

50639

N. 49.

MATHEMATIKAI
ÉS
TERMÉSZETTUDOMÁNYI
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

HARMINCZHATODIK KÖTET

1918.

KILENCZ TÁBLÁVAL.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1918.

FRANKLIN-TÁRSULAT

NYOMDÁJA



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

TARTALOM.

	Lap
BAUER MIHÁLY: Vizsgálatok az algebrai számtest discriminánsáról..	56
BRÓDY IMRE: Egyatomos ideális gázak chemiai constansának elméleti meghatározása	98
CSÁSZÁR ELEMÉR: Planck sugárzási elméletének újabb módosítása ..	373
Ifj. ENTZ GÉZA: A Ceratium hirundinella mitoticus osztódásáról (I.—IV. tábla)	266
FARKAS GYULA: Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módjai	297
FARKAS GYULA: A lineáris egyenlőtlenségek következményei.....	397
FEKETE MIHÁLY: Ismert első együtthatókkal bíró algebrai egyenlet gyökéről.....	363
FÉNYI GYULA: A Nap légkörének physikája	115
FRÖHLICH IZIDOR: A physikai optika egy viszonyossági tételéről.....	193
FRÖHLICH PÁL: Újabb észleletek a teljes fényvisszaverődésnél megtört sugár polárosságáról.....	68
GÓZONY LAJOS: Összehasonlító vizsgálatok a vérsavó keményítőoldó és vérsajtoldást completáló hatásáról	349
GROSSCHMID LAJOS: Egy Lagrange-féle tétel általánosítása	165
GROSSCHMID LAJOS: Adalékok a négyzetes maradékok és nem-maradékok eloszlásának elméletéhez.....	562
HAAR ALFRÉD: A lineáris egyenlőtlenségekről.....	279
KRENNER JÓZSEF: Ritka svédországi ásvány Magyarországon	548
LAMM DEZSŐ: A nyomási szilárdság elmélete. I. rész. Hengeralakú szilárd test összenyomása.....	435
LENDL ADOLF: A pókok izomrendszere. II. Az izmok összeköttetése más szövetekkel.....	551
LENHOSSÉK MIHÁLY: A fogsú egykor és most	1
MAURITZ BÉLA: A botesi chalkopyrit (VIII. és IX. tábla)	539
RADOS GUSZTÁV: Körosztási egyenletek resultansa	309
SCHAFFER KÁROLY: Az agybarázdálódási folyamat tényezőiről.....	158
SCHAFFER KÁROLY: Újabb adatok a Tay-Sachs-betegség kórszövettanához	486
SUTÁK JÓZSEF: D'Alembert elvének dinamikai alkalmazása.....	315

	Lap
SZÁSZ OTTÓ: Végtelen láncztörtek irrationalitásáról	36
SZEGŐ GÁBOR: A Hankel-féle formákról.....	497
TIHANYI MIKLÓS: Periodusok ciklikus determinánsa	359
VERESS PÁL: Egy Arzelá-féle tétel általánosítása és annak alkalmazása	144
ZIMÁNYI KÁROLY: A Szepes-Gömöri Érczhegység néhány kristályosodott pyritjéről (V.—VII. tábla).....	409

A FOGSZÚ EGYKOR ÉS MOST.

LENHOSSÉK MIHÁLY r. tagtól.

A fogak romlása ma már olyan fokot ért el az emberiség és különösen a kultúremberiség körében, hogy már szinte bevehetjük a mai homo sapiens rendszertani jellemzésébe, hogy «32 foga volna ugyan kifejlődött állapotban, de közülök legalább egy, de legtöbbször több szuvas vagy hiányzik». Valóban szinte ritkaságszámba megy ma már közöttünk az olyan ember, a kinek az élet közepes éveiben még teljesen ép és érintetlen mind a 32 foga! Nincs alkotórésze testünknek, a mely annyira alá volna vetve a romlásnak, mint állkapcsainknak ez a fegyverzete, a melyre pedig szükségünk van a táplálék szétaprításához és a beszédhez. Igazi népbetegség, óriási járvány a fogszuvasodás, melyből rengeteg physikai fájdalom és sok egyéb komoly baj is járul az amúgy is annyi nyomorúsággal küzködő emberiségre. A baj már a zsenge gyermekkorban megindul, sőt a kis gyermek tejfogai kevésbé szilárd állományukkal különösen alá vannak vetve a cariesnek, de a maradó fogak is néha már szinte romlott állapotban bújnak elő, különösen a legelőször (a 6—7. évben) megjelenő első zápfog, mely egyáltalában legkevésbé ellenálló foga az állkapcsainknak, kivált alul, pedig valamennyi fogunk közül a legszükségesebb. 404,268 német iskolásgyermek között 94·14%-nak volt egy vagy több szuvas foga a szájában,¹ de egyes vidékeken, egyes iskolákban ez az arányszám még magasabbnak, 99 és 100%-nak bizonyult.

¹ R. KLÖSER: Z. Statistik d. Zahnkaries. Deutsche Monatsschr. f. Zahnheilkunde. 37. Jahrg. 1913. pg. 585. Cfr. pg. 623.

PREISWERK¹ szerint a felnőttek között alig 1%-ra tehető a teljesen épfogú egyének száma. Szervezetünknek ez az esztétikai szempontból sem közömbös berendezése szinte csődöt mondott a mai emberiség körében. A fogszű a homo sapiensnek kétségtelenül a legelterjedtebb baja; szerencse, hogy nem halálos betegség, mert különben ma már lakatlanul állana a föld felszínének legnagyobb része. Nagy diadala volna az emberi értelemnek, ha sikerülne e betegség megelőzésének, az emberiség köréből való kiirtásának módját kifürkészni. Erre azonban, sajnos, egyelőre vajmi kevés reményünk lehet, mert az ezt célzó széles alapon megindított kutatás, ha a gyakorlati eredményeket vesszük, eddigelé még merőben meddő maradt.

A fogszűvasodás nem nevezhető különleges emberi betegséggnek. Az állatok sem egészen immunisok vele szemben. Igaz, hogy a vadon élő állatokon nem fordul elő, vagy legalább is nem észlelték eddig, de azok az állatok, a melyek az emberrel közelebbi érintkezésbe jutnak, megkaphatják, kiváltképpen a kutya (ezen MILLER szerint 6%-ban fordul elő), ritkábban a ló, disznó, szarvasmarha. Az állatkertekben tartott állatokon is észlelték már, így a majmon, leopárdon (BAUME), de bizonyos, hogy az állatok sokkal inkább ellentállanak a fogszű okozójának, mint az ember.²

Mióta gyötri ez a baj az emberiséget? JUNG³ merészen veti oda azt az állítást, hogy fogszű azóta van, a mióta ember él a földön. Ezt az állítást nem tehetem a magamévá. Véleményem szerint alig lehet kételkedni azon, hogy a legősibb emberek éppúgy, mint ma a vadon élő majmok, mentesek voltak ettől a kóros állapottól. Valahol és valamikor belevehette magát egy ember szájába a fogszűt okozó, addig talán más körülmények között ártatlan életet folytató mikroba, kifejtve romboló hatását a fogakra s azután fokozatosan harapódzott el a beteg-

¹ PREISWERK: A stomatologia tankönyve és atlasa. Budapest, 1904. pg. 172.

² OSTERTAG: Die Krankheiten der Zähne. Handbuch der tierärztlichen Chirurgie u. Geburtshülfe. Wien, 1910. 3. kötet, 1. rész, 414. lap.

³ C. JUNG: Die Caries der Zähne. J. SCHEFF's Handbuch d. Zahnheilkunde. Wien, 1903. 2. kiadás, pg. 176.

ség az emberiség körében az emberek érintkezése révén. Ha igaz az, a mit sokan állítanak, hogy a távoli szigeteken elszigetelten élő kultúrátlan, kezdetleges népek fogai általában jobbak, mint a kultúremberéi, akkor ezt első sorban azzal magyarázhatjuk, hogy a fogszú járványa még nem hatotta át őket annyira, mint a forgalmasabb, haladottabb népeket, éppúgy, mint a hogy tudjuk, hogy egyes elszigetelten élő népek körében még ma is ismeretlen betegség a tüdővész vagy a syphilis.

Ha tekintetünket a régmúlt idők felé fordítjuk, a fogszúra vonatkozólag a következőket állapíthatjuk meg. A jégkorszakból származó koponyák fogai, egy koponya kivételével, mind csodálatosan épek, erősek, például a heidelbergi, pilt-downi koponya fogai. Neandervölgyi típusú koponyát és állkapcsot most már szép számmal ismerünk; egy koponyának a kivételével valamennyinek a foga mind ép, egészséges. GORJANOVIĆ-KRAMBERGER¹ a híres krapinai barlangban, mely a neandervölgyi ember csontmaradványainak legbővebb lelőhelye, 275 emberfogot talált, 85-öt az állkapcsokban, 190-et szabadon s egyről sem említi, hogy szuvas volna.²

A diluvium utolsó harmadából származó nem neander-típusú koponyák (Aurignac-, Cro-Magnon-, Grimaldi-típus) egytől-egyig szintén kitűnő fogakat állítanak elénk. Csak egy koponyát ismerünk a jégkorszakból, a melynek a fogazatára ez a jellemzés nem illik, ez a La Chapelle-aux-Saints-i koponya, a legjellemzőbb és legépebb állapotban reánk maradt neandervölgyi-típusú példány. Ennek az egyénnek, a ki a leírója, BOULE³ szerint a halálakor 50—55 éves lehetett, a fogai siralmas állapotban vannak. Fogszú ugyan egyik fogán sincs, de az áll-

¹ K. GORJANOVIĆ-KRAMBERGER: Der diluviale Mensch von Krapina in Kroatien. Wiesbaden, 1906. pg. 181.

² Az igazság érdekében meg kell azonban jegyezmem, hogy a H-val jelölt krapinai állkapocsnak a budapesti földtani intézetben készült gipszmodelljén a bal első kis zápfog hiányzik, még pedig kétségtelenül még az egyén életében való elpusztulás következtében, a minek az oka fogszú is lehetett.

³ M. BOULE: L'homme fossile de La Chapelle-aux-Saints. Paris, 1913, pg. 99.

kapcsaiban nagy foghiányok és egyéb kóros elváltozások vannak. A zápfogai felül is, alul is mindkét oldalt teljesen hiányzanak, még pedig már jóval a halála előtt pusztulhattak el, mert az állkapcsok fogmedri része e fogak helyén nagy fokban sorvadt, kivált az alsó állkapcson. De ezenfelül kóros jelek észlelhetők a meglevő, különben ép fogak gyökerei körül is, nevezetesen gyökérgyulladásra és genyedésre utaló üregek az alsó jobb J_1 , J_2 , C és P_1 gyökerei táján. BOULE a koponyát fogorvosi szempontból való megvizsgálásra egy párisi fogorvosnak, CHOQUET-nek adta át, a ki észleleteiről a Berlinben tartott V. nemzetközi fogorvosi kongresszuson számolt be.¹ CHOQUET szerint a foghiányokat és a meglevő fogakon észlelhető rendellenességeket nem fogszű okozta, hanem valamely súlyos köszvényes bántalom (gingivite expulsive ou polyarthrite alvéolo-dentaire).

A jégkorszak végén jelenik meg Európában a rövidfejű ember, a homo europæus brachycephalus: a korábbi diluvialis emberfajták mind hosszúfejűek voltak. Ezt a legelső rövidfejű európai embert az anthropologia Furfooz- vagy Grenelle-fajta néven ismeri. Még a diluvialis korszakba sorozzuk őt, az utolsó jegesedést követő postglaciale-ba, abba a kultúra-fokba, a melyet a francia szerzők nyomán Azylien-nek nevezünk. Egyik legdúsabb lelőhelye ennek az új európai emberjelenségnek a Württemberg és Bajorország határán levő Ofnet-barlang, melyet R. R. SCHMIDT² tárt fel. A barlangban talált 33 koponyát SCHMIDT monographiájában SCHLIZ ismertette. Közülök 30-nak vannak meg a fogai. A fogak kopottak ugyan, de SCHLIZ nem említi róluk, hogy szuvasak volnának. Ámde ismerünk e korból egy koponyát, mely arra enged következtetni, hogy ez az a korszak, a mikor a fogszű felbukkan és gyökeret ver Európa őslakossága körében, s tekintve, hogy a rövidfejű ember megjelenését Európában az anthropologusok zöme Ázsiából való bevándorlásból magyarázza, nem lehetetlen, hogy a fogak rom-

¹ J. CHOQUET: Examen de l'appareil dentaire du crâne de l'homme préhistorique de La Chapelle-aux-Saints. Verhandl. d. V. Internat. Zahnärztlichen Kongresses, 1909. Berlin, Bd. I. pg. 138.

² R. R. SCHMIDT: Die diluviale Vorzeit Deutschlands. Stuttgart, 1912, pg. 231.

lása Ázsiából behurczolt járvány, mint a hogy a pestist és kolerát is Ázsiából kapta és kapja még ma is időnkint föld-részünk lakossága. Ez a koponya magyarországi lelet: a külföldi irodalomban is szereplő nagysápi koponya. 1871-ben ásta ki HANTKEN MIKSA,¹ a földtani intézet akkori igazgatója, Nagysápon, Esztergom megyében a lőszből, 5—6 láb mély bolygatatlan rétegből, egy másik — nyomaveszett — koponyával s egy pár egyéb csonttal együtt, sajnos, mellékletek nélkül. A lősz, a mint tudjuk, diluvialis, leginkább postglacialis képződmény s így ebbe a korba kell utalnunk e koponya egykori tulajdonosát is. A bécsi LUSCHAN, értesülve a leletről, kölcsönkérte Hantkentől a koponyát és le is írta 1872-ben a bécsi anthropologiai társaság kiadványainak 2. évfolyamában.² TÖRÖK AURÉL³ 1893-ban kételyeket fejezett ki e koponya korbeli hitelessége tekintetében, hivatkozva különösen egy állítólag a koponyától nem messze talált vastárgyra; de minthogy HANTKEN maga, a ki a koponyát kiásta és a kinek megbízhatóságához kétség nem fér, határozottan állítja közlésében, hogy a koponya bolygatatlan rétegből került elő: véleményem szerint TÖRÖK AURÉL hyperkritikájának jelentőséget nem tulajdonithatunk, annál kevésbbé, mert a koponyán, különösen pedig az arcz-részén, világosan kifejeződik a diluviumra valló kezdetleges típus. A koponya 82·35-öt kitevő fejjelzőjével határozottan brachycephal, tehát a Furfooz-fajhoz osztható be. A mi már most a fogakat illeti, a következőket állapítottam meg: felül a bal első zápfogon, a medialis oldalán, kisebb fokú fogszerű mutatható ki már anyaghiánnyal, alul pedig hiányzik a jobb első zápfog, még pedig már jóval a halál előtt pusztulhatott el, mint azt a kitöltött fogmeder bizonyítja.⁴

¹ L. HANTKEN MIKSA: Földtani Közlöny. 1872, pg. 93.

² F. v. LUSCHAN: Mitt. d. Wiener Anthr. Ges. Jahrg. II. 1872, pag. 301.

³ A. v. TÖRÖK: Ethnol. Mitteil. aus Ungarn. III. kötet, 1893, pag. 119.

⁴ Sem LUSCHAN, sem TÖRÖK nem ismerte fel, vagy legalább nem említi dolgozatában, hogy a koponyán kóros vonás van. Erősen asymmetriás fej, ennek az okát pedig könnyű felismernünk a koszorúvarrat bal felének nyilván korai és teljes, a bregmától le a végéig terjedő

A diluvium után következő neolithkorszakból, továbbá a bronz- és vaskorból származó koponyákra vonatkozólag már gyakran találkozunk a koponyák leírásában szuvas fogak említésével; így COTTENÁL,¹ BARTUCZNÁL² (neolithkor), BARTELSNÉL³ (bronzkor) stb. Ezeket az adatokat magam is gyarapíthatom egy 9 koponyából álló egészen megbízható bronzkori koponyasorozat megvizsgálása alapján. E koponyákat dr. GERECEZÉ PÉTER ásta ki 1913-ban a Csepelszigeten, Tököl község déli határában. A nagyobb terjedelmű sírmezőn 55 urnafészket és 12 eltemetett csontvázat talált keverten. A mellékletek (bronzkarikák és sodronyok) határozottan a bronzkor első felére utalnak. A koponyák közül csak tízet sikerült megmenteni. A lelet kraniológiai részéről dr. BARTUCZ LAJOS tett jelentést a budapesti Archæologiai Társulatnak 1916 február 29.-iki ülésén.⁴ A fogak vizsgálatának eredményét a következőkben közölhetem:

A 10 koponya közül 9-nek a fogai vannak meg (4 ♂, 3 ♀, 1 kétes nemű, 1 gyermek). Köztük csak két épfogú van, a többi mind odvas fogakat, az életben keletkezett foghiányokat s a gyökerek körüli genyedés nyomait tünteti fel. Különösen bőven mutatja a fogak tekintetében a kóros jeleket az a mesterségesen torzított makrocephal, véleményem szerint női koponya, a mely a köralakban elhelyezett sírok középpontjában külön volt eltemetve és a mint ebből az elhelyezésből is, talán a mesterséges

elcsontosodásából. Ennek a következménye, hogy a bal falcsont hosszirányban elmaradt a fejlődésében, a nyílvarrat hátulsó vége pedig balra tér el. A rendellenesség hatása kiterjed az arcra is. A bal planum temporale és járomív gyengébb fejlődésével kapcsolatban baloldalt jóval gyengébben lehetett kifejlődve az egyén halántékizma és m. massetere is, minek folytán az alsó állkapocs bal felszálló ága és különösen annak hollóorrnyúlványa jóval keskenyebb és fejletlenebb, mint jobboldalt.

¹ CH. COTTE: La carie dentaire et l'alimentation dans la provence préhistorique. L'homme préhistorique. 3-e année, 1905, pg. 75.

² Dr. BARTUCZ LAJOS: A Búdösppest barlangban talált neolithkori embercsontváz. Barlangkutatás, 4. kötet, 1916, pg. 109.

³ P. BARTELS: Über Schädel und Skeletreste d. früheren Bronzezeit aus d. Umgebung v. Worms a. Rh. Præhist. Zeitschr. Bd. 4, 1912 pg. 67.

⁴ Dr. BARTUCZ LAJOS: Archæol. Értesítő, 36. köt. 1916, pg. 244.

torzításból is következtethető, valamely előkelőbb egyéniségnek a koponyája lehet.

Íme a fogak állapotának rövid leírása:

1. Makrocephal koponya, körülbelül 40 éves nőé. Hiányok: felül mind a hat M , alul a jobb P_2 , M_1 , M_3 , baloldalt az M_3 . Alul csonthiány a jobb P_1 gyökere körül. A felső bal C szuvas. Gyanús kirágottság a fogmedrek szélén, felül és alul is a centralis fogaknak megfelelően (pyorrhoea?)

2. Fiatal σ , körülbelül 30 éves, a 30. sz. sírból. Bal alsó M_2 , M_3 nagy fokban, jobb alsó M_2 kisebb fokban szuvas.

3. Fiatal σ , 28—30 éves, az 54. sz. sírból. Foghiányok: felül jobb M_2 és M_3 , bal M_1 , M_2 és M_3 , alul jobb M_1 és M_2 . A bal alsó M_1 szuvas. A felső bal J_1 gyökere körül genyüreg.

4. 40—45 éves σ , a 32. sz. sírből. Hiányok: alul jobb M_3 , bal M_2 és M_3 . Szuvasak: alul a jobb M_2 , a jobb felső P_2 és M_1 . Periodontitises genyüreg a felső jobb P_2 és M_1 gyökere körül.

5. 25—30 éves σ , a 13. sz. sírből. A koponya fogazata jó, csak a bal felső M_1 hiányzik s gyökerének helyén nagyobb tályogüreg van.

6. Fiatal egyén, kétes nemű, koponyája, a 42. sz. sírből, állkapocs nélkül. A felső fogak igen rosszak, jobboldalt hiányzik a M_3 , a P_1 erősen szuvas, a koronája elpusztult, csak a gyökere van meg s e körül genyüreg van, az állkapocsban. Baloldalt hiányzik a M_2 és M_3 .

7. 7—8 éves gyermek koponyája, állkapocs nélkül. A jobb első tejmolaris két helyen is szuvas.

Van egy dolgozat az irodalomban, mely valamivel nagyobb anyagon végzett vizsgálatok alapján összehasonlítón, statisztikai százalékszámok közlésével tárgyalja a præhistoricus és a történelmi korszak elejéről származó koponyák fogainak állapotát. Ez MUMMERY¹ londoni fogorvosnak 1870-ben közzétett

¹ J. R. MUMMERY: On the Relation wich Dental Caries may be supposed to hold with food and social condition. Transactions of the Odontological Society of Great Britain. 1870. Árkövy tanár úrnak köszönettel tartozom azért, hogy e füzetet átolvashattam.

értekezése, a melynek adatai napjainkban is sokat idéztetnek még a fogászati és anthropologiai irodalomban s melyet PICKERILL¹ «klasszikus» dolgozatnak nevez. MUMMERY különböző londoni és angolországi nyilvános és magán-koponyagyűjteményekben végezte kutatásait és statisztikailag igyekszik kimutatni a fogak romlásának gyarapodását az őskortól a történelmi korszak felé.

Főbb adatai a következők:

Neolithkorbéli britt koponyákon fogszú volt: 68 eset	
közül 2	2·94%
Bronzkorbélieken: 32 eset közül 7	21·87%
Vaskorbélieken: 59 eset közül 24	40·67%
A britanniai római uralom idejéből való koponyákon:	
143 eset közül 41	28·67%
Régi angol-szász koponyákon: 76 eset közül 12	15·78%

MUMMERYnek az a meggyőződése, hogy a fogak romlását leginkább a táplálkozás módja okozza s hogy különösen a hússal való czélszerű táplálkozásról a czélszerűtlen növényire való áttérés az, a minek a fogak romlása betudható. Ez arányszámok közül az elsőeknek növekedését, a továbbiaknak csökkenését is a táplálkozásnak ily értelmű megváltozásával hozza kapcsolatba. Fejtegetései ugyancsak gyenge lábon állanak; mi tudjuk mi ma, hogy hogyan táplálkoztak a neolithkori, bronzkori és a többi korbéli emberek? Egyik-másik körülményből ugyan némi következtetést vonhatunk erre, de az így levonható adatok nem elég bővek és megbízhatók arra, hogy belőlük megállapíthassuk az egész táplálkozás módját és e mód befolyását a fogak állapotára. A mi pedig a hússal való táplálkozás kedvező, a növényi tápláléknak pedig kedvezőtlen hatását a fogakra illeti, csak arra akarok utalni, hogy újabban némelyek éppen a növekvő húsfogyasztásból magyarázzák a fogak modern romlását (FRICK);² ez a dolog nagyon bizonytalan. De mindezt nem tekintve, egy

¹ H. P. PICKERILL: Verhütung von Zahnkaries u. Mundsepsis. Deutsche Übers. Berlin, 1913, pg. 7.

² TH. FRICK: Zahnverderbnis und Ernährung. Verh. d. Schweizer. Odontol. Gesellsch. 15. Jahresvers. in Bern. 1910.

nagy fogyatkozása van MUMMERY vizsgálatainak, a mely véleményem szerint nagyon csökkenti az ő adatainak az értékét. Dolgozatából világosan kivehetjük, hogy vizsgálataiban éppen csak a szuvas fogakat vette számba; a kihúzott, kihullott, kigenyedte fogakat figyelmen kívül hagyta: így kapta a fentebbi nagyon is kedvező eredményeket. Feltűnő és fogorvos részéről szinte érthetetlen tévedés ez, mert hiszen kétségtelen, hogy az életben elpusztult fogak legnagyobb része már akkor is közvetlenül vagy közvetve fogszú miatt ment tönkre. A foghiányokat — nem szólva természetesen a postmortalisan kihullott fogakról — az ilyen statisztikában határozottan a szuvas fogak között kell szerepeltetni, a mint azt SCHWERZ is tette mindjárt megemlített vizsgálataiban s hasonlóképpen KLÖSER is statisztikájában. Ha MUMMERY szerint járnánk el, az olyan egyén, a ki rossz fogait mind kihúzatta már, vagy a kinek 3—4 beteg foga kigenyedte, az épfogúak között foglalna helyet. Az én anyagomban 2—3-szor annyi a hiányzó fog, mint az odvas: legalábbennyivel kell tehát MUMMERY számait megszoroznunk; de még így is megbízhatatlanok. Némi comparativ értéket nem lehet elvitatni tőlük, mert hisz valamennyi koponya vizsgálatában ugyanazt a hibát követte el s vizsgálatainak eredményeiből azt az egyet elfogadhatjuk, hogy a fogszú szaporodott az ősidóktól a történelmi korszak felé, de abszolút értékűnek nem fogadhatjuk el őket. Természetes, hogy e kritika a maga teljességében áll MUMMERY egyéb adataira, nevezetesen a mai kezdetleges népfajokra vonatkozó számaira nézve is: MUMMERY itt is figyelmen kívül hagyta a hiányzó fogakat, a helyett, hogy ezeket is a caries-csoportba sorozta volna. Nagy álmélkodással olvastam PICKERILLNEK (i. m. pg. 9) azt az állítását, hogy primitív népeknél a foghiányok és gyökérgörűli genyedések sohasem származnak fogszútól, hanem a fogkopás következményeképpen beállott fogbélelhalástól és ezzel kapcsolatos gyökérgyuladástól. E részben utalok arra, a mit SEYFFERT mond a primitív népek fogviszonyaira vonatkozó érdekes dolgozatában:¹ «Die Zähne bei den

¹ C. SEYFFERT: Die Pflege d. Zähne bei den Naturvölkern. Deutsche Monatsschr. f. Zahnheilkunde. 1911, pg. 842.



Naturvölkern sind im allgemeinen schlecht, jedenfalls nicht so hervorragend, wie man angenommen hat.» PöCH¹ közléséből tudjuk, hogy például az ausztráliai őslakóknak nagyon rossz a foguk. A fogak állapotának statisztikai vizsgálata körül csak úgy hemzseg a sok hibaforrás. A prähistoricus és kezdetleges népekre vonatkozólag az egész kérdés revisióra szorul; új, pontos vizsgálatokra van szükségünk.

A mi a történelmi korszakot illeti, szintén hiányzanak a különböző korokra nézve a megbízható összehasonlító vizsgálatok. Csak egyetlen dolgozatot ismerek, mely megállja a bírálatot, ez SCHWERZnek alább részletesen ismertetendő közlése az V.—X. századbeli alamannok fogainak állapotáról.² Gyakran olvasható állítás, hogy régente, még pár évszázad előtt is, jobbak voltak a fogak, mint manapság s hogy a fogak romlása a modern elfajulásnak egyik következménye. De hol van ennek az állításnak a szabatos bizonyítéka? SCHWERZ adatain kívül az irodalomban erre vonatkozólag mitsem találtam s ezért nem véltem értéktelen munkának, ha ezt a kérdést, felhasználva a budapesti anthropologiai intézet gyűjteményének nagy és különböző korokból származó anyagát, tüzetes vizsgálat tárgyává teszem, vagyis szabatos módszerekkel megállapítani igyekszem, hogy csakugyan kimutatható-e a fogszuvasodásnak ez a gyarapodása a régmúlt időktől napjaink felé, és ha igen, milyen fokban.

Az anthropologiai intézetnek négy koponyasorozatát használtam fel erre az összehasonlításra, együttesen 1190 koponyát.³ E négy sorozat a következő:

1. A régi «váci temető» exhumált anyaga: 755 koponya. Ezt a temetőt alkalmasint 1777-ben adták át rendeltetésének

¹ R. PöCH: Studien an Eingeborenen von Neu-Südwaless und an australischen Schädeln. Mitteil. Anthrop. Ges. Wien, Bd. XLV, 1915, pg. 12., cfr. pg. 15., 29.

² FR. SCHWERZ: Pathologische Erscheinungen an Alamannenzähnen aus dem V.—X. Jahrhundert. Schweizerische Vierteljahrschrift f. Zahnheilkunde. Bd. XXVI, 1916, pg. 1.

³ Hozzávéve a szintén megvizsgált, de az összehasonlításához fel nem használt 500 «boncztermi» koponyát, 1690-et.

és 1849-ig használták. Török AURÉL tanár 1882-ben exhumáltatta s szállítottatta az embertani intézetbe a csontmaradványokat. A sorozat vegyesen férfiak, nők és gyermekek koponyáiból áll, körülbelül egy rendes temetkezési hely halottjainak nemi és korbeli arányában. Sajnos, a sorozatnak az az egy nagy fogyatkozása van, hogy a koponyák közül nagyon kevésnek van meg az állkapcsa. Az állkapcsok megvannak az intézetben, de sok száz egyéb állkapocscsal összekeverve s megfelelő megjelölés nélkül. Ez az én modern összehasonlítási anyagom, a mely tehát leginkább a múlt század első feléből való. Rendelkezésemre állana ugyan az anthropologiai intézet és az I. számú anatómiai intézet gyűjteményéből sok százra menő, napjainkból származó (boncstermi) koponya is, tehát még újabb, egészen modern anyag, csak hogy ez az anyag nem alkalmas a régibb kiasott anyaggal való összehasonlításra a fogak állapota tekintetében, mert ebben az irányban bizonyos kiválogatás eredménye: a boncztani szolgák ugyanis, a kiktől leginkább vétel útján szereztetett be az anthropologiai intézet ebbeli anyaga, javarészében az épfogú tetemek fejeit válogatják ki áztatásra és præparálásra, mert az ilyen koponyákat, mint a tanulásra alkalmasabbakat, inkább keresik a hallgatók s így könnyebben remélnék rajtuk túlradhatni; a rosszabb fogú idősebb egyéneket mellőzik. Ez az anyag tehát sokkal jobb színben tünteti fel a fogak átlagos állapotát, mint a minő valóban. Erről meg is győződtem 500 ilyen koponya fogainak a megvizsgálása alapján: hamis eredményt kapunk, legalább 4%-kal jobbat az igazi átlagnál (l. lejjebb). A fogászati irodalomnak az élőkre vonatkozó statisztikai caries-adatait, melyeknek óriási terjedelméről és eredményeiről KLÖSER idézett dolgozatából tájékozódhatunk, ehhez az összehasonlításhoz nem lehetett felhasználnom, már csak azért sem, mert majdnem kizárólag iskolás gyermekekre és katonákra vagy katonaköteles egyénekre vonatkoznak: egészen más anyag ez tehát, mint a fossilis anyag s különben is a fogak vizsgálatakor csak koponyákat szabad koponyákkal összehasonlitanunk.

2. A rákospalotai lelet: 260 koponya. Ennyi volt a fogak tekintetében a 334 koponyából álló sorozatból felhasználható.

1882-ben ásta ki e csontmaradványokat dr. PÓSTA BÉLA, ma a régészet kolozsvári egyetemi tanára, Rákospalota falu határában, Budapest közelében. Az érdekes lelet Pósta tanár részletes értesítése szerint a csontokkal talált, bár csekély számú, de jellemző mellékletek s különösen az érmeek tanúsága szerint egy Arpád-kori XI.—XIII. századbéli magyar falu temetkezési helyét tárja elénk. Vegyesen találunk a koponyák közt férfiakat, nőket és gyermekeket.

3. Népvándorlaskorbéli koponyák a Kr. u. IV.—V. századból: keszthelyi és nemesvölgyi lelet. 101 volt e sorozatból a fogak vizsgálatára felhasználható. A keszthelyi ásatásokat dr. LIPP VILMOS végezte 1879—1884-ig; ásatásairól «A keszthelyi sírmezők, Budapest, 1884» című munkájában adott bővebb, bár korántsem kimerítő ismertetést. Négy nagy sírmezőt ásott fel, egyet Keszthelyen, egy másikat a közel fekvő Dobogódombon; amott 449, emitt 2088 sirt bontott fel. Később még két további népvándorlaskorbéli temetkezési helyet tárt fel Keszthely közelében, a régi Mogentiana táborvár területén, Fenéken és Alsó-Páhokon, amott 300, emitt 1192 sirt. Európa egyik legnagyobb és leletek tekintetében leggazdagabb népvándorlaskorbéli sírtelepe ez. A csontvázak — sajnos, csak egy kis részük került az anthropologiai intézetbe és egyéb múzeumokba — nagy része nőé és gyermeké. A csontokkal 4000-nél több arany-, ezüst-, bronz-, vas-, agyag- és csontrégiség került elő és sok római pénz a Kr. u. IV. századból. LIPP e sírmezők keletkezését a IV. század második felére teszi.¹ Valamely ismeretlen, a római uralom alatt Keszthelyen és környékén letelepedett barbár nép temetkezési helye volt ez, a melynek körében LIPP szerint legalább három különböző emberfajtát lehet megállapítani: egy magasat, egy középmagasat és egy alacsonyat. Az embertani intézetben levő idetartozó koponyák közül csak 83-at lehetett céljainkra felhasználni.

¹ PULEZKY FERENCZ véleménye szerint (Magyarország archæológiája, Budapest, 1887, pg. 67) a keszthelyi sírok nem a IV. századba, hanem az V. század első felébe sorozandók. A keszthelyi telepések szerinte valószínűleg osztrogóthok voltak. HAMPFL (Altertümer d. frühen Mittelalters in Ungarn. Braunschweig, 1905, pg. 166) szarmatáknak tartja őket.

A nemesvölgyi lelet (Moson vm., rajkai járás) dr. SÖTÉR ÁGOSTONNAK 1884/5-ben és 1891-ben végzett ásatásainak köszönhető. Dr. Sötér 184 sírt bontott fel: vegyesen talált bennük férfi-, nő- és gyermekcsontvázakat. Leírása szerint¹ jellegzetes népvándorlaskori lelet, körülbelül megegyező a keszthelyivel. Felhasználható volt e sorozatból a fogakra vonatkozó vizsgálatra 18 koponya.

4. Római sírokból előkerült koponyák a Kr. u. első századokból: 74 drb. E koponyák különböző helyekről származnak, legtöbb az aquincumi római telep területéről. A további koponyák lelőhelye *Magyaróvár* (dr. Sötér Ágoston ásatása az «Adflexum» nevű római telep helyén, igen sok terra sigillatával, 1894. évi ásatás, l. Archæol. Értesítő 1894), *Nezsider*, Moson vm. (dr. Sötér ásatása 1884-ben), *Sopron virosa* (Paur Iván ajándéka 1885), *Büdöskút* (Sopron vm.) és *Ó-Szöny* (= Brigantium, 1885).

A négy sorozat egy tekintetben megegyezik egymással: békés népesség, asszonyok, férfiak, gyermekek koponyáiból áll. Nagy hiba volna ilyen összehasonlításban egy békés, különböző korú és nemű, betegségben elhalt népesség fogait egy harcmező fiatal, egészséges harcosainak a fogaival összehasonlítani.

Fajbéli tekintetben az anyag — sajnos — nem egyöntetű: különböző fajok vegyüléke egy-egy csoport is, például a váczi temetőbeli sorozat, mely nyilván Budapest lakosságának ismert elegyéből, magyar, szláv és germán elemekből áll. Pedig tudjuk, hogy a fogak különböző ellentálló képességében a fogszú okozójával szemben a faji szempont is érvényesül. De azt hiszem, hogy szigorúan egy népfaj fogainak az összehasonlítása különböző korok szerint sohasem lesz megvalósítható.

Szuvasnak, éppúgy mint SCHWERZ az alamannokról szóló dolgozatában, csak a kifejezetten anyaghiányos odvas fogakat vettem. A kezdődő caries jeleként a tankönyvek² a zománc

¹ DR. SÖTÉR ÁGOSTON: Az ásatások leírása. Archæol. Értesítő, 1885, pg. 199., 282. és 310. és 1886, pg. 321.

² Lásd például dr. SZABÓ JÓZSEF: Gyakorlati fogászat. Budapest. 1914. 78. oldal.

barna elszínesedését vagy tejszerű elfehéredését említik. Nem is szólva arról, hogy e színváltozások, úgy látszik, nem biztos jelei a cariesnek, mert más is okozhatja őket, már csak azért sem vehettem őket figyelembe, mert kiásott koponyákon a fogak a talaj chemiai behatásától is elszíneződhetnek. Kerülni igyekeztünk a hiányos zománczfejlődésű fogakkal való összetévesztést is. A fogszű megállapításában a legnagyobb gonddal jártunk el, különös figyelemmel az egymással érintkező (approximalis) felszínekre, hol a hiány gyakran csak igen pontos vizsgálattal, a fog lekaparása és letisztítása után vehető észre.¹

A vácsi temetőbeli koponyáknak, a mint már említettem, csak egy elenyésző kis töredékén van meg az alsó állkapocs. Ez az anyag számbeli csekélysege miatt nem volt alkalmas az összehasonlításra és ennek folytán nem járhattam el másképpen, mint hogy valamennyi sorozaton csak a felső állkapocs fogaira nézve vittem keresztül az egybevetést, bár a másik három sorozaton, éppen a régiekben, az állkapocs elég koponyán van meg. Azért nem kapcsolhattam be egyoldalúlag, az anyagnak csak egy részén, az alsó állkapocs fogait az összehasonlításba, mert mint ismeretes, az alsó fogak jóval kevésbé vannak alávetve a romlásnak, mint a felsők s így az alsó fogsornak az egyik részen való bevonása a statisztikai anyagba egyoldalúan e sorozat javára billentette volna a mérleget.

A koponyákon a hiányzó fogak két szempont alá esnek:

a) Könnyen felismerhetők azok a hiányok, a melyek az illető fognak postmortalisan, leginkább a koponya kiásása alkalmával történt kieséséből származnak. A fogmeder ilyenkor teljesen ép, csak üres. Az ily módon kiesett fogak aránya a négy sorozat közül háromban csaknem egyforma: a 755 vácsi temetőbeli koponya felső állkapcsán 4239 üres fogmedret, a 260 rákospalotain 1368-at és a 101 népvándorlászkorabelin 565-öt találtam; egy koponya felső állkapcsára tehát az első anyagon 5·60, a másodikon 5·26, a harmadikon pedig 5·59 post-

¹ El nem mulaszthatom, hogy ne emlékezzem meg elismeréssel dr. GSTETTNER KATALINNAK, az embertani intézet tanársegédének e vizsgálat elvégzésében kifejtett buzgó segédkezéséről.

mortalisan kiesett fog jut. A római koponyákon több a hiány, 74 koponyán 551 üres fogmeder van a felső állkapcsón, egy koponyára tehát 7.1 postmortalisan hiányzó fog esik.

b) Az ilyen foghiánynyal nem téveszthető össze az olyan hiány, a melynek az az oka, hogy a fog még az egyén életében elpusztult: kihullott, kihúzták, kitörték, vagy kigenyedtek. Ilyen esetben a fogmeder oldalfalai felszivódtak, eltűntek, viszont a meder feneke kitelődött szivacsos csontállományjal, az egykori fog helye legömbölyödött s ha több fog hiányzik egymás mellett, az egész fogmedernyúlvány kisebb-nagyobb fokban sorvadt. A gyökérkörüli genyedés nyomai igen sok régibbkori koponyán ismerhetők fel az állkapocsnak kisebb-nagyobb hólyagszerű anyaghiányai, üregek, csontlehiscentiák, sipolyok alakjában, hasonlíthatatlanul többen, mint a mai koponyákon.

Nem kételkedhetünk abban, hogy az ilyen foghiányokat az esetek túlnyomó számában közvetlenül vagy közvetve a fogszú okozza. Véleményem szerint a legtöbb esetben a hiány úgy keletkezett, hogy az egyén beteg, fájós fogát kihúzták. Még a legprimitívebb ősembernek is tulajdonítok annyi értelmet, hogy észre tudta venni, hogy a fog nincs összenőve az állkapocscsal, hogy eltávolítható s hogy volt annyi technikai ügyessége, hogy ezt az eltávolítást el is tudta végezni. Az olyan ember, a ki bronzból, vasból ügyes és formás eszközöket tud más célra készíteni, birhatott annyi leleményességgel, a mennyi egy foghúzó-eszköz elkészítéséhez s kellő alkalmazásához szükséges. Nem oszthatom SCHWERZnek azt a nézetét, a melyet ő az V.—X. századbeli alamannokra nézve fejtett ki (i. m. pg. 52), hogy azok a foghúzást nem ismerték s hogy hiányzó fogaik mind önként kigenyedtek. Nézetem szerint nagy alábecsülése ez a régibb kor embere szellemi képességeinek. A fogszúval szemben, véleményem szerint, nagyon jelentéktelen szerepet játszanak azok az egyéb okok, a melyekre a hiányok magyarázatául még gondolhatunk, a minő a trauma, a fogkopás folytán beállott fogbélelhalás és foggyökérgyulladás, a pyorrhœa alveolaris, a periodontitis. Megjegyzem, hogy az egészen senilis, sorvadt állkapcsú, foghiányos koponyákat nem vettem be statisztikámba. Mindezek alapján meggyőződéseim szerint ily statisztikai vizs-

gálatnál bátran fogszúnak vehető a præmortalisan hiányzó fog is. Így járt el SCHWERZ is.

Ámde a hiányzó fogak megállapításakor nagy nehézség merül fel: a veleszületett foghiányokkal való összetévesztés lehetősége. Tudvalevő dolog, hogy különösen két fog az, a melynek ilyenféle hiányát a többinél gyakrabban észleljük: a felső oldalsó metszőfog és a harmadik zápfog, felül és alul egyaránt. A felső J_2 veleszületett hiánya nem éppen gyakori. HILLEBRAND¹ szerint 0·56%-ban, SCHWERZ² szerint körülbelül 1%-ban fordul elő. Ez a rendellenesség tehát nagy ritkasága miatt nem fogja lényegesen zavarni e statisztikát. Megjegyzem különben, hogy mindkét számbeli adathoz kétség fér. Mindkét szerző ugyanis nem élőkön, hanem koponyákon végezte a statisztikai vizsgálatot. Ez azonban nagyon kétes értékű eljárás, mert nem engedi annak biztos megállapítását, hogy a fog csakugyan születéstől fogva hiányzott-e, vagy megvolt és csak később pusztult-e el; ha a fog ugyanis már nagyon korán esett ki vagy húzatott ki, a két szomszédos fog annyira összetolódhat, hogy ugyanaz a kép áll elő, mintha veleszületett hiány esete forogna fenn. Ilyen statisztikára csak az élők alkalmasak, a kiket ki lehet kérdezni a felől, hogy nem esett-e ki a hiányzó oldalsó metszőfoguk.

Máshogy áll az ügy a harmadik zápfogra, a «bölcességfog»-ra vonatkozólag. Ennek a veleszületett hiánya igen gyakori jelenség. Két dologon alapulhat: a fogtelep ki sem fejlődött (agenesia), vagy megvan a fog az állkapocsban, csak nem tudott kibújni (retentio). Hogy a két eset közül melyik forog fenn, azt csak Röntgen-vizsgálattal, vagy a koponyákon az állkapocs felvésésével állapíthatjuk meg: néha a fog elég messze van a fogmeder szélé-től, például az állcsonti öböl mögött, a felső állcsont gumóján. De a mi szempontunkból ez a megkülönböztetés nem bir jelentőséggel: mind a kettő veleszületett hiány. A mi már most ennek a hiánynak a gyakoriságát illeti, az irodalom adatai kissé el-

¹ HILLEBRAND JENŐ: Újabb adatok az ember fogainak alaktanához. Budapest, 1908, pg. 78.

² SCHWERZ i. m. pg. 177.

térők ugyan, de valamennyien magas számokat tüntetnek fel. VRAM¹ az európai emberre nézve 23·6%-ot (a primitív emberekre nézve kevesebbet, például a pápuákra 10·9%-ot, az afrikai szerecsenekre 5·3%-ot) mond, H. DE TERRA² száma 11%, P. DE TERRAÉ³ 18—19%, HILLEBRANDÉ⁴ 13·5%, SCHWERZÉ az alamannokra nézve 15%. RÖSE e hiány gyakorisága tekintetében óriási számokat említ, de az ő adatai azért nem megbízhatók, mert a 20-as években levő fiatal egyénekre, katonákra és sorozás alatt levőkre vonatkoznak, a kiken az egyik-másik bölcseséfgog, vagy akár mind a négy is még nem bújtt ki.

E veleszületett foghiánynak nagy gyakorisága lehetetlenné teszi a harmadik zápfog bevonását oly statisztikába, melyben a prēmortalisan hiányzó fogat fogszúnak vesszük. Egészen hamis, túlnagy számarányt kapnánk ilyen módon e fog szuvaságának gyakoriságára nézve. Minthogy vizsgálataim első kellékének azt tekintettem, hogy lehetőleg szabatos, minden irányban helytálló eredményt érjek el, nem találtam más kibúvót, mint a harmadik zápfognak teljes kirekesztését a statisztikából s azt hiszem, ez az egyedüli út, melyet ily összehasonlító vizsgálatnál követnünk lehet. Ha egészen biztosan ismernők a négy bölcseséfgog közül külön-külön mindegyikre nézve veleszületett hiányának gyakoriságát, ezt az arányszámot levonhatnók statisztikánkból a hiányzó M_3 -ok számából és a maradékot fogszúnak vehetnők. Ilyen módon szerepeltethetnők a bölcseséfgogokat is vizsgálataink során, de ezek a szükséges adatok még nem állanak rendelkezésünkre.

Az összehasonlításnak két különböző útja van, a melyeket nem szabad összetévesztenünk; mindkettőt alkalmaznunk kell, mert kiegészítik egymást.

¹ VRAM: Studio sui denti molari umani. Atti Soc. Rom. Antrop. Vol. 5, 1897, pg. 155.

² M. DE TERRA: Beiträge zu einer Odontographie der Menschenrassen. Berlin, 1905, pg. 230.

³ P. DE TERRA: Vergl. Anatomie des menschl. Gebisses u. d. Zähne d. Vertebraten. Jena, 1911, pg. 377.

⁴ HILLEBRAND JENŐ: Újabb adatok az ember fogainak alaktanához. Budapest, 1908, pg. 78.

Első eljárás. Hány a teljesen épfogú és hány a betegfogú egy-egy sorozat koponyái között, betegnek véve a már a halál előtt elpusztult fogakat is ?

Hibaforrások:

a) A postmortálisan kiesett fogakról nem tudjuk, hogy épek vagy szuvasak voltak-e. Előfordulhat az az eset, hogy a meglevő fogak mind egészségesek és így a koponya az épfogúak között szerepel, de helytelenül, mert a koponyából már a földben, vagy a kiásáskor kihullott fogak egyike vagy másika odvas volt. Ennek a hibának a hatását jelentékenyen csökkenti az a körülmény, hogy éppen azok a fogak, a melyek egyszerű gyökereük miatt legkönnyebben esnek ki a koponyából: az úgynevezett frontfogak szoktak legkevésbé megbetegedni. Ritkaságszámba megy az olyan fogsor, melynek zápfogai és előzáfogai épek és éppen csak egyik vagy másik metszőfoga szuvas. Megjegyzem, hogy e hibaforrás zavaró hatását azzal is csökkenteni igyekeztem, hogy az olyan koponyákat, a melyeknek fogaiból a postmortalis kihullás miatt csak 3—4 maradt meg, ha épek is voltak, nem vettem be a számításba.

b) A vizsgálat csak a felső fogakra szorítkozott s a mennyiben itt valamennyi fog épnek bizonyult, a koponya az épfogúak közé soroztatott. Ámde kétségtelenül nem egyszer előfordul az az eset, hogy a felső fogak mind épek s csak alul romlott egyik vagy másik fog. E hibaforrásra való tekintettel bizvást felvehetjük, hogy az abszolút eredmény rosszabb, mint a mennyit számításaink feltüntetnek. Erre különben lejjebb még visszatérek s az eredményt korigálni igyekszem.

Eredmény:

a) A vácsi temető 755 koponyája között csak 130 volt olyan, a melynek felső fogai épnek találtattak: 17·22^o%, romlott és már régebben elpusztult foga a felső állkapocsban: 82·78^o%-nak volt.

b) Rákospalotai anyag: épfogú 24·62^o%, rossz- és hiányzó-fogú 75·38^o%.

c) Népvándorlás korabeli koponyák Keszthelyről, Nemesvölgyről: épfogú 29·70^o%, rossz- és hiányzófogú 70·30%.

d) Pannóniai római sirokból származó koponyák: épfogú 26·15%, rossz- és hiányzófogú 73·84%.

Mint fentebb kiemeltem, ezek az arányszámok a felső fogakra való szorítkozásuk miatt csak relativ s nem absolut értékűek; a rosszfogúak száma valójában — az alsó fogak be-számításával — kétségtelenül jóval nagyobb volt, mint a mennyit e számok mondanak. Közvetett úton igyekeztem megállapítani, hogy milyen mértékű a hiba, vagyis hogy mennyivel kell ezeket az arányszámokat növelnünk, hogy megkapjuk az absolut értéket.

Erre a megállapításra az embertani intézetnek 500 koponyából álló, napjainkból származó «boncztermi» koponya-sorozatát használtam fel. E koponyák valamennyijének megvan az állkapcsa s így meg lehetett e sorozaton állapítani, hogy hogyan aránylik közöttük azoknak a koponyáknak a száma, a melyek a felső fogak tekintetében épfogúak, azokéhoz, a melyek mindkét fogsoruk tekintetében bizonyultak épfogúnak. E számarány a következő: 23·6% (felső fogak): 13·8% (mindkét fogsor), vagy a beteg és hiányzó fogakat véve: 76·4%: 86·2%; mint látjuk, a különbség tetemes. E kulcs szerint korrigálva a fentebbi számokat, a következő, most már absolut eredményt kapjuk a négy fossilis-sorozatra nézve.¹

	Épfogúak	Romlott fogúak
Váci temető (19. század első fele) — — — — —	10%	90%
Rákospalota (11.—13. század) — — — — —	14%	86%
Népvándorlás kora (4.—5. század) — — — — —	17%	83%
Római, pannóniai koponyák (Kr. u. első századok)	15%	85%

2. Az összehasonlítás második módja. Külön-külön vesszük szemügyre az egyes fogféleségeket s mindegyikükre megállapítjuk, hogy hány ép, hány beteg van és hány hiányzik közöttük a négy sorozat mindegyikében; végül összeadva az egyes fogakon nyert eredményeket, kiszámítjuk, hogy egy-egy sorozat fogai

¹ A közvetlen megállapítás nem egyezik egészen az e számítás útján nyert arányszámmal: 76 állkapcsos rákospalotai koponya közt 13 épfogú volt = 17·10%. A fenti számot megbízhatóbbnak tartom.

közt — 28-nak véve a fogak számát a bölcsességfogak kihagyása miatt — hány az ép és hány a beteg.

Hibaforrás: A kiásott koponyákon nagy számmal kihullott úgynevezett «frontfogak» (metsző- és szemfogak) kevésbé szoktak szuvasok lenni a kis és nagy zápfogaknál s ezért az összegezett eredmény kissé kedvezőtlenebb lesz a valóságnál.

Tisztában kell lennünk azzal, hogy az összehasonlítás két módjával nyert eredmények esetleg nincsenek teljes összhangzásban. Elképzelhető, hogy az *A*- és a *B*-koponya-sorozat összehasonlításakor az *A*-sorozatban találunk több épfogú koponyát, holott az ép és beteg fogak arányát véve számba, a *B*-koponya-sorozat jut kedvezőbb helyzetbe, mert bár az *A*-sorozatban több az épfogú egyén, de a betegfogúak fogsoraiban több a beteg fog, mint a *B*-sorozat rosszfogú példányaiban.

Eredmény: A vizsgálat eredményét az egyes fogakra nézve a mellékelt hét táblázatban állítottam össze. A táblázat egy-egy fogra vonatkozólag külön tünteti fel a jobb és bal fog állapotát, külön jelölve meg százalékszámokban az ép, hiányzó és szuvas fogak arányát s összegezve a két utóbbi értéket a táblázat szélső rovatában.

1. felső metszőfog.

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető (1777—1848)	Ép:	52·61	52·61	60·13	60·13	52·21	52·21 %
	Hiányzik:	41·70	47·39	32·77	39·87	42·40	47·79 %
	Szuvas:	5·69		7·10		5·39	
Rákospalota (11—12. század)	Ép:	71·11	71·11	72·36	72·36	70·17	70·17 %
	Hiányzik:	27·78	28·89	26·02	27·64	27·62	29·83 %
	Szuvas:	1·11		1·62		2·21	
Népvándorlás kora (Kr. u. IV. század)	Ép:	75—	75—	58·82	58·82	67·57	67·57 %
	Hiányzik:	25—	25—	41·18	41·18	32·43	32·43 %
	Szuvas:	—	—	—	—	—	—
Római sírokból (Kr. u. első századok)	Ép:	80—	80—	62·50	62·50	69·23	69·23 %
	Hiányzik:	20—	20—	31·25	37·50	26·92	30·77 %
	Szuvas:	—	—	6·25		3·85	

2. felső metszőfog:

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	65·05	65·05	60·13	60·13	62·72	62·72 %
	Hiányzik:	28·57	34·95	32·77	39·87	30·56	37·28 %
	Szuvas :	6·38		7·10		6·72	
Rákospalota :	Ép :	73·95	73·95	72·36	72·36	73·14	73·14 %
	Hiányzik:	22·69	26·65	26·02	27·64	24·38	26·86 %
	Szuvas :	3·96		1·62		2·48	
Népvándorlás kora :	Ép :	69·70	69·70	75·86	75·86	72·58	72·58 %
	Hiányzik:	30·30	30·30	20·69	24·14	25·81	27·42 %
	Szuvas :			3·45		1·61	
Római sírokból :	Ép :	91·67	91·67	78·95	78·95	83·87	83·87 %
	Hiányzik:	8·33	8·33	21·05	21·05	16·13	16·13 %
	Szuvas :						

felső szemfog:

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	75·47	75·47	70·99	70·99	73·18	73·18 %
	Hiányzik:	18·60	24·53	20·99	29·01	19·82	26·87 %
	Szuvas :	5·93		8·02		7·05	
Rákospalota :	Ép :	79·29	79·29	77·42	77·42	78·40	78·40
	Hiányzik:	14·79	20·71	16·13	22·58	15·43	21·60
	Szuvas :	5·92		6·45		6·17	
Népvándorlás kora :	Ép :	75·00	75·00	84·78	84·78	80·00	80·22
	Hiányzik:	11·36	25·00	6·52	15·22	8·89	19·78
	Szuvas :	13·64		8·70		11·11	
Római sírokból :	Ép :	82·61	82·61	77·78	77·78	80·49	80·49
	Hiányzik:	17·39	17·39	16·67	22·22	17·07	19·51
	Szuvas :			5·55		2·44	

1. felső kis órló:

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	63·51	63·51	63·89	63·89	63·70	63·70 %
	Hiányzik:	23·68		25·52		24·60	
	Szuvas :	12·81	36·49	10·59	36·11	11·70	36·30 %
Rákospalota :	Ép :	79·60	79·60	76·29	76·29	77·95	77·95 %
	Hiányzik:	13·77		18·04		15·90	
	Szuvas :	6·63	20·40	5·67	23·71	6·15	22·05 %
Népvándorlás kora :	Ép :	81·03	81·03	82·76	82·76	81·36	81·36 %
	Hiányzik:	12·07		10·34		11·21	
	Szuvas :	6·90	18·97	6·90	17·24	7·43	18·64 %
Római sírokból :	Ép :	76·47	76·47	69·45	69·45	72·86	72·86 %
	Hiányzik:	14·71		22·22		18·57	
	Szuvas :	8·82	23·53	8·33	30·55	8·57	27·14 %

2. felső kis órló.

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	60·88	60·88	63·15	63·15	62·03	62·03 %
	Hiányzik:	27·02		28·20		27·61	
	Szuvas :	12·10	39·12	8·65	36·85	10·36	37·97 %
Rákospalota :	Ép :	72·81	72·81	75·77	75·77	74·21	74·21 %
	Hiányzik:	20·28		19·59		19·95	
	Szuvas :	6·91	27·19	4·64	24·23	5·84	25·79 %
Népvándorlás kora :	Ép :	76·06	76·06	74·20	74·20	75·19	75·19 %
	Hiányzik:	14·08		12·90		13·53	
	Szuvas :	9·86	23·94	12·90	25·80	11·28	24·81 %
Római sírokból :	Ép :	75·00	75·00	77·78	77·78	76·32	76·32 %
	Hiányzik:	17·50		19·44		18·42	
	Szuvas :	7·50	25·00	2·78	22·22	5·26	23·68 %

1. felső zápfog.

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	47·30	47·30	45·84	45·84	46·57	46·57 %
	Hiányzik:	36·75	52·70	36·43	54·16	36·53	53·43 %
	Szuvas :	15·95		17·73		16·84	
Rákospalota :	Ép :	57·81	57·81	53·02	53·02	55·44	55·44 %
	Hiányzik:	28·27	42·19	32·33	46·98	30·28	44·56 %
	Szuvas :	13·92		14·65		14·28	
Népvándorlás kora :	Ép :	64·13	64·13	55·10	55·10	59·47	59·47 %
	Hiányzik:	27·17	35·87	36·74	44·90	32·11	40·53 %
	Szuvas :	8·70		8·16		8·42	
Római sírokból :	Ép :	72·31	72·31	62·29	62·29	67·46	67·46 %
	Hiányzik:	21·54	27·69	29·51	37·71	25·40	32·54 %
	Szuvas :	6·15		8·20		7·14	

2. felső zápfog :

		Jobb		Bal		Mindkettő	
Váci temető :	Ép :	52·77	52·77	49·20	49·20	50·99	50·99 %
	Hiányzik:	33·96	47·23	35·72	50·80	34·84	49·01 %
	Szuvas :	13·27		15·08		14·17	
Rákospalota :	Ép :	55·02	55·02	46·64	46·64	50·89	50·89 %
	Hiányzik:	37·12	44·98	43·05	53·36	40·04	49·11 %
	Szuvas :	7·86		10·31		9·07	
Népvándorlás kora :	Ép :	48·19	48·19	46·34	46·34	47·27	47·27 %
	Hiányzik:	37·35	51·81	39·03	53·66	38·18	52·73 %
	Szuvas :	14·46		14·63		14·55	
Római sírokból :	Ép :	63·16	63·16	60·34	60·34	61·74	61·74 %
	Hiányzik:	31·58	36·84	32·76	39·66	32·17	38·26 %
	Szuvas :	5·26		6·90		6·09	

Összegezett eredmény.

a) A *váci temető* koponyáin megvizsgált felső fogak száma (az intra vitam elpusztult fogakat is hozzászámítva) 6896; ebből

ép	— — — —	3971 = 57·59%	= 57·59% ;
hiányzik	—	2118 = 30·71%	} = 42·41%.
szuvas	— —	807 = 11·70%	

Egy koponyára esik 3·87 rossz és betegség folytán hiányzó felső fog.

b) A *rákospalotai* koponyákon megvizsgált fogak száma 2469; ebből

ép	— — — —	1657 = 67·11%	= 67·11% ;
hiányzik	—	626 = 25·36%	} = 32·89%.
szuvas	— —	186 = 7·53%	

Egy koponyára esik 3·12 romlott és hiányzó felső fog.

c) A *keszthelyi és nemesvölgyi* koponyákon a megvizsgált fogak száma 800; ebből

ép	— — — —	526 = 65·75%	= 65·75% ;
hiányzik	—	199 = 24·88%	} = 34·25%.
szuvas	— —	75 = 9·37%	

Egy koponyára esik 2·71 romlott és hiányzó felső fog.

d) A *római sírokból* származó koponyákon a megvizsgált fogak száma 485; ebből

ép	— — — —	342 = 70·52%	= 70·52% ;
hiányzik	—	115 = 23·71%	} = 29·48%.
szuvas	— —	28 = 5·77%	

Egy koponyára esik 1·93 romlott és hiányzó felső fog.

Az eredmények áttekintése.

Figyelmünket e számok összehasonlításakor először is az a körülmény köti le, hogy milyen nagyfokú volt a fogak romlása már a régebbi korban is. Ezek a sok száz évvel, részben másfél

évezreddel mögöttünk fekvő időkből származó koponyák fogai korántsem állítják elének azt az eszményi állapotot, melyre a mai romlottfogú nemzedék oly sóvárogva tekint vissza, hanem ellenkezőleg közöttük is elszomorító a fogszú okozta nagy pusztulás. Vegyük szemügyre először az első módszerrel nyert eredményeket. Még a népvándorláskori és régi római időkből származó koponyákon is 80%-nál jóval több a rosszfogú koponyák arányszáma. Már ama régi kor embere is sokat szenvedett a fogfájástól s a mennyivel ritkább volt közötté a fogcaries, mint a mai európai ember körében, annyival vagy még többel súlyosabb volt a helyzet reá nézve a beteg fog orvosi kezelésére, a beteg fog fájdalmainak csillapítására szolgáló, ma már oly tökéletességre vitt eszközöknek teljes hiánya miatt. Másfelől azonban kétségtelen, hogy a szuvasfogúak arányszáma fokozatosan emelkedik a régi kortól napjaink felé. A mai 90%-ot kitevő arányszámmal szemben már a XI.—XII. századbeli koponyákon 4%-kal jobb eredményt (86%-ot) kapunk s további 3%-kal javul a helyzet a IV. századbeli népvándorláskori koponyákon (83%). Különös módon ismét valamivel rosszabb eredmény mutatkozik a római koponyákon (85%), a mit azonban, tekintve a római koponyák csekély számát (74%), talán a véletlennek lehet betudni, a mely aránylag kisebb statisztikai anyagon gyakran vezet hamis eredményre. A végeredmény tehát az, hogy *a fogak romlásának határozottan némi szaporodása mutatkozik időszámításunk elejétől napjainkig, de hogy már a régi római és a népvándorláskorabeli, s hasonlóképpen a XI.—XIII. században Magyarországon lakott embereknek is nagyon rosszak voltak a fogai.*

A második eljárás szerint végzett vizsgálatokban szintén kifejeződik ez a két körülmény: a fogcaries nagyfokú elterjedése már a régi korban s további, bár nem nagyfokú szaporodása napjaink felé. A római koponyákon a fogak 29·48%-a beteg, vagy már hiányzik. A népvándorláskori és rákospalotai anyagon már tetemes emelkedéssel találkozunk; a két sorozaton körülbelül egyforma az eredmény: a fogak 34·25%-a, illetőleg 32·89%-a romlott és hiányzik; a különbség a két utóbbi szám között jelentéktelen s figyelmen kívül hagyható. Nagy ugrás-

mutatkozik azután a vácsi temető anyagán: a rosszabbodás csaknem 10%-ra rug, a mennyiben itt a rossz és hiányzó fogak arányszáma 42·41%-ra emelkedik, vagyis már megközelíti az összes fogak felét.

Eredményeinkkel való összehasonlításra az irodalomnak csak egy adata kínálkozik: SCHWERZ már említett közlése az V.—X. századbéli svájci alamannok fogainak állapotáról. SCHWERZ anyaga korbelileg körülbelül megegyezik a mi népvándorlási anyagunkkal, fajbelileg azonban nem. A svájci anthropologus a fogak állapotának vizsgálatára az általam második helyen említett módszert, vagyis az egyes fogak ép és romlott példányszámainak az összehasonlítását alkalmazta. Adatai saját vizsgálataim eredményeinek az álláspontjáról tekintve legnagyobb fokban meglepők: az alamannok fogainak állapotát hihetetlenül jó színben tüntetik fel.

Hogy számai az én eredményeimmel pontosan összehasonlíthatók legyenek, SCHWERZ tabelláiból (i. m. pg. 18) csak a felső fogakra vonatkozó számokat idézem, egymás mellé állítva az ő és az én eredményeimet.

A szuvas és intra vitam elpusztult fogak számaránya a felső állkapocsban:

	Alamannok :	Népvándorláskorabeli (keszthelyi és nemesvölgyi) koponyák :
J_1 — — — —	4·9 %	32·43 %
J_2 — — — —	2·7 %	27·42 %
C — — — —	2·2 %	19·78 %
P_1 — — — —	8·2 %	18·64 %
P_2 — — — —	11·4 %	24·81 %
M_1 — — — —	24·2 %	40·53 %
M_2 — — — —	27·9 %	52·73 %

Összefoglalva az egyes fogakra vonatkozó számokat SCHWERZ anyagán, a felső fogak közt a beteg és hiányzó fogak arányszámául 15·6%-ot kapunk, míg az én népvándorláskori anyago-

mon ez a szám több mint kétszer annyi: 32·42%. Az alsó állkapocsra nézve SCHWERZ 14%-ot állapított meg.

Az eltérés az én eredményeim és SCHWERZ eredményei között oly óriási, hogy első sorban arra kell gondolnom, hogy SCHWERZ talán nem járt el oly szigorúan a fogszerű megállapításában, mint mi, hogy statisztikájába talán nem vette fel a fogszerű kezdeti alakjait, a melyeket mi minden esetben beszámítottunk s a melyek a mi fogszerű-eseteinknek tetemes hányadát teszik.

Fontosságot tulajdonítok másfelől annak a körülménynek is, hogy SCHWERZ anyaga, úgy látszik, a nem és az életkor dolgában nem olyan, mint az enyém s így vele közvetlenül nem is hasonlítható össze. Az én anyagom, mint tudjuk, vegyesen tartalmazza férfiak, nők, gyermekek, fiatal és idős egyének koponyáit, az övé mindenek szerint csak harczosok, tehát csak férfiak és fiatal, egészséges, nem betegségben elhalt, hanem a harczmezőn elesett egyének koponyáiból áll. Alamann-koponyái legnagyobbbrészt az augsti (Aargau-canton) sírmezőből, az egykori Augusta Rauracorum helyéről származnak. SCHWERZ erről az anyagról egy más helyen¹ megemlíti, hogy csak férfikoponyákat foglal magába, egy női koponya kivételével. Ez arra enged következtetni, hogy e sírmező katonai temetőhely vagy harczmező volt. De még e felvételek mellett is érthetetlen előttem az eredményeink közötti óriási különbség.

*

Vizsgálataimnak úgyszólván mellékterméke gyanánt statisztikámból az előadottakon kívül még egynéhány más következtetést is levonhattam. Tulajdonképpen tárgyammal nincsenek ezek szoros összefüggésben, hanem inkább a caries általános kérdéseire vetnek némi világot. Csak röviden közlöm ezeket az eredményeimet.

1. A fogászati tankönyvekben és értekezésekben gyakran olvashatjuk, hogy a nőknek nagyobb hajlandóságuk van a fog-

¹ FR. SCHWERZ: *Anthrop. Untersuchung der Gräberfunde von Augst*. Mitteil. d. Naturwissensch. Gesellsch. zu Winterthur, 1909—10, Heft 8, pg. 36.

szúra, mint a férfiaknak, és pedig már a gyermekkortól fogva. Így GREVE (1899) szerint 3%-kal több a szuvasfogú egyén a leányok, mint a fiúk közt. MAGITOT már régebben (1872) még nagyobb különbséget állított fel: 25% többletet a nők rovására. Az újabb szerzők közül STEFFEN (1903) és EBERSOLE (1904) nyilatkozik ilyen értelemben; de nem hiányoznak az ellenkező nyilatkozatok sem. Így UNGHVÁRI (1893) határozottan tagadja a fogszú gyakoriságának nemek szerint való különbségét, 1000 szegedi iskolásgyermek fogainak megvizsgálása alapján; s ugyanilyen eredményre jut sokkal nagyobb anyagon RÖSE és KLÖSER (1913) is.

Anyagomból csak az egyik sorozaton: a 260 rákospalotai koponyán vizsgáltam meg e kérdést. E sorozatnak másirányú kraniológiai feldolgozása alkalmával, a mennyire lehetséges volt, minden egyes koponyának meghatároztam a nemét, a mi a 260 koponya közül csak 8-on nem sikerült. A 252 koponya közül 161 férfié és 91 nőé. A fogakat a második módszer szerint vizsgálva — az első módszerhez nagyon is csekély az anyag — a következő számokat állapítottam meg:

A *férfiakon* 1645 fog közül

ép	— — — — —	1100 = 67·48%;
szuvas és hiányzik	—	535 = 32·52%.

A *nőkön* 824 fog közül

ép	— — — — —	557 = 67·60%;
szuvas és hiányzik	—	267 = 32·40%.

E szerint meglepően egyforma arányszámokat kapunk a két nemben; az eredmény tehát az, hogy — legalább a XI.—XII. századbéli magyarországi koponyákon — *a fogszú gyakorisága tekintetében nincs különbség a férfiak és nők közt.*

2. Sokkal egyöntetűbbek az irodalmi nyilatkozatok annak a tételnek a tekintetében, hogy az alsó fogak kevésbé betegszenek meg fogszúban, mint a felsők. Ez azonban csak a középső fogakra: a metsző- és szemfogakra áll; ezek közt KLÖSER szerint (i. m. pg. 736) negyed-olyan ritka a caries alul

mint felül, ellenben az alsó zápfogak és előzápfogak még inkább romlanak, mint a felsők s egyáltalában az egész fogzatnak legrosszabb, leghamarább pusztuló fogai. De a felső és alsó «frontfogak» caries-gyakorisága között akkora a különbség, hogy mégis az alsó fogak javára tolódik el a mérleg mutatója. KLÖSER az irodalomból összegyűjtött számok összefoglaló feldolgozásából megállapítja (i. m. 736. oldal), hogy 1000 szuvas fog közül a felső fogakra 552, az alsókra 448 jut, vagyis 100 rossz alsó fogra 123·21 felső. BUNTING (1909) arányszámai csaknem megegyeznek KLÖSERÉVEL: 2068 szuvas fog között 1167 felső és 901 alsó volt, vagyis 1000 fogból 564 felső és 436 alsó: 100 beteg alsó fogra 129·35 felső esik. Az alsó fogsor középső fogainak aránylagos fogszú-immunitását leginkább abból magyarázzák, hogy a közelükben, a nyelv csúcsa alatt nyílik két pár nyálmirigvünknek: az állkapocsalattinak és a nyelv alattinak kivezető csőve; ezeknek friss, tiszta váladéka folyton öblögeti az alsó középfogakat, lemossa róluk a kártékony anyagokat, a miben támogatja a nyálat az alsó fogakhoz dörzsölődő, finom szemőleseivel fogkefe gyanánt működő nyelv mechanikai hatása is.

Saját eredményeim a következők:

a) *Rákospalotai koponyák:*

felül 2469 fog közül

ép	— — — — —	1657 = 67·11 %;
szuvas és hiányzik	—	812 = 32·89 %;

alul 926 fog közül

ép	— — — — —	723 = 78·08 %;
szuvas és hiányzik	—	203 = 21·92 %.

b) *Népvándorláskori koponyák:*

felül 800 fog közül

ép	— — — — —	526 = 65·75 %;
szuvas és hiányzik	—	274 = 24·25 %;

alul 292 fog közül

ép — — — — — 266 = 91·10%;
szuvas és hiányzik — 26 = 8·90%.

c) *Római koponyák:*

felül 485 fog közül

ép — — — — — 342 = 70·52%;
szuvas és hiányzik — 143 = 29·48%;

alul 180 fog közül

ép — — — — — 156 = 86·67%;
szuvas és hiányzik — 24 = 13·33%.

E vizsgálatra — éppen úgy, mint a következőre is — felhasználtam a boncztermi koponyák egy részét is, a melyeknek valamennyinek megvan az állkapcsa is, a következő eredménnyel:

a) *Boncztermi koponyák:*

felül 4433 fog közül

ép — — — — — 3161 = 71·31%;
szuvas és hiányzik — 1272 = 28·69%;

alul 4447 fog közül

ép — — — — — 3451 = 77·60%;
szuvas és hiányzik — 996 = 22·40%.

Az eredmény tehát nagyon szembeötlően a mellett szól, hogy az alsó fogak általában kevésbé szuvasodnak el, mint a felsők. Összeadva a négy csoporton nyert számokat, megállapíthatjuk, hogy mindháromban együttvéve

felül 8187 fog közül

ép — — — — — 5686 = 69·45%;
szuvas és hiányzik — 2501 = 30·55%;

alul 5845 fog közül

ép — — — — — 4596 = 78·63%;
szuvas és hiányzik — 1249 = 21·37%.

Vagyis 1000 szuvas fog közül a felső fogakra 588, az alsókra 412 esik, 100 rossz alsó fogra 142·71 rossz felső fog.

3. Van-e különbség a fogszú gyakorisága tekintetében a jobb és bal állkapocsfél fogai közt s ha igen, melyik oldal fogai hajlamosabbak a romlásra? Erre a vizsgálatra már fossilis anyagom is elég bő és megbízható anyagot szolgáltat, de csak a felső állkapocsra nézve: az alsó állkapocsra vonatkozó számok ezen az anyagon olyan csekélyek, hogy egymagukban nem adnának biztos eredményt. Ezt a hiányt azzal pótoltam ki, hogy felhasználtam e kérdés vizsgálatára a boncztermi koponyák sorozatát is, a mely koponyáknak megvan az állkapocsuk is.

Külön vegyük szemügyre a felső és alsó fogsort:

1. *Felső fogsor.*

a) *Váczi temető, jobboldalt 3908, baloldalt 3933.*

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ _ _ _ 2191 = 56·07% ;
szuvas és hiányzik _ 1717 = 43·93% .

Baloldalt

ép _ _ _ _ _ _ _ _ 2134 = 54·26% ;
szuvas és hiányzik _ 1799 = 45·74% .

b) *Rákospalotai koponyák, jobboldalt 1416, baloldalt 1376 fog a felső állkapocsban.*

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ _ _ _ 923 = 65·18% ;
szuvas és hiányzik _ 493 = 34·82% .

Baloldalt

ép _ _ _ _ _ _ _ _ 855 = 62·14% ;
szuvas és hiányzik _ 521 = 37·86% .

c) *Népvándorláskorbeli koponyák, jobboldalt 401, baloldalt 392 fog a felső állkapocsban.*

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ _ _ _ 271 = 67·58% ;
szuvas és hiányzik _ 130 = 32·42% .

Baloldalt

ép	— — — — —	257 = 65·56 %;
szuvas és hiányzik	—	135 = 34·44 %.

d) *Római sírokból származó koponyák*, jobboldalt 241, baloldalt 244 fog a felső fogsorban.

Jobboldalt

ép	— — — — —	177 = 73·45 %;
szuvas és hiányzik		64 = 26·55 %.

Baloldalt

ép	— — — — —	165 = 71·72 %;
szuvas és hiányzik	—	79 = 29·48 %.

e) *Boncztermi koponyák*, jobboldalt 2221, baloldalt 2212.

Jobboldalt

ép	· — — — —	1617 = 72·81 %;
szuvas és hiányzik	—	604 = 27·19 %.

Baloldalt

ép	— — — — —	1544 = 69·80 %;
szuvas és hiányzik	—	668 = 30·20 %.

Ha az öt csoporton nyert számokat összehasonlítjuk, csodálatos megegyezést látunk. *Jobboldalt mindenütt jobb az eredmény, mint baloldalt, kevesebb a rossz és hiányzó fog, több az ép s a különbség foka is körülbelül egyforma a két oldal közt az öt csoportban: mindegyikben 2—3%-ot tesz ki. Ez az eredmény annyiban meglephet, hogy ellenkezik H. CHASENEK (1866) azzal az állításával,¹ hogy a jobboldalon több a fogszú, mint a baloldalon.*

2. Alsó fogsor.

a) *Rákospalotai koponyák*, jobboldalt 468, baloldalt 453 fog az alsó állkapocsban.

¹ Lásd dr. SZABÓ JÓZSEF: Gyakorlati fogászat. Budapest. 1914. pg. 91.

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ 365 = 77·99%;
szuvas és hiányzik _ 103 = 22·01%.

Baloldalt

ép _ _ _ _ _ 353 = 77·92%;
szuvas és hiányzik _ 100 = 22·08%.

b) *Népvándorláskorabeli koponyák*, jobboldalt 148, baloldalt 144 fog.

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ 134 = 90·54%;
szuvas és hiányzik _ 14 = 9·46%.

Baloldalt

ép _ _ _ _ _ 132 = 91·67%;
szuvas és hiányzik _ 12 = 8·33%.

c) *Római sírokból származó koponyák*, jobboldalt 95, baloldalt 85 fog.

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ 82 = 86·32%;
szuvas és hiányzik _ 13 = 13·68%.

Baloldalt

ép _ _ _ _ _ 74 = 87·06%;
szuvas és hiányzik _ 11 = 12·94%.

d) *Boncztermi koponyák*, jobboldalt 2213, baloldalt 2234 fog.

Jobboldalt

ép _ _ _ _ _ 1716 = 77·54%;
szuvas és hiányzik _ 497 = 22·46%.

Baloldalt

ép — — — — — 1735 = 77·66%;
szuvas és hiányzik — 499 = 22·34%.

Az eredmény, számbavéve a felső fogsoron nyert adatokat, meglepő: az alsó fogakon nincs különbség a fogszű gyakorisága tekintetében a jobb- és baloldal fogai közt. A felső és alsó fogsor közti ezirányú különbség még világosabban derül ki, ha valamennyi fogat összeadjuk s így tekintjük meg az eredményt:

Valamennyi koponyasorozaton együttvéve van:

a) *felül* jobboldalt 8187, baloldalt 8157 fog, ebből

Jobboldalt

ép — — — — — 5179 = 63·26%;
szuvas és hiányzik — 3008 = 36·74%.

Baloldalt

ép — — — — — 4955 = 60·75%;
szuvas és hiányzik — 3202 = 39·25%.

b) *Alul* van jobboldalt 2924, baloldalt 2916 fog.

Jobboldalt

ép — — — — — 2297 = 78·56%;
szuvas és hiányzik — 627 = 21·44%.

Baloldalt

ép — — — — — 2294 = 78·67%;
szuvas és hiányzik — 622 = 21·33%.

Tehát felül az ép fogak aránya a következő: 63·26% jobboldalt, 60·75% baloldalt, 2·51% a különbség, alul a két arányszám $78·56 = 78·67\%$, az eltérés csak 0·11%-ot tesz ki. A vizsgálataimnak alapjául szolgáló számok oly nagyok — összesen 22,184 fog! — s az eredmény minden egyes koponya-sorozatán oly egyforma, hogy a véletlen szeszélyes szereplését kizártnak tekinthetjük s határozottan kimondhatjuk, hogy a felső fogsorban a jobboldal fogai 2—3%-kal ellentállóbbak a fogszűval

szemben, mint a baloldal fogai, míg az alsó fogsoron ily különbség nem észlelhető.

Magyarázatát e meglepő ténynek egyelőre nem tudjuk adni. Ha mindkét állkapocsban megvolna a különbség a jobb- és baloldal fogai közt, a nyál conserváló hatására gondolhatnánk, nevezetesen azzal a körülménnyel kapcsolatban, hogy a legtöbb ember alváskor a baloldalán fekszik s így 6—8 órán át inkább a jobb fogakat áztatja a szájban meggyülemelő nyál. De minthogy e különbség csak a felső fogsoron van meg, ezt a magyarázatot ki kell rekeszteni a lehetőségek sorából.

(A M. Tud. Akad. III. osztályának 1917 márczius 19.-én tartott üléséből.)

VÉGTELEN LÁNCZTÖRTEK IRRATIONALITÁSÁRÓL.

SZÁSZ OTTÓ-tól.

Bevezetés.

Legyenek a

$$\left[b_0, \frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots \quad (a_v \neq 0) \quad (1)$$

végteles láncztört elemei *valós egész* számok. Már régóta kutatás tárgya, hogy minő feltételek mellett lesz a láncztört irracionális értékű.¹ Ehhez nyilván szükséges, hogy a láncztört *feltétlenül összelartó* legyen, azaz, hogy az $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_n^\infty$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) láncztörtek mind összetartsanak, mert egy feltételes összelartó láncztörthöz, miként PRINGSHEIM kimutatta,² mindig található egy közelítő tört, mely vele egyenlő értékű. A legáltalánosabb eddig ismeretes kriteriumot, mely a láncztört irracionálisára vonatkozik, a következő TRETZE-féle³ tétel szolgáltatja:

Ha az (1) láncztört elemei valamely ν indextől kezdve kielégítik e feltételeket:

$$\begin{aligned} b_\nu &\geq |a_\nu|; \\ b_\nu &\geq |a_\nu| + 1; \quad \text{ha } a_{\nu+1} < 0, \end{aligned}$$

¹ V. ö. A. PRINGSHEIM: Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π [Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1898. Bd. XXVIII, p. 325—337]. — Bővebb tájékoztatásul v. ö. még: O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig, 1913. § 52.

² A. PRINGSHEIM: Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche [Ibidem, Bd. XXVIII, p. 295—324], 306. old. — V. ö. még PERRON. i. h. 231. old.

³ H. TRETZE: Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche [Mathem. Annalen, Bd. 71, 1911, p. 236—265], 8. §. — V. ö. még PERRON: i. h.

akkor a láncztört összetartó és irracionális értékű,¹ kivéve, ha valamely ν -tól kezdve mindvégig

$$a_\nu < 0, \quad b_\nu = |a_\nu| + 1.$$

Ebben az esetben a láncztört vagy *lényegtelenül széttartó*,² vagy racionális értékű.

E tétel nyilván tartalmazza a LEGENDRE-féle kriteriumot:

$$b_\nu \geq |a_\nu| + 1,$$

és a STERN-féle kriteriumot:

$$b_\nu \geq a_\nu > 0.$$

Ez utóbbit egy F. BERNSTEINnal együtt írt dolgozatban³ következőképpen általánosítottuk:

A) Ha az (1) láncztört elemei valamely ν indextől kezdve mind pozitívek és egy $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ növekvő számsorozatra kielégítik e feltételeket

$$b_{n_\nu+1} b_{n_\nu+2} \cdots b_{n_{\nu+1}} \geq a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots a_{n_{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad (f)$$

akkor a láncztört összetartó és értéke irracionális.

A következőkben a TIETZE-féle tételnek egy analog általánosítását vezetem le és pedig bebizonyítom e tételt:

B) *Legyen röviden*

$$\vartheta_\nu = \frac{1 - \text{sgn} a_\nu}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_\nu > 0; \\ 1, & \text{ha } a_\nu < 0; \end{cases}$$

¹ Tehát a fenti megjegyzés értelmében feltétlenül is összetartó.

² Azaz a közelítő törtek reciprok értékei zérus felé tartanak. Itt emlékeztetbe idézem, hogy az a_ν , b_ν számokat a láncztört *elemeinek*, az a_ν elemeket *részletszámítólóknak*, a b_ν elemeket *részletnevezőknek* nevezik; $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ a láncztört ν -dik tagja és

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{a_1}{|b_1|} + \dots + \frac{a_\nu}{|b_\nu|} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

az δ közelítő törtjei.

³ F. BERNSTEIN und O. SZÁSZ: Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_0^\infty \nu q^{\nu^2} x^\nu$ [Math. Annalen, Bd. 76, 1915. p. 295–300], 1. §.

ha a $\left[b_0, \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$ láncztört elemei valós egész számok, a melyek kielégítik e feltételeket:

(a) $b_\nu \geq |a_\nu| \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}$ valamely ν indextől kezdve,

(β) létezik egy növekvő számsorozat n_1, n_2, n_3, \dots úgy hogy

$$(b_{n_\nu+1} - \vartheta_{n_\nu+2})(b_{n_\nu+2} - \vartheta_{n_\nu+3}) \cdots (b_{n_\nu+1} - \vartheta_{n_\nu+1+1}) \geq |a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots a_{n_\nu+1}|$$

($\nu = 1, 2, 3, \dots$),

akkor a láncztört összetartó és értéke ξ_0 irracionális, kivéve ha valamely ν -től kezdve mindvégig

$$a_\nu < 0, \quad b_\nu = |a_\nu| + 1.$$

Világos, hogy e tétel az összes fentidézett kriteriumokat mint speciális eseteket tartalmazza. E tételt azután alkalmazom a $\sum_0^\infty q^{\nu^2} x^\nu$ és $\sum_0^\infty q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} x^\nu$ sorok irracionálisának kimutatására, ha x tetszésszerű, q bizonyos feltételeknek megfelelő racionális szám.

1. §. Egy segédtétel levezetése.

Segédtétel. Ha a

$$\left[b_0, \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots \quad (a_\nu \neq 0) \quad (2)$$

végtelen láncztört elemei valósak és kielégítik e feltételeket:

$$b_\nu \geq |a_\nu| \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}; \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

és ha a láncztört feltétlenül összetartó, akkor értéke ξ_0 eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek:

$$\xi_0 \geq b_0 - \vartheta_1. \quad (4)$$

Itt az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha ν mindegyik értékére $\vartheta_\nu = 1$, $b_\nu = |a_\nu| + 1$ és ha egyúttal a $\sum_1^\infty |a_1 a_2 \dots a_\nu|$ sor széttartó.

A tétel bizonyítása hasonlít egy speciálisabb TETZE-féle

tételnek PERRONTÓL¹ adott bizonyításához. Az adott láncztörtből *extensió*-val² egy másikat vezetünk le, a mennyiben mindama helyeken, a hol $\vartheta_k = 1$ (azaz $a_k = -|a_k|$), a láncztört

$$b_{k-1} - \frac{|a_k|}{|b_k|}$$

részét

$$b_{k-1} - 1 + \frac{1}{|1|} + \frac{|a_k|}{|b_k - |a_k||}$$

által helyettesítjük. Ily úton nyilván egy láncztört keletkezik, a melynek részletszámlálói positívek és részletnevezői nem-negatívek. E láncztört nem szükségképpen összetartó, de közelítő-törtjeinek sűrűsödési pontjai közt a ξ_0 szám mindenesetre előfordul. Mivel pedig az extendált láncztört így kezdődik:

$$b_0 + \frac{a_1}{|\dots|},$$

ha

$$a_1 > 0,$$

illetőleg

$$b_0 - 1 + \frac{1}{|1|} + \frac{a'_1}{|\dots|},$$

ha

$$a_1 = -a'_1 < 0,$$

azért minden közelítő-törtje nagyobb, mint $b_0 - \vartheta_1$, tehát fennáll a (4) relatio is.

Hátra van annak a megvizsgálása, hogy (4) alatt mikor érvényes az egyenlőség. Legyen tehát

¹ I. h. 250. old., 22. tétel.

² V. ö. Szász: Valós elemekből álló végtelen láncztörtek összetartásáról [Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XXXIII. köt., 1915, 654—683. old.], 662—664. old.

Ebben az értekezésben utólag a következő értelemzavaró sajtóhibákat vettem észre:

665. lap 7. sorában alulról ϑ_{v-1} helyébe irandó ϑ_{v+1} ;

665. " 4. " " $\frac{p_v \vartheta_v}{\vartheta_{v+1}}$ " " $\frac{p_v \vartheta_v}{\vartheta_{v-1}}$;

667. " 11. " felülről $0 \geq$ " " $0 <$.

$$\xi_0 = b_0 - \vartheta_1;$$

ha ϑ_1 eltűnne, akkor nyernők, hogy $\xi_0 = b_0$, azaz

$$\frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots = 0,$$

és innen következnek, hogy a

$$\xi_1 = b_1 + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots$$

lánctört széttartó, a mi ellenkezik feltevésünkkel.

Tehát kell hogy legyen:

$$\vartheta_1 = 1;$$

és most

$$\xi_0 = b_0 - 1,$$

azaz

$$b_0 - 1 = b_0 - \frac{a'_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots, \quad (a'_1 > 0) \quad (5)$$

és innen nyerjük, hogy

$$a'_1 = b_1 + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots = \xi_1. \quad (6)$$

Az $a_2 > 0$ esetben a fentiek szerint $\xi_1 > b_1$, tehát (3) értelmében annál inkább lenne $\xi_1 > a'_1$. Tehát szükségképpen

$$\vartheta_2 = 1,$$

azaz

$$a_2 = -a'_2 < 0,$$

és a (6) egyenlet így írható

$$a'_1 = b_1 - \frac{a'_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots. \quad (7)$$

Innen a fent bebizonyítottak szerint $a'_1 \geq b_1 - 1$; de a (3) feltevés értelmében $a'_1 \leq b_1 - 1$, tehát

$$a'_1 = b_1 - 1.$$

Most a (7) egyenlet a következőbe megy át:

$$b_1 - 1 = b_1 - \frac{a'_2 |}{|b_2} + \frac{a_3 |}{|b_3} + \dots \quad (a'_2 > 0);$$

ez azonban (5)-től csak abban különbözik, hogy az indexek mind 1-gyel nagyobbak. Tehát teljes inductióval nyerjük, hogy általánosságban

$$a_{r+1} = -a'_{r+1} < 0, \quad a'_r = b_r - 1.$$

Tehát (4)-ben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a láncztört ily alakú

$$b_0 - \frac{a'_1 |}{|1+a'_1} - \frac{a'_2 |}{|1+a'_2} - \frac{a'_3 |}{|1+a'_3} - \dots, \quad a'_r > 0;$$

és hogy valóban fennálljon, ahhoz egy jól ismert tétel¹ értelmében szükséges és elegendő, hogy a $\sum_1^\infty a'_1 a'_2 \dots a'_r$ sor széttartson. Ezzel a segéd-tétel be van bizonyítva.

2. §. A főtétel bebizonyítása.

Áttérek most a bevezetésben idézett tétel bebizonyítására. A (β) feltételből rögtön következik, hogy

$$b_\nu \dots \vartheta_{\nu+1} > 0; \quad (\nu \geq n_1 + 1).$$

Ha továbbá az (α) feltétel valamely $\nu = n_k$ indextől kezdve teljesül, akkor elegendő az $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{n_k}^\infty$ láncztört összetartását és irrationalitását bebizonyítanom, ebből az (1) láncztört összetartása és irrationalitása rögtön következik. Tehát az általánosság megszorítása nélkül feltehetem, hogy $n_1 = 0$, $b_0 > \vartheta_1$ és hogy az (α) feltétel ν minden értékére teljesül. Most három esetet különböztetek meg:

1. Valamely ν -től kezdve mindvégig $\vartheta_\nu = 1$; ebben az esetben tételünk a LEGENDRE-féle kriteriumra redukálódik, tehát igaz.

¹ V. ö. PERRON: i. h. p. 210, 8. tétel.

2. Valamely ν -tól kezdve mindvégig $\vartheta_\nu = 0$; ebben az esetben tételelem megegyezik az A) tétellel, tehát igaz.

3. Végtelen sok ν -re $\vartheta_\nu = 1$ és végtelen sok más ν -re $\vartheta_\nu = 0$. Ebben az esetben nyilván található egy $k_1 < k_2 < k_3, \dots$ végtelen számsorozat, úgy hogy

$$\vartheta_{k_\nu} = 0, \quad \vartheta_{k_\nu+1} = 1; \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

tehát a (β) feltételből kifolyólag

$$b_{k_\nu} > 1; \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

azaz (mivel b_{k_ν} egész szám)

$$b_{k_\nu} - 1 \geq 1; \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

Hogy most az (1) láncztört összetartását bebizonyítsam, elegendő az 1. §-ban vizsgált extendált láncztört összetartását kimutatnom, mert az (1) láncztört közelítő törtjei tudvalevőleg mind előfordulnak az extendált láncztört közelítő törtjei közt. Jelöljük e láncztörtet átmenetileg így:

$$\left[p_0, \frac{p_\nu}{q_\nu} \right]_1^\infty = p_0 + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots; \quad (9)$$

világos, hogy $p_\nu > 0$ és $q_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$); tehát egy ismeretes PRINGSHEIM-féle kriterium értelmében¹ a láncztört összetartásához elegendő kimutatnom, hogy a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_{\nu+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

sor szét tartó. De a (9) láncztörtben nyilván előfordulnak e tagcsoportok:

$$\frac{a_{k_\nu}}{b_{k_\nu} - 1} + \frac{1}{1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

tehát a (10) sorban előfordulnak e tagok:

$$b_{k_\nu} - 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

¹ V. ö. például PERRON, i. h. p. 239.

és így, (8) figyelembe vételével, a (10) sor széttartó, azaz a (9) és az (1) láncztörtek összetartók.¹ Világos, hogy az összetartás feltétlen, mert az $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty$ láncztört szintén kielégíti azokat a feltételeket, melyeknek az (1) láncztörtet alávetettük.

Hátra van még annak a bebizonyítása, hogy az (1) láncztört értéke irracionális. Mivel a láncztört elemei egész számok, azért az A_ν , B_ν közelítő számlálók és nevezők szintén egész számok. Legyen

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}}{b_{\nu+2}} + \dots; \quad (\nu=0, 1, 2, \dots).$$

akkor nyilván²

$$\xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu};$$

és innen

$$\xi_\nu (B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}) = -a_\nu (B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}). \quad (11)$$

Továbbá a (β) feltételből rögtön következik, hogy

$$b_\nu - \vartheta_{\nu+1} > 0; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots),$$

és e relatio feltevés szerint $\nu=0$ -ra is igaz. Mivel pedig segéd-tételünk értelmében

$$\xi_\nu > b_\nu - \vartheta_{\nu+1} \quad (\nu=0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

tehát

$$\xi_\nu > 0; \quad (\nu=0, 1, 2, \dots).$$

Most először is (11)-ből következik, hogy ha

$$B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1} = 0,$$

akkor egyúttal

$$B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2} = 0;$$

ez azonban nem lehetséges, mert

$$A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1} = (-1)^{\nu-2}a_1a_2\dots a_{\nu-1} \neq 0.$$

¹ Az (1) láncztört összetartása a 39. oldalon ² alatt idézett dolgozatom II. tételéből is közvetlenül levezethető, ha ott $\varrho_\nu = 1$ -et írunk és a (β_1) sort vesszük figyelembe.

² V. ö. például PERRON, i. h., p. 22.

Most (11)-ből, ha ν helyébe sorba $n_\nu+1, n_\nu+2, \dots, n_{\nu+1}$ -t helyettesítünk, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} & \xi_{n_\nu+1} \xi_{n_\nu+2} \dots \xi_{n_{\nu+1}} (B_{n_{\nu+1}-1} \xi_0 - A_{n_{\nu+1}-1}) = \\ & = (-1)^{n_{\nu+1}-n_\nu} a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \dots a_{n_{\nu+1}} (B_{n_\nu-1} \xi_0 - A_{n_\nu-1}); \end{aligned}$$

továbbá (12)-ből és (β)-ből következik, hogy

$$\xi_{n_\nu+1} \xi_{n_\nu+2} \dots \xi_{n_{\nu+1}} > |a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \dots a_{n_{\nu+1}}|; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots);$$

ezek egybevetésével ered végül:

$$|B_{n_{\nu+1}-1} \xi_0 - A_{n_{\nu+1}-1}| < |B_{n_\nu-1} \xi_0 - A_{n_\nu-1}|; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots).$$

E szerint a

$$|B_{n_\nu-1} \xi_0 - A_{n_\nu-1}|; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

végtelen sok pozitív szám mind egymástól különböző és egy véges határ alatt fekszik. Ez azonban — mivel az A_ν, B_ν -k egész számok — csak úgy lehetséges, ha ξ_0 irracionális. (V. ö. például PERRON, i. h., p. 155, lábjegyzet.)

3. §. Megjegyzés az A) tételhez.

Közelfekvő kérdés, hogy a bevezetésben idézett A) tételnek érvényes-e a következő általánosítása:

Ha az (1) láncztört elemei valamely $\nu = k$ indextől kezdve mind pozitívek és egy n_1, n_2, n_3, \dots növekvő számsorozatra kielégítik e feltételeket:

$$b_k b_{k+1} \dots b_{n_\nu} \geq a_k a_{k+1} \dots a_{n_\nu}; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

akkor a láncztört irracionális-e?

Könnyen kimutatható, hogy ez általánosságban nem áll, még akkor sem, ha a láncztört feltétlenül összetartó és $k=1, n_\nu=\nu$. Ugyanis tudjuk, hogy

$$\left[\frac{a_\nu}{a_\nu - 1} \right]_1^\infty = 1;$$

és a láncztört feltétlenül összetartó, ha csak

$$a_\nu > 1 \quad (\nu=1, 2, 3, \dots).$$

E szerint

$$\left[\frac{1}{a_1-1}, \frac{a_\nu}{a_\nu-1} \right]_2^\infty = \frac{1}{a_1}.$$

Legyenek most még az a_ν -k egész számok. A (13) feltétel teljesítve lesz, ha $a_1-1 > 1$ és

$$(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_\nu-1) > a_2a_3\cdots a_\nu, \quad (\nu=2, 3, \dots)$$

azaz ha

$$\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_\nu}\right) > \frac{1}{a_1-1} \quad (\nu=2, 3, \dots);$$

ez pedig könnyen elérhető, ha az a_2, a_3, \dots számokat úgy választjuk, hogy a

$$\prod_2^\infty \left(1 - \frac{1}{a_\nu}\right) = p$$

végtelen szorzat összetartson és azután a_1 -et úgy, hogy

$$a_1 - 1 > \frac{1}{p}.$$

Ezzel szemben a

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{b_1 b_2 \cdots b_\nu} = 0$$

(a_ν, b_ν pozitív egész szám) feltétel elegendő az (1) láncztört irrationalitásához; ugyanis most létezik egy n_1, n_2, \dots növekvő számsorozat úgy, hogy

¹ Különbön könnyen kimutatható, hogy a (13) feltételnek eleget tevő pozitív elemű láncztört mindig feltétlenül összetartó; ehhez ugyanis egy PRINGSHEIM-féle tétel szerint (v. ö. például PERRON, i. h., p. 239) elegendő, ha a

$$\sum_2^\infty \sqrt{\frac{b_{\nu-1} b_\nu}{a_\nu}}$$

sor széttartó; de ha e sor összetartó, akkor a (13) feltétel nyilván nem teljesülhet.

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{n_\nu}}{b_1 b_2 \dots b_{n_\nu}} > \frac{a_1 a_2 \dots a_{n_{\nu+1}}}{b_1 b_2 \dots b_{n_{\nu+1}}}; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots),$$

tehát

$$b_{n_\nu+1} b_{n_\nu+2} \dots b_{n_{\nu+1}} > a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \dots a_{n_{\nu+1}}; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots),$$

azaz teljesül az (f) feltétel.

4. §. Alkalmazás végtelen sorokra.

Ismeretes a következő láncztörtkifejtés¹

$$\sum_0^\infty q^\nu x^\nu = 1 + \frac{qx}{|1|} - \frac{q^3 x}{|1|} + \frac{q^3(1-q^2)x}{|1|} - \frac{q^7 x}{|1|} + \dots -$$

$$- \frac{q^{4\nu-1} x}{|1|} + \frac{q^{2\nu+1}(1-q^{2\nu})x}{|1|} - \dots;$$

(a 2ν -dik részletszámláló: $a_{2\nu} = -q^{4\nu-1}x$)

itt a sor és láncztört összetartók, ha $|q| < 1$ és x tetszőszerinti.

Innen az

$$x = q^a z \quad (\alpha \text{ tetszőszerinti})$$

helyettesítéssel még a következő kissé általánosabb kifejezést nyerjük:

$$(K) \sum_0^\infty q^\nu (v+a) z^\nu = 1 + \frac{q^{a+1} z}{|1|} - \frac{q^{a+3} z}{|1|} + \frac{q^{a+3}(1-q^2)z}{|1|} - \dots -$$

$$- \frac{q^{4\nu+a-1} z}{|1|} + \frac{q^{2\nu+a+1}(1-q^{2\nu})z}{|1|} - \dots,$$

(a 2ν -dik részletszámláló: $-q^{4\nu+a-1}z$)

a hol $|q| < 1$, a és z tetszőszerinti számok.

Legyen először is

$$\alpha = 0, \quad q = \frac{r}{s}, \quad z = \frac{m}{n}, \quad |r| < |s|,$$

r, s, m, n valós egész számok. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

¹ V. ö. PERRON, i. h., p. 353.

$$s > 0, n > 0; (r, s) = 1, (m, n) = 1;$$

most

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \nu \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} \left(\frac{m}{n}\right)^{\nu} &= 1 + \frac{\frac{rm}{sn} \mid}{\mid 1} - \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^2 \frac{m}{n} \mid}{\mid 1} + \dots - \\ &= \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^{4\nu-1} \frac{m}{n} \mid}{\mid 1} + \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu+1} \left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right] \frac{m}{n} \mid}{\mid 1} - \dots \end{aligned} \quad (14)$$

De érvényes a következő æquivalentia:¹

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty, \quad (15)$$

a hol a c_ν -k tetszésszerinti el nem tűnő számok.

Legyen a fenti láncztört esetére

$$c_{2\nu-1} = s^{2\nu-1}n, \quad c_{2\nu} = s^{2\nu}; \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

akkor nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \nu \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} &= 1 + \frac{rm \mid}{\mid sn} - \frac{r^2 m \mid}{\mid s^2} + \dots - \frac{r^{4\nu-1} m \mid}{\mid s^{2\nu}} + \\ &+ \frac{r^{2\nu+1} (s^{2\nu} - r^{2\nu}) m \mid}{\mid s^{2\nu+1} n} - \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Ha $rm > 0$, akkor a B) tétel a) feltétele a jelen esetre:

$$s^{2\nu} > r^{4\nu-1}m \quad \text{és} \quad s^{2\nu+1}n \geq 1,$$

azaz

$$\left(\frac{s}{r^2}\right)^{2\nu} > \frac{m}{r}$$

valamely ν indextől kezdve.

Tehát fel kell tennünk, hogy

$$s > r^2.$$

És a (β) feltétel nyilván teljesül, ha

¹ V. ö. például PERRON, i. h. p. 196.

$$s^{2\nu} (s^{2\nu-1}n - 1) \geq r^{6\nu} m^2 (s^{2\nu} - r^{2\nu})$$

valamely ν -től kezdve; azaz

$$sn - \frac{1}{s^{2\nu}} \geq \left(\frac{r^3}{s}\right)^{2\nu} m^2 \left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right],$$

tehát feltesszük, hogy

$$s > |r|^3.$$

Ha $rm < 0$, akkor a (16) láncztörtet a (15) æquivalentia segítségével következőképpen alakítjuk át: legyen

$$c_{2\nu-1} = s^{2\nu-2}, \quad c_{2\nu} = \frac{1}{c_{2\nu-1}} = s^{-2\nu+2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots);$$

és nyerjük, hogy

$$\sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu} \left(\frac{m}{n}\right)^{\nu} = 1 + \frac{rm}{sn} - \frac{r^3 m}{s^2} + \dots - \frac{r^{4\nu-1} m}{s^2} +$$

$$+ \frac{s^2 r^{2\nu+1} m (s^{2\nu} - r^{2\nu})}{s^{4\nu+1} n} - \dots$$

Az (a) feltétel most

$$s^{4\nu+1} n > s^2 r^{2\nu+1} m (s^{2\nu} - r^{2\nu})$$

valamely ν -től kezdve, azaz

$$1 > s^2 m \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu+1} \left(1 - \frac{r^{2\nu}}{s^{2\nu}}\right)$$

valamely ν -től kezdve; és e feltétel teljesül, mivel

$$s > r.$$

Továbbá a (β) feltétel teljesül, ha

$$(s^2 - 1) s^{4\nu+1} n \geq r^{6\nu} s^2 m^2 (s^{2\nu} - r^{2\nu})$$

valamely ν -től kezdve, azaz

$$(s^2 - 1) n \geq s m^2 \left(\frac{r^3}{s}\right)^{2\nu} \left(1 - \frac{r^{2\nu}}{s^{2\nu}}\right);$$

tehát ismét feltesszük, hogy

$$s > |r|^3.$$

Összefoglalva a következő tételt nyertük:

Ha x egy tetszőszerinti el nem tűnő racionális valós szám és r, s valós egész számok, a melyek az

$$s > |r|^3 \tag{17}$$

feltételnek tesznek eleget, akkor a $\sum_0^{\infty} r \left(\frac{r}{s}\right)^{r^2} x^r$ sor értéke irracionális.¹

Mivel

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r \left(\frac{r}{s}\right)^{r^2} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} r \left(\frac{r}{s}\right)^{r^2}, \tag{18}$$

azért világos, hogy a (17) feltétel mellett a $\sum_{-\infty}^{\infty} r \left(\frac{r}{s}\right)^{r^2}$ sor is irracionális. A $\sum_{-\infty}^{\infty} r q^{r^2} x^r$ sor egy JACOBI-féle theta-sor és így szokás jelölni: $\vartheta_3(x, q)$, úgy hogy a (18) sor így jelölhető: $\vartheta_3\left(1, \frac{r}{s}\right)$. Hasonlóan nyerjük, hogy a (17) feltétel mellett a

$$\vartheta_3\left(1, \frac{r}{s}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} r \left(\frac{r}{s}\right)^{r^2} (-1)^r$$

sor is irracionális értékű.

Itt megemlítem még e JACOBI-tól eredő relatiót:²

$$\prod_1^{\infty} \frac{1-x^{2r}}{1+x^r} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} r (-1)^r x^{r^2}.$$

A régebbi irrationalitási vizsgálatok a (14) sorra vonatkozólag csak az $r = 1$ esetben vezettek eredményre, és $\frac{m}{n}$ -t is

¹ V. ö. még a 37. oldalon ³ alatt idézett dolgozat 2. §-át.

² V. ö. például P. BACHMANN: Die analytische Zahlentheorie, Leipzig, 1894, 43. o.



bizonyos feltételnek kellett alávetni. Az idevonatkozó irodalmat illetőleg utalok a 37. oldalon ³ alatt idézett dolgozatra.

