>b</i> (010)	<i>o</i> (120)	<i>d</i> (230)	<i>r</i> (340)	<i>g</i> (540)		(980)	
	<i>q</i> (130)	<i>z</i> (250)	<i>l</i> (350)	<i>x</i> (560)		(9.10.0)	
	<i>i</i> (140)	<i>w</i> (270)	*	(370)	*	(5.12.0)	(9.11.0)
	<i>t</i> (150)	*	(290)	*	(380)		
	<i>θ</i> (160)	*	(2.11.0)	<i>r</i> (650)	*	(13.9.0)	
	<i>θ</i> (170)		<i>k</i> (430)	(780)			
	<i>l</i> (180)		*	(4.11.0)	(790)		
	*						
	<i>z</i> (1.12.0)						

Amint a megállapított formák felsorolásából is látszik, a harmadik fajta prizma nagy számmal szerepelnek. A prizmasorozat finom, vékony lapocskái szabad szemmel a rostozottság látszatát keltik. Hogy a goniométeres mérésnél a sok, egyenlő kifejlődésű prizma közt tájékozódni lehessen, minden megmért kristályra a

kitűnő hasadású, tükörfényes oldallapot hasítottam rá s ehhez a formálaphoz mértem és számítottam a szögértékeket.

Az ismert kristályalakok meghatározása az alábbi szögértékek segítségével történt:

	mért	számított	előf. gyak. %-ban
$b : a = (010) : (100) = 90^\circ 04'$		$96^\circ 00'$	50%
$: n$	$: (210) \quad 63 \quad 10$	$63 \quad 36$	17
$: b$	$: (530) \quad 59 \quad 21$	$59 \quad 13$	25
$: t$	$: (320) \quad 56 \quad 50$	$56 \quad 30$	25
$: k$	$: (430) \quad 53 \quad 19$	$53 \quad 20$	75
$: g$	$: (540) \quad 51 \quad 23$	$51 \quad 33$	75
$: r$	$: (650) \quad 50 \quad 32$	$50 \quad 24$	67
$: -$	$: (980) \quad 48 \quad 25$	$48 \quad 35$	33
$: m$	$: (110) \quad 45 \quad 23$	$45 \quad 13$	100
$: -$	$: (9.10.0) \quad 42 \quad 17$	$42 \quad 12$	83
$: -$	$: (780) \quad 41 \quad 30$	$41 \quad 28$	58
$: x$	$: (560) \quad 39 \quad 54$	$40 \quad 01$	58
$: -$	$: (9.11.0) \quad 39 \quad 28$	$39 \quad 30$	83
$: -$	$: (790) \quad 38 \quad 07$	$38 \quad 05$	58
$: r$	$: (340) \quad 37 \quad 01$	$37 \quad 04$	17
$: d$	$: (230) \quad 33 \quad 58$	$33 \quad 53$	42
$: l$	$: (350) \quad 31 \quad 18$	$31 \quad 09$	25
$: o$	$: (120) \quad 26 \quad 18$	$26 \quad 44$	17
$: Z$	$: (250) \quad 22 \quad 13$	$21 \quad 57$	33
$: q$	$: (130) \quad 18 \quad 23$	$18 \quad 34$	83
$: w$	$: (270) \quad 16 \quad 03$	$16 \quad 03$	58
$: i$	$: (140) \quad 14 \quad 07$	$14 \quad 08$	50
$: t$	$: (150) \quad 11 \quad 33$	$11 \quad 23$	33
$: p$	$: (160) \quad 9 \quad 15$	$9 \quad 06$	33
$: u$	$: (170) \quad 8 \quad 20$	$8 \quad 11$	58
$: l$	$: (180) \quad 7 \quad 18$	$7 \quad 11$	58
$: z$	$: (1.12.0) \quad 4 \quad 36$	$4 \quad 48$	25

Az $s(11\bar{3})$ indexű bipiramist a következő mérési eredmények alapján határoztam meg:

	mért	számított
$s : s' = (113) : (1\bar{1}3) = 35^\circ 40'$		$35^\circ 36'$
$s : s''' = (113) : (\bar{1}\bar{1}3) = 51 \quad 39$		$51 \quad 26$
$s : b = (113) : (010) = 72 \quad 21$		$72 \quad 12$
$s : m = (113) : (110) = 64 \quad 37$		$64 \quad 17$

Az első véglap a (100) hat kristályon lépett fel nagyon keskeny lapokkal, gyenge, de jól elkülöníthető reflexekkel. A hasítási oldal-lap párja (0 $\bar{1}$ 0) majdnem minden kristályon megfigyelhető volt, de nagysága a vékony prizmalapoktól alig különbözött; reflexe is néha nagyon elmosódottan látszott. A prizmaöv formagazdagsága majdnem összefüggő reflexsorról jelenik meg a goniométerben; biztos alaknak csak a jól elkülöníthető, ismételten megjelenő erősebb tükrözéseket vettem. A legszebben kifejlődött forma a minden kristályon jelen lévő, kissé rostozott lapú m (110) alak volt.

Ismeretes, hogy az antimonit a és b vízszintes tengelyei majdnem egyenlők ($a : b = 0,9926 : 1$). Ezt a psuedotetragonális jelleget az alábbi prizma-párok is érvényre juttatják: n (210) és o (120); h (530) és l (350); t (320) és d (230); k (430) és r (340); x (560) és r (650). Ugyanis ugyanabban a térnegyedben ezek a forma-párok egy-egy ditetragonális prizmának felelnek meg.

Az ismertetett formák közül a ritkább alakok közé tartozik: a r (650), melyet O. NEFF (5) először Felsőbányán (1916), majd 1917-ben a japáni kristályokon talált meg; a h (530) prizma eddig mindössze csak felsőbányai kristályokon fordult elő; a g (540)-t ugyancsak O. NEFF mérte először Felsőbányáról, majd 1917-ben a japáni kristályokon is fellelte; a t (170) forma első megfigyelője S. DANA volt, ki 1883-ban Japánból írta le, később ugyancsak innen O. NEFF is említi, mint bizonytalan alakot. (6) A fenti táblázatban felsorolt prizmák közt a következő öt alak észlelése egészen újkeletű: (980); (9.10.0); (780); (9.11.0) és (790). E formákat a közelmúltban TOKODY L. figyelte meg először a nagyági antimonitokon végzett kristálytani vizsgálatok alkalmával (11).

Az új prizma-formák lapjai szintén vékony csillanó csíkoknak látszanak; reflexeik elég jól elkülöníthetők. A mért és számított szögértékek közötti különbségek csekélyek s a megengedett határokon belül mozognak. A tizenkét kristályon az alábbi 9 új formát állapítottam meg:

	mért	számított	előf. gyak. %-ban
(010: (13.9.0)	55° 19'	55° 30' 13"	25%
: (870)	49 02	49 01 30	67
: (370)	23 24	23 21 10	8 ?
: (5.12.0)	22 42	22 46 17	25
: (380)	20 48	20 41 48	42
: (4.11.0)	20 08	20 07 14	58
: (290)	12 41	12 37 10	75
: (2.11.0)	10 19	10 22 48	42
: (190)	6 15	6 23 14	17 ?

A fenti formák közül a (370) és (190) prizma bizonytalan alaknak tekinthető, mivel az előbbi mindössze egy, az utóbbi pedig csak két kristályon szerepelt. A többi új forma nagy részének ellenben a gyakoribb előfordulás mellett nagy biztosságot kölcsönöz az, hogy a hozzájuk tartozó piramis már szerepel az irodalomban. Így a (13.9.0) alak bipiramisát, a w (13.9.9)-et először CH. PALACHE írta le Japánból és ugyancsak innen később O. NEFF is megállapította (6.). A (870) prizma-hoz tartozó ε (878) bipiramis már rég ismert s gyakori alakja az antimonitnak, első ízben KRENNER J. észlelte (1865) felsőbányai kristályokon (1); ritkább alak a μ (873) melyet CH. PALACHE írt le Japánból. Az (5.12.0) formának megfelelő bipiramist, a \cdot (5.12.3)-t O. NEFF észlelte ugyancsak japáni előforduláson. Felsőbányai és japáni kristályokon fordult elő az új (290) prizma-hoz tartozó bipiramis, az x (293), melyet CH. PALACHE is, O. NEFF is biztos alaknak írt le.

Ikerkristályok a vizsgált anyagban nem fordultak elő.

Az antimonit formagazdagsága meglehetősen nagy, eddig mintegy 170 kristályalak fordult elő rajta. A formák nagy számának azonban több mint a kétharmadát piramis-alakok teszik, jelezvén, hogy az antimonit tetőzölapokban szokott bővelkedni. Ezzel a tapasztalattal ellentétben áll a kishányai előfordulás vizsgálati eredménye: a kristályok forma-kombinációjára az jellemző, hogy csupán egy bipiramis, a fent is említett s (113), a terminális alak, szemben a III. fajta prizmák nagy számával.

*

A kishányai antimonitot VAVRINECZ GÁBOR elemezte meg 1933-ban (10), vizsgálatának eredménye a következő volt:

<i>Pb</i>	0·21
<i>Zn</i>	—
<i>Fe</i>	0·15
<i>Sb</i>	71·24
<i>S</i>	28·33
oldhatatlan	0·23
összesen:	100·16

Az elemzésből kitűnik, hogy a kevés ólomtartalom mellett némi vas-szennyezés is kimutatható. Megjegyezzük azonban azt, hogy csak «sugaras-rostos gömbölyded halmaz» volt a megelemezett anyag, tehát nem az újabb, jókristályos előfordulásból való.

Borpatak.

A borpataktelepi Miksa-bánya antimonitelőfordulása újabb keletű a kisbányainál; egy-két éve csak, hogy az első példányok előkerültek. Azonban korántsem olyan szép kristályos előfordulás ez, mint a kisbányai. Az előfordulás genezise nem különbözik a Gutin-hegység többi ércelőfordulásától, éppen azért itt is hófehér, porózus kovasavas kérgen találjuk az antimonitot. Szorosan egymáshoz illeszkedő, mogyoró-borsó nagyságú gumók, tömött sugaras-rostos szerkezettel. A sugaras antimonit-tűk csak a gumók felülszíne felé állnak szabadon és érdessé teszik a felületet. A mérésre előkészített, nagyobb kristályok mérte: hosszuk 2—3 mm, szélességük 0·2—0·4 mm; termetük teljesen a kisbányai előfordulással azonos. A «*c*»-tengely szerint nyúlt kristálykák hosszanti irányban rostozottak: ezt a rostozottságot a hajszál-vékony prizma-lapocskák idézik elő. A kis tűket felül egy piramisforma tetőzi be.

A kitűnő siklatás miatt könnyen görbülő kristályok mérése sok nehézségbe ütközött, mégis 4 jobb kristálykán az alábbi formákat sikerült megállapítani:

b (010) *m* (110) *s* (113)

A legszebben fejlett forma, mely egyúttal a kristályok termetét is megszabja, az *m* (110) III. fajta prizma. Lapjai simák, vagy csak nagyon gyengén rostozottak. A *b* (010) forma lapjai, bár minden kristályon mérhetőek voltak, rosszul tükröznek az erős rostozottság miatt. Ugyancsak nem adnak jó reflexet a piramis, az *s* (113) lapjai sem, mert felületük marott, egyenetlen és e mellett kissé

görbült is. A formák meghatározása az alábbi mérési eredmények segítségével történt:

	mért	számított
$m : m' = (110) : (\bar{1}10) = 90^\circ 22'$		$90^\circ 26'$
$: b : (010) = 45 \quad 35$		45 13
$: s : (113) = 64 \quad 06$		64 17
$s : s'' (113) : (\bar{1}\bar{1}3) = 51 \quad 41$		51 26

A meghatározott formákon kívül a $\langle 00 \rangle$ -tengely övében még néhány forma feltételezhető, de a reflexek elmosódottsága s halványága nem engedte meg a közelebbi meghatározást. Nagyon valószínű, hogy a bányahely esetleges újabb és jobb kifejlődésű előfordulásain a meghatározható formák száma bővülni fog.

*

Készült a budapesti Kir. Magy. Pázmány Péter Tudományegyetem ásvány-kőzettani intézetében. 1937.

Irodalom.

1. KRENNER J. A.: Krystallogr. Studien über den Antimonit. Sitzungsber. d. Kais. Akademie d. Wissenschaften. Wien. 1865. Bd. 51. p. 79—124.
2. KRENNER J. A.: A japáni antimonitról. Földtani Közl. 1883. 13. p. 304—308.
3. V. GOLDSCHMIDT: Krystallogr. Winkeltabellen. Berlin. 1897. p. 47—49.
4. V. GOLDSCHMIDT: Atlas der Krystallformen. I. Heidelberg. 1913.
5. O. NEFF: Über Antimonit von Felsöbánya. Beiträge z. Krystallogr. und Mineralogie I. Heidelberg 1914—1918. p. 107—157.
6. O. NEFF: Über Antimonit von Ichinokawa (Japan). Beiträge z. Krystall. und Mineralogie. 7. Heidelberg 1923. p. 47—97.
7. VENDL MÁRIA: Calcit Vaskőről, antimonit Hondolról, gipsz Óbudáról és markasit Nemesvitaról. Földt. Közl. 51—52 1921—1922. p. 41—43.
8. LÖW M. és TOKODY L.: Adatok Nagybánya és Borpatak ásványainak ismeretéhez. Földtani Közl. 58 1929. p. 87—92.
9. KOCH SÁNDOR: Ásványhatározó (REICHERT—ZELLER—KOCH) III. rész. K. Magy. Term. tud. Társ. 1931.
10. VAVRINECZ GÁBOR: Ásványelemzések. I. Magyar Kémiai Folyóirat. 1932. 32. p. 54—56.
11. TOKODY LÁSZLÓ: Nagyági antimonit. Annales Mus. Nat. Hung. 1937—38. 31. p. 165—170.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. febr. 21-én tartott ülésé tő

ÜBER ANTIMONIT VON KISBÁNYA UND BORPATAK.
(KOM. SZATMÁR).

Von K. SZTRÓKAY.

Die Abhandlung wird deutsch in der Zeitschrift «Zentralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie. Abt. ,A'» erscheinen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Febr. 1938.)

AZ ADRIA HYDROMEDUSÁI A «NAJADE» GYŰJTÉSÉBEN.

PELL MÁRIÁ-tól.

A nagy nemzetközi oceanográfiai kutatások mintájára a XX. század elején a Földközi-tenger tudományos tanulmányozása is kezdetét vette ; megalakult a Földközi-tengeri nemzetközi bizottság. Ennek a munkálataihoz csatlakozott 1910-ben az olasz-osztrák nemzetközi Adria-kutató bizottság, mely az Adria fizikai és biológiai tanulmányozását tűzte ki célul keresztszelvények mentén végzett kutatásokkal.

Ebbe a nemzetközi munkába a Magyar Adria Egyesület közvetítésével magyar kutatók munkája is belekapcsolódott. A Najade nevű hadihajón két expedíciót rendeztek: 1913 októberében az első és 1914 április-májusában a másodikat. A Quarneróban, Quarneróban, Morlák csatornában és a dalmát szigetek között szelvényállomásokat tartottak, — az első úton 41-et, a másodikon 48-at. Az állomásokon és a közbeeső távolságokon, továbbá a nagy déli mélységben a tenger faunájának megismerésére különböző hálókka (RICHARD, NANSEN, HJORT, dredge, kotró- és plankton hálókka, továbbá a PETERSON-féle ivadék-trawl-lal) gyűjtöttek anyagot. Az expedíció nagyobb mélységekben (800—1100 m) csak az ivadéktrawl-lal kutatott, a többi hálóval a felszíntől 100 m-ig halászott.

A gyűjtött anyag átvizsgálásából eddigelé a következő tanulmányok jelentek meg:

Dr. SZÜTS ANDOR: Planktológiai megfigyelések az I. és II. Magyar Adria-expedíción. — A Magyar Tengerkutató Bizottság Közleményei (Acta Societatis Hungaricae Mare Explorandi Causa Constitutae) VI. 1915.

Dr. KOLOSVÁRY GÁBOR: A Magyar Adria Egyesület «Najade»-expedíciója által az Adrián gyűjtött tüskésbőrű állatok. Ibid. Új sorozat. I. A Tenger. 1938. 26. kötet.

Dr. PAX, FERDINAND (Boroszló): Die Krustenanemonen der ungarischen Terminfahrten der «Najade». — Ibid. II. A Tenger. 1938. 26. kötet.

SZALÁNCZY KÁROLY: Az Adria fenéktalaja. Dissertatio. Debrecen. 1929.

Megjelenésre váró dolgozatok pedig:

Dr. KOCH NÁNDOR: A kutató út hidrográfiai eredményei (táblázatokkal, kb. 3 ívnyi terjedelemben).

Dr. RÉTHLY ANTAL: Az I. kutató-út meteorológiai eredményei (kb. 1 ív).

Dr. WAGNER JÁNOS: Az Adria Terebratulái (2—3. old.).

A Najade-expedíció anyagában, — mint a meghatározásból kiderült — a Hydromedusáknak mind a négy rendje képviselve van, 27 nembe tartozó 30 fajjal. Ez tekintélyes fajszám, mert BABIČ a Vila Velebita útjának eredményeit közölve az Adriából 14 *Hydromedusa*-fajt, NEPPI és STIASNY pedig a Triesti-öbölből 27 fajt írtak le. E fajok közül 14 *Antho*-, 8 *Lepto*-, 7 *Trachy*- és 1 *Narcomedusa*. A szelvényállomások adatai szerint az *Antho*- és *Leptomedusák* inkább sekély vizekből kerültek a hálóba, a *Trachy*- és *Narcomedusák* mélyebbről. Két *Anthomedusa*, az *Oceania armata* és a *Rathkea fasciculata*, továbbá egy *Leptomedusa*, az *Octogonade mediterranea* azonban nagyobb mélységekből (200—1100 m) való.

A gyűjtött anyag egyetlen új faja a *Narcomedusák*hoz tartozó *Isonema Najadis*; három fajt nem ismertünk eddig a Földközi tengerből: a *Protiara tetranemá*-t, az *Eutima insignis*-t és a *Homoeonema platygonont*; öt faj az Adriára nézve új: a *Leuckartiara octona*, *Oceania armata*, *Octogonade mediterranea*, *Sminthea eurygaster*, *Solmissus albescens*; két faj pedig a Quarneróra: az *Eucheilota Maasi* és az *Obelia adriatica*.

Ez a közlemény angol nyelvű összefoglalása «A tengerben» egész terjedelmében szintén angol nyelven megjelenendő, megfelelő rajzokkal ellátott tanulmányomnak. Az itt közölt közlemény csupán kivonat, mely az előforduló fajokat sorolja fel néhány nélkülözhetetlen megjegyzéssel és közli az elterjedésükre vonatkozó táblázatos összeállítást.

THE HYDROMEDUSAE OF THE ADRIATIC,
COLLECTED BY THE «NAJADE.»

By MARIA PELL.

As the identification shows in the «Najade» collection (X. 1913 and IV., V. 1914) all the four orders of the *Hydromedusae* are represented: 27 genera with 30 species. 14 *Antho*-, 8 *Lepto*-, 7 *Trachy*- and 1 *Narcomedusae*.

According to the data of the profile-stations, the *Antho*- and *Leptomedusae* were generally captured in shallow waters, the *Trachy*- and *Narcomedusae* at greater depths. Two species of the *Anthomedusae*, the *Oceania armata*, and *Rathkea fasciculata*, further one *Leptomedusa*, the *Octogonade mediterranea* derive from deeper regions. (200—1100 m)

During the daytime the *Hydromedusae* are usually found in deeper water, but they come to the surface during the night, performing a daily migration. Apparently there are also seasonal migrations, but this — as the material of two expeditions does not suffice for comparative studies — has not yet been definitely established.

There is only one new species in the material collected, a *Narcomedusa*, *Isonema Najadis*; 3 species were not known hitherto in the Mediterranean, namely: *Protiara tetranema*, *Eutima insignis* and *Homoeonema platygonon*. Five are new in the Adriatic: *Leuckartiara octona*, *Oceania armata*, *Octogonade mediterranea*, *Sminthea eurygaster*, *Solmissus albescens*, and two in the Quarnero: *Eucheilota Maasi*, *Obelia adriatica*.

I. ORDER: *Anthomedusae* HAECKEL 1879.

Family: *Codonidae* HAECKEL 1879, sens emend. Mayer 1910.

Genus Steenstrupia FORBES 1846.

Steenstrupia rubra FORBES 1846.

Four specimens were found in the course of the first expedition i. e. October 1913. in the Canale di Maltempo and at Cirkvenica at depth of 20—40 meters.

Steenstrupia aurata MAYER 1910.

Thirteen examples were collected on the second expedition i. e. in the months of April and May 1914, the most of them from Cap Merlera, Zengg and Jablanac at different depths. (20—105 m)

Genus Sarsia LESSON 1843.

Sarsia gemmifera FORBES 1848.

Two specimens were obtained, one from Canale di Maltempo during the first expedition, the other from Canale di Farasina during the second in 20—50 m deep water.

Genus Slabberia FORBES 1846.

Slabberia halterata FORBES 1846.

Twelve specimens of this bellform medusae were found. Four in the course of the first expedition between Maltempo and Cirkvenica and three on the second at different places, at depths of 20—50 meters. There are among them such budding specimens as NEPPI describes and specimens with gonads.

Family: *Cladonemidae* GEGENBAUR 1856.

Genus Zanclea GEGENBAUR 1856.

Zanclea implexa ALLMAN 1864.

The one example which was found near Novaglia Vecchia 40—75 m deep, in October, has two tentacles and alternating with these, according to NEPPI—STIASNY two tentacle-bulbs. The stomach is urnshaped and there are swellings on it.

Family: *Oceanidae* sensu VANHÖFFEN 1891.

Genus Protiara HAECKEL 1879.

Protiara tetranema PÉRON and LÉSUEUR 1809.

A single specimen was found during the course of the first route, at Morter at a depth of 20—40 m.

Genus Leuckartiara FLEMMING 1823.

Leuckartiara octona FLEMMING 1823.

Only one little medusa, which must be considered as the young of *Leuckartiara octona*. This fact is also proved by its size. The medusa found here has only one pair of tentacles, is 0.350 mm high and 0.490 mm wide. This one specimen was found during the second expedition, between Zengg and Besca nuova 25—50 m deep.

Genus Neoturris FORSKAL 1775.

Neoturris pileata FORSKAL 1775.

The medusa found here is the young of *Neoturris pileata*. It has 20 tentacles; the width of the bell is 4 mm, the height 3 mm. HARTLAUB describes a medusa $4\frac{1}{2}$ mm in size with 16 tentacles and one 8 mm in size with 40 tentacles. For this reason this example must be regarded as the young of *Neoturris pileata*. It was found by the first expedition between Canale di Mezzo and Punta Pelova at depths of 20—40 meters.

There is further a quite young medusa with four tentacles.

Genus Cytacis ESCHSCHOLTZ 1829.

Cytacis exigua HAECKEL 1879.

One example was obtained during the course of the first expedition at lower depths (20—40 m) at Morter.

Another small medusa may be regarded as the young of *Cytacis exigua*. On the second route at Pta Pelova, at a depth of 0—20 m.

Cytacis tetrastyla ESCHSCHOLTZ 1829.

Three examples were collected, one on the first expedition between Morter and Incoronata at a depth of 60—80 m and two on the second one at Cossion-Zapuntello, 20—40 m deep, the other at Zara 20—50 m deep.

Genus Oceania sensu KÖLLIKER 1853. GEGENBAUR (in part) 1856.

Oceania armata KÖLLIKER 1853.

Found in abundance (44 specimens) during the two expeditions at great depths and fished with a young-fish trawl. 24 specimens were taken in the course of the first expedition from a depth of 200—800 m and 20 specimens during the second at 300—1100 m.

Genus Thamnostoma HAECKEL 1879.*

* According to HARTLAUB and STIASNY—NEPPI who separate the genera *Limnorea* and *Thamnostoma*.

Thamnostoma dibalia HAECKEL 1879.

Three specimens are in the collection of the «Najade» deriving from a depth of 20—40 m between Canale di Maltempo and Zengg on the first expedition.

Genus Bougainvillea LESSON 1836.

Bougainvillea autumnalis HARTLAUB 1897.

Only one small specimen was found in the months of April and May between Cossion and Zapuntello at a depth of 0—40 m.

Genus Rathkea BRANDT 1837.

Rathkea fasciculata HAECKEL 1879.

Nine specimens of this medusa were captured with the young-fish trawl at a depth of 300—800 m. They were only found in deep water.

II. ORDER: *Leptomedusae* HAECKEL 1866.

Family: *Eucopidae* GEGENBAUR 1856.

Genus Eucope GEGENBAUR 1856. (sens. emend.)

Eucope picta KEFERSTEIN and EHLERS 1861.

A single specimen was found in the course of the second route, between Morter and Skulj in 40—60 m deep water.

Genus Obelia PÉRON and LÉSUEUR 1809.

Obelia adriatica NEPPI 1912.

Three specimens among the material of the «Najade» must be considered as young or middle-aged animals (because their sizes are: 1.1 mm, 2.5 mm, and 2.9 mm and they have only 70 tentacles).

All of the three were found on the second expedition one at C. Incononata, at a depth of 40—60 m, the other at Morter-Skulj, at a depth of 60—80 m, in the months of April and May.

Obelia α and β .

There are 71 specimens in the collection of the Najade. The greatest part of these medusae (66 specimens) was obtained during the second route, mostly (22) at Cossion-Zapuntello, 0—70 m deep. Only 5 medusae derive from the first route.

Genus Phialidium LEUCKART 1856.

Phialidium variabile CLAUS 1881.

29 specimens were captured. The largest is $4\frac{1}{4}$ mm and it does not attain the size of Neppi's medusae which were 8 mm.

All were fished in the course of the second route in April and May, between Cossion and Zapuntello at depths of 20—70 meters.

Genus Eucheilota MC CRADY 1857.

Eucheilota Maasi NEPPI-STIASNY 1912.

Three specimens were captured on the second expedition about Cap Merlera in April at depths of 20—40 meters.

Genus Eutima MC CRADY.

Eutima insignis HAECKEL 1879.

Three specimens were collected with a young-fish trawl, all of them during the course of the first expedition, in the month of October, at no great depth (40 m).

Family: *Aequoridae* ESCHSCHOLTZ 1829.

Genus Octogonade ZOJA 1896.

Octogonade mediterranea ZOJA 1896.

Two specimens derive from the collection made with the young-fish trawl, at a depth of 600 m above the «Najade depth.»

Genus Aequorea PÉRON and LÉSUEUR 1809.

Aequorea Forskalea PÉRON and LÉSUEUR 1809.

This is the largest medusa in this collection. It was captured on the surface in Canale di Mezzo in enough great number (19 specimens), 18 on the first, 1 on the second expedition.

III. ORDER: *Trachymedusae* HAECKEL 1866.

Family: *Trachynemidae* GEGENBAUR 1856.

Genus Trachynema GEGENBAUR 1856.

Trachynema funerarium HAECKEL 1879.

Three specimens were fished with the young-fish trawl at great depths. Between Pelagosa Gravosa at 800—1100 meters and above the «Najade depth» (1100 m) during the second expedition.

Genus Rhopalonema GEGENBAUR 1856.

Rhopalonema velatum GEGENBAUR 1856.

Forty-one specimens were collected with the young-fish trawl. They were found at different depths, from the surface down to 1100 m. Bigelow states that they do not live deeper than 100 fathoms, according to NEPPI they are most numerous at a depth of 200 m. The majority of the specimens of this collection derive from 100—300

m deep. The most were captured on the first as well as on the second expedition in the Pomo-basin and above the «Najade depth.»

Genus *Sminthea* GEGENBAUR 1856.

Sminthea eurygaster GEGENBAUR 1856.

The eight specimens of the «Najade» expedition were captured with the young-fish trawl from two places: from the open sea in October (one specimen) and from Pelagosa-Gravosa (seven specimens) at a depth of 450 m.

Genus *Isonema* MAAS 1906.

Isonema Najadis n. sp.

VANHÖFFEN, 1902, describes a medusa in the collection of the Valdivia expedition, which he considers as belonging to the genus *Homoeonema*. He introduces it as new species under the name *Homoeonema amplum*. MAAS, 1906, finds this medusa in the collection of the Belgica, but provides it — on the grounds that it has differing features from the other representants of the genus *Homoeonema* — with the new genus name *Isonema*, and calls it *Isonema amplum*. The description of this medusa is as follow: eight radial canals, at the base of which, beside the stomach there are situated small globular gonads at both sides of the radial canals. 80—100 equal tentacles in one row. No peduncle, four lips. When young, the medusa is semi-globular, later it becomes flat. When 2—3 mm. wide, it has 80, when 5—6 mm, it has 100—120 tentacles.

There are two specimens in the collection of the Najade with a diameter of 4—6 mm. There are in one octant 18—22 equal tentacles in one row, therefore one medusa has 144—196 tentacles. The gonads rise from the stomach-margin and extend to about one-third of the radial canals. They are situated on both sides of each radial canal and form small globes, but continue in form of cylindrical bodies.

This medusa in many respects resembles the *Isonema amplum* described by MAAS, but differs from it in the situation of the gonads.

Because of these features I am obliged to register my specimens as belonging to the genus *Isonema*, but they cannot be regarded as identical with the species *amplum*, the gonads of which, two small globes on each radial canal, 8 in all, are situated on the stomach-base. My specimens have more gonads, which continue

on the radial canals. VANHÖFFEN, 1919, gives the description of four species of *Isonema*: *I. amplum*, *I. antarcticum*, *I. australe* and *I. tetragonium*. The three former are antarctical, the *tetragonium* on the contrary has been found to occur in the tropical Atlantic. The construction of the gonads and their situation do not agree with those of my specimens therefore I consider the latter to be representatives of a new species and consequently I have given the name «*Isonema Najadis*».

This medusa was captured in the open sea, at a depth of 800 m with the young-fish trawl in the month of October.

Genus Homoconema MAAS 1893.

Homoconema platygonon MAAS 1893.

Four specimens were found by the expedition. They were fished on the second route, in April, near the Canale di Curzola, at depths of 40—80 meters.

Genus Aglaura PÉRON and LÉSUEUR 1809.

Aglaura hemistoma PÉRON and LÉSUEUR 1809.

Of all the medusae this was found in the greatest abundance (115 specimens), mostly young specimens with immature gonads. The yield of the second expedition was richer (78 specimens) than that of the first (37 specimens). The most were captured around Cap Merlera, Galiola and Pericolosa. They live generally near the surface (0—60 m.).

Family: *Geryonidae* ESCHSCHOLTZ 1829 sens. restr. GEGENBAUR.

Genus Liriope LESSON 1843.

Liriope eurybia HAECKEL 1864.

Here we have many young immature animals with eight tentacles and some mature ones with four tentacles, altogether 47 specimens.

It seems worth mentioning that in the material collected with the young-fish trawl there were almost exclusively mature medusae with gonads, but in the other nets only larval forms. The great majority (40) was taken in October, but there are also some which were captured on the second expedition in the month of April (7), at a depth of 0—40 m.

IV. ORDER: *Narcomedusae*. HAECKEL 1879.

Family: *Aeginidae* sens. ampl. MAYER 1910.

	I.				II.					I.	II.	Összesen Total number.
	0-25 m.	20-50 m.	40-60 m.	60-80 m.	0-25 m.	25-50 m.	40-75 m.	60-80 m.	75-105 m.	It. (Yft.)		
Anthomedusae												
1. <i>Steenstrupia rubra</i> ...	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
2. " <i>aurata</i> ...	—	—	—	—	—	12	—	—	1	—	—	13
3. <i>Sarsia gemmifera</i> ...	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2
4. <i>Slabberia halterata</i> ...	—	4	—	—	—	8	—	—	—	—	—	12
5. <i>Zanlcea implexa</i> ...	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
6. <i>Protiara tetranema</i> ...	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7. <i>Leuckartiara octona</i> ...	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
8. <i>Neoturris pileata</i> ...	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2
9. <i>Cytaeis exigua</i> ...	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	2
10. " <i>tetrastyla</i> ...	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	—	3
11. <i>Oceania armata</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24	20	44
12. <i>Thamnostoma dibalia</i> ...	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
13. <i>Bougainvillea autumnalis</i> ...	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
14. <i>Rathkea fasciculata</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	9
Leptomedusae												
15. <i>Eucope picta</i> ...	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
16. <i>Obelia adriatica</i> ...	—	—	—	—	—	—	2	1	—	—	—	3
17. " <i>a and β</i> ...	1	3	—	1	9	21	18	18	—	—	—	71
18. <i>Phialidium variabile</i> ...	—	—	—	—	1	21	7	—	—	—	—	29
19. <i>Eucheilota Maasi</i> ...	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	3
20. <i>Eutima insignis</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3
21. <i>Octogonade mediterranea</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
22. <i>Aequorea Forskalea</i> ...	18	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	19
Trachymedusae												
23. <i>Trachynema funerarium</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
24. <i>Rhopalonema velatum</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19	22	41
25. <i>Sminthea eurygaster</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	7	8
26. <i>Isonema Najadis</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	2
27. <i>Homoeonema platygonon</i> ...	—	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	4
28. <i>Aglaura hemistoma</i> ...	10	12	10	4	29	31	17	1	—	1	—	115
29. <i>Liriope eurybia</i> ...	13	—	9	2	1	3	—	—	—	16	3	47
Narcomedusae												
30. <i>Solmissus albescens</i> ...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	66	80

Az első és második expedíció gyűjtött Hydro medusák. It. = Ivadéktrawl.

Genus Solmissus HAECKEL 1879.

Solmissus albescens HAECKEL 1879.

Since HAECKEL *Solmissus albescens* had not been recorded from the Mediterranean and was only known as occurring at Messina. Therefore its presence in the Adriatic was a new find. In the collection made by the «Najade» it was fairly abundant (80 specimens).

It was obtained on both expeditions at great depths, but always during the night, when, as it seems, it migrates higher. In the daytime it stays in the deeper regions. It was not captured on the surface.

On the first expedition, in October, it was found in the open sea at a depth of 600—800 meters (14), on the second between Pelagosa-Gravosa at 400—800 meters (44) and above the «Najade depth» at 200—600 m (22) only in the collection fished with the young-fish trawl.

Literature.

1. AGASSIZ—MAYER: Mém. Museum Comp. Zool. at Harvard College. Vol. 26. p. 151.
2. BABIĆ, K.: Planktonicki celenterati. — Rad. Jugoslaw. Akad. 1913.
3. LO BIANCO, S., Pelagische Tiefseefischerei d. Maja in der Umgebung von Capri. Jena, 1904.
4. GEGENBAUR, C.: Versuch eines Systems der Medusen. — Zeitsch. f. wiss. Zoologie, Bd., 8., 1856.
5. HAECKEL, E.: Das System der Medusen. Jena, 1879.
6. HARTLAUB, CL.: Craspedote Medusen. 1. Teil. 1. Lief. Codoniden und Cladonemiden. — Nord. Plankton, 12. Kiel u. Leipzig, 1911.
7. HARTLAUB, CL.: Craspedote Medusen 1. Teil, 3. Lief-Margeliden Ibid.
8. HARTLAUB, CL.: Craspedote Medusen 1 Teil. 3. Lief. 1914. Ibid.
9. MAAS, O.: Die craspedoten Medusen der Plankton Expedition. — Ergebnisse der Plankt. Exp., 2. Bd. 1893.
10. MAAS, O.: Die craspedoten Medusen der Siboga Expedition. Monogr. 10. 1905.
11. MAAS, O.: Expedition Antarct. S. Y. Belgica. Medusen. 1906
12. MAYER, A. G.: Medusae of the World. Washington, 1910.
13. NEPPI, V.: Adriatische Hydromedusen. — Sitzungsber. Akad. Wien, 131. Bd. 1912.
14. NEPPI, V., u. STIASNY, G.: Die Hydromedusen des Golfes von Triest. — Arb. Zool. Inst. Wien, 20. Bd. 1913.

15. RUSSEL, F. S. a. REES, W. J.: On Rearing the Hydroid *Zanclaea implexa* (ALDER) and its Medusa *Zanclaea gemmosa* McCRADY, with a Review of the Genus *Zanclaea*. — Journ. Marine Biol. Assoc. Unit. Kingd. Plymouth, Vol. XXI. 1936. p. 107.

16. RUSSEL, F. S.: On the first stage of the Medusa *Eucheilota clausa* (HICKS). — Journ. Marine Biol. Assoc. Unit. Kingd. Plymouth, Vol. XXI. 1936. p. 131.

17. VANHÖFFEN, E.: Die craspedoten Medusen d. Deutsch. Tiefsee Exped. — Wiss. Ergebn. d. D. T. Exp. Valdivia, 3 Bd., Jena, 1902.

18. VANHÖFFEN, E.: Die craspedoten Medusen d. Deutsch. Südpolar Exped. — Deutsche Südpolar Expedition. — 1901—1903. 13. Bd. Zoolog. 5. Bd., Berlin, 1913.

19. ZOJA: Bolletino Scientif. Pavia. Anno 17.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. März. 1938.)

A VOGÉZEK KNAUTIÁI.

SZABÓ ZOLTÁN 1. tagtól.

Abban az időben, amikor a *Knautiákról* monográfiámat¹ összeállítottam, még meglehetősen háttérbe szorultak a Vogézekre vonatkozó adatok. Úgy látszik, hogy ezt az akkori német-francia határhegységet sem a német, sem a francia botanikusok nem kutatták fel eléggé, vagy legalább is kevés összehasonlító, kritikai módszerrel készült monográfia foglalkozott e hegység változatosabb génuszaival.

Amidőn 1934-ben Franciaország déli és keleti hegyvidékeinek *Knautiáit* CHASSAGNE gyűjtése alapján közelebbről megismerhettem és e tanulmány számos új adat közreadását tette lehetővé,² ráterelődött érdeklődésem a Vogézek *Knautiáira* is. Közleményemre hivatkozva ugyanis ISSLER EMIL professzor (Colmar) elküldötte nekem értekezését,³ melyben többek között a Vogézek *Knautiáit* is tárgyalja, továbbá elküldötte bőséges anyagát is revízió végett. Ez az anyag igen alkalmas volt a függő kérdések tisztázására, mert a Vogézek alsó, közép és felső szintjéről módszeresen gyűjtött több száz példány alapján behatóan meg lehetett állapítani a Vogézekben előforduló fajokat, ezek változatosságát, az alakok összefüggését, vagyis azt, hogy mily alakok képviselik a Vogézekben 1. a *Knautia arvensis* és 2. a *K. sylvatica* fajokat, 3. hogy

¹ A *Knautia* génusz monographiája. Math. Term.-tud. Közlem. XXXI. köt. 1. sz. 1911.

² Újabb adatok Nyugat és Déleúrópa *Knautiáinak* ismeretéhez. Botan. Közlem. XXXI. 1934. 109. old.

³ Plantes peu connues ou nouvelles pour la Flore de L'Alsace (Extr. du Bull. de la Soc. d'Hist. nat. de Colmar. T. XXIII. 1932.

kereszteződik-e a két faj, 4. tisztázható-e a Rouy-féle *K. silvatica vogesiaca*.

1. Mint a németnyelvű közleményemből kitűnik, a *K. arvensis* a *K. silvaticával* keverten fordul elő, mégpedig leggyakrabban a *var. polymorpha* körébe tartozó két formával : a *pratensis* és *agrestis* alakokkal.

2. A *K. silvatica* előfordulása kétségtelenül megállapítható, mégpedig a *var. dipsacifoliának* mind az öt alakja előfordul. Ezenkívül gyakori a *var. dolichophylla* és *var. Sendtneri*. Ez utóbbi a legmagasabb szintekben helyettesíti a *K. longifoliát*.

3. A *K. arvensis* és *silvatica* közötti kereszteződés igen gyakori. Az idetartozó alakokat *K. sambucifolia* gyűjtőnévvel foglaljuk össze.

4. A *K. vogesiaca* alak valószínűleg egybeesik a *K. gracilissel*, mint a «*Purpurascetes*» subsectio képviselője, a déli Vogézek alsó régiójában.

Ezen megállapítások szerint a Vogézek az Alpokkal vannak szoros kapcsolatban és nincsenek közelebbi vonatkozásban a középfranciaországi hegyvidékkel, mert azok fajai a Vogézekben hiányoznak.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. máj. 16-án tartott üléséből.)

DIE KNAUTIEN DER VOGESEN.

ZOLTÁN v. SZABÓ.

Zur Zeit, als ich meine Monographie der Knautien¹ verfasste, traten die die Vogesen betreffenden Angaben noch sehr in den Hintergrund. Es scheint, dass dieses damalige deutsch-französische Grenzgebirge weder von den deutschen, noch von den französischen Botanikern genügend durchforscht wurde, oder lag es vielleicht daran, dass nur wenige, auf Grund vergleichender und kritischer Methoden angefertigte Monographien sich mit den vielgestaltigen Gattungen dieses Gebirges befassten.

Als ich im Jahre 1934 die Knautien der südlichen und östlichen Gebirge Frankreichs auf Grund der CHASSAGNE'schen Sammlung näher kennen lernte, und dieses Studium Anlass zur Veröffentlichung zahlreicher neuer Angaben bot,² wurde ich auch auf die Knautien der Vogesen aufmerksam. Mit Bezug auf meine Veröffentlichung sandte mir nämlich PROF. EMIL ISSLER (Colmar) eine Abhandlung,³ in der er unter anderen auch Knautienformen der Hoch-Vogesen bespricht, ferner sein bezügliches, reich eingesammeltes Material behufs Revision zu. Dieses Material erwies sich als sehr geeignet zur Klärung offen gebliebener Fragen, da es auf Grund von vielen hunderten, in den unteren, mittleren und oberen Regionen der Vogesen methodisch gesammelten Exemplaren möglich war, die in diesem Gebirge vorkommenden Arten, deren Varietäten, und den Zusammenhang zwischen den einzelnen Formen eingehend festzustellen, mithin klarzulegen, durch welche Formen die Arten 1. *Knautia arvensis* und 2. *Knautia silvatica*

¹ Monographia Gen. Knautia. Math. Term. tud. Közlem. XXXI. köt. 1. sz. 1911.

² Nouvelles données à la connaissance des Knautia de l'Ouest et du Sud de l'Europe. Botan. Közlem. XXXI. 1934. 109. old.

³ Plantes peu connues ou nouvelles pour la Flore de l'Alsace (Extr. ud. Bull. de la Soc. d'Hist. nat. de Colmar. T. XXIII. 1932.).

in den Vogesen vertreten sind, 3. ob beide Arten sich mit einander kreuzen, 4. ob die *K. silvatica* var. *vogesiaca* zu recht bestehen kann.

1. Die *Knautia arvensis* ist im Bereiche der Vogesen allgemein verbreitet. Nach ISSLER, wie es HEGI⁴ mitteilt, kommt sie mit der *K. silvatica* vermengt vor, so dass die kräftiger entwickelten Exemplare der *K. arvensis* mit ganzrandigen Blättern schwer von den Exemplaren der *K. silvatica* zu unterscheiden sind, obzwar die *K. arvensis* mehr zur Bildung von Blattrosetten neigt. Ich fand im Material ISSLER's unzweifelhafte *K. arvensis*-Exemplare, doch was die Gedrängtheit des Blütenstandes, die Formverhältnisse der Blätter und ihre derbere Konsistenz betrifft, sind diese von der *K. silvatica* gut unterscheidbar. Höchstens, dass die Bastarde manchen Zweifel aufkommen lassen. Die beobachteten Exemplare waren die in den Formenkreis der gewöhnlichen *K. arvensis* (L.) COULT var. *polymorpha* (SCHM.) SZB. gehörigen zwei Formen: Vertreter der *pratensis* (SCHM.) und der *agrestis* (SCHM.) an folgenden Fundstellen: Strausgras-Wiese am Rot-Ried, Ginsterheide Bestégoutte bei Deutsch-Rumbach, Wiesen hinter den früheren Bleichen bei Schmelzwasen, 550 m., über Plancher-les-Mines im Rahintal.

2. Das Vorkommen der *K. silvatica* in den Vogesen ist zweifellos feststellbar. Ich betone dies deshalb, weil HEGI im Jahre 1918 (l. c. p. 305) sich noch folgendermassen äussert: «ist das Vorkommen von typischer *K. silvatica* in den Vogesen nicht zweifellos sichergestellt», wo doch ROUY mit der Benennung *K. dipsacifolia* F. SCHULTZ *typica* NOB. (sc. ROUY) unzweifelhaft diese Pflanze belegte, die ich in meiner Monographie als *K. silvatica* DUBY var. *a. dipsacifolia* (HOST) GODET bezeichnete (S. 333). ROUY gibt als Fundort dieser Pflanze auch das Gebiet der Vogesen ohne nähere Standortsbezeichnungen an.

In dem gewaltigen Material der ISSLER-schen Sammlung konnte ich alle fünf Formen der var. *dipsacifolia* feststellen. Und zwar:

f. 1. *vulgata* (KITTEL) SZABÓ Monogr. 334: Im Tälchen von

⁴ Illustr. Flora v. Mitteleuropa VI. 1 H. 301.

Eschbach, Zastlerwand am Feldberg (Schwarzwald), Kamm über dem Forlenweiher,

f. 2. *praesignis* BECK (SZABÓ, Monogr. 336.): Wolmsa unter d. Fischbödle,

f. 3. *semicalva* BORB. (SZABÓ, Monogr. 337.): Hinter den früheren Bleichen bei Schmelzwasen, Col de Bussang, Pfeiferthal b. Metzeral, Wolmsa unter d. Fischbödle, Elsässer Jura, bei Glas- hütte im Lützelthal,

f. 4. *stenophylla* BORB. (SZABÓ, Monogr. 338.): Sternsee- kopf, 1150 m.,

f. 5. *pachyderma* BRIQ. (SZABÓ, Monogr. 339.): Münster- thal zw. Metzeral u. Steinabrück.

Demnach entwickeln sich auch in den Vogesen sowohl die montanen (1—2) wie die subalpinen (3—5) Formen der *var. dipsaci- folia*, genau wie in den Alpen. Ausser diesen Formen sind in den oberen Regionen noch folgende zwei charakteristische Varietäten feststellbar:

var. dolichophylla BRIQUET (SZABÓ, Monogr. 345.): Zwi- schen Ried und Kahlenwasen, Melkerei Stol- zer Ablass, Rot-Ried, Frankenthal,

var. Sendtneri (BRÜGG) WOLF. (SZABÓ, Monogr. 346.): aus den folgenden Höhenorten: Rotenbachkopf, Storken- kopf (*f. seticaulis*) 1350 m, Ballon de Servance 1200 m, Tanneckgipfel 1300 m, Drumontgipfel, Rotenbach-Rainkopf 1100 m, Klinzkopf, Süd- hang des Grossen Belchens, Hohnneck, Fran- kenthal, Missheimle, Forlenweiher, Schlucht- pass 1130 m (loc. class. von *K. longifolia* KIRCHSLEGER), Lau- chenweiher 950 m.

ISSLER (l. c. S. 17) schreibt: «*sur les sommités des Voges: Tan- neck, Hohnneck, Klinzkopf, Grand Ballon, Drumont nous avons rencontré des formes, qui ne se distinguent en rien de la ssp. Godeti Reuters*». Meinerseits kann ich diese Ansicht nicht teilen. Die erwähn- ten Exemplare der höheren Regionen stehen in derart enger Ver- bindung mit den Formen der *var. dipsacifolia* — Übergangsformen, was Behaarung, Blattform und Blattbestand betrifft, sind unzweifel-

haft vorhanden — dass der Zusammenhang der *vulgata* — *dolichophylla* — *Sendtneri* Reihe nicht geleugnet werden kann. In den Vogesen kommt weder die wahre *K. longifolia* (W. K.) KOCH noch die wahre *K. Godeti* REUT vor. Wie es ISSLER richtig feststellt, gehören die von hier berichteten «*K. longifolia*»-Formen zum Teil dem Kreise *K. silvatica* v. *dolichophylla* an, bezeichnen mithin die verkahlstengelige, schmalblättrige subalpine Varietät der *K. silvatica*. Die für die *K. Godeti* angesehenen Exemplare decken sich nicht mit der für den Jura oder für die östliche französische Gebirgsgegend so charakteristischen, durch sehr schmale, lederige, langgezogene Blätter gekennzeichneten Art der *Knautia Godeti*, die mit der *K. silvatica* durch Zwischenformen nicht verbunden ist. Hier kann eine entfernte Ähnlichkeit an einigen Exemplaren den Sammler wohl irreführen, wie ich welche auch in der Sammlung ISSLER vorfand (Klinzkopf, Südhang des Gipfels des Grossen Belchens). Diese benennt ISSLER *K. Godeti* f. *pseudolongifolia*. Durch ihre langstieligen, lanzettlichen Blätter unterscheiden sich diese wohl von den übrigen Exemplaren, sind aber offenbar dünnere Individuen der var. *Sendtneri*. Als Modifikationen kann man sie wohl benennen, doch ist mit dem Namen «*pseudolongifolia*» bereits eine «*arvensis*»-Form der Sudeten bedacht, mithin möchte ich sie eher auf f. *pseudogodeti* umbenennen; dieser Name ist weit bezeichnender.

3. Die Standorte der *K. arvensis* und der *K. silvatica* berühren sich selten, richtiger gesagt, trennen der Wiesenbereich der ersteren und der Waldbereich der letzteren beide Arten von einander, selbst im gemeinsamen Areal. Trotzdem wurden, in Anbetracht der starken Neigung der *Knautia*-Arten zu erfolgreichen Kreuzungen bereits mehrere *arvensis* × *silvatica* Bastarde beschrieben. ISSLER betont auch, dass dieser Bastard in den Vogesen so häufig auftritt, dass die Unterscheidung der *arvensis* und der *silvatica* an Stellen recht schwierig ist, wo beide Arten sich begegnen. Zwischen den vegetativen Organen beider Arten stimmt kaum etwas überein, die Verteilung der Blätter, der Habitus, die Blattform und Konsistenz sind derart verschieden, dass diese Äusserung sehr überrascht. Nach Einsicht in Prof. ISSLER'S Sammlung aber muss man wahrlich zur Überzeugung gelangen, dass zwischen diesen beiden, ver-

schiedenen Subsectionen (*Arvenses* u. *Silvaticae*) angehörenden Arten vielerlei phänotypische Bastarde entstehen. Sie sind aber sofort daran erkennbar, dass die einzelnen Individuen in heteroser Üppigkeit überentwickelt sind; an der plumpen, regelwidrig leierförmig gefiederten Blattform der *silvatica* ist das Erbe der *arvensis* sofort ersichtlich. Besonders die oberen Blattpaare sind ähnlich entwickelt. Der Habitus, die Behaarung und der Blütenstand sind sehr veränderlich.

In der Literatur wird das leierförmige Blatt der «*silvatica*» des öfteren erwähnt, ebenso, wie das der «*drymeia*». Dies ist in jedem Falle als ein Einfluss der *arvensis* nachwiesbar.⁵ Der Bastard der *arvensis* var. *polymorpha* und der *silvatica* var. *dipsacifolia* wird in der Literatur für gewöhnlich als *K. silvatica* h. *pinnatisecta* BECKER (SZABÓ, Monogr. 380) bezeichnet. Der Bastard mit *silvatica* var. *Sendtneri* wurde von BRIQUET (l. c. 131) beschrieben und nach SCHLEICHER mit dem Namen *K. sambucifolia* belegt; den Bastard mit *silvatica* var. *dolichophylla* beschrieb ich unter den Namen *K. sequanica* und *Alleizettei* (Bot. Közl. XXXI. 1934. 143). Wahrscheinlich kommen in den Vogesen die Abkömmlinge aller drei Kombinationen vor, da dort alle drei *silvatica*-Varietäten vorhanden sind. Die gewöhnlichste dürfte die *Sendtneri* sein, mithin kann — ohne besonderer Bedeutung — der zutreffende Name *K. sambucifolia* für den ganzen Kombinations-komplex bestehen bleiben. In der Sammlung ISSLER's sah ich von folgenden Stellen ähnliche Bastarde: Rot Ried, Schluchtkessel, Landersen, Orschweier, Planche des Belles Filles, Hohneck, Grashang über den Missheimle, Schluchtpass, Rainkopf 1200 m, Wormspel am Krappenfels, Tanneckfelsen, Südhang des Grossen Belchen, Osthang des Florimonts.

4. Das ISSLER'sche Material gab mir auch Gelegenheit, die Frage der «*K. Vogesiaca*» zu klären. Dieser Name stammt von ROUY,⁶ der ein, dem Formenkreis «*silvatica*» angehörendes Exem-

⁵ SZABÓ: Organographische und genetische Untersuchungen an Dipsacaceen. (Math. Term. tud. Értésítő. LIII. 1935.)

⁶ ROUY: Flore de France, Tome VIII. (1903.) S. 111.

plar mit der Benennung «*Vogesiaca*» unterschied. Der Standort dieses Exemplares ist Plombières (Vosges, KRALIK in h. R.).

Da ich weder KRALIK's noch ROUY's Pflanze zur Einsicht bekam, und auch in der Sammlung des Pariser Museums keine aus den Vogesen stammenden Exemplare vorfand, bestimmte ich die drei Vogesenpflanzen aus den Sammlungen DEGEN, BURNAT und HANDEL-MAZZETTI als *Knautia silvatica* und in Anerkennung der geographischen Benennung von ROUY, zählte ich sie als *var. vogesiaca* in meiner Monographie auf.

Diese Unterscheidung machte auch HEGI (l. c. 310) sich zu eigen, und zählt eine *K. silvatica* 3. *var. Vogesiaca* ROUY mit Beibehaltung meiner Beschreibung auf, gibt die Blattgrösse mit 25×5 cm an, hält jedoch ihr Vorkommen für zweifelhaft: «Angeblich in den Vogesen».