Legyen (K)-ban

$$a = 1, \quad q = \sqrt{\frac{r}{s}}, \quad z = \frac{m}{n}, \quad |r| < |s|;$$

r, s, m és n valós egész számok. Ismét feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy

$$s > 0, \quad n > 0, \quad (r, s) = 1, \quad (m, n) = 1.$$

Most nyerjük, hogy ¹

¹ Az $m = n = 1$ esetre egy ezzel rokon kifejtést bizonyítás nélkül már EISENSTEIN megadott; v. ö. G. EISENSTEIN: Theorema, Journal für die r. u. a. Mathematik. Bd. 29 (1845), p. 96; auch Mathematische Abhandlungen etc. Berlin, 1847, p. 175. Ez a következő:

$$\sum_0^{\infty} q^{\frac{v(v+1)}{2}} = \frac{1}{|1|} - \frac{q}{|1|} - \frac{q^2 - q}{|1|} - \dots - \frac{q^{2v-1}}{|1|} - \frac{q^{2v} - q^v}{|1|} - \dots$$

E kifejtést legegyszerűbben következőképpen igazolhatjuk. Tudjuk, hogy [v. ö. például PERRON i. h. 315. o., (32) képlet]

$$\frac{1}{\sum_0^{\infty} q^{v^2} x^v} \sim 1 - \frac{qx}{|1|} + \frac{q(1-q^2)x}{|1|} - \frac{q^3x}{|1|} + \frac{q^3(1-q^4)x}{|1|} - \dots - \frac{q^{4v-3}x}{|1|} + \frac{q^{2v-1}(1-q^{2v})x}{|1|} - \dots \quad (19)$$

$(a_{2v-1} = -q^{4v-3}x).$

[Az \sim jel értelmét illetőleg v. ö. PERRON i. h., 306. o.] Itt egy ismeretes tétel felhasználásával (v. ö. PERRON, i. h. 325. o.) convergentia áll be és az egyenlőség érvényes, ha $|q| < 1$.

Legyen most $q = \sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$, akkor nyerjük, hogy

$$\frac{1}{\sum_0^{\infty} a^{\frac{1}{2}v(v+1)}} = 1 - \frac{a}{|1|} + \frac{a(1-a)}{|1|} - \frac{a^3}{|1|} + \frac{a^2(1-a^2)}{|1|} - \dots - \frac{a^{2v-1}}{|1|} + \frac{a^v(1-a^v)}{|1|} - \dots;$$

és innen

$$\sum_0^{\infty} a^{\frac{1}{2}v(v+1)} = \frac{1}{|1|} - \frac{a}{|1|} - \frac{a^2 - a}{|1|} - \frac{a^3}{|1|} - \dots - \frac{a^{2v-1}}{|1|} - \frac{a^{2v} - a^v}{|1|} - \dots \quad (20)$$

GAUSS hagyatékában [Gauss' wissenschaftliches Tagebuch. 1796—1814.

$$\sum_0^{\infty} \nu \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \left(\frac{m}{n} \right)^{\nu} = 1 + \frac{\frac{rm}{sn}}{|1|} - \frac{\left(\frac{r}{s} \right)^2 \frac{m}{n}}{|1|} +$$

$$\frac{\left(\frac{r}{s} \right)^2 \frac{m}{n} \left(1 - \frac{r}{s} \right)}{|1|} - \dots - \frac{\left(\frac{r}{s} \right)^{2\nu} \frac{m}{n}}{|1|} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{r}{s} \right)^{\nu+1} \frac{m}{n} \left(1 - \frac{r^{\nu}}{s^{\nu}} \right)}{|1|} - \dots.$$

(A 2ν -dik részletszámláló: $-\left(\frac{r}{s} \right)^{2\nu} \frac{m}{n}$.)

A (15) æquivalentiát most a

$$c_{2\nu-1} = s^{\nu}n, \quad c_{2\nu} = s^{\nu}; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

értékekkel alkalmazzuk; akkor nyerjük, hogy

Mit Anmerkungen herausgegeben von F. KLEIN, Math. Annalen 57, 1903. S. 1-34, insbes. S. 13] a következő hasonló alakú láncztört fordul elő:

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} - \dots = \frac{1}{|1|} + \frac{a}{|1|} + \frac{a^2 - a^1}{|1|} + \frac{a^3}{|1|} +$$

$$+ \frac{a^4 - a^2}{|1|} + \frac{a^5}{|1|} + \dots$$

Ezt ugyanolyan úton vezethetjük le, mint a (20) relatiót. Irjunk ugyanis (19)-ben $q = \sqrt{a}$ -t, $x = -\sqrt{a}$ -t, akkor

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{\nu (-1)^{\nu} a^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}} = 1 + \frac{a}{|1|} - \frac{a(1-a)}{|1|} + \frac{a^3}{|1|} - \frac{a^2(1-a^2)}{|1|} + \dots,$$

tehát

$$\sum_0^{\infty} \nu (-1)^{\nu} a^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} = \frac{1}{|1|} + \frac{a}{|1|} + \frac{a^2 - a}{|1|} + \frac{a^3}{|1|} + \frac{a^4 - a^2}{|1|} + \dots$$

V. ö. még GAUSS, Werke, Bd. X 1, 1917, 513. o.

Itt idézem még THOMAS MUIR egy cikkét: On Eisenstein's Continued Fractions [Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. 1879. Part I. (1876-1877), p. 135-143]. -- Továbbá: Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES, tome II. Paris, 1905, 341. és 425. old.

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{2}r(r+1)} \left(\frac{m}{n}\right)^r = \frac{rm}{|sn|} - \frac{r^2m}{|s|} + \frac{r^2m(s-r)}{|s^2n|} - \dots \quad (21)$$

$$- \frac{r^{2\nu}m}{|s^\nu|} + \frac{r^{\nu+1}m(s^\nu - r^\nu)}{|s^{\nu+1}n|} - \dots; \quad (a_{2\nu} = -r^{2\nu}m).$$

Legyen most először is

$$a) \quad r > 0, \quad m > 0,$$

akkor a *B*) tétel (*a*) feltétele:

$$s^\nu > r^{2\nu}m$$

valamely ν -tól kezdve; tehát legyen

$$s > r^2.$$

Továbbá a (β) feltétel ki van elégítve, ha

$$\left. \begin{array}{l} s^\nu (s^{\nu+1}n - 1) \geq r^{3\nu+1}m^2 (s^\nu - r^\nu); \\ azaz \text{ ha} \\ n - \frac{1}{s^\nu} \geq r \left(\frac{r^3}{s}\right)^\nu m^2 \left(1 - \frac{r^\nu}{s^\nu}\right); \end{array} \right\} \text{ valamely } \nu\text{-tól kezdve;}$$

tehát ismét feltesszük, hogy

$$s > |r|^3.$$

b) Legyen

$$r < 0, \quad m < 0,$$

akkor az (*a*) feltétel nyilván mindig teljesül, és a (β) feltétel szintén, ha

$$s^{2\nu+1}n \geq |r|^{3\nu+1}m^2 (s^\nu - r^\nu),$$

tehát ha

$$s > |r|^3.$$

c) Ha

$$r > 0, \quad m < 0,$$

akkor a (21) láncztörtet a (15) relatio segítségével átalakítjuk a

$$c_{2\nu-1} = s^{\nu-1}, \quad c_\nu = s^{-\nu+1}; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

specziális értékekkel. Így nyerjük, hogy

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{2}v(v+1)} \left(\frac{m}{n}\right)^v = \frac{rm}{sn} - \frac{r^2m}{s} - \frac{sr^2m(s-r)}{s^3n} - \dots - \frac{r^{2v}m}{s} + \frac{r^{v+1}ms(s^v-r^v)}{s^{2v+1}n} - \dots, \quad (a_{2v} = -r^{2v}m) \quad (22)$$

most az (a) feltétel teljesül, ha

$$s^{2v+1}n > r^{v+1} |m| s (s^v - r^v)$$

valamely v -től kezdve, azaz ha

$$n > \left(\frac{r}{s}\right)^{v+1} \left(1 - \frac{r^v}{s^v}\right) |m| s,$$

tehát

$$r < s.$$

Továbbá a (β) feltétel ki van elégítve, ha

$$(s-1) s^{2v+1}n \geq r^{3v+1} m^2 s (s^v - r^v)$$

valamely v -től kezdve; azaz

$$(s-1) n \geq \left(\frac{r^3}{s}\right)^v m^2 \left(1 - \frac{r^v}{s^v}\right),$$

tehát

$$|r|^3 < s.$$

Végül (d) ha

$$r < 0, \quad m > 0,$$

akkor a (19) láncztörtből indulunk ki. Legyen

$$q = \sqrt{\frac{r}{s}}, \quad x = \frac{m}{n} \sqrt{\frac{r}{s}},$$

akkor (19)-ből nyerjük, hogy

$$\sum_0^{\infty} \nu \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\nu} = \frac{1}{1} - \frac{\frac{r}{s} \frac{m}{n}}{1} + \frac{\frac{r}{s} \frac{m}{n} \left(1 - \frac{r}{s}\right)}{1} - \dots -$$

$$- \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu-1}}{1} + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{r^{\nu}}{s^{\nu}}\right)}{1} - + \dots;$$

$$\left(a_{2\nu} = - \frac{m}{n} \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu-1}\right).$$

E láncztörtet a (15) æquivalentia segítségével átalakítjuk a

$$c_{2\nu-1} = ns^{2\nu-2}, \quad c_{2\nu} = s; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots)$$

specziális értékekkel. Akkor nyerjük, hogy

$$\sum_0^{\infty} \nu \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\nu} = \frac{n}{n} - \frac{rm}{s} + \frac{msr(s-r)}{ns^2} - \dots -$$

$$- \frac{mr^{2\nu-1}}{s} + \frac{msr^{\nu}(s^{\nu}-r^{\nu})}{ns^{2\nu}} - + \dots.$$

Itt az (a) feltétel teljesül, ha

$$ms |r|^{\nu} (s^{\nu}-r^{\nu}) < ns^{2\nu}$$

valamely ν -től kezdve, azaz

$$n > ms \left|\frac{r}{s}\right|^{\nu} \left(1 - \frac{r^{\nu}}{s^{\nu}}\right),$$

tehát ha

$$|r| < s.$$

És a (β) feltétel biztosan teljesül, ha

$$(s-1) ns^{2\nu} \geq m^2 s |r|^{3\nu-1} (s^{\nu}-r^{\nu})$$

valamely ν -től kezdve, azaz ha

$$(s-1) n \geq m^2 s \left(\frac{|r|^3}{s}\right)^{\nu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{r^{\nu}}{s^{\nu}}\right),$$

tehát ha

$$s > |r|^3.$$

Összefoglalva a következő tételt nyertük:

Ha x egy tetszőszerinti valós racionális szám ($x \neq 0$), és r, s valós egész számok, a melyek az

$$s > |r|^3$$

feltételnek tesznek eleget, akkor a $\sum_0^{\infty} v \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{2}v(v+1)} x^v$ sor irracionális értékű.

E tételek általánosíthatók complex számok esetére, miként azt specziálisan a $\sum_0^{\infty} v q^v x^v$ sorra nézve egy kis dolgozatban kimutattam.¹

Itt idézem még e GAUSS-tól eredő egyenlőséget:²

$$\prod_1^{\infty} \frac{1-q^{2v}}{1-q^{2v-1}} = 1 + \sum_1^{\infty} v q^{\frac{1}{2}v(v+1)}.$$

¹ Szász: Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen [Math. Annalen 76, 1915, p. 485—489].

² V. ö. például BACHMANN, i. h., 42. o. és GAUSS, Werke, Bd. X. 1, 1917, 292. o.

VIZSGÁLATOK AZ ALGEBRAI SZÁMTEST DISCRIMINANSÁRÓL.

BAUER MIHÁLY-tól.

Legyen K egy n -edfokú algebrai számtest, melyben a p törzsszámra vonatkozólag

$$p = \eta^q \varrho, \quad (\eta, \varrho) = 1,$$

hol η egy f -edfokú primideál. DEDEKIND ismeretes tétele szerint a számtest differense pontosan η^{q-1} -vel osztható, ha g relativ prim a p törzsszámhoz.¹ Arra az esetre, mikor

$$g = p^s g', \quad (g', p) = 1,$$

DEDEKIND a következő véleményét fejezte ki: a differens η^{v-1} -vel osztható, hol

$$v \leq (s+1) g. \quad (1)$$

E formula helyességét először HENSEL bizonyította be.²

¹ Über die Discriminanten endlicher Körper. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. 1882, XXIX. k. 1—56. l. A differensnek, vagy DEDEKIND terminológiájában alapideálnak, jelentése a következő:

Legyen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ a számtest alaprendszer. Ha t_1, t_2, \dots, t_n határozatlanokat jelentenek, akkor a $\tau = t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2 + \dots + t_n \omega_n$ forma kielégíti a

$$N(x-\tau) = F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$$

egyenletet, melyben x az ismeretlent, N pedig a normát jelenti. Az $F'(\tau)$ alak ideálosztója, vagyis a t_1, t_2, \dots, t_n határozatlanok hatványszorzatainak legnagyobb közös osztója a differens. A differens normája a számtest discriminansa.

² Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen. Mathematische Annalen 1902, 55. k., 301—336. l. HENSEL a kérdést ké-

HENSEL-nek a szóban forgó kérdés körüli alapvető érdekeit nem csökkenti a következő két körülmény.

1. Az idézett hely 7. §-ának tárgyalásaiban impliciten fel van téve az alábbi bonyolult tétel, melynek igazsága csakugyan levezethető vagy HENSEL módszereivel, vagy pedig DEDEKIND¹-nek amaz alapvető szabályából, mely megadja egy törzsszám felbontását valamely GALOIS-féle test alárendelt tartományában, ha a felbontás a GALOIS-féle testben ismeretes. A tételt, melyről szó van és a melyet most nem fogunk bebizonyítani,² e helyen ismertetni akarjuk. Legyen valamely n -edfokú $K = K^{(1)}$ számtestben

$$p = \eta_1^{g_1} \eta_2^{g_2} \cdots \eta_k^{g_k},$$

hol η_i különböző f_i -ed fokú primideálokat jelent. Jelöljük a K testet és conjugáltjait rendre a

$$K = K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(n)}$$

betűkkel, az összességük által meghatározott GALOIS-féle testet G -vel. Ha \mathfrak{P} a G testben p -nek valamely primideálja, akkor a $K^{(i)}$ testek mindegyikében \mathfrak{P} egy és csak egy határozott $K^{(i)}$ -beli primideálnak osztója, nevezzük ezt a \mathfrak{P} -hez tartozó primideálnak a $K^{(i)}$ testre vonatkozólag. Bebizonyítható, hogy a $K^{(i)}$ testek összessége

$$f_1 g_1, f_2 g_2, \dots, \text{illetőleg } f_k g_k$$

számú testből álló rendszerekre bontható fel oly módon, hogy a testek egy rendszerén belül a \mathfrak{P} -hez tartozó primideálok egymásnak conjugáltjai.

2. Az idézett hely 4. §-ának tárgyalásai áttekinthetőbbé tehetők. (Például eme dolgozat 2. §-ához hasonló módon.)

A következőkben meg fogom mutatni, hogy problémánk mindjárt reducálható arra az esetre, mikor p a vizsgált testben *törzs-ideálhatvány* (1. §.); ezáltal a további tárgyalás lényegesen egy-

sőbb az általa bevezetett p -adicus számok elméletével újból tárgyalta. Erre itt nem terjeszkedünk ki. HENSEL-nél az (1) formulának valójában csak a discriminansra vonatkozó következménye szerepel. A formula azonban az elért eredményekből következtethető.

¹ Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894, 272—277. 1.

² Az irodalomban — úgy látszik — explicite nem ismeretes.

szerősödik és igen átnézetessé lesz (2. és 3. §.). A 4. §. utal arra, hogy a probléma az $f = 1$ speciális esetben nagyon egyszerűen elintézhető. Még megjegyzem, hogy GALOIS-féle testek esetére HILBERT a problémát egészen más methodussal tárgyalta.¹ Minthogy minden számtest GALOIS-féle tartományának alárendeltje, a HILBERT-féle vizsgálatokból következik, hogy az (1)-ben szereplő v szám bizonyos, csakis a test fokszámától függő felső korlát alatt marad. Ez természetesen az (1) formulának is következménye.

1. §. Az általános probléma reductiója arra az esetre, mikor p a vizsgált számtestben egyetlen törzsideál hatványa.

1. DEDEKIND szerint a K testnek van oly ω primitiv egész száma, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik. Mindenekelőtt amaz $f(x) = 0$ irreducibilis egyenletnek, melyet ω kielégít, baloldala az

$$f(x) = P^g(x) Q(x) + p N(x)$$

alakban írható, hol P, Q, N rationalis egész együtthatójú polynomok; továbbá P és Q , illetőleg P és $N \pmod{p}$ relativ primek, P, Q egyszerű polynomok, vagyis x legmagasabb hatványának együtthatója 1, ezenkívül $P \pmod{p}$ irreducibilis f -ed fokú polynom és $P(\omega)$ pontosan η -vel osztható. Ennek bebizonyítása nagyon egyszerűen adható. Sokkal nehezebb annak a ténynek felismerése, hogy $f'(\omega)$ az η -nak ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a számtest differense.² Ha csak a

$$v \leq (s+1)g$$

formula helyességét akarjuk megmutatni, akkor elégséges lesz arra, a differens definitiójából evidens tényre hivatkozni, hogy $f'(\omega)$ a számtest differensével osztható.

¹ Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers. Göttinger Nachrichten 1894, 224—236. l.

² L. a kérdéses tény HILBERT-féle tárgyalását. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV. k. 32. §., 239. l.

2. Abból a tényből, hogy

$$N(x) \not\equiv 0 \pmod{p, P},$$

következik, mint már régebben megmutattam,¹ minden $M > 1$ rationalis egész számra:

$$f(x) = S_{1M}(x) S_{2M}(x) + p^M N_M(x), \quad (2)$$

hol

$$S_{1M}(x) \equiv P^g(x) \pmod{p}, \quad S_{2M}(x) \equiv Q(x) \pmod{p} \quad (2^*)$$

és $S_{1M}(x)$ már $\pmod{p^2}$ irreducibilis. Így tehát

$$S_{1M}(x) = P^g(x) + pG_{1M}(x), \quad (3)$$

hol $G_{1M}(x) \pmod{p}$ relativ prim P -hez, vagyis

$$G_{1M}(x) \not\equiv 0 \pmod{p, P}. \quad (3^*)$$

Ennek ismét az a következménye, hogy a

$$S_{1M}(x) = 0 \quad (4)$$

egyenlet egy fix gyöke által adott k_M számtestben

$$p = \mathfrak{P}^g,$$

hol \mathfrak{P} a k_M testben f -ed fokú primideál jelent.² Minthogy $P, Q \pmod{p}$ relativ primek, lesz (2)-ből

$$S_{1M}(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^M}, \quad S_{2M}(\omega) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

és így az

$$f'(x) = S_{1M}(x) S_{2M}'(x) + S_{1M}'(x) S_{2M}(x) + p^M N_M'(x)$$

formulából következik, hogy M elég nagy értékére az

$$f'(\omega), \quad S_{1M}'(\omega)$$

számok az \mathfrak{P} -nak ugyanazt a hatványát tartalmazzák.

¹ Zur Theorie der höheren Kongruenzen. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. XX. k. 39. l. Legyen szabad ez alkalommal két e folyóirat (Math. és Természettud. Értesítő) XXXIV. kötetében megjelent dolgozatomban szereplő megjegyzést kijavítani. A 99. l. 1. jegyzete a „Minthogy” szótól kezdve kihagyandó. A III. tétel az ott idézett vizsgálatokból relativ testekre is következik. Szigorúan véve a mi praemissánk kevesebbet követel, mint a HENSELÉ.

² Verallgemeinerung eines Satzes von SCHÖNEMANN, Journal f. r. u. a. Mathematik 128. k. 87–89. l.

3. Válasszuk most M -et elég nagyoknak és legyen e választásnál

$$S_{1M}(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_{fg}). \quad (5)$$

Ha a G GALOIS-féle test úgy a K , mint a k_M testeket és ezek conjugáltjait tartalmazza, akkor

$$\eta = \bar{\eta}^e \dots, \quad \mathfrak{P} = \bar{\eta}^e \dots, \quad (6)$$

hol η primideál G -ben, mert

$$p = \eta^g \mathfrak{q} = \mathfrak{P}^g, \quad (\eta, \mathfrak{q}) = 1.$$

Minthogy

$$S_{1M}(\omega) \equiv 0 \pmod{\eta^M},$$

lesz

$$S_{1M}(\omega) = (\omega - \gamma_1)(\omega - \gamma_2) \cdots (\omega - \gamma_{fg}) \equiv 0 \pmod{\eta^M},$$

tehát az ω szám a γ -k valamelyikével, például $\gamma = \gamma_1$ -gyel legalább $(\text{mod } \eta^M)$ congruens, a hol

$$fgM \geq M, \quad \bar{M} \geq \frac{M}{fg}. \quad (7)$$

E szerint

$$S'_{1M}(\omega) \equiv S'_{1M}(\gamma) \pmod{\eta^{\bar{M}}}. \quad (8)$$

Minthogy \bar{M} a (7)-nél fogva tetszésszerint nagyoknak választható, a (8) két oldala η -nak ugyanazt a hatványát tartalmazza és így viszont (6) következtében az $S'_{1M}(\omega)$ és $f'(\omega)$ számok mindegyike η -nak ugyanavval a hatványával osztható, mint a mely hatványát tartalmazza az $S'_{1M}(\gamma)$ szám a \mathfrak{P} ideálnak. Ámde (3*)-nál fogva¹ a kérdéses hatvány \mathfrak{P} -nek ugyanaz a hatványa, mely a k_M számtest differensében szerepel. Q. e. d.

2. §. A reducált problema tárgyalása.

1. Elejétől fogva feltehetjük tehát, hogy a

$$F(x) = 0$$

irreducibilis egyenlet ω gyöke által adott n -ed fokú K számtestben

$$p = \eta^g,$$

¹ DEDEKIND: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. Abh. der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. 1878, XXIII. k. III. tétel. Tekintetbe veendő az az evidens tény, hogy a differens normája a számtest discriminansával osztható.

hol az η primideál foka f és $n = fg$. Abból a tényből, hogy $(\text{mod } \eta)$ létezik primitív gyök, következik az, hogy a K testnek van oly a és π egész száma, melyek felhasználásával a számtest minden Ω egész száma egyértelmű módon a következő alakban állítható elő:

$$\Omega \equiv A_r \pi^r + \dots + A_{M-1} \pi^{M-1} \pmod{\eta^M}, \quad r \geq 0, \quad (1)$$

hol

$$A_i = a_{0i} + a_{1i} a + \dots + a_{f-1, i} a^{f-1}, \quad (A)$$

ebben a formulában az a_{ki} együtthatók a $0, 1, \dots, p-1$ számok valamelyikét jelentik és M tetszőszerinti pozitív rationalis egész szám. HENSEL az a és π számok lehetséges választásáról igen érdekes tételeket állított fel. Ezek közül mi csak a legegyszerűbbeket használjuk fel, melyeknek bebizonyítása igen egyszerű.

I. Az a szám kielégít egy

$$P(x) = x^f + b_1 x^{f-1} + \dots + b_f \equiv 0 \pmod{\eta^M} \quad (I)$$

congruentiát, melyben b_1, \dots, b_f fix, az M -től független rationalis egész számok. $P \pmod{p}$ irreducibilis polynom.

II. A π szám kielégít egy

$$\pi(x) = x^g + p c_1 x^{g-1} + \dots + p c_g \equiv 0 \pmod{\eta^M} \quad (II)$$

congruentiát, hol

$$C_j = c_{0j} + c_{1j} a + \dots + c_{f-j, j} a^{f-1}$$

és a c_{kj} együtthatók M -től függő rationalis egész számok. Továbbá C_g relativ prim p -hez.¹

2. Jelöljük a $K = K^{(1)}$ test conjugáltjait $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(n)}$ -vel, az $\eta = \eta^{(1)}$ ideál conjugáltjait $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)}$ -vel, az a és π számok conjugáltjait $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$, illetőleg $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(n)}$ -vel, akkor lesz

$$\Omega^{(i)} \equiv A_r^{(i)} \pi^{(i)r} + \dots + A_{M-1}^{(i)} \pi^{(i)M-1} \pmod{\eta^{(i)M}}, \quad (1^*)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

e formulában $\Omega^{(i)}$ az $\Omega = \Omega^{(1)}$ conjugáltja és a felül indexes A -kat megkapjuk, ha az A -kban $a = a^{(1)}$ helyett $a^{(i)}$ -t teszünk.

¹ Ugyanis C_g relativ prim η -hez, ámde $p = \eta^g$.

Ha a K test GALOIS-féle tartományában G -ben p -nek egy tetszés-szerinti primideálja \mathfrak{P} , akkor ez $\eta^{(i)}$ -nek is osztója, mert $p = \eta^{(i)g}$ és így

$$Q^{(i)} \equiv A_r^{(i)} \pi^{(i)r} + \dots + A_{M-1}^{(i)} \pi^{(i)M-1} \pmod{\mathfrak{P}^M}, \quad (1^{**})$$

$$(i = 1, 2, \dots, n);$$

továbbá az $a^{(i)}$, illetőleg $\pi^{(i)}$ számok kielégítik a

$$P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^M}, \quad (I^*)$$

illetőleg a

$$\pi^{(i)}(x) = x^g + pC_1^{(i)}x^{g-1} + \dots + pC_g^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^M} \quad (II^*)$$

congruentiát, hol a felül indexes C -k jelentése világos. Vezessük be a tárgyalásba a

$$P(x) = 0 \quad (2)$$

egyenletet; gyökeiket jelöljük a

$$\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$$

betűkkel. A (2) egyenlet irreducibilis, hiszen $P(x)$ már $(\text{mod } p)$ irreducibilis. Vegyük továbbá tekintetbe a

$$\pi(x; \gamma_l) = x^g + pD_1^{(l)}x^{g-1} + \dots + pD_g^{(l)} = 0 \quad (3)$$

$$(l = 1, 2, \dots, f)$$

egyenleteket, melyekben $D_1^{(l)}, \dots, D_g^{(l)}$ úgy származik, hogy a C_1, \dots, C_g -ben a helyett γ_l -et teszünk. Minthogy $D_g^{(l)} \pmod{p}$ congruens γ_l -nek oly $f-1$ -ed fokú polynomjával, melynek együtthatói rationalisak és nem mind oszthatók p -vel, minthogy továbbá

$$P(\gamma_l) = 0,$$

és $P \pmod{p}$ irreducibilis f -ed fokú polynom, ismeretes következtetéssel látni, hogy $D_g^{(l)}$ relativ prim p -hez. Jelöljük a (3) egyenlet gyökeit a

$$\varrho_{1l}, \varrho_{2l}, \dots, \varrho_{gl}$$

betűkkel és a γ_l, ϱ_{ij} számok által meghatározott számtestet k_l^{ij} -vel. Minthogy $P \pmod{p}$ irreducibilis és $(D_g^{(l)}, p) = 1$, az ideálméletből könnyen következik, hogy a (3) egyenletek együtthatói tartományában irreducibilisek, a k_l^{ij} conjugált szám-

testek mindegyike $n = fg$ fokú és mindegyikökből p egy f -ed fokú primideál g -edik hatványa. Legyen például a $k_1^{(1)}$ testben

$$p = \eta^g.$$

Ki fogjuk mutatni, hogy a $K^{(1)}$ és $k_1^{(1)}$ számtestek discriminansai — jelöljük ezeket D , illetőleg Δ -val — a p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazzák és minthogy a $K^{(1)}$ testben

$$p = \eta^g,$$

hol η egy f -ed fokú primideál, a szóban forgó két számtest differense az η illetőleg η -nak ugyanazt a hatványát tartalmazza.²

3. Mindenekelőtt be fogjuk bizonyítani, hogy Δ nem osztható p -nek magasabb hatványával, mint D .

Jelöljük a

$$\varrho_{l1}, \varrho_{l2}, \dots, \varrho_{lg} \\ (l = 1, 2, \dots, f)$$

számok összessége által meghatározott GALOIS-féle tartományt G_1 -vel, a G és G_1 testekből összetett GALOIS-féle tartományt \bar{G} -vel. Ha ebben a testben $\bar{\mathfrak{P}}$ tetszőszerinti primideálja \mathfrak{P} -nek, akkor a jelölést alkalmasan választva, lesz:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(eg+1)} &\equiv \alpha^{(e(g+2))} \equiv \dots \equiv \alpha^{(e+1)g} \equiv \gamma_{e+1} \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^M} \\ \pi^{(eg+1)} &\equiv \varrho_{e+1,1}, \dots, \pi^{(e+1)g} \equiv \varrho_{e+1,g} \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^M} \\ f!M &\geq M; \\ (e &= 0, 1, 2, \dots, f-1). \end{aligned} \right\} (R)$$

Ha az (R) relatiókat egyelőre bebizonyítottak tekintjük, akkor a $K^{(1)}$ számtest minden \mathcal{Q} egész számához található a $k_1^{(1)}$ testnek oly τ egész száma, hogy nemcsak az

$$\mathcal{Q} \equiv \tau \pmod{\mathfrak{P}^M}$$

congruentia helyes, hanem még akkor is érvényes marad, ha \mathfrak{P} változatlanul hagyása mellett az \mathcal{Q} , τ számokat a conjugáltakkal pótoljuk. Ha már most \mathcal{Q} helyébe a $K^{(1)}$ test egész számainak egy alaprendszerét helyettesítjük, látjuk, hogy Δ nem tartalmazhatja $\bar{\mathfrak{P}}$ -nek és így p -nek magasabb hatványát, mint D .¹

¹ Minthogy D , Δ rationalis egész számok, nem is kell kihasználni, hogy $\bar{\mathfrak{P}}$ a p -nek tetszőszerinti primideálját jelentheti.

² Ez a tény itt evidens, mert p törzsideálhatvány.

Az (R) alattiak bebizonyítása a következő. Mindenekelőtt az $\alpha^{(i)}$ -k kielégítik a

$$P(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \cdots (x - \gamma_r) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^M}$$

congruentiát, így tehát $\alpha^{(i)}$ valamelyik γ -val, például γ_l -vel congruens $\pmod{\mathfrak{P}^M}$, azaz

$$\alpha^{(i)} \equiv \gamma_l \pmod{\mathfrak{P}^M}, \quad \overline{M}f \geq M. \quad (4)$$

A $\pi^{(i)}$ szám kielégíti a

$$\pi(x; \gamma_l) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^M}$$

congruentiát és így $\pi^{(i)}$ valamelyik ϱ_{ij} -vel congruens $\pmod{\mathfrak{P}^M}$, azaz

$$\pi^{(i)} \equiv \varrho_{ij} \pmod{\mathfrak{P}^M}, \quad g\overline{M} \geq \overline{M}, \quad fg\overline{M} \geq M. \quad (4^*)$$

$$\alpha^{(i)} \equiv \gamma_l \pmod{\mathfrak{P}^M}. \quad (4^{**})$$

Az (R) rendszer helyes, ha megmutatjuk, hogy (4^*) és (4^{**}) nem maradnak mindketten érvényben, ha a baloldalon az i index helyébe a tőle különböző I index lép. Ez esetben ugyanis a $K^{(i)}$ és $K^{(I)}$ testek conjugált számaira volna

$$\varrho^{(i)} \equiv \varrho^{(I)} \pmod{\mathfrak{P}^M},$$

vagyis az

$$F(x) = 0$$

egyenlet discriminansa, mely p -nek egy fx hatványát tartalmazza, \mathfrak{P} -nek legalább M -dik hatványával volna osztható. Tekintetbe véve, hogy a \overline{G} GALOIS-féle test két n -edfokú test GALOIS-féle tartományának összetétele és hogy \overline{M} tetszésszerint nagy, ez absurdum.

4. Ki akarjuk mutatni, hogy Δ nem tartalmazhatja p alacsonyabb hatványát, mint D . Ezt megkapjuk az (R) relatiókból, ha kimutatjuk, hogy Δ a p -nek ugyanazt a hatványát tartalmazza, mint a

$$\varrho_{11}^a \gamma_1^b \quad (a = 0, 1, 2, \dots, g-1, \quad b = 0, 1, 2, \dots, f-1) \quad (5)$$

számok rendszeréhez tartozó determinans négyzete.

Ismeretes módon elég erre bebizonyítani, hogy az (5) alatti számok (mod p) függetlenek, vagyis ha r_{ab} rationalis egész, akkor a

$$\sum_{a,b} r_{ab} \varrho_{11}^a \gamma_1^b \equiv 0 \pmod{p} \quad (6)$$

relatióból következik

$$r_{ab} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (6^*)$$

Ez valóban így van. Mindenekelőtt (3)-ból látható, hogy ϱ_{11} pontosan $\bar{\eta}$ -vel osztható és $p = \eta^g$. Minthogy $P \pmod{p}$ irreducibilis f -ed fokú polynom és $P(\gamma_1) = 0$, valamely kifejezés

$$\sum_{b=0}^{f-1} E_b \gamma_1^b, \quad E_b \text{ rationalis egész szám lévén,} \quad (7)$$

akkor és csak akkor osztható $\bar{\eta}$ -vel, ha minden

$$E_b \equiv 0 \pmod{p},$$

tehát a (7) alakú összeg $\bar{\eta}$ -t oly kitevőn tartalmazza, mely g -nek többese. Már most (6) a következő alakban írható

$$\sum_{a=0}^{g-1} R_a \varrho_{11}^a \equiv 0 \pmod{p}, \quad R_a = \sum_{b=0}^{f-1} r_{ab} \gamma_1^b,$$

ha van egy legkisebb indexű R_a , mely $\bar{\eta}$ -hez relativ prim, akkor $R_a \varrho_{11}^a$ pontosan $\bar{\eta}^a$ -val osztható, míg a többi tag magasabb hatványnyal és így az egész összeg nem osztható p -vel. Ebből következik, hogy minden R_a osztható $\bar{\eta}$ -vel és így minden

$$r_{ab} \equiv 0 \pmod{p}. \quad \text{Q. e. d.}$$

Ha tehát a $K^{(1)}$ test differense η -nak $v-1$ -dik hatványát tartalmazza, akkor $(v-1)f$ az a hatványa p -nek, melyet a

$$\Gamma = |\varrho_{ij}^a \gamma_i^b|^2 \quad (8)$$

$$\left(\begin{array}{l} a = 0, 1, \dots, g-1; b = 0, 1, \dots, f-1 \\ l = 1, 2, \dots, f; j = 1, 2, \dots, g \end{array} \right)$$

determinans tartalmaz.

3. §. A problema megoldása.

1. A determinans elméletből ismeretes a (8) determinans, mely úgy HILBERT,¹ mint HENSEL² számelméleti vizsgálataiban előfordul. Ismeretes, hogy

$$\Gamma = V^{2g}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t) V^2(\varrho_{11}, \varrho_{12}, \dots, \varrho_{1g}) \dots V^2(\varrho_{t1}, \varrho_{t2}, \dots, \varrho_{tg}),$$

hol V argumentumainak VANDERMONDE-féle determinansa, tehát előjeltől eltekintve Γ egyenlő a γ_1 szám discriminansának g -dik hatványa szorozva a ϱ_{11} szám relativ differensének a $k_1^{(1)}$ felérendelt testre képezett normájával. Minthogy $P \pmod{p}$ irreducibilis polynom, ismeretes következtetéssel a γ_1 szám discriminansa p -hez relativ prim. Ha a ϱ_{11} szám relativ differense η -nak t -dik hatványát tartalmazza, akkor minthogy $p = \eta^g$ és a η primideál f -ed fokú, a norma p -nek t/f -dik hatványát tartalmazza és így

$$(v-1)f = tf, \quad v = t+1.$$

Ámde ϱ_{11} pontosan η -vel osztható, ezért a ϱ_{11} szám relativ differensében a

$$\rho'(\varrho_{11}; \gamma_1) = g\varrho_{11}^{g-1} + pD_1^{(1)}(g-1)\varrho_{11}^{g-2} + \dots + pD_{g-1}^{(1)} \quad (1)$$

összegben minden egyes tag a η -nak különböző hatványát tartalmazza, hiszen $p = \eta^g$ és a

$$D_j^{(1)} = c_{0j} + c_{1j}\gamma_1 + \dots + c_{f-1j}\gamma_1^{f-1}, \quad c_{kj} \text{ rat. e.} \quad (1^*)$$

kifejezések, mint láttuk, η -t oly kitevőn tartalmazzák, mely g -nek többese. Így tehát t nem más, mint az (1) összeg tagjai közül a η -ra legalacsonyabb rendű tag rendje. Minthogy az első tag a η^{gs+g-1} hatványt tartalmazza, lesz

$$t \leq gs + g - 1, \quad v = t + 1 \leq (s + 1)g,$$

a mi bebizonyítandó volt.

¹ Grundzüge einer Theorie des GALOISSCHEN Zahlkörpers i. h.

² Mathematische Annalen 55. k. i. h.

4. §. A probléma egyszerű elintézése egy speciális esetre.

1. A probléma lényegesen egyszerűbben intézhető el abban a speciális esetben, mikor az η primideál foka $f = 1$.

Az 1. §. szerint szorítkozhatunk oly $n=g$ -ed fokú testekre, melyekben

$$p = \mathfrak{P}^g$$

és \mathfrak{P} elsőfokú primideál. Van a számtestnek oly primitív ω egész száma, hogy

$$F(\omega) = 0, \quad F(x) = (x+r)^g + pN(x),$$

hol r rationalis egész szám és $N(x) \pmod{p}$ relativ prim $x+r$ -hez. A számtest differense \mathfrak{P} -nek azt a hatványát tartalmazza, mint az $F'(\omega)$ szám. Ámde részletesen kiírva

$$F(x) = (x+r)^g + pC_1(x+r)^{g-1} + \dots + pC_{g-1}(x+r) + pC_g, \quad (1)$$

hol a C_i együtthatók rationalis egész számok és C_g relativ prim p -hez. Az (1)-ből származik

$$F'(\omega) = g(\omega+r)^{g-1} + (g-1)pC_1(\omega+r)^{g-2} + \dots + pC_{g-1}. \quad (1^*)$$

Mint hogy $\omega+r$ pontosan \mathfrak{P} -vel osztható és $p = \mathfrak{P}^g$, az (1*) összeg minden tagja \mathfrak{P} -nek más hatványát tartalmazza. Az első tag a \mathfrak{P}^{gs+g-1} hatványt tartalmazza és így

$$v-1 \leq gs + g-1, \quad v \leq (g+1)s. \quad \text{Q. e. d.}$$

ÚJABB ÉSZLELETEK A TELJES FÉNYVISSZAVERŐ- DÉSNÉL MEGTÖRT SUGÁR POLÁROSSÁGÁRÓL.

FRÖHLICH PÁL-tól.

TARTALOMMUTATÓ.

1. §. A megfigyelés tárgyát tevő jelenség leírása; összefüggése az eddig megvizsgált ilyfajta jelenségekkel. 68. lap.
2. §. A megfigyelés módszerének rövid leírása. 72. lap.
3. §. A kísérleti berendezés s az alaphelyzetek értelmezése. 76. lap.
4. §. Néhány egyszerű gömbtrigonometriai átalakítás. 78. lap.
5. §. A megfigyelés adatainak csoportosítása. A kísérleti és az elméleti eredmények összehasonlítása. 1—12. tábla. 81. lap.
6. §. A végeredmények összefoglalása. Általánosságban véve igen jó egyezés. Befejező megjegyzések. 96. lap.

**1. §. A megfigyelés tárgyát tevő jelenség leírása;
összefüggése az eddig megvizsgált ilyfajta jelenségekkel.**

Legyen az 1. ábrán az XY sík egynemű, egyöntetű két átlátszó közeg határfelülete, φ_1 a beesés-, φ_2 a törés szöge, YZ sík a beesés síkja.

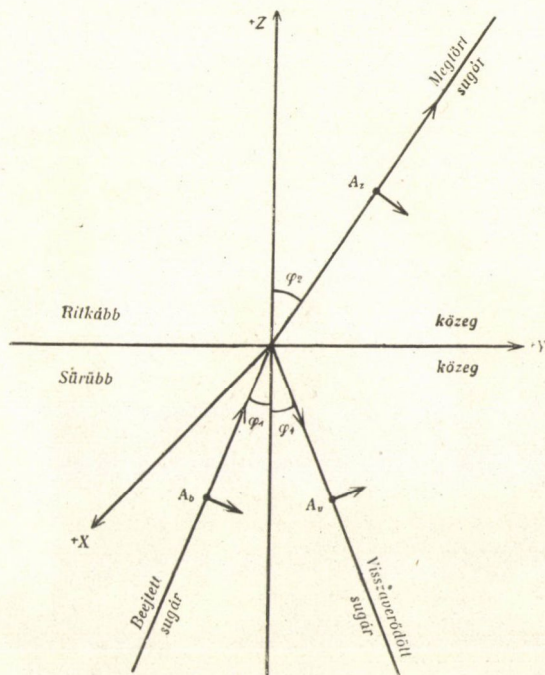
A beejtett fénysugár ellipszisben poláros legyen.

B_m és $\varepsilon_{b,m}$ a beejtett sugár beesés-síkjaára merőleges vektor összetevőjének amplitudója és kezdőphasisa. B_p és $\varepsilon_{b,p}$ a beejtett sugár beesés síkjával párhuzamos vektor összetevőjének amplitudója és kezdőphasisa; T_m , $\varepsilon_{\tau,m}$; T_p , $\varepsilon_{\tau,p}$ ugyanilyen jellemzők a törött sugárra nézve.

A beejtett sugár a sűrűbb közegben a ritkébb felé halad.

Legyen még a φ_1 a totalis reflexio határszögénél nagyobb, vagyis:

$$\cos \varphi_2 = - \sqrt{-1} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}.$$



1. ábra.

A beeső sugárra, nézve a koordináták szerinti vektorösszetevők:

$$\left. \begin{aligned} X_b &= + B_m \cos(\psi_b + \varepsilon_b, m); \\ Y_b &= + B_p \cos \varphi_1 \cos(\psi_b + \varepsilon_b, p); \\ Z_b &= - B_p \sin \varphi_1 \cos(\psi_b + \varepsilon_b, p). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A megtört sugárra nézve ugyanilyen vektorösszetevők

$$\left. \begin{aligned} X_\tau &= + T_m e^{-\frac{2\pi z \tau}{\lambda_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} \cdot \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau m} + \delta_{\tau m}); \\ Y_\tau &= + T_p e^{-\frac{2\pi z \tau}{\lambda_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1} \cdot \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau p} + \delta_{\tau p} - \pi/2); \\ Z_\tau &= - T_p e^{-\frac{2\pi z \tau}{\lambda_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} n \sin \varphi_1 \cdot \cos(\chi_\tau + \varepsilon_{\tau p} + \delta_{\tau p}); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

a hol λ_2 a fény hullámhosszága a második, ritkább közegben és

$$\psi_b = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_b \sin \varphi_1 + z_b \cos \varphi_1}{\lambda_1} \right); \quad \chi_\tau = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_\tau \sin \varphi_1}{\lambda_1} \right).$$

Vagyis ez a vektor a második közegbe valóban benyomul, de amplitudója a határfelülettől való eltávolodással rohamosan fogy.¹ A benyomult vektor szintén elliptikus.

Ha a határfeltételeket és FRESNEL formuláit figyelembe vesszük, akkor a totalis reflexio *határszöge* esetén

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} X_z &= + 2B_m \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2} \right) + \varepsilon_{b, m} \right\}; \\ Y_z &= 0 \\ Z_z &= - 2nB_p \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2} \right) + \varepsilon_{b, p} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Vagyis a második közegbe benyomul egy, az elválasztó síkra merőleges, a beesés síkjára is merőleges ellipszoidális vektor.

(II) Ha ezenkívül a beeső sugár a beesés síkjával párhuzamos síkban poláros, tehát a vektor a beesés síkjára merőleges irányú, akkor $B_p=0$, és (3)-ból:

$$X_z = + 2B_m \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2} \right) + \varepsilon_{b, m} \right\}. \quad (4)$$

Vagyis a második közegbe benyomul egy, az elválasztó síkkal párhuzamos, de a beesés síkjára merőleges irányú vektor.

(III) Ha a beeső sugár a beesés síkjára merőleges síkban poláros, vagyis a vektor a beesés síkjában fekszik, akkor: $B_m=0$, és (3)-ból:

$$Z_z = - 2nB_p \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda_2} \right) + \varepsilon_{b, p} \right\}. \quad (5)$$

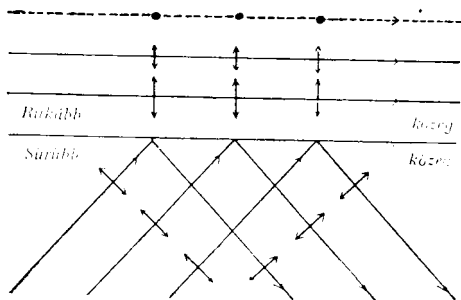
Vagyis a második közegbe egy lineáris vektor nyomul be, a mely az elválasztó sík normálisa irányában váltakozik.

Az (I) esetre vonatkozó kvantitatív kísérleti megerősítés, tudomásom szerint még nem történt meg, de ez nem is tekinthető lényegesnek, mert egyszerű vektoriális összetétele a következő két speciális esetnek.

¹ Az itt közöltek részletes fejtegetését lásd: FRÖHLICH IZIDOR: A teljes fényvisszaverődésnél megtört sugár polározása állapotának vizsgálata. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítőjének XXXV. kötete, 120—158. l. Budapest, 1917.

A (II) esetre vonatkozólag egy hosszabb mérési sorozat keretén belül KURDILLA FERENCZ¹ főgimnáziumi tanár végzett részletes és kimerítő megfigyeléseket, melyek eredménye az elméleti várakozásnak teljesen megfelel.

A (III) esetre vonatkozólag megjegyzem, a következőket. Az 1913. és 14. években FRÖHLICH IZIDOR budapesti egyetemi tanár úr FRENYÓ LAJOS okleveles tanár segítségével rendszeres kísérleti sorozattal megvizsgálta a második, ritkább közegbe benyomult fényvektor polározásbeli viselkedését a totalis reflexio határszögénél kisebb és nagyobb, tetszésszerű beesési szögek mellett.



2. ábra.

E megfigyelési sorozatnak egy kicsiny töredéke már eddig is megjelent az előző lapon idézett dolgozatában.

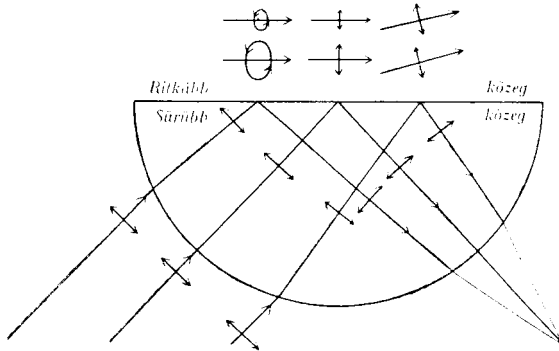
Csak röviden megemlítem, hogy a totalis reflexio határszögénél kisebb beeső szög esetén a második közegre nézve a közönséges törés törvényei érvényesek s egy, szintén a beesés síkjában váltakozó lineáris vektor nyomul be.

A totalis reflexio határszögénél nagyobb beeső szög esetén, mint az a (2) egyenletrendszerből adódik, Y_e és Z_e általánoságban nem lévén nulla, a második közegbe egy elliptikus vektor nyomul be, a melynek ellipszise a beesés síkjában fekszik s egyik tengelye a sugár haladásának irányába esik, tehát longitudinalis.

¹ KURDILLA FERENCZ: Ultramikroszkopos részecskék létesítette fényelhajlás polárosságáról. Magyar Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítőjének XXXI. kötete, 122—182. lap. Budapest, 1913.

Kísérletileg igen könnyen előállíthatók egyidőben a totalis reflexio határszögénél nagyobb, kisebb és a határszög alatt beeső sugarak esetei s így a benyomult vektorok egyszerre meg is vizsgálhatók. Az előállítás módját a 3. ábra tünteti elő.

Múlt év őszén nevezett egyetemi tanár úr figyelmessé tett arra a körülményre, hogy az észlelt mérési sorozatból éppen a



3. ábra.

totalis reflexio *határszögénél*, a folytonos átmenet szempontjából is lényeges esetenél való fent említett megfigyelési sorozat nem tökéletes, illetőleg a történt megfigyelések helyenként bizonytalanoknak mutatkoztak. Egyszerűsített abban a megtisztelő megbízásban részesített, hogy a mennyiben katonai szolgálatom megengedi, ezt a hiányt rendszeres, quantitativ kísérleti sorozattal pótoljam.

Megfigyelésem tárgya tehát a totalis reflexio *határszögénél* megtört sugár polárossági állapota, a midőn a beejtett sugár vektora a beesés síkjában váltakozik; illetőleg a ritkább közegbe benyomult e vektorból haladó, szétszórt sugárrendszerek polárossági viszonyai.

2. §. A megfigyelés módszerének rövid leírása.

A megfigyelésre a rokonesetek igen nagy számában eredményesen alkalmazott módszer szolgált.

Ugyanis, ha a ritkább közegben, az elválasztó síkhoz igen közel — a távolság a hullámhosszúság kis tört részénél nem

lehet nagyobb — ultramikroskopikus részecskéket, jelen esetben koromrészecskéket helyezek el, akkor a benyomult vektor következtében ezek a részecskék másodrendű, gerjesztő fényforrásokká lesznek, melyek váltakozása a benyomult vektor váltakozásával megegyező s a sugarakat minden irányban szét-szórják.

Ilyen módon egy meridionalis vektorrendszer létesül, melynek tengelye a gerjesztő linearis vektor, vagy a mi ugyanazt fejezi ki: a polározás síkjai a tengely körül circumaxialis elrendeződésűek.

Tehát az 1. §-ban részletesen leírt feladatomat oly módon oldom meg, hogy a másodrendű gerjesztő fénylő középpontok által szétszórt sugárrendszer polározási állapotát teszem vizsgálat tárgyává.

Az előzőkből nyilvánvaló, hogy a vizsgálatom tárgyát tevő speciális viszonyok között egy oly circumaxialis rendszer fog létesülni, melynek tengelye az elválasztó sík normálisa. Az ily esetekben létesülő circumaxialis rendszerek eddig quantitativ vizsgálat tárgya még nem voltak s így a jelenség megvizsgálása már e szempontból is kívánatosnak látszott. Ez a rendszer azonban nemcsak a totalis reflexio által létesíthető, hanem közelítőlegesen oly módon is, hogy az elválasztó síkban poláros fénysugarat az elválasztó síkkal érintőlegesen ejtünk be. Azonban az érintőleges beesés maga erősen zavaró hatású s ebből kifolyólag az eredmények is ily berendezés mellett megbízhatatlanok lennének.

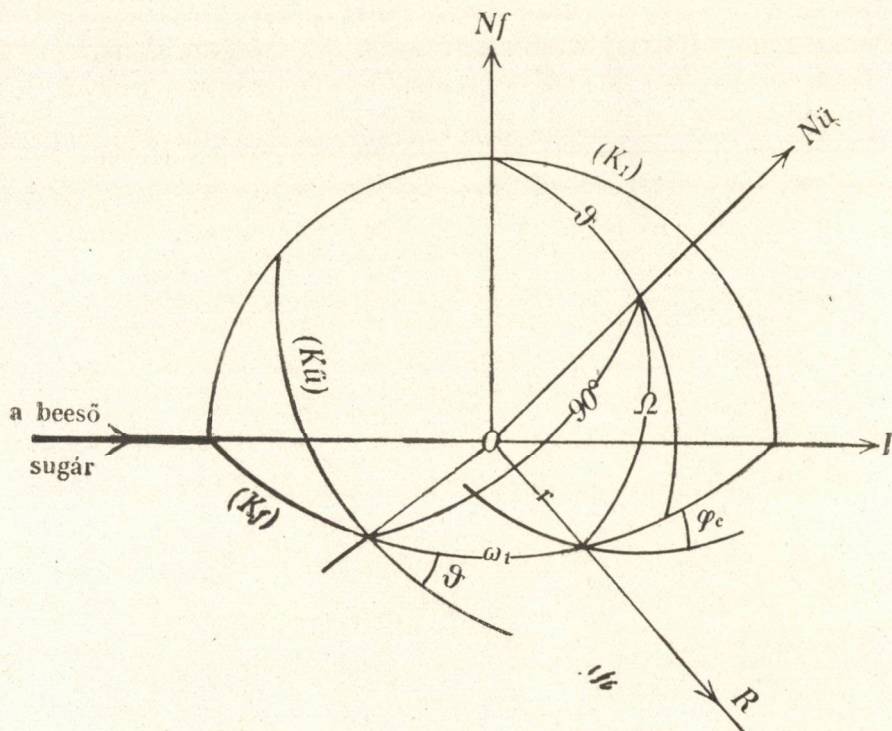
A circumaxialis rendszerekre vonatkozólag az irodalom számos helyén találunk részletes felvilágosítást.¹

¹ FRÖHLICH IZIDOR: Az üvegrácsokról visszaverődve elhajlított fény polározási viszonyai általános törvényszerűségének kísérleti megállapítása. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítőjének XXII. kötete, 207—312. lap. Budapest, 1904.

Ugyanez a szerző: A circumaxialis polározás törvényének általános érvényessége egyenletes fénytörésű közegek belsejében. Ugyanez Értesítő XXVII. kötete, 299—370. lap. 1909.

Ugyanez a szerző: Az elhajlított fény polárossági állapotának újabb nevezetes törvényszerűségei. Ugyanez Értesítő XXX. kötete, 1—97. l. 1912.

SELÉNYI PÁL: Adalékok az üvegrácsos elhajlított fény polárosságának elméletéhez. Ugyanez Értesítő XXIX. kötete, 45—75. lap. 1911.



4. ábra.

Legyen a gerjesztő vonalmenti vektor valamely egyenletes, egynemű, egyöntetű közegben, Q lévén egy állandó arányossági tényező:

$$\Phi = QA \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \varepsilon \right), \quad (6)$$

akkor egy tetszésszerű R sugárhoz tartozó, a gerjesztés helyétől r távolságban lévő vektor:

$$\Phi_{R,r} = \frac{A}{r} \sin \Omega \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \varepsilon \right\}, \quad (7a)$$

a hol Ω a tengely (a gerjesztés iránya) és R sugár szögtávolsága. Tehát az Ω szög által meghatározott párhuzamos körön áthaladó minden sugárhoz tartozó vektor ugyanakkora és a ger-

jesztés egyenese s az R -át fektetett meridiánnak R -hez vont érintője mentén váltakozik. A normálisban haladó sugár intenzitása nulla s az intenzitás a normálistól való távolság sinusának négyzetével nő.

Legyen a 4. ábra szerint: a levegőt és az üveg félgömböt elválasztó ($K\bar{ü}$) sík normálisa, vagyis a jelen esetben a gerjesztő vektor egyenese $N\bar{ü}$; a főkör síkja (Kf), \vec{OI} a beeső sugár iránya \vec{OR} a vizsgálat tárgyát képező szétszórt sugár, akkor a circumaxialitás ismeretes törvényszerűségéből rögtön adódik:

$$tg\varphi_c = \cos \omega_1 \cdot tg\vartheta. \quad (8)$$

Ilyen módon R sugárhoz tartozó vektor polárizációs síkjának φ_c azimutja a főkör síkjához kiszámítható és az észlelt értékkel összehasonlítható.

A (7_a) kifejezés csak a levegőbe szétszórt sugarakra vonatkozik.

Az üvegbe szétszórt sugarak esetén kétféle eshetőség lehetséges.¹

(I) A megvizsgálandó sugár a totális reflexio határcúpján belül halad. Ez esetben a vektor:

$$\phi_{R, \bar{ü}} = \frac{A \sin \varphi_2}{r_1} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \cos(\psi + \varepsilon),^2 \quad (7_b)$$

a hol

$$\psi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right).$$

φ_2 az üvegfelületre eső szétszórt sugár beesési szöge, φ_1 ugyane sugár törés szöge, r_2 a sugár útja a levegőben, r_1 a sugár útja az üvegben.

(II) A megvizsgálandó sugár a totális reflexio határcúpján kívül halad. Ez esetben a törött sugár vektora

¹ Erre vonatkozólag részleges fejtegetés található FRÖHLICH IZIDOR: Különböző törésű, átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében lévő fénylőpontok elméletéhez. M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője XXXIV. kötet 453—517. lap. 1916. Különösen ez értekezés 9. §-os és 11. §-ban.

² Idézett helyen a (41), (60), (61) formulák szerint, az ₁ és ₂ indexek felcserélésével.

$$\phi_{R, \text{ü tot}} = T \cdot e^{-\frac{2\pi z_r}{\lambda_2} \cdot \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} \cdot \cos(\psi + \varepsilon + \Delta),^1 \quad (7c)$$

a hol:

$$T = \frac{2A}{r_1} \frac{n^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{n^2 - 1} \sqrt{(n^2 + 1) \sin^2 \varphi_1 - 1}};$$

$$\text{tg } \Delta = \frac{n \cdot \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}}{\cos \varphi_1};$$

és z_r a koromrészesecske távolsága a határsíktól.

A (8) kifejezés az üvegbe szétszórt sugarakra nézve is érvényben marad.

3. §. A kísérleti berendezés ismertetése főbb vonásaiban.

A fényforrást egy kis ZEISS-féle ívlámpa szolgáltatta, melynek fénye igen intenzív s a mi legfontosabb előnye, hogy a széncsúcsok egymásra merőlegesek lévén, a kráter a mérés folyamán alig mozdul el helyéből.

A divergens fénynyaláb egy vízhütőn át 65 cm gyújtótávolságú gyűjtőlencséhez ér, melynek gyűjtőpontja az ívlámpa kráterével egybeesik, vagyis a rajta áthaladó sugárnyaláb párhuzamossá válik.

A tulajdonképeni mérések egy nagy JAMIN-SÉNARMONT-féle úgynevezett polározási körön történtek. Ennek főkörén egy rögzített helyzetű, FOUCAULT-féle polározó hasákkal ellátott cső és egy függőleges tengely körül forgatható, analysáló hasákkal ellátott észlelő-cső foglal helyet.

A párhuzamos sugárnyaláb a gyűjtőlencséből kilépve a polározó hasábon haladt át, a melyet mindenkor úgy állítottam be, hogy a rajta áthaladó sugárnyalábot a beesés síkjára merőleges síkban polározta, vagyis a vektor a mindenkori beesés síkjában váltakozott.

A polározó cső a félgömb tartó csövében folytatódott s ennek végén egy körülbelül 2 mm nyílású hasadékot helyeztem el, úgy hogy élei a beesés síkjára merőlegesek.

¹ Idézett helyen a (79) és (80) formulák szerint, szintén az 1 és 2 indexek felcserélésével.

A hasadék a rokontárgyú észleléseknél alkalmazott környilásnál lényegesen jobbnak bizonyult, mert már 5 mm átmérőjű környilás esetén a két szélső sugár beesési szöge között lényeges s a mérés megbízhatóságát zavaró különbség lép fel, a mi különösen a totalis reflexio határszögénél az észlelés eredményét nagy mértékben befolyásolta volna. (Lásd: 1. §. 4. lap és a 3. ábrát). Ha pedig a környilás átmérője kisebb, akkor az intenzitás annyira csökken, hogy az észlelés lehetetlen vagy legalább is igen bizonytalan.

A párhuzamos és már síkban poláros sugárnyaláb a félgömbtartó cső végén elhelyezett üvegfélgömb gömbfelületén s üvegszövetén át, törés által meg nem zavarva, a félgömb bekormozott síklapját érte.

A koromrészecskék másodrendű gerjesztő középpontokká lesznek, vagy ilyeneket a koromrétegben létesítenek; ez jelen esetben úgy jelentkezik, hogy a bekormozott üveglapon a tér minden részéből látható fénylősáv lép fel. Az ebből a sávból kiinduló (szétszórt) sugarak polározásbeli állapotát a mozgatható észlelő-csőben elhelyezett analysáló hasákkal megvizsgáltam.

Az üvegfélgömb átmérősíkja középpontja a félgömbtartó cső végén a főkör tengelyében van elhelyezve; maga e félgömb tetszésszerű beesési szögre beállítható s a polározó cső tengelye körül is forgatható.

Az üvegfélgömb síklapjának bekormozása úgy történt, hogy azt gyertya lángja felett addig mozgattam ide-oda, a mig finom koromréteggel vonódott be. A koromrétegnek oly finomnak kellett lennie, hogy egyszerű rátekintésnél ne legyen látható, hanem csak ha a határlappal érintőlegesen nézzük, vagy ha a kormozás egy részét letöröljük.

A használt üvegfélgömb közepes törésmutatója $n=1.4783$; ennek megfelelőleg a totalis reflexio határszöge $i_{\text{tot}} = 42.6^\circ$.

Az analysáló nikol csövének pozitív forgási iránya, felülről tekintve, az óramutató járásával egyirányú. Alaphelyzete a polározó cső tengelye meghosszabbításának és a főkörnek metszéspontja. A leolvasott szögértéket ω_I -vel jelölöm

Az analysáló és polározó nikol pozitív forgási iránya saját positio-körén, a beeső sugárral ellenkező irányból tekintve, az

óramutató járásával egyirányú. Alaphelyzetük esetén a főkör síkjára merőlegesen váltakozó vektor kioltódik. A leolvasott helyzetet φ_0 és P -vel jelölöm.

A félgömbtartó csövének pozitív forgási iránya, a beeső sugárral ellenkező irányból tekintve, az óramutató járásával ellenkező irányú. Az alaphelyzet esetén az üvegfélgömb síklapjának pozitív és fölfelé irányuló normálisa, a főkör normálisa és a beeső sugár *egy* síkba esik. A leolvasott helyzetet α -val jelölöm.

Ugyanebben az esetben a beesés szöge pozitív. A beesés szögének állandóan beállított értékét i_{tot} -val jelölöm.

Ha az üvegfélgömb normálisa az említett síkban, de lefelé (a főkör síkja alá) irányul, akkor a beesés szöge negatív; ezt $-i_{\text{tot}}$ -val jelölöm.

4. §. Néhány egyszerű gömbtrigonometriai átalakítás.

Legyen az 5. ábrán (K_f) a főkör síkja, (K_b) a beesés síkja; (K_u) az üvegfélgömb síklapja (K_I) a főkör síkjára a beeső sugáron emelt merőleges sík.

$\overrightarrow{ON_f}$ a főkör, $\overrightarrow{ON_u}$ az üvegfélgömb síklapjának normálisa.

$\overrightarrow{OS_mR}$ a megvizsgált (szétszórt) sugár, \overrightarrow{OI} a beeső sugár iránya.

α a beesés síkjának (a félgömbtartó csőnek) elforgása.

ϑ az üvegfélgömb síklapja és a főkör síkja normálisainak szögtávolsága.

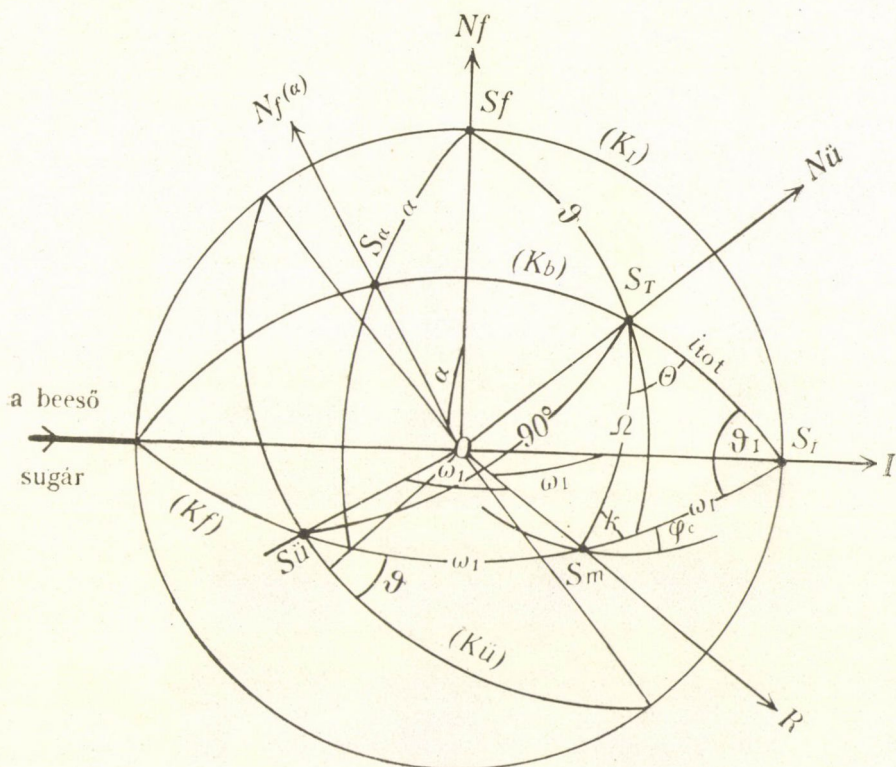
$\varrho = (\widehat{S_m S_T})$ és θ az $\overrightarrow{OS_mR}$ megvizsgált (szétszórt) sugár gömbi koordinatái az üvegfélgömb $\overrightarrow{OS_T N_u}$ normálisára és az $(OS_T S_I)$ beesés síkjára vonatkoztatva.

$\omega_I = (\widehat{S_I S_m})$ és ϑ_I ugyane sugár gömbi koordinatái a beeső sugár irányára és a beesés síkjára vonatkoztatva.

ω_1 az üvegfélgömb átmérő lapjának síkja és a főkör síkja metsző egyenesének, $\overrightarrow{OS_u}$ -nek és a megvizsgált (szétszórt) sugárnak, $\overrightarrow{OS_mR}$ -nek gömbi távolsága, $\widehat{S_u S_m}$.

φ_c a megvizsgált sugár polározási síkjának, a circumaxialis polározás törvényéből folyó azimutja a főkör síkjához képest.

A méréseket úgy terveztem, hogy ϱ -t a 0° -tól kiindulva 15° -os közőkben változtatom, s minden meghatározott ϱ -hoz tartozó párhuzamos kör mentén a θ -kat szintén 0° -tól kiindulva 15° -os közőkben változtatom. Vagyis a mérések rendszeré-



5. ábra.

nek alapját ϱ és θ koordináták alkossák, a mi nagyjában meg is történt.

Az ϱ és θ értékekre azonban az eszköz észlelő csöve nem állítható be, hanem közvetlenül csak α -ra és ω_1 -re; úgyhogy azokat transformálni kellett az ω_1 és α értékekre.

Ugyanis, az $S_T S_I S_m$ gömbháromszögből :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{k + \vartheta_I}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \frac{\cos \left(\frac{i_{\text{tot}} - \Omega}{2} \right)}{\cos \left(\frac{i_{\text{tot}} + \Omega}{2} \right)} ; \\ \operatorname{tg} \frac{k - \vartheta_I}{2} &= \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin \left(\frac{i_{\text{tot}} - \Omega}{2} \right)}{\sin \left(\frac{i_{\text{tot}} + \Omega}{2} \right)} ; \\ \operatorname{tg} \frac{\omega_I}{2} &= \operatorname{tg} \frac{i_{\text{tot}} - \Omega}{2} \frac{\sin \left(\frac{k + \vartheta_I}{2} \right)}{\sin \left(\frac{k - \vartheta_I}{2} \right)} . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ezzel az egyenletrendszerrel a k , ϑ_I és ω_I az i_{tot} , az Ω és a θ -val megvannak határozva. Mivel pedig a rajzból világos, hogy :

$$\alpha = 90^\circ - \vartheta_I,$$

az Ω és θ szimmetrikus koordináták az ω_I és α mérhető mennyiségekkel ki vannak fejezve.

A 2. §. (8) egyenletéből, a circumaxialitás definiáló egyenletében :

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \cos \omega_1 \operatorname{tg} \vartheta,$$

a $\cos \omega_1$ és $\operatorname{tg} \vartheta$ nem ismeretesek.

Az $S_u S_I S_T$ gömbháromszögből :

$$\operatorname{cotg} (\omega_1 + \omega_I) = - \operatorname{tg} i_{\text{tot}} \cdot \cos \vartheta_I,$$

ebből :

$$\operatorname{cotg} \omega_1 = \frac{1 - \operatorname{cotg} \omega_I \operatorname{tg} i_{\text{tot}} \cdot \cos \vartheta_I}{\operatorname{cotg} \omega_I + \cos \vartheta_I \operatorname{tg} i_{\text{tot}}}.$$

Az $S_u S_m S_T$ gömbháromszögből :

$$\sin \omega_1 = \frac{\cos \Omega}{\sin \vartheta}.$$

Végül az $S_T S_a S_f$ gömbháromszögből, melynek S_a melletti szöge derékszög

$$\cos \vartheta = \sin \vartheta_I \cdot \sin i_{\text{tot}}.$$

Ezeket helyettesítve :

$$\operatorname{tg} \varphi_c = \frac{\cos \varrho}{\sin \vartheta_I \sin i_{\text{tot}}} \cdot \frac{1 - \operatorname{cotg} \omega_I \operatorname{tg} i_{\text{tot}} \cos \vartheta_I}{\operatorname{cotg} \omega_I + \cos \vartheta_I \operatorname{tg} i_{\text{tot}}}. \quad (10)$$

Ezzel a φ_c ismeretes szögekkel van kifejezve s így kiszámítható.

5. §. A megfigyelés adatainak csoportosítása. A kísérleti és az elméleti eredmények összehasonlítása. 1--12. tábla.

1. A mérések első csoportja közvetlenül a levegőbe szét-szórt sugarakra vonatkozott.

Az észlelést az $\varrho = 45^\circ$ által meghatározott párhuzamos körön kezdtem és pedig $\theta = 0^\circ$ -tól kiindulva 15° -os közökben. Vagyis minden ily körön 24 sugárhoz tartozó vektor polározási helyzetét állapítottam meg. Az észleléseket, minthogy egyszerű síkban poláros fényről van szó, analýsáló nikollal végeztem.

Az $\varrho = 0^\circ$ esetén, vagyis az üvegfélgömb síklapja normálisában, mint a (7) és (10) egyenletekből világos, az intenzitásnak nullnak és a polározási sík azimutjának határozatlannak kell lennie. Ez csakis annyiban áll, hogy a sáv ebben az esetben tényleg a legsötétebb, de azért itt is a nikol elforgatásával egy határozott fekvésű minimum észlelhető, amiből kétséget kizáró módon következik, hogy az üvegfélgömb síklapjának normálisában várt vektor mellett a második közegben fellép egy a beesés síkjában fekvő, de az üveg síklapjával párhuzamos irányú vektor. Ennek amplitudója azonban, a normálisban váltakozó vektoréhoz képest, mint az a további mérésekből kitűnik, igen kicsiny.

Az $\varrho = 15^\circ$ -os körön az észlelést a látótér sötétsége igen bizonytalaná teszi, sőt mint az a táblázatból látható, négy sugárra nézve az észlelés nem is volt elvégezhető. Az észlelt értékek a circumaxialitástól lényeges eltérést mutatnak oly irányban, mintha a polározási síkok párhuzamossá akarnának lenni; s különösen a $\theta = 90^\circ$ és 270° környezetében a szétszórt sugarak *nem* síkban polárosak. A vektorok természete e helyeken nem volt közelebből megvizsgálható, minthogy a sáv kicsiny intenzitása miatt a BABINET-féle compensátorral való megvizsgálás lehetetlen volt. Ezek az eltérések az üvegfélgömb síklapjával párhuzamos irányban fellépő, némileg zavaró vektor következményei.

E vektor hatása, bár sokkal kisebb mértékben, még a $22\cdot5^\circ$ -os körön is észlelhető.

Azonban már az $\varrho=30^\circ$ -os és ennél nagyobb körökön észlelt fénysugarak mindenütt síkban polárosak és a polározási síkok elrendeződése úgyszólván tökéletesen circumaxiális.

Minden sugár poláros állapota meghatározásához az analysáló nikolnak 20 beállítása és leolvasása szolgált és pedig a polározó nikol pozitív állásánál 5 pozitív és 5 negatív helyzet leolvasása az analysáló nikollal és ugyane módszer szerint 10 leolvasás a polározó nikol negatív állásánál.

Némely sugárnál, a hol az szükségesnek mutatkozott s a mint azt külön *-gal megjelöltem, egy helyzet megállapításához 40 leolvasás szolgált.

2. A mérések második csoportja az üveganyagon át szét-szórt sugarakra vonatkozik.

Az, hogy a sugár az üvegben törést szenved, a jelen esetben a polározási állapotra nincs befolyással s így e két csoportban a polározás síkjainak elrendeződése ugyanaz.

Az észlelt sáv fényerőssége s így az észlelhetőség pontossága itt jóval nagyobb, mint az előző esetben. Itt ugyanis a szétszórás kisebb térre van korlátozva, melyet a totalis reflexio határcúpja határoz meg. (Lásd a 6. ábrát.)

A sáv azonban a totalis reflexio határcúpján kívül is látható és észlelhető, a mint ezt az idézett formulák is világosan kifejezik.

A 3. §-ban értelmezett alaphelyzetek és a 4. §-ban végzett gömbtrigonometriai átalakítások itt, az üvegfélgömbbe szétszórt sugarakra nézve is, teljesen érvényben maradnak, ha az 5. ábrán az \overrightarrow{OS}_l coordinátát az (K_ρ) síkban 180° -kal elforgatjuk.

A méréseket itt ugyanoly sorrendben végeztem, mint az első csoportban.

Az $\varrho=0^\circ$ -nál szintén jelentkezik az üvegfélgömb síklapjával párhuzamos irányú kissé zavaró vektor.

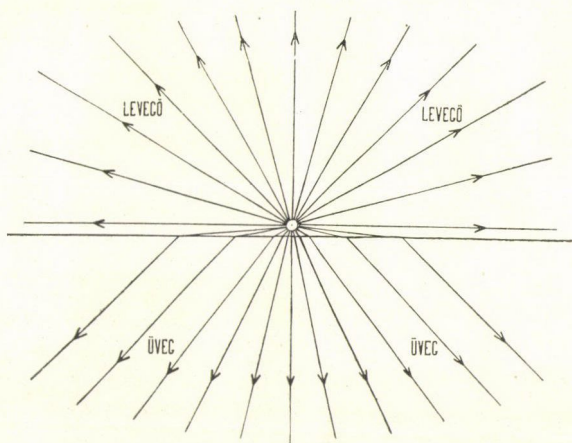
Ennek hatása az $\varrho=15^\circ$ és $22\cdot5^\circ$ -os körökön is észlelhető; a circumaxialitástól való eltérés iránya ugyanaz, mint az előző csoportban, de az eltérés nagysága lényegesen kisebb.

Az $\varrho=30^\circ$ -os és ennél nagyobb párhuzamos körökön a circumaxialitás majdnem tökéletes.

A táblákon a koordináták nem az alaphelyzetnek megfelelőleg beállított, hanem csak a 4. §-ban foglaltak alapján kiszámított értékeket jelzik.

Az előzők alapján *észlelt* polárizási azimutot φ_o -val jelöltem. A többi jelölés értelme ismeretes.

A táblák adatait nem az észlelés, hanem a párhuzamos köröknek a tengelytől való távolsága sorrendjében rendeztem.



6. ábra.

A levegőbe szétszórt sugarak kivételes esete:

$\Omega = 0^\circ$

θ	ω_I	ϑ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
0°	42.6°	0°	90°	határozatlan	$+90.0^\circ$	—	A sáv igen sötét, de a minimum határozottan észlelhető

Az üvegbe szétszórt sugarak kivételes esete:

$\Omega = 0^\circ$

θ	ω_I	ϑ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
0°	42.6°	0°	90°	határozatlan	$+91.6^\circ$	—	A sáv igen sötét, de a minimum határozottan észlelhető

A levegőbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 15^\circ$$

$$\text{A beesés szöge} = + i_{\text{tot.}}$$

	θ	ω_I	ϑ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	27·6°	0·0°	90·0°	- 90·0°	- 89·4°	- 0·6°	
2.	15°	28·3°	8·1°	81·9°	- 68·4°	- 76·1°	+ 7·7°	
3.	30°	30·4°	14·8°	75·2°	- 48·0°	- 59·7°	+ 11·7°	
4.	45°	33·4°	19·4°	70·6°	- 29·5°	- 45·5°	+ 16·0°	
5.	60°	37·0°	21·8°	68·2°	- 13·1°	- 41·9°	+ 28·8°	Nem síkban poláros.
6.	75°	40·9°	22·5°	67·5°	+ 1·8°	- 34·9°	+ 33·1°	Nem síkban poláros.
7.	90°	44·7°	21·6°	68·4°	+ 15·7°	Igen sötét, nem észlelhető.		
8.	105°	48·3°	19·6°	70·4°	+ 28·3°	Igen sötét, nem észlelhető.		
9.	120°	51·5°	16·7°	73·3°	+ 41·4°	+ 69·5°	- 28·1°	Nem síkban poláros.
10.	135°	54·1°	13·1°	76·9°	+ 53·8°	+ 73·2°	- 19·4°	Nem síkban poláros.
11.	150°	56·0°	9·0°	81·0°	+ 65·9°	+ 82·3°	- 16·4°	
12.	165°	57·2°	4·6°	85·4°	+ 77·9°	+ 88·6°	- 10·7°	
13.	180°	57·6°	0·0°	90·0°	- 90·0°	+ 91·4°	- 1·4°	
14.	195°	57·2°	- 4·6°	94·6°	+ 102·1°	+ 94·6°	+ 7·5°	
15.	210°	56·0°	- 9·0°	99·0°	+ 114·1°	+ 102·3°	+ 11·8°	
16.	225°	54·1°	- 13·1°	103·1°	+ 126·2°	+ 111·4°	+ 14·8°	Nem síkban poláros.
17.	240°	51·5°	- 16·7°	106·7°	+ 138·6°	+ 115·4°	+ 23·2°	Nem síkban poláros.
18.	255°	48·3°	- 10·6°	109·6°	+ 151·7°	Igen sötét, nem észlelhető.		
19.	270°	44·7°	- 21·6°	111·6°	+ 164·3°	Igen sötét, nem észlelhető.		
20.	285°	40·9°	- 22·5°	112·5°	+ 178·2°	+ 216·4°	- 38·2°	Nem síkban poláros.
21.	300°	37·0°	- 21·8°	111·8°	+ 193·1°	+ 221·8°	- 28·7°	Nem síkban poláros.
22.	315°	33·4°	- 19·4°	109·4°	+ 209·5°	+ 229·4°	- 19·9°	
23.	330°	30·4°	14·8°	104·8°	+ 228·0°	+ 242·1°	- 14·1°	
24.	345°	28·3°	- 8·1°	98·1°	+ 248·4°	+ 255·8°	- 7·4°	

A levegőbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 22.5^\circ$$

$$\text{A beesés szöge} = + i_{tot}$$

θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés	
1.	0°	20.1°	0.0°	90.0°	- 90.0°	- 89.2°	- 0.8°	
2.	15°	21.7°	15.6°	74.4°	- 61.5°	- 61.6°	- 0.1°	
3.	30°	25.3°	26.6°	63.4°	- 37.6°	- 41.9°*	- 4.3°	
4.	45°	30.3°	32.4°	57.6°	- 18.6°	- 25.2°	- 6.6°	
5.	60°	36.0°	34.3°	55.7°	- 3.1°	- 11.9°*	- 8.8°	
6.	75°	41.7°	33.8°	56.2°	+ 10.3°	+ 0.4°*	+ 9.9°	Nem síkban poláros.
7.	90°	47.2°	31.4°	58.6°	+ 22.6°	+ 17.0°	+ 5.6°	Nem síkban poláros.
8.	105°	52.2°	27.9°	62.1°	+ 34.1°	+ 40.7°	+ 6.6°	Nem síkban poláros.
9.	120°	56.6°	23.4°	66.6°	+ 45.4°	+ 50.5°*	- 5.1°	Nem síkban poláros.
10.	135°	60.2°	18.1°	71.9°	+ 56.5°	+ 65.2°	- 8.7°	
11.	150°	62.9°	12.4°	77.6°	+ 67.6°	+ 70.2°	- 2.6°	
12.	165°	64.7°	6.3°	83.7°	+ 78.8°	+ 78.1°	+ 0.7°	
13.	180°	65.1	0.0°	90.0°	+ 90.0°	+ 91.2°	- 1.2°	
14.	195°	64.7°	- 6.3°	96.3°	+ 101.2°	+ 100.8°	+ 0.4°	
15.	210°	62.9°	- 12.4°	102.4°	+ 112.4°	+ 107.5°	- 4.9°	
16.	225°	60.2°	- 18.1°	108.1°	+ 123.5°	+ 117.9°	+ 5.6°	
17.	240°	56.6°	- 23.4°	113.4°	+ 134.6°	+ 129.8°	+ 4.8°	Nem síkban poláros.
18.	255°	52.2°	- 27.9°	117.9°	+ 145.9°	+ 142.6°	+ 3.3°	Nem síkban poláros.
19.	270°	47.2°	- 31.4°	121.4°	+ 157.4°	+ 159.9°	- 2.5°	Nem síkban poláros.
20.	285°	41.7°	- 33.8°	123.8°	+ 169.7°	+ 176.7°	- 7.0°	Nem síkban poláros.
21.	300°	36.0°	- 34.3°	124.3°	+ 183.1°	+ 188.4°	- 5.3°	
22.	315°	30.3°	- 32.4°	122.4°	+ 198.6°	+ 206.7°	- 8.1°	
23.	330°	25.3°	- 26.6°	116.6°	+ 117.6°	+ 220.1°	- 2.5°	
24.	345°	21.7°	- 15.6°	105.6°	+ 141.5°	+ 241.7°	- 0.2°	

A levegőbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 30^\circ$$

$$\text{A beesés szöge} = + i_{tot}$$

	θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	12·6°	0°	90·0°	- 90·0°	- 90·2°	+ 0·2°	
2.	15°	15·4°	29·2°	60·8°	- 48·6°	- 49·5°	+ 0·9°	
3.	30°	21·5°	43·0°	47·0°	- 22·5°	- 24·6°	+ 2·1°	
4.	45°	28·8°	47·3°	42·7°	- 5·6°	- 8·7°	+ 3·1°	
5.	60°	36·2°	47·1°	42·9°	+ 7·2°	+ 4·7°	+ 2·5°	
6.	75°	43·5°	44·5°	45·5°	+ 18·3°	+ 17·7°	+ 0·6°	
7.	90°	50·4°	40·4°	49·6°	+ 28·5°	+ 29·5°	- 1·0°	
8.	105°	56·7°	35·3°	54·7°	+ 38·5°	+ 39·5°	- 1·0°	
9.	120°	62·1°	29·3°	60·7°	+ 48·4°	+ 50·9°	- 2·5°	
10.	135°	66·6°	22·7°	67·3°	+ 58·5°	+ 58·2°	+ 0·3°	
11.	150°	69·9°	15·4°	74·6°	+ 68·9°	+ 69·5°	- 0·6°	
12.	165°	71·9°	7·8°	82·2°	+ 79·4°	+ 77·9°	+ 1·5°	
13.	180°	72·6°	0·0°	90·0°	+ 90·0°	+ 91·1°	- 1·1°	
14.	195°	71·9°	- 7·8°	97·8°	+ 100·6°	+ 99·3°	+ 1·3°	
15.	210°	69·9°	- 15·4°	105·4°	+ 111·1°	+ 110·6°	+ 0·5°	
16.	225°	66·6°	- 22·7°	112·7°	+ 121·5°	+ 121·1°	+ 0·4°	
17.	240°	62·1°	- 29·3°	119·3°	+ 131·6°	+ 134·1°	- 2·5°	
18.	255°	56·7°	- 35·3°	125·3°	+ 141·5°	+ 143·7°	- 2·2°	
19.	270°	50·4°	- 40·4°	130·4°	+ 151·5°	+ 154·2°	- 2·7°	
20.	285°	43·5°	- 44·5°	134·5°	+ 161·7°	+ 164·5°	- 2·8°	
21.	300°	36·2°	- 47·1°	137·1°	+ 172·8°	+ 175·4°	- 2·6°	
22.	315°	28·8°	- 47·3°	137·3°	+ 185·6°	+ 184·6°	+ 1·0°	
23.	330°	21·5°	- 43·0°	133·0°	+ 202·5°	+ 199·6°	+ 2·9°	
24.	345°	15·4°	- 29·2°	119·2°	+ 228·6°	+ 225·6°	+ 3·0°	

A levegőbe szetszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 45^\circ$$

A beesés szöge, hol nincs megjegyzés, = $+i_{tot}$

	θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	2·4°	180·0°	- 90·0°	+ 90·0°	+ 90·3°	- 0·3°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
2.	15°	10·6°	97·4°	- 7·4°	+ 18·2°	+ 17·9°	+ 0·3°	
3.	30°	20·8°	85·4°	+ 4·6°	+ 17·3°	+ 16·5°	+ 0·8°	
4.	45°	30·8°	77·5°	+ 12·5°	+ 20·8°	+ 18·8°	+ 2·8°	
5.	60°	40·6°	70·3°	+ 19·7°	+ 25·6°	+ 26·9°	- 1·3°	
6.	75°	49·9°	63·2°	+ 26·8°	+ 31·2°	+ 30·7°	+ 0·5°	
7.	90°	58·7°	55·9°	+ 34·1°	+ 37·5°	+ 36·8°	+ 0·7°	
8.	105°	66·7°	48·1°	+ 41·9°	+ 44·6°	+ 43·4°	+ 1·2°	
9.	120°	73·7°	39·6°	+ 50·4°	+ 52·3°	+ 50·2°	+ 2·1°	
10.	135°	79·5°	30·6°	+ 59·4°	+ 60·9°	+ 58·6°	+ 2·3°	
11.	150°	84·0°	20·8°	+ 69·2°	+ 70·1°	+ 70·2°	- 0·1°	
12.	165°	86·7°	10·6°	+ 79·4°	+ 79·9°	+ 80·6°	- 0·7°	
13.	180°	87·6°	0·0°	+ 90·0°	+ 90·0°	+ 90·1°	- 0·1°	
14.	195°	86·7°	- 10·6°	+ 100·6°	+ 100·1°	+ 98·8°	+ 1·3°	
15.	210°	84·0°	- 20·8°	+ 110·8°	+ 109·9°	+ 109·9°	+ 0·0°	
16.	225°	79·5°	- 30·6°	+ 120·6°	+ 119·1°	+ 120·1°	- 1·0°	
17.	240°	73·7°	- 39·6°	+ 129·6°	+ 127·7°	+ 130·5°*	- 2·8°	
18.	255°	66·7°	- 48·1°	+ 138·1°	+ 135·4°	+ 138·2°*	- 2·8°	
19.	270°	58·7°	- 55·9°	+ 145·9°	+ 142·5°	+ 145·3°*	- 2·8°	
20.	285°	49·9°	- 63·2°	+ 153·2°	+ 148·8°	+ 151·1°*	- 2·3°	
21.	300°	40·6°	- 70·3°	+ 160·3°	+ 154·4°	+ 158·3°*	- 3·9°	
22.	315°	30·8°	- 77·5°	+ 167·5°	+ 159·2°	+ 161·7°*	- 2·5°	
23.	330°	20·8°	- 85·4°	+ 175·4°	+ 162·7°	+ 164·6°*	- 1·9°	
24.	345°	10·6°	- 97·4°	+ 187·4°	+ 161·8°	+ 161·2°*	+ 0·5°	

A levegőbe szétszórt sugarak polárizációs azimutja.

$$\Omega = 60^\circ$$

A beesés szöge, hol nincs megjegyzés, = $+i_{tot}$

	θ	ω_1	δ_1	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_a$	Megjegyzés
1.	0°	8.7°	180.0°	-90.0°	$+90.0^\circ$	$+88.9^\circ$	$+1.1^\circ$	A beesés szöge = $-i_{tot}$
2.	15°	20.9°	141.0°	-51.0°	$+60.5^\circ$	$+58.1^\circ$	$+2.4^\circ$	
3.	30°	28.9°	116.2°	-26.2°	$+45.5^\circ$	$+46.0^\circ$	-0.5°	
4.	45°	38.5°	100.4°	-10.4°	$+39.7^\circ$	$+39.2^\circ$	$+0.5^\circ$	
5.	60°	48.6°	88.5°	$+1.5^\circ$	$+38.6^\circ$	$+37.2^\circ$	$+1.4^\circ$	
6.	75°	58.7°	78.2°	$+11.8^\circ$	$+40.0^\circ$	$+39.6^\circ$	$+0.4^\circ$	
7.	90°	68.4°	68.6°	$+21.4^\circ$	$+43.2^\circ$	$+43.2^\circ$	$+0.0^\circ$	
8.	105°	77.6°	58.9°	$+31.1^\circ$	$+47.9^\circ$	$+47.3^\circ$	$+0.6^\circ$	
9.	120°	85.9°	48.8°	$+41.2^\circ$	$+54.0^\circ$	$+52.6^\circ$	$+1.4^\circ$	
10.	135°	92.7°	37.8°	$+52.2^\circ$	$+61.3^\circ$	$+59.5^\circ$	$+1.8^\circ$	
11.	150°	98.1°	25.9°	$+64.1^\circ$	$+70.0^\circ$	$+67.7^\circ$	$+2.3^\circ$	
12.	165°	101.5°	13.2°	$+76.8^\circ$	$+79.7^\circ$	$+78.5^\circ$	$+1.2^\circ$	
13.	180°	102.6°	0.0°	$+90.0^\circ$	$+90.0^\circ$	$+88.7^\circ$	$+1.3^\circ$	
14.	195°	101.5°	-13.2°	$+103.2^\circ$	$+100.3^\circ$	$+99.9^\circ$	$+1.3^\circ$	
15.	210°	98.1°	-25.9°	$+115.9^\circ$	$+110.0^\circ$	$+109.1^\circ$	$+0.9^\circ$	
16.	225°	92.7°	-37.8°	$+127.8^\circ$	$+118.7^\circ$	$+121.2^\circ$	-2.5°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
17.	240°	85.9°	-48.8°	$+138.8^\circ$	$+126.0^\circ$	$+126.5^\circ$	-0.5°	
18.	255°	77.6°	-58.9°	$+148.9^\circ$	$+132.1^\circ$	$+135.6^\circ$	-3.5°	
19.	270°	68.4°	-68.6°	$+158.6^\circ$	$+136.8^\circ$	$+139.5^\circ$	-2.7°	
20.	285°	58.7°	-78.2°	$+168.2^\circ$	$+140.0^\circ$	$+142.5^\circ$	-2.5°	
21.	300°	48.6°	-88.5°	$+178.5^\circ$	$+141.4^\circ$	$+143.5^\circ$	-2.1°	
22.	315°	38.5°	-100.4°	$+190.4^\circ$	$+140.3^\circ$	$+142.2^\circ$	-1.9°	
23.	330°	28.9°	-116.2°	$+206.2^\circ$	$+134.5^\circ$	$+135.6^\circ$	-1.1°	
24.	345°	20.9°	-141.0°	$+231.0^\circ$	$+119.5^\circ$	$+121.9^\circ$	-2.4°	

A levegőbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 75^\circ$$

A beesés szöge, hol nincs megjegyzés, = $+i_{tot}$

θ	ω_I	ϑ_I	a	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	32·4°	180·0° - 90·0°	+ 90·0°	+ 90·1°	- 0·1°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
2.	15°	34·7°	153·9° - 63·9°	+ 72·1°	+ 70·7°	+ 1·4°	
3.	30°	40·8°	132·3° - 42·3°	+ 58·8°	+ 57·7°	+ 1·1°	
4.	45°	49·2°	115·6° - 25·6°	+ 50·8°	+ 50·8°	0·0°	
5.	60°	58·8°	102·1° - 12·1°	+ 46·7°	+ 45·4°	+ 1·3°	
6.	75°	68·9°	90·5° - 0·5°	+ 45·5°	+ 42·9°	+ 2·6°	
7.	90°	79·0°	79·7° + 10·3°	+ 46·4°	+ 45·5°	+ 0·9°	
8.	105°	88·8°	68·9° + 21·1°	+ 49·1°	+ 48·4°	+ 0·7°	
9.	120°	97·8°	57·6° + 32·4°	+ 53·7°	+ 51·2°	+ 2·5°	
10.	135°	105·8°	45·2° + 44·8°	+ 60·2°	+ 59·0°	+ 1·2°	
11.	150°	112·1°	31·4° + 58·6°	+ 68·6°	+ 68·7°	- 0·1°	
12.	165°	116·2°	16·2° + 73·8°	+ 78·7°	+ 77·9°	+ 0·8°	
13.	180°	117·6°	0·0° + 90·0°	+ 90·0°	+ 90·0°	0·0°	
14.	195°	116·2°	- 16·2° + 106·2°	+ 101·3°	+ 100·8°	+ 0·5°	
15.	210°	112·1°	- 31·4° + 121·4°	+ 111·4°	+ 108·8°	+ 2·6°	
16.	225°	105·8°	- 45·2° + 135·2°	+ 119·8°	+ 121·2°	- 1·4°	
17.	240°	97·8°	- 57·6° + 147·6°	+ 126·3°	+ 125·2°*	+ 1·1°	
18.	255°	88·8°	- 68·9° + 158·9°	+ 130·9°	+ 131·8°	- 0·9°	
19.	270°	79·0°	- 79·7° + 169·7°	+ 133·6°	+ 136·4°*	- 2·8°	
20.	285°	68·9°	- 90·5° + 180·6°	+ 134·5°	+ 156·9°*	- 2·4°	
21.	300°	58·8°	- 102·1° + 192·1°	+ 133·3°	+ 136·4°*	- 3·1°	
22.	315°	49·2°	- 115·6° + 205·6°	+ 129·2°	+ 130·8°*	- 1·6°	
23.	330°	40·8°	- 132·3° + 222·3°	+ 121·2°	+ 121·9°	- 0·7°	
24.	345°	34·7°	- 153·9° + 243·9°	+ 107·9°	+ 109·4°	- 1·5°	

A beesés
szöge = $-i_{tot}$

Az üvegbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 15^\circ$$

$$A \text{ beesés szöge} = + i_{tot}$$

	θ	ω_I	ϑ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	27·6°	0·0°	90·0°	- 90·0°	- 87·4°	- 2·6°	
2.	15°	28·3°	8·1°	81·9°	- 68·4°	- 72·8°	+ 4·4°	
3.	30°	30·4°	14·8°	75·2°	- 48·0°	- 56·5°	+ 8·5°	
4.	45°	33·4°	19·4°	70·6°	- 29·5°	- 42·5°	+ 13·0°	
5.	60°	37·0°	21·8°	68·2°	- 13·1°	- 23·1°	+ 10·0°	Nem síkban poláros.
6.	75°	40·9°	22·5°	67·5°	+ 1·8°	- 7·3°*	+ 9·1°	Nem síkban poláros.
7.	90°	44·7°	21·6°	68·4°	+ 15·7°	+ 19·5°	- 3·8°	Nem síkban poláros.
8.	105°	48·3°	19·6°	70·4°	+ 28·3°	+ 40·2°*	- 11·9°	Nem síkban poláros.
9.	120°	51·5°	16·7°	73·3°	+ 41·4°	+ 51·9°*	- 10·5°	Nem síkban poláros.
10.	135°	54·1°	13·1°	76·9°	+ 53·8°	+ 61·0°*	- 7·2°	
11.	150°	56·0°	9·0°	81·0°	+ 65·9°	+ 72·5°*	- 6·6°	
12.	165°	57·2°	4·6°	85·4°	+ 77·9°	+ 82·9°	- 5·0°	
13.	180°	57·6°	0·0°	90·0°	+ 90·0°	+ 89·6°	+ 0·4°	
14.	195°	57·2°	- 4·6°	94·6°	+ 102·1°	+ 97·4°	+ 4·7°	
15.	210°	56·0°	- 9·0°	99·0°	+ 114·1°	+ 107·2°	+ 6·9°	
16.	225°	54·1°	- 13·1°	103·1°	+ 126·2°	+ 115·0°	+ 11·2°	Nem síkban poláros.
17.	240°	51·5°	- 16·7°	106·7°	+ 138·6°	+ 124·1°	+ 14·5°	Nem síkban poláros.
18.	255°	48·3°	- 19·6°	109·6°	+ 151·7°	+ 135·5°*	+ 16·2°	Nem síkban poláros.
19.	270°	44·7°	- 21·6°	111·6°	+ 164·3°	+ 159·1°	+ 5·2°	Nem síkban poláros.
20.	285°	40·9°	- 22·5°	112·5°	+ 178·2°	+ 193·4°	- 15·2°	Nem síkban poláros.
21.	300°	37·0°	- 21·8°	111·8°	+ 193·1°	+ 204·2°*	- 11·1°	
22.	315°	33·4°	- 19·4°	109·4°	+ 209·5°	+ 222·2°	- 12·7°	
23.	330°	30·4°	- 14·8°	104·8°	+ 228·0°	+ 240·7°*	- 12·7°	
24.	345°	28·3°	- 8·1°	98·1°	+ 248·4°	+ 255·2°	- 6·8°	

Az üvegbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 22.5^\circ$$

$$\text{A beesés szöge} = + i_{tot}$$

	θ	ω_I	ϑ_I	a	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	20.1°	0.0°	90.0°	- 90.0°	ω_I nem állítható be.		
2.	15°	21.7°	15.6°	74.4°	- 61.5°	ω_I nem állítható be.		
3.	30°	25.3°	26.6°	63.4°	- 37.6°	ω_I nem állítható be.		
4.	45°	30.3°	32.4°	57.6°	- 18.6°	- 20.8°	+ 2.2°	
5.	60°	36.0°	34.3°	55.7°	- 3.1°	- 9.8°	+ 6.7°	
6.	75°	41.7°	33.8°	56.2°	+ 10.3°	+ 4.3°	+ 6.0°	Nem síkban poláros.
7.	90°	47.2°	31.4°	58.6°	+ 22.6°	+ 21.2°	+ 1.4°	Nem síkban poláros.
8.	105°	52.2°	27.9°	62.1°	+ 34.1°	+ 38.0°	- 3.9°	Nem síkban poláros.
9.	120°	56.6°	23.4°	66.6°	+ 45.4°	+ 48.8°	- 3.4°	
0.	135°	60.2°	18.1°	71.9°	+ 56.5°	+ 58.7°	- 2.2°	
1.	150°	62.9°	12.4°	77.6°	+ 67.6°	+ 71.6°	- 4.0°	
2.	165°	64.7°	6.3°	83.7°	+ 78.8°	+ 80.6°	- 1.8°	
3.	180°	65.1°	0.0°	90.0°	+ 90.0°	+ 89.5°	- 0.5°	
4.	195°	64.7°	- 6.3°	96.3°	+ 101.2°	+ 99.5°	+ 1.7°	
5.	210°	62.9°	- 12.4°	102.4°	+ 112.4°	+ 109.5°	- 2.9°	
6.	225°	60.2°	- 18.1°	108.1°	+ 123.5°	+ 122.9°	+ 0.6°	
7.	240°	56.6°	- 23.4°	113.4°	+ 134.6°	+ 128.8°	+ 5.8°	
8.	255°	52.2°	- 27.9°	117.9°	+ 145.9°	+ 140.4°	+ 5.5°	Nem síkban poláros.
9.	270°	47.2°	- 31.4°	121.4°	+ 157.4°	+ 155.1°	+ 2.3°	Nem síkban poláros.
0.	285°	41.7°	- 33.8°	123.8°	+ 169.7°	+ 171.9°	- 2.2°	Nem síkban poláros.
1.	300°	36.0°	- 34.3°	124.3°	+ 183.1°	+ 187.8°	- 4.7°	
2.	315°	30.3°	- 32.4°	122.4°	+ 198.6°	+ 201.5°	- 2.9°	
3.	330°	25.3°	- 26.6°	116.6°	+ 117.6°	ω_I nem állítható be.		
4.	345°	21.7°	- 15.6°	105.6°	+ 141.5°	ω_I nem állítható be.		

Az üvegebe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 30^\circ$$

$$A \text{ beesés szöge} = + i_{tot}$$

θ	ω_I	ϑ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	12·6°	0·0°	90·0°	- 90·0°	ω_I nem állítható be.	
2.	15°	15·4°	29·2°	60·8°	- 48·6°	ω_I nem állítható be.	
3.	30°	21·5°	43·0°	47·0°	- 22·5°	ω_I nem állítható be.	
4.	45°	28·8°	47·3°	42·7°	- 5·6°	- 5·2° - 0·4°	
5.	60°	36·2°	47·1°	42·9°	+ 7·2°	+ 7·9° - 0·7°	
6.	75°	43·5°	44·5°	45·5°	+ 18·3°	+ 18·5° - 0·2°	
7.	90°	50·4°	40·4°	49·6°	+ 28·5°	+ 28·8° - 0·3°	
8.	105°	56·7°	35·3°	54·7°	+ 38·5°	+ 36·9° + 1·6°	
9.	120°	62·1°	29·3°	60·7°	+ 48·4°	+ 47·5° + 0·9°	
10.	135°	66·6°	22·7°	67·3°	+ 58·5°	+ 58·6° - 0·1°	
11.	150°	69·9°	15·4°	74·6°	+ 68·9°	+ 68·9° 0·0°	
12.	165°	71·9°	7·8°	82·2°	+ 79·4°	+ 78·8° + 0·6°	
13.	180°	72·6°	0·0°	90·0°	+ 90·0°	+ 89·3° + 0·7°	
14.	195°	71·9°	- 7·8°	97·8°	- 100·6°	+ 99·6° + 1·0°	
15.	210°	69·9°	- 15·4°	105·4°	+ 111·1°	+ 109·1° + 2·0°	
16.	225°	66·6°	- 22·7°	112·7°	+ 121·5°	+ 119·4° + 2·1°	
17.	240°	62·1°	- 29·3°	119·3°	+ 131·6°	+ 129·4° + 2·2°	
18.	255°	56·7°	- 35·3°	125·3°	+ 141·5°	+ 139·8° + 1·7°	
19.	270°	50·4°	- 40·4°	130·4°	+ 151·5°	+ 148·6° + 2·9°	
20.	285°	43·5°	- 44·5°	134·5°	+ 161·7°	+ 159·4° + 2·3°	
21.	300°	36·2°	- 47·1°	137·1°	+ 172·8°	+ 170·2° + 2·6°	
22.	315°	28·8°	- 47·3°	137·3°	+ 185·6°	+ 183·0° + 2·6°	
23.	330°	21·5°	- 43·0°	133·0°	+ 202·5°	ω_I nem állítható be.	
24.	345°	15·4°	- 29·2°	119·2°	+ 228·6°	ω_I nem állítható be.	

Az üvegebe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 45^\circ$$

A beesés szöge, ha megjegyzés nincs, = $+i_{tot}$

θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés	
1.	0°	2·4°	180·0°	- 90·0°	+ 90·0°		ω_I nem állítható be.	
2.	15°	10·6°	97·4°	- 7·4°	+ 18·2°		ω_I nem állítható be.	
3.	30°	20·8°	85·4°	+ 4·6°	+ 17·3°		ω_I nem állítható be.	
4.	45°	30·8°	77·5°	+ 12·5°	+ 20·8°	+ 21·0°	- 0·2°	
5.	60°	40·6°	70·3°	+ 19·7°	+ 25·6°	+ 27·1°	- 1·5°	
6.	75°	49·9°	63·2°	+ 26·8°	+ 31·2°	+ 30·6°	+ 0·6°	
7.	90°	58·7°	55·9°	+ 34·1°	+ 37·5°	+ 36·3°	+ 1·2°	
8.	105°	66·7°	48·1°	+ 41·9°	+ 44·6°	+ 43·8°	+ 0·8°	
9.	120°	73·7°	39·6°	+ 50·4°	+ 52·3°	+ 51·5°	+ 0·8°	
0.	135°	79·5°	30·6°	+ 59·4°	+ 60·9°	+ 60·7°	+ 0·2°	
1.	150°	84·0°	20·8°	+ 69·2°	+ 70·1°	+ 69·2°	- 0·9°	
2.	165°	86·7°	10·6°	+ 79·4°	+ 79·9°	+ 80·0°	- 0·1°	
3.	180°	87·6°	0·0°	+ 90·0°	+ 90·0°	+ 90·1°	- 0·1°	
4.	195°	86·7°	- 10·6°	+ 100·6°	+ 100·1°	+ 99·8°	+ 0·3°	
5.	210°	84·0°	- 20·8°	+ 110·8°	+ 109·9°	+ 110·6°	- 0·7°	
6.	225°	79·5°	- 30·6°	+ 120·6°	+ 119·1°	+ 119·0°	+ 0·1°	
7.	240°	73·7°	- 39·6°	+ 129·6°	+ 127·7°	+ 126·3°	+ 1·4°	
8.	255°	66·7°	- 48·1°	+ 138·1°	+ 135·4°	+ 136·2°	- 0·8°	
9.	270°	58·7°	- 55·9°	+ 145·0°	+ 142·5°	+ 142·0°	+ 0·5°	
0.	285°	49·9°	- 63·2°	+ 153·2°	+ 148·8°	+ 149·1°	- 0·3°	
1.	300°	40·6°	- 70·3°	+ 160·3°	+ 154·4°	+ 153·1°	+ 1·3°	
2.	315°	30·8°	- 77·5°	+ 167·5°	+ 159·2°	+ 158·6°	+ 0·6°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
3.	330°	20·8°	- 85·4°	+ 175·4°	+ 162·7°		ω_I nem állítható be.	
4.	345°	10·6°	- 97·4°	+ 187·4°	+ 161·8°		ω_I nem állítható be.	