Nun machte ich aber die Wahrnehmung, dass ISSLER's reiches Material zwar mit den oben erwähnten *silvatica*-Variationen übereinstimmt, doch nicht mit der ROUY'schen Beschreibung und dies erweckte in mir den Verdacht, dass ich seinerzeit die *Vogesiaca*-Benennung des ROUY unrichtig auf die in meiner Monographie aufgezählten Exemplare anwandte. Auffallend ist es nämlich, dass ROUY auf Grund des KRALIK'schen Exemplares die Blätter als flaumig (*pubescentes en dessous*) bezeichnet, und der Pflanze eine Ähnlichkeit mit der JORDAN'schen *K. puberula* zurteilt, und unter letzterer irgend eine *arvernensis*-Art aus der *Purpurascens*-Gruppe verstanden haben mochte. Dieser Umstand zeitigte das Bedenken, dass die ROUY'sche «*Vogesiaca*» gar nicht dem Formenkreise der echten *silvatica* (*dipsacifolia*) angehört. Der Fundort «Plombières» liegt nämlich nicht im Vogesengebirge, sondern westlich davon im Departement Vosges, südlich von Epinal. Von diesem Standort sind mir aber Exemplare bereits bekannt, und aus der Gegend von Epinal, in der Sammlung BERHER 1878, und aus den «*Forêts sur le grés vosgien à Bitcher*» in der Sammlung F. SCHULTZ. Diese Pflanzen beschrieb ich in meiner Monographie unter den zu untersuchenden Arten als *K. gracilis* nov. spec. inq. (S. 376). HEGI übernahm gleichfalls ihre Beschreibung (l. c. S. 299 No 303) mit der nämlichen Betonung der Notwendigkeit eines weiteren Eingehens in die Sache. Die systematische Stellung der *K. gracilis*

in der Subsektion «Purpurascetes» konnte ich auf Grund des BERHER'schen Exemplares in der Sammlung CHASSAGNE feststellen. Diese Pflanze gehört demnach nicht dem Formenkreis *K. silvatica* sondern dem der *K. drymeia* var. *arvernensis* an.

Jetzt fand ich auch in der ISSLER'schen Sammlung ein Exemplar mit der Bezeichnung «Altenweiher» (1904). Nach freundlicher Mitteilung des Herrn Prof. ISSLER heisst einer der im Departement Haut-Rhin 950 m hochgelegenen Stauweiher der südlichen Vogesen «Altenweiher». Auch diese Pflanze gehört unzweifelhaft dem Formenkreis *K. drymeia* an. Nachdem die Behaarung und die Blattform der *K. silvatica* var. *Vogesiaca* (elliptiques-lancéolées cuspidées, pubescentes en dessous) mit den Anforderungen der Subsektion «Purpurascetes» übereinstimmt, und auch die Fundorte die gleichen sind (Epinal—Plombières—südliche Vogesen), sind die *K. gracilis* SZABÓ und die *vogesiaca* ROUY höchstwahrscheinlich mit einander identisch. Demnach ist der Name *K. silvatica* var. *vogesiaca* SZABÓ Monogr. 345 zu streichen, die unter diesem Namen aufgezählten Pflanzen (Hohneck, Le Valtin) gehören höchstwahrscheinlich zu *K. silvatica* var. *dolichophylla*, der Name *K. gracilis* SZABÓ Monogr. 376 wird aber mit dem Namen *K. vogesiaca* (ROUY) SZABÓ abzutauschen sein, falls diese meine Voraussetzung von den französischen Botanikern als richtig anerkannt wird.

Auf Grund all des Vorausgesagten kann man es als bestätigt betrachten, dass in den — eng genommenen — Vogesen die Varietäten der Arten *K. arvensis* und *K. silvatica* vorkommen, wozu sich im südlichen Gebiete die *K. vogesiaca* gesellt. Auf den Höhen sind vertreten die subalpinen Formen (*dolichophylla* und *Sendtneri*). In den Vogesen nicht heimisch sind *K. longifolia* und *K. Godeti*. Gleichfalls fehlen hier die Arten der Gebirge Mittelfrankreichs (*K. trachitica*, *basaltica*, *foresiensis* etc.). Die Knautienflora der Vogesen schliesst sich demnach der der Alpen an.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16. Mai 1938.)

A RUTINÓZNAK ELŐÁLLÍTÁSA RUTINBÓL ENZIMHATÁS NÉLKÜL.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

Nemrégem megvizsgáltam azt a diszaccharidot, amely a rutinból rhamnusenzim hatására keletkezik, a rutinózt, és szintézissel is előállítottam.¹ Ezt a vegyületet azonban a rutinból kiindulólág tisztán kémiai úton előállítani eddig nem tudtuk. Az ecetsavas hidrolizisek tanulmányozása közben, melyet különféle glükozidokra alkalmaztam, jöttem reá, hogy vizes ecetsavval úgy lehet a hidrolizist vezetni, hogy a rutinózt a reakciókeverékből jól kristályosodó acetatja alakjában el lehessen különíteni.

KISÉRLETI RÉSZ.

A rutin ecetsavas hydrolysize.

5 g rutin és 150 cm³ 10%-os ecetsav keverékét visszacsépegő hűtő alatt hat óra hosszat forraljuk. Ez alatt az idő alatt a rutin fokozatosan feloldódik. Most 150 cm³ vízzel hígítjuk az oldatot és egy éjszakán át jégsekrényben hagyjuk. A kivált részt leszívátjuk; megszáritva 3·2 g. A vizes oldatot csontszénnel hidegen derítjük és vákuum alatt szárazra pároljuk. A maradékot 50 cm³ vízben oldjuk és melegen másodsor is derítjük. Most már víztiszta az oldat. Vakuum alatt szárazra pároljuk és a maradékot 1 g vízm. Na-acetáttal és 5 cm³ ecetsavanhydriddel megacetylezük (1 óra vízfürdőn). Vízbe öntjük

¹ ZEMPLÉN GÉZA. Mat. és Term. Ért. 54, 208 (1936).

a reakciókeveréket, másnap friss vízzel keverjük el a kivált acetátot, leszívátjuk és 5 majd 3 cm³ methylalkoholból kétszer átkristályosítjuk. 0.4 g rutinózacetátot kapunk.

Op.: 169—170°.

Keverék op. synth. rutinose-acetáttal: 167—168.5°.

Forgatóképesség: $[a]_D^{20} = \frac{-0.42 \times 10}{0.1516} = -27.70^\circ$ chloroformban.

*

GERECS ÁRPÁD tanársegédemnek ügyes segítségéért köszönetet mondok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. június 16-án tartott üléséből).

DARSTELLUNG DER RUTINOSE AUS RUTIN OHNE FERMENTWIRKUNG.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. Mitglied.

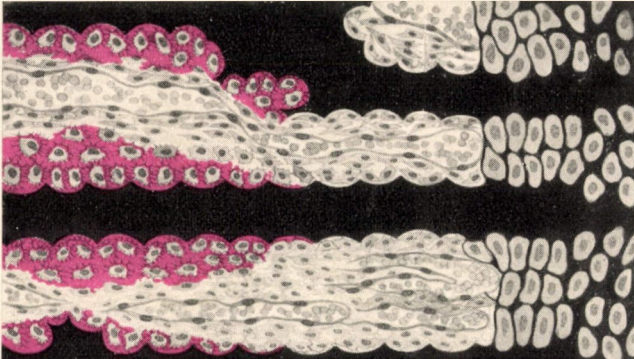
Unlängst habe ich die *Rutinose*, die Biose, die durch die Einwirkung von Rhamnusferment aus *Rutin* entsteht, untersucht und auch synthetisch aufgebaut.¹ Diese Spaltung des Rutins konnte bisher auf chemischen Weg nicht ausgeführt werden. Bei systematischen Hydrolysen mit Hilfe von verdünnter Essigsäure konnte ich diese Spaltung in Aglykon und Rutinose bewerkstelligen, obschon die gebildete Biose ebenfalls einer langsamen Hydrolyse anheimfällt. Die Rutinose bildet ein ausgezeichnet krystallisierenden Heptaacetat, das aus dem Reaktionsgemisch isoliert werden kann.

¹ GÉZA ZEMPLÉN u. ÁRPÁD GERECs. B. 68, 1318 (1935).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16-ten Juni 1938.)



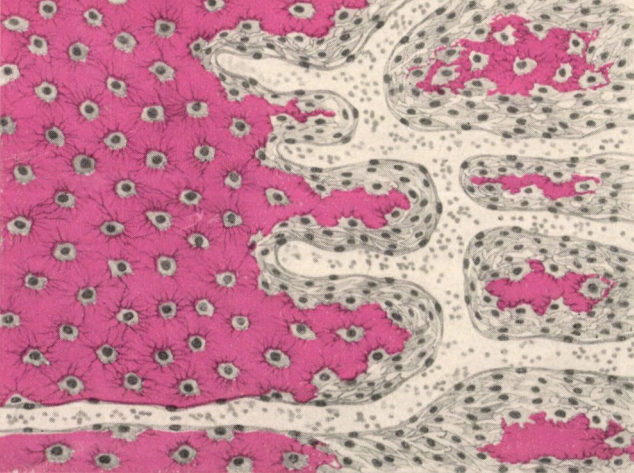
2. kép.



3. kép.



4. kép.



50639



8

MATEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI MAURITZ BÉLA OSZTÁLYTITKÁR.

LVII. KÖTET. — HARMADIK (UTOLSÓ) RÉSZ.

MATHEMATISCHER
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHER
ANZEIGER

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

REDIGIERT VON B. MAURITZ KLASSENSEKRETÄR.

BAND LVII. — DRITTER (LETZTER) TEIL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1938.

UNITÁRIUS HELYETTESÍTÉSEK LEVEZETETT HELYETTESÍTÉSEI.

RADOS GUSZTÁV t. tagtól.

A jelen dolgozatban unitárius helyettesítések bizonyos levezetett helyettesítéseivel foglalkozom. Nevezetesen sikerül annak a kimutatása, hogy unitárius helyettesítés hatványa, adjungált helyettesítései, indukált helyettesítései ismét unitárius helyettesítések, valamint annak a bebizonyítása, hogy két unitárius helyettesítés KRONECKER-féle szorzatalakulata ismét unitárius helyettesítést szolgáltat.

I. Néhány fogalmi megállapítás és elemi tételek.

A későbbi tárgyalások folyamatosságának érdekében ismeretek néhány definíciót és egyszerű tételt, amelyekre később hivatkoznunk kell.

Az

$$y_k = u_{k1}x_1 + u_{k2}x_2 + \cdots + u_{kn}x_n \quad (I')$$

($k=1, 2, \dots, n$)

lineár helyettesítés transzponált (FROBENIUS szerint konjugált)¹ helyettesítését, az

$$y_k = v_{k1}x_1 + v_{k2}x_2 + \cdots + v_{kn}x_n \quad (II')$$

($k=1, 2, \dots, n$; $v_{kl}=u_{lk}$)

ezentúl U' -vel jelöljük.

¹ FROBENIUS «Über lineare Substitutionen und bilineare Formen»
Crelle-Journal 84. k. 4. l.

Ha A és B két tetszőszerinti helyettesítés, akkor fennáll az

$$(AB)' = B'A' \quad (1)$$

egyenlőség.

Valamely z komplex szám konjugált értékét ezentúl \bar{z} -vel fogjuk jelölni.

Az

$$y_k = u_{1k}x_1 + \bar{u}_{2k}x_2 + \dots + \bar{u}_{nk}x_n$$

($k=1, 2, \dots, n$)

lineár helyettesítést az U helyettesítés *kísérő helyettesítésének* nevezzük (begleitende Substitution; substitution associée) és U^* -val jelöljük. Tehát

$$U^* = \bar{U}'.$$

Az (1) alatti egyenlőséggel kifejezett tételből tüstént következik, hogy

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (2)$$

mert

$$(AB)^* = (\overline{AB})' = (\overline{B'A'}) = \bar{B}'A'.$$

Ha az U lineár helyettesítés kielégíti az

$$UU^* = \mathcal{E} \quad (3)$$

egyenletet, melyben \mathcal{E} az

$$y_i = x_i$$

($i=1, 2, \dots, n$)

azonos vagy egység-helyettesítést jelenti, akkor az U -t *unitárius helyettesítésnek* nevezzük.

E definícióból tüstént következik, hogy unitárius helyettesítés együtthatóiból alakított determináns abszolút értéke 1-gyel egyenlő. Mert

$$\det.(UU^*) = \det.(\mathcal{E}) = 1$$

és

$$\begin{aligned} \det.(UU^*) &= \det.(U) \cdot \det.(U^*) = (\det. U) \det.(\bar{U}') = \\ &= \det.(U) \det.\bar{U}' = \text{abs.} [\det. U]^2. \end{aligned}$$

Az unitárius helyettesítést definiáló egyenlőségből következik, hogy unitárius helyettesítés együtthatói között a következő $\frac{n(n+1)}{2}$ számú feltételi egyenlet áll fenn

$$u_{i1}\bar{u}_{k1} + u_{i2}\bar{u}_{k2} + \dots + u_{in}\bar{u}_{kn} = \delta_{ik}, \quad (4)$$

($i, k = 1, 2, \dots, n$)

amelyekben δ_{ik} most és ezentúl 1-gyet jelentsen, ha $i=k$ és zérust, ha $i \neq k$.

A (4) alatti feltételi egyenletek baloldalán az

$$\|u_{ik}\| \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

unitárius matrix egy sorából és egy sor konjugált értékeiből alakított belső szorzatok foglalnak helyet. Könnyű kimutatni, hogy e matrix oszlopaira vonatkozóan a (4) alatti feltételi egyenletekkel analóg egyenletek állanak fenn. Az U unitárius helyettesítés determinánsáról kimutattuk, hogy a zérustól különböző. Tehát létezik U -nak inverz helyettesítése U^{-1} . Ha (3) alatti egyenlőséget mindkét oldalán balról U^{-1} -gyel szorozzuk

$$U^* = U^{-1}$$

adódik. Ha pedig ezt az egyenlőséget mindkét oldalán jobbról U -val szorozzuk az

$$U^*U = \mathcal{E}$$

egyenlőség adódik. Ebből pedig az

$$u_{1i}\bar{u}_{1k} + u_{2i}\bar{u}_{2k} + \dots + u_{ni}\bar{u}_{nk} = \delta_{ik} \quad (4')$$

(i, k=1, 2, \dots, n)

egyenlőségek adódnak.

A (4) alatti egyenlőségek mutatják, hogy valós unitárius helyettesítés orthogonális, mert valós helyettesítés esetében

$$u_{ik} = \bar{u}_{ik}$$

és így a (4) alatti feltételi egyenletek az orthogonális helyettesítések

$$u_{i1}u_{k1} + u_{i2}u_{k2} + \dots + u_{in}u_{kn} = \delta_{ik} \\ (i, k=1, 2, \dots, n)$$

feltételi egyenleteibe mennek át.

Ilyen értelemben az unitárius helyettesítések a valós orthogonális helyettesítéseknek általánosításai; de hozzátesszük: csakis a valós orthogonális helyettesítésekéi. Ugyanis, ha az U unitárius helyettesítés egyszersmind orthogonális, akkor a következő két egyenlőség áll fenn

$$UU^* = \mathcal{E}$$

$$UU' = \mathcal{E}.$$

Ezekből az

$$U\bar{U}' = UU''$$

egyenlőség következik és mivel

$$\det.(U) \neq 0,$$

továbbá az

$$\bar{U}' = U''$$

egyenlőség, mely mutatja, hogy U valós helyettesítés.

Az (1) alatti egyenlőségből tüstént következik a gyakran használandó

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (5)$$

egyenlőség.

Végül még idejegyezzük a magától értődő

$$(U^*)^* = U \quad (6)$$

egyenlőséget.

II. Unitárius helyettesítések levezetett helyettesítései.

1. Unitárius helyettesítés hatványa.

Legyen U tetszésszerinti unitárius helyettesítés, úgyhogy

$$UU^* = \mathcal{E},$$

akkor

$$(UU^*)^m = \mathcal{E}^m = \mathcal{E}, \quad (7)$$

de

$$(UU^*)^m = \underbrace{UU^* \cdot UU^* \cdot \dots \cdot UU^*}_{m\text{-szer}}$$

és mivel

$$UU^* = U^*U = \mathcal{E},$$

az U és U^* helyettesítések felcserélhetők, úgyhogy

$$(UU^*)^m = \underbrace{U \cdot U \cdot \dots \cdot U}_{m\text{-szer}} \cdot \underbrace{U^* \cdot U^* \cdot \dots \cdot U^*}_{m\text{-szer}} = U^m (U^*)^m.$$

A (7) alatti egyenlőség ennek következtében így írható:

$$U^m \cdot U^{*m} = \mathcal{E}.$$

Ez az egyenlőség mutatja, hogy U -val együtt U^n is unitárius. Tehát áll a következő tétel:

Unitárius helyettes bármely egész kitevős hatványa ismét unitárius. A tétel ugyanis negatív egész kitevős hatványokra is érvényes, mert

$$U^{-m} \cdot U^{*-m} = (UU^*)^{-m} = \mathcal{E}^{-m} = \mathcal{E}.$$

2. Unitárius helyettesítés adjungált helyettesítései.

Legyen U ismét unitárius helyettesítés. Együtthatóinak

$$U_{ik} \quad (k \text{ és } k^2=1, 2, \dots, n)$$

matrixából kitermelhető m -edfokú determinánsok az

$$C_{ik} = \begin{vmatrix} U_{i_1 k_1} & U_{i_1 k_2} & \dots & U_{i_1 k_m} \\ U_{i_2 k_1} & U_{i_2 k_2} & \dots & U_{i_2 k_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{i_m k_1} & U_{i_m k_2} & \dots & U_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

determinánsból akként adódnak, hogy

$$\begin{aligned} i &= (i_1, i_2, \dots, i_m) \\ k &= (k_1, k_2, \dots, k_m) \end{aligned}$$

helyébe az

$$1, 2, \dots, n$$

elemeknek ismétlés nélkül való kombinációit helyettesítjük. Az

$$y = C_{i_1} x_1 + C_{i_2} x_2 + \dots + C_{i_r} x_r \quad (i=1, 2, \dots, r; r = \binom{n}{m})$$

$\binom{n}{m}$ -méretű helyettesítés az U m -dik adjungált helyettesítésének nevezetetik és $A_m(U)$ -val jelöltetik.

Mindenekelőtt világos, hogy a transzponált helyettesítés adjungáltja azonos az adjungált helyettesítés transzponáltjával, azaz

$$A_m(U^T) = [A_m(U)]^T$$

és ha áttérünk a konjugált komplex együtthatókon, hogy

$$A_m(U^*) = [A_m(U)]^*, \quad (8)$$

azaz a kísérő helyettesítés adjungáltja azonos az adjungált helyettesítés kísérőjével.

Ismeretes továbbá, hogy

$$A_m(UV) = A_m(U) A_m(V). \quad (9)$$

Végül idejegyezzük még a következő fölhasználandó egyenlőséget:

$$A_m^-(\mathcal{E}) = E, \quad (10)$$

ahol \mathcal{E} az n -mértű, E , az $\binom{n}{m}$ -mértű azonos helyettesítés jele.

Ezeknek alapján könnyen bebizonyítható a következő tétel:

Unitárius helyettesítés adjungált helyettesítései ismét unitárius helyettesítések.

Legyen U n -mértű unitárius helyettesítés, úgyhogy

$$UU^* = \mathcal{E}. \quad (11)$$

Annak a bebizonyítására, hogy $A_m(U)$ ismét unitárius, elegendő az

$$A_m(U) [A_m(U)]^* = E, \quad \left(\nu = \binom{n}{m} \right) \quad (12)$$

egyenlőség kimutatása. A (8) alatti egyenlőséggel kifejezett tétel-nél fogva

$$[A_m(U)]^* = A_m(U^*),$$

de akkor a (9) alatti egyenlőséggel kifejezett törvényszerűség értelmében

$$A_m(U) [A_m(U)]^* = A_m(U) A_m(U^*) = A_m^-(UU^*)$$

és végül a (11) és (10) alatti egyenlőségek figyelembevételével írhatjuk

$$A_m(U) [A_m(U)]^* = E,$$

amivel a tételünk be van bizonyítva.

Az imént bebizonyított tétel módot nyújt arra, hogy megadott, n -méretű unitárius helyettesítésekből álló csoportból kiindulva az unitárius csoportoknak egy egész sorozatát levezessük. Ha G ilyen csoport, akkor e csoport helyettesítéseinek m -dik adjungált helyettesítéseiből alakított $A_m(G)$ sorozat ismét csoportot alkotnak. Ha ugyanis U és V a G -nek két helyettesítése, akkor a G csoport voltánál fogva UV is a G -nek helyettesítése, de akkor az $A_m(G)$ sorozatban az $A_m(U)$ és $A_m(V)$ helyettesítésekkel egyidőben az

$$A_m(UV) = A_m(U) A_m(V)$$

helyettesítés is előfordul. Mivel pedig G csoport voltánál fogva az n -méretű \mathcal{G} azonos helyettesítést tartalmazza, az $A_m(G)$ sorozat, mely $\binom{n}{m}$ -méretű helyettesítésekből áll az

$$A_m(\mathcal{G}) = E_{\binom{n}{m}}$$

az $\binom{n}{m}$ -méretű azonos helyettesítést tartalmazza. Ezeknek alapján kimondható, hogy $A_m(G)$ csoport. Ezt a csoportot a G csoport m -dik adjungált csoportjának nevezzük. Mivel m az $1, 2, \dots, n$ értékeket veheti föl, a G adjungált csoportjának száma; ha magát a G csoportot is beleszámítjuk, n .

Könnyen belátható, hogy a G csoport és annak m -dik adjungált csoportja között izomorf vonatkozás áll fenn, ha a G csoport tetszőszerinti U helyettesítés megfelelőjének az $A_m(G)$ csoport $A_m(U)$ helyettesítését tekintjük. Ugyanis akkor a G csoport

$$U, V, UV$$

helyettesítéseinek az $A_m(G)$ csoportban az

$$A_m(U), A_m(V), A_m(UV) = A_m(U) A_m(V)$$

helyettesítések felelnek meg.

Az $A_m(G)$ és a G csoport között fennálló izomorfizmus meriedrikus. Ennek részletes, de terjedelmes vizsgálatot igénylő tárgyalására más alkalommal szándékozom visszatérni.

3. Unitárius helyettesítések indukált helyettesítései.

Ezekről ismét kimutatható a következő tétel:

Unitárius helyettesítés bárhányadik preparált indukált helyettesítése ismét unitárius helyettesítés.

E tétel bebizonyításában felhasználom a jelen folyóirat 17. kötetében «Indukált helyettesítések csoportjai» címen megjelent értekezésemben bebizonyított következő tételeket:

1. *Két helyettesítés szorzatának k -dik indukált helyettesítése egyenlő a tényezőik indukált helyettesítéseinek fordított sorrendben képezett szorzatával.* Ez képlettel így fejezhető ki:

$$I_k(UV) = I_k(V)I_k(U). \quad (12)$$

(L. az idézett értekezés 48. l.)

Preparált indukált helyettesítésekre (és általánosságban csak ezekre) áll a következő tétel:

2. *Transzponált induktor helyettesítésnek transzponált indukált helyettesítés felel meg* (L. az i. é. 56. l.), azaz

$$I_k(U') = [I_k(U)]'.$$

Végül

3. *Az n -mértetű azonos helyettesítés k -dik indukált helyettesítése $\binom{n+k-1}{k}$ -mértetű azonos helyettesítés* (L. az i. é. 50. l.), azaz

$$I_k(\mathcal{E}) = E_\nu \quad \left(\nu = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{1, 2, \dots, k} \right),$$

ahol \mathcal{E} az n -mértetű, E_ν a ν -mértetű azonos helyettesítést jelenti.

Áttérve tételünk bebizonyítására, legyen U ismét az

$$y_i = U_{i1}x_1 + U_{i2}x_2 + \dots + U_{in}x_n$$

n -mértetű unitárius helyettesítés, tehát

$$U^*U = UU^* = \mathcal{E}. \quad (13)$$

Az idézett 2. segéd-tételnél fogva

$$I_k(U') = [I_k(U)]',$$

tehát

$$I_k(U^*) = [I_k(U)]^*;$$

ennek következtében

$$I_k(U) [I_k(U)]^* = I_k(U) I_k(U^*);$$

tekintettel a (12) alatti egyenlőségre, ez így írható:

$$I_k(U) [I_k(U)]^* = I_k(U^*U), \quad (14)$$

de mivel (13)-nál fogva

$$U^*U = \mathcal{E}$$

és a 3. segédétel értelmében

$$I_k(\mathcal{E}) = E_1,$$

végül a (14) alatti egyenlőség a következőbe megy át:

$$I_k(U) [I_k(U)]^* = E_1 \quad \left(\nu = \binom{n+k-1}{k} \right),$$

amivel az $I_k(U)$ unitárius volta be van bizonyítva.

Ez a tétel ismét segédeszközt szolgáltat adott, unitárius helyettesítésekből álló csoport új unitárius csoportok képezésére. Ha ugyanis az n -méretű unitárius helyettesítésekből álló G csoport helyettesítéseinek k -dik preparált helyettesítéseiből egy $I_k(G)$ -vel jelölendő sorozatot alkotunk, ez a sorozat ismét unitárius helyettesítésekből áll és csoporttulajdonságú. Ugyanis a G csoport

$$U, V, UV$$

helyettesítéseinek az $I_k(G)$ sorozatban megfelelnek az

$$I_k(U), I_k(V), I_k(UV) = I_k(U) I_k(V)$$

helyettesítések és mivel

$$I_k(\mathcal{E}) = E_1 \quad \left(\nu = \binom{n+k-1}{k} \right)$$

az $I_k(G)$ sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ -méretű helyettesítésekből álló csoportot szolgáltat, mely ismét a G csoporttal izomorf. Mivel pedig az $I_k(G)$ csoport minden helyettesítésének a G -ben n -számú helyettesítés felel meg (L. az idézett értekezés 55. l.) a G és $I_k(G)$ csoportok izomorfizmusa meriédrikus.

4. Unitárius matrixok Kronecker-féle sorozatalakulata.

Ha adva van két tetszőesszerinti négyzetes matrix

$$A = \|a_{ik}\|, \quad B = \|b_{rs}\|,$$

$i, k=1, 2, \dots, m) \quad (r, s=1, 2, \dots, n)$

akkor

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & \dots & a_{1m}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1m}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{1n} & \dots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & \dots & a_{2m}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} & \dots & a_{2m}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{1n} & \dots & a_{2m}b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m2}b_{11} & \dots & a_{mm}b_{11} & a_{m1}b_{12} & a_{m2}b_{12} & \dots & a_{mm}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1n} & a_{m2}b_{1n} & \dots & a_{mm}b_{1n} \end{array} \right\|$$

mn sorból és oszlopból álló matrixot az A és B matrixok KRONECKER-féle szorzatalakulatának nevezzük és $A \times B$ jellel jelöljük.

A tétel, melyet bebizonyítunk, a következő.

Ha A és B unitárius matrixok, akkor $A \times B$ is ilyen.

Az A és B matrixok unitáriusok, akkor és csak akkor, ha a következő feltételek egyenletek ki vannak elégítve:

$$a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \dots + a_{im}a_{mk} = \delta_{ik} \quad (F_1)$$

$(i, k=1, 2, \dots, m; k \geq i)$

$$b_{r1}\bar{b}_{s1} + b_{r2}\bar{b}_{s2} + \dots + b_{rn}\bar{b}_{sn} = \delta_{rs}, \quad (F_2)$$

$(r, s=1, 2, \dots, m; s \geq r)$

amelyekben δ_{ik} és δ_{rs} 1-gyel vagy zérussal egyenlők, a szerint, amint $i=k$, $r=s$ vagy $i \neq k$, $r \neq s$.

Tételünk bebizonyítására elegendő annak a kimutatása, hogy az $A \times B$ matrix bármely sorának az e sorban foglalt elemek konjugált komplex értékeiből álló sorral való belső szorzata, P , 1-gyel egyenlő, míg egy tőle különböző sor elemeinek komplex értékeiből álló sorral való belső szorzata zérussal egyenlő.

P az

$$a_{i1}b_{k1}a_{i2}b_{k1} \dots a_{im}b_{k1} \dots a_{i1}b_{kn}a_{i2}b_{kn} \dots a_{im}b_{kn}$$

és az

$$\bar{a}_{i1}\bar{b}_{k1}\bar{a}_{i2}\bar{b}_{k1} \dots \bar{a}_{im}\bar{b}_{k1} \dots \bar{a}_{i1}\bar{b}_{kn}\bar{a}_{i2}\bar{b}_{kn} \dots \bar{a}_{im}\bar{b}_{kn}$$

ÜBER EINIGE ABGELEITETE SUBSTITUTIONEN EINER UNITÄREN SUBSTITUTION.

Von GUSTAV RADOS E. M.

Im vorstehenden Aufsatz wurde ein Beweis dafür erbracht, dass die adjungierten und auch die inducierten Substitutionen von unitären Substitutionen wiederum unitär sind.

Ferner wurde gezeigt, dass die aus den unitären Matrizen

$$A = \| a_{ik} \|, \quad B = \| b_{rs} \|$$

$(i, k=1, 2, \dots, m) \quad (r, s=1, 2, \dots, n)$

gebildete KRONECKER-ische Matrix

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{11} & \dots & a_{1m} & b_{11} & a_{11} & b_{12} & a_{12} & b_{12} & \dots & a_{1m} & b_{12} & \dots & a_{11} & b_{1n} & a_{12} & b_{1n} & \dots & a_{1m} & b_{1n} \\ a_{21} & b_{11} & a_{22} & b_{11} & \dots & a_{2m} & b_{11} & a_{21} & b_{12} & a_{22} & b_{12} & \dots & a_{2m} & b_{12} & \dots & a_{21} & b_{1n} & a_{22} & b_{1n} & \dots & a_{2m} & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{m1} & b_{n1} & a_{m2} & b_{n1} & \dots & a_{mm} & b_{n1} & a_{m1} & b_{n2} & a_{m2} & b_{n2} & \dots & a_{mm} & b_{n2} & \dots & a_{m2} & b_{nn} & a_{m2} & b_{nn} & \dots & a_{mn} & b_{nn} \end{array}$$

wiederum unitär ist.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Okt. 1938.)

HATVÁNSOROK ZÉRÓHELYEIRŐL. II.

LIPKA ISTVÁN-tól.

Előző dolgozatomban ¹ bebizonyítottam a következő tételt:

I. tétel. Legyen az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ valós együtthatós hatványsor konvergens az egységsugarú körben. Jelentsen k egy tetszőszerinti pozitív egész számot, vagy zérót, és képezzük a hatványsor együtthatóiból a következő sorozatot

$$b_n = a_{k+n} + a_{k-n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

ahol $a_{-v} = 0$, ha $v < 0$. Legyen a $\{b_n\}$ sorozat kétszeresen monoton és tegyen még eleget a következő feltételnek

$$\Delta^2 b_0 > 0, \quad (\Delta^2 b_0 = b_0 - 2b_1 + b_2) \quad (2)$$

akkor az $f(z)$ függvénynek pontosan k nullahelye van az egységkör belsejében.

Ezt a tételt abban a speciálisabb esetben, amikor a (2) alatti feltétel helyett a: $\Delta^2 b_n > 0$ ($n=0, 1, 2, \dots, k$) feltétel áll, ONOFRI bizonyította be.²

Megjegyzés. Az I. tételben a (2) alatti feltétel nem helyettesíthető a gyengébb $\Delta^2 b_0 \geq 0$ feltétellel. Legyen ugyanis

$$f(z) = 1 + z + z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \dots + 2z^n + \dots,$$

¹ LIPKA I.: Hatványsorok zéróhelyeiről I. Matematikai és Termud. Ért. 57. (1937) 79–87. o. Ezt a dolgozatot a továbbiakban, röviden a következőképpen idézem: H. Z. I.

² Ld. H. Z. I. 7 lj. Teorema IX.

és legyen $k=1$. Ekkor az (1) alatti sorozat a következő:
 $b_0 = b_1 = \dots = b_n = \dots = 2$. Ez a sorozat kétszeresen monoton,
 $\Delta^2 b_0 = 0$; azonban az

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1-z} = 0$$

egyenletnek egy gyöke sincs az egységkör belsejében.

I. tétel. *Legyen az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ valós együtthatós hatvány-
 sor az egységkörben konvergens. Ha az (1) alatti $\{b_n\}$ sorozat
 kétszeresen monoton és valamely μ, ν indexpárra teljesülnek
 a következő feltételek*

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_\mu > 0, \quad \Delta^2 b_\nu > 0, \\ (\mu+1, \nu+1) = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

akkor az $f(z)$ nullahelyeinek a száma az egységkörben: k .

Bizonyítás. Tekintsük a $h(z) = f(\rho z)$ függvényt, ahol
 $0 < \rho < 1$. Megmutatjuk, hogy ha ρ elegendő keveset különbö-
 zik 1-től, akkor a $h(z)$ függvénynek pontosan k nullahelye van
 az egységkörben. E szerint természetesen az $f(z)$ függvénynek
 is k nullahelye van egységkörben.

Kiszámítjuk z^k és $h(z)$ függvények skaláris szorzatának az
 értékét az egységkör kerületén. Ez a következő:³

$$\begin{aligned} (z^k, h(z)) &= R(e^{-i\varphi k} h(z)) = \\ a_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k+n} \rho^{k+n} + a_{k-n} \rho^{k-n}) \cos n\varphi &= F(\varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Most már ha megmutatjuk, hogy $F(\varphi) > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, amikor
 $\rho < 1$ és $1-\rho$ elegendő kicsiny, akkor az előző dolgozatunkban
 bebizonyított I. segéd-tétel értelmében a $h(z)$ függvény nulla-
 helyeinek a száma az egységkörben: k .

Tekintsük a $F(\varphi)$ cosinus-sor FEJÉR-féle előállítását.⁴ Ez a
 következő:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 (a_{k+n} \rho^{k+n} + a_{k-n} \rho^{k-n}) \sin^2(n+1) \frac{\varphi}{2}. \quad (5)$$

³ Ld.: H. Z. I. 1. §.

⁴ Ld.: H. Z. I. 11 lj.

Mivel a (3) alatti feltétel szerint egy μ, ν indexpárra $\Delta^2(a_{k+\mu} + a_{k-\mu}) > 0$ és $\Delta^2(a_{k+\nu} + a_{k-\nu}) > 0$, azért ha ϱ elegendő keveset különbözik az 1-től, akkor a

$$\Delta^2(a_{k+\mu}\varrho^{k+\mu} + a_{k-\mu}\varrho^{k-\mu}) > 0, \quad \Delta^2(a_{k+\nu}\varrho^{k+\nu} + a_{k-\nu}\varrho^{k-\nu}) > 0 \quad (3')$$

egyenlőtlenségek is fennállanak. Azt állítjuk, hogy a (5) alatti kifejtésben fellépő

$$\begin{aligned} & \Delta^2(a_{k+\mu}\varrho^{k+\mu} + a_{k-\mu}\varrho^{k-\mu}) \frac{\sin^2 \frac{\mu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \\ & + \Delta^2(a_{k+\nu}\varrho^{k+\nu} + a_{k-\nu}\varrho^{k-\nu}) \frac{\sin^2 \frac{\nu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \Upsilon(\varphi) \end{aligned}$$

kéttagú összeg állandóan pozitív a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ intervallumban, ha $1-\varrho$ elegendő kicsiny. Ugyanis a $\Upsilon(\varphi)$ kifejezés a (3') alatti egyenlőtlenségek értelmében csak akkor lehet nulla, ha

$$\frac{\sin^2 \frac{\mu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\nu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 0. \quad (6)$$

A $\varphi = 0$, vagy $\varphi = 2\pi$ esetben

$$\frac{\sin^2 \frac{\mu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} (\mu+1)^2, \quad \frac{\sin^2 \frac{\nu+1}{2} \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} (\nu+1)^2,$$

és így $\Upsilon(0) = \Upsilon(2\pi) > 0$. Ha $0 < \varphi < 2\pi$, akkor csakis abban az esetben állhatnak fenn a (6) alatti egyenlőségek, ha

$$\sin(\mu+1) \frac{\varphi}{2} = \sin(\nu+1) \frac{\varphi}{2} = 0,$$

vagyis, ha

$$(\mu+1) \frac{\varphi}{2} = \pi l \quad (\nu+1) \frac{\varphi}{2} = \pi m \quad (7)$$

ahol l és m pozitív egész számok. De a két utóbbi egyenlőségből az következne, hogy

$$l(\nu+1) = m(\mu+1),$$

és e szerint, mivel $(\mu+1, \nu+1)=1$, a $\mu+1$ osztója lenne az l pozitív egész számnak. De (7) szerint $\varphi = 2\pi \frac{l}{\mu+1}$, tehát utóbbi eredményünk szerint állana a

$$\varphi \geq 2\pi$$

egyenlőtlenség, ami nyilván ellentmond a $0 < \varphi < 2\pi$ feltételnek.

Tehát $\Upsilon(\varphi) > 0$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ intervallumban; és így:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\varphi) &> c > 0 \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \end{aligned}$$

(ahol c alkalmasan választott pozitív számot jelent.)

E szerint az $F(\varphi)$ (5) alatti előállításában az $n=\mu$ és $n=\nu$ indexeknek megfelelő két tag összege bármely φ -re nagyobb, mint egy fix pozitív szám. Az I. tétel bizonyításában láttuk (H. Z. I. 2. §.), hogy a (5) alatti előállításnak azok a tagjai, amelyeknek indexe n nagyobb mint k , sohasem negatívak. Azt is láttuk, hogy a k -nál nem nagyobb indexű tagok közül a negatív előjelűek abszolút értéke tetszésszerűen kicsinnyé tehető, ha a φ értékét az 1-hez elég közel esőnek választjuk. Ezek szerint következik, hogy

$$F(\varphi) > 0,$$

ha

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Végül, ha $\varphi = 0$, akkor a $(z_k \cdot h(z))$ skaláris szorzat (4) szerint a

$$F(0) = a_k \varrho^k + \sum (a_{k+n} \varrho^{k+n} + a_{k-n} \varrho^{k-n}) \quad (8)$$

kifejezéssel egyenlő. Mivel pedig (3) alatti értelmében $b_\mu + b_{\mu+2} > 2b_{\mu+1}$, továbbá a $\{b_n\}$ sorozat monoton csökkenő és nemnegatív, azért $b_\mu > b_{\mu+1} \geq 0$, tehát $b_\mu = (a_{k+\mu} + a_{k-\mu}) > 0$. E szerint a (8) alatti $F(0)$ kifejezés is pozitív, ha ϱ elegendő keveset különbözik az 1-től.

Ezzel megmutattuk, hogy $(z^k \cdot h(z)) > 0$ az egységkör kerületén és így az előző dolgozatunkban bebizonyított arcus-variációs tétel (H. Z. I. 1. §. I. segédtétel) szerint $h(z)$ függvénynek k nullahelye van az egységkörben.

II. tétel. Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ az egységkörben konvergens hatványsor és képezzük a következő végtelen sorozatot

$$c_n = a_{k+n} - a_{k-n}, \quad (9)$$

$(n=1, 2, 3, \dots; a_0=0, \text{ ha } k < 0.)$

Legyen a $\{c_k\}$ sorozat kétszeresen monoton és álljon még a következő egyenlőtlenség:

$$J^2 c_1 > 0. \quad (10)$$

Ekkor az $f(z)$ függvénynek $k+1$ nullahelye van az egységkörben, ha

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) > 0, \quad \text{és} \quad (-1)^k \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) < 0. \quad (11)$$

Amikor pedig

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) > 0, \quad \text{és} \quad (-1)^k \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \geq 0; \quad (12)$$

avagy pedig

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \leq 0, \quad \text{és} \quad (-1)^k \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) < 0, \quad (12^*)$$

akkor az egységkörbe eső nullahelyek száma: k .

Végül ha

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \leq 0, \quad \text{és} \quad (-1)^k \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \geq 0, \quad (13)$$

akkor az $f(z)$ függvénynek $k-1$ nullahelye van az egységkörben (A $\lim_{x=\pm 1} f(x)$ határértékek létezését illetően ld.: H. Z. I.⁷ lj. N°17.)

Megjegyzés. A II. tételben a (10) alatti feltétel nem helyettesíthető a gyengébb $J^2 c_1 \geq 0$ feltétellel. Legyen ugyanis $f(z) = 1 + z + z^2 + 0 \cdot z^3 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$; ekkor a (9) alatti sorozat, ha $k=1$ a következő

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \dots, \quad c_n = 0, \dots$$

Ez a sorozat kétszeresen monoton, $f(z)$ eleget tesz még a (11) alatti feltételnek is, azonban $f(z)$ -nek egy nullahelye sincs az egységkör belsejében.

A II. tételt ONOFRI abban a speciálisabb esetben bizonyította be, amikor a (10) alatti feltétel helyett a következő feltétel áll ⁵

$$\Delta^2 c_1 > 0, \Delta^2 c_2 > 0, \dots, \Delta^2 c_k > 0.$$

Tekintsük ismét a $h(z) = f(\rho z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n z^n$ függvényt és vizsgáljuk $h(z)$ nullahelyeinek a számát az egységkörben, ha $1 - \rho$ elegendő kicsiny.

Kiszámítjuk a z^k és $h(z)$ függvények vektori szorzatának ⁶ értékét $z = e^{i\varphi}$ -re.

$$\begin{aligned} z^k \times h(z) &= J(z^k h(z)) = \cos k\varphi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin n\varphi - \sin k\varphi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \cos n\varphi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k+n} \rho^{k+n} - a_{k-n} \rho^{k-n}) \sin n\varphi = F(\varphi). \end{aligned}$$

A $F(\varphi)$ sinus-sor parciális összegezéssel a következő alakra hozható: ⁷

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 (a_{k+n} \rho^{k+n} - a_{k-n} \rho^{k-n}) \frac{\cos \frac{\varphi}{2} \left(n+1 - \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} \right)}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$0 < \varphi < \pi$$

Összük az utóbbi előállítás mindkét oldalát $\left(2 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \right)$ -vel

$$\begin{aligned} & \frac{F(\varphi)}{2 - 2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi / 2}{\sin \varphi / 2} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^2 (a_{k+n} \rho^{k+n} - a_{k-n} \rho^{k-n}) \frac{n+1 - \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}}{2 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}}. \quad (14) \end{aligned}$$

A szummajelben szereplő

$$\frac{n+1 - \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}}{2 - \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}} \quad (15)$$

⁵ H. Z. I. 7 lj. Teorema XIII.

⁶ H. Z. I. 1. §.

⁷ Ld.: H. Z. I. 7 lj. No. 4.

tört kifejezés értéke nemnegatív, mivel $\left| \frac{\sin \mu \varphi}{\sin \varphi} \right| \leq \mu$. Könnyen belátható az is, hogy a (15) alatti kifejezések korlátosak a $0 \leq \varphi \leq \pi$ intervallumban.

A (14) alatti szummajelben szereplő $\Delta^2(a_{k+n} \varrho^{k+n} - a_{k-n} \varrho^{k-n})$ második differenciák közül azok, amelyeknek indexe: $n > k$, nemnegatívak (ld. az I. tétel bizonyítását). Tehát a (14) alatti szummában csak véges számú negatív előjelű $\Delta^2(\dots)$ differencia léphet fel. Azonban, ha ϱ az 1-től csak keveset különbözik, akkor ezek a negatív előjelű differenciák kis abszolút értékűek, mivel e differenciák $\varrho = 1$ -re zéróval egyenlők. Tekintettel még arra, hogy a (15) alatti kifejezések egy fix korlát alatt maradnak, ha $n \leq k$, továbbá, hogy a (10) alatti feltétel értelmében $\Delta^2(a_{k+1} \varrho^{k+1} - a_{k-1} \varrho^{k-1})$ véges pozitív szám is fellép a (14) alatti összegjelben, következik, hogy a (14) alatti kifejezés pozitív a $0 < \varphi < \pi$ intervallumban. Így hát

$$F(\varphi) > 0, \quad \text{ha } 0 < \varphi < \pi. \tag{16}$$

Most már tekintsük először a (12) alatti feltételnek megfelelő esetet. Ebben az esetben, mivel $h(1) = f(\varrho)$, nyilvánvaló, hogy

$$h(1) > 0. \tag{17}$$

Tekintettel arra, hogy a $\{c_n\}$ sorozat kétszeresen monoton és $\Delta^2 c_1 > 0$, könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} \left\{ \frac{f(-\varrho)}{(-\varrho)^k} \right\} &= - \frac{1}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (a_{k+n} \varrho^n - a_{k-n} \varrho^{-n}) = \\ &= - \frac{1}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \Delta^2 (a_{k+2n+1} \varrho^{2n+1} - a_{k-2n-1} \varrho^{-2n-1}) > 0, \end{aligned}$$

s ezért a (12) alatti $(-1)^k \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \geq 0$ feltétel értelmében

$$\frac{h(-1)}{(-\varrho)^k} = \frac{f(-\varrho)}{(-\varrho)^k} > 0,$$

vagyis

$$(-1)^k h(\cdot 1) > 0. \tag{18}$$

Alkalmazzuk a z^k és $h(z)$ függvényekre előző dolgozatunk II. segéd-tételét. z^k és $h(z)$ függvények vektori szorzata $z=e^{i\varphi}$ -re (16) szerint:

$$z^k \times h(z) = F(\varphi) > 0$$

$z=e^{i\varphi}$

ha

$$0 < \varphi < \pi.$$

Ha pedig $\pi < \varphi < 2\pi$, akkor nyilvánvaló, hogy $F(\varphi) < 0$. Tehát a $F(\varphi) = z^k \times h(z)$, $z = e^{i\varphi}$ vektori szorzat a $0 \leq \varphi < 2\pi$ között csakis a $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ értékekre tűnik el. Mivel azonban a $z = 1$ helyen z^k és $h(z)$ függvények skaláris szorzata a (17) szerint

$$(z^k \cdot h(z)) = h(1) > 0,$$

$z=1$

a $z = -1$ helyen pedig a (18) szerint:

$$(z^k \cdot h(z)) = (-1)^k h(-1) > 0,$$

azért az említett II. segéd-tétel értelmében $h(z)$ -nek k nullahelye van az egységkör belsejében.

Tekintsük most a (11) alatti feltételnek megfelelő esetet. Ekkor

$$h(1) > 0 \quad \text{és} \quad (-1)^k h(-1) < 0 \quad (19)$$

Kiszámítjuk a z^{k+1} és $h(z)$ függvények skaláris és vektori szorzatának az értékét a kerületen. Mivel

$$(z^{k+1} \cdot h(z)) = R(\overline{z^{k+1}} h(z)),$$

azért

$$(z^{k+1} \cdot h(z)) = R(\overline{z} \overline{z^k} h(z)) = \cos \varphi R(\overline{z^k} h(z)) + \sin \varphi J(\overline{z^k} h(z)),$$

$z=e^{i\varphi}$

vagyis

$$(z^{k+1} \cdot h(z)) = \cos \varphi (z^k \cdot h(z)) + \sin \varphi \{z^k \times h(z)\}. \quad (20)$$

$z=e^{i\varphi}$

Hasonlóképpen

$$z^{k+1} \times h(z) = \cos \varphi \{z^k \times h(z)\} - \sin \varphi (z^k \cdot h(z)). \quad (21)$$

$z=e^{i\varphi}$

Megmutatjuk, hogy az egységkör kerületének abban a pontjában, ahol a (21) alatti vektori szorzat eltűnik, a (20) alatti

skalaris szorzat pozitív. Legyen először $\varphi = 0$; akkor (21) szerint

$$z^{k+1} \times h(z) = z^k \times h(z) = F(0) = 0,$$

és (20) szerint (19) értelmében

$$\left(z^{k+1} \cdot h(z) \right)_{z=1} = (z^k \cdot h(z)) = h(1) > 0.$$

Hasonlóképpen, ha $\varphi = \pi$, akkor megint $z^{k+1} \times h(z) = 0$ s a skalaris szorzat (20) és (19) szerint

$$\left(z^{k+1} \cdot h(z) \right)_{z=-1} = - (z^k \cdot h(z)) = - (-1)^k h(-1) > 0.$$

Ha pedig $\varphi \neq 0, \pi$ és a kerület valamelyik $z = e^{i\varphi}$ pontjában a (21) alatti vektori szorzat eltűnik, akkor

$$\cos \varphi = \sin \varphi \frac{(z^k \cdot h(z))}{z^k \times h(z)}, \quad (z = e^{i\varphi})$$

mivel az előzőek szerint a $z^k \times h(z) = F(\varphi)$ sinus-sor csakis a $\varphi = 0$, és a $\varphi = \pi$ értékekre tűnik el. Ha a $\cos \varphi$ előbbi kifejezését (20)-ba helyettesítjük, akkor a skalaris szorzatra nyerjük, hogy

$$\left(z^{k+1} \cdot h(z) \right)_{z=e^{i\varphi}} = \frac{\sin \varphi}{z^k \times h(z)} \{ (z^k \cdot h(z))^2 + [z^k \times h(z)]^2 \} > 0,$$

mivel $0 < \varphi < \pi$ esetében $\sin \varphi > 0$ és $z^k \times h(z) = F(\varphi) > 0$; $\pi < \varphi < 2\pi$ esetében pedig $\sin \varphi < 0$ és $z^k \times h(z) = F(\varphi) < 0$; továbbá a kapcsos zárójelben álló kifejezés a kerületen állandóan pozitív.

Lényegében, az előbbi megfontolással bizonyítjuk a II. tétel további (12*) és (13) feltételeinek megfelelő eseteket is.

III. tétel. Legyen a hatványsor a_n együtthatóiból képezett

$$b_n = a_{k+n} - a_{k-n-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

sorozat egyszerűen monoton és álljanak a

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) > 0,$$

$$\Delta b_0 > 0$$

feltételek. Akkor az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ függvénynek k nullahelye van az egységkörben. (Ha $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \leq 0$, akkor $f(z)$ -nek $k-1$ nullahelye esik az egységkör belsejébe.)

Megjegyzés. Ez a tétel abban a speciálisabb esetben, amikor még a $\Delta b_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots, k-1$) egyenlőtlenségek is teljesülnek, ONOFRI-tól származik. Végül majd megmutatjuk, hogy a tétel abban az esetben is érvényes, amikor minden n -re, $\Delta b_n = 0$.

A III. tétel $\Delta b_0 = 0$ esetében nem érvényes. Legyen ugyanis

$$f(z) = 1 + 2z + z^2 + 0 \cdot z^3 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

ekkor a $\{b_n\}$ sorozat, ha $k = 1$, a következő:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \dots, \quad b_n = 0, \dots$$

Ez a sorozat egyszerűen monoton és $f(1) > 0$, azonban $f(z)$ függvénynek egy nullahelye sincs az egységkörben.

Először bebizonyítjuk a III. tételt abban az esetben, amikor fennáll a $\Delta b_0 > 0$ egyenlőtlenség. Kiszámítjuk a $g(z) = f(\rho z^2)$ és $a z^{2k-1}$ függvények vektori szorzatának az értékét az egységkör kerületén. Ez a következő alakú

$$\begin{aligned} z^{2k-1} \times_{z=e^{i\varphi}} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_{k+n} \rho^{k+n} - a_{k-n-1} \rho^{k-n-1}) \sin(2n+1)\varphi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)\varphi, \\ c_n &= a_{k+n} \rho^{k+n} - a_{k-n-1} \rho^{k-n-1}. \end{aligned}$$

Az utóbbi sinus-sor alkalmas ABEL-féle átrendezéssel átalakítható a következővé⁸

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos 2(n+1)\varphi}{2 \sin \varphi} \Delta c_n. \quad (22)$$

Mivel feltételünk szerint $\Delta b_0 > 0$, azért, ha ρ keveset különbözik 1-től, akkor $\Delta c_0 > 0$ is fennáll. Mivel $\Delta c_n = a_{n+k} \rho^{n+k} - a_{n+k+1} \rho^{n+k+1}$

⁸ H. Z. 1. 7 lj. 1277. old.

ha $n \geq k$ és a $\{b_n\}$ sorozat monoton csökkenő, azért $\Delta c_n \geq 0$, ha $n \leq k$. Ha ρ értékét elegendő közel választjuk az 1-hez, akkor minden olyan Δc_n differenciára, melyre $\Delta b_n = 0$, fennáll a következő egyenlőtlenség

$$|\Delta c_n| < \varepsilon, \tag{23}$$

ahol ε tetszésszerűen kicsinynek választható pozitív szám. Ezek figyelembevételével a (22) alatti sinus-sorra a következő becslést nyerjük:

$$T(\varphi) > \frac{1 - \cos 2\varphi}{2 \sin \varphi} \Delta c_i - \varepsilon \frac{1 - \cos 4\varphi + 1 - \cos 6\varphi + \dots + 1 - \cos 2k\varphi}{2 \sin \varphi}. \tag{24}$$

De

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 4\varphi + 1 - \cos 6\varphi + \dots + 1 - \cos 2k\varphi}{1 - \cos 2\varphi} &\leq \\ &\leq 2^2 + 3^2 + \dots + k^2, \text{ ha } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \tag{25}$$

tehát, ha a (23) alatti ε számot olyan kicsinek választjuk, hogy

$$\frac{\Delta c_0}{\varepsilon} > 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$$

legyen, akkor (24) és (25) alattiból következik, hogy

$$T(\varphi) = z^{2k-1} \times g(z) > 0, \quad (z = e^{i\varphi}) \tag{26}$$

amikor

$$0 < \varphi < \pi.$$

Most megmutatjuk, hogy ha $1 - \rho$ elég kicsiny, akkor a $g(z) = f(\rho z^2)$ függvénynek pontosan $2k$ nullahelye van az egységkörben, ebből nyomban következik, hogy az $f(z)$ függvény nullahelyeinek a száma az egységkörben k . Könnyű számolás mutatja, hogy z^{2k} és $g(z)$ függvények skaláris és vektori szorzatának értékét az egységkör területén a következő formulák szolgálják

$$(z^{2k} \cdot g(z)) = \cos \varphi (z^{2k-1} \cdot g(z)) + \sin \varphi \{z^{2k-1} \times g(z)\}, \tag{27}$$

$$z^{2k} \times g(z) = \cos \varphi \{z^{2k-1} \times g(z)\} - \sin \varphi (z^{2k-1} \cdot g(z)). \tag{28}$$

($z = e^{i\varphi}$)

Megmutatjuk, hogy a kerületnek abban a pontjaiban, ahol a (28) alatti vektori szorzat nulla, a (27) alatti skalaris szorzat pozitív. Ennek az állításnak helyessége, ha $\varphi = 0$, vagy $\varphi = \pi$, a $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) > 0$ feltétel alapján nyomban belátható. Ha pedig $\varphi \neq 0, \pi$ esetében zéró a (28) alatti szorzat, akkor

$$\cos \varphi = \sin \varphi \frac{(z^{2k-1} \cdot g(z))}{z^{2k-1} \times g(z)} \quad (z = e^{i\varphi}),$$

miel (26) értelmében a $T(\varphi)$ sinus-sor csakis a $\varphi = 0$, és $\varphi = \pi$ értékekre tűnik el. $\cos \varphi$ utóbbi értékét (27)-be írva, nyerjük, hogy

$$(z^{2k} \cdot g(z)) = \frac{\sin \varphi}{z^{2k-1} \times g(z)} \{ (z^{2k-1} \cdot g(z))^2 + [z^{2k-1} \times g(z)]^2 \} > 0,$$

miel (26) szerint $z^{2k-1} \times g(z) > 0$ ha $0 < \varphi < \pi$ és $z^{2k-1} \times g(z) < 0$, ha $\pi < \varphi < 2\pi$. E szerint a II. segédteletből következik, hogy $g(z)$ -nek $2k$ nullahelye van az egységkörben.