Az üvegbe szétszórt sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 60^\circ$$

A beesés szöge, ha megjegyzés nincs, = $+i_{tot}$

θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	8·7°	180·0°	- 90·0°	+ 90·0°		ω_I nem állítható be.
2.	15°	20·9°	141·0°	- 51·0°	+ 60·5°		ω_I nem állítható be.
3.	30°	28·9°	116·2°	- 26·2°	+ 45·5°	+ 47·3°	- 1·8°
4.	45°	38·5°	100·4°	- 10·4°	+ 39·7°	+ 39·0°	+ 0·7°
5.	60°	48·6°	88·5°	+ 1·5°	+ 38·6°	+ 35·6°	+ 3·0°
6.	75°	58·7°	78·2°	+ 11·8°	+ 40·0°	+ 37·8°	+ 2·2°
7.	90°	68·4°	68·6°	+ 21·4°	+ 43·2°	+ 41·5°	+ 1·7°
8.	105°	77·6°	58·9°	+ 31·1°	+ 47·9°	+ 47·5°	+ 0·4°
9.	120°	85·9°	48·8°	+ 41·2°	+ 54·0°	+ 52·9°	+ 1·1°
10.	135°	92·7°	37·8°	+ 52·2°	+ 61·3°	+ 60·6°	+ 0·7°
11.	150°	98·1°	25·9°	+ 64·1°	+ 70·0°	+ 68·8°	+ 1·2°
12.	165°	101·5°	13·2°	+ 76·8°	+ 79·7°	+ 78·6°	+ 1·1°
13.	180°	102·6°	0·0°	+ 90·0°	+ 90·0°	+ 90·4°	- 0·4°
14.	195°	101·5°	- 13·2°	+ 103·2°	+ 100·3°	+ 100·8°	- 0·5°
15.	210°	98·1°	- 25·9°	+ 115·9°	+ 110·0°	+ 110·0°	0·0°
16.	225°	92·7°	- 37·8°	+ 127·8°	+ 118·7°	+ 120·5°	- 1·8°
17.	240°	85·9°	- 48·8°	+ 138·8°	+ 126·0°	+ 127·3°	- 1·3°
18.	255°	77·6°	- 58·9°	+ 148·9°	+ 132·1°		A félgömbtartó cső nem állítható α -ra.
19.	270°	68·4°	- 68·6°	+ 158·6°	+ 136·8°	+ 137·1°	- 0·3°
20.	285°	58·7°	- 78·2°	+ 168·2°	+ 140·0°	+ 139·9°	+ 0·1°
21.	300°	48·6°	- 88·5°	+ 178·5°	+ 141·4°	+ 140·9°	+ 0·5°
22.	315°	38·5°	- 100·4°	+ 190·4°	+ 140·3°	+ 138·2°	+ 2·1°
23.	330°	28·9°	- 116·2°	+ 206·2°	+ 134·5°	+ 134·2°	+ 0·3°
24.	345°	20·9°	- 141·0°	+ 231·0°	+ 119·5°		ω_I nem állítható be.

A beesés szöge = $-i_{tot}$

Az üvegebe szétszórta sugarak polározási azimutja.

$$\Omega = 75^\circ$$

A beesés szöge, ha megjegyzés nincs, = $+i_{tot}$

θ	ω_I	δ_I	α	φ_c	φ_o	$\varphi_c - \varphi_o$	Megjegyzés
1.	0°	32·4°	180·0° - 90·0°	+ 90·0°	+ 91·2°	- 1·2°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
2.	15°	34·7°	153·9° - 63·9°	+ 72·1°	+ 73·5°	- 1·4°	
3.	30°	40·8°	132·3° - 42·3°	+ 58·8°	+ 60·7°	- 1·9°	
4.	45°	49·2°	115·6° - 25·6°	+ 50·8°	+ 51·3°	- 0·5°	
5.	60°	58·8°	102·1° - 12·1°	+ 46·7°	+ 45·7°	+ 1·0°	
6.	75°	68·9°	90·5° - 0·5°	+ 45·5°	+ 44·6°	+ 0·9°	
7.	90°	79·0°	79·7° + 10·3°	+ 46·4°	+ 44·3°	+ 2·1°	
8.	105°	88·8°	68·9° + 21·1°	+ 49·1°	+ 49·7°	- 0·6°	
9.	120°	97·8°	57·6° + 32·4°	+ 53·7°	+ 51·7°	+ 2·0°	
10.	135°	105·8°	45·2° + 44·8°	+ 60·2°	+ 60·3°	- 0·1°	
11.	150°	112·1°	31·4° + 58·6°	+ 68·6°	+ 68·5°	+ 0·1°	A félgömbtartó csöve nem állítható α -ra.
12.	165°	116·2°	16·2° + 73·8°	+ 78·7°	+ 78·3°	+ 0·4°	
13.	180°	117·6°	0·0° + 90·0°	+ 90·0°	+ 90·6°	- 0·6°	
14.	195°	116·2°	- 16·2° + 106·2°	+ 101·3°	+ 101·9°	- 0·6°	
15.	210°	112·1°	- 31·4° + 121·4°	+ 111·4°	+ 110·9°	+ 0·5°	
16.	225°	105·8°	- 45·2° + 135·2°	+ 119·8°	+ 118·6°	+ 1·2°	
17.	240°	97·8°	- 57·6° + 147·6°	+ 126·3°			
18.	255°	88·8°	- 68·9° + 158·9°	+ 130·9°	+ 128·0°	+ 2·9°	
19.	270°	79·0°	- 79·7° + 169·7°	+ 133·6°	+ 131·0°	+ 2·6°	
20.	285°	68·9°	- 90·5° + 180·6°	+ 134·5°	+ 133·1°	+ 1·4°	
21.	300°	58·8°	- 102·1° + 192·1°	+ 133·3°	+ 133·3°	0·0°	A beesés szöge = $-i_{tot}$
22.	315°	49·2°	- 115·6° + 205·6°	+ 129·2°	+ 128·8°	+ 0·4°	
23.	330°	40·8°	- 132·3° + 222·3°	+ 121·2°	+ 118·3°	+ 2·9°	
24.	345°	34·7°	- 153·9° + 243·9°	+ 107·9°	+ 107·6°	+ 0·3°	

6. § A végeredmények összefoglalása. Általánosságban véve igen jó egyezés. Befejező megjegyzések.

A közölt táblák egy teljes gömbfelületnek, az üvegfélgömb síklapja normálisával párhuzamos körein áthaladó, egymástól 15° távolságban fekvő, összesen 290 sugár polározási síkjának elméletileg megállapított és kísérletileg meghatározott azimutját tartalmazzák.

Az összes leolvasások száma közel 8000-et tett ki.

E sugarak közül 60 mutat a circumaxialitástól lényegesebb eltérést; de ez a 60 sugár mind az $\varrho = 15^\circ$ és 22.5° által meghatározott párhuzamos körön fekszik. Az eltérés iránya olyan, hogy a polározási síkok párhuzamos rendszer felé törekszenek. Az eltérést létesítő gerjesztő vektor a beejtett fénynyalábnak a beesés síkjában, az üvegfélgömb síklapjával párhuzamos irányban váltakozik s az intenzitása a circumaxiális rendszert létesítő, az üvegfélgömb síklapjának normálisa irányában váltakozó gerjesztővektor intenzitásához átlagban úgy aránylik, mint 1 : 80.

Ez a kis zavaró vektor azért lép fel, mert a *beejtett* sugárnyaláb bármily gondos beállítás és kis rés alkalmazása mellett sem tökéletesen párhuzamos s ekkor egy ilyen irányú kis, zavaró vektorösszetevőnek kell jelentkeznie. (Lásd az 1. §-t és a 3. ábrát.)

E kicsiny lineáris vektor phasisa akkor egyenlő a határlapra normális vektor phasisával, ha az előbbi oly sugarak folytán származik, melyek beesési szöge kisebb a teljes fényvisszaverődés határszögénél; akkor az eredő vektor is lineáris; de ha oly sugarak folytán áll elő, melyek e határszögnél nagyobb szög alatt esnek be, a kicsiny vektor phasisa $\frac{\pi}{2}$ -vel különbözik a normális vektor-étől s az eredő vektor ellipszisszerű (v. ö. az (1)—(5) formulákat).

Az észlelési sorozattal megállapított eredmények, még a *circumaxialitástól* eltérést mutatók is, szigorúan igazolják a *totalis reflexio határszöge esetén megtört sugár elméletileg megállapított polározásbeli viselkedését, ha a beeső sugár lineáris vektora a beesés síkjában váltakozik*; másrészt egy típusát

állítják elő az ultramikroskopikus részecskék által létesített pontszerű gerjesztő fényforrások körül keletkezett circumaxialis rendszerek, és pedig arra az eddig quantitative még meg nem vizsgált esetre nézve, mikor a gerjesztés az elválasztó síkra merőleges irányú.

*

A közölt észlelési sorozat tulajdonképpen csak kiegészítő része azoknak az eredményeknek, melyekről az 1. §-ban említést tettem. A mérési sorozat elvégzésére FRÖHLICH egyetemi tanár úrtól kaptam megbízást, úgyszintén ő engedte át az e célra szükséges összes mérési eszközöket, miért is e helyen mondok hálás köszönetet.

A méréseket a kir. magyar tudomány egyetem I. számú kísérleti physikai intézetének optikai szobájában végeztem, melynek átengedéséért br. EÖRVÖS LORÁNT egyetemi tanár úr ő excellentiájának tartozom meleg köszönettel.

Végül igaz hálával tartozom dr. RYBÁR ISTVÁN egyetemi magántanár úrnak, a ki az eszközök felállításánál s az észlelések folyamán tanácsaival és útbaigazításaival állandóan segítségemre volt.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 június 18.-án tartott üléséből.)

EGYATOMOS IDEÁLIS GÁZAK CHEMIAI CONSTANSÁNAK ELMÉLETI MEGHATÁROZÁSA.

BRÓDY IMRÉ-től.

TARTALOMJEGYZÉK.

- I. Bevezetés. A chemiai constans fogalma és jelentősége.
- II. A chemiai constans elméleti meghatározását czélzó régebbi kísérletek.
- III. Egy egyatomos gáz entropia constansának kiszámítása a quantumelmélet és a statisztikai mechanika alapján.
 - A) Quantumelméleti rész.
 - B) Statisztikai rész.

I. A chemiai constans fogalma és jelentősége.

1. §. A classikus thermodynamika minden test entropiáját csak egy additív constansig határozza meg. Ugyanis az entropiát definiáló

$$S = \int \frac{dE + dL}{T}$$

egyenlet — hol S a test entropiáját, E az energiáját, dL a test által a külső erőkkel szemben végzett elemi munkát, T az absolut hőmérsékletet jelenti — egy integrál, melyhez mindig hozzájárulhat egy additív állandó.

Ennek az állandónak különös jelentőséget ad a NERNST-féle hőtétel, mely szerint minden chemiailag tiszta, condensált, szilárd vagy cseppfolyós test entropiája az absolut zérus-ponton zérus.¹

¹ W. NERNST: Theoretische Chemie. V. kiadás. 1907. p. 697.

A tételnek ez a fogalmazása PLANCK-tól¹ ered, mely az eredeti NERNST-féle tételnél általánosabb.

2. §. Ez a tétel ugyan közvetlenül csak szilárd vagy cseppfolyós halmazállapotú testekre vonatkozik, mégis physikai jelentést ad egy ideális gáz entropia-constansának is. Ugyanis egy ideális gáz tömeg-egységének entropiája:

$$S = c_v \log (Tv^{k-1}) + C \quad (a)$$

(hol c_v az állandó térfogat melletti fajhő) a föntebbiek szerint szintén tartalmaz egy additiv állandót. Hogy ennek az állandónak a jelentését megkaphassuk, tekintsünk egy, az illető ideális gázból és a vele egyensúlyban levő szilárd phasisból álló rendszert. Ekkor kell, hogy a szilárd phasis tömegegységének thermodynamikai potenciálja egyenlő legyen a gáz ugyanakkora tömegének thermodynamikai potenciáljával.² Bármely test potenciálja PLANCK szerint³

$$\phi = S - \frac{E + pV}{T}.$$

Mivel a szilárd test entropiája és vele a potenciálja az additiv constanssal együtt NERNST tétele alapján meg van határozva: a gáz entropiájának állandója ebből az összefüggésből meghatározható.

Ugyanis ez az egyenlet összefüggést állapít meg p és T között, a mely nem más, mint annak a ténynek kifejezése, hogy a telített gáz nyomása csak a hőmérséklet függvénye.

Ugyanis a szilárd test specifikus potenciálja

$$\varphi' = \int_0^T \frac{c_p'}{T} dT - \frac{1}{T} \int_0^T c_p' dT + \frac{b'}{T} \quad 4$$

az ideális gázé:

$$\varphi = c_p \log T - R \log p + a - \frac{b}{T}, \quad 5$$

¹ M. PLANCK: Thermodynamik. Leipzig, III. kiad. 1911. p. 268.

² M. PLANCK: l. c. p. 181. (149) formula.

³ M. PLANCK: l. c. p. (a 240. lap vagy a [240] formula p. 257. nem látszik erre vonatkozni) 116, 179, (75) formula.

⁴ M. PLANCK: l. c. p. 270, (258) formula.

⁵ M. PLANCK: l. c. p. 274, (267) formula.

a hol

$$a = C + R \log R - c_p, \quad (b)$$

felhasználva a

$$c_v + R = c_p$$

és

$$pv = RT$$

egyenleteket; b' és b a szilárd test, illetőleg a gáz energiái az abszolút zérus-ponton.

Az a állandót, mely szoros kapcsolatban van C -vel, nevezik *chemiai konstansnak* a gázra nézve NERNST szerint. Ha φ -t és φ' -t egyenlővé tesszük, némi bizonyos határok közötti megengedhető elhanyagolások után nyerjük, hogy

$$\log p = \frac{c_p}{R} \log T - \frac{r_0}{RT} + \frac{a}{R},^1$$

a hol p a telített gőz nyomása; r_0 jelenti a párolgási hőt az abszolút zérus-ponton. Ez a formula módot nyújt a chemiai konstans empirikus meghatározására, ugyanis a gőznyomás-mérésekből az a kiszámítható.

3. §. Különösen nagy fontossága van ennek az állandónak a chemiai egyensúlyok szempontjából, a melyektől nevét is nyerte.

Ismeretes,² hogy egy olyan gázkeverékre, melynek az egyes alkotó részei chemiai reakciókat képezhetnek, az egyensúly feltétele

$$c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \dots = K = A e^{-\frac{B}{T}} \cdot T^{\nu_1 c_{v_1} + \nu_2 c_{v_2} + \dots} p^{\nu_1 - \nu_2 - \dots},$$

a hol B meg van határozva a reakcióhővel és

$$\log A = \frac{\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \dots}{R}$$

Itt c_1, c_2, \dots a reakcióban résztvevő anyagok koncentrációit jelentik, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ az átalakuló molekulák számai, kicsiny

¹ Lásd pl. PLANCK: l. c. p. 276. (271) formula.

² Lásd pl. PLANCK: l. c. p. 278. (276) formula.

vagy negatív egész számok, a szerint, mint az illető anyag a reakcióban keletkezik vagy eltűnik, c_{v_1} , c_{v_2} , c_{v_3} ,... az egyes anyagok fajhői állandó térfogat mellett és α_1 , α_2 ... rendre a chemiai constansok.

Tehát a reactionhővel együtt a reakcióban résztvevő gázok chemiai constansai teljesen meghatározzák K -nak, az úgynevezett egyensúlyi állandónak az értékét.

Eppen ez indította a chemikusokat, különösen NERNSTET és tanítványait, hogy nagyarányú kísérleteket végezzenek az egyes gázok chemiai constansainak meghatározására.¹

A kísérleti eljárások után próbálták elméletileg is meghatározni a chemiai constanst.

Jelen dolgozat feladata *egy idealis egyatomos molekulából álló gáz chemiai constansának theoretikus kiszámítása és a quantumelmélet alkalmazása az idealis gázak thermikus tulajdonságainak meghatározására.*

II. A chemiai constans elméleti meghatározását czélzó régebbi kísérletek.

4. §. O. SACKUR² körülbelöl hat évvel ezelött vetette fel először azt a problémát, hogy hogyan lehetne meghatározni egy gáz chemiai constansát *a quantumhypothesis felhasználásával.* A főnehézség ott volt, hogy a quantumhypothesis addig csak egyszerű linearis rezgő mozgásra volt határozottan formulázva és így nem volt oly egyértelműleg meghatározott mód, melylyel azt idealis gáz molekuláinak mozgására, mely nem ilyen rezgő mozgás, alkalmazni lehetett volna.

SACKUR a molekulák mozgására vonatkozólag a rezgő mozgásra érvényes PLANCK-féle formulát használja, mely szerint a resonator energiája csak azokat az értékeket veheti fel, melyek egy energiaquantumnak egészszámú többszörösei. Ezt az energiaquantumot meghatározza az

$$\varepsilon = h\nu$$

¹ W. NERNST: Zeitschrift f. Elektrochemie 22. p. 185. 1916.

² O. SACKUR: Ann. d. Physik 36. p. 958. 1911.

egyenlet, hol ε a resonatornak összes mozgási és helyzeti energiája, ν a rezgésszám és h egy universalis állandó.

SACKUR egy ideális gáz molekuláit resonatornak tekinti es rezgési idő gyanánt azt az időt veszi, mely átlagban eltelik a molekulának az edény falába való két ütközése között.

Igy nyeri a chemiai constans számára a következő formulát:

$$\frac{a}{R} = \frac{5}{2} \log R - 4 \log N + \frac{3}{2} \log 2\pi + \frac{3}{2} \log M - 3 \log h - 0.439;$$

hol N a LOSCHMIDT-AVOGADRO-féle számot, M a gáz molekulasúlyát jelenti.

Ez a formula már megközelítőleg megfelel a tapasztalatnak annyiban, hogy a a gáz molekulasúlyával növekedik, de a számértékek a kísérletileg nyert értékekkel kevésbé egyeznek.

A theoriának a *leggyengébb* része az $\varepsilon = h\nu$ formula alkalmazása és ν , a rezgésszám, önkényes meghatározása.

Ugyanennek az $\varepsilon = h\nu$ formulának és az ebből következő

$$E = \frac{3N h \nu}{e^{kT} - 1}$$

egyenletnek a felhasználásával határozzák meg a chemiai constanst LENZ és SOMMERFELD,¹ illetőleg KEESOM.²

5. §. LENZ és SOMMERFELD, valamint KEESOM a gázt a ν meghatározása czéljából continuumnak tekintik és ν -t DEBYE módszere szerint az acustikai hullámok rezgésszámaival veszik egyenlőnek. Azonban ők maguk konstatálják a kísérleti eredményekkel való egybevetés után, hogy *az így nyert eredmények nem fedik a valóságot* és a különböző javítási módok sem vezettek eredményre.

6. §. TETRODE³ methodusa a chemiai constans kiszámítá-

¹ Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und Elektrizität. Teubner, Leipzig, 1914, p. 125, 134 és 137; és Phys. Zeitschrift, 14, p. 262. (1913).

² H. W. KEESOM: Phys. Ztschrift, 14. p. 663. (1913).

³ H. TETRODE: Ann. d. Phys. 38. p. 434. és 39. p. 255.

sára, érdekes keveréke az elméletnek és a kísérletnek. Ő elméletileg egy numerikus constansig határozza meg a chemiai constanst és később ezt a constanst úgy választja meg, hogy a tapasztalatilag nyert értékkel a számítás lehető legjobban megegyezzen. Az összehasonlításra anyagul a higanygőzt választja, melynél a telített gőzének nyomása igen pontosan ismeretes.

7. §. O. STERN¹ a quantumtheoriának a gázmolekulák mozgására való alkalmazásának a nehézségét azzal akarta elkerülni, hogy a constanst a szilárd testek quantumelméletének az alapján a sublimálás jelenségének a felhasználásával határozza meg. Ez az eljárás ugyan egyrészt idegen elemet, a szilárd testek viselkedését viszi be az elméletbe, másrészt a párolgás módjára vonatkozó hypothesisei sem elég biztosak, mégis a nyert eredmény helyes, a mennyiben ő is TETRODE formulájához jut.

8. §. Ezekről egészen különböző utat követ a chemiai constans meghatározására NERNST.² 1916-ban ő elejti a quantumhypothesiset, sőt még elejti az energia megmaradásának elvét is a molekularis jelenségekre és egy különös hypothesiset állít fel a molekulák mozgására nézve ideális gázokban, a melynek segítségével a TETRODE-féletől csak kevéssel eltérő értékeket kap.

9. §. A legújabb meghatározása a chemiai constansnak P. SCHERRERTŐL³ ered. Ő már a quantumtheoriának az új, a seriespektrumok vizsgálatánál kipróbált módszereket használja. A quantumelmélet EPSTEIN-féle fogalmazásának alkalmazásával határozza meg a lehetséges mozgásokat.

De az ő elmélete még mindig tartalmaz belső ellentmondásokat, mert a statisztikai részben visszatér a GIBBS-féle statisztikához, mely a tisztán classikus mechanikán épülvén fel, ellentétben van a quantumtheoriával. A nyert eredmény numerikusan sem egyezik jól a tapasztalatilag kapott értékekkel. A következőkben egy ellenmondásokról ment és a tapasztalattal megegyező meghatározását fogjuk adni az egyatomos ideális gázok chemiai constansának.

¹ O. STERN: Phys. Ztschrift, 14. p. 629. (1913).

² W. NERNST: Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1916. p. 83.

³ P. SCHERRER: Göttinger Nachrichten, 1916. p. 154.

III. Egy egyatomos gáz entropia-constansának a kiszámítása a quantumelmélet és a statisztikai mechanika alapján.

A) *Quantum-elméleti rész.*

10. §. A quantumelméletet PLANCK eredetileg csak egy-szabadságfokú, egyszerű harmonikus mozgást végző rendszerekre fogalmazta meg. Csak újabban sikerült általánosítani tetszés-szerűnti mechanikai rendszerekre. Az általánosításnak kétféle módja van. Az egyiket főleg SCHWARZSCHILD és EPSTEIN használják, a másik a PLANCK-féle mód. Az első mód azonban nem egészen határozott, mert függ a koordinaták választásától, mint azt maga EPSTEIN is elismeri,¹ azért mi a második, a PLANCK-féle eljárást fogjuk alkalmazni. Különbösen is, mint a jelen fejezetnek SCHERRER idézett dolgozatával való összehasonlítása mutatja, mind a két eljárás ebben az esetben ugyanarra az eredményre vezet.

11. §. A quantumelmélet abban tér el a classikus mechanikától, hogy nem engedi meg, legalább stationarius mozgások számára, hogy a mozgási differentialegyenletek integratio constansai bármely tetszés-szerűnti értéket felvehessenek, hanem az integratio constansok egy részére feltételeket köt ki, a melyek legfeljebb annyi egész számú parametertől függenek, a hány szabadságfokú a rendszer.

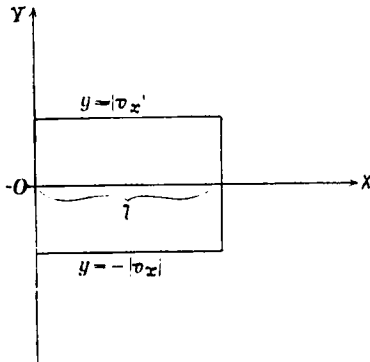
Például egy egyszerű harmonikus mozgást végző pont energiája csak azokat az értékeket veheti fel, melyek $h\nu$ -nek egészszámú többszöröse. Itt h a PLANCK-féle, a quantumelméletre charakteristikus constans, számértéke $6\cdot548,10^{-27}$ erg. sec. és ν a rezgő pont rezgési száma.²

12. §. Vizsgáljunk egy l élű rugalmas falakkal bíró kockába bezárt tömegpontot. Ez a pont úgy fog mozogni — az ütközés törvényei értelmében —, hogy a sebesség componensei absolut értékre nézve állandók maradnak, de minden egyes a kocka falába való ütdédéskor az egyik componens előjele megváltozik.

¹ P. S. EPSTEIN: Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. p. 389, 1916.

² M. PLANCK: Ann. d. Phys. 50. p. 385. 1916.

A *singularis* mozgások itt azok, melyek a kockka valamelyik élével párhuzamosan történnek. Ha a coordinata-rendszer kezdőpontját a kockka egyik csúcsába, a coordinata-tengelyeket ebben a csúcsban összefutó három élbe helyezzük, akkor az x tengelyvel párhuzamosan mozgó tömegpontra nézve y és z constansok, v_y és v_z zérusok, v_x, v_y, v_z a sebesség derékszögű componensei, x változik 0-tól l -ig és vissza, v_x pedig csak az



előjelét változtatja, még pedig positiv, mikor 0-tól l -ig megy és negativ a másik esetben.

13. §. A quantumhypothesis szerint kell, hogy

$$\int d\varphi d\psi = nh,$$

a hol φ valamely coordinata, ψ a hozzátartozó momentum (mozgásmennyiség, impulsus): az eleven erőnek $\frac{d\varphi}{dt}$ sebesség szerint képezett partialis differentióhányadosa, n egy egész szám, h pedig a PLANCK-féle constans, az actio elemi quantuma (Wirkungsquantum).¹

Jelen esetben

$$\varphi = x;$$

az eleven erő $U = \frac{1}{2}mv_x^2$, tehát

¹ M. PLANCK: Ann. d. Phys. 50. p. 38, 1916.

$$\phi = \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_x^2 \right) = mv_x$$

és a kettős integral kiterjesztendő φ és ψ mindamaz érték-rendszereire, melyeket a pont mozgás közben felvesz. A kettős integrált a legegyszerűbben úgy számíthatjuk ki, ha vizsgáljuk annak a geometriai jelentését. Ha x -et és v_x -et mint egy sík derékszögű koordinátáit fogjuk fel, akkor az integratio tartomány a egy téglalap, melyet

$$y = |v_x|, \quad y = -|v_x|, \quad x = 0 \quad \text{és} \quad x = l$$

egyenesek határolnak (lásd az ábrát).

A kettős integrál nem más, mint ennek a téglalaprak a területe, szorozva m -mel.

Tehát

$$\iint m dx dv_x = 2m |v_x| l,$$

a mi mindig positiv.

A quantumhypothesis alapfeltevése szerint tehát

$$2m |v_x| l = nh.$$

Éppen így, ha az y , illetőleg z tengelylyel párhuzamosan haladó mozgásokat vesszük szemügyre, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} 2m |v_y| l &= n'h; \\ 2m |v_z| l &= n''h; \end{aligned}$$

hol n , n' , n'' positiv egész számok.

Egy molekula mozgási energiája ezek szerint

$$U = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{h^2}{8ml^2} (n^2 + n'^2 + n''^2).$$

14. §. Most áttérünk egy anyagi pont mozgásának vizsgálatáról egy ideális gáz vizsgálatára.

Tekintsünk valamely egyenlő, egyatomos N számú molekulából álló, rugalmas falú, l hosszúságú élű kockába bezárt gázquantumot.

Mivel mindegyik molekula egy atomból áll, tehát csak translációs kinetikus energiája van, elegendő közelítéssel mindegyiket tömegpontnak tekinthetjük, melyek mindegyike eleget tesz a fentebbi feltételeknek.

A molekulák egymásra való hatását, ideális gázzal lévén szó, elhanyagolhatjuk.

A gáz összes energiája csak mozgási energia lévén, kifejezése:

$$E = \sum \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{h^2}{8ml^2} (n_1^2 + n_1'^2 + n_1''^2 + \dots + n_N^2 + n_N'^2 + n_N''^2).$$

Látjuk, hogy a gáz energiája sem vehet fel tetszésszerű értékeket, hanem csupán egy elemi quantumnak, $\frac{h^2}{8ml^2}$ -nak egész számú többszöröseit. Ez a tény bármily meglepőnek látszik is, nincs ellenmondásban a tapasztalatokkal, mert a h kicsinysege miatt az energia ugrásai nem figyelhetők meg, éppen oly kevéssé, mint az atomelméletől követelt discontinuitásai a tömegnek.

B) Statisztikai rész.

15. §. Az entropia kiszámítására kiindulópontul a BOLTZMANN-féle

$$S = k \log w$$

egyenlet szolgáljon, hol w annak az állapotnak a valószínűségét jelenti, melynek S az entropiája, k pedig egy abszolút, csak az egységektől függő állandó, melynek értéke $\frac{R}{N}$, hol R a gáz-állandó, N pedig a LOSCHMIDT-AVOGADRO-féle constans, az egy grammolekulában levő molekulák száma. Ezzel az entropia meghatározása egy állapot valószínűségének kiszámítására van visszavezetve. A valószínűség pedig az a szám, ahányféleképpen jöhet létre egy thermodynamikailag meghatározott állapot egyes mechanikailag meghatározott állapotokból. A valószínűség számértékét a definitio alapján a következőképpen határozhatjuk meg:

Thermodynamikai szempontból egy adott m tömegű, egyen-

súlyban levő gáz egyenletes állapota teljesen meg van határozva két egymástól független adat, például a gáz energiája és térfogata által.

A gáz dinamikai állapotának meghatározására azonban sokkal több adat szükséges. Dynamikailag a gáz állapotát az úgynevezett kezdeti feltételek határozzák meg. Ilyenek például egy bizonyos időpontban minden molekulának a három derékszögű koordinátája és a sebességének három componense. A jelen esetben ez adatok száma $6N$. Ezek közül azonban $3N$, a molekulák koordinátáinak a kezdőértékei, nem játszanak szerepet az állapot meghatározásában. Ugyanis, mint azt KÖNIG DÉNES és SZÜCS ADOLF¹ bebizonyították, egyes kivételes esetektől eltekintve — ezek itt számításba azért nem jöhetnek, mert a valószínűségük zérus —, a koczkában mozgó molekula a koczka minden pontjához tetszésszerűen közel jön, akármekkora legyenek is a koordináták kezdőértékei.

A dinamikai állapotot jellemzik tehát a molekulák sebességi componenseinek az értékei valamely időpontban vagy a mi ezzel æquivalens, az $n_1, n'_1, n''_1, \dots, n_N, n'_N, n''_N$ pozitív egész számok.

16. §. Keresni kell tehát, hogy egy adott E és l értékhez hányféleképpen lehet meghatározni az n_1, n'_1, n''_1, \dots egész számokat. Rögtön beláthatjuk, hogy általában véve egy olyan n_1, n'_1, n''_1, \dots értékrendszer sincs, mely a kívánalmaknak megfelelő lenne, mert mint láttuk (14. §.), a gáz energiája nem vehet fe tetszésszerűen értékeket.

Ezért nem lehet itt az energia értékét absolute szabatosan, matematikai pontossággal megadni, hanem csak azt kell kérdezni, hogy melyek azok az n_1, n'_1, n''_1, \dots értékek, melyekre nézve

$$E' \leq \frac{h^2}{8ml^2} (n_1^2 + n_1'^2 + n_1''^2 + n_2^2 + n_2'^2 + n_2''^2 + \dots + n_N^2 + n_N'^2 + n_N''^2) \leq E \quad (1)$$

$$\leq E + dE.$$

Ezeknek száma arányosnak vehető dE -vel.

¹ KÖNIG D. és SZÜCS A.: Math. és Természettud. Ért. XXX. p. 545. 1913.

Jelölje ezt

$$\omega dk,$$

a hol ω , mely k -nek és l -nek a függvénye, a keresett valószínűség.

Ha $n_1, n'_1, n''_1, \dots, n_N, n'_N, n''_N$ -t egy $3N$ dimenziós térben levő pont derékszögű koordinátáinak fogjuk fel, akkor az (1) egyenlőtlenség második részének

$$n_1^2 + n'_1{}^2 + n''_1{}^2 + \dots + n_N^2 + n'_N{}^2 + n''_N{}^2 \leq \frac{8ml^2}{h^2} (k + dk)\text{-nek}$$

eleget tesznek a $3N$ dimenziós térnek azok a pontjai, az úgynevezett rácspontok, melyek mindegyik koordinátája pozitív egész szám és benne vannak a

$$\sqrt{\frac{8ml^2}{h^2} (k + dk)}$$

sugarú $3N$ dimenziós gömb belsejében, melynek középpontja a rendszer középpontja.

Ezeknek a száma megközelítőleg, ha a gömb sugara elég nagy — és mi csak ezt az esetet vesszük tekintetbe —, egyenlő a $3N$ dimenziós gömb ama részének köbtartalmával, melynek minden pontjának koordinátája pozitív, vagyis a teljes gömb köbtartalmának 2^{3N} részével.

Ugyanis, ha a gömböt egységnyi élű kis kockákra bontva képzeljük, akkor minden ilyen egységkockának egy rácspont felel meg azokra a kockákra nézve, melyek teljesen benne fekszenek a gömbben. Ha tehát a rácspontok számát a gömb köbtartalmával vesszük egyenlőnek, akkor legfeljebb akkora hibát követünk el, a hány egységkockát a gömb felülete metsz, ezeknek a száma pedig kicsiny a teljesen a gömbön belül fekvő egységkockák számához képest, ha a gömb sugara elég nagy. Tehát a fentebbi egyenlőtlenségnek eleget tevő $n_1, n'_1, n''_1, \dots, n_N$ értékrendszerek száma elegendő megközelítéssel egyenlő a gömb köbtartalmával.

Mi azonban csak azokat az értékrendszereket használhatjuk, melyekre nézve mindegyik n pozitív.

Ezek száma az összeseknek annyiad része, a hány $3N$ -ed osztályú ismétléses variatio alkotható két elemből, a $+$ és $-$ jelből. Vagyis a gömb térfogatát osztanunk kell 2^{3N} -vel.

A p dimenziós — p legyen egy páros szám — r sugarú gömb köbtartalma ismeretes :

$$V_p = Q_p \cdot r^p, \quad \text{hol} \quad Q_p = \frac{\sqrt{\pi^p}}{\frac{p}{2}!} \cdot 1$$

Az (1) egyenlőtlenségnek pedig azok a pontok tesznek eleget, melyek a

$$\sqrt{\frac{8ml^2}{h^2} E} \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{8ml^2}{h^2} (E+dE)}$$

sugarú gömbhéjak által határolt térrészben vannak és mindegyik koordinatájuk positiv. Ezeknek a száma, ha a sugarak nagyok, így irható :

$$\frac{1}{2^{3N}} \frac{dV_{3N}}{dE} dE.$$

Ezek szerint a keresett valószínűség volna :

$$\frac{1}{2^{3N}} \frac{dV_{3N}}{dE}.$$

Ezt az értéket azonban még osztani kell $N!$ -sal. Mert nem tekinthetünk két állapotot különbözőnek akkor, ha azok csak két, egymással mindenben megegyező molekulának a felcserélésében különböznek, a mi az (1) képletben két index felcserélésében nyer kifejezést. Vagyis a nyert pontok számát még osztanunk kell az N elemből alkotható permutatiók számával, $N!$ -sal.

¹ L. pl. LORENTZ: Les théories statistiques en Thermodynamique. Teubner, Leipzig, 1916. p. 81.

17. §. Így lesz tehát rendre:

$$w = \frac{1}{2^{3N} N!} \cdot \frac{dV_{3N}}{dE};$$

$$V_{3N} = \Omega_{3N} \left(\frac{8ml^2}{h^2} E \right)^{\frac{3N}{2}};$$

$$\frac{dV_{3N}}{dE} = \frac{3N}{2} \Omega_{3N} \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N}{2}-1}.$$

A kitevőben $\frac{3N}{2} - 1$ helyett, tekintettel N nagy értékére tehetünk $\frac{3N}{2}$ -t. Behelyettesítve így Ω_{3N} értékét lesz

$$w = \frac{1}{2^{3N} N!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}^{3N}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{8ml^2}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \cdot E^{\frac{3N}{2}}.$$

Felhasználhatjuk STIRLING formuláját, mely szerint minden igen nagy p értékre elegendő megközelítéssel igaz, hogy

$$p! = p^p \cdot e^{-p}.$$

Est figyelembe véve és elhagyva az N -hez képest kicsiny tagokat, nyerjük:

$$w = \left(\frac{4\pi m}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \left(\frac{e}{N}\right)^{\frac{5N}{2}} l^{3N} E^{\frac{3N}{2}}. \quad (2)$$

A kocka l éle helyett bevezetjük a köbtartalmát:

$$l = \sqrt[3]{V};$$

a (2) egyenletből lesz:

$$w = \left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \cdot \left(\frac{e}{N}\right)^{\frac{5N}{2}} \cdot (EV^{\frac{2}{3}})^{\frac{3N}{2}}.$$

A BOLTZMANN-féle egyenlet alapján

$$S = k \log w = \frac{3R}{2} \log EV^{\frac{2}{3}} + S_0, \quad (3)$$

a hol

$$S_0 = \frac{5}{2} R - \frac{3R}{2} \log \frac{4\pi m}{3h^2 N^{\frac{2}{3}}}; \quad (4)$$

tekintetbe véve, hogy $k = \frac{R}{N}$.

A (3) formula az egyatomos ideális gázok entropiáját *additív konstanssal együtt* teljesen meghatározza.

18. §. Hogy ez a képlet teljesen megfelel a követelményeknek, azt a következőképpen láthatjuk be:

A

$$dS = \frac{dE + pdV}{T}$$

egyenletből következik, hogy

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_v = \frac{1}{T}; \quad (5)$$

és

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{p}{T}. \quad (6)$$

Ezekbe helyettesítve S értékét a (3) egyenletből, lesz:

$$\frac{3R}{2} \cdot \frac{1}{E} = \frac{1}{T},$$

vagyis

$$E = \frac{3R}{2} T.$$

Tehát az ideális gáz termikus energiája arányos az abszolút hőmérséklettel; és így az arányossági tényező a gáz molekuláris fajhője állandó térfogat mellett:

$$C_v = \frac{3R}{2}.$$

Egyatomos gázok C_v fajhője közvetlenül pontosan nehezen mérhető, azért inkább a $\frac{C_v}{C_p} = k$ értéket határozták meg többen, a mely quotiens többféle módon is mérhető.

Itt

$$C_v = C_p - R = \frac{3R}{2}$$

és

$$k = \frac{5}{3} = 1.66,$$

a mely érték pontosan megegyezik KUNDT és WARBURG-nak a higanygőzre vonatkozólag végzett méréseinek eredményével.

19. §. A (6) egyenletből

$$\frac{R}{V} = \frac{p}{T},$$

vagyis

$$pv = RT.$$

Tehát theoriánk következményei megegyeznek BOYLE-MARIOTTE és GAY-LUSSAC törvényeivel.

Számunkra a legfontosabb az S_0 constans, mert ez határozza meg a keresett chemiai constanst.

A (4) egyenletben az egyes molekulák tömege m helyett bevezetjük a gáz molekulasúlyát M -et a

$$M = Nm$$

egyenlet segítségével. Így nyerjük, hogy

$$S_0 = \frac{5R}{2} + \frac{3R}{2} \log \frac{4\pi M}{3N^{\frac{2}{3}} h^2}.$$

Az S_0 -tól az (a) egyenletben szereplő C -t úgy határozzuk meg, hogy a (3) egyenletben E helyett T -t vezetjük be független változónak.

$$\begin{aligned} S &= \frac{3R}{2} \log C_v TV^{\frac{2}{3}} + S_0; \\ &= \frac{3R}{2} \log TV^{\frac{2}{3}} + S_0 + \frac{3R}{2} \log C_v. \end{aligned}$$

Ennek és az (a) egyenletnek az összehasonlításából lesz

$$C = S_0 + \frac{3R}{2} \log C_v = S_0 + \frac{3R}{2} \log \frac{3R}{2}.$$

Felhasználva S_0 értékét a (4) egyenletből

$$C = \frac{5R}{2} + \frac{3R}{2} \log \frac{3R}{2} + \frac{3R}{2} \log \frac{4\pi}{3N^{\frac{2}{3}}h^2} + \frac{3R}{2} \log M.$$

Ebből és a (b) egyenletből

$$a = K + \frac{3R}{2} \log M, \quad (7)$$

a hol

$$K = \frac{5}{2} R \log R + \frac{3R}{2} \log \frac{2\pi}{N^{\frac{2}{3}}h^2}.$$

20. §. Látható, hogy a chemiai constans a molekulaszű, vagy a mi itt ezzel egyenlő, az atomsű logarithmusának linearis függvénye.

Ebben a tagban megegyeznek mind a II. részben ismertett szerzőknek az eredményei.

Különbség csak a K constansban mutatkozik. Az általunk nyert érték pontosan megegyezik azzal, melyet TETRODE és O. STERN nyertek, a mely a kísérletek eredményével is a mérés-hibák határain belül egyezik, a mint azt NERNST vizsgálatai mutatják.¹

¹ W. NERNST: Zeitschrift f. Elektrochemie, 22. p. 185. 1916.

A NAP LÉGKÖRÉNEK PHYSIKÁJA.

FÉNYI GYULA S. J. levelező tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Az égi testek közt a Nap ragyog a legfényesebben, az ő sugaraiban látjuk, kutatjuk e sötét földet: mégis éppen a Napnak természetét nem tudjuk kifürkészni, nemcsak a belsejét nem ismerjük, de még a külső tünetényeit is rejtélyes homály fűdi. A Nap e tekintetben alkalmas jelképe az Istennek. Méltán énekelhette Berzsenyi: «Isten, kit a bölcs lángesze fel nem ér, csak titkon érző lelke óhajtva sejt: Léted világít, mint az égő Nap, de szemünk bele nem tekinthet.» Mert míg Isten léte a legvilágosabb igazsággént áll előttünk: lényege, tökéletessége felfoghatatlan. Minél több jelenséget veszünk észre a Napon, annál több rejtély tárul fel előttünk és minél csekélyebb a tudásunk e jelenségek valódi okáról, természetéről, annál nagyobb tér nyílik a különböző találgatásokra, annál különbözőbb vélemények és elméletek keletkeznek.

Az ide vonatkozó gazdag irodalomban nagyon elűtő véleményekkel találkozunk a Nap természetére vonatkozólag, melyek egyazon régi észleletekre támaszkodván, új meg új ösvényen keresik a rejtélyek megfejtését, míg a régi és közel fekvő igazságokat nem részesítik kellő figyelemben. A modern természetbúvárnak a legfontosabb és leghasznosabb teendője mindezekből az állításokból, véleményekből, elméletekből azt kiválasztani és tudományos alapon álló rendszerbe összefoglalni, a mi bizonyos; és mindazt külön választani, a mi kétes, rejtélyes, vagy éppen séggel el nem fogadható.

A következő tárgyalásban tehát a Nap környezetét alkotó

légkörnek nyomás-viszonyait fogom megvizsgálni, megállapítani és ki fogom mutatni azoknak jelentőségét, a mely a Nap légkörében előforduló tűnemények vizsgálatánál, magyarázatánál és értelmezésénél tűnik elő.

Oly számításból indulok ki, mely a legbiztosabb alapon nyugszik: abból ugyanis, hogy a Nap légkörében hydrogenium van, a melynek természetét kísérletek alapján ismerjük: nevezetesen tulajdonságát, hogy a nyomó erő arányában összenyomható. A másik biztos igazság, hogy a nehézségi erő a Napon 27·64-szer nagyobb, mint a földön. Ehhez csatolom azt a feltevést, hogy a Nap légkörének hőmérséklete egész terjedelmében ugyanaz, vagyis hogy annak állapota isothermalis, és pedig 6000 absolut fokot tesz. Ez a feltevés ugyan a valóságnak nem felel meg, mert a Nap légkörének hőmérséklete felfelé bizonyára csökken; de minthogy annak törvényét nem ismerjük, számításba nem vehetjük. Feltevéseünk tehát ebből a tekintetből szükséges; de egyszersmind czélszerű is, a mennyiben mindazok a következtetések, melyeket érvelésünk folyamán levonunk, még nagyobb mértékben érvényesülnek, ha a Nap hydrogenjének hőmérséklete felfelé csökken. Ha isothermalis állapotot teszünk fel, akkor az általános hőmérsékletet 6000 absolut fokra kell tennünk, mert a legújabb kutatások szerint a Nap felületén legalább ily magas hőfok uralkodik.

A nyomás-viszonyok meghatározása végett vékony réteget veszünk tekintetbe h magasságban a photosphæra felett; az ott uralkodó nyomást p -vel jelöljük. Ha most dh -val emelkedünk, a nyomás az ott levő hydrogen súlyával kisebbedik, melyet a nyomás egysége alatt S -sel jelölünk. Így a következő differenciális egyenletet kapjuk:

$$dp = -pSGdh.$$

a hol G azt jelenti, hányszor nagyobb a nehézségi erő a Napon, mint a földön. Ennek integrálját véve, két magassági határ, h_1 és h_2 között kapjuk a következő egyenletet:

$$\int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{p} = - \int_{h_2}^{h_1} SGdh.$$

és ebből

$$\text{Log}_n \frac{p_1}{p_2} = -SG(h_1 - h_2). \quad (1)$$

Ha most azt akarjuk, hogy a h_2 magasabb ponton a nyomás tízszer kisebb legyen, mint az alatta levő h_1 -ben, akkor a következő egyenlet azt a magassági különbséget határozza meg, a melylyel emelkednünk kell, hogy tízszer kisebb nyomásra találjunk.

$$\frac{\text{Log}_n 10}{SG} = h_2 - h_1. \quad (2)$$

Ha e képletben S értékét, a hydrogen fajsúlyát egy légnyomás alatt 6000 absolut fok mellett beiktatjuk, azt találjuk, hogy 213·4 kilométerrel kell emelkednünk, hogy a nyomás tízszer kisebb legyen. Ez a törvény minden magasságban áll egészen a légkör határáig, mely ugyanis, mint látni fogjuk, nem lehet oly magas, hogy a nehézség csökkenése számba volna veendő. A valóságnak meg nem felelő feltevésünk, hogy a légkör hőmérséklete az egész magasságban ugyanaz, érvelésünket, mely éppen a nyomás csökkenését bizonyítja, nem gyengíti, hanem még megerősíti, mert egyszerű megfontolás után azonnal belátjuk, hogy a nyomás még gyorsabban fog csökkenni, ha a feljebb levő rétegek hőmérséklete bármily arányban kisebbedik.

Alkalmazzuk most ezt a számítási eljárásunkat a Nap chromosphærájára, a mely mint rózsaszínű szegély veszi körül a Napot és első tekintetre mint annak légköre tűnik fel. Ez izzó hydrogen-réteg, mert a hydrogent jellemző fényben világít, akár hőség az izzás, vagy más egyéb is az oka fényességének. E réteg magassága csak 7—8"-ig ér fel, melyet saját méréseim alapján állapítottam meg és a csillagászati kézikönyvekben forgalomban levő adatok ellenében is fenntartok, a melyekben a chromosphæra magassága mindig 10—15"-nek van feltüntetve. A chromosphæra nem alkalmas ugyan pontos magassági mérésekre, mert finom csúcsai nincsenek élesen határolva és magasságuk is változó; de ily nagy eltérés mégsem engedhető meg. 1888-ban a chromosphærát 45-ször mértem meg, mindig többszörös beállításal és a következő közép számokat nyertem: a Nap déli

sarkán $6^{\circ}96''$; északi sarkán $7^{\circ}10''$; keleti szélén $6^{\circ}91''$; nyugati szélén $6^{\circ}96''$. 1889-ben a sarkok körüli tájon, egészen 40° szélességig le $7^{\circ}6''$ -t találtam; az egyenlítő körüli zónán egész $\pm 30^{\circ}$ szélességig $7^{\circ}5''$. E középértékek ily megegyezése bizonyítja, hogy $10''$ -ig erő határozatlanságnak nincsen helye. Hogy a kézikönyvekben levő adatok egészen tévesek, legvilágosabban abból tűnik ki, hogy az angol csillagászok a kodaikanáli observatoriumon Kelet-Indiában több éven keresztül a protuberantiákat egészen a $10''$ magasságig egyenként észlelték, magasságukat megmérték, az adatokat feldolgozták és közzétették: már most ezek a csillagászok lehetetlen munkát végeztek volna, ha a chromosphæra 10 — $15''$ magasságig érne; az igazság kedvéért tehát magasságát $7''$ -cel vezetjük be számításunkba. Hét geocentricus másodpercnek a Nap távolságában 5075 km felel meg; ezt tehát a chromosphæra átlagos magasságának kell vennünk. De milyen a mi számításunk szerint a hydrogen nyomása ily magasságban, ha az minden 213 km emelkedéssel 10 -szer kisebb lesz? 5075 -öt 213 -mal osztván, azt találjuk, hogy a nyomásnak $10^{28.7}$ -szer kisebbnek kellene lennie, mint a photosphæra felületén. Ez a kis méret physikai képzeletünket meghaladja. Ily nagy nyomáskülönbségek mellett nem érthető meg, hogy a chromosphæra egész magasságában egyneműnek látszik: fénye az alján ugyan valamivel nagyobb, de ez is már annak a következménye, hogy ott a sugarak sokkal hosszabb utat tesznek meg; a spectralvonalak is az alján vastagabbak, a minnek a nagyobb sűrűség felel meg, de különben ugyanazok és egyneműek. Ennélfogva a chromosphærát sem tekinthetjük közönséges értelemben vett légkörnek, olyan légtengernek, mint a mi légkörünk, mely az égi testen nyugszik és nehézsége szerint egyensúlyban van. Ha megvizsgáljuk a hydrogen sűrűségét, azonnal elötünik annak lehetetlensége, hogy a Nap légköre a chromosphæra magasságáig érjen fel. Az előbbi számítással a nyomást határoztuk meg ama feltevés alapján, hogy a hydrogen isothermalis állapotban van; ámde ugyanegy hőmérséklet mellett minden gáz sűrűsége ugyanabban az arányban változik, mint a nyomása: ennélfogva a hydrogen sűrűsége is minden 213 km emelkedésnél 10 -szer kisebb lesz és a chromosphæra magas-

ságában szintén $10^{28.7}$ -szer kisebbnek kellene lennie, a mi azonban physikai lehetetlenségre vezet. Hogy ezt tüzetesen kimutathassuk, a hydrogen absolut sűrűségét a photosphæra színén kell meghatározni. Erre A. SCHMIDT tanár elmélete szolgálhat, a melyben a Nap szélének optikai képződését magyarázza meg. Ezt a tüneményt, mely csak sugártörés által jöhet létre, legvilágosabban és legegyszerűbben úgy érthetjük meg, ha az észlelő szeméből sugarat képzelünk kiindulni, mely a légnemű égi testet a szélén bizonyos rétegben érinti, tehát horizontalis (érintőleges) irányban tér a rétegbe. Ha annak a rétegnek sugártörése olyan, hogy az eltérített sugár görbületi radiusa egyenlő e réteg radiusával, vagyis annak távolságával az égi test középpontjától és így a tört sugár megint csak horizontalis irányban halad benne, akkor ez a sugár körben körülfutja az égi testet az ő légkörében és fényes felületét nem érinti: e réteg alatt a sugártörés, a nagyobb sűrűség folytán nagyobbodni fog és így abban a tört sugár az égi test felülete felé görbül és azt valahol el is éri.

Ha viszont ebből az elérési pontból indul ki fénysugár, ez ugyanazt az utat teszi meg és az észlelő szemébe esik. A kritikus réteg felett futó horizontalis sugár, mert ott a sugártörés kisebb, nem követheti oly körnek útját, hanem a ritkább felsőbb rétegek felé eltér és görbeségét a Nap felé fordítván, kitér az égi test légköréből, fényes felületét nem érinti. Viszont a felületről kiinduló fénysugár ebbe az útba nem is kerülhet, az észlelő szemébe nem is jöhet. Ebből világos, hogy az a réteg, melyben a fénysugár horizontalis irányban az égi testet körülfutja, határréteget alkot, a melyen felül a Napból kiinduló sugár az észlelő szemébe nem jöhet; így ott az észlelő a fényességnek határát látja, jelen esetben a Napnak a szélét. Ezt a sugártörést kritikus sugártörésnek és a réteget kritikus rétegnek nevezik. Ezt az elméletet a Napra alkalmazva, az eddig feltett viszonyok alapján meghatározhatjuk a kritikus sugártörésnek értékét, melynek a Nap légkörében uralkodnia kell, ha a Napnak látható széle csakugyan optikai képződmény. A kritikus sugártörésből azután a sűrűséget is kiszámíthatjuk, melynek azon a helyen kell lennie, a hol a Nap szélét látjuk. Az ekképpen meghatározott sűrűség

maximalis értéket képvisel, vagyis azt jelenti, hogy azon a helyen a sűrűség annál nagyobb nem lehet, mert ez esetben valahol feljebb a kisebb kritikus sűrűség fordulna elő és ott feljebb látnók a Nap szélét. Ez a kritikus sűrűség és vele az optikai szegély képződése nem fordul elő minden égi testnek légkörében és vajjon a Nap látható széle optikai-e vagy nem, nem dönthetjük el; de érvelésünk céljából sem ezt tudunk, sem pedig erre nézve valami feltevést alkalmaznunk nem kell. Az így kiszámított sűrűséggel tehát mint maximalis értékkel érvelünk. Ha a Nap látható széle nem optikai, hanem csak a photosphæranak a sugártörés által kissé emelt felülete, az ott levő sűrűség csak kisebb lehet, mint a kritikus sűrűség és ez az eset a maximalis értékből folyó következtetéseket még inkább erősíti. Azt azonban az észlelések alapján megállapíthatjuk, hogy ha a Napnak optikai széle van, az csak oly szűk lehet, hogy megfigyelés alá nem eshetik.

A kritikus sugártörés meghatározása végett SNELLIUS ismert képletéből indulunk ki, a mely égi testeknek gömbalakú légkörében haladó fénysugárnak útját határozza meg.

$$nr \sin i = \text{const.};$$

ebben i a beesés szögét, jelenti valamely rétegben; n a sugártörésnek tényezőjét a beesés pontján; r e pontnak távolságát az égi test középpontjától, vagyis a réteg radiusát. Ha most azt a feltevést tesszük, hogy a beesés szöge változatlanul 90° legyen, az egyenlet differenciálját véve a következő egyenletet kapjuk:

$$dn \cdot r - ndr = 0.$$

Ebben az egyenletben az n helyébe az egységet is írhatjuk, mert n az egységtől nagyon kevéssel különbözik; így lesz

$$dn = \frac{dr}{r};$$

ha most dr -nek aránylag kicsiny, mérhető értékét, egy kilométert választjuk, akkor dn a sugártörés tényezőjének változását jelenti

egy kilométer emelkedés után. Minthogy r a Napnak radiusa, 697,000 km, e képletünk adja:

$$\Delta n = 143 \times 10^{-8}. \quad (3)$$

A sűrűség további meghatározását a következő egyenletre alapíthatjuk, mely a sűrűségnek a sugártöréssel való összefüggését határozza meg:

$$\frac{n-1}{D} = 139 \times 10^{-6},$$

ebben n megint az illető gáznak a törésmutatóját jelenti, D pedig a gáz sűrűségét, 139×10^{-6} a hydrogen állandóját. Ez egyenletnek differentiálja

$$dn = 139 \times 10^{-6} dD;$$

mérhető mennyiségekre átmenve lesz:

$$\Delta n = 139 \times 10^{-6} \Delta D; \quad (4)$$

ebben ΔD szintén a sűrűség változását jelenti, a melyet *egy kilométer* emelkedéssel érünk el. Ezt a változást a (2) számú egyenletből találjuk, mely szerint a sűrűség is 10-szer kisebb lesz 213 km emelkedéssel; ha ez egyenletet 213·4-rel elosztjuk, a jobboldalon 1 km emelkedést, a baloldalon pedig a megfelelő sűrűség tényezőjét kapjuk, azaz:

$$\sqrt[213.4]{10} = 1.0109;$$

a sűrűség egy kilométer emelkedéssel 1·0109-szer kisebb lesz, ennél fogva $\Delta D = 0.0109 \cdot D$. Ha ezt a ΔD és Δn értékét a (3) képletből a 4.-be beiktatjuk, a keresett sűrűséget megkapjuk:

$$D = 0.94389. \quad (5)$$

Ez a sűrűség a hydrogenium egysége szerint értendő és azt jelenti, hogy a photosphæra felületén a hydrogen sűrűsége nem lehet nagyobb, mint 0·94-ede annak a sűrűségnek, melylyel a hydrogen 0 C fok mellett és egy légnyomás alatt bir. Minthogy ez az adat a következőknek is az alapja, meg kell állapí-

tanom, milyen bizonyossággal bír ez az érték, illetőleg mennyire változik meg ez a szám, ha az alapul vett viszonyok nem pontosan ugyanazok, vagy éppen bizonyos irányban nagyon is eltérnek feltevésünktől. Legelőször a hőmérséklet kell figyelembe vennünk, mely 6000 abszolút fokot tenne. Ez az érték a Nap sugárzásából ugyan elég biztosan van meghatározva, de ez csak annyit jelent, hogy a Nap *sugárzása* olyan, mint az úgynevezett fekete testé, a melynek hőmérséklete 6000 fok. De az is lehet, hogy a Nap sugárzási képessége kisebb és valódi hőmérséklete annál nagyobb. Ennél még nagyobb jelentőségű a sugárzás gyengülése a Nap légkörében a visszaverődés és elnyelés által, mely abban nyilvánul, hogy a napkorong fénye a közepétől a széléig egészen a felére csökken.

Ezek a körülmények arra készítetnek bennünket, hogy a Nap felületének hőmérsékét inkább 10,000 fokra becsüljük. Vizsgáljuk meg tehát, mennyire változnak számításunk eredményei, ha nagyobb hőmérséklet veszünk alapul. Már első tekintetre látjuk, hogy az a magasság, melylyel emelkedni kell, hogy a nyomás és sűrűség 10-szer kisebb legyen, éppen az abszolút hőmérséklet arányában nagyobbodik, mert minden réteg vastagsága hőmérsékletének arányában változik, míg súlya ugyanaz marad. Ily módon, ha 6000 fok mellett 213 km-rel kell emelkednünk, 10,000 fok mellett 355 km-re, 20,000 fok mellett 710 km-re kellene emelkedni. Ebből az egyszerű viszonyból az is azonnal kiviláglik, hogy a nyomás és a sűrűség gradiense, melyet egy kilométernél számításba vettünk, nagyobb hőmérsékkel egyszerű arányban kisebbedik. A levezetésekben pedig kitűnik, hogy a gradiens kisebbedésével a kritikus sűrűség megint ugyanebben az arányban nagyobbodik. Ekképpen 10,000 hőfok mellett a kritikus sűrűség 1.57, 0.94 helyett.

E különbség nem oly nagy, hogy következtetéseinket megzavarná.

Most még azt kell megvizsgáljunk, vajjon az első feltevésünk nem ingatja-e meg számításunknak eredményét: a kritikus sűrűség értékét, a melyet a következő érveléseknek alapjául fogunk venni. Abból a feltevésből indultunk ki, hogy a hidrogen légkörének állapota isothermális, de egyszersmind meg

is jegyeztük, hogy e feltevés nem felel meg a valóságnak, mert a Nap hőmérséke felfelé bizonyára csökken; ennél fogva a magasabb rétegek sűrűbbek, mintha az isothermalis állapotban volnának, a gradiens ez oknál fogva kisebbedik. Ezt a változást biztosan nem állapíthatjuk meg, mert a hőmérséklet menetét a Nap légkörében nem ismerjük; de határértéket állapíthatunk meg, a melyen túl a hőmérsék sülyedése nem mehet.

Ezt a határértéket az adiabatikus állapotnak viszonya szolgáltatja, melyben a hőmérsékletnek sülyedése felfelé a legnagyobb; mert ha ennél nagyobb volna, a légkör labilis állapotba kerülne, a mi ugyan helyenként előfordul, de a Nap nyugvó légkörében mindenütt és állandóan lehetetlen. Tudjuk, hogy az adiabatikus törvény szerint a hőmérséklet egy km emelkedéssel 19 fokkal sülyed: ennek következtében a sűrűség gradiense 0·0078. Ezt az értéket a fentebbi képletünkbe (4) helyezvén, a kritikus sűrűség 6000 fok mellett a légkör alján 1·3-et tesz ki.

Ennél fogva megállapíthatjuk, hogy a Nap légkörében 6000 fok mellett a kritikus sűrűség csak 0·94 és 1·3 között valósulhat meg. E számok különbsége oly kicsiny, hogy a hőmérsék változását egyáltalában számba sem kell vennünk.

Térjünk át a magasabb rétegek vizsgálatára a gázok elmélete nyomán, vizsgálatunk alapjául véve a photosphæra feletti sűrűséget 1·5, a mely ugyan a levezetendő következtetéseinknek kevésbé kedvez, azonban a 10,000 fok hőmérsékletnek felel meg, a melyet valószínűbbnek veszünk fel.

Határozzuk meg, milyen magasságban ritkul meg a hydrogen annyira, hogy egy cm^3 -re csak egy molekula esik, feltéve, hogy a légkör ilyen magasságra kiterjed és nem éri már el előbb physikai határát. Ezt a z -vel jelölt magasságot a következő képlet határozza meg, a melyben a jobboldalon levő szám a molekulák számát jelenti egy köbcentiméter gázban 0°C mellett és egy légnyomás alatt:

$$10^{\frac{z}{4397}} = 269 \times 10^{17} \cdot 1 \cdot 5,$$

ennek kiértékesítése által kapunk: $z = 4397$ [kilométer], ez a

magasság még messze elmarad a chromosphæra magassága alatt, a mely 5075 km.

Ha felteszszük, hogy a hydrogenium ily ritkulásig felérhet, megvizsgálhatjuk, mi lesz annak a molekulának sorsa, illetőleg előfordulnak-e még oly összeütközések, a milyenek a gázok tulajdonságait alkotják?

Hogy ezt megtudhassuk, vegyünk egy molekulát tekintetbe, a mely kinetikai sebességével éppen a radius irányában röppül felfelé, a mely sebesség 6000 fok mellett 8664 m-t tesz a másodperczben. Ha ez nem ütközik össze egy másik molekulával, akkor az csak 138 km-ig emelkedhetik és azután a vonzás következtében a Nap felületére visszaesik. Hogy a másik kérdést, vajjon a felemelkedő molekula összeütközik-e más molekulával, eldönthessük, ismernünk kell egy molekulának nagyságát, illetőleg átmetszetét. Ezt a következő megfontolással érhetjük el: A hydrogen molekulái szilárd, azaz megfagyott állapotokban éppen szorosan érintik egymást. Tömöttsége ebben az állapotában éppen ezerszer nagyobb, mint a hydrogen-gázé 0 fok mellett és egy légnyomás alatt. Ismervén 1 cm³-ben a hydrogen molekuláinak számát, kiszámíthatjuk azoknak átmetszetét. A molekulák száma 269×10^{17} , a miből egy molekula átmetszetének területe: 1114×10^{-19} cm².

Képzeljünk most a radius irányában felemelkedő molekula felett egy oszlopot, melynek alapja egy cm², magassága 138 km, a melynek minden köbcéntiméterében éppen egy molekula van. A felröpülő molekula csak az oszlopban levő molekulákkal találkozhatik és azokon túl nem emelkedhetik fel. Az oszlopban levő molekulák száma 13.800,000, azoknak átmetszete összesen $138 \times 10^5 \times 1114 \times 10^{-19} = 1.53 \times 10^{-8}$ cm². Minthogy egy cm² az egész átmetszet, melyben a molekula röpülhet, ez a szám egyszersmind azt a valószínűséget fejezi ki, melylyel a molekula felfelé emelkedésében egy másikkal összeütközhetik; vagyis azt jelenti, hogy 153 milliomszor befutott útjában csak egyszer fog a valószínűség szerint összeütközni. Átlagos számításunk ezzel az eredményével teljesen megegyezik a molekulák közepes szabad útja, mely BOLTZMANN képlete szerint 2000 millió km volna. Ez a valószínűség oly csekély, hogy már az

összeütközés lehetetlenségével egyértékű. Mindebből azt következtetjük, hogy a Nap hydrogen-léggöre, ha ugyan már nem előbb, legalább 4397 km magasságban [physikai tulajdonságai-val véget ér, a mennyiben az ott létező molekulák még csak 138 km-ig emelkedhetnek felfelé, ha a 6000 foknak megfelelő sebességgel, 8664 km-rel még bírnak. A felettök levő molekulák pedig, mivel összeütközések nem következnek be, a Nap felületére visszaesnek. De ezt a magasságot, a mely a Nap méreteihez igen csekély, még felette nagynak vettük, mert azt az isothermalis állapot feltevése alapján nyertük; valóságban sokkal kisebb ez a magasság, a mi abból is kiviláglik, hogy az adiabatus állapotban a léggör még 315 km-t sem érhetne el, mert ott a hőmérséknek már nullának kellene lennie. Ebből világos, hogy a chromosphæra tüskés alakú csúcsai mintegy légüres térbe nyulnak ki és azért a Napnak általános és álló léggörének világító részei nem lehetnek. Ezeket tehát csak mint a Nap belsejéből feltörő áramlatok maradványait, végeit lehet tekinteni, melyek csak heves mozgalmuk által emelkednek a valódi léggör színe fölé. Ezzel a felfogással igen természetesnek találjuk, miért végződik a chromosphæra ilyen tüskés alakú csúcsokban, sőt ebben az értelmezésben azoknak alakzatát szükségesnek találjuk. A feltörő áramlatok ugyanis, a mint ritkább rétegekbe kerülnek, a szélükön kiterjednek és azután légüres térbe kerülvén, szétszóródnak. Ez a szétszórási tünemény különös figyelemre és pontos fejtegetésre méltó, mert csak a Napon fordul elő és a földünkön kísérlet alá nem vehető. Képzeljünk tehát egy 6000 fokú hydrogen-golyót, a mely hirtelen a Nap felett levő üres térbe vettetik. A golyó átmérője 16 geocentrikus másodperc, nagysága tehát olyan, mint a földgömbé. Hasonló kísérletek szerint ily izzó hydrogennek pillanatnyi robbanással ki kellene terjednie. E tüneménynek lefolyása a Napon nem olyan egyszerű és rövid. A golyó felületén a gáz szintűgy robbanásszerű erővel az üres térbe távozik olyan gyorsasággal, a melylyel általában ilyen fokú hydrogen az üres térbe ömlik. Ezt a sebességet a molekulák kinetikai sebessége határozza meg a következő képlet szerint, melyben v a kiömlő sebességet.

V a molekulák kinetikai sebességét jelzi:

$$v\sqrt{3} = V.$$

A molekulák sebessége 6000 hőmérséklet mellett 8663·6 m a másodperczben; ennél fogva az ömlési sebesség 5002 m. Ugyanazzal a sebességgel fog a kiterjedési folyamat befelé terjedni, a mely nem más, mint a rugalmas hullám sebessége, ha annak képletéből kizárjuk azt a tényezőt, a mely a fajhók viszonyát fejezi ki állandó nyomás és állandó térfogat mellett, mert ez a jelen esetben nem jöhet tekintetbe. A robbanásszerű kiterjedés tehát nem egy pillanatban következik be az egész golyóban, hanem 5 km sebességgel haladván, a golyónak radiusát csak $19^m 2^s$ alatt futja be. Tehát ez a hydrogen-golyó, mely csak kis protuberantiát képvisel, a gáz szétszórása által csak $19^m 2^s$ után tűnik el egészen; nagyobb, 64" átmérőjű protuberantia már $1^h 16^m$ -t venne igénybe, míg egészen eltűnnek.

A befelé haladó kiterjedésnek ez a sebessége a hydrogen hőmérsékletétől függ, úgy mint a molekulák kinetikai sebessége, melyből annak $\sqrt{3}$ -mal való osztásából kaptuk. Ez is, úgy mint a kiterjedési sebesség, az absolut hőmérséklet négyzet-gyökével egyenesen arányos, a mi az üres térben kiterjedő protuberantia hőmérsékletének meghatározására szolgálhat, ha annak eltűnési idejét megfigyeljük.

Térjünk most vissza a molekulákhoz, melyek a gáztömeg felületéről az üres térbe szóródnak. Kezdő sebességük megegyezik az üres térbe való ömlésnek sebességével, a mely $\sqrt{3}$ -szor kisebb, mint a molekulák sebessége, mert a molekulák eleinte nem mozognak mind a kiterjedési irányban. De azok a molekulák, melyek más irányban mozognak, azonnal az összeütközésük folytán a kiterjedési irányba terelődnek. Ez a folyamat oly gyorsan történik, hogy HIRN¹ vizsgálatainak eredménye szerint már egy gazometer csövében teljesen végbemegy. Az összes molekulák kinetikai sebességükkel párhuzamosan, a gömb radiusának iránya mentén az üres térbe sietnek s mivel így az

¹ HIRN: La cinétique moderne et la dynamisme de l'avenir, p. 55.

egész kinetikai mozgás tömegmozgássá változott át, a gáz hőmérséke nullára csökken és a molekulák változatlan sebességükkel tovább haladnak. Ámbár a gáz hőmérséke nulla, annak térfogata nem nagyobbodott végtelenül; sűrűsége nem nulla, hanem csak bizonyos értékre süllyed és azon meg is marad. Ezt a végtetes értéket igen egyszerű módon határozhatjuk meg. Ha egy külső rétegnek vastagságát m -mel jelöljük, mialatt a molekulák befelé való szétoszlása ezen a vastagságon áthalad, a külső felületen elvált molekulák kinetikai sebességükkel $m\sqrt{3}$ útát tesznek meg; az egész kiterjedt rétegnek vastagsága tehát $m(1+\sqrt{3})$ lett; vagyis sűrűsége az eredeti sűrűségnek 0.366 részére süllyedt. Ez a sűrűség azután változatlan megmarad, ha a molekulák szétoszlása sík felületről történik.

Ezek az elméletileg levezetett mozgások lényegükön érvényesülnek a protuberantiákban is, melyeket izzó hydrogen-tömegek-ként kell tekintenünk, a mint a Nap légköre felett levő, aránylag üres térbe szétszóródnak. De e mozgások a Napnak vonzó ereje által módosulnak és más alakot öltenek az esetben, ha nem gömbből, hanem sugáralakú hydrogen-áramból indulnak ki és nem absolut üres térbe ömlenek szét.

Ezeket a tüneteményeket úgy értelmezhetjük, hogy a chromospherában a Nap egész felületén az ő belsejéből sűrűen feltörő convectió (elszállító) áramoknak végső csúcsait látjuk, melyek között a lehült gázak leszállanak. Ez áramok sebességének sokkal nagyobbnak kell lennie, mint a gáz feloszlásának sebessége, ugyanis 5 km, hogy a felületen felül felemelkedhessenek.

A feltöréssel együtt járó feloszlás leginkább a csúcsot emésztí, a minek folytán a csúcsok kihegyessednek. A tuskés lángok alapjának a hosszúságukhoz való viszonya meghatározza, hogy a feltörő áram sebességének a feloszlás terjedésének sebességénél hányszor kell nagyobbnak lennie.

Ilyen heves convectió áramokat a Napnak különféle theoriái szerint is el kell fogadnunk, mert azok nélkül a Napnak állandóan nagy sugárzása lehetetlen volna. A chromospherának egyedül álló, tuskés alakzata és a granulatiónak éppen oly sajátosságos és változékony tüneteményei ezt megerősítik és egy-szersmind megadják az áramok méreteit.

Az eddig kimutatott törvények és viszonyok szerint tehát a chromosphæra felett üres tér van és ebbe az üres térbe emelkednek fel helyenkint és időnkint a Nap mélyéből feltörő protuberantiák, még pedig oly sebességgel, hogy nagy tömegük miatt a kiterjedésre és szétszóródásra nincsen elegendő idő: a leghevesebb kitörések esetében sebességük az 500 km-t is eléri és e sebességgel felszállva oly magasságot érnek el, mely a Nap radiusának háromnegyedrészét is felülmulja. Könnyen megérthetjük, hogy az olyan óriási magasságra feltörő protuberantiák a Napnak nagyobb mélységéből keletkeznek és azért 6000-nél nagyobb hőfokot kell nekik tulajdonítanunk; mind a mellett, mégis a hydrogen nem tud oly gyorsan széteszlani, mint a milyen gyorsan a tömeg a magasba érkezik. Ez esetben is azután az említett szétszórási folyamat játszódik le, a mely heves kitörésekkor néhány perc alatt megy végbe; a 6000 fokot meg nem haladó protuberantiákban pedig 1—2 óráig is eltarthat, mialatt a lehült gázok a világűrbe áramlanak és a korona sugarainak a képét adják.

A mint a chromosphærának látható tüskés alakja ezt a magyarázatot megerősíti, szintúgy a protuberantiáknak igen sajátos, figyelemreméltó szerkezete azoknak kiáramlási természetét bizonyítja. A protuberantiák ugyanis rendszeren csaknem merőlegesen álló sugarakból, oszlopokból, hosszú szalagokból és finom szálakból állanak, melyek a megfigyelő előtt oldalról nézve sűrű pamattá vannak egyesülve. Ezekben természetesen a feltörő áramokat ismerjük fel, a melyek helyükön napokig állani látszanak azért, mert midőn fent széteszölnek és eltűnnek, láthatatlan árammá változnak, alulról folytonosan felfelé törnek, mozgásukban megmaradnak és csak kis részleteikben változnak lassanként.

E rendszer szerkezetű protuberantiákon kívül vannak azután más szerkezetűek is, mint felhős, ködös tömegek, olyanok, mint az altocumuli és fractocumuli felhőknek foszladékai és a Nappal lazán vagy semmiképpen sem függnek össze, a honnan új agyagot merithetnének. Ily elszakított protuberantiákat is még megmagyarázhatunk; de komoly nehézséget okoznak azok, a melyek így elválasztva, változatlanul hosszabb ideig láthatók,

mint az, a mi elméletünk szerint lehetséges. Ily tünemények igen közönségesek és általánosak: naponként megfigyelhetők, ha a Naptól elvált darabokat hosszabb ideig észlelünk. Hogy azonban ezeknek nagy jelentőségét megmutassam és következtetéseimnek szilárd alapot biztosítsak, oly eseteket kell idéznem, a melyekben ez a tünemény jellemző, pragnans kifejezésre jut.

1891 augusztus 19.-én $+27^\circ$ heliographiai szélességében, az ugyanott látható napfolt felett nagy protuberantiát észleltem, mely $70''$, vagyis $50,750$ km magasságban lebegett a Nap felülete felett; $50,750$ km magasságig nem volt semmi; csak azután kezdődött a protuberantia és egész $144''$ -ig, vagy $104,000$ km-ig ért fel; a Naptól tehát nagy távolság választotta el, nem volt vele összeköttetésben. Ezeket a méreteket 9 óra 20 perczkor délelőtt állapítottam meg. Éppen két órával később, 11 óra 20 perczkor megint vizsgálat alá vettem a protuberantiát és a Nap felülete és a protuberantia alsó része közt megint pontosan $70''$ távolságot és egész a csúcsáig $144''$ -t mértem meg: ugyanazt, mint az előbbi mérésben.

Alakja és nagysága még egészen ugyanaz volt, csekély jelentéktelen változáson kívül. Délután 3 óra 10 perczkor, tehát négy óra mulva ismét megfigyeltem: lebegési magasságát most $68''$ -nak mértem, $2''$ -cel kevesebbnek, a mi a Napnak forgása következtében könnyen is érthető; az egésznek magasságát pedig $138''$ -nek találtam, tehát $6''$ -cel kevesebbnek. Alakja ugyan néhány kiágazással változott, de vázlata és nagysága még ugyanaz volt. Szélessége, illetőleg vastagsága mindig ugyanaz maradt; a rajzról becsülve $37''$ vagyis $26,800$ km lehetett.

Ha ez a protuberantia, 6000 hőmérséklet mellett, 5 km sebességgel az üres térben széteszlott volna, már 1 óra 19 percz után egészen el kellett volna tűnnie, de még 6 óra mulva is megvolt. Ennél még nagyobb jelentőségű az a tény, hogy nagysága, terjedelme semmivel sem csökkent: semmiképpen sem terjedt szét, nem oszlott fel. E tüneménynek harmadik feltűnő mozzanata, hogy az egész tömeg sem nem süllyedt, sem nem emelkedett, hanem az egész idő alatt mozdulatlanul és változatlanul 6 órahosszat lebegett; ellenben az üres térben az

esés által már 9 percz után a Nap felületére érkezett volna. Később már nem észleltem meg; a következő napon a római észlelők már nem látták; augusztus 21.-én Kalocsán sem láttam.

Egy másik észlelésem a hosszú időköz miatt különös fontossággal bír.

1892 augusztus 6.-án 7 óra 29 perczkor reggel 133° positio felett egy protuberantiát észleltem, mely $50''$ magasan lebegett és $101''$ -ig felért. Ugyanazon a napon este 5 óra 16 perczkor $52''$ magasban úszott és $103''$ magasságig ért. Alakja ugyan tetemesen megváltozott, de vázlatában a tárgy azonosságát még fel lehetett ismerni. Ez a protuberantia tehát 10 óra hosszat lebegett és magasságának méretei fent és lent csak $2''$ -cel különböztek, miből azt is következtethetjük, hogy reggel még a Nap szélén túl volt, este már ugyanannyival innen és hogy helyzete körülbelül délben lépte át a Napnak a szélét. Különösen érdekes, hogy már augusztus 5.-én 7 órakor reggel, tehát 29 órával előbb is észleltem, mikor 16° heliographiai fokkal még távol volt a Nap szélétől a túlsó oldalán, a miért a magasságnak $38''$ -cel kisebbnek kellett látszania. Lebegését akkor $30''$ -nek találtam, magasságát $60''$ -nek. Ha e méreteknél $38''$ igazítást veszünk a Napnak forgása miatt, akkor valódi lebegési magasságnak $68''$, az egész magasságának $100''$ -et kapunk; tehát pontosan megint ugyanazokat az adatokat kaptam, mint augusztus 6.-án, mikor a Nap szélén áthaladt. Továbbá ugyanazt a protuberantiát augusztus 7.-én reggel 7 órakor Rómában magasan lebegni látták, este 7 órakor pedig Kalocsán, 31 órával a Nap szélén való átvonulása után észleltem és megmértem; $25''$ -nyi magasságban lebegett és $62''$ -ig ért fel; de ha ezeket a méreteket megint a Napnak forgása miatt $42''$ -cel javítjuk, valódi lebegési magasságnak $68''$ -et kapunk, egész magasságának $105''$ -et. Ez a protuberantia tehát $36,000$ — $43,000$ km-rel elválasztva a Naptól, 60 óráig, 100 — $105''$ valódi magassággal lebegett és ez idő alatt terjedelme sem változott tetemesen. Ezt a tüneményt és sok más hasonlót csak úgy érthetjük meg, ha a protuberantia egy vele egyenlő sűrűségi közegben lebegett, a mely ellennyomása által annak széteszla-

sát, kiterjedését megakadályozta, felnyomása által esését is gátolta. Ámde ilyen álló gázközeg, a mely mint valamely légkör a Napot körülveszi, az előbbi fejtegetések szerint lehetetlenség. Számításunk alapjai biztosak: a Nap nehézségi ereje kétségen felül áll; a hydrogen összenyomhatósága kísérlet és elmélet alapján be van bizonyítva, leginkább nagy ritkulási esetében áll fenn. Az a körülmény, hogy a hydrogen nem egészen tiszta, hanem heliummal és calciummal van vegyülve, számításunk eredményén alig változtat valamit, inkább megerősíti. E lehetetlennek látszó esetnek megoldására nincs más mód, mint hogy *elfogadjuk oly erőnek a létezését, a mely a Nap vonzó erejével ellentétes hatású és azt gyengíti*: ilyen a Napnak felületéről eredő visszataszító erő, a mely a gázburkot a nehézségi erő ellenében fentartja, nyomását felfogja. Nem volna elég csak olyan erőt felvenni, mely a protuberantiát éppen a magasban tartja, a milyen a talán valamely ráható elektromosságnak taszító ereje lenne, mert ez a kiterjedést nem gátolná. Azzal sem érnők be, ha a protuberantiának oly csekély hőmérsékletet tulajdonítanánk, hogy annak feszítő ereje és kiterjedése elenyésző volna; mert ez megint nem akadályozná meg a protuberantia esését. Kell, hogy a taszító erő az egész légkörre hasson és így magas légkört teremtsen, hogy abban a protuberantia, ugyane taszító erő által fentartva, kiterjedés nélkül lebegessen.

Mindebben, a mint látszik, éppen azt bizonyítottam be, a mit tárgyalásomban megczáfolni szándékoztam, hogy a Napot mégis olyan magas légkör borítja, mely egész 100,000 km-ig is felér. De nem egészen úgy van a dolog. A régi nézet, a mely csak látszaton alapul, éppen nem volt bebizonyítva, kiváltképpen a benne rejlő physikai lehetetlenség ellenében.

A magasan lebegő protuberantiák nemesak magas légkört árulnak el, hanem meggyőző bizonyítékot is nyújtanak, hogy kell valamelyes visszataszító erőnek léteznie. Az a bizonyításon nem változtat semmit, hogy annak minőségét és forrását nem tudjuk kimutatni. Különböen visszataszító erőről már ezelőtt is hallottunk: ezt a fénysugár nyomásának tulajdonítják; de ez az elmélet és a kísérletek szerint csak pornemű részecskékre

szorítkozik, gázakra hatástalan. A gáznemű tömegre ható erő tehát még további kutatás tárgya.

A nagy magasságba felérő gázburok elfogadásával a protuberantiák eddig adott magyarázata alig változik valamiben: az üres tér helyébe csak igen ritkult közeget teszünk. Az eddig ismeretlen taszító erőnek a nagyságát és a minőségét akképpen lehet meghatározni, annak méreteit megállapítani, hogy a kifejtt felfogásunkkal megegyeztethető legyen.

Egészen természetes és igen valószínű, hogy a kérdéses visszataszító erő csak a gáznak bizonyos ritkulásánál érvényesül, a mint a fénynek a nyomása is csak a pornak bizonyos finomsága mellett hat.

Mivel, mint a fentebbiekben kimutattam, a gáznak a ritkulása már a chromosphærában éri el határát, ennek csúcsai és a kiáramló protuberantiák is ebbe a ritkult gázba terjednek és abban lényegükben úgy oszlanak és áramlanak szét, mintha a térség üres volna. A befelé haladó kiterjedésnek sebessége úgy is független a környező tér minőségétől.

Érdekes erre nézve éppen a protuberantiáknak feltűnő jelenségeit szemügyre venni: az álló, lebegő tömegek viselkedését és viszonyát és az iszonyú sebességgel előtörő protuberantiákat. A lebegő protuberantiák jobbadán felhős szerkezetűek, aránylag lassan, néhány kilométeres sebességgel emelkednek felfelé, míg a Nappal összekötő szálak egészen eltűnnek. Sok évi észleléseimből kimutatható, hogy ezek ugyan 200,000 km-en felül nem emelkednek: a legmagasabb az észleltek között az volt, a melyet 1892 december 28.-án észleltem. Ez 11 óra 45 perczkor délelőtt már 124,000 km magasan lebegett és 3 óra 30 percz alatt alsó részével még 133,000 km-ig emelkedett; legfelsőbb részével pedig egészen 264", vagyis 191,000 km-ig ért. Úgy látszik, hogy ezen a magasságon túl a gázburok is véget ér, vagy már nem tud protuberantiát fentartani. A kitörő protuberantiák ellenben néhány száz kilométer sebességgel még 500,000 km-en túl is emelkednek és ott éppen oly meglepő gyorsasággal, néhány percz alatt összezsugorodnak és eltűnnek. Ilyen volt az 1893 szeptember 19.-én feltörő protuberantia, mely 212 km sebességgel egész 360,000 km-ig emelkedett és

ott három percz alatt eltűnt. Jellemző továbbá, hogy az ilyen sebességgel felszálló magas protuberantiákban esést sohasem lehet észlelni; ezek mindig a magasban tűnnek el: a magasban lebegők sem esnek le, hanem lassan meggyengülnek és kívülről befelé megszünnnek.

Ezt a különbséget abból értjük meg, hogy a kitörési protuberantiák nagyobb hőmérsékletök miatt igen gyorsan szétoszolnak és eltűnnek, mielőtt még esések bekövetkezhetnék. Különbözik az alacsonyabb protuberantiákban, úgy 60"-en alul, az esés jelenségét gyakran lehet észlelni, főképpen kevéssel a chromosphæra felett. E tünetmények változatosságából általában azt kell következtetnünk, hogy az egyes protuberantiák különböző mélységből és különféle sűrűséggel és hőmérsékkel és igen különböző sebességgel emelkedhetnek.

A taszító erő minőségéről feltehetjük, hogy úgy mint a nehézségi erő, a távolság négyzetével csökken és így minden magasságban ugyanabban a viszonyban áll hozzá. Hatása tehát olyan, mintha a nehézségi erő állandója bizonyos tényezővel, melyet n -nel fogok jelölni, kisebb volna.

Ennek a nagyságáról és az abból következő ritkulási viszonyokról a következő számítás fog némi tájékozást adni. Vizsgáljuk meg, milyen értékűnek kell lennie az n tényezőnek, hogy 213,000 km magasságban a sűrűség még olyan legyen, hogy abban protuberantia lebegessen.

Első képletünkben (I) indulunk ki, a mely a nyomást és a sűrűséget a magasban határozza meg; ez megfelelőbb alakban írva a következő:

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{SG(h_1 - h_2)},$$

ebben e a természetes logaritmusok alapja. Ha ebbe a feltett magasságot beiktatjuk, lesz:

$$10^{1000} = e^{SG 213000};$$

a kitevőket mind a két oldalon elosztván n -nel, kapunk:

$$10^{\frac{1000}{n}} = e^{\frac{SG}{n}} 213000,$$

a hol az eredeti G helyén $\frac{G}{n}$ áll.

Ha most például azt akarjuk, hogy fent, 213,000 km magasságban a sűrűség egy billiomszor kisebb legyen, mint a photosphæra felületén, tehát

$$10^{\frac{1000}{n}} = 10^{12},$$

akkor $n = 83$; azaz a nehézségnek 83-szor kisebbnek kell lennie az eredetnél. Ez a nagy szám még minimalis érték, mert a használt képletet isothermalis állapot feltevése alapján állítottuk fel: már pedig a Napnak légköre felfelé hidegebb, sűrűsége gyorsabban csökken és azért az eredeti vonzást még nagyobb mértékben kellene gyöngíteni, hogy a feltett magasságban a kívánt sűrűséget, 10^{-12} megkapjuk. Megjegyzendő továbbá, hogy a ritkulási tényező 10^{-12} csak viszonyszám, a mely azt fejezi ki, hogy hányszor kisebb a sűrűség fent, mint lent, hol a taszító erő kezd szerepelni; ennek hatása pedig már igen csekély sűrűség mellett érvényre jut. Az abszolút sűrűség tehát ezért még sokkal kisebb lesz, úgy hogy a visszataszító erőnek már csaknem az egész vonzó erőnek hatását meg kellene semmisítenie.

Az előbbi számításaimban kifejtett eredményeket az észlelésre való tekintetből világitottam meg. Megmutattam, mennyire egyeztethetők meg a Nap kitörési tűneményei légkörének állapotával. De a kitörési elmélet sok és többé-kevésbé súlyos nehézségekkel jár, melyek a physikusokat arra indították, hogy a kitöréseket általában tagadják, az észlelt mozgásokat csak látzólagosoknak tartásák, azokban csak optikai vagy egyéb physikai tűneményeknek, változásoknak terjedését lássák. Ezekkel a különféle elméletekkel és nézetekkel szemben meg kell jegyezni, hogy az előre bocsátott érvelések és nevezetesen az utolsó következtetés, hogy kell lennie a Naptól eredő oly visszataszító erőnek, mely a chromosphæránál sokkal magasabb, ritka légkört létesít, a kitörések valóságától, melyet eddig feltettem, egészen független,

és minden más elmélet mellett is fennáll. Ez a légkör okvetlen szükséges, mert minden részletes tárgyalás nélkül is azonnal világos, hogy absolut üres térben semmi tünemény sem lehetséges, azaz hogy ott sem normális, sem anomális sugártörés, sem physikai felvillanás, sem vegybontás, sőt még elektromos mozgás és villogás sem lehet.

A physikusokat a kitörések valóságának tagadására főképpen a bámulatos, hihetetlen nagy sebességek indították, a melyeket úgy a protuberantiák emelkedésében, mint azoknak mozgásában a látó irányban észlelünk. A rengeteg gyorsaságok magukban véve nem okoznának nehézséget; ilyenekkel a csillagos égen máshol is találkozunk. De igazán nehézséget okoz azok keletkezése a Napon és a mozgások részletes lefolyása. Ha ugyanis a Napot oly gázgömbnek tartjuk, melynek tömege a gázak teljes mozgékony-ságával bir, nem érthetjük meg, hogyan fejlődhetik abban csak helyenkint oly nagy erő, a mely a gáztömeget mintegy sugárban kiüti; de ebből inkább csak azt a következtetést vonjuk le, hogy a Napot nem kell és nem is lehet egészében mozgékony gáztömegnek tartani. Eltekintve attól, hogy belseje még szilárd is lehet, némelyek azt tartják, hogy a Nap mint óriási gázgömb is belsejében, a nagy nyomás és hőség miatt, oly merev mint a fém; e szerint a gázoknak különben folyékony természetére nem lehet a kitörések lehetetlenségét alapítani. Ehhez csatlakozik a további ellenvetés, hogy a protuberantia sebessége nem lehet nagyobb a hydrogen-gáznak kiáramlási sebességénél az üres térbe; ez pedig csak a hőmérséklettől függ és hogy 300 km. sebességet adjon: 5 millió hőfokot tételezne fel; olyant pedig a protuberantiának nem tulajdoníthatunk.

Ez csakugyan igaz; de a protuberantia kitörését nem kell hydrodynamikai kiáramlásnak tekinteni: a Nap belsejében elképzelhetünk oly erőket, melyek a már megsűrített hydrogennel, hosszan tartó hatás által, nagyobb mozgást közölhetnek, mint a molekulák kinetikai sebessége.

Igen nagy mélységből ugyan nem keletkezhhetnek a protuberantiák, mert a sűrűség és a hőség a mélységgel rohamosan növekedik és a protuberantia, éppen nagy sebessége folytán, ugyanazzal a sűrűséggel és hőmérséklettel érkezik a felületre, melylyel

eredő helyén birt. E kérdésben némi tájékozást nyerünk, ha megfontoljuk, hogy a sugárzó felület alatt az állapot labilisnek és az adiabatikus viszonyt mint határosat tekinthetjük. A légkör adiabatikus állapotában a sűrűség összefüggését a hőmérséklettel a következő egyenlet adja

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{2.44}$$

a melyben s_1 a sűrűséget, T_1 az abszolút hőmérsékletet az egyik rétegben, például a photospharán, s_2 és T_2 egy másik mélyebb rétegben jelenti. Ha mélységnek 1000 km.-t veszünk, akkor a hőmérséklet ott, mivel minden kilométerrel 19 fokkal emelkedik, 25000 lesz; a vele járó sűrűség a képlet szerint 33-szorosa a Nap felületén levő sűrűségnek. De valóságban, a *labilis* állapotban, a hőmérsékletnek ennél nagyobbnak kell lennie, a sűrűségnek pedig éppen azért kisebbnek. Abból, hogy az említett hőmérséklet már a legnagyobbnak tekinthető, melyet protuberantiáknak tulajdoníthatunk, következik, hogy azoknak keletkezési helye nem lehet sokkal mélyebb mint 1000 km.

Sokkal komolyabb ellenvetés tehető a kitérő protuberantiák emelkedésének menetéből, amelynek phasisai éppen nem felelnek meg a nehézség ellen felvetett test útjának. Sokszor a gyorsan feltörő protuberantiák felszállását folytonos méréssel követtem; úgyszólván sohasem találtam oly menetet, mint az esési törvények követelik; a magasságok szeszélyesen változnak; többnyire ugyan folytonosan növekednek, de közben néha apadás is észrevehető; de ha a tüneményt alaposan kutatjuk, mégis azt találjuk, hogy a felemelkedés monete nem áll oly világos és ríktó ellentétben a szabad esés törvényeivel, mint olykor a nyert számok rendetlenségéből látszik. Így 1900 június 1.-én egy hevesen kitérő protuberantia emelkedési menetét folytonos méréssel követve: az egymásután következő pár percnyi időközökben következő sebességeket határoztam meg: 546, 231, 371, 187, 471, 423, 138; rendetlen számsort kaptam.¹ De ha az időközöket abscissára osztjuk fel, a hozzátartozó magasságokat

¹ Memorie della società degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXIX. p. 54.

mint ordinátákat rajzoljuk be és azokat az időközöknek megfelelő eséssel redukáljuk, oly pontsört nyerünk, mely az egyenes vonaltól csak annyiban tér el, a mennyit az észlelések hibájának lehet tartani. Az egyes meghatározások ugyanis nem igen pontosak, mert két egyszeres appulsuson alapulnak. Különben meg kell engedni, hogy az észlelt mozgások általában nem oly szabályosak, hogy abból a kitörések valóságát meg lehetne erősíteni; de éppen úgy nem lehet e miatt tagadni a szabálytalanul emelkedő tömegek mozgásának valódiságát sem. Az eltéréseket annak lehet betudni, hogy több physikai, vagy vegytani tünetmény jár együtt a kitöréssel, nevezetesen a feloszlás, eltűnés különfélesége, a közeg ellenállása és annak áramai, melyek a mozgás tünetét módosítják. Ezek tekintetében legnagyobb figyelemre méltó PRINGSHEIM tanár nézete,¹ mely szerint az elektromosság hatásából a legnagyobb gyorsaságokat, éppúgy mint a mozgások szeszélyes változásait is, egyszerűen meg lehet érteni. A tanár átlagos számítással megmutatja, hogy már 1250 Volt különbség a Napon elegendő volna, hogy rendes töltésű hydrogen-atomnak az üres térben, ha csak 1 km.-nyi úton hat, oly sebességet kölcsönözzön, mely a protuberantiákban észlelt legnagyobb sebességeket is felülmulná, e mellett a mozgások szeszélyes változását is legegyszerűbben magyarázná meg. Efféle potenciál különbségeket zivataros időben nem ritkán a földön is észlelünk és azoknak hirtelen változása és keletkezése ismeretes. Miután újabb időben az is bebizonyult, hogy a Napon is található elektromos állapot, annak rendkívüli fokozódása bizonyos helyen nem is valószínűtlen. Ezzel a magyarázattal az anyagnak mozgása meg volna erősítve és midőn annak származtatása a Nap mélyéből elmaradna, minden ellenvetés is, nevezetesen a nehézség, melyet a bámulatos szeszélyes mozgások értelmezése okoz, el volna hártva.

Nem mondhatjuk oly szerencésnek másoknak a nézetét, akik a nagy anyagi mozgások teljes tagadásával, vegytani vagy physikai tünetmények merő terjedéséből akarták a bámulatos mozgásokat mint látszólagosakat megmagyarázni. Ha ezeket az elmé-

¹ PRINGSHEIM. Physik der Sonne. 1910. p. 220.

leteket a tényekre, az észlelések részleteire alkalmazzuk, azt találjuk, hogy nemcsak szintén nehézségekkel járnak, de éppen lehetlenségre vezetnek. A vegytani és physikai folyamatok terjedési sebessége azok természetében már meg van határozva és amennyiben a hőmérsékletet ismerjük, számítás alá is esik. A vegytani fellobbanásnak sebessége, még akkor is, ha a legnagyobb hőségnek fejlesztésével jár, csak néhány kilométert érhet el; a sűrítési hullám haladása a hydrogenben 6000 fok mellett 5846 méter és ennél nagyobb nem lehet; ez pedig még messzealul marad a protuberantiáknak felemelkedési sebességén. Általában mondhatjuk, hogy mindazok a tűnemények, melyek a molekulák mozgásán alapulnak, absolute gyorsabban nem terjedhetnek, mint a molekulák kinetikai sebessége, amely 6000 fok mellett hydrogenben 8664 m. Nagyobb hőmérsékletre nem hívathozhatnak, mert ez elméletek védői a kitéréseket tagadják; az álló légkörben pedig nagyobb hőmérsékletet feltenni nem lehet.

Az újabb elméletek közt azt, amely az anomalis dispersio által akarja megmagyarázni a protuberantiákban észlelt tűneményeket, a physikusok a legnagyobb lelkesedéssel fogadták, mint olyant, mely e dologban minden nehézséget egy csapással megszüntet. Ha az anomalis törésnek, mint közreműködő forrásnak, csak a chromosphæranak és a protuberantiáknak fényét akarnák tulajdonítani, az ellen az észlelés részéről nem volna kifogás; a kitérés elmélet a protuberantia feloszlásában a nagy gradiensnek eredetét is megjelölné. De már ez is a protuberantiának a magasba terjedő oszlopos, szálás szerkezetével szemben alig elfogható; mert a gradiensnek olykor 100000 km. magasságon át összefüggően kellene terjednie, mialatt, főképpen a magasságban mindig merőlegesen áll a Nap felületére: ekképpen a sűrűség lefelé folytonos növekedése révén a protuberantia alján elfogadhatatlan, lehetetlen értéket érne el. Ha tehát a laboratoriumi kísérletekben, amint állítják, a protuberantiához hasonló alakokat láttak, azt a tűneményt, melyet néhány centiméterre terjedő gradiens varázsolt elé, még nem lehet a Napra átvinni, ahol annak 100000 km.-re kellene terjednie. De az is gondolkodóba ejti a kutatót, hogy egy 500,000 km. magas protuberantia csü-

csásról anomális törés által a photosphæra fénye 52 fok eltéréssel irányulna az észlelő szemébe. Mesterséges berendezéseket, melyek azt a Napon eszközölnék, a komoly tudomány nem fogadhat el.

Egyéb ellenvetésekkel nem kell foglalkoznunk, mert az új elmélet védői nem elégedtek meg a chromosphæra és a protuberantiák fényének magyarázatával, hanem a protuberantiák emelkedését is mint merő látszatot, egy sűrűségi gradiensnek a magasba való terjedéséből és az ezzel járó anomális törésből akarták értelmezni, úgy hogy a nyugvó hydrogen volna a gyorsan terjedő tűneménynek hordozója. Hogy ez a felfogás egyszerűségében tekintve physikai lehetetlenségbe ütközik, azt az eszmének terjesztői is azonnal belátták. A sűrűségi változás ugyanis, úgy mint azt hullám alakjában kell képzelnünk, nagyobb sebességgel nem terjedhet, mint amely a gáz hőmérsékének megfelelő; ez pedig a hydrogenben 6000° mellett éppen 5 km. és nagyobb nem lehet. Ez a sebesség pedig messze marad a protuberantiák emelkedési sebessége alatt. Azért az új eszme megmentése végett megint a gradiensnek csak látszólagos terjedéséhez folyamodtak, a mely különös viszonyok folytán, mintegy mesterséges berendezések módjára, létesül és határtalan nagy sebességeket varázsolhatna elő. Főlöleges ily feltevések beható vizsgálatába bocsátkozni; különös rendkívüli viszonyokat a mindennapi tűnemények értelmezésébe vonni nem lehet. Ebből világos, hogy éppen az észlelt nagy mozgásokat az anomális dispersióval megmagyarázni nem lehet.

De még a protuberantia fényének eredetét sem lehet kizárólagosan az anomális törésből levezetni. Ezt a véleményt is megczáfolja a részletes észlelés. Ha ugyanis a Nap korongját a spektroskoppal megvizsgáljuk napfoltok felett és többnyire a környező forrongó téren, ahol a fáklyák terjeszkednek, nem nagyon ritkán oly helyre találunk, ahol a különben sötét *C* vonal fénnel van kitöltve, olykor oly világosan, hogy a határoló photosphæra fényét is felülmulja. Ha oly esetben a spektroskop rését kissé kinyitom és a spektrum vakító világát alkalmas sötét üveggel meggyengitem anynyira, hogy a szem képes legyen fénykülömbözeteket észrevenni, a rés látóterében fényes alakot látok.

A tűnemény értelmezése nem lehet kétséges. Ez a fényes alak nem egyéb, mint egy kitörő protuberantiának vetülete a Nap korongjára, mely rendkívüli fényével a photosphærát is, a hydrogen sajátos fényében, túlsugározza. A kitörési elmélet szerint ez a Nap belsejéből veszi eredetét és természetesen nagyobb hőmérsékletet és fényt tulajdoníthatunk neki, mint a photosphærának. A spektrálvonalak elmélete szerint az izzó gázoknak vonalai éppen oly világosak, mint az úgynevezett fekete testnek világa ugyanolyan hullámhosszúságban, ugyanakkora hőmérsék mellett. Ha tehát a protuberantia vetülete a photosphærára a *C* vonalban fényesebb, mint a photosphærának azt határoló spektruma, az a protuberantia nagyobb hőmérsékét bizonyítja.

Ezt az igen nagyjelentőségű tűneményt kiváló fényességben 1908 augusztus 5.-én észleltem.¹ Az akkor látható nagy napfoltot vizsgáltam meg, mely 18 foknyira keletre a Nap középonti meridiánjától $+11^{\circ}$.² heliographiai szélességben volt észlelhető: ennek egy része felett a spektroskopban a sötét *C* vonal egy részének élénk megvilágosítása tűnt fel.

A rés kiszélesítése után hosszúkás fényes felhőt láttam a rés látóterében és időmet az érdekes tűnemény észlelésére fordítva, szemléltem amint az félóra alatt nagyobbodott és fényesebb lett, míg $4^{\circ} 26''$ zónaidőben a legnagyobb *S* alakját elérte, de nem fért már egészen a rés terébe. Nagy terjedelmét átmenettel a résen mértem meg és $71''$ -nek találtam, ami a Nap felületén 5 fokot tesz, vagyis 60000 km-t. Ennek egy darabja elütő fényvel világított, melyet, összehasonlítva a photosphærának hozzá határos spektrumával, annak fényességénél négyszer nagyobbra becsültem.

Ily physiologiai becslés ugyan nagyon bizonytalan adat; ha valónak fogadjuk el és a hőmérsékletet is négyszer nagyobb-nak vesszük, mint a photosphæráét, 24000 fokot kell annak a protuberantiának tulajdonítanunk. Megjegyzendő, hogy ez a különben is nem valószínűtlen érték meglehetősen megegyezik az 1900 június 1.-én észlelt kitörési protuberantia hőmérsékle-

¹ Memorie della società degli spettroscopisti italiani. Vol. XXXVII. p. 181.

tével, melyet annak eltünési időközeiből számítottam ki és 30000 foknak találtam. Ily hőmérséklet a kitörési elmélet szerint magától értetődik, ha fontolóra vesszük, hogy adiabatikus állapottal számítva, ily hőmérsékletet már 1000 km. mélységben találunk.

Ez a mélység maximális értéket képvisel, mert a Nap állapotát a sugárzó felület alatt kétségkívül labilisnek kell vennünk, melyben a hőmérséklet lefelé gyorsabban növekedik, mint az adiabatikus törvény követeli.

Ennek alapján a Nap korongján látható protuberantiáknak nagyobb fényessége nemcsak megegyeztethető, megokolható a kitörési elmélettel, hanem annak bizonyítékát is alkotja, amennyiben azt a nagyobb fényességet alig származtathatjuk máshonnan, mint éppen a Nap belsejéből kitörés által. Ellenben ez a nagyobb fényesség a protuberantiák fényének általános magyarázatát az anomalis dispersióból teljesen megzáfolyja. Az anomalis sugártörés szerint ugyanis a protuberantia fénye nem volna más, mint a photosphærának világa, melynek azt a részét, mely a *C* vonalnak felel meg, rendkívüli törés által az észlelő szemébe téríti: ennél fogva az a spektrumban nagyobb nem lehet, mint a photosphærának fénye. Ennek a fényét a törés módja által sem lehet fokozni, mert a mértani optikának általános törvénye szerint semmiféle optikai berendezéssel nem lehet elérni azt, hogy valamely világos felület, legyen az törés vagy tükrözés által, fényesebbnek lássék mint közvetlenül nézve. A Nap korongján látott protuberantiának nagyobb fénye tehát nem lehet a photosphærának törött világa, hanem csak a hydrogennek saját fénye.

A mozgásoknak valóságára ellen súlyos érvet kovácsoltak még a látó-irányban észlelt rengeteg sebességekből, melyeket DOPPLER elve szerint a spektrálvonal eltolásából vezetünk le. Valóban ezek a mozgások igen csodálatosak, már csak azért is, mert a Napon horizontális (érintőleges) irányban értendők és oly nagyok, mint a közvetlenül látott emelkedési sebességek; ehhez járul még a minden képzeletet felülmúló szeszélyes változásuk, amely egyes eseteknek részleteiben nyilvánul. Meg kell engednünk, hogy ha ily esetekben a tűneményt más okokra lehet visszavezetni, az anyagi mozgás elkerülése kívánatos volna: más eset-

ben azonban DOPPLER elve szerint kell eljárjunk, mely különben is szükségképpen érvényesül, a mikor egy gyorsan felszálló protuberantia iránya a néző felé hajlik és így a látó-irányba eső összetevőt ad. Némely esetben az anomalis dispersiónak is lehet helye, de minden eltolást nem lehet abból megérteni: az eltolási tünetményeknek részletei nem tűrik azt.

Gyakran, lehetne mondani közönségesen, az eltolás oly módon történik, hogy a C vonalnak egy része, illetőleg a protuberantiának a résre eső képe, ki van emelve a C vonal rendes fekvéséből, úgy hogy üres tér választja el attól; olykor meg a C vonal helye teljesen üres, mialatt a protuberantia képe a résen fekszik. Igen meglepő a jelenet, mikor a protuberantia képét a résbe hozzuk, de a spektrumban a résen semmi sem látható, hanem kis távolságban tőle villámszerűen feltűnik a protuberantia fénye és tűzszikrákhoz hasonlóan ugrándozik. Ez az elég ritka tünetemény DOPPLER elve szerint értelmezve, alig hihető mozgásokat jelentene; de az anomalis dispersióból szintén semmi képpen sem érthető meg. Ez utóbbi ugyanis a laboratoriumi kísérletben, a mely ez elméletnek egyedüli alapja, mindig oly fényt ad, mely az illető fémvonallal folytonos összefüggésben van és éppen ott, ahol a törés a legnagyobb, legszorosabban simul a rendes spektrálvonalhoz; attól azután a spektrum kék és vörös vége felé, de mindig folytonosan terjed mint a fémvonalnak a kiszélesedése.

Ennek félbeszakítását, úgyhogy a fényes részlete el legyen választva a C vonaltól és ki legyen emelve, a laboratoriumban mesterségesen elő lehet állítani, de a Napon, a hol a terjedelmes és egynemű photosphæra a háttére, ily különös viszonyok el nem gondolhatók. Ily eltolások, éppen a legcsodálatosabb esetekben, mikor nagy magasságban és magányosan tűnnek fel, vagy czikkázva változnak, legegyszerűbben MICHELSON elmélete alapján érthetők meg, úgy, hogy a magasban emelkedő gáz közbelépése a látó irányba okozza az eltolást folytonosan,¹

¹ Astrophysical Journal. Vol. 13. p. 192.— Publication des Haynald Observatoriums Heft X, Protuberanzen in den Jahren 1891, 1892. p. 133.

az emelkedő gáznak egyenlőtlen határolása az ugrándoásokat idézi elő, mikor a képet a résen átvezetjük.

Az előadottakból következik, hogy a kitörési elméletet, minthogy lehetetlenségre nem vezet, még fenn lehet tartani az újabb elméletek ellenében, mert ezek a kitörések teljes kizárásával lehetetlenségekbe ütköznek; azért fenn is kell tartani, ámbar a Nap minden rejtélyét semmiképpen sem fejtettük meg vele. A feltett iszonyatos forrongások és kitörések közepette nagy probléma marad az elnyelő rétegnek magasztos nyugalma, melyben az éles spektrálvonalak a legpontosabb mérések alapján még 30 méter sebességeket sem árulnak el; mintha igaza volna A. BRESTER-nek, aki az ő igen elmés és kitünően kidolgozott vegytani elméletében a Napot úgy állítja elénk, mint amely mindenféle mozgást osztogat, ő maga pedig a közepén fenséges nyugalomban áll.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 január 22.-én tartott üléséből.)

EGY ARZELÀ-FÉLE TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ANNAK ALKALMAZÁSAI.

VERESS PÁL-tól.

I. ARZELÀ-nak szóbanforgó tétele a függvényoperatiók elméletében játszik nagy szerepet. Ennek az elméletnek alapjaira vonatkozólag utalok DIENES PÁL-nak nemrégben megjelent értekezésére,¹ a mely fölöslegessé teszi, hogy az alapfogalmakról részletesen szóljak. Teljesség kedvéért magát a függvényoperatiót definiálom oly módon, a mint azt a következőkben használni akarom:

Ha az E alaphalmazon értelmezett minden $(L)^2$ integrális függvényhez: $f(x)$, valamely meghatározott módon egy számérték: $F[f(x)]$ van rendelve, akkor az $F[f(x)]$ -et az $f(x)$ függvényoperációjának³ nevezzük.

Először csak olyan függvényoperációkkal foglalkoztak (VOLTERRA, ARZELÀ, HADAMARD, RIESZ, FRÉCHET és mások), melyek csak minden valamely meghatározott intervallumban folytonos függvényhez rendeltek egy számértéket; a függvényoperációnak nemfolytonos függvényekre felvett értékét először RIESZ F., utána FRÉCHET, GATEAUX, RADON és újabban DIENES vizsgálta. A tekintetbe jöhető függvények tulajdonságaira vonatkozó megállapodás az első tárgyalásban csak másodrendű kérdés, a lényeg-

¹ DIENES PÁL: Kísérlet a funkcionálszámítás rendszeres megalapozására. Math. és Természettudományi Értesítő, XXXIV. kötet, 1916. 154—194. és 656—692. l.

² LEBESGUE-féle értelemben.

³ Ezt az elnevezést használja RIESZ FRIGYES is, DIENES-nél: functionál, az irodalomban előforduló nevek: opération fonctionelle, fonction de ligne, Funktional-Operation.

ges az, hogy a variabilitási tartomány itt a *függvényeknek* egy meghatározott halmaza. E tartomány és a közönséges értelemben vett egy- vagy többváltozós függvény variabilitási tartománya között a legnagyobb eltérés, hogy itt nincs meg a BOLZANO-WEIERSTRASS-tétel analogonja: a végtelen sok függvényt tartalmazó, korlátos halmaznak nincsen okvetlenül határeleme. Ez ellentét miatt vezette be FRÉCHET a véges, zárt pont-halmaznak megfelelőleg a *compact függvényhalmaz* fogalmát. E fogalom felépítéséhez még a határelem fogalmát kell tisztáznom, ennek az értelmezése viszont függ a folytonos függvényoperatio definitiójának módjától. A folytonosság első definitiója:

Folytonos az $F[f(x)]$ függvényoperatio, ha

$$F[f_n(x)] \rightarrow F[f(x)],$$

valahányszor $f_n(x)$ egyenletesen convergál $f(x)$ -hez.

A folytonosság ilyen definitiója mellett a határelemet is az egyenletes convergentia alapján értelmezzük, tehát: $f(x)$ határeleme a C függvényhalmaznak, ha van a halmaznak egy olyan rész-sorozata, a mely egyenletesen convergál $f(x)$ -hez. Továbbá:

Erősen folytonos a $G[f(x)]$ operatio, ha

$$G[f_n(x)] \rightarrow G[f(x)],$$

valahányszor:

$$\int_E \{f(x) - f_n(x)\}^2 dx \rightarrow 0.$$

A folytonosság e második definitióját használta FRÉCHET és GATEAUX olyan operatióra, mely (L) integrabilis függvényekre van értelmezve. Czélszerűbbnek látszik¹ ez esetben is az első definitiót tartani meg (l. DIENES loc. cit.), e szerint a compact függvényhalmaz definitióját következőképp mondjuk ki:

Compact a C függvényhalmaz, ha bármely végtelen sok elemet tartalmazó részhalmazából kiválasztható egy egyenletesen convergáló sorozat. Ha még ezenkívül az összes határelemek is a C halmazba tartoznak, akkor a C compact, zárt halmaz-

¹ Nem minden lineáris függvényoperatio erősen folytonos.

A compact halmaz a függvényoperációk elméletében éppen oly fontos szerepet játszik, mint a közönséges függvényeknél a véges intervallum vagy általánosabban a korlátos halmaz. Azonnal belátható például a következő analog tételek érvényessége:

Egy zárt compact halmaz minden elemére folytonos operatio a compact halmazon egyenletesen folytonos, ugyanilyen föltételek mellett értékészletének maximumát fel is veszi és így tovább. Compact függvényhalmaz mindig korlátos, ugyanis ha a C halmazban minden n -re található oly $f_n(x)$, hogy

$$\text{Max } |f_n(x)| > n,$$

akkor az $f_1, f_2 \dots f_n \dots$ részhalmaz egyetlen sorozata sem lehet egyenletesen convergens. A compact halmaz fontos szerepe miatt nagy jelentősége van a következő ARZELÀ-tól származó tételnek:

Hogy az (ab) intervallumban értelmezett, folytonos függvények egy korlátos C halmaza compact legyen, ahhoz szükséges és elégséges, hogy a C halmaz függvényei egyenlő mértékben¹ folytonosak legyenek.

Ezalatt azt értjük, hogy adott positiv ε -hoz található legyen olyan positiv δ , hogy valahányszor:

$$|x - x'| < \delta,$$

mindig:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

(függetlenül az x -től és az $f(x)$ -től), ha csak $a \leq x < x' \leq b$ és az $f(x)$ a C halmazból való.

Miután a függvényoperációt értelmeztünk tételítettük fel az E alaphalmazon definiált minden (L) integrabilis függvényre, keresnünk kell erre a függvényhalmazra a megfelelő tételt. Mielőtt a tétel általánosítására rátérhetnék, össze kell állítanom az E halmazon értelmezett (L) integrabilis függvényekre vonatkozó néhány definitiót és corollariumot, a melyekre a következőkben szükségem lesz. Tekintetbe veszem a E alaphalmazon² definiált összes (L) integrabilis függvényeket, melyekre:

$$|f(x)| < M.$$

¹ in gleichem Maasse, également.

² Az E is, éppen így az összes előforduló halmazok (L) mérhetőek legyenek.

A $-M, +M$ közt felosztom ε távolságú közökre; az így nyert pontokat jelölöm y_i -vel. Tehát

$$y_0 = -M, y_1 = -M + \varepsilon, \dots, y_n \geq M.$$

e_i -vel jelölöm amaz x pontok halmazát, a melyekre:

$$y_{n-1} \leq f(x) < y_n.$$

Definiálok továbbá a $\phi(e; x)$ függvényt következőképpen:

$\phi(e; x) = 1$, ha x az e halmaz pontja;

$\phi(e; x) = 0$ minden más x -re.

Ekkor:

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n y_i \phi(e_i; x) \right| < \varepsilon. \quad (1)$$

Megadott $f(x)$ -hez minden pozitív ε -ra található megfelelő e_i halmazok, e halmazok azonban általában minden $f(x)$ -re mások lesznek. A

$$\sum_{i=1}^n y_i \phi(e_i; x) = \phi(x)$$

függvény csak véges sok egymástól különböző értéket vesz fel, az ilyen függvényeket rövidség okáért ϕ -függvényeknek nevezem és az (1) egyenlőtlenségben kimondott tényt így fejezem ki: az $f(x)$ (L) integrabilis függvény egyenletesen megközelíthető ϕ -függvényekkel. Az itt szerepelt e_i halmazok közül bármely kettőnek nincs közös pontja, az ilyen halmazokat disjunct halmazoknak fogom nevezni. Ha e_1, e_2, \dots, e_n disjunct halmazok és

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

tartalmazza az E alaphalmaz minden pontját, akkor azt mondom, hogy

$$E = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

az E alaphalmaz egy beosztása.

Két halmaz szorzata alatt értjük a két halmaz közös pontjainak halmazát. Az E és E' beosztások:

$$E = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

$$E' = e_1 + e_2 + \dots + e_m,$$

szorzata alatt értem azt az E'' beosztást, a melyet az összes lehetséges $e_p \cdot e'_q$ szorzatok ($p = 1, 2 \dots n$; $q = 1, 2 \dots m$) összege ad. Tehát:

$$E'' = E \cdot E' = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m e_p \cdot e'_q = \sum_{j=1}^{mn} e''_j;$$

az e''_j -k is disjunct halmazok és így E'' is az E alaphalmaz egy beosztása. Ugyanilyen értelemben beszélek majd a tetszésszerű e halmaz beosztásáról:

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

a hol az e halmaz minden pontja benne van egy és csakis egy e_i -ben.

Ha az $f(x)$ az E beosztásnak megfelelő ψ -függvényekkel ε pontosságra megközelíthető, akkor a megközelítés bármely $E \cdot E'$ beosztásra — a hol E' tetszésszerű beosztás — ismét legalább ε pontosságot ad. A megközelítésre használni fogom a következő jelölést:

$$|f(x) - \sum_E y\psi(e; x)| < \varepsilon;$$

ez alatt azt értem, hogy az összegezés E összes részhalmazaira: (e_k), végzendő.

II. Ezekkel a segédfogalmakkal kimondom a következő tételt:

A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az E alaphalmazon értelmezett (L) integrabilis függvényeknek egy korlátos halmaza compact legyen, az, hogy bármely pozitív ε -hoz található legyen az E alaphalmaznak egy olyan beosztása:

$$E = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

hogy a halmaz összes függvényeire

$$|f(x) - \sum_E y\psi(e; x)| < \varepsilon$$

legyen.

Itt tehát az e_k halmazok az összes $f(x)$ függvényekre közösek, az y_k értékek változnak az $f(x)$ szerint, de mindig $|y_k| < M$, a hol M a közös korlát. Definiálhatom például $y_k = f(x_k)$, a hol az x_k az e_k halmaz egy tetszésszerű pontja.

A függvényeknek egy egyenletesen convergens sorára azon-

nal láthatjuk, hogy a feltétel teljesül. Legyen $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$ egy ilyen sorozat. Elég nagy n -től kezdve bármely μ mellett is ($\mu > 0$)

$$|f_n(x) - f_{n+\mu}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az $f_n(x)$ -hez azonban található egy oly beosztás: E_n , hogy

$$|f_n(x) - \sum_{E_n} y_k \psi(e_k; x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

tehát

$$|f_{n+\mu}(x) - \sum_{E_n} y_k \psi(e_k; x)| < \varepsilon,$$

a hol ezuttal az y_k is fixek, az E_n beosztás az összes $f_n, \dots, f_{n+\mu} \dots$ függvényekre ε pontosságú megközelítést nyújt.

Az f_1, f_2, \dots, f_{n-1} függvények mindegyikéhez tartozik egy E_1, E_2, \dots, E_{n-1} beosztás, a melynek megfelelő ψ -függvények az $f_i(x)$ -et ε -ra approximálják. Az E_1, E_2, \dots, E_n beosztások szorzata:

$$E = E_1 \cdot E_2 \dots E_n;$$

az E beosztással képzett ψ -függvények már az összes $f_i(x)$ -re ε pontosságú megközelítést adnak. (Az y_k értékek itt már nem minden $f_i(x)$ -re szükségképpen ugyanazok.)

A tételt két lépésben bizonyítom:

1. A feltétel elégséges.

Tegyük fel, hogy a C függvényhalmazra a feltétel teljesül. Valamennyi $f(x)$ -re:

$$|f(x)| < M.$$

Legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \dots$ a pozitív számoknak egy zérohoz convergáló sorozata. Vezem a C egy tetszésszerű részalmazát: $f_1, f_2 \dots f_n \dots$ (ha a részalmaz nem volna megszámlálható, akkor vezem ennek egy további megszámlálható részalmazát). Bizonyítandó, hogy e részalmaz egy egyenletesen convergens sorozatot tartalmaz.

A feltétel szerint ε_1 -hez tartozik egy E_1 beosztás:

$$E_1 = e_1^{(1)} + e_2^{(1)} + \dots + e_{p_1}^{(1)}$$

úgy, hogy bármely f_k -ra nézve

$$|f_k(x) - \sum_{E_1} y \psi(e; x)| < \varepsilon_1.$$

Az $y_{i_1}^{(1)}$ constansok véges számban vannak.

Például

$$y_0^{(1)} = -M, \dots, y_{i+1}^{(1)} = y_i^{(1)} + \varepsilon_1.$$

Véges sok $y_i^{(1)}$ van és végtelen sok $f_k(x)$. Az ismert be-
skatulyázási elv szerint van tehát az $(f_k(x))$ sorozatban végte-
len sok olyan $f_k(x)$, a melyre az $e_1^{(1)}$ -hez tartozó $y_i^{(1)}$ közös, az
 $f_{k_1}^{(1)}(x)$ függvények között van ismét végtelen sok, a melyre az
 $e_2^{(1)}$ -hez tartozó $y_i^{(1)}$ is közös és így tovább, végül található vég-
telen sok olyan

$$f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x) \dots f_n^{(1)}(x) \dots,$$

a melyekre az összes $y_i^{(1)}$ értékek közösek, tehát a melyekre:

$$|f_i^{(1)}(x) - f_k^{(1)}(x)| < \varepsilon_1 \quad \begin{matrix} i=1, 2, 3, \dots \\ k=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Ez utolsó sorozat egyik elemét, például az elsőt jelölöm:

$$f_1^{(1)}(x) = f_1^*(x).$$

Az ε_2 -höz tartozik az E_2 beosztás. Az előbbi $(f_n^{(1)}(x))$ sorozatban ismét van végtelen sok $f_n^{(2)}(x)$ függvény, úgy, hogy

$$|f_i^{(2)}(x) - f_k^{(2)}(x)| < \varepsilon_2.$$

Legyen:

$$f_2^{(2)} = f_2^*.$$

Ekkor:

$$|f_2^*(x) - f_1^*(x)| < \varepsilon_1.$$

Ezt az eljárást így folytatom az ε_i -re. Tehát ε_n -hez tartozik az E_n beosztás; az

$$f_1^{(n-1)}, \dots, f_k^{(n-1)}, \dots$$

sorozatból kiválasztom az

$$f_1^{(n)}, \dots, f_k^{(n)}, \dots$$

sorozatot úgy, hogy

$$|f_k^{(n)}(x) - f_k^{(m)}(x)| < \varepsilon_n.$$

Jelölöm

$$f_n^{(m)}(x) = f_n^*(x).$$

Ekkor:

$$|f_i^*(x) - f_n^*(x)| < \varepsilon_i, \quad i < n$$

mert hiszen az $f_n^*(x)$ függvény az $f_1^{(i)}, f_2^{(i)} \dots$ sorozatból való.

Az így előállott $(f_n^*(x))$ sorozat egyenletesen convergál. Adott ε -hoz keressük meg az ε_n -et úgy, hogy $\varepsilon_n < \varepsilon$. Ekkor

$$|f_n^*(x) - f_{n+p}^*(x)|$$

bármely p -re, $p = 1, 2, 3 \dots$

2. A feltétel szükséges.

Tegyük már most fel, hogy a C függvényhalmaz compact. Állítom, hogy ekkor a feltételnek teljesülnie kell. Feltételezve az ellenkezőt, volna olyan $\varepsilon > 0$, melyhez nem található megfelelő E beosztás. Jelölje M a C halmaz korlátját. Megalkotom az y_0, y_1, \dots, y_m számokat

$$y_0 = -M, \quad y_k = y_{k-1} + \varepsilon, \quad m = \left[\frac{M}{\varepsilon} \right].$$

Ha a feltétel nem teljesül, bármilyen E beosztáshoz található egy olyan $f_1(x)$ függvény, a melyre:

$$\text{Max} |f_1(x) - \sum_E y_k \psi(e_i; x)| > \varepsilon.$$

Az $f_1(x)$ -nek magának azonban van egy olyan beosztása E_1 , a melyhez tartozó ψ -függvények f_1 -t már $\frac{\varepsilon}{2}$ -re megközelítik.

Tehát

$$|f_1(x) - \sum_{E_1} y_k \psi(e_i; x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De kell lennie a C halmazban egy olyan $f_2(x)$ függvénynek, a melyre az E_1 beosztás által képezett megközelítés nem ad ε pontosságot. Ha nem volna ilyen $f_2(x)$, akkor az E_1 beosztás az összes $f(x)$ függvényekre közös volna, azaz a feltétel teljesülne. Van tehát egy olyan $f_2(x)$ függvény, melyre:

$$\text{Max} |f_2(x) - \sum_{E_1} y_k \psi(e_i; x)| > \varepsilon.$$

f_2 -höz ismét tartozik egy beosztás, E_3 , melylyel képezett ψ -függvények az f_2 -t $\frac{\varepsilon}{2}$ -re megközelítik. Az $E'_2 = E_1 \cdot E_2$ beosztás úgy az f_1 , mint az f_2 -re $\frac{\varepsilon}{2}$ pontosságú megközelítést ad. De ismét E'_2 -re vagy teljesül a feltétel, vagy pedig létezik egy $f_3(x)$ függvény, melyre:

$$\text{Max} |f_3(x) - \sum_{E'_2} y_k \psi(e_i; x)| > \varepsilon$$

bárhogyan is válaszszuk az y értéket a $-M, -M+\varepsilon, -M+2\varepsilon, \dots, M$ sorozatból; ellenben

$$|f_3(x) - \sum_{E_3} y_k \psi(e_i; x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen

$$E'_3 = E_3 \cdot E'_2$$

és így tovább.

Ezt az eljárást folytatva successive nyerjük az

a) $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ függvényeket és az

b) $E_1, E'_2, \dots, E'_n, \dots$ beosztásokat.

Minden n -re áll:

$$|f_n(x) - \sum_{E'_n} y_k \psi(e_i; x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ellenben:

$$\text{Max} |f_{n+r}(x) - \sum_{E'_n} y_k \psi(e_i; x)| > \varepsilon,$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

f_{n+r} -re ugyanis az E'_{n+r-1} beosztás nem felel meg, annál kevésbé tehát az E'_n , a mely utóbbiból az E'_{n+r-1} szorzással, tehát a részhalmazok tovább-osztásával állott elő.

A C halmaz compact, az a) sorozatnak van tehát egy egyenletesen convergáló részsorozata:

$$f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}, \dots$$

Elég nagy k -ra:

$$1. \quad |f_{i_k}(x) - f_{i_{k+p}}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészt mivel f_{ik} az (f_n) sorozatból való, például

$$f_{ik} \equiv f_n,$$

$$2. \quad |f_{ik}(x) - \sum_{E_n} y_k \psi(e_i; x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát:

$$3. \quad |f_{ik+p}(x) - \sum_{E'_n} y_i \psi(e_k; x)| < \varepsilon.$$

f_{ik+p} is az (f_n) sorozatból való, és pedig identikus valamely f_n utáni taggal, például $ik+p = n + r$, tehát

$$4. \quad \text{Max} |f_{ik-p}(x) - \sum_{E'_n} y_k \psi(e_i; x)| > \varepsilon.$$

3. és 4. ellentmondanak egymásnak; ebből az következik, hogy a feltételnek teljesülnie kell, az (f_n) sorozat csak véges sok elemet tartalmaz, az utolsónak megfelelő beosztás az összes függvényekre ε pontosságot ad a megközelítésben.

III. A tételt a folytonos függvényoperatióknak többszörös integrál-alakokkal való megközelítésére akarom alkalmazni. Csak folytonos függvényekre értelmezett operatiókra FRÉCHET¹ állított fel a WEIERSTRASS-tétellel analog tételt. Az általánosításhoz előbb a STIELTJES-integrál egy általánosítására van szükség, a mely RADON-tól² ered. Ez az általánosítás a lineáris halmazfüggvény fogalmán épül fel. Nem szükséges az itt szereplő fogalmakat, valamint az eredeti FRÉCHET-tételt részleteznem, utalok DIENES-nek már többször idézett értekezésére. Csupán azt jegyzem meg, hogy DIENES a lineáris halmazfüggvényt RADON-tól eltérőleg definiálja — a két definitio azonban identikus. A mint a lineáris függvényoperatiót is kétféleképpen lehet definiálni: vagy föltéve az additivitást és folytonosságot, vagy pedig az additivitást (ezúttal ebben a linearitást is irracionális

¹ MAURICE FRÉCHET: Sur les fonctionelles continues. Annales de l'École Norm. sup. 1910. L. még DIENES loc. cit.

² JOHANN RADON: Theorie u. Anwendungen der abs. additiven Mengenfunktion. Sitzungsberichte d. k. Akad. Wien, 1913. Utalás van erre LEBESGUE-«Sur l'intégrale de STIELTJES ... etc.» (Comptes Rendus, 1910) című értekezésében is, a mire RIESZ FRIGYES úr volt szives figyelmeztetni.

coëfficiensekre) és a korlátosságot¹ — úgy itt is kiköthetjük az additivságon kívül a korlátosságot (DIENES) vagy a folytonosság-
nak megfelelőleg additivságot megszámlálhatóan végtelen sok
addendusra is (RADON). Mindkét esetben czélszerűbbnek és könny-
nyebben alkalmazhatónak látszik a korlátosságon alapuló defi-
nitio.

Legyen tehát $\alpha(e)$ egy az E alaphalmazon értelmezett
linearis halmazfüggvény, azaz bármely e halmaz ($e \in E$) minden
 $e = \sum_{i=1}^n e_i$ beosztására legyen

$$\alpha(e) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i),$$

továbbá

$$|\alpha(e)| < M(E).$$

A STIELTJES integrált értelmezem előbb ψ -függvényekre.
A $\psi(x)$ függvénynek $\alpha(e)$ szerint az E halmazon vett STIELTJES-
integrálja alatt értem a

$$\sum_{i=1}^n y_i \alpha(e_i) = \int_E \psi(x) d\alpha(e)$$

véges összeget. Az $f(x)$ (L) integrabilis függvény ψ -függvények-
kel megközelíthető, tehát csak azt kell kimutatnom, hogy ha a
 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ sorozat egyenletesen convergál $f(x)$ -hez, akkor az
 $\int_E \psi_i d\alpha(e)$ számok is convergálnak.

Elég nagy k -ra

$$|\psi_k(x) - \psi_{k+p}(x)| < \varepsilon.$$

ψ_k -hoz tartozik az $E^{(k)}$ beosztás úgy, hogy ψ_k az $E^{(k)}$ min-
den részhalmazán constans értékkel bír, ψ_{k+p} -hez az $E^{(k+p)}$
ugyanígy. Veszem az $E^{(k+p)}, E^{(k)}$ beosztás-szorzatot és ennek
megfelelőleg alkotom meg az integrált definiáló összeget; azon-
nal látható, hogy a két összeg különbsége absolut értékben
kisebb $\varepsilon \cdot M(E)$ -nél.

¹ L. F. RIESZ: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktio-
nen. Math. Annalen. 69. 1910 és Démonstration nouvelle etc. Annales de
l'École Norm. sup. 1914. Továbbá: E. HELLY: Über lineare Funktional-
Operationen. Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. Wien. 1912.

Definiáлом :

$$\int_E f(x) da(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n(x) da(e).$$

Az $F[f]$ linearis függvényoperatiónak minden az E halmazon értelmezett (L) integrabilis függvényre felvett értéke mint ilyen STIELTJES-integrál állítható elő. Magasabbrendű functionalpolynomok (I. FRÉCHET és DIENES) lesznek a többszörös általánosított STIELTJES-integrálok.

Ezek után bebizonyítom a következő tételt:

Az $F[f(x)]$ folytonos függvényoperatio az $f(x)$ (L) integrabilis függvények egy compact zárt halmazán felvett értékkészlete egyenletesen megközelíthető

$$P_n[f(x)] = F_0 + \sum_{i=1}^n f(x_1) f(x_2) \dots f(x_i) d^i a_n e_1 e_2 \dots e_i$$

alakú functionalpolynomokkal.

Az x -ek mellé irt indexek mutatják, hogy az $f(x)$ rendre az $e_1, e_2 \dots e_i$ halmazváltozók szerint integrálandó.

Megjegyzem még, hogy DIENES-nek sokszor idézett értekezésében jóval általánosabb tétel szerepel, az azonban nem fogadható el úgy, mint a hogy az ott a 189—190. oldalon bizonyítatik.¹

¹ DIENES bebizonyítja, hogy minden folytonos függvényoperatio bármely integrabilis $f(x)$ helyen felvett értéke egyenletesen megközelíthető többszörös általánosított STIELTJES-integrálok összegével. Az egyenletes megközelítésből aztán következik az egyenletes folytonosság. De az egyenletes megközelítés bizonyításakor már implicite felteszi az egyenletes folytonosságot. Azt mondja (megtartva jelöléseimet): $f(x)$ egyenletesen megközelíthető $\Sigma y_k \psi(e_i; x)$ függvényekkel; az $U[\Sigma y_k \psi(e_i; x)]$ operatio folytonos függvénye az y_k változóknak: tehát polynomokkal egyenletesen megközelíthető, azaz:

$$\lim P_{k_n}(y) = U[\lim \Sigma y_k \psi(e_i; x)] = U[f];$$

még pedig egyenletesen.

Igaz, hogy $f(x)$ egyenletesen megközelíthető $\Sigma y_k \psi(e_i; x)$ -vel, azaz

$$|f(x) - \Sigma y_k \psi(e_i; x)| < \delta$$

minden f -re, de ebből még nem következik minden f -re:

$$|U[f] - U[\Sigma y_k \psi(e_i; x)]| < \varepsilon,$$

csak ha $U[f]$ egyenletesen folytonos.

Mindenesetre igaz, hogy bármely a compact, zárt halmazba tartozó $f(x)$ -re

$$|F[f(x)] - P_n[f(x)]| < \varepsilon,$$

a hol n csak K -től és ε -tól függ.

A bizonyítás az ARZELÀ-tétel általánosításának felhasználásával következôképpen történik. Compact, zárt halmazon a folytonos operatio egyenletesen folytonos, tehát adott ε -hoz található oly δ , hogy bármely két, a halmazba tartozó $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényre, ha csak:

$$\text{Max } |f(x) - \varphi(x)| < \delta_1,$$

mindig

$$|F[f(x)] - F[\varphi(x)]| < \varepsilon.$$

Továbbá létezik egy olyan E beosztás, melynek megfelelő

$$\psi(x) = \sum_E y_i \psi(e_i; x)$$

függvények az $f(x)$ -et δ -ra megközelítik ($y_i = f(x_i)$, a hol x_i az e_i halmaz egy tetszésszerű pontja). A ψ -függvényeknek a halmazhoz való csatolásával annak a compact-sága nem változik, mert hiszen a szükséges és elégséges feltétel továbbra is teljesül, e szerint:

$$\begin{aligned} |F[f(x)] - F[\psi(x)]| &< \varepsilon, \\ F[\psi(x)] &= F\left[\sum_E y_i \psi(e_i; x)\right]; \end{aligned}$$

és itt csak az y_i változnak, a $\psi(e_i; x)$ függvények minden a compact zárt halmazhoz tartozó $f(x)$ függvényre ugyanazok maradnak. Tehát az $F[\psi(x)]$ függvénye, és pedig folytonos függvénye az y_1, y_2, \dots, y_m változóknak, e szerint ezek polinomjaival: $P_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$ approximálható. Definiálom az $a_i(e)$ lineáris halmazfüggvényt:

$$\begin{aligned} a_i(e) &= 1, \quad \text{ha } x_i \text{ az } e \text{ pontja;} \\ a_i(e) &= 0, \quad \text{ha } e \text{ az } x_i\text{-t nem tartalmazza.} \end{aligned}$$

Ekkor

$$y_i = f(x_i) = \int_E f(x) da_i(e);$$

e szerint az y_i változóknak bármely többtagú kifejezése mint ilyen integrálok szorzataiból, vagy mint többszörös integrálokból képezett összeg írható fel; tehát az $F[f(x)]$ a compact zárt halmazon egyenletesen megközelíthető többszörös STELTJES-integrálok sorával.

Megjegyzem még, hogy ha a halmaz nem compact, akkor az $F[\sum y_i \phi(e_i; x)]$ nemesak az y_i változóknak, hanem az e_i halmazoknak is függvénye lesz, az e_i halmazok változnak az $f(x)$ -szel, éppen így a megközelítő polynomok is és így az integrálsorral való megközelítés illusoriussá lesz.

Lehetséges azonban, hogy a megközelítés más úton elérhető, éppen így nyíltan marad az a kérdés is, hogy a folytonos operatio nem compact halmazon is egyenletesen folytonos-e vagy sem?

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 október 15.-én tartott üléséből.)

AZ AGYBARÁZDÁLÓDÁSI FOLYAMAT TÉNYEZŐIRŐL.

SCHAFFER KÁROLY I. tagtól.

Az agybarázdálódásra vonatkozó szövettani vizsgálataim, melyekről a Tekintetes Akadémiának 1917 évi január havában számoltam be,¹ a következőket derítették ki: 1. A széli fátyol a jövődő barázda helyén kiszélesedik. 2. Ugyanezen a helyen az úgynevezett felszínes szemcsék körülirtan felhalmozódnak, megsza-
porodnak, miáltal egy, szemcsék halmazából álló és a kéreg felé irányuló ék jő létre. 3. E szemcsékben idővel hasadék keletkezik, miáltal előáll a barázda, mely körül a kéreg ki-, illetőleg feldu-
dorodása, vagyis a tekervény mint az ék okozta nyomást ki-
egyenlítő jelenség szerepel; ilyképpen a széli fátyolból kiinduló és ennek szövettani, úgynevezett perigenetikai módosulásaiból előálló barázdaképződés mindenkor az *elsődleges jelenség*, mely-
hez a tekervényképződés mint *másodlagos alakulás* csatlakozik.

Eme sommásan feltüntetett szövettani módosulások vala-
mely ingert követő jelenségek gyanánt tekinthetők, jelesen a
felszínes szemcséknek helyi megszaaporodása e felfogást támogatni
hivatottnak látszik. Ha erre az álláspontra, mint az agybarázdá-
lódás magyarázatának egy lehetőségére helyezkedünk, akkor fel-
merül a kérdés, hogy honnét kapják a széli fátyol felszínes
szemcséi a szaporodásukhoz való ingert? Ilyen inger csakis az
agyvelő belsejéből származhatik, vagyis az agyféltekék növeke-
dése az a körülmény, mely ezek *felszínén* idő és hely tekinte-
tében *változó feszülést* okoz.

WUNDT az agyfelszín barázdálódási törvényét egyrésztől az
agyvelő sajátos növekedési feszüléséből származtatja, másrésztől
a beburkoló csontos koponyatok befolyásából vezeti le; az előbbi,

¹ SCHAFFER KÁROLY: Az agy barázdálódásáról. Math. és Temészettud.
Értesítő, XXXV. kötet, 683–721. lap. 1917.

vagyis a felszínfeszülés a fejlődés korai idejében, míg az utóbbi, a koponyatok módosító behatása az ébrényi élet vége felé, illetőleg a megszületés után szerepel.

A felszínfeszülés tekintetében WUNDT fejtegetései a következők. Valamely felszín ránczképződés révén olyképpen növekedik, hogy a legcsekélyebb ellentállás irányában felgöngyölödik. Ha a felszín haránt irányban feszül erősebben, semmint hosszúsági irányban, akkor haránt irányban fog ránczolódni, vagyis haránt tengely körül göngyölödik fel, miképpen egy nedves papírlap, a melyet jobbról balfelé vongálunk. Fordítva: ha a feszülés hosszúsági irányban erősebb, akkor a ránczolódásnak hosszantilag kell történnie. Eközben a legnagyobb feszülés iránya a legnagyobb növekedési energia irányára merőleges WUNDT szerint, mert egy gyarapodó, növekvő képlet, minő az agyfélteke, oly összefüggő rugalmas testnek tekinthető, amelyben ennek valamely részének növekedése tágító, feszítő hatást fejt ki, mely azokon a pontokon lesz nyilván a legnagyobb, amelyeken az önálló deformatio a legkisebb. WUNDT bizonyító példaképpen a kisagyvelőre hivatkozik, mely védett helyzeténél fogva *egyedül* a növekedés okozta feszülési viszonyoknak van alávetve; a kisagyvelőn ennek egész kifejlődése alatt a hosszúsági növekedés a túlnyomó, aminek megfelelően *egyedül* harántirányú barázdák fejlődnek ki. Ez elv alapján az agyféltekék barázdái két különböző növekedési szakasszal kell hogy egybeessenek, egy hosszantival és egy haránttal; az előbbi harántirányú, az utóbbi hosszúsági ránczolódást fog okozni. WUNDT különböző korú magzati agyvelőkön kimutatja, hogy az agyféltekék átmérői viszonyai alakjuk kiképződése közben feltűnő változásokon esnek át. Az embryo első heteiben a félteke csaknem egyenlően hosszú átmérőkkel bír; a Sylvius-féle árok kezdetén hosszúsági növekedés indul meg, melynek harántirányú feszülés, illetőleg ránczolódás felel meg. E hosszúsági növekedés közben, mely a hosszúsági és harántátmérőnek egymáshoz való viszonyát 1:0·9-ről 1:0·7-re szállítja le, keletkeznek az első maradandó barázdák, jelesen az ötödik foetalis hónapban a középponti barázda, a *fissura parieto-occipitalis* és *calcarina*. A hatodik foetalis hónaptól kezdve e viszonyok tekintetében változás áll be, amely-

nyiben a félteke egyes részeinek növekedésében bizonyos változások vehetők észre. A hatodik és hetedik hónapból való foetalis agyvelők összehasonlításából WUNDT szerint kiderül, hogy a féltekének fal-nyakszírti része megközelítően egyformán gyarapszik, míg a homloki rész inkább szélességben, semmint hosszúságban nő. Ugyanaz állapítható meg a halántéki részre nézve, mely magassági irányban való növést árul el. Ezen az alapon a homloki és halántéki lebenynek hosszúsági ránczolódáson kell átésnie, amint ez valójában meg is történik.

A csontos koponyatok ellentállása tekintetében, mely főleg a születés után játszhatik szerepet, WUNDT kiemeli, hogy ilyen külső ellentállásnak a ránczolódásnak a legkisebb ellentállás irányában való kialakulást kell okoznia, minek megfelelően a dolichocephal koponya az agybarázdáknak hosszúsági, a brachycephal forma pedig a haránt irányú lefutását fogja előidézni.

ANDREW J. PARKER amerikai szerző szintén a felszínfeszülés tényezőjét szerepelteti az agybarázdálódás folyamatában. Az agybarázdák létrejötté tekintetében két nézetet emel ki: 1. Az agyvelő, mely gyorsabban fejlődik ki mint a koponya, emez összeszorításhoz akképpen alkalmazkodik, hogy a legkisebb ellentállás irányában ránczolódik (ECKER). 2. Az agybarázdák a késedelmező növekedés helyeiként tekinthetők, mint ilyenek szerkezeti jelentőséggel bírnak, mely az agytömeg belsejében lefolyó sejtgyarapodási folyamattól függ (PANSCH). E két felfogásnak szövődése lehetséges.

Az agybarázdálódás magyarázata szempontjából PARKER oly feltevéshez folyamodik, mely kétrendbeli erőnek egymásra való hatásán alapul; ezek 1. a terjeszkedő agyvelőnek növekedési ereje, mely 2. szövődik a csontos környezet ellentállási erejével, illetőleg általa módosul. PARKER állítása szerint ez erőknak egymáshoz való viszonya a fejlődés korai szakaszaiban aránylag egyszerű; e viszony a főbarázdáknak olyatén elrendeződését tételezné fel, melynél fogva bizonyos időpontokban a barázdák egymáshoz meghatározott mennyiségteni viszonyban állanak. Figyelmessé tesz a «triradiate» és «zygal=quadradiate» típusára a barázdálódásnak, mely barázdálódási alakok azt gyaníttatják, hogy az alapvető okok egyszerű viszonyokban kere-

sendők és a kérdés meg volna oldható ama viszony alapján, amelyben mennyiségtani középpontok és felszínek amaz erők nagyságához állanak, melynél fogva éppen a barázdálódásnak említett alakjai elő kell hogy álljanak. PLATEAU szappanbuborék-kísérleteire való hivatkozással PARKER az agyfelszínt nagyszámú előredudorodó középpont-conglomeratumnak tekintti, amelyen a barázdák amaz oszlási síkoknak felelnének meg, melyek e középpontoknak egymásra találkozására által adva vannak. Úgy találta, hogy ez oszlások jellege a kiterjeszkedő agyféltekék aránylagos felszínfeszülése által megállapítható; a felszínfeszülés a kiterjeszkedés által képviselt felszín sugarhoz fordított viszonyban áll. Így érthető, hogy egyenlő nagyságú feszülés esetében két felszínnek összetalálkozása egyenes vonalú síkban fog történni, míg görbült síkban, ha a két feszülés közül az egyik nagyobb, a másik kisebb. Ha három felszín találkozik, akkor egy háromsugarú találkozás áll elő 120° szögekkel; négy felszín találkozása a «quadriate type» kialakulását eredményezi.

RETZIUS felfogását e szerző következő fejtegetései tükröztetik vissza: Az agykéreg bizonyos részeiben mindenek szerint nagyobb növekvési energia lakozik, mely valószínűleg e pontoknak élet-tani jelentőségével, különleges működésével szoros kapcsolatban áll. Ez energia alapján bizonyos részek jobban dudorodnak előre és az agyfelszín ugynevezett ránczolódásait teszik ki. Általában a barázdálódást szokás a mérvadó, fontos mozzanatnak tekinteni, ami azonban RETZIUS szerint nem helyes, bárha kétségtelen, hogy alaktani szempontból, jelesen a különböző tájak megállapítása szempontjából a barázdák igen fontosak. Mindazonáltal a barázdák az agyfelszín növekedése szempontjából inkább passiv, míg a kiemelkedések, a tekervények az activ momentumnak felelnének meg. RETZIUS szerint az agyvelő növekedésében a mechanikai ránczolódás fogalmát nagyon is kiterjesztették, feltétlenül az állandó barázdák és tekervények tekintetében; itt a legtöbb a helyi viszonyoktól függ, jelesen az egyes területek átöröklött különböző növekvési energiájától. «Denn dass die Vererbung auch hier eine grosse Rolle spielt, ist wohl sicher» teszi hozzá a fentiekhez RETZIUS.

Áttekintve az agybarázdálódás folyamatára vonatkozó és

meglevő tényeken, három meghatározó tényező állapítható meg:

1. A felszínfeszülésben hatékony *mechanikai tényező* (WUNDT).
2. A széli fátvöl módosulásaiban felismerhető *histologiai*, illetőleg *alakító, formatív tényező* (SCHAFFER).
3. Az átöröklésen alapuló *biologiai* tényező (RETZIUS).

A *mechanikai tényezőt* WUNDT fejtegetései eléggé megvilágítják, jelesen kétségtelennek látszik, hogy a WUNDT által a korai foetalis életre nézve megállapított és a féltekék növekvési viszonyai által feltételezett feszülési viszonyok első sorban figyelemreméltók, míg a postfoetalis életre vonatkoztatott és a csontos koponyatok mint térszükítő tényező okozta felszínráncsolódás mint ilyen sokkal kevésbé, illetőleg alig jöhet tekintetbe, figyelembe vevén az aránylag bőséges koponyabeli térvizonyokat. A postfoetalis életben sokkal inkább szerepelhet az *átöröklés mozzanata*, mely egyes, élettanilag többé-kevésbé jól körülhatárolt mezőknek tekervény-, illetőleg barázdagazdagságában nyilvánulhat meg. Ez irányban főleg AUERBACH ZSIGMOND a zenei tehetségnek az agyvelőben való lokalizálására vonatkozó beható tanulmányaira kell utalnom, melyekből kiderült a felső halántéki tekervény középső és hátulsó harmadának jelentékeny kiszélesedése és különleges alakulása, kapcsolatban a gyrus supramarginalisnak feltűnő szélességével és magasságával, mely lelete GUSZMAN JÓZSEFnek Akadémiánknak 1891-ben bemutatott megállapításaival teljesen egyezik. Ismeretes továbbá, hogy GAMBETTA, a kiváló francia parlamenti szónok Broca-tekervényét megkettőzöttnek találták. RETZIUS mintaszerű tanulmányai egyes kiváló egyéniségek agyvelején ugyancsak egyes agyterületek feltűnően gazdag tagozottságát derítették ki. De az átöröklés mozzanata nem csupán körülírt agykéregterületeknek túlfeljedésében nyilvánul meg, miáltal az agyvelő sajátos kifejezést, külsőt nyerhet, hanem — miképpen erre KARPLUS vizsgálatai utalnak — egyes barázdák hosszúsága és mélysége tekintetében is, mely sajátságok azután egy családnak különböző tagjain az azonos oldali agyféltekében lelhetők fel.

A *histologiai tényezőben* bevezetőleg ingerhatást véltem felismerhetni, legalább a felszínes szemcséknek helyileg, a jövődő barázdáknak megfelelően mutatkozó megszaporodását a kör-

szövetteni tapasztalás alapján ily értelemben vagyok hajlandó értelmezni. A széli fátyol elváltozásainak jelentőségét annyival többre kell becsülnünk, mert hiszen a félteke növekedésének tulajdonított *mechanikai ránczolódása* az agyfelszínnek ilyen szövetteni módosulásokat nem igényel, vagyis utóbbiak nélkül is lefolyhatna; ha tehát ezek előtérbe lépnek a barázdálódás folyamán, akkor a szövetteni elváltozásoknak a barázdálódással összefüggő *sajátos* jelentőséggel kell birniok, annyival inkább, mert kizárólag a jövődő barázda helyein fordulnak elő. A barázda-képződés menete a szövetteni képekből könnyen szerkeszthető meg; minden barázda megindul az úgynevezett *gödörképződéssel*, melynek vonalszerű folytatásában a barázda alakul ki. A barázda legkezdetlegesebb alakja a gödör, melynek megfelelően a felszínes szemcsék csap- vagy ékszerűen nyomulnak az idegsejtes csiraréteg (*lamina corticalis primitiva*) felé s azt a mélységbe, a leendő velőállomány felé leszorítják, mi mellett a His-féle széli fátyol kiszélesedik e helyen. A foetalis agyvelő gödörszerű besüppedései alatt mindenkor eme szövetteni módosulások lehettek fel, melyek a barázdaképzés bevezetői. Minden gödör valamely hosszabb vagy rövidebb barázda képződésének kezdetét jelenti; a gödörből a barázda kialakulása olyképpen gondolható el, hogy egy adott gödörhöz legszorosabban egy másik gödör csatlakozik, ehhez egy harmadik, miáltal a féltekei felszínnek vonalas besüppedése illetőleg barázdálódása áll elő. A gödörképződés folyamata persze folytatódólagos, mi alatt az értendő, hogy ha a féltekei felszín valamely pontján a gödörképződés megindult, akkor az a későbbi, végleges barázda irányában ennek végpontjáig előrehaladóan terjed.

Ha a barázdaképződés mechanikai tényezőjét, a felszínfeszülést a histologiai tényezővel összeegyeztetni akarjuk, akkor fel kell vennünk, hogy a *legnagyobb* felszínfeszülés a féltekén kezdetben pontszerűleg érvényesül, miáltal éppen a széli fátyol pontszerű elváltozása, a gödörképződés indulhat meg. *K' szerint a barázdaképződésben a felszínfeszülés csakis ingertszolgáltató mozzanat; az a fellevés, mintha a helyi felszínfeszülés növekedésének következménye dudorképződés és ránczolódás lenne, oly fellevés, melyet a szövetteni képek megczáfolnak.*

Ha már most a fentiekben ismertetett viszonyok alapján, melyek csakis ténybeli megállapításokat tartalmaznak, a barázdaképződés folyamatát irányító mozzanatokról és ezeknek hatásáról fogalmat akarunk magunknak alkotni, akkor a következő felfogás lehetséges.

Az agyféltekéknek eredetileg sima felszínét a félteke belsejében lefolyó növekedés révén váltakozva hol haránt-, hol hosszirányban érvényesülő feszülés éri, mely mint helyi inger a széli fátynak helyi elváltozásait indítja meg; az utóbbiak kezdetlegesen gödörképződésre, a továbbiakban barázdakialakulásra vezetnek. E folyamatnak elsősorban az állandó, korai foetalis barázdákra nézve van jelentősége, míg a változó, nem-állandó és leginkább a születés időpontja körül előálló barázdák, melyek adott esetben sajátos arczulatú agyvelőt tudnak létesíteni, főleg átöröklődési viszonyokon alapulnak, noha magától értetődő, hogy az általános mechanikai-histologiai viszonyok ezekre nézve is érvényesek, mert nélkülök barázdaképződés nincs. Az átöröklésnek oly értelemben lehet jelentősége, hogy helyi túlkifejlődésre, illetőleg fajilag jellegzetes jelek kiképződésére vezet és ez által egy az átlagos barázdálódástól elütő, egyéni agyvelő áll elő.

A barázdálódási folyamat a szövettani elváltozások alapján *nem* tekinthető ránczolódásnak, felgöngyölődésnek, hanem *behasításnak*, mert a felszaporodott felszínes szemcsék beékelődése semmiképpen sem jelent ránczolódást, hanem a kéregfelszínbe történő bevágást.

Főntos végül az a körülmény, hogy ez a behasítási folyamat az egészen sima és teljesen egyformán alakított foetalis agykérget éri, tehát e folyamat az, mely a kéregfelszínnek mezőkre való bontásában a döntő, tehát az elsődleges mozzanat, melyhez a tekervényképződés egészen *passive* és másodlagosan csatlakozik. Az elsődleges dudorképződés felvétele (RETZIUS, RANKE, BIELSCHOWSKY), mely másodlagos jelenségképpen barázdákat okozna, az agybarázdálódás szövettani képei által megczáfoltatván, véglegesen elejtendő.

EGY LAGRANGE-FÉLÉ TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

— Adalék a négyzet-maradékok eloszlásának elméletéhez. —

GROSSCHMID LAJOS-tól.

LAGRANGE¹ kimutatta, hogy ha $p > 2$ tetszőszerinti prímszám, akkor a négy lehetséges *kettős* következés: $R, R; R, N; N, R; N, N$ — a hol R négyzet-maradék, N pedig négyzet-nemmaradék jele mod p — az $1, 2, \dots, p-1$ sorozatban rendre a következő számosságokkal lép fel:

a) ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor:

$$(R, R) = \left[\frac{p}{4} \right] - 1, \quad (R, N) = (N, R) = (N, N) = \left[\frac{p}{4} \right];$$

b) ha $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor:

$$(R, N) = \left[\frac{p}{4} \right] + 1, \quad (R, R) = (N, R) = (N, N) = \left[\frac{p}{4} \right].$$

Itt (R, R) , (R, N) és i. t. jelentik az $R, R; R, N$ és i. t. kettős követkeзések megfelelő számosságait az $(1, p-1)$ közben, míg $[\]$ a legnagyobb-egészrész szokásos jele.

Jelen dolgozatunkban célunk a lehetséges 8-féle *hármás* *következés* mindegyikére nézve a megfelelő *számosságot* megállapítani.

Részletesebben szólván, feladatunk tartalma a következő.

Legyen $p > 3$ természetes prímszám²; továbbá $a, a+1, a+2$ az $1, 2, 3, \dots, p-1$ sorozatnak három egymásra következő

¹ L. A. SERRET: Cours d'algèbre supérieure, Ed. 6., t. II., p. 95. és köv.

² Megjegyezzük, hogy végformuláink $p=3$ esetében is érvényesek, a midőn is minden egyes számosság értéke zérus; (l. az I. rész vége felé).

száma. Nyilvánvaló, hogy az $a, a+1, a+2$ számok LEGENDRE-féle symbolumaival alkotott $\left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{a+1}{p}\right), \left(\frac{a+2}{p}\right)$ következés 8 különböző triót szolgáltathat, a melyek képei:

$$1, 1, 1; 1, 1, -1; 1, -1, 1; 1, -1, -1; -1, 1, 1; \\ -1, 1, -1; -1, -1, 1; -1, -1, -1;$$

avagy:

$$R, R, R; R, R, N; R, N, R; R, N, N; N, R, R; N, R, N; \\ N, N, R; N, N, N.$$

E 8 következés-typus mindegyikének az $(1, p-1)$ közben fellépő számosságát akarjuk meghatározni.

Jelöljük az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 - \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, 3$ — következés számosságát $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ -mal és tegyük:

$$(1, 1, 1) = r_{11}, (1, 1, -1) = r_{12}, (1, -1, 1) = r_{21}, (1, -1, -1) = r_{22}, \\ \text{továbbá}$$

$$(-1, 1, 1) = n_{11}, (-1, 1, -1) = n_{12}, (-1, -1, 1) = n_{21}, \\ (-1, -1, -1) = n_{22}.$$

E helyütt kell, hogy beszámoljunk arról a tényről, hogy míg $4n+3$ alakú p -re a keresett számosságok a legnagyobb könnyűséggel voltak megállapíthatók, mint *csakis a p -nek* a függvényei; addig $4n+1$ alakú p esetére ilyen egyszerű kifejezéseket nem sikerült találnunk, hanem csupán olyanokat, a melyekben a p , és azonkívül még egy bizonyos *arithmetikai összeg* is szerepel.¹

¹ Időközben ezt az alább (l. II. rész) $S(p; \nu)$ -vel, illetőleg λ -val jelölt *symbolumösszeget* kiértékeljük, s találtuk, hogy

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{p} \right) \varepsilon a \right),$$

a hol a a $4n+1$ alakú p két négyzetösszegre bontásában a páratlan basis absolut értéke, míg

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(p+2a+1)}.$$

V. ö.: *A lineáris congruentia-csoport és a négyzet-maradékok eloszlása*: III. rész, 3. §. A Szt. István Akadémia Értesítője, III. évfolyam, 1. sz. 32–48. l. (Budapest, 1918).

Éppen ezért a tárgyalás különválik a p -nek mod 4 vett két-féle maradéka szerint.

I.

$$p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Legyen egyelőre $p > 3$. Minthogy a jelen esetben -1 négyzetes nem-maradék a p -nek, azért minden $1 \leq a \leq p-1$ számra nézve:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -\left(\frac{p-a}{p}\right);$$

úgy hogy ekként az $a, a+1, a+2$ származtatta

$$\left(\frac{a}{p}\right), \left(\frac{a+1}{p}\right), \left(\frac{a+2}{p}\right)$$

képnek a

$$\begin{aligned} \left(\frac{p-(a+2)}{p}\right) &= -\left(\frac{a+2}{p}\right), & \left(\frac{p-(a+1)}{p}\right) &= \left(\frac{a+1}{p}\right), \\ \left(\frac{p-a}{p}\right) &= -\left(\frac{a}{p}\right) \end{aligned}$$

kép feleltethető meg, és viszont.¹ Mivel: $1 \leq a \leq p-3$, azért ugyancsak: $1 \leq p-(a+2) \leq p-3$. Innen következik, hogy:

$$r_{11} = n_{22}, \quad r_{12} = r_{22}, \quad r_{21} = n_{12}, \quad n_{11} = n_{21}.$$

Feladatunk 8 ismeretlenje tehát máris redukálódott 4-re:

$$x_1 = r_{11} = n_{22}, \quad x_2 = r_{12} = r_{22}, \quad y_1 = n_{11} = n_{21}, \quad y_2 = n_{12} = r_{21}.$$

Ezek meghatározására a következő összefüggések szolgálnak. Mindenekelőtt világos, hogy:

$$r_{11} + n_{22} = 2x_1 = M(p; 3); \tag{1}$$

¹ E két kép — a középső tag jelváltása miatt — egymástól okvetlenül különböző típusokba tartozik. Ugyancsak világos, hogy ily módon különböző trióknak különbözők felelnek meg.

a hol $M(p; 3)$ a 3-ad és 3-nál magasabb fokú számok száma, azaz: ¹

$$M(p; 3) = \left[\frac{p}{4} \right] - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-1}{p} \right) + \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right\}.$$

Szóval

$$x_1 = \frac{1}{2} M(p; 3).$$

De

$$\frac{1}{2} M(p; 3) = \left[\frac{p}{8} \right],$$

mert:

a) ha $p = 8n + 3$, akkor $\left(\frac{2}{p} \right) = -1$,

$$\frac{1}{2} M(p; 3) = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{4} \right] = n = \left[\frac{p}{8} \right];$$

b) ha pedig $p = 8n + 7$, akkor $\left(\frac{2}{p} \right) = +1$, s így ugyancsak:

$$\frac{1}{2} M(p; 3) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{p}{4} \right] - 1 \right) = n = \left[\frac{p}{8} \right].$$

Könnyen belátható továbbá a következő relatio is:

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = x_1 + 2x_2 + y_2 = \frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{p} \right) \right). \quad (2)$$

Tudniillik (2) egyszerűen kifejezi a világos tényt, hogy az összes négyzet-maradékok száma $\frac{1}{2}(p-1)$, míg a jobboldal correctiós tagja a $p-2$ characterével számol. (2)-ből x_1 fönt talált értékével következik, hogy: ²

$$2x_2 + y_2 = \left[\frac{p}{2} \right] - \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{p} \right) \right). \quad (3)$$

¹ L. A négyzet-maradékok eloszlásáról, Math. és Termtud. Értesítő, 34. köt., 236—252. l., 1916. — Ezt a dolgozatot ezután N. M. E. betűkkel fogjuk idézni.

² Ugyanígy találjuk

$$y_1 + 2y_2 = \left[\frac{p}{2} \right] - \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) - 1. \quad (4)$$

Ha pedig meggondoljuk, hogy az összes fellépő triók száma $p-3$, akkor kapjuk:

$$x_2 + y_1 + y_2 = \frac{1}{2}(p-3) - x_1 = \left[\frac{p}{2} \right] - \left[\frac{p}{8} \right] - 1; \quad (5)$$

és ehhez az egyenlethez hozzávehetjük még a következőt:

$$r_{12} + n_{21} = x_2 + y_1 = \left[\frac{p}{4} \right]; \quad (6)$$

mint a mely kifejezi, hogy az R, R, N és N, N, R következesek számosságainak összege hogyan függ a mod p vett *másodfokú* számok számosságától (N. M. E. 251. old.). Ugyanis nyomban belátható, hogy — tekintettel a $\left(\frac{p-1}{p} \right) = \left(\frac{-1}{p} \right) = -1$ értékre — az $r_{12} + n_{21}$ összeg egyenlő e mod p másodfokú számok számával, avagy egygyel kevesebb, a szerint, a mint $p-2$ négyzet-maradék, illetőleg nem-maradék; azaz, az N. M. E. jelöléseit és eredményeit használván, csakugyan:

$$r_{12} + n_{21} = M(p; 2) \cdot M(p; 3) - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{p-2}{p} \right) \right) = \left[\frac{p}{4} \right].$$

Az x_2, y_1, y_2 ismeretlenekre így talált linearis relatiók már most elegendők azok kiértékelésére. Nevezetesen (3) és (5) különbségéből:

$$x_2 - y_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right),$$

azaz, (6) hozzávevésével,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{4} \right] + \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) = \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right), \quad (7)$$

miként a p mod 8 vett kétféle maradékú alakjaival megejtett egyszerű számítás mutatja.

A p éppen jelzett distinguálása révén a (6) egyenlet adja:

$$y_1 = \left[\frac{p}{8} \right] = x_1. \quad (8)$$

míg (5)-ből végül:¹

$$y_2 = \left[\frac{p}{2} \right] - \left[\frac{p}{8} \right] - \left[\frac{p}{4} \right] - 1 = \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) = x_2. \quad (9)$$

Minthogy továbbá $\mu = 3$ mellett:

$$\left[\frac{p}{8} \right] = \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) = 0,$$

— megegyezésben a ténnyel, hogy ekkor 3-as sorozat egyáltalában nem lép fel — (8) és (9) formuláink összefoglalásaképpen egész általánosságban kimondhatjuk a következő tételt:

Ha p valamely $4n+3$ alakú természetes prímszám, akkor a 8-féle 3-as quadraticus character-successiók számosságait rendre a következő képletek szolgáltatják:

$$(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) = (-1, 1, 1) = (-1, -1, 1) = \left[\frac{p}{8} \right] \quad (a)$$

$$(1, 1, -1) = (1, -1, -1) = (1, -1, 1) = (-1, 1, -1) = \left[\frac{p}{8} \right] + \varepsilon \quad (b)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right).$$

Az (a), (b) egyenletekből nyomban kiolvassuk, hogy $8n+3$ alakú p esetében mind a 8-fajta trio egyaránt $\left[\frac{p}{8} \right]$ számossággal lép fel; míg $8n+7$ alakú prímszám esetében felezésű 3-asból van $\left[\frac{p}{8} \right] + 1$, és a többi négyből külön-külön csak $\left[\frac{p}{8} \right]$.

Ez a tény, a $4n+3$ alakú prímszámok esetében, direkt általánosítása tehát a bevezetésben említett LAGRANGE-féle tételnek a *kettős* következésekről.

Eredményeink illusztrálására álljanak itt a következő numerikus példák.

1. Példa. $p = 19 = 8 \cdot 2 + 3$,

¹ Evidens, hogy az x_2, y_1, y_2 ismeretlenek értékeit simultan is kaphatjuk a (3), (5), (6) egyenletek alkotta, «2» determinanssal bíró linearis rendszer CRAMER-féle feloldásából.

Residuuum: 1 4 5 6 7 9 11 16 17
Non-residuuum: 2 3 8 10 12 13 14 15 18.

Miként könnyű meggyőződni, ebben az esetben:

$$(1, 1, 1) = \dots = (-1, -1, -1) = 2 = \left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor,$$

miként formuláink is kívánják.

2. *Példa.* $p = 23 = 8 \cdot 2 + 7$. Itt:

Residuuum: 1 2 3 4 6 8 9 12 13 16 18
Non-residuuum: 5 7 10 11 14 15 17 19 20 21 22,

míg:

$$(1, 1, 1) = \dots = (-1, -1, 1) = 2 = \left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor,$$

és

$$(1, 1, -1) = \dots = (-1, 1, -1) = 3 = \left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor + 1,$$

teljes megegyezésben (a), (b)-vel.

II.

$$p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Sokkalta nehezebb kérdés a hármassuccessiók számosságainak meghatározása, ha p valamely $4n+1$ alakú prímszám.

Alább található végformuláink — a $4n+3$ alakú p esetében érvényes képleteinktől eltérőleg — a keresett számosságokat mint a p -nek és *azonkívül* egy bizonyos *aritmetikai összegnek* a függvényeit fejezik ki. Ilyként az egész nehézség redukálódott és koncentrálódott *ennek* az összegnek a p -ben *kifejezendő* meghatározására. Habár ezzel az utóbbi feladattal jelen dolgozatunk nem foglalkozik, mégis mindjárt itt bemutatjuk ezt az érdekes összeget. V. ö. a 166. oldal ¹ jegyzetét.

Legyenek az 1, 2, ..., $p-2$ sorozatban foglalt összes *másodfokú* számok: ¹

$$a_1, a_2, \dots, a_r;$$

¹ N. M. E. 251. oldal szerint: $\nu = \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right)$.

vagyis tehát azok a számok, a melyekre nézve:

$$\left(\frac{a_k}{p}\right) = \left(\frac{a_k+1}{p}\right) \mp \left(\frac{a_k+2}{p}\right);$$

($1 \leq k < \nu$).

A fentemlített összeg már most a következő:

$$S(p; \nu) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{a_k}{p}\right); \quad (\text{I})$$

a melyet még, mint könnyű látni, ebbe az alakba is önthetünk:

$$S(p; \nu) = \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h}{p}\right) \cdot \varepsilon_h,$$

a hol $\varepsilon_h = 1$, ha h fokszáma $n(p, h) = 2$, és minden más esetben zérus. Ilyen ε_h lehet például a következő:

$$\varepsilon_h = \left(\frac{\omega(h)}{p}\right),$$

a hol, egész-számú x mellett,

$$\omega(x) = \left[(n_x-1)(n_x-3)(n_x-4) \dots \left(n_x - \frac{p-1}{2}\right) \right]^2,$$

és $n_x = n(p, x)$.

Ugyanis tudjuk, hogy $1 \leq h \leq p-1$ mellett (l. c. 237. l.):

$$1 \leq n(p, h) \leq \frac{p-1}{2},$$

s így, ha $n(p, h) \neq 2$, akkor $\omega(h) \equiv 0, \text{ mod } p$, vagyis $\varepsilon_h = 0$, mert conventio szerint a nevezővel osztható számlálójú LEGENDRE-symbolum értéke zérus; míg, ha $n(p, h) = 2$, akkor $\omega(h) \not\equiv 0, \text{ mod } p$ és teljes négyzet, azaz $\varepsilon_h = 1$, a miként kívántuk. $S(p; \nu)$ -nek ebben az utóbbi alakjában a ν számosság már nem szerepel.¹

¹ Csak mellékesen jegyezzük itt meg, hogy általában minden p -re és a -ra:

$$n(p, a) \leq \left[\frac{p}{4}\right] + 2;$$

a mennyiben, ha n_k ($k=1, 2, \dots$) jelenti az $(1, p-1)$ közben lévő k -adfokú

Az $S(p; \nu)$ összeg biztosan *páratlan*, ha csak $p \equiv 1 \pmod{4}$, mert:

$$S(p; \nu) \equiv \frac{p-1}{4} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{p} \right) \right) \equiv 1, \pmod{2}$$

úgy $8n+1$, mint $8n+5$ alakú p mellett. Így tehát $S(p; \nu)$ ($p \equiv 1 \pmod{4}$), sohasem zérus; de hogy az *előjele* hogyan függ a ν -tól — mert például $S(37; 9) = -1$, míg $S(53; 13) = 3$ — az aligha ilyen egyszerű kérdés. Az a tény, hogy a $4n+1$ alakú $p-k$ esetében a triók számosságai ez $S(p; \nu)$ összeg által fejeződnek ki, a 3-as következesek tekintetében határozott különbséget statuál a $4n+1$ és a $4n+3$ alakú prímszámok között. Más oldalról trivialis, hogy ez a symbolum-összeg a $4n+3$ alakú p -nél tárgyalt analog kérdéseknél semmiféle szerepet sem játszhatott, a mennyiben ilyen p mellett *értéke mindig zérus*. Ugyanis ekkor minden R, R, N triónak, vagyis minden másodfokú négyzetmaradéknak,¹ megfelel egy R, N, N trió, az $(a, p-a)$ hozzárendeléssel, tehát — minthogy minden N, N, \dots nem-maradék sorozat utolsóelőtti N -je másodfokú — egyben egy másodfokú négyzet nem-maradék is; és viszont: az N, N, R képeknek ugyanígy megfelel egy N, R, R kép s illetőleg az esetleg $p-2, p-1$ által alkotott N, N képnek az $1, 2$ alkotta R, R kép; míg megint csak minden R, R, \dots négyzet-maradék

számok számát és μ az illető p mellett fellépő *legnagyobb* fokszám, akkor (l. c. 243. oldal (7)):

$$n_3 + n_4 + \dots + n_\mu = M(p; 3) = \left[\frac{p}{4} \right] - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-1}{p} \right) + \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right\} \leq \left[\frac{p}{4} \right].$$

De feltevésünk szerint $n_\mu \geq 1$, a honnan világos, hogy $n_{\mu-1} \geq 1, n_{\mu-2} \geq 1, \dots$ szóval:

$$\mu - 2 \leq \left[\frac{p}{4} \right],$$

a mi állításunkat igazolja.

¹ Ugyanis most -1 nem-maradék s így az $1, 2, \dots, p-2, p-1$ sorozat R, R képpel nem végződhetik.

sorozat utolsó előtti R -je másodfokú, és így tovább, azért csak-
ugyan:¹

$$S(p; \nu) = 0; \quad p \equiv 3 \pmod{4},$$

qu. e. d.

*

Emez észrevételek után áttérünk a fentebb jelzett relatiók megállapítására.

Az I. rész jelöléseit megtartva, mindenekelőtt látjuk, hogy:

$$r_{12} = n_{11}, \quad r_{22} = n_{21}, \quad (a)$$

szóval 8 ismeretlen helyett eleve is csupán hattal van dolgunk.

E 6 ismeretlen között fennáll 5 linearis relatio. És pedig:

$$I_1 \cong r_{11} + 2r_{12} + r_{21} + 2r_{22} + n_{12} + n_{22} = p - 3; \quad (1)$$

$$I_2 \cong r_{11} + \quad \quad \quad + n_{22} = \frac{p-5}{4} - \varepsilon; \quad (2)$$

$$I_3 \cong r_{11} + r_{12} \quad \quad \quad = \frac{p-5}{4} - \varepsilon; \quad (3)$$

$$I_4 \cong \quad r_{12} + \quad + r_{22} (= n_{21}) \quad \quad \quad = \frac{p-1}{4}; \quad (4)$$

$$I_5 \cong r_{11} + 2r_{12} + \quad \quad \quad + n_{12} \quad \quad \quad = \frac{p-5}{2}; \quad (5)$$

$$\left(\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right),$$

a hol \cong az «azonosan egyenlő»-ség jele.

Mindenekelőtt igazoljuk ezeket az összefüggéseket.

Az (1) egyenlet kifejezi, hogy az összes triók számosságai-
nak összege $p-3$; a mi világos, mert az 1, 2, ..., $p-3$ számok
mindegyike egy és csakis egy triónak az első eleme.

A (2) relatio kimondja, hogy a 3-nál nem alacsonyabb-

¹ Az $(a, p-a)$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű voltából nyilván-
való, hogy különböző 2-odfokú R -ekhez különböző 2-odfokú N -ek és viszont
is tartoznak.

fokú számok száma $\frac{p-5}{4} - \varepsilon$; a mennyiben $4n+1$ alakú p -re az N. M. E. 243. oldal (7) formulája szerint:

$$M(p; 3) = \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor - \left\lfloor 1 + \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{-1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor \right) \right\rfloor - \frac{p-1}{4} - 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor \right).$$

A (3) összefüggés akként származik, hogy megállapítjuk a kettőnél nem alacsonyabb fokú négyzet-maradékok számát az $1, 2, \dots, p-2$ sorozatból. E végből segítségül vesszük az N. M. E. dolgozat 240. oldalán megállapított tényt, a mely szerint, ha az $n(p, a) \geq 2$ -t kielégítő a -számok parameteres alakja:

$$a(t) \equiv \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) - \frac{2}{4}; \quad (\text{mod } p) \\ (2 \leq t \leq p-2),$$

akkor mindig:

$$\left(\frac{a(t)}{p} \right) = \left(\frac{t}{p} \right).$$

De $a(t) \equiv a(t')$, $t \mp t' \pmod{p}$ mellett akkor és csakis akkor, ha $t \cdot t' \equiv 1 \pmod{p}$, a honnan világos — tekintettel még $\left(\frac{t}{p} \right) = \left(\frac{t^{-1}}{p} \right)$ -re —, hogy az $n(p, a) \geq 2$ -t kielégítő négyzet-maradékok száma egyenlő a $2, 3, \dots, p-2$ sorozatban foglalt residuumok számának a felével, a mely számosság: $\frac{p-5}{4}$.

Más oldalról, minden *ilyen* négyzet-maradék involvál: vagy egy R, R, R , vagy egy R, R, N triót; ha csak $p-2$, tehát 2 is nem-maradékok; míg, ha $p-2, 2$ négyzet-maradékok, akkor az egyetlen $(p-2)$ -höz nem tartozik sem R, R, R , sem pedig R, R, N kép, hanem a $p-2, p-1$ által alkotott R, R ambo. Mindent egybevetve, lesz tehát:

$$(R, R, N) + (R, R, R) = \frac{1}{4} (p-5) - \frac{1}{2} \left(1 + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor \right),$$

a mely egyenlet (3)-mal azonos.

A (4) egyenlet előáll, ha meggondoljuk, hogy minden másodfokú residuum egy R, R, N , minden másodfokú non-residuum

viszont egy N, N, R hármast von maga után; kivéven, a midőn 2 residuum, a midőn is a $\rho - 2, \rho - 1$ párhoz újból csak a csonka R, R kettős tartozik. Miért is, tudván, hogy (N. M. E. 251. oldal) a másodfokúak számossága: $\left[\frac{\rho}{4} \right] + \varepsilon$, írhatjuk, (a) -t is tekintetbe véve:

$$r_{12} + n_{21} = r_{12} + r_{22} = \left[\frac{\rho}{4} \right] + \varepsilon - \varepsilon = \frac{1}{4}(\rho - 1),$$

a mi által (4) egyenletet is bebizonyítottuk.

Lássuk végül (5)-öt. Legyen R egy az 1-től és a $(\rho - 1)$ -től különböző, mondjuk *belső* maradék az $(1, \rho - 1)$ közből; az R akkor bizonyosan valamely triónak a középső eleme s az ilyen R -közepű triók négy különböző lehetséges típusa nyilván: R, R, N ; R, R, R ; N, R, R ; N, R, N ; és e típusok számosságai rendre: $r_{12} = n_{11}$, r_{11} , n_{12} , míg számosságaik összege: $r_{11} + 2r_{12} + n_{12}$. De ez a számosság, az 1 és a $\rho - 1$ két szélső maradéktól eltekintve, egyben az összes négyzet-maradékok száma: szóval valóban:

$$r_{11} + 2r_{12} + n_{12} = \frac{\rho - 1}{2} - 2 = \frac{1}{2}(\rho - 5).$$

Már most írjuk (1)–(5)-ig terjedő egyenleteinket ebben az alakban: ¹

$$\begin{aligned} I_1 - r_{11} &= \rho - 3 - r_{11}; \\ I_2 - r_{11} &= \frac{1}{4}(\rho - 5) - \varepsilon - r_{11}; \\ I_3 - r_{11} &= \frac{1}{4}(\rho - 5) - \varepsilon - r_{11}; \\ I_4 &= \frac{1}{4}(\rho - 1); \\ I_5 - r_{11} &= \frac{1}{2}(\rho - 5) - r_{11}; \end{aligned}$$

a baloldalakon egyedül szereplő: $r_{12}, r_{21}, r_{22}, n_{12}, n_{22}$ öt ismeretlen coefficienseiből alkotott determinans:

¹ Egy hatodik ilyen, emez öttől *nem függő* linearis egyenlet megállapítása — mint a melynek segítségével azután mind a 6 ismeretlenünk meghatározható volna — sehogyan sem sikerült; a mennyiben a megfontolásoknak és összeszámlálásoknak az a *kategoriája*, a melyből a szöveg 5 egyenletét is merítettük, sokkal összetettebb lépések alkalmazásával is, mindig a fönti egyenletek linearis *folymányait* nyújtotta.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad .$$

úgy hogy ezt az öt ismeretlent az úgynevezett CRAMER-féle szabály szerint biztosan kifejezhetjük linearisan az egyetlen r_{11} -ben.

Eljárásunk a következő. Látjuk, hogy

$$I_4 - I_3 \cong n_{22} - r_{12} = 0,$$

vagyis $n_{22} = r_{12}$, a mi által I_1 -ből lesz:

$$r_{11} + 3r_{12} + r_{21} + 2r_{22} + n_{12} = p - 3. \quad (1^*)$$

De I_3 -ből:

$$r_{12} = \frac{1}{4}(p-5) - \varepsilon - r_{11},$$

míg az

$$I_5 - 2I_3 \cong n_{12} - r_{11} = 2\varepsilon,$$

$$I_4 - I_3 \cong r_{22} - r_{11} = 1 + \varepsilon$$

relációkból:

$$n_{12} = r_{11} + 2\varepsilon, \quad r_{22} = r_{11} + 1 + \varepsilon.$$

Végül pedig ezeknek az értékeknek az (1^*) -be való helyettesítése és (1^*) -nek r_{21} -re történő feloldása révén igen egyszerűen kapjuk, hogy:

$$r_{21} = \frac{1}{4}(p-5) - \varepsilon - r_{11} = r_{12}.$$

Ezzel közvetlenül célunk el is van érve. Nevezetesen, a discutált részletek összefoglalása a következő formula-rendszert nyújtja:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= r_{11}; \\ n_{22} = r_{12} = r_{21} = n_{11} &= \frac{1}{4}(p-5) - \varepsilon - r_{11}; \\ r_{22} = n_{21} &= r_{11} + 1 + \varepsilon; \\ n_{12} &= r_{11} + 2\varepsilon; \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left(\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right).$$

Ezek után r_{11} helyett bevezetjük a főntebb értelmezett $S(p; \nu)$ összeget mint segédmenntiséget; jelöljük röviden λ -val.

A λ kétféle módon is belejön a tárgyalásba: az *egyik* mód egyszerűbb és direktebb, míg a *másik* összetettebb ugyan, de annyiban érdekesebb, mert mélyebb bepillantást enged az itt uralkodó viszonyokba. Intézzük el előbb a dolog nehezebbik részét.

1. A λ bevezetésnek *második* módja.

Az N. M. E. 241. old. (d) formulája szerint:

$$\sum_{t=2}^{p-2} \left(\frac{a(t)}{p} \right) = - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right), \quad (\beta)$$

a hol $a(t)$ az $n(p, a) \geq 2$ -nek eleget tevő a -számokat jelenti. Minthogy a jelen p -re -1 residuum és továbbá a fönti összegben minden $a(t)$ kétszer lép fel, írhatjuk:

$$\sum \left(\frac{a}{p} \right) = -1; \quad n(p, a) \geq 2. \quad (\gamma)$$

Idézett helyen a (β) egyenlet nincsen bizonyítva, miért is e helyütt pár szóval bebizonyítjuk. Tudjuk, hogy:

$$S = \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h}{p} \right) = 0,$$

továbbá, hogy $\left(\frac{a(t)}{p} \right) = \left(\frac{t}{p} \right)$, (N. M. E. 240. l.). Ezt érvényesítve lesz:

$$\sum_{t=2}^{p-2} \left(\frac{a(t)}{p} \right) = \sum_{t=2}^{p-2} \left(\frac{t}{p} \right) = S - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right),$$

a mivel (β) -t igazoltuk. Már most λ a (γ) -összeg ama rész-összege, a melynek tagjaiban az a fokszáma: $n(p, a) = 2$, míg (γ) többi tagjában $n(p, a) > 2$. Minthogy a λ -beli a -kra nézve

$$\left(\frac{a^i}{p} \right) = \left(\frac{a+1}{p} \right),$$

azért:

$$\lambda = \sum_{k=1}^v \binom{a_k + 1}{p}.$$

Adjuk λ -t ebben az alakjában a (γ) -egyenlet mindkét oldalához, akkor lesz:

$$\sum_{n(p, a) \geq 2} \binom{a}{p} + \sum_{k=1}^v \binom{a_k + 1}{p} = -1 + \lambda. \quad (\delta)$$

Szükségünk van még a következő fogalmakra:

a) Ha a olyan n -ed fokú szám, ($a > 0, n > 0$), hogy:

$$\binom{a-1}{p} \neq \binom{a}{p},$$

akkor azt mondjuk, hogy a *tiszta n -ed fokú*.

β) Továbbá, ha a *tiszta n -edfokú*, akkor az

$$a, a+1, \dots, a+n-1$$

sorozatot *n -edrendű seriának* mondjuk.

E kifejezést használva, mondhatjuk tehát, hogy a (δ) baloldala nem más, mint az $(1, p-1)$ közben fellépő összes 2-od, 3-ad, és i. t. rendű seriákban foglalt számok négyzet-characterinek az összege.² Ha tehát r_2, r_3, \dots a négyzet-maradékok, míg

¹ Ebből a definitióból az $a=1$ esetben, a midőn is

$$\binom{0}{p} = 0 \neq 1 = \binom{1}{p},$$

következik, hogy az egységnek mindig *tiszta* fokszáma van. Könnyű belátni, hogy a akkor és csakis akkor *tiszta n -edfokú*, ha:

$$n = n(p, a) = n[p, p - a - n(p, a) + 1];$$

v. ö. N. M. E. 237. oldal, jegyzet ¹.

² E helyütt említjük fel a λ -összegnek egy egyszerű tulajdonságát. És pedig, ha a_k 2-odfokú szám, akkor a_k+1 utolsó eleme egy seriának, a melynek rendszáma: $n_k = n(p, p - a_k - 1)$ s így első eleme: $a_k^* = a_k - n_k + 2$; minthogy pedig az ugyanabban a seriában fellépő elemek quadraticus cha-

n_2, n_3, \dots a négyzet-nem-maradékok alkotta 2-od, 3-ad, ... rendű sériák számosságait jelölik az $(1, p-1)$ közben, akkor nyilván írhatni:

$$-1 + \lambda = 2(r_2 - n_2) + 3(r_3 - n_3) + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (r_k - n_k), \quad (\delta')$$

a hol a ∞ azt jelenti, hogy az összegezés addig folytatandó, a míg nem a k eléri maximumát, a melynél magasabb indexű r -ek és n -ek tehát mind eltűnnek. Mint láttuk, ilyen véges maximum létezik és $\leq \left[\frac{p}{4} \right] + 2$. A (δ') összeget most kissé átalakítjuk. Nevezetesen nyomban átlátható, hogy a jobboldalt még így is írhatjuk:

$$2 \sum_{k=2}^{\infty} r_k - 2 \sum_{k=2}^{\infty} n_k + \sum_{h=3}^{\infty} (h-2) r_h - \sum_{h=3}^{\infty} (h-2) n_h.$$

De $\sum_{k=2}^{\infty} r_k$ megadja a quadraticus residuumok alkotta egynél nagyobb rendű sériák összes számát, vagyis — minthogy minden ilyen sériához tartozik *egy bizonyos* másodfokú maradék s megfordítva minden másodfokú maradék *egy bizonyos* ilyen seria utolsó-előtti eleme — tehát a másodfokú négyzet-maradékok számát. Ugyanígy $\sum_{k=2}^{\infty} n_k$ egyenlő a másodfokú non-residuumok számával. Így tehát a fenti négyes összeg első ketteje együtt, egyszerűen 2λ . Ha továbbá r_h a h -adrendű residuum-sériák száma, akkor: mivel minden ilyen seria — $h \geq 3$ — $h-2$ számú R, R, R successiót tartalmaz s viszont minden ilyen trio valamely kettőnél magasabb-rendű residuum-sériában előfordul; — a $(h-2)r_h$ szorzatok összege egyben az R, R, R triók számossága, azaz régebbi jelölésünk szerint r_{11} . Ugyanígy a $(h-2)n_h$,

racterei egyenlők, azért, ha a_1, a_2, \dots, a_v tetszésszerűen oly számok, a melyekre nézve:

$$a_1^0 \leq a_1 \leq a_1, \quad a_2^0 \leq a_2 \leq a_2, \quad \dots, \quad a_v^0 \leq a_v \leq a_v,$$

akkor mindig:

$$\lambda = \sum_{k=1}^v \left(\frac{\alpha_k}{p} \right),$$

a miáltal a λ -nak $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_v$ számú különböző alakját nyertük.

$h \geq 3$ szorzatok összege n_{22} . Végeredményként írhatjuk tehát (δ') helyett:

$$\lambda - 1 = 2\lambda + r_{11} - n_{22},$$

azaz

$$n_{22} - r_{11} = 1 + \lambda. \quad (\text{III})$$

Ez a keresett összefüggés, a mely a λ összeget a 3-as következesek számosságaival kapcsolatba hozza.

2. A λ bevezetésének *első* módja.

Sokkalta egyszerűbb és minden körülményesség nélkül czélhoz vezet a következő okoskodás.

Ha R_2 a másodfokú quadraticus maradékok száma, N_2 pedig a másodfokú quadraticus nem-maradékoké, akkor:

$$\lambda = R_2 - N_2. \quad (\epsilon)$$

Legyen már most r másodfokú quadraticus maradék; akkor két eset lehetséges: r vagy olyan, hogy $r + 2 = p$, vagy nem ilyen. Az első esetben: $r = p - 2$, tehát $\binom{2}{p} = 1$, míg a második eset az általános, midőn is $r + 2$ nem-maradék. Így tehát: $\binom{2}{p} = -1$ mellett az első eset fel nem léphet, vagyis ilyenkor minden másodfokú r -hez tartozik egy R, N következés; míg $\binom{2}{p} = 1$ mellett az egyetlen $(p - 2)$ -höz nem. Az ekként hozzárendelt R, N ambók azonban nem merítik ki az összes ilyen ambókat, mert kimaradtak azok, a melyek nem tartoznak semmiféle R, R, N következéshez sem. Ez utóbbi ambók ugyanis vagy az 1, 2 által — a midőn is $\binom{2}{p} = -1$ —, avagy pedig az N, R, N successiók utolsó két tagja által alkotvák; számuk tehát: $n_{12} + \frac{1}{2} \left(1 - \binom{2}{p} \right)$. Mindezeket egybevetve, látjuk tehát, hogy:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \binom{2}{p} \right) + (R, N) - n_{12} - \frac{1}{2} \left(1 - \binom{2}{p} \right) = \\ &= (R, N) - n_{12} + \binom{2}{p}. \end{aligned}$$

Hasonló szellemben találjuk N_2 -re, a hol is semmi különös distinctio nem merül fel, hogy:

$$N_2 = (N, R) - r_{21}.$$

Kaptuk tehát végre:

$$\lambda = R_2 - N_2 = (R, N) - (N, R) + r_{21} - n_{12} + \left(\frac{2}{p}\right).$$

De tudva, hogy $(R, N) = (N, R)$, (I. SERRET, idézett mű, p. 96—97.), lesz:

$$\lambda = r_{21} - n_{12} + \left(\frac{2}{p}\right),$$

vagyis (II) egyenleteink alapján:

$$1 + \lambda = r_{21} - n_{12} + 2\varepsilon = n_{22} - (r_{11} + 2\varepsilon) + 2\varepsilon = n_{22} - r_{11},$$

a mi már (III)-mal azonos.

*

A λ illetén bevezetése után most már megállapíthatjuk végformuláinkat, mint a melyek 8 főmennyiségünk mindegyikét, tehát az r_{11} , r_{12} , ..., n_{21} számosságokat igen egyszerűen fejezik ki a p -ben és a λ -ban.

Nevezetesen: (II) és (III) szerint:

$$n_{22} - r_{11} = \frac{p-5}{4} \varepsilon;$$

$$n_{22} - r_{11} = 1 + \lambda;$$

s így

$$2r_{11} = \frac{p-5}{4} - 1 - \varepsilon - \lambda. \quad (2)$$

Legyen $p \equiv 1 \pmod{8}$, azaz $\varepsilon = 1$.

Ebben az esetben (2) adja:

$$r_{11} = \left[\frac{p}{8}\right] - \frac{\lambda+3}{2}.$$

Írjuk be r_{11} -nek ezt az értékét a (II) formulákba. Egyszerű számítással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} n_{22} = r_{12} = r_{21} = n_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{\lambda-1}{2}, \\ r_{22} = n_{21} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda-1}{2}, \\ n_{12} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda-1}{2}; \end{aligned} \tag{IV*}$$

úgy hogy most még $n_{12} = r_{22}$ is fennáll.

Ha viszont $p \equiv 5 \pmod{8}$, azaz $\varepsilon = 0$, akkor ugyanígy nyerjük:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda+1}{2}, \\ n_{22} = r_{12} = r_{21} = n_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{\lambda+1}{2}, \\ r_{22} = n_{21} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda-1}{2}, \\ n_{12} = r_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda+1}{2}; \end{aligned} \tag{IV**}$$

úgy hogy ebben az esetben n_{12} r_{11} -gyel esik egybe.

Ha végül tesszük:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{p} \right) \right),$$

akkor (IV*) és (IV**) rendszerek összefoglalhatók a következő, minden $4n+1$ alakú p -re érvényes képletcsoportban:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda+1}{2} - \varepsilon, \\ n_{12} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda-1}{2} - \eta, \\ r_{22} = n_{21} &= \left[\frac{p}{8} \right] - \frac{\lambda-1}{2}, \\ n_{22} = r_{12} = r_{21} = n_{11} &= \left[\frac{p}{8} \right] + \frac{\lambda+1}{2} - \varepsilon; \\ \left(\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right); \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{p} \right) \right) \right). \end{aligned} \tag{IV}$$

Ezek a képletek annyiban teljesen analog szerkezetűek a $4n+3$ alakú p -re az I. részben talált megfelelő formulákkal, a mennyiben — legalább is *alakilag* — quasi mint főrészt itt is a $\left[\frac{p}{8}\right]$ érték dominál; mindazonáltal — a míg a λ -összeg abszolút értékének felső korlátjáról s továbbá a λ előjeléről közelebbi tudásunk nincsen — nem lehet módunkban a λ -tól függő tagoknak a triók számára gyakorolt befolyását megítélni.⁴

Az uralkodó viszonyok illusztrálására bemutatunk két szám-beli példát: az elsőben λ pozitív, a másodikban negatív.

1. Példa. $p=53=8\cdot 6+5$; $\varepsilon=0$, $\eta=1$.

Itt a quadr. Res.—NRes. táblázat a következő:

Residuum:	1	4	6	7	9	10	11	13	15	16	17		
Non-residuum:	2	3	5	8				12	14		18	19	20
Residuum:			24	25			28	29					
Non-residuum:	21	22	23		26	27		30	31	32	33	34	35
Residuum:	36	37	38	40	42	43	44	46	47	49	52		
Non-residuum:			39	41			45	48	50	51			

úgy hogy $\lambda=3>0$; míg a (IV) képletekből sorjában:

$$r_{11}=n_{11}=4; \quad r_{22}=n_{21}=5;$$

$$n_{11}=n_{22}=r_{12}=r_{21}=8;$$

megegyezésben a fönti táblázat nyújtotta értékekkel.

2. Példa. $p=37=8\cdot 4+5$; $\varepsilon=0$, $\eta=1$.

Ebben az esetben kapjuk:

Residuum:	1	3	4	7	9	10	11	12	16						
Non-residuum:	2	5	6	8					13	14	15	17	18	19	20
Residuum:	21			25	26	27	28	30		33	34	36			
Non-residuum:	22	23	24					29	31	32		35			

vagyis $\lambda=-1<0$. A (IV) rendszer pedig adja:

$$r_{11}=n_{12}=4=n_{11}=n_{22}=r_{12}=r_{21}, \quad r_{22}=n_{21}=5;$$

s ugyanígy a tabella.

⁴ L. a 166. oldal ¹ jegyzetét.

III.

Jelen alkalmat használjuk fel arra, hogy az N. M. E. dolgozat egyik megjegyzéséhez néhány kiegészítő észrevételt fűzzünk. Ezek az észrevételek, bár szorosan nem tartoznak a főntebb tagolt gondolatkörbe, mindazonáltal a β -as successiók kérdéscomplexumával szervesen összefüggenek.

Megemlítettük az N. M. E. 252. oldalán, hogy ha 2 négyzetmaradéka a p -nek, akkor a legalább harmadfokú számok igen egyszerűen írhatók fel egyetlen parametertől függő *explicit* alakjukban. Közelebbről tekintvén ezt a feladatot, a következő tétel nyújt arra igen egyszerű feleletet:

Ha

$$\left(\frac{2}{p}\right) = +1,$$

akkor az $1, 2, \dots, p-3$ számsornak mindama és csakis ama b számai, a melyekre nézve

$$n(p, b) \geq 3,$$

a

$$b(\varrho) \equiv \frac{8\varrho}{B(\varrho)} \pmod{p} \tag{A}$$

congruentia által advák, melyben

$$B(\varrho) \equiv \varrho^3 - 6\varrho + 1 \pmod{p};$$

míg a ϱ parameter egy oly $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ értéksort fut át a $(2, p-2)$ közből, a melynek tagjaira nézve:

1. $\left(\frac{\varrho_i}{p}\right) = +1, \quad 1 \leq i \leq n;$
2. $\varrho_i \equiv (1 \pm \sqrt{2})^2 \equiv 3 \pm 2\sqrt{2} \pmod{p}, \quad 1 \leq i \leq n;$
3. $\varrho_i \cdot \varrho_k \equiv 1 \pmod{p}, \quad 1 \leq i, k \leq n.$

Az n számosság értéke:

$$n = \left[\frac{p}{4}\right] - (1 + \varepsilon); \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-1}{p}\right) + 1 \right).$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt látjuk, hogy a

$$B(\varrho) \equiv \varrho^2 - 6\varrho + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentiának két gyöke:

$$\varrho_1 \equiv (1 + \sqrt{2})^2 \text{ és } \varrho_2 \equiv (1 - \sqrt{2})^2 \pmod{p},$$

úgy hogy az 1., 2., kikötés folytán az (A)-ből származó $b(\varrho)$ számok valamennyien az $(1, p-1)$ közbe esnek.

Hogy továbbá az (A) nyújtotta $b(\varrho)$ -kra nézve:

$$n(p, b(\varrho)) \geq 3,$$

közvetlenül kiviláglik a következő congruentiákból:

$$\left. \begin{aligned} b(\varrho) + 1 &\equiv \frac{8\varrho + B(\varrho)}{B(\varrho)} \equiv \frac{(\varrho+1)^2}{B(\varrho)}; \\ b(\varrho) + 2 &\equiv \frac{(\varrho+1)^2 + B(\varrho)}{B(\varrho)} \equiv 2 \cdot \frac{(\varrho-1)^2}{B(\varrho)}; \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

a honnan — lévén 2. és 1. szerint ϱ négyzet-maradékok —

$$\left(\frac{b(\varrho)}{p} \right) = \left(\frac{b(\varrho)+1}{p} \right) = \left(\frac{b(\varrho)+2}{p} \right) = \left(\frac{B(\varrho)}{p} \right),$$

azaz valóban $n(p, b(\varrho)) \geq 3$.

Ha $\varrho \equiv 1$, akkor $b(\varrho) \equiv b(1) \equiv p-2$, míg $\varrho \equiv -1$ mellett, a midőn is p valamely $8n+1$ alakú szám, $b(-1) \equiv p-1$; vagyis $b(1)$ és $b(-1)$ nem lehetnek b -számok. Ezért veendő a ϱ -k csupán a $(2, p-2)$ intervallumból.

Igen egyszerűen kiderül az a tény is, hogy a fenti ϱ_1, ϱ_2 értékek ± 1 -től különbözök, tehát mindig a $(2, p-2)$ köz számai. Ugyanis az

$$(1 \pm \sqrt{2})^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

relatióból jönne a lehetetlen

$$1 \pm \sqrt{2} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

congruentia. Ha pedig

$$\left(\frac{-1}{p} \right) = +1 \text{ és } f^2 \equiv -1, \pmod{p}$$

akkor az

$$(1 \pm \sqrt{2})^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

feltevés az

$$1 \pm \sqrt{2} \equiv \pm f,$$

és illetőleg

$$2 \equiv (\pm f - 1)^2 \equiv \mp 2f \pmod{p}$$

abszurd következményhez vezet.

A kizárt ϱ_1, ϱ_2 pár *socius*-pár, azaz $\varrho_1 \varrho_2 \equiv 1 \pmod{p}$, míg $\varrho \equiv \frac{1}{e}$ a ± 1 kizárása miatt nem lehetséges. Innen következik, hogy a $(2, p-2)$ közben fellépő és az 1., 2. és 3. kikötésekkel *compatibilis* ϱ -k számossága:

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{2} - (1 + \varepsilon) - 2 \right) = \left[\frac{p}{4} \right] - (1 + \varepsilon)$$

összhangban a tétel állításával. Más oldalról azonban az N. M. E. II. (7) szerint ez a számosság egyszersmind az összes különböző b -k száma. Ha tehát az (A) -ból az 1—3. feltételek mellett nyert $b(\varrho)$ -k \pmod{p} különbözők, akkor (A) csakugyan az összes b -számokat és csakis ezeket nyújtja s mindeniket csupán egyszer; ha ez így van, akkor tételünk be is lesz bizonyítva. Tegyük fel evégből, hogy $\varrho \equiv \varrho' \pmod{p}$ és:

$$b(\varrho) \equiv b(\varrho'); \quad (\pmod{p})$$

egyszerű számítással kapjuk innen, hogy:

$$(\varrho - \varrho')(\varrho\varrho' - 1) \equiv 0, \quad (\pmod{p})$$

a mely congruentia 3. miatt lehetetlenség, qu. e. d.

Éppen kimutatott tételünk alapján még egynéhány érdekes relatiót óhajtunk itt megállapítani, mint a melyek a szóban forgó $8n \pm 1$ alakú p -k esetében a b -számok összegét az a -számok — $n(p, a) \geq 2$ — összegéhez fűzik.

Bontsuk fel a $8\varrho : B(\varrho)$ hányadost részlettörtekre; ezáltal kapjuk:

$$b(\varrho) \equiv \frac{8}{\varrho_1 - \varrho_2} \left\{ \frac{\varrho_1}{\varrho - \varrho_1} - \frac{\varrho_2}{\varrho - \varrho_2} \right\}; \quad (\pmod{p}),$$

avagy a $e_1 - e_2 \equiv 4 \sqrt{2}$ érték bevezetésével

$$b(\rho) \equiv \sqrt{2} \left\{ \frac{e_1}{\rho - e_1} - \frac{e_2}{\rho - e_2} \right\}, \quad (\text{mod } p) \quad (B^*)$$

a hol a $\sqrt{2}$ előjele irrelevans, a mennyiben a $\sqrt{2}$ előjelváltásával a e_1, e_2 gyökök felcserélődnek s így a congruentia jobb-
oldala invariáns marad. Tudjuk azonban,¹ hogy az $n(p, a) \geq 2$ -
nek eleget tevő a -számok az

$$a(\rho) \equiv \frac{1}{\rho - 1}; \quad (\text{mod } p)$$

congruentiával is megadhatók, a melyben ρ az egység kivételével p -nek valamennyi négyzetmaradék-értékét felveszi. Ezt az észrevételt érvényesítvén a (B^*) -congruentia jobboldalára nézve, kapjuk, hogy:

$$b(\rho) \equiv \sqrt{2} \left\{ a\left(\frac{\rho}{e_1}\right) - a\left(\frac{\rho}{e_2}\right) \right\}, \quad (\text{mod } p)$$

avagy $e_1 e_2 \equiv 1 \pmod{p}$ miatt,

$$b(\rho) \equiv \sqrt{2} \{ a(\rho e_2) - a(\rho e_1) \}; \quad (B)$$

szóval — a $\sqrt{2}$ faktortól eltekintve — minden b -szám két a -szám különbsége.

Ezt a (B) -összefüggést aknázzuk ki a fent említett relatiók levezetése céljából. Ezek a relatiók a következők:

a) Ha p valamely $8n \pm 1$ alakú prímszám, akkor mindig:

$$\sum_{\rho} b(\rho) - \sum_{\bar{\rho}} a(\bar{\rho}) \equiv 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\text{mod } p) \quad (C)$$

a hol

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right),$$

mig ρ a fenti tételünkben jellemzett maradékokon, $\bar{\rho}$ pedig az egységen kívül a p összes maradékain végigmegy, tehát a bal-

¹ V. ö. «Észrevételek a kettő négyzetes characterére vonatkozólag» cz. dolgozatunk (1c) formuláját.

oldal a mod p különböző b - illetve a -számok összegének a különbsége.

β) Minthogy minden b szám *eo ipso* a szám is, a (C) relatióból nyomban adódik, hogy:

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i \equiv - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right), \pmod{p} \quad (C_1)$$

a hol

$$n(p, a_i) = 2, \quad (1 \leq i \leq m),$$

és

$$m = \left[\frac{p}{4} \right] + 1.$$

(V. ö. N. M. E. 251. oldal)

γ) A (C_1) congruentia egyszerű corollariuma, hogy:

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i \equiv -1, \pmod{p} \quad (C_2)$$

ha $p \equiv 8n-1$ alakú, míg

$$\sum_{i=1}^m a_i \equiv -\frac{3}{2}, \pmod{p} \quad (C_2')$$

ha $p \equiv 8n+1$ alakú.

δ) A (C) congruentia $8n+1$ alakú p esetében így írható:

$$\sum_{\varrho} b(\varrho) \equiv \sum_{\varrho} a(\bar{\varrho}) + \frac{3}{2}; \pmod{p}$$

de N. M. E. 241. oldal $a)$ szerint

$$3 \equiv 4 \sum_{\bar{\varrho}} a(\bar{\varrho}); \pmod{p} \quad (\delta)$$

tehát

$$\sum_{\varrho} b(\varrho) \equiv 3 \sum_{\bar{\varrho}} a(\bar{\varrho}) \equiv \left\{ 2 \sum_{\bar{\varrho}} a(\bar{\varrho}) \right\}^2 \equiv \left(\frac{3}{2} \right)^2, \pmod{p} \quad (C_3)$$

azaz szavakban: $8n+1$ alakú p prímszám esetében a b -számok összege mod p congruens az a -számok kétszeres összegének a négyzetével.¹

Minthogy (C_1) , (C_2) , (C_2') , (C_3) a (C) -nek közvetlen folyományai, azért is elegendő a (C) congruentiát igazolnunk.

¹ Ez a tény valamelyes formai analógiát mutat a jól ismert

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

összefüggéssel.

E végből követendő eljárásunk igen egyszerű. Tudva, hogy

$$b(\rho) \equiv b\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (\text{mod } p)$$

írhatjuk, (B) alkalmazásával:

$$2 \sum_{\rho} b(\rho) \equiv \sum_{\rho} b(\rho) + \sum_{\rho} b\left(\frac{1}{\rho}\right) \equiv \sqrt{2} \left\{ \sum_{\rho} a(\rho \rho_2) - \sum_{\rho} a(\rho \rho_1) \right\},$$

a hol \sum_{ρ} jelenti, hogy az a argumentumában a ρ -maradék csupán a $+1$, ρ_1 , ρ_2 , és $-8n+1$ alakú p esetében — a -1 maradék-értékeket hagyja ki az összegezésben.

Világos azonban, hogy:

$$\sum_{\tau=2}^{p-1} a(\tau^2) \equiv \sum_{\rho} a(\rho \rho_1) + a(\rho_1^2) + a(\rho_1) + \varepsilon a(-\rho_1), \quad (i=1, 2)$$

s így

$$\sqrt{2} \cdot \sum_{\rho} b(\rho) \equiv \left\{ a(\rho_1^2) - a(\rho_2^2) \right\} + \left\{ a(\rho_1) - a(\rho_2) \right\} + \varepsilon \left\{ a(-\rho_1) - a(-\rho_2) \right\}, \quad (C^*)$$

a mely congruentia jobboldalának kiértékelésével célunkat elértük.

A $\rho_2 \equiv \frac{1}{\rho_1} \pmod{p}$ összefüggés alapján nyilvánvaló, hogy a nevezett jobboldalban szereplő mindhárom különbségnek közös típusa:

$$a(x) - a\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^{-1}-1} \equiv \frac{x+1}{x-1} \pmod{p}$$

Ha e congruentiába x helyett rendre a ρ_1^2 , ρ_1 , $-\rho_1$ értékeket helyettesítjük, akkor kapjuk sorjában:

$$a(\rho_1^2) - a(\rho_1^{-2}) \equiv \frac{\rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \equiv \frac{18 + 12\sqrt{2}}{16 - 12\sqrt{2}} \equiv \frac{3}{4}\sqrt{2}, \quad (\text{mod } p)$$

$$a(\rho_1) - a(\rho_1^{-1}) \equiv \frac{\rho_1 + 1}{\rho_1 - 1} \equiv (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 2) \equiv \sqrt{2}, \quad (\text{mod } p)$$

$$a(-\rho_1) - a(-\rho_1^{-1}) \equiv \frac{\rho_1 - 1}{\rho_1 + 1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{mod } p)$$

Igy hát (C^*) átmegy a:

$$\sqrt{2} \sum_{\rho} b(\rho) \equiv \frac{3}{4} \sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sqrt{2}$$

congruentiába, a melyből (C) már (δ) alapján közvetlenül adódik, qu. e. d.

*

Példaképpen vegyük: $p=31=8 \cdot 4-1$. Ekkor:

<i>Residuum:</i>	1	2	4	5	7	8	9	10		14	16		
<i>Non-residuum:</i>		3		6					11	12	13	15	17
<i>Residuum:</i>	18	19	20						25		28		
<i>Non-residuum:</i>				21	22	23	24		26	27		29	30.

Tehát:

$$\sum_{\rho} b(\rho) \equiv 7+8+11+18+21+22 \equiv 25 \equiv \frac{7}{4} \equiv 7.8, \pmod{31};$$

megegyezésben fönt kimutatott tényeinkkel.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 nov. 12.-én tartott üléséből.)

A PHYSIKAI OPTIKA EGY VISZONOSSÁGI TÉTELÉRŐL.

FRÖHLICH IZIDOR r. tagtól.

TARTALOMMUTATÓ.

Összefoglaló általános bevezetés:

A legegyszerűbb gömbhullámok előállítása a szilárd rugalmasságtani és az elektromágnességi fényelmélet alapján.

1. §. A rugalmasságtani fényelmélet alapegyenletei. Két megoldási rendszer. 195. lap.

2. §. A legegyszerűbb rugalmassági gömbhullámok: A párhuzamos körökmenti (circumaxiális) és a délkörökmenti (meridionális) vektorrendszerek. Első és második ábra. 199. lap.

3. §. Az elektromágnességi fényelmélet alapegyenletei. Megoldási rendszerek szerkezete. 204. lap.

4. §. A legegyszerűbb elektromágnességi gömbhullámok: Párhuzamos körökmenti (circumaxiális) és délkörökmenti (meridionális) vektorrendszerek. Jegyzet. Harmadik és negyedik ábra. 208. lap.

5. §. Általános megjegyzés a gömbhullámok előállítására vonatkozólag. A gerjesztő középpontok különböző jellege. 212. lap.

I.

A physikai optika viszonossági tétele, ha az egyszínű, pontszerű két fényforrás ugyanabban az egynemű és egyöntetű átlátszó közegben van.

6. §. H. A. LORENTZ, L. MANDELSTAM, P. SELÉNYI dolgozatai ily tételre vonatkozólag. 216. lap.

7. §. Pontszerű, egymástól jelentékeny távolságban lévő két egyszínű fényforrás ugyanabban az egynemű, egyöntetű átlátszó közegben. 1. és 2. jegyzet. Ötödik és hatodik ábra. 217. lap.

8. §. Pontszerű, egymástól tetszés-szerinti nagy vagy kicsiny távolságban lévő fényforrások ugyanabban a közegben. A megoldások itt használt típusai. *A)* Az első típus esete. 222. lap.

9. §. Pontszerű, egymástól tetszés-szerinti nagy vagy kicsiny távolságban lévő fényforrások ugyanabban a közegben. *B)* A második típus esete. I. és II. jegyzet. 228. lap.

II.

A **physikai optika viszonyossági tétele, ha az egyszínű, pontszerű két fényforrás egymástól optikailag különböző, homogén és isotrop, átlátszó két közegben van.**

A) A két közeget gömbfelület választja el egymástól; a két fényforrás e felületnek ugyanazon a normálisán van.

10. §. A gömbfelület középpontja az első közegben van. A fényforrások létesítette vektorok a másik közegben. A szétterülés együtthatója. A viszonyossági tétel. Hetedik és nyolczadik ábra. 233. lap.

11. §. A gömbfelület középpontja a második közegben van. Hasonló tárgyalás. A viszonyossági tétel. Kilencedik és tizedik ábra. 241. lap.

12. §. A nyert viszonyossági tétel érvényességi körének kiterjesztése tetszés-szerinti jellegű egyszínű, pontszerű fényforrásokra. Kivételes esetek, mikor a tétel nem állhat fenn. 245. lap.

B) A két közeget sík választja el egymástól, a pontszerű, egyszínű két fényforrás e síkhoz képest tetszés-szerinti elhelyezésű.

13. §. Hivatkozás más helyen végzett oly vizsgálatok eredményeire, melyek ily esetekben a másik közegben létesített fényvektort kifejezik. Tizenegyedik, tizenkettedik és tizenharmadik ábra. 249. lap.

14. §. A viszonyosság tétele fennállásának feltételei sík határfelület esetében. 255. lap.

15. §. A tétel érvényességének feltételei külön a beesés síkjára merőleges és külön a vele párhuzamos vektor-összetevőre nézve. 257. lap.

16. §. A két vektor-összetevő egyszerre legyen egyenértékű: A lehető esetek tárgyalása. 259. lap.

17. §. Speciális esetek, a mikor az $a_1 b_1 c_1$; $a_2 b_2 c_2$ amplitudo-állandók nem valamennyien a zérustól különbözök. 261. lap.

18. §. A legegyszerűbb jellegű fényforrások esetei: Csak egy-egy gerjesztő összetevő van jelen. 264. lap.

BEVEZETŐ.

A legegyszerűbb gömbhullámok előállítása a szilárd-rugalmasságtani és az elektromágnességi fényelmélet alapján.¹

1. §. A rugalmasságtani fényelmélet alapegyenletei. Két megoldási rendszer.

Végtelen kiterjedésű, egynemű és egyöntetű szilárd-rugalmas közeg belsejében a következő mozgásegyenletek állanak fenn.²

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_x}{dt^2} &= v_1^2 \nabla^2 Q_x - (v_1^2 - v_2^2) \frac{d\sigma}{dt} \\ \frac{d^2 Q_y}{dt^2} &= v_1^2 \nabla^2 Q_y - (v_1^2 - v_2^2) \frac{d\sigma}{dt} \\ \frac{d^2 Q_z}{dt^2} &= v_1^2 \nabla^2 Q_z - (v_1^2 - v_2^2) \frac{d\sigma}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Ugy a szilárd-rugalmasságtani, mint az elektromágnességi fényelmélet alapján a legegyszerűbb gömbhullámok fejtegetését nyújtottam: *Polarisation des gebeugten Lichtes* című munkámban 141—186. [61]—[106] lapjain. Math. und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XXII. p. 65—438, különösen p. 141—186, vagy a B. G. TEUBNER-nél megjelent különkiadványban. I—XVI. és [1]—[358], különösen p. [61]—[106]. Leipzig, 1907.