Végül, ha egy n indexre sem áll fenn a $\Delta b_n > 0$ egyenlőtlenség, vagyis ha minden n -re $\Delta b_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), akkor $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = a > 0$, és $f(z)$ hatványsor a következő speciális alakú

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + (a + a_{k-1}) x^k + \\ &+ (a + a_{k-2}) x^{k+1} + \dots + (a + a_0) x^{2k-1} + a x^{2k} + a x^{2k+1} + \dots \\ &= a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-1} x^k + a_{k-2} x^{k+1} + \dots + a_0 x^{2k-1} + \\ &+ a(x^k + x^{k+1} + \dots) = \frac{1}{1-x} \{ a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots + \\ &+ (a_{k-1} - a_{k-2})x^{k-1} + a x^k + (a_{k-2} - a_{k-1})x^{k+1} + \dots + \\ &+ (a_0 - a_1)x^{2k-1} - a_0 x^{2k} \}. \end{aligned}$$

A kaposos zárójelben álló polinom középső tagjának együtt-hatója: $a > 0$; a középső taghoz szimmetrikusan fekvő tagpárok együtt-hatóinak összege 0, és így ha a z^k függvény és a kaposos zárójelben álló polinom skalaris szorzatát kiszámítjuk, nyerjük, hogy annak értéke az egységkör kerületén: $a > 0$. Ebből az I. segédtelet szerint következik, hogy $f(z)$ -nek k nullahelye van az egységkörben.

ÜBER DIE NULLSTELLEN VON POTENZREIHEN.

Von STEPHAN LIPKA.

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, dann gilt der Satz:

Ist die Folge

$$b_n = a_{k+n} + a_{k-n} \\ (n=0, 1, 2, \dots)$$

zweifach monoton (d. h. $b_n \geq 0$, $\Delta b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0$, $\Delta b_n - \Delta b_{n+1} \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) und ausserdem für ein Indexpaar μ, ν

$$\Delta^2 b_\mu > 0, \quad \Delta^2 b_\nu > 0; \\ (\mu + 1, \nu + 1) = 1$$

(d. h. $\mu + 1$ relativprim zu $\nu + 1$), so hat die Funktion $f(z)$, k Nullstellen im Innen des Einheitskreises.

Es werden noch einige Sätze bewiesen, die Verschärfungen der Sätze von L. ONOFRI sind.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Okt. 1938.)

AZ ELEKTROMÁGNESES TÉRBEN TÖRTÉNŐ ELEKTRONMOZGÁS DIFFERENCIÁL EGYENLETEIRŐL.

EGERVÁRY JENŐ-től.

Bevezetés.

Konzervatív erőterben történő pontmozgás differenciál-egyenleteinek első integráljait a klasszikus mechanikai elvek (energiatétel, ignorábilis koordináták elve) szolgáltatják. Ezeknek kizárólagos alkalmazásával tudvalevőleg a pontmozgás problémája tengelyszimmetriás erőter esetén egyetlen másodrendű differenciál-egyenletre redukálható és centrális erőter esetén quadraturák segítségével teljesen megoldható.

Jelen dolgozatban ki fogjuk mutatni, hogy az elektromágneses, tehát nem konzervatív erőterben történő elektronmozgás differenciálegyenleteire a fenti általános elvek kiterjeszthetők és azok integrálása szempontjából ugyanolyan jelentőséggel bírnak, mint konzervatív erőter esetén. Ezen kiterjesztésre az a körülmény adja a lehetőséget, hogy az elektronmozgás differenciálegyenletei általánosított kinetikus potenciál bevezetésével a LAGRANGE-féle alakra hozhatók.

Dolgozatunkból egyszersmind ki fog tűnni, hogy az a C. G. JACOBI-tól¹ eredő megállapítás, miszerint a konkrét mechanikai problémák megoldásánál talált első integrálok rendszerint általános elvek következményei és nem a probléma specifikus tulajdonságainak kifejezői, az elektronmozgás differenciálegyenleteire

¹ C. G. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik (1884) p. 270.

is érvényes, amennyiben mindazok az első integrálok, melyek az ezideig megoldott konkrét elektronmozgási problémáknál előfordulnak, általános elvek következményeinek fognak bizonyulni.

Ha az elektron tömege m , töltése e , továbbá V_e , illetőleg V_m az időtől független elektromos, illetőleg mágneses potenciál, úgy az elektronmozgás differenciálegyenlete ² vektoriális alakban:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e \text{ grad } V_e + e [\dot{\mathbf{r}} \cdot \text{grad } V_m], \quad (1)$$

illetve derékszögű koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} \frac{m}{e} \ddot{x} &= \frac{\partial V_e}{\partial x} + \frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{z} - \frac{\partial V_m}{\partial z} \dot{y} \\ \frac{m}{e} \ddot{y} &= \frac{\partial V_e}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial z} \dot{x} - \frac{\partial V_m}{\partial x} \dot{z} \\ \frac{m}{e} \ddot{z} &= \frac{\partial V_e}{\partial z} + \frac{\partial V_m}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ezen egyenletek általános tulajdonságaira vonatkozó vizsgálatok szerepelnek K. SCHWARZSCHILD,³ C. STÖRMER⁴ és H. BUSCH⁵ idevágó dolgozataiban.

Teljesen, vagy részben integrálva vannak a mozgási egyenletek a következő speciális esetekben:⁶

$V_m = z$, azaz homogén mágnesestér esetén J. J. THOMSON⁷ szerint az elektronpályák vagy trajektoriak a Z -tengellyel párhuzamos körhengerek geodetikus vonalai, azaz spirálisok.

² Az (1), (2) differenciálegyenletek a relativisztikus mechanikában is érvényesek, ha az elektron sajátidejét (Eigenzeit) vezetjük be független változóként. L. például E. MARX, Handb. d. Radiologie (1925) VI. kötetében, M. v. LAUE, Bewegung der Elektronen und Ionen im Kraftfelde, p. 11.

³ K. SCHWARZSCHILD, Göttinger Nachrichten, 1903, S. 126.

⁴ C. STÖRMER, Sur le mouvement d'un point matériel, Vid. Selsk. Skr. Oslo, 1904, Quelques théorèmes généraux sur le mouvement d'un corpuscule électrique dans un champ magnetique, Vid. Selsk. Skr. 1912, 1916. — Über die Bahnen von Elektronen, Annalen der Physik, 1933 (16) p. 685—696. On the trajectories of electric particles, Vidensk. Akad. Oslo, 1934—37.

⁵ H. BUSCH, Annalen der Physik, 1926 (81), p. 974—993.

⁶ L. például E. MARX, l. c. ² p. 1—37.

⁷ J. J. THOMSON, Recent Researches of Electricity and Magnetisme, Oxford, 1893.

$V_m = \arctg \frac{y}{x}$, vagyis lineáris, végtelen egyenes áramvezető mágneses terében J. J. THOMSON⁸ szerint a trajektoriák a

$\bar{z} = \int \frac{\log \frac{R}{C_0} dR}{\sqrt{B_0^2 - \frac{C_1^2}{R^2} - \left(\log \frac{R}{C_2}\right)^2}}$ egyenlettel meghatározott forgásfelületek geodetikus vonalai.

$V_m = \frac{1}{r}$ ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), azaz centrális mágneses tér esetén H. POINCARÉ⁹ szerint a trajektoriák olyan körkúpok geodetikus vonalai, melyeknek csúcsa a mágnesestér centruma.

$V_m = \frac{z}{r^3}$, azaz egy dipolustól származó mágnesestér esetén C. STÖRMER⁴ a következő első integrált állapította meg:

$$xj - yi = \frac{x^2 + y^2}{r^3} + \text{const.} \quad (3)$$

és ennek segítségével a problémát konzervatív erőterben történő síkmozgás meghatározására redukálta.

A most felsorolt általános és részletes eredményeket figyelembevéve, a jelen dolgozat célkitűzései a következők:

A szükséges és elegendő feltételek megállapítása, melyek mellett az elektronmozgás differenciálegyenletei LAGRANGE-féle alakra hozhatók.

A mozgásegyenleteknek a LAGRANGE-féle alakra való redukciója a mágneses teret jellemző vektorpotenciál lehető egyszerű választása mellett.

A mozgási egyenletek első integráljainak származtatása azoknak LAGRANGE-féle alakjából és ezek alkalmazása egyes speciális elektronmozgási problémák megoldására.

Az alábbiakban összefoglaljuk a dolgozatunk főbb eredményeit, melyek a fentebb felsorolt általános és részleteredményeket mint speciális eseteket tartalmazzák.

⁸ J. J. THOMSON, Conduction of Electricity through Gases, Cambridge, 1906.

⁹ H. POINCARÉ, Comptes Rendus (123) 1896.

Az elektronnak (2) mozgásegyenletei a térnek abban a részében, mely mágneses tömeget és áramvezetőt nem tartalmaz, a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

LAGRANGE-féle alakra hozhatók a

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V_e + W_1 \dot{x} + W_2 \dot{y} + W_3 \dot{z} \quad (5)$$

általánosított kinetikus potenciál segítségével, hol a W_1 , W_2 , W_3 vektorpotenciál komponensek az ismeretes

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3}{\partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial z} &= \frac{\partial V_m}{\partial x} \\ \frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial x} &= \frac{\partial V_m}{\partial y} \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} &= \frac{\partial V_m}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

relációkat tartoznak kielégíteni (I. §.).

Ha a V_m mágneses potenciált az általánosság megszorítása nélkül (II. §.)

$$V_m = \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad \Delta \Omega = 0 \quad (7)$$

alakban megadottnak tételezzük fel, akkor a V_e és V_m -hez tartozó általánosított kinetikus potenciál

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V_e + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{y}. \quad (8)$$

L ezen alakjának felhasználásával a LAGRANGE-féle egyenletekből a következő általános integrabilitási tételek vezethetők le (III. §.).

I. Ha V_e , V_m és egyszersmind Ω tengelyszimmetrások, vagyis az $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$ hengerkoordinátákban φ -től függetlenek, akkor

$$x\dot{y} - y\dot{x} = R^2 \dot{\varphi} = R \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \text{const.} \quad (9)$$

egy első integrál, melyet a klasszikus mechanika felületi tételének általánosításául tekinthetünk.

II. Ha $\frac{\partial W_e}{\partial z} \equiv 0$ és $\frac{\partial V_m}{\partial z} \equiv 0$, azaz csupán két koordinátától függő mágnesestér esetén

$$\dot{z} = U(x, y) + \text{const.} \quad (10)$$

egy első integrál, melyben $U(x, y)$ a $V_m(x, y)$ -hoz konjugált harmónikus függvényt jelenti.

III. Ha $V_e \equiv 0$ és a $V_m = \frac{\partial Q}{\partial z}$ előállításban szereplő $Q(x, y, z)$ függvény homogén, 0-adfokú, akkor

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x \frac{\partial Q}{\partial y} - y \frac{\partial Q}{\partial x} + C_0^2 t + C_1, \quad (11)$$

hol C_0^2 az $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C_0^2$ energiaintegrál állandója.

A I.—II.—III. integrabilitási tételekből, mint speciális esetek adódnak a jelen bevezetés elején felsorolt elektronmozgási problémák megoldásához szükséges első integrálok (IV. §.).

Továbbá ezek alkalmazásaként tárgyaljuk a

$$V_m = \frac{x}{x^2 + z^2} \quad \text{és} \quad V_m = \frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$$

mágneses potenciálok esetén a mozgásegyenleteket.

Végül (V. §.) integráljuk centrális elektromos és mágneses tér esetére az elektronmozgás egyenleteit a következő eredménnyel.

Az elektronnak a centrumtól való távolságának időbeli változása független a mágneses tértől.

Az elektron momentán sebességén és a centrumon át haladó sík forgása független az elektromos tértől.

A trajektoriak olyan térgörbék, melyek a centrumba eső csúcstal bíró körkúpon fekszenek és síkba kiterítve kúpszeletbe mennek át, melynek fókusza a kúp csúcsa.

Taszító elektromos erő esetén az elektron mozgása ütközés-szerű, azaz a trajektoria két aszimptotája párhuzamos, ha a síkba történő kifejtéssel nyert hiperbola aszimptotái által alkotott szög a kúppalást középponti szögének egészszámú többszöröse.

Vonzó elektromos erő esetén a trajektoria általában egy csonkakúppalástot mindenütt sűrűen kitölt és csak akkor periodikus, ha síkbeli kifejtése ellipszis és a kúpníválás szinusza racionális.

I. §.

Az

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} &= Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (12)$$

differenciálegyenlet-rendszer általánosított kinetikus potenciál segítségével a LAGRANGE-féle alakra hozható, ha a X, Y, Z erőkomponensek, mint a koordináták és sebességek függvényei a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial Z}{\partial \dot{y}} &= 0 & \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Y}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial Z}{\partial \dot{y}} \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial X}{\partial \dot{z}} &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial X}{\partial \dot{z}} \right) \\ \frac{\partial X}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} &= 0 & \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \dot{x}} \right) \end{aligned}$$

relációkat kielegitik.¹⁰ Ha tehát az erőkomponensek a sebességkomponenseknek lineáris függvényei, azaz

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= Q_1 + R_{11}\dot{x} + R_{12}\dot{y} + R_{13}\dot{z} \\ \ddot{y} &= Q_2 + R_{21}\dot{x} + R_{22}\dot{y} + R_{23}\dot{z} \\ \ddot{z} &= Q_3 + R_{31}\dot{x} + R_{32}\dot{y} + R_{33}\dot{z} \end{aligned}$$

úgy az általánosított kinetikus potenciál létezéséhez szükséges és elegendő a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\partial z} &= \frac{\partial Q_3}{\partial y} & R_{ii} &= 0, \quad R_{ik} = -R_{ki} \quad (i, k=1, 2, 3) & (14) \\ \frac{\partial Q_3}{\partial x} &= \frac{\partial Q_1}{\partial z} & \frac{\partial R_{23}}{\partial x} + \frac{\partial R_{31}}{\partial y} + \frac{\partial R_{12}}{\partial z} &= 0 & (14') \\ \frac{\partial Q_1}{\partial y} &= \frac{\partial Q_2}{\partial x} \end{aligned}$$

relációk fennállása.

¹⁰ L. például WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge, 1904, Ch. II. p. 44.

Az elektron mozgását meghatározó

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\partial V_e}{\partial x} + \frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{z} - \frac{\partial V_m}{\partial z} \dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\partial V_e}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial z} \dot{x} - \frac{\partial V_m}{\partial x} \dot{z} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial V_e}{\partial z} + \frac{\partial V_m}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{x}\end{aligned}\quad (2)$$

differenciálegyenleteknél a (14) relációk nyilván ki vannak elégitve. A térnek azon részében továbbá, mely mágneses tömeget, illetve áramvezetőt nem tartalmaz, a V_m mágneses potenciál eleget tesz a

$$\Delta V_m = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

LAPLACE-féle egyenletnek, a térnek ezen részében tehát a (14') feltétel is teljesül. Ezzel ki van mutatva, hogy az elektronmozgást meghatározó (2) differenciálegyenlet-rendszer a térnek mágneses tömeget és áramvezetőt nem tartalmazó részében általánosított kinetikus potenciál bevezetésével a LAGRANGE-féle alakra hozható.

Miután

$$\ddot{x} - \frac{\partial V_e}{\partial x} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (T + V_e), \text{ etc.}; \quad T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

tehát az általánosított kinetikus potenciál meghatározása a giro-szkopikus tagoknak a

$$\frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{z} - \frac{\partial V_m}{\partial z} \dot{y} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) W(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \text{ etc.} \quad (16)$$

alakban való előállítására redukálódik. Nyilván W a sebességkomponenseknek homogén, lineáris függvénye,¹¹ tehát a következő alakú:

$$W = W_1(x, y, z) \dot{x} + W_2(x, y, z) \dot{y} + W_3(x, y, z) \dot{z} \quad (17)$$

¹¹ Ha W nem lineáris $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ -ben, úgy (16) jobboldalán második deriváltakat is tartalmaz, ha pedig lineáris, de nem homogén, úgy (16) jobboldala sem homogén a sebességkomponensekben.

és W_1, W_2, W_3 (16) szerint a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3}{\partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial z} &= \frac{\partial V_m}{\partial x} \\ \frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial x} &= \frac{\partial V_m}{\partial y} \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} &= \frac{\partial V_m}{\partial z} \end{aligned} \quad (6)$$

relációkat tartoznak kielégíteni.

Ha W a (6) feltételeknek megfelelően meg van határozva,¹² úgy az elektronmozgás differenciálegyenletei

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ etc.} \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V_e + W_1 \dot{x} + W_2 \dot{y} + W_3 \dot{z}. \quad (5)$$

A fenti levezetés szerint a (2) egyenletrendszernek a LAGRANGE-féle alakra való redukcióját az a körülmény teszi lehetővé, hogy a mágneses potenciál előállítható vektorpotenciál segítségével. Miután a (W_1, W_2, W_3) vektorpotenciál tudvalevőleg nincs egyértelműen meghatározva, az annak megválasztásánál mutatkozó szabadságot a következőkben arra fogjuk felhasználni, hogy a (4, 5) LAGRANGE-féle egyenleteket speciális mozgásproblémák tárgyalására alkalmas alakra hozzuk.

II. §.

A V_m mágneses potenciál mindig előállítható a következő alakban:

$$V_m(x, y, z) = \frac{\partial \Omega(x, y, z)}{\partial z}; \quad \Delta \Omega = 0. \quad (7)$$

A zonális gömbfüggvények, köztük a dipolus potenciálja már eredetileg ilyen alakkal bírnak, továbbá például:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}, \quad z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{4} \right).$$

¹² L. például G. KIRCHHOFF, *Mechanik*, Leipzig, 1877, p. 253.

Tengelyszimmetriás $V_m(R, z)$; ($R^2 = x^2 + y^2$) esetén

$$\Omega(R, z) = \int_{z_0}^z V(R, z) dz - \int \frac{dR}{R} \int R V'_z(R, z_0) dR \quad (18)$$

és általános $V(x, y, z)$ esetén is megadható $\Omega(x, y, z)$ számára egy hasonló explicit előállítás.¹³

Ha $\Omega(x, y, z)$ ily módon meg van határozva, úgy az általánosított kinetikus potenciál

$$L = T + V_e + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{y}, \quad (8)$$

ez esetben ugyanis (l. (5) és (6)), $W_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $W_2 = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $W_3 = 0$ következésképpen

$$\frac{\partial W_3}{\partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} = \frac{\partial V_m}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial y} = \frac{\partial V_m}{\partial y}$$

és $\Delta \Omega = 0$ folytán

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \frac{\partial V_m}{\partial z},$$

tehát a (6) relációk ki vannak elégítve.

Ily módon a V_e és V_m által adott elektromágneses térhez tartozó általánosított kinetikus potenciál meghatározását az $\Omega(x, y, z)$ függvénynek egyetlen quadraturát igénylő kiszámítására redukáltuk.

III. §.

Az elektronmozgást meghatározó (2) differenciálegyenlet-rendszernek a LAGRANGE-féle alakra való redukációjából ugyanazon előnyök származnak, mint konzervatív rendszerek esetén:

¹³ Ha $\theta(x, y)$ a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + V'_z(x, y, z_0) = 0$ egyenletnek egy tetszőleges megoldása, akkor $\Omega(x, y, z) = \int_{z_0}^z V(x, y, \tau) d\tau + \theta(x, y)$ kielégíti a $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = V$ és $\Delta \Omega = 0$ feltételeket.

I. Ha V_e és V_m tengelyszimmetriásak, tehát z , R , φ hengerkoordináták bevezetése után φ -től függetlenek, akkor

$$L = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V_e - R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \dot{\varphi}, \quad (19)$$

tehát a φ koordinátára vonatkozó

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

LAGRANGE-féle egyenlet szerint

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = R^2 \dot{\varphi} - R \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \text{const.} \quad (9')$$

Az így nyert első integrál egyezik K. STÖRMER, valamint H. BUSCH egyik fentebb idézett eredményével.

Egy dipolus mágneses tere esetén az általánosított kinetikus potenciál igen egyszerű:

$$V_m = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}; \quad \Omega = \frac{1}{r}, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

és

$$L = T - R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{r} \dot{\varphi} = T + \frac{R^2}{r^3} \dot{\varphi},^{14}$$

hasonlóképpen egy mágneses pólus esetén

$$V_m = \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial z} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}; \quad \Omega = \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}},$$

tehát

$$L = T - R \frac{\partial}{\partial R} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}} \dot{\varphi} = T + \frac{z}{r} \dot{\varphi},^{15}$$

¹⁴ L. ezen előállításának nyilván közvetlen következménye a C. STÖRMER-től származó (3) alatt idézett első integrál.

¹⁵ A centrális mágneses térnek megfelelő vektorpotenciál tehát

$$W_1 = -\frac{yz}{R^2 r}; \quad W_2 = \frac{xz}{R^2 r}; \quad W_3 = 0.$$

amivel megvan cáfolva az a M. LAUR-tól származó állítás (l. E. MARX, l. c. 2 29. old. 3. lábjegyzet), hogy a $V_m = \frac{1}{r}$ mágneses potenciál nem állítható elő vektorpotenciál segítségével.

következésképpen egy mágneses pólus esetén a mozgásegyenleteknek egy első integrálja

$$x\dot{y} - y\dot{x} = R^2\dot{\varphi} = \text{const.} - \frac{\dot{z}}{r}. \quad (20)$$

Általában, ha V_m tengelyszimmetriás és a zonális gömbfüggvények szerint haladó

$$V_m = \sum c_n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r} \quad (21)$$

konvergens kifejtéssel van megadva, akkor (7) és (9)-re való tekintettel egy első integrál:

$$R^2\dot{\varphi} = \sum c_n \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} r. \quad (22)$$

II. Ha $\frac{\partial V_e}{\partial z} \equiv 0$ és $\frac{\partial V_m}{\partial z} \equiv 0$, azaz csupán két koordinátától függő mágneses tér esetén

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = zV_m(x, y); \quad \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} = 0, \quad (23)$$

tehát a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

LAGRANGE-féle egyenlet szerint

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{\partial V_m}{\partial y} \dot{x} - \frac{\partial V_m}{\partial x} \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} = \frac{dU}{dt}, \quad (24)$$

ahol $U(x, y)$ a $V_m(x, y)$ -hez konjugált harmonikus függvény. Ez esetben tehát a mozgásegyenleteknek egy első integrálja:

$$\dot{z} = U(x, y) + \text{const.} \quad (10)$$

Például két, egymáshoz közelfekvő, végtelen hosszú egyenes, lineáris áramtól származó mágneses térnél

$$V_m = \frac{\partial}{\partial z} \text{arctg} \frac{z}{x} = \frac{x}{x^2 + z^2}, \quad (25)$$

tehát

$$\dot{y} = \text{const.} - \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (26)$$

egy első integrál.

III. Ha $V_e \equiv 0$, $V_m = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ és $\Omega(x, y, z)$ homogén, 0-adfokú, úgy egy első integrált a következő módon nyerünk. A

$$W' = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{y}$$

jelölés mellett a LAGRANGE-féle egyenletek:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}$$

tehát

$$\Sigma x \ddot{x} = \Sigma x \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \Sigma x \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (27)$$

azaz

$$\frac{d}{dt} \Sigma x \dot{x} - \Sigma \dot{x}^2 = \frac{d}{dt} \Sigma x \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \Sigma \dot{x} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \Sigma x \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Ha $V_e \equiv 0$, akkor az elektron sebességének abszolút értéke állandó, azaz

$$\Sigma \dot{x}^2 = C_0^2,$$

továbbá, ha $\Omega(x, y, z)$ homogén, 0-adfokú, vagyis W a koordinátákban homogén, -1 -adfokú, akkor

$$\Sigma \dot{x} \frac{dW}{d\dot{x}} + \Sigma x \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

tehát

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + C_0^2 t + C_1 \quad (11)$$

egy első integrál.¹⁶

¹⁶ A III. §. III. integrabilitási feltételnél valamivel általánosabb eredményt nyerünk a következő módon. A mozgásegyenletek (2) alakjából $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C_0^2$ figyelembevételével közvetlenül adódik

$$\left| \begin{array}{ccc} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ x & y & z \\ \frac{\partial V_m}{\partial x} & \frac{\partial V_m}{\partial y} & \frac{\partial V_m}{\partial z} \end{array} \right| = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \frac{d}{dt} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} - C_0^2 t).$$

Például egy mágneses pólus esetén $V_m = \frac{1}{r} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ és $\Omega = \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ homogén, 0-adfokú, továbbá $x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$,

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = C_0^2 t + C_1$$
egy első integrál.

Ha $\Omega = \arctg \frac{z}{x}$, ha tehát a mágneses tér a

$$V_m = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{x}{x^2 + z^2} \quad (25)$$

mágneses potenciállal van megadva, úgy a mozgási egyenleteknek egy első integrálja a fentiek szerint (minthogy $x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{yz}{x^2 + z^2}$)

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = -\frac{yz}{x^2 + z^2} + C_0^2 t + C_1. \quad (28)$$

Annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a baloldali determináns is t szerinti közönséges differenciálhányados legyen:

$$x \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 V_m}{\partial y \partial x} + z \frac{\partial^2 V_m}{\partial z \partial x} = -2 \frac{\partial V_m}{\partial x}$$

és további két analóg egyenlet. Az integrabilitás feltétele tehát az, hogy $\frac{\partial V_m}{\partial x}$, $\frac{\partial V_m}{\partial y}$, $\frac{\partial V_m}{\partial z}$ homogén, -2 -edfokú függvények legyenek, (ami nyilván pl. $V_m = \frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ esetén teljesül).

¹⁷ A bevezetésben felsorolt speciális elektronmozgási problémáknak quadraturákkal való megoldhatóságát az a körülmény teszi lehetővé, hogy az ott szereplő mágneses potenciálok az előző §-ban ismertetett I., II., III. integrabilitási feltételek közül kettőt szimultán kielégítenek. Ily módon (az energiaintegrállal együtt) legalább három első integrállal rendelkezünk, amelyek alapján a probléma explicite megoldható, vagy legalább elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre visszavezethető.

Az $V_m = z$, azaz $\Omega = \frac{z^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{4}$ esetben I.-ből az $x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.} - \frac{x^2 + y^2}{2}$, II.-ből pedig a $\dot{z} = \text{const.}$ első integrálok származnak.

Az $V_m = \arctg \frac{y}{x}$, azaz $\Omega = z \arctg \frac{y}{x}$ esetben I.-ből a $r\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}$, II.-ből $\dot{z} = \text{const.} - \log \sqrt{x^2 + y^2}$ első integrálok származnak.

Az $V_m = \frac{1}{r}$, azaz $\Omega = \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ esetben I.-ből — miután a

IV. §.

Az előzőkben ismertetett integrabilitási tételek alkalmazásával elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre redukálható, illetve részben teljesen megoldható az elektronmozgási problémának az a speciális esete, midőn a mágnesestér két lineáris, végtelen, egyenes, párhuzamos és egymáshoz végtelen közelfekvő áramvezetőtől származik, melyekben állandó, egyenlő intenzitású, ellen-tett irányú áramok folynak (két dimenziós dipolus).

Ha a lineáris vezetők az Y tengellyel, a rajtuk áthaladó sík az YZ síkkal egybeesik, úgy a mágneses potenciál

$$V_m = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{arctg} \frac{z}{x} = \frac{x}{x^2 + z^2}, \quad (25)$$

tehát ez esetben $Q = \operatorname{arctg} \frac{z}{x}$ és az általánosított kinetikus potenciál (8) szerint

$$L = T - \frac{\partial Q}{\partial x} \dot{y} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{z}{x^2 + z^2} \dot{y}.$$

Miután L független y -től, tehát a $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ LAGRANGE-féle egyenlet következménye a

$$\dot{y} = C_1 - \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (26)$$

első integrál.

Mínt hogy továbbá $Q = \operatorname{arctg} \frac{z}{x}$ homogén, 0-adfokú, tehát (11) szerint

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = -\frac{yz}{x^2 + z^2} + C_0^2 t + C_2 \quad (28)$$

egy további első integrál.

mágnesestér mind a három koordináta tengelyre szimmetrikus — az $yz - zy = C_1 - \frac{x}{r}$; $zx - xz = C_2 - \frac{y}{r}$; $xj - yx = C_3 - \frac{z}{r}$, III.-ből pedig az $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = C_0^2 t + C_4$ első integrálok származnak.

Ily módon az

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C_0^2$$

energiaintegrál figyelembevételével három első integrállal rendelkezünk, vagyis a probléma elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre van redukálva.

A $C_1 = 0$ föltevésnek megfelelő partikuláris megoldások továbbá quadraturákkal kifejezhetők. Ha ugyanis $C_1 = 0$ és az $x = R \cos \phi$, $y = y$, $z = R \sin \phi$ hengerkoordinátákat vezetjük be, úgy (26) és (28)-ből

$$x\dot{x} + z\dot{z} = R\dot{R} = C_0^2(t - t_0), \quad (29)$$

tehát

$$R^2 = C_0^2(t - t_0)^2 + R_0^2. \quad (30)$$

Továbbá (26) szerint

$$\dot{y} = -\frac{\sin \phi}{R}; \quad \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 = C_0^2 - \frac{\sin^2 \phi}{R^2}, \quad (31)$$

végül R és \dot{R} -nek (29) és (30) alatti kifejezéseit felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\sqrt{C_0^2 R_0^2 - \sin^2 \phi}} &= \int \frac{dt}{R_0^2 + C_0^2(t - t_0)^2} = \\ &= \frac{1}{C_0 R_0} \operatorname{arctg} \frac{C_0}{R_0}(t - t_0) + \text{const.} \end{aligned} \quad (32)$$

Ily módon ϕ mint a t idő elliptikus függvénye van meghatározva, és végül ennek felhasználásával y (31) alapján egy további quadraturával adódik a

$$y = - \int \frac{\sin \phi}{\sqrt{R_0^2 + C_0^2(t - t_0)^2}} dt + \text{const.} \quad (33)$$

alakban.

Röviden ismertetjük még a

$$V_m = \frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}} \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \quad (34)$$

mágneses potenciál esetében a megoldást. V_m -nek ez a választása annyiban érdemel figyelmet, miután $V_m = \frac{z}{r^2} + \dots$, azaz

az origo környezetében a mágneses dipolus potenciáljához hasonlóan viselkedik.

Közvetlenül verifikálható, hogy

$$V_m = \frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}} = \frac{\partial}{\partial z} \log(r+z) \log(r-z)$$

tehát jelen esetben a (7) által bevezetett \mathcal{Q} függvény:

$$\mathcal{Q} = \log(r+z) \cdot \log(r-z), \quad (35)$$

és így V_m tengelyszimmetriája következtében (9) szerint

$$x\dot{y} - y\dot{x} = R \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial R} + C_1 \quad (R^2 = x^2 + y^2) \quad (36)$$

egy első integrál.

Ha továbbá a mozgási egyenleteket eredeti (2) alakjukban rendre x, y, z -vel szorozzuk és összegezzük, $V_m = \frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$ esetén integrabilis kombinációt nyerünk,¹⁶ mely a

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = C_0 t + C_2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (37)$$

első integrált eredményezi.

A (36) és (37) integrál, továbbá az energiaintegrál segítségével a probléma elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre van redukálva.

V. §.

Centrális elektromágneses tér a $V_e = \frac{\eta}{r}$ és $V_m = \frac{\mu}{r}$ potenciálok által van jellemezve, ez esetben tehát az elektron mozgásegyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \eta \frac{x}{r^3} + \mu \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{r^3} \\ \ddot{y} &= \eta \frac{y}{r^3} + \mu \frac{z\dot{x} - x\dot{z}}{r^3} \\ \ddot{z} &= \eta \frac{z}{r^3} + \mu \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ezen egyenletekből az ismert módon adódik a

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C_0 - \gamma \cdot \frac{1}{r} \quad (39)$$

energiaintegrál, továbbá, a térnek a koordináta tengelyekre vonatkozó szimmetriája alapján (9), illetőleg (20) szerint a

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= C_1 - \mu \frac{x}{r} \\ x\dot{z} - x\dot{z} &= C_2 - \mu \frac{y}{r} \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C_3 - \mu \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (40)$$

felületi integrálok.

A (40) egyenleteket rendre x , y , z -vel szorozva és összegezve, nyerjük:

$$C_1x + C_2y + C_3z - \mu r = 0. \quad (41)$$

A trajektoria tehát oly körkúpon fekszik, melynek csúcsa a tér centruma, tengelyének iránykoszinuszai C_1 , C_2 , C_3 -mal arányosak és nyílásszögének (a tengely és az alkotók által bezárt szögnek) a koszinusza

$$\frac{\mu}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}. \quad (42)$$

Továbbá a (40) egyenleteket négyzetre emelve és összegezve, (41) figyelembevételével nyerjük:

$$(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 - \mu^2 = K^2, \quad (43)$$

tehát az r radiusvektor területi sebessége állandó, azaz, ha az r radiusvektor szögsebességét $\dot{\chi}$ -tal jelöljük

$$r^2 \dot{\chi} = K. \quad (44)$$

Az $\Sigma x^2 \Sigma \dot{x}^2 - (\Sigma x \dot{x})^2 = \Sigma (y\dot{z} - z\dot{y})^2$ identitás alapján (39) és (43) felhasználásával

$$r^3 \dot{r}^2 = r^2 \left(2C_0 - \frac{2\eta}{r} \right) - K^2, \quad (45)$$

végül a (44) és (45) egyenletekből t eliminálásával

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\chi}\right)^2 = \frac{2C_0}{K^2} - \frac{2\eta}{K^2 r} - \frac{1}{r^2} = \frac{\eta^2 + 2C_0 K^2}{K^4} - \left(\frac{\eta}{K^2} + \frac{1}{r}\right)^2 \quad (46)$$

$$\chi - \chi_0 = \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{\eta^2 + 2C_0 K^2}{K^4} - \left(\frac{\eta}{K^2} + \frac{1}{r}\right)^2}} = \arccos \frac{\eta + \frac{K^2}{r}}{\sqrt{\eta^2 + 2C_0 K^2}},$$

tehát a trajektória egyenlete a *kúppalástra vonatkozó polárkoordinátákban* :

$$r = \frac{K^2}{-\eta + \sqrt{\eta^2 + 2C_0 K^2} \cos(\chi - \chi_0)}. \quad (47)$$

Miután r és $d\chi$ a kúpnak síkba való kifejtésénél invariánsak, a most nyert (47) egyenlet szerint a trajektoriak kifejtése oly kúpszelet, melynek fókusza a kúp csúcsa.

$\eta > 0$, azaz taszító elektromos erő esetén a kifejtett trajektória hiperbola, melynek asszimptotái (47) szerint

$$2 \arctg \frac{K \sqrt{2C_0}}{\eta} \quad (48)$$

szöveget alkotnak. Ha tehát ez a szög a kúppalástnak (42) által meghatározott középponti szögének egészszámu többszöröse, úgy a trajektorianak (mint térgörbének) a két asszimptotája egymással párhuzamos.

$\eta = 0$, azaz eltűnő elektromos tér esetén a trajektória kifejtése (47) szerint egyenes, tehát ez esetben a trajektoriak körkúpok geodetikus vonalai, megegyezésben H. POINCARÉ fentebb idézett eredményével.

Ha e $\eta < 0$, azaz vonzó elektromos erő esetén, továbbá, ha a C_0 energia-constans < 0 , úgy a trajektória általában a

$$r = \frac{K^2}{|\eta| - \sqrt{\eta^2 - 2|C_0|K^2}} \quad \text{és} \quad r = \frac{K^2}{|\eta| + \sqrt{\eta^2 - 2|C_0|K^2}}$$

körök által határolt csonka kúppalástot mindenütt sűrűn tölti ki. Abban a kivételes esetben, midőn a kúpnylás szinusza racionális, a trajektória periodikus.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. jún. 20-án tartott üléséből.)

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ELEKTRONBEWEGUNG IM STATIONÄREN MAGNETFELDE.

VON E. EGÉRVÁRY.

Die Bewegung eines elektrisch geladenen materiellen Punktes in einem stationären Magnetfelde wird bekanntlich durch die folgenden Differentialgleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}\frac{m}{e} \ddot{x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \dot{z} - \frac{\partial V}{\partial z} \dot{y} \\ \frac{m}{e} \ddot{y} &= \frac{\partial V}{\partial z} \dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} \dot{z} \\ \frac{m}{e} \ddot{z} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial V}{\partial y} \dot{x},\end{aligned}\tag{I}$$

wo V das magnetische Potential, m die Masse, e die Ladung des materiellen Punktes bedeuten.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage beantwortet, ob und in wiefern die für konservative Systeme gültigen, allgemein bekannten Integralsätze der klassischen Mechanik sich auf das Gleichungssystem (I) übertragen lassen.

Es wird zunächst bewiesen, dass die Gleichungen (I) dann und nur dann mittels eines verallgemeinerten kinetischen Potentials auf die LAGRANGE'sche Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0, \quad (\nu=1, 2, 3)\tag{II}$$

gebracht werden können, wenn die Potentialfunktion V der LAPLACE'schen Gleichung $\Delta V=0$ genügt.

Eine magnetische Potentialfunktion V kann immer in der Form

$$V = \frac{\partial \Omega}{\partial z}; \quad \Delta \Omega = 0$$

dargestellt werden, und auf Grund dieser Darstellung wird für das verallgemeinerte kinetische Potential L in Gleichung (II) der folgende einfache Ausdruck hergeleitet:

$$L = \frac{m}{2e} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{y}. \quad (\text{III})$$

Mit Benützung von (II) und (III) erhalten wir die folgende Verallgemeinerungen der klassischen Integralsätze:

I. Wenn V , daher also auch L von z unabhängig ist, so ist

$$\dot{z} = U(x, y) + \text{const.}$$

ein erstes Integral von (I), wo $U(x, y)$ die zu $V(x, y)$ konjugierte harmonische Funktion bedeutet.

II. Wenn V , daher also auch L axialsymmetrisch ist in Bezug auf die z Achse, so ist

$$x\dot{y} - y\dot{x} = R \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \text{const.}$$

ein erstes Integral von (I).

III. Wenn Ω eine homogene Funktion 0-ter Dimension ist, so ist

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + C_0^2 t + \text{const.}$$

ein erstes Integral von (I) wo C_0^2 die Konstante des Energieintegrals $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C_0^2$ bedeutet.

Es wird weiterhin gezeigt, dass alle ersten Integrale, welche bei den bis jetzt gelösten konkreten Elektronbewegungsproblemen aufgestellt und verwendet worden sind, als spezielle Fälle aus den obigen Integralsätzen herleitbar sind.

AZ EZÜSTPERMANGANÁT KRISTÁLY- SZERKEZETÉNEK FOURIER-ANALIZISE.

SASVÁRI KÁLMÁN-tól (Szeged).

A kristályszerkezet meghatározása elvileg kétféle úton történhetik. Ha ismert tércsoportba tartozó elemi testben Z atom van, akkor az atomok koordinátáinak meghatározása az elemi cellában *algebrai probléma*. Nevezetesen $\mathfrak{3}(Z-1)$ ismeretlen koordinátát kell meghatározni, azon egyenletek alapján, melyek a reflexiók indexeit és az atomkoordinátákat tartalmazó strukturfaktor, valamint a reflexióintenzitások közt fennállnak.

Egy másik megfontolás szerint a koordináták meghatározása *függvényanalízisre* vezethető vissza. Tekintsük a ρ töltéssűrűséget, mely az elemi testben (xyz) koordináták szerint folytonosan változik. Minthogy az elemi cella periódikusan ismétlődik az egész kristályban, a töltéssűrűség is periódikus függvény, mely a Fourier-analízis módszerével kezelhető. A kristályszerkezet kutatásában először W. H. BRAGG¹ vetette fel a Fourier-analízis problémáját; továbbfejlesztették DUANE,² HEVIGHURST,³ majd COMPTON.⁴ EPSTEIN és EHRENFEST⁵ megmutatták, hogy egy tetszőleges (hkl) indexű kristálytani sík reflexiójának intenzitása a $\rho(xyz)$ elektron-sűrűség megfelelő Fourier-koefficiensének négyzetével arányos. DUANE megfordította ezt a gondolatmenetet és kimutatta, hogy a röntgeninterferenciák intenzitásából meg lehet határozni az elektronok sűrűségének eloszlását. A sűrűségeloszlás kifejezésében

¹ Phil. Trans. A. **215**, 253 (1915).

² Proc. Nat. Acad. Washington **11**, 489 (1925).

³ Ibid. **11**, 502 (1925).

⁴ X-rays and Electrons p. 151. (1926), II. Ed. p. 444. (1935).

⁵ Proc. Nat. Acad. Sci. **10**, 133 (1924).

szereplő Fourier-koefficiensek egyébként már EWALD¹ korábbi munkájában is megtalálhatók, mint a reciprok rács pontjaihoz rendelt G_h súlyfüggvények:

$$G_h = \frac{1}{v_a} m_t e^{2\pi i (hr)},$$

ahol m_t a tömegtől, szóróképességtől és ióntöltéstől függő érték, v_a a térfog t , h , ill. r pedig a rádiuszvektor a reciprok, ill. kristályrácsban.

A röntgensugarak szóródásánál valamely (hkl) reflexió intenzitása a kristályszerkezettel megadott $F(hkl)$ struktúramplitudó négyzetével arányos. Maga a strukturamplitudó

$$F(hkl) = \sum_i f_i e^{2\pi i (hx_i + ky_i + lz_i)},$$

ahol f_i az elemi cella i -ik atomának szórása a megfelelő szórási szögnel. Az atomok f_i szóróképességei jelenleg kísérleti és elméleti alapon numerikusan ismertek. A függvényanalitikus eljárásnál a szóróközeg $\rho(xyz)$ sűrűségét folytonos függvénynek tekintjük, amely esetben a strukturamplitudó kifejezése

$$F(hkl) = V \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho(xyz) e^{2\pi i (hx + ky + lz)} dx dy dz,$$

ahol $V dx dy dz$ a térfogatelem köbtartalma (V az elemi cella térfogata). $F(hkl)$ általában komplex kifejezés, $F = F' + iF''$. A $\rho(xyz)$ sűrűség háromszorosan periodikus függvény, ahol x , y , ill. z az elemi cella élhosszúságainak (a , b , ill. c) törtrészeiben vannak megadva. Már most $\rho(xyz)$ háromszoros Fourier-sorba fejthető

$$\begin{aligned} \rho(xyz) = & \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} A'(pqr) \cos 2\pi (px + qy + rz) + \\ & + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} B'(pqr) \sin 2\pi (px + qy + rz), \end{aligned}$$

ahol p , q és r tetszőleges egész számok, pozitívak, negatívak vagy zérus értékűek. Ki lehet mutatni, hogy ρ ezen kifejezését $F(hkl)$

¹ Zeitschr. f. Kristallogr. 56, 129 (1921).

térfogatintegráljába behelyettesítve és az integrálást elvégezve a trigonometrikus függvények ortogonalitása folytán az eredmény

$$F(hkl) = \frac{1}{2}V[A'(pqr) + iB'(pqr)] = \frac{1}{2}V[A'(hkl) + iB'(hkl)].$$

Ha tehát ismerjük az elektronok sűrűségeloszlását az elemi cellában, akkor a fenti összefüggés alapján megadhatjuk a (hkl) reflexiók intenzitását. Viszont a strukturamplitudó ismeretével az elektronok sűrűségeloszlását adhatjuk meg:

$$\rho(xyz) = \frac{1}{V} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F'(hkl) \cos 2\pi(hx + ky + lz) + \right. \\ \left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F''(hkl) \sin 2\pi(hx + ky + lz). \right]$$

Mint hogy a reflexiók intenzitásai $|F|^2$ -vel arányosak, az intenzitás méréseből nem kapjuk meg a fázist. Ha a kristálynak van szimmetriacentruma és ebbe tesszük a kezdőpontot, akkor $\rho(xyz) = \rho(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$, minek következtében a Fourier-sornak csak a cosinusos tagjai maradnak meg. Ekkor $F(hkl) = F'(hkl)$ és

$$\rho(xyz) = \frac{1}{V} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hkl) \cos 2\pi(hx + ky + lz).$$

Ha tehát az F értékek előjeleit meg tudjuk adni, akkor a reflexióintenzitásokból meghatározhatjuk az elektronsűrűség eloszlását a kristályban.

Lehetséges volna kombinatorikai úton megállapítva az összes előjelkombinációkat, ezekkel kiszámítani a megfelelő sűrűségeket, melyekből azután a fizikailag legvalószínűbbet ki lehetne választani. Ez a módszer azonban olyan óriási számolási munkát követelne, hogy annak gyakorlati megvalósítása szóba sem jöhet.

A másik módszer már feltételez bizonyos előzetes ismereteket a kristály szerkezetéről; ismernünk kell legalább is a nagy szóróképességű atomok helyét. Ebből az erősebb reflexiók $F(hkl)$ értékeinek előjeleit már megkapjuk, a gyenge reflexióknál fellépő bizonytalanság pedig az eredményt már csak kevésbé befolyásolja. Mint hogy ezek szerint a Fourier-analízis elvégzéséhez a szerkezetnek

legalább is a fő vonásait már előre ismernünk kell, világos, hogy ez az eljárás nem való a szerkezet meghatározására, hanem egyrészt a durván meghatározott paraméterek értékének jobb megközelítésére, másrészt pedig a kristályrács atomaiban, ill. ionjaiban foglalt elektronok számának meghatározására.

Az elektronsűrűség térbeli megoszlásának háromszoros Fourier-sorral való előállítására túlságosan fáradságos és hosszadalmas munka volna. Meg lehet elégedni ehelyett a sűrűségnek egy tengely mentén való meghatározásával, vagy pedig — mint W. L. BRAGG ¹ ajánlotta — az elektronsűrűség valamely kristálytani síkra való vetületének kiszámításával. Utóbbi esetben az (xy) síkra való vetületen $df = A \cdot dx dy$ ($A = ab \sin \gamma$) felületelemre a z tengellyel párhuzamosan emelt oszlopban foglalt elektronok száma

$$dN = V \left[\int_0^1 \rho(xyz) dz \right] dx dy = \sigma(xy) A dx dy,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \sigma(xy) &= \frac{V}{A} \int_0^1 \frac{1}{V} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hkl) \cos 2\pi(hx + ky + lz) dz = \\ &= \frac{1}{A} \int_0^1 \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hkl) \cos 2\pi(hx + ky) \cos 2\pi lz - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hkl) \sin 2\pi(hx + ky) \sin 2\pi lz \right] dz = \\ &= \frac{1}{A} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hk0) \cos 2\pi(hx + ky). \end{aligned}$$

Tehát csak az $F(hk0)$ tagok maradnak meg, vagyis a $(hk0)$ reflexiók intenzitásaiból meghatározható az elektronsűrűség vetülete az (xy) síkra. Ezt a módszert akkor is lehet alkalmazni, ha a kristálynak ugyan nincsen szimmetriaközpontja, de a szóban forgó vetületnek van; ebben az esetben ugyanis a Fourier-sor megint csak cosinusos tagokra fog szorítkozni.

Az $F(hk0)$ értékek kísérletileg meghatározhatók, előfordul

¹ Proc. Roy. Soc. London **A**, 123. 537 (1929).

azonban a Fourier-sorban az $F(000)$ tag is, mely a direkt sugár irányába esik és kísérletileg meg nem határozható. Ennek értelmezése végett tekintsük a $\sigma(xy)$ -nak az (xy) síkra vett felületi integrálját; ez a definíció szerint nem más, mint az elemi cellában levő összes elektronok száma, N . Minthogy a felületi integrál

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \sigma(xy) A dx dy = \\ = \frac{1}{A} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(hk0) \cos 2\pi(hx+ky) A dx dy = F(000).$$

$F(000)$ = az elemi cella összes elektronjainak számával, amely az elemi cellában foglalt atomok, ill. ionok elektronjainak összegezéséből adódik.

A Fourier-analízis gyakorlati kiviteléhez az (xy) síkot megfelelően sűrű hálózatra osztjuk fel és az osztáspontokra számítjuk ki a sor összegét; célszerű pl. 24×24 vagy 48×48 részre osztani. Az $A \cdot \sigma(xy) = S(xy)$ értékeinek tizedrészét írjuk (ugyancsak célszerűség okából) az egyes pontokhoz. A felületegységre eső elektronszámot, vagyis a felületi sűrűséget (xy) pont környezetében $\sigma(xy)$ adja meg. A hálózat egy elemére eső elektronszámot megkapjuk, ha $\sigma(xy)$ -t megszorozzuk $A/24^2$ -nel (ill. $A/48^2$ -nel), vagyis $S(xy)$ -t osztjuk 24^2 -nel (ill. 48^2 -nel). Kiszámíthatjuk tehát az elektronszámot a felületi sűrűség maximumainak környezetében, ha elvégezzük $S(xy)/24$ -ek összegezését a maximum körül az elég kicsi, de pozitív sűrűségű helyekig kiterjesztve. A mérési hibák következtében lehetséges ugyanis az, hogy egyes helyeken negatív sűrűséget kapunk, holott ennek nincsen fizikai értelme. Éles és pontos maximumok csak akkor várhatók, ha intenzitásméréseink kísérleti hibája a lehetőségig csekély (abszolút intenzitásmérések). Gondos intenzitásbecslések alapján is elvégezhető a Fourier-analízis, ilyenkor azonban csak a nehezebb atomok, ill. ionok helyének meghatározása várható, a könnyebb, tehát kevesebb elektront tartalmazó atomok, ill. ionok helye elmosódik, különösen ha azok nagyobb átmérőjűek, mint pl. az oxigén.

1. táblázat. $F(hk0)$ értékei.
 $F(hk0) = -F(\bar{h}\bar{k}0)$ ha $(h+k)$ páratlan.

$\begin{matrix} k \\ h \end{matrix}$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	56	0	50	0	62	0	78	0	100	0	79	0	68	0	416	0	68	0	79	0	100	0	78	0	62	0	50	0	56
1	—	—	—	—	—	—	76	0	101	0	51	0	87	0	0	0	87	0	51	0	101	0	76	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	78	0	75	12	80	26	99	53	300	53	99	26	80	12	75	0	78	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	100	—	125	—	45	0	126	0	0	0	126	0	45	—	125	—	100	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	43	—	78	—	99	—	72	—	342	—	72	—	99	—	78	—	43	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97	—	0	—	97	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	72	—	276	—	72	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	200	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	114	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

63*

Kísérleti rész.

Előző dolgozatomban ¹ az ezüstpermanganát kristályszerkezetét a fent algebrainak nevezett úton határoztam meg a reflexiók becsült intenzitásai alapján. Ezekből az intenzitásokból az ott közölt módon megkaptam a megfelelő F értékeket, előjelüket a szerkezet meghatározása alapján adtam meg; $F(000)=416$. A $\sin \vartheta=0.40$ értékig meghatározott reflexiókat az 1. táblázatban foglaltam össze; ezek közül is hiányzik néhány, melyeket O -nak kellett tekintenem. Már pedig kisebb, de nem nulla értékű reflexiók az általános szórás okozta fátyolból («Untergrund») nem emelkednek ki. Ugyanez áll a nagyobb szórási szögű reflexiókra is, ahol azonban még az index megállapítása is nehezebbé válik. Így tehát érthető, ha a Fourier-analízis sem ad tökéletesen pontos eredményt.

A 24×24 részre felosztott (xy) sík hálózati pontjaira elvégzett összegezés útján kapott $S(xy) \cdot 10^{-1}$ értékek a 2. táblázatban találhatóak.

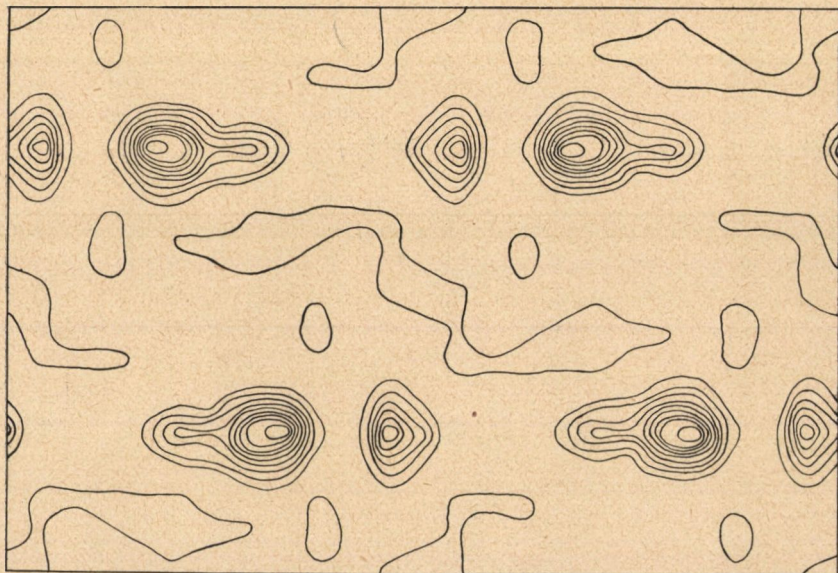
2. táblázat.