Jelenlegi előállításom egyszerűbb, áttekinthetőbb és e dolgozat czéljának inkább megfelelő.

² Így G. KIRCHHOFF: Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. p. 121—124. Leipzig, 1876; s ennek kapcsán: Vorlesungen über mathematische Optik, herausgegeben von K. HENSEL, p. 5—10; Leipzig, 1891. — M. G. LAMÉ: Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides; deuxième édition, p. 137—150, Paris, 1866. — A. E. H. LOVE: Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity; Vol. I. p. 130—134; Cambridge, 1892.

Ezekben jelentik ρ_x, ρ_y, ρ_z a ρ rugalmassági elmozdulás derékszögű összetevőit az (xyz) helyen; σ a térfogatbeli tágulást, hol:

$$\sigma = \frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z}; \quad (2)$$

továbbá v_l^2 és v_t^2 a közeg rugalmassági állandóit.

A fentiekből a σ számára a következő egyenlet adódik:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = v_l^2 \nabla^2 \sigma. \quad (3)$$

Ha még a rugalmassági forgásnak (torsiónak), ω -nak $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ összetevőit a szokásos módon bevezetjük:

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial \rho_z}{\partial y} - \frac{\partial \rho_y}{\partial z}; \\ 2\omega_y &= \frac{\partial \rho_x}{\partial z} - \frac{\partial \rho_z}{\partial x}; \\ 2\omega_z &= \frac{\partial \rho_y}{\partial x} - \frac{\partial \rho_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

akkor, miként könnyű meggyőződni, a fentírt mozgásegyenletekből adódik:

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = v_t^2 \nabla^2 \omega_x; \quad \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = v_t^2 \nabla^2 \omega_y; \quad \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = v_t^2 \nabla^2 \omega_z. \quad (5)$$

Hasonlóképpen ismert az elemekből, hogy v_l a *longitudinális*, v_t a *transversális* rugalmas sík hullámok továbbterjedésének sebessége egyenletes és állandó amplitudo mellett.

A *fényjelenségek* elméletében a közeget *összenyomhatatlan*nak vesszük fel; a *hangjelenségek* elméletében ellenben *összenyomható*nak; az *első* csoportra nézve a térfogatbeli tágulás, σ zérussal egyenlő; a *másodikkra* nézve a rugalmassági forgás, ω zérussal egyenlő.

A fentírt egyenletrendszer részleges megoldásai egy eredetileg LAMÉ,¹ később A. CLEBSCH² által adott megoldási kerettel egyszerűen találhatók:

¹ M. G. LAMÉ: fent idézett művének már *első* kiadása 149. lapján, Páris, 1852.

² A. CLEBSCH: Über die Reflexion an einer Kugelfläche. CRELLE's. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61. p. 195; 1863

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}; \\ e_y &= \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}; \\ e_z &= \frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}; \end{aligned} \quad (6)$$

a mely rendszerben J a

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = v_i^2 \nabla^2 J \quad (7)$$

egyenletnek, ellenben U , V , W a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v_i^2 \nabla^2 \phi \quad (8)$$

egyenletnek tartoznak megfelelni.

Rendesen az utóbbi három függvényt úgy szokás választani, hogy álljon:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0; \quad (9)$$

de ez nem feltétlenül szükséges; így az alábbi 2. §.-ban az 1. alatti választás, mely szintén helyes, nem elégíti ki e feltételt.

A fentirt megoldási keret szerint a rugalmas test e mozgása kétféle mozgás összegéből állónak tekinthető; ezek egyikét a J , másikat az U , V , W függvények határozzák meg.

a) Az első fajú mozgásra nézve áll:

$$e_x = \frac{\partial J}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial J}{\partial y}; \quad e_z = \frac{\partial J}{\partial z}; \quad (10)$$

ebben az esetben a fentirt (1), (2), differenciális egyenletek redukálódnak a következőkre:

$$\sigma = \nabla^2 J;$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} = v_i^2 \nabla^2 e_x; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} = v_i^2 \nabla^2 e_y; \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} = v_i^2 \nabla^2 e_z. \quad (12)$$

E mozgások leglényegesebb sajátása, hogy a rugalmassági forgás, az ω és összetevői zérussal egyenlők, míg a térfogatbeli tágulás, a σ zérustól különböző és változó.

b) A *második* fajú mozgásra nézve áll:

$$e_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}; \quad e_y = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}; \quad e_z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}; \quad (13)$$

ebben az esetben a fentirt (1), (2) differenciális egyenletek redukálódnak a következőkre:

$$\sigma = \frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} = v_\tau^2 \nabla^2 e_x; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} = v_\tau^2 \cdot \nabla^2 e_y; \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} = v_\tau^2 \nabla^2 e_z. \quad (15)$$

E mozgások leglényegesebb sajátása, hogy a rugalmassági térfogatbeli tágulás, a σ itt zérus, míg a forgás, az ω és összetevői a zérustól különbözők és változók.

A továbbiakban a *fénymozgások*ról feltételezni akarjuk, hogy reájuk nézve a *közeg összenyomhatatlan*; a megelőzők szerint, elhagyva most a v_τ -nak τ jelzőjét, a fennálló egyenletek rendszere a következő:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}; \\ e_y &= \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}; \\ e_z &= \frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}; \end{aligned} \quad (16)$$

itt:

$$\nabla^2 J = 0; \quad \frac{\partial^2 (U, V, W)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 (U, V, W); \quad (17)$$

az J -re, az U, V, W -re nézve fennálló egyenletek s ilyen feltétel mellett a fenti e_x, e_y, e_z rendszer megoldása az összenyomhatatlan rugalmassági testben érvényes (15) mozgásegyenleteknek:

$$\frac{\partial^2 (e_x, e_y, e_z)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 (e_x, e_y, e_z), \quad (18)$$

melyekből a (13) szerint még folyik:

$$\frac{\partial^2 (\omega_x, \omega_y, \omega_z)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 (\omega_x, \omega_y, \omega_z). \quad (19)$$

Egyszínű (monochromás) fény esetében az összes J ; U, V, W függvények és a tőlük függő mennyiségek

$$P \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) + Q \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

jellegűek, hol a P és Q a koordináták függvényei.

E szerint a nevezett függvények az imént irt differentiális egyenleteken kívül még az időben való egyszerűen harmonikus váltakozás egyenletének is tartoznak megfelelni:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot J; \quad \frac{\partial^2 (U, V, W)}{\partial t^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot (U, V, W). \quad (20)$$

2. §. *A legegyszerűbb rugalmassági gömbhullámok: A párhuzamos körökmenti (circumaxiális) és a délkörökmenti (meridionális) vektorrendszerek.*

Monochromás gömbhullámok esetében az alapfüggvény-typus, melyből a ρ alakítandó:

$$\frac{a}{r} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right)$$

szerkezetű, a állandó lévén, λ a közönséges phasis-továbbterjedés hullámhosszúsága.

1. Válasszuk a (16) számára:

$$J = 0; \quad U = \frac{a}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad V = 0; \quad W = 0; \quad (21)$$

melyek megfelelnek a (17) alatti differentiális egyenleteiknek; akkor rendre nyerjük (16)-ból és (4)-ből:

$$\begin{aligned} \rho_x &= 0; & 2\omega_x &= - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \\ \rho_y &= + \frac{\partial U}{\partial z}; & 2\omega_y &= + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \\ \rho_z &= - \frac{\partial U}{\partial y}. & 2\omega_z &= + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Írva rövidség kedvéért

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad \frac{2\pi a}{\lambda} = A; \quad (23)$$

és a kifejtésekben csak az $\frac{1}{r}$ -rel arányos tagokat tartva meg, könnyen nyerjük:

$$\begin{aligned} \rho_x &= 0; & \omega_x &= + \frac{A}{r} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{y^2 + z^2}{r^2} \cos \phi; \\ \rho_y &= + \frac{A}{r} \cdot \frac{z}{r} \sin \phi; & \omega_y &= - \frac{A}{r} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{xy}{r^2} \cos \phi; \\ \rho_z &= - \frac{A}{r} \cdot \frac{y}{r} \sin \phi; & \omega_z &= - \frac{A}{r} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{xz}{r^2} \cos \phi. \end{aligned} \quad (24)$$

Jelezve ϑ -val az r növekedése iránya és a pozitív X -tengely közötti szöget, ezekből az összetevőkből az eredők:

$$\begin{aligned} \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{1/2} = \frac{A}{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \phi; \\ \omega &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2} = \frac{A}{r} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \sin \vartheta \cos \phi. \end{aligned} \quad (25)$$

Kifejezéseikben

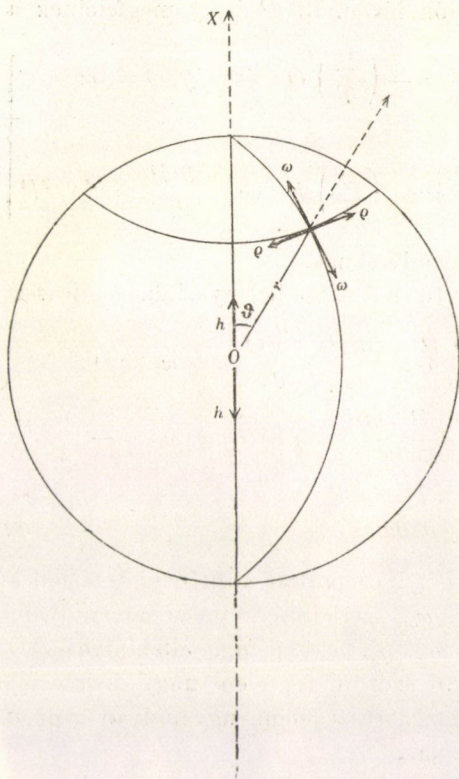
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \text{és} \quad \sin \vartheta = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (26)$$

Miként közismert mértani vonatkozásokból következik: a ρ az X tengely körüli párhuzamos körökmenti egyszerűen harmonikus circumaxiális vektorrendszer, míg az ω az erre orthogonális, a meridiánok menti, egyszerűen harmonikus meridiális vektorrendszer; 1. ábra.

A két rendszer bármely vektora merőleges az r sugárra, lévén egyanis (24) alapján

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} \cdot \rho_x + \frac{y}{r} \rho_y + \frac{z}{r} \rho_z &= 0; \\ \frac{x}{r} \omega_x + \frac{y}{r} \omega_y + \frac{z}{r} \omega_z &= 0; \\ \rho_x \omega_x + \rho_y \omega_y + \rho_z \omega_z &= 0; \end{aligned} \quad (27)$$





1. ábra.

mely utóbbi egyenlet a két vektorrendszernek egymásra vonatkozó orthogonális voltát jelenti. —

2. Válasszuk a (16) számára :

$$J = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad U = 0; \quad V = + \frac{\partial P}{\partial z}; \quad W = - \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (28)$$

hol :

$$Q = \frac{b'}{r} \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) + \frac{b''}{r} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right);$$

$$P = \frac{b}{r} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad (29)$$

b, b', b'' állandók lévén. Itt P és Q megfelelnek a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 Q \quad \text{és} \quad \nabla^2 Q = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 P \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 P \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

differenciális egyenleteknek.

Ez alapon (16)-ból és (4)-ből nyerjük, némi összevonás után :

$$\begin{aligned} \varrho_x &= - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; & \omega_x &= 0; \\ \varrho_y &= + \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial x \partial y}; & \omega_y &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 P; \\ \varrho_z &= + \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial z \partial x}; & \omega_z &= + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 P. \end{aligned} \quad (31)$$

Az 1. alatti (22) csoporttal való összevetésből kitetszik, hogy itt az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ szerkezeti típusa ugyanolyan, mint ott a $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$ -é; a $\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$ -é pedig, eltekintve a Q -t tartalmazó tagtól, mely (29) szerint végtelen nagy tovaterjedésbeli sebességet mutató mozgásrészt jelent, ugyanolyan típusu, mint az ott fellépő $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Ez a sajátság szigorú megegyezéssé válik, ha a jelzett kifejtések végrehajtása után csak az $\frac{1}{r}$ -rel arányos tagokat tartjuk meg; ekkor ugyanis Q teljesen kiesik.

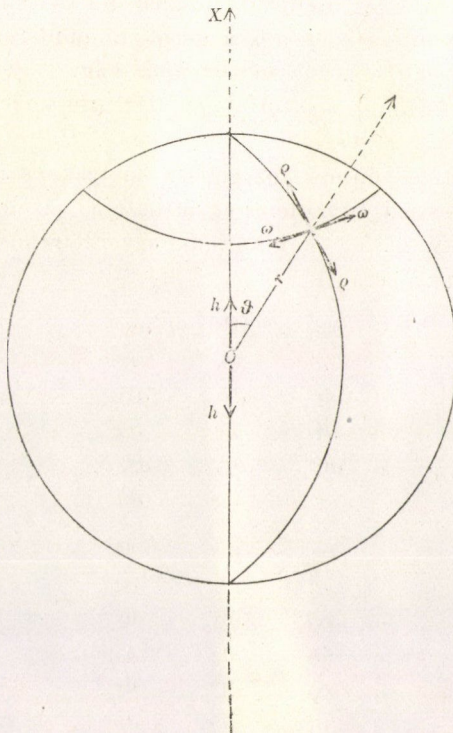
Itt is írva :

$$\psi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad B = \frac{4b\pi^2}{\lambda^2}; \quad (32)$$

marad :

$$\begin{aligned} \varrho_x &= + \frac{B}{r} \cdot \frac{y^2+z^2}{r^2} \cdot \sin \psi; & \omega_x &= 0; \\ \varrho_y &= - \frac{B}{r} \cdot \frac{xy}{r^2} \sin \psi; & \omega_y &= - \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{B}{r} \cdot \frac{z}{r} \cdot \cos \psi; \\ \varrho_z &= - \frac{B}{r} \cdot \frac{xz}{r^2} \cdot \sin \psi. & \omega_z &= + \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{B}{r} \cdot \frac{y}{r} \cos \psi. \end{aligned} \quad (33)$$

Ezek szerint itt a rugalmassági elmozdulások az X tengelyre, mint symmetria-tengelyre vonatkozólag *meridionális*, a rugalmassági *forgások* ellenben *circumaxiális* vektorrendszer



2. ábra.

alkotnak; e rendszerek vektorai a tér bármely helyén egymásra és az r -re orthogonálisak, 2. ábra.

Maguk e vektorok eredői itt:

$$\begin{aligned} \rho &= (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{1/2} = \frac{B}{r} \cdot \sin \vartheta \sin \psi; \\ \omega &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2} = \frac{B}{r} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \sin \vartheta \cdot \cos \psi; \end{aligned} \quad (34)$$

hol ismét, mint 1. és (26) alatt;

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \sin \vartheta = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (35)$$

A továbbiakban ezekből az egyszerűen harmonikus circumaxiális és meridionális rendszerek nyert kifejezéseiből fogunk kiindulni a czimben jelzett optikai viszonyossági tételnek egyszerű kimutatására; e mellett e rendszerek kicsiny gerjesztő helyének középpontja O és a λ a gerjesztő pontszerű hely méreteihez, az r pedig a λ -hoz képest igen nagy.

3. §. Az elektromágnességi fényelmélet alapegyenletei. Megoldási rendszerek szerkezete.

Egynemű és egyöntetű közegekben, melyeknek ε a dielektromos, μ a mágnességi egyenletes együtthatója, az elektromágnességi térnek MAXWELL-féle két hármas egyenletrendszerre, a közismert formában: ¹

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}; \\ \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}; \\ \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (36_1)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial z}; \\ -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial x}; \\ -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (36_2)$$

hol \mathfrak{C}_x , \mathfrak{C}_y , \mathfrak{C}_z a tér (xyz) helyén a positiv elektromosság-egységre ható \mathfrak{C} elektromos erő derékszögű összetevői, \mathfrak{H}_x , \mathfrak{H}_y , \mathfrak{H}_z az ugyane helyen a positiv mágnesség egységére ható \mathfrak{H} mágnességi erő derékszögű összetevői, míg az elektromos, illetőleg mágnességi eltolódásnak, polározásnak \mathfrak{R} -nek, illetőleg \mathfrak{D} -nak derékszögű összetevői

¹ P. DRUDE: Lehrbuch der Optik; 3. Auflage, p. 255. Leipzig, 1912.

A. SCHUSTER: Einführung in die theoretische Optik, übersetzt von A. KONEN; p. 255—258. Leipzig u. Berlin, 1907.

J. J. THOMSON: Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism; p. 476, Cambridge, 1895.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{C}_x; & \mathfrak{Y} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{C}_y; & \mathfrak{Z} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{C}_z; \\ \mathfrak{Q} &= \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{D}_x; & \mathfrak{M} &= \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{D}_y; & \mathfrak{N} &= \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{D}_z. \end{aligned} \tag{37}$$

Ezekhez járulnak az elektromos és a mágnességi térfogatbeli sűrűség ismert egyenletei:

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}; \tag{38_1}$$

$$\mathfrak{I} = \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}; \tag{38_2}$$

ezek tekintetbe vételével, az első és a második hármas rendszer egyenleteinek x, y, z szerint végzett differenciálásából és alkalmas összegezéséből:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial z} \right) = 0; \\ \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} &= \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right) = 0; \end{aligned} \tag{39}$$

mely vonatkozások szerint e σ és \mathfrak{I} sűrűségek az időtől függetlenek és csak az (xyz) helytől függenek.

A két hármas rendszernek egymással való egyesítése, miként könnyű meggyőződni, a következő két rendszerhez vezet:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}_x}{\partial t^2} &= \nabla^2 \mathfrak{C}_x - \frac{\partial}{\partial x} (S); \\ \cdot \cdot \cdot &= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot &= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \tag{40_1}$$

hol
$$S = \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon};$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}_x}{\partial t^2} &= \nabla^2 \mathfrak{D}_x - \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{C}); \\ \cdot \cdot \cdot &= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot &= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \tag{40_2}$$

hol
$$\mathfrak{C} = \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = \frac{4\pi\mathfrak{I}}{\mu}.$$

A fentírt (39) egyenletek szerint S és \mathfrak{S} az időtől független.

Fényjelenségeknél az \mathfrak{C} elektromossági és a \mathfrak{H} mágnességi erő, valamint összetevői és differenciálhányadosai az *időben változó* függvények; e szerint az időben állandó S és \mathfrak{S} mennyiségek nem járulhatnak a fényjelenségek kifejezéseinek alakításához; szóval az elektromágnességi fényelméletben szigorúan írható:

$$S = \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}_z}{\partial z} = 0, \quad (41_1)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0; \quad (41_2)$$

miáltal eredeti két hármas rendszerünk a (40₁) és a (40₂) szerint redukálódik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{C}_x}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{C}_x; & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{H}_x; \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{C}_y}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{C}_y; & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{H}_y; & (42_2) \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{C}_z}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{C}_z. & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \mathfrak{H}_z. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek pedig teljesen egyezők a szilárd-rugalmasságtani fényelmélet ily (18), (19) rendszereivel, ha itt az elektromágnességi, *egyenletes, sík* hullámok továbbterjedési sebessége:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \quad (43)$$

lévén c e továbbterjedés sebessége az űrben, az ætherben, hol $\varepsilon = 1$ és $\mu = 1$.

Egyenletrendszerünket úgy kell értelmeznünk, hogy ha az \mathfrak{C}_x , \mathfrak{C}_y , \mathfrak{C}_z (36₁) differenciális egyenletei megoldásait ismerjük, akkor a (36₂) második hármas egyenletből \mathfrak{H}_x , \mathfrak{H}_y , \mathfrak{H}_z meghatározható és megfordítva.

Írjuk az 1. §. (6) vagy (16) mintája szerint egyenleteink megoldásaként:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathfrak{E}_x}{4\pi} &= \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}; \\
 \frac{\mathfrak{E}_y}{4\pi} &= \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}; \\
 \frac{\mathfrak{E}_z}{4\pi} &= \frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{44}$$

hol a D megfelel a

$$\nabla^2 D = 0; \tag{45}$$

az F , G , H a

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \nabla^2 Q \tag{46}$$

egyenletnek.

Helyettesítve a fentírt kifejezéseit az \mathfrak{E}_x -, \mathfrak{E}_y -, \mathfrak{E}_z -nek az eredeti második (36₂) hármas alapegyenlet-rendszerbe és rövidség kedvéért írva:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = K, \tag{47}$$

könnyen nyerjük a \mathfrak{H}_x , \mathfrak{H}_y , \mathfrak{H}_z értékei számára:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \nabla^2 F - \frac{\partial K}{\partial x}; \\
 \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= \nabla^2 G - \frac{\partial K}{\partial y}; \\
 \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= \nabla^2 H - \frac{\partial K}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{48_b}$$

avagy még a (46) típus felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{\partial K}{\partial x}; \\
 \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{\partial K}{\partial y}; \\
 \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{\partial K}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{48_a}$$

a mely rendszerből az időszerinti egyszerű quadratura szolgáltatja a nevezett \mathfrak{H}_x , \mathfrak{H}_y , \mathfrak{H}_z összetevőket.

Abban az esetben, ha

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (49)$$

a mely feltételnek azonban nem kell mindig teljesülnie, e quadratura önként adódik és ekkor, eltekintve egy-egy hozzáadandó koordináta-függvényről, mely a fényváltakozások kifejezéséhez nem járulhat semmivel sem hozzá, az említett összetevők:

$$\frac{\delta x}{4\pi} = \frac{\epsilon}{c} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}; \quad \frac{\delta y}{4\pi} = \frac{\epsilon}{c} \cdot \frac{\partial G}{\partial t}; \quad \frac{\delta z}{4\pi} = \frac{\epsilon}{c} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (50)$$

Egyszínű (monochromás) fényjelenségek esetében a D ; az F , G , H függvények és a tőlük függő mennyiségek szintén

$$P \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + Q \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (51)$$

jellegűek, hol P és Q a koordináták függvényei; ezek szerint a nevezett függvények mind az eddigi egyenleteken kívül az időben való egyszerűen harmonikus váltakozás egyenletének is felelnek meg:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot T; \quad \frac{\partial^2 (F, G, H)}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot (F, G, H). \quad (52)$$

4. §. *A legegyszerűbb elektromágnességi gömbhullámok: Párhuzamos körökmenti (circumaxiális) és délkörökmenti (meridionális) vektorrendszerek.*

Legyen itt is az az alaptörvény-typus, melyből monochromás gömbhullámok előállíthatók,

$$\frac{a}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right)$$

szerkezetű, a , T , δ , λ a közismert jelentésű állandók.

1. Válasszuk úgy, mint a 2. §. 1. pontjában a (44) számára:

$$D = 0; \quad F = \frac{a}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad G = 0; \quad H = 0; \quad (53)$$

akkor rendre nyerjük (44)-ből:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}_x}{4\pi} &= 0; & \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}; \\ \frac{\mathfrak{E}_y}{4\pi} &= + \frac{\partial F}{\partial z}; & \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \\ \frac{\mathfrak{E}_z}{4\pi} &= - \frac{\partial F}{\partial y}; & \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (54)$$

Azonnal észre vesszük, hogy a 2. §. 1. alatti fejtegetések itt a legnagyobb analógiával lépnek fel; itt is rövidség kedvéért írva

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot 4\pi = A; \quad (55)$$

és itt is csak az $\frac{1}{r}$ -rel arányos tagokat tartva meg és ha még tekintetbe vesszük, hogy itt

$$\frac{\lambda}{T} = v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (56)$$

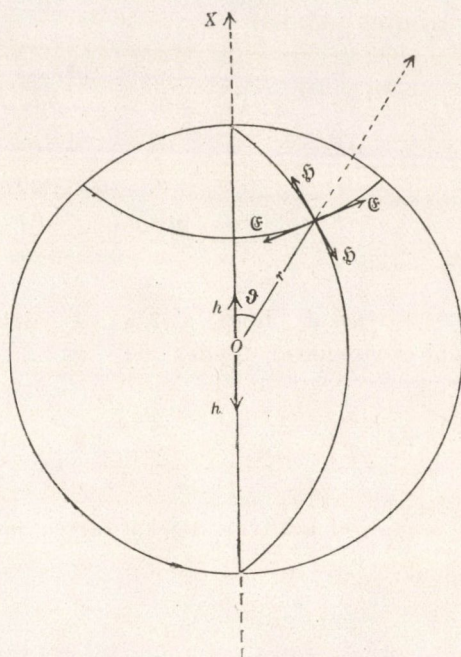
könnyen nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0; & \mathfrak{H}_x &= - \frac{A}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{y^2 + z^2}{r^2} \sin \phi; \\ \mathfrak{E}_y &= + \frac{A}{r} \cdot \frac{z}{r} \sin \phi; & \mathfrak{H}_y &= + \frac{A}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{xy}{r^2} \sin \phi; \\ \mathfrak{E}_z &= - \frac{A}{r} \cdot \frac{y}{r} \sin \phi; & \mathfrak{H}_z &= + \frac{A}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{xz}{r} \sin \phi. \end{aligned} \quad (57)$$

Az eredő vektorok kifejezésesei itt a (26), (35) vonatkozásai szerint:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)^{1/2} = \frac{A}{r} \sin \vartheta \sin \phi; \\ \mathfrak{H} &= (\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2)^{1/2} = \frac{A}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sin \vartheta \sin \phi. \end{aligned} \quad (58)$$

Az első rendszer itt az X tengelyre vonatkozó párhuzamos



3. ábra.

körökmenti, a második rendszer ugyane tengelyre vonatkozó délkörökmenti vektor-rendszer (3. ábra), melyekre nézve :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x \frac{x}{r} + \mathfrak{E}_y \frac{y}{r} + \mathfrak{E}_z \frac{z}{r} &= 0; \\ \mathfrak{D}_x \frac{x}{r} + \mathfrak{D}_y \frac{y}{r} + \mathfrak{D}_z \frac{z}{r} &= 0; \\ \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z &= 0; \end{aligned} \quad (59)$$

azaz e rendszerek és a mindenkori r egymásra kölcsönösen orthogonálisak.

2. Válasszuk úgy, mint a 2. §. 2. pontjában a (44) számára :

$$D = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad F = 0; \quad G = + \frac{\partial P}{\partial z}; \quad H = - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (60)$$

hol

$$\begin{aligned} Q &= \frac{b'}{r} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) + \frac{b''}{r} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right); \\ P &= \frac{b}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \end{aligned} \quad (61)$$

b, b', b'' szintén állandók lévén.

Itt is áll

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot Q; \quad \nabla^2 Q = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot P; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 P; \end{aligned} \quad (62)$$

hol mint (56)-ban

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

a sík elektromágnességi hullám továbbterjedési sebessége az ϵ, μ közegben.

Ezek alapján a (44)-ből nyerjük, némi összevonás után

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}_x}{4\pi} &= - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; \quad + \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0; \\ \frac{\mathfrak{E}_y}{4\pi} &= + \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial x \partial y}; \quad + \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 P; \\ \frac{\mathfrak{E}_z}{4\pi} &= + \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial x \partial z}; \quad + \frac{\mu}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 P. \end{aligned} \quad (63)$$

Itt is észrevehetjük, hogy a 2. §. 2. pontjának fejtegetései a legnagyobb analógiával folytathatók; ha megint rövidség kedvéért, mint előbb

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}};$$

továbbá

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 4\pi b = B; \quad (64)$$

s ha végre itt is csak a legnagyobb, azaz az $\frac{1}{r}$ -rel arányos tagjait a kifejtésnek tartjuk meg, marad:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_x &= + \frac{B}{r} \cdot \frac{y^2 + z^2}{r^2} \sin \psi; & \mathfrak{H}_x &= 0; \\
 \mathfrak{E}_y &= - \frac{B}{r} \frac{xy}{r^2} \sin \psi; & \mathfrak{H}_y &= + \frac{B}{r} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{z}{r} \sin \psi; \\
 \mathfrak{E}_z &= - \frac{B}{r} \cdot \frac{xz}{r} \sin \psi; & \mathfrak{H}_z &= - \frac{B}{r} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{y}{r} \sin \psi.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Az eredő erők kifejezése a (26), (35) vonatkozásai szerint:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E} &= (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)^{1/2} = \frac{B}{r} \sin \vartheta \sin \psi; \\
 \mathfrak{H} &= (\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2)^{1/2} = \frac{B}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta \sin \psi.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Itt az elektromossági erők vektorai az X -tengelyre vonatkozólag egyszerű meridionális, a mágnességi erőkéi egyszerű circumaxiális rendszert alkotnak (4. ábra), melyekre nézve a tér bármely helyén ismét az

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_x \cdot \frac{x}{r} + \mathfrak{E}_y \cdot \frac{y}{r} + \mathfrak{E}_z \cdot \frac{z}{r} &= 0; \\
 \mathfrak{H}_x \cdot \frac{x}{r} + \mathfrak{H}_y \cdot \frac{y}{r} + \mathfrak{H}_z \cdot \frac{z}{r} &= 0; \\
 \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_z &= 0
 \end{aligned} \tag{66}$$

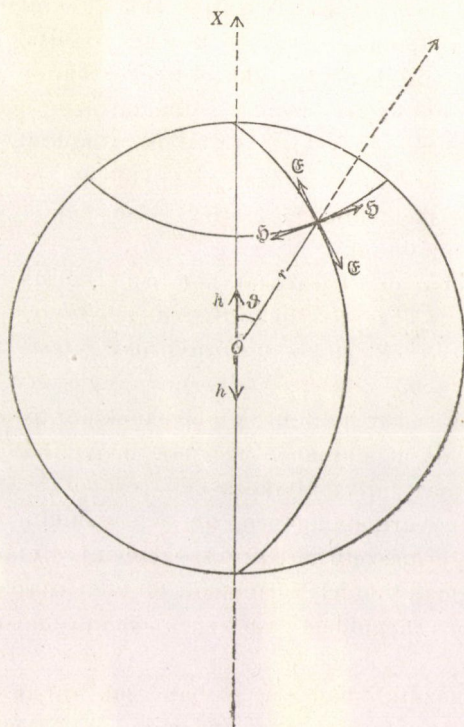
merőlegességi feltételek állanak fenn.

Jegyzet: Ha a 3. §. egyenleteiből kiindulólág nem az elektromossági, hanem a mágnességi erőknek a (44) egyenletrendszerhez analog megoldási rendszerből indultunk volna ki s ebből fejeztük volna ki az első (36₁) hármas alapegyenletrendszer felhasználásával az elektromossági erőket: teljesen analog eredményt találtunk volna, mint jelenleg. Különösen pedig, ha azt a közelítést vizsgáljuk, mikor a kifejtésnek csak az $\frac{1}{r}$ -rel arányos tagjait tartjuk meg, szintén egymásra orthogonális, egyszerű circumaxiális és meridionális vektorrendszereket nyerünk, melyek elseje az 1. választásnak megfelelőleg a mágnességi, második az elektromossági erőké; a 2. választásnak megfelelőleg pedig megfordítva.

Ezekkel a fejtegetésekkel itt nem kell foglalkoznunk, mert

az itt vizsgált megközelítésben e rendszerek *jellege* mindig ugyanaz, ugyanis egymásra és a mindenkor r -re kölcsönösen merőleges, egyszerűen harmonikus circumaxiális és meridionális vektorok rendszerei-é.

5. §. Általános megjegyzés a gömbhullámok előállítására vonatkozólag. A gerjesztő középpontok különböző jellege.



4. ábra.

A gömbhullámok a valóságban mindig bizonyos gerjesztő helyeknek fennállása folytán keletkeznek és bizonyos gerjesztő középpontokból indulnak ki és terjednek tovább.

Rendesen *divergáló*, *széjjelsterülő* gömbhullámokkal foglalkozunk; az előző fejtegetésekben is ilyenek szerepelnek; a *konvergáló*, *összetartó* gömbhullámok alapfüggvényei, miként ismeretes, az

$$2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} + \delta\right)$$

argumentumot tartalmazták; ilyenekkel itt nem kell külön foglalkoznunk.

A valóságban az úgynevezett gerjesztő középpontok nem lehetnek méret nélküli geometriai pontok, hanem kell, hogy ezeket bármily kicsiny, de *véges méretű* testrészeknek tekintsük, a melyeknek váltakozó állapota a környező közeget is váltakozásba hozza.

Ezért is bármely, de nemcsak közelítőleges, hanem szigorú elmélete a gömbhullámoknak számba venni tartozik nemcsak a gerjesztő helynek vagy helyeknek váltakozó állapotát, hanem mértani alakját, méreteit és azokat a feltételeket is, melyek agerjesztő testrészezske felületén, esetleg belsejében a környező közegre nézve fennállanak.

Mindezeket a vonatkozásokat nem ismerhetjük pontosan; de szabad e gerjesztő középpontok *alakjára, a felületén, esetleg a belsejében jelentkező feltételekre, a váltakozását létesítő külső okokra s váltakozása természetére* nézve bizonyos egyszerű, lehetségeseknek látszó feltevéseket tennünk, a melyeknek pontos matematikai formákba foglalása alapján szigorúan megoldható az a fontos optikai probléma: mily váltakozásbeli állapot létesül valamely környező közeg bármely helyén, ha az valamely meghatározott alakú, méretű, természetű gerjesztő középpont folytán kelet-kezik?

Ily problémák többféle formában, többféle alapfeltevés alapul vételével szigorú megoldást nyertek; elegendő, ha itt ezekre csak hivatkozunk.¹

Jelen dolgozatunkban első sorban csak annak a körülménynek megállapítása fontos, hogy bármily alakú legyen is a stationáriusan váltakozó, de a fényhullám hosszúságához képest kicsiny méretű, gerjesztő fényforrás: e hullámhosszúsághoz ké-

¹ Az 1. §-ban idézett: «*Polarisation des gebeugten Lichtes*» című munkám 141—186, illetőleg [61]—[106]. lapjain néhány ily problémát szigorúan ismerttettem.

Folytatólagos irodalmát idéztem: FRÖHLICH IZIDOR: «*Különböző törésű, átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében lévő fénylő pontok elméletéhez*» című közleményem 5. §-a lábjegyzetében. M. T. Akadémia Math. és Term. Értesítője XXXIV. kötete, 476., 477. ll. 1916.

pest jelentékeny távolságban a környező egyenletes, egyöntetű közegben *mindig* létesülnek egyszerűen harmonikus, egymással mindig kapcsolatos és orthogonális circumaxiális és meridionális vektorrendszerek, melyek kifejezései a 2. §. (24)—(27), (33)—(35); illetőleg a 4. §. (57)—(59), (64)—(66) formuláival teljesen egyenlő szerkezetűek.

Közelebből pedig a szilárd-rugalmasságtani fényelméletnek megfelelőleg, ha a gerjesztés helye valamely kicsiny méretű merev gömböcske, a mely a középpontján átmenő X tengely *körül*, mint szilárd forgási tengely körül végez stationárius kicsiny *rotatiós oscillatiót*, s a gömböcske felületét érintő pontjai a környező közegnek a felülethez ragadva, vele együtt végzik e gerjesztő mozgást, akkor létesül a rugalmas közeg távolabbi helyein a 2. §. 1. pontja alatt irt (25) két vektorrendszer, ott említett jelentése szerint.

Ha pedig ily kicsiny merev gömb a középpontján átmenő X tengely *menten*, illetőleg vele párhuzamosan végez stationárius, kicsiny, *lineáris oscillatiót*, s e mellett a környező közegnek a felületen lévő pontjai a felülethez ragadva, vele együtt végzik e gerjesztő mozgást, akkor a rugalmas közeg távolabbi helyein a 2. §. 2. pontjában (34) alatt irt két vektorrendszer létesül, az ott adott jelentése szerint.

Éppen így, az elektromágnességi fényelméletnek megfelelőleg, ha a gerjesztő hely egy kicsiny, gömbalakú része a közegnek, a mely gömböcskében a gerjesztő elektromos erők stationárius, kicsiny, *rotatiós oscillatiót* végeznek s a gömb felületi pontjain az erők folytonossága fennáll, akkor e gerjesztő helytől jelentékeny távolságban létesül a közegben a 4. §. 1. pontja (58) egyenleteivel kifejezett két vektorrendszer az ott jelzett jelentése szerint.

Ha pedig e gömbalakú részében a közegnek a gerjesztő elektromos erők stationárius kicsiny *lineáris oscillatiót* végeznek s a gömb felületi pontjain az erők folytonossága fennáll, akkor, ugyancsak e gerjesztő helytől jelentékeny távolságban lévő helyein a közegnek létesül a 4. §. 2. pontjában (65) alatt előtüntetett két vektorrendszer, ott jelzett jelentésük szerint. —

Végre, ha valamely végtelen kiterjedésű közegben a hullámhosszúsághoz képest kicsiny méretű oly gömböcske van jelen,

melynek dielektromos és mágnességi együtthatója eltér a környező egynemű és egyöntetű közeg ily együtthatóitól; s most e közegben erős mágnességi, illetőleg elektromossági erőhullámok haladnak, melyek e gömböcskét mágnességi, illetőleg elektromos váltakozásúvá teszik: akkor ily gömböcske által, mint másodrendű gerjesztő hely által létesített elektromágnességi vektorrendszerek szintén ugyanolyanok, mint a melyeket a 4. §. 1. és 2. pontja (58) és (65) formulája előtűntet.

I.

A physikai optika viszonyossági tétele, ha a két egyszínű, pontszerű fényforrás ugyanabban az egynemű és egyöntetű átlátszó közegben van.

6. §. H. A. LORENTZ, L. MANDELSTAM, P. SELÉNYI *dolgozatai ily tételre vonatkozólag.*

A lefolyt évtizedben három dolgozat jelent meg, mely az alábbiakban fejtegetendő viszonyossági tétellel, illetőleg alkalmazásával foglalkozik.

Igy dr. SELÉNYI PÁL¹ ez eddig kevésbé ismert viszonyossági tételt megkísérli alkalmazni, hogy segítségével különböző törésű átlátszó két közeg közös határfelülete közelségében lévő pontszerű fényforrásból induló sugárrendszer sajátságait előállítani lehessen, felhasználva a teljes fényvisszaverődés jól ismert elmélete eredményeit.

Szerző nem említi azt az irodalmi vagy előszóval való közlés forrását, a melyből e tételt merítette; de nem is fejezi ki szigorúan azt és megkísérlet elméletét nem fejtette ki használható kifejezések kialakításáig; lényegesen új jelenségeket sem sorol fel s mérési eljárásokról vagy adatokról nem szól.

¹ *Sur l'existence et l'observation des ondes lumineuses sphériques inhomogènes.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, 1913. No. 25., p. 1408—1410. (Tome 157). Séance du 22. Décembre 1913. E tárgyról ugyane szerző: «Gömbalakú inhomogén fényhullámokról» czímen a Matematikai és Physikai Társulat 1914. évi január hó 29-iki ülésén előadást is tartott.

Hasonlóképen dr. LEONIDAS MANDELSTAM,¹ akkor Strassburgban ugyane tárggyal foglalkozott; ő már teljesebben törekedett a fent jelzett elméletet néhány reális esetnek megfelelőleg, használható formulák előállításáig kifejtetni; fel is említi, hogy az alapul szolgáló tétel H. A. LORENTZ-tól² származik s ennek ő általa (MANDELSTAM által) némileg módosított bizonyítását közli.

Ámde mind LORENTZ, mind MANDELSTAM bizonyítása lényegileg nem különböző; míg LORENTZ bizonyítását jelentékeny mennyiségű apparatussal, a vektor-számítás elmélete alapos felhasználásával végzi, MANDELSTAM ugyanezt teszi, de oly rövidséggel, hogy előállítása az érthetelenséggel határos.

LORENTZ bizonyításának e nehézkes és csak a vektor-elméleten alapuló módszere bizonyára főoka lehetett annak, hogy tétele alig lett ismertté s hogy például igazi értelmét sem tűntették elő helyesen.

De hozzájárult még az a körülmény is, hogy LORENTZ ez értekezése eddig kizárólagosan *hollandus* nyelven jelent meg; címének fordítása: «*Valamely mindenütt egyenlő hőmérsékletű anyagi rendszerben végbemenő hőszugárzások*»; az amsterdami akadémia előterjesztésének ideje: 1905. évi szeptember hó 30.-a.

A jelen dolgozatomnak az a célja, hogy e tételt teljesen függetlenül a LORENTZ-féle igen jelentékenyen bonyolódott és egészen közvetett bizonyítástól a *legelemibb* matematikai és geometriai segédeszközökkel, a *legrövidebben* és *egyenesen* kimutassam, általánosabb vektorrendszerekre nézve érvényesítsem, és igazi, különösen fizikai értelmét kidomborítsam.

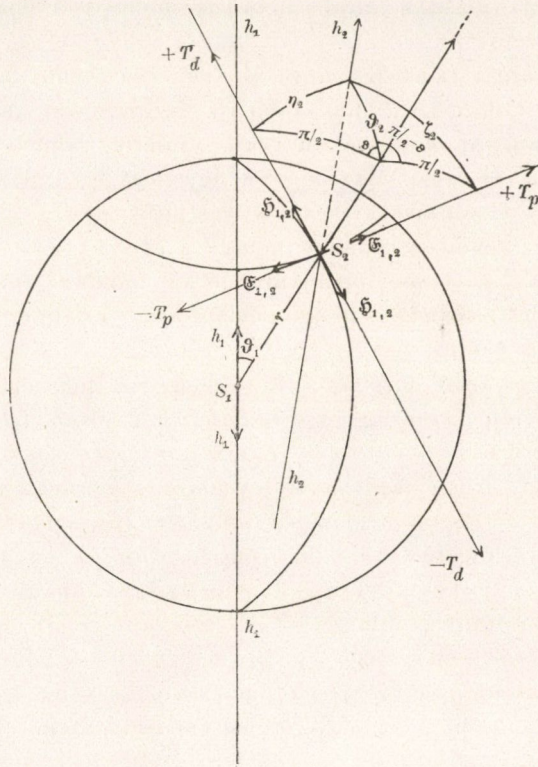
A tételt nemcsak az ugyanabban a közegben lévő, hanem különböző törésű egynemű és egyöntetű közegben levő pontszerű, egyszínű fényforrásokra nézve is megállapítjuk.

¹ *Strahlung einer Lichtquelle, die sich sehr nahe an der Trennungsfäche zweier durchsichtiger Medien befindet.* Physikalische Zeitschrift 15. Jahrgang, Nr. 5., 1. März 1914, p. 220—225.

² «*Over de warmtestraling in een stelsel lichamen van overal getijke temperatuur.*» Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslaag van de gevone Vergadering der Wiss-en Naturkundige Afdeeling. Deel XIV. 1.^{ste} Gedeelte. Amsterdam 1905, p. 345—360.

7. §. Pontszerű, egymástól jelentékeny távolságban levő két egyszínű fényforrás ugyanabban az egymemű, egyöntetű átlátszó közegben.

Legyen a 3. és 4. ábra szerint O a pontszerű fényforrás helye, hh a körüle keletkező vektorrendszerek symmetria-tengelye, r az



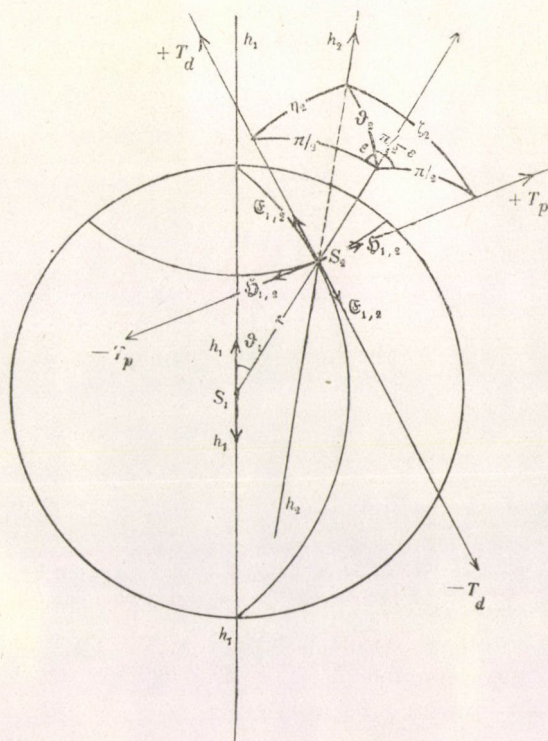
5. ábra.

O -ból induló, a λ -hoz jelentékeny távolság, akkor a 4. §. 1. és 2. pontja (58) és (64) szerint az r -nek (xyz) végpontjában jelentkező két vektor mindig

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{A}{r} \cdot \sin \vartheta \sin \phi; \\ \mathcal{H} &= \frac{A}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sin \vartheta \sin \phi; \end{aligned} \quad (67a)$$

vagy

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{B}{r} \sin \vartheta \sin \phi; \\ \mathfrak{H} &= \frac{B}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta \sin \phi; \end{aligned} \tag{67b}$$



6. ábra.

a mely rendszerekben A és B amplitudo-jellegű mennyiségek, a melyek között most nem fogunk jelzésbeli különbséget tenni, hanem mindig csak A -t használni.

Felveszszük azt, hogy a fényforrásban a *lineáris* jellegű *elektromos* váltakozás hh mentén van, akkor ϑ a hh egyenes és az r közötti szög és az \mathfrak{E} a meridionális, \mathfrak{H} a circumaxiális rendszer vektora, a mint azt a 4. §. 2. pontjában részletesen megállapítottuk.

1. Ha most a 6. ábra szerint S_1 a fényforrás helye, $h_1 h_1$

váltakozásának egyenese és S_2 az r másik végpontja, akkor az S_2 -ben előálló, S_1 -ből származó ugyanily két vektor a (67_a) és (67_b) szerint:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1,2} &= \frac{A_1}{r} \sin \vartheta_1 \sin \phi_1; \\ \mathfrak{H}_{1,2} &= \frac{A_1}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta_1 \sin \phi_1;\end{aligned}\tag{68}$$

hol az eddigi jelölések szerint

$$\phi_1 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_1 \right).$$

Húzzunk most az S_2 helyen keresztül egy tetszés-szerinti $\overline{h_2 h_2}$ egyenest és vetítsük az $\mathfrak{E}_{1,2}$ -t és a $\mathfrak{H}_{1,2}$ -t a $\overline{h_2 h_2}$ egyenesre; akkor e vetületek, a rajz szerinti jelzéssel:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1,h_2} &= \frac{A_1}{r} \cdot \sin \vartheta_1 \cos \eta_2 \cdot \sin \phi_1; \\ \mathfrak{H}_{1,h_2} &= \frac{A_1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta \cdot \cos \zeta_2 \sin \phi_1;\end{aligned}\tag{69}$$

hol η_2 , illetőleg ζ_2 a $\overline{h_2 h_2}$ egyenes és az $\mathfrak{E}_{1,2}$, illetőleg a $\mathfrak{H}_{1,2}$ egyenesei közötti szög.

Jelezze most ϑ_2 a $\overline{h_2 h_2}$ egyenes és a növekvő r közötti szöget, továbbá ε az $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$ sík és a $(h_2 S_2 r)$ sík közötti szög; végre, minthogy az $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$ és a $(\mathfrak{H}_{1,2} S_2 r)$ sík egymásra merőleges, egyszersmind $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ a szög a $(h_2 S_2 r)$ sík és a $(\mathfrak{H}_{1,2} S_2 r)$ sík között. Tekintettel az $\mathfrak{E}_{1,2}$, $\mathfrak{H}_{1,2}$, r kölcsönös merőlegességére, a gömbháromszögtan elemei szerint áll:

$$\cos \eta_2 = \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon; \quad \cos \zeta_2 = \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon; \tag{70}$$

ezek szerint az $\mathfrak{E}_{1,2}$ -nek és $\mathfrak{H}_{1,2}$ -nek a $\overline{h_2 h_2}$ mentén keresett vetületei:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{1,h_2} &= \frac{A_1}{r} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon \cdot \sin \phi_1; \\ \mathfrak{H}_{1,h_2} &= \frac{A_1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon \cdot \sin \phi_1.\end{aligned}\tag{71}$$

Minthogy a ϑ_1 szög síkja az S_2 -n átmenő meridiánnak a

síkja és ez ismét egybeesik az $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$ síkjával: kitetszik, hogy ε nem más, mint az említett ϑ_1 -sík és ϑ_2 -sík közötti szög:

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) \simeq \varepsilon, \quad (72)$$

2. Legyen most, ugyane 6. ábra szerint, az S_2 helyen valamely második pontszerű fényforrás; lineáris váltakozásának egyenese a $\overline{h_2 h_2}$ legyen; akkor ez a fényforrás az S_1 helyen $\mathfrak{E}_{2,1}$ és $\mathfrak{H}_{2,1}$ vektort létesít, a melyek, mivel r a $\overline{h_2 h_2}$ -el ϑ_2 szöget képez, a (68) formulák szerint írhatók:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2,1} &= \frac{A_2}{r} \cdot \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2; \\ \mathfrak{H}_{2,1} &= \frac{A_2}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (73)$$

hol megfelelőleg, mint fent:

$$\varphi_2 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \vartheta_2 \right).$$

Itt $\mathfrak{E}_{2,1}$ és $\mathfrak{H}_{2,1}$ a $\overline{h_2 h_2}$ symmetria-tengelyre vonatkozólag az S_1 -en áthaladó meridián, illetőleg párhuzamos kör érintője mentén váltakozik.

Vetítve a két vektort a $\overline{h_1 h_1}$ egyenes mentén, mely az r -rel ϑ_1 szöget alkot, míg a ϑ_1 és a ϑ_2 síkja közötti szög ismét ε , akkor, teljesen az előbbi eljárás és a (71) formulák szerint e vetületek

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2,h_1} &= \frac{A_2}{r} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_2; \\ \mathfrak{H}_{2,h_1} &= \frac{A_2}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (74)$$

a mely formulákat egyébként a (71)-ből közvetlenül lehet felírni, ha azokban az 1 és a 2 indexet egymással felcseréljük.

3. Ha még felvesszük, hogy

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2; \\ \delta_1 &= \delta_2; \end{aligned} \quad (75)$$

azaz, hogy a két fényforrás *erőssége* és *kezdőphasisa* egymással egyenlő, akkor (71) és (74) szerint:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,h_2} &= \mathfrak{E}_{2,h_1}; \\ \mathfrak{H}_{1,h_2} &= \mathfrak{H}_{2,h_1}; \end{aligned} \quad (76)$$

szóval, az r -nek S_1 és S_2 két végpontjában $\overline{h_1 h_1}$, illetőleg $\overline{h_2 h_2}$ egyenes mentén működő két egyenlő erősségű és phasisú, pontszerű fényforrás a $\overline{h_2 h_2}$, illetőleg a $\overline{h_1 h_1}$ mentén egyenlő erősségű és phasisú két-két vektort létesít. E szerint a kölcsönösség, a viszonosság itt szigorúan fennáll; ez a czímben nevezett viszonossági, reciprocitási tétel legegyszerűbb esete és legegyszerűbb alakja.

1. jegyzet. Teljesen ugyanily eredményhez jutunk, ha felvetjük volna azt, hogy a fényforrásban rotatiós jellegű váltakozás van jelen, melynek forgási tengelye a hh mentén van; akkor ϑ a hh egyenes és a mindenkor r közötti szög, és \mathcal{E} a circumaxiális, \mathcal{S} a meridionális rendszer vektora, a mint azt a 4. §. 1. pontjában részletesen megállapítottuk, kifejezésük az e § elején írt (67_a) formulák szerinti, megfelelőleg az 5. ábrának. A fentiekben megállapított tétel itt is, ily értelmezés szerint szigorúan érvényes.

2. jegyzet: Ha a rugalmasságtani fényelmélet alapján rugalmas elmozdulásokkal, illetőleg rugalmas rotatiókkal tüntetjük elő a fényvektorokat, mint azt a (25) és (34) egyenletek mutatják: a viszonosság fent nyert tétele ekkor is, ugyanilyen értelmezésben pontosan fennáll.

8. §. Pontszerű, egymástól tetszésszerűen nagy vagy kicsiny távolságban lévő fényforrások ugyanabban a közegben. A megoldások itt használt típusai. (A) Az első típus esete.

A nélkül, hogy a pontszerű fényforrások problémáinak az 5. §-ban érintett egyes eseteinek részletes megvizsgálásába bocsátkoznánk — a mi mindig csak a gerjesztő forrás közelebbi körülményeinek és felületi feltételeinek matematikailag szigorú tekintetbe vételével lehetséges —, szóbanforgó tételünket most az 1. §- és a 3. §-ban összeállított egyenletrendszerek oly megoldási csoportjára akarjuk behozni, a melyre nézve a 2. §-ban előforduló J , illetőleg a 4. §-ban előforduló D függvény az r bármely értékére nézve mindig zérus,

A 2. §. és a 4. §. 1. pontjában közölt megoldási rendszerben e feltétel amúgy is mindig teljesül; ugyane §-ok 2. pontjában azonban csak akkor, ha ott Q függvény, ugyanis a (29) és (61) szerint a

$$Q = \frac{b'}{r} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{b''}{r} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

kifejezés mindenütt és mindenkor zérus; ez a feltétel csak akkor teljesedik, ha mindenütt:

$$b' = 0; \quad b'' = 0. \quad (77)$$

Ekkor a 2. §. és a 4. §. megoldásai rendszereiről könnyen mutatható ki az, hogy ezek nemcsak a hullámhosszúsághoz jelentékeny nagyságú r távolságokra nézve tesznek eleget a szóbanforgó viszonyossági tételnek, hanem bármily nagy, vagy bármily kicsiny, de *végesen kicsiny* r -re nézve is.

A bizonyítás végzésénél a 2. §. és 4. §. 1., illetőleg 2. pontjai alatti megoldásait, mint egy-egy típusúakat összefoglalhatjuk, de a 4. §. jelzéseit használjuk.

(A) Az első típus:

$$D = 0; \quad F = \frac{a}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right); \quad G = 0; \quad H = 0: \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0; & \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_x) &= \frac{4\pi c}{\mu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right); \\ \mathfrak{E}_y &= + 4\pi \frac{\partial F}{\partial z}; & \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_y) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \\ \mathfrak{E}_z &= - 4\pi \frac{\partial F}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_z) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (54)$$

Ha itt a jelzett műveleteket teljesen, *elhanyagolás nélkül* kifejtjük, némi számítás és rendezés után nyerjük:

$$\mathfrak{E}_x = 0; \quad \mathfrak{E}_y = + 4\pi \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}; \quad \mathfrak{E}_z = - 4\pi \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}; \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_x) &= + \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \left\{ \frac{y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right\}; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_y) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_z) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{xz}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (79)$$

Az elektromos erők eredője (78)-ból:

$$\mathfrak{E} = + 4\pi \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \sin \vartheta, \quad (80)$$

melyben, tekintettel F fentirt (53) szerkezetére:

$$4\pi \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{4\pi a}{r} \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \sin \psi - \frac{1}{r} \cos \psi \right\} = \mathfrak{E}_0 \quad (81)$$

jelenti azt a vektort, mely a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ egyenlítői sík pontjaiban érvényes s mely az r -re nézve *nem*, de a t -re nézve egyszerűen harmonikus; e vektor írható:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0 &= \frac{A}{r} \cdot \sin(\psi + \delta_r), \\ \text{hol:} \quad A &= 4\pi a \left\{ \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{1}{r^2} \right\}^{1/2}; \quad \text{tg } \delta_r = -\frac{\lambda}{2\pi r}, \end{aligned} \quad (82)$$

úgy hogy végre:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \vartheta = \frac{A}{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin(\psi + \delta_r), \quad (83)$$

a mely az r szerint *nem egyszerűen*, a t szerint *egyszerűen harmonikus* s az X tengelyre, mint symmetria-tengelyre vonatkozó *circumaxiális* vektorrendszert jelent.

A *mágnességi erők eredőjére* nézve megjegyzendő: Könnyű az F -ből oly függvényt szerkeszteni, a melylyel a $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ összetevők maguk is oly formában adódnak, mint időbeli differenciális hányadosuk a (79)-ben.

Áll ugyanis a határozatlan integrale:

$$\int F(r, t) dt = \Phi(r, t) + a \text{ koordináták függvénye}; \quad (84)$$

ez az utóbbi az *időben váltakozó* fényvektorok kifejezéseiben nem vihet szerepet.

Ekkor rendre (84)-ből, (83)-ból és (81)-ből:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad H_0 = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \\ \mathfrak{E}_0 &= 4\pi \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} \left(4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (H_0). \end{aligned} \quad (85)$$

E szerint maguk a mágnességi erők, eltekintve a koordinátáktól függő, de az időben nem változó mennyiségektől, az időszerinti integrálás után:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{y^2+z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right) + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} H_0; \\ \mathfrak{S}_y &= - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right); \\ \mathfrak{S}_z &= - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{xz}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right). \end{aligned} \tag{86}$$

E kifejezések szerint a mágnességi erők oly két csoportba oszthatók, melyek egyikében $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right)$ fordul elő, másika a \mathfrak{S}_x második tagja; e felbontás értelmében a két csoport írható:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}'_x &= + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{y^2+z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right); \\ \mathfrak{S}'_y &= - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right); \\ \mathfrak{S}'_z &= - \frac{c}{\mu} \cdot \frac{xz}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right). \end{aligned} \right\} (86') \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{S}''_x &= + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} H_0; \\ \mathfrak{S}''_y &= 0; \\ \mathfrak{S}''_z &= 0. \end{aligned} \right\} (86'')$$

Ekkor a (26) tekintetbe vételével az első csoportnak \mathfrak{S}' , a második csoportnak \mathfrak{S}'' eredője írható:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}' &= \frac{c}{\mu} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right) \cdot \sin \vartheta; \\ \mathfrak{S}'' &= \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} H_0, \end{aligned} \tag{87}$$

hol még (85)-ből:

$$H_0 = \int \mathfrak{E}_0 dt. \tag{87_1}$$

A \mathfrak{S}' itt egy meridionális vektorrendszert jelent, melynek symmetria-tengelye az X -tengely; mely az r -re nézve *nem egyszerűen*, de a t -re nézve *egyszerűen* harmonikus; a vektor az egyenlítő síkjában, azaz $\vartheta = \pi/2$ -helyen lévő pontokra nézve:

$$\mathfrak{S}'_0 = \frac{c}{\mu} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_0 \right). \tag{88}$$

A \mathfrak{H}'' itt oly vektorrendszert jelent, melynek minden vektora az X -tengelyhez párhuzamosan váltakozik s melyben az r sugarú gömbfelületen lévő bármely pontra nézve a vektorok mind egymással egyenértékűek.

Maga a \mathfrak{H} vektor eredőjét alkotja ennek a két különböző nagyságú és irányú \mathfrak{H}' és \mathfrak{H}'' vektornak.

1. Vegyük fel az 5. ábra mintájára az S_1 -ben a fent tárgyaltak szerint viselkedő pontszerű fényforrást; ez az r végpontján lévő $S_2(x, y, z)$ helyen létesíti a (82), (83) és (87), (87₁), (88) szerint a következő két vektorrendszert:

$$\alpha) \quad \mathfrak{E}_{1,2} = \mathfrak{E}_{1,0} \sin \vartheta_1, \quad (89)$$

hol:

$$\mathfrak{E}_{1,0} = \frac{A_1}{r} \cdot \sin(\psi_1 + \delta_r), \quad A_1 = 4\pi a_1 \left\{ \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{1}{r^2} \right\}^{1/2};$$

$$\psi_1 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_1 \right); \quad \operatorname{tg} \delta_r = -\frac{\lambda}{2\pi r}.$$
(90)

$$\beta) \quad \mathfrak{H}_{1,2} = \mathfrak{H}'_{1,2} + \mathfrak{H}''_{1,2}, \quad (91)$$

hol:

$$\mathfrak{H}'_{1,2} = \frac{c}{\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_{1,0} \right) \sin \vartheta_1;$$

$$\mathfrak{H}''_{1,2} = \frac{c}{u} \frac{2}{r} H_{1,0};$$
(92)

hol:

$$H_{1,0} = \int \mathfrak{E}_{1,0} dt. \quad (92_1)$$

Vetítsük e vektorokat az S_2 -n át húzott $\overline{h_2 h_2}$ egyenesre; erre nézve csak azt kell szem előtt tartani, hogy az $\mathfrak{E}_{1,2}$ az S_2 -n átmenő párhuzamos kör mentén, a $\mathfrak{H}'_{1,2}$ az S_2 -n átmenő délkör mentén, $\mathfrak{H}''_{1,2}$ pedig az S_2 -n át a körrendszerek symmetria-tengelyéhez (az X -tengelyhez) párhuzamos egyenes mentén váltakozik.

Ezek szerint a vetületek rendre lesznek:

$$\mathfrak{E}_{1,h_2} = \mathfrak{E}_{1,2} \cdot \cos(\mathfrak{E}_{1,2}, \overline{h_2 h_2}) = \mathfrak{E}_{1,0} \sin \vartheta_1 \cos \zeta_2;$$

$$\mathfrak{H}'_{1,h_2} = \mathfrak{H}'_{1,2} \cos(\mathfrak{H}'_{1,2}, \overline{h_2 h_2}) = \frac{c}{\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_{1,0} \right) \sin \vartheta_1 \cos \eta_2;$$

$$\mathfrak{H}''_{1,h_2} = \mathfrak{H}''_{1,2} \cos(\mathfrak{H}''_{1,2}, \overline{h_2 h_2}) = \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} \cdot H_{1,0} \cos(h_1, h_2).$$

Tekintettel az η_2 és ζ_2 számára a 7. §. (70) formulájában talált értékeire, és írva:

$$(\overline{h_1 h_1}, \overline{h_2 h_2}) \not\rightarrow = (h_1, h_2) \not\rightarrow = a, \quad (93)$$

nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1, h_2} &= \mathfrak{E}_{1, 0} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon; \\ \mathfrak{H}'_{1, h_2} &= \mathfrak{H}'_{1, 0} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon; \\ \mathfrak{H}''_{1, h_2} &= \mathfrak{H}''_{1, 0} \cos \alpha; \end{aligned} \quad (94)$$

hol rövidség kedvéért:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'_{1, 0} &= \frac{c}{\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_{1, 0} \right); \\ \mathfrak{H}''_{1, 0} &= \mathfrak{H}''_{1, 2} = \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} \cdot H_{1, 0}. \end{aligned} \quad (94_1)$$

Itt fontos az a megjegyzés, hogy $\mathfrak{E}_{1, 0}$ (90) kifejezésében a $4\pi a_1$ állandó külső együttható, továbbá, hogy benne csak r és t a változók; ezért (92) és (92₁) szerint $\mathfrak{H}'_{1, 0}$ és $\mathfrak{H}''_{1, 0}$ is csak ezektől a váltakozóktól függenek, míg $4\pi a_1$ ezeknél is külső állandó együttható. —

2. Vegyünk fel az (5) ábra mintája szerint az S_2 -ben oly pontszerű fényforrást, melyre nézve a keletkezett vektorrendszerek számára ugyanolyan szerkezetűek, mint az előbbi, 1. alatti esetben.

Akkor az így gerjesztett vektorok kifejezései az S_1 helyen, mely az r másik végpontja, megfelelőleg az előző (89), (90), (91), (92), (92₁) egyenleteknek:

$$\alpha) \quad \mathfrak{E}_{2, 1} = \mathfrak{E}_{2, 0} \sin \vartheta_2; \quad (95)$$

$$\mathfrak{E}_{2, 0} = \frac{A_2}{r} \sin(\psi_2 + \delta_r); \quad A_2 = 4\pi a_2 \left\{ \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{1}{r^2} \right\}^{1/2}; \quad (96)$$

$$\psi_2 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta_2 \right); \quad \text{tg } \delta_r = -\frac{\lambda}{2\pi r}.$$

$$\beta) \quad \mathfrak{H}_{2, 1} = \mathfrak{H}'_{2, 1} + \mathfrak{H}''_{2, 1}; \quad (97)$$

$$\mathfrak{H}'_{2, 1} = \frac{c}{\mu} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_{2, 0} \right) \sin \vartheta_2; \quad (98)$$

$$\mathfrak{H}''_{2, 1} = \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} \cdot H_{2, 0};$$

és

$$H_{2, 0} = \int \mathfrak{E}_{2, 0} dt. \quad (98_1)$$

Vetítve most az $\mathfrak{E}_{2,1}$, a $\mathfrak{H}'_{2,1}$ és a $\mathfrak{H}''_{2,1}$ vektorokat az S_2 -en átmenő $\overline{h_1 h_1}$ egyenesre, mely ezekkel rendre ζ_1 , η_1 , α szöveget alkotnak, hol a 7. §. (70) formulái szerint:

$$\cos \zeta_1 = \sin \vartheta_1 \sin \varepsilon; \quad \cos \eta_1 = \sin \vartheta_1 \cos \varepsilon, \quad (99)$$

a keresett vetületek azonnal írhatók a (93), (94), (94₁) szerint:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2,h_1} &= \mathfrak{E}_{2,0} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \varepsilon; \\ \mathfrak{H}'_{2,h_1} &= \mathfrak{H}'_{2,0} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \varepsilon; \\ \mathfrak{H}''_{2,h_1} &= \mathfrak{H}''_{2,0} \cos \alpha; \end{aligned} \quad (100)$$

hol rövidség kedvéért:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'_{2,0} &= \frac{c}{\mu} \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} H_{2,0} \right) \\ \mathfrak{H}''_{2,0} &= \frac{c}{\mu} \cdot \frac{2}{r} \cdot H_{2,0}. \end{aligned} \quad (100_1)$$

3. Ha most fölteszszük azt, hogy a két fényforrásra nézve legyen:

$$a_1 = a_2; \quad \delta_1 = \delta_2 \quad \text{és így} \quad A_1 = A_2; \quad \psi_1 = \psi_2;$$

akkor folytatólagosan:

$$\mathfrak{E}_{1,0} = \mathfrak{E}_{2,0}; \quad \mathfrak{H}'_{1,0} = \mathfrak{H}'_{2,0}; \quad \mathfrak{H}''_{1,0} = \mathfrak{H}''_{2,0};$$

és így végre, (91) és (97)-nek is tekintetbe vételével:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,h_1} &= \mathfrak{E}_{2,h_1}; \\ \mathfrak{H}_{1,h_1} &= \mathfrak{H}_{2,h_1}; \end{aligned} \quad (101)$$

mely vonatkozások e szerint a viszonyosság tételét pontosan fejezik ki.

Itt az elektromos erők eredői mindig párhuzamos kör mentiek; a mágnességi erők eredői azonban általánosságban véve *nem* délkör mentiek, mindazonáltal a viszonyosság tétele itt szigorúan érvényes.

9. §. *Pontszerű, egymástól tetszésszerűen nagy vagy kicsiny távolságban lévő fényforrások ugyanabban a közegben.*
(B) *A második típus esete.*

A 4. §. 2. pontja szerint legyen, a megelőző §. elején tett kikötés, ugyanis (60)-ban a D zérus értéke mellett:

$$D = 0; \quad F = 0; \quad G = + \frac{\partial P}{\partial z}; \quad H = - \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (102)$$

$$P = \frac{b}{r} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right).$$

Továbbá (63)-ból

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -4\pi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right); \\ \mathfrak{E}_y &= +4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}; \\ \mathfrak{E}_z &= +4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (103_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_x) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_y) &= + \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 P; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_z) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 P; \end{aligned} \quad (103_2)$$

avagy, felhasználva a megelőző §. (A) pontja fejtegetéseit és a

$$\nabla^2 P = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 P$$

összefüggést, a (79) és (78) rendszereinek megfelelő szerkezetek itt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -4\pi \left\{ \frac{y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right\}; \\ \mathfrak{E}_y &= +4\pi \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right); \\ \mathfrak{E}_z &= +4\pi \frac{xz}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (104_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_x) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_y) &= - \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{H}_z) &= + \frac{4\pi c}{\mu} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}; \end{aligned} \quad (104_2)$$

továbbá, írva $\int P dt = II$; azaz:

$$\int P(r, t) dt = II(r, t) + a \text{ koordináták függvénye}; \quad (105)$$

marad:

$$I' = \frac{\partial II}{\partial t};$$

Ez alapon az *elektromos erőket* hasonló módon szétbontva, mint a megelőző §. (A) pontjában a mágnességi erőket a (86') és (86'') rendszereknek megfelelő szerkezetek itt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}'_x &= -4\pi \frac{y^2+z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right); \\ \mathfrak{E}'_y &= +4\pi \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right); \\ \mathfrak{E}'_z &= +4\pi \frac{xz}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} (106') \quad \left. \begin{aligned} \mathfrak{E}''_x &= -4\pi \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}; \\ \mathfrak{E}''_y &= 0; \\ \mathfrak{E}''_z &= 0. \end{aligned} \right\} (106'')$$

E két csoport eredője külön-külön:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= -4\pi r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \right) \sin \vartheta = + \mathfrak{E}'_0 \sin \vartheta; \\ \mathfrak{E}'' &= -4\pi \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = + \mathfrak{E}_0. \end{aligned} \quad (107)$$

A *mágnességi erők* eredője pedig, az időszerinti integráció után, az időtől nem függő mennyiségek mellőzésével:

$$\mathfrak{E} = -4\pi \frac{c}{\mu} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\partial II}{\partial r} \sin \vartheta = \mathfrak{E}_0 \sin \vartheta. \quad (108)$$

Az \mathfrak{E}' oly meridionális vektorrendszert alkot, melynek vektorai az r szerint *nem egyszerűen*, a t szerint *egyszerűen* harmonikusak; az \mathfrak{E}'' rendszer vektorai mind, mindig párhuzamosak az X -hez, mint symmetria-tengelyhez és amplitudóik csakis az r -től függenek.

Ha most a 6. ábra szerint az S_1 -ben lévő 1 indexű fényforrás által az S_2 -ben gerjesztett vektorok vetületét $\underline{h_2 h_2}$ -ra alkotjuk és megfordítva, akkor e vektor-vetületek írhatók:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{1, h_2} &= + \mathfrak{E}'_{1, 0} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon; \\ \mathfrak{E}''_{1, h_2} &= + \mathfrak{E}''_{1, 0} \cos \alpha; \end{aligned} \quad (109_1)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'_{1, h_2} &= + \mathfrak{H}'_{1, 0} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon. \\ \mathfrak{E}'_{2, h_1} &= + \mathfrak{E}'_{2, 0} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \varepsilon; \\ \mathfrak{E}''_{2, h_1} &= + \mathfrak{E}''_{2, 0} \cos \alpha; \\ \mathfrak{H}'_{2, h_1} &= + \mathfrak{H}'_{2, 0} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (109_2)$$

E kifejezésekben

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{b_1}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \delta_1 \right); \\ \mathfrak{E}'_{1, 0} &= - 4\pi r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial r} \right); \\ \mathfrak{E}''_{1, 0} &= - 4\pi \frac{2}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r}; \\ \mathfrak{H}'_{1, 0} &= - 4\pi \frac{c}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{dH_1}{dr}; \\ H_1 &= \int P_1 dt. \end{aligned} \quad (110_1)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{b_2}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \delta_2 \right); \\ \mathfrak{E}'_{2, 0} &= - 4\pi r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial r} \right); \\ \mathfrak{E}''_{2, 0} &= - 4\pi \frac{2}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r}; \\ \mathfrak{H}'_{2, 0} &= - 4\pi \frac{c}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial H_2}{\partial r}; \\ H_2 &= \int P_2 dt. \end{aligned} \quad (110_2)$$

Tekintettel e mennyiségek szerkezetére, azonnal kiderül, hogy a mikor

$$b_1 = b_2; \delta_1 = \delta_2,$$

s így folytatólagosan

$$P_1 = P_2; H_1 = H_2,$$

azaz

$$\mathfrak{E}'_{1, 0} = \mathfrak{E}'_{2, 0}; \mathfrak{E}''_{1, 0} = \mathfrak{E}''_{2, 0}; \mathfrak{H}'_{1, 0} = \mathfrak{H}'_{2, 0},$$

akkor egyszersmind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1, h_2} &= \mathfrak{E}_{2, h_1}; \\ \mathfrak{H}_{1, h_2} &= \mathfrak{H}_{2, h_1}; \end{aligned} \quad (111)$$

s ez ismét a viszonyosság említett tétele, mely e második megoldási rendszer esetében szintén pontosan érvényes.

I. jegyzet. A rugalmasságtani fényelméletben, a 2. §. 1. és 2. pontja megoldási rendszerei kifejtését éppen így mint a 8. és a 9. §-ban az elektromágnességi elméletben *minden elhanyagolás nélkül* lehet végezni; az így keletkező ρ rugalmas elmozdulás és ω rugalmas csavarodás (forgás) rendszereinek szerkezete a legnagyobb mértékben analogonja az elektromágnességi vektorok rendszereinek. A különbség főleg csak abban áll, hogy az alapegyenletek a rugalmassági elméletben a (4) szerint az ismert ρ_x, ρ_y, ρ_z -nak a koordináták szerint képezett differenciális hányadosai közvetlenül az $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ mennyiségeket szolgáltatják, míg az elektromágnességi elméletben a (36₂) az $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ -nek ugyanilyen differenciális hányadosaiból közvetlenül a $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ időbeli első differenciális hányadosai adódnak, úgy hogy itt még egy időbeli integratio szükséges.

Az itt tárgyalt viszonyossági tétel az e §-ban használt tág határok között e szerint a rugalmassági rendszerekre vonatkozólag is szigorúan érvényes.

De e mellett mindenkor annak a feltevésnek kell állania, hogy a *gerjesztő fényforrás méretei* egyrészt a fényhullámhosszúsághoz képest, másrészt a fellépő r távolsághoz képest is, *mindig igen kicsinyek.*

II. jegyzet. Ha a fénylő pontoknak szigorúan fogalmazott ama problémáit adjuk meg, a melyeket az 5. §. végén jeleztünk, akkor a nyert szigorú megoldásokat igen könnyű arra az egyszerűbb esetre redukálni, mikor az e problémákban feltevészerűen felvett kicsiny gerjesztő-gömböcskék sugara a fény hullámhosszúságához képest igen kicsiny.

Ekkor e sugár első vagy valamely más hatványa az eredő, gerjesztett vektorrendszerek kifejezéseiben mindenütt csak *külső* együtthatóképpen szerepel és akkor a vektorok szerkezeti típusa ugyanolyan, mint az e §-ban tárgyaltaké oly észrevétellel, hogy most a fentiekben a, b, b' -vel jelelt együtthatókban az R gömböcske-sugár első vagy harmadik hatványa lép fel, az utóbbi az utoljára említett problémánál. Mindez esetekben: *igen kicsiny gerjesztő-gömböcskék*, mint fényforrások esetében a viszonyosság tétele a jelen §. alakja szerint *szigorúan fennáll.*

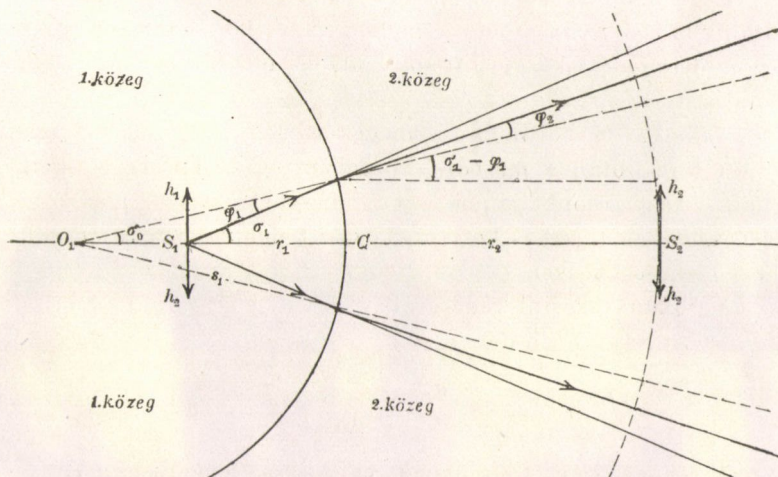
II.

A physikai optika viszonossági tétele, ha a két egyszínű, pontszerű fényforrás egymástól optikailag különböző, homogen és isotrop közegben van.

A) *A két közeget gömbfelület választja el egymástól; a két fényforrás e felület ugyanazon a normálisán van.*

10. §. *A gömbfelület középpontja az első közegben van. A fényforrás létesítette vektorok a második közegben. A szétterülés együtthatója.*

I. Legyen ismét, a 7. ábra szerint S_1 az első közegben lévő pontszerű fényforrás helye és S_2 a második közegben lévő az a



7. ábra.

hely, a hol az S_1 optikai hatását keressük; O_1 az elválasztó gömbfelületnek az első közegben lévő középpontja; C a hely, a hol az S_1S_2 távolság e felületet átdöfi.

Legyen továbbá s_1 e felület sugara; továbbá: $\overline{S_1C} = r_1$ és $\overline{CS_2} = r_2$ ez átdöfési pont távolsága az S_1 - és S_2 -től; végre φ_1 illetőleg φ_2 az S_1 -ből induló, S_2 -be érkező fénysugár beesés-illetőleg törésszöge, melyekre nézve mindig áll:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2. \quad (112)$$

a) *A divergentia-coëfficiens (széttérülési együttható).*

Az S_1 -ből induló gömbhullám a határfelületig zavartalanul terjed oly vektor-rendszerek szerint, melyek az előző 1—9. §-okban nyertek tárgyalást. De itt e határfelületen törés állván elő: a második közegben keletkező fényvektor ez által igen lényegesen megváltozik.

E vektor előállításánál a fényhajlástól eltekintünk, mert a gömbhullámok a törés előtt az első közegben, a törés után a második közegben szabadon terjedhetnek szét.

Ezért itt elegendő, ha az S_1 -ből induló valamely igen keskeny sugárkúpot vizsgálunk meg s a benne előálló fényvektort a törés előtt és ez után állapítjuk meg.

Legyen σ_1 ily körkúp nyílásszögének fele és σ_0 annak a körkúpnak fél nyílásszöge, a melyet az előbbi elemi kúp alapja a gömbfelület O_1 középpontjában alkot, miként ezt a 7. ábra mutatja.

Akkor az S_1 -ből induló r_1 magasságú, $2\sigma_1$ szögnyílású sugárkúp a törés után a második közegben egy elemileg keskeny, r_2 hosszúságú csonka-kúppá alakul, melynek méretei igen könnyen adódnak, mert a két kúp közös tengelye S_1S_2 és mind kettő elemileg keskeny.

A 7. ábra szerint rendre áll:

$$\begin{aligned} n_1\varphi_1 &= n_2\varphi_2; \\ \sigma_1 &= \sigma_0 + \varphi_1; \\ s_1\sigma_0 &= r_1\sigma_1. \end{aligned} \quad (113)$$

A csonka kúp alkotójának hajlása a tengelyéhez $\sigma_0 + \varphi_2$, úgy, hogy a kúp csúcsa, a tengely mentén, a C -től számítva r'_1 távolságban van az első közegben (mely r'_1 , valamint e csonka kúp csúcsa az ábrán nincsen elötüntetve).

Áll:

$$r'_1(\sigma_0 + \varphi_2) = r_1\sigma_1. \quad (114)$$

E szerint az $\overline{S_1C}$ magasságú sugárkúp alapterülete:

$$\pi r_1^2 \sigma_1^2; \quad (115)$$

míg a törött, csonka kúpnek az S_2 -n átmenő alapterülete:

$$\pi (r'_1 + r_2)^2 (\sigma_0 + \varphi_2)^2,$$

vagy a (114) szerint :

$$\pi \{r_1 \sigma_1 + r_2 (\sigma_0 + \varphi_2)\}^2. \quad (116)$$

E két területnek egymáshoz való viszonya :

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_0 + \varphi_2}{\sigma_1}\right)^2}. \quad (116_1)$$

E hányadost a fentírt összefüggések felhasználásával átalakítjuk, lévén a 7. ábra és a (113) szerint :

$$\sigma_0 = \frac{r_1}{s_1 - r_1} \cdot \varphi_1; \quad (117)$$

$$\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_0 + \varphi_2}{\sigma_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{n_2 r_1 + n_1 (s_1 - r_1)}{n_2 s_1}. \quad (118)$$

A keresett (116₁) hányadosra nézve pedig nyerjük

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_0 + \varphi_2}{\sigma_1}\right)^2} = \frac{(n_2 r_1 s_1)^2}{(n_2 r_1 s_1 + n_1 r_2 s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1))^2}. \quad (119)$$

b) Az S_2 helyen létesített fényvektorok.

Felvezesszük most egyszerűség kedvéért, hogy az S_1 -ben lévő pontszerű fényforrás symmetria-tengelye, $h_1 h_1$ merőleges legyen az $S_1 S_2$ egyenesre.

Ekkor az elválasztó felület C helyén keletkező vektorok kifejezései a 2. és 4. §§. (25), (34), (58), (65) formulái szerint közvetlenül adódnak, avval az egyszerűsítéssel, hogy itt $\vartheta = \pi/2$; e szerint

$$\begin{aligned} \text{illetőleg :} \quad \varrho_1 &= \frac{A_1}{r_1} \sin \psi_1; & \omega_1 &= \frac{A_1}{r_1} \cdot \frac{\pi}{\lambda_1} \cos \psi_1; \\ \varrho_1 &= \frac{B_1}{r_1} \sin \psi_1; & \omega_1 &= \frac{B_1}{r_1} \cdot \frac{\pi}{\lambda_1} \cos \psi_1; \end{aligned} \quad (120_a)$$

avagy :

$$\begin{aligned} \text{illetőleg :} \quad \mathfrak{E}_1 &= \frac{A_1}{r_1} \sin \psi_1; & \mathfrak{H}_1 &= \frac{A_1}{r_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \sin \psi_1; \\ \mathfrak{E}_1 &= \frac{B_1}{r_1} \sin \psi_1; & \mathfrak{H}_1 &= \frac{B_1}{r_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \sin \psi_1; \end{aligned} \quad (120_b)$$

hol:

$$\phi_1 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} + \delta_1 \right).$$

Mint hogy e kifejezések típusa ugyanaz, elegendő csak *egy* ily, például $\mathfrak{E}_1 = \frac{A_1}{r_1} \sin \phi_1$ típusú vektorra nézve a további fejtegetéseket végezni.

A közös határfelületen a vektor törést szenved, melynél-fova amplitudója a FRESNEL-féle

$$\frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \text{illetőleg} \quad \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

törési együttható szerint módosul, míg a phasisa e törés által nem szenved változást.

Mint hogy a tekintetbe vett, S_1C tengelyű, keskeny sugárnyaláb *merőlegesen* esik a határfelületre: φ_1 és φ_2 igen kicsinyek és az $n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2$ összefüggés alapján mindkét fentírt törési együttható határértéke e merőleges beesésnél:

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot \varphi_2}{\frac{n_2}{n_1} \varphi_2 + \varphi_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2};$$

úgy, hogy közvetlenül a törés után a vektornak közvetlenül a törés előtti:

$$\frac{A_1}{r_1}$$

amplitudójából a C helyen lett:

$$\frac{A_{1,\tau}}{r_1} = \frac{A_1}{r_1} \cdot \frac{2n_1}{n_1 + n_2}; \quad (121)$$

s így a beejtett nyaláb energiájából a határfelület területegységére eső rész:

$$\frac{A_1^2}{r_1^2};$$

melyből közvetlenül a törés után a C helyen lesz:

$$\frac{A_{1,\tau}^2}{r_1^2} = \frac{A_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (121_1)$$

Az S_2 helyen az r_2 -re merőleges területegységre eső energia a most felírtak csak avval a hányadrészével lehet egyenlő, a mely törtrész a törött, csonka kúpsugárnyaláb két alapterületének egymáshoz való hányadosa; mert kell, hogy az egész energia a csonkakúp két alapterületén egymással egyenlő legyen, azaz kell, hogy (115), (116) szerint álljon:

$$\frac{A_{1,\tau}^2}{r_1^2} \cdot \pi r_1^2 \sigma_1^2 = \frac{A_{1,\tau_1}^2}{r_1^2} \cdot \pi \{r_1 \sigma_1 + r_2 (\sigma_0 + \varphi_2)\}^2, \quad (122)$$

hol $A_{1,\tau}$ mint előbb a törött amplitudo értéke a határfelület C helyén, A_{1,τ_1} e törött amplitudo értéke az S_2 helyen.

Maga az $\mathfrak{E}_{1,2}$ vektor, mely S_2 helyen fellép:

$$\mathfrak{E}_{1,2} = \frac{A_{1,\tau_1}}{r_1} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} + \delta_1 \right) = \frac{A_{1,\tau_1}}{r_1} \sin \phi_{1,2}. \quad (123)$$

Mintthogy (122) és (121) szerint

$$A_{1,\tau_1} = A_1 \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{r_1 \sigma_1}{r_1 \sigma_1 + r_2 (\sigma_0 + \varphi_2)}, \quad (124)$$

a (119) felhasználásával e vektor írható:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,2} = A_1 \cdot \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_2 s_1}{n_1 r_2 s_1 + n_2 r_1 s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1)} \times \\ \times \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_1 \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

Ez az S_1 -ben lévő fényforrás által az S_2 helyen létesített vektor kifejezése, a mely az r_1 -re mindig merőlegesen és a $h_1 h_1$ tengelylyel vagy párhuzamosan vagy reá merőlegesen váltakozik. —

II. Legyen most (8. ábra) S_2 valamely egyszínű, pontszerű fényforrás a második közegben; és legyen S_1 az első közegben lévő az a hely, a hol az S_2 optikai hatását keressük; a két közeget elválasztó gömbfelület ugyanaz legyen, mint az I. pontban, a 7. ábrán: a többi jelzés is a lehetőség szerint ugyanaz.

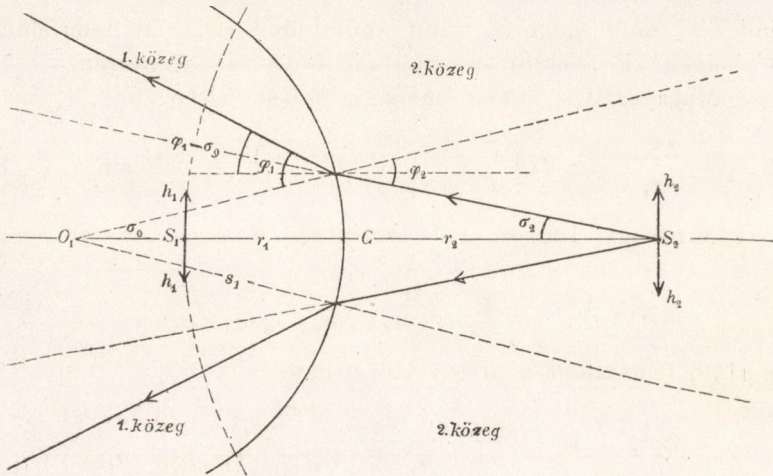
a) A *divergentia-coëfficiens* (a szétterülési együttható).

Az S_2 -ből induló gömbhullámok az s_1 sugarú határfelületig

zavartalanul terjednek s ott az első közegbe töretnek, miáltal e hullámok vektorai lényegesen megváltoznak.

Itt is, az I. a) alatt említett okoknál fogva, a fényelhajlás nem visz szerepet és itt is elegendő az S_2 -ből induló oly keskeny sugárnyaláb tárgyalása, melynek tengelye $\overline{S_2C} = r_2$ merőleges a határfelületre.

Jelezzé σ_2 ily körkúp nyílásszöge felét és σ_0 ismét annak a körkúp fél nyílásszögét, a melynek csúcsa az O_1 felületi kö-



8. ábra.

zéspont és alapja ugyanaz a a kör, mely a σ_2 körkúp alapja; itt φ_2 a beesés-, φ_1 a törés szöge.

Ekkor az ábra szerint rendre nyerjük:

$$\begin{aligned} n_1 \varphi_1 &= n_2 \varphi_2; \\ \sigma_2 &= \varphi_2 - \sigma_0; \\ s_1 \sigma_0 &= r_2 \sigma_2. \end{aligned} \quad (126)$$

Az első közegben haladó csonka kúp bármely alkotója a kúp tengelyével alkot

$$\varphi_1 - \sigma_0 = \varphi_1 - \varphi_2 + \sigma_2$$

szöget és így e csonka kúp csúcsa a második közegben, a C -tól

r'_2 távolságban van (e csúcspont és az r'_2 távolság ninesen az ábrán előtűntetve), úgy, hogy

$$r'_2(\varphi_1 - \sigma_0) = r'_2(\varphi_1 - \varphi_2 + \sigma_2) = r_2\sigma_2; \quad (127)$$

$$r'_2 = r_2 \frac{\sigma_2}{\varphi_1 - \varphi_2 + \sigma_2}.$$

E szerint e csonka kúpnak az S_1 -en átmenő harántmetszetének területe:

$$\pi (r'_2 + r_1)^2 (\varphi_1 - \varphi_2 + \sigma_2)^2 = \pi \{r_2\sigma_2 + r_1(\varphi_1 - \sigma_0)\}^2; \quad (129)$$

míg az S_2 -ből induló σ_2 szögű kúp alapterülete a C helyen:

$$\pi \cdot r_2^2 \sigma_2^2. \quad (128)$$

Ámde a fentirt (126) összefüggésekből némi egyszerűsítéssel:

$$\sigma_2 = \frac{s_1}{s_1 + r_2} \cdot \varphi_2. \quad (130)$$

$$\sigma_0 = \frac{r_2}{s_1 + r_2} \cdot \varphi_2. \quad (131)$$

Ezekkel a szóbanforgó (128) és (129) két harántmetszet némi számításal:

$$\pi r_2^2 \sigma_2^2 = \pi \frac{s_1^2 r_2^2}{(s_1 + r_2)^2} \cdot \varphi_2^2; \quad (128_1)$$

$$\pi \{r_2\sigma_2 + r_1(\varphi_1 - \sigma_0)\}^2 = \pi \frac{1}{n_1^2 (s_1 + r_2)^2} \times \quad (129_1)$$

$$\times \{(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1)\}^2 \varphi_2^2.$$

A két harántmetszet hányadosa:

$$\frac{n_1^2 r_2^2 s_1^2}{\{(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1)\}^2}. \quad (132)$$

b) Az S_1 helyen létesített fényvektorok.

Legyen itt az S_2 -fényforrásból induló váltakozások symmetria-tengelye $h_2 \overline{h_2}$, mely szintén merőleges legyen az $S_2 S_1$ egyenesre.

Ekkor itt a C helyre érkező gömbhullámok vektorai még a második közegben, ugyancsak a 2. és 4. §§. (25), (34), (58), (65) formulái szerint írhatók, lévén szintén $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{illetőleg: } \begin{aligned} \varrho_2 &= \frac{A_2}{r_2} \sin \psi_2; & \omega_2 &= \frac{A_2}{r_2} \cdot \frac{\pi}{\lambda_2} \cos \psi_2; \\ \varrho_2 &= \frac{B_2}{r_2} \sin \psi_2; & \omega_2 &= \frac{B_2}{r_2} \cdot \frac{\pi}{\lambda_2} \cos \psi_2; \end{aligned} \quad (133_a)$$

avagy:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_2 &= \frac{A_2}{r_2} \sin \psi_2; & \mathfrak{H}_2 &= \frac{A_2}{r_2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sin \psi_2; \\ \mathfrak{E}_2 &= \frac{B_2}{r_2} \sin \psi_2; & \mathfrak{H}_2 &= \frac{B_2}{r_2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sin \psi_2; \end{aligned} \quad (133_b)$$

hol:

$$\psi_2 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_2.$$

Itt is, mint a (120_a) és (120_b) rendszer esetében például az $\mathfrak{E}_2 = \frac{A_2}{r_2} \sin \psi_2$ típust használva, a *C* helyen a második közegből az *első közegbe történt* törés folytán az amplitudóhoz lép a FRESNEL-féle

$$\frac{2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\sin (\varphi_2 + \varphi_1)}, \quad \text{illetőleg} \quad \frac{2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_1}{\sin (\varphi_2 + \varphi_1) \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

törési együttható határértéke, mely e merőleges beesésnél:

$$\frac{2n_2}{n_1 + n_2}.$$

E szerint a csonka kúp *C*-t tartalmazó alapterületén, de már az első közegben, az energia:

$$\left(\frac{A_{2,\tau}}{r_2} \right)^2 \cdot \pi r_2^2 \sigma_2^2;$$

hol $A_{2,\tau}$ a területegységre vonatkozó amplitudó értéke közvetlenül a *C*-nél végbemenő behatolás után, úgy, hogy áll

$$\frac{1}{r_2} \cdot A_{2,\tau} = \frac{1}{r_2} A_2 \cdot \frac{2n_2}{n_2 + n_1}. \quad (134)$$

Ellenben ugyane csonka kúpnek S_1 -en átmenő egész haránt metszetén ez az energia:

$$\left(\frac{A_{2,\tau_1}}{r_2} \right)^2 \pi \{r_2 \sigma_2 + r_1 (\varphi_1 - \sigma_0)\}^2,$$

hol A_{2, τ_1} az S_1 -en átmenő harántmetszeten fellépő, a terület-egységre vonatkozó amplitudo.

A két energia egymással egyenlő lévén, a (132) alapján nyerjük:

$$\frac{1}{r_2} A_{2, \tau_1} = A_2 \cdot \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_1 s_1}{(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1)} \quad (135)$$

és maga a vektor S_1 -ben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2, 1} = A_2 \cdot \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_1 s_1}{(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1)} \times \\ \times \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) + \delta_2 \right], \end{aligned} \quad (136)$$

mely az S_1 -en át merőlegesen az r_1 -re és vagy merőlegesen vagy párhuzamosan $h_2 h_3$ -hoz váltakozik. —

III. Az $\mathfrak{E}_{1, 2}$ (125) és az $\mathfrak{E}_{2, 1}$ (136) kifejezésében az A_1 , illetőleg az A_2 mellett fellépő *állandó együtthatók egymással egyenlők*; e szerint kitetszik, hogy a mikor:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2; \\ \delta_1 = \delta_2; \end{aligned} \quad (137)$$

akkor egyszersmind

$$\mathfrak{E}_{1, 2} = \mathfrak{E}_{2, 1}; \quad (138)$$

s ez ismét a viszonyosság szóban forgó tételét pontosan fejezi ki.

11. §. *A gömbalakú határfelület középpontja a második közegben van.*

A megelőző §. fejtegetései most csak annyiban szenvednek változást, a mennyiben az elválasztó gömbfelület sugara s_1 helyett s_2 ; középpontja O_1 helyett O_2 irandó, a mely utóbbi a második közegben van. A többi jelzés változatlanul megmarad.

I. *A fényforrás S_1 helyen legyen; keressük az általa az S_2 helyen létesített vektorokat.*

A 9. ábra felhasználásával itt rendre nyerjük:

$$n_1 \varphi_1 = n_2 \varphi_2; \quad \sigma_1 = \varphi_1 - \sigma_0; \quad r_1 \sigma_1 = s_2 \sigma_0; \quad (139)$$

ezekből:

$$\sigma_0 = \frac{r_1}{r_1 + s_2} \cdot \varphi_1; \quad \sigma_1 = \frac{s_2}{r_1 + s_2} \varphi_1. \quad (140)$$

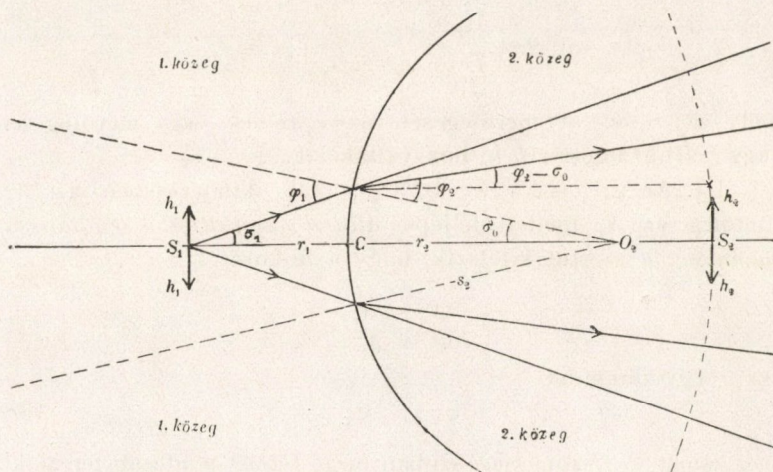
Az S_1 -ből induló keskeny sugárkúp keresztmetszévényé a C helyen, illetőleg a törés után a második közegbe haladó csonka kúp harántmetszete az S_2 helyen:

$$\pi \cdot r_1^2 \sigma_1^2; \quad \pi (r_1' + r_2)^2 (\varphi_2 - \sigma_0)^2; \quad (141)$$

itt áll:

$$r_1' (\varphi_2 - \sigma_0) = r_1 \sigma_1,$$

hol e csonka kúp csúcspontjának a C -től való távolsága az első közegben r_1' ; e távolság és a csonka kúp csúcsa az ábrán nincsen elötüntetve.



9. ábra.

A fenti összefüggések szerint a csonka kúp e két alapterülete némi számítás után írható:

$$\pi \frac{r_1^2 s_2^2}{(r_1 + s_2)^2} \varphi_1^2; \quad (142)$$

$$\pi \frac{1}{n_2^2} \cdot \frac{1}{(r_1 + s_2)^2} \{n_2 r_1 s_2 + r_2 n_1 (r_1 + s_2) - r_2 n_2 r_2\}^2 \varphi_1^2;$$

és így e két alapterület hányadosa:

$$\frac{n_2^2 r_1^2 s_2^2}{\{(r_1 n_2 + r_2 n_1) s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1)\}^2}; \quad (143)$$

a mely a megelőző §. I. a) alatt talált (119) hányadostól csak

annyiban különbözik, hogy az ott fellépő s_1 körsugár helyébe itt $-s_2$ körsugár teendő, a mi egyébként közvetlenül várható is volt.

A továbbiakban a megelőző §. I. **b)** pontja szerint ugyanígy tárgyalva az \mathfrak{E}_1 vektort, mint ott: a FRESNEL-féle törési együtthatók határértéke itt is $2n_1 : (n_1 + n_2)$, és így, arra nézve, hogy az S_1 -ből induló gömbhullám által az S_2 helyen létesített $\mathfrak{E}_{1,2}$ vektort kifejezhesük, a (125)-ben mindenütt a fentemlített felcserélést végezve, nyerjük:

$$\mathfrak{E}_{1,2} = A_1 \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_2 s_2}{n_1 r_2 s_2 + n_2 r_1 s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1)} \times \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right) + \delta_1 \right]. \quad (144)$$

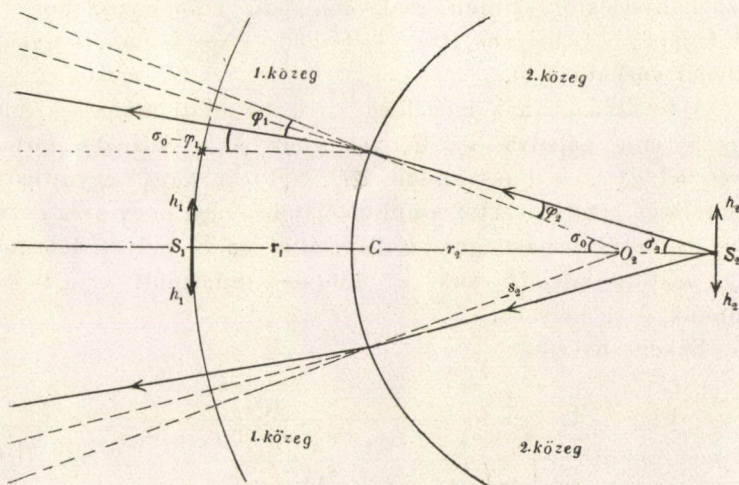
II. A fényforrás S_2 -ben legyen; keressük az általa az S_1 helyen létesített vektorokat.

A 10. ábra felhasználásával rendre nyerjük

$$n_1 \varphi_1 = n_2 \varphi_2; \quad \sigma_2 = \sigma_0 - \varphi_2; \quad r_2 \sigma_2 = s_2 \sigma_0; \quad (145)$$

ezekből:

$$\sigma_0 = \frac{r_2}{r_2 - s_2} \cdot \varphi_2; \quad \sigma_2 = \frac{s_2}{r_2 - s_2} \cdot \varphi_2. \quad (146)$$



1). ábra.

Az S_2 -ből induló keskeny kúpból, az 1. közegbe történt törés után keletkezett csonka kúp kisebbik alapterülete C -nél, és nagyobbik alapterülete S_1 -nél:

$$\pi \cdot r_2^2 \sigma_2^2; \quad \pi (r_2' + r_1)^2 (\sigma_0 - \varphi_1)^2, \quad (147)$$

hol

$$r_2' (\sigma_0 - \varphi_1) = r_2 \sigma_2,$$

ha r_2' a csonka kúp csúcsának a C -től számított távolsága a 2. közegben; e távolság és a csonka kúp csúcsa nincsen az ábrán előtüntetve.

A fenti összefüggések szerint e két harántszelvény területe némi számítással:

$$\pi \cdot \frac{r_2^2 s_2^2}{(r_2 - s_2)^2} \cdot \varphi_2^2; \quad (148)$$

$$\pi \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{1}{(r_3 - s_2)^2} \{n_1 r_3 s_2 + r_1 r_2 \cdot n_1 - (r_2 - s_2) r_1 n_2\}^2 \varphi_2^2.$$

A két alapterület hányadosa:

$$\frac{n_1^2 r_2^2 s_2^2}{\{(n_1 r_3 + n_2 r_1) s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1)\}^2}, \quad (149)$$

a mely érték a megelőző §. II. b) alatt talált, (135)-ben jelentkező hányadostól szintén csak annyiban különbözik, hogy az ott fellépő $+s_1$ helyébe itt s_2 teendő, a mi szintén közvetlenül várható volt.

A továbbiakban a megelőző §. II. b) alatti kifejtések mintája szerint haladva, az \mathfrak{E}_2 vektornak az 1. közegbe történt törésénél itt is a FRESNEL-féle $2n_3 : (n_1 + n_2)$ törési együtthatók határértéke járul e vektor amplitudójához; úgy, hogy arra nézve, hogy S_2 -ből származó gömbhullám által az S_1 helyen létesített $\mathfrak{E}_{2,1}$ vektort kifejezhessük, a (136)-ba mindenütt $-s_2$ -t kell tennünk $+s_1$ helyébe.

Ekként nyerjük:

$$\mathfrak{E}_{2,1} = A_2 \cdot \frac{2n_3}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_1 s_2}{n_1 r_3 s_2 + n_2 r_1 s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1)} \times \quad (150)$$

$$\times \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) + \delta_2 \right].$$

III. Ha az $\mathfrak{C}_{1,2}$ (144) és az $\mathfrak{C}_{2,1}$ (150) kifejezéseiben

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2; \\ \delta_1 &= \delta_2; \end{aligned} \quad (151)$$

akkor egyszersmind

$$\mathfrak{C}_{1,2} = \mathfrak{C}_{2,1}; \quad (152)$$

s ez ismét pontosan fejezi ki a viszonosság tételét, a mint ez a megelőző §. fejtegetéseiből már előre várható volt s miként ezt e megelőző §. eredményeiből is közvetlenül lehetett volna nyerni a $+s_1$ -nek a $-s_2$ -vel való helyettesítésével; mert ez fejezi ki azt, hogy az elválasztó felület középpontja az előbbi §-ban az 1. közegben van és sugara s_1 , míg a jelen §-ban a 2. közegben van és sugara s_2 .

12. §. *A nyert viszonossági tétel érvényességi körének kiterjesztése. Kivételes esetek, mikor a tétel nem állhat fenn.*

1. *A tétel érvényes bármily irányítású symmetria-tengelyre nézve.*

Az előző két §-ban a gerjesztő fényvektorok váltakozásainak $\overline{h_1 h_1}$, illetőleg $\overline{h_2 h_2}$ symmetria-tengelyét egyszerűség kedvéért az $\overline{S_1 S_2}$ összekötő egyenesre merőlegesnek választottuk.

E megszorítás nem szükséges, ha $\overline{S_1 S_2}$, miként az előző két §-ban is mindig úgy választottuk és 7., 8., 9., 10. ábráink is mutatják, normális a határoló gömb felületére.

Válaszszuk most e $\overline{h_1 h_1}$, illetőleg $\overline{h_2 h_2}$ symmetria-tengelyt ez $\overline{S_1 S_2}$ -hez képest tetszés-szerinti ϑ_1 , illetőleg ϑ_2 -hajlásúnak: akkor a fényvektorok legelemibb tulajdonságai szerint ily gerjesztő vektor avagy fényforrás helyettesíthető két oly fényforrással, a melyek egyikének symmetria-tengelye merőleges az $\overline{S_1 S_2}$ -re, másikéé ebbe az egyenesbe esik. Az elsőre nézve a megelőző két §. fejtegetései és így maga e viszonossági tétel pontosan érvényes; a második azonban a \mathfrak{C} -ben vagy az S_2 -ben semmiféle vektort nem letehet, mert a gerjesztő helytől számított, λ -ra nézve jelentékenyebb távolságban a symmetria-tengely mentén lévő pontokban vektor nem állhat elő, lévén ugyanis a 2. és 4. §§. (25), (34), (58), (65) formuláiban az ily pontokra nézve $\vartheta=0$. E szerint tételünk ebben az esetben is szigorúan fennáll.

2. *A tétel érvényes bármily, egyébként bonyolódott, egy-színű, pontszerű fényforrásra nézve.*

Bármilyen legyen a monochromás fényforrás szerkezete: az mindenkor helyettesíthető symmetria-tengelylyel bíró tetszőszerinti számú ily egyszerű fényforrásokkal, a melyek mind-egyikére nézve, a megelőző 1. pont szerint e tétel fennáll.

Ezek szerint tételünk szigorúan érvényes a monochromás, pontszerű fényforrás e legáltalánosabb esetében is.

3. *Kivételes esetek, a melyekben a viszonyossági tétel nem érvényes.*

Az $\mathfrak{E}_{1,2}$ és $\mathfrak{E}_{2,1}$ kifejezéseinek amplitudói a megelőző két §. (125), (136) és (144), (150) formulái szerint az

$$(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_1 + r_1 r_2 (n_2 - n_1), \quad (153)$$

illetőleg az:

$$(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1) \quad (154)$$

nevezőt mutatják.

Itt, miként a megelőző négy (7., 8., 9., 10.) ábra mutatja, mindig felvettük:

$$n_2 > n_1.$$

Az *első esetben*, mikor O_1 középpont az 1. közegben, az optikailag *ritkább* anyagban van: a 7. ábra szerint az S_1 -ből induló sugarak a második közegbe való törés után a geometriai optika elemi törvényei szerint, mindig széthajlók maradnak, reális képet nem alkothatnak; hasonlóképpen a 8. ábra szerint, az S_2 -ből induló sugarak, az első közegbe történt törés után szintén csak széthajló nyalábot alkotnak, reális képet nem létesíthetnek. Ezekben az esetekben a felírt kifejezések elseje, ugyanis (153) érvényes.

A fentírt nevező ezekben az esetekben véges, ha r_1 és r_2 is véges és sehol sem lehet zérus.

A *második esetben*, mikor O_2 középpont a 2. közegben, az optikailag *sűrűbb* anyagban van, a 9. ábra szerint, az S_1 -ből induló sugárnyaláb a második közegbe való törés után szét-hajló marad, míg

$$\varphi_2 - \sigma_0 > 0,$$

avagy a 11. §. I. pontja (139) és (140) egyenletei szerint, míg

$$\frac{n_1}{n_2} \varphi_1 - \frac{r_1}{r_1 + s_2} \varphi_1 > 0,$$

azaz, a míg

$$r_1 < \frac{n_1}{n_2 - n_1} s_2. \quad (155')$$

Ha $r_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} s_2$, akkor a törött sugárkúp körhengerré fajul; s ha

$$r_1 > \frac{n_1}{n_2 - n_1} s_2, \quad (155'')$$

e henger *összehajló* kúppá alakul, melynek csúcsa az S_1 fényforrás reális képe a második közegben.

Hasonlóképpen az ebben a *második esetben* a 10. ábra szerint az S_2 -ből induló sugárnyaláb, az első közegbe való törés után, széthajló marad, a meddig:

$$\sigma_0 - \varphi_1 > 0,$$

azaz, a 11. §. II. pontja (145) és (146) egyenletei szerint, míg:

$$\frac{r_2}{r_2 - s_2} \varphi_2 - \frac{n_2}{n_1} \varphi_2 > 0,$$

azaz, a meddig:

$$r_2 < \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot s_2. \quad (156')$$

Ha $r_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} s_2$, akkor a törött sugárkúp körhengerré fajul; s ha:

$$r_2 > \frac{n_2}{n_2 - n_1} s_2, \quad (156'')$$

e henger *összehajló* kúppá alakul, melynek csúcsa az S_2 fényforrás reális képe az első közegben.

Ezekben az esetekben, mikor a mindenkori gerjesztő fényforrásnak *reális* képe létesül a másik közegben, könnyű belátni, hogy az S_1 és az S_2 helyét úgy választhatni, hogy az egyik helyen a másiknak reális képe keletkezzék; ekkor S_1 és S_2 konjugált gyújtópontok és r_1 , r_2 konjugált gyújtótávolságok; ezekre, nézve, miként a geometriai optika elemeiből ismeretes,

$$\frac{n_1}{r_1} + \frac{n_2}{r_2} = \frac{n_2 - n_1}{s_2} \quad (157_1)$$

egyenlet áll fenn,¹ a melyet:

$$(n_1 r_2 + n_2 r_1) s_2 - r_1 r_2 (n_2 - n_1) = 0 \quad (157_2)$$

alakban írhatni ki.

Ez pedig nem más, mint az O_2 középpont esetében az $\mathfrak{E}_{1,2}$ (144) és az $\mathfrak{E}_{2,1}$ (150) kifejezések *nevezője zérus* értékének az esete; de ekkor e két vektor végtelen nagy, azaz szakadó értékű amplitudót mutatna, azaz az S_1 és az S_2 ama helyzeténél, a melynél ezek *konjugált gyújtópontok: a viszonosság tétele nem állhat fenn*.

E pontpárokat e szerint ki kell zárunk az $\overline{O_2 C}$ egyenesen lévő pontpárok közül: ennek oka az, hogy az O_2 esetében az S_2 -ből induló nyaláb a törés után nem csonka, hanem teljes kúppá alakul, melynek csúcsa S_1 -ben van és megfordítva; e csonka kúpok másik alapterülete e szerint *ponttá* zsugorodik össze, a mi éppen az amplitudónak e végtelenbe növelését eredményezi.

Szóval: a mely pontpárookra nézve a physikai optika viszonossági tétele fennáll, azokra nézve a geometriai optika tétele a konjugált pontok viszonosságáról nem állhat fenn és megfordítva.

Egyébként a geometriai optikában a sugarak menetére nézve számos viszonossági tétel áll fenn, a melyek mind a *tárgyra* (a fényforrásra) és *képére* vonatkoznak, a mely tételek mind, a fent említett okoknál fogva nem vihetők át a physikai optika

¹ E tekintetben v. ö.: M. v. ROHR: Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten. Berlin, J. Springer, 1904., 10., 17., 20., 23., 43. lap: ez utóbbi helyen szövegünk (154) kifejezése zérussá tevéséből származó formula, mint «a törés zérus-invariánsa» lép fel; az előjelek figyelembe veendőek!

R. S. HEATH: Lehrbuch der geometrischen Optik. Deutsche Ausgabe von R. KANTHACK. Berlin, J. Springer, 1894; 47. lap (11) formula, hol az előjelek is egyezők formulánk előjeleivel.

A. WINKELMANN, Handbuch der Physik. Zweite Auflage. Bd. VI₁, Optik I. Geometrische Optik von S. CZAPSKI. Leipzig. J. A. Barth 1904; 64—77. lap; különösen a 70. lap, melyen a szóban forgó fentjelzett invariáns szintén előáll.

E helyeken egyszersmind a további idetartozó irodalom is fellelhető.

fent kifejtett vonatkozásaira; úgy hogy e szerint e tételek között mélyre menő, jellegbeli különbségek jelentkeznek.

B) *A két közeget sík választja el egymástól; a két fényforrás e síkhoz képest tetszés-szerinti helyzetű.*

13. §. *Hivatkozás más helyen végzett oly vizsgálatok eredményeire, melyek ily esetekben a másikközegben létesített fényvektort kifejezik.*

Vegyük fel, hogy az 1. közegben a tetszés-szerinti S_1 helyen van egy egyszínű pontszerű fényforrás; keressük a 2. közegnek tetszés-szerinti helyén, az S_2 -ben előálló, az S_1 fényforrás által létesített fényvektorokat; éppen így megfordítva: az S_2 -ben fölvetett fényforrás által az S_1 helyen létesített vektorokat.

Ezt a vizsgálatot más helyen igen részletesen végeztem;¹ ezért e helyen teljesen elegendő, ha az ott nyert eredményeket közvetlenül a jelenleg szóban forgó tételünk bizonyítására felhasználjuk.

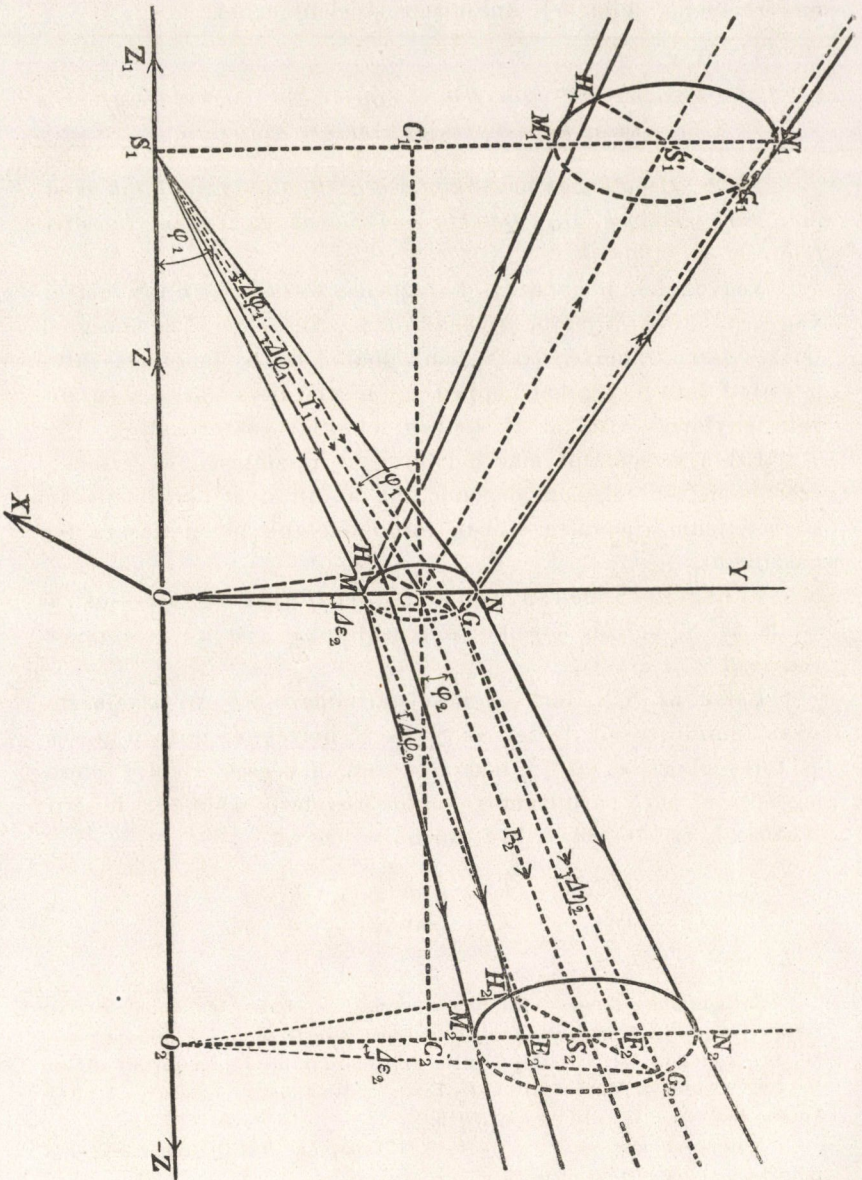
I. Legyen S_1 -ben a pontszerű fényforrás és keressük az általa az S_2 helyen létesített fényvektorokat; itt a 11. ábra érvényesül.

Ekkor az $\overline{S_1 S_2}$ tört egyeneset tartalmazó, az XV elválasztósíkra merőleges sík lesz az S_1 és S_2 helyekhez tartozó beesés- és törés-síkja; és az S_2 -ben létesített, a beesés síkjára merőleges és a vele párhuzamos vektor-összetevő irható [i. h. 457. és 458. l. és (16), (17); (12) formulái szerint]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1, m, 2} &= T_{1, m, 2} \sin(\psi_{1, 2} + \delta_{1, m}); \\ \mathfrak{E}_{1, p, 2} &= T_{1, p, 2} \sin(\psi_{1, 2} + \delta_{1, p}); \end{aligned} \quad (158)$$

¹ FRÖHLICH IZIDOR: „Különböző törésű, átlátszó két közeg választásfelülete közelségében lévő fénylő pontok elméletéhez.” Előterjesztve a M. T. Akadémia III. Osztálya 1915. évi február hó 15.-én tartott ülésén. M. Tud. Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője XXXIV. kötete 453–517. lap. Budapest, 1916.

Különösen a 3. és 4. §§; a 459–471. lapjain lévő fejtegetések eredményei azonnal értékesíthetők.



11. ábra.

hol:

$$\begin{aligned}
 T_{1,m,2} &= \frac{A_{1,m}}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 \cdot A_{1,m} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \times \\
 &\times \frac{n_2 \cos \varphi_2}{(n_1 r_2 + n_2 r_1)^{1/2} \cdot (n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1 + n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2)^{1/2}}; \\
 T_{1,p,2} &= \frac{A_{1,p}}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 \cdot A_{1,p} \cdot \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \times \\
 &\times \frac{n_2 \cos \varphi_2}{(n_1 r_2 + n_2 r_1)^{1/2} \cdot (n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1 + n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2)^{1/2}}; \\
 \psi_{1,2} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{r_2}{\lambda_2} \right).
 \end{aligned} \tag{159}$$

Jegyzet: Az e kifejezésekben előforduló $A_{1,m}$, $A_{1,p}$; $\delta_{1,m}$, $\delta_{1,p}$ mennyiségek az S_1 fényforrásnak a_1 , b_1 , c_1 ; $\delta_{1,a}$, $\delta_{1,b}$, $\delta_{1,c}$ jellemző állandóiból a 13. ábra szerint a következő meghatározó egyenletekkel vannak előállítva [i. h. (43_a) és (43_b) 485. lap]:

$$\begin{aligned}
 A_{1,m} \cos \delta_{1,m} &= a_1 \cos \vartheta \cos \delta_{1,a} - b_1 \sin \vartheta \cos \delta_{1,b}; \\
 A_{1,m} \sin \delta_{1,m} &= a_1 \cos \vartheta \sin \delta_{1,a} - b_1 \sin \vartheta \sin \delta_{1,b};
 \end{aligned} \tag{160_m}$$

$$\begin{aligned}
 A_{1,p} \cos \delta_{1,p} &= a_1 \sin \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,a} + \\
 &\quad + b_1 \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \delta_{1,b} + c_1 \sin \varphi_1 \cos \delta_{1,c}; \\
 A_{1,p} \sin \delta_{1,p} &= a_1 \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,a} + \\
 &\quad + b_1 \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \delta_{1,b} + c_1 \sin \varphi_1 \sin \delta_{1,c}.
 \end{aligned} \tag{160_p}$$

Itt az a , b , c amplitúdókhoz megkülönböztetés végett az ϑ jelzõt adtuk.

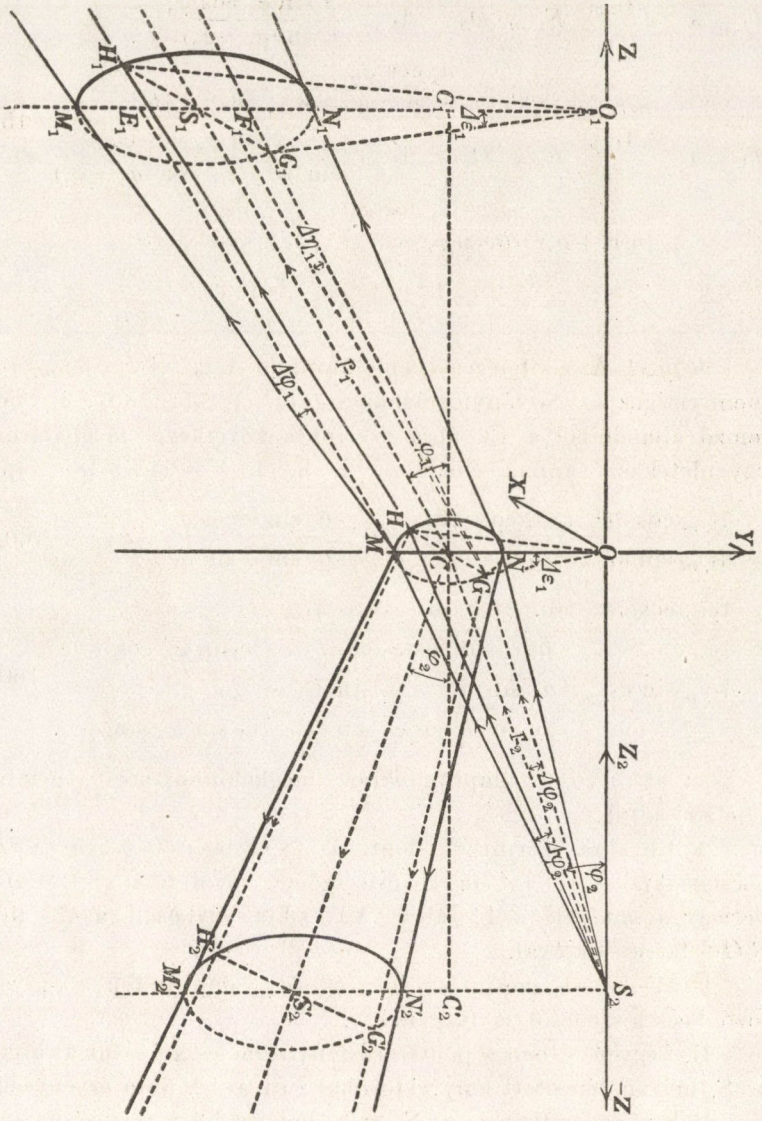
A 13. ábra szerint ϑ jelenti az S_1C bejuttatott sugár S_1OC beesés-síkja és az YZ -sík közötti szöveget, röviden az S_1C sugár beesési azimutját; a 11. ábra XY síkja egybeesik a 13. ábra S_1OC beesés-síkjával.

E kifejezések szerint az $A_{1,m}$ és $A_{1,p}$ amplitúdók a φ_1 változó beesés-szögétõl is függenek. —

II. Legyen S_2 -ben a pontszerû fényforrás és keressük az általa az S_1 helyen létesített fényvektorokat; itt a 12. ábra érvényesül.

Ebben az esetben is az S_1 és S_2 helyzetekhez tartozó beesés- és törés-síkja ugyanaz, mint az I. esetben.

Az S_2 által az S_1 -ben létesített fényvektorok kifejezései a



19. ábra.

megelőző, I. alatti kifejezésekből közvetlenül előállíthatók, ha ezekben az $_1$ és a $_2$ jelzõt kölcsönösen felcseréljük.

Ekként rendre leszén:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2, m, 1} &= T_{2, m, 1} \sin (\psi_{2, 1} + \delta_{2, m}); \\ \mathfrak{E}_{2, p, 1} &= T_{2, p, 1} \sin (\psi_{2, 1} + \delta_{2, p}); \end{aligned} \quad (161)$$

hol:

$$\begin{aligned} T_{2, m, 1} &= \frac{A_{2, m}}{r_2} \cdot F_{2, m} \cdot D_1 = A_{2, m} \cdot \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \times \\ &\times \frac{n_1 \cos \varphi_1}{(n_2 r_1 + n_1 r_2)^{1/2} \cdot (n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2 + n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1)^{1/2}}; \\ T_{2, p, 1} &= \frac{A_{2, p}}{r_2} \cdot F_{2, p} \cdot D_1 = A_{2, p} \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} \times \\ &\times \frac{n_1 \cos \varphi_1}{(n_2 r_1 + n_1 r_2)^{1/2} \cdot (n_2 r_1 \cos^2 \varphi_2 + n_1 r_2 \cos^2 \varphi_1)^{1/2}}; \\ \psi_{2, 1} &= 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) = \psi_{1, 2}. \end{aligned} \quad (162)$$

Jegyzet: Itt is az $A_{2, m}$, $A_{2, p}$; $\delta_{2, m}$, $\delta_{2, p}$ mennyiségek az S_2 fényforrásnak a_2 , b_2 , c_2 ; $\delta_{2, a}$, $\delta_{2, b}$, $\delta_{2, c}$ jellemző állandóiból az I. pontban használt egyenletek szerint kifejezhetők:

$$\begin{aligned} A_{2, m} \cos \delta_{2, m} &= a_2 \cos \vartheta \cos \delta_{2, a} - b_2 \sin \vartheta \cos \delta_{2, b}; \\ A_{2, m} \sin \delta_{2, m} &= a_2 \cos \vartheta \sin \delta_{2, a} - b_2 \sin \vartheta \sin \delta_{2, b}; \end{aligned} \quad (163_m)$$

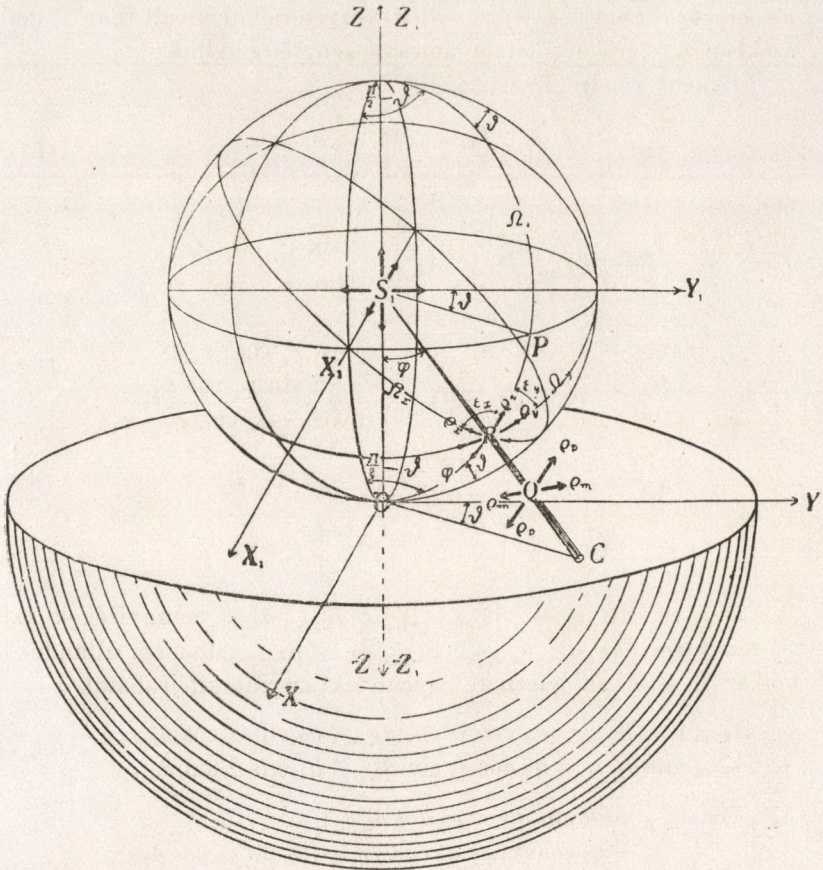
$$\begin{aligned} A_{2, p} \cos \delta_{2, p} &= a_2 \sin \vartheta \cos \varphi_2 \cos \delta_{2, a} + \\ &+ b_2 \cos \vartheta \cos \varphi_2 \cos \delta_{2, b} + c_2 \sin \varphi_2 \cos \delta_{2, c}; \\ A_{2, p} \sin \delta_{2, p} &= a_2 \sin \vartheta \cos \varphi_2 \sin \delta_{2, a} + \\ &+ b_2 \cos \vartheta \cos \varphi_2 \sin \delta_{2, b} + c_2 \sin \varphi_2 \sin \delta_{2, c}. \end{aligned} \quad (163_p)$$

Itt a ϑ szög ugyanaz, mint az I. pontban, mert az S_1 és S_2 hely ugyanaz lévén, az S_1CS_2 beeséssíkja is ugyanaz; éppen így e sík és az YZ sík közötti szög is ugyanaz a ϑ , megfelelőleg a 13. és a 12. ábrának; a 12. ábra YZ síkja itt is egybeesik a 13. ábra S_1OC beesés-síkjával.

E kifejezések szerint az $A_{2, m}$ és $A_{2, p}$ amplitudók a φ_2 változó beesés-szögetől is függenek.

III. Minthogy itt mindig:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2, \quad (112)$$



13. ábra.

az I. és a II.-ből azonnal adódik, hogy a (159) és (162)-ben az $A_{1,m}$, $A_{1,p}$ és az $A_{2,m}$, $A_{2,p}$ együtthatói egymással egyenlők, azaz, rendre áll:

$$\frac{1}{r_1} \cdot F_{1,m} \cdot D_2 = \frac{1}{r_2} \cdot F_{2,m} \cdot D_1; \quad (164)$$

$$\frac{1}{r_1} \cdot F_{1,p} \cdot D_2 = \frac{1}{r_2} \cdot F_{2,p} \cdot D_1;$$

avagy:

$$T_{1,m,2} : T_{2,m,1} = A_{1,m} : A_{2,m}; \quad (165)$$

$$T_{1,p,2} : T_{2,p,1} = A_{1,p} : A_{2,p}.$$

14. §. A viszonosság tétele fennállásának feltételei sík határfelület esetében.

1. Vegyük fel, hogy az S_1 és az S_2 helyeken lévő fényforrások által létesített vektorokra nézve a következő egyenlőségek állanak fenn:

$$\begin{aligned} A_{1,m} \cos \delta_{1,m} &= A_{2,m} \cos \delta_{2,m}; \\ A_{1,m} \sin \delta_{1,m} &= A_{2,m} \sin \delta_{2,m}; \end{aligned} \quad (166_m)$$

$$\begin{aligned} A_{1,p} \cos \delta_{1,p} &= A_{2,p} \cos \delta_{2,p}; \\ A_{1,p} \sin \delta_{1,p} &= A_{2,p} \sin \delta_{2,p}; \end{aligned} \quad (166_p)$$

vagy a mi egyenértékű ezekkel az egyenletekkel:

$$\begin{aligned} A_{1,m} &= A_{2,m}; & \delta_{1,m} &= \delta_{2,m}; \\ A_{1,p} &= A_{2,p}; & \delta_{1,p} &= \delta_{2,p}; \end{aligned} \quad (166)$$

akkor azonnal adódik az előző 13. §. (158), (159) és (161), (162) formuláiból:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2} &= \mathfrak{E}_{2,m,1}; \\ \mathfrak{E}_{1,p,2} &= \mathfrak{E}_{2,p,1}; \end{aligned} \quad (167)$$

amely egyenlőségek e szerint a viszonossági tételt az egész vektorra nézve, azaz mindkét összetevőjére nézve pontosan fejezik ki.

De megjegyzendő, hogy az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{2,m,1}$ összetevők merőlegesek az S_1CS_2 beesés síkjára; e szerint ez a két összetevő az S_2 -n, illetőleg az S_1 -en átmenő, egymással párhuzamos két egyenesben változik. Ellenben az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ és az $\mathfrak{E}_{2,p,1}$ összetevők e beesés-síkjában változnak: az első az S_2 -ben, merőlegesen a CS_2 -re; a második az S_1 -ben, merőlegesen a CS_1 -re; ez utóbbi két összetevő e szerint nem változik egymással párhuzamos egyenesek mentén, de ugyane beesés síkjában.

Az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ összetevőkből származó ellipsisszerű vektor síkja merőleges az $\vec{r}_2 = CS_2$ egyenesre, melynek mentén az S_1 -ből induló törött sugár halad; az $\mathfrak{E}_{2,m,1}$ és az $\mathfrak{E}_{2,p,1}$ összetevők ellipsisszerű eredőjének síkja merőleges az $\vec{r}_1 = CS_1$ egyenesre, melynek mentén az S_2 -ből induló törött sugár halad; így értendő itt a viszonosság tétele.

2. A fentírt (166_m) és (166_p) négy feltétel, a mely mellett

a viszonyossági tétel érvényes, a megelőző §. (160_m), (160_p) és (163_m), (163_p) egyenletei szerint nemcsak a két fényforrásnak

$$\begin{array}{ll} a_1, b_1, c_1; & \delta_{1,a}, \delta_{1,b}, \delta_{1,c}; \\ a_2, b_2, c_2; & \delta_{2,a}, \delta_{2,b}, \delta_{2,c}; \end{array}$$

állandóival, hanem a ϑ és φ_1 és φ_2 szögekkel is van szerkesztve, miért is ezeket a feltételeket kissé közelebből kell megvizsgálunk.

Az idézett egyenletek szerint e feltételek kifejtetten írhatók:

$$\begin{aligned} (a_1 \cos \delta_{1,a} - a_2 \cos \delta_{2,a}) \cos \vartheta - (b_1 \cos \delta_{1,b} - b_2 \cos \delta_{2,b}) \sin \vartheta &= 0; \\ (a_1 \sin \delta_{1,a} - a_2 \sin \delta_{2,a}) \cos \vartheta - (b_1 \sin \delta_{1,b} - b_2 \sin \delta_{2,b}) \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (168_m)$$

$$\begin{aligned} &(a_1 \cos \delta_{1,a} \cos \varphi_1 - a_2 \cos \delta_{2,a} \cos \varphi_2) \sin \vartheta + \\ &+ (b_1 \cos \delta_{1,b} \cos \varphi_1 - b_2 \cos \delta_{2,b} \cos \varphi_2) \cos \vartheta + \\ &+ (c_1 \cos \delta_{1,c} \sin \varphi_1 - c_2 \cos \delta_{2,c} \sin \varphi_2) = 0; \\ &(a_1 \sin \delta_{1,a} \cos \varphi_1 - a_2 \sin \delta_{2,a} \cos \varphi_2) \sin \vartheta + \\ &+ (b_1 \sin \delta_{1,b} \cos \varphi_1 - b_2 \sin \delta_{2,b} \cos \varphi_2) \cos \vartheta + \\ &+ (c_1 \sin \delta_{1,c} \sin \varphi_1 - c_2 \sin \delta_{2,c} \sin \varphi_2) = 0. \end{aligned} \quad (168_p)$$

Ezek szerint az S_1 és az S_2 fényforrás fentírt hat-hat állandója általánosságban véve mindig úgy választható, hogy e négy feltételt kielégítse; de ez a kielégítés általában véve nem fog bármely ϑ , φ_1 , φ_2 értékrendszerre nézve bekövetkezni, a miről alább részletesen lesz szó.

Ezenkívül előfordulhat az is, hogy csak egy vektor-összetevő jelentkezik a tárgyalandó jelenségben; akkor a felírt négy feltétel közül csak az első vagy a második pár marad fenn.

Ekként e tétel itt igen tág keretben, nagy változatossággal, de nem valamennyi sugárra nézve egyszerre érvényesíthető.

A következő §§-ban néhány főesetet kívánunk közelebből megvizsgálni, a melyre nézve a fentírt feltételeknek teljes kialakulását állapítjuk meg és pontosabban jelöljük meg azokat az érvényességi határokat, a melyek között a nevezett tétel mindkét összetevőre nézve fennáll.

Jegyzet. Felemlítést érdemel a következő körülmény: Ha a két fényforrás természete és a fellépő vektorok szerkezete

olyan, hogy e viszonyossági tétel *bármily beesés* szögére nézve fennáll, akkor azokban az esetekben is fennáll, a mikor a φ_1 a teljes visszaverődés határán túl van; ily esetekben a teljes fényvisszaverődés elméletének megfordítását lehetne e tétel alapján megkísérteni, a mely e szerint az oly fénylő pontok elméletére vezetne, a melyek átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében vannak elhelyezve. Ily elméleti kísérleteket fejtegettek a 6. §-ban említett SELÉNYI PÁL és MANDELSTAM LEONIDAS. De magam kimutattam a megelőző, a 13. §. elején idézett dolgozatomban, hogy ily *fénylő pontok elmélete e tételtől teljesen függetlenül*, egyenesen mint FRESNEL elméletének és a komplex vektorok physikai értelmezésének érdemleges továbbfejtése közvetlenül előállítható.

15. §. *A tétel érvényességének feltételei külön a beesés síkjára merőleges, és külön a vele párhuzamos vektor-összetevőre nézve.*

I. Az $\mathfrak{C}_{1,m,2} = \mathfrak{C}_{2,m,1}$ egyenértékűség *bármely ϑ azimutra* nézve fennáll, ha a (168_m) feltétel-párban egyszerre;

$$\begin{aligned} a_1 \cos \delta_{1,a} &= a_2 \cos \delta_{2,a}; & b_1 \cos \delta_{1,b} &= b_2 \cos \delta_{2,b}; \\ a_1 \sin \delta_{1,a} &= a_2 \sin \delta_{2,a}; & b_1 \sin \delta_{1,b} &= b_2 \sin \delta_{2,b}; \end{aligned}$$

avagy egyszerűen:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2; & b_1 &= b_2; \\ \delta_{1,a} &= \delta_{2,a}; & \delta_{1,b} &= \delta_{2,b}. \end{aligned} \quad (169)$$

E vonatkozások ϑ , φ_1 , φ_2 -tól függetlenek, szóval, ha ez a (169) négy feltétel fennáll, akkor (167) szerint *a merőleges vektor-összetevők egyenértékűsége bármily helyzetű S_1 és S_2 fényforrásra nézve érvényes.*

II. Az $\mathfrak{C}_{1,p,2} = \mathfrak{C}_{2,p,1}$ egyenértékűség fennállásának feltételei nem oly egyszerűek.

a) Ha azt kívánjuk, hogy ez az egyenértékűség *bármely ϑ azimutra nézve fennálljon*, akkor a (168_p) feltétel-párban kell, hogy teljesedjenek a feltételek:

$$\begin{aligned} a_1 \cos \delta_{1,a} \cos \varphi_1 &= a_2 \cos \delta_{2,a} \cos \varphi_2; \\ a_1 \sin \delta_{1,a} \cos \varphi_1 &= a_2 \sin \delta_{2,a} \cos \varphi_2; \\ b_1 \cos \delta_{1,b} \cos \varphi_1 &= b_2 \cos \delta_{2,b} \cos \varphi_2; \\ b_1 \sin \delta_{1,b} \cos \varphi_1 &= b_2 \sin \delta_{2,b} \cos \varphi_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1 \cos \delta_{1,c} \sin \varphi_1 &= c_2 \cos \delta_{2,c} \sin \varphi_2; \\c_1 \sin \delta_{1,c} \sin \varphi_1 &= c_2 \sin \delta_{2,c} \sin \varphi_2.\end{aligned}$$

E feltételek rendre írhatók:

$$\begin{aligned}\delta_{1,a} &= \delta_{2,a}; & \frac{a_1}{a_2} &= \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \\ \delta_{1,b} &= \delta_{2,b}; & \frac{b_1}{b_2} &= \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \\ \delta_{1,c} &= \delta_{2,c}; & \frac{c_1}{c_2} &= \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}.\end{aligned}\tag{169_a}$$

A phasisok egyenlőségén kívül az amplitudo-állandókra nézve kell, hogy álljon:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{b_2}{b_1}; \quad c_1 n_2 - c_2 n_1 = 0.\tag{169'_a}$$

E szerint, míg az $n_1 c_2 = n_2 c_1$ feltétel a beesés szögétől független, addig az utolsó feltétel ($a_1, a_2; b_1, b_2$ állandók lévén) meghatározott φ_2 szöghöz tartozik (e mellett a hozzá tartozó $\cos \varphi_1$ lehet *realis* vagy *imaginarius*).

A II. alatt írt $\mathfrak{C}_{1,p,2} = \mathfrak{C}_{2,p,1}$ egyenértékűség ilyenformán mindig csak egy bizonyos φ_2 törési, illetőleg beesési szögre nézve érvényes, a ϑ azimut e mellett tetszés-szerinti lehet.

β) Ha azt kívánjuk, hogy e párhuzamos vektorok egyenértékűsége tetszés-szerinti beesés-szögére nézve fennálljon, akkor ez egyenlőséghez tartozó (168_p) alatti feltételek mindenekelőtt még ily elrendezésben írandók:

$$\begin{aligned}(a_1 \cos \delta_{1,a} \sin \vartheta + b_1 \cos \delta_{1,b} \cos \vartheta) \cos \varphi_1 - \\ - (a_2 \cos \delta_{2,a} \sin \vartheta + b_2 \cos \delta_{2,b} \cos \vartheta) \cos \varphi_2 + \\ + (c_1 n_2 \cos \delta_{1,c} - c_2 n_1 \cos \delta_{2,c}) \sin \varphi_2 = 0; \\ (a_1 \sin \delta_{1,a} \sin \vartheta + b_1 \sin \delta_{1,b} \cos \vartheta) \cos \varphi_1 - \\ - (a_2 \sin \delta_{2,a} \sin \vartheta + b_2 \sin \delta_{2,b} \cos \vartheta) \cos \varphi_2 + \\ + (c_1 n_2 \sin \delta_{1,c} - c_2 n_1 \sin \delta_{2,c}) \sin \varphi_2 = 0.\end{aligned}\tag{168'_p}$$

A mondott feltevés csak akkor kielégítő, ha a $\cos \varphi_1$ és a $\cos \varphi_2$, valamint a $\sin \varphi_2$ együtthatói zérussal egyenlők; röviden, kell, hogy álljon:

$$a_1 \cos \delta_{1,a} \sin \vartheta + b_1 \cos \delta_{1,b} \cos \vartheta = 0;$$

$$a_1 \sin \delta_{1,a} \sin \vartheta + b_1 \sin \delta_{1,b} \cos \vartheta = 0.$$

$$a_2 \cos \delta_{2,a} \sin \vartheta + b_2 \cos \delta_{2,b} \cos \vartheta = 0;$$

$$a_2 \sin \delta_{2,a} \sin \vartheta + b_2 \sin \delta_{2,b} \cos \vartheta = 0.$$

$$c_1 n_2 \cos \delta_{1,c} - c_2 n_1 \cos \delta_{2,c} = 0;$$

$$c_1 n_2 \sin \delta_{1,c} - c_2 n_1 \sin \delta_{2,c} = 0.$$

E feltételekből könnyen következik:

$$\delta_{1,a} = \delta_{1,b}; \quad \delta_{2,a} = \delta_{2,b}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c};$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}; \quad (169_\beta)$$

$$c_1 n_2 = c_2 n_1.$$

Azaz, mindig csak egy-egy meghatározott ϑ azimutú síkban érvényes ez az egyenértékűség tetszés-szerinti beesés-törés szöge mellett.

16. §. A két vektor-összetevő egyszerre legyen egyenértékű. A lehető esetek tárgyalása.

Ha most azt kívánjuk, hogy egyszerre álljanak fenn a megelőző §. I. és II. alatti egyenértékűségek, akkor azonnal belátjuk, hogy ez általánosságban nem lehetséges, hanem mindig csak speciális esetekben.

a) Így, tetszés-szerinti ϑ azimutra nézve a (169) és (169_a) két feltétel-rendszer csak úgy egyeztethető egymással, ha φ_1 és φ_2 igen kicsinyek, azaz, ha az S_1 - és az S_2 -ben lévő két fényforrást egybekapcsoló $S_1 S_2$ egyenes merőleges az elválasztó síkra; mert csak így lehet a II. pont (169_a) feltételeiből $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$; míg a többi változatlanul megmarad. Ekkor egyszer csak megszűnik a különbség a beesés-síkjára merőleges és a vele párhuzamos összetevő között.

Ezt az eredményt már 10., 11., 12. §§. eredményei is mutatják, mert az ott tárgyalt gömbfelületek s_1 , illetőleg s_2 sugaraikat végtelen nagyoknak is lehet tekinteni, a nélkül, hogy az ott kimutatott viszonyossági tétel megszűnnék helyesnek lenni.

β) Hasonlóképpen, ha tetszés-szerinti beesés-törés szögére nézve kívánjuk az említett két egyenértékűségnek egyszerre való

fellépését, akkor a megelőző §. II. pontja (β) alatti (169_p) feltételeihez az I. pontjának $a_1 = a_2$, vagy $b_1 = b_2$ feltétele is kell, hogy járuljon; ekkor a két egyenértékűség a $\vartheta = \arctg(-b_1/a_1)$ azimut bármely beesés-törés szögére nézve egyszerre fennáll. —

Kivételes esetek: $\vartheta = 0$ és $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

1. Keressük azt, hogy $\vartheta = 0$ azimut-érték mellett mily φ_1 vagy φ_2 beesés-szögre nézve érvényes mindkét egyenértékűség.

Ekkor először is, a megelőző §. I. pontja szerint itt marad (mert az (168_m) és (168_p) általános feltételi egyenleteiből a $\sin \vartheta$ -val szorzott tagok elesnek),

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad (I)$$

továbbá, II. pontjának első feltételpárja elesik, mert az (168_m) és (168_p) általános feltételi egyenleteiből itt a $\sin \vartheta$ -val szorzott tagok elesnek és így (169_a)-ból marad:

$$b_1 \cos \varphi_1 = b_2 \cos \varphi_2; \quad n_1 c_2 = n_2 c_1; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c}. \quad (II)$$

Az utóbbi csoport első egyenletéből

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{n_2^2 (b_1^2 - b_2^2)}{b_1^2 n_2^2 - b_2^2 n_1^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \varphi_2; \quad (III)$$

szóval, ha az összes $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ amplitudók végesek: a $\vartheta = 0$ síkban csak ez utolsó egyenlet által meghatározott *egyetlen egy beesés-törés szögére nézve érvényes a viszonyossági tétel.*

2. Ha a $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, akkor a 15. §. I. és II. pontjának (169) és (169_a) feltételeiből rendre marad:

$$b_1 = b_2; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad (I)$$

$$a_1 \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2; \quad n_1 c_2 = n_2 c_1; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c}. \quad (II)$$

E szerint itt az $a_1, a_2; \delta_{1,a}, \delta_{2,a}$ állandók léptek az 1. alatti feltételi csoport $b_1, b_2; \delta_{1,b}, \delta_{2,b}$ állandói helyébe és megfordítva.

Közvetlenül nyerjük:

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{n_2^2 (a_1^2 - a_2^2)}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \varphi_2. \quad (III)$$

Itt is csak az utolsó egyenlet által meghatározott *egyetlenegy beesés-törés szögére nézve érvényes a viszonossági tétel.*

17. §, *Specziális esetek, mikor az $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ amplitudo-állandók nem valamennyien a zérustól különbözök.*

I. Legyen: $a_1=0$; akkor a 15. §. I. pontja (169) feltételeiből: $a_2=0$. Ekkor az S_1 és az S_2 fényforrások az YZ -síokban, illetőleg vele párhuzamos síkban váltakoznak, s akkor az idézett §. I. és II. pontja (169) és (169_a) feltételeiből marad:

$$b_1 = b_2; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad (I)$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c}. \quad (II)$$

Itt az I. két feltétele elegendő az $\mathfrak{E}_{1,m,2} = \mathfrak{E}_{2,m,1}$ egyenértékűségnek bármily azimut és bármily beesés-szöge menti fennállására; ellenben a II. négy feltétele szükséges, hogy az $\mathfrak{E}_{1,p,2} = \mathfrak{E}_{2,p,1}$ egyenértékűség, de csak a $b_1 \cos \varphi_1 = b_2 \cos \varphi_2$ által meghatározott

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2 n_2^2 - b_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2 \quad (III)$$

beesés-törési szögre nézve fennálljon; a ϑ beesési azimut e mellett tetszés-szerinti lévén.

Az I. és a II. alatt írt feltételek csak úgy egyeztetethetők egymással, ha φ_1 és φ_2 igen kicsinyek; azaz, a normális beesés-nél, a miről a 16. §. a) alatti szakaszában már említést tettünk.

A $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ síkban azonban, miként a 14. §-ban (168_m) és (168_p) alatt írt általános feltételekből észreveszszük, a fenti (I. és II.) feltételek redukálódnak:

$$b_1 = b_2; \quad c_1 n_2 = c_2 n_1; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c},$$

melyek szerint *mindkét vektor-összetevőre nézve az egyenértékűség bármely beesés-törés szögére nézve fennáll.*

Jegyzet: Ha jelen esetben $\vartheta=0$ síkra akarnók eredményeinket alkalmazni: az $\mathfrak{E}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{E}_{2,m,1}$ összetevők eltűnnének és az $\mathfrak{E}_{1,p,2}$ és $\mathfrak{E}_{2,p,1}$ összetevők egyenértékűsége maradna fenn, *egy a fentírt III. által meghatározott beesés-törés-szögre nézve.*

II. Legyen $b_1=0$; akkor a 15. §. I. pontja szerint $b_2=0$;

az S_1 és S_2 fényforrások az XZ -síokban, illetőleg vele párhuzamos síkban váltakoznak; akkor az idézett 15. §. I. és II. pontja feltételeiből marad:

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad (\text{I})$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c}. \quad (\text{II})$$

Itt is az I. két feltétele az $\mathfrak{C}_{1,m,2} = \mathfrak{C}_{2,m,1}$ egyenértékűségének fennállására elegendő, bármily azimut és bármely beesés-törés-szöge mellett; ellenben a II. alatti négy feltétel szükséges arra, hogy az $\mathfrak{C}_{1,p,2} = \mathfrak{C}_{2,p,1}$ egyenértékűség fennálljon, de csak az $a_1 \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2$ által meghatározott

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2 \quad (\text{III})$$

beesés-törés szögére nézve, a ϑ azimut értéke tetszés-szerinti lévén.

Itt is az I. és a II. alatti feltételek csak $\lim \varphi_1 = 0$, $\lim \varphi_2 = 0$ merőleges beesés mellett egyeztethetők egymással, mint fent I. alatt.

A $\vartheta = 0$ síkban azonban, miként a 14. §-ban (168_m) és (168_p) alatt irt általános feltételekből észreveszszük, a fenti feltételek redukálódnak:

$$a_1 = a_2; \quad c_1 n_2 = c_2 n_1; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c};$$

a melyek szerint mindkét vektor-összetevőre nézve az egyenértékűség bármely beesés-törés szögére nézve fennáll.

Jegyzet: Ha a jelen esetben $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ síkra akarnók eredményeinket alkalmazni: az $\mathfrak{C}_{1,m,2}$ és $\mathfrak{C}_{2,m,1}$ vektor-összetevők eltűnének, és csak az $\mathfrak{C}_{1,p,2}$ és $\mathfrak{C}_{2,p,1}$ összetevők egyenértékűsége maradna meg, szintén csak egy, a fentirt III. által meghatározott beesés-törés szögére nézve.

III. Legyen $c_1 = 0$; akkor a 15. §. II. alatti feltételeiből $c_2 = 0$ következik, azaz, az S_1 és az S_2 fényforrások az XY -síkkal, az elválasztósíkkal párhuzamos ellipszisekben váltakoznak; a 15. §. I. és II. pontjai (169) és (169_a) feltételei itt:

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad b_1 = b_2; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}; \quad (\text{I})$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}; \quad \delta_{1,b} = \delta_{2,b}. \quad (\text{II})$$

Azonnal észrevenni; hogy e két feltételi rendszer *egyszerre* csak a merőleges beesés esetében állhat fenn, a miről a fentiekben már a 16. §-ban *a*) alatt, a 17. §-ban I. alatt volt szó.

Másrészt, az I. alatti négy feltétel a ϑ - és a φ_1 -, φ_2 -szögektől független lévén, az $\mathfrak{C}_{1, m, 2} = \mathfrak{C}_{2, m, 1}$ egyenértékűség bármily azimutra és bármily beesés-törés szögére nézve fennáll; ellenben az $\mathfrak{C}_{1, p, 2} = \mathfrak{C}_{2, p, 1}$ egyenértékűség, tetszés-szerinti ϑ azimut mellett csak egy-egy meghatározott beesés szöge mellett állhat fenn, a mely, a (II) feltétel szerint:

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = n_2 \left(\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2 n_2^2 - b_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2. \quad (\text{II})$$

Kivételes esetben mégis a két egyenértékűség még a merőleges beesésen kívül is fennállhat; ugyanis, helyettesítve az (I) alatti feltételeket a 14. §. általános feltételei második, (168_p) csoportjába, ez utóbbi írható:

$$\begin{aligned} (a_1 \cos \delta_{1, a} \sin \vartheta + b_1 \cos \delta_{1, b} \cos \vartheta) (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) &= 0; \\ (a_1 \sin \delta_{1, a} \sin \vartheta + b_1 \sin \delta_{1, b} \cos \vartheta) (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (170)$$

E két feltétel teljesíthető: vagy

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 \quad (170')$$

egyenlet által, a mely a merőleges beesést jelenti, vagy

$$\frac{b_1}{a_1} = - \operatorname{tg} \vartheta; \quad \delta_{1, a} = \delta_{1, b} \quad (170'')$$

egyenletek által, a melyek *egy* meghatározott azimutot jelentenek, tetszés-szerinti beesés szöge mellett; de ekkor a két fényforrás két-két gerjesztő összetevőjének phasisai is mind egymással egyenlők, azaz e források eredő gerjesztő vektorai az elválasztósikkal párhuzamos *egyenesek*: mentén váltakoznak, a melyek az említett ϑ azimut-síkban vannak.

Jegyzet: *a*) A $\vartheta = 0$ azimutra nézve a 14. §. általános feltételeiből és a $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ feltevésből lesz, illetőleg marad:

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1, a} = \delta_{2, a}; \quad (\text{I})$$

$$b_1 \cos \varphi_1 = b_2 \cos \varphi_2; \quad \delta_{1, b} = \delta_{2, b}; \quad (\text{II})$$

azaz, míg az $\mathfrak{E}_{1, m, 2} = \mathfrak{E}_{2, m, 1}$ egyenértékűség ez azimutban, bármely beesés-törés szögére nézve érvényes, addig az $\mathfrak{E}_{1, p, 2} = \mathfrak{E}_{2, p, 1}$ egyenértékűség csak a $b_1 \cos \varphi_1 = b_2 \cos \varphi_2$ feltétel által meghatározott beesés-törés szögére nézve érvényes, a hol, mint fent a b_1 . és b_2 -ben kifejezve:

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1^2 n_2^2 - b_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2. \quad (\text{III})$$

β) A $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$ azimutra nézve, a $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$ feltevésen kívül a 14. §. általános feltételeiből lesz, illetőleg marad:

$$b_1 = b_2; \quad \delta_{1, b} = \delta_{2, b}; \quad (\text{I})$$

$$a_1 \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2; \quad \delta_{1, a} = \delta_{2, a}. \quad (\text{II})$$

E szerint itt is az $\mathfrak{E}_{1, m, 2} = \mathfrak{E}_{2, m, 1}$ egyenértékűség a $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$ azimutban lévő bármely beesés-törés szögére nézve fennáll; ellenben az $\mathfrak{E}_{1, p, 2} = \mathfrak{E}_{2, p, 1}$ egyenértékűség csak arra az egy φ_1 , φ_2 szögére nézve érvényes, a mely számára mint fent:

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2. \quad (\text{III})$$

18. §. A legegyszerűbb jellegű fényforrások esetei: Csak egy-egy gerjesztő összetevő van jelen.

a) Legyen a_1 és a_2 a zérustól különböző, de: $b_1 = 0$, $b_2 = 0$; $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Ekkor a 14. §. (168_m) és (168_p) általános feltételeiből

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1, a} = \delta_{2, a}; \quad (\text{I})$$

$$a_1 \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2; \quad \delta_{1, a} = \delta_{2, a}. \quad (\text{II})$$

A két feltétel-pár egyszerre csak merőleges beesésnél állhat fenn; azaz, míg az $\mathfrak{E}_{1, m, 2} = \mathfrak{E}_{2, m, 1}$ egyenértékűség bármily azimut és beesés-törésszög mellett fennáll, addig az $\mathfrak{E}_{1, p, 2} = \mathfrak{E}_{2, p, 1}$ egyenértékűség általában véve csak a

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2. \quad (\text{III})$$

beesés-törés szöge mellett érvényes; de ekkor, ha $a_1 \neq a_2$, az első, a merőleges egyenértékűség nem állhat fenn.

Ha itt: $\vartheta=0$, akkor ez *azimutra* nézve azonnal:

$$a_1 = a_2; \quad \delta_{1,a} = \delta_{2,a}, \quad (\text{I})_0$$

azaz, az $\mathfrak{E}_{1,m,2} = \mathfrak{E}_{2,m,1}$ ekkor változatlanul megmarad bármely φ_1, φ_2 szögre nézve; ellenben áll:

$$\mathfrak{E}_{1,p,2} = 0 = \mathfrak{E}_{2,p,1}.$$

Ha pedig itt: $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, akkor, ez *azimutra* nézve azonnal:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{1,m,2} = 0 &= \mathfrak{E}_{2,m,1}; \\ a_1 \cos \varphi_1 &= a_2 \cos \varphi_2; \quad \delta_{2,a} = \delta_{1,a}; \end{aligned} \quad (\text{II})_{\pi/2}$$

azaz, az $\mathfrak{E}_{1,p,2} = \mathfrak{E}_{2,p,1}$ egyenértékűség ismét csak a

$$\sin \varphi_1 = n_2 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 n_2^2 - a_2^2 n_1^2} \right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi_2 \quad (\text{III})_{\pi/2}$$

beesés-törés szöge mellett érvényes.

b) Legyen b_1 és b_2 a zérustól különböző, de $a_1=0$; $a_2=0$; $c_1=0$; $c_2=0$; akkor ebben az esetben az egyenértékűségek viselkedése ugyanolyan, mint a) alatt, csak hogy most mindenütt b irandó az előbbi a betűk és jelzők helyébe.

c) Legyen c_1 és c_2 a zérustól különböző, de $a_1=0$; $b_1=0$; $a_2=0$; $b_2=0$; akkor a 14. §. (168_m) és (168_p) általános feltételeiből marad:

$$c_1 n_2 = c_2 n_1; \quad \delta_{1,c} = \delta_{2,c};$$

a miből következik:

$$\mathfrak{E}_{1,m,2} = 0 = \mathfrak{E}_{2,m,1};$$

azaz, a beesés-törés síkjára merőleges vektorösszetevők itt elesnek, míg az:

$$\mathfrak{E}_{1,p,2} = \mathfrak{E}_{2,p,1}$$

egyenértékűség bármely azimutra és bármely beesés-törés szögére nézve fennáll.

A CERATIUM HIRUNDINELLA MITOTICUS OSZTÓDÁSÁRÓL.

Írj. ENTZ GÉZA I. tagtól.

I—IV. táblával.

Már több protistologus foglalkozott a *Ceratium*-fajok szaporodásával. LAUTERBORN volt az első, a ki 1895-ben (10) a *Ceratium hirundinella* osztódását tanulmányozta, mely szerinte mintegy közepette áll az amitoticus és a mitoticus osztódásnak, sem centriolum, sem chromosomák nincsenek. 1910-ben JOLLOS (8) és BORGERT (2) tengeri fajok osztódását írta le. Magam már 1907-ben kimutattam (5. p. 261), hogy a *Gonyaulax polygramma* osztódása alkalmával chromosomák jelennek meg, a melyek hosszirányban hasadnak. Mindezek a megfigyelések, a melyeket még más szerzőknek különböző édesvízi és tengeri fajokon tett megfigyelései egészítenek ki, annak megállapítására vezettek, hogy a különböző *Peridinea*-fajok osztódása nem lehet egyenlő; ez lehet az oka annak, hogy a különböző szerzők olyan eltérően írják le a *Peridinea*-fajok osztódását és olyan eltérően értékelik a magosztódás alkalmával megfigyelhetőket. Így például JOLLOS és BORGERT egészen ellentétes felfogásra jutott. JOLLOS a tengeri *Ceratium*-fajokon is centriolumokat vélt találni (8. p. 201), melyek megosztódnak, a mag osztódását bevezetik és az ostor fejlődésében fontos szerepet játszanak (8. p. 195); BORGERT (3. p. 413) pedig a centriolumokat alárendelt jelentőségűeknek tartja.

Eme és még más egymással nem egy tekintetben ellentétes értelmezések és megfigyelések kívánatosá teszik a *Ceratium*-fajok magosztódásának behatóbb vizsgálatát. Ez serkentett arra, hogy a *Peridinea*kra vonatkozó vizsgálataimat, melyeket a tek. Akadémia megbízásából immár 1908 óta végzek, az édesvízi *Ceratium hirundinella* osztódásának tanulmányozására is kiterjesszem. Vizsgálataimat eleveneken kívül meleg sublimát-

tal conservált HEIDENHAIN-féle vashæmatoxylinnel, továbbá GIEMSA-oldattal festett készítményeken, metszetekké feldolgozott és egészben kikészített, DELAFIELD-féle hæmatoxylinnel festett, valamint festetlen példányokon is végeztem; hangsúlyoznom kell, hogy a magosztódás különböző állapotai a festetlen készítményeken és eleven szervezeteken is megfigyelhetők, csupán az nehezíti meg a vizsgálatot, hogy a vízben levő mozgó, aránylag nagy (100—360 μ) szervezeteket immersióval igen nehéz megközelíteni és megvizsgálni. Azok a tapasztalatok, a melyeket eleveneken szereztem, mind megerősítik azt a tényt, hogy a *Ceratium hirundinella* magosztódása a rögzítés és festés által lényegesen nem módosul, hogy az eleven szervezeten a magalkatrészeknek ugyanaz az elosztódása, mint a rögzített és festett készítményben.

Az osztódásnak időbeli lefolyására, magának a sejtnek osztódására, a sejt növekedésére és az osztódás után lejátszódó kiegészülésére jelen soraimban nem térek ki, ezt egy külön értekezésben szándékozom megtenni; csak azt akarom megjegyezni, hogy az osztódás különböző állapotai igen pontos időtartamuk és hogy a magosztódás leggyakrabban — mint az LAUTERBORN (10. p. 177) vizsgálatai óta általában ismeretes — éjfél után, tömegeesen 3—4 óra között veszi kezdetét.

*

A tengeri *Ceratiumok* magjának BORGERT szerint (2. p. 5.) alkaliákkal és savakkal elkülöníthető maghártyája van, ez a *Ceratium triposon* kimutatható, de már a *Ceratium fususon* nem (2. p. 29.). Magam sem a balzsamban, sem a glicerin-gelatinában eltett, sem az eleven szervezeteken maghártyát nem figyelhettem meg. Kálilug az alkohollal conservált, a folyadékban lebegő vagy odaszáritott *Ceratium hirundinellának* se plasmáját, se magját nem oldotta fel.

A *Ceratium hirundinella* be nem tokozott, de nem osztódó azaz nyugalomban levő magja ellipticus test, háromtengelyű ellipsoid. A legnagyobb a főmetszet, jobb-bal irányban halad, ez után következik az æquatori metszet és legkisebb a meridián irányában vezetett. A szabadon mozgó magja, mint a *Peri-*

dineáké általában, nagy, hosszátmérője 32.5μ , harántátmérője 15.6μ . A cysták magja kisebb, hosszátmérője 23μ , harántátmérője 14μ körüli. Abból a célból, hogy eldönthessem, melyik állapotát kell a *Ceratium* magjának a nyugalomban levő mag szerkezetének tartanom, a cysták magszerkezetéből kell kiindulnom, mert, ha szólhatunk a «nyugvó mag» szerkezetéről, ezt nyilván a betokozott, tehát pihenő szervezeten ismerhetjük fel. Mondhatjuk tehát, hogy az olyan magszerkezet, a mely a cysta magjának szerkezetével megegyező, a nyugalomban levő sejtmag szerkezete. Ez a magszerkezet a *Ceratium* magján legtöbbször a nap délutáni óráiban figyelhető meg és tart délután 2—3 órától éjfélután 1—2 óráig. A magosztódás különböző állapotai pedig éjfélutántól kezdve egészen mintegy délután 2—3 óráig láthatók.

A cysta magjának szerkezete olyannak látszik, mintha (1. ábra) csupa apró gömbből állana. E gömböcskék rendkívül aprók, úgy, hogy csak immersióval ismerhetők fel. A gömböcskék igen közel állanak egymáshoz; ez lehet az oka annak, hogy a megfestett cysták magjának szerkezete olyan nehezen ismerhető fel. A DELAFIELD-féle hæmatoxylinnel és vashæmatoxylinnel festett példányok magja olyan sötétre festődött, hogy a magszerkezet immersióval is csak akkor vált láthatóvá, a mikor a festék úgyszólván csak nyomokban maradt már vissza a magban. És így találtam ezt mind az egészben szemlélt, mind a metszetekben tanulmányozott példányokon. A cysta magja bármely oldalról szemlélve, egészben és metszetben is ugyanazt a gömböcskés szerkezetet tünteti fel. Nucleolust egy esetben se tudtam megállapítani, noha több száz¹ cystát vizsgáltam meg immersióval igen gondosan. A cystákban mindig egy magot találtam. A magon kívül a plasma tele van chromatophorokkal, ezek aprók, pálczika-alakúak, a plasma pedig nagy, szivacszerű üregeket tartalmaz, a mi nyilván raktározott anyagoktól származik. A mag finom szerkezete tehát csakis a legerősebb nagytásokkal (ZEISS hom. imm. 2 m.m. n. A. 1'30) és compensatiós

¹ A cysták, néhány kivételével, mind egy gyűjtésből (Tatai nagytó 1909, X. 6.) valók.

ocularokkal figyelhető meg jól, olyan aprók az egyes röögöcskék. Nagyságukat csak megbecsüléssel állapíthattam meg, mert a mikrometer-ocular egy osztályrészére több esik. Tudjuk azonban, hogy a 6-os mikrometer-ocular egy osztályrésze a megnevezett objektivvel 1.3μ -nek felel meg. Egy osztályrésze pedig átlagban 5 apró röögöcske jut. E röögöcskék azonban egymástól körülbelül olyan távolságra vannak, mint a mekkora a saját átmérőjük, a minnek következtében egy ilyen testecske nagysága nem egyötöde az 1.3μ -nak, hanem mintegy egytized része, vagyis egy ilyen röögöcske körülbelül 0.13μ nagyságú.

Az előzőkben kifejtettem, hogy ha a *Ceratium hirundinella* nyugvó magjának szerkezetét akarom ismertetni, a cysták mag-szerkezetével megegyező magok alkotását kell ismertetnem. A cysta magjának szerkezete — mint láttuk — olyan (1. ábra), mintha csupa apró gömbből állana, tehát azt a felépítést tünteti fel, a melyet JOLLOS is (8. p. 194.) a nyugalmi mag typicus szerkezetének tart. Azonban BORGERT (2. p. 6.) kétségbe vonja, hogy a *Ceratiumok*on ez a magszerkezet szabadon mozgó állapotban megvolna.

BORGERT felemlíti, hogy már BÜTSCHLI megállapította (2. p. 6.), hogy a *Ceratium* magját alkotó gömböcskék nem egyebek, mint pálczikák átmetszeti képei, a melyek csak azért tűnnek elő gömböknek, mert a pálczikákra csúcsukról, keskeny oldalukról tekintünk és azért, hogyha a mikrometercsavart mozgatva, mélyítve állítjuk be lencsénket, láthatjuk, hogy hosszukban elnyúló testekkel van dolgunk. Noha ez a felfogás bizonyos esetekben kétségkívül helyes, azért mégis azt kell mondanom, hogy vannak olyan sejtmagok is, a melyek egészben valóban apró gömbökből állanak. Ilyen elsősorban a cysták magja, a melyeket bármelyik oldalról szemlélünk is és bármilyen irányú metszeteiket készítünk is belőlük, szerkezetük mindig apró gömböcskésnek tűnik fel. Másodsorban a szabadon mozgó (azaz be nem tokozott) egyének keresztmetszetén is megfigyelhetjük, hogy a nyugalmi állapotban lévő mag csupa apró röögöcskéből és nem pálczikákból áll, a milyennek a BÜTSCHLI-BORGERT-féle felfogás értelmében lennie kellene és a milyen magokat csakugyan lehet találni. A JOLLOS álláspontjának helyességét bizonyítják továbbá

más *Peridinea*-fajok, melyeknek magja, mint tanulmányomban (5. p. 259.) kifejtetem, szintén lehet apró gömbökből összetett és végül azok a példányok, a melyeket a tárgylemezre szárítottam. Az ilyen magokat igen szépen lehet a GIEMSA-festékekkel festett példányokon tanulmányozni. Mert noha a legtöbb mag oda-szárítva jól feltünteti a pálczikás szerkezetet, mégis akadnak olyanok is, a melyek a gömböcskés szerkezetet tüntetik fel. Mindez okokat megfontolva, úgy hiszem jogosan állíthatom, hogy a *Ceratium hirundinella* nyugvó magjának szerkezete az, a melyet JOLLOS is ismertet, a mely szerint az csupa apró gömböcskéből van felépítve.

A nyugvó magban e szerint a chromatin apró gömböcskékbe van elosztódva, úgy, mint a cystákban, csak az a különbség a szabadon mozgó egyének és a betokozottak nyugvó magja szerkezete között, hogy a szabadon mozgók magját felépítő gömbök lineárisan mintegy mégegyszer akkorák, mint a cystáéi, mert azonos nagyítással mérve, a mikrometer-beosztás egy osztályrészére három rög és közöttük két nagyságukkal megegyező köz esik. A szabadon mozgók maggömböcskéinek nagysága lineárisan tehát 0.26μ körüli lehet.

A chromatin-szemecskék között változó számú (1—5), vas-hæmatoxylinnel igen erősen festődő, jóval nagyobb rög, magtestecske (nucleolus) látható, a melyek körül a chromatin-rögöcskék gyakran visszahúzódnak úgy, hogy a nucleolusokat sokszor világos udvar veszi körül (1. a. ábra). A nucleolusok számának demonstrálására álljon itt a következő táblázat, a melynek első sora a nucleolusok számát, a második pedig a megfigyelt egyénekét tünteti fel.

0	22
1	36
2	26
3	13
4	2
összesen:	99

A nucleolusok GIEMSA-féle festéssel nem tűnnek elő úgy, mint más *Perilinea*-fajokon, például a *Peridiniopsis Borgein*, a *Gymnodinium Zachariasin* (6) (10. ábra). A chromatin-szemecskéknek elrendeződése, minthogy ezek körülbelül egyenlő nagyságúak, olyan képet tüntet fel, mint a mikor egyenlő nagy golyókat helyezünk be nagyobb gömbölyded testbe; mindnyájan körülbelül egyenlő nagyságúak lévén, az egymás melletti átlag 60° -os szögeket zárnak be, vagyis az egymás melletti sorokban váltakozva állanak körülbelül azonos távolságban az egyes chromatin-szemecskék s a nucleolusok környékében úgy rendezkednek el, hogy a nucleolusokat az említett udvar veszi körül.

Nézetem szerint tehát a nyugalmi mag csupa apró gömböcskéből áll, miért is a mag osztódása alkalmával járó változások közül az az első, mikor a chromatin-szemecskék elrendeződése megváltozik: a chromatin-szemecskék párhuzamos sorokban rendezkednek el, úgy, hogy a mag csupa pontsorból alkotottnak látszik (2. ábra). A nucleolusok viselkedésére nézve azt jegyezhetem meg, hogy azok a chromatinnek emez átrendeződése közben is megtalálhatók és úgy látszik állományuk függetlenül vesz részt az osztódásban, az osztódás kezdeti állapotától kezdve. A nucleolusok megnyúlhatnak (3. ábra), egynehány esetben pedig azt figyeltem meg, hogy a nucleolusokat a legközelebbi chromatin-gömböcskével egyenes, sugárirányú chromaticus fonal köti össze, néha két chromatin-szemecske is össze van kötve egy nucleolussal (4. ábra). Azt is megfigyeltem, hogy egyes chromatin-szemecskéket kötnek össze ilyen fonalak, melyek néha egymás fölött haladva keresztet alkotnak (5. ábra). JOLLOS értekezésében tengeri *Ceratium*-fajokról hasonló fonalszerű összeköttetéseket ábrázol és leírásában azokat a *Gymnodinium fucorum* osztódásával összehasonlítva, centriolumoknak tartja (8. p. 195.). Vajjon ez az állítás megállja-e a helyét, csak későbbi vizsgálatok dönthetik ugyan el, de véleményem szerint e képződmények nem centriolumok, hiszen maguk a nucleolusok — mint JOLLOS is írja (8. p. 194.) — plastinból álló valódi nucleolusok; de azért lehet, hogy e sajátos fonalkáknak talán az ostor képződésével van valami kapcsolatuk, mint JOLLOS

írja (8. p. 195), a mi azonban, mert az ostorképződést egy alkalommal sem figyeltem meg, ismeretlen előttem.

Mialatt a chromatinszemecskék sorokban rendezkednek el, a nucleolusok úglátszik eltűnnek, a mire abból kell következtetnem, mert a következő állapoton nucleolusokat már nem, vagy csak ritkán (l. 6a., 7a., 12., 13., 14. ábra) lehet látni. BORGERT azt hiszi, hogy a nucleolusok a *C. triposon* megvannak, a *C. fususon* pedig a gomoly-állapotban tűnnek el (2. p. 30.).

A következő állapoton azt figyelhetjük meg, hogy a chromatin csupa apró, rendezetlenül össze-vissza fekvő igen rövid, hosszában ketté hasadt chromatin-darabból áll; ez a kép megfelel annak, a melyet BORGERT (2. p. 8—9) gomolynak (spirema) (6. 6a., ábra) nevez. A spirema után a chromatin hosszú fonalakba rendeződik el, azoknak egymásmögötti sorokban egybe kell olvadniok; úglátszik e chromatin-fonalak száma egy síkban állandóan 24, a mennyiben 22—23—24-et számlálhattam meg a hosszszemetet síkjában (9—11. ábra); az erre merőleges irányban, illetőleg metszetben pedig 12—16 chromatin-szalagot számláltam (16. ábra). E fonalak egészben olyanok, mint — BORGERT szerint (2. p. 10—11) — a tengeri *Ceratium*-fajok chromosomái, melyek egész hosszukban kettéhasadtak. Mert az édesvízi *C. hirundinellán* egészen hasonló viszonyokra találtam, BORGERT felfogásával megegyező bizonyossággal állíthatom, hogy osztódás alkalmával itt is chromosomák fejlődnek ki, melyek hosszukban kettéhasadnak (7. 7a. és 8. ábra). A tengeri fajok osztódásától való eltérést a *Ceratium hirundinellán* csak annyiban találtam, a mennyiben e faj chromosomáinak felülete nem sima, mint BORGERT szerint a tengeri fajoké, hanem rajta apró egyenetlenségek, kiemelkedések láthatók. A chromosomák hossza 15—20 μ , szélessége pedig 0.6—0.65—0.74 μ . A spirema-tagok hossza pedig 4—5 μ . A chromatin-szalagoknak, azaz a chromosomáknak viselkedése tehát olyan, mint a hogyan azt BORGERT (2. p. 10.) a *C. triposról* leírja, azaz közepükön kissé görbülő, de a sarkoknak megfelelő magvégeken végződő, tehát vissza nem forduló kettős fonalak és nem olyanok, mint LAUTERBORN állítja, a ki (18. p. 180) szerint esetleg olyan szalagszerű képletek lehetnének, a melyek a sarkokon visszafordulnak, vagyis körülbelül

szorosan egymáshoz záruló szárú V-szerű fonalak. Azok a haránt összeköttetések pedig, a melyeket LAUTERBORN az egyes chromatin-szalagok között ismertet, éppen úgy hiányzanak a jól conservált *C. hirundinellán*, mint a hogyan BORGERT szerint a *C. tripos*-on és más fajokon. Ezek a LAUTERBORN-tól leírt haránt összeköttetések nyilván a chromosomákon látható említett egyenetlenségek, a milyenek, mint ismeretes, a chromosomákra általában sok esetben jellemzők.

A leírt chromatin-elrendeződés az æquatori lemeznek felel meg, a mely után a dupla chromosomák közepük táján elszakadnak és az egyik csoport az egyik, a másik a másik irányban nyomul előre (8—9. ábra) a nélkül, hogy a hosszukban kettős (ketté vált) chromosomák egymástól elválának. E közben a chromosomáknak az æquatorival ellentétes, mondjuk polaris vége kissé összehajlik (10—11. és 16. ábra). A chromosomák körülbelül egyenlő hosszúságúak. Némelyik készítményben közülök egyesek olyanféle ízekre tagoltnak látszanak (12. ábra), mint azt JOLLOS szintén tapasztalta, a mi azonban úgylátszik csak conserválási eredmény (12. ábra). Az így sarki lemez állapotába jutott magban (13. ábra) most már a nyugalmi állapot restructiója következik be. A chromosomák egyes chromatin-tagokra (dispirema), majd szemecskékre bomlanak fel és újra megjelennek a nucleolusok is (14. és 15. ábra). Kezdetben a chromatinszemecskék még soros elrendeződést tüntetnek fel (15. ábra), majd pedig a nyugvó mag finom pontozatát lehet megfigyelni.

A tengeri *Ceratium*-fajok közül BORGERT a *Ceratium triposra* nézve megjegyzi (2. p. 42.), hogy megfigyelése, illetőleg becslése szerint 200 lehet a chromosomák száma. Magam a *C. hirundinella* chromosomáinak számát a diaster állapotában iparkodtam megállapítani, és pedig olyan módon, hogy megszámláltam mind a hosszirányú, mind a harántirányú metszetben találhatóakat. A diaster állapotán hosszmetsetben a következő számokat találtam:

28-at	— — — — —	2	esetben
26-ot	— — — — —	1	«
24-et	— — — — —	4	«
23-at	— — — — —	3	«
22-t	— — — — —	2	«

Az átlag tehát 24. A diaster állapotában harántmetszetben 16-ot számláltam. Minthogy a chromosomák számát a két metszetben levők számának szorzata adná meg, ha a mag hasáb volna: a *Ceratium hirundinella* chromosomáinak száma $24 \cdot 16 = 384$ -re volna tehető. Minthogy azonban a *C. hirundinella* magjának metszete osztódás közben nem téglalap, hanem ellipsis, az osztódó mag sem lehet hasáb, hanem ellipsoid: le kell számítanunk azt a különbséget, a mely a két forma (téglalap és ellipsis) területe között fennáll, a mely mintegy 60-at tehet ki, úgy, hogy a chromosomák számát 324-re tehetjük. Ez a szám mindenesetre tekintélyes, de azért talán közelebb jár a valósághoz, mint BORGERT becslése és jobban megközelíti azokat a nagy számokat, a melyeket a *Radiolariákról* ismerünk, hiszen az *Aulacantha scolimathának* 1000-nél több, a *Castanidium variabilének* pedig HAECKER szerint (9. p. 85—86.) 1500—1600 chromosomája van. BORGERT pedig egyenesen a *Radiolariákban* megfigyelhető viszonyokra utal. A tengeri *Ceratium*-fajok magosztódásának ismertetése alkalmával (2. p. 42—43., 3. p. 417.) azt is felemlítettem, hogy mind a *Gonyaulax polygrammán*, mind pedig az édesvízi *Gymnodiniumon* igen nagy lehet a chromosomák száma, a mint azt mind a *Gonyaulaxról* (5. IX. Taf. Fig. 1.), mind a *Gymnodiniumról* (6. Taf. 13. Fig. 8.) közölt rajzon megállapíthatjuk.

Az osztódással kapcsolatosan az ostor rögzítéséről és fejlődéséről is kell szólnom. Ostort rögzítve egy esetben találtam oly példányon, a melynek magja dispirema-állapoton volt. Ebben a præparátumban az ostort rügő módjára spirálisan összerpüdülten találtam a pusula fölött, a spiralis barázda és hosszbarázda kereszteződése helyén és úgy látszott, hogy valamely nagy elkülönült plasma-rögből indul ki, a melyben két erősebben festett pontocska (basalis test?) volt, melyeket egymással

fonal kötött össze. Ez a kép nagyon hasonló ahhoz az ostor-megerősítéshez, a melyet a *Gonyaulax polygrammáról* ismerttettem (5. p. 258.), a mely *Peridinea*-faj mindkét ostora alapján hasonló basalis test található. Az ostor fejlődését nem figyeltem meg. Én is ismerek ugyan olyan példányokat, a melyeken három ostor volt — két hossz-ostor és egy spiralis —; de hogy ez mi módon jött létre, nem tudom. De talán az ostor fejlődésével függhet össze az a jelenség, hogy a nucleolussal néha 1—2 apró rög van fonalszerű részszel összekötve, a mi nagyon hasonlít azokhoz a képekhez, a melyeket JOLLOS a tengeri *Ceratium*-fajok ostorfejlődésével hoz kapcsolatba, a mely szerint az ostorok a nucleolusokból fejlődnek.

Ha JOLLOSnak a *Gymnodinium fucorumon* megállapított és a tengeri *Ceratiumokra* kiterjesztett ostorfejlődési felfogása helyes, akkor az édesvízi *C. hirundinellán* ismertetett heteropol karyosoma-osztódáshoz hasonló jelenségek (4., 5. ábra) is az ostor fejlődésével függhetnek össze, a mit azonban az, hogy egy magban több ilyen heteropol-osztódás, illetőleg az apró chromatinpálcák közötti összeköttetés is látható (5. ábra), némileg valószínűtlenné tesz. HARTMANN szerint (7. p. 418.) a *C. hirundinella* magjában levő nucleolus (karyosoma) centriolumának heteropol-osztódása a késő délutáni órákban történik meg. Én ilyen heteropol-osztódásszerű képletet, nyugvó magvakon ugyan, de éjjel 3—4 és reggel 4—5 óra között gyűjtött anyagból jegyeztem fel (4. és 5. ábra). BORGERT, JOLLOS-nak a *Ceratium* karyosomájának heteropol-osztódására nem nagy súlyt helyez, sőt azt majdnem kétségbe vonja (3. p. 413.). Vizsgálataimból azt állapíthatom meg, hogy a *C. hirundinellán* ez a JOLLOStól ismertetett kép kétségkívül megtalálható, de hogy vajjon az ostor fejlődésével csakugyan kapcsolatban van-e, a mai ismeretek alapján még nem dönthető el.

A *C. hirundinella* osztódása ezek szerint tehát megegyező a BORGERTTől tengeri *Ceratium*-fajokról leírttal. Itt is megvan a tagolt spirema, melyben a chromosomák hosszukban hasadnak: hosszú chromosomás æquatori lemez keletkezik, a mely után azok közbül, harántul tagolódnak s az egyik csoport az egyik, a másik csoport a másik sarok felé vándorol. Typicus

centriolumok nem találhatók. A reconstructio alkalmával itt is sarló módjára begörbül a mag (13. ábra) és itt is olyan kefeszerűek a sarki lemezek, mint az *Aulacantha scolymanthán*. A chromosomák a *Ceratium hirundinellán* is szalagalakúak, számuk nagy és az osztódás közben a chromosomák hosszirányú hasadása következtében megkétszereződik.

A chromosomák számának ezt az osztódással járó meg sokasodását a tengeri *Ceratiumokon* BORGERT szerint (2. p. 42.) nyilván az időnként jelentkező bimbózás szabályozza, a melyet róluk APSTEIN mutatott ki (1), azonban az édesvízi *C. hirundinellán* hasonló szaporodási mód ismeretlen. Hogy ezen a fajon van-e és mi a reguláló folyamat, ez idő szerint ismeretlen, de lehet, hogy a ZEDERBAUER-től (11) és tőlem (5) észlelt copulatio alkalmával játszódik le.

Megfigyeléseim szerint tehát nincsen olyan lényeges különbség a tengeri *Ceratium*-fajok és az édesvízi *C. hirundinella* osztódása között, mint azt BORGERT LAUTERBORN-nak vizsgálataira hivatkozva tartotta (2. p. 38—39.), ellenkezőleg, a legnagyobb megegyezés van az osztódás minden állapotában; a tengeri *Ceratium*-fajok osztódásával megegyező mitosis ez is: orsófonalak nélkül, nagyszámú chromosomával, a chromosomák számának megettözésével.

Irodalom.

1. APSTEIN C.: Knospung bei *Ceratium tripos* v. *subsalsa*. Internationale Revue der gesammten Hydrobiologie und Hydrographie. 1910, Bd III. p. 34—36.
2. BORGERT A.: Kern und Zellteilung bei marinen *Ceratium*-Arten. Archiv für Protistenkunde. 1910, Bd XX.
3. BORGERT A.: Eine neue Form der Mitose bei *Protozoen*. Verhandlungen des VIII. internationalen Zoologen-Kongresses in Graz. 1910, p. 408—418.
4. BÜTSCHLI O.: Einige Bemerkungen über gewisse Organisationsverhältnisse der *Cilioflagellaten* und der *Noctiluca*. Mit einem Beitrag v. Askenasy. Morph. Jahrbuch X. 1883, S. 529—577.
5. ENTZ G. jun.: Über die Organisationsverhältnisse einiger *Peridinceen*, Mathem. und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 1907, Bd XXV. p. 246—274.
6. ENTZ G. jun.: Über ein Süßwasser-*Gymnodinium*. Archiv für Protistenkunde 1913. XXIX. p. 399—406.

7. HARTMANN M.: lásd BORGERT A. (3) Verhandlungen des VIII. internationalen Zoologen-Kongresses zu Graz 1910, p. 418.

8. JOLLOS V.: *Dinoflagellatenstudien*. Archiv für Protistenkunde 1910, Bd XIX. p. 178—206.

9. LANG A.: Handbuch der Morphologie der Wirbellosen Tiere. I. Bd. *Protozoa*, LÜHE M. 1913.

10. LAUTERBORN R.: *Protozoenstudien* I. Kern und Zellteilung von *Ceratium hirundinella* O. F. M. Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie I., IX. 2. p. 167—190, 1895.

11. ZEDERBAUER E.: Geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung von *Ceratium hirundinella*. Berichte d. Deutsch. botan. Gesellschaft. 1904, XXII. p. 1—8.

Ábra-magyarázat.

Az összes ábrák metszetek után készültek rajzkészülékkel az asztal lapjára vetítve; festés az első ábrán kívül Heidenhain vashæmatoxylin.

1. ábra. Zeiss, Hom. Imm. 2 mm n. A. 1'30. comp. oc. 4. Egészben eltett készítmény. Delafield hæmatoxylin. Tata 1909. X. 6. d. u. 4—5 órai gyűjtés. Cysta opticaí metszet. A sejtmag finom szemecskés, a plasma «nagy lépes», benne pálczikaszerű chromatophorok.

1a. ábra. Zeiss, comp. oc. 6. Hom. Imm. 2 mm n. Ap. 1'3. Reggel 4—5 órai gyűjtés. Nyugvó mag szemecskés chromatinnal, 2 világos udvarral körülvett nucleolussal.

2. ábra. Zeiss, comp. oc. 8. Hom. Imm. 2 mm n. A. p. 1'3. Reggel 4—5 óra közötti gyűjtés, osztódásra előkészülő mag, a chromatin pontsorokban rendezkedett el, 4 nucleolus.

2a. ábra. Nagyítás mint fent. Harántmetszet pálczikás chromatinnal, egy nucleolussal.

3. ábra. Nagyítás mint a 2.-on. Reggel 4—5 óra közötti gyűjtés. Osztódásra készülő mag. A chromatin pontsorokat alkot, a 3 nucleolus mindegyike megnyúlt.

4. ábra. Comp. oc. 4. obj. Hom. Imm. 2 mm n. A. 1'3. Délutáni gyűjtés. Nyugvó mag. A 3 nucleolus közül egyiket a legközelebbi chromatinnal röggel chromatinfonal köti össze.

5. ábra. Nagyítás mint a 4. ábrán. Éjjel 3—4 óra között. 2 μ . Nyugvó mag, a nucleolusok egyikét két chromatinfonal köti a szomszéd chromatikus röghöz. A többi chromatinnal rög közül még néhányat fonal köt össze szomszédjával, melyek közül 2 pár egymásfölött haladva keresztet alkot.

6. ábra. Comp. oc. 6. Hom. Imm. 2 mm. n. Ap. 1'3. Éjjel 3—4 óra közt; 2 μ . Tagolt spirema hosszában meghasadt chromatinnal, nucleolusok vannak.

6a. ábra. Nagyítás mint a 6. ábrán. Éjjel 3—4 óra közt. 5 μ . Tagolt spirema meghasadt chromosomákkal, nucleolusok nincsenek.

7. ábra. Com. oc. 6. Hom. Imm. n. Ap. 1·13. Éjjel 3—4 óra közt 5 μ . Aequatori lemez, a chromosomák meghasadtak, szélükön kiemelkedések láthatók, nucleolusok nincsenek.

7a. ábra. Mint az előbbi. Aequatori lemez, meghasadt chromosomákkal, 3 nucleolussal.

8. ábra. Mint az előbbi. Reggel 4—5 óra közt. Sarki lemez meghasadt chromosomákkal.

9. ábra. Nagyítás u. az. Reggel 4—5 óra közt. Sarki lemez. A chromosomák száma 26, ill. 28 egy síkban.

10. ábra. Zeiss. comp. oc. 6. Hom. Imm. 2 mm. n. Ap. 1·3. Reggel 4—5 óra között. Sarki lemez. A megszámlálható chromosomák száma 23—24.

11. ábra. Nagyítás, mint fent. Reggel 4—5 óra között. Sarki lemez. A chromosomák száma kb. 22.

12. ábra. Nagyítás, mint fent. Reggel 4—5 óra közt. Sarki lemez.

13. ábra. Nagyítás, mint fent. Reggel 4—5 óra között. Sarki lemez.

14. ábra. Nagyítás, mint fent. Reggel 4—5 óra között. Dispirema nucleolusokkal.

15. ábra. Nagyítás, mint fent. Reggel 4—5 óra között. Dispirema nucleolusokkal.

16. ábra. Nagyítás, mint fent. Sarki lemezek harántmetszetben. A chromosomák közül 12—13 számlálható meg, de számuk 16-ra tehető, egyesek csak mélyített beállítással láthatók.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 október 15.-én tartott üléséből.)

A LINEARIS EGYENLŐTLENSÉGEKRŐL.

HAAR ALFRÉD-től.

A linearis egyenlőtlenségek elmélete FARKAS GYULÁ-tól¹ és MINKOWSKI HERMANN-tól² ered. Egymástól függetlenül és különböző utakon jutottak el az elmélet két főtételéhez: a linearis egyenlőtlenségek alaptételéhez és azok parameteres megoldásához.

A jelen dolgozat első célja ezeket az eredményeket más módon levezetni. A többdimenziós tér geometriájának egyszerű tételei azok, a melyekre a fent említett tételek visszavezethetők, ha a határozatlanokat s ezekkel együtt a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket czélszerű módon geometriailag interpretáljuk. A kérdéses geometriai tételek a convex testek tulajdonságairól szólnak;³ az erre vonatkozó legegyszerűbb megállapításokon

¹ «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai.» (Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XII. k. 1895.) «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról.» (Mathematikai és Physikai Lapok, V. k. 1896.) «Paraméteres módszer FOURIER mechanikai elvéhez.» (Mathematikai és Physikai Lapok, VII. k. 1898.) «Theorie der einfachen Ungleichungen.» (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 124. 1901.)

² «Geometrie der Zahlen.» 39. 45. oldal.

³ Az n -dimenziós tér valamely zárt pontthalmazát convex testnek mondjuk, ha az a következő tulajdonsággal bír: Ha az

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n \text{ és } x''_1, x''_2, \dots, x''_n$$

coordinatájú pontok a pontthalmazhoz tartoznak, akkor minden olyan pont, melynek coordinatái:

$$x_1 = \varepsilon x'_1 + (1 - \varepsilon) x''_1, \quad x_2 = \varepsilon x'_2 + (1 - \varepsilon) x''_2, \dots, \quad x_n = \varepsilon x'_n + (1 - \varepsilon) x''_n,$$

— a hol ε tetszésszerű, 1-nél kisebb positiv számot jelent — ugyan-csak a pontthalmazhoz tartozik.

kivül egy CARATHÉODORY-tól eredő szép tétel nyer e dolgozatban alkalmazást.¹

Ennek a geometriai módszernek alkalmazásával egyrészt igen egyszerű módon adódnak a régi FARKAS-MINKOWSKI-féle tételek, másrészt ezek a tételek új eredményekkel egészülnek ki.

1. §. A homogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele.

Vizsgálataink kiinduló pontjául az u_1, u_2, \dots, u_n határozatlanok között fennálló homogen linearis egyenlőtlenségek valamely rendszerét választjuk:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n \geq 0. \quad (k=1, 2, \dots)$$

Rendszerünk véges számú vagy végtelen sok ilyen egyenlőtlenségből áll; az utóbbi esetben azonban feltételezzük, hogy rendszerünk

A tér bármely zárt és egészen a végesben fekvő ponthalmazát végtelen sok convex test tartalmazza. Azoknak a pontoknak összessége, melyek mindezeknek a testeknek pontjai, ismét convex testet alkot; ez az adott ponthalmazt tartalmazó legkisebb convex test. Ezek a definitiók MINKOWSKI-tól származnak; annál meglepőbb, hogy ő a linearis egyenlőtlenségek elméletét nem a convex testek segítségével, hanem majdnem tisztán algebrai megfontolásokkal építette fel.

¹ CARATHÉODORY kérdéses tétele a következő:

Ha x_1, x_2, \dots, x_n az n -dimenziós tér valamely zárt ponthalmazát tartalmazó legkisebb convex test valamely pontjának coordinatái, akkor ezek a következő alakban állíthatók elő: található az illető zárt ponthalmazban $(n+1)$ pont, melyeknek coordinatái

$$x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \dots, x_n^{(q)}, \quad (q=1, 2, \dots, n+1)$$

és $n+1$ nem negatív szám, $\mu^{(q)}$, melyek összege 1

$$\sum_{q=1}^{n+1} \mu^{(q)} = 1,$$

úgy, hogy

$$x_k = \sum_{q=1}^{n+1} \mu^{(q)} x_k^{(q)} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Más szóval: a kérdéses legkisebb convex test bármely pontja felfogható mint az illető zárt ponthalmaz bizonyos, legfeljebb $(n+1)$ számú pontjának súlypontja, ha ezekben a pontokban megfelelő pozitív tömegeket helyezünk el. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 32. 1911.)

«zárt» s ezen a következő tulajdonságot értjük: Tekintsük az n -dimenziós térben (melyben x_1, x_2, \dots, x_n CARTESIUS-féle koordinátákat jelentenek) azokat a p_k pontokat, melyeknek koordinátái

$$x_1 = a_{k1}, \quad x_2 = a_{k2}, \dots, \quad x_n = a_{kn}; \quad (k=1, 2, \dots)$$

ha az ilyen módon értelmezett p_k pontok halmaza zárt, azaz, ha a p_k pontok bármely torlódási helye ugyancsak ehhez a pont-halmazhoz tartozik, akkor a $\vartheta_k \geq 0$ egyenlőtlenségekről azt mondjuk, hogy «zárt» rendszert alkotnak. Nyilvánvaló, hogy az egyenlőtlenségek minden oly rendszere, mely csak véges számú egyenlőtlenségből áll, zártnak tekinthető, hiszen ebben az esetben csak véges számú p_k pontra jutunk, melyeknek torlódási pontjuk nincs.¹

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy létezik olyan $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ értékrendszer, melynél

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) > 0; \quad (k=1, 2, \dots)$$

ellenkező esetben ugyanis az eredeti egyenlőtlenségek rendszeréből könnyű szerrel olyan rendszerre térhetnénk át, melyben a határozatlanok száma n -nél kisebb.²

n -dimenziós terünk ama P_k pontjai tehát, melyeknek koordinátái:

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)} = A_{k1}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)} = A_{k2}, \dots,$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)} = A_{kn} \quad (k=1, 2, \dots)$$

mindannyian az $(n-1)$ -dimenziós

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \dots + \bar{u}_n x_n = 1 \quad (\bar{\delta})$$

síkban fekszenek. Mivel pedig — feltételünk szerint — $\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) > 0$, azért geometriailag ez azt jelenti, hogy koordinata-rendszerünk kezdőpontjából — O -ból — a p_k pontok

¹ Az adott egyenlőtlenségeknek nem is kell tehát megszámlálható halmazt alkotniok; számosságuk a continuum számossága is lehet.

² L. MINKOWSKI: Id. helyen 44. oldal.

felé rajzolt félegyenesek ezt az (\bar{s}) síkot metszik; ezek a metszéspontok a P_k pontok.

Eredeti egyenlőtlenségeink rendszere nem lényegesen különbözik a

$$\frac{\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} \equiv A_{k1}u_1 + A_{k2}u_2 + \dots + A_{kn}u_n \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

rendszerből, hiszen ezek akkor és csak akkor teljesülnek, ha az eredetiek és viszont; az együtthatók teljesítik az

$$A_{k1}\bar{u}_1 + A_{k2}\bar{u}_2 + \dots + A_{kn}\bar{u}_n = 1$$

egyenletet.

Interpretáljuk geometriailag egyenlőtlenségeink jelentőségét. Jelöljék e végből az

$$u_1 = U_1 + \bar{u}_1, \quad u_2 = U_2 + \bar{u}_2, \dots, \quad u_n = U_n + \bar{u}_n$$

számok adott egyenlőtlenségeink valamely megoldását és legyen rövidség kedvéért

$$\begin{aligned} \theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) &\equiv \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} \equiv \\ &\equiv A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \dots + A_{kn}U_n + 1, \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

úgy, hogy az U_1, U_2, \dots, U_n értékrendszer megoldása a

$$\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0$$

egyenlőtlenségeknek. Keressük már most az

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \dots + U_nx_n + 1 = 0$$

egyenletű síknak (melynek tehát U_1, U_2, \dots, U_n a síkkoordinatái) metszését azokkal az egyenesekkel, melyek O -t (koordinatarendszerünk kezdőpontját) a P_k pontokkal összekötik. Ezeknek a pontoknak koordinatái nyilván

$$x_1 = \rho A_{k1}, \quad x_2 = \rho A_{k2}, \dots, \quad x_n = \rho A_{kn},$$

a hol

$$\rho = - \frac{1}{A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \dots + A_{kn}U_n} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1)$$

Mivel pedig

$$\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0,$$

azaz

$$A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \dots + A_{kn}U_n \geq -1,$$

azért ρ számértéke nem feketik 0 és 1 között s ez azt mondja ki, hogy a kérdéses síknak egyenesekkel való metszéspontja nem fekszik az O és P_k pontok között.

Ennélfogva ha az $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$ számok egyenlőtlenségeinket kielégítik, akkor az a sík, a melynek síkkoordinátái U_1, U_2, \dots, U_n , az OP_k egyenesek mindegyikét olyan pontban metszi, mely nem fekszik az OP_k vonaldarab belsejében; viszont nyomban átlátható, hogy ha az

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \dots + U_nx_n + 1 = 0$$

síknak az OP_k vonaldarabokkal nincs közös pontja, akkor az $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$ számok adott egyenlőtlenségeink megoldásai. Ugyanis feltevésünk azt jelenti, hogy az (1) egyenlet által meghatározott ρ érték nem fekszik 0 és 1 között, azaz $\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0$ és így — a θ_k formák definitiója értelmében —

$$\vartheta_k(U_1 + \bar{u}, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n) \geq 0. \quad (k=1, 0, \dots)$$

Más szóval: egyenlőtlenségeink összes megoldásait megkapjuk, ha az OP_k vonaldarabokat nem metsző síkok síkkoordinátáihoz rendre az $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ mennyiségeket hozzáadjuk. Ezek a síkok azonban — melyek tehát illetően módon egyenlőtlenségeink összes megoldásait képviselik — még másképpen is jellemezhetők.

A P_k pontok ugyanis valamennyien az (\bar{s}) síkban fekszenek; jelöljük $\bar{\mathfrak{R}}$ -sal ebben az $(n-1)$ -dimenziós síkban azt a legkisebb convex tartományt, a mely ezeket a pontokat tartalmazza. Ha a $\bar{\mathfrak{R}}$ minden pontját O -val összekötjük, az így nyert vonaldarabok összessége egy n -dimenziós convex testet határoz meg; jelöljük ezt $\bar{\mathfrak{S}}$ -val. Ha tehát $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ a $\bar{\mathfrak{R}}$ általános pontjának koordinátái, akkor a $\bar{\mathfrak{S}}$ általános pontjának koordinátáit az

$$x_1 = \varepsilon \bar{x}_1, \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \dots, \quad x_n = \varepsilon \bar{x}_n \quad (2)$$

képletek adják meg, a hol ε minden értéket felvesz 0 és 1 között. Állítjuk, hogy a szóban forgó síkok, melyek a fent vázolt módon egyenlőtlenségeink megoldásait szolgáltatják, azok, a melyek \mathfrak{K} -t nem metszik.¹

Könnyen átlátható ugyanis, hogy, ha az

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \dots + U_nx_n + 1 = 0 \quad (3)$$

sík nem metszi a \mathfrak{K} -t, azaz, ha a \mathfrak{K} minden pontjára nézve az $U_1x_1 + \dots + U_nx_n + 1$ kifejezés ugyanazon előjelű, akkor, mivel az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ pont pontja \mathfrak{K} -nak, \mathfrak{K} minden pontjára nézve

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \dots + U_nx_n + 1 \geq 0.$$

Mint hogy P_k ($k=1, 2, \dots$) bizonyára pontja a \mathfrak{K} -nak, azért

$$\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0,$$

s így a (3) sík valóban a szóban forgó síkok valamelyike. Viszont, ha a (3) sík az OP_k vonaldarabokat nem metszi, akkor CARATHÉODORY-nak a bevezetésben említett tétele segítségével könnyen kimutatható, hogy e sík a \mathfrak{K} -t sem metszi. E tétel értelmében ugyanis az $(n-1)$ dimenziós \mathfrak{K} convex-test tetszésszerű pontjának coordinatái a következő alakban írhatók:

$$\bar{x}_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{1k}, \quad \bar{x}_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{2k}, \dots, \quad \bar{x}_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{nk},$$

a hol a μ_k számok közül legfeljebb n számú különbözik a zérustól s ezek pozitívek és összegük 1-gyel egyenlő. Mivel feltételünk szerint síkunk nem metszi az OP_k vonaldarabokat, azért

¹ Az

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n + \alpha_{n+1} = 0$$

síkról akkor mondjuk, hogy *nem metszi a \mathfrak{K} -t*, ha e ponthalmaz minden pontjára nézve vagy

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n + \alpha_{n+1} > 0,$$

vagy pedig — ugyancsak \mathfrak{K} minden pontjára nézve —

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n + \alpha_{n+1} \leq 0.$$

(\mathfrak{K} -nak egy nem metsző síkjával tehát még lehet közös pontja)

$$\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \equiv U_1 A_{k1} + U_2 A_{k2} + \dots + U_n A_{kn} + 1 \geq 0;$$

(k=1, 2, ...)

ennélfogva a \mathfrak{R} minden $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ pontjára fennáll az

$$U_1 \bar{x}_1 + U_2 \bar{x}_2 + \dots + U_n \bar{x}_n + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenség. Annál inkább fennáll tehát az

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenség, ha x_1, x_2, \dots, x_n helyébe a (2) alatti értékeket helyettesítjük, azaz tehát áll a \mathfrak{R} valamennyi pontjára. Ennélfogva csakugyan minden olyan sík, mely az OP_k vonaldarabokat nem metszi, a \mathfrak{R} -t sem metszi. Azok a síkok, a melyek a \mathfrak{R} convex testet nem metszik, szolgáltatják tehát a fenti értelemben egyenlőtlenségeink megoldásait.

A

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \geq 0$$

egyenlőtlenséget az adott ($\vartheta_k \geq 0$) egyenlőtlenségek *következményének* mondjuk, ha azt az utóbbiak minden megoldása kielégíti. Ha tehát $\vartheta \geq 0$ adott rendszerünk következménye, akkor bizonyára $\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) > 0$ ¹ és általában a

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n) \geq 0$$

egyenlőtlenséget, vagy az ettől csak egy pozitív factorban különböző (s így vele æquivalens)

$$\begin{aligned} \theta(U_1, U_2, \dots, U_n) &\equiv \frac{\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} \equiv \\ &= A_1 U_1 + A_2 U_2 + \dots + A_n U_n + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget azoknak a síkoknak a síkkoordinatái

$$(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

¹ Mivel ugyanis $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ kielégítik a $\vartheta_k > 0$ egyenlőtlenségeket, azért ezek érvényben maradnak akkor is, ha a határozatlanokat az $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ értékrendszerhez elég közel választjuk. Ha már most $\vartheta(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = 0$ volna, akkor léteznék az $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ értékrendszer bármely környezetében olyan értékrendszer, melynél $\vartheta < 0$ volna.

elégitik ki, melyek \mathfrak{R} -t nem metszik. Minthogy itt

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1 \bar{u}_1 + \dots + a_n \bar{u}_n}, \dots, A_n = \frac{a_n}{a_1 \bar{u}_1 + \dots + a_n \bar{u}_n},$$

azért

$$A_1 \bar{u}_1 + A_2 \bar{u}_2 + \dots + A_n \bar{u}_n = 1,$$

azaz az A_1, A_2, \dots, A_n koordinatájú P pont is az (\bar{s}) síkban fekszik. A $\vartheta \geq 0$ egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy ha $\vartheta \geq 0$ adott rendszerünk következménye, akkor azok a síkok, a melyek \mathfrak{R} -t nem metszik, az OP vonaldarabot sem metszik. Ebből következik azonban, hogy P a \mathfrak{R} tartományban fekszik. Ellenkező esetben ugyanis az OP egyenes minden pontja — az O pont kivételével — a \mathfrak{R} convex test külső pontja volna s így az OP vonaldarab minden pontján át olyan síkot lehetne fektetni, mely a \mathfrak{R} -t nem metszené.¹ Ez a sík nem metszené a \mathfrak{R} -t, de volna az OP vonaldarabbal közös pontja, a mi az előzők szerint lehetetlen.

P tehát valóban pontja \mathfrak{R} -nak; koordinatái (A_1, A_2, \dots, A_n) ennél fogva a CARATHÉODORY-féle tétel értelmében a következő alakban írhatók:

$$A_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{1k}, \quad A_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{2k}, \dots, \quad A_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{nk}, \quad \left(\sum_{(k)} \mu_k = 1 \right),$$

a hol a nem-negatív μ_k számok közül ismét legfeljebb n nem zérus. Ennek folytán identikusan fennáll a

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \mu_k \vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

összefüggés; minthogy pedig a $\vartheta(u_1 + \bar{u}_1, u_2 + \bar{u}_2, \dots, u_n + \bar{u}_n)$ illetőleg $\vartheta_k(u_1 + \bar{u}_1, u_2 + \bar{u}_2, \dots, u_n + \bar{u}_n)$ formák csak egy-egy pozitív factorban különböznek a megfelelő $\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n)$ illetőleg $\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$ formáktól, azért arra az eredményre jutunk, hogy ha a

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0$$

¹ L. például CARATHÉODORY id. helyen.

homogen linearis egyenlőtlenség következménye az ugyanilyen egyenlőtlenségekből álló

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0$$

zárt rendszernek, akkor léteznek olyan nem-negatív λ_k mennyiségek, melyek közül legfeljebb n számú nem egyenlő zérussal, hogy

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

2. §. Az inhomogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele.

Az előzőekben tárgyalt fejtegetések és eredmények kiterjeszthetők inhomogen linearis egyenlőtlenségekből álló rendszerre.

Jelölje e végből $\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$ az u_1, u_2, \dots, u_n határozatlanok inhomogen linearis kifejezését:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n + a_{k, n+1};$$

az így nyert

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4)$$

egyenlőtlenségekről szintén feltesszük, hogy zárt rendszert alkotnak, (ezuttal $n+1$ dimenziósat) és hogy létezik olyan $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ értékrendszer, melynél

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) > 0; \quad (k=1, 2, \dots).$$

Inhomogen egyenlőtlenségeink geometriai jelentésére a következőképpen jutunk:

Vezessük be ismét a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) &\equiv \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} \\ &= \frac{a_{k1}U_1 + a_{k2}U_2 + \dots + a_{kn}U_n}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} + 1. \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Ha tehát az $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$ értékrendszer a (4) alatti egyenlőtlenségeket kielégíti, akkor

$$\theta_k(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0; \quad (k=1, 2, \dots)$$

és viszont. Ezeket az egyenlőtlenségeket pedig — mint fentebb láttuk — azoknak és csakis azoknak a síkoknak a síkkoordinatái elégítik ki, a melyek nem metszik az OP_k vonaldarabokat, a hol most P_k azt a pontot jelöli, melynek koordinatái

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}, \dots, \\ x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}. \quad (k=1, 2, \dots)$$

Ha \mathfrak{K} -val jelöljük azt a legkisebb convex testet, a mely az O és P_k pontokat tartalmazza, akkor kimutatható, teljesen úgy, mint az előző §-ban, hogy a kérdéses síkok azok, a melyek a \mathfrak{K} -t nem metszik. A

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n + a_{n+1} \geq 0$$

egyenlőtlenséget ismét az adott ($\vartheta_k \geq 0$) rendszer következményének mondjuk, ha azt az utóbbiak minden megoldása teljesíti. Közvetlenül átlátható, hogy az $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$ értékrendszer akkor és csak akkor elégíti ki a

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n) \geq 0$$

egyenlőtlenséget, ha megoldása a

$$\theta(U_1, U_2, \dots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} \equiv \\ \equiv \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots + a_n U_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)} + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenségnek. Ennélfogva $\vartheta \geq 0$ akkor és csak akkor következménye a $\vartheta_k \geq 0$ rendszernek, ha minden olyan sík síkkoordinatái, mely a \mathfrak{K} -t nem metszi, teljesíti a

$$\theta(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq 0$$

egyenlőtlenséget s ebből ismét folyik, hogy az a P pont, melynek koordinatái

$$x_1 = \frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}, \dots, \\ x_n = \frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)}$$

a \mathfrak{K} convex test pontja.

ségek, melyek közül legfeljebb $n + 1$ különbözik a zerustól
 hogy

$$\vartheta(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) + \lambda_0.$$

Viszont közvetlen látnivaló, hogy ha a ϑ kifejezés
 ilyen módon előállítható a ϑ_k linearis kifejezé-
 sekből, akkor a $\vartheta \geq 0$ egyenlőtlenség valóban kö-
 vetkezménye a $\vartheta_k \geq 0$ egyenlőtlenségeknek.

3. §. Linearis egyenlőtlenségek parameteres megoldása.

Térjünk vissza homogen egyenlőtlenségeinkre, és szorít-
 kozzunk egyelőre arra az esetre, a mikor rendszerünk véges
 számú egyenlőtlenségből áll.