Az elektronsűrűség vetülete a (001) síkon. $S(xy) \cdot 10^{-1}$

↑ a 2 ↓	85	69	$\bar{3}$	12	15	30	$\bar{8}$	30	15	12	$\bar{3}$	69	85
	49	78	$\bar{2}\bar{4}$	0	31	36	$\bar{1}$	19	2	71	43	16	49
	$\bar{1}\bar{8}$	57	5	40	38	23	$\bar{1}\bar{3}$	$\bar{2}\bar{1}$	$\bar{4}\bar{2}$	73	38	$\bar{5}\bar{5}$	$\bar{1}\bar{8}$
	0	68	74	90	33	2	$\bar{4}\bar{6}$	$\bar{3}\bar{5}$	$\bar{4}\bar{3}$	27	17	1	0
	18	3	28	18	$\bar{3}\bar{1}$	$\bar{2}\bar{5}$	$\bar{7}\bar{6}$	27	39	$\bar{6}\bar{2}$	$\bar{5}\bar{4}$	82	18
	69	$\bar{5}\bar{9}$	$\bar{3}\bar{4}$	$\bar{4}\bar{6}$	$\bar{4}$	79	47	263	231	$\bar{3}\bar{7}$	$\bar{4}\bar{3}$	222	69
	162	$\bar{2}\bar{5}$	15	$\bar{1}\bar{0}$	73	221	205	440	479	62	25	340	162
	67	$\bar{5}\bar{8}$	$\bar{3}\bar{4}$	$\bar{5}\bar{0}$	$\bar{4}$	106	108	290	248	$\bar{3}\bar{5}$	$\bar{4}\bar{7}$	217	67
	18	15	34	25	$\bar{7}$	18	$\bar{1}\bar{3}$	77	64	$\bar{5}\bar{2}$	$\bar{4}\bar{9}$	87	18
	0	73	75	89	61	60	27	23	$\bar{1}\bar{4}$	63	34	7	0
	$\bar{1}\bar{8}$	59	9	49	89	73	60	56	$\bar{2}\bar{3}$	78	43	$\bar{4}\bar{1}$	$\bar{1}\bar{8}$
	48	80	$\bar{2}\bar{1}$	4	45	65	46	34	17	67	45	19	48
	85	69	$\bar{3}$	12	15	30	$\bar{8}$	30	15	12	$\bar{3}$	69	85
	←----- b ----->												
	2												

¹ Math. Természettud. Ért. 56, 493 (1937).

A számolást elegendő volt az (xy) sík egy negyedére elvégezni, mert a szimmetriasajátságok folytán¹ a sűrűségértékek az általános pozíciónak megfelelő módon (xyz) , $(\bar{x}\bar{y}z)$, $(\frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}-y, \frac{1}{2}+z)$, $(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}-z)$ helyeken négyszer ismétlődnek. Ha a sűrűségértékeket a megfelelő méretekből felrajzolt (xy) sík hálózati



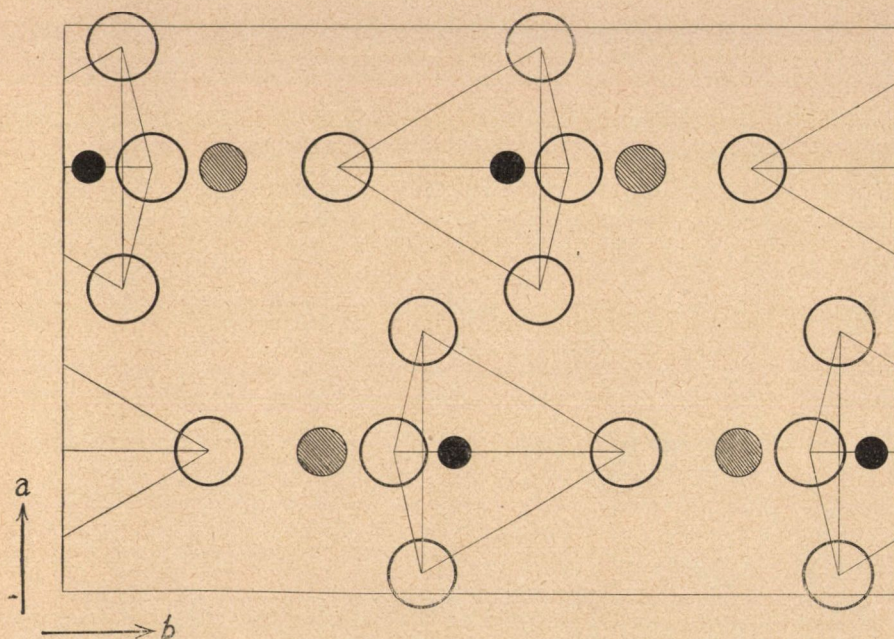
1a. rajz. Az ezüstpermanganát elektronsűrűségeloszlásának vetülete a c tengely mentén a (001) síkon. A nívóvonalak egymástól 50 egységnyi távolságban vannak. A legkülső nívóvonal az $S(xy)10^{-1}=50$ egységgel bíró helyeket kapcsolja össze. A belső nívóvonalak az $S(xy)$ növekvő értékei szerint a magasabb, tehát az $S(xy)10^{-1}=100, 150$ stb. sűrűségű helyeket jelölik ki. A folyton szűkülő nívóvonalak az elektronsűrűség maximumát zárják körül.

pontjaiba beírjuk és az egyenlő sűrűségű helyeket (50 egységenként) összekötjük, akkor az 1a. rajzon látható zárt görbesereget kapjuk. Ebben a legkülső görbe 50 egységet jelent és befelé minden görbe újabb 50 egységgel többet. A legbelül található kis zárt területek

¹ Az ezüstpermanganát tércsoportja $C_{2h}^5 - P2_1/n$.

a felületi sűrűség maximumai, melyek tehát az ionok közép-pontjainak helyét jelentik.

Amint rajzunkból látható, az ezüst és a mangán helyén igen erős maximumok lépnek fel. Ha összehasonlítjuk 1a. rajzunkat, az ezüstpermanganát szerkezetét előző dolgozatom alapján ábrázoló



1b. rajz. Az ezüstpermanganát szerkezetének vetülete a (001) síkra. A legnagyobb kör az oxigén, a középső az ezüst, a legkisebb pedig a mangán helyét jelöli meg.

1b. rajzzal, láthatjuk, hogy az ezüst és a mangán helyzetei nagyon jól egyeznek. Az előző dolgozatban meghatározott paraméterek:

$$\text{Ag } x=0.25, y=0.31; \quad \text{Mn } x=0.25, y=0.03$$

Fourier-analízissel:

$$\text{Ag } x=0.25, y=0.323; \quad \text{Mn } x=0.25, y=0.033.$$

Az oxigén-ionok helyzetére a fent részletezett okokból a Fourier-analízis nem szolgáltat biztos eredményeket.

Ha az ezüst maximumának környezetében kiszámítjuk az elektronok számát, akkor az eredmény 53·8 elektron, az Ag^+ ión és az O^{-2} ión elektronjainak összege (melyek a vetületben egymáshoz igen közel esnek és szét nem választhatók) 56. A mangán maximumának környezetében az elektronok száma 22·8, ami kétszeresen ionizált mangánnak felelne meg (23 elektron), holott a kémiában szokásos feltevés szerint a permanganát-iónban a centrális Mn hétszeresen ionizált. A Fourier-analízissel kapott számban azonban a szomszédos oxigén elektronjainak egy része is benne foglaltatik, úgyhogy ezeket egymástól elválasztani nem lehet.

Dolgozatomat a szegedi Ferenc József-Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében készítettem. Köszönetet mondok NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN dr. egyetemi m. tanár úrnak, aki támogatásával lehetővé tette a dolgozat elkészítését. Ugyancsak köszönetet mondok a Széchenyi Tudományos Társaságnak és a Rockefeller-Alapnak anyagi segítségükért.

Szeged, 1938. június hó.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938 okt. 24-én tartott üléséből.)

FOURIER-ANALYSE DER STRUKTUR DES SILBERPERMANGANATS.

Von K. SASVÁRI.

In einer früheren Arbeit habe ich aus den geschätzten Reflexionsintensitäten des Silberpermanganats die F -Werte berechnet und die Struktur bestimmt. Mittels diesen F -Werten wurde in der vorliegenden Arbeit die Ladungsdichte durch Fourier-Analyse (nach den Verfahren von W. L. BRAGG) auf die Fläche (001) projiziert. Die so gefundenen Parameter für Ag und Mn sind mit den früheren in guter Übereinstimmung.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Okt. 1938.)

A SCILLABIÓZ SZERKEZETE.

ZEMPLÉN GÉZA r. tagtól.

A tengeri hagymából (*Scilla maritima* L.) STOLL¹ néhány év előtt rendkívül hatásos szívglükózidot különített el, melyet *scillaren* A névvel jelölt, s melynek híg savval végrehajtott hidrolizise egy új biózhhoz vezetett: a *scillabiózh*hoz. Ennek a bióznak felépítésében ugyanazok az egyszerű cukrok szerepelnek, mint a *rutinózh*ban, csak a sorrend más, amennyiben a rutinózh egy *rhamnózido- β -glükózh*,² a scillabiózh pedig egy ismeretlen szerkezetű: *glükózido-rhamnózh*.

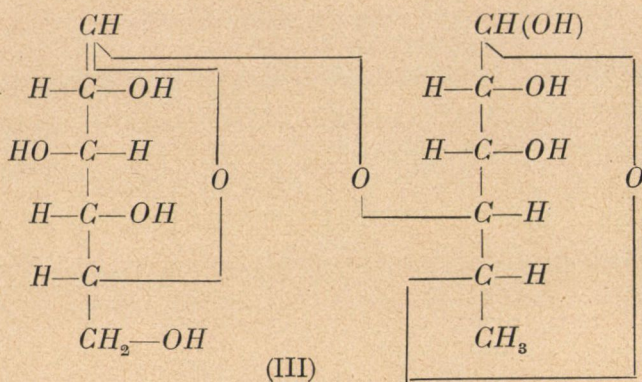
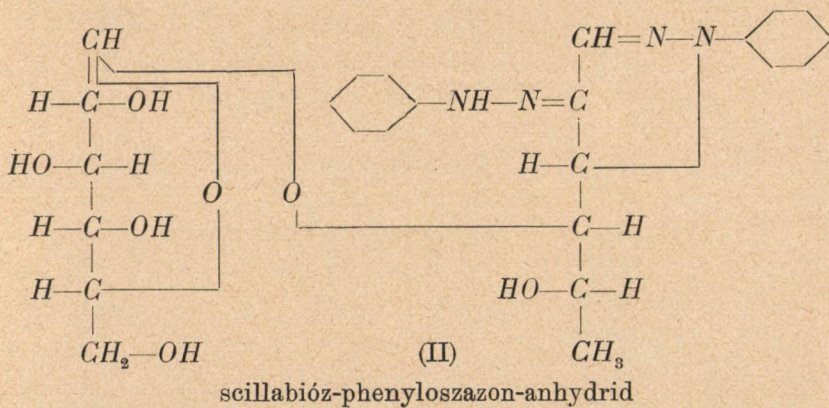
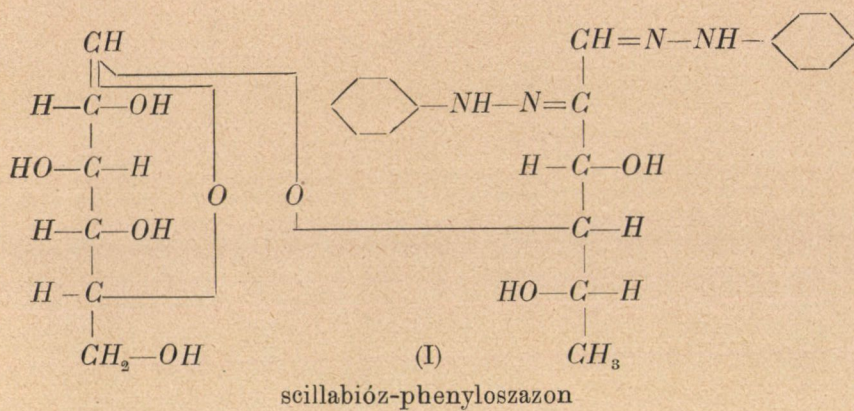
A. STOLL lekötelő kedvességgel rendelkezésemre bocsátott a ritkaság számba menő *scillabiózh*ból 10 g-ot, s én igyekeztem a biózh szerkezetét megállapítani.

A scillabiózh a szokásos körülmények között *oszazont* (I) szolgáltat, ami arra mutat, hogy benne az első és a második rhamnózh-szénatom hidroxilja szabad. Viszont a fenil-oszazon alkoholos oldatban csekély mennyiségű hígított kénsav jelenlétében egy *oszazonanhidridet* (II) létesít, amelynek keletkezéséhez a harmadik — rhamnózh — szénatomon lévő hidroxil szükséges.³ Ez a reakció, feltéve, hogy a scillabiózhban a rhamnózh a normális pyranózh szerkezet formájában van jelen, azt jelenti, hogy a *glükózh*nak első szénatomja kapcsolódik a rhamnózhnak negyedik szénatomjához a következő szerkezet szerint: (III)

¹ A. STOLL, E. SUTER, W. KREIS, B. B. BUSSEMAKER és A. HOFMANN. *Helv. Chim. Acta* XVI. 703 (1933).

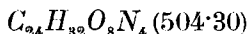
² ZEMPLÉN GÉZA. *Mat. és Term. Ért.* 54, 208 (1936).

³ O. DIELS, R. MEYER, O. ONNEN. *Liebigs Annalen* 525, 94 (1936).



KÍSÉRLETI RÉSZ.

Scillabióz-phenyloszazon



0·5 g scillabiózt, 1 g sósavas phenylhidrazint és 1·5 g kristályos nátriumacetátot 5 ccm vízben 1·5 óra hosszat melegítünk forró vízfürdőben. Az első óra letelte után az edény alján olajos sárga kiválás mutatkozik. A melegítés után 5 ccm vízzel hígítjuk a reakciókeveréket és jéggel lehűtjük. A kivált kristálytömeget leszívátjuk és oldjuk 20 ccm forró alkoholban, majd 20 ccm meleg vizet adunk hozzá. Nehány óra múlva a sárga kristályokat leszívátjuk, vizes alkohollal, majd étérrel mossuk, és vákuumexszikkátorban méz és foszforpentoxid felett megszáritjuk. Termelés 0·35 g. A kristályok 162°-nál kezdenek lágyulni és barnulni és 164·5—165° között olvadnak.

Nitrogénmeghatározás:

4·140 mg: 0·414 ccm (740·7 mm, 17·5°) $N=11\cdot45\%$

4·750 mg: 0·478 ccm (739·0 mm, 18·0°) $N=11\cdot48\%$

$C_{24}H_{32}O_8N_4 (504\cdot3)$ -ra számítva $N=11\cdot11\%$.

Anhydro-scillabióz-phenyloszazon



0·35 g scillabióz-phenyloszazont 8 ccm abs. alkohollal és 0·016 ccm 20%-os kénsavval 5 óra hosszat forralunk vízfürdőn. Az oldat világosabb, mint a cellobióz-phenyloszazon esetében. Szobahőfokon, a vizsugárszivattyúval való levegőelszívás útján bepároljuk. A barna maradékot 1 ccm abs. alkohollal eldörzsöljük és néhány óra múlva leszívátjuk. Kevés változatlan anyag marad vissza. A vörösesbarna anyalúgot 1·5 ccm forró vízzel hígítjuk. Lehűléskor sárga kiválás mutatkozik, melyet leszívátunk, 50%-os alkohollal mosunk, és exszikkátorban égetett méz és foszforpentoxid fölött megszáritunk. Súlya 0·1 g. Kapillárisban melegítve 215°-nál kezd barnulni, 233°-tól kezdve lágyul és 242°-nál élesen, bomlás közben olvad. Az eredeti anyaghoz viszonyított magas olvadáspont mutatja, hogy az anhidridképződés megtörtént.

*Nitrogénmeghatározás:*4·533 mg:0·430 ccm (761 mm, 16·0°) $N=11·22\%$ 4·090 mg:0·406 ccm (761 mm, 18·5°) $N=11·64\%$ $C_{24}H_{30}O_7N_4$ (486·28)-ra számított $N=11·52\%$.

*

TETTAMANTI ALBIN tanársegédemnek ügyes segítségéért köszönetet mondok.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. jún. 16.-án tartott üléséből.)

KONSTITUTION DER SCILLABIOSE.

Von GÉZA ZEMPLÉN o. Mitglied.

Aus der Meerzwiebel (*Scilla maritima* L.) isolierte vor einigen Jahren STOLL¹ ein hochwirksames Herzglykosid, das er *Scillaren A* nannte. Dieses ergibt bei der Hydrolyse mit verdünnten Säuren eine Biose, die *Scillabiose*. Die Komponenten dieser Biose sind dieselben, wie bei der *Rutinose*,² nur die Reihenfolge der Monosen ist anders. Während nämlich die *Rutinose* eine *Rhamnosido-6-glukose* darstellt, ist die *Scillabiose* eine *Glukosido-rhamnose* mit einer bisher unbekanntem Struktur.

Die *Scillabiose* gibt ein Phenylosazon normaler Zusammensetzung, und lässt sich unter den üblichen Bedingungen³ in ein Anhydrid überführen, woraus für die *Scillabiose* die Konstitution einer *Glykosido-4-rhamnose* ableitbar ist.

¹ A. STOLL, E. SUTER, W. KRIS, B. B. BUSSEMAKER u. A. HOFMANN. *Helv. Chim. Acta* XVI. 703 (1933).

² GÉZA ZEMPLÉN u. ARPÁD GERECS. *Ber.* 68, 1318 (1935).

³ O. DIELS, R. MEYER u. O. ONNEN. *Liebigs Annalen* 525, 94 (1936.)

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 16-ten Juni 1938.)

ALKALOIDBETAINEK.

I. A chinin és chinidin α -betainjai.¹

KONEK FRIGYES I. tagtól.

Betaineikkel az élő, főleg a növényvilágban, elég gyakran találkozunk. A betaint magát SCHEIBLER K. mutatta ki először a cukorrépában, és nevét is ennek a növénynek botanikai elnevezésétől (*Beta vulgaris*) kapta. Később még számos más, különböző családokba tartozó növényekben — azoknak különböző szerveiben — is kimutatták; sőt még gombaféleségekben is. Ennek dacára nem lehet állítani, hogy a betain a növényvilágban általános elterjedésnek örvendene, mert a legtöbb családból mégis csak hiányzik. A betain vagy trimethylglykokoll mellett főleg még két, sok növény családban előforduló betain említendő; a stachydrin vagy prolinbetain — a citromlében, a chrysanthemum virágban, a lucernában — és a trigonellin vagy methylpyridinbetain, a természetben legelterjedtebb pyridinszármazék, amely számos, különböző családokba tartozó növényben, legnagyobb mennyiségben talán — a trigonella mellett — a kávébabban található. Az állatvilágban eddig csak szórványosan akadtak valódi betaineekre; így, hogy csak egy példát említsek, az utoljára felsorolt, a növényvilágban annyira elterjedt stachydrint és trigonellint újabban egyes puhányok — pl. *arbatia pustulosa* — bizonyos testrészeinek kivonataiban is megtalálták. Bár ez utóbbiak pyrrolidin, illetve pyridinszármazékok és mint ilyenek, már egészen alkaloidtermé-

¹ IX. közlemény a differenciáló alkylézés gyakorlati alkalmazásáról. A VIII. közleményt: «A hydrochinin magasabb... stb.» lásd Mat. Term. tud. Ért. LVII. kötet (1938) 256. l.

szetű anyagok, fiziológiai hatásukról vajmi keveset tudunk. Egyes pharmakopóák ajánlják ugyan acidol elnevezése alatt a cukorrépa-betain sósavas sóját mint sósavpótló gyógyszert; a trigonellinről feljegyi az irodalom, hogy változatlanul, minden különösebb fiziológiai hatás nélkül hagyja el az állati szervezetet; és még néhány ehhez hasonló adat: viszont magának a betainkomplexumnak élettani specifikus hatásáról alig esik szó. Erre a kérdésre úgy lehetne megfelelni, ha egy élettani hatásában alaposan végigtanulmányozott és kiismert alkaloid molekulájába szintétikus úton beiktatjuk a betaincsoportot — természetesen minden más strukturális változtatás leggondosabb elkerülésével — és most párhuzamos élettani összehasonlító kísérletekkel meggyőződünk arról, hogy ez a szintétikus beavatkozás milyen változást idézett elő az eredeti alkaloid élettani összhatásában; a különbséget, amelyet kísérletileg esetleg konstatáltunk, a betaincsoport speciális fiziológiai hatásának lehetne tekinteni. Ma tudjuk, hogy az alkaloidok a növényi fehérjékből keletkeznek, azoknak mintegy fejlődési bomlási termékei; mivel pedig azt is tudjuk, vagy legalább is sejtjük, hogy a különböző fehérjékben az aminosavak betainszerűleg lehetnek egymáshoz kapcsolva: az alkaloidokat az ilyen «betainozással» visszavihetjük mintegy egy korábbi, a proteinhez közelebb álló fejlődési fokozatba, aminek azután kifejezésre kellene jutnia a fiziológiai tulajdonságok, illetve hatásoknak bizonyos irányban való elhajlásában is! Ebből a szempontból tettem tanulmány tárgyává az egyik legalaposabban kiismert alkaloidnak, a chininnek betainszármazékait. Megállapítottam, hogy chinin és chinidin könnyen egyesíthetők monojódeceteszterrel az α -sorba tartozó, szépen kristályosodó betainesterjodidokká, amelyek forró lúggal elbontva, szolgáltatják a kristályos chinin és chinidin α -betaineiket. Kísérletileg elég nehéz probléma volt egy vízben könnyen oldható, nem disszociáló és így sterilizálható chininbetain-sónak az előállítás; végül sikerült a bioanalitikai alakjában egy a fiziológiai vizsgálatra is alkalmas «chininum- α -betainum aqua solubile» birtokába jutnom. Ez a készítmény fiziológiai hatására nézve össze lett állatkísérletben a chininnel hasonlítva, még pedig a «Vereinigte Chininfabriken Zimmer & Co. Mannheim-Waldhof» gyár kísérleti élettani laboratóriumában. Eddigi eredmények:

lehajtva, 170—180° közt ledestilláltam a keletkezett jódestert, amely amúgy nyersen a kivált jódtól sötétbarnaszínű; néhány csepp fémhigannyal összerázva, azonban csakhamar elszíntelenedik; hogy további bomlását megakadályozzuk, barna üvegben sötét helyen pár csepp higany felett tartjuk. Mivel a jodester gőze még nagy hígításban is erősen támadja a szem, orr és garat nyálkahártyáit, szóval erősen könyfakasztó és fullasztó hatású: a méréseket legcélszerűbben — hacsak gázmaszkot nem akarunk használni — csepegtetőüvegből jól húzó fülkében, vagy pedig a szabadban eszközöljük.

A brómcetesternek terciér bázisokkal való kombinációjának kérdését már többen tanulmányozták,¹ míg a jóval reakcióképebb jódesternek ilyen célokra való alkalmazásáról — talán éppen fentemlített kellemetlen tulajdonságainál fogva — az idevágó irodalomban csak kevesebb adatot találunk. WEDEKIND E. (Ber. 32, (1899) 511—515) volt talán az első, aki az ötvegyértékű nitrogén stereoizomériájáról végzett klasszikus kutatásai folyamán megállapította ennek a vegyületnek nagy — a jódmethylre emlékeztető — reakcióképességét terciér bázisokkal — pl. benzylpiperidinnel — szemben. Engem főleg IHLDER HILDRICHnek munkái és kísérleti eredményei érdekeltek, aki elsőnek mutatta ki, hogy chinolin és isochinolin könnyen egyesülnek bróm-, illetve chlorcetesterrel kristályos ammoniumhalogén-származékokká, amelyekből rendes úton a megfelelő betaineek elő voltak állíthatók. Ennek alapján joggal várható volt, hogy a chinaalkaloidok is, mint vérbeli chinolin-származékok, jódecetesterrel szemben is a chinolinhez hasonló magatartást fognak tanúsítani. A kísérlet igazolta ezt a feltevést. A jódmethyl és aethylnek chininre való hatásának tanulmányozásánál szerzett kísérleti tapasztalatokon elindulva, a jódecetesternek ezzel a bázissal való kombinálását is kezdetben különböző oldószerekben és különböző hőfokon kísértem meg; míg végre a sok próbálgatásból egy egyszerű eljárás alakult ki, amelynek segítségével a fejezet címében megjelölt új chininszármazék, az α -chinin-

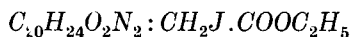
¹ VONGERICHTEN: Ber. deutsche Chem. Ges. 15, 1254. - RHOUSOPOULOS: Ibid. 15, 2006. — IHLDER HILDRICH: Arch. d. Pharm. 240 (1902), 504.

betainaethylesterjodid gyorsan és quantitativ eredménnyel tetszőleges mennyiségben elő volt állítható. A gazdag kísérleti anyagból e helyen csak azokat az eljárásokat ismertetem röviden, amelyek könnyen tisztítható termékhez vezettek. Eleinte a $C_{20}H_{24}O_2N_2 + JCH_2.COOC_2H_5 = C_{20}H_{24}O_2N_2 - JCH_2.COOC_2H_5$ egyenletnek megfelelő arányban egy mol. chinint — pl. 2 gramot — feloldottam 10—15 cm³ éter és 1—2 cm³ alkoholban, hozzámértem egy mol. — 1·8 g — jódecetestert, és a tiszta, színtelen oldatot visszafolyó hűtőn a langyos vízfürdőben körülbelül két óráig az éter forrpontján melegítettem. Az oldat csakhamar sárga, majd vörösszínű lett, kristályos csapadékot választott ki, amely végül barackvirágszínű kemény réteg alakjában az edény fenekére rakódott le. A kristályokról leöntött vörös oldat bepárolva csak kevés barnás olajat hagyott, amely többé már nem kristályosodott. A szűrőre gyűjtött és éterrel mosott rózsaszín kristályok súlya légszáraz állapotban 2·7 gram volt. Ezek forró vízben maradék nélkül oldódnak ugyan, de hűtve csak mint tejszerű emulzió váltak ki, amely sehogy sem akart kristályos lenni. Végül 50% vizet tartalmazó alkoholból sikerült az új vegyületet szép túalakú, gyengén sárgaszínű kristályok alakjában megkapni, amelyek a nyílt kapillárisban exsikkatorszáraz állapotban 156—158° közt olvadtak pezsgés és teljes bomlás közben, de már jóval előbb lágyultak. Viszont máskor 135—137°, illetve 145—150° közt fekvő olvadás, helyesebben bomlási pontot figyeltem meg, amiből arra kell következtetni, hogy ez nem állandó és így nem jellemző tulajdonsága az új vegyületnek. Elemzésre először ez az 50%-os alkoholból többször átkristályosított, kénsavvakuumban, majd 105°-nál állandó súlyig szárított anyag került.

Elemzés: 195·8 mg 105° száraz anyag adott 84·3 mg jódezt, amiből a jód talált értéke: J (talált) = 23·27%; a $C_{20}H_{24}O_2N_2 : JCH_2.COOC_2H_5$ képletben a jód értéke: J(számít.) = 23·60%. Ebből az elemzési adathból következik, hogy az új vegyület egy molekula chinin és egy mol. jódecetesterből keletkezett és nem más mint a keresett és várt α -chininbetainaethylesterjodid; szerkezetét a fejezet elején közölt szerkezeti képlet tünteti fel. Forró acetonban végzett kísérletek nem vezettek eredmény-

hez, amennyiben a csokoládébarna reakciótermékből kristályos vegyület nem volt elkülöníthető; a jódester úgylátszik inkább az oldószerre hat és az acetont jódozza. Későbbi kísérleteimből kitűnt az is, hogy a chinin a jódesterre képes már közönséges hőnél is megkötöni. Ha például egy mol. chinint oldunk 1—2 cm³ abszol. alkoholban és tízszer annyi benzolban és a tiszta oldathoz egy mol. jódesterre adunk, a szintelen oldatban 1—2 napi állás után szobahőmérsékleten, melegítés nélkül is, megindul a kristályképződés, annyira, hogy az oldat egész tömegében megalvad. A gyengén rózsaszín kristályok leszűrve, benzollal mosva és levegőn szárítva a nyílt kapillárisban mindjárt 155—160° közt olvadtak teljes bomlás közben és az elemzésnél vegytiszta terméknek bizonyultak.

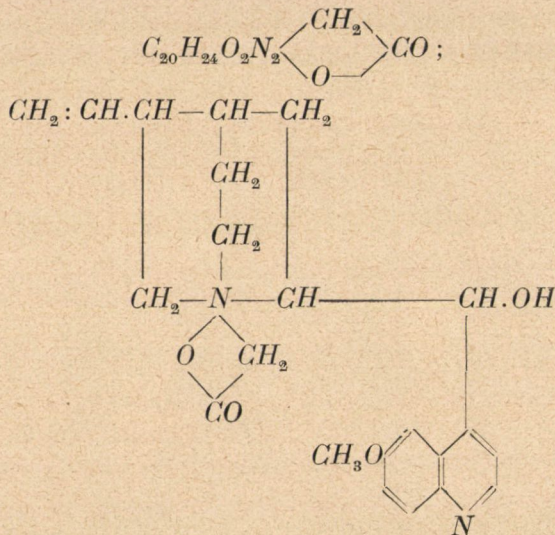
Elemzés: 183.7 mg 105° száraz anyag adott 80.0 mg jódesterre, amiből a jód (talált érték) = 23.54%; a



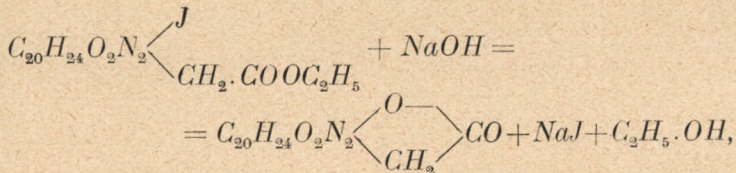
képletben a jód (theoret, érték) = 23.60%. A jódester-addíció meg lehet gyorsítani és kvantitatívvá tenni, ha benzol helyett alkohol-éter keverékben végezzük és feloldunk például 10 gram chinint cca 15 cm³ alkoholban, adunk hozzá cca 30 cm³ étert és egy molekulának megfelelő — 6.6 gram — jódesterre; a tiszta és szintelen oldat percek múlva sárgul, vörösödik és megindul benne a kristályképződés, amely oly gyorsan halad előre, hogy 1/4—1/2 óra múlva az oldat egész tömegében sárgarózsaszín kristálytömeggé szilárdul; úgyannyira, hogy ez a kísérlet kiválóan alkalmas az effajta addíciós reakciók időbeli lefolyásának szemléltető demonstrálására is mint előadási kísérlet. 10—12 órai sötét helyen való állás után a reakció rendes körülmények között be van fejezve; tovább nem is tanácsos várni, mivel előfordult, hogy 2—3 napi állás után a termék csokoládébarna, nyúlós anyaggá változott (a bomlás jeléül erős jodoformszag lépett fel), amelyből a tiszta vegyület nagy nehézséggel és veszteséggel volt csak kihámozható. A lenutsolt, éterral mosott és levegőn megszáradt, barackvirágszínű kristályok súlya — 10 gram chininből kiindulva — többiben 15.5—16 gram volt, — 16.6 grammal, a theoretikus értékkel szemben. Ez a nyers termék teljesen tiszta és továbbszármazékok előállítására alkalmas. Ezek között csak futólag

említem az α -chininbetainaethylesterchloridet, amelyet a jodidból szokott módon, mégpedig úgy próbáltam előállítani, hogy ez utóbbit vizes, illetve vizes-alkoholos oldatban feles, frissen készített ezüstchloriddal hosszabb ideig rázogattam; a halogénezüst-csapadékról lenutsolt oldatokat bepárolva több ízben mindig csak sárgászínű, gyantás termékeket kaptam, amelyekből a keresett chloridet kristályos és így elemezhető alakban előállítani eddig nem sikerült.

Chinin- α -betain.



A chinin α -betaint kezdetben úgy próbáltam az előző fejezetben leírt esterjodidból előállítani, hogy a jódfosztásra, illetve annak hydroxyllal való felcserélésére frissen készített nedves ezüstoxydot használtam; csak később jöttem rá, hogy erre a célra éppen olyan jó, sőt sokkal jobb a nátronlúg is. Ha ugyanis a chininbetain-esterjodidet a számított mennyiségű normál nátronlúggal forró vízfürdőn néhány percig digeráljuk, ezen egyenlet szerint:



a jód első pillanatra hydroxyllal lesz helyettesítve, a carboxaethyl-csoport el lesz szappanosítva szabad karboxyllé amely a bázikus jellegű, nitrogénhez kötött hydroxyllal status nascensben belső, laktonszerű anhydridet képez. miáltal létrejön a betainalak. A gazdag kísérleti anyagból, amely ezen érdekes, gyönyörűen kristályosodó chininszármazék előállításához vezetett, e helyen csak egy példát sorolok fel: 10 gram az előző fejezet előírása szerint készített chininbetainesterjodid kevés vízzel és egy molekulának megfelelő, — 18.6 cm³ normál — nátronlúggal, néhány percig a forró vízfürdőn digerálva lett. A kezdetben színtelen oldat borvörös színt vesz fel és szűrés után rögtön tejszerű emulziót választ le, amely csakhamar nehéz sárga olaj alakjában az edény fenekén gyülemlik össze. Hidegben ez az olajos réteg — rendszeren már másnapra — kristályos tömeggé szilárdult, amely több cm hosszú színtelen, finom, fénylő rozettákba csoportosult tűkből tevődött össze. Leszűrve, vízzel mosva, levegőn és exsikkátorban megszáritva, súlyuk gyakran eléri a számított értéket. A nyílt kapillárisban a forró vízből (amelyben csak nagyon nehezen oldhatók) egyszer átkristályosított kristályok nem mutatnak karakterisztikus éles olvadáspontot, amennyiben 190° körül lágyulnak, majd lassan felfűvődnek és 215—225° közt olvadnak, illetve bomlanak. Ez a termék került elemzésre, amelynek adataiból kitűnt, hogy az így előállított új vegyület egy chininmonobetain összetételével bír, amely exsikkatorszáraz állapotban is még két molekula kristályvizet tartalmaz.

Elemzések: 263.2 mg exsikkatorszáraz anyag 110°-on állandó súlyig szárítva, 20.8 mg vizet veszített, amiből H₂O (talált) = 7.90%; a C₂₂H₂₆O₄N₂ + 2H₂O képletben a H₂O (számított) = 8.61%. A 110°-nál állandó súlyig szárított, tehát kristályvízmentes anyagból 5.069 mg adott Dumas szerint 0.317 cm³ N-t 755.1 mm barometer és 16° C. temp.-nál, amiből N (talált) = 7.51%, I.; 5.066 mg: 0.3179 cm³ N, 761.7 mm baromet. és 16° C. temp.-nál, amiből N (talált) = 7.43%, II.

A C₂₂H₂₆O₄N₂ képletben a N (számított) = 7.33%.¹

¹ A mikro-dumas-elemzéseket BLASKÓ dr. úr végezte a Pázmány Péter Tudományegyetem organ. laboratóriumában; szívességét e helyen is megköszönöm.

Az így jellemzett chinin-*a*-betain könnyen oldódik alkohol, chloroform és acetonban, nehezen éter és benzolban; ez utóbbiból forráspontján kb. 50 cm³ old egy gram betaint; a benzolos oldatból kivált fehér kristályok éppúgy nem mutatnak éles olvadáspontot, mint a vízből kapottak. Chlorvízzel és ammoniákkal a betain erősen adja a thalleiochin-reakciót. Fiziológiai vizsgálatra a szabad betain nem alkalmas, mivel vízben való oldhatósága nagyon is alárendelt. E célból tanulmány tárgyává tettem a betainbázis sószerű származékait. A szokásos anorganikus savakkal — sósav, brómhydrogén stb. — képezett sók vízzel többnyire azonnal disszociálnak, tehát szintén nem alkalmasak fiziológiai oldatok készítésére. Végül, hosszú kísérletezés után az oxalsavban megtaláltam azt a savat, amely a betainnel egy vízben könnyen oldható, nem disszociáló és így sterilizálható sőt képez. Készítésére legcélszerűbbnek a következő eljárás bizonyult: feloldunk egy molekul. betaint lehetőleg kevés absol. alkoholban, adunk hozzá egy molekul. kristályos oxalsav konc. absol. alkoholos oldatát, mire a só tejfehér kristályos csapadék alakjában azonnal — még pedig quantitativ — kiválik. Hidegben való rövid állás után a megalvadt oldatot lenutsoljuk, levegőn, majd exsikkátorban megszáritjuk. Az így előállított oxalsavas betain, maradék nélkül oldódik hideg vízben; az oldatok bomlás nélkül sterilizálhatók és így fiziológiai vizsgálati célokra felhasználhatók. Elemzés céljából a sót alkoholból kristályosítjuk; a fehér porszerű kristályokat levegőn szárítjuk.

Elemzések: 214.4 mg légszáraz só 110°-nál 15.8 mg vizet veszített, amiből H₂O (talált) = 7.37%; a C₂₂H₁₆O₄N₂·(COOH)₂+2H₂O képletben a kristályvíz H₂O (számított) = 7.00%.

I. 3.070 mg 110°-nál állandó súlyig szárított anyag:

0.173 cm³ N, 20°, 759 mm;

II. 3.027 mg 110° száraz anyag:

0.169 cm³ N, 20°, 758 mm;

I. 4.142 mg 110° száraz anyag:

2.400 mg H₂O, 9.245 mg CO₂;

II. 4.123 mg 110° száraz anyag:

2.425 mg H₂O, 9.165 mg CO₂;

Talált értékek :

$$\begin{aligned} N &= 6.56\% \text{ I.}, 6.48\% \text{ II.}; \\ C &= 60.87\% \text{ I.}, 60.63\% \text{ II.}; \\ H &= 6.43\% \text{ I.}, 6.58\% \text{ II.} \end{aligned}$$

Számított értékek a $C_{22}H_{26}O_4N_2 \cdot (COOH)_2$ képletben :

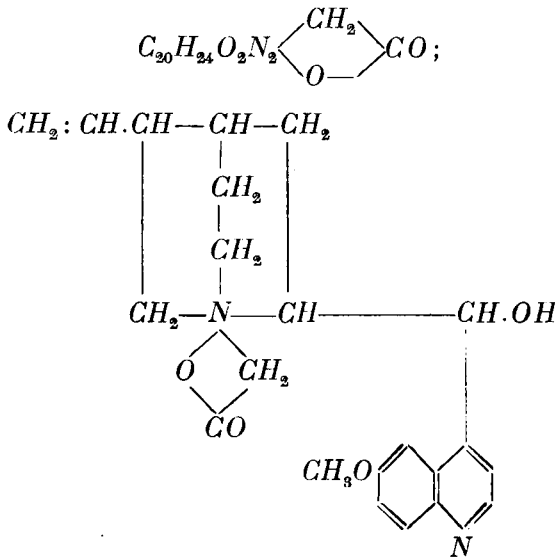
$$\begin{aligned} N &= 5.93\%; \\ C &= 61.02\% \\ H &= 5.93\%.^1 \end{aligned}$$

Ezen adatokból következik, hogy az elemzett új származék nem más, mint a várt chinin- α -betain- β -bioxalat, amely vízben való oldhatóságánál fogva alkalmas volt fiziológiai vizsgálatra is. Ez a készítmény mint «Chininum betainum aqua solubile» a «Ver-einigte Chininfabriken Zimmer & Co.» Mannheim-Waldhof fiziológiai laboratóriumában egyelőre mérgező- és a proteosoma-infekció elleni hatására nézve lett megvizsgálva. Midőn kitüntető szívességéért e helyen is köszönetet mondok, a gyár tudományos vezetősége részéről velem közölt fiziológiai vizsgálati eredményekből e helyen csak néhány főbb pontot emelek ki. Ami a mérgező hatást illeti, egéren, subcutan injekcióval végzett összehasonlító kísérletekből kitűnt, hogy míg a chinin dosis letalis minima 0.422 mg pro gram egér, addig a betainé 0.5 mg-nak találtatott; más szóval a betainkomplexum alig észrevehetően csökkentette az eredeti alkaloid mérgező hatását. Nem érdektelen az a megfigyelés, hogy a proteosomával inficiált kanárimadár vérében a paraziták 6—8 nap múlva (ez a rendes inkubációs idő) voltak már kimutathatók abban az esetben is, ha mindjárt 1, 2, sőt 4 mg chininbetaint kaptak az állatok per os; ezzel szemben már 1 mg chinin képes az inkubáció idejét 12 napra is kitolni; miből arra lehet következtetni, hogy a betain-komplexum lényegesen befolyásolja az eredeti alkaloid fiziológiai hatását, még pedig olyan irányban, hogy csökkenti annak baktericid hatását bizonyos parazitákkal szemben. Ezirányú összehasonlító kísérleteinket emberekkel is

¹ A mikroelemzések a «Ver. Chininfabr. Zimmer et Co. Mannheim» anal. laboratóriumában készültek; kit. szívességét e helyen is megköszönöm.

A chinin stereoizomérje, a chinidin is hasonlóan viselkedik jódecetesterrel szemben, amennyiben már közönséges hőnél is képes annak egy molekulájával símán a megfelelő α -betainszárma-zékká egyesülni. Az addíciót kezdetben éter-alkoholos oldatban — úgy mint az a chinin esetében bevált — végeztem; mivel azonban a termékek tisztításával igen sok baj volt, oldószerül később inkább benzolt használtam, amely már sok ehhez hasonló esetben kitűnő reakcióközegnek bizonyult. Feloldottam például 1 gram chinidint (BOEHRINGER-WALDHOF) 10 cm³ benzolban, adtam hozzá egy molekulának megfelelő — 0.7 gram — jódecetestert; már percek múlva kristályok váltak ki a sárguló oldatból, amelyek több napi állás után leszűrve, benzollal mosva, majd exszikkátorban megszáritva, a nyílt kapillárisban 180—181°-nál olvadtak teljes bomlás közben, de már 120° körül lágyultak és feketedtek. Súlyuk 1.1 gram volt. Az olvadáspont itt is változik, szóval nem karakterisztikus, — éppúgy mint a chinin megfelelő származékáé — amennyiben a vízből átkristályosított termék többször már 170°, sőt 150° körül is olvadt. Az elemzésnél ez az új chinidinszármazék a várt összetételt mutatta.

Elemzés: 226.6 mg 100° száraz anyag adott 100.1 mg AgJ -t, amiből a jód (talált) = 23.87%; a $C_{20}H_{24}O_2N_2:CH_2J.CO_2C_5H_5$ képletben a jód (számított) = 23.60%. E szerint az elemzett új vegyület nem más, mint a várt chinidin- α -betainaethylesterjodid, amelyet tovább nedves ezüstoxyddal, illetve meleg lúggal éppúgy el lehetett a megfelelő betainné bontani, mint a chinin megfelelő származékát.

Chinidin- α -betain.

Az előző fejezetben leírt betainesterjodidot quantitativ el lehet a megfelelő betainre bontani, ha 1 gram anyagot a chininnél megadott egyenlet szerint egy mol. — azaz 1.9 cm³ norm. — nátronlúggal és annyi vízzel forralunk, hogy rövidesen tiszta, csaknem színtelen oldatot kapunk. A forróvíztölcséren szűrt folyadékban azonnal csillogó apró túalakú kristályok keletkeztek, amelyek hosszabb állás után gyöngyházfényű pikkelyekké álltak össze. Súlyuk exsikkátorszáraz állapotban majdnem elérte a theoretikus, a $C_{20}H_{24}O_2N_2 : CH_2J \cdot CO_2C_2H_5 + NaOH = C_{20}H_{24}O_2N_2 : C_2H_2O_2 + NaJ + C_2H_5 \cdot OH$ egyenlet megkövetelte mennyiségét. A nyílt kapillárisban 100° körül lágyultak, majd 228° körül olvadtak, teljes bomlás közben. Ezek kerültek elemzésre 110°-nál szárított állapotban.

Elemzések: I. 5.992 mg anyag: 0.3763 cm³ N, $t = 17^\circ$ C. és $b = 775.4$ mm, $N = 7.32\%$ (talált) I.;

II. 6.989 mg anyag: $0.4381 \text{ cm}^3 \text{ N}$, $t = 17^\circ \text{ C}$. és $b = 775.4$ mm, $N = 7.30\%$ (talált) II.¹

A $C_{20}H_{24}O_2N_2 : C_2H_2O_2$ képletben a N (számított) = 7.33% .

Ezen adatokból következik, hogy az elemzett új vegyület tényleg nem más, mint a keresett chinidin- α -betain, a fejezet elején közölt szerkezettel. Eltérőleg a chinintől, a chinidin- α -betain abszol. alkoholos oldatából oxalsavval nem csapható ki, hanem csak az alkohol teljes elűzése után marad vissza a bioxalat; amely vízben maradék nélkül oldódik ugyan, de mint egyöntetű kristályos só eleddig jellemezhető nem volt. A chinidin- β -betain és dibetain előállítását célzó kísérletekről és azok eredményéről remélhetőleg nem sok idő múlva, egy későbbi publikációban fogok majd előterjesztést tehetni.

¹ A mikro-dumas-elemzéseket a Pázmány Péter Tudományegyetem organ. laboratóriumában BLASKÓ dr. és WERNER urak végezték; szíves fáradságukat e helyen is köszönöm.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. okt. 24-én tartott üléséből.)

ALKALOIDBETAINE.

I. Die α Betaine des Chinin's und Chinidin's.

Von FRITZ v. KONEK, korr. Mitglied.

Um den Einfluss der Betainisierung auf die physiologische Wirkung eines Alkaloids auch experimentell prüfen zu können, hat Vortragender die Einwirkung des Monojodessigsäureaethylsters auf Chinin und Chinidin studiert; die erhaltenen Betainesterjodide zu den entsprechenden α -Betainen des Chinin's und Chinidin's abgebaut. Ersteres in ein wasserlösliches, sterilisierbares Derivat übergeführt. Dieses wurde im physiolog. Laboratorium der «Verein. Chininfabr. Zimmer & Co. Mannheim-Waldhof» auf seine Giftigkeit, sowie auch auf seine Proteosoma-Wirkung hin an der Maus resp. am Kanarienvogel geprüft. Aus den bis jetzt vorliegenden Versuchsergebnissen folgt, dass die Betainisierung die Giftigkeit des Alkaloids kaum beeinflusst, während die Antiproteosoma-Wirkung wesentlich herabgemindert wird. Weitere Versuche am Menschen sollen das physiologische Bild tunlichst vervollständigen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungar. Akademie der Wissenschaften vom 24. Okt. 1938.)

A TAKARMÁNY ÁSVÁNYI SÓARÁNYÁNAK LÉNYEGE ÉS JELENTŐSÉGE AZ ÁLLATI SZERVEZET MÉSZ- ÉS FOSZFORELLÁTÁSÁBAN.

MAREK JÓZSEF r., WELLMANN OSZKÁR I. tagtól,
URBÁNYI LÁSZLÓ vendégtől.

A rhachitis lényegének felderítésére folytatott kísérletes vizsgálataink során elsőkül sikerült megállapítanunk, hogy az angolkór (rhachitis) végeredményben a szervezetnek hiányos, vagy pedig hibásan arányosított mész- és foszforellátásával áll oki kapcsolatban, és hogy ennél fogva megelőzésének s gyógyításának eszköze egyaránt a szervezetnek megfelelő ásványi anyagellátása, illetve, ha ez nem biztosítható, a mész- és foszforforgalmi zavarnak rendes mederbe terelése *D*-vitaminnal. Amennyire egyszerűnek látszik ez az újabban sok más bűvár által is igazolt tétel, olyannyira bonyolult biochemiai kérdés megoldása elé állítja a kutatót. Mások biochemiai megállapításaival egybevetett erre irányuló vizsgálataink eredményei alapján megvilágítani óhajtjuk ezt a kérdést, annál inkább, mert a helyes mész- és foszforellátás részleteiről még eltérők a nézetek, sőt az emberi rhachitis oktanának terén a *D*-vitamin kizárólagos jelentőségének hangsúlyozása mellett a helyes mész- és foszforellátás szinte egészen figyelmen kívül marad.

Az állati szervezetnek megfelelő ásványi anyag- és így mész- és foszforellátását is nagyon sok tényező befolyásolja. Minthogy az ásványi anyagok szorosan meghatározott és állandó mennyiség-arányban képviseltek a test állományának összetételében és fel-

építésében, azoknak mindenekelőtt a szükségletet kielégítő abszolút mennyiségben kell foglaltatniok a táplálékban. Hogy azonban helyes kölesönös mennyiségarány nélkül ez magában nem elegendő, arról már a LIEBIG-féle minimumtörvény is meggyőző, mely szerint az eleséggel felvett egyes ásványi anyagok kihasználásának mérvét a testet velök együtt meghatározott arányban alkotó többi ásványi anyag legkisebb mennyisége határozza meg. Az ezt meghaladó, habár egyébként a testnek szükséges mennyiségük tehát felhasználatlanul hagyja el a szervezetet.

A rhachitisszel vonatkozásban döntő jelentőségű mész- és foszforkihasználást módosítják továbbá bizonyos belső tényezők, mint p. o. a tejelválasztás, a magzat testének felépítése az anyatestben, a csontváz változó viselkedése az életkorok szerint, mely tényezők a mész- és foszfor-szükségletet egyáltalában és egyoldalúan növelik.

Nagyon fontos és egyben változatos szerep jut bizonyos külső tényezőknek a szervezet savbázisegyensúlyának befolyásolása révén. A biochemiai folyamatok zavartalan lebonyolításának feltétele ugyanis számszerűen is jól meghatározott chemiai reakció a test anyagaiban és nedveiben, az attól való eltérés akár az acidosis, akár az alkalosis irányában megzavarja az anyagforgalmat és ezzel a mész- és a foszfor kihasználását is. Ebben a tekintetben figyelmet érdemel az a megállapítás, hogy nemcsak a tényleg savi és lúgos hatású anyagok idézhetnek elő eltolódást a savbázisegyensúlyban, hanem a csupán potenciálisan savanyú, illetve lúgos, chemiai szempontból azonban közömbösen reagáló ásványi anyagok is, annak folytán, hogy p. o. az ammoniumsókban az ammoniákat, a savmaradék felszabadítása közben, a szervezet húgyanyaggá alakítja, a földalkalisóknak viszont legnagyobbbrészt a bélben visszamaradt kationja kiürül, a gyorsabban felszívódó chlorjuk ellenben a vérbe jut. A szénsavas sók viszont, különösen a hydrokarbonátok, nemkülönben a szerves savak neutrális sói, az utóbbiak szerves savalkotórészüknek szénsavvá elégése és e közben karbonáttá alakulásuk után, növelik a vér bázistartalmát. Ezek szerint a tényleg savi, illetve lúgos hatású és a csupán potenciálisan savanyú, illetve lúgos sók lényegileg hasonló módon befolyásolják a szervezet savbázis-állapotát vagy alkalitartalékját.

A táplálékban a savbázisarányának nagyobb mérvű eltolódása akár savanyú, akár alkális irányban egyaránt erősen csökkenti a mész- és a foszfor kihasználását a bélben, nehezen oldható vagy oldhatatlan földalkalifoszfátok keletkezése révén, az egyoldalúan túlsok meszet, illetve túlsok foszfort tartalmazó eleség tehát egyaránt lehet rhachitis okozója, amint az a többi között a 3143. számú McCOLLUM-féle eleségről is kiderült, mely eleség igénybevétele patkánykísérletekben tulajdonképpen lehetővé tette a *D*-vitamin felfedezését is. Azt is sikerült kimutatni, hogy a nagy foszfortartalmuk miatt potenciálisan savanyú, vagy ellenkezőleg nagy bázisfeleslegük következtében potenciálisan túlságosan alkális eleség nem egyedül az egyidejű mész- vagy foszforhiány miatt kelt rhachitist, hanem az egyidejű bázis-, illetve savhiány révén is. A betegség megelőzése érdekében ennél fogva az első esetben a mészpótláson felül a bázistartalomnak növelése, a másik esetben viszont a foszforbevitel növelésén kívül a feles bázistartalomnak csökkentése is szükséges.

A fehérjék és egyáltalában a nitrogéntartalmú anyagok potenciálisan savanyú hatása onnan ered, hogy a bőséges fehérjeellátás a csontok szerves vázának erős fejlesztése révén az ásványi anyagszükségletet növeli, másfelől a testállományba be nem épített nitrogéntartalmú anyagok savanyú elbontási vegyületeket termelnek. Szintén a potenciálisan savanyú anyagokhoz számítható a nagyon zsírdús táplálék, sok zsírsav felszabadulása folytán a bélben. A másik végletben azonban a túlságosan zsírszegény eleség szintén lerontja a mész- és foszforkihasználást.

Mások is megerősítették WELLMANN megállapítását, hogy a szénhidrátok mint potenciálisan savanyú anyagok működnek a szervezetben. Ugyanez derült ki a táplálék nyersrosttartalmáról is, mely egyfelől a bélemésztés közben hippursav keletkezése, másfelől sok kalciumbázisnak megkötése és az emésztőnedvektől elzárása révén hat hátrányosan.

Az eleségből a mész és a foszfor kihasználását elhatározó sokféle tényezőt a mész és a foszfor abszolút mennyiségének megjelölése mellett a földalkali-alkalicitásnak (*FA*) 100 rész szárazanyagra vonatkoztatott mg-egyenértékével
$$\left(\frac{[CaO + MgO] - P_2O_5}{\text{szárazanyag}} \cdot 100 \right)$$

ajánljuk kifejezésre juttatni. Tájékoztató használatra ezt az értéket a takarmányelemzési táblázatokban található átlagos mennyiség-értékekből, szabatosabban és különösen kísérleti célokra a tényleg felhasznált eleség elemzési eredményeiből lehet kiszámítani. A *FA* értéke helyesen tájékoztató nemcsak a mész és a foszfor kölesönös arányáról, hanem a magnéziumbázisnak a mész és a foszfor kihasználására mennyiségével arányos hatásáról, nemkülönbön a szerves anyagoknak az acidosis irányában várható érvényesüléséről. Mindenesetre azonban a *FA* értéke az állatok kora, bizonyos élettani állapotai, sőt fajbeli tulajdonságaik szerint is bizonyos fokig változó, nevezetesen a még növekedésben levő fiatal, de már növényekkel táplálkozó állatoknak 25 mg-egyenértékű, a növekedés befejezése felé 15 mg-egyenértékű, felnőtt korukban 5 mg egyenértékű *FA* a megfelelő, az ezeket igen jelentékenyen meghaladó, vagy pedig lényegesen azok alatt maradó, illetve negatív értékű *FA* ellenben hosszú időre terjedő etetés után rhachitist idéz elő. Kizárólagosan anyatejen élő bármely fajú szopósállatok, nemkülönbön a hűsevők egészen jól fejlődnek negatív értékű *FA* esetén is, mert szervezetük fokozott ammoniáktermelésre berendezkedett és az ammoniákkal a feles savértékeket akadálytalanul közömbösíteni képes.