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \dots, u_n) = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n \geq 0. \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

A P_k pontokat tartalmazó legkisebb convex tartomány — $\bar{\mathfrak{R}}$ —
 ez esetben véges számú sík által határolt polyeder és így a \mathfrak{R}
 convex test határát ugyancsak véges számú $(n-1)$ -dimenziós sík
 alkotja. Ezek egyike az

$$\bar{u}_1x_1 + \bar{u}_2x_2 + \dots + \bar{u}_nx_n = 1$$

egyenletű (\bar{s}) sík, úgy, hogy \mathfrak{R} minden pontjának coordinatái
 teljesítik a

$$-\bar{u}_1x_1 - \bar{u}_2x_2 - \dots - \bar{u}_nx_n + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenséget; \mathfrak{R} többi határsíkja áthalad az O ponton; ezek
 egyenletei legyenek:

$$u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \dots + u_n^{(q)}x_n = 0, \quad (q=1, 2, \dots, N)$$

a hol az $u_1^{(q)}, u_2^{(q)}, \dots, u_n^{(q)}$ együtthatók már úgy vannak választva,
 hogy \mathfrak{R} minden pontjára nézve

$$u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \dots + u_n^{(q)}x_n \geq 0 \quad (q=1, 2, \dots, N)$$

legyen. Ennélfogva a \mathfrak{R} test minden pontjának coordinatái —
 és csakis ezek — kielégítik a következő $N + 1$ számú egyen-
 lőtlenségből álló rendszert:

$$\begin{aligned} u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \dots + u_n^{(q)}x_n &\geq 0, & (q=1, 2, \dots, N) \\ -\bar{u}_1x_1 - \bar{u}_2x_2 - \dots - \bar{u}_nx_n + 1 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Eredeti egyenlőtlenségeink valamennyi megoldását — mint láttuk — azoknak a síkoknak síccoordinatáiból nyertük, melyek \mathfrak{R} -t nem metszik, azaz ha $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$ a $\mathfrak{D}_k \geq 0$ egyenlőtlenségek valamely megoldását jelentik, akkor a \mathfrak{R} convex test minden pontjának koordinatái teljesítik az

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n + 1 \geq 0 \quad (6)$$

egyenlőtlenséget és viszont. Más szóval az

$$U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \dots, U_n + \bar{u}_n$$

értékrendszer akkor és csak akkor megoldása a $\mathfrak{D}_k \geq 0$ egyenlőtlenségeknek, ha a (6) alatti egyenlőtlenség következménye az (5) alatti $N+1$ számú egyenlőtlenségeknek. Ennek pedig szükséges és elegendő feltétele, a 2. §-ban levezetett tétel értelmében, hogy létezzenek olyan nem-negatív mennyiségek $\lambda^{(q)}$, ($q = 1, 2, \dots, N$) $\bar{\lambda}$ és λ_0 (a melyek közül legfeljebb $n+1$ nem zérus), hogy identikusan teljesüljön a következő relatio:

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n + 1 \equiv \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} (u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \dots + u_n^{(q)} x_n) + \bar{\lambda} (-\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \dots - \bar{u}_n x_n + 1) + \lambda_0;$$

azaz részletesen kiírva:

$$U_1 = \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_1^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_1, \quad U_2 = \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_2^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_2, \dots,$$

$$U_n = \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_n^{(q)} - \bar{\lambda} \bar{u}_n, \quad 1 = \bar{\lambda} + \lambda_0.$$

Ennélfogva megadott homogen egyenlőtlenségeink minden u_1, u_2, \dots, u_n megoldása az

$$u_1^{(q)}, u_2^{(q)}, \dots, u_n^{(q)} \quad (q=1, 2, \dots, N)$$

és az

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \quad (7)$$

megoldások felhasználásával a következő alakban állítható elő:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_1^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_1, & u_2 &= \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_2^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_2, \dots, \\
 u_n &= \sum_{q=1}^N \lambda^{(q)} u_n^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_n,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

a hol $\lambda^{(q)}$ és λ_0 nem-negatív számokat jelölnek. Fordítva közvetlenül látható, hogy ha $\lambda^{(q)}$ és λ_0 nem-negatív számok, akkor az utolsó egyenleteink által értelmezett minden u_1, u_2, \dots, u_n értékrendszer a $\mathcal{D}_k \geq 0$ egyenlőtlenségek megoldását szolgáltatja. A (8) alatti formulák tehát a megadott egyenlőtlenségek általános megoldását tartalmazzák nem-negatív paraméterek segítségével. Az ebben szereplő (7) alatti megoldások lényegileg azok, a melyeket MINKOWSKI legszélsőbb megoldásoknak nevez («äusserste Lösungen») s a melyek ilyen módon egyszerű geometriai jelentést kaptak.

Nem okoz nehézséget az itt levezetett parameteres megoldást általánosítani inhomogen egyenlőtlenségekre, vagy végtelen sok homogen egyenlőtlenségből álló zárt rendszerre, mely utóbbi esetben természetesen az előállításban felhasznált speciális (legszélsőbb) megoldások száma is végtelen lehet.

4. §. Az integralegyenlőtlenségek alaptétele.

Fejtegetéseink gondolatkörébe vág a következő problema:

Legyenek $a_1(x), a_2(x), \dots, a_\nu(x)$ és $a(x)$ az $\alpha \leq x \leq \beta$ intervallumban értelmezett folytonos függvények és tekintsük a folytonos $u(x)$ függvényeknek azt az összességét, a mely kielégíti a következő ν -számú integral-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} a_1(x) u(x) dx \geq 0, & \quad \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) u(x) dx \geq 0, \dots, \\
 & \quad \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x) u(x) dx \geq 0;
 \end{aligned}$$

az

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x) u(x) dx \geq 0$$

egyenlőtlenséget a megelőzők *következményének* mondjuk, ha minden olyan folytonos $u(x)$ függvény, mely amazokat kielégíti, ezt is teljesíti.

Foglalkozzunk csak azzal az esettel, a melyben az $a_1(x), \dots, a_v(x)$ függvények linearisan függetlenek; alaptételünk ez esetben úgy szól, hogy — a mondott feltételek mellett — $a(x)$ a következő alakba írható:

$$a(x) \equiv \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \dots + \lambda_v a_v(x),$$

a hol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$ nem-negatív állandókat jelölnek.

A kifejtendő bizonyításból kitűnik, hogy a tétel érvényes marad akkor is, ha az adott függvények valamely két-, vagy többdimenziós (T) tartományban értelmezett folytonos függvények s az integratio ebben a (T) tartományban történik. Erre a körülményre FARKAS professor úr volt szives figyelmemet felhívni.

Állításunkat a következőképpen bizonyítjuk:

A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$ számokat a következő linearis egyenletrendszerből számítjuk ki:

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_1(x) a(x) dx = \lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} a_1(x)^2 dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_1(x) a_2(x) dx + \dots +$$

$$+ \lambda_v \int_{\alpha}^{\beta} a_1(x) a_v(x) dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a(x) dx = \lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a_1(x) dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)^2 dx + \dots +$$

$$+ \lambda_v \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a_v(x) dx.$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_v(x) a(x) dx = \lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} a_v(x) a_1(x) dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_v(x) a_2(x) dx + \dots +$$

$$+ \lambda_v \int_{\alpha}^{\beta} a_v(x)^2 dx.$$

Ennek az egyenletrendszernek determinansa nem egyéb, mint az x_1, x_2, \dots, x_n határozatlanok következő quadratikus formájának:

$$\sum_{p=1}^{\nu} \sum_{q=1}^{\nu} x_p x_q \int_a^{\beta} a_p(x) a_q(x) dx \equiv \\ \equiv \int_a^{\beta} [x_1 a_1(x) + x_2 a_2(x) + \dots + x_{\nu} a_{\nu}(x)]^2 dx$$

determinansa; mivel pedig feltételünk szerint az $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{\nu}(x)$ függvények linearisan függetlenek, azért az x_1, x_2, \dots, x_{ν} határozatlanok minden értékénél pozitív (nem nulla) e quadratikus forma értéke és így determinansa nem tűnik el. Ennek folytán a szóban forgó egyenletrendszerből $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}$ csakugyan meghatározhatók. Ha még rövideg kedvéért bevezetjük a következő jelölést:

$$\omega(x) \equiv a(x) - \lambda_1 a_1(x) - \lambda_2 a_2(x) - \dots - \lambda_{\nu} a_{\nu}(x),$$

akkor a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}$ meghatározására felállított egyenletrendszer a következőképpen írhatjuk:

$$\int_a^{\beta} a_1(x) \omega(x) dx = 0, \int_a^{\beta} a_2(x) \omega(x) dx = 0, \dots, \int_a^{\beta} a_{\nu}(x) \omega(x) dx = 0.$$

Ezek az egyenletek pedig azt mondják ki, hogy úgy az $\omega(x)$, mint a $-\omega(x)$ függvény kielégíti a kiinduló pontul szolgáló integral-egyenlőtlenségeinket. Ennélfogva szükségképpen fennállanak az

$$\int_a^{\beta} a(x) \omega(x) dx \geq 0 \quad \text{és} \quad - \int_a^{\beta} a(x) \omega(x) dx \geq 0$$

egyenlőtlenségek is, a melyekből az

$$\int_a^{\beta} a(x) \omega(x) dx = 0$$

relatio következik. Ha ebben $a(x)$ helyébe az

$$\omega(x) + \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \dots + \lambda_{\nu} a_{\nu}(x)$$

összeget írjuk, az

$$\int_{\alpha}^{\beta} \omega(x)^2 dx = 0$$

egyenletre jutunk s ez azt mutatja, hogy $\omega(x) \equiv 0$, azaz

$$a(x) = \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \dots + \lambda_\nu a_\nu(x).$$

Hátra van még annak a kimutatása, hogy ezek a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ számok nem negatívak. Hogy ezt például λ_1 -re kimutathassuk, oldjuk meg a következő $\nu-1$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszert:¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a_1(x) dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)^2 dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a_3(x) dx + \dots + \\ + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) a_\nu(x) dx;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_3(x) a_1(x) dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x) a_2(x) dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)^2 dx + \dots + \\ + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x) a_\nu(x) dx;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x) a_1(x) dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x) a_2(x) dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x) a_3(x) dx + \dots + \\ + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)^2 dx.$$

Ha ismét, mint elébb, bevezetjük a következő rövidítést:

$$\bar{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \dots - \mu_\nu a_\nu(x),$$

akkor nyomban látható, hogy egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_2(x) \bar{\omega}(x) dx = 0, \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x) \bar{\omega}(x) dx = 0, \dots, \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x) \bar{\omega}(x) dx = 0;$$

¹ Hogy ennek a lineáris egyenletrendszernek determinansa nem tűnik el, az ugyanúgy mutatható ki, mint az előző egyenletrendszer esetében.

mivel továbbá

$$\int_a^{\beta} a_1(x) \bar{w}(x) dx = \int_a^{\beta} \bar{w}(x)^2 dx > 0^1,$$

azért ezek az összefüggések azt mutatják, hogy $\bar{w}(x)$ is kielégíti adott integral-egyenlőtlenségeinket. Ennélfogva ez a függvény teljesíti az

$$\int_a^{\beta} a(x) \bar{w}(x) dx \geq 0$$

egyenlőtlenséget is; ámde

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} a(x) \bar{w}(x) dx &= \int_a^{\beta} [\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \dots + \lambda_r a_r(x)] \bar{w}(x) dx = \\ &= \lambda_1 \int_a^{\beta} \bar{w}(x)^2 dx \geq 0; \end{aligned}$$

s így valóban $\lambda_1 \geq 0$.

Ezzel alaptételünk integral-egyenlőtlenségek esetében is bebizonyítást nyert.

¹ Az $\int_a^{\beta} \bar{w}(x)^2 dx$ integral értéke nem lehet nulla, mert ez esetben

$$\bar{w}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \dots - \mu_r a_r(x) \equiv 0$$

volna s így az $a_1(x), a_2(x), \dots, a_r(x)$ függvények nem lennének lineárisan függetlenek.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1917 december 10.-i meg nem tartott ülésére bejelentve, 1918 márczius hó 18.-i ülésén előterjesztve.)

EGYENLŐTLENSÉGEK ALKALMAZÁSÁNAK ÚJ MÓDJAI.

FARKAS GYULA r. tagtól.

Az Értesítő folyó XXXVI. kötetében HAAR ALFRÉD új egyenlőtlenségi tételeket állapít meg «A linearis egyenlőtlenségekről» című dolgozatában.¹ A több-dimensziós geometria eszközeivel talált két tételéhez fűződik jelen közleményem. Az 1. szakasz a homogen linearis egyenlőtlenségek alaptételének az eddiginél szorosabb, HAAR-féle meghatározását annak a régi meghatározásából vezeti le. A 2. szakasz ezt a szorosabb meghatározást a mechanikára és thermodynamikára alkalmazva, a «kényszererők» egyenlőtlenségi vonatkozásait új módon állítja elő. A 3. szakasz az inhomogen egyenlőtlenségek HAAR-tól megállapított alaptételét alkalmazza a mechanikára és a thermodynamikára. A 4. szakasz linearis egyenlőtlenségek végtelen sokaságának legközösesebb osztályát definiálja.

1. Az u_1, \dots, u_n változók értéktartományát homogen linearis egyenlőtlenségek szorítsák meg:

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_{ji} u_i \equiv \theta_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, r), \quad (1)$$

a hol n és r véges számot jelent. Implicite egyenleteket is tartalmazhasson ez az egyenlőtlenség-rendszer, azaz következessenek abból egyenletek is az u változók között.

Ha ennek a rendszernek minden megoldásában teljesül a

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i u_i \equiv \vartheta \geq 0 \quad (2)$$

¹ Lásd a megelőző közleményt, 279—296. l.

egyenlőtlenség, akkor léteznek olyan nem-negatív multiplicatorok $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, függetlenek az u -któl, hogy

$$\vartheta \equiv \sum_{j=1}^{j=r} \lambda_j \theta_j. \quad (3)$$

Ez a homogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele. Melléje HAAK meghatározása (l. c. 1. §.) arra az esetre, hogy r nagyobb, mint az egymástól független θ polynomok száma, új tételt állít, a melynek az értelmében a λ nem-negatív multiplicatorok minden ϑ -hoz megválaszthatók úgy, hogy legfeljebb annyi λ különbözzék a zérustól, a hány az egymástól független θ polynom.

A (3)-ból is levezethető tétel ez. Jelölje m az egymástól független polynomok számát (3)-ban s abban a föltevésben, hogy $m < r$, tekintsük (3) szerint oly definitióját a ϑ -nak, a melyben a j indexek alkalmas elhelyezése folytán az m első θ független egymástól s az $m+1$ első λ pozitív:

$$\begin{aligned} \vartheta &\equiv \lambda_1 \theta_1 + \dots + \lambda_{m+1} \theta_{m+1} + \lambda_{m+2} \theta_{m+2} + \dots \\ &\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_{m+1} > 0, \lambda_{m+2} \geq 0, \dots \end{aligned}$$

Az $m+1$ első θ összefüggését ez az identitás adja meg:

$$l_1 \theta_1 + \dots + l_m \theta_m + \theta_{m+1} \equiv 0.$$

A baloldalát megszorozva valamely ε mennyiséggel, vonjuk ki ϑ -nak a multiplicatoros kifejezéséből:

$$\vartheta \equiv (\lambda_1 - \varepsilon l_1) \theta_1 + \dots + (\lambda_m - \varepsilon l_m) \theta_m + (\lambda_{m+1} - \varepsilon) \theta_{m+1} + \lambda_{m+2} \theta_{m+2} + \dots$$

Az ε szorzót eredetileg oly kicsiny pozitívnek válasszuk meg, hogy ϑ új kifejezésében minden zárójeles szorzó pozitív legyen. Azután mindaddig növeljük ε értékét, míg legalább egy zárójeles szorzó el nem tűnik. Most már megszüntetve ε növelését, legalább egy θ polynom eltűnt ϑ kifejezéséből s a többiek factora ≥ 0 .

Ha ezután is nagyobb volna m -nél a ϑ -nak a kifejezésében a θ polynomok száma, akkor hasonló, esetleg $(m+1)$ -nél kevesebb tagon végezhető műveletekkel ismét apad ez a szám és minden megmaradó θ -nak a factora pozitív. Nyilvánvaló, hogy legalább is mindaddig ismételhető ez az eljárás, míg a megmaradó θ polynomok száma nagyobb, mint m . Végül leg-

feljebb m számú θ marad ϑ kifejezésében s factoraik positivok, ők maguk pedig függetlenek egymástól.

Ha az (1) egyenlőtlenségek sorában nincsenek olyanok, a melyek csak az egyenlőségi jel szerint férnek össze a többi egyenlőtlenséggel, akkor az $m+1$ első θ fönt írt identitásában az (1) miatt legalább egy l szorzó negativ. Ekkor pedig műveleteink úgy is végezhetők, hogy az identitás baloldalának ε -szorosát nem kivonjuk ϑ kifejezéséből, hanem hozzáadjuk ahhoz. A kétféle eljárás különböző θ polynomok kiküszöbölését eredményezi. Általánosan, mindannyiszor kétféle eljárás végezhető, valahányszor az ε -nal szorzandó kifejezésben legalább egy együttható negativ.

2. Akár a tiszta mechanika, akár a thermodynamika körébe tartozzék valamely anyagi rendszer, midőn olyanok a viszonyai, hogy véges számú variabilis $p_1, p_2, \text{ stb.}$ határozza meg, mint az idő függvénye annak a mindenkori állapotát, akkor az anyagi rendszer viselkedésének általános principiumát elsőrendű végtelen nagy pontossággal véges számú incrementumnak ($\delta p_1, \delta p_2, \text{ stb.}$) a homogen linearis egyenlőtlensége fejezi ki:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \delta p_i \equiv \delta' \vartheta \geq 0, \quad (4)$$

a hol n általában kisebb, mint a p állapothatározóknak a száma s a δp incrementumok virtualis megváltozásokat jelentenek (a tényleges elemi megváltozásokra nézve relative lehetséges elemi megváltozásokat); a P együtthatók jelentményét pedig az szabja meg, hogy $\delta' \vartheta$ elsőrendű végtelen pontossággal az anyagi rendszertől viselt kényszernek a virtualis munkája (a tiszta mechanikában a szabad erőket a teljes erőkké kiegészítő erők virtualis munkája, a thermodynamikában az anyagi rendszer potentialis energiájából és entropiájából¹ származó erőket meg a kívülről hatókat a teljes erőkké kiegészítő erők virtualis munkája).

¹ Általánosan definiálva egy anyagi rendszer entropiája = az anyagi rendszert alkotó permanens elemi részek entropiáinak összege. Permanens elemi részek = állandó anyagú elemi részek, a mik egy keverékben általában csak a keveréket tevő egyszerű testek vagy állandó vegyületek elemi részei lehetnek; permanens elemi rész keverék általában nem lehet.

Rendszerint pedig egyenleti vonatkozások is háramlanak (5) által (4)-ből a P -ekre. Ezekhez (7)-ből a λ paraméterek eliminálásaival jutunk el, a mely művelet lehetőségének az lévén a föltétele, hogy az egymástól független $\delta'\theta$ polynomok száma ne legyen n -nel egyenlő (tehát n -nél kisebb legyen), ez a föltétele egyszersmind annak is, hogy létezzenek egyenletek a P együtthatók között. Azonban úgy is eljuthatunk a P együtthatók egyenleteinek az előállításához, hogy (5)-ben minden egyenlőtlenséget egyenletnek ($\delta'\theta = 0$) gondolunk, aztán a mennyi $\delta'\theta$ független egymástól, annyi δp incrementumot, mint a többi δp homogen linearis kifejezését számítjuk ki a gondolt egyenletekből, kifejezéseiket behelyettesítjük (4)-be s onnan a most még bent lévő δp incrementumok teljes szorzóit $= 0$ -ra írjuk.

Egy csapásra nyerjük a P együtthatók egyenleteit és egyenlőtlenségeit az által, hogy (5) általános parameteres megoldásait állítjuk elő, ugyanis részint egészen szabad, részint nem-negatív szabad paraméterek homogen linearis kifejezései gyanánt (aminek a lehetőségével egyúttal egy gyakorlati módszerét is megállapítottam régibb közleményekben). A (4)-ben való helyettesítés után az egészen szabad paraméterek teljes szorzóit $= 0$ -ra, a szabad nem-negatív paraméterek teljes szorzóit ≥ 0 -ra írjuk. Az ilyképpen kelt egyenletek és egyenlőtlenségek rendszere egészen meghatározza, éppúgy mint parameterelesen a (7), azt az értéktartományát a P együtthatóknak, a mely a virtualis kényszer következtében felel meg az elvi egyenlőtlenségnek.

Eddigelé más általános módszerünk nem is volt a P együtthatók egyenlőtlenségi vonatkozásainak az előállítására. A homogen linearis egyenlőtlenségek alaptételének a szorosabb meghatározásából ellenben két általános módszer is következik. Elég lesz abban a föltevésben tekinteni ezeket a módszereket, hogy (5)-ben az egyenlőtlenségek száma nagyobb, mint az egymástól független $\delta\theta$ polynomok száma: $r > m$, ha ugyanis m jelöli az egymástól független $\delta\theta$ polynomok számát az (5)-ben.

a) A $\delta'\theta$ polynomoknak mindazt az m -es combinatióját képezzük, a mely csupa egymástól független $\delta'\theta$ polynomot tar-

talmaz. Valamennyi combinatio szerint megalkotjuk a P együtthatók multiplicatoros kifejezéseit (7) mintájára, minden egyes combinatio szerint úgy, mintha csak a benne foglalt $\delta'\theta$ polynomok léteznének (5)-ben, mihez képest m tagú multiplicatoros kifejezéseknek valamely M számú rendszerét kapjuk a P együtthatók számára. Ezután minden egyes rendszerből kiszámítjuk az abban szereplő multiplicatorokat és a számítás eredményeit ≥ 0 -ra írjuk. E módon M számú egyenlőtlenségrendszerünk van, valamennyiök m számú homogen linearis egyenlőtlenségével a P együtthatóknak. Mindazok a P együtthatók és csak azok lehetségesek az adott virtualis kényszerben, a melyek egyenleteik mellett legalább egy ilyen egyenlőtlenségrendszert is kielégítenek.

b) Az (5)-ből mindazokat a particularis rendszereket kiemeljük, a melyek teljes számú (tehát m számú) egymástól független polynomra szólnak, mikor is valamely M számú particularis egyenlőtlenségrendszerünk fog lenni. Minden egyes particularis rendszerből kiszámítunk m számú δp incrementumot, mint a többi incrementumnak és a $\delta'\theta$ jelvényeknek a függvényét, aztán behelyettesítvén ezeket (4)-be, minden $\delta\theta$ teljes szorzóját ≥ 0 -ra írjuk. Ily módon m számú egyenlőtlenségek M számú homogen linearis rendszeréhez jutottunk a P együtthatók számára. Mindazok és csak azok a P együtthatók lehetségesek az adott virtualis kényszerben, a melyek egyenleteik mellett legalább egy ilyen egyenlőtlenségrendszert is kielégítenek.

Mind az $a)$, mind a $b)$ érdekében czélszerű megtudni előre, hogy $\alpha)$ vannak-e oly egyenlőtlenségek (5)-ben, a melyek ott csak az egyenlőség jelével teljesülhetnek, s ha vannak, leszállítani ezek révén a δp incrementumok számát; $\beta)$ vannak-e fölösleges egyenlőtlenségek (5)-ben, azaz olyanok, a melyek a többi folyományai, s ha vannak, törölni azokat. Hogy pedig vannak-e az (5)-ben ilyen egyenlőtlenségek, s ha vannak, melyek azok, ez szintén megállapítható a szorosabb meghatározású alaptétellel.

$\alpha)$ Ha az (5)-ben a $\delta'\theta_1 \geq$ egyenlőtlenség csak az egyenlőség jelével teljesülhet, akkor a többi egyenlőtlenségnek szükség-

képpen következménye a $-\delta'\theta_1 \geq 0$ egyenlőtlenség, minélfogva léteznek oly λ nem-negatív multiplicatorok, hogy

$$-\delta'\theta_1 \equiv \sum_{j=2}^{j=r} \lambda_j \delta'\theta_j$$

és megválaszthatók úgy a λ multiplicatorok, hogy legfeljebb m számú λ nem zérus, azaz legfeljebb annyi, a mennyi $\delta'\theta$ független egymástól. Azzal a föltétellel vannak tehát egyenletek az (5)-ben, hogy a következő egyenletek :

$$\begin{aligned} A_{11}\mu_1 + \dots + A_{r1}\mu_r &= 0 ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{1n}\mu_1 + \dots + A_{rn}\mu_r &= 0 ; \end{aligned}$$

megoldhatók valódián nem-negatív μ mennyiségekkel, és pedig olyanokkal is, a melyek sorában legfeljebb $m+1$ számú különbözik a zérustól. A mely μ mennyiségek nem zérusok az ily megoldásokban, azoknak az együtthatóival képezett $\delta'\theta$ polynomok és csak ezek zérusok szükségképpen az (5)-ben. Hogy pedig léteznek-e ily megoldások, és ha léteznek, melyek azok, ezt mindig könnyen eldönthetjük, mert $m \leq n$.

β) Ha a $\delta'\theta_1 \geq 0$ egyenlőtlenség fölösleges az (5)-ben (folyománya lévén a többi ott lévő egyenlőtlenségnek), akkor léteznek oly λ nem-negatív multiplicatorok, hogy

$$\delta'\theta_1 \equiv \sum_{j=2}^{j=r} \lambda_j \delta'\theta_j,$$

és megválaszthatók úgy a λ multiplicatorok, hogy legfeljebb m számú λ nem zérus, azaz annyi, a hány az egymástól független $\delta'\theta$ polynom. Azzal a föltétellel vannak tehát fölösleges egyenlőtlenségek az (5)-ben, hogy ezek az egyenletek :

$$\begin{aligned} A_{11}\mu_1 + \dots + A_{r1}\mu_r &= 0 ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{1n}\mu_1 + \dots + A_{rn}\mu_r &= 0 ; \end{aligned}$$

megoldhatók egy negatív és $r-1$ számú nem-negatív μ mennyiséggel, még pedig oly nem-negatívokkal is, a melyek sorá-

ban legfeljebb m számú különbözik a zérustól. A negatív μ multiplicator együttthatóival képezett $\delta'\theta \geq 0$ egyenlőtlenség fölösleges (5)-ben. Hogy pedig léteznek-e ilyen megoldások, és ha léteznek, melyek azok, ezt mindig könnyen megállapíthatjuk annál fogva, hogy $m \leq n$.

Az α) és β) reductiók után is végezhetünk még reductiót az α) és β) érdekében. Ugyanis nem szükséges a $\delta'\theta$ polynomok minden m -es combinatiójára kiterjeszkedni, mert a teljes m -dimenziós P -tartományt elég oly partiális m -dimenziós P -tartományokra bontani, a melyek belsőleg, azaz m -dimenziósan nem érintkeznek, hanem csak külső, legfeljebb $(m-1)$ -dimenziós érintkezésben vannak egymással. Annak az eldöntése végezté pedig, hogy két partiális P -tartomány m -dimenziósan érintkezik-e vagy sem, jelöljenek $\delta'\varphi_1, \dots, \delta'\varphi_m$ egymástól független $\delta'\theta$ polynomokat az (5)-ből s nem különben $\delta'\psi_1, \dots, \delta'\psi_m$ is, és most $\delta'\vartheta$ -nak tekintsük (6)-ból ezt a két particularis definitióját:

$$\begin{aligned} \delta'\vartheta_\varphi &\equiv \sigma_1 \delta'\varphi_1 + \dots + \sigma_m \delta'\varphi_m, & (\sigma \geq 0) \\ \delta'\vartheta_\psi &\equiv \tau_1 \delta'\psi_1 + \dots + \tau_m \delta'\psi_m, & (\tau \geq 0) \end{aligned}$$

A $\delta'\psi$ polynomok homogen linearis függvényeik a $\delta'\varphi$ polynomoknak és viszont. Egy-egy partialis P -tartományt P_φ , P_ψ határoznak meg (4) szerint ezek az identitások. Ha a $\delta'\varphi$ vagy a $\delta'\psi$ mennyiségek mint függetlenek tekintetében a $\delta'\vartheta_\varphi \equiv \delta'\vartheta_\psi$ identitás teljesülhet olyképpen nem-negativ σ és τ szorzókkal, hogy minden σ és τ lehessen positiv (>0), akkor és csak akkor van m -dimenziós közös része a P_φ és P_ψ -tartományoknak máskülönben csak $m-1$ vagy kisebb dimenziós közös részük van.

3. Jelölje dp a dt időelemben a p állapothatározók *tényleges* megváltozásait és jelölje ugyanabban a dt időelemben δp a p -ek *lehetséges* megváltozásait. A p -ek «*virtuális*» megváltozásai a dt időelemben \equiv

$$\delta p \equiv \partial p - dp. \quad (8)$$

E szerint a kényszer virtualis munkájának az egyenlőtlensége így is írható végtelen pontossággal:

$$\delta'\vartheta \equiv \sum_{i=1}^{i=n} P_i \delta p_i \geq \sum_{i=1}^{i=n} P_i dp_i \equiv d'\vartheta, \quad (9)$$

a mi azt jelenti, hogy a kényszer tényleges munkája minden időelemben kisebb, mint bármely más mekkoraságú lehetséges munkája: a kényszer valósággal minden időelemben a lehető legkisebb munkát végezi.

A tényleges kényszert általában inhomogen egyenlőtlenségek fejezik ki, közönségesen linearisok végtelen pontosan a ∂p lehetséges incrementumok között, olyképpen, hogy homogen linearisok a ∂p lehetséges incrementumok és a dt időelem között:

$$A_j dt + \sum_{i=1}^{i=n} A_{ji} \partial p_i = d' \theta_j \geq 0, \tag{10}$$

$$j = 1, \dots, r; \quad dt > 0,$$

a hol az A együtthatók általában az időnek, a p állapot-határozóknak és esetleg még ezek változási sebességeinek is ($\dot{p}_1, \dot{p}_2, \text{ stb.}$) a függvényeik.

A (10) minden megoldásában kell teljesülnie (9)-nek. Következésképpen (HAAK, l. c. 2. §.) léteznek oly nem-negatív mennyiségek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$, hogy

$$d' \vartheta - d' \vartheta = \lambda_0 dt + \lambda_1 d' \theta_1 + \dots + \lambda_r d' \theta_r; \tag{11}$$

és a λ multiplicatorok megválaszthatók úgy minden P rendszerhez, hogy legfeljebb egygyel legyen több a pozitív $\lambda (>0)$, mint a hány az egymástól független $\partial \theta - A dt$ polynom.

A (11)-ből is előkerülnek a P együtthatóknak a (7) alatt lévő parameteres kifejezései:

$$P_1 = A_{11} \lambda_1 + \dots + A_{r1} \lambda_r;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n = A_{1n} \lambda_1 + \dots + A_{rn} \lambda_r. \tag{12}$$

Azonban (11)-ből más vonatkozások is következnek. Ezekhez úgy jutunk el a legegyszerűbben, hogy a (11)-et a tényleges elemi megváltozásokra (dp) vonatkoztatjuk, a melyekkel $d' \vartheta = d' \vartheta$, midőn is (11)-ből:

$$\lambda_0 dt + \lambda_1 d' \theta_1 + \dots + \lambda_r d' \theta_r = 0, \tag{13}$$

a hol

$$dt > 0, \quad d'\theta \geq 0, \quad \lambda \geq 0,$$

minélfogva λ_0 csak $=0$ lehet. Nemkülönben csak zérusok lehetnek a λ szorzói azoknak a $d'\theta$ -knak, a melyek csak pozitívok ($\neq 0$) lehetnek. (Ha például a (10)-ben két $d'\theta$ csupán abban különbözik egymástól, hogy az egyikben nagyobb dt -nek az együtthatója, mint a másikban, akkor az a $d'\theta$, a melyben nagyobb dt -nek az együtthatója, már csak >0 lehet a másik $d'\theta$ nemnegatív volta miatt). De kössük ki olyan előállítását a (10)-nek, hogy ne legyenek abban fölösleges egyenlőtlenségek. E kikötéssel nincs (10)-ben olyan egyenlőtlenség sem, a mely ott csak a fölső ($>$) jellel teljesülhetne, így pedig természetszerű kényszerben nemcsak a $d'\theta \geq 0$ egyenlőtlenségek, de a $d'\theta = 0$ egyenletek is összeférnek a (10)-ben: valamennyi $d'\theta$ eltűnhetik ott egyszerre, daczára a $dt > 0$ postulatumnak. (Az első elméletek csakis a $d'\theta = 0$ egyenletekkel szigorított kényszerre gondoltak). Mivel minden $d'\theta$ lehet $=0$ egyszerre, azért lehet olyan a tényleges változás, hogy abban a $d'\theta$ polynomok mindaddig zérusok, a míg csak tart a (10) alatti kényszer. Tegyük föl most, hogy a t pillanatig valóban, mindig, minden $d'\theta$ zérus, de a további dt időelemben nem, például $d'\theta_1 > 0$ ebben az időelemben. Akkor (13) folytán λ_1 csak $=0$ lehet a dt időelemben s következőleg a P együtthatók (12), s velük együtt a kényszererők értéktartománya az lehet csak a dt időelemben, a mi akkor volna, ha (10)-ben az első egyenlőtlenség nem léteznék, a melynek a hiánya pedig egyértelmű a kényszer enyhülésével: a (10) alatt föltételezett kényszer csak addig tart tehát, a maga teljességében, a míg minden időelemben, minden $d'\theta$ eltűnik, azaz

$$A_j dt + \sum_{i=1}^{i=n} A_{ji} dp_i = 0, \quad (j=1, \dots, r), \quad (14)$$

a mi azt mondja, hogy a tényleges állapotváltozásban az uralgó kényszer minden egyenlőtlensége egyenletileg teljesül. (Ezeket az egyenleteket a tömegpontok mechanikájának egy tárgyalásában más módon következtettem.)

Ámde a (14) alatti rendszerben csak azokról az egyenletek-

ről állítható, hogy valódi egyenletek, a melyek együttthatói a \dot{p} sebességektől nem függenek, hanem legfeljebb csak az időnek és maguknak a p határozóknak a függvényeik. A mely egyenletek együttthatói függnék (14)-ben a \dot{p} sebességektől, azok az egyenletek pusztá azonosságokra degenerált egyenlőségek is lehetnek és tapasztalás szerint mindig is azok (surlódási kényszerből valók, a mely pedig abszolút megszorításokat nem ró ki a dp incrementumokra, hanem csak olyanokat, a melyek függnék az erőktől).

A (14) alatti egyenletek a tényleges állapotváltozás kényszerrelatiói. Ezek teszik lehetővé, hogy (10)-ből a virtualis kényszer meghatározására a virtualis állapotváltozások definitióján (8) homogen egyenlőtlenések következnek, tudniillik az által, hogy a (14) alatti egyenletek baloldalait rendre kivonjuk a (10) alatti egyenlőtlenések baloldalaiból.

4. Azok a geometriai módszerek, a melyekkel élve HAAR vezet le a tételeit, olyanok, hogy szerintök ezek a tételek nemcsak véges számú egyenlőtlenéseknek a rendszerein érvényesek, de érvényesek egyenlőtlenéseknek oly végtelen sokaságain is, a melyeket HAAR zárt rendszereknek nevez.

Az alkalmazások érdekében különösen utalok itt lineáris egyenlőtlenések végtelen sokaságainak arra az osztályára, a melyben a rendszerek bármi nagy pontosságnál pontosabban helyettesíthetők véges lineáris rendszerekkel. A végtelen egyenlőtlenesség-rendszerek e véges értelmű osztályába tartozik egy végtelen lineáris egyenlőtlenességrendszer, ha létezik a variabilisok oly határozott értéktartománya, a melynek a következő tulajdonságai vannak:

I. tetszés szerint adott pontosságnál pontosabban megközelíthető az a rendszerből kiszemelt véges számú egyenlőtlenesség által;

II. megközelítésének a pontossága a kiszemelt egyenlőtlenések szaporításával sohasem kisebbedik, hanem vagy nagyobbodik, vagy változatlan marad.

Ezt az értéktartományt mondom természetesen a végtelen egyenlőtlenességrendszer által meghatározott értéktartománynak. Nyilvánvaló, hogy az előadottak az egyenlőtlenességrendszereknek erre az osztályára is kiterjeszthetők.

Midőn egy linearis egyenlőtlenség együtthatói valamely véges (egy- vagy többdimenziós) geometriai alakzatban a hely folytonos függvényei, akkor összefoglalása az egyenlőtlenség oly végtelen egyenlőtlenség rendszernek, a mely a végtelen egyenlőtlenségrendszereknek ebbe az osztályába tartozik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 márczius 18.-án tartott üléséből.)

KÖROSZTÁSI EGYENLETEK RESULTANSA.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Hogy törzsszám-fokú körosztási egyenletek resultansa 1-gyel egyenlő, már régóta ismeretes tény. KUMMER mutatott rá először arra az érdekes jelenségre, hogy ha r primitív p -dik egységgyök, akkor az

$$E_k(r) = 1 + r + r^2 + \dots + r^k$$

kifejezések mindig egységeket szolgáltatnak, valahányszor $k+1$ a p -vel nem osztható.¹ Ez velejére nézve pedig azt jelenti, hogy ebben az esetben az

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$$

és az

$$x^k + x^{k-1} + \dots + 1 = 0$$

körosztási egyenletek resultansa *egy-gyel* egyenlő.

Hogyan áll a dolog tetszésszerűn összetett fokszámú körosztási egyenletek esetében?

Erre a kérdésre óhajtok a jelen rövid dolgozatban válaszolni. A választ a következő tételben vélem megadhatni:

Ha

$$F_m(x) = 0$$

és

$$F_n(x) = 0$$

amaz irreducibilis $\varphi(m)$, illetőleg $\varphi(n)$ -edfokú egyenlet, a mely a primitív m -edik, illetőleg a primitív n -edik egységgyököket

¹ Journal de Mathématiques 16. kötet, 383. l.

szolgáltatja, akkor, valahányszor m és n relativ törzsszámok, $F_m(x)$ és $F_n(x)$ resultansa 1-gyel egyenlő, azaz

$$\text{Res. } [F_m(x), F_n(x)] = 1.$$

E tétel érvényessége általánosságban megszűnik, ha m és n -nek valódi közös osztója van.

Legyen m -nek, a mely tetszés szerinti összetett szám lehet, törzstényezőkre felbontott alakja:

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

akkor az m -edik primitív egységgyököket meghatározó $\varphi(m)$ -ed fokú egyenlet ($\varphi(m)$ az ismeretes EULER-symbolum) a következő:

$$F_m(x) \equiv \frac{(x^m - 1) \prod (x^{\frac{m}{p_1 p_2}} - 1) \prod (x^{\frac{m}{p_1 p_2 p_3}} - 1) \dots}{\prod (x^{\frac{m}{p_1}} - 1) \prod (x^{\frac{m}{p_1 p_2}} - 1) \dots} = 0.$$

Legyen most már n bármilyen m -hez relativ prímszám és r az

$$F_n(x) = 0$$

egyenletnek tetszés szerinti gyöke, akkor összes gyökeit az

$$r^{k_1}, r^{k_2}, \dots, r^{k_i}, \dots, r^{\varphi(n)}$$

hatványok sorozata szolgáltatja, a melyben a kitevők

$$k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_{\varphi(n)}$$

(mod. n) reducált maradéksor elemei, azaz az n modulus teljes maradéksorának amaz elemei, a melyek n -hez képest relativ prímszámok.

Ezek után fölirhatjuk $F_m(x)$ és $F_n(x)$ resultansát. Ez lesz:

$$\begin{aligned} \text{Res. } [F_m(x), F_n(x)] &= \prod_{i=1}^{\varphi(n)} F_m(r^{k_i}) = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i m} - 1) \prod \left[\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2}} - 1) \right] \prod \left[\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2 p_3}} - 1) \right] \dots}{\prod \left[\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1}} - 1) \right] \prod \left[\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2}} - 1) \right] \dots} \quad (1) \end{aligned}$$

Mivel m és n relativ törzsszámok, $\frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g}$ és n is azok, de akkor ismeretes elemi számelméleti tétel értelmében az

$$\frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g} \xi$$

elsőfokú forma, melyben a ξ határozatlan együtthatóju n -hez relativ prim, az n modulusra nézve reducált maradéksort szolgáltat, ha a ξ helyébe rendre a

$$k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_{\varphi(n)}$$

reducált maradéksor értékeit helyettesítjük. Tehát az

$$\frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g} k_1, \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g} k_2, \dots, \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g} k_{\varphi(n)}$$

számok (mod n) a

$$k_1, k_2, \dots, k_{\varphi(n)}$$

számoktól csak sorrendben különbözhetnek. Ennek következtében

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g}} - 1) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i} - 1);$$

és mivel

$$F_n(x) \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - r^{k_i}),$$

azért

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2 \dots p_g}} - 1) = (-1)^{\varphi(n)} F_n(1).$$

Ezt figyelembe véve az (1) kifejezés számlálójában és nevezőjében álló szorzatok tényezői ekként fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} \prod_{i=k}^{\varphi(n)} (r^{k_i m} - 1) &= (-1)^{\varphi(n)} F_n(1); \\ \prod_{i=1}^{\varphi(n)} [r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2}} - 1] &= (-1)^{\binom{\varphi(n)}{2}} [F_n(1)]^{\binom{\varphi(n)}{2}}; \\ \prod_{i=1}^{\varphi(n)} [r^{k_i \frac{m}{p_1 p_2 p_3}} - 1] &= (-1)^{\binom{\varphi(n)}{3}} [F_n(1)]^{\binom{\varphi(n)}{3}}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Az

$$F_{p^\beta}(x) = 0$$

egyenlet tetszésszerinti gyöke r lévén, összes gyökeit az

$$r^{k_1}, r^{k_2}, \dots, r^{k_i}, \dots, r^{k_{\varphi(p^\beta)}}$$

sorozat szolgáltatja, a melyben a

$$k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_{\varphi(p^\beta)}$$

kitevők a p^β modulusnak egyik reducált maradéksorát alkotják. A most megadott két egyenlet többtagújának resultansát ismét a

$$\begin{aligned} \text{Res. } [F_{p^\alpha}(x), F_{p^\beta}(x)] &= \prod_{i=1}^{\varphi(p^\beta)} F_{p^\alpha}(x)^{k_i} = \\ &= \prod_{i=1}^{\varphi(p^\beta)} (r^{k_i p^{\alpha-1}(p-1)} + r^{k_i p^{\alpha-1}(p-2)} + \dots + \\ &+ r^{k_i p^{\alpha-1}(p-g)} + \dots + r^{k_i p^{\alpha-1}} + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

egyenlet szolgáltatja. Nézzük meg közelebbről az utolsó szorzat i -dik tényezőjében a g -dik tagnak, az

$$r^{k_i p^{\alpha-1}(p-g)}$$

kifejezésnek, értékét. Mivel feltevésünk szerint $\alpha > \beta$, azért

$$\alpha - 1 - \beta \geq 0;$$

a minek következtében

$$r^{k_i p^{\alpha-1}(p-g)} = (r^{p^\beta})^{k_i p^{\alpha-1-\beta}(p-g)},$$

a hol

$$k_i p^{\alpha-1-\beta}$$

egész szám. Mivel továbbá

$$r^{p^\beta} = 1,$$

azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} r^{k_i p^{\alpha-1}(p-g)} &= 1 \\ (i=1, 2, \dots, \varphi(p^\beta); \quad g=1, 2, 3, \dots, p-1, p), \end{aligned}$$

azaz a (2) alatti szorzat i -dik tényezőjének minden tagja 1-gyel egyenlő, úgy hogy maga az i -dik tényező — mivel p számú tagja van — p -vel lesz egyenlő. De ebből már következik, hogy

$$\text{Res. } [F_{p^\alpha}(x), F_{p^\beta}(x)] = p^{\varphi(p^\beta)}.$$

Érdekes, bár kissé hosszadalmas, számítás segítségével számítható ki

$$\text{Res. } [F_m(x), F_n(x)]$$

abban az esetben is, a midőn m és n bármilyen összetett számok, a melyeknek 1-től különböző legnagyobb közös osztójuk van.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1818 február 18.-i meg nem tartott ülésére bejelentve, 1918. évi márczius hó 18.-i ülésén beterjesztve.)

D'ALEMBERT ELVÉNEK DYNAMIKAI ALKALMAZÁSA.

SUTÁK JÓZSEF-től.

Előszó.

A jelen dolgozatban a dinamika alapegyenleteit oly alakban írom fel, mely teljesen azonos a d'ALEMBERT elvében foglalt egyenletekkel.

D'ALEMBERT az A, B, C, \dots testekre ható a, b, c, \dots erők létesítette mozgás felderítésére a következő elvet állapítja meg: *«Décomposés les mouvemens a, b, c , etc. imprimés à chaque corps, chacun en deux autres $a, a; b, \beta; c, \gamma$; etc. qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens a, b, c , etc. ils eussent pu conserver ses mouvemens sans se nuire réciproquement; et que si on ne leur eût imprimé que les mouvemens a, β, γ , etc. le système fût demeuré en repos.»* (Betű szerint idézve.)¹

Szabályozza a P_1, \dots, P_n pontokban levő m_1, \dots, m_n tömegek mozgását t időben az

$$F_s (P_1, \dots, P_n; t) = 0 \quad (s = 1, \dots, l)$$

egyenletrendszer. Az adott egyenletrendszert kielégítő (P_1, \dots, P_n) pontcsoportok halmazát röviden rendszerünk t időbeli configura-

¹ D'ALEMBERT: *Traité de Dynamique* II. ed. Paris 1758. (I. ed. 1743) p. 73—75. ARTHUR KORN, D'ALEMBERT: *Abhandlung über Dynamik*. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 106. p. 57—58. 1899. E. I. ROUTH: *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Elementary Part. p. 52. 1882. A. VOSS: *Die Principien der rationellen Dynamik*. Encykl. d. Math. Wiss. Bd. IV. Teil. I. p. 77. 1901.

tiójának nevezzük. Ha ennek (P_1, \dots, P_n) pontjában, melyet ezután röviden (P) -nek nevezünk, a külső erővector

$$(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) = (\bar{p}),$$

a configuratio (P) pontbeli normalisai pedig párhuzamosak a

$$\left(\sum_{s=1}^l \lambda_s F_{s1}, \dots, \sum_{s=1}^l \lambda_s F_{sn} \right) = \left(\sum_{s=1}^l \lambda_s F_{si} \right) = (\bar{v})$$

vectorokkal, akkor ezekkel a fogalmakkal d'ALEMBERT elvét így fogalmazhatjuk meg:

Bontsuk a configuratio (P) pontjára ható (\bar{p}) erőt két componensre; az egyik legyen párhuzamos a configuratio (P) pontbeli érintő síkjával, a másik meg legyen erre merőleges; nevezzük az előbbit (\bar{e}) -nek, az utóbbit meg (\bar{n}) -nek; tehát

$$(\bar{p}) = (\bar{e}) + (\bar{n}).$$

D'ALEMBERT elve értelmében a (P) -ben fellépő gyorsulásnak megfelelő erővector

$$(mP^u) = (\bar{e}) = (\bar{p}) - (\bar{n}),$$

a hol a $-(\bar{n})$ -t a 3. §-ban (P) -ben fellépő belső erőnek neveztük és ez nyilvánvalóan ily alakú

$$-(\bar{n}) = \left(\sum_{s=1}^l \lambda_s F_{si} \right).$$

A 3. §. I. egyenletrendszeré tehát teljesen azonos a d'ALEMBERT-féle elvben határozottan kifejezésre jutott egyenletrendszerrel; azért neveztük azután ezt d'ALEMBERT-féle *egyenletrendszernek*.

A d'ALEMBERT-féle elv második része szerint (\bar{n}) nem vesz részt (P) sebességének megváltoztatásában, tehát az

$$(\bar{n}) = (\bar{p}) - (mP^u)$$

erő *elvezett erő*, mivel nem létesít gyorsulást.

Mivel (\bar{n}) merőleges a configuratio (P) pontbeli, fent jelzett érintő síkjára, tehát $(\bar{n} \cdot \delta P)$ nulla, azért

$$((\bar{p} - mP^u) \cdot \delta P) = 0.$$

A 3. §. II. alatt levő tételünk tehát d'ALEMBERT elvének második részét ebben az alakban mondja ki: *az elveszett erő merőleges a rendszer configuratiójára*. Ezt a tételt azután megkülönböztetésül az elsőtől a *virtualis munka tételének* neveztük.

Ha már most megállapodunk abban, hogy a configurációra merőleges erőrendszerről azt mondjuk, hogy erői egyensúlyban vannak, akkor az imént kimondott tételünket így is fogalmazhatjuk: *az elveszett erőcomponensek rendszere egyensúlyban van*.

A d'ALEMBERT-féle elv tehát logikai elv, mely azt az evidens tényt konstatálja, hogy *a rendszer configuratiójára normális irányban mozgást nem végezhet; ellenben az érintő síkjával párhuzamos minden erő a sebességváltozás létesítésében teljes mértékben érvényesül*.

A teljesség kedvéért, mivel ezt röviden tehettem, megállapítottam a LAGRANGE- és POISSON-féle transzformációval a d'ALEMBERT-féle egyenletekből lezármasztatható LAGRANGE-, BERTRAND- és HAMILTON-féle mozgásegyenleteket is, hogy így a nem-holonom rendszerekre való tarthatatlan voltukat nyilvánvalóvá tegyem s ezzel mintegy indokoljam, hogy az általános kutatásokból miért nem juttattam nekik is osztályrészt.

Mivel a rendszer mozgásának leírásához a belső erők tanulmányozása nem szükséges, azért rendszeresen a 3. §. II. alatt levő egyenletrendszert állítottam a kutatások élére, mint a mely a mozgásegyenleteket a fölösleges erővectoroktól megszabadítottan úgyszólván közvetlenül tárta elénk.

A teljesen szabad, egy, illetőleg két pontjában megtámasztott merev testek mozgásegyenletei kinematikai kutatásaimban bemutatott tételek felhasználásával a 3. §. II. rendszeréből — önként adódnak ki s a virtualis momentan-ellipsoid fogalmának bevezetésével, valamint a polhodos és herpolhodos fogalmainak az általánosításával kapcsolatban a MOZZI-féle felületekkel az általánosabb jellegű mozgásokba is be lehetett világítani.

A 6. és 7. fejezetben a merev testek egymáson való mozgásának a problémája teljes elintézését nyert.

A 8. és 9. fejezet a gömb gördülési problémáját oldja meg.

A 10. fejezetben az él mentén való gördülés általános problémáját oldottam meg.

A bemutatott specialis esetekben a gördülési görbék egyenleteit is mindenütt megállapítottam.

A nem-merev rendszerekre való alkalmazást ARWOOD gépe mozgásegyenletének megállapításával szemléltettem.

A D'ALEMBERT-féle logikai elvnek a kinematikai kutatások eredményeivel való összekapcsolásából származó módszerünk nemcsak logikai homályosságoktól tisztította meg az egyes problémákba való betekintést, hanem megmutatta mindig azt a legrövidebb utat is, mely elvezet problémánknak az általános harmoniában elfoglalt helyéhez.

A leírtam eljárás irodalmi helyét és értékét legjobban megítélhetjük az újabb irodalom hasonló szellemű kutatásai alapján. Ilyenek: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO: *Elementi di calcolo vettoriale*. Bologna, 1909, p. 120. MARCOLONGO: *Theoretische Mechanik*. II. Bd. Teubner, 1912. PERRIN: *Vector Analysis*. New-York, 1912, p. 194.

Tulajdonképpen tárgyalásaim előtt az első két §-ban néhány oly matematikai fejtegetést bocsátottam előre, melyekre a későbbi dinamikai tárgyalásokban szükségem van.

1. A skaláris pontfüggvény differenciálhányadosa.

Legyen $F(P)$ valamely T tartomány pontjainak skaláris függvénye és O ugyanennek a tartománynak valamely pontja; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ pedig három tetszőszerinti nem egysíkú vector, akkor, az $\bar{e}_i \cdot (P-O)$ szorzatot röviden x_i -vel jelölve,

$$F(P) = \Phi(O, x_1, x_2, x_3),$$

következőleg:

$$F(P+dP) - F(P) = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{d\Phi}{dx_i} \bar{e}_i \right) \cdot dP. \quad (A)$$

A dP szorzóját $F(P)$ függvény P szerint vett differenciálhányadosá-

nak nevezzük s $\frac{dF}{dP}$ -vel, vagy a hol kétértelműség nem forog fenn, F' -sel jelöljük.¹

F' független a vonatkozási rendszertől, $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ -tól; mert hiszen, ha P pontban még egy differenciálhányados volna F'_1 , akkor minden P -ből a tartományba mutató dP -re nézve:

$$(F' - F'_1) \cdot dP = 0$$

lenne, a mi éppen F'' és F'_1 egyenlőségét mondja ki. Azonban analitikailag is könnyű igazolni, hogy egy más $(O_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ vonatkozási rendszerben képezett F'_1 egyenlő a fönnebbi F' -sel.

F' -t (A) értelmében a differenciálszámítás ismert szabályai szerint kell képezni.

1. példa. Ha $F' = r = |P - O| = \sqrt{(P - O)^2}$, akkor

$$r' = \frac{P - O}{r}.$$

2. példa. Ha $\varphi = (P - O, \bar{e}) = \arccos \frac{\bar{e} \cdot (P - O)}{r}$, akkor

$$\varphi' = \frac{[\bar{e} \cdot (P - O)] (P - O) - r^2 \bar{e}}{r^3 \sin \varphi} = \frac{r' \cos \varphi - \bar{e}}{r \sin \varphi}.$$

3. példa. Ha $2T = \sum_i m_i [Q' + (P - Q) \times (P_i - Q)]^2$, akkor

$$\frac{dT}{dP} = \sum_i m_i (P_i - Q) \times [Q' + (P - Q) \times (P_i - Q)].$$

2. Az Euler-féle szögek.

Legyenek a mozdulatlan térhez és a mozgó merev rendszerhez kötött derékszögű jobbraforgó triéderek rendre: i_0, j_0, k_0 és i, j, k . A két rendszer között levő kapcsolatot szemléltesse a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} i &= \alpha_1 i_0 + \beta_1 j_0 + \gamma_1 k_0, \\ j &= \alpha_2 i_0 + \beta_2 j_0 + \gamma_2 k_0, \\ k &= \alpha_3 i_0 + \beta_3 j_0 + \gamma_3 k_0. \end{aligned} \tag{B}$$

¹ F' -et a vectorelméletben *gradiens*-nek nevezik s *grad F*-fel jelölik.

A $k_0 \times k$ vector párhuzamos az (i_0, j_0) és (i, k) síkok metszészonalával.

Mivel az (i_0, j_0) síkban $k_0 \times k$ a mozgó vector, a k körül önmagában forgó (i, j) síkban pedig i, j a változó s $k_0 \times k$ a fix vector, azért az előbbi síkban i_0 -tól számítjuk a pozitív forgást és pedig abba az irányba, mely k_0 -val jobbra forgó rendszert alkot, az utóbbiban pedig $k_0 \times k$ -tól oly irányba, mely k -val alkot jobbraforgó rendszert. Legyen ezek után

$$(k_0, k) = \theta, (i_0, k_0 \times k) = \psi, (k_0 \times k, i) = \varphi. \quad (C)$$

Ezekkel az egyenletekkel definiált szögeket EULER-féle szögeknek nevezzük.

Ha már most megfontoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= k \cdot k_0, & 1. \\ \gamma_1, \gamma_2 &= (i, j) \cdot k_0 = (-j, i) \cdot (k_0 \times k), & 2. \\ \alpha_3, \beta_3 &= (i_0, j_0) \cdot k = (j_0, -i_0) \cdot (k_0 \times k); & 3. \end{aligned}$$

továbbá, hogy α_1, β_1 -et a

$$k \cdot i = 0, (k \times i) \cdot k_0 = \gamma_3, \quad 4.$$

az α_2, β_2 -t pedig a

$$j \cdot k = 0, (j \times k) \cdot k_0 = \gamma_1 \quad 5.$$

relációk kötik össze, akkor az 1., 2. és 3. alatt levő symboloknak az EULER-féle szögekkel való kifejezése, valamint a 4. és 5. alatt levő egyenleteknek α_1, β_1 , illetőleg α_2, β_2 -re való megoldása után az iránycosinusok az EULER-féle szögek következő függvényeiként jelennek meg:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \cos \theta; \\ \gamma_1, \gamma_2 &= (\sin \varphi, \cos \varphi) \sin \theta; \\ \alpha_3, \beta_3 &= (\sin \psi, -\cos \psi) \sin \theta; \\ \alpha_1 &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, & (D) \\ \beta_1 &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta; \\ \alpha_2 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \beta_2 &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta. \end{aligned}$$

Ha a mozgó merev rendszerünk momentán forgási tengelyének, $\bar{\omega}$ -nak, az i, j, k -ra vonatkoztatott koordinátái p, q, r , akkor

tekintettel ezeknek a mennyiségeknek a definitiójára,¹ az elemi számítások eredménye a következő egyenletekben fog megjelenni:

$$\begin{aligned} p &= \sin \varphi \sin \theta \psi' + \cos \varphi \theta', \\ q &= \cos \varphi \sin \theta \psi' - \sin \varphi \theta', \\ r &= \cos \theta \psi' + \varphi'. \end{aligned} \quad (E)$$

Mivel a (B) alapján:

$$pi + qj + rk = p_0 i_0 + q_0 j_0 + r_0 k_0,$$

azért a számításoknak a (D) alatt levő relációknak figyelembe vételével való végrehajtása $\bar{\omega}$ -nak az i_0, j_0, k_0 -ra vonatkozó koordinatái számára a következő értékeket szolgáltatja:

$$\begin{aligned} p_0 &= \sin \psi \sin \theta \varphi' + \cos \psi \theta', \\ q_0 &= -\cos \psi \sin \theta \varphi' + \sin \psi \theta', \\ r_0 &= \cos \theta \varphi' + \psi'. \end{aligned} \quad (F)$$

Fejtegetéseinkkel kapcsolatban megemlítjük még a következő mozgó vonatkozási rendszert:

$$k_1 = k, \quad i_1 = \frac{k_0 \times k}{\sin \theta}, \quad j_1 = k_1 \times i_1 = \frac{k_0 - \cos \theta k}{\sin \theta}; \quad (G)$$

φ definitiója alapján tehát:

$$\begin{aligned} i &= \cos \varphi i_1 + \sin \varphi j_1, \\ j &= -\sin \varphi i_1 + \cos \varphi j_1. \end{aligned} \quad (H)$$

Ha $\bar{\omega}$ -nak az i_1, j_1, k_1 -re vonatkozó koordinatáit p_1, q_1, r_1 -gyel jelöljük, akkor a

$$p_1 i_1 + q_1 j_1 + r_1 k_1 = pi + qj + rk$$

kapcsolatnál fogva:

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta', \\ q_1 &= \sin \theta \psi', \\ r_1 &= \cos \theta \psi' + \varphi'. \end{aligned} \quad (I)$$

¹ SUTÁK. Math. és Term. Értesítő XXXIV. k. 695. l. 1916.

Nevezzük az i_1, j_1, k_1 triéder mozgását jellemző momentán forgási tengelyt \bar{Q} -nak és legyen ,

$$\bar{Q} = \pi i_1 + x j_1 + \varrho k_1,$$

akkor k_1 definitiója és a (H) alatt levő formulák segítségével könnyen megállapítható, hogy

$$\begin{aligned} \pi &= -k'_1 \cdot j_1 = p_1, \\ x &= k'_1 \cdot i_1 = q_1, \\ \varrho &= i'_1 \cdot j_1 = r_1 - \varphi'. \end{aligned} \quad (K)$$

3. Holonom-rendszerek.

Ha a P_1, \dots, P_n pontokban levő m_1, \dots, m_n tömegek mozgását t időben az

$$F_s(P_1, \dots, P_n; t) = 0, \quad (s = 1, \dots, l) \quad (1)$$

vagy evvel æquivalens egyenletrendszer szabályozza, akkor rendszerünket *holonom*-rendszernek nevezzük.¹

Ha $P_1 + \delta P_1, \dots, P_n + \delta P_n$ pontok kielégítik az 1. alatt levő egyenletrendszert, akkor $\delta P_1, \dots, \delta P_n$ -t a rendszer *virtualis eltolódásainak* nevezzük.

F_s -nek P_i szerint vett differentiálhányadosát F_{si} -vel jelölve, az imént mondottak a következő egyenletrendszerben foglaltak össze:

$$\sum_{i=1}^n F_{si} \delta P_i = 0. \quad (s = 1, \dots, l) \quad (2)$$

A holonom-rendszert definiáló egyenletrendszer s -edike ugyanis a $F_s = 0$ dinamikailag úgy értelmezhető, hogy annak következtében a P_i pontokban oly $\lambda_s F_{si}$ erővectorok lépnek fel, melyeknek a virtualis eltolódásokmenti összes munkája (2) értelmében nulla.

Már most, ha P_i -nek t szerint vett második differentiálhányadosát P_i'' -sel jelöljük, az $m_i P_i''$ vectort az m_i tömeg *tehetetlenségi*

¹ HERTZ: Gesammelte Werke. Bd. III. Die Principien der Mechanik, p. 9., p. 95. 1. Ausg. 1894; II. Ausg. 1910.

erővectorának —, P_i -ben fellépő $\lambda_s F_{si}$ vectorokat *belső erővectoroknak* — s az ugyanott fellépő más, mondjuk \bar{p}_i -vel jelölt erővectort *külső erővectornak* nevezzük, akkor d'ALEMBERT elve, mely szerint: a P_i pontban fellépő tehetetlenségi erővector egyenlő az ugyanabban a pontban fellépő külső és belső erők összegével,¹ analitikailag így fogalmazható:

$$m_i P_i'' = \bar{p}_i + \sum_{s=1}^l \lambda_s F_{si}; \quad (I)$$

(s=1, ..., n).

Az (I) alatt levő egyenletrendszer a mozgás d'ALEMBERT-féle egyenleteinek nevezzük, jöllehet a d'ALEMBERT-féle elvnek ez az analitikai alakja először LAGRANGE-nál jelenik meg² és JACOBI kezdeményezésére³ ezt az egyenletrendszert a *mozgás elsőfajú LAGRANGE-féle egyenleteinek* is nevezik.

Az (I) és (2) alapján evidens, hogy

$$\sum_{i=1}^n (m_i P_i'' - \bar{p}_i) \cdot \delta P_i = 0. \quad (II)$$

Ezt a tételt, mely szerint: a *tehetetlenségi erővectorok virtualis munkája egyenlő a külső erővectorok virtualis munkájával, a virtualis munka tételének* nevezzük.

Az (1) alapján mindig meghatározható r számú, egymástól független parameter x_1, \dots, x_r úgy, hogy

$$P_i = P_i(x_1, \dots, x_r; t) \quad (3)$$

legyen. Ha tehát P_i -nek x_k szerint vett differentialhányadosát P_{ik} -val jelöljük, x_k -nak t szerint vett differentialhányadosát pedig \dot{x}_k -val, akkor

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^r P_{ik} \delta x_k;$$

$$P_i = \sum_{k=1}^r P_{ik} \dot{x}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}. \quad (4)$$

¹ J. d'ALEMBERT: *Traité de Dynamique* 1743.

² LAGRANGE: *Mécanique analytique*, (d'après la 3. ed. de 1853). *Oeuvres*. t. 11. p. 79. p. 267.

³ JACOBI: *Vorlesungsheft vom Winter 1847/48. Vorlesungen über Dynamik* Berlin, 1866.

Ezeknek az egyenleteknek az elsejéből és a (II)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^n m_i P_i' \cdot P_{ik} = \sum_{i=1}^n P_{ik} \cdot \bar{p}_i; \quad (k=1, \dots, r) \quad (5)$$

a másodikából pedig, hogy P_i' oly függvénye az $x_1, \dots, x_r; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r; t$ -nek, melyre nézve:

$$\frac{dP_i'}{d\dot{x}_k} = P_{ik}, \quad \frac{dP_{ik}}{dt} = \frac{dP_i'}{dx_k}. \quad (6)$$

Ha már most az (5) jobboldalán levő összeget a $\sum_{i=1}^n p_i$ erőnek az x_k -ra vonatkozó koordinatájának nevezzük és X_k -val jelöljük, akkor a *kinetikus energiának* nevezett

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i P_i'^2$$

összeg felhasználásával (5) alatt levő egyenletrendszerünket a (6)-nak különös figyelembe vételével

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{x}_k} \right) - \frac{dT}{dx_k} = X_k \quad (k=1, \dots, r) \quad (III)$$

alakban is írhatjuk. Ezt az egyenletrendszert a mozgás *LAGRANGE-féle egyenleteinek* nevezzük.¹

Ha POISSON-nal²

$$\frac{dT}{d\dot{x}_k} = u_k \quad (k=1, \dots, r) \quad (7)$$

egyenletekkel $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r$ helyett u_1, \dots, u_r -et vezetjük be változóul, akkor könnyű belátni, hogy

$$\theta = \sum u_k \dot{x}_k - T \quad (8)$$

oly függvénye $u_1, \dots, u_k; x_1, \dots, x_k; t$ -nek, melyre nézve:

$$\frac{d\theta}{du_s} = \dot{x}_s, \quad \frac{d\theta}{dx_s} = -\frac{dT}{dx_s}. \quad (9)$$

¹ LAGRANGE: Mécanique analytique (d'après la 3. éd. de 1853), Oeuvres t. 11. p. 325—336.

² POISSON: Journal de l'École Polytechnique t. VIII. cahier 15. p. 272. 1809.

Ennélfogva az új változók bevezetése után a (III) alatt levő egyenletrendszer a következővel helyettesíthető:

$$\dot{x}_k = \frac{d\theta}{du_k}, \quad \dot{u}_k = X_k - \frac{d\theta}{dx_k}. \quad (k=1, \dots, r) \quad (\text{IV})$$

Ezeket az egyenleteket a mozgás BERTRAND-féle egyenleteinek nevezzük.¹

Ha a rendszerünkre ható külső erők munkája független attól, hogy rendszerünk mily úton jut az $O (P_{10}, \dots, P_{n0})$ kezdő helyzetből a $P (P_1, \dots, P_n)$ helyzetbe, akkor a

$$- \int_0^P \sum_{i=1}^n \bar{p}_i dP_i = II (P_1, \dots, P_n) \quad (10)$$

pontfüggvény P_1, \dots, P_n egyértékű függvénye. Ezt a rendszer *potenciális energiájának* nevezzük, a rendszert pedig *conservatívnek* mondjuk.²

Mivel X_k definitiója s a (4) második egyenlete alapján

$$\sum_{i=1}^n \bar{p}_i dP_i = \sum_{k=1}^r X_k dx_k + \sum_{i=1}^r \bar{p}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} dt,$$

azért a (10) alapján

$$\begin{aligned} \frac{dII}{dx_k} &= - X_k, & (k=1, \dots, r) \\ \frac{\partial II}{\partial t} &= - \sum \bar{p}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ha már most a $\theta + II$ függvényt H -nak nevezzük, akkor a conservatív rendszer számára a (IV) alatt levő egyenletek a következő alakban jelennek meg:

$$\dot{x}_k = \frac{dH}{du_k}, \quad \dot{u}_k = - \frac{dH}{dx_k}. \quad (k=1, \dots, r) \quad (\text{V})$$

Ezt az egyenletrendszert a conservatív rendszer HAMILTON-féle mozgásegyenleteinek nevezzük.³

¹ BERTRAND: Lagrange Oeuvres t. 11. Note VI. p. 473. 1853.

² HERTZ: Gesam. Werke. Bd. III. p. 255., p. 285.

³ HAMILTON: Second Essay on a General Method in Dynamics. Philos. Transactions 1835. part. 1., p. 35.

4. Nem-holonóm rendszerek.

Ha a t időben rendszerünk virtualis eltolódásait a

$$\sum_{i=1}^n F_{si} \cdot \delta P_i = 0 \quad (s=1, \dots, l) \quad (2')$$

nem integrabilis differentiale-rendszerek szabályozzák, akkor rendszerünket *nem-holonóm* rendszernek nevezzük.

Jóllehet már LAGRANGE¹ kutatásaiban is találkozunk nem-holonóm rendszerrel, mindazonáltal ez a fogalom először A. VOSS² fejtegetéseiben lép fel.

Az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonlóan kimutatható, hogy az I. és II. alatt levő mozgási egyenletek a jelen esetben is érvényesek.

Ismeretes eljárással³ a (2') rendszer segítségével mindig meghatározhatunk r parametert x_1, \dots, x_r -et úgy, hogy

$$P_i = P_i(x_1, \dots, x_r; t) \quad (3')$$

legyen, $\delta x_1, \dots, \delta x_r$ között pedig a következő, tovább már nem reducálható differentiale-rendszer létezzék:

$$\delta x_s = \sum_{k=1}^{\nu} a_{sk} \delta x_k \quad (s=\nu+1, \dots, r) \quad (12)$$

Mivel dt idő múlva a_{sk} -ból a $a_{sk} + a'_{sk} dt$ lesz, azért a másodrendű kicsinyek elhanyagolásával a (12) a valóságos eltolódásokra is érvényes, miért is a (3')-ből a (12) felhasználásával

$$\begin{aligned} \delta P_i &= \sum_{k=1}^{\nu} Q_{ik} \delta x_k, \\ P'_i &= \sum_{k=1}^{\nu} Q_{ik} \dot{x}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4')$$

hol

$$Q_{ik} = P_{ik} + \sum_{s=\nu+1}^r a_{sk} P_{is}. \quad (13)$$

¹ LAGRANGE: Mécanique Analytique 3. éd. 1853. t. I. p. 77.

² VOSS: Über die Differentialgleichungen der Mechanik. Math. Ann. Bd. 25. p. 258. 1885.

³ SUTÁK: A differentialegyenletek elmélete p. 151—157. 1906.

Ha már most Q_{ik} -nak x_j szerint vett differentialhányadosát Q_{ikj} -vel jelöljük, akkor az

$$R_{ik} = \frac{dQ_{ik}}{dt} - \frac{dP'_i}{dx_k} \quad (14)$$

jelölés alkalmazásával

$$R_{ik} = \Sigma (Q_{ikj} \dot{x}_j - Q_{ijk} + \sum_{s=\nu+1}^r a_{sj} Q_{iks}) \dot{x}_j + \frac{\partial (Q_{ik} - P_{ik})}{\partial t}. \quad (15)$$

Mivel a (II) és a (4') alapján a jelen esetben

$$\Sigma m_i P''_i \cdot Q_{ik} = \Sigma Q_{ik} \cdot \bar{p}_i = X_k, \quad (k=1, \dots, \nu) \quad (5')$$

a (6)-nak megfelelő egyenletek pedig a (4') másodika és a (14) alapján:

$$\frac{dP'_i}{d\dot{x}_k} = Q_{ik}, \quad \frac{dQ_{ik}}{dt} = \frac{dP'_i}{dx_k} + R_{ik}, \quad (6')$$

azért a LAGRANGE-féle egyenleteknek megfelelő egyenletek a jelen esetben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{x}_k} \right) - \frac{dT}{dx_k} - \sum_{i=1}^n m_i R_{ik} \cdot P'_i = X_k. \quad (III')$$

($k = 1, \dots, \nu$)

Ezek az egyenletek tehát csak akkor és csakis akkor egyeznek meg a LAGRANGE-féle egyenletekkel, ha a baloldalon levő summa $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_\nu$ -re azonosan eltűnik.

A nem-holonóm rendszerek mozgásegyenleteinek megállapítására már ROUTH¹ adott egy módszert, jöllehet nála még nem lép fel a nem-holonóm rendszer fogalma; ugyanezt a módszert alkalmazza később VIERKANDT,² ugyanezt bemutatja APPEL³ is. Ez a módszer lényegében azonos azzal, melyet már LAGRANGE⁴ konstruált. Hogy a nem-holonóm rendszerekre a LAGRANGE-féle

¹ ROUTH: Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part I. p. 325. 1882. Part II. p. 132. 1884.

² VIERKANDT: Monatshefte f. Math. u. Phys. III. Jahrgang p. 31., 98. 1892.

³ APPEL: Traité de Mécanique Rationelle t. II. 3. ed. p. 373. 1911.

⁴ LAGRANGE: Oeuvres t. 11. p. 336.

egyenletek nem érvényesek, APPELL¹ mutatta ki először egy specialis esetre.

Könnyű ezek után még kimutatni, hogy a nem-holonom rendszerre a BERTRAND-féle egyenletek sem érvényesek, tehát a conservatív nem-holonom rendszer esetében HAMILTON-féle egyenletekről sem beszélhetünk.

A (4') második egyenlete alapján nyilvánvaló, hogy

$$\frac{dP_i''}{d\dot{x}_k} = Q_{ik}.$$

Ha tehát KÖNIG-gel és SAINT-GERMAIN²-nel a

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i P_i''^2 \quad (16)$$

összeget *gyorsulási energiának* nevezzük és az (5') segítségével mozgási egyenletrendszerünkbe bevezetjük, akkor az

$$\frac{dG}{d\dot{x}_k} = X_k \quad (k=1, \dots, \nu) \quad (VI)$$

alakban jelenik meg; ezt a rendszert nevezzük a mozgás GIBBS-APPELL-féle³ egyenleteinek.

Mivel a rendszerek mozgásainak a leírásához a belső erők ismerete nem szükséges, azért a különböző problémák megoldásához a feltételi egyenletek szigorú megállapítása után legegyszerűbb a virtualis munka tételéből kiindulva állapítani meg a mozgási egyenleteket. A módszer jeleztük egységességéhez való ragaszkodás aztán az elért eredményeknek a logika alapelveivel való harmoniáját eredményezte.

¹ APPELL: Les mouvements de roulement en dynamique, Scientia 1899.

² KÖNIG: M. T. Ak. Értekezések a Math. köréből. XIV. k. 1. sz. 10. l. FRÖHLICH: Dynamika 173. l. 1896. SAINT-GERMAIN: Compt. Rend. t. 130. p. 1177. 1900.

³ GIBBS: On the Fundamental Formulae of Dynamics, American Journ. of. Math. vol. 2. p. 49. 1875. Scientific Papers. vol. 2. p. 1. APPELL: Compt. Rend. t. 129. p. 217. 459. 1899. Journ. f. Math. Bd. 121. S. 310. 1899. Bd. 122. S. 205. 1900. Journ. de Math. 5. ser. t. VI. p. 5. 1900. Traité de Mécanique Rationelle t. II. 3. ed. p. 383. 1911.

5. A merev testek mozgásegyenletei.

a) Ha a merev test Q pontjának virtualis kimozdulása δQ és

$$\delta \bar{\omega} = \delta p_i + \delta q_j + \delta r_k,$$

akkor a szabadon mozgó test P_i pontjának virtuális kimozdulása¹

$$\delta P_i = \delta Q + \delta \bar{\omega} \times (P_i - Q). \quad (17)$$

Ha tehát a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \Sigma p_i &= \bar{p}, \quad \Sigma m_i P_i' = \bar{I}; \\ \Sigma m_i (P_i - Q) \times P_i' &= \bar{M}_i, \quad \Sigma (P_i - Q) \times \bar{p}_i = \bar{M}_e \end{aligned} \quad (18)$$

hol \bar{p} -t a testre ható *külső erőnek*, \bar{I} -t *impulsusnak*, \bar{M}_i -t és \bar{M}_e -t pedig rendre az *impulsus*, illetőleg a *külső erő momentum-tengelyének* nevezzük, akkor, ha δP_i értékét a 3. §. II. egyenletébe behelyettesítjük s aztán megfontoljuk, hogy a nyert egyenlet csak úgy állhat meg, ha δQ és $\delta \bar{\omega}$ együtthatója nulla, a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}}{dt} &= \bar{p}, \\ \frac{d\bar{M}_i}{dt} + Q' \times \bar{I} &= \bar{M}_e. \end{aligned} \quad (VII)$$

Ezek a *szabadon mozgó testek mozgásegyenletei*.

Mivel a (17) a valóságos elmozdulásokra is érvényes, a kinetikai energia definiíciójából és a 3. §. II. egyenletéből rögtön következik, hogy

$$\frac{dT}{dt} = Q' \cdot \bar{p} + \bar{M}_e \cdot \bar{\omega}. \quad (19)$$

Továbbá

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i [Q' + \bar{\omega} \times (P_i - Q)]^2. \quad (20)$$

Ha a $Q + \bar{\omega}$ pontot P -nek nevezzük s az

$$F(P) = \frac{1}{2} \Sigma m_i [Q' + (P - Q) \times (P_i - Q)]^2 - T = 0 \quad (I)$$

¹ SURTAK: Math. és Term. Ért. XXXV. k. 696. l. 1916.

egyenletben P pontot változónak tekintjük, akkor ez, mivel t időben T konstans s a négyzetes tagok pozitív definit alakot alkotnak, egy ellipsoid egyenlete, melyet *momentán virtualis ellipsoidnak* nevezünk. Ennek nomálsa a P pontban

$$\bar{v} = F' : |F'|.$$

Ha már most P egybeesik a valóságos kimozdulásnak megfelelő $Q + \bar{\omega}$ ponttal, akkor az 1. §. 3. példája értelmében

$$\bar{v} = \bar{M}_i : |\bar{M}_i|.$$

Ennélfogva a $Q + \bar{\omega}$ pontban a momentán virtualis ellipsoidhoz vont érintősíknak Q -tól való távolsága:

$$d = \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{\omega}}{|\bar{M}_i|}. \quad (21)$$

Ha T -nek (20) alatt levő kifejezésében a négyzet egyik tényezőjét P'_i -sel helyettesítjük, akkor a (18)-ra való tekintettel

$$2T = \bar{I} \cdot Q + \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}, \quad (20')$$

minek következtében

$$d = \frac{2T - \bar{I} \cdot Q}{|\bar{M}_i|}. \quad (21')$$

Ha vonatkozási pontul Q helyett a test *tömegközéppontját* C -t választjuk, melyet a következő egyenlet definiál:

$$\Sigma m_i (P_i - C) = m (C - Q), \quad m = \Sigma m_i, \quad (22)$$

akkor

$$P'_i = C' + \bar{\omega} \times (P_i - C), \quad (17')$$

$$\Sigma m_i (P_i - C) = 0. \quad (23)$$

$$\bar{I} = m(C'), \quad \bar{M}_i = \frac{dT}{d\bar{\omega}} = \Sigma m_i (P_i - C) \times [\bar{\omega} \times (P_i - C)]. \quad (18')$$

\bar{M}_e értéke pedig megegyezik a (18) alatt levővel, ha abban Q helyett C -t írunk. Mozgási egyenleteink pedig következőképpen egyszerűsödnek:

$$mC'' = \bar{p}, \quad \frac{d\bar{M}_i}{dt} = \bar{M}_e, \quad (VII')$$

A (20') alapján pedig

$$2T = mC''^2 + \Sigma m_i [\bar{\omega} \times (P_i - C)]^2. \quad (20'')$$

b) Ha a rendszerünk egyik pontja Q , melyet azután vonatkozási pontul választunk, nyugalomban marad, akkor a (17)-ben ∂Q nulla, következésképp a 3. §. II. alatt levő egyenlete a jelen esetben a következő mozgási egyenlethez vezet:

$$\frac{d\bar{M}_i}{dt} = \bar{M}_e. \quad (VII'')$$

A (19), (20') és (21') alapján pedig:

$$\frac{dT}{dt} = \bar{M}_e \cdot \bar{\omega}, \quad (19')$$

$$2T = \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}, \quad (20'')$$

$$d = \frac{2T}{|\bar{M}_i|}. \quad (21'')$$

A *momentán virtualis ellipsoidok* (L) a jelen esetben *concentricus hasonló és hasonló fekvésű ellipsoidok* lesznek.

A merev rendszerhez kötött fix (Q, i, j, k) vonatkozási rendszerben

$$P = Q + \bar{\omega}$$

a merev rendszerhez kötött Mozzi-féle kúpnak egy görbéje, melyet *polhodosnak* nevezünk; a *polhodos tehát minden momentán ellipsoidot egy oly pontban metsz, melyben a normalis \bar{M}_i -vel párhuzamos, az érintősíknak pedig a centrumtól, Q -tól való távolsága éppen a (21'') alatt levő d .*

A polhodosnak a (Q, i, j, k) rendszerre vonatkoztatott parameteres egyenletei azonosak a 2. §. E) alatt levő egyenleteivel.

A fix térhez kötött Mozzi-féle kúpon levő (1. 2. §. F))

$$P_0 = Q + p_0 i_0 + q_0 j_0 + r_0 k_0$$

görbét *herpolhodosnak* nevezzük.

A test tehát Q pontja körül úgy mozog, hogy a hozzákötött Mozzi-féle kúp a tér fix Mozzi-féle kúpján végig gördül, miközben a polhodos és a herpolhodos mindig oly pontban

érintkeznek egymással, a melyhez tartozó momentán virtualis ellipsoid azon pontbeli normalisa \bar{M}_i -vel párhuzamos s érintősíkjának távolsága Q -tól d .

Abban a különös esetben, melyben M_e nulla, \bar{M}_i és T , ezekkel együtt tehát d is konstans; ennél fogva: az összes momentan virtualis ellipsoidok mind egybeesnek egy testhez kötött fix ellipsoiddal, melyen aztán rajta lesz a polhodos is, melyet éppen a testhez kötött Mozzi-féle kúp metsz ki belőle; s mivel mozgás közben a polhodos a herpolhodos mindig oly pontban érinti, mely pontban a virtualis ellipsoidhoz vont érintősíknak a normalisa s a centrumtól Q -tól való távolsága konstans, azért a herpolhodos benne van ebben a fix síkban, melyet a testtel merev rendszert alkotó virtualis ellipsoid aztán a test mozgása alkalmával éppen a herpolhodos mentén érint. A mozgásnak ezt a képét először POINSON látta meg.¹

Ebben a specialis esetben az $\bar{\omega}$ coordinatái is könnyen meghatározhatók. Ugyanis a (VII'') egyenletnek már két integrálját ismerjük, a mennyiben T és M_i constans. Még egy integral megadja az $\bar{\omega}$ coordinatáinak meghatározásához szükséges relatiókat. Ezt az integrált így határozzuk meg: Ha virtualis ellipsoidunk főtengelyeit választjuk vonatkozási rendszerül, akkor

$$2T = a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + a_{33}r^2.$$

Az 1. §-ban adott differentiálási szabály értelmében a (18' második egyenlete alapján

$$M_i = a_{11}pi + a_{22}qj + a_{33}rk.$$

Ennél fogva a (VII'') alatt levő mozgásegyenlet:

$$M'_i = \Sigma a_{11}p'i + \bar{\omega} \times \bar{M}_i = 0.$$

Ha ezt az egyenletet skalarisan megszorozzuk a

$$\frac{p}{a_{11}}i + \frac{q}{a_{22}}j + \frac{r}{a_{33}}k$$

¹ POINSON: Théorie nouvelle de la rotation. Paris, 1834. Liouville, Journ. de Math. pures et appliquées (1) t. 16. p. 79. 1851.

vectorral, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}^2}{dt} = \left(\frac{a_{22} - a_{33}}{a_{11}} + \frac{a_{33} - a_{11}}{a_{22}} + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}} \right) pqr;$$

ha ebből és a

$$2T = \Sigma a_{11} p^2, \quad M_i^2 = \Sigma a_{11}^2 p^2, \quad \omega^2 = \Sigma p^2$$

egyenletekből p , q , r -t kiküszöböljük, a következő relatiohoz jutunk:

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}^2}{dt} = \sqrt{(\lambda_1 - \bar{\omega}^2)(\lambda_2 - \bar{\omega}^2)(\lambda_3 - \bar{\omega}^2)},$$

mely már a keresett integrált szolgáltatja; p , q , r ismerete pedig a 2. §. *E*) alatt levő egyenletei alapján meghatározza az EULER-féle szögeket is. Az idevonatkozó egyéb vizsgálatokra nézve csak az APPELL és MARCOLONGO közölte irodalmi útmutatásokra hivatkozom.¹ A problema vectorelméleti megoldására nézve pedig COFFIN-t említem meg.²

c) Ha rendszerünknek két pontja marad állandóan nyugalomban, akkor a 2. §. vonatkozási rendszerét így állapítjuk meg: A tömeg-középpontból C -ből a fix pontokon átmenő fix egyenesre vont merőleges talppontját választjuk Q pontul, j legyen párhuzamos fix egyenesünkkel, k pedig legyen $C-Q$ -val egyirányú.

Mivel mozgás közben j nem változik, azért legyen $j_0 = j$, k_0 pedig a lefelé irányított verticalis. Mivel ily módon k állandóan a (k_0, i_0) síkjában van, azért a $(k_0, k) = \theta$ szöget vegyük pozitívnak, ha a k_0 -tól k -ig terjedő forgás megegyezik a síkhoz tartozó pozitív forgási iránynyal, ellenben pedig negatívnak; ebből aztán következik, hogy a mozgás egész tartama alatt:

$$\frac{k_0 \times k}{\sin \theta} = j = j_0.$$

Ennélfogva a 2. §. (*C*) és (*E*) egyenletei alapján

$$\psi = 90^\circ, \quad \varphi = -90^\circ; \quad p = r = 0, \quad q = \theta'.$$

¹ MARCOLONGO: Theoretische Mechanik 1911. 1. Bd. p. 175—182.
APPELL: Traité de Mécanique Rationnelle. 1911. t. II. p. 176—193.

² COFFIN: Vector Analysis p. 200. second ed. New-York, 1912.

Következésképp:

$$\delta P_i = \delta \theta j \times (P_i - Q).$$

tehát a 3. §. II. alapján a jelen esetben mozgásegyenletünk

$$j \cdot \frac{d\bar{M}_i}{dt} = j \cdot \bar{M}_e. \quad (\text{VII}''')$$

Ha már most testünknek fixegyenesére vonatkozó gyratio sugarát λ -val jelöljük, akkor

$$2T - m\lambda^2 q^2,$$

tehát

$$\bar{M}_i = m\lambda^2 qj.$$

Ha testünkre csak a nehézségerő hat, tehát p_i $m \cdot g k_0$ -al egyenlő, akkor a (18) és (22) alapján

$$\bar{M}_e = mg(C - Q) \times k_0.$$

Mivel a definitio alapján

$$C - Q = lk,$$

azért tekintettel $k_0 \times k$ föntebbi értékére

$$\bar{M}_e = -mlg \sin \theta j.$$

Mozgásegyenletünk tehát a (VII''') alapján

$$\theta'' = -\frac{lg}{\lambda^2} \sin \theta.$$

Ezzel kitűzött célunkat elértük. A tárgyalás további folyamára érdemleges útbaigazítást ad APPELL.¹

6. A merev testek egymáson való mozgásának természetes egyenletei.

K test mozogjon K_0 -on. A mozgás történéjék $P(s)$, illetőleg $P_0(s)$ görbék mentén. t időben legyen az érintkezési pont Q ,

¹ APPELL: *Traité de Mécanique Rationelle* t. II. p. 86—93. 3. ed. 1911.

illetőleg Q_0 ; ha ezekben a pontokban a mozgási görbékhez tartozó érintők \bar{e}_s, \bar{e}_{s_0} , a felületi normálisok pedig \bar{v}, \bar{v}_0 , akkor

$$(Q, \bar{e}_s, \bar{v}) = (Q_0, \bar{e}_{s_0}, \bar{v}_0). \quad (1)$$

t időben a szomszédos érintők és felületi normálisok $P(s)$ mentén:

$$\bar{e}_s + \frac{d\bar{e}_s}{ds} ds, \quad \bar{v} + \frac{d\bar{v}}{ds} ds, \quad (2)$$

$P_0(s_0)$ mentén pedig:

$$\bar{e}_{s_0} + \frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} ds_0, \quad \bar{v}_0 + \frac{d\bar{v}_0}{ds_0} ds_0, \quad (3)$$

$t+dt$ időben a $P(s+ds)$ pontban a mozgás következtében az érintő és normális:

$$\bar{e}_s + \frac{d\bar{e}_s}{ds} ds + (\bar{\omega} \times \bar{e}_s) dt, \quad \bar{v} + \frac{d\bar{v}}{ds} ds + (\bar{\omega} \times \bar{v}) dt \quad (4)$$

lesz, a $P_0(s_0+ds_0)$ pontban pedig invariánsul marad. Ámde $t+dt$ időben a felületek fundamentális triederai $P(s+ds)$ és $P_0(s_0+ds_0)$ pontokban egybeesnek, a mi tekintettel (1)-re a $\frac{ds}{dt} = s'$, $\frac{ds_0}{dt} = s'_0$ jelölések alkalmazásával a következő feltételi egyenletekhez vezet:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} s'_0 - \frac{d\bar{e}_s}{ds} s' &= \bar{\omega} \times \bar{e}_s, \\ \frac{d\bar{v}_0}{ds_0} s'_0 - \frac{d\bar{v}}{ds} s' &= \bar{\omega} \times \bar{v}. \end{aligned} \quad (I)$$

s' és s'_0 között az összefüggést következőképpen állapítjuk meg: $P(s)$ egyenlete a K -hoz kötött (C, i, j, k) -ra nézve, hol C a tömegközéppont, legyen

$$P = C + xi + yj + zk.$$

Ennek Q pontjában tehát

$$\bar{e}_s ds = \Sigma dx_i,$$

tehát

$$\bar{e}_s s' = \Sigma x' i.$$

De ha (C, i, j, k) -t is t -nek a mozgásnak megfelelő függvé-

nyeként fogjuk fel, akkor P egyenlete P_0 egyenletévé lesz, tehát ennek Q pontjában

$$\bar{e}_s s'_0 = \Sigma x'i + C' + \bar{\omega} \times (P - C),$$

azaz:

$$\bar{e}_s s'_0 - \bar{e}_s s' = Q'. \quad (\text{II})$$

hol Q' -t a Q pont *sikló sebességének* nevezzük. Az (I) és (II) alatt levő egyenletek alkotják a merev testek egymáson való mozgásának feltételi egyenleteit.

Megjegyzem, hogy ezek a feltételek csak specialis eseteit képezik egy más helyen megállapítottam általános tételnek.¹

Ha már most megfontoljuk, hogy az (I) alatt levő rendszer $\bar{\omega}$ -nak az $\bar{e}_s, \nu \times \bar{e}, \nu$ -re vonatkoztatott p, q, r coordinatáit meghatározza ugyan, de ezek tetszésszerűségét nem érinti, a (II) szerint pedig δQ mindig párhuzamos a felülettel, akkor a

$$\delta P_i = \delta Q + \delta \bar{\omega} \times (P_i - Q)$$

a 3. §. II. egyenletből leszarmaztatott mozgási egyenletek:

$$\begin{aligned} [\Sigma (m_i P'_i - \bar{p}_i)] \cdot \delta Q &= 0, \\ [\Sigma (P_i - Q) \times (m_i P'_i - \bar{p}_i)] \cdot \delta \bar{\omega} &= 0. \end{aligned}$$

Ha tehát C'' -nek és \bar{p} -nek $\hat{\nu}$ -re merőleges componenseit rendre $C''_\sigma, \bar{p}_\sigma$ -sel jelöljük, a második egyenletünkben pedig $P_i - Q$ helyett $(P_i - C) + (C - Q)$ -t írunk, akkor, ha m -t egységül választjuk, a

$$\begin{aligned} C''_\sigma &= \bar{p}_\sigma, \\ (C - Q) \times C'' + \frac{d\bar{M}_i}{dt} &= (C - Q) \times \bar{p} + \Sigma (P_i - C) \times p_i \end{aligned} \quad (\text{III})$$

egyenletrendszerhez jutunk, melyet kapcsolatban a

$$C' = Q' + \bar{\omega} \times (C - Q) \quad (\text{IV})$$

egyenlettel az *egymáson mozgó merev testek természetes mozgási egyenletrendszerének* nevezünk.

Az (I—IV) terjedő egyenletek a $(Q, \bar{e}_s, \hat{\nu} \times \bar{e}_s, \hat{\nu})$ -re vonat-

¹ SUTÁK: Math. és Term. Ért. XXXV. k. 72. l. (3.) képlet. 1917.

kozólag összesen 14 egyenletet képviselnek, melyek éppen elég-ségesek arra, hogy a K és K_0 felületi parameteres coordinatáit $u, v; u_0, v_0$ -t, (μ_0, μ) szöveget, valamint $\bar{\omega}$ -t, U -t és Q -t, mint az idő függvényeit meghatározzuk. Az egyedüli nehézséget \bar{M}_i előzetes meghatározása okozza. Egyébként mindig a feladat természetete szabja meg, hogy a $(Q, \bar{e}_s, \bar{v} \times \bar{e}_s, \bar{v})$ természetes vonatkozási rendszerhelyett milyent választunk.

7. A felületi coordinata-triederekre való vonatkoztatás.

Ha K és K_0 felületi parameteres coordinatái u, v , illetőleg u_0, v_0 orthogonális rendszert alkotnak, még pedig oly módon, hogy a Q , illetőleg Q_0 pontban a hozzájuk tartozó érintők $\bar{e}_{s_1}, \bar{e}_{\sigma_1}$, illetőleg $\bar{e}_{s_2}, \bar{e}_{\sigma_2}$, a 6. §-ban definiált \bar{v} , illetőleg \bar{v}_0 -val jobbra-forgó rendszert alkossanak, akkor teljesülnek a következő egyenletek:

$$\bar{e}_{s_1} \times \bar{e}_{\sigma_1} = \bar{v}, \quad \bar{e}_{s_2} \times \bar{e}_{\sigma_2} = \bar{v}_0. \quad (5)$$

Az első három vector alkotta triedert jelöljük röviden i_1, j_1, k_1 -vel, a másikat meg i_2, j_2, k_2 -vel és nevezzük mindegyiket *coordinata-triclernek*.

A görbék absolut elméletének első alaptétele értelmében érvényesek a következő egyenletek:¹

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_{s_1}}{ds_1} &= \frac{1}{\rho_{g_{s_1}}} \bar{e}_{\sigma_1} + \frac{1}{\rho_{v_{s_1}}} \bar{v}, \\ \frac{d\bar{e}_{\sigma_1}}{ds_1} &= -\frac{1}{\rho_{g_{s_1}}} \bar{e}_{s_1} - \frac{1}{\tau_{g_{s_1}}} \bar{v}, \\ \frac{d\bar{v}}{ds_1} &= -\frac{1}{\rho_{v_{s_1}}} \bar{e}_{s_1} + \frac{1}{\tau_{g_{s_1}}} \bar{e}_{\sigma_1} \cdot \\ \frac{d\bar{e}_{\sigma_1}}{d\sigma_1} &= -\frac{1}{\rho_{g_{\sigma_1}}} \bar{e}_{s_1} + \frac{1}{\rho_{v_{\sigma_1}}} \bar{v}. \\ \frac{d\bar{e}_{s_1}}{d\sigma_1} &= -\frac{1}{\rho_{g_{\sigma_1}}} \bar{e}_{\sigma_1} + \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_1}}} \bar{v}, \\ \frac{d\bar{v}}{d\sigma_1} &= -\frac{1}{\rho_{v_{\sigma_1}}} \bar{e}_{\sigma_1} - \frac{1}{\tau_{g_{\sigma_1}}} \bar{e}_{s_1} \cdot \end{aligned} \quad (6)$$

¹ SUTÁK: A Szent István Ak. Ért. I. évf. 2. sz. 125. l. 1916. Math. és Term. Ért. XXXV. k. 60. l. 1917.

Hasonló formulák érvényesek a K_0 felületi coordinata-triederére \bar{e}_{s_2} , \bar{e}_{σ_2} , \bar{v}_2 -ra. Ha ez a trieder Q_0 -ból Q_0+dQ_0 -ba való áttérése alkalmával \bar{Q}_0 tengely körül fordul el és

$$\bar{Q}_0 = \pi_0 i_2 + x_0 j_2 + \varrho_0 k_2,$$

akkor ¹

$$\pi_0 = \bar{v}_0 \cdot \frac{d\bar{e}_{\sigma_2}}{dt} = \bar{v}_0 \cdot \left(\frac{d\bar{e}_{\sigma_2}}{ds_2} s'_2 + \frac{d\bar{e}_{\sigma_2}}{d\sigma_2} \sigma'_2 \right).$$

Ezzel az eljárással azután a 6. segítségével π_0 könnyen kiszámítható; ha még ugyanily módon x_0 és ϱ_0 -t is meghatározunk, akkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= -\frac{s'_2}{\tau_{g_{s_2}}} + \frac{\sigma'_2}{\varrho_{v_{s_2}}}, \\ x_0 &= -\frac{s'_2}{\varrho_{v_{s_2}}} - \frac{\sigma'_2}{\tau_{g_{s_2}}}, \\ \varrho_0 &= \frac{s'_2}{\varrho_{g_{s_2}}} + \frac{\sigma'_2}{\varrho_{v_{s_2}}}. \end{aligned} \quad (V)$$

De ha K testen Q -ból $Q+dQ$ -ba térünk át, azután pedig mozgással ez a pont Q_0+dQ_0 -ba jut, akkor világos, hogy

$$\frac{dj_1}{dt} = \frac{d\bar{e}_{\sigma_1}}{ds_1} s'_1 + \frac{d\bar{e}_{\sigma_1}}{d\sigma_1} \sigma'_1 + \bar{\omega} \times e_{\sigma_1}.$$

Ha tehát K Q pontbeli felületi coordinata-triedere ennek következtében \bar{Q} tengely körül fordul el és

$$\bar{Q} = \pi i_1 + x j_1 + \varrho k_1,$$

akkor, $\bar{\omega}$ -nak i_1, j_1, k_1 -re vonatkoztatott coordinatáit p_1, q_1, r_1 -gyel jelölve, a fentebb bemutatott eljárással találjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi &= -\frac{\sigma'_1}{\tau_{g_{s_1}}} + \frac{\sigma'_1}{\varrho_{v_{\sigma_1}}} + p_1 = \pi_1 + p_1, \\ x &= -\frac{s'_1}{\varrho_{v_{s_1}}} - \frac{\sigma'_1}{\tau_{g_{\sigma_1}}} + q_1 = x_1 + q_1, \\ \varrho &= \frac{s'_1}{\varrho_{g_{s_1}}} + \frac{\sigma'_1}{\varrho_{g_{\sigma_1}}} + r_1 = \varrho_1 + r_1. \end{aligned} \quad (VI)$$

¹ SUTÁK: Math. és Term. Ért. XXXIV. k. 695. l. (VI.) 1916.

Ha az (i_2, i_1) szöget előjelével együtt α -nak nevezzük, akkor

$$\begin{aligned} i_2 \times i_1 &= \sin \alpha \bar{v}, \\ i_1 \cdot i_2 &= \cos \alpha, & i_1 \cdot j_2 &= \sin \alpha \\ j_1 \cdot i_2 &= -\sin \alpha, & j_1 \cdot j_2 &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos \alpha i_2 + \sin \alpha j_2, \\ j_1 &= -\sin \alpha i_2 + \cos \alpha j_2, \\ k_1 &= k_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Ha még $\bar{\omega}$ -nak (i_2, j_2, k_2) -re vonatkoztatott coordinatáit p_2, q_2, r_2 -vel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} p_2 &= \cos \alpha p_1 - \sin \alpha q_1, \\ q_2 &= \sin \alpha p_1 + \cos \alpha q_1, \\ r_2 &= r_1. \end{aligned} \quad (8)$$

A 6. §. I. alatt levő egyenleteinek a másodika az ebben a fejezetben bevezetett jelölések alapján következőképpen írható:

$$\frac{d\bar{v}_0}{ds_2} s'_2 + \frac{d\bar{v}}{d\sigma_2} \sigma'_2 - \frac{d\bar{v}}{ds_1} s'_1 - \frac{d\bar{v}}{d\sigma_1} \sigma'_1 = q_2 i_2 - p_2 j_2 = q_1 i_1 - p_1 j_1.$$

Ha ezt az egyenletet skalarisan megszorozzuk rendre j_2, i_2 -vel, a 6. §. I. alatt levő egyenleteinek az elsejét pedig $\bar{v} \times \bar{e}_s$ -sel, akkor annak megfontolásával még, hogy $r_1 = r$ -rel, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} p_2 &= \pi_0 - \cos \alpha \pi_1 + \sin \alpha x_1, \\ q_2 &= x_0 - \sin \alpha \pi_1 - \cos \alpha \eta_1, \\ r_2 &= \frac{s'_0}{\varrho_{\sigma_0}} - \frac{s'_1}{\varrho_{\sigma_1}}. \end{aligned} \quad (I')$$

A (VI)-ra való tekintettel az (I') két első egyenlete ebben az alakban is írható:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_0 - \cos \alpha \pi + \sin \alpha x, \\ 0 &= x_0 - \sin \alpha \pi - \cos \alpha x. \end{aligned} \quad (I'')$$

Ezzel aztán p_2, q_2, r_2 -t s a (8) alapján tehát p_1, q_1, r_1 -t is kifejeztük a két felület fundamentalis mennyiségeivel.

Az előbbi fejezet (II) egyenlete pedig a felületi koordinata-triéderekre vonatkoztatva így módosul:

$$\bar{e}_{s_1} s'_2 + \bar{e}_{\sigma_1} \sigma'_2 - \bar{e}_{s_1} s'_1 - \bar{e}_{\sigma_1} \sigma'_1 = Q', \quad (\text{II}')$$

ebből pedig a (7) alapján:

$$\begin{aligned} -s'_1 + \cos \alpha s'_2 + \sin \alpha \sigma'_2 &= Q' \cdot \bar{e}_{s_1}, \\ -\sigma'_1 - \sin \alpha s'_2 + \cos \alpha \sigma'_2 &= Q' \cdot \bar{e}_{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (\text{II}'')$$

A felületek egymáson való gördülése esetére $s'_0 = s'$, $\delta Q = 0$, tehát az előbbi fejezet (III) első egyenlete elesik, a többi pedig a jelzett feltételek alapján könnyen felírható.

8. A gömb gördülése tisztán csak a nehézségi erő hatása alatt.

Ha K gömb, melynek Q pontjában \bar{v} átmegy a centrumon, mely egyúttal legyen tömegközéppont is, akkor a -nak nevezve a gömb sugarát

$$C - Q = a\bar{v} = a\bar{v}_0. \quad (1)$$

Mivel ily módon a gömbön minden görbe normális görbülete $\frac{1}{a}$, geodetikus torsiója meg nulla, azért az előbbi fejezet VI) egyenletrendszerében fellépő π_1, x_1 -re nézve:

$$\pi_1 = \frac{\sigma'_1}{a}, \quad x_1 = -\frac{s'_1}{a}. \quad (2)$$

Ha a gömb tömegét egységül választjuk, akkor a nehézség-erő létesítette gyorsulást \bar{g} -nek nevezve

$$p_i = m_i \bar{g}, \quad p = \bar{g}. \quad (3)$$

Ennélfogva a nehézség-erő hatása alatt gördülő gömbre nézve a mozgásnak a 6. §. (III) és (IV) alatt levő természetes egyenletei:

$$a\bar{v} \times C'' + \frac{d\bar{M}_i}{dt} = a\bar{v} \times \bar{g}, \quad (\text{III}')$$

$$C' = a\bar{\omega} \times \bar{v}, \quad (\text{IV}')$$

a hol

$$\bar{M}_i = \lambda^2 \bar{\omega}, \quad (4)$$

ha λ a gömb *gyratio* sugara a centrumon átmenő tengelyre vonatkoztatva.

Ha már most vonatkozási rendszerül a K_0 felületi koordinata-triederét választjuk, akkor

$$\begin{aligned} C' &= a (q_2 i_2 - p_2 j_2); \\ C'' &= a (q'_2 i_2 - p'_2 j_2) + \bar{Q}_0 \times C'; \\ \frac{d\bar{M}_i}{dt} &= \lambda^2 \Sigma p'_2 i_2 + \lambda^2 \bar{Q}_0 \times \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ha \bar{g} -nek a i_2, j_2, k_2 -re vonatkoztatott koordinatái X_2, Y_2, Z_2 , C' -é pedig u_2, v_2, w_2 , akkor, ha az (5) alatt levő értékeket mozgási egyenleteinkbe helyettesítjük, az i_2, j_2, k_2 együtthatóinak összehasonlítása után a (IV') és (III') a következő mozgási egyenleteket szolgáltatják:

$$\begin{aligned} u_2 &= a q_2, \quad v_2 = -a p_2, \quad w_2 = 0; \\ (a^2 + \lambda^2)^2 (p'_2 - \rho_0 q_2) + \lambda^2 x_0 r_1 &= -a Y_2, \\ (a^2 + \lambda^2) (q'_2 + \rho_0 p_2) - \lambda^2 \pi_0 r_1 &= a X_2, \\ r'_2 + \pi_0 q_2 - x_0 p_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

Megjegyzem, hogy ezek a formulák akkor is érvényben maradnak, ha Q -pontban valamelyes, mondjuk a két felület ellenállásából eredő erő lép fel, melyet nevezünk \bar{p}_s -nak. Ekkor ugyanis p már $\bar{g} + \bar{p}_s$ -nal lesz egyenlő, ámde a 6. §. III. képletének jobboldalán levő summa most nem nulla, mert most a Q pontban a nehézségeiről kívül még \bar{p}_s erő is fellép, hanem $(Q-C) \times p_s$ lesz, minek következtében \bar{p}_s a mozgásegyenletről kiesik s így a (III') erre az esetre is érvényben marad.

A (VII)-hez hozzájárulnak még feltételi egyenleteink is,

melyek a jelen esetben az előbbi fejezet (I') (II') és a jelen fejezet (2) egyenletei alapján

$$\begin{aligned} s'_1 &= \cos as'_2 + \sin a\sigma'_2, \\ \sigma'_1 &= -\sin as'_2 + \cos a\sigma'_2; \\ p_2 &= \pi_0 - \frac{\sigma'_2}{a}, \\ q_2 &= x_0 + \frac{s'_2}{a}, \\ r_2 &= \left(\frac{1}{Q_{g_{s_0}}} = \frac{1}{Q_{g_s}} \right) s'. \end{aligned} \tag{VIII}$$

A (VII) alatt levő egyenletek megegyeznek ROUTH¹ egyenleteivel, azonban a feltételi egyenletekről nem számol be; jól lehet egy specialisan választott coordinata-rendszerben megállapítja az előbbi fejezet (V)-nek megfelelő egyenleteket.