Ellentétben a *FA* fogalmával az általában kedvelt *Ca/P*-hányados értéke, noha lényegében a *FA* fogalmával rokon, csak hiányosan tájékoztató a táplálék savbázisviszonyairól, nem ad továbbá felvilágosítást a magnéziumbázisnak lényeges befolyásáról a mész és a foszfor kihasználására, szintűgy figyelmen kívül hagyja az eleség szerves alkotó részeinek el nem hanyagolható hatását.

A *D*-vitaminra vonatkozólag kísérleteink, melyek eredményét délafrikai kutatók nagy arányokban folytatott vizsgálatai megerősítették, arról tanúskodnak, hogy a *D*-vitamin eddig még szabatosan nem ismert módon szabályozza a mész és a foszfor felszívódását és kiválasztását, szintűgy a mész és a foszfor forgalmát a szervezetben és ezen a révén hiányos vagy hibás mész- és foszforellátás esetén megakadályozza a rhachitis kifejlődését, illetve azt meggyógyítja, mert a mész- és foszforanyagforgalmi zavart kiegyenlíti. Ez a hatása azonban véges. annyiban, hogy túlságosan hiányos.

illetve hibás mész- és foszforellátás esetén sem a bajt megelőzni, sem a már kész rhachitist megszüntetni magában nem képes, a másik oldalon viszont a mennyiség és arány tekintetében teljesen kifogástalan ásványi anyagellátás a *D*-vitamin közreműködését a mész és foszfor kihasználásában feleslegessé teszi. Ezek szerint a rhachitis nem kizárólagosan *D*-vitaminhiánybetegség, amint azt általában állítják.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. jún. 20-án tartott üléséből.)

DAS WESEN DES SALZVERHÄLTNISSSES IN DER NAHRUNG UND SEINE BEDEUTUNG BEI DER KALK- UND PHOSPHORVERSORGUNG DES TIERISCHEN ORGANISMUS.

Von J. MAREK. O. WELLMANN und L. URBÁNYI.

Es werden auf Grund eigener Untersuchungen und unter Berücksichtigung der Schrifttumangaben die mannigfaltigen Faktoren auseinandergehalten und gewürdigt, die auf die mineralstoffliche Versorgung des Körpers einen entscheidenden Einfluss haben, daher auch in der Ätiologie der Rhachitis eine entscheidende Rolle spielen. Wir fühlten uns hierzu durch den Umstand veranlasst, dass in Hinsicht der Einzelheiten einer richtigen Kalk- und Phosphorversorgung des Körpers die Ansichten noch ziemlich weit auseinandergehen und von Menschenärzten in der Rhachitis-Ätiologie neben der Betonung eines ausschliesslichen *D*-Vitaminmangels eine richtige Kalk- und Phosphorversorgung des Körpers eigentlich wenig beachtet wird.

Die Mineralstoffe beteiligen sich in einem streng bestimmten und konstanten Mengenverhältnis an der physiologischen Zusammensetzung und am Aufbau der Körpermasse, sie müssen daher unter allen Umständen vor allem in einer dem jeweiligen Bedarf entsprechenden absoluten Menge in der Nahrung enthalten sein. Daneben müssen sie aber auch in einem bestimmten gegenseitigen Mengenverhältnis dem Körper zugeführt werden, weil nach dem LIEBIG-schen Minimumgesetz ihr Ausnützungsmass im Körper durch die jeweilige geringste Menge der mit ihnen im Aufbau der Körpermasse teilnehmenden sonstigen Mineralstoffe bestimmt wird, ihre übrige Menge daher unausgenützt den Körper verlässt, selbst wenn sie für den Körper notwendig ist.

Des weiteren wird die Ausnützbarkeit des *Ca* und *P* in der Nahrung durch bestimmte innere Faktoren beeinflusst und namentlich durch die Milchabsonderung, den Aufbau des fetalen Körpers

im Mutterleib, das nach dem Lebensalter verschiedene Verhalten des Knochenskelets überhaupt und dabei gegenüber den anderen Mineralstoffen auch stark einseitig gesteigert.

Recht verwickelt und mannigfaltig darbietet sich der Einfluss bestimmter äusserer Faktoren auf die Ausnützbarkeit des *Ca* und *P* am Wege der herbeigeführten Veränderungen im Säurebasengleichgewicht des Organismus. Bekanntlich ist die Grundbedingung für den ungestörten Ablauf der biochemischen Vorgänge das Vorhandensein einer auch zahlenmässig genau bestimmten chemischen Reaktion in der Körpermasse und in den Körperflüssigkeiten, jede Abweichung davon sowohl in azidotischer als auch in alkalotischer Richtung stört daher den Stoffwechsel im allgemeinen und so auch die Ausnützbarkeit des *Ca* und *P* im besonderen. In dieser Beziehung soll nicht ausser acht bleiben, dass ausser den tatsächlich sauer bzw. basisch reagierenden Stoffen auch bloss potentiell saure bzw. basische, chemisch aber neutral reagierende Salze entsprechende Verschiebungen im Säurebasengleichgewicht des Körpers zu veranlassen imstande sind. So wirken sich beispielweise Ammoniumsalze dadurch in azidotischer Richtung aus, dass ihr Ammoniakgehalt im Stoffwechsel zu Carbamid umgewandelt und ihre Säurewertigkeit in Freiheit gesetzt wird, in den Erdalkalisalzen hinwiederum das zum grössten Teil im Darm zurückbleibende Kation durch den Darm den Körper verlässt, das säuernde Chlor dagegen ins Blut gelangt. Auf der anderen Seite vermehren Karbonatsalze, in erster Reihe die Hydrokarbonate, desgleichen auch die Neutralsalze organischer Säuren den Basengehalt des Blutes, die letzten namentlich in der Weise, dass nach Verbrennung der organischen Säure zu Kohlendioxyd sie sich zu Karbonat umwandeln.

Jede bedeutende Verschiebung des Säurebasenverhältnisses in der Nahrung, mag sie durch tatsächlich oder durch bloss potentiell saure bzw. basische Stoffe bedingt sein, setzt die Ausnützbarkeit des *Ca* und *P* im Darne herab, und zwar durch Bildung von schwerlöslichen Erdalkaliphosphaten. Eine durch starke *Ca*-Überschüsse übermässig basenreiche Nahrung wirkt daher ebenso rhachitiserregend, wie eine durch einseitigen *P*-Reichtum saure Nahrung. Entsprechend der die *Ca*- und *P*-Ausnützbarkeit ver-

schlechternden Fähigkeit einer übermässig basenreichen und dann regelmässig phosphorarmen, andererseits einer an Säurewertigkeiten reichen und dann regelmässig kalkarmen Nahrung, muss zur Behebung der rhachitogenen Auswirkung einer solchen Nahrung im ersten Falle ausser einer vermehrten *P*-Zufuhr auch der Basenüberschuss vermindert, im zweiten Falle neben Kalkzusätzen der Basengehalt vermehrt werden

Zu potentiell säuren Verbindungen sind zu rechnen auch die Eiweiss- und überhaupt die stickstoffhaltigen Stoffe in der Nahrung, weil ihr nicht in die Körpermasse eingebauter Anteil zum Teil saure Abbaustoffe liefert. Entsprechend dem Freiwerden von reichlichen Fettsäuren im Darne verhalten sich im Übermass aufgenommene Fette ebenfalls als potentiell saure Stoffe, während sie in einem zweckmässigen Mengenverhältniss zu den anderen Nahrungsstoffen im Gegenteil fördernd auf die *Ca*- und *P*-Ausnützung wirken. Auch hinsichtlich der Kohlehydrate und des Rohfasergehaltes in der Nahrung hat sich ein potentiell saures Verhalten im Körper erweisen lassen.

Zur Veranschaulichung der bei der Ausnützung des *Ca*- und *P*-Gehaltes der Nahrung beteiligten mannigfaltigen Faktoren wird von den Verfassern empfohlen neben der Bestimmung der absoluten *Ca*- und *P*-Menge in der Nahrung die Wertbestimmung der Erdalkali-Alkalizität (*EA*) in *mg*-Äquivalenzen für 100 *g* Trockensubstanz $\left(\frac{[CaO + MgO] - P_2O_5}{Trockensubstanz} 100 \right)$. Zur Orientierung genügt eine Berechnung des *EA*-Wertes aus den in Futtermitteltabellen angegebenen Durchschnittszahlen. für genaue und besonders für Versuchszwecke erscheint aber eine sich auf die chemische Analyse des tatsächlich verabfolgten Futters stützende Berechnung angezeigt. Der *EA*-Wert gibt einen zuverlässigen Aufschluss nicht nur über das Mengeverhältnis des *Ca*- und *P*-gehaltes zueinander, sondern gleichzeitig auch über den Einfluss der Magnesium-Base auf die Ausnützung des *Ca*- und *P*, ausserdem über das wahrscheinliche Ausmass des sich in azidotischer Richtung geltend machenden Einflusses der organischen Nahrungsbestandteile. Der Wert der zweckmässigen *EA* wechselt allerdings nach Lebensalter, bestimmten physiologischen Zuständen und auch nach gattungsmässigen

Eigentümlichkeiten der Tiere bis zu einem gewissen Grade. Es erscheint namentlich für noch wachsende junge, aber schon mit Pflanzenfutter ernährte Tiere ein *EA*-Wert von 25 mg-Äquivalenzen, für weiter entwickelte Jungtiere ein solcher von 15 mg, für erwachsene Tiere von 5 mg. Ein die angegebenen sehr wesentlich übersteigender, desgleichen ein bedeutend niedrigerer, oder sogar negativer Wert veranlasst bei gehörig lange fortgesetzter solcher Fütterung die Entwicklung von Rhachitis. Eine Ausnahme hiervon bilden ausschliesslich mit Muttermilch ernährte sowie fleischfressende Tiere beliebiger Gattung, weil sie vermöge ihrer weitgehende ammoniakbildenden Fähigkeit die überschüssigen Säurewertigkeiten bis zu einer gewissen Grenze neutralisieren können.

Durch das viel gebrauchte *Ca/P-Verhältnis*, wengleich es wesensverwandt mit dem Begriff der *EA* ist, wird man nur unvollständig über die Säurebasenverhältnisse im Futter unterrichtet, man erhält ausserdem keine Aufklärung über den wesentlichen Einfluss der Magnesium-Base auf die Ausnützbarkeit des *Ca* und *P* sowie über die nicht zu vernachlässigende Wirkung der organischen Bestandteile in der Nahrung.

Das *D*-Vitamin übt in noch nicht näher bekannter Weise einen regelnden Einfluss auf die Resorption und die Ausscheidung des *Ca* und *P* im Darne, ferner auf den *Ca*- und *P* Stoffwechsel im Organismus, es vermag somit durch den herbeigeführten Ausgleich der *Ca*- und *P*-Stoffwechselstörung die Entwicklung von Rhachitis zu verhindern bzw. eine bereits bestehende Rhachitis zu heilen. Seine Wirksamkeit ist aber insofern beschränkt, als es bei einer quantitativ unzureichenden oder einer im gegenseitigen Mengenverhältnis allzu mangelhaften *Ca*- oder *P*-Versorgung des Körpers eine schützende bezw. heilende Wirkung nicht mehr voll auszuüben vermag, andererseits seine Gegenwart bei vollkommen richtiger Mineralstoffzusammensetzung des Futters entbehrlich ist. Nach alledem darf die Rhachitis nicht als eine ausschliessliche *D*-Vitaminmangelkrankheit aufgefasst werden.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 20. Juni 1938.)

A PYRAMISPÁLYA KISAGYI RÉSZÉNEK FÍNOMABB ANATOMIÁJÁRÓL.

SCHAFFER KÁROLY t. tagtól.

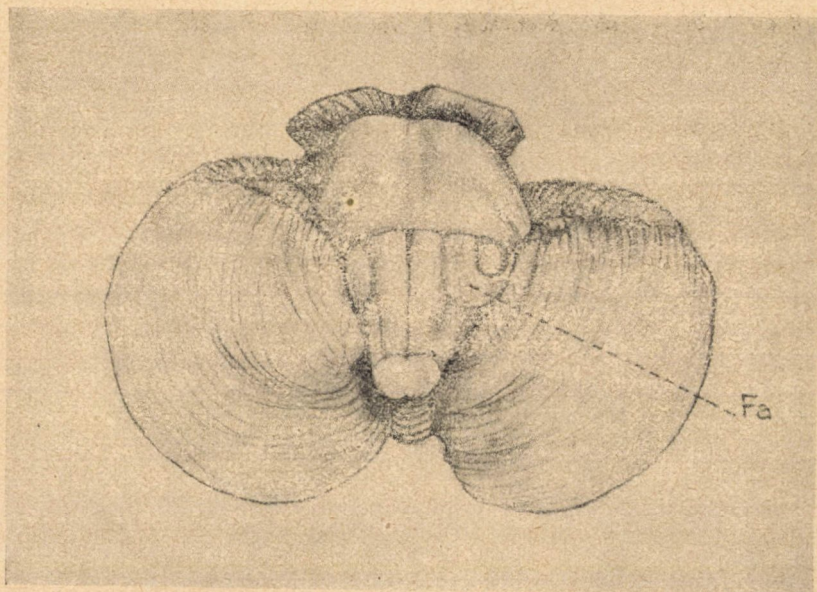
1914-ben volt szerencsém az Akadémiában az agyvelői akaratos vagy pyramispálya egy addig nem ismert részének anatómiájáról és jelentőségéről szólanom. Ekkor utaltam arra, hogy az akaratos ingerület központi pályája a pyramispálya, melyben a mozgó agykéregnek, a mellő központi tekervények egyrésztől a nyúltvelői, másrésztől a gerincevelői mozgó magvakkal való kapcsolódásánál fogva megkülönböztethetünk egy *pyramis bulbaris*, illetve *spinalist*. Eme két, régóta ismeretes pályarészhez a magam akkori vizsgálataim alapján egy addig ismeretlen részt fűzhettem, mely rész a nagyagyú mozgó kéregnek az azonos oldali kisagyú féltekével való kapcsolatánál fogva a *pyramis cerebellaris* nevet érdemli. Ez utóbbinak legjellegzetesebb formája az ú. n. *ívelt nyalábnak* — *fasciculus arcuatus* — testesül meg, mely az agyvelő alapján levő nyúltvelői loborból — pyramis — válik le és az ugyanitt oldalt fekvő alsó olajka (*oliva inferior*) alsó felében azt ív alakjában befedve, felfelé és oldalt futva a kötélképző testhez jut és ennek tömegében elveszve, vele együtt bejut a kisagy állományába. (L. 1. á.) Eme *normálanatómiai tény* alapján meg volt állapítható, hogy a nyúltvelői pyramis az azonosoldali kisaggal függ össze egy jelentős nyaláb segítségével és ez a kapcsolat az ívelt nyalábra *makroszkóposan* egy *pyramisnyaláb* bélyegét nyomta rá. Ezt a normálanatómiai felismerést megerősítette a *pathologanatomia* is, mert azonos oldali és agyi okból, pl. vérzésből eredt másodlagos pyramisdegeneratio egyúttal az *azonosoldali ívelt nyalábnak* teljesen azonos nemű, tehát másodlagos elfajulásával járt együtt.

Ha tehát a pyramis degeneratiója akár a heveny velőszétesés stadiumában, akár a befejezett pályasclerosis stadiumában (Marchi-, illetve Weigert-féle stadium) volt, pontosan azonos fokát a másodlagos elfajulásnak mutatta az ívelt nyaláb is. Ebben a tekintetben igen tanulságos a JUBA által közölt eset, melyben az egyenlő erősségű kétoldali ívelt nyaláb közül az elfajult pyramispálya oldalán levő mutatta a teljesen azonosfokú elfajulást is. Bárha ilyképpen a két pályatestnek alkati azonosságát a kóros viszonyok közötti teljesen azonos magatartás már igazolta, mégis HORÁNYI-HECHST BÉLÁNAK vizsgálata a pyramispálya velőfejlődésével teljesen azonos magatartás tekintetében még az utolsó hiányzó bizonyítékot szolgáltatta. Így tehát az újszülöttben az ívelt nyaláb pontosan ugyanolyan fokban mutatkozott velőszegénynek, mint a pyramispálya, és amint a méhenkívüli életben ez utóbbi mind dúsabb velősödést mutat, tökéletesen egyező módon viselkedik az ívelt nyaláb a velőtartalom dolgában.

Midőn tehát a szóban forgó nyaláb a pyramispályával való teljesen azonos anatómiai magatartása folytán ép és kóros viszonyok között valóságos pyramisnyalábnak bizonyult, felmerült a kérdés, vajjon élettani működése tekintetében is azonos-e a pyramispályával? Ha a nyaláb, miképpen a pyramispálya, akaratos mozgások lebonyolítására való lenne, akkor tisztára mozgató természetűnek kellene lennie; ámde ennek ellentmond a nyalábnak a nyúltvelőben történő leválása után a kisagyvelőbe való belépése és így én már 1914-ben izomzsongesókkentő működésre gondoltam, mivel a kisagynak zsongszabályozó jelentősége élettani tény. Azután ismeretes, hogy a nagyagynak belső tokjában történő vérzések alkalmával nem csupán a kereszttezett testfélnek bénulása, hanem kifejezett zsongtalanítása is következik be. Ebből a magatartásból nyilvánvaló, hogy a pyramispálya capsularis sérülése esetén úgy a motilitás, mint a tonicitás szenved és így felmerül a kérdés, hogy miképpen magyarázható a központi bénulás kíséretében beköszöntő tónusváltozás? Ez a kérdés annyival inkább merül fel, mert a központi mellső vagyis mozgató agytekervény, ú. n. óriási loborsejtjeiből eredő pyramispályarostoknak a kéregalatti mozgató magvakkal való synapsisuk következtében roncsolásuk esetén csakis mozgató zavar, vagyis bénulás állhat elő és így

kérdés, vajjon a kisagyba vezető pyramisrostoknak tulajdonítandó-e az izomzsong kóros megváltozása?

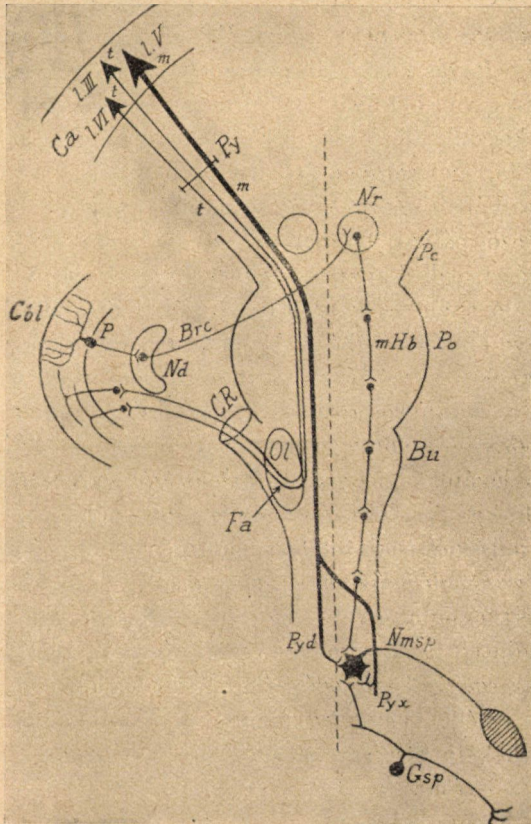
Ebben a kérdésben a kísérleti és klinikai vizsgálódás már határozott útbaigazításokat adott. Nevezetesen már FULTON és munkatársainak dolgozataiból kitűnt, hogy a 4. számú mozgató zónának kiirtása a majomban petyhüdt hemiplegiát pozitív Babinski-



1. ábra. A csüllóagy (rhombencephalon) fenéki felszíne; ennek bal felében a loborból leválik egy széles ívalakú nyaláb *Fa*, mely az olajka alsó felét betakarva oldalt és felfelé kanyarodik a corp. restiforme felé, melynek útján a kisagyba jut.

tünettel eredményezett. Igen fontos SÁNTHA KÁLMÁN beszámolója Penfield montreali klinikájáról és az ebben foglalt adatok közül igen tanulságos a daganat miatt történt area 4-nek emberben történt kiirtása, mely után petyhüdt bénulás köszöntött be, mely azonban néhány nap mulva fokozott tónusba és reflexekbe ment át. Ezzel a lelettel bebizonyosodott az emberre nézve a mozgató és zsongközvetítő rostoknak azonos idegközpontból való eredése és így

felmerül a további kérdés, hogy mely részei az emberi mozgató tekervénynek állanak az akaratos mozgás, illetve az izomzsong szolgálatában? Ebben a tekintetében főleg SPIELMEYER ismert megállapításai adnak útbaigazítást, melyek szerint aggsági esetekben minden lob nélkül a III. és VI. agykérgi rétegre szorítókozó lágyulás, tehát az V. szorosan vett mozgató rétegnek megkímélésével kifejezetten zsongfokozó hatással járt minden bénulás nélkül, minek következtében az V. réteg tisztára mozgató, a III. és VI. réteg tisztára zsongmódosító területnek bizonyult. Ehhezképest a klinikailag és kísérletileg mozgató agyzóna kórszövettani tekintetben is motoros és tonusadó zóna oly értelemben, hogy a III. és VI. réteg loboralakú idegsejtjeiből *zsongadó rostok*, míg az V. réteg óriási loboralakú, ú. n. Betz-féle idegsejtjeiből *mozgató rostok* származnak. *A pyramispályának ezen kétféle rostja a szabad szemmel látható loborpályában együttesen futnak le a nyúltvelőig, ahol az ívelt nyaláb-
nak a loborkötegből leválása és elágazódása a kisagy felé történik és így azt kell mondanunk, hogy a pyramis mint anatómiai alakulat tulajdonképpen kevert pálya.* A pyramisnyaláb tonusrostjai az ívelt nyalábban a corp. restiforme-hoz irányulnak és itt MISKOLCZY állatkísérletes vizsgálatai értelmében a másodlagosa elfajulás a Purkinje-sejtekhez jut el, amelyektől a kóros ingerület a nucleus dentatusba, illetve brachium conjunctivumba jut be, amelyen át a keresztezett nucleus ruberba. A pályának eddigi útja tisztán áll előttünk, de további kérdés, hogy miként alakul a zsongvezető út lefelé a gerincevelőbe? Az *azonos oldali* gerincevelői nucleomotoriumhoz csupán egy út van és ez a mozgató tegmentumpálya («motorische Haubenbahn»), mely a középagytól a gerincevelőbe lefutó több tagú pálya; ezeket a viszonyokat a 2. ábra tünteti fel. Ezen vázlatos kép alapján az általunk felvett *tonusadó* pyramisrostok olyan vezető pályát alkotnak, mely a *mozgató* pyramisrostokkal együtt fut le a nyúltvelőig és itt az olajka magasságában a corp. restiformén át az *azonosoldali* kisagyi féltekébe, illetve a *keresztezett* nucleus ruberba vezet, ahonnan a mozgató tegmentumpálya segítségével az azonos oldali gerincevelői mozgató magvakhoz ér, mely utóbbiakat egyúttal a keresztezett mozgató pyramisrostok is izgalomba helyeznek. (L. 2. á.) A gerincevelői mozgató idegsejtek tonusadóan még a hátsó érző gyökerek részéről is befolyásolva



2. ábra. A motoros és tonusos pyramisrostok lefutási vázlata. *Ca*: mellső kp. tekervény, melyben I. III és I. VI tonusadó (*t*) réteg idegsejtjei, I. V a mozgató (*m*) réteg eredő idegsejtjei együttesen alkotják a lobor-pályát *Py*. Ennek *m* rostjai a keresztezett gerincevelői motoriumhoz futnak, míg *t* rostjai az olajka *Ol* magasságában mint ívelt nyáláb *Fa* a kötélképző test *CR* útján bejutnak a kisagyba, *Cbl*, melyben a Purkinje-sejtnekhez *P* vezetik az ingerületet, innét pedig a nucleus dentatus *Nd*, illetőleg a kötőkar *Brc* közvetítésével a keresztezett veresmaghoz *Nr* és innét a mozgató tegmentum-pályán *mHb* útján az ingerület az azonos oldali gerincevelői motoriumhoz jut. — *Pc*: pes pedunculi — *Po* = pons Varoli — *Bu*: bulbus (nyúltvelő) — *Pyd* = direkt pyramis — *Pyx*: keresztezett pyramis. — *NmSP*: nucleo-motorium spinale — *Gsp*: ganglion spinale, melynek hátsó gyökéből eredő oldalág a gerincevelői mozgató idegsejtet idegzi be.

lesznek. Mindkét tonusos befolyás, az agyi-kisagyi és a hátsógyöki, rendes viszonyok közepette egyensúlyban vannak; hogyha azonban az első befolyás közvetlen pyramislaesio következtében kiesik, akkor a hátsógyöki befolyás jut túlsúlyba és az izomzat tonusának növelését okozza.

Eddigi fejtegetéseinken áttekintve, ezekből az tűnik ki, hogy a pyramispályának mozgató és tonusadó rostjai alapján véve két különböző pályát tesznek ki. *Közös* mindkettőre nézve az arealis eredés a mellső központi tekervényből, valamint a pyramispályában való együttes lefutás le a nyúltvelőig; *különböző* mindkettőre nézve az V. rétegből való eredése a valódi pyramisrostoknak és ezeknek a keresztezett gerincvelői motoriumban való végződése, illetve a tonusos rostoknak a mellső kp. tekervény III. és VI. rétegből való eredése, melyek a nyúltvelőben az ívelt nyaláb formájában leválnak a pyramis-formatióról és ezzel eljutnak az azonosoldali kisagyi féltekébe mint tonusközpontba. Dacára a különleges működés tekintetében fennforgó különbségnek, mégis a mozgató és zsongadó működése a pyramisrostoknak alapján véve működési összhangban van, mert e kettő szorosan egybekötött két összetevője ugyanazon működésnek és így a kétrendbeli pyramispályarostnak *egyidejű velősődése* (HORÁNYI) érthető. FLECHSIG szerint azonos értékű rostok egyidejűleg velősődnek; a kétrendbeli pyramisrostnak functionalis rokonsága a myelogenesis azonos idejében jut kifejezésre.

Miután dacára a functionalis különbségnek, az egyidejű velősődés jelenségének magyarázatát megkaptuk, hátra van, hogy még az ívelt nyalábnak a pyramissal azonos másodlagos elfajulására vonatkozóan nyilatkozzunk, tekintettel a finomabb anatómiai különbségekre. Itt mindenekelőtt az elfajulás azonosságának tényét azzal világítanánk meg, hogy a tonusos pyramisrostok vezetési iránya éppúgy *corticofugalis*, mint a mozgató pyramisrostoké. Hogyha mindkét rendje a rostoknak közös ponton roncsolódik, amint ez közismerten a tokbeli góc esetén valósul meg, úgy a pyramispálya mindkét rendű rostja egyformán és egyidejűleg lehágóan, vagyis corticofugalis irányban másodlagosan elfajul. A pyramispályának a fentiekben ismertetett szerkezeti felismerése alapján be kell vallanunk, hogy a másodlagos pályaelhajulásban

megnyilvánuló azonosság nem jelent lényegbeli azonosságot és mégis ki kell jelentenünk, hogy ZIEHENnek az ívelt nyaláb rostjainak «hospitáló» rostok gyanánt való megjelölését semmiképpen sem fogadhatjuk el, mert ehhez az lenne szükséges, hogy a tonusos pyramisrostok a motoros pyramisrostokkal szemben teljesen idegen rostok lennének, — miképpen az érző rostok a mozgató rostokkal szemben azok — ánde erre a kétrendbeli rostnak legszorosabb *együtműködése* rácafol és így *az ívelt nyalábnak bizonyos fokú pyramisjellegét* nem lehet tagadnunk, illetve el kell ismernünk.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. okt. 24-én tartott üléséből.)

ÜBER DIE FEINERE ANATOMIE DES KLEINHIRNANTEILS DER PYRAMIDENBAHN.

Von KARL SCHAFFER.

Vortragender behandelt den Kleinhirnteil der Pyramidenbahn, welcher in der Form des bogenförmigen Bündels — *Fasciculus arcuatus* — von der bulbären Pyramide sich loslösend, entlang des Strickkörpers in die Kleinhirnhemisphaere gelangt. Dieser von ihm entdeckte Kleinhirnteil der Pyramidenbahn stellt eine tonusvermindernde Bahn dar, von welcher er nachweist, dass diese auch von der motorischen Grosshirnrinde wie die Pyramidenbahn entspringt, doch während letztere aus der V. Rindenschicht (Betzschen Riesenzellen) ausgeht, sind die Tonusfasern der Pyramidenbahn aus der III. und VI. Schicht abzuleiten, welche dann die Pyramidenbahn durch das Gross-, Mittel- und Rautenhirn genau befolgend, auf der Hirnbasis in der Form des *Fasc. arcuatus* sich lösen und durch den Strickkörper zu den Purkinjezellen führen. Von letzteren aus führt der Weg zum Nucleus dentatus und entlang des *Brachium conjunctivum* zum *gekreuzten* roten Kern, von welchem aus der tonisierende Einfluss durch die motorische Haubenbahn zum Nucleomotorium spinale führt.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Okt. 1938.)

A VÉGLÉNYEK LÜKTETŐHÓLYAGJÁNAK ÉLETTUDOMÁNYI JELENTŐSÉGE.

(5 szövegek közötti ábrával.)

GELEI JÓZSEF-től.

1925 óta mintegy húsz dolgozatban foglalkoztam a véglények lüktetőhólyagjával, mind alkati, mind pedig len életteni jelentősége tekintetében. Ujabbán néhány ezüstöző eljárást dolgoztam ki a szerv vizsgálatára; ezek, valósággal a mikrotechnika diadalára, hihetetlen élesen tárják elénk a kiválasztás szervét és így a vizsgálatnak új utakat nyitottak. Ezek révén annyi értékes tapasztalatot gyűjtöttem róla, s e tapasztalatok, valamint mások vizsgálatai annyira emelték ennek a szervnek élettudományi jelentőségét, hogy 12 év letelte után elérkezettnek látom az időt egyrészt észleleteim összefoglalására, másrészt pedig len azoknak az általános értékű jelenségeknek kiemeléseére, melyek élettudományi gondolkodásunkat megtermékenyíteni vannak hivatva.

Fejtegetéseim során foglalkoznom kell e szervnek környezeti jelentőségével, a szervezet többi részeivel szemben tanúsított önállóságával, munkája érdekében kifejtett részekre tagolódásával és a véglény oszlásakor tanúsított viselkedésével.

A) Környezeti vonatkozások.

A lüktetőhólyag létében, keletkezésében és változásaiban az állatot közvetlenül körülvevő vízkörnyezetnek van a legnagyobb jelentősége. Már 1888-ban rámutatott HARTOG arra, hogy a lüktetőhólyagnak rendeltetése az, hogy a környező édesvíztől szüntelen elárasztásnak kitett véglényszervezetet folyton víztelenítse. Kiterjedt

kísérletek alapján ezt a felfogást 1905-ben DÉGEN igazolta, s azóta ismerjük ezt a szervet, mint a véglények osmoregulatorát. A környezetből természetesen nemcsak káros víz, hanem egyéb hasznavehetetlen anyagok is jöhetnek a vízzel együtt a szervezetbe, melyeket a véglénynek szintén ki kell küszöbölnie, s mivel a víznek, meg a káros anyagoknak elkülönítése és kiürítése is azonos a kiválasztással, ennek következtében a lüktetőhólyagot már környezettani vonatkozásában is nemcsak osmoregulátornak, hanem kiválasztó szervnek is kell tekinteni, megjegyezvén már itt, hogy a szervezet belső részeivel szemben is kiválasztó szervként kell működnie.

A víz, különösen pedig az édesvíz, amiatt árasztja el a véglényt, mert a testfelületet féligáteresztő : semipermeabilis hártya borítja, és ez választófalat képezvén a környező hígoldatú víz és a belső töményoldatú testnedv között, az osmosis törvényeinek megfelelőleg a koncentrációs lejtőn vizet bocsájt be a szervezetbe, mely szaporítja a belső nyomást és bentmaradása esetén a szervezetet felpuffadással s már ebben is működésének zavarával, végül pedig fölrepedéssel, s így pusztulással fenyegetné. A lüktetőhólyagnak, mint osmoregulátornak tehát az a feladata, hogy a fölös víz kiürítésével a szervezet működéséhez szükséges nyomást fenntartsa.

Ezen a téren a lüktetőhólyagnak a tekintetben van általános biológiai jelentősége, hogy a töményebb sóoldatban élő élősködő lényekben, így különösen a Sporozoonokban hiányzik, vagy csak kivételesen található meg a lüktetőhólyag. Különösen fontosak e tekintetben a tengervízben és édesvízben egyaránt élő Tintinoidák, melyeknek tengeri alakjaiban nincs, édesvízi alakjaiban pedig van lüktetőhólyag.

A környező víz sótöménységének hatását rengeteg kísérletező vizsgálta. Ezek közül DÉGENT, STEPELLT, HERBST, és ZUELZERT emelem ki, kik igazolták, hogy a sótöménység emelésével csökken a lüktetőhólyag ürülésgyakorisága. ZUELZERnek az *Amoeba verrucosával* sikerült elérnie azt, hogy az állat hólyagja a tenger vizének megfelelő sótöménységben teljesen beszűntette lüktetését.

A sók a töménységtől függetlenül egyéb kémiai sajátágaiknak megfelelően is különös befolyást gyakorolnak a lüktetésre. Így

STEMPELLnek 1914-ben és 1924-ben sikerült kimutatnia, hogy az alkáli és a földalkáli ionok HOFFMEISTER-féle sorozatában az ionok csapadékképző sorozatával együttesen nő a lüktetést hátráltató hatás. Intézetemben magam és tanítványaim egész serege a két- és többvegyértékű ionokról állapította meg, hogy azok a koncentrációtól függetlenül, illetőleg igen alacsony töménységen lüktetést gátló ú. n. mérgező hatást fejtenek ki. A véglénynek tehát lüktető hólyagja révén is módjában áll megállapítani azt, hogy környezetében, ha még csekély mennyiségben is, vannak-e mérgező hatású sóalkatrészek. Az alkohol lüktetést hátráltató : mérgező hatását a Parameciumon magam vizsgáltam, FORTNER és WENSE a morfiumnak, illetőleg adrenalinak állapították meg lüktetéstcsökkentő hatását. Viszont ingeranyagoknak, minő a thyrozin és thyroxin, ütemgyorsító hatását TORREY, RIDDLE és BRODIE derítették ki. Az oxigénnek ütemgyorsító szerepével én foglalkoztam.

Ismeretes az is, hogy a tenyészvíz savi-lugossági foka : hydrogeniontöménysége szintén befolyásolja a lüktetőhólyag munkáját.

ROSSBACHnak 1872-ből származó vizsgálatai óta számosan foglalkoztak a hő hatás élettudományi kérdésével. Valamennyien azt állapították meg, hogy a hőmérséklet emelkedésével bizonyos kedvező határokon belül szaporodik a lüktetések száma. KANITZnak sikerült a hőhatást, mint külső tényezőt közvetve belső hatássá átminősítenie, amennyiben megállapította azt, hogy a hővel volta-képpen a protoplasmában lejátszódó reakciók sebessége nő s így a hő emelkedésével a belső sókoncentráció fokozódik és ezért válik a melegített állat testfelületén a diffúzió gyorsabbá.

A fény erejével és hullámhosszával szintén befolyásolja a lüktetést.

Nagy tévedés volna azonban azt hinni, hogy a lüktetőhólyagot ezen egyszerű adatok és kísérletek értelmében egyszerűen a környezet függvényének minősíthetjük. Így helytelen volna azt hinnünk, hogy azonos sóösszetételű, vegyihatású és oxigénű környezetben élő véglények, testük belső azonos sőtöménysége esetén, szóval teljesen azonos feltételek mellett azonos gyakorisággal lüktetnének, ill., hogy térfogategységre esőleg azonos veszedelemmel küzdenének meg. A lüktetőhólyag környezeti vonatkozásaiba

lényegesen belevág a lüktetés feltételének megteremtője: a testfelületi pellicula és sok más belső tényező is.

B) A lüktetőhólyag és a test ill. részeinek viszonya.

Ebben a fejezetben a lüktetőhólyagnak a szervezet egészéhez való méret- és fekvésbeli viszonyát és külön az egyes részekhez, így a pelliculához, ectoplasmához, entoplasmához és a maghoz tanusított viszonyát vizsgáljuk meg.

a) Testméret és a lüktetőhólyag, ill. a kiválasztóplasma mérete.

Ismeretes a magasabbrendű állatokban a test méretének és a vese méretének egyenesarányú összefüggése. Sejtszervecskék közül eleddig a mag és a plasma viszonyát ismerjük a HERTWIG-féle szabály alapján. Ezzel teljesen párhuzamos a kiválasztóplasma és az egész test méretének (tömegének) viszonya. Nevezetesen általában mondhatjuk, hogy nagytestű állatoknak nagy a lüktetőhólyagjuk (kiválasztóplasmájuk), kistestűeké kicsiny. Egy-egy *Spirostomum*, *Stentor*, *Spathidium giganteum*, *Prorodon teres* és *Bryophyllum carinatum* a nagy testméretével egyuttal a legnagyobb lüktetőhólyaggal van felszerelve, viszont a kis testméretű Cyclidiumokban, Uronemákban, Colepsekben természetesen kicsiny a lüktetőhólyag mérete. Még az egyéni testméreteingadozásokhoz is igazodik a kiválasztóplasma. Így *Paramecium caudatum* példányain észleltem, hogy a nagytestű állatokban nemcsak a hólyag nő naggyá, hanem a sugárcsatornák száma, sőt hossza is megszaporodik, s viszont a koplaltatott, vagy koplaló (párosodó), vagy egyébként degenerálódó állatokban megfogy a sugárcsatornák száma, hossza és a lüktetőhólyag mérete, sőt az állatok az egész mellső készüléküket elapaszthatják s csak a hátsóval dolgoznak. A *Didinium nasutum* esetében pedig azt tapasztaltam (1938), hogy a párosodás idejére megapadt testű állatok jóval kisebb kiválasztó plasmaállománnyal dolgoznak, mint a jóltáplálkozó kövér állatok.

Ha azonban a test tömegességével vetjük össze a kiválasztó plasma tömegét, akkor meg éppen fordított viszonyt kapunk.

vagyis azt találjuk, hogy kis állatokban a térfogategységre nagyobb kiválasztó állomány jut, más szóval kis állatoknak viszonylag nagyobb lüktetőhólyagjuk van, mint a nagyoknak. Ezt egy másik kérdésnek, nevezetesen

b) a testfölvület és a kiválasztóplasma méretének

egybevetésével érthetjük meg.

A vízzel való elárasztódás ugyanis kimondottan fölületi kérdés. Szerepe van abban a pellicula minőségének is, de méretének is. Méret szempontjából tudjuk azt, hogy mentül kisebb a tömeg, aránylag annál nagyobb a hozzátartozó felület. A tömegegységre vonatkoztatott fölületméret tehát az állat térfogatának csökkenésével nő. A kis állatokra nézve ilyenképpen veszélyessé vált állapotot azonban az illető lények nem egyszerűen a kiválasztóállomány gyarapításával, hanem a munka gyorsításával, ill. láthatóan a lüktetések számának szaporításával egyensúlyozzák. A helyzet tehát az, hogy a nagy állatok nagy lüktetőhólyagjaikkal lassan, kis állatok kis lüktetőhólyagjaikkal igen szaporán dolgoznak. A lüktetés-gyakoriságok különbözetéből sokkal nagyobb eltérések adódnak, mint amekkora a kiválasztóplasma tömegkülönbségéből származik. Itt pl. a kicsiny *Cyclidium* 2·5 mp-es lüktetésgyakoriságával szembeállíthatjuk a *Spirostomum ambiguum* 180—1200 mp-es, vagy az *Amoeba proteus* 24—360 mp-es lüktetésütemét.

A fölület mérete azonban nemcsak a tömeggel, hanem azonos tömegek esetén az alakkal is összefügg. Mivel pedig azonos tömeg esetén a gömbnek van a legkisebb felülete, érthető, hogy a véglények, különösen pedig az édesvizek, miért törekszenek a közel gömbölyded, rendszerint tojásdad alakra. Ez különösen akkor nyilvánvaló, amikor a környező víz vészes hatásaival szemben nincs más menekülésük, mint hogy az állatok tokba zárják el magukat. Ilyenkor, akárminő alakú is volt addig valamelyik véglény, lehetőleg tökéletes gömbbé formálódik. Ebből érthetjük meg azt is, hogy mentől higítottabb vízben él valamely véglény, annál inkább a gömbölydedhez közeli formát ölt és hogy viszont hosszúra megnyúlt szalagszerű, tehát tömegükhöz mérten aránylag nagy felü-

lettel bíró véglények miért találhatók tömény sós vizekben, ill. parazitikus állapotban. E tekintetben különösen rá kell mutatnom a Szegedkörnyéki szikes vizekben talált Trachelophyllumokra, minő pl. *Trachelophyllum longissimum*, (1. ábra) melyek a pántlikagilisztáéhoz hasonló féregszerű formát képesek öltetni a tenger vizének töménységét is felülmúló szikes vízben.



1. ábra. *Trachelophyllum longissimum* n. sp. szegedkörnyéki szikes vízből szublimátos rögzítés után. Hátsó testvégen lüktető hólyag, mellette a hátracsúszó salakodú.

140 ×.

Ha pedig édesvízben valamely belső okból a véglénynek lapos teste alakul ki, amint ezt pl. a vékony teknőformájú *Lembadion*okon látjuk, akkor azt az állat lüktetésgyorsulással váltja meg. A *Cyclidium*okkal gyakorta együtt található *Lembadion flagellatum* pl. 3·5—4 mp-es gyakorisággal lüktet, noha testének tömege a *Cyclidium*ét közel 10-szeresen felülmúlja. — Még az egyéni alakváltozás is befolyásolja a lüktetést. Így az *Amoeba proteus*ról azt állapítottam meg, hogy amikor egyazon állat limaxformával csúszik, jóval lassabban lüktet, mint amikor számos állabat formálván, testfelületét fölötté megnagyobbítja.

c) A lüktetőhólyag helye.

A lüktetőhólyagról köztudomású dolog, hogy az a testvégen helyezkedik el, különösen ilyen fekvésű az alsóbbrendű Ciliátákban, a Prostomásokban. De a magasabbrendűekben is, ha nem is pont a testvégen, de mégis inkább a hátulsó testrészen található. Ebben az elhelyezkedésben egy általános biológiai jelenségre annyiban ismerhetünk rá, hogy a magasabbrendű állati lényekben is a vese

általán a hátsó testfélben fekszik, vagy ha maga nem is ott, akkor a kiürítő rés mégis ott helyezkedik el. Talán egy általános fizikai mechanikai jelenségnek az érvényesülését láthatjuk az egész állatvilágban, midőn azt állapítjuk meg, hogy az előre mozgó állathoz lényegesen hozzá nem kapcsolt és kiürítésre szánt folyékony gyüledék tehetetlenségénél fogva lassankint hátrafelé terelődik, s fizikai törvények szerint hagyja el a testet hátul. Ebben — nem hallgathatjuk el — nagy célszerűség is mutatkozik, mert nyilvánvalóan hasznos dolog, hogy az állat mozgása közben ne kerüljön saját szennyébe, piszkába, hanem mentől biztosabban elkülönödjék attól.

Ezzel a magától való elvvel szemben már mostan feltűnő jelenség az, hogy akkor miért nincs az összes csillós véglényekben teljesen hátul a lüktetőhólyag, miért találjuk azt a legtöbb állatban az oldalára feleszúzva, s miért van az, hogy egyes körülírt csoportban, így a Peritrichusokban egyenesen a szájgaratba torkollik a lüktetőhólyag, vagy hogy a Spirotricha csoportban, mint pl. a *Stentor*ban a szájkorong közelébe szájadzik.

Valamennyi kivételes állapotot mozgás-mechanikai jelenséggel tudunk magyarázni. Ha a szabadon mozgó Ciliáták magasabbrendű csoportjaiban azt tapasztaljuk, hogy a lüktetőhólyag az állat hátsó felében ugyan, de oldalán, vagy hátán torkollik a testfelületre, úgy ehhez figyelembe kell vennünk azt, hogy a csavarmenetes pályán mozgó lénynek, fiziológiai hátsó végpontja a különleges mozgásból kifolyólag eltolódott (GELEI, 1937e). Ha nagyon gyakran azt tapasztaljuk, hogy a lüktetőhólyag hátul jobboldalt, vagy a jobb hátoldalra esik, akkor ugyanezekről az állatokról mozgásuk közben azt kell megállapítanunk, hogy azok előre balra sodródznak, s így a dinamikai hátulsó testtájék jobbra hátul keresendő.

A *Stentorok* és *Peritrichusok* hólyagjának mellső fekvését pedig a helyhez kötött életmóddal lehet megmagyarázni. Ha ugyanis ezek a helyhez kötött élőlények a hátsó testvégükön ürítenék gyüledékeiket, akkor összerándulásuk alkalmával az ott kialakult búvótölcséreik révén állandóan saját szennyükbe kellene visszahúzódniok. A *Stentorok*ban a lüktetőhólyag a mellső végen is normális élettani helyzetet foglal el, mert az itt kifejlődött erős csillómozgás segítségével ezen a helyen távolítható el a legköny-

nyebben és a legbiztosabban az állat testfelületétől a gyüledék. — S ha a Peritricha csoportban éppenséggel azt tapasztaljuk, hogy a szájgaratba torkollik a lüktetőhólyag, akkor itt is azt kell megállapítanunk, hogy ennél jobb helyet itt is keresve sem találhatott volna a szervezet, mert az eleven csillómozgás révén innen lehet gyüledéket a szervezetből a legbiztosabban eltávolítani.

A Stentorok és a Peritrichusok esetében megnyilvánuló biológiai viszony nem egyedüli eset az állatorszámban. A férgek Bryozoa csoportjáról tudjuk, hogy azokban is a helytűlő életmód a végbél-nyílást szintén hasonló eltolódásra készítette, éspedig az Ektoprocta csoportban a csillós szájkorong közelébe, de azonkívül az Entoprocta csoportban egyenesen a csillós szájkorong középebe. Itt nyilvánvalóan az azonos életmódból származó konvergencia esetéről van szó, mely azáltal válik tökéletessé, hogy a Stentorok esetében az alrész (cytophyge) is a szájkorongon kívül a lüktetőhólyag mellett, a Spirotrichák esetében pedig egyenesen bent a garattölcsérbe torkollik. Tehát ezt a két véglénycsoportot is nyugton mint ekto- ill. entoprocta csoportot különböztetjük meg. Megjegyzem, hogy én egyébként a Peritricha csoportot, mint szájkloákásokat szoktam jellemezni: kloákának nevezvén itt a száját arra való tekintettel, mert az alrész is, meg a lüktetőhólyag is abba torkollik. — Ez az elv van meg a Rotatoriákban is.

d) *A lüktetőhólyag és az entoplazma.*

A lüktetőhólyag fekvésében biológiai jelentősége van annak, hogy ez a szerv az entoplasmában fekszik. Sőt nemcsak azt kell mondanunk, hogy ott fekszik, hanem azt kell kiemelnünk, hogy fajfejlődéstanilag is az entoplasmában keletkezett és ott maradt mindig. Ezt azért kell különösen hangsúlyoznunk, mert a fejtegetéseink kezdetén arra kellett rámutatnunk, hogy a lüktetőhólyag a külvilági hatásnak, nevezetesen a vízáradatnak veszedelme miatt jött létre; már pedig a szervek keletkezésében ahhoz vagyunk szokva, hogy a külvilág elsősorban a külfelületi ú. n. ektosomatikus szervekre hat, s csak azok révén másodlagosan az entosomatikusokra. Annak tehát nyilván valami különleges és biológiailag igen jelentős oka van, hogy itt a külvilági hatás miatt közvetlenül az entoplasmát érte.

A kérdés tisztázása végett lássuk azokat a különbségeket, amelyek az ectoplasmának és entoplasmának fizikai állapotában találhatók. Az ectoplasma tudvalevőleg kocsonyás : gel-állapotú, az entoplasma pedig len olvadék : sol-állapotú. A kocsonyákat vízzel nem lehet veszélyesen elárasztani. Tudjuk a közönséges kocsonyáról, hogy csak bizonyos mértékig duzzad s a feltételek változása nélkül ezen a mértéken túl vizet nem vesz fel. Viszont ezzel szemben tudjuk, hogy a sol-állapotú anyag vízzel korlátlanul duzzad. Nyilvánvaló tehát, hogy a véglényt entoplasmája révén fenyegeti vízveszedelem. A vizet a kiválasztószervnek tehát nem általán a véglényből, hanem a veszélyeztetett területről kell eltávolítania, s így a világ legtermészetesebb dolgaként kell venni azt, hogy a véglény osmoregulátora az entoplasmában született meg és a fajfejlődés során is ott marad el : a lüktetőhólyag ezért kifejezetten entoplasmatikus organellum. Így amit mi az Amoebák esetében látunk, nevezetesen, hogy a hólyag az áramló entoplasmában a protoplasma áramaival együtt szabadon kering s csak időről-időre és csakis a kiürítés végett, tehát ennek elkerülhetetlen szükségétől hajtva tapad föl az entoplasmára, mihielyt azonban a kiürítés bekövetkezett, onnan nemsokára leszakad, ez a lüktetőhólyagnak ősi állapota. A Ciliáta-lénynek az Amoeba múltó ectoplasmájával szemben maradandó ectoplasmát s abban a kiürítés érdekében maradandó porus excretoriust kellett létrehoznia. Erre a szükségből rögzített állandó kiürítő részre a Ciliátákban véglegesen fölragadt a kiválasztó-plasma. Entoplasmatikus helyzetét azonban nem szüntette meg, ma is ott fekszik a nélküle is tovább áramló entoplasmában. S itt felvetődik a nagy kérdés előttünk, miért nem állt meg az entoplasma a falra rögzült lüktetőhólyaggal együtt, miért áramlik az entoplasma tovább, és nincs-e magának az áramlásnak közvetlen kapcsolata azzal, hogy éppen az entoplasmából kell a veszedelmes vizet eltávolítani. Nem egyenesen amiatt áramlik-e tovább az entoplasma, mert megállt a lüktetőhólyag? Jól tudom, hogy a biológiának ezt az egyik legnagyobb jelentőségű kérdését nem lehet egyetlen szempontból megmagyarázni, mert világosan látom, hogy az entoplasma keringése elsősorban az anyagforgalmat, az emésztést és a szétosztást szolgálja. Mégis kísérletek nélkül is kétségtelennek látom,

hogy az áramlás a vízforgalommal is kapcsolatban van. És pedig elvileg azon az alapon gondolom ezt, mert az áramban egy pozitív és egy negatív sarok ismerhető fel. A pozitív sarkot a garattájék képviseli, ahol az emésztő oduk révén a leg-erősebb az elvizesedés, a negatív sarkot pedig a lüktetőhólyag, mint víztelenítő pont. Természetesnek tartom, hogy az áram e között a két ellentétes sarok között tartatik fenn. Felfogásom mellett talán bizonyíték számba mehetne az a, sajnos, közelebről eddig meg nem determinált nagyobbtestű csillós véglény, melyben több lüktetőhólyagot tapasztaltam, s melynek entoplasmája ugyanannyi kis áramot írt le, mint ahány lüktetőhólyagja működött.

Az entoplasmaárammal tudjuk a lüktetőhólyagok feldarabolását is megmagyarázni. Feltűnő ugyanis, hogy nagytestű állatokban az egydarab nagy lüktetőhólyag helyében gyakran találunk két vagy több, esetleg éppen sok lüktetőhólyagot. S ha az okát keressük, hogy miért tud az egyik állat egy nagy szervvel megmaradni, és miért kell a másoknak helyébe sok apró szervecskét kitermelnie, úgy azt látjuk, hogy az egyhólyagos állatokban rendszerint gyors, a sokhólyagosokban pedig lassú a protoplasma árama. Gyors áram esetén tehát már egy hólyag is kiveszi az előtte elhaladó entoplasmából a vízfölösleget, holott lassú áram esetén a részek addig, amíg az esetleg egyetlen hólyag mellé kerülnének, már túlvizes állapotba juthatnának. Ezen segít az állat azzal, hogy bevezeti a sokszakaszú, de kisadagú víztelenítést.

Mivel az anyagforgalom túlnyomórésze (emésztés, mirigy-munka) az entoplasmában játszik le, nyilvánvaló, hogy az osmosis szempontjából activ kismolekulájú anyagok termelése is főként itt játszódik le, az ingadozás is itt a legnagyobb és így a kiválasztásra az entoplasma gyakorol legnagyobb befolyást. Ezeket az állapot-változásokat mint a kata- és az anatonosis eseteit foglalhatjuk össze, szélsőségében rámutatván arra, hogy a becystázódó állatban a táplálkozásnak teljes és vele az entoplasma áramainak csaknem teljes megállásával egy hosszú katatonosis és a végén teljes atonosis következik be, ami egyuttal a lüktetés teljes megállását eredményezi. A cystából való kibúváskor lassanként megindul a vízfelvétel, vele az entoplasma árama és mikor a véglény felvette az első

táplálékát, teljes üzembe lép a lüktetőhólyag is, mert testében a sók szaporodása anatonosist eredményezett. — A mondottak alapján az entoplasmát a lüktetőhólyag főmunkaadójának tekinthetjük.

Lássuk, mi szerepe van ezzel szemben

e) az ektoplasmának és a pelliculának.

Vékony ektoplasmájú és pelliculájú (relative nagy entoplasma tömegű) állatok hólyagja általán gyorsan lüktet, a vastag ektoplasmával, ill. pelliculával (vagy csak egyikkel a kettő közül) ellátott állatok hólyagja azonban lassabban dolgozik. Vastag ektoplasmájúak pl. a Bryoyophyllumok és vékony ektoplasmájúak a Vorticella-félék; az előbbiek alacsony, az utóbbiak magas lüktetésgyakorisággal.

Az ektoplasma túltengő kifejlődéséből és az entoplasmának azzal kapcsolatos egyenetlen eloszlásából is rendkívül érdekes következtetéseket vonhatunk le a lüktetőhólyag rendeltetéséről. Ebben a vonatkozásában rendkívül fontos egyes *Lionotus*-fajoknak egyetlen lüktetőhólyagja, mely a nagytestű állatban teljesen hátul fekszik, igen kevés áramló entoplasmával van körülvéve s aránylag kisméretű. Az ember mindaddig csodálkozva gondolkodik afölött, hogyan tudja a lüktetőhólyag innen a hátulsó testrésztől az egész hatalmas méretű állatot a vízveszedelmétől megmenteni, vagyis a mellső testfelet vízteleníteni, amíg meg nem gondolja azt, hogy ezen állat testének túlnyomó részében, egész keresztmetszetében el van kocsonyásodva az entoplasma, tehát folyékony állapotú anyag csak a hátulsó testvégen a lüktetőhólyag közelében található.

Ebből megint egy biológiai jelentőségű következtetést vonhatunk le, nevezetesen azt, hogy az állat a környező víz hatásait testállományának elkocsonyásításával is szabályozhatja. Mentől nagyobb testrészt tud kocsonyás állapotban tartani, annál kisebb számára a vízveszedelem és viszonylag annál kisebb lüktetőhólyaggal megelégszik. — Ezen az alapon végső következményként talán arra a kijelentésre is merészkedhetnénk, hogy ha az édesvízi véglény képes volna egész testét elkocsonyásítani, akkor egyuttal lüktetőhólyagja is fölöslegessé válna. És íme ezzel nem is mondunk

olyan túlmerészet, mert ismerünk éppen a Lionotusok közeli rokonságában egy olyan véglény-fajt, nevezetesen a Loxodeseket, amelyekben, noha teljesen édes vizekben élnek, lüktetőhólyagnak semmi nyoma nem található. Itt már most égetően fontos és perdöntő az a kérdés, mi lett ezeknek az állatoknak entoplasmájukkal? A felelet az: órák hosszáig nézhetjük az állatot, az entoplasmában semmi áramlást észre nem veszünk, tehát nincs folyékony állapotú entoplasma bennük.

Ezek az okok, melyek miatt én az ektoplasma szempontjából is és így minden vonatkozásában megalapozottnak látom azt, hogy a lüktetőhólyag miért a folyékony állapotú áramló entoplasmának víztelenítő kiválasztó szerve.

f) *A lüktetőhólyag és a pellicula.*

A kiválasztószervek második segítőtársa a pellicula. Ez a víz- és sóforgalmat tömörségével: porosításával szabályozza. Különösen a tömött pelliculájú Euplotesek nevezetesen arról, hogy lüktetésük lassú, hogy fajról fajra 30 mp. körül mozog az üritésgyakoriság, pedig testük lapos és így megnőtt felületük miatt éppen gyorsan kellene lüktetniök. Az Euplotesekkel szemben a velük teljesen egyazon közegben élő és közel egyenlő testméretű Stylonychiák, (10 mp) és Oxytrichák (14—15 mp) már jóval gyorsabban lüktetnek, mert testük nem páncélozott, hanem pelliculájuk annyira puha, hogy ide-oda hajladozva mászkálnak. Különösen vékony pelliculával vannak ellátva a Halteriák, melyek teste gömbölyded lévén, felületük aránylag egyuttal a legkisebb kiterjedést is ölti föl s ez utóbbi ellenére is 7 mp-es átlaggal lüktetnek.

A pellicula és a kocsonyás ektoplasma vastagsága édesvízi lényekben különösen akkor válik jelentőssé, ha az állatoknak valamely szervezeti okból, mondjuk aljzatlakó életmódból kifolyólag ellapult testalakot kell öltetniök. Az összes Lionotus, Hemiophrys, Loxophyllum, Bryphyllum nemzetség lapos, többnyire levélformájú testével a kocsonyás testű és egyuttal lassan lüktető lények típusa. Az Euploteseknek viszont vékony az ektoplasmájuk, de bordázatos testük kiképzésére vastag pelliculával vannak ellátva. Ezek is aránylag fölülte nagy testfelületük ellenére lassan lüktető, noha egészen kiédesült vizeket is jól elviselnek.

E fejezetben végül figyelemre kell még méltatnunk azt, hogy a pellicula ugyanazon lényen is testtájak szerint változó sűrűséggel, s így változó vízáteresztőképességgel lehet ellátva. Így példának okáért nyilvánvaló dolog, hogy a puha pelliculával ellátott és méretváltozásoknak is erősen kitett garatvégi emésztő odu s talán az egész cytooesophagealis szakasz nagyobb mértékben vízáteresztő, mint a többi pellicula. S talán ezzel tudjuk magyarázni, hogy a Paramecium esetében a garatcsőhöz közel eső hátsó lüktetőhólyag néha feltűnően gyorsabban működik, mint a tőle távoleső magmenti másik lüktetőhólyag. — A pellicula oszlások alkalmával határozottan állapotváltozásnak van kitéve, felpuhul a test felülete, különösképpen pedig az oszlási övben, s így nyilvánvaló, hogy az oszlás alkalmával több vizet bocsát be az állatba, mint máskor. Ezzel tudjuk magyarázni, hogy az oszlásban lévő immár kettőssé vált lüktetőhólyag, noha a testméret és testfelület nem gyarapodott feltűnően, mégsem lüktet lassabban, vagy éppen a megkétszereződése mellett is gyorsabban lüktet, mint azelőtt az egyes hólyag.

g) *A lüktetőhólyag és a lüktetés változékonysága.*

Fenn mondtuk már, hogy a lüktetőhólyag mérete a testméretéhez igazodik, azzal egyenes arányban van. Ép úgy nagyjában azt is mondhatjuk, hogy több vagy sok lüktetőhólyagot nagyméretű lényben találunk, s a kicsinyek rendszerint csak egy hólyaggal vannak ellátva. Ezek a szabályok azonban csak igen nagy általánosságban helytállóak, egyáltalán nem vonható le belőlük az vagy olyan következtetés, hogy egyforma méretű lényeknek egyforma nagy, illetőleg egyforma számú lüktetőhólyagjuk volna. Sokszor találunk egészen nagy lényekben egyetlen nagy lüktetőhólyagot, s vele szemben kis, ill. közepes lényben több, vagy éppen számos lüktetőelemet. Azonban mégis igaz az, hogy példának okáért a szabad szemmel künn a szabad természetben is megtalálható nagyméretű *Bursaria truncatella* kb. 220 lüktető hólyagjával a legnagyobb számot viseli, s viszont a Pleuronematidákban, mivel kis testűek, általában egy lüktetőhólyag van.

Ami azonos méretű lényeknek nagyjában azonos méretű lüktetőhólyagja mellett a lüktetés gyorsaságát illeti, úgy nagy általános-

ságban szintén állítható az, hogy alsóbbrendű lények lassabban, magasabbrendű lények pedig gyorsabban lüktetnek. Így példának okáért a Rhizopodák, Suctoriák hólyagjainak alacsonyabb a lüktetésszáma, mint a magasabbrendűeké. A belélősdiek, ill. állati nedvekben tartózkodók lassabban ürítenek, mint a szabadon élők. Különösen lassú az Entodiniomorphák hólyagjainak működése. Azt is mondhatjuk, hogy a ragadozóké lassabban dolgozik, mint az örvénylőké, s továbbá azt is, hogy planktikus lények gyorsabban lüktetnek, mint az aljzatjárók. De ezek is megint csak nagy általánosságban és a kivételek nagy számától alaposan meggyöngített szabályok. Jelentőségüket gyengíti az, hogy a lüktetés a fajon belül egyedenként is változik, sőt ugyanazon egyén életén belül is biológiai változásoknak van alárendelve, s még inkább gyengíti a szabály erejét az a körülmény, hogy a több lüktetőhólyaggal felszerelt állatban az egymás mellett lüktető szervek különböző időközökben üríthetnek.

Parameciumon végzett vizsgálatok alkalmával megállapítottam, hogy még a tisztatenyészetek egyedei is változtatják a lüktetés gyakoriságát a tenyészet életkora szerint. De egyazon tenyészetben is eltérő a lüktetés a táplálkozás foka, a szervezet egyéb biológiai állapota szerint. Erősen táplálkozó élőlények emésztődukttól teleállapotban gyorsabban lüktetnek, noha nagyobbak, mint ugyanazon tenyészet kevésbé táplálkozó, talán a párosodásra készülő s így kisebb egyénei. Ebből nyilván látszik, hogy az anyagforgalom elevensége közvetlen közelről befolyásolja a lüktetőhólyag munkáját. Ezek miatt például egy Paramecium-tenyészet 10 példányának 22 C fokon az első hólyagja 13, és 5, a hátsó pedig 12·5, és 5 mp-es szélsőség között lüktetett olyképpen, hogy az átlag a 10 példányon az első hólyagra 9·54 mperces, a hátsóra pedig 8·48 mperces lüktetési időt adott. — Néha még a szerint is látunk lüktetéskülönbözetet, hogy a tekintetbe vett példány vajjon az oszló állat mellső, vagy hátsó feléből való-e. A mellső egyed ugyanis táplálkozásra alkalmas száját örököl, s így anyagforgalmát korábban indítja meg, mint a hátsó, melynek előbb a száját kell megalkotnia, s csak azután foghat hozzá az élelemszerzéshez. Némely állatfaj esetében különösen különböznek ugyanazon tenyészet egyedei az ivari állapot szerint. Így a Colpidium eseté-

ben azt tapasztaltam, hogy amíg a tenyészet nem párosodó alakjai 16·3 mperces átlagban ürítettek, addig 8 párosodó párban a hímek 16·06, a nőstények 15·5 lüktetés átlaggal éltek. A *Spathidium spathula* nem-oszló alakjai 58-as átlagával szemben a párosodó hímek 45, a nőstények pedig 69 mpercenként lüktetnek. Ehhez a kérdéshez nemcsak az tartozik hozzá, hogy a hímek kisebb példányok, hanem az is, hogy elevenebben mozognak és párosodás alatt a helyváltoztatást rendszerint ezek végzik.

Befolyásolja a lüktetést a rajzóképzés is, amennyiben a rajzóját képző állat jóval gyorsabban lüktet, mint a nyugvó állapotban lévő. Magának a rajzónak a lüktetése is változik a szerint, hogy még az anya testében van-e vagy pedig már kikerült a környező vízbe. Változtatja végül lüktetését akkor is a rajzó, mikor megtelepedésével átmegy a mozgóállapotból a helyhez kötött állapotba. Nyilvánvaló, hogy itt az egyéni élet- és állapotváltozás mindig az anyagcsereforgalom változásával áll szoros kapcsolatban.

Változó végül a lüktetés menete egyazon állatnál az oszlás különböző szakaszain, ill. a párosodás különböző időpontjain is. Az oszlás alatt a lüktetés fokozódását, a párosodás alatt viszont a lüktetés csökkenését lehet megállapítani.

Ha mindezeket a jelenségeket végigtekintjük, akkor nyilvánvalóan megállapíthatjuk azt, hogy a kiválasztó plasma lüktető-működése rendkívül bonyolult feltétel-rendszernek a következménye. Benne résztvesz nemcsak a környező víz sötöttségére, nemcsak az állat pelliculájának tömötsége, valamint viszonylagos mérete és nemcsak az állat testmérete, hanem ektoplasmájának és entoplasmájának tömegbéli viszonya, az entoplasmának saját sötöttségére, anyagforgalma, melybe belejátszik a táplálkozás elevensége, az állat életkora, fiziológiai állapota, az oszlásnak, ill. az ivariságnak minden változásával. S mindehhez hozzá járul az állatnak a változott körülményekben tanúsított alkalmazkodó készsége, mely odairányul, hogy a lüktetés intenzitásának az első pillanatában bekövetkezett megmásulását valamiképp lassanként odamódosítsa, hogy az eredeti lüktetés gyakoriságát visszaállítsa. (Lásd OBERTHÜR kísérleteit).

C) A kiválasztó plasma önmagában.

Itt mindenekelőtt meg kell jegyezni azt, hogy lüktetőhólyagról a fentebbiekben csak az általános nyelvhasználat kedvéért beszéltünk. A szerv lényege azzal, ha azt lüktetőhólyagnak nevezük, nem jut kifejezésre, annak velejét szóban akkor jelöljük meg helyesen, ha kiválasztóplasmáról vagy -szervről beszélünk.

a) *A kiválasztóplasma önállósága.*

Akkor, amikor a biológiában a sejt belső differenciálódásával kapcsolatosan általában ahhoz vagyunk szokva, hogy a kikülönüdesi termékek szemcsék, szálak, vagy hártványok képében jelentkeznek, úgy itt ezzel szemben a kiválasztás érdekeinek szolgálatára egy alaktalan protoplasma különödött el a többi, szintén alaktalan protoplasmától. Ez a protoplasmacsöpp nagy létönállóságot mutat a többi protoplasmával szemben, olyannyira, hogy a kiválasztóplasmák egyéniségéről, individuálításáról kb. olyan mértékben beszélhetünk, mint aminővel a magvak, vagy a centrosomának önállóságáról szoktunk szólni.

Eljárásaim lehetővé tették, hogy ezt a protoplasma-féleséget egyenest kémiai alapon jellemezzük. Az excretiós plasma főjellemvonása ugyanis reductióképességében mutatkozik. Reductiós plasma mivoltáról tanuskodott már a régi KOLLACSEV-féle eljárás (l. NASSONOV, 1924) is, mivel abban a kiválasztó állomány az osmiumperoxydot erősen redukálja. Méginkább kiderült ez az én ezüst-osmium-formolos eljárásom közben (GELEI, 1928). Újabban pedig az ascorbinsavval (C-vitamin), ezzel a kiváló redukáló szerrel egyenesen sikerült reductióképességét fokoznom s így az ezüstképeket gyakoribbá és erősebbé tennem. Tekintettel arra, hogy különösen éppen az ezüsstel lehet színeznit a nephridialis plasmát, ugyanazt nemcsak reductiós, hanem egyuttal ezüstkedvelőnek, argyrophilusnak is nevezhetjük.

Ezüstözési eljárásaim közül (GELEI, 1928, 1931, 1933, 1936) különösen az ascorbinsavas ezüstöző eljárásom juttatott abba a helyzetbe, hogy a kiválasztóplasmát az ezüsstel szemben mutatott erős fogékonysága alapján a környezetétől élesen elkülönítsem és

így annak létállapotait nyomon követhessem. Ezeknek az ezüstözött készítményeknek alapján kiderült az, hogy a kiválasztóplasma a környezetbe semmi körülmény között át nem megy, azzal egybe nem olvad, vele nem keveredik, hanem vele szemben mindig élesen önálló és tőle alkatilag független.

Ez az önállóság különösen erős próbát áll ki az amoebák vándorló s az entoplasmával szüntelenül együtt sodródó kiválasztó plasmájában. Itt ez a plasma különösen lehetne elpusztulásnak kitéve. Egyes fajokban meg is történik, hogy a lüktetéskor tartalmát kiürített veseplasma darabokban szakadozik le az ekto-plasmáról, a darabocskák magukban keringenek az entoplasma áramaiban, azonban még sem vesznek el, hanem ott érintkezve összetapadnak, s nemcsak plasmájukban, hanem képződött hólyagokban is összeolvadnak. Sokkal érdekesebb az önállóság kérdése akkor, amikor valamely amoebának, pl. az *A. proteus*nak jellegzetesen csak két lüktetőhólyagja van, melyek közül természetesen az egyik kisebb és lassabban működik, a másik pedig- len nagyobb és gyorsabban dolgozik. Tapasztaltam (GELEI, 1937), hogy néha az ilyen plasmák is összetapadnak, sőt úgylátszik, hogy összeolvadnak annyira, mintha talán ezzel kettősségük meg is szűnt volna. Mégis az ember azt tapasztalja, hogy a most már egydarab kiválasztó plasmában következetesen két különböző méretű lüktetőhólyag képződik, azok egymástól függetlenül ürülnek ki, s a végén a veseplasma megint csak ugyanolyan méretű két darabra válik szét, mint amilyenből összetevődött.

b) *A differenciálódás kérdése.*

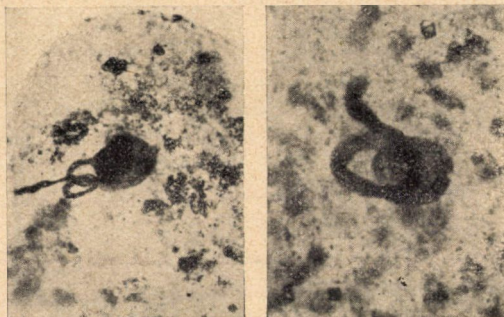
Ezzel a nagyfokú önállóságával van szoros kapcsolatban a kiválasztóplasmának belső szétkülönödési képessége is. Itt ugyan a véglényvilág túlnyomó többségében nem sok változatosságot látunk, mert azt, amire nagy általánosságban képes, már az amoebafokon megoldotta a kiválasztóplasma. Lényegében vett különösét és egyben jelentős kikülönödést csupán egypár magasabbrendű Csillósban látunk. Az alsó fokon keresztülvitt differenciálódottságból lényegében nem sokat tudunk. Itt a feltelt hólyagról azt látjuk hogy fénylő hártýával van körülvéve, s ez a lüktetőhólyagnak

saját összehúzóköny: kontraktilis hártája. Némely állatban alig látható ennél több; más állatban azonban a hólyaghártáját egy kívülről nem üveges, nem fénylő, de habocskás, gyakorta durván szemcsés plasma veszi körül. Ha kiürült a kiválasztóplasma, akkor benn középütt, ill. a kiürítőcsatornához tapadtan fénylő plasmát látunk, mely a volt hártafal származéka s körülötte látni a nem fénylő, odvacskás, esetleg durván szemcsés másik plasmát. Hogy e kettő között, nevezetesen a hártya saját fala és az azt övező többi plasma között lényegbevágó különbség volna-e, ma nem tudjuk megmondani. Én inkább azon a véleményen vagyok, hogy a két rétegre nézve egyelőre csak állapotbeli, tehát nem anyagbeli különbségről beszélhetünk. Az állatok túlnyomó része azt mutatja, hogy ugyanakkor, amikor a nagy lüktetőhólyag ürítésre készen áll, a környező habocskás plasmában már új apró lüktetőhólyagok jelennek meg s ezek közben még az öreg hólyag kiürítése előtt összefakadozással meg is nőnek. Mikor pedig az anyahólyag kiürült, az új hólyagot határozottan és jól láthatólag a maguk falának állományából hozzák létre, pár nagy hólyag összefakadozása közben. Itt minden egyes lüktetőhólyag hártája tehát eredetileg kinn a kiválasztóplasma-kéregben keletkezett s így nem állandó képlet.

A magasabbrendűekben — a fajok nem nagy számában ugyan — mégis bekövetkezik az az állapot, hogy a lüktetőhólyagnak állandó saját hártája van, s körülötte elhelyezkedő plasmában képződő mellék hólyagok ebbe ürítik tartalmukat. Az átmenetet pl. az állandó hólyagú állapothoz a *Loxocephalus colpidiopsis* képezi, a véglegesen kiforrott állapot pedig először a *Paramecium trichium*-ban található.

Ismeretes dolog, hogy a kiválasztó szervnek legmagasabb foka az ú. n. főhólyaggal és sugárcsatornákkal ellátott szervben van megvalósítva, minőt a nagy Paramecium-fajokban (*P. caudatum*, *-aurelia*, *-bursaria*, *-multimicronucleatum*, *nephridiatum*), a Frontoniákban, az Urocentrumban és újabb vizsgálataim szerint a Pleuronémákban találunk. Itt a szétkülönödés lényege abban mutatkozik, hogy mind a főhólyagnak, mind pediglen a sugárcsatornáknak önálló és maradandó bélelő hártájuk van, s e hártát kívülről az ú. n. kiválasztóplasma övezi. Ennek a burkoló plasmának mind mérete, mind belső alkata, mind pediglen mikro-

technikai viselkedése különbözik a szerint, hogy azt a főhólyagon, vagy a sugárcsatornában nézzük-e; sőt a sugárcsatornákon megállapítható három szakasznak (fecskendő vagy kapocstag, ampulla, végsatorna) megfelelően is eltérő plasmaburkot találunk. Ebből nyilvánvaló, hogy itt különböző működésű szakaszokról van szó, s valószínű, hogy a szakaszok a kiválasztás különböző érdekeit szolgálják, ami sohasem egyeztethető össze az irodalomban többek által felvetett ama lehetőséggel, hogy a véglény kiválasztó szerve csakis vizet különítene el. Élettanilag a sugárcsatornás rend-



2. és 3. ábra. *Paramecium trichium*, lüktetőhólyag, formol-sublimát, pyrogallol-carbonsav(4), ammoniákos ezüstacetát (GELEI GÁBOR szerint) 700 × és 1200 ×.

szer tehát haladást jelent három dologban, nevezetesen egyfelől különböző működésű szakaszok kiképzésében, másodsor a kiürítő szakasznak a kiválasztó résztől keresztülvitt elkülönítésében és harmadsor a kiválasztás folytonossá tételében. A főhólyag működése ugyanis elkülöníthető a sugárcsatornákétól, mert a főhólyag a föltelítésnek bizonyos fokán megszünteti a sugárcsatornákkal addig fennállott kapcsolatát s a kiürítés: a kontrakció pillanatában azoktól független, s így nem történik meg az, hogy tartalmát az erős ütemben összehúzódó hólyag a sugárcsatornák felé nyomja vissza.

Fölötte érdekes a *Paramecium trichium* esete, melyről említők, hogy a kiválasztóplasmában még nincsenek sugárcsatornák, hanem csak mellékólyagok képződnek a nagy lüktetőhólyag

fölületén. Erről az állatról KING (1918) azt írja le, hogy a szerv kivezető csatornája kanyarulatos. Ezüstözési vizsgálataim azonban kiderítették azt, hogy ez a fölötte kanyarulatos csatorna nem azonos a többi állatok szervének ektoplasmatikus származású és mindig egyenes lefutású kiürítő csatornájával, hanem itt a kanyarulatos csatorna is entoplasmatikus, s így az is kiválasztó csatorna. 2. és 3. ábránk tanúsága szerint a kanyarulatos csatorna a hólyagba folytatódik és azon fődökként terül szét.

Ezek szerint kimondhatjuk tehát, hogy a magasabb tökéletességű véglény kiválasztószervében mindazokat a szakaszokat megtaláljuk, mint aminőket a magasabbrendű sejtes állatok veséjéből ismerünk, vagyis a sejtvese ugyanazon részekre tagolódik, minőkből a sejtekből álló vese összetevődik. — Megint egy általános biológiai jelentőségű probléma, melyből az tetszik ki, hogy az életszükséglet, tekintet nélkül arra, hogy egysejtű, vagy sejtekből összetevődött lényről van-e szó, ugyanazon alkatilagolódásra tudja készíteni az állatot. (Convergentia az egysejtű és többsejtű lények világában.)

A működés és kiválasztóplasma állapotváltásai: TAYLOR 1923-ban az Euplotesen megfigyelte, hogy lüktetés előtt a hólyagnak addig folyékony állapotú fala elkocsonyásodik, megmerevedik. Ezt a ritmikus állapotváltozást azóta valamennyi szemem elé került állaton megállapítottam, s a kérdéssel részletesen is foglalkoztam az *Amoeba proteus*on végzett megfigyeléseim közben (GELEI, 1937). Itt párhuzamot vontam a szerv, valamint a folyton áramló sol-állapotú entoplasma és a belőle keletkező gel-állapotú ektoplasma között. Megállapítottam, hogy a kiválasztáshoz az excretiós plasmának puha sol-állapotára van szükség, hogy elkülönítő működését végezze, azután viscositása fokozódik, merev gel-állapotba megy át, felragad az ectoplasmafalra és egyben kifejlődik benne az a feszültség is, mely a pulsatióhoz szükséges. A feltapadt kiválasztó plasma leolvasztja maga fölött az ektoplasmát s a pelliculát és végül saját hárttyáját is áttörvén, ürít. Az állandó kiürítőcsatornával rendelkező magasabbrendű Csillósokban is csak a saját plasmahárttyájával zárja el a hólyag a kiürítő csatorna belső nyílását. Ez a plasmahárttya széles résen kellő ellent-

állást nem tud ahhoz kifejteni, hogy a hólyag kellően feltelhessen. Ez a primitív és bizonyos fokig erőtelen zárókészülék érteti meg velünk azt, hogy a Véglények porus excretoriusa ill. canalis effe-re-nse mért oly szűk csatorna, s ha a Véglénynek nagy hólyagja esetén gyorsan kell ürítenie, azt miért nem tudja úgy megoldani, hogy egyetlen nagy vastag csatornát fejleszt, hanem miért hoz sok apró csövet létre (GELEI, 1935).

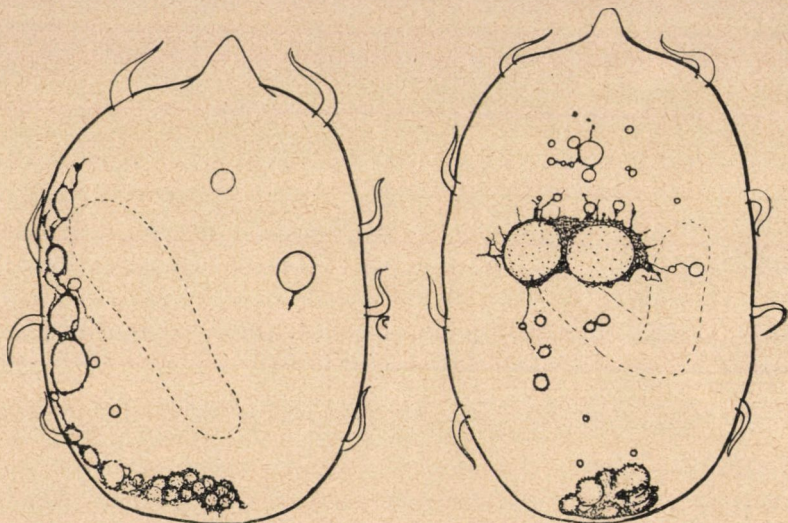
D) Az oszlás és a veseplasma önállósága, a szervezet harmóniája.

A veseplasmának a fentiekben hangoztatott önállóságával még egyszer találkozunk a szervezet oszlása alkalmával. Az oszlásra vonatkozólag eddig NASSONOV tett megfigyeléseket, ki a Parameciumról azt állítja, hogy az új lüktetőhólyag úgy képződik, hogy egy sugárcsatorna leszakad a főhólyagról, a csillósorok mentén továbbvándorol, s új helyére érkezőn : az ampullából főhólyag lesz, mely magából a szükségletnek megfelelő számú oldalsatornát nevel ki. Ilyesminek a lehetőségét magam is támogathatnám saját tapasztalataimmal, amennyiben én is már többször megállapítottam azt, hogy a fedőlemeztől nyomott állaton egy-egy sugárcsatorna leválott, s a szomszédságban önálló lüktetéshez kezdett. Sőt a tihanyi intézetben ezüstözött állatokon szinte tömegével észleltem, hogy ezen az úton a főhólyag közelében mellék-hólyagok nagyobb száma is képződhet (GELEI, 1936. 4. á.).

Mégis a rendes oszlás alkalmával az oszlófelek számára új lüktetőhólyagok, ill. kiválasztószervek nem ezen a módon képződnek. Először világosan és megkapó formában a Didiniumon tapasztaltam azt, hogy az oszlás idejére a kiválasztó plasma elöveszi ősi, még az amoeba-fokról hozott vándorló képességét (GELEI, 1933), s új lüktetőhólyagot ezen mozgóképességével teremt. A Didiniumon ugyanis az történik, hogy az oszlás közeledtére az anya-veseplasma amoeboid sarjakat bocsát, ezek aránylag egy szélesebb, de megszabott országúton a mellső testfélbe vándorolnak (l. a 4. ábrát) s ott a tőlük függetlenül, nem hatásukra keletkezett kiürítő pórushoz utólag összesereglenek (l. az 5. ábrát) és így az egybecsatlakozott részek új kiválasztó szervet, új lüktetőhólyagot for-

málnak. Az oszlás lényege tehát az anya-veseplasma sarjadzása, ősi vándorló képességének feléléde s most egy adott ponthoz, a porus excretoriushoz való vándorlása (GELEI 1938).

A Parameciumok esetében is ilyesmi történik. Ott is az excretiós meridiánuson előre kiképződik a porus excretorius, s az ehhez legközelebb eső sugárcsatornáról csak amoeboid veseplasma válik



4. és 5. ábra. *Didinium nasutum*, oszlásra készülő állatok; szaggatott körvonallal az oszlásra készülő mag. 4. ábrában a kiválasztó plasma sarjainak előrevándorlása a mellső leányegyedbe, 5. ábra az előrevándorolt plasmarészek gyülekezése a lüktetőhólyag körül. Szublimát-ezüst-ascorbinsav 250 ×.

le, az nyomul az új kiürítő részhez és az organizálódik ugyanolyan tagolódású szervvé, mint aminő az anya kiválasztó készülék.

A kiválasztó plasma tehát ősi származástani önállóságát itt is, ez esetben is megőrizte: nem mint egész szerv, hanem mint önálló amoeboid plasma megy el új területre és önmaga öndifferenciálódáson esvén keresztül, ismétli meg az egyedi élet során azt, amin lassanként a fajfejlődés során is átesett.

S ezzel eljutottunk a harmónia kérdéséhez is.

Az összhang a szervezet egésze s a kiválasztószerv között

többféle vonatkozásban mutatkozik. Az összhang lehet működési és lehet keletkezési.

A keletkezés szempontjából kérdezhetjük, mi teszi lehetővé azt, hogy a kiválasztószerv fajilag jellegzetes helyét az oszlás zavaró tényezőjével szemben is megőrzi, ill. miként jut az anyaállat kiválasztó szervéből vándorútra tért veseplasmarész a keletkező leányegyednek pontosan ugyanazon helyére, mint aminő helyen az anyaszervezetben is feküdt. Itt jön segítségünkre az excretiós meridiánusnak a kérdése, az a tény, melyre először én (GEBLEI 1934) hívtam fel a kutató világ figyelmét, midőn rámutattam arra, hogy ugyanazon csillómeridiánus mentén, melyen az anyaállat lüktetőhólyagja feküdt, képződik ki az új lüktetőhólyag is. És pediglen először mindig maga a kiürítő pórus. S csodálatosképpen ennek a kialakulását az illető helyen fekvő csillónak alapi teste vezeti. Ezt az alapi testet kell tekintenünk a SPEEMANN-féle értelemben vett elsőosztályú organizátornak, mely a vele érintkezésben lévő pelliculát és neuronémát olyan átalakulásra készíti, hogy annak hatása alatt a basalis-testtel szoros érintkezésben rövid kis cső képződik az ektoplaszmán keresztül, mely az ezüsstel szemben erős fogékonyságot mutat. A cső aztán mint másodfokú organizátor tovább működik oly irányban, hogy a szomszédságában esetleg elszórva levő, vagy éppen oda beérkező kiválasztóplasmát megállítja, ill. a szétvándorolt részeket odagyűjti, ezáltal helyben rögzíti és ott az új szervet differenciálódásra, ill. majd működésre készíti.

A harmónia másik lehetősége a működési harmónia. Ennek már számtalan vonatkozását láttuk a katatonozis és anatonozis különböző lehetőségeivel kapcsolatosan. A harmónia morfológiailag is kifejezésre jut különböző vonatkozásokban. Ha valamely tenyészet túltáplált, rothadó ú. n. polysaprobionticus állapotba kerül, akkor egyrészt a nagymennyiségű táplálékból származó erős anyagforgalom, másrészt pedig a bűzhödő környezetből származó mindenféle bomlási sók hatása alatt az állat erős kiválasztó működést fejt ki, s ilyenkor sugárcsatornáinak száma az átlagos 8—10-ről felszaporodik 14—15-re, s a csatornák hihetetlen hosszúra nyúlnak, egymás területére messzire behatolnak. Ezzel szemben gyenge tápláltságú, tiszta vízben élő állatok, melyek ugyanazon

törzsből valók, rövid és kevés számú csatornával rendelkeznek. De az is megtörténhetik, hogy ugyancsak a gazdag polysaprobionticus tenyészetben a párosodáshoz fognak az állatok s vele kapcsolatosan beszüntetik táplálkozásukat, akkor vese-csatornáiknak száma és mérete szintén szerfelett megfogyatkozik. Végül ugyancsak minden oszló állatban látjuk azt, hogy az anyaszervezetből változatlanul átöröklődő egyik lüktetőhólyag a hozzácsatlakozott sugárcsatornákkal együtt szintén megrövidül, mihelyt az oszlási sík felé nyúló sugárcsatornái között az új lüktetőhólyag képződni kezdett. A nagyméretű öregcsatornarendszer tehát idomul a megváltozott, ill. megkisebbedett testméret szükségleteihez.

Kimondható tehát, hogy a véglény kiválasztószerve a szervezet egészének életfeltételeihez ugyanolyan összhangzattal igazodik, mint a minővel a magasabbrendű sejtes lények veséje a szervezet üzemmértékéhez mindenkoron hozzáidomul.

Összefoglalás.

A lüktetőhólyaggal, ill. a kiválasztóplasmával kapcsolatos ismereteinkből az élettudomány számára a következő általános értékű megállapításokat vonhatjuk le.

1. A kiválasztóplasma a Véglény szervezetének önálló, folytonos és örökletes része.

2. A kiválasztóplasmát élettanilag az erős redukcióképesség, mikrotechnikailag a nagyfokú argyrophilia különbözteti meg a szervezet többi alakatlan plasmaféleségeitől.

3. A kiválasztóplasma származástaniilag az entoplasmához tartozik, abból differenciálódott s a magasabbrendűekben is abban helyezkedik el. A külvilággal csak a kiürítés miatt tart fenn szervi kapcsolatot a porus excretoriuson át.

4. Létét mégis külvilági: környezeti okoknak köszönheti, mert elsősorban a környezetből a pelliculán át szüremkedő víz elkülönítésére, ill. vele kapcsolatban a belső nyomás szabályozására különödött ki (osmoregulator).

5. A környezetből hatással van a kiválasztóplasma működésére :

annak 1. sótartalma (ionconcentratiója), quantitative és, függetlenül a sótöménységétől qualitative, különleges (rendszerint magasabb vegyértékű) ionjai által, s 2. vegyi állapota (*H*-ion concentratiója), 3. oxygentartalma, 4. hő- és 5. fényállapota által.

6. A sótartalom hatásának biológiai jelentősége abban a régen ismert adottságban mutatkozik, hogy tengervízi, ill. parasiticus lényeknek ritkán van lüktetőhólyagjuk, mert a környező víznek és a testnedveknek azonos sótöménységük van, holott édesvízi lények, testnedveik hypertoniája miatt, csaknem kizárólag mind lüktetőhólyaggal vannak felszerelve.

7. A lüktetőhólyag rendes mérete feltelt állapotában egyenesen arányos a kiválasztóplasma mennyiségével. (Hólyag-plasma reláció.)

8. A kiválasztóplasma azonban a ráháramló feladat elvégzéséhez háromféleképpen idomulhat : *a*) tömegének, *b*) fölületének és *c*) munkaelevenítségének (lüktetésgyakoriságának) megváltoztatásával.

a) A kiválasztószerv tömegét állományának gyarapításával, sugárcsatornák esetén új sugarak nevelésével szaporítja.

b) Fölületnagobbításra tesz szert lapos szétterüléssel (*Hypotricha*), orsódad kihúzóással (*Stentorok*, *Spirostomumok*), vagy csatornaképzés (több *Hymenostomata*) útján.

10. A szervezet viszont több oldalról befolyásolja a kiválasztószervet: *a*) külalakjával (fölület-testtömegviszony), *b*) a pelliculának, *c*) az ektoplasmának vastagságával, *d*) entoplasmájának viscositásával és *e*) entoplasmájának sótöménységével.

11. A 3., 7., 8. és 10. pont alatt mondottakból nyilvánvaló, hogy a kiválasztóplasma munkája igen bonyolult tényezők egymásrahatásából adódik.

12. A kiválasztóplasmának belülről különlegesebb munkát a solállapotú entoplasma ad a különböző okokból származó tonicus változásaival : az anyagcsere elevenedése anatonosist és lükte-tésszaporodást, ennek ellenkezője katatonosist és lükte-téscsökkenést, az atonosis pedig, különösen betokozódás esetén, lükte-tésszünetelést eredményez.

13. Szemben az entoplasmával bizonyos mértékben segítő-társa a kiválasztóplasmának a pellicula és az ektoplasma azzal,

hogy mentől tömöttebb és vastagabb e két réteg, annál kevésbé, ill. annál lassabban jut a víz rajta keresztül.

14. Az ektoplasma megvastagodása, ill. az állat bizonyos szakaszának (Gymnostomaták mielő testfele) elkocsonyásítása az entoplasma relatív csökkenését (és ezzel kapcsolatban a lüktetőhólyagnak gyakorta a test valamely szakaszára való eltolódását) és vele a kiválasztóplasma, ill. a lüktetés csökkenését eredményezi.

15. Az állat testének teljes elkocsonyásodása a Loxodesek esetében a kiválasztóplasma eltűnésére, ill. a lüktetés megszűnésére vezetett.

16. A testfelület relatív mérete olyképp befolyásolja a kiválasztóplasmát, hogy mennél nagyobb felület jut a térfogategységre, annál több kiválasztóplasmára van szükség, vagy ehelyett adott plasmamennyiség esetén a szervnek annál erősebb működést kell kifejtenie.

17. Hogy az édesvízi Végvények lehetőleg mentesüljenek a víz hatásától, mivel a gömbnek van a legkisebb viszonylagos felülete, ezért közel gömbölyded : tojásdad alakot öltenek, sőt, a betokozódási forma, midőn a környezet hatásai alól csaknem teljesen kivonják magukat, rendszerint a tökéletes gömb.

18. A kiválasztóplasma mennyisége (mérete) egyenesen aránylik a test méretéhez (kiválasztóplasma-testplasma reláció). Ha viszont a Végvénynek bármely oknál fogva lapos, vagy orsódad testet kell öltenie, akkor a felületnagobbodásban ért károsodása kiigazíttatik, és pedig vagy a pelliculájának megvastagításával és megtöményítésével (Euplotesek), vagy pedig az ektoplasmának vastag rétegben való elkocsonyásításával (az összes lapostestű Gymnostomaták).

19. A környezet hypertóniája (tömény szikes vizek és tenger-víz) szintén lehetővé teszik lapos, szalagszerű végvények kialakulását.

20. A lüktetőhólyag, ill. a kiürítőrés ott fekszik, ahol a szervezetet a csillómozgás következtében a legerősebb vízáram elhagyja. Ezért

a) a lüktetőhólyag eredendően az alsóbbrendű és rendszerint hengerded Ciliátákban általán az állatnak hátsó pólusán fekszik.

b) Az erősen csavarmenetes pályán mozgó állatok lüktető-

hólyagja azonban a haladással ellentétes oldalra, vagy a hátra kerül aszerint, hogy az állat balra, vagy jobbra sodródik és akkora mértékben, amely mértékben erősen, vagy gyengén meredek a pálya.

c) Sessilis lényekben a mellső testtájra, Peritrichákban egyenesen a cytopharynxba helyezkedik át a lüktetőhólyag porus excretoriusa; ugyancsak mozgásmechanikai okokból. A csólakó Mycetothrixekben pedig a mellső testvégen, egyenest apicalis fekvésű a porus excretorius, ugyancsak mozgásmechanikai okokból.

21. A kiválasztószerv differenciálódása a legalsó fokon a lüktetőhólyag hárttyájának és az azt körülvevő kiválasztóplasmának szétválására vezet. A kettő egymásba átváltozhat. Állandó kiürítőrés vagy kiürítő csatorna egyelőre nem tartozik hozzá, s mikor a magasabb fokon kialakul, akkor se belőle képződik.

22. A helyhez kötött kiválasztószerv esetén a porus excretorius és a hozzája csatlakozó canalis efferens nem a kiválasztóplasma saját differenciálódási terméke, hanem attól függetlenül a pelliculából keletkezik.

23. Másodfokon a kiválasztószerv állandó hárttyájú főhólyagra és körülötte még múltó mellékhólyagokra, ill. kiválasztóplasmára differenciálódik.

24. Néhány magasabbrendű állatban lüktetőhólyagot és körülötte sugárcsatornákat különböztetünk meg. Mindkettőnek állandó hárttyabélése van és mindkettőt a kiválasztóplasmának vékonyabb-vastagabb öve burkolja. A sugárcsatornás kiválasztószerv tökéletessége kétirányú: szakaszaival egyrészt a kiválasztás különböző feladatait szolgálja, másrészt pedig a kiürítést és a kiválasztást szervesileg elkülöníti egymástól.

25. A *Paramecium trichium* kiválasztó szerve főhólyagra és a főhólyagból a pellicula felé vezető kanyarulat csatornára tagolódott; mindkettőnek állandó hárttyabélése van.

26. A kiválasztószerv, ill. kiválasztóplasma működése közben ütemes állapotváltozáson esik át, miközben a kiválasztás alatt felpuhul, olvadtabbá válik, ragadósága és feszültsége csökken, s ezzel szemben a kiürítés idejére elkocsonyosodik, töményebbé, ragadósabbá válik és feszültsége megnő (sol-gel állapotváltozás).

27. A kiválasztóplasma oszlás alkalmával az új egyed számára

sarjakat bocsát, melyek az új egyed kiürítőrése körül gyülekeznek és ott új lüktetőhólyagot formálnak.

28. A *porus excretorius* a kiválasztó meridianusban képződik egy csilló tövén az alapi test hatása alatt; az új porust a neuronema körülövi.

29. A kiválasztószerv a szervezet egészével szabott összhangot tart fenn, helyzetileg azzal, hogy a kiválasztó fővonal (*excretorius meridianus*) mentén keletkező kiürítő rés biztosítja annak örökletes és így fajilag jellegzetes fekvését; szervezetileg azzal, hogy az egész szervezet méretéhez a maga méretével fajilag is, meg az egyéni változásoknak megfelelőleg is folyton igazodik és élettanilag azzal, hogy működését állandóan a szervezet külső-belső feszültségi és nyomás (*tonicus*)-viszonyához igazítja.

Irodalom.

Lásd GELEI JÓZSEF (1935): A véglények kiválasztószerve alkati, fejlődéstani és élettani szempontból. *Mat. és Természettudom. Közl.* XXXVII. köt. 5. sz. 1935, 124—127. oldal.

Ezenkívül figyelemre méltattak:

FORTNER, H. (1937): Die intravitale Färbung des Nephridialplasmas der pulsierenden Vakuolen bei Paramecium. *Die Naturwissenschaften*, Jahrg. 25. H. 5.

GELEI JÓZSEF (1929): Ein neuer Typ der hypotrichen Infusorien aus der Umgebung von Szeged. *Spirofilum tisiae* n. sp., n. gen., n. fam. *Arch. f. Protistenkunde*, Bd. 65, H. 1/2.

GELEI—HORVÁTH (1931): A Glaucoma és Colpidium mozgató és ingervezető elemei a szublimát-ezüstmódszer eredményei szerint. *A Magyar Biológiai Kutatóintézet I. osztályának munkáiból.* IV.

GELEI JÓZSEF (1933): Adatok Szeged környékének ázálékállatka világához. III. Néhány *Blepharisma* Szeged környékéről. *Acta Biologica*, tom. II, fasc. 3.

GELEI JÓZSEF. (1934): Das Verhalten der ectoplasmatischen Elemente des Parameciums während der Teilung. *Zool. Anz.* Bd. 107.

GELEI JÓZSEF (1934a): Van-e a véglényeknek idegrendszerük? *Term. Tud. Közl. Pótf.* 66. köt. 196. füz.

GELEI JÓZSEF (1935): *Colpidium glaucomaeforme* n. sp. (*Hymenostomata*) und sein Neuronemensystem. *Arch. f. Protistenkunde*, Bd. 85, H. 2.

GELEI JÓZSEF (1936): Die Bildung des *Porus excretorius* und sein

Verhältnis zum Neuronemensystem bei Paramecium. Biol. Zentralbl. Bd. 56.

GELEI JÓZSEF (1936a): V. Beiträge zur Ciliatenfauna der Umgebung von Szeged. Zwei Gymnostomata-Arten: *Amphileptus carchesii* STEIN und *Byrophyllum hyalinum* n. sp. Acta Biologica, tom. IV, fasc. 1.

GELEI JÓZSEF (1936b): Eine Pulsationsblase, die nie entleert wird. Beobachtungen an *Amoeba macrovesiculata* n. sp. Arch. f. Protistenkunde. Bd. 88, H. 1.

GELEI JÓZSEF (1936c): Das erregungsleitende System der Ciliaten. Compt. Rend. du XII^e Congr. Intern. de Zool. Lisbonne, 1935.

GELEI JÓZSEF (1937): Der Nephridialapparat von *Urocentrum turbo*. Zool. Anz. Bd. 117, H. 3/4.

GELEI JÓZSEF (1937a): Ascorbinsäure (C-Vitamin) zur Darstellung des Nephridialapparates bei Ziliaten. Zeitschr. f. wiss. Mikr. u. mikr. Techn. Bd. 53.

GELEI JÓZSEF (1937b): Die einfache Pulsationsblase der Amöben. Mikrokosmos, Jahrg. XXX. H. 6.

GELEI JÓZSEF (1937c): Die zusammengesetzte Pulsationsblase bei *Paramecium*. Ebenda H. 7.

GELEI JÓZSEF (1937d): Pori secretorii am Ziliatenkörper. Biol. Zentralbl. Bd. 57. H. 3/4.

GELEI JÓZSEF (1937e): Der schraubige Körperbau in der Ciliatenwelt im Vergleich zu den Symmetrieverhältnissen der vielzelligen Tiere. Arch. f. Protistenkunde Bd. 88, H. 3.

GELEI JÓZSEF (1937f): Zustandsänderungen im Protoplasma der Amöben während der Ortsveränderung und während der Pulsation der Exkretionsblase, Beobachtungen an *Amoeba proteus* und *laureata*. Ebenda.

GELEI JÓZSEF (1938): Das Excretionsplasma von *Didinium nasutum* in Ruhe und Teilung. Arb. d. Ung. Biol. Forsch. Institutes V.

KING R. J. (1928): The contractile Vacuole in *Paramecium trichium*. Biol. Bull., 55.

OBERTHÜR, K. (1937): Untersuchungen an *Frontonia marina Fabre-Dom.* aus einer Binnenland-Salzquelle unter besonderer Berücksichtigung der pulsierenden Vakuole. Arch. f. Protistenkunde. Bd. 88, H. 3.

ÜBER DIE BIOLOGISCHE BEDEUTUNG DER PULSATIONSBLASE (KONTRAKTILE VAKUOLE) DER PROTISTEN.

Von JOSEPH GELEI, o. Mitglied.

(Mit 5 Textabbildungen.)

Unsere Kenntnisse über die Pulsationsblase und das Exkretionsplasma lassen folgende, allgemeingültige Sätze ableiten :

1. Das Exkretionsplasma muss bei den Protisten als ein selbständiger, erblicher Bestandteil aufgefasst werden.

2. Das Exkretionsplasma wird physiologisch durch seine Reduktionsfähigkeit, mikrotechnisch durch seine Argyrophilie von den anderen Plasmaarten unterschieden.

3. Das Exkretionsplasma gehört abstammungsgeschichtlich dem Entoplasma an, aus dem es sich herausdifferenzierte und in dem es heute überall liegt. Mit der Aussenwelt wird es erst bei der Entleerung durch den Porus excretorius verbunden.

4. Es verdankt seine Existenz Umwelts-Faktoren, da es durch das eingedrungene Aussenwasser hervorgerufen, bzw. durch Abgabe von Wasser als Osmoregulator entstanden ist — im Interesse eines konstanten osmotischen Druckes, beziehungsweise dessen ständiger Regulation.

5. Folgende Umwelts-Faktoren üben eine Wirkung auf das Exkretionsplasma aus: *a)* Salzgehalt, bzw. Ionenkonzentration (quantitativ und qualitativ), *b)* Säure-Basenrelation (*pH*), *c)* Sauerstoffgehalt, *d)* Temperatur, *e)* Licht.

6. Bei Parasiten und Meerestieren ist gewöhnlich keine Pulsationsblase vorhanden, da die Körperflüssigkeit und das umgebende Medium den gleichen osmotischen Druck besitzen, wogegen

Süsswassertiere infolge der Hypertonie ihrer Körperflüssigkeit eine Pulsationsblase benötigen.

7. Die Grösse der gefüllten Pulsationsblase ist der Menge des Exkretionsplasmas proportional (Blase—Plasma-Relation).

8. Das Exkretionsplasma kann seine Leistung nicht nur durch quantitative Veränderung erhöhen, sondern bei gleicher Quantität auch durch Oberflächenveränderung oder Intensivierung. Oberflächenvergrösserung kann durch Abflachen (*Hypotricha*), durch spindelartiges Ausziehen (*Stentor*, *Spirostomum*), oder durch Kanalbildungen (*Hymenostomata*) erreicht werden.

9. Das Exkretionsorgan wird von Seite des Organismus als Ganzes beeinflusst: *a*) durch die äussere Körperform (Verhältnis zwischen Oberfläche und Körpervolumen), *b*) durch die Dicke der Pellicula und des gelartigen Ectoplasmas, *c*) durch die Viskosität des Entoplasmas und *d*) durch seine eigene Salzkonzentration, bzw. durch die Veränderungen derselben.

10. Aus Nr. 3, 7, 8 und 9 folgt, dass die Tätigkeit des Exkretionsplasmas durch viele Faktoren beeinflusst wird.

11. Besonders stark ist die Beeinflussung durch das Entoplasma, da dieses bei regem Stoffwechsel infolge von Anatonose die Pulsationsfrequenz erhöht, wogegen Katatonose zur Frequenzerniedrigung, Atonose (bei der Cyste) sogar zur Einstellung der Pulsation führt.

12. Unterstützt wird das Exkretionsplasma durch die Pellicula und das Ectoplasma, die beide durch Porenverdichtung die Wasserdurchlässigkeit erniedrigen können.

13. Auch wenn das Ectoplasma dicker oder ein Teil des Entoplasmas in gelartigen Zustand übergeführt wird (z. B. im Vorderkörper der *Pleurostomata*), erfolgt eine Erniedrigung der Pulsationsfrequenz.

14. Bei dem Süsswassergenuss *Loxodes* wird der ganze Körper gelartig und infolgedessen besitzen diese Tiere überhaupt kein Exkretionsplasma, bzw. keine Pulsationsblase.

15. Je grösser die relative Körperoberfläche ist, desto grösser ist auch die Menge des Exkretionsplasmas, oder die Leistungsintensität derselben.

16. Um daher eine möglichst kleine Körperoberfläche zu

erreichen, nähern sich die Süßwasserprotisten möglichst dem Sphäroid, (sie besitzen meist eine Eiform), die Encystierungsform ist gewöhnlich eine Sphäre. Weicht die Form des Tieres aus irgendeinem Grund hiervon ab, so wird das ungünstige Verhältnis von Körpergrösse zu Körperfläche durch Gelbildung und Verdichtung der Pellicula korrigiert.

17. Die Menge des Exkretionsplasmas ist genau der Körpergrösse proportional (Exkretionsplasma: Körperrelation).

18. Hypertonie des Mediums (in Na_2CO_3 — Gewässern) ermöglicht die Existenz platter, bzw. bandförmiger Protisten.

19. Die Pulsationsblase, bzw. ihr Porus excretorius liegt an solchen Stellen des Körpers, an denen die durch die Cilienbewegung verursachten Wasserströme den Körper zuletzt berühren. Daher liegt die Blase *a*) im allgemeinen und besonders bei niederen Ciliaten hinten, *b*) bei Tieren, die eine starke Schraubenbewegung besitzen, an der der Bewegungsrichtung gegenüberliegenden Seite, d. h. bei Rechtsdrehern links, bei Linksdrehern rechts hinten, *c*) bei sessilen Tieren vorne (Stentoren), ja sogar im Cytopharynx (Peritricha). Bei den röhrenbauendem Mycterothrix-Arten liegt sie sogar vorne, ganz apical.

20. Das Exkretionsorgan besteht bei den niedrigsten Organismen aus der Blasenwand und dem umgebenden Exkretionsplasma, u. zw. in der Weise, dass beide ineinander übergehen können. Exkretionskanal und Porus excretorius gehört ursprünglich nicht zum Exkretionsorgan.

21. Wird das Organ *fixiert*, d. h. an einer bestimmten Körperstelle festgelegt, so bildet sich der Porus excretorius und der Entbeerungskanal nicht aus eigenem Material, sondern unter Leitung eines Basalkörperchens aus der Pellicula.

22. Der nächste Differenzierungsgrad ist eine Pulsationsblase mit ständiger Wand, sowie Nebenblasen mit unbeständigen Blasenwänden.

23. Der höchste Differenzierungsgrad wird erreicht, wenn um eine ständige Blase herum Radialkanäle mit eigener Innenwand entstehen. Das Exkretionsplasma umgibt hier hauptsächlich die Radialkanäle. In diesen Fällen wird Ausscheidung und Entleerung voneinander unabhängig.

24. Bei *Paramecium trichium* differenziert sich das Organ zu einer Hauptblase mit nach aussen aufgeknäueltem Kanal, auf welchen Entleerungskanal und Porus excretorius folgt.

25. Das Exkretionsorgan erfährt während seiner doppelten Funktion folgende Zustandsveränderungen: während der Exkretion wird mehr Sol, während der Pulsation mehr Gel gebildet (Sol-Gel—Zustandsänderung).

26. Bei der Teilung bildet das Mutterorgan Sprossen, die unter dem Ectoplasma zum neuen Porus excretorius wandern.

27. Der Porus excretorius wird an einem bestimmten Cilienmeridian, dem Exkretionsmeridian, rechts hinten von einem Basalkörperchen gebildet und darauf vom Neuronen unwachsen.

28. Organismus und Exkretionsorgan sind harmonisch aufeinander eingestellt. Letzteres ist erblich fixiert, seine Grösse (Menge) ist der Körpergrösse individuell und artspezifisch angeglichen und seine Funktion ist in jedem Moment des Lebens den inneren und äusseren physiologischen Zuständen angepasst.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. Feber 1938.)

ÖRVÉNYLŐ ÉLETMÓD ÉS SESSILIZMUS.

I. Sessilizmus a Csillósok (Ciliata) világában.

13 szövegközi ábrával.

PÁRDUCZ BÉLÁ-tól (Szeged).

Bevezetés.

A szabad helyváltoztatás képességét általában az állatvilágra jellemző életmegnyilvánulásnak szoktuk tekinteni, sőt azt tartjuk, hogy az elevenség nemcsak megkülönbözteti az állatot a növénytől, hanem egyenesen föléje is helyezi. Kétségtől a mozgékony-ság szükségszerű és szabad kifejlődése volt az a legfontosabb s a további tökéletesedésnek indítékát is magában rejtő nyereség, melyet az állati szervezet a növényi táplálkozásmódtól való mentesülésének köszönhetett. Addig a mindenütt egyforma bőségben rendelkezésre álló levegő nem igényelt utánjárást, erő kifejtést, sőt talajsoigénye miatt a növénynek egyenesen egyhelyt kellett gyökeret vernie. Az állatnak ezzel szemben már meg kell keresnie a táplálékát, azt *üldöznie* kell, esetleg meg is kell *küzdenie* a zsákmányért; szervezetének felépítése és munkateljesítménye ezentúl elsősorban és csaknem kizárólag a táplálék cselekvőleges megszerzését szolgálja, annak érdekében alkalmazkodik. A táplálékszerzésnek ez az új módja éppen ezért bizonyult nagyjelentőségűnek a magasabbrendűvé válás szempontjából: az állati szervezeten helyváltoztató- és érzékelőszervek fejlődnek, de tökéletesednek is fokozatosan az állandó igénybevétel révén s a létért való küzdelemben. Velük kapcsolatban tökéletesedik a támasztó vázrendszer, erősödik az izomzat, bonyolódik az ideg- és vérrendszer, tökéletesedik végeredményben az egész állati szervezet.

Annál csodálatosabb, hogy a Gerinceseket kivéve, valamennyi állatkör kisebb-nagyobb számú, vízben élő tagja megegyeszer visszasüllyedt a növényekéhez hasonló helyhez kötött életmód fokára, — anélkül azonban, hogy a táplálkozás és táplálékszerzés állati módjával lényegében szakított volna. Míg tehát a növények esetében a különleges táplálkozásmód az egyhelyt való meggyökeresedést teljes mértékben indokoltá teszi, az állatvilágon belül első pillanatban teljesen értelmetlenül állunk minden ilyen «kilengés» előtt, különösen ha figyelembe vesszük, hogy a sessilizmus — a parazitizmushoz hasonlóan — mindenkor a már kiverelkedett magasfokú szerveződés leegyszerűsödésével jár együtt! — Nehezen tudjuk elképzelni, hogy a természetben ez a visszaesés, ez a másodlagos röghözkötöttség is jelenthetne valamiféle hasznot, előnyt, hogy tehát ennek az életmódnak is megvolna bizonyos szempontból az értelme és így a biológiai jelentősége is.

A vonzó és érdekes probléma a neves bűvárok egész sorát készítette már régóta ezen a téren a rendszeres kutatásra és megfontolásra. A vizsgálatok eredményeként számos kérdés, így a helytűlő életmódnak az állatvilágban való elterjedése, a szervezetre és a szervek működésére gyakorolt hatása a Metazoonokat illetően lényegében már tisztázottnak tekinthető. A legfontosabb kérdésben, a sessilizmus okának kiderítésében azonban még máig sem tudta a döntő szót kimondani a tudomány. A kutatók nagyjában megegyeznek egymással abban, hogy az állati letelepedés a növényekétől eltérően nem közvetlenül a táplálkozásmóddal kapcsolatos, hanem annak közvetlen okát külső tényezőkben, elsősorban a mozgásállapotban lévő víz, mint erősen viscosus és nagyfajsúlyú közeg részéről fenyegető veszélyben, illetőleg az ahhoz való alkalmazkodásban kell keresnünk. Így a sziklás parti övben élő állat testének lehorgonyzásával *védekezik* a létét fenyegető árapály és hullámverés, a kedvező élettérből való elsodrás veszedelme ellen (HESSE, HENTSCHEL, CORI). Ugyancsak a védekezési ösztön készítethette a férgek és a puhatestű állatokat a homokban és iszapban való rejtőzködésre is, amely végül sok esetben csőlakáshoz vezetett.

A kutatók egy része a táplálkozásmódot is megemlíti ezen tényezők sorában, mint amelyik a helytűlés kiváltásában, ha köz-

vetve és esetlegesen is, szintén szerepet játszhatott. Megelégednek azonban annak hangsúlyozásával, hogy bizonyos táplálkozásmód mellett *előnyös*, vagy éppenséggel *lehetséges* a helytűlő életmód megvalósítása. Így pl. a planktonvadász Cirripediák szempontjából előnyös lehet az, hogy halakra, vagy vízben tovasodródó tárgyakra telepedjenek s vadászterületüket ily módon jelentős mértékben kiterjesszék (WÉBER). Más állatok esetében meg egy bizonyos táplálkozásmódra való áttérés szükségtelenné teheti (de csak a táplálkozás szempontjából!) a helyváltoztatást, mivel az állat a szükséges táplálékmennyiséget egyhelyt maradva is biztosítani tudja magának («Örvénylő életmód», DEGENER). Nyilvánvaló azonban, hogy ilyenszerű megállapításokat semmiképpen sem lehet kauzális magyarázatként elfogadnunk, mert ha általánosságban meg is állapítjuk azt, hogy egy bizonyos táplálkozásmód lehetővé teszi, vagy elősegíti az egyhelyt való megtelepedést, ezzel még éppenséggel nem mondtuk meg azt, ami bennünket elsősorban érdekel, hogy tudniillik egy nagyobb, azonos táplálkozásmódot űző állatesoporton belül miért tért át *csak* néhány s éppen az a néhány faj a sessilis életre? — Hogyan lehetséges például az, hogy vannak *vagilis* örvénylő állatok s joggal kérdezhetjük azt is, milyen ok készítette letelepedésre a *mozdulatlan* tárgyakhoz tapadt Cirripediákat?

Amint a fentebbi rövid áttekintésből is látható, elméletekben nincsen hiány, viszont kétségtelen az is, hogy ezek túlnyomó része vagy sokat nem mondó általánosságok, lehetőségek megállapításában merül ki, vagy pedig ellenkezően, éppen csak egyes elszigetelt esetekre vonatkoztatva ad magyarázatot, egy másik, közel rokon faj esetében pedig csődöt mond. A sessilizmus okának kiderítése terén tehát még nagyon sok a tisztázásra való probléma a magasabbrendűek, a Metazoonok birodalmában is, de éppenséggel ismeretlen terület, nemcsak ebből a szempontból, de a kérdés több más vonatkozásában is a sejtekre nem tagolt lényeknek, elsősorban a Csillósoknak a világa.

A következőkben ennek a hiánynak a pótlásához szeretnék némiképp hozzájárulni, rámutatván főként arra, hogy az ú. n. örvénylők egy bizonyos nagyobb csoportján belül határozottan kimutatható a *kauzális összefüggés* az örvénykeltés útján való

táplálkozás valamint a helytülés, illetőleg a helyváltoztatás korlátozása között.

A sessilizmus a Csillósok között.

LANGnak megállapítása szerint sessiliseknek tekinthetjük azokat a nem parazita állatokat, amelyek életük egy bizonyos hosszabb szakaszán át nem képesek arra, hogy tartózkodási helyüket cselekvőlegesen, tehát saját mozgásszerveik segítségével elhagyják, táplálkozásuk azonban teljesen önálló (LANG, 1888). — A sessilizmusnak ezen meghatározása alapján, a Szívókások (*Suctoria*) zömétől eltekintve, a szorosabb értelemben vett Csillósoknak voltaképpen csak két csoportjában beszélhetnénk helytülő életmódról. Így a Csillókoszorúsak (*Peritricha*) túlnyomó többsége, továbbá a Tölcsérszájúak (*Chonotricha*) rendszeresen nyélen ülők, illetőleg apikális testvégükkel az aljzathoz vagy élő lényekhez nőttek s kifejlett állapotukban általában tényleg képtelenek arra, hogy önszántukból helyüket elhagyják. Figyelembe kell azonban vennünk már itt is azt, hogy a Suctoriusok közül a Sphaerophryák szívókarjaik segítségével, ha nehézkesen és lassan is, de mozogni mégis tudnak. A Peritrichusok csoportjában meg a Vorticellákról tudjuk azt, hogy kivételes esetekben leszállanak a nyélről s a hátulsó testvég közelében körkörösén kiképződött csillóöv segítségével önálló helyváltoztatásra képesek. A Gerdák pedig, legalábbis egyes szerzők felfogása szerint, egyenest szüntelen mozgóvá vált Peritrichusok.

A helytüléssel kapcsolatos alkatmódosulások.

Az említett két csoportban a Ciliata-szervezet messzemenően alkalmazkodott az aljzathoz kötött életmódhoz. Ezt a helytüléssel kapcsolatos alkatmódosulást röviden a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Másodlagosan ezek közelítették meg legjobban testforma tekintetében a sessilis lényekre túlnyomóan jellemző sugarasan részarányos, hengerded-alkatot (figyelman kívül hagyva a Prostonmata csoportot): szájnnyílásuk az aljzattól távoleső (distális), testük többé-kevésbé szabályos tölcser-, illetőleg harangforma, az

ezüstvonalak lefutása a szélességi köröknek megfelelően a test hosszanti tengelyére merőleges, és ennek megfelelően a rajzók hátsó csillókoszorúja cirkumpoláris menetű, a törzs myonémáinak elhelyezkedése a radiális symmetriaviszonyoknak megfelelően igazodik stb. A Csillósokra általánosan jellemző csavarmenetes alkat-típus (GELEI, 1936) azonban — nyilván a még pelágikus életmódot folytató elődök hagyatékeként az örvényszerv és a garattölcsér lefutásában még itt is kifejezésre jut, bár az örvényszerv külső szakaszának csavarmenet-lejtése pl. legtöbbször már annyira enyhe, hogy — különösen a többszörös menetek esetében — egészen közel áll a zárt körhöz.

2. Teljes mértékben redukálódott a helyváltoztató törzscsilló-zat, csupán a szabadon úszó rajzók vannak átmenetileg helyváltoztatást szolgáló csillózzattal ellátva.

3. Viszont ennek helyébe lép a törzsnek, vagy a nyélnek nagy-fokú kontraktilitása. A myonémák segítségével a törzs szükség esetén a védett házba vagy csőbe húzódhatik vissza, ill. a hosszú nyél összehúzódása révén a veszélyeztetett szintből a védelmet nyújtó aljzatra kerül a szervezet s ugyanakkor a váratlan mozgás esetleg meg is riasztja az ellenséget.

4. A magasabbrendű sessilis lényekre emlékeztetően a letelepedésnek itt is gyakori kísérő jelensége a ház-, illetőleg búvó-csőképzés.

5. Az idetartozó formák szájkloakások (GELEI kifejezése), amennyiben a szájgödri tölcserben nemesak a táplálékot nyelik le, hanem ugyane ide szájadzik a kiválasztó szerv is, meg az alynyílás is ide esik a garat bejáratához.

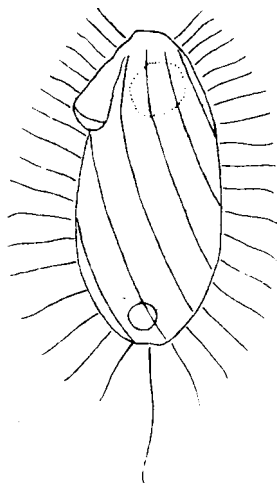
6. A helytűlő életmódhoz való alkalmazkodással magyarázhatjuk a Peritrichusoknak a Csillósok világában egyedülálló hoszszanti oszlasformáját is. Ez az oszlas mód ugyanis lehetővé teszi, hogy az orális és aborális helyzetű két legfontosabb szerv, a tápláléksodró (peristomium) és a lerögzítő (scopula) előrehaladott fejlődési stádiumba juthassanak, még mielőtt az oszlasból kikerülő utódok a telepen belül önálló életmódra kényszerűnének.

7. A helytűlő életmóddal kapcsolatosan rendszerint különböz, ú. n. «összetartó tényezők» (GELEI, 1935) is érvényesűlnek, melyek hatására a sejtoszlas után az új egyed nem válik el tökéle-

tesen az anyaállattól, vagy pedig annak közvetlen közelében telepedik le. Ez a magyarázata annak, hogy a sessilizmus gyakorta kapcsolatos a telep-, illetőleg áltelepképzéssel.

8. Végezetül, mint nem kizárólagosan jellemző, de kétségtelenül a sessilizmussal is kapcsolatos jelenséget megemlíthetjük, hogy a helytülő véglények egy bizonyos faunaterületen belül rendszerint igen nagy egyedszámban lépnek fel. Némely szerzők ebből arra következtetnek, hogy a sessilizmus révén a faj egy bizonyos meghatározott élettérben a rendelkezésre álló táplálékmennyiséget nagyfokban kihasználhatja. Figyelembe kell azonban vennünk ennél a kérdésnél azt is, hogy a sessilis lények csak egyetlen szintben, az aljzaton vagy a vízi tárgyak felületén telepedhetnek meg, holott a szabadonúszó formák ugyanakkor a három dimenziójú közegben szétoszolva, az egész vízteret benépesítik. Másrészt az előző pontban említett összetartó tényezők is közrejátszanak abban, hogy nagyobb számú sessilis lény valamely szűkebb, kedvezően megválasztott folton összetömörül s ha csak ezt a területet vesszük figyelembe, könnyen teszük ránk a túlnépesedés és vele a koplalás benyomását.

A sessilizmus fogalmát kissé tágabban értelmezve helytülő életmódról beszélhetünk azonban néhány, a Felemésillósakhoz (*Heterotricha*) tartozó nemzetség esetében is. Így az édesvízeinkben gyakori kürtállatkák (*Stentor*) alakjuk, szerveződésük és a környezethez való viszonyuk szerint nagymértékű hasonlóságot, sőt azonosságot mutatnak az említett két csoport sessilis képviselőivel 11(. ábra). Rendszerint az aljzatra telepedve élnek ezek is, illetőleg a víz tükörhártyájára kifekvő levelek alsó felén képeznek nyálkás bevonatot. Vagy a kihegyesedő hátsó testvég erre a célra alkalmas csillóinak, vagy pedig az ektoplazma állászerű nyúl-



1. ábra.
Cyclidium obliquum (?)
vázlatos rajza, élő állat
után. 2400.

ványainak segítségével kapaszkodik meg ilyenkor az állat. Helyüket azonban tetszés szerint bármikor elhagyhatják s ilyenkor félig, vagy egészen összehúzódott állapotban elevenen úszkálnak a szabad víztérben. Az édesvízi *Stentor*-félékkel közelrokon *Folliculidinae*-család csaknem kizárólag tengerben élő tagjai vízi növényekre és állatokra tapasztott pseudochitinszerű házaikban folytatnak helytülő életet (12. ábra). A *Heterotrichus*soknak eme két csoportjában a sessilizmus, amint említettük, jórészt alkalmoszerű, annyira, hogy egyes *Stentor*féléket alig lehet letelepedésre bírni. Ennek megfelelően a helytülő életmóddal rendszerint együttjáró alkati elváltozások ezeknél még elmosódtak. A test ugyan nagyjában kúp-, illetőleg kúrtalakú s az örvényszerv a test frontális részére tolódott fel itt is, a törzscsillózat azonban (az eredeti *holotrichus* állapotra emlékeztetően) még változatlanul fentmaradt. De a lüktető hólyag és az alnyílás ezeknél is a test mellső részébe nyomult, a Csillókoszorúsak szájkloakás állapotával szemben azonban itt mindkét szerv szájadéka az örvényszerven kívül — bár annak közvetlen közelében — helyezkedik el. A *Stentor*-félék tehát, mint kisebb fokban helyhez kötött lények, a Bryozoák ectoproctás állapotát ismétlik meg, viszont a végleg helyhez kötött harangállatkák ebből a szempontból entoproctáknak tekinthetők. (GELI, 1935 a).

Az akadályozott helyváltoztatás.

A Ciliátákat kétségtelenül a csillózat, ez az adott körülmények között ideális helyváltoztató rendszer emelte a sejtekre nem tagolt lények birodalmán belül a legelőkelőbb polera. Egészen természetes ez, ha meggondoljuk, hogy a faj elterjesztése, a biztonság, a lélegzés, főként azonban a táplálékszerzés szempontjából milyen nagy előnyt jelent a gyors és rendkívül változatos mozgások végzésére alkalmas csillóbunda. Annál érthetlenebb, hogy a pelágikus életmódot folytató Csillósoknak egy nagyobb, amint látni fogjuk, biológiai szempontból jól körülhatárolható csoportjában határozottan felismerhető egy általános érvényű, a szabad mozgás érdekével és követelményeivel homlokegyenest ellentétes hatású törekvés: *a szervezet a legváltozatosabb módokat és eszközöket használja fel arra a célra, hogy a motórikus csillók hajtóereje vagy egyáltalában ne, vagy*

pedig csak bizonyos szűkre szabott határok között érvényesülhessen. Ez a jelenség annyira érdekes és tanulságos, hogy megérdemli legteljesebb figyelmünket. Ezzel a ténnyel kapcsolatos, hogy maguknak a helytűlő lényeknek sora nem merül ki azokkal a formákkal, amelyekkel fentebb megismerkedtünk. Ezeken túlmenően is igen nagy azoknak a Csillósoknak a száma, melyekre kisebb-nagyobb fokban az aljzathoz kötöttség a jellemző, sőt — ha mindjárt nem is olyan kifejezetten mint amazoknál — ez az életmód is rányomja a szervezetre a maga sajátos, a sessilisekével bizonyos vonatkozásban teljes mértékben azonos bélyegét. Ezen Csillósok tanulmányozásából kiderül, hogy a sessilis lények voltaképpen csak szélsőséges és gyökeres megvalósítói egy nagyobb Ciliata-csoportra általános érvényű, de céljában és jelentőségében ma még csak sejtett élettani elvnek. Hiányos lenne a sessilizmus elterjedéséről alkotott képünk, ha legalább nagy vonásokban nem tájékozódnánk ezeknek a «fél-sessilis», a vízben tényleg szabadon mozgó és az igazi helytűlő lények között az átmenetet képviselő formákról is, de különösen szükséges velük megismerkednünk akkor, ha a Csillósok világában a sessilizmus értelmét és jelentőségét helyes megvilágításban akarjuk látni.

Az áttekinthetőség kedvéért leghelyesebb lesz, ha az idetartozó Ciliatákat, az előzőkben ismertetett igazi sessilis Csillósokkal együtt, szabad mozgásuk kifejtésében akadályozó alkat-, ill. működésbeli berendezéseik alapján csoportosítjuk. Látni fogjuk, hogy ezek alkalmazásánál elsősorban négy fő elv (a csillózat időleges megbénítása, a test megtámasztása, az alakellenállás növelése, a test kipányvázása) érvényesül s megadott sorrendjük egyben a mozgásgátlás érdekében fellépő alkatbéli elváltozások mértékét, a jellegzetes sessilis lények szervezete felé haladó fokozatokat is jelenti.

a) *A helyváltoztató csillózat időszakos megbénítása.*

A szervezet a kívánt célt, a helyváltoztatás korlátozását, legegyszerűbben a csillóbunda élettani befolyásolásával érheti el, így tehát a nélkül, hogy ehhez bármiféle alkatmódosulásra, vagy különleges szervecskék kiképződésére volna szüksége.

A holotrichus, tehát az ősi, teljes és egyforma csillózatú fokon

rendes körülmények között a csillók játéka soha meg nem szűnik, az idetartozó lények köztudomás szerint a víztér örökké mozgó vándorai. Ez a megállapítás azonban, ha egészen szabatosak akarunk lenni, tökéletesen csak a ragadozó Csillósokra illik. Ha egy örvénylő holotrichus lényt, pl. Paraméciumot figyelünk hosszabb ideig, az állat egyszerre csak minden látható ok nélkül megcsendesedik és lassankint leereszkedik az aljzatra. Azok a csillók, amelyekre az állat ilyenkor nehezedik, tehát amelyek az aljzatot vagy idegen tárgyat közvetlenül érintik, mozdulatlanokká válnak, a többiek azonban rendszerint tovább csapkodnak. Működésük azonban bágyadt, erőtlen és észrevehetően rendszertelen, vibráló. Semmiféle lényeges változás sem észlelhető azonban a tápláléksodrás szolgálatában álló, ú. n. nutritikus csillókon vagy synciliumokon! A Paramécium szájteknőjét kibélelő csillók, valamint a szájgödri membranellák ilyenkor is változatlan heveséggel csapkodnak tovább.

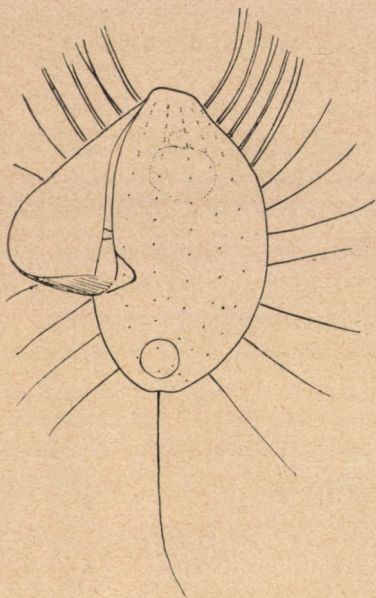
Ez a jelenség VERWORN (1879) után nem valami szerencsés elnevezéssel thigmotaxis, tehát tapintásból irányított mozgás nevének már régóta ismeretes az irodalomban. Nem lehet találni minősíteniünk ezt a kifejezést, mert — amint azt az alapos megfigyelés igazolja — *magához a letelepedéshez* a tapintási ingernek vajmi kevés köze van. Az állat mozgása ugyanis nagyon sokszor lelassul, a test leereszkedik már jóval azelőtt, mint sem a csillók bármiféle szilárd tárggyal érintkezésbe juthatnának. A helyváltoztató csillók működését beszüntető, vagy csak lelassító gátló ingerhatást tehát elsődlegesen nem a csillók által érzékelt külső erőművi inger váltja ki, hanem annak forrása föltétlenül bent a szervezetben, valószínűleg annak bizonyos adott élettani állapotában («éhség») keresendő, adott időpontban való jelentkezése pedig a detritustörmelék vagy baktérium-halmazokból származó vegyi ingerhatással kapcsolatos. A csillók rendes mozgását befolyásoló hatás a közvetlen érintkezés alkalmával már csak legfeljebb erősödik. Ezt a megállapítást támogatja egyébként az a már szintén régóta ismeretes megfigyelés is, amely szerint, ha az állat gyors száguldása közben ütközik valamilyen szilárdabb tárgyba, letelepedés helyett azzal éppen homlok-egyenest ellenkező válasz, a hőkölés következik be.

A csillóknak ez az ú. n. thigmotactikus megbénulása külön-

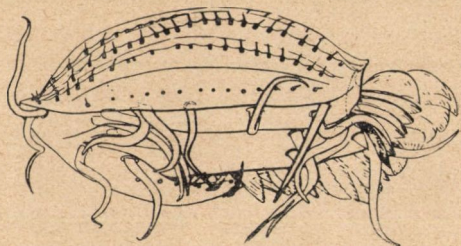
bőző fokú lehet ugyanazon állaton is. Szorítkozhatik csak egy bizonyos csillócsoporthoz, de ritka szélsőséges esetekben kiterjeszkedhetik az egész csillóbundára is (lokális ill. totális th.). Bizonyos esetekben feltétlenül számolnunk kell azzal a lehetőséggel is, hogy a csillók megdermedésük alkalmával valami ragadós, nyálkaszerű anyagot választanak ki, ami az állat egyhelyt való megrögztetését jelentékenyen elősegíti (*Lionotus*- és *Bryophyllum*-félék). E nélkül ugyanis nehezen tudnók megmagyarázni azt az elég gyakorta tapasztalható jelenséget, hogy a *Paramecium* a hátsó testvégével érintett, testénél esetleg jóval nagyobb tömegű detritus rögöt nagyobb távolságon át magával hurcolja. Ez a nyálk kiválasztás azonban nem lehet szükségszerű kísérő tünete minden egyes letelepedésnek, mert hiszen bármilyen erősebb külső ingerhatásra, legyen az akár vegyi, akár erőművi természetű, a letelepedett állat villámgyorsan és minden észrevehető küzködés nélkül iramodik tova.

b) *A test megtámasztása.*

Kisebb fokú «thigmotaxis» a Csillósok világában igen gyakori, a Holotrichusok között talán éppen általánosan elterjedt jelenség. Mégis, különösen nagy szerepet játszik a *Hymenostomata*-subordó *Pleuronematidae*, továbbá bizonyos szempontból a *Philasteridae* és *Lembidae* familiáiban, ahol — amint arra a *Cyclidium glaucoma* példáján rámutattam (1936) — a rendszeresen úzótt letelepedéssel az állat szervezetében, főként csillózatával kapcsolatban többféle, a sessilizmus hatására emlékeztető alkatbéli elváltozás jár együtt. A szervezet itt nem elégszik meg azzal, hogy időnként csak egyszerűen beszünteti a csillók működését, hanem azokat úgy képezi ki és akként használja fel, hogy megállításuk után a véglénytest rajtok nyugodva helytmaradását tökéletesen biztosítani tudja. A szóbanforgó holotrichus csoportban ugyanis a fejlődés rendjén különleges csillomódosulat lépett fel, amely főként hatalmas méretével és merev tartása révén tér el az általánosan elterjedt csillóféleségtől. Letelepedéskor mármint az állat ezeket a csillókat fesszesen messze szétterpeszti úgy, hogy a test lehorgonyzásánál valóssággal a mechanikából ismeretes «nagy támasztófelület elve» érvényesül (2. ábra).



2. ábra. Szétterpesztett csillókkal az aljzaton nyugvó *Cyclopidium glaucoma*; a test jobboldali peremén a kibontott, hatalmas szájtitorla.



3. ábra.
Járólábaival az aljzaton mászkáló
Euplotes muscicola
(GELEI nyomán).

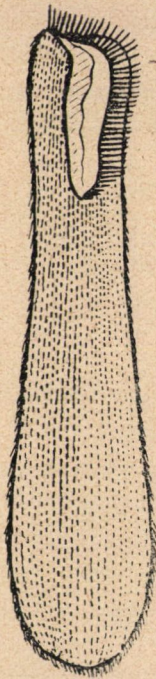
c) Az alakellenállás növelése.

Végig tekintve a csillós szervezetek során, szinte végnélküli sorát találjuk az olyan szervezeti elváltozásoknak és szervecskének, amelyek a csillók munkahatását egészen más elv alapján gyengítik. Valamennyi idetartozó képződménynek élettani hatása — a test tengelytartásának biztosítása mellett — mindenesetre abban nyilvánul, hogy az illető szervezetnek surlódó felülete, tehát alakellenállása nagymértékben megnövekszik.

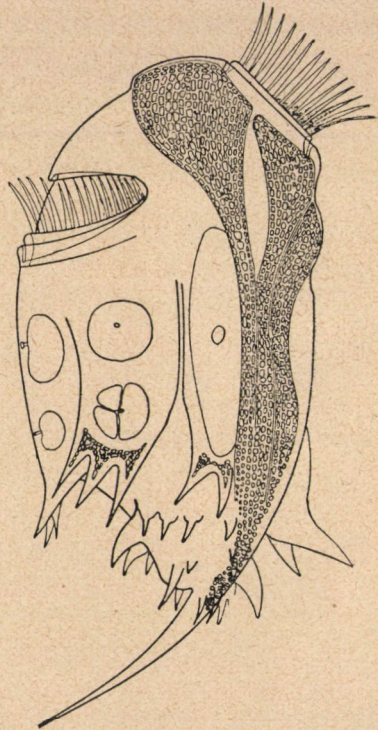
Elméleti számítások, megfigyelések, de különböző modellkísérletek tanúsága szerint is a vízben élő mikroorganizmusok szempontjából a sima felszínű könnyeseppalkat a legkedvezőbb hydrodynamikai forma (GELEI, LUDWIG, PÁRDU CZ). Mégis, ha a csillókat ebből a szempontból tanulmányozzuk, feltűnik, hogy álta-

lában csak a ragadozók, s közülük is főként a *Prostomata*-csoportbeliek testformája felel meg a mozgásmechanikai követelményeknek. Így a *Holophrya Spasmostoma*-, *Urotricha*-, *Plagiocampa*-, *Prorodon*-, *Lagynophrya*-, *Placus*-, *Lacrimaria*-, *Enchelys*-, *Chaenea*-, *Didinium*-, *Coleps*-, *Spathidium*- stb. nemzetségek testalakja többé-kevésbé megközelíti a minimális, tehát körátmetszetű szabályos orsó, ill. tojásformát. A *Pleuro*- és *Hypostomata* tribusokban ezt a helyváltoztatás szempontjából optimális alkatot némileg megzavarta ugyan a száj hátravándorlása (hypostomia), az igazi pelagikus ragadozók, tehát amelyek «vadásznak» a víztérben mozgó zsákmányra, lándzsa, ill. kissé torzult tojásformájú teste még mindig, a csillók nagyobb energiapazarlása nélkül, könnyűszerrel tudja hasítani a vizet. A csillósok többi csoportjaiban azonban, legyenek azok igazi, tehát detritussal és baktériummal táplálkozó örvénylők, akár olyan «ragadozók», amelyek a szájkörnyéki csillók erős vízsdoró munkája segítségével seprik be a kisebb csillós vagy ostoros lényeket a szájtölcsérbe, már a legszeszélyesebb és szabálytalanabb, s a *dinamikai követelményekhez egyáltalában nem igazodó formaváltozatokkal* találkozunk. Ilyenszerű jelenségre egyik nemrégiben megjelent dolgozatomban már rámutattam (1936). A Csillósok világán belül ugyanis gyakorta találkozunk csavarmenetes testalkattal, testfelületi csavarmenetes lefutású képződményekkel. pellikuláris tarajozottsággal stb., amelyek a símára gyalult tojásformát a helyváltoztatás érdekét tekintve kedvezőtlen irányban módosítják. Ezekről azonban kiderült, hogy különböző, főként a táplálkozás mechanikájával és az alakmegtartással összefüggő fontos biológiai érdekek fellépésüket teljes mértékben indokoltá teszik. De tudunk az említetteken túlmenőleg olyan alkati elváltozásokról, olyan különleges testformákról is, amelyekben rendszerint semmi szabályszerűség, symmetria nem ismerhető fel, s még kevésbé tudunk azoknak — első tekintetre — valamelyes élettani jelentőséget tulajdonítani. Így ismerünk veszeformájú Csillósokat (*Colpoda*, *Tillina*, *Bresslaua*, *Bryophrya*, *Woodruffia*, *Conchophthirus*, *Trichopelma*, *Microthorax* stb. félék), hossztenge-lyük szerint erősen összenyomott és a mellett szabálytalan (*Metopus*, *Caenomorpha*), máskor meg hosszukban feltűnően megnyúlt, kigyóra vagy féregre emlékeztető (*Spirostomum*, sok *Blepharisma*,

Condylostoma) formákat. A hosszúra kihúzott hátsó testvég csillózata rendszerint gyér, vagy tökéletlen, s így a test jórésze helyváltoztatáskor valósággal haszontalan teherként szerepel (*Strombidium*, *Condylostoma*, 4. ábra) különösen abban az esetben, ha az örvényszerv intenzívebb működésével egyidejűleg a testesillók



4. ábra. *Condylostoma patens* vázlatos rajza. A test hosszanti vonalai a csillósorokat jelzik.

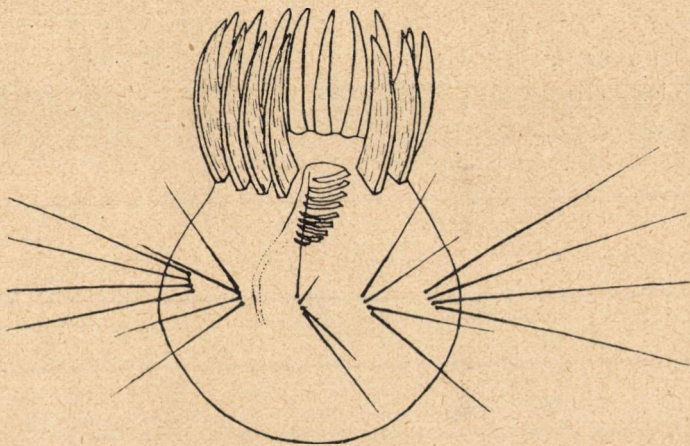


5. ábra. *Ophryoscolex caudatus* félvázlatos rajza, 500x (MAC LENNAN nyomán).

csapkodása meggyengül. A *Bursaria*-félék, amint nevük is mutatja, testükkel a helyváltoztatás közben előre tekintő táskát utánoznak. A bizarrságig szeszélyes, semminemű ismert tárgyhoz nem hasonlítható, nagyon sok csillós lény, így pl. a *Ctenostomata*-subordó valamennyi tagja, stb. stb.

Nem kétséges, hogy elsősorban a mozgásmechanikai szem-

pontból kedvezőtlen testforma a felelős azért, hogy a felsorolt, túlnyomórészt vagilis örvénylő életmódot folytató csillósok mozgása a ragadozókéhoz viszonyítva feltűnően lomha és lassú. De élet-tanilag ugyanezt eredményezi, esetleg már csak a kedvezőtlen testforma fékező hatását erősíti, a hátul messzire kinyúló csillótlan *faroktüske* (*Caenomorpha*, *Condylostoma*, *Strombidium*, *Entodiniomorpha*-félék, 5. ábra), ill. a kaudálisan sokszor többszörös test-hosszúságnyira hátranyúló, valósággal *uszályként vonszolt* kisebb-nagyobb számú *flagellumnak* (a *Ctenostomata*k közül a legtöbb



6. ábra. *Halteria decemsulcata* vázlatos rajza, a fékezés érdekében megmervített oldalsórtékkal.

Mylestoma, *Discomorpha*, sok *Metopus*-féle) vagy *membranellának* is, amelyek a helyváltoztatásban cselekvőlegesen soha részt nem vesznek.

Érdekes és rendkívül tanulságos, de lényegében azonos elv alapján működik az a berendezés, amelynek segítségével a *Halteria*-félék igyekeznek bizonyos körülmények között helyváltoztató mozgásukat lefékezni. Ezeknek a labdaformájú állatoknak törzscsillózata néhány hosszúra megnyúlt aequator-menti, ú. n. ugró-sörtére redukálódott (6. ábra), amelyeket azonban fő hivatásuk szerint sokkal inkább nevezhetnénk *fékező sörtéknek*. Motórikus csillózat hiányában az állat a szájkörüli membranella-koszorú

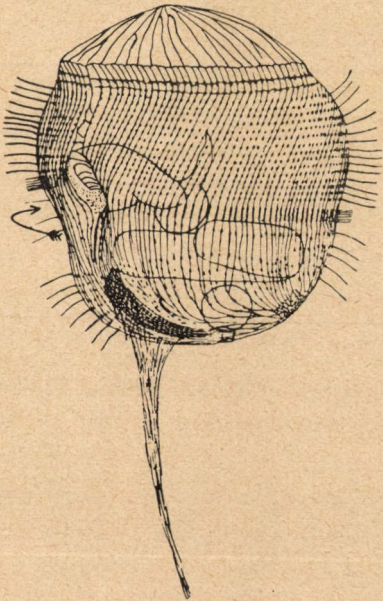
segítségével változtatja a helyét. Ha új vadászterületre akar jutni, akkor membranelláival kifelé csapkod, az *oldalsórtéket hátrafelé csapja*, s ilyenkor villámgyorsan száguld előre a víztérben. Sokkal gyakrabban figyelhetjük azonban az állatot planktontikus táplálkozása közben. A membranella-koszorú ilyenkor befelé, a szájtölcsérnek irányuló örvényt kelt, de közben természetsszerűleg a test is mozog ellenkező irányban. Feltűnő mármost az, hogy az egyébként mozgékony hosszú oldalsórték ilyenkor nem hajolnak hátrafelé, hanem a testfelületre merőlegesen, *feszesen, messzire elállanak*, úgy hogy az általuk lefékezett állat csak lassan haladhat előre. A sórték időközönként hátracsapnak s ilyenkor a Halteria villámgyorsan ugrik egyet-egyet kisebb-nagyobb távolságba. — A *Hastatella*-félék kettes vagy négyes számban kiképződött plazmatikus tövískoszorúja kétségtelenül a Halteriák fékező-sórtéivel azonos elv alapján működő, az alakellenállás növelését szolgáló állandósult képződmény.

d) *A test kipányvázása.*

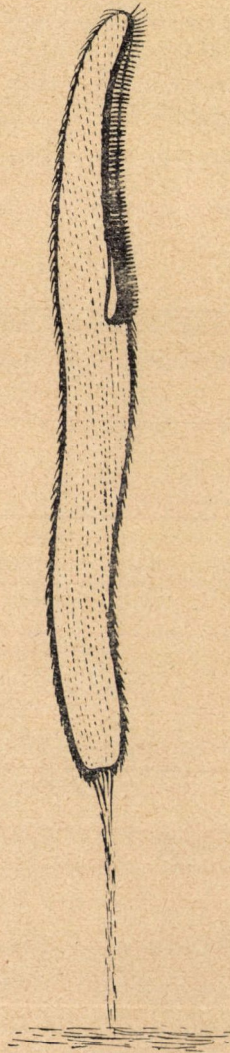
A Csillósokat szabad helyváltoztatásukban korlátozó berendezéseinek, illetve képződményeinek utolsó nagy csoportját a ragadós nyálka-, kocsonya- és plazmafonalak alkotják.

Már a thigmotaxis tárgyalásánál láttuk, hogy a csillós lény letelepedését bizonyos esetekben a szervezet által kiválasztott ragadós, nyálkás állomány is elősegítheti. Úgy látszik a csillóknak, valószínűleg a tengelyszál szabad végének van meg elsősorban ez a sajátos képessége, amely azonban rendszerint csak egy bizonyos testtájék csillózatára szorítkozik. Így tudjuk, hogy sok *Blepharisma*-, *Maryna*-, *Mycterothrix*- és *Microthorax*-faj *kaudális csillóbojt* segítségével tapasztja magát a legkülönbözőbb vízi tárgyakhoz, ill. az állat által kiválasztott nyálka-kocsonyás ház aljához, viszont az *Ancystruma*-, *Boveria*-, *Hemispaira*-nemzetségek tagjai az elülső testvég csillóinak tapadosságával tűnnek ki. Sok esetben a kiválasztott ragasztó állomány mennyisége jelentékeny. Az *Urocentrum*ról (7. ábra) és *Spirostomum*ról (8. ábra), továbbá néhány *Strombidium* (pl. *S. filificum*)- és *Strobidium* (*gyrans*)-féléről állapították meg már régen, hogy a kaudális csillóknak egy bizonyos csoportja időnként *hosszú nyálkafonalat* izzad

ki, s az állat ennek végén hosszabb időn át pergó vagy ingaszerű mozgást végez. A *Trichostomata*-subordóbeli *Lagenellidae*-család tagjairól nemrégiben mutatták ki, hogy időnként *hosszú, kocsonyás állományú fonalak* segítségével ezek is rendszeresen az aljzathoz tapadnak. A Peritrichusok közismert *nyélképződménye* kétségtelenül ezeknek az esetről-esetre képezett nyálka és kocsonyafonalaknak tökéletesedett és állandósult formája. Ezek sem a testnek közvetlen protoplazmás folytatásai, hanem a *Spirostomum*-, *Urocentrum*-félék nyálkafonalainak meg-



7. ábra. *Urocentrum turbo* a caudális testvégen kibocsájtott nyálkafonállal (GELEI nyomán).



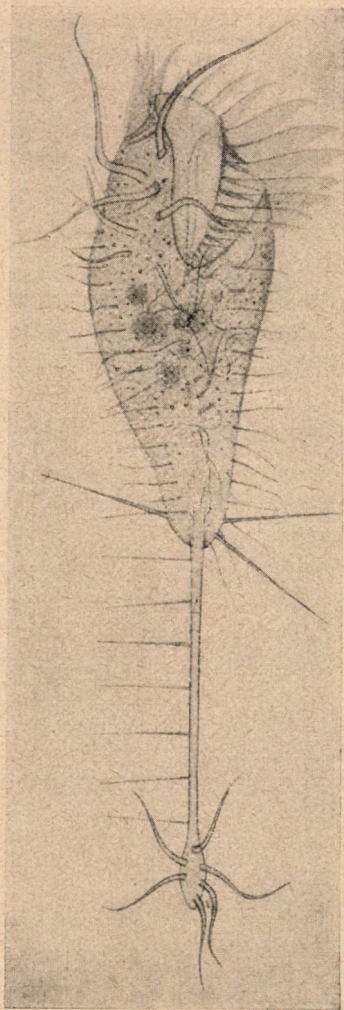
8. ábra. Nyálkafonallával az aljzathoz kapaszkodó *Spirostomum ambiguum*.

felelően a szervezet elválasztási termékei. A legtöbb *Epistylis* nyele rendszerint még tömör képződmény (9. ábra), egyebütt azonban már csőszerű, amelyben a *Vorticella*-, *Carchesium*- és *Zoothamnium*-féléknél erőteljes izomszallagocskák is kiülönödtek.

Egészen más természetű, de mégis ebbe a csoportba tartozik a *Tintinnidae*-család, a Tontoniák, továbbá néhány *Strombidium*- és *Hypotrichus*-faj régóta ismeretes nyélképződménye is, amelynek már nem vegyi termék, nyálka vagy kocsonya az állománya, hanem itt maga a *testplazma húzódik ki fonalszerűen*, sokszor a közelében lévő cirrusokkal együtt (*Ancistropodium maupasi*, l. 10. ábra, *Micromitra*-félék). Szere-



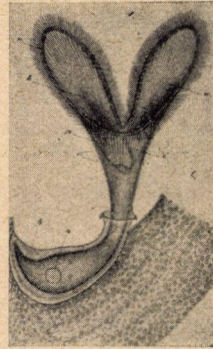
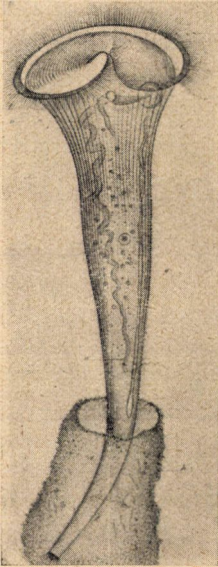
9. ábra. *Epistylis ovum* telep
három egyéne
(STILLER J. nyomán).



10. ábra. «Láb»-képződménye segítségével az aljzatra lehorgonyzott *Ancistropodium maupasi*, a hasoldaláról tekintve (FAURÉ-FREMIET nyomán).

pük ugyancsak a test lehorgonyzása, s állományukból kifolyólag szintén természetszerűleg összehúzókonnyak. Ide sorozhatjuk azokat az ugyancsak plazmatikus eredésű *állászerű képződményeket* is, amelyek főként a *Stentor*-félék családjában (11. ábra) szolgálnak a testvég átmeneti lerögztésére.

A lehorgonyzás céljait szolgáló képződmények sorában meg kell még említenünk a *Licnophoridae*-család, valamint a *Peritrichusok*tól újabban külön subordóként elkülönített *Urceolaria*-csoport tagjainak felépítésében lényegében azonos, mégis mindkét helyen függetlenül (konvergencia) kiképződött «*tapadó korongját*» (13. ábra).

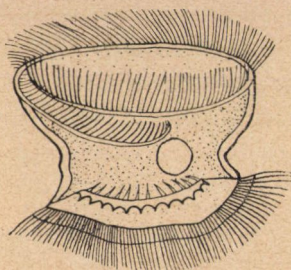


11. és 12. ábra. Aljzatra telepedett *Stentor* és *Folliculina*, a hátsó testvég körül kiképzett zsák-, illetőleg palackformájú házzal. (STEIN nyomán).

Ennek pontos szerkezetével és működésével még nem vagyunk teljesen tisztában. Bizonyos esetekben kétségtelenül megállapították azt, hogy valóságos tapadókorongként szerepel, a legtöbb esetben azonban mégsem tapad meg vele az állat egyhelyt, hanem az aljzaton vagy a gazdaállat felületén körözve mozog. PENARD magyarázata szerint ez a korlátozott mozgékonyosság a hátsó testvéget övező csillózsínór és a korong együttes működésének az eredménye. A pectinella-koszorú mozgató ereje hátrafelé irányul, tehát az aljzathoz igyekszik húzni, szorítani az állatot, ugyanakkor

azonban a tapadó korong membranellái a szükséges mértékben ellensúlyozzák ezt a lerögzítő hatást.

A tények kellőképpen beszélnek maguk helyett: az örvénylő életmódot folytató Csillósok csoportján belül nem találunk egyetlen formaváltozatot sem, amelynek testfelépítésével, testének külső alakjával kapcsolatban mozgásmechanikailag kedvezőtlen vala-



13. ábra. *Urceolaria* vázlatos rajza a száját övező csilló-zsinórral és a talp tapadó-készülékével.

melyes elváltozásra vagy a szabad mozgást korlátozó, esetleg azt teljesen meg is akadályozó képződményre rá ne tudnánk mutatni, illetőleg amelynek legalább élettani viselkedésében a gyakori letelepedésre való hajlandóságot («thigmotaxis») ne tapasztalnók. Ugyanakkor azonban azt is megállapíthatjuk, hogy az általában pelágikusaknak tekintett és az igazi sessilis lények között teljesen elmosódott a határ. Számos átmeneti tag kapcsolja a két élettani csoportot egymáshoz s ezek nagy részén kisebb-nagyobb mértékben ugyanazokat az alkati elváltozásokat ismerjük fel, amelyek a tipikus sessilis lényekre közismerten jellemzőek. Nyilvánvaló tehát, hogy a sessilizmus jelentőségének megítélésekor itt nem szabad és nem elegendő a jellegzetesen helytülő formákból kiindulni. Ugyanaz az ok, amely ezek letelepedését kiváltotta, megvan és érvényesül — ha nem is olyan határozott formában — valamennyi fentebb ismertetett csillós szervezeten is; a kérdés illetéknéppen tehát nemcsak egy szűkebb Ciliata-csoportra szorítkozó, hanem valamennyi szóbanforgó csillósszervezetre kiterjedő és megvizsgálandó jelenség.

Irodalom. — Literatur.

CORI, C. (1928): Über die Entstehung der festzitzende Lebensweise im Tierreich. Prag.

DEGENER, P. (1912): Lebensweise und Organisation. Leipzig.

DOFLEIN-REICHENOV (1927): Lehrbuch der Protozoenkunde. Aufl. 5. Jena.

- FAURÉ-FREMIET (1922): La fixation chez les Infusoires Ciliés. Bull. Sc. de la France et de la Belgique. T. XLIV.
- GELEI, J. v. (1926): Cilienstruktur und Cilienbewegung. Verh. d. Deutsch. Zool. Gesel. Jahresvers. zu Kiel Bd. 31.
- GELEI, J. v. (1928): Zum physiologischen Formproblem der Wasserorganismen. Arch. Balatonicum. Bd. 2.
- GELEI, J. v. (1935): Das Entstehen u. die Entwicklung d. Scheinkolonie von Vorticella camp. Zool. Jahrb. Bd. 67.
- GELEI, J. v. (1935a): A véglények kiválasztó szerve. Mat. és Term. tud.-i Közl. Bd. 37.
- GELEI, J. v. (1936): A csavarmenetes vagy kochlioid alkattypus a csillósok világában. Állattani Közl. Bd. 33.
- HESSE-DOPFLEIN (1914): Tierbau. Tierleben. Bd. 2. Leipzig.
- HENTSCHEL, E. (1923): Grundzüge der Hydrobiologie. Jena.
- JENNINGS, H. (1897): Studies on reactions to stimuli in unicellular organismus. Journal of Physiologie. Vol. XXI.
- KAHL, A. (1930—33): Urtiere oder Protozoa. I. Wimpertiere o. Ciliata. In Dahl's Tierwelt Deutschlands. Jena.
- KEISER, A. (1921): Die sessililen peritrichen Infusorien und Suctorien. Geneve.
- LANG, A. (1888): Über den Einfluss der feststehenden Lebensweise auf die Tiere. Jena.
- LUDWIG, W. (1930): Zur Theorie der Flimmerbewegung. Z. Vergl. Physiol. Bd. 13.
- LÜHE, M. (1913): Protozoa. Handb. d. Morphologie. I. Jena.
- PÁRDUCZ, B. (1935/): Das Entstehen der strudelnden Ernährungsweise in der Gruppe Hymenostomata. Acta Biologica. Tom. III.
- PÁRDUCZ, B. (1935—36): Beiträge zur phylogenetischen Ableitung der Hymenostomata Infusorien. Arb. d. I. Abt. d. Ung. Biol. Inst. Bd. 8.
- PÁRDUCZ, B. (1936): Über die biologische Bedeutung des schraubigen Körperbaues der Ciliaten. Acta Biologica. Tom. IV. Fasc. I.
- PÁRDUCZ, B. (1936a): Sessilis örvénylők a Holotrichusok csoportjában. Előadva a szegedi egyetem B. E. term. tud.-i szakülésén. (1936. dec. 2.)
- PÜTTER, A. (1900): Studien über Thigmotaxis bei Protisten. Arch. f. Physiologie. Supplement-Band.
- VERWORN, M. (1897): Allgemeine Physiologie. Jena.
- WEBER, M. (1911): Lehrbuch der Biologie. Leipzig.
- WESENBERG-LUND (1929): Rotatoria. In Kükenthal's Handbuch der Zoologie. Bd. 2.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1938. márc. 21-én tartott üléséből.)

STRUDELNDE LEBENSWEISE UND SESSILITÄT.

I. Sessilität bei den Ciliaten.

Mit 13 Textabbildungen.

Von B. PÁRDUCZ.

1. Die Reihe der festsitzenden Ciliaten wird durch jene Formen, die bisher auf Grund der strengeren Formulierung der Sessilität im Allgemeinen als sessil betrachtet wurden, nicht erschöpft, da

2. in der grösseren biologischen Gruppe der Ciliaten («Strudler») der Organismus in mannigfaltigster Weise und mit verschiedensten Mitteln bestrebt ist, die vorwärtstreibende Kraft der motorischen Cilien zu hemmen.

3. Diese Bewegungshemmung äussert sich:

a) in einer zeitweisen Lähmung der locomotorischen Ciliatur (Thigmotaxis) ohne besondere Gestaltumwandlung;

b) in der besonderen Stütze dieses thigmotaktisch festsitzenden Ciliatenkörpers; zu diesem Zwecke dienen die eigenartig modifizierten (verlängerten und erstarrten, bzw. zu Cirren umwandelten) Cilien;

c) durch Ausbildung hydrodynamisch ungünstiger, launenhafter und plumper Körperformen, bremsender Borsten usw. in der Steigerung des Formwiderstandes und letztens

d) in der Ausbildung von klebrigen Schleim-, Gallert-, oder Plasmastielen, die den Organismus vorübergehend oder ständig an das Substrat befestigen. (Zu Letzteren gehören die charakteristischen sessilen Protisten.)

4. Infolge der aufgezählten bewegungshemmenden Einrichtungen besteht ein stufenweiser Übergang zwischen der vagilen und echten sessilen Lebensweise; gleichfalls nähern sich die vagilen Ciliaten stufenweise auch in ihrer Gestaltung und Organisation dem charakteristischen (reduzierten u. modifizierten) Körperbau der festsitzenden Organismen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 21. März 1938.)

MAGYARORSZÁG HELEIDÁI.

ZILÁHI—SEBESS GÉZÁ-tól.

(Ismertetés.)

A dolgozat rendszertani és faunisztikai irányú s két részből, ú. m. az általános és rendszeres részből áll. A rövid általános részben is az utóbbi jelleg van kidomborítva, amennyiben e néhány oldalon a Heleidák morphologiai jellemzésén és a rendszerük kialakulásának ismertetésén van a hangsúly. A feldolgozás módját csak röviden ismertetem. A munka fő részét a meghatározó-táblázatok és a fajok ismertetése képezi.

A *Heleidák* azok közé a fonalas csápú (*Nematocera*) két-szárnyú (*Diptera*) rovarok közé tartoznak, melyeknél a lárváknak jól elkülönült fejük van (*Eucephala*). (Ordo: *Diptera*; subordo: *Orthorrhapha*; Tribus: *Nematocera*; sectio: *Eucephala*.) A rájuk vonatkozó európai irodalom leginkább a MEIGEN, ZETTERSTEDT WINNERTZ, KIEFFER, GOETGHEBUER és EDWARDS nevéhez fűződik. Hazánkból főleg STROBL, THALHAMMER, KERTÉSZ K. és KIEFFER munkáiban találunk idevonatkozó adatokat. Az említett magyar szerzők dolgozatait természetesen felhasználtam, de munkám első-sorban a Nemzeti Múzeum gyűjteménye és a SZILÁDY, valamint sajátmagam által begyűjtött anyag vizsgálatán nyugszik. A múzeumi típuspéldányok vizsgálata alapján sok KIEFFER-féle leírást helyesbítenem kellett; két genust (*Bezzia* + *Dicrobezzia* = *Bezzia*.) és néhány fajt pedig synonymaként összevontam.

A határozó táblázatok összeállítása alkalmával arra törekedtem, hogy a megkülönböztető bélyegek lehetőleg olyan részekben legyenek, melyek jól láthatók és a sérülés veszélyének aránylag kevéssé vannak kitéve. Arra is törekedtem, hogy a felhasznált bélyegek segítségével az összetévesztés lehetőségét csökkentsem.

E miatt alaposan tanulmányoztam a törzs és szárnyak felhasználhatóságát, de nem tévesztettem szem elől a csápok és a lábak sajátosságait sem. Különösen a szárny bizonyult célom elérésére alkalmasnak. Az erezet lefutásának részletei, különösen a mediális és cubitális erek elágazásának a harántérhez (radiomedális ér) való viszonyítása, továbbá a radiális «sejtek» alakulása útján jutunk igen jó, sokszor a fajokig elvezető bélyegekhez. Ugyancsak felhasználhatónak bizonyult az esetleg meglevő szárnyszőrözet elhelyezkedése is. Ezért vizsgálataim alapján az erezetet és a szárnyszőrözetet sokkal kiterjedtebben alkalmaztam a meghatározó táblázatokon, mint a *Heleidákkal* foglalkozó elődeim: KIEFFER, EDWARDS, GOETGHEBUER, MACFIE stb. A csápon és lábon található jellegzetességeket csak ott használom, ahol a szárny már nem ad további felhasználható alapot. Ritka esetben alkalmazok olyan bélyeget, amely miatt a vizsgálati anyagon rongálást kell okozni. (Pl. a *Dasyhelea sericata* WINN. és a *Das. sericatoides* n. sp. szétválasztásánál a hypopygium vizsgálata.) A színezetre alapított megkülönböztetéseket igyekszem kiküszöbölni. Ahol ilyent alkalmaztam, azt csak olyankor tettem, amikor azok igen feltűnő, jól észlelhető különbségek. Táblázataim tehát főleg abban különböznek a korábbi szerzők táblázataitól, hogy a szárnyerezetet, mint morfológiai adottságot fokozott mértékben felhasználom, a színezet alapján való megkülönböztetést pedig (amin a korábbi szerzők táblázatainak jórésze alapult), ahol csak lehetett, háttérbe szorítottam.

A feldolgozás során sokszor igen nagy nehézségeket okozott az a körülmény, hogy a különböző szerzők új fajainak (novum) leírása nincsen egységes alapon. Nem egy esetben ugyanaz a szerző, ugyanazon munkájában, ugyanazon nemzetségen belül más-más szempontok szerint írja le a fajokat. Ez a mód lehetlenné teszi az összehasonlítást és biztos megkülönböztetést. Ezen a helyzeten változtatni szándékoztam azért, hogy a hazai fajokat egységes szempont (norma) szerint írtam le. Egy genus keretén belül minden fajon mindig ugyanazokat a bélyegcsoportokat ismerttettem.

Csaknem minden hazai fajnál vizsgálat alá vettem a hím párzós szervét (aedeagus) is. E szervnél jelentős különbségek jelent-

keznek. A írásoknál egyelőre csak annak a megemlítésére szorítokozom, hogy szimmetrikus képződésű-e, vagy asszimmetrikus. — Az egyes részek elnevezése (terminológiája) még nincs tisztázva, eredetük, fejlődésük kikutatása is további vizsgálatot kíván. — Ez alkalommal csak az alakjukra vonatkozó rajzokat közlöm (a hypopygiumrajzokon).

Állatföldrajzi összefoglalást az elterjedési adatok hézagossága miatt nem közölhetek, csupán arra szorítokozom, hogy felsorolom minden fajnál a hazai termőhelyeket. Annyit azonban meg lehetett állapítanom, hogy hazánk *Helicida*-faunájában mediterrán, északi, keleti és nyugati elemek egyaránt találhatók, de nagyon sok az olyan faj is, amely jelenleg — nyilván ismeretünk hézagos volta miatt — «endemikusnak» mondható.

A leíró részben 16 genus keretében 153 fajt ismertettem. Az irodalomból több faj, illetőleg elnevezés adódna, de a tévedésből felvett fajok kiküszöbölése és a szinonimák kirekesztése után csupán ennyi maradt meg.

Ez az Értesítőben közölt néhány oldal csak rövid ismertetése körülbelül 150 gépírással oldala terjedő dolgozatommak, amelyhez 3 táblát mellékelek. Az eredeti tanulmány más folyóiratban fog egész terjedelmében megjelenni.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. jún. 20-án tartott üléséből.)

HELEIDEN AUS UNGARN.

G. v. ZILAHÍ—SEBESS.

Zusammenfassung. In meiner Arbeit, die ausführlicher an einer anderen Stelle erscheinen wird, gebe ich die Beschreibungen und Bestimmungstabellen für jene *Heleiden*-Arten (153 Arten, 16 Gattungen, darunter auch neue), welche heute aus Ungarn bekannt sind. Nach den Untersuchungen der Typen korrigiere ich die Beschreibung einiger KIEFFERSchen Arten. Auf Grund der neuen Art *Bezzia paradoxa*, die Gattung *Dicrobezzia* wurde mit *Bezzia* identifiziert. Die zahlreichen Abbildungen beziehen sich hauptsächlich auf die Hypopygien der Männchen. Es ist hervorzuheben, dass die Kopulationsorgane (Aedoeagus) fast sämtlicher in Ungarn lebender Arten abgebildet sind.

PERSBERGI KALCIT ÉS BARIT.

TOKODY LÁSZLÓ-tól.

A svédországi Vermland vidéke élénk bányászat színhelye. E területen a Filipstادتól ÉK-re fekvő Persberg és környékén már a XV. század elejétől kezdve folyik a bányászkodás s jelenleg is számos bánya van üzemben.

Persberg földtani, közettani és bányászati viszonyait N. H. MAGNUSSON (1) terjedelmes monografiában ismertette. Vizsgálatai szerint a terület közettani felépítésében nátrondús leptitek viszik a főszerepet s ezekben találhatók a vas- és mangánérccek. A persbergi ércelőfordulásra a gránát és diopszid fellépése jellemző s mint ilyen külön típust képvisel.

ZIMÁNYI KÁROLY 1902-ben a persbergi bányákból kalcit- és baritkristályokat gyűjtött. E kristályokon végzett vizsgálatok eredményét foglalják össze az alábbi sorok. Kedves kötelességet teljesítek, midőn ZIMÁNYI KÁROLY úrnak, a Magyar Nemzeti Múzeum ny. igazgatójának az értékes anyag szíves átengedéséért e helyen is őszinte köszönetemet fejezem ki.

*

A persbergi kalcit kristálytani sajátosságait G. FLINK (2) tanulmányozta. Prizmás kristályokon két formát, $b \{10\bar{1}0\}$ és $\delta \{01\bar{1}2\}$ állapított meg.

Az általam vizsgált kristályok egy ásványos halmazon és annak üregeiben foglalnak helyet. A halmaz főtömegét igen apró kristályokban megjelenő, sárgászöld diopszid alkotja, mellette — de kisebb mennyiségben — 10—20 mm hosszúságot is elérő aktinolit-prizmák ismerhetők fel. Ez ásványokhoz csatlakozik a bőségesen található szemcsés magnetit és fehér vagy gyakrab-

ban halványrózsaszín vaskos kalcit. Vékonycsiszolatban a felsorolt ásványokon kívül még néhány gránátszem is lelhető.

A kalcitkristályoknak csak a felső részük van meg, ritkábban figyelhető meg alsó felüknek töredékes részlete. Hosszúságuk 1.75—4.5 mm, vastagságuk 1.75—4 mm között váltakozik. A kristályok víztisztán átlátszók. Kombinációjukban nagy eltérés nincs és ezért goniométeres vizsgálatra négy kristályt választottam ki. Ezekben az alábbi 25 formát állapítottam meg, közöttük a csillaggal (*) jelzett hat a kalcitra általában új.

o {0001}	*	{2.5.7.12}	*	{17.7.24.10}
$k.$ {11.0.11.1}	t :	{2134}	ξ :	{7.3.10.4}
$m.$ {4041}	w :	{3145}	γ :	{9.4.13.5}
*	f :	{7.2.9.11}	K :	{2131}
$p.$ {1011}	e :	{4156}	U :	{10.4.14.3}
$\delta.$ {0112}	*	{8.3.11.5}	\mathfrak{B} :	{16.8.24.5}
*	*	{13.5.18.8}	U	{14.12.26.5}
h : {1459}	J :	{5273}	\emptyset :	{9.1.10.2}
			i	{4372}

Az ismert formák megállapítására szolgáló szögértékek közül közlöm az alábbiakat:

		Mért	Számított
$k.$	$:o = (11.0.11.1) :$	(0001) = 84°37'	84°43'
$m.$	$:o = (4041) :$	(0001) = 75°43'	75°47'
	$:p. =$	$(1011) = 31°06'$	$31°10\frac{1}{2}'$
	$:m. =$	$(0441) = 65°50'$	$65°50'$
$p.$	$:o = (1011) :$	(0001) = 44°37'	44°36 $\frac{1}{2}'$
	$:\delta. =$	$(0112) = 37°24'$	$37°27\frac{1}{2}'$
	$:p. =$	$(0111) = 74°58'$	$74°55'$
$\delta.$	$:o = (0112) :$	(0001) = 26°16'	26°15'
h :	$:p. = (1459) :$	(1011) = 31°53'	32°35 $\frac{1}{2}'$
	$:\delta. =$	$(0112) = 5°34'$	$4°52'$
t :	$:o = (2134) :$	(0001) = 33°12'	33°07'
	$:p. =$	$(1011) = 16°30'$	$16°29'$
	$:\delta. =$	$(0112) = 20°59'$	$20°58\frac{1}{2}'$
	$:t. =$	$(2314) = 41°54'$	$41°55'$
w :	$:p. = (3145) :$	(1011) = 12°36'	12°46'
	$:w. =$	$(3415) = 49°14'$	$49°22\frac{1}{2}'$
f :	$:p. = (7.2.9.11) :$	(1011) = 11°33'	11°28'
	$:f. =$	$(7.9.2.11) = 51°47'$	$51°59'$

		Mért	Számított
e :	$p.$ = (41 $\bar{5}$ 6)	: (10 $\bar{1}$ 1) = 10°03'	10°24'
J :	$p.$ = (52 $\bar{7}$ 3)	: (10 $\bar{1}$ 1) = 23°18'	23°19'
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 5°38'	5°43'
ξ :	$p.$ = (7.3.1 $\bar{0}$.4)	: (10 $\bar{1}$ 1) = 24°39'	24°59'
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 4°41'	4°03'
Σ :	$p.$ = (9.4.1 $\bar{3}$.5)	: (10 $\bar{1}$ 1) = 25°45'	25°53'
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 3°09'	3°09'
K :	o = (21 $\bar{3}$ 1)	: (0001) = 69°10'	69°02'
	$p.$ =	: (10 $\bar{1}$ 1) = 29°02'	29°02'
	$m.$ =	: (40 $\bar{4}$ 1) = 19°23'	19°24'
	K : =	: (2 $\bar{3}$ 11) = 75°20'	75°22'
	K : =	: (12 $\bar{3}$ 1) = 47°01'	47°01 $\frac{1}{2}$ '
U :	$m.$ = (10.4.1 $\bar{4}$.3)	: (40 $\bar{4}$ 1) = 16°	15°38'
\mathfrak{B} :	o = (16.8.2 $\bar{4}$.5)	: (0001) = 77°	76°32'
	$m.$ =	: (40 $\bar{4}$ 1) = 18°22'	18°33'
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 7°48'	7°32'
u :	$m.$ = (14.12.2 $\bar{6}$.5)	: (40 $\bar{4}$ 1) = 26°16'	26°47'
Φ :	$m.$ = (9.1.1 $\bar{0}$.2)	: (40 $\bar{4}$ 1) = 5°40'	5°42'
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 25°10'	25°06'
j :	$m.$ = (43 $\bar{7}$ 2)	: (40 $\bar{4}$ 1) = 24°26'	24°36 $\frac{1}{2}$ '
	K : =	: (21 $\bar{3}$ 1) = 6°20'	6°24'
	j =	: (4 $\bar{7}$ 32) = 65°28'	65°24'

A persbergi kalcit formái a kalcitnak alakilag és részben szerkezetileg is legfontosabb öveibe tartoznak.

$[0001 : 10\bar{1}0 = \bar{1}2\bar{1}0]^4 = [111 : 2\bar{1}\bar{1} = 01\bar{1}]$. Ebben az övben öt ismert és egy új forma jelent meg, a bázison kívül négy pozitív romboeder és a persbergi kalciton egyedüli negatív romboeder δ .{01 $\bar{1}$ 2}.

Az o .{0001} három kristályon szerepelt. Középnagy lapjai kissé érdesek s ezért tükrözésük halvány.

k .{11.0. $\bar{1}\bar{1}$.1} három kristályon alakult ki egy-egy, illetve két lappal. A keskeny vagy középnagy lapok simák, tükrözésük jó.

m .{40 $\bar{4}$ 1} a pozitív romboederek között a legnagyobb fejlettséget érte el. Mindegyik kristályon fellépett. Nagy lapjai vízszintesen igen finoman rostozottak; a rostozás olykor csak a lapok felső részén, a p .{10 $\bar{1}$ 1} közelében jelentkezik. Tükrözése kitűnő.

⁴ A négyjegyű övindexeket WEBER (3) értelmezése szerint alkalmaztam.

$p.\{10\bar{1}1\}$ mindegyik kristályon megjelent. Sima lapjai kitűnően tükröztek.

A negatív romboederek közül csak a $\delta.\{01\bar{1}2\}$ volt megállapítható. E forma egy kristályról sem hiányzott. Középnagy lapjai az $[10\bar{1}1 : 01\bar{1}2 = 0\bar{1}11]$ övtengellyel párhuzamosan sűrűn, de igen finoman rostozottak. Tükrözése nagyon jó.

Az új pozitív romboéder, $\ast\{11.0.\bar{1}\bar{1}.4\}$ egyetlen nagy, erősen rostozott lappal jelent meg ($0\bar{1}11$) és ($0\bar{4}41$) között. Az erős rostozottság miatt reflexe ismétlődő és erősen széthúzott, ennek következtében a mért és számított szögértékek egyezése nem a legkedvezőbb.

	Mért	Számított	\pm
$(11.0.\bar{1}\bar{1}.4) : (0001) =$	—	$69^{\circ}45'51''$	
$: (10\bar{1}1) =$	$25^{\circ}32'$	$25^{\circ}09'21''$	$0^{\circ}22'39''$
$: (40\bar{4}1) =$	$5^{\circ}30'$	$6^{\circ}01'09''$	$0^{\circ}31'09''$

E formának megfelelő negatív romboéder, $\omega.\{0.11.\bar{1}\bar{1}.4\}$ a kalcitból már régóta ismeretes; a Derbyshire-ről származó kristályokon BOURNON 1808-ban mutatta ki.

$[10\bar{1}1 = 11\bar{2}0 = \bar{1}101] = [100 : 10\bar{1} = 010]$. A kalcitnak általában és a persbergi kristályoknak különösen fontos öve. A megfigyelt 25 kristályforma közül 16 ebbe az övbe tartozik. Az öt új szkalenoéder szintén ebben az övben fordul elő.

A $p.\{10\bar{1}1\}$ és $\delta.\{01\bar{1}2\}$ alakot már a $\bar{1}2\bar{1}0$ tárgyalásánál ismerttettem. A $[\bar{1}101]$ legerőteljesebben fejlett formája a $K:\{21\bar{3}1\}$. Mindegyik kristályon szerepelt. Nagy lapjai símák, tükrözésük kitűnő. A kristályok felső részén teljes lapszámmal fejlődött ki, néha az alsó végen is megjelent szintén nagy lapokkal.

A $t:\{21\bar{3}4\}$, $w:\{31\bar{4}5\}$ és $f:\{7.2.\bar{9}.11\}$ mind a négy kristályon nagyon gyakori forma. Általában keskeny vagy középnagy lapokkal fejlődtek ki. A $t:\{21\bar{3}4\}$ a kristályok felső végén teljes lapszámmal is kialakult. Középnagy lapjai mindig kitűnően tükröztek. A $w:\{31\bar{4}5\}$ többnyire keskeny lapokkal szerepelt. Reflexe általában halvány. Az $f:\{7.2.\bar{9}.11\}$ csikalakú vagy egészen keskeny lapjai gyengén tükröztek; e forma az egyik kristály felső végén öt lappal jelent meg.

$J:\{52\bar{7}3\}$ két kristályon lépett fel. Csikalakú lapjai jól tükröztek.

Az $e: \{41\bar{5}6\}$, $\xi: \{7.3.\bar{1}0.4\}$ és $\Sigma: \{9.4.\bar{1}3.5\}$ csak egy-egy kristályon volt kimutatható. A $\Sigma: \{9.4.\bar{1}3.5\}$ középnagy, az $e: \{41\bar{5}6\}$ és $\xi: \{7.3.\bar{1}0.4\}$ keskeny lapokkal alakult ki. Reflexeik alapján e formák biztosan meghatározhatók. A $\xi: \{7.3.\bar{1}0.4\}$ formát G. FLINK (4), a $\Sigma: \{9.4.\bar{1}3.5\}$ alakot G. AMINOFF (5) fedezte fel Långbanschyttanról származó kristályokon.

A $[\bar{1}101]$ övben csak egy ismert negatív szkalenoeder, $h: \{14\bar{5}9\}$ jelent meg és csak egy kristályon fejlődött ki. Keskeny síma lapjának tükrözése halvány.

Ez övben — mint új formát — 3 pozitív és 2 negatív szkalenoedert sikerült meghatározni. Az új pozitív szkalenoederek $\ast \{17.7.\bar{2}4.10\}$, $\ast \{13.5.\bar{1}8.8\}$ és $\ast \{8.3.\bar{1}1.5\}$.

$\ast \{17.7.\bar{2}4.10\}$ egy lappal jelent meg $(7.3.\bar{1}0.4)$ és $(52\bar{7}3)$ között. Keskeny lapja síma, tükrözése igen jó. Mért és számított szögértékei kitűnően egyeznek. A forma biztosnak tekinthető.

	Mért	Számított	\pm
$(17.7.\bar{2}4.10): (10\bar{1}1) =$	$23^{\circ}56'$	$23^{\circ}51'10''$	$0^{\circ}04'50''$
$: (21\bar{3}1) =$	$5^{\circ}16'$	$5^{\circ}10'50''$	$0^{\circ}05'10''$

$\ast \{13.5.\bar{1}8.8\}$ az I. kristályon 2, a II. és III. kristályon 3—3 lappal alakult ki. Keskeny lapjai kielégítően tükröztek. Szögértékei kitűnően egyeznek. A forma biztos.

	Mért	Számított	\pm
$(13.5.\bar{1}8.8): (10\bar{1}1) =$	$22^{\circ}23'$	$22^{\circ}25'20''$	$0^{\circ}02'20''$
$: (21\bar{3}1) =$	$6^{\circ}33'$	$6^{\circ}36'40''$	$0^{\circ}03'40''$
$: (\bar{1}3.18.\bar{5}.8) =$	$119^{\circ}46'$	$119^{\circ}45'40''$	$0^{\circ}00'20''$

$\ast \{8.3.\bar{1}1.5\}$ egyetlen keskeny lapja az övtengellyel párhuzamosan rostos, ezért tükrözése gyenge, de szögértékei még jól egyeznek. A forma kétséges.

	Mért	Számított	\pm
$(8.3.\bar{1}1.5): (10\bar{1}1) =$	$21^{\circ}44'$	$21^{\circ}51'35''$	$0^{\circ}07'35''$
$: (21\bar{3}1) =$	$7^{\circ}33'$	$7^{\circ}10'25''$	$0^{\circ}12'35''$

A két új negatív szkalenoeder: $\ast \{2.5.\bar{7}.12\}$ és $\ast \{2.11.\bar{1}3.24\}$.

$\ast \{2.5.\bar{7}.12\}$ egyetlen csikalakú lappal fejlődött ki. Reflexe gyenge. Mért és számított szögértékei közötti különbség meghaladja a félfokot. A forma bizonytalan.

	Mért	Számított	\pm
$(2.5.\bar{7}.12): (10\bar{1}1) =$	$30^{\circ}44'$	$30^{\circ}11'02''$	$0^{\circ}32'58''$
$: (01\bar{1}2) =$	$6^{\circ}43'$	$7^{\circ}16'28''$	$0^{\circ}33'28''$

* {2.11.13.24} egy kristályon két csíkalakú lappal szerepelt. Tükrözés jó. Szögértékek kitűnően egyeznek. A forma biztos.

	Mért	Számított	$\pm J$
(2.11.13.24): (1011)	= 33°52'	33°48'	0°04'
: (0112)	= 3°36'	3°39'30"	0°03'30"
: (2.13.11.24)	= 7°12'	7°19'	0°07'

A [1101] öv kristályalakjai a zónának három szakaszán helyezkednek el. $\delta\{0112\}$ és $\pi\{1123\}$ ¹ közötti övrészletben található a $\delta\{0112\}$ és $h\{1459\}$, az utóbbi közelében a * {2.11.13.24}, a $\pi\{1123\}$ szomszédságában pedig a * {2.5.7.12}. A $\pi\{1123\}$ és $p\{1011\}$ zónaszakaszban a $t\{2134\}$, $w\{3145\}$, $f\{7.2.9.11\}$ és $e\{4156\}$ foglal helyet. Végül a $p\{1011\}$ és $K\{2131\}$ övrésznek $K\{2131\}$ felé eső részén következnek * {8.3.11.5}, * {13.5.18.8}, $J\{5273\}$, * {17.7.24.10}, $\xi\{7.3.10.4\}$, $\Sigma\{9.4.13.5\}$ és $K\{2131\}$.

[4041 : 0881 = 1018] = [311 : 335 = 232]. Ebbe az övbe három ritka forma: $U\{10.4.14.3\}$, $\mathfrak{B}\{16.8.24.5\}$ és $U\{14.12.26.5\}$ tartozik. Leggyakoribb közöttük a $\mathfrak{B}\{16.8.24.5\}$. Három kristályon szerepelt, egyiken három lappal. Nagy vagy közép-nagy lapjai simák, tükrözésük jó. Az $U\{10.4.14.3\}$ csak egy kristályon lépett fel két kielégítően tükröző síma lappal. Az $U\{14.12.26.5\}$ csak egyetlen közép-nagy lappal jelent meg.

[4041 : 1120 = 1104] = [311 : 101 = 121] övnek egyetlen formája a $\Phi\{9.1.10.2\}$. Két kristályon volt megállapítható, az egyiken egy nagy síma, a másikon két ugyancsak nagy, de érdes lappal. Reflexe halvány, de a forma biztos meghatározását lehetővé teszi.

[2131 : 0110 = 2116] = [201 : 112 = 132] övben csak a $j\{4372\}$ alakot sikerült kimutatni. E ritka formát G. FLINK (4) fedezte fel Långbanshyttan-ról származó kalciton, újabban G. AMINOFF (5) észlelte ugyanarról a lelőhelyről való kristályokon. $j\{4372\}$ a persbergi kristályokon állandóan szerepelt. Nagyságban közvetlenül $m\{4041\}$ után következik. Lapjainak felülete sohasem síma, ezért a tükrözés kevésbé jó, de a forma

¹ A $\pi\{1123\}$ a persbergi kalciton nem szerepel.

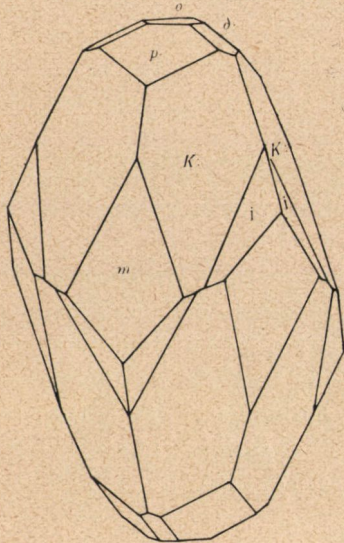
pontos megállapítása mindig lehetséges; a mért és számított szögértékek kitűnően egyeznek.

Az övek fontosságáról az alábbi összeállítás nyújt felvilágosítást.

$[10\bar{1}1 : 11\bar{2}0 = \bar{1}101]$	övben 9 ismert és 5 új, összesen 14 forma észlelhető
$[0001 : 10\bar{1}0 = \bar{1}2\bar{1}0]$	« 5 « « 1 « « 6 « «
$[40\bar{4}1 : 08\bar{8}1 = \bar{1}018]$	« 3 « « « 3 « «
$[40\bar{4}1 : 11\bar{2}0 = \bar{1}104]$	« 1 « « « 1 « «
$[2\bar{1}\bar{3}1 : 0110 = 2116]$	« 1 « « « 1 « «

Az összes tanulmányozott kristályok típusa azonos: szkalenoderes (1. ábra). Az uralkodó $K : \{2\bar{1}\bar{3}1\}$ mellett — csökkenő nagyságrendben — nagy lapokkal fejlődött ki az $m. \{40\bar{4}1\}$, $j \{43\bar{7}2\}$, $\mathfrak{B} : \{16.8.2\bar{4}.5\}$ és $p. \{10\bar{1}1\}$.

A **barit** hematit-pikkelyekkel behintett gránát-tartalmú skarnon fordul elő. A kristályok rendkívül aprók; a legnagyobb alig 1 mm, de ez már ritkaság. Színük igen halvány rózsaszín, olykor színtelenek. Gyöngyházfényűek. Baritkristályokat Persbergről eddig nem ismertünk.



1. ábra.

Goniométeres vizsgálatra alkalmas kristályt nagyon nehéz találni, egyrészt a kristályok kicsinysege, másrészt az egymással való összenövés miatt. Mindössze három kristálytöredéket tudtam leválasztani és mérni. Ezeken a következő 9 formát állapíthattam meg.

$b \{010\}$	$m \{110\}$	$f \{113\}$
$c \{001\}$	$v \{115\}$	$r \{112\}$
$o \{011\}$	$q \{114\}$	$z \{111\}$.

Feltűnő a II. fajta prizmák hiánya. A kristályok majdnem mindig a b -tengely egyik végével — ritkábban az $m \{110\}$

egyik lapjával — nőttek az anyakőzetre, tehát a kristályoknak a skarnról való leválasztás után is a II. fajta prizmák jelenléte várható lett volna.

A formák eloszlása a következő:

1. kristály: *bvqfrzom*
2. " : *vqfrzm*
3. " : *berm.*

Legtökéletesebben fejlett az 1. és 3. kristály. A 2. kristályon csak a főradiális zóna lapjait határozhattam meg, e kristály nagyobbik felét az $m\{110\}$ egyik nagy hasadási lapja szelte le.

A formák megállapítása a következő szögértékek alapján történt: ¹

	Mért	Számított
$c : v = (001) : (115) =$	$22^{\circ}33'$	$22^{\circ}34'47''$
$: q = : (114) =$	$27^{\circ}31'$	$27^{\circ}26'45''$
$: f = : (113) =$	$34^{\circ}42'$	$34^{\circ}43'16''$
$: r = : (112) =$	$46^{\circ}09'$	$46^{\circ}06'32''$
$: z = : (111) =$	$64^{\circ}24'$	$64^{\circ}18'43''$
$r : z = (112) : (111) =$	$18^{\circ}17'$	$18^{\circ}12'11''$
$: f = : (113) =$	$11^{\circ}21'$	$11^{\circ}23'16''$
$: q = : (114) =$	$18^{\circ}32'$	$18^{\circ}39'47''$
$: v = : (115) =$	$23^{\circ}22'$	$23^{\circ}31'55''$
$: m = : (1\bar{1}0) =$	$81^{\circ}33'$	$81^{\circ}38'56''$
$o : c = (011) : (001) =$	$52^{\circ}39'$	$52^{\circ}43'08''$
$: b = : (010) =$	$37^{\circ}23'$	$37^{\circ}16'52''$
$: z = : (111) =$	$44^{\circ}18'$	$44^{\circ}18'20''$
$: r = : (112) =$	$38^{\circ}28'$	$38^{\circ}31'49''$
$: m = : (110) =$	$59^{\circ}49'$	$59^{\circ}49'15''$
$m : z = (110) : (111) =$	$25^{\circ}40'$	$25^{\circ}41'17''$

A kristályok uralkodó formája a $c\{001\}$, e szerint táblásak (2. ábra). A bipiramisok között legfejlettebb az $r\{112\}$. Síma lapjai kitűnően tükröztek. A többi bipiramis kivétel nélkül keskeny csík. A $z\{111\}$ és $r\{112\}$ kivételével a bipiramis-lapok méretüknek megfelelően halványan tükröztek.

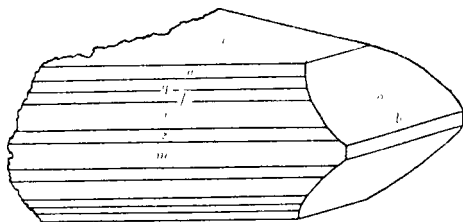
A $b\{010\}$ keskeny vagy középnagy lapokkal jelent meg.

¹ Sajnálattal kell megjegyezni, hogy C. HINTZE kézikönyvében a baritra vonatkozó számított szögérték között rendkívül sok a hibás adat.

Ha keskeny, akkor gyengén, ha ellenben középnagy, akkor kitűnően tükrözött. Az I. fajta prizmák sorából egyedül az $o\{011\}$ alakult ki. Középnagy lapjainak reflexe igen jó.

A III. fajta prizmákat egyedül az $m\{110\}$ képviselte. Általában síma, keskeny lapokkal szerepelt.

A vizsgált persbergi kristályok optikai sajátságai teljesen egyeznek a baritéval. Optikai tengelysík (010). A hegyes bisszektrix merőleges (100)-ra, $=a$. Optikai karakter pozitív. Tengelyszög kicsi. $\rho < v$. Középtörésmutató — az $m\{110\}$ egyik hasadási lapján meghatározva $1.635_8 \pm 0.001_7$ (acetilentetrabromid). Kettős törés közepes.



2. ábra.

A baritkristályokat Locka J. qualitative elemezte és azokban báriumot, kevés mangánt, kénsavat és az utóbbinál kevesebb foszforsavat mutatott ki. — Az újból megismételt qualitativ kémiai vizsgálat szerint az ásvány báriumon és kénsavon kívül jelentős mennyiségben mangánt és nyomokban foszfort tartalmaz. Quantitativ elemzéshez nem volt elegendő anyag. A persbergi barit érdekességét növeli *Mn*- és *P*-tartalma. Az irodalmi adatok szerint *Mn* csak az Andrarum (Schonen) hepatitisében és Dehesa del Almenara (Peñaflor mellett, Spanyolország) baritjában mutattak ki; a *Mn* %-os mennyisége egyik előfordulásra sincs megadva (6). Foszfortartalmú barit egyetlen lelőhelyről ismeretes. A hokutoi (Hokuto, Taiwan sziget, Japán) baritban a $P_2O_5 = 0.01\%$. E barit azonban $BaSO_4$ és $PbSO_4$ izomorf elegye és így nem is sorolják a barit-hoz, hanem hokutolit néven önálló ásványnak tekintik (7).

Irodalom.

1. NILS H. MAGNUSSON: Persberg malmtrakt och berggrunden i de centrala delarna ad Filipstads bergslag. — Kongl. Kommerskollegium Beskrivingar öfver mineralfyndigheter. N° 2. Stockholm. 1925.
2. G. FLINK: Bidrag till sveriges mineralogi. — Arkiv för kemi, mineralogi o geologi. 1908—1910. Bd. 3. N° 35. p. 113.
3. L. WEBER: Das viergliedrige Zonensymbol des hexagonalen Systems. — Zeitschr. f. Krist. 57. 1922. p. 200—203.
4. G. FLINK: Bidrag till sveriges mineralogi. — Arkiv för kemi, mineralogi o geologi. 1910. Bd. 3. N° 35. p. 114.
5. G. AMINOFF: Krist. Studien an Calcit und Baryt von Långban-schytan. — Geol. Fören. Förhand. 40. 1918. Heft. 3. p. 273—446.
6. C. HINTZE: Handb. d. Mineralogie. Berlin—Leipzig. 1930. I. Bd., 3. Abt., 1. Hälfte, p. 3888.
7. U. o. p. 3885 és C. DOELTER und H. LEITMEYER: Handb. d. Mineralchemie. Dresden—Leipzig. 1929. Bd. IV., 2. Teil, p. 251.

(A Budapesti Királyi Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem ásvány- és közettani intézetében készült dolgozat.)

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1938. április 11-én tartott üléséből.)

KALZIT UND BARYT VON PERSBERG (SCHWEDEN).

Von L. TOKODY.

Die 1.75—4.5 mm langen und 1.75—4 mm dicken *Kalzitkristalle* sind wasserhell. Sie sitzen auf einem aus Diopsid, Magnetit, Aktinolit, grobkristallinen Kalzit und Granat bestehenden Aggregat. Die beobachteten Formen:

$o \{0001\}$	$\star \{2.5.\bar{7}.12\}$	$\star \{17.7.\bar{2}\bar{4}.10\}$
$k \cdot \{11.0.\bar{1}\bar{1}.1\}$	$t : \{21\bar{3}4\}$	$\xi : \{7.3.\bar{1}0.4\}$
$m \cdot \{40\bar{4}1\}$	$w : \{31\bar{4}5\}$	$\Sigma : \{9.4.\bar{1}\bar{3}.5\}$
$\star \{11.0.\bar{1}\bar{1}.4\}$	$f : \{7.2.\bar{9}.11\}$	$K : \{21\bar{3}1\}$
$p \cdot \{10\bar{1}1\}$	$e : \{41\bar{5}6\}$	$U : \{10.4.\bar{1}\bar{4}.3\}$
$\delta \cdot \{01\bar{1}2\}$	$\star \{8.3.\bar{1}\bar{1}.5\}$	$\mathfrak{B} : \{16.8.\bar{2}\bar{4}.5\}$
$\star \{2.11.\bar{1}\bar{3}.24\}$	$\star \{13.5.\bar{1}\bar{8}.8\}$	$u \{14.12.\bar{2}\bar{6}.5\}$
$h : \{14\bar{5}9\}$	$J : \{52\bar{7}3\}$	$\emptyset : \{9.1.\bar{1}0.2\}$
		$i \{43\bar{7}2\}$

Die mit einem Stern (\star) bezeichneten Formen sind für den Kalzit überhaupt neu.

Die an allen Kristallen mit grossen Flächen beobachteten Formen: K ., m ., j ., p .. Die übrigen Formen treten meistens mit kleinen bzw. schmalen Flächen auf. Der Typus der Kristalle ist skalenoedisch (Fig. 1).

Die höchstens 1 mm grossen *Barytkristalle* sind von blassrosenroter Farbe, manchmal sind farblos, durchsichtig. Die beobachteten Formen:

$b \{010\}$	$m \{110\}$	$f \{113\}$
$c \{001\}$	$v \{115\}$	$r \{112\}$
$o \{011\}$	$q \{114\}$	$z \{111\}$.

Die Kristalle sind nach $c \{001\}$ dicktafelig (Fig. 2.). Die Formen der Hauptradialzone sind schmale Streifen, diejenige der Brachyzone besitzen meistens mittelgrosse Flächen.

Die optischen Eigenschaften stimmen mit denjenigen des Baryts vollkommen überein.

Sehr interessant ist die chemische Zusammensetzung. Nach einer qualitativen Analyse enthält dieser Baryt — ausser dem Barium und Schwefelsäure — Mangan in bedeutender Menge und Phosphorsäure in Spuren.

(Mineralogisch-petrographisches Institut d. Kgl. Ung. P. Pázmány Universität zu Budapest.)

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 11. Apr. 1938.)

ÚJABB ADATOK A TÉTÉNYI KALLÓFÖLD (BENTONIT) ISMERETÉHEZ.

VENDL MIKLÓS-tól.

1920-ban egy rövid dolgozatomban jelent meg a Földtani Közlönyben, amely a tétényi fennsík szarmata mészkövébe konkordánsan betelepült s már régóta ismert hamutufa ásványos összetételével és származásával foglalkozott (1). Erre az érdekes kőzetre boldogult SCHAFARZIK FERENC hívta fel a figyelmemet, akit technikai szempontból is érdekelt ez a kőzet s ajánlotta is olajok derítésére.

E dolgozatomban kimutattam, azt hogy ez a kőzet egy andezites típushoz közeledő biotitdacittufából származott. A tufa eredeti üvegbázisa valószínűleg devitrifikálódott és hidrokémiai diagenezisen esett át. A kőzet jelenlegi agyagos alapanyaga ily módon keletkezhetett.

Szóbanforgó dolgozatomban megjelenése óta két szerző is foglalkozott már e kőzettel : FÖLDVÁRI ALADÁR (2) és VITÁLIS ISTVÁN (3).

FÖLDVÁRI ALADÁR dolgozatában különféle agyagos kőzeteknek iszapolás közben való viselkedését tárgyalja igen behatóan vizes ammoniumhidroxid-, nátriumoxalát- és nátriummetaszilikát oldatokban. Dolgozatát VENDL ALADÁR intézetében készítette, ahol nevezett szerzőnek vizsgálati anyag is állott rendelkezésére (2. p. 276.). FÖLDVÁRI a «kallóföldek (csapóföldek, fullers earth)» csoportjában a tétényi tufával is foglalkozott, annak szemese-nagyság-eloszlását vizsgálta a jelzett oldatokban.

VITÁLIS ISTVÁN pedig a néhány éve megindult tétényi kallóföldbányászkozást, a termelés nagyságát, s az értékesítési viszonyokat ismerteti. Egy-két újabb települési adatot is hoz s a telepessék ismétlődése alapján a hamuhullás ismétlődésére következtet.

Röviden továbbá még arra is, hogy a kallóföldtelep nagyobb kiterjedésű s végül kémiai analizisek egyes adatait közli.

Újabbban egy hasonló hamutufával kapcsolatban, amelyet Sopron közelében, Fertőrákos határában, *lajtamészköbe* települve fedeztem fel, alkalom adódott arra is, hogy eddigi ismereteinket a tétényi agyagos hamutufáról újabb adatokkal egészítsem ki.

Feljebb idézett régebbi dolgozatomban (1) a tétényi hamutufa agyagos ásványát a *steatargillit*hez közelállónak adtam meg. Steatargillit HINTZE C. szerint, amint ezt ismert nagy kézikönyvében olvashatjuk, a steatargillitnek jobb írásmódja. (4. p. 1829.) Ezt az ásványt már HINTZE a *montmorillonit*-csoportba osztotta be. Ily módon, a *steatargillit* (*steatargillit*) az ő felfogása szerint már mintegy *montmorillonit*-szinonimaként szerepel. Megemlíthetem azonban azt, hogy a *steatargillit* névre újabbban más helyütt is rábukkantam az irodalomban. SCHMID E. nevezett el így 1880-ban egy nagyon kétes ásványt (5). A HINTZE-féle *steatargillit* azonban nem tartható azonosnak a SCHMID-félével. HINTZE hatalmas ásványtani kézikönyve egyébként a SCHMID-féle «ásványról» említést sem tesz.

A *steatargillit* («*steatargillite*») elnevezés MEILLET-től származik. E kutató ezzel a névvel azt a fehér, sárga vagy pisztáciazöld ásványt jelölte meg, amelyet Franciaországban *Virolet* mellett a *La Rochelle*-i vasúti pályán, alsóoolith mészkőben s ezenkívül még a *poitiers*-i alagútban fedezett fel. MEILLET megfigyeléseit 1862-ben megjelent ásványtani tankönyvében A. DES CLOIZEAUX már közli. (6). DANA J. D. közismert nagy ásványrendszertanában 1868-ban a *steatargillit*et mint *montmorillonit*-szinonimát tárgyalja már (7). Ugyancsak *montmorillonit*-szinonimaként hozza a *steatargillit*et DOELTER C. híres *Handbuch der Mineralchemie* című munkájában. (8) E kérdéssel kapcsolatban megemlíthetem még ORCEL J. és CALLÈRE S. vizsgálatait. Nevezettek termikus analizissel azt állapították meg, hogy a *POITIERS* melletti *Fontenay steatargillitje montmorillonit* és kaolinit-keverék (9).

Egyébként nem érdemes ezzel a nomenklaturai kérdéssel többet foglalkozni, mert az utóbbi években általában már csak *montmorillonit*ról vagy *beidellit*ről, tehát egy *montmorillonit*-*beidellit*-sorbeli s ezenkívül egyes esetekben még *attapulgit*-sorbeli (=paly-

gorskitsor?) ásványról tesznek említést — szinonimák helyett — a bentonitokkal foglalkozó kutatók.

A *steatargillit* vagy *steargillit* montmorillonitszinonima helyett a ténylegi hamutufa agyagos ásványának megjelölésére ma már nekünk is a *montmorillonit*ot kell használnunk.

A kiegészítő vizsgálatokat csak polarizációs mikroszkóppal lehetett elvégezni, mert az agyagásványrészecskék rendkívüli aprósága miatt nagyobb pontosságot adó egyéb optikai eszköz (tengelyszögmérő, totálreflektométer etc.) egyáltalán szóba sem jöhetett.

E mikroszkópos vizsgálatokat különböző fénytörésű folyadékokba ágyazott *montmorillonit*poron végeztem el. A felhasznált kőzetanyag mintegy $\frac{1}{2}$ éven át száradt szobahőmérsékleten.

Sarkított fényben először is a *montmorillonit* fénytörési viszonyairól tájékoztattam. CORRENS C. W. és MEHMEL M., (10) majd valamivel később VAN BAAREN F. A. (11) rámutatott arra, hogy a *montmorillonit* törésmutatói a beágyazó folyadékkal változnak. Ezt a sajátoságot e tufa *montmorillonit*ja is feltűnően mutatja. (V. ö. még ezzel a kérdéssel kapcsolatban HOFFMANN U., ENDELL K. és WILMS D. (12), továbbá NAGELSCHMIDT G. (13) és végül MEHMEL M. (14) munkáit. Erre vonatkozó saját megfigyeléseimet más alkalommal öhajtom közölni. Itt csak azokat a törésmutatóértékeket közlöm, amelyeket benzolban, benzol-kloroform-elegyben, benzolmonoklórbenzolegyben és monoklórbenzolban határoztam meg. A sok megfigyelt α' törésmutatóérték legkisebbjét (kloroformbenzolegyben) 1.495 ± 0.002 -nek mértem Na-fényben. Az észlelt γ' -ők legnagyobb értéke pedig (benzol—monoklórbenzolegyben) 1.505 ± 0.002 -nek adódott. Ha feltesszük azt, hogy ez a két szélső érték a tényleges α -nak és γ -nak felel meg, akkor a kettőtörés mértékeként 0.010-et kapunk. Ez az érték a valódi kettőtörésértéktől azonban esetleg kissé eltérhet, mert hosszabb időn át tiszta benzolba való beágyazáskor olyan szemekben, amelyekben a tárgyilemez síkjába eső két törésmutató kezdetben valamivel kisebbnek adódott a benzolénál ($n_{Na} = 1.5016$ 20° C-on), azoknak gyenge növekedése volt megfigyelhető. Hogy a kloroform ($n_{Na} = 1.443$ 20° C-on) vagy a monoklórbenzol ($n_{Na} = 1.5249$ 21° C-on) tisztán milyen hatású, azt nem állapíthattam meg. Tiszta kloroform-

ban az ásvány törésmutatói — függetlenül a beágyazás tartamától — mindig nagyobbak, monoklórbenzolban pedig kisebbek maradtak a folyadék törésmutatójánál. Minthogy azonban a törésmutató meghatározásánál mindkét folyadékkegelyben (kloroform—benzol-kegelyben, benzol—monoklórbenzolegelyben) a benzol volt az uralkodó komponens, lényegesebb eltérés a kettőtörésben nem várható.

A fénytörés egyébként *montmorillonitra* utal.

A *montmorillonit* kellő vékonyságban a mikroszkópban csaknem teljesen színtelennek vagy helyenkint csupán kissé sárgásnak mutatkozik. Pleokroizmus nem figyelhető meg. Keresztezett nikolok között igen alacsony, legfeljebb az elsőrendű fehér, rendszeren azonban csak sötét- vagy világosszürke interferenciaszín jelentkezik. A kettőtörés tehát nem lehet nagy, s a megfigyelt interferenciaszínnek alapján legfeljebb 0.010-ra becsülhető. Ez az érték a törésmutatókból adódóval egyezik.

A mért, illetve az interferenciaszínnek alapján becsült kettőtörés egyébként általában valamivel kisebb az irodalomban közzétett értékeknél. A kettőtörésben mutatkozó eltérések gyaníthatóan a különböző *montmorillonitok* eltérő vastartalmával állhatnak elsősorban összefüggésben.

Erősebb nagyításkor a *montmorillonit* keresztezett nikolok között rostos pelyhesnek és finom pikkelyesnek mutatkozik. A pelyhes rostok főzómajjellege pozitív. A rostok kioltása a rendkívül kedvezőtlen kialakulás folytán pontosan nem határozható meg, az egyenestől azonban, úgy látszik, lényegesen nem tér el.

A *montmorillonit* kedvező orientációjú egységesebb részein konvergens fényben általában csak alig szétnyíló tengelykeresztet figyelhetünk meg. A tengelyszög azonban szemmeláthatólag ingadozó, így pl. helyenkint még az aragoniténál jóval nagyobb tengelyszöget is észleltem. Az ásvány optikai jellege negatív. A binormálisok diszperziója nagyon nehezen ismerhető csak fel, nagy valószínűséggel $v > r$.

Az irodalomban erről a közetről közzétett elemzési adatok (3) csak mintegy a felét adják annak a vízmennyiségnek, amelyet a *montmorillonitok* légszáraz állapotban és szobahőmérsékleten tartalmaznak. Ezért ellenőrzésképpen csináltam egy izzítási veszteségmeghatározást ugyanazon az anyagon, amelyen az optikai vizsgá-

latok is történtek. A veztséget 25·2 %-nak találtam. Ennek legnagyobb része természetesen H_2O -ként fogható fel. Ez az érték azonban igen jól egyezik azzal a vízmennyiséggel, amelyet a külföldi irodalom ad meg a hasonló körülmények között elvégzett *montmorillonit*-elemzésekben.

Végül meghatároztam még piknométerrel vízben a kőzet fajsúlyát is. Minthogy a kőzet zöme *montmorillonit*ból áll, azért igen nagy megközelítéssel elfogadhatjuk ezt az értéket a *montmorillonit* fajsúlyaként is. Ezt 20° C-on 2·099-nek találtam. Ez az érték egyezik az irodalomban található *montmorillonit*-fajsúlyértékekkel. E meghatározás egyébként ugyanolyan állapotú (légszáraz) anyagon történt, mint amilyeneken az optikai meghatározások történtek.

HEWETT D. F. (15), majd vele majdnem egyidejűleg WHERRY E. T. (16) már 1917-ben rámutattak arra a valószínűsége, hogy az úgynevezett *bentonitok* vulkáni hamuból keletkeztek. HEWETT így ír: «Bentonite is a drab and cream colored bedded clay which until recently has been recognized only in the upper part of the Benton formation in Colorado, Wyoming and Montana», majd kissé tovább: «Bentonite is volcanic ash in which the glass has been hydrated». WHERRY hasonló kőzetekről szólva, már kissé részletesebben tárgyalja ezeknek a keletkezését, írván, hogy e kőzetek tengervízben a tufa üvegében okkludált gázok hatására autometa-morfizálódtak s ily módon képződhetett az üvegből az agyagásvány.

HEWETT és WHERRY idézett munkái óta már számos kutató foglalkozott a bentonitokkal, elsősorban Amerikában. Uymódon ma már módunkban áll a bentonitokat pontosabban is meghatározni. *Bentonit*nak nevezzük azt a kőzetet, amely vulkáni hamuból vagy tufából (esetleg üveges lávából) képződött s lényegesen a *montmorillonit-beidellit-nontronit* sor vagy az *attapulgit* sor egy tagjából áll (V. ö. pl. 15, 16, 17, 18, 19, 20). A *bentonitok* agyagásványa valószínűleg az üvegbázis devitrifikációja és a sósvíz hatása folytán képződött. Végeredményben e hatások folytán az üveg hidratizálódott (15, 16, 1, 17, 18, 19). Némelykor a sósvíz hatása helyett hidrotermális ágensekkel is számolhatunk.

A *bentonitok* legközönségesebb agyagásványa, amint említettem már, a *montmorillonit*. Dúsabb *montmorillonit* (esetleg

beidellit, attapulgit) tartalmuk miatt a *bentonitok* általában erős abszorbeálóképességgel tűnnek ki. A nagy abszorpcióképességű *bentonitok* ilyenmódon a *fullerföldek, kallóföldek* fogalma alá esnek. Bizonytalan ma még azonban az, hogy minden kallóföld egyben bentonit lenne. (20. p. 301.)

A *bentonit* kőzetnév, amint ezt KERR P. 1932-ben kiemelte már, a *fullerföld* pedig azoknak az agyagoknak a megjelölése, amelyek erős abszorbeálóképességgel rendelkeznek s így kereskedelmi, ipari értékűek. (21). Ennek megfelelően ugyanezt mondhatjuk el a fullerfölddel egyenlő kallóföldről is. Remélhetőn közeledik már az az idő, amikor számos kallóföldnek a származása és összetétele pontosan ismeretes lesz s ilyenmódon biztos alap áll majd rendelkezésünkre, a célból, hogy a kallóföldeket szigorú tudományos rendszerbe foglalhassuk.

Az elmondottak alapján a tétényi fennsík szóbanforgó tufáját mint kőzetet *bentonitnak* kell neveznünk.

Említett munkám (német) szövegében már 1920-ban írtam «Die Glasbasis (des Tuffes) ist wahrscheinlich devitrifiziert und hat eine hydrochemische Diagenese durchgemacht, daher dürfte die gegenwärtige Grundmasse stammen». Ez a nézet azonban összhangban áll a *bentonitok* agyagásványának keletkezésére vonatkozó mai ismeretünkkel. Ebből azonban az is nyilvánvaló, hogy én nem mállással számoltam ez agyag képződésében, amint ilyen keletkezésre annakidején Szabó József gondolt (22).

Végül megemlíthetem még azt is, hogy említett munkámban az agyagásvány technikailag legfontosabb sajátására, bázisos festőanyagokat nagy mértékben való abszorbeálóképességére, már rámutattam.

Irodalom.

1. VENCEL M.: Biotitdacittufa Kistétényről. Földtani Közlöny. L. kötet 1920. p. 34—38.

Biotitdazituff von Kistétény. Földtani Közlöny. (Geologische Mitteilungen) Bd. L. 1920. p. 119—123.

2. FÖLDEVÁRI A.: Agyagok iszapolása ammoniumhidroxid-, nátrium-oxalát- és nátriummetaszilikátoldatban. Matematikai és Természettudományi Értesítő. LIV. 1936. p. 221—278.

3. VITÁIS I.: Fuller-(Walk)- Erde-Bergbau in Rumpfungarn.

Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin-Joseph-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Sopron. VIII. 1936. p. 182—193.

A nagytétényi fullerföld és bányászata. Matematikai és Természettudományi Értesítő. LV. 1937. p. 971—984.

4. HINTZE C.: Handbuch der Mineralogie. II. 1897. p. 1829.

5. SCHMID E. E.: Über Steatargillit, Datolith etc. Sitz. d. med.-nat. Ges. zu Jena am 9. Juli 1880. Ref. Neues Jahrb. f. Min. etc. I. 1882. p. 352—353.

6. DES CLOIZEAUX A.: Manuel de Mineralogie. 1862. p. 205.

7. DANA J. D.: A system of mineralogy. 5. Edition. 1868. p. 459—460.

8. DOELTER C.: Handbuch der Mineralchemie. Bd. II. Zweite Abteilung. 1917. p. 138.

9. ORCEL J. és CAILLÈRE S.: L'analyse thermique différentielle des argiles à montmorillonite (bentonites) C. R. 197. 1933. p. 774. Ref. N. Jb. 1934. I. p. 463—464.

10. CORRENS C. W. és MEHMEL M.: Über den optischen und röntgenographischen Nachweis von Kaolinit, Halloysit und Montmorillonit. Z. f. Kr. 94. 1936. p. 337—348.

11. VAN BAAREN F. A.: Über den Einfluss verschiedener Flüssigkeiten auf den Brechungsindex von Tonmineralien. Zeitschr. f. Krist. 95. A. 1936. p. 464—469.

12. HOFMANN U., ENDELL K. és WILM D.: Kristallstruktur und Quellung von Montmorillonit. (Das Tonmineral der Bentonite.) Z. f. Krist. 86. 1933. p. 340—348.

13. NAGELSCHMIDT G.: On the lattice shrinkage and structure of montmorillonite. Z. f. Krist. 93. 1936. p. 481—487.

14. MEHMEL M.: Beitrag zur Frage des Wassergehaltes der Minerale Kaolinit, Halloysit und Montmorillonit. Chemie der Erde. XI. 1937. p. 1—16.

15. HEWETT D. F.: The origin of bentonite and the geologic range of related materials in Bighorn basin, Wyoming. Journ. Wash. Acad. Sci. 7. 1917. p. 196—198.

16. WHERRY E. T.: Clay derived from volcanic dust in the Pierre in South Dakota. Journ. Wash. Acad. Sci. 7. 1917. p. 576—583.

17. BONINE C. A.: Recent work on Bentonite. Reprint and Circular Series of the National Research Council Nr. 85. 1928. Report of the Committee on sedimentation 1927—1928. p. 12—17.

18. ROSS C. S., MISER H. D. és STEPHENSON L. W.: Water Laid Volcanic Rocks of Early Upper Cretaceous Age in Southwestern Arkansas, Southeastern Oklahoma and Northeastern Texas. U. S. Geol. Survey Professional Paper 154. F. 1929.

19. BONINE C. A.: Recent publications on bentonite. Reprint

and Circular Series of the National Research Council Nr. 98. 1931. Report of the Committee on sedimentation 1929—1930. p. 72—76.

20. ENGELHARDT W.: Über silikatische Tonminerale. Fortschritte der Min. Krist. und Petr. XXI. Zweiter Teil. 1937. p. 276—340.

21. KERR P. F.: Montmorillonite or smectite as constituents of Fuller's earth and bentonite. Amer. Min. 17. 1932. p. 192—198. Ref. N. Jb. f. Min. Geol. Pal. 1932. I. p. 446.

22. SZABÓ J.: Budapest geológiai tekintetben. 1879. p. 50.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1937. jún. 7-én tartott üléséből.)



NEUERE DATEN ZUR KENNTNIS DER WALKERDE
(BENTONITS) VON TÉTÉNY.

Von M. VENDL.

Die Arbeit wird in deutscher Sprache in den Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung der kgl. ung. Palatin Joseph Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften erscheinen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Jun. 1937.)