Például, ha K_0 a vízszintessel ε szöget alkotó sík — lejtő —, melynek felfelé irányított normálisa \bar{v}_0 , a lejtő s vízszintes sík metszésvonalára és \bar{v}_0 -ra merőleges lefelé irányuló egységvektor legyen i_2 . Ennélfogva i_2, j_2, k_2 megegyezik egy térbeli fix-vonatkozási rendszerrel; éppen azért legyen

$$i_2, j_2, k_2 = i_0, j_0, k_0.$$

Ha már most \bar{g} absolut értéket g -vel, s_2 - és σ_2 -t pedig rendre x, y -nal jelöljük, akkor a VII.-ben a jelen esetben:

$$\begin{aligned} \pi_0 = x_0 = \varrho_0 &= 0. \\ X_2, Y_2 &= i_0 \bar{g}, j_0 \bar{g} = g \sin \varepsilon, 0. \end{aligned}$$

A (VIII) alapján pedig:

$$p_2, q_2 = \frac{1}{a} (-y', x') = p_0, q_0;$$

miért is mozgásegyenleteink, ha u_2, v_2, w_2 helyett u_0, v_0, w_0 -t írunk:

$$\begin{aligned} u_0, v_0, w_0 &= x', y', 0; \\ x'' &= \frac{a}{a^2 + \lambda^2} g \sin \varepsilon, y'' = 0; \\ r'_0 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

¹ ROUTH: Dynamics, Part II. p. 123—124. 1884.

A síkon tehát a gördülési görbe parabola, a gömbön pedig a (VIII) utolsó egyenlete alapján a gördülési görbe egyenlete

$$\frac{s'}{\varrho_{gs}} = \frac{s'}{\varrho_{gs_0}} + r. \quad (7)$$

Végül könnyű arról is meggyőződni, hogy rendszerünk nem holonom. Ugyanis a

$$Q' = C' - a(\bar{\omega} \times k_0) = C' - aq_0 i_0 + ap_0 j_0 = 0$$

alapján az

$$u_0 - a i_0 = 0, \quad v_0 + a p_0 = 0 \quad (8)$$

egyenletek, ha ezekbe p_0, q_0 értékeit a 2. §. (F')-ből behelyettesítjük, semmiféleképpen nem vezetnek integrálható differenciárendszerhez.

Ennek a problémának (6) alatt levő mozgásegyenleteit már ROUTH is megállapította a LAGRANGE-féle multiplicatoros eljárással.¹

9. A gömb mozgása a síkon.

Az előbbi fejezet lejtőre vonatkozó fejtegetéseiben alkalmazott vonatkozási rendszert és jelöléseket az $\varepsilon = 0$ esetre is megtartva, a 6. §. III. és IV. alatt levő mozgásegyenletei — tekintettel az előbbi fejezet (4) egyenletére és arra a körülményre, hogy most C'' egyenlő C''_a -sal, \bar{p} pedig a felületek ellenállásából eredő erővektornak a vízszintes sikkal párhuzamos komponensével, mit most a kétértelműség teljes kizárásával \bar{p} -vel jelölhetünk, mivel minden más erővektor egyenletrendszerünkben kiesik — a következő alakban jelennek meg:

$$C'' = \bar{p}, \quad (III'')$$

$$ak_0 \times C'' + \lambda^2 \bar{\omega}' = 0,$$

$$C' = Q' + a\bar{\omega} \times k_0. \quad (IV'')$$

Egyenletrendszerünk a SLESSER² és ROUTH³ kezdeményezé-

¹ ROUTH: Dynamics. Part I. p. 327—328. 1882.

² SLESSER: Quarterly Journal of Mathematics. vol. IV. p. 65. 1861.

³ ROUTH: Dynamics, 1882—84.

sére oly nagy előszeretettel alkalmazott — mondjuk — erőszétosztási módszerrel megállapított APPELL-féle¹ egyenletrendszerrel legalább ebben az általános alakban nem egyezik meg.

Ha Q' abszolút értékét és irányát v , illetőleg \bar{e} -vel jelöljük, akkor

$$C'' = v\bar{e}, \quad (1)$$

tehát a (IV'') t szerinti differenciálásával, tekintettel (III'')-re

$$v'\bar{e} + v\bar{e}' = \frac{a^2 + \lambda^2}{\lambda^2} p. \quad (2)$$

Ha tehát csak surlódási erő lép fel és

$$\bar{p} = -c\bar{e}, \quad (3)$$

hol c positiv constans, akkor a (2) alapján \bar{e} constans, tehát

$$v = v_0 - \frac{a^2 + \lambda^2}{\lambda^2} p. \quad (4)$$

Ennélfogva

$$t = \frac{\lambda^2 v_0}{c(a^2 + \lambda^2)}$$

időpontban a siklás megszűnik, innen kezdve a mozgás gördülővé válik, melyre érvényesek az előbbi fejezetnek a lejtőre vonatkozó fejtegetései.

A (III') első egyenletéből

$$C = C_0 + C_0''t + \frac{1}{2}pt^2;$$

következőleg a gördülés beálltaig a mozgás pályája parabola, azután pedig, miként az előbbi fejezet fejtegetéseiből evidens, egyenes.

Másféle tárgyalásra és az irodalomra nézve legyen irányadó WEBSTER,² MARCOLONGO,³ STÄCKEL.⁴

¹ APPELL: Journ. de Math. pur. et appl. 6. ser. t. VII. p. 85. 1911.

² WEBSTER: The Dynamics of Particles p. 304. 1904.

³ MARCOLONGO: Theoretische Mechanik II. Bd. p. 221. 1912.

⁴ STÄCKEL: Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper. Encyclopädie d. Math. Wiss. Bd. IV. Zweiter Feilband. p. 652.

10. Gördülés él mentén a nehézségierő hatása alatt.

Ha a mozgó testnek éle van és ennek mentén gördül, akkor a mozgó test felületi coordinata-triederéről az élgörbe $\bar{e}_s, \bar{n}_s, \bar{b}_s$ fundamentalis triederét választjuk, tehát

$$\bar{e}_s, \bar{n}_s, \bar{b}_s = i_1, j_1, k_1.$$

Mivel \bar{v} és \bar{v}_0 -ra vonatkozó feltételi egyenlet a jelen esetben elesik, azért a 6. §-ban megállapított feltételi egyenletek a jelen esetben:

$$\left(\frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} - \frac{d\bar{e}_s}{ds} \right) s' = \bar{\omega} \times \bar{e}_s, \quad (1)$$

$$s'_0 = s'.$$

A mozgásegyenletek pedig a test tömegét egységül választva:

$$(C-Q) \times C' + \frac{d\bar{M}_i}{dt} = (C-Q) \times \bar{g}, \quad (II)$$

$$C' = \bar{\omega} \times (C-Q).$$

Például, ha az élgörbe a sugarú kör, melynek centrumában van a test tömegközéppontja C ; a momentán virtualis ellipsoid pedig oly forgási ellipsoid, melynek tengelye k_1 , akkor

$$\bar{M}_i = a_1 p_1 i_1 + a_1 q_1 j_1^2 + c_1 r_1 k_1; \quad (1)$$

$$C - Q = a j_1, \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{e}_0}{ds} = \frac{j_1}{a}. \quad (3)$$

Ha a 2. §. szellemét és jelöléseit a jelen esetben is érvényeseknek ismerjük el, akkor fejtegetéseinkre az ott levő formulák is mind érvényben maradnak.

Ha a gördülés ismét a vízszintes síkon történik, akkor i_0, j_0, k_0 ismét jelentsék az előbbi fejezetben elfogadott vonatkozási rendszert. A gördülő testhez kötött i_1, j_1, k_1 -re pedig legyenek irányadók a 2. §. (G) egyenletei.

Ha a gördülés $i_1 = \bar{e}_s$ irányú Q -ban, akkor az $(i_1, i) = \varphi$, szög kisebbedik, azért

$$s' = s'_0 = -a\varphi'. \quad (4)$$

Mivel

$$\bar{g} = -gk_0, \quad (5)$$

azért a (2) és a 2. §. G alapján:

$$(G-Q) \times \bar{g} = -\cos \theta i,$$

ennélfogva mozgási egyenleteink:

$$\begin{aligned} a_{j_1} \times (C'' + \frac{d\bar{M}_i}{dt}) &= -ag \cos \theta i_1, \\ C'' &= -a\bar{\omega} \times j_1. \end{aligned} \quad (II')$$

Mivel ily módon

$$C'' = -ar_1 i_1 + ap_1 k_1, \quad (6)$$

azért ha \bar{Q} -nak a 2. §-ban adott definitióját megtartjuk:

$$\begin{aligned} C'' &= -ar_1 i_1 + ap_1 k_1 + \bar{Q} \times C', \\ \frac{dM_i}{dt} &= a_1 p_1 i_1 + a_1 q_1 j_1 + c_1 r_1 k_1 + \bar{Q} \times M_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Ha ezeket az értékeket a (II')-be behelyettesítjük, akkor a műveletek végrehajtása után az egyenlet két oldalán az i_1, j_1, k_1 együtthatóinak egyenlőségét kifejező egyenletek:

$$\begin{aligned} (a^2 + a_1) p_1' + (a^2 + c_1) q_1 r_1 - a_1 q_1^2 \operatorname{ctg} \theta &= -ag \cos \theta, \\ a_1 q_1' - c_1 p_1 r_1 + a_1 p_1 q_1 \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\ (a^2 + c_1) r_1' - a^2 p_1 q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (III)$$

Egyenleteink két utolsója már APPELL¹ kutatásaiban is fellép. Ebből a két egyenletből $p_1 = \theta'$ substitúciója és q_1 kiküszöbölése után r_1 -ben és θ szerinti differenciálhányadosaiban másodrendű differenciálegyenletet nyerünk, melyről KORTEWEG² és APPELL³ kimutatták, hogy a hypergeometrikus sorral integrál-

¹ APPELL: *Traité de Mécanique Rationelle* t. II. 3. ed. p. 248. 1911.

² KORTEWEG: *Nieuw. Archief* (2) 4. p. 130., 204. 1899. *Rend. del. Circ. Mat. di Palermo*. t. XIV. p. 7. 1900.

³ APPELL: *Rend. del Circ. Mat. di Palermo* t. XIV. p. 1. 1900. *Journ. f. Math.* Bd. 121. 1900.

ható. A III. egyenletrendszer különben egy specialis esetre már CARVALLO¹ kutatásaiban is megjelenik.

(1) A gördülési görbe differentialegyenlete (6. §. I.):

$$\frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} s'_0 = \frac{j_1}{a} s' + \bar{\omega} \times i_1.$$

A 2. §. I) alapján:

$$\bar{\omega} \times i_1 = r_1 j_1 - q_1 k_1 = (\cos \theta j_1 - \sin \theta k_1) \psi' + \psi' j_1.$$

A (4)-re való tekintettel tehát

$$\frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} s'_1 = (\cos \theta i_1 - \sin \theta k_1) \psi'.$$

Ebből pedig a 2. §. G), B) és D) egyenletei alapján:

$$\frac{d\bar{e}_{s_0}}{ds_0} s'_0 = (-\sin \psi i_0 + \cos \psi j_0) \psi', \quad (8)$$

honnan

$$\bar{e}_{s_0} = \cos \psi i_0 + \sin \psi j_0;$$

ebből pedig tekintettel (4)-re a gördülési görbe egyenlete:

$$Q = Q_0 - a \int (\cos \psi i_0 + \sin \psi j_0) \psi' dt, \quad (9)$$

görbületi sugara pedig a (8) alapján:

$$\frac{n_{s_0}}{\rho_{s_0}} = \frac{1}{a} (\sin \psi i_0 - \cos \psi j_0) \frac{\psi'}{\varphi}. \quad (10)$$

Végül kimutatjuk még, hogy rendszerünk nem holonom-rendszer. Ugyanis a 2. §. (G) alapján:

$$j_1 = -\sin \psi \cos \theta i_0 + \cos \psi \cos \theta j_0 + \sin \theta k_0,$$

következésképpen:

$$\bar{\omega} \times j_1 = \begin{vmatrix} i_0 & j_0 & k_0 \\ \rho_0 & q_0 & r_0 \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix}.$$

¹ CARVALLO: Journ. de l'École Polytechnique 2. ser. 5. cah. p. 119. 1900. APPELL: Les mouvements de roulements. (Scientia) p. 34. 1899.

A (II) és a 2. §. (F) alapján tehát

$$\begin{aligned} & C' + a (\cos \phi \phi' + \cos \psi \cos \theta \phi' - \sin \phi \sin \theta \theta') i_0 \\ & + a (\sin \phi \phi' + \sin \psi \cos \theta \phi' + \cos \psi \sin \theta \theta') j_0 - \\ & - a \cos \theta \theta' k_0 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

mely egyenlet nem vezet integrálható differentiale-rendszerhez.

Alkalmazás nem merev rendszerre.

A 3. §. (II) egyenletrendszerének nem merev rendszerre való alkalmazása analog eljárással egyenesen szolgáltatja a rendszermozgásegyenleteit. Szemléltetésül bemutatom Atwood gépének elméletét.

Az Atwood-gép egy vízszintes tengely körül szabadon forgó homogén tömegű két menettel ellátott csiga; a menetekben ellentétes irányban felcsavart elenyésző tömegű szálak végpontjain m_1 és m_2 tömegek vannak; a körmenetek sugarai legyenek rendre r_1 és r_2 , a csiga tömege m , gyratio-sugara pedig a fix-tengelyre nézve λ .

Ha a csiganak a forgási tengelyben levő tömegközéppontját C -t s az 5. § c)-ben alkalmazott triédereket választjuk vonatkozási rendszerül, akkor

$$\bar{\omega} = \theta' j_0, \quad M_i = m \lambda^2 \theta' j_0.$$

Ha az m_1 -et tartó szál az i_0 irányában levő pontban érinti a körmenetet, akkor

$$\delta P_1 = r_1 \delta \theta j_0 \times i_0 = -r_1 \delta \theta k_0, \quad \delta P_2 = r_2 \delta \theta k_0.$$

A csiga tetszésszerű P_i pontjára pedig:

$$\delta P_i = \delta \theta j_0 \times (P_i - C).$$

Ha már most ezeket az értékeket a 3. §. (II) egyenletébe behelyettesítjük, akkor annak megfontolása, hogy csak a nehézség-erő hat, tehát $p_i = m_i g k_0$, és hogy P_1'' , P_2'' rendre $-r_1 \theta'' k_0$, illetőleg $r_2 \theta'' k_0$ -val egyenlők, a következő mozgási egyenlethez vezet:

$$(r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + m \lambda^2) \theta'' = (r_2 m_2 - r_1 m_1) g.$$

Ezzel aztán problémánkat megoldottuk.

ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATOK A VÉRSAVÓ KEMÉNYÍTŐOLDÓ ÉS VÉRSEJTOLDÁST COMPLETTÁLÓ HATÁSÁRÓL.

GÓZONY LAJOS-tól.

A serumok különböző biológiai hatásának kutatása közben jöttem arra a gondolatra, hogy összehasonlítólá vizsgáljam a serumok complementum- és amylase-tartalmát, remélve, hogy az ilyen összehasonlító vizsgálat e biológiai hatások lényegének magyarázásához esetleg támpontokat nyujthat.

Ha összehasonlítjuk a különböző savók complettáló képességét és keményítőoldó hatását, feltűnik, hogy a különféle állatok savójának e két tulajdonsága mennyire párhuzamosan halad; ezt szemléltetik az alábbi táblázatban összeállított kísérleti eredmények.

2 kcm-nyi mennyiség sensibilizált¹ 5 %-os marhavérsejt keverékéből és 3 kcm 1 %-os főtt burgonyakeményítőből különböző állatok savójával a következőképpen viselkedik:

A savó minősége	Kísérleti eredmény	A savó mennyisége			
		0·5	0·4	0·3	0·2
		az oldás foka			
tengeri malacz savóval	hæmolysis amylolysis	teljes	teljes	teljes	teljes
sértés savóval	hæmolysis amylolysis	"	"	"	0
nyúl savóval	hæmolysis amylolysis	"	majd teljes	0	0
borju savóval	hæmolysis amylolysis	"	teljes	teljes	teljes
marha savóval	hæmolysis amylolysis	"	"	"	"
ló savóval	hæmolysis amylolysis	"	majd teljes	mérsékelt	0
		"	teljes	teljes	majd teljes
		"	nyom	nyom	0
		"	teljes	teljes	0
		"	majd teljes	mérsékelt	nyom
		"	"	0	0

¹ A sensibilizálás a vértoldó vérsavó 20-szoros hígításában történt.

A savó minő- sége	Kísérleti eredmény	A savó mennyisége				
		0·1	0·05	0·04	0·03	0·02
		az oldás foka				
tengeri malacz savóval	hämolysis amylolysis	teljes mérsékelt	teljes 0	teljes 0	teljes 0	teljes 0
sertés savóval	hämolysis amylolysis	teljes 0	teljes 0	majd teljes 0	mérsékelt 0	nyom 0
nyúl savóval	hämolysis amylolysis	teljes majd teljes	majd teljes 0	mérsékelt 0	nyom 0	0 0
borjú savóval	hämolysis amylolysis	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
marha savóval	hämolysis amylolysis	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
ló savó- val	hämolysis amylolysis	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Vagyis a mely savó a leghatásosabb a sensibilizált vérsejtekkel szemben, ugyanaz tartalmazza az amyloaset is a legtöbbszörben.

Vizsgálataim továbbá azt is mutatták, hogy a kétféle anyag fejlődése a magzatban is eléggé párhuzamosan halad.

Ha *Da*-val jelöljük azt a keményítő-mennyiséget, melyet 1 cm savó oldani képes, akkor több vizsgálat alapján, a melyeknél a kísérleti berendezés olyan volt, hogy a keményítő mennyisége volt állandó (3 cm 1 %-os főtt keményítő), a serum mennyisége pedig változó (WOHLGEMUTH szerint), átszámítás útján a következő eredményt kaptam:

a 12 cm hosszú sertés-magzatnál	$Da = 2\cdot5$;
a 17 " " " "	$Da = 2\cdot5$;
a 27 " " " "	$Da = 3$;
a 28 " " " "	$Da = 7\cdot5$;
a 34 " " " "	$Da = 15$.

Hasonlóan látjuk, hogy míg a legidősebb (34 cm hosszú) magzat savójából 0·4 cm mérsékelt lysist idéz elő 1 cm

erősen sensibilizált vérsejtemulsióban, addig fiatalabból (28 cm hosszúból) már 0·6 kell.

Ezekből a kísérletekből látható, hogy az amylase- és complement-hatás némileg párhuzamosan halad az állati szervezet méhbeli fejlődése alatt.

Tudvalevő, hogy keményítőnek vérbe való fecskendése után kísérleti állatokban a savó amyasetartalma fokozódik. Meglepő eredményre bukkantam, amikor magam fokoztam keményítőnek vérbe való fecskendésével a kísérleti állatok savójának amylase-tartalmát, mint a hogy ezt a következő példák mutatják:

1. kísérlet. 2800 gm súlyu fehér nyúl savójának keményítőoldó hatása (= Da) 20, complettáló hatása pedig (= Dh) 5 volt.

8 kem 3%-os főtt keményítő vérbe való befecskendése után ezek az értékek ekképpen változtak:

8 óra mulva	Da = 20	Dh = 5 ;
24 " "	Da = 33·3	Dh = 20 ;
48 " "	Da = 50	Dh = 100 ;
72 " "	Da = 33	Dh = 10.

Ebben a kísérletben keményítő befecskendésére nem csupán az amylase-tartalom fokozódott, hanem a savó complettáló hatása is. A vérbe juttatott keményítő alig szerepelhetett mint physikai vagy chemiai tényező, amely esetleg a serum colloidjainak egyensúlyát s így a ható anyagok qualitását változtatta meg, hanem inkább mint biologiai inger; mert ez anyagok szaporodása nem azonnal (még 8 óra mulva sem), hanem csak bizonyos incubatio után jelentkezett.

2. kísérlet. Hasonló eredményt kaptam egy 1700 gm súlyu szürke nyúllal is.

Kezelés előtt Da = 20 Dh = 5 ;

VIII/1.-én 8 kem 1 %-os főtt keményítőt kap a vérébe:

24 órával oltás után	Da = 20	Dh = 10 ;
48 " " "	Da = 35	Dh = 10 ;
72 " " "	Da = 25	Dh = 14·3.

VIII/5.-én újból 12 kcm 1%-os fött keményítő befecskendése a vérbe:

VIII 7.-én	$Da = 50$	$Dh = 25$
8.-án	$Da = 50$	$Dh = 25$
9.-én	$Da = 50$	$Dh = 25$
10.-én	$Da = 33$	$Dh = 10$
15.-én	$Da = 25$	$Dh = 10$

Ez a kísérlet is azt mutatja, hogy a vérsavó amylase-tartalma fokozódik keményítő befecskendésére és ezzel együtt halad a complement-tartalom növekedése is. Körülbelül 48 óráig emelkedik mind a két hatás, azután ismét csökken. Ismételt injectióval azután újra fokozhatjuk a savó hatását.

Hasonló eredményt kaptam még más két nyúl kísérletben.

Úgy látszik, a nyulak kora nincs befolyással a reagáló képességre. Egy fiatalabb (650 gr-os) nyúlnál hasonló eredményt kaptam.

A kísérletet megejtettem tengerimalacczal is. Sajnos itt a gyakori vérvétel nem sikerül olyan könnyen, mint nyúlnál, a vérbe való fecskendés is nehezebb, miért is több állat közül csak egy maradt életben.

Ennél a keményítő befecskendése előtt

(1: 50-szeres serummal sensibilizált marhavérsejtekkel)

	$Da = 50$	$Dh = 100$
48 óra múlva	$Da = 30$	$Dh = 100$
72 « «	$Da = 143$	$Dh = 125$

E szerint az amylase-tartalom szaporodását nyomon követi a complementum-szaporulat a tengerimalacznál is keményítő befecskendése után.

Tyúkkal végzett egy kísérletemben szintén megegyezett a a savó viselkedése az előbb említett eredményekkel.

1 kcm 1%-os vörösvérsejtet nyúlból 0.12 kcm tyúksavó old; tyúksavóra nézve oltás előtt:

$$Dh = 8.3 \quad Da = 12.5;$$

5 kem 1 %-os főtt keményítő vérbe való befecskendése után 48 órával: $Dh = 20$ $Da = 25$.

Hogy minő szerepe van ilyenkor a keményítőnek az állati szervezetben, arra ezek a kísérletek felvilágosítást nem adnak. Mindenesetre a párhuzam az amylase és complementum között további kísérletekre ösztönzött.

SACHS és TEROUCHI vizsgálataiból ismeretes, hogy a serum elveszti completáló hatását, ha dialyzáljuk és hogy a completáló képesség visszaállítható, ha sókat (esetleg csak $NaCl$ -ot) adunk a dialyzált savóhoz.

Hasonlóképen BERRY és GIAJA,¹ valamint PRETI² és BANG³ vizsgálatai szerint az amylase is elveszti hatékonyságát, ha dialyzáljuk, de reaktiválható $NaCl$ -dal vagy más sókkal is.

E szerint a párhuzam, a mely a serum-complement és serum-amylase között fennáll, itt is megnyilvánul, amennyiben mind a kettő hydrolabilis, azaz sók nélkül nem hat.

További kísérleteimmal arról kívántam meggyőződni, hogy tulajdonképpen a normális savó keményítőoldó tulajdonsága nem-e éppenúgy complex (összetett) hatású, mint a normális savók hémolizáló sajátsága.

Ismeretes a serologiából, hogy normális hémolysinek complexitásának demonstrálása nem mindig sikerült, hogy csakis bizonyos quantitativ viszonyok betartásával érünk el eredményt, és hogy nem is minden vörösvérsejt vagy serum alkalmas az ilyen kísérletekre. Előrebocsátom, hogy hasonlóan nem minden keményítőféleség bizonyult alkalmasnak a serum-amylase complexitásának felderítésénél. Általában kifogástalan eredményt csakis burgonyakeményítővel kaptam.

Számos előzetes próbálgatás után a kísérleti berendezés a következő volt:

3 kem 0° -ra lehűtött nyúlsavóhoz kevertem 0.60 gr finoman porított burgonyakeményítőt. 24 óráig jég között hagytam állani, majd centrifugáltam, a serumot lepipettáztam, a ke-

¹ BERRY és GIAJA, C. R. Soc. de Biol. 1906. 749.

² PRETI, Bioch. Zeitsch. 1909. 4 köt.

³ BANG, ibid. 1911. 32 köt.

ményítő-üledéket lehűtött *NaCl*-oldattal egyszer kimostam, azután 60 kcm physiologiás *Na Cl*-oldattal összeráztam, hogy 1 %-os keverékem legyen.

A kísérlet eredményeit az alábbi táblázat tünteti fel. Természetszerűleg a kis mennyiségek lemérése higitott oldatban történt és csupán az áttekinthetőség céljából adom a táblázatban az absolut mennyiségeket. A kísérleti berendezés olyan volt, hogy az összes folyadékmennyiség 2 kcm volt. (Kiegészítés, higitás physiologiás *NaCl*-oldattal.)

Savó mennyisége	1 %-os főtt keményítő	24 óra után jodreakció	
		normalis sa- vós próbában	kimerített sa- vós próbában
0·10 kcm	1 kcm	szintelen	kék
0·08 "	"	"	"
0·06 "	"	"	"
0·04 "	"	rózsaszínű	"
0·02 "	"	"	"
0·01 "	"	kék	"

A táblázatból látható, hogy a keményítővel hidegben 24 óráig állott savó elvesztette keményítőoldó képességét.

Ezután fölmerült a kérdés, vajjon a savó keményítőoldási képessége tekintetében teljesen kimerült-e vagy pedig csak részben, valamint az is, hogy az ázott keményítő, bár az amylose összes alkotórészeit kötötte le, csak azért nem oldódott fel, mert hidegben volt és így alkalmas hőmérséken talán feloldódott volna.

Ezeknek a kérdéseknek az eldöntésére először is a hideg savóban ázott (sensibilizált) keményítőt sósvizben hagytam állni 37°-on, de oldódás így sem állott be.

Tehát a teljes amyloset nem kötötte le a keményítő, s így valószínű volt, hogy a serumban visszamaradt annak egy része.

Ennek kiderítése czéljából egyrészt normalis savóval, másrészt kimerített (keményítővel hidegben állott) savóval hoztam össze párhuzamos kísérletben a sensibilizált keményítőt.

Savó mennyisége	Sensibilizált keményítő	Jodreakció 24 óra után	
		normalis savóval	kimerített savóval
0·1 kcm	1 kcm	rózsaszínű	rózsaszínű
0·08 «	«	«	«
0·06 «	«	«	«
0·04 «	«	«	«
0·02 «	«	kék	kék
0·01 «	«	«	«

E szerint a kimerített savó, amely friss főtt keményítőt egyáltalában már nem volt képes bontani, a sensibilizált keményítőt éppen úgy bontja, mint a normalis savó. E kísérlet szerint, ha burgonyakeményítőt áztatunk hidegben nyúlsavóban, a nyúlsavó amylaseje két részre válik szét, az egyik rész a keményítőhöz kapcsolódik, a másik rész visszamarad a savóban. Ugyanezzel a kísérleti berendezéssel megismételt kísérletek mindig ugyanazt az eredményt adták.

Egyéb keményítőfélékkel (rizs-, búzakeményítővel) az eredmények nem voltak hasonló értelműek.

Érdekes, hogy a keményítővel kimerített nyúlsavó elvesztette lóvérséjtet oldó sajátosságát is, amit a következő táblázat tüntet fel:

Savó mennyisége	2·5 %-os lóvérséjt keverék	Hæmolysis foka 2 óra múlva	
		normalis savóval	kimerített savóval
0·4 kcm	0·5 kcm	teljes	0
0·3 «	«	«	0
0·2 «	«	«	0
0·1 «	«	«	0

E kísérlet fordítottja azonban nem sikerült! Vagyis a hidegben lóvérséjtekkel kimerített nyúlsavó nem veszít amylase-tartalmából, a mint ez az alábbiakból kitűnik:

1 kcm nyúlsavóhoz kevertem 2 kcm 2·5 %-os lóvérsajt-keveréket, jégszekrényben való 12 órás állás után, centrifugálás és a vörösvérsejtek physiologias konyhasósvízzel való egyszeri mosása után az így sensibilizált vérsejtek konyhasósvízben 37°-on nem oldódnak. A centrifugálás után leszívott savó friss lóvérsajtkeletet ugyan nem old, ellenben keményítőt éppenúgy bont, mint a ki nem merített savó, vagyis amylase-tartalmából nem veszített.

A kimerítési kísérlet keményítővel hidegben tengerimalacz-savóval is éppenúgy sikerül, mint nyúlsavóval, amit a következő kísérlet mutat.

1 kcm tengerimalacz-savóhoz kevertem 0·10 gr burgonyakeményítőport; 24 órás, jégen való állás után centrifugáltam s az üledéket mostam. Majd az üledékből 1 %-os emulsiót készítettem.

Savó mennyisége	1 %-os főtt keményítő	1 %-os sensibilizált keményítő	Jodreactio
0·1 kcm normalis savó	1 kcm	—	0
0·1 kcm kimerített savó	«	—	kék
—	—	1 kcm	«
0·1 kcm kimerített savó	—	«	0

Egynéhány esetben a savó tökéletesebb kimerítésére nagyobb mennyiségű keményítőt használtam, ugyanis 1 kcm-re 0·2 gr.-ot, viszont a keményítő teljesebb sensibilizálására 1 kcm savóhoz csak 0·01 gr. burgonyakeményítőport kevertem. Természetes, hogy nagyobb mennyiségű keményítővel tökéletesebb a savó kimerülése, de ilyenkor tapasztalat szerint (tengerimalacz-savó esetében) már nem tökéletes a keményítő sensibilizálása; míg viszont, ha kevés keményítőt keverünk a savóba, akkor a savó kimerülése nem teljes, de a keményítő-sensibilizálás fokozottabb.

A kísérleti berendezés a következő volt:

A. 1 kcm tengerimalacz-savóhoz kevertem 0·01 gr. keményítőport.

B. 1 kcm savóhoz kevertem 0·02 gr keményítőport, 12 órai jégen való állás után mindkettőt centrifugáltam, az üledéket kimosztam physiologiás konyhasóoldattal.

«*A*» üledékéhez (1 cgr) adtam 0·5 kcm-t «*B*» lecentrifugált savójából.

12 óra múlva a bontás teljes, (joddal nincs színeződés); ellenben 0·5 kcm. ugyanebből a «*B*» savóból nem bont 0·5 kcm főtt keményítőt (joddal kék színeződés).

Ez a kísérlet is csak azt mutatja, hogy a serumamylase hidegben burgonyakeményítővel két részre bontható: az egyik rész odakapcsolódik a keményítőhöz a hæmolizáló amboceptorok módjára; a másik a complement mintájára szabadon marad a savóban. Az így szabadon maradó rész azonban a complementtel ellentétben melegítésre csak kevésbé gyengül.

Egyébként az amylase (serum vagy nyál) inaktiválása teljesen sem melegítéssel, sem rázással nem sikerül. HARLOW és STILES¹ egyszerűen rázással a nyál hatékonyságát felére, egyes esetekben egyharmadára volt képes csökkenteni.

ROGER² ilyen inaktivált nyálat kevés friss nyál segítségével képes volt aktiválni, ami szintén az amylase complexitása mellett szólna. Azonban BANG és OPPENHEIMER³ szerint ROGER esetében nem a friss nyál szerepelt mint activator, hanem ellenkezőleg, a melegített nyál sói fokozták a keverékhez tett friss nyál hatását.

Éppen azért ROGER kísérletét is megismételtem a kimerítési kísérlettel kombinálva.

Emberi nyálat 10-szeresen higitva 70°-on 2 óráig melegítettem inaktiválás céljából. 3 kcm nyúlsavót 0·60 gr finoman porított burgonyakeményítővel jégen tartottam 24 óráig. A keményítőt kicentrifugáltam, egyszer mostam. A mosott üledéket 60 kcm konyhasósvízben emulgeáltam. Az 1 %-os főtt keményítő szintén konyhasósvízzel készült, hogy a sóhatás lehetőleg mindenütt meglegyen.

¹ HARLOW és STILES: J. of Biol. Chem. VI. 359.

² ROGER: Soc. Biol. 1907. 62. 833.

³ OPPENHEIMER: Die Fermente. 1914.

Előbb egy kísérleti sorozatban megállapítottam, hogy a savó valóban elvesztette keményítőoldó hatását és csak sensibilizált keményítőt old.

Nézzük már most, hogy vajjon az inactiv nyálat a kimerített savó képes-e aktiválni.

Erre megfelelnek az alábbi kísérletek:

Kísérleti keverékek	Jodreakció 24 óra múlva
0.1 kcm inactiv nyál + 3 kcm 1 %-os főtt keményítő — —	kék
0.1 kcm inactiv nyál + 0.4 kcm kim. savó + 3 kcm keményítő	szintelen
0.2 kcm inactiv nyál + 3 kcm sens. keményítő — — — —	kék
0.1 kcm aktiv nyál + 3 kcm főtt keményítő — — — —	szintelen

Az inactiv nyál a használt mennyiségben, de még kétszer nagyobb mennyiségben sem oldotta a 3 kcm főtt keményítőt; ellenben a kimerített savóval együtt igen. Valószínű tehát, hogy a melegítésnél a nyál-amylasenak csak olyan része pusztul el, amely az amylummal hidegben kimerített savóval pótolható.

A fenti kísérletek a mellett szólnak, hogy éppúgy, mint a normalis és immun-hæmolysinek, a vérsavó amylaseja is két részre bontható alkalmas kísérleti berendezéssel, nevezetesen egy olyan részre, amely hidegben a poralakú burgonyakeményítőhöz kapcsolódik és egy olyan részre, mely ilyenkor szabadon marad.

PERIODUSOK CYKLIKUS DETERMINÁNSA.

TIHANYI MIKLÓS-tól.

A STERN-féle determináns értéke, mint az eléggé ismeretes, igen egyszerű alakban jelentkezik; megokolt tehát az a gondolat, hogy talán a periodusok ciklikus determinánsa is ily egyszerű alakkal fejezhető ki.

Ha a p törzsszám $m.n+1$ alakú, akkor a primitív p -dik egységgyökből m számú periodus alkotható, melyeknek mindegyike n tagból áll; egyszerűsítés céljából primitív egységgyökökül az $r = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ p -dik egységgyököket fogjuk felhasználni a periodusok felépítésére. A szóban forgó ciklikus determináns már most a következő:

$$D = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdot & \cdot & \eta_{m-1} \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdot & \cdot & \eta_0 \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \cdot & \cdot & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{m-1} & \eta_0 & \eta_1 & \cdot & \cdot & \eta_{m-2} \end{vmatrix},$$

a hol $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ az n -tagú GAUSS-féle periodusok.

Hogy ennek a determinánsnak értékét megállapíthassuk, legyen α a primitív m -edik egységgyök és a LAGRANGE-féle resolvensre hozzuk be a következő jelölést:

$$T_k = \eta_0 + \alpha^k \eta_1 + \alpha^{2k} \eta_2 + \dots + \alpha^{(m-1)k} \eta_{m-1}.$$

A ciklikus determináns értékét kifejező alaptétel¹ értelmében:

¹ P. BACHMANN: Die Lehre von der Kreistheilung. 1872. 87. l.

$$D = (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \cdot T_0 T_1 T_2 \dots T_{m-1};$$

vagy mivel $T_0 = -1$,

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot T_1 T_2 \dots T_{m-1}. \quad (\text{I})$$

Az (I)-ben fellépő szorzat értéke könnyen megállapítható, ha figyelembe vesszük,¹ hogy

$$T_k \cdot T_{m-k} = (-1)^{kn} \cdot p;$$

ez összefüggés alapján, ha m páratlan, vagyis $m = 2s + 1$,

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{s(s+1)n}{2}} \cdot p^{\frac{m-1}{2}};$$

vagy mivel ebben az esetben n csak páros szám lehet,

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot p^{\frac{m-1}{2}}. \quad (\text{II})$$

Ha pedig $m = 2s$, akkor még azt is számításba kell vennünk, hogy T_s értéke külön is ismeretes, és pedig a GAUSS-féle megállapítás értelmében:

$$T_s = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \cdot p^{\frac{1}{2}};$$

ennek az alapján már a determináns értéke is adódik:

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{s(s-1)n}{2}} \cdot i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \cdot p^{\frac{m-1}{2}}. \quad (\text{III})$$

Vizsgáljuk meg most, hogy mily változást mutat determinánsunk, ha a primitív p -dik egységgyökre tett megszorítást feloldjuk s a periodusokat tetszés-szerinti egységgyökből:

$$r^k = e^{\frac{2k\pi i}{p}}$$

¹ E. PASCAL: Die Determinanten. Deutsch v. H. Leitzmann. 1900. 73. lap.

építjük fel;¹ mindenekelőtt írjuk fel k congruenciális állapotát s e végből jeleljük g -vel p modulus primitív gyökét; ha

$$k \equiv g^{s \cdot m + t} \pmod{p},$$

akkor a fentebb említett helyettesítés folytán a periodusok ciklikusan elválnak: η_h átmeny $\eta_{h+\text{ind } k} = \eta_{h+t}$ -be. E ciklikus elváltozás folytán determinánsunk első oszlopaiból

$$\text{ind } k \equiv t \pmod{m}$$

számú oszlop $(m-1)$ helyre hátrább tolódik, a miből következik, hogy ez az újabb determináns az előzővel ekként függ össze:

$$D_1 = (-1)^{(m-1) \text{ind } k} \cdot D = \left(\frac{k}{p}\right)^{m-1} \cdot D,$$

mert a $\left(\frac{k}{p}\right)$ LEGENDRE-SYMBOLUMRA nézve áll, hogy

$$\left(\frac{k}{p}\right) \equiv k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (g^{\text{ind } k})^{\frac{p-1}{2}} \equiv (g^{\frac{p-1}{2}})^{\text{ind } k} \equiv (-1)^{\text{ind } k} \pmod{p}.$$

Már most, ha m számára a fenti megkülönböztetést ismét megteszszük: ha m páratlan,

$$D_1 = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot p^{\frac{m-1}{2}}; \quad (\text{IV})$$

ha pedig m páros, akkor

$$D_1 = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \cdot n} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot p^{\frac{m-1}{2}}. \quad (\text{V})$$

Talán mondanunk sem kell, hogy az utóbbi formula a STERN-féle determináns értékét is kifejezi; mivel ebben az esetben a periodusok száma $(p-1)$, és a periodusoknak csak egy tagjuk van, a STERN-féle determináns értéke p törzsszám két alakja szerint a következő módon írható:

¹ E helyen is köszönetet mondok dr. RADOS GUSZTÁV tanár úrnak, hogy figyelmemet erre a körülményre felhívta.

ha $p = 4s + 1$,

$$D_1 = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot (-1)^s \cdot p^{\frac{p-2}{2}};$$

ha pedig $p = 4s + 3$, akkor

$$D_1 = \left(\frac{k}{p}\right) \cdot (-1)^{s+1} \cdot i \cdot p^{\frac{p-2}{2}}.$$

Ezzel egyúttal a STERN-féle eredményekben ¹ fellépő jel-hibát is kiküszöböltük.

¹ Journal für die reine und angewandte Mathematik. 73, k. 380. l.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 márcz. 18.-án tartott üléséből.)

ISMERT ELSŐ EGYÜTTHATÓKKAL BIRÓ ALGEBRAI EGYENLET GYÖKEIRŐL.

FEKETE MIHÁLY-tól.

1. §.

LANDAU, a PICARD-tételre vonatkozó vizsgálatainak kapcsán, bebizonyította,¹ hogy az

$$a_0 + a_1x + b_1x^{n_1} = 0, \quad (a_1 \neq 0; n_1 \geq 2)$$

trinomos algebrai egyenletnek van legalább is egy gyöke az

$$|x| \leq 2 \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

körben, bárminő complex, illetőleg egész számot jelent is b_1 , illetőleg n_1 .

Azt is megmutatta LANDAU,² hogy az

$$a_0 + a_1x + b_1x^{n_1} + b_2x^{n_2} = 0, \quad (a_1 \neq 0, 2 \leq n_1 < n_2)$$

quadrinomos algebrai egyenletnek van legalább is egy gyöke az

$$|x| \leq \beta \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

körben (a hol β egy, az 5 és 6 közé eső absolut állandót jelent), bárminő complex, illetőleg egész számokat jelent is b_1 és b_2 , illetőleg n_1 és n_2 .

¹ 1° «Über den PICARDSCHEN SATZ», (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 51, 1906.), S. 316—317; 2° «Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard» (Annales de l'École Normale supérieure, t. XXIV., 1907.), p. 180—181.

² L. c. 2°. p. 199—201.

FEJÉR azután megmutatta,¹ hogy az

$$a_0 + a_\nu x^\nu + b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \dots + b_s x^{n_s} = 0 \quad (1)$$

$$(a_\nu \neq 0, 1 \leq \nu < n_1 < n_2 < \dots < n_s)$$

$(s+2)$ -tagú algebrai egyenletnek van legalább is *egy* gyöke az

$$|x| \leq (s+1) \left| \frac{a_0}{a_\nu} \right|^{\frac{1}{\nu}} \quad (2)$$

körben, bárminő complex, illetőleg egész számokat jelent is b_1, b_2, \dots, b_s , illetőleg n_1, n_2, \dots, n_s .

«Über Kreisgebiete, in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt»² című, nemrég megjelent dolgozatának 13. pontjában FEJÉR tovább halad; bebizonyítja, hogy az (1) egyenletnek legalább is *két* gyöke esik a (2) tartományba, valahányszor $\nu \geq 2$.

Könnyű FEJÉR elegáns bizonyító módszerét úgy módosítani, hogy annak segítségével a $\nu \geq 3$ esetre kimutathassuk olyan, a b_1, b_2, \dots, b_s és n_1, n_2, \dots, n_s értékétől független

$$|x| \leq R(a_0, a_\nu, \nu, s)$$

körtartomány létezését, melybe az (1) egyenletnek legalább 3 gyöke esik.

E körülmény és annak belátása, miszerint az $s=1$ és $s=2$ esetben, vagyis ha (1) trinomos, illetőleg quadrimomos egyenletet képvisel, ez egyenletnek mindenkor legalább ν számú gyöke esik a (2) körbe, ébresztette azt a sejtést, hogy az (1)-nél általánosabb

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_\nu x^\nu + b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \dots + b_s x^{n_s} = 0 \quad (3)$$

$$(a_\nu \neq 0, \nu < n_1 < n_2 < \dots < n_s)$$

algebrai egyenlet első $(\nu+1)$ tagja együtthatójának és a további

¹ 1°. «Sur la racine de moindre module d'une équation algébrique» (Comptes rendus, Paris, 1907., II. s.) 2°. «Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung» (Math. Ann. B. 65, 1908.) 3°. «Az algebrai egyenlet legkisebb abszolút értékű gyökéről» (Mathematikai és Fizikai Lapok. XVII. 1908.) 308—324. l.

² Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XXVI. 1917. S. 114—128.

tagok számának ismeretével megadható olyan, a b_1, b_2, \dots, b_s együtthatók és az n_1, n_2, \dots, n_s kitevők értékétől független

$$|x| \leq R(a_0, a_1, \dots, a_\nu, \nu, s) \quad (4)$$

körtartomány, melybe (3)-nak legalább is ν számú gyöke esik.

Valóban: az

$$|x| = 9^s \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |a_\nu|}{|a_\nu|} \quad (5)$$

körvonal a (3) egyenletnek minenkör legalább ν számú gyökét zárja magába;¹ ez állítás bebizonyítása dolgozatunk fő czélja. A bizonyítás aránylag elemi úton eszközölhető és alig igényel más lépéseket, mint olyanokat, melyek LANDAU-t föntebb idézett tételeinek igazolásához elvezették.

Megjegyzem, hogy ez az eredmény annyiban nem enged meg további tökéletesítést, a mennyiben adott a_0, a_1, \dots, a_ν együtthatók mellett *nem* adható meg olyan (4) típusú véges körtartomány, melyben minden (3) alatti egyenletnek ν -nél több (tehát legalább $(\nu + 1)$) gyöke volna.

Vszont az 1. §-ból kétségtelenül kiderül, hogy például az (5) formulában 9^s nem a «legjobb» állandó. Legjobb állandók meghatározására, melyekkel az (1) egyenlet kapcsán LANDAU és FEJÉR foglalkozott, e dolgozatomban nem térek ki.

Dolgozatunk második főeredményeképpen a 2. §-ban megmutatjuk, hogy a ν első a -együttható és valamelyik el nem tűnő b -együttható, például b_i segítségével is megadható oly

$$|x| \leq r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}, b_i, s) \quad (6)$$

kör, melybe (3)-nak minenkör legalább ν számú gyöke esik; ilyen kör a következő:

$$|x| \leq 9^{s+1} \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|}.$$

¹ Többszörös gyököket multiplicitásuknak megfelelően vesszünk számításba.

2. §.

I. tétel. Minden $(\nu+s+1)$ tagú

$$a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu + b_1x^{n_1} + b_2x^{n_2} + \dots + b_sx^{n_s} = 0 \quad (3)$$

$(a_\nu \neq 0, \nu < n_1 < n_2 < \dots < n_s)$

algebrai egyenletnek legalább ν számú gyöke van az

$$|x| = 9^s \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |a_\nu|}{|a_\nu|} \quad (5)$$

körvonal belsejében.

Tételünk csakis az esetre bizonyítandó, midőn az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}$ együtthatók között van 0-tól különböző. Tegyük fel, hogy a szóban forgó együtthatók nem tűnnek el valamennyien; és definiáljuk a pozitív τ számot az

$$|a_0| + |a_1|\tau + \dots + |a_{\nu-1}|\tau^{\nu-1} = \frac{1}{2}|a_\nu|\tau^\nu \quad (7)$$

egyenlőséggel (nyilvánvaló, hogy (7)-nek van pozitív gyöke és pedig egyetlen egy). Mivel a $t \geq \tau$ egyenlőtlenség az

$$\frac{1}{2}|a_\nu|t^\nu \geq |a_0| + |a_1|t + \dots + |a_{\nu-1}|t^{\nu-1}$$

egyenlőtlenséget involválja, az imént értelmezett τ azzal, a következőkben fontos tulajdonsággal bir, hogy

$$|a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu| > 0, \text{ ha } |x| \geq \tau. \quad (8)$$

Ezek előre bocsájtása után rátérünk az I. tétel bizonyítására, a fentebb tett megjegyzéshez képest csak az

$$|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| \neq 0$$

esetre szorítkozzván.

Először legyen $s = 1$, a mikor az (5) tartomány:

$$|x| \leq 9 \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |a_\nu|}{|a_\nu|}. \quad (9)$$

Hogy e tartomány valóban tartalmazza az

$$a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu + b_1x^{n_1} = 0 \quad (a_\nu \neq 0, \nu < n_1) \quad (10)$$

egyenletnek legalább ν gyökét, következőképpen látható be:

Legyen (10) ν -ed fokú szelete abszolút értékének minimuma az $|x| = \tau$ körön μ :

$$\text{Min}_{|x|=\tau} |a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu| = \mu; \quad \left(\frac{3}{2}|a_\nu|\tau^\nu \geq \mu \geq \frac{1}{2}|a_\nu|\tau^\nu\right)$$

akkor vagy

$$|b_1\tau^{n_1}| \leq \mu, \tag{11}$$

vagy

$$|b_1\tau^{n_1}| > \mu. \tag{11}$$

Az első esetben az $|x| = \tau$ körön

$$|a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu| \geq |b_1x^{n_1}|,$$

tehát egy jól ismert tétel¹ szerint az $|x| \leq \tau$ körben (10) gyökeinek száma pontosan megegyezik az

$$a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu = 0 \tag{12}$$

egyenlet gyökeinek számával; ámde (8) szerint (12)-nek mind a ν gyöke az $|x| < \tau$ tartományba esik, tehát a szóban forgó esetben (10)-nek ν számú gyöke esik az

$$|x| \leq \tau$$

körbe.

Ha pedig $|b_1\tau^{n_1}| > \mu$, alkalmazzuk (10)-re a következő, CAUCHY-nak tulajdonított tételt: a

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_kz^k = 0 \quad (c_k \neq 0)$$

egyenletnek valamennyi gyöke benne van a

$$|z| \leq 1 + \frac{\text{Max}(|c_0|, |c_1|, \dots, |c_{k-1}|)}{|c_k|}$$

körben. E tétel alapján (10)-nek minden (tehát $n_1 > \nu$) gyöke benne van az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{\text{Max}(|a_0|, |a_1|\tau, |a_2|\tau^2, \dots, |a_{\nu-1}|\tau^{\nu-1}, |a_\nu|\tau^\nu)}{b_1\tau^{n_1}} \right\}$$

¹ ROUCHÉ: «Mémoire sur la série de LAGRANGE», Journal de l'École polytechnique, t. 22 (f. 39), 1862, p. 217—218.

körben és így (7) s (11) szerint a fortiori benne van az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{|a_v \tau^v|}{\frac{1}{2}|a_v \tau^v|} \right\},$$

vagyis az

$$|x| \leq 3\tau. \quad (13)$$

körben; e kör a fentebbiek szerint a (11) esetben is tartalmazza (10)-nek legalább ν gyökét, úgy, hogy tételünk teljes beigazolásához csak még azt kell megmutatnunk, miszerint (13) a (9) tartománynak része. E végből alkalmazzuk CAUCHY tételét a (7) egyenletre; azt nyerjük, hogy

$$\tau \leq 1 + \frac{\text{Max}(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\nu-1}|)}{\frac{1}{2}|a_\nu|} < 2 \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |a_\nu|}{|a_\nu|}, \quad (14)$$

a mi mutatja imént tett állításunk helyességét.

$s = 1$ -re bebizonyított tételünk általános érvényű voltát teljes inductióval igazolandó, feltesszük, hogy minden

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_\rho x^\rho + \beta_1 x^{n_1} + \dots + \beta_\sigma x^{n_\sigma} = 0$$

$(a_\rho \neq 0, \rho < n_1 < n_2 < \dots < n_\sigma)$

algebrai egyenletnek van legalább ρ gyöke az

$$|x| \leq \rho \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_\rho|}{|a_\rho|} \quad (5\text{bis})$$

körben, ha csak $\sigma \leq s - 1$.

Legyen τ és μ jelentése a korábbi és legyen

$$\vartheta_1 = \frac{8}{9}, \vartheta_2 = \frac{8}{9^2}, \vartheta_3 = \frac{8}{9^3}, \dots, \vartheta_{s-1} = \frac{8}{9^{s-1}}, \vartheta_s = \frac{1}{9^{s-1}}; \quad (15)$$

nyilván

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_{s-1} + \vartheta_s = 1.$$

Összehasonlítjuk páronként a következő értékeket:

$$|b_i| \tau^{n_i}; \vartheta_i \mu \quad (i=1, 2, 3, \dots, s).$$

Három eset képzelhető:

1° $|b_i| \tau^{n_i} \leq \vartheta_i \mu$, ha $i=1, 2, \dots, s$;

2° $|b_i| \tau^{n_i} \leq \vartheta_i \mu$, ha $i=1, 2, \dots, s-1$, de $|b^{n_s}| \tau^{n_s} > \vartheta_s \mu$;

3° $|b_i| \tau^{n_i} \leq \vartheta_i \mu$, ha $i=1, 2, \dots, k-1$, de $|b^{n_k}| \tau^{n_k} > \vartheta_k \mu$, a hol $k < s$.

Az 1° esetben az $|x| = \tau$ körön

$$|a_0 + a_1x + \dots + a_\nu x^\nu| \geq \mu = \vartheta_1\mu + \vartheta_2\mu + \dots + \vartheta_s\mu \geq |b_1x^{n_1}| + |b_2x^{n_2}| + \dots + |b_sx^{n_s}| \geq |b_1x^{n_1} + \dots + b_sx^{n_s}|,$$

tehát az $|x| \leq \tau$ körben (3) és (12) gyökeinek száma ugyanakkora (ROUCHÉ szerint), vagyis az 1° esetben $|x| = \tau$ (3)-nak ν gyökét tartalmazza.

A 2° esetben CAUCHY tétele alapján az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{\text{Max} (|a_0|, |a_1|\tau, \dots, |a_\nu|\tau^\nu, \mu)}{\vartheta_s\mu} \right\}$$

kör (3)-nak valamennyi, tehát $n_s > \nu$ számú gyökét tartalmazza; (7) alapján a fortiori áll ez az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{2\mu}{\vartheta_s\mu} \right\},$$

vagyis az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{2}{\vartheta_s} \right\}$$

köréről.

Végül a 3° esetben korábbi feltevésünk alapján (lásd az (5^{bis}) tartományt) (3)-nak legalább is $n_k > \nu$ számú gyöke esik az

$$\frac{|a_0| + |a_1|\tau + |a_2|\tau^2 + \dots + |a_\nu|\tau^\nu + (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_{k-1})\mu + |b_k|\tau^{n_k}}{|b_k|\tau^{n_k}}.$$

körbe, tehát az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^{s-k} \frac{|a_0| + |a_1|\tau + \dots + |a_\nu|\tau^\nu + \mu}{\vartheta_k\mu},$$

vagy ((7) szerint) az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^{s-k} \cdot \frac{4}{\vartheta_k}$$

körbe.

A fentebb említett mindhárom esetben az

$$|x| \leq \tau \cdot \text{Max} \left\{ 1 + \frac{2}{\vartheta_s}, 4 \cdot \frac{9^{s-1}}{\vartheta_1}, 4 \cdot \frac{9^{s-2}}{\vartheta_2}, \dots, 4 \cdot \frac{9}{\vartheta_{s-1}} \right\} \quad (16)$$

kör (3)-nak legalább ν gyökét tartalmazza; ámde (15) alapján

$$\text{Max} \left\{ 1 + \frac{2}{\vartheta_s}, 4 \cdot \frac{9^{s-1}}{\vartheta_1}, \dots, 4 \cdot \frac{9}{\vartheta_{s-1}} \right\} = \text{Max} \left\{ 1 + 2 \cdot 9^{s-1}, \frac{1}{2} \cdot 9^s \right\} = \frac{9^s}{2}$$

és (14) szerint

$$\tau < 2 \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |a_\nu|}{|a_\nu|},$$

tehát a (16) kör része az (5) körnek és (5) valóban tartalmazza a (3) egyenletnek legalább is ν gyökét. Q. e. d.

3. §.

II. tétel. Minden $(\nu + s + 1)$ tagú

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + a_\nu x^\nu + \\ & + b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \dots + b_i x^{n_i} + \dots + b_s x^{n_s} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$(b_i \neq 0, \nu < n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots < n_s)$

algebrai egyenletnek legalább ν számú gyöke van az

$$|x| = 9^{s+1} \cdot \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|} \quad (18)$$

körvonal belsejében.

Tételünk nyilván igaz az $a_0 = a_1 = \dots = a_{\nu-1} = 0$ esetben; tegyük fel tehát, hogy az $a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}$ együtthatók között van 0-tól különböző és értelmezzük a pozitív τ számot az

$$|a_0| + |a_1| \tau + \dots + |a_{\nu-1}| \tau^{\nu-1} = \frac{1}{2} |b_i| \tau^{n_i} \quad (19)$$

egyenlőséggel.

Legyen

$$\text{Min}_{|x|=\tau} |a_0 + a_1 x + \dots + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + b_i x^{n_i}| = \mu, \quad \left(\frac{2}{9} |b_i| \tau^{n_i} \geq \mu \geq \frac{1}{2} |b_i| \tau^{n_i} \right);$$

legyen továbbá

$$\vartheta_0 = \frac{8}{9}, \vartheta_1 = \frac{8}{9^2}, \dots, \vartheta_{i-2} = \frac{8}{9^{i-1}}, \vartheta_{i-1} = \frac{1}{9^{i-1}}; \quad (20)$$

és vessük össze páronként az

$$|a_\nu| \tau^\nu, \vartheta_0 \mu; \text{ illetve } |b_k| \tau^{n_k}, \vartheta_k \mu \quad (k = 1, 2, \dots, i-1)$$

értékeket; a következő esetek fordulhatnak elő:

- 1° $|a_\nu| \tau^\nu \leq \vartheta_0 \mu$, $|b_k| \tau^{n_k} \leq \vartheta_k \mu$, ($k=1, 2, \dots, i-1$) és $i=s$;
- 2° $|a_\nu| \tau^\nu \leq \vartheta_0 \mu$, $|b_k| \tau^{n_k} \leq \vartheta_k \mu$, ($k=1, 2, \dots, i-1$), de $i < s$;
- 3° $|a_\nu| \tau^\nu \leq \vartheta_0 \mu$, $|b_k| \tau^{n_k} \leq \vartheta_k \mu$, ($k=1, 2, \dots, l-1$) és $|b_l| \tau^{n_l} < \mu$, hol $l < i$;
- 4° $|a_\nu| \tau^\nu > \vartheta_0 \mu$.

Az 1° esetben CAUCHY tétele szerint (17) minden gyöke benne van az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{\text{Max}(|a_0|, |a_1| \tau, \dots, |a_{\nu-1}| \tau^{\nu-1}, \vartheta_0 \mu, \vartheta_1 \mu, \dots, \vartheta_{i-1} \mu)}{|b_s| \tau^{n_s}} \right\}$$

körben, tehát (19) és (20) alapján az

$$|x| \leq \tau \left\{ 1 + \frac{\frac{3}{2} |b| \tau^{n_s}}{|b_s| \tau^{n_s}} \right\} = \frac{5}{2} \tau$$

körben is; mivel pedig ugyancsak CAUCHY tétele szerint

$$|\tau| < 2 \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|}, \quad (21)$$

tehát a szóban forgó esetben az

$$|x| = 5 \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|} \quad (22)$$

körvonal a (17)-nek legalább ν számú gyökét magába zárja.

A 2° esetben I. tételünk szerint (17)-nek legalább is $n_i > \nu$ gyöke esik az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^{s-i} \frac{|a_0| + |a_1| \tau + \dots + |a_{\nu-1}| \tau^{\nu-1} + \vartheta_0 \mu + \vartheta_1 \mu + \dots + \vartheta_{i-1} \mu + |b_i| \tau^{n_i}}{|b_i| \tau^{n_i}}$$

körbe, a miből (19), (20) és (21) tekintetbe vételével következik, hogy az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^{s-i} \cdot 3,$$

vagyis, hogy az

$$|x| \leq 6 \cdot 9^{s-i} \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|} \quad (23)$$

kör tartalmazza a (17)-nek legalább is ν gyökét.

A 3° , illetve a 4° esetben, ugyancsak I. tételünk szerint, (17)-nek legalább $n_i > \nu$, illetve ν gyöke beleesik az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^{s-l} \cdot \frac{|a_0| + |a_1| \tau + \dots + |a_{\nu-1}| \tau^{\nu-1} + \delta_0 \mu + \dots + \delta_{i-1} \mu + |b_i| \tau^{n_i}}{|b_i| \tau^{n_i}}$$

illetőleg az

$$|x| \leq \tau \cdot 9^s \frac{|a_0| + |a_1| \tau + \dots + |a_\nu| \tau^\nu}{|a_\nu| \tau^\nu}$$

körbe, a miből (19), (20) és (21) alapján legalább ν gyököt magába záró tartományokul az

$$|x| \leq 4 \cdot \frac{9^{s-l}}{\delta_l} \cdot \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|} \quad (24)$$

és az

$$|x| \leq 4 \cdot \frac{9^s}{\delta_0} \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{\nu-1}| + |b_i|}{|b_i|}, \quad (25)$$

köröket kapjuk.

A δ törtek (20) alatti definitióját tekintetbe véve, látjuk, hogy a (22), (23), (24) és (25) körtartományok a (18) körtartománynál nem kisebbek, tehát (18) valóban magába zárja a (17)-nek legalább ν számú gyökét, úgy, a mint állítottuk.

Az I. és II. tétel alkalmazásának érdekes tere van HEAWOOD-nak polynomok és deriváltjaik zérushelyeit illető vizsgálatai¹ egynémely általánosításánál; ezekről külön dolgozatban szándékozunk beszámolni.

¹ «Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$.» (Quarterly Journal of Math., Vol. XXXVIII. No. 1, 1906, No. 2, 1907).

PLANCK SUGÁRZÁSI ELMÉLETÉNEK ÚJABB MÓDOSÍTÁSA.

CSÁSZÁR ELEMÉR-től.

A fekete sugárzás terén végzett kísérleti vizsgálatok arra készítették PLANCK-ot, hogy a *folytonos energiakicserélődés* helyébe, mely — az addigi felfogás szerint — a sugárzás és a sugárzó források között fennállt, a *discontinuus absorptio és emissio* hypothesisét állítsa,¹ melynek következményei a kísérleti eredményekkel jól megegyeztek. Ez a lépés azonban annyira gyökeres volt s olyan ellenvetésekre talált, hogy czélszerűnek látszott bizonyos mértékben ismét a régebbi nézetekhez közeledni. Vagyis az említett PLANCK-féle sugárzási hypothesis felállítása után a problema a következő lett: *hogyan lehetne a discontinuitásnak minimumra való reductiójával egy, a kísérleti tényeknek megfelelő sugárzási formulát előállítani?*

Ez irányban maga PLANCK tette az első lépést, mikor az *absorptio discontinuitását elejtette*, ellenben feltette, hogy az oscillatorok csak akkor emittálhatnak, ha energiájuk az $\varepsilon = h\nu$ (hol h konstans, ν pedig az oscillator rezgésszáma) energiaquantumnak egészszámú többszöröse s emissio esetén összes energiájukat kiadják.² Ez a hypothesis is az ismert PLANCK-féle formulához vezet, de az előbbivel ellentétben megkívánja az oscillatorok részére középértékben az $\frac{\varepsilon}{2}$ *nullapont-energia* létezését.

Majd de BOISSOUDY³ állította fel a következő hypothesisist:

¹ M. PLANCK: Theorie der Wärmestrahlung I. kiadás. Leipzig, 1906, 152. o.

² U. ó.: I. c. II. kiadás, Leipzig, 1913. 149. o.

³ J. DE BOISSOUDY: Journal de Physique, 1913., V. 3., 387. o.

az oscillatorok energiája 0 vagy ε -nál nagyobb, tehát a 0 és ε közötti tartományban (ε -t is beleértve) egyáltalában nem lehetnek. Az ε -nál nagyobb energiával bíró oscillatorok működése azután folytonosan történik s így érvényes rájuk nézve a MAXWELL-féle energia-eloszlási törvény.¹ Ez a föltevés E. BAUER² részéről ellenvetésekre talált, melyek azonban nem mondhatók teljesen jogosultaknak. Mi csak annyit jegyzünk meg rá nézve, hogy legalább is a thermodynamikai egyensúly beállta előtt elkerülhetetlennek látszik, hogy egyes oscillatorok, melyeknek energiája 0, a másik energiatartományba ($\varepsilon - \infty$) ne jussanak és viszont, a mi pedig csak úgy lehetséges, ha az oscillatorok ε -nál nagyobb energiamennyiséget egyszerre absorbeálnak vagy emittálnak, mivel az ε -nál kisebb vagy ε energiamennyiségre nézve ez nem lehetséges, mert akkor egyes oscillatorok a 0— ε tartományba kerülnének. Ha azután a thermodynamikai egyensúly be is áll, nehezen képzelhető el, hogy bizonyos meghatározott számú oscillator energiája állandóan zérus, vagyis egyáltalában nem vesz részt az energia-kicserélődésben, dacára annak, hogy sugárzó-energia esik rá. Ha meg részt vesz, a mondottak szerint ismét elő kell fordulnia a *discontinuus absorptiónak*. Ezenkívül a mondott hypothesis nem szolgáltatja az $\frac{\varepsilon}{2}$ nullapont-energiát sem.

Eme hátrányai dacára azonban DE BOISSOUDY hypothesisa egy a kísérleti eredményekkel jól megegyező sugárzási formulához vezet, mely eleget tesz mindama követelményeknek, melyeket egy existenciaképes sugárzási formulával szemben felállítunk. Ezekről később lesz szó (l. 387—388. o.).

Vannak még más hypothesisok is, melyekre azonban kitérni nem szándékozunk.

Czélunk a fentebb említett, PLANCK által megkezdett úton még egy lépéssel tovább haladni, mely következményeiben nem szolgáltatja ugyan a PLANCK-féle formulát, hanem a DE BOISSOUDY által levezetettet, azonban a *teljesen folytonos absorptio mellett az emissio discontinuitását is lényegesen csökkenti*; a

¹ K. JELLINEK: Physikalische Chemie der Gasreaktionen. Leipzig, 1913, 374. o.

² E. BAUER: Journal de Physique, 1913. V. 3., 641. o.

DE BOISSOUDY-féle feltevással szemben pedig két előnye van: egyrészt az oscillatorok részére bármilyen energiabeli állapotot megenged (az ε alatt is!), másrésztől megadja középértékben az $\frac{\varepsilon}{2}$ nullapont-energiát is.

1. Alaphypotesis.

Legyen egy fekete sugárzással telt zárt űrben N számú lineáris oscillator jelen, mely oscillatorok ν rezgésszámmal bírnak s a fekete sugárzással thermodynamikai egyensúlyban állnak. Működésükre nézve a következő hypothesis legyen irányadó:

1. Az összes oscillatorok absorptioja folytonosan és az idővel arányosan történik.

2. Az $\varepsilon = h\nu$ energiaquantumnál kisebb energiával bíró oscillatorok csak absorbeálnak, de nem emittálnak; az ε energiával bírók emittálhatnak, de ez esetben összes energiájukat kiadják. Az ε -nál nagyobb energiával bíró oscillatorok emissiója is (tehát teljes működésük) folytonosan történik.¹

Három különböző tulajdonságú energiatartományunk van tehát: 0-tól ε -ig (ε -t nem beleértve), ε , és ε -tól ∞ -ig (ε -t szintén nem beleértve). Az ε határa a két különbözően működő oscillatorcsoportnak. A mint látható, az említett újabb PLANCK-féle hypothesis követelte discontinuitások csak a 0— ε tartományra szorítkoznak (ε -t beleértve), míg PLANCK-nál az egész 0— ∞ tartományra kiterjednek.

2. A valószínűségi függvény.

a) Mindenekelőtt megállapítjuk a valószínűségi függvény alakját, mely az oscillatoroknak a különböző energiatartományokban való eloszlására nézve irányadó lesz.

Az $\varepsilon - \infty$ tartományban e függvény alakja az ismert MAXWELL-féle:²

¹ Később kimutatjuk ennek egy könnyebben kezelhető hypothesis-sal való æquivalentiáját.

² K. JELLINEK: l. c. 374. o.

$$V_1 = \frac{1}{dE} \frac{dN_1}{N} = A_1 e^{-\frac{E}{E_1}}, \quad (1)$$

hol dN_1 jelenti az E és $E+dE$ energia-intervallumban lévő oscillatorok, N pedig az összes szereplő oscillatorok számát; továbbá

$$A_1 = \frac{1}{kT} \quad \text{és} \quad E_1 = kT. \quad (2)$$

Az ε -ra nézve e függvény értékét — a mint később látni fogjuk — nem szükséges meghatározni, hanem csak annyit mondunk, hogy az $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ és $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ között lévő energia-intervallumban ez a függvény *korlátos*, mivel az egész intervallumba eső oscillatorok száma N -nél föltétlenül kisebb. V_ε értékére nézve lásd a 379-ik oldal (7) egyenletét.

Az ε -nál kisebb energiával bíró oscillatorok esetében a valószínűségi függvénynek olyan alakot kell felvennie, a mely $\varepsilon \sim 0$ esetében átmegy a MAXWELL-féle törvény által megkívánt alakba, de megfelel az alaphypothesisnek is; az A_1 és E_1 konstansok tehát olyan A_0 és E_0 értékeket nyernek, mely értékeknek az előbbiek határesetét képezik. Maga a függvény:

$$V_0 = \frac{1}{dE} \frac{dN_0}{N} = A_0 e^{-\frac{E}{E_0}}. \quad (3)$$

De a formula még más változást is szenved. Ugyanis az alaphypothesis 1. pontja értelmében thermodynamikai egyensúly esetén az oscillatorok eloszlása a $0-\varepsilon$ intervallumban *egyenletes*, vagyis ha a $0-\varepsilon$ tartományt tetszésszerűen számú, de egyenlő nagyságú dE intervallumokra osztva gondoljuk, a $0-dE$ intervallumban ugyanannyi oscillator van, mint bármelyik dE -ben, mert az E és $E+dE$ (hol úgy E , mint dE kisebb ε -nál) intervallumba csak azok az oscillatorok juthatnak be, melyek dt idővel előbb (dt idő szükséges a dE energiamennyiség absorptiójához) az $E-dE$ és E intervallumban voltak. Az ε alatt lévő dE intervallumok tehát egyenlővalószínűségű tartományok, mert bármelyikre nézve a $\frac{dN_0}{N}$ hányados értéke ugyan-

akkora, tehát a valószínűségi függvény értéke például akkora, mint a $0 - dE$ intervallumban; de itt, mivel $E = 0$, a függvény:

$$V_0 = A_0; \quad (3a)$$

meghatározandó A_0 konstans értéke, E_0 kiesett.

A valószínűségek összege nyilván 1, tehát

$$A_0 \int_0^{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}} dE + \int_{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}}^{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}} V dE + \frac{1}{kT} \int_{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} dE = 1,$$

hol V a valószínűségi függvény a jelzett szakaszban. De az integrálszámítás egyik középértéktétele szerint:¹

$$\int_{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}}^{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}} V dE = R \cdot d\varrho,$$

hol R a valószínűségi függvénynek az $\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}$ és $\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}$ szakaszban lévő maximuma és minimuma közti számértéket jelent. Együttal

$$\lim_{d\varrho \rightarrow 0} (R d\varrho) = 0.$$

Ha [az integratio elvégzése után a baloldali határértékét vesszük $d\varrho = 0$ esetén:

$$A_0 \varepsilon + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 1,$$

melyből

$$A_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right), \quad (4)$$

mely $\varepsilon \sim 0$ esetében valóban felveszi A_1 értékét.

Behelyettesítve ezt a (3a)-ba:

$$V_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right). \quad (3b)$$

¹ BEKE M.: Differenciál- és integrálszámítás I. 364. o.

Ha ε igen kicsiny (folytonos energiakicserélődés), akkor V_0 és V_1 értéke egymással megegyezik:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_0 = \frac{1}{kT} \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_1 = \frac{1}{kT}.$$

b) A valószínűségi függvény alakját az egyes tartományokban még úgy is meg lehet állapítani, ha először a *folytonos absorptio* és *discontinuus emissio* feltevése alapján általánosítjuk a MAXWELL-féle energia-eloszlási törvényt. Ekkor a 376. oldalon a $0-\varepsilon$ tartományra tett megjegyzések az összes ε nagyságú energiatarományokra érvényesek thermodynamikai egyensúly esetében, vagyis bármelyik ε nagyságú energiataromány belsejében az oscillatorok *eloszlása egyenletes*. Tehát az n -ik ε tartományban a valószínűségi függvény értéke:

$$V' = \frac{1}{dE} \frac{dN_n}{N} = A'_0 e^{-\frac{n\varepsilon}{E'_0}}, \quad (5)$$

hol dN_n az n -ik ε energiatarományban egy dE intervallumban lévő oscillatorok számát jelenti. Látható, hogy egy-egy ε tartományban a valószínűségi függvény értéke állandó. Meghatározandók az A'_0 és E'_0 konstansok.

Mivel a valószínűségek összege 1, fennáll

$$A'_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{n\varepsilon}{E'_0}} \int_0^{\varepsilon} dE \right\} = 1,$$

melyből

$$A'_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{E'_0}} \right).$$

Az E'_0 értéke ama követelmény alapján határozható meg, hogy *gázok* esetében egyrészt

$$A'_0 = \frac{1}{kT},$$

másrészt ekkor $\varepsilon \sim 0$, tehát

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A'_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{E'_0}} \right) = \frac{1}{E'_0},$$

tehát

$$E'_0 = kT.$$

Behelyettesítve a nyert értékeket az (5)-be, nyerjük a valószínűségi függvény alakját *teljesen discontinuus emissio* és *folytonos absorptio* esetén:

$$V' = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}. \quad (6)$$

Ez a formula, ha ε igen kicsiny, vagyis folytonos energia-kicszerélődés esetén átmegy az (1) formulába, feltéve, hogy $n\varepsilon = E$.

Most a $0-\varepsilon$ tartományban érvényben maradván az újabb PLANCK-féle hypothesis:

$$V_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right),$$

mivel itt $n = 0$.

Az ε esetében pedig

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \quad (7)$$

mivel ekkor $n = 1$.

Az $\varepsilon-\infty$ tartományban pedig

$$V_1 = \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}},$$

mert itt folytonos energia-kicszerélődés történik. Itt megkaptuk V_ε értékét is (7).

Az előbbi út *közvetlenül* vezet a célhoz, ez utóbbi pedig *egységesebb*.

c) Megvizsgáljuk a valószínűségi függvény viselkedését:

$$V_0 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{1}{kT} + \frac{1}{2!} \frac{\varepsilon}{(kT)^2} + \frac{1}{3!} \frac{\varepsilon^2}{(kT)^3} + \dots \quad (8)$$

Ellenben

$$V_1 = \frac{1}{\frac{kT}{E}}; e^{kT}$$

hol

$$E > \varepsilon.$$

Tehát fennáll, hogy

$$V_0 > V_1,$$

bármilyen legyen is V_1 -ben az E értéke a jelzett megszorítás mellett. Ennek fizikai jelentése az, hogy a $0-\varepsilon$ tartomány a legvalószínűbb hely az oszillatorok részére, hol azok mintegy összesűrűsödnek.

Az $E=\varepsilon$ helyen a valószínűségi függvénynek szakadása van, amennyiben ennek átlépése után V_0 -ból egyszerre V_1 lesz. Ez egyúttal a függvénynek *egyetlen* szakadása. A V_ε értékére a következőket mondhatjuk:

$$V_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}{e^{\frac{2\varepsilon}{kT}}} < \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = V_0,$$

mert a bal oldalon álló nevező nagyobb a jobboldalinál, míg a számlálók egyenlők. Továbbá

$$\begin{aligned} \frac{V_\varepsilon}{V_1(\varepsilon)} &= \frac{\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \\ &= \frac{\frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^3 + \dots}{\frac{\varepsilon}{kT} + \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^3 + \dots} < 1, \end{aligned}$$

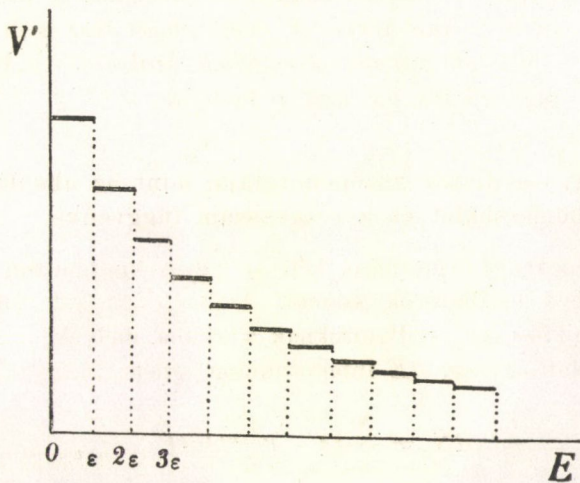
tehát

$$V_\varepsilon < V_1(\varepsilon),$$

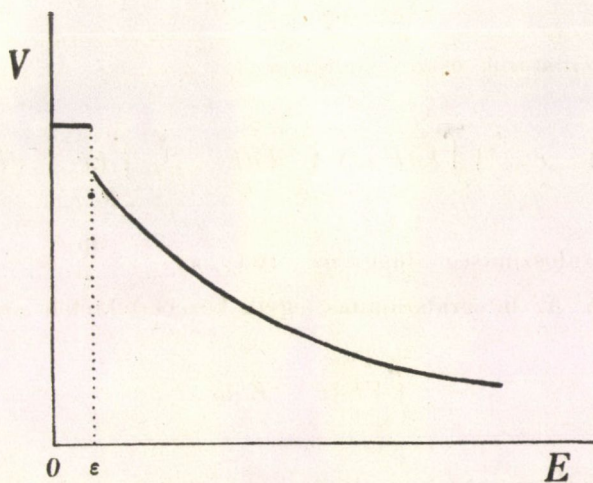
vagyis

$$V_0 > V_1(\varepsilon) > V_\varepsilon. \quad (8)$$

Tehát ha $E = \varepsilon$, a valószínűségi függvény leszáll V_ε -ra, majd ismét felszökik s E növekedésével az 0-hoz közeledik.



1. rajz.



2. rajz.

Az újabb PLANCK-féle elméletben szereplő valószínűségi függvény (6) viselkedését graphikusan az 1. rajz tünteti elő, mely-

ből látható, hogy e függvénynek *végtelen sok szakadása van* E növekedésével a függvény lépcsőzetesen fog.

Az alaphypothesisünknek megfelelő valószínűségi függvényt (379. o.) pedig a 2. rajz ábrázolja, mely eleget tesz a (8) alatti feltételnek s melyből látható az *egyetlen szakadás*: a PLANCK-féle discontinuitásoknak lényeges reductiója.

3. Egy oscillator középenergiája, mint az abszolút hőmérséklet és a rezgésszám függvénye.

Mindenekelőtt ismernünk kell az egyes energia-intervallumokban lévő oscillatorok számát. A (3b) és (1), (2) formulák alapján azoknak az oscillatoroknak a száma, melyek az ε alatt és az ε fölött egy-egy dE intervallumba esnek:

$$dN_0 = \frac{N}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) dE; \quad (9)$$

és

$$dN_1 = \frac{N}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} dE. \quad (10)$$

Az oscillatorok összes energiája:

$$U = \frac{N}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) \int_0^{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}} E dE + N \int_{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}}^{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}} V E dE + \frac{N}{kT} \int_{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}}^{\infty} E e^{-\frac{E}{kT}} dE, \quad (11)$$

hol V a valószínűségi függvény értéke az $\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}$ és $\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}$ szakaszban. Az integrálszámítás egyik középérték-tétele szerint⁴

$$\int_{\varepsilon - \frac{d\varrho}{2}}^{\varepsilon + \frac{d\varrho}{2}} V E dE = E_v d\varrho;$$

hol E_v a VE szorzatnak megfelelő középértékét jelenti; fennáll:

$$\lim_{d\varrho=0} (E_v d\varrho) = 0.$$

⁴ BERKE M.: J. C. S. 1911. 1. kötet, 175. oldal.

Ha az integratio elvégzése után a jobb oldal határértékére térünk át $d\rho = 0$ esetében, akkor

$$U = \frac{N\varepsilon}{2} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) + N\varepsilon^{-\frac{\varepsilon}{kT}} (\varepsilon + kT). \quad (11a)$$

Az eredmény ugyanaz, mintha a fenti integratiót $0 - \varepsilon$ és $\varepsilon - \infty$ határok között végeztük volna. Eme körülmény pedig annak a ténynek a kifejezője, hogy 0-tól különböző véges energiamennyiség csakis bármilyen csekély, de véges energia-intervallumba eshetik éppen úgy, mint a sugárzásnál véges energiamennyiség csak egy ν és $\nu + d\nu$ rezgésszám-intervallumba eshetik, míg a ν rezgésszámú monochromatikus sugárzás energiája csak másodrendű kicsiny lehet.

Egy oscillator középenergiája (mivel N az összes oscillatorok száma):

$$\bar{U} = \frac{\varepsilon + kT}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}, \quad (12)$$

vagy összevonva:

$$\bar{U} = \frac{\frac{\varepsilon}{2} + kT}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (13)$$

melyből

$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{U} = \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $T=0$ esetében nyerjük az oscillatorok részére középértékben az $\frac{\varepsilon}{2}$ nullapont-energiát. Viszont igen magas hőmérséklet esetén:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{U} = kT,$$

mivel ekkor minden discontinuitas elenyészik.

A DE BOISSOUUDY-féle elméletben a középenergia

$$\bar{U} = \frac{\varepsilon + kT}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}, \quad (14)$$

melytől a miénk az

$$\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}$$

addendus tagokban különbözik.

4. Egy segédhypothesis.

Egy újabb hypothesis-t az alaphypothesis-sel æquivalensnek mondhatunk, ha a belőle vont következtetések annak következményeivel teljesen megegyeznek. Itt elsősorban: ha belőle az oscillatorok részére levezethető középenergia-érték az előbbivel (13) megegyezik. Egy ilyen hypothesis a következő:

$N \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$ számú oscillator az egész $0 - \infty$ energiatartományban folytonosan és az idővel arányosan absorbeál, de bármelyik csak akkor emittálhat, ha energiája az $\varepsilon = h\nu$ energia-quantumnak egészszámú többszöröse, s emissio alkalmával összes energiáját kiadja; a többi $Ne^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ számú oscillator pedig az egész $0 - \infty$ tartományban folytonosan működik.¹

Természetesen

$$N \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right) + Ne^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = N.$$

Állapítsuk meg e hypothesis alapján egy oscillator középenergiáját. A discontinuusan működő csoportra nézve érvényes az újabb PLANCK-féle sugárzási elmélet eredménye,² vagyis egy ilyen oscillator középenergiája:

$$\bar{U}_1 = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

¹ A mennyiben $N \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$ és $Ne^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ nem lennének egész számok, az előbbi helyett a hozzá legközelebb álló nagyobb, az utóbbi helyett pedig a kisebb egész szám gondolandó. Megjegyezzük, hogy e hypothesis-t nem tekintjük az alaphypothesis-sel egyidejűleg érvényesnek az adott oscillator-rendszerre, hanem ez csak egy számítási hypothesis, mely különben a (11a)-ból azonnal következtethető.

² M. PLANCK: l. c. II. 140. o.

A folytonosan működő csoportra nézve érvényes a klasszikus elmélet eredménye:¹

$$\bar{U}_1 = kT. \quad (16)$$

Tehát az oscillatorok összes energiája:

$$U = N \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \right) \left\{ \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} + \frac{\epsilon}{2} \right\} + N e^{-\frac{\epsilon}{kT}} kT. \quad (17)$$

A számítások elvégzése után egy oscillator középenergiája:

$$U = \frac{\frac{\epsilon}{2} + kT}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ez pedig a (13) formulával teljesen megegyezik, tehát a segédhypothesis a számítások elvégzésére használható. Benne az által jut kifejezésre a discontinuitások reductiója, hogy míg PLANCK-nál az összes oscillatorok discontinuusan emittálnak, addig a segédhypothesis szerint csak néhány oscillator emittál discontinuusan, a többi folytonosan működik. Ugyanis az $N \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \right)$ kicsiny szám, mert $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$ az 1-től csekéllyel különbözik, ha a hőmérséklet nem túlságosan alacsony, s így túlnyomó a folytonosan működő oscillatorok száma. A discontinuusan működő oscillatorok száma a hőmérséklet növekedésével fogy és $T = \infty$ esetében zérus lesz.

E hypothesis talán könnyebben kezelhetőnek látszik, mint az alaphypothesis; mivel azonban megkívánja az oscillatorok szerkezetének a hőmérséklettel való változását, vagyis azt, hogy egyes discontinuusan emittáló oscillatorok a hőmérséklet növelésével folytonosan működökké alakuljanak át és viszont, mégis realisabbnak látszik az alaphypothesis, melyben — bár hasonló discontinuitas fordul elő — az összes oscillatorok működése egyszersmindenkorra elő van írva, bármilyen legyen is a hőmérséklet.

¹ M. PLANCK: l. c. II. 140. o.

5. Egy oscillator középenergiájának és a sugárzás sűrűségének kapcsolata.

Segédhypothesisünknek tulajdonképpeni célja éppen ennek az összefüggésnek megállapítása volt, mely most már nagyon egyszerűen történhetik.

A discontinuusan emittáló oscillatorcsoportra érvényes:¹

$$\bar{U}_1 = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (18)$$

hol u_ν a ν rezgésszámú nem poláros sugárzás sűrűsége, c pedig a fény terjedési sebessége vacuumban.

Viszont a folytonosan működő csoportra nézve:²

$$\bar{U}_2 = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu. \quad (19)$$

Tehát az oscillatorok összes energiája:

$$U = N \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) \left\{ \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu + \frac{\varepsilon}{2} \right\} + N e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu. \quad (20)$$

A számítások elvégzése után egy oscillator középenergiája:

$$\bar{U} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (21)$$

Mivel $T = 0$ esetében $u_\nu = 0$,

$$\lim_{T=0} \bar{U} = \frac{\varepsilon}{2};$$

igen magas hőmérséklet esetén pedig

$$\lim_{T=\infty} \bar{U} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u_\nu,$$

a mint azt a folytonos energia-kieserélődés megkívánja.

¹ M. PLANCK: l. c. II. 161. o.

² U. ó.: l. c. I. 124. o.

Egy oscillator középenergiájának (21) alatti kifejezésében mintegy visszatükröződik a PLANCK-féle discontinuitások reduciója, mert míg a teljesen discontinuus emissio esetén az

$$\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}$$

kivonandó tag hiányzik, addig most éppen ennek jelenléte folytán közelebb jut a középenergia értéke a folytonos energia-kicserélődés esetén fennálló értékhez (19).

6. A sugárzási formula.

Egy oscillator középenergiájának két különböző kifejezését, (12)-t és (21)-et egymással egyenlővé tesszük:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon + kT}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu + kT}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}. \quad (22)$$

De

$$u_\nu = \frac{8\pi E_\nu}{c}, \quad (23)$$

hol E_ν jelenti a ν rezgésszámú *linearisan poláros* sugárzás specifikus intenzitását; továbbá mivel

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

ha λ a hullámhosszúságot jelenti:

$$E_\lambda = E_\nu \left(\frac{c}{\lambda} \right) \frac{c}{\lambda^2} = \frac{c^2}{8\pi\lambda^2} u_\nu. \quad (24)$$

Tehát

$$E_\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1 + \frac{hc}{k\lambda T}}{\frac{hc}{k\lambda T} e^{\frac{hc}{k\lambda T}}} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1 + \frac{c_2}{\lambda T}}{\frac{c_2}{\lambda T} e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}, \quad (25)$$

¹ M. PLANCK: l. c. II. 23. o.

² U. ő: u. o. 18. o.

hol c_1 és c_2 konstansok. Ez pedig az E. BAUER és M. MOULIN által proponált¹ és DE BOISSOUDY² által levezetett formula, melynek nevezetesebb tulajdonságai a következők: a PLANCK-féle formulától oly csekély mértékben tér el, hogy DE BOISSOUDY szerint ez az eltérés a kísérleti megfigyelés határain alul marad; a λT szorzatnak c_2 -höz képest kicsiny értékei mellett átmegy a WIEN-féle formulába:

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}, \quad \bullet \quad (26)$$

mert ekkor a számlálóban $\frac{c_2}{\lambda T}$ mellett az 1 elhanyagolható; a λT szorzatnak c_2 -höz képest nagy értékei mellett pedig átmegy a RAYLEIGH-féle formulába:

$$E_\lambda = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{T}{\lambda^4}, \quad (27)$$

mert ekkor a $\frac{c_2}{\lambda T}$ hányados az 1 mellett elhanyagolható; továbbá ekkor

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \sim 1;$$

eleget tesz továbbá a WIEN-féle eltolódási törvénynek és a STEFAN-BOLTZMANN-féle totális sugárzási törvénynek, tehát a PLANCK-féle formula összes lényeges tulajdonságaival bír.

7. Az oscillator-rendszer fajhője és entropiája.

a) Ismerve az oscillator-rendszer energiáját, könnyen meghatározhatjuk a rendszernek állandó térfogat melletti fajhőjét (C_v), mert ismert összefüggés alapján:

$$C_v = \frac{dU}{dT}. \quad (28)$$

¹ E. BAUER és M. MOULIN: Procès-verbaux des Séances de la Société de Phys., 1909. 81. o.

² J. DE BOISSOUDY: l. c. 389. o.

A (13) formula felhasználásával:

$$C_v = kN \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{kT} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (29)$$

Ezzel szemben a DE BOISSOUUDY-féle formula

$$C_v^B = kN \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{kT} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}, \quad (30)$$

mely a DULONG-PÉKIT-féle konstansnak megfelelő maximummal bír.¹ Formulánk ilyen maximumot nem mutat, miről meggyőződhetünk, ha azt $\frac{kT}{\varepsilon}$ függvényének tekintve előállítjuk a differenciálhányadost:

$$\frac{dC_v}{d\left(\frac{kT}{\varepsilon}\right)} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^4}{2e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}.$$

A fajhő tehát maximumát $T = \infty$ esetében érné el.

Hasonlítsuk össze most a (29) alatti kifejezést az EINSTEIN-féle fajhő-formulával:

$$C_{v^E} = kN \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1\right)^2}. \quad (31)$$

Alacsony hőmérséklet esetén a (-1) a nevezőben elhagyható s így ekkor

$$C_v^E = kN \cdot \frac{\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (31a)$$

¹ J. de Boissoudy: Journal de Physique 1913. V. 3. 394. o.

Mivel a (29) és (31a) formulák nevezői megegyeznek, csak a számlálókat kell vizsgálni, és kiderül, hogy ha $\frac{\varepsilon}{kT} \geq 3$, akkor már

$$\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 > \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{kT} + 1.$$

Mivel azonban $\varepsilon = h\nu$, az $\frac{\varepsilon}{kT}$ értéke a ν -tól is függ. Míg a DE BOISSOU DY-féle formula alacsony hőmérséklet esetén a fajhőre az EINSTEIN-félénél nagyobb értékeket ad, ezt a (29) alatti formuláról általában nem mondhatjuk.

b) Az entropia kifejezése céljából megjegyezzük, hogy a NERNST-PLANCK-féle entropia-tétel¹ értelmében

$$S_T = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT = x \int_0^T \frac{C_v}{T} dT, \quad (32)$$

hol

$$x = \frac{C_p}{C_v}.$$

Tehát

$$S_T = kNz \int_0^T \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{kT} + 1}{T e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} dT. \quad (32a)$$

Az entropia tehát három részből állónak tekinthető:

$$S_T = kNz (S_1 + S_2 + S_3). \quad (32b)$$

Legyen

$$\frac{\varepsilon}{kT} = x, \quad \text{akkor} \quad T = \frac{\varepsilon}{kx} \quad \text{és} \quad dT = -\frac{k}{x^2} dx;$$

$$\text{ha } T = 0, \quad \text{akkor } x = \infty,$$

$$\text{ha } T = T, \quad \text{akkor } x = \frac{\varepsilon}{kT}.$$

¹ K. JELLINEK: l. c. 152. o.

Felhasználva ezt:

$$S_1 = \frac{\varepsilon^2}{2k^2} \int_0^T \frac{dT}{T^2 e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\varepsilon}{kT}}^{\infty} \frac{x dx}{e^x},$$

vagyis

$$S_1 = \frac{\frac{\varepsilon}{kT} + 1}{2e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (33)$$

Továbbá

$$S_2 = \frac{\varepsilon}{k} \int_0^T \frac{dT}{T^2 e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = \int_{\frac{\varepsilon}{kT}}^{\infty} \frac{dx}{e^x},$$

vagyis

$$S_2 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}. \quad (34)$$

Végül

$$S_3 = \int_0^T \frac{dT}{T e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} = \int_{\frac{\varepsilon}{kT}}^{\infty} x e^x.$$

A jobboldali integrál az úgynevezett *integrállogarithmus*, melynek értéke ¹ a következő végtelen sor alakjában állítható elő *bármilyen véges, reális x* értékre nézve:

$$\int_x^{\infty} \frac{dx}{x e^x} = -\text{li}(e^{-x}) = \quad (35)$$

$$= -C - \log x + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots,$$

hol *C* az EULER-MASCHEPONI-féle konstanst jelenti:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0.5772156649 \dots$$

¹ V. ö. FRÖHLICH I.: *Mathematikai Repertorium physikusok számára*; Budapest, 1890, 136. lap, 22. sz. formula, az integratio állandóján kívül; vagy N. NIELSEN: *Theorie des Integrallogarithmus*, Leipzig 1906., 2. és 18. o.

E kifejtés az e^{-x} -nek közönséges sora felhasználásából adódik. Hogy a jobboldali végtelen sor x -nek az említett közben lévő bármely értéke mellett convergens, az az exponentialis sorral, mint majorans sorral való összehasonlítás révén rögtön kiderül.

Mivel $T = 0$ esetében $S_1 = S_2 = 0$, továbbá a NERNST-PLANCK-féle entropia-tétel értelmében az entropiának az abszolút zérus foknál 0-nak kell lennie, szükséges, hogy a fenti sorozat $T = 0$ vagyis $x = \infty$ esetén 0 határértékhez közeledjék. Hogy ez valóban így van, az az integrállogarithmus *asymptotikus* előállításából¹ azonnal látható. Ugyanis x -nek tetszésszerűen nagy *reális pozitív* értéke mellett fennáll:

$$-\operatorname{li}(e^{-x}) = \frac{1}{e^x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right) + \frac{R_n}{e^x}, \quad (36)$$

hol

$$|R_n| < \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Ez a kifejtés az

$$-\operatorname{li}(e^{-x}) = \int_x^{\infty} \frac{-d(e^{-x})}{x}.$$

alakjának folytatólagosan *ismételt* partiális integrálásából adódik. A (36) jobb oldalának határértéke — ha x a pozitív ∞ felé tart — nyilvánvalóan zérus, a mi állításunkat igazolja.

Tudva azt, hogy a $-\operatorname{li}(e^{-x})$ az $x = \infty$ esetén 0 felé tart, a L'HOSPITAL-szabálylyal kimutatható, hogy erősebben válik zérussá, mint e^{-x} , vagyis

$$\lim_{x=\infty} \frac{-\operatorname{li}(e^{-x})}{e^{-x}} = 0,$$

ha először differenciáljuk külön a számlálót és a nevezőt, majd $\frac{x}{x}$ -szel szorzunk.

Behelyettesítve $x = \frac{\varepsilon}{kT}$ értékét (35)-be:

¹ N. NIELSEN: l. c. 37. o.

$$S_s = -C - \log \frac{\varepsilon}{kT} + \frac{\varepsilon}{kT} - \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^3 - \dots \quad (37)$$

Fölhasználva a nyert értékeket a (32b) alapján:

$$S_T = kN_x \left\{ \frac{\frac{\varepsilon}{kT} + 3}{2e^{\frac{\varepsilon}{kT}}} - \left[\log \frac{\varepsilon}{kT} - \frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 - \frac{1}{3 \cdot 3!} \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^3 + \dots \right] - C \right\}, \quad (38)$$

mely T hőmérséklet mellett az oscillator-rendszer entropiáját fejezi ki s melyre nézve $T = 0$ esetén fennáll:

$$S_0 = 0.$$

Mivel az $\frac{\varepsilon}{kT}$ pusztán szám, a (38) jobb oldalának jellege (dimenziója) k -ével egyezik, vagyis ez entropia-jelleg.

Röviden az $\varepsilon = h\nu$ helyettesítéssel:

$$S_T = kN_x \left\{ \frac{\frac{h\nu}{kT} + 3}{2e^{\frac{h\nu}{kT}}} - \text{li} \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \right\}, \quad (39)$$

mely érdekes analogiát mutat a megfelelő PLANCK-féle entropia-kifejezéssel:²

$$S_T^p = kN \left\{ \frac{\frac{h\nu}{kT}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} - \log \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \right\}. \quad (40)$$

¹ Mivel szilárd testek esetében nem magas hőmérséklet mellett $C_p \sim C_v$, a x faktor el is hagyható. K. JELLINEK: I. c. 386. o.

² M. PLANCK: I. c. II. 141. o.

8. Az alaphypotesis lehetőségének vizsgálata.

Az 1. pontban felállított hypotesis lehetőségét támogatja ugyan következménye: hogy belőle egy, a tapasztalattal meg-egyező sugárzási formula vezethető le; de e mellett nem lesz fölösleges megvizsgálni, hogy érvényessége esetében állhat-e fenn stationarius energiabeli állapot, vagyis egyenlő-e az összes oscillatorok által például az *időegység alatt absorbeált* energia az ugyanez idő alatt *emittálttal*, a mi az alaphypotesis existentiájának fontos kriteriuma. A segédhypotesisből azonnal kiviláglik, hogy ez követelményünknek eleget tesz, mert úgy a discontinuusan emittáló, mint a folytonosan működő csoportra nézve már PLANCK kimutatta a stationarius energiabeli állapot lehetőségét.¹ Mivel azonban a segédhypotesis alaphypotesis-sünkkel æquivalens, nyilvánvalóan az is existentiaképes.

Ezt azonban közvetlenül is ki lehet mutatni. A $0-\varepsilon$ tartomány belsejében a következő rezgési egyenlet érvényes az oscillatorokra nézve:

$$Kf + L \frac{d^2f}{dt^2} = Z, \quad (41)$$

hol K és L az oscillator állandói, f az oscillator momentuma, Z a térerősségnek az oscillator tengelyébe eső komponense; a csillapítási tag hiányzik, mert ebben az intervallumban emissio nem történik.² Az $\varepsilon-\infty$ tartomány belsejében érvényes a következő rezgési egyenlet:³

$$Kf + L \frac{d^2f}{dt^2} - \frac{2}{3c^3} \frac{d^3f}{dt^3} = Z. \quad (42)$$

Az ε határon a rezgési egyenlet alakjára nincs szükségünk.

Fejezzük ki az összes oscillatorok által az időegység alatt *absorbeált* energiamennyiség értékét a rezgési egyenletekből

¹ M. PLANCK: l. c. II. 158. és I. 123. o.

² U. ö.: l. c. II. 148. o.

³ U. ö.: l. c. I. 113. o.

levezethető PLANCK-féle eredményekre támaszkodva. A $0-\varepsilon$ tartomány belsejében egy oscillator által dt idő alatt absorbeált energiamennyiség legyen dE , akkor mivel ez arányos az idővel:

$$dE = a \cdot dt,$$

hol a arányossági tényező, mely egy oscillator által az időegység alatt absorbeált energiamennyiséget fejezi ki.

Az $\varepsilon-\infty$ tartomány belsejében egy oscillator által az időegység alatt absorbeált energiamennyiség középértékben:

$$\bar{I} = \frac{3c^3}{16\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2 \sin^2 \gamma_n}{\nu^2}; \quad (43)$$

hol c a fény terjedési sebessége légüres térben, C_n a Z komponens FOURIER-sorában szereplő amplitudókat, γ_n pedig a partiális Z értékeknek megfelelő f (\dot{f} az oscillator momentuma) értékek között lévő phasiskülönbségeket jelenti.²

A $0-\infty$ tartományban az időegység alatt *absorbeált összes energia*, ha a (11)-hez hasonló módon az $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ és $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ elemi tartományt külön vesszük számításba:

$$U_a = Na \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) + N \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = N \left\{ \frac{\bar{I} - a}{\varepsilon} + a \right\}. \quad (44)$$

Most ki fogjuk fejezni az oscillatorok által az időegység alatt *emittált* összes energiát. — A $0-\varepsilon$ tartomány belsejében az időegység alatt emittált energia zérus, mivel alaphypotesisünk szerint itt emissio nem történik.

Az ε határon lévő oscillatorok által dt idő alatt akkora energiamennyiség emittálódik, a mekkora ez alatt az idő alatt kiadott ε -ok száma; mivel azonban az emittáló oscillatorok mind a $0-dE$ intervallumba jutnak, annyi oscillator emittál dt idő

¹ M. PLANCK: l. c. I. 121. o., (189) formula.

² M. PLANCK: l. c. I. 112—123. o.

alatt, a mennyi ennek az időköznek végpontjában a $0 - dE$ intervallumban lévő oscillatorok száma; ez pedig

$$\frac{N}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right) dt.$$

Ez a szám a thermodynamikai egyensúly következtében az időben állandó, tehát bármelyik dt időköz alatt emittáló oscillatorok számát kifejezi. Mindegyik oscillator ε energiát emittál, tehát az időegység alatt általuk kilövelt energia:

$$Na \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right). \quad (45)$$

Az $\varepsilon - \infty$ tartomány belsejében az időegység alatt egy oscillator által emittált energiát a (43) fejezi ki.

A $0 - \infty$ tartományban az időegység alatt *emittált összes energia* tehát szintén:

$$N \left\{ \frac{I - a}{\varepsilon} + a \right\}, \quad (46)$$

mely az ugyanez idő alatt absorbeált energiamennyiséggel (44) teljesen megegyezik.

Alaphypothesisünk esetében tehát stationarius energiabeli állapot fennállhat.

A LINEARIS EGYENLŐTLENSÉGEK KÖVETKEZMÉNYEI.

FARKAS GYULA r. tagtól.

Hogy egy linearis egyenlőtlenség adott linearis egyenlőtlenségek következménye legyen (azaz utóbbiak minden megoldásában teljesüljön), erre a szükséges és elégséges föltétel egy típusát határozza meg a linearis egyenlőtlenségek «alaptétele». A *homogen* linearis egyenlőtlenségeken az alaptétel hatféle deductiójára utalhatok.¹ Mindegyik deductio egyenesen az alaptétel specialis tartalmára törekszik, úgy hogy mindegyiknek a módszere szorosan a tételt alkotó *speczialis* típusú föltételhez igazodott. Egy igen egyszerű segédtételnek nem kevésbé egyszerű fölhasználásával juthatunk el pedig a szükséges és elég-

¹ 1. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai. Math. és Termt. Értesítő XII. k. 457—472. l. 1895 és Ueber die Anwendungen des mechanischen Principis von FOURIER. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn Bd. XII. p. 263—281. 1895.

2. H. MINKOWSKY: Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1896. 43—45. l.

3. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról. Math. és Phys. Lapok V. k. 49—54. l. 1896 és: Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des FOURIER-schen Principes in der Mechanik. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn Bd. XV. p. 25—40. 1898.

4. A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja. Math. és Termt. Értesítő XVI. k. 361—364. l. 1898. Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Principis von FOURIER. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn Bd. XVI. p. 154—157. 1899. és: Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. CXXIV. p. 1—27. 1902.

5. A mechanika alaptanai. Kolozsvári egyetemi előadások könyomata. 1914.

6. HAAR A.: A linearis egyenlőtlenségekről. Math. és Termt. Értesítő XXXVI. k. 279—296. l. 1918.

(8)-ből az u változók eliminálása s úgy nem léteznek az (5) alatti egyenletek s úgy nem léteznek az a együtthatók sem.

4. §. Behelyezve a (10)-be és (14)-be a (11)-ből az a együtthatók kifejezéseit, azután a λ és μ paraméterek szerint rendezve azokat, kitűnik, hogy $y(u)$ -nak, illetőleg az A_1, \dots, A_n együtthatóknak az értéke független a μ szorzóktól, tehát csak általános kifejezésük alakja függ tőlük. Ugyanis a (10)-ben és (14)-ben a μ szorzók teljes factorai identikusan eltűnnek az a együtthatók jelentményének következtében, minélfogva az is való, hogy a (9), illetőleg a (15) minden homogen linearis következményének a

$$\lambda_1 x_1(u) + \dots + \lambda_r x_r(u) \geq 0, \quad (\lambda \geq 0!)$$

alakra vezethetőnek kell lennie (s ez a homogen linearis egyenlőtlenségek «alaptétele»). Hogy a (10), illetőleg a (12) következménye legyen a (15)-nek, ehhez szükséges és elégséges tehát, hogy (10)-ben és (14)-ben $a = \lambda \geq 0$ lehessen, de, ha léteznek az a együtthatók, akkor nem szükséges, hogy az a tényleg is $= \lambda (\geq 0)$ legyen, hanem a (11) alatt követelt a mennyiségek is lehetségesek, még pedig mindig tetszés szerint választható μ szorzókkal lehetségesek azok és maga a (11) az általános meghatározásuk.

Ha eliminálhatók (8) alól az u változók és úgy léteznek az (5) alatti vonatkozások s úgy léteznek az a együtthatók, akkor mindig végtelen sokféle a szolgálhat ugyanazon következményes egyenlőtlenség előállítására, mivelhogy bármely μ szorzók ugyanazon értékű $y(u)$ kifejezést, illetőleg ugyanazon értékű A_1, \dots, A_n együtthatókat szolgáltatnak. Kiváló példája a μ szorzók specialis megválasztásának az, a mely az alaptétel HAAR-féle alakjához vezet, miszerint a (15) minden homogen linearis következményéhez meghatározhatók úgy ennek az együtthatói, hogy $r-l$ vagy kisebb számú együtthatója pozitív (>0) és a többi zérus legyen.¹

Tegyük fel ugyanis, hogy eredetileg a zérustól különböző λ mennyiségek száma $> r-l$, s úgy az eltűnő λ mennyiségek

¹ HAAR A. l. c.

száma $< l$, sőt esetleg $= 0$ a (11)-ben. A λ tagokhoz adandókat rendre $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ -vel jelölve a (11)-ben:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1 + \varphi_1, \dots, \alpha_r = \lambda_r + \varphi_r. \\ \varphi_j &\equiv \sum_1^l a_{ij} \mu_i. \end{aligned} \tag{16}$$

Az egymástól független φ alakok száma l . Mivel tehát az eltűnő λ tagok száma $< l$, azért a mely λ tagok zérusok, azoknak a φ növekményeit valódián is zérusnak tehetjük meg. Ezen fölül annyi φ tagot tegyünk még zérussá (ha tudniillik a már zérussá tették száma $(l - 1)$ -nél is kisebb), hogy a megmaradt φ -k egyetlen μ -vel arányos változókká váljanak. Ezt a μ parametert zérusból indítva addig változtassuk pozitív vagy negatív értelemben, folytonos változtatással, míg valamelyik a vagy esetleg több is, el nem tűnik. A megmaradt a mennyiségek pozitívok. Ha nagyobb a számuk, mint $r - l$, akkor az általános (11)-ben a λ nemnegatívok helyébe az új (részint pozitív, részint zérus értékű) α -kat írva, ugyanúgy járjunk el az ismét rendelkezésünkre álló φ -ken, mint az imént. Nyilvánvalóan addig ismételtethető műveletek ezek, míg végül legalább l számú a tűnt el s emellett a többi, legfeljebb $r - l$ számú a pozitív. Olyan eljárás pedig ez, mintha eredetileg minden μ szorzót összetevőkre tagoltunk volna:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu'_1 + \mu''_1 + \dots, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_l &= \mu'_l + \mu''_l + \dots, \end{aligned}$$

aztán az ilymódon nemkülönben összetevőkre szétesett φ növekményeknek rendre az összetevőin végeztük volna a leírt műveleteket.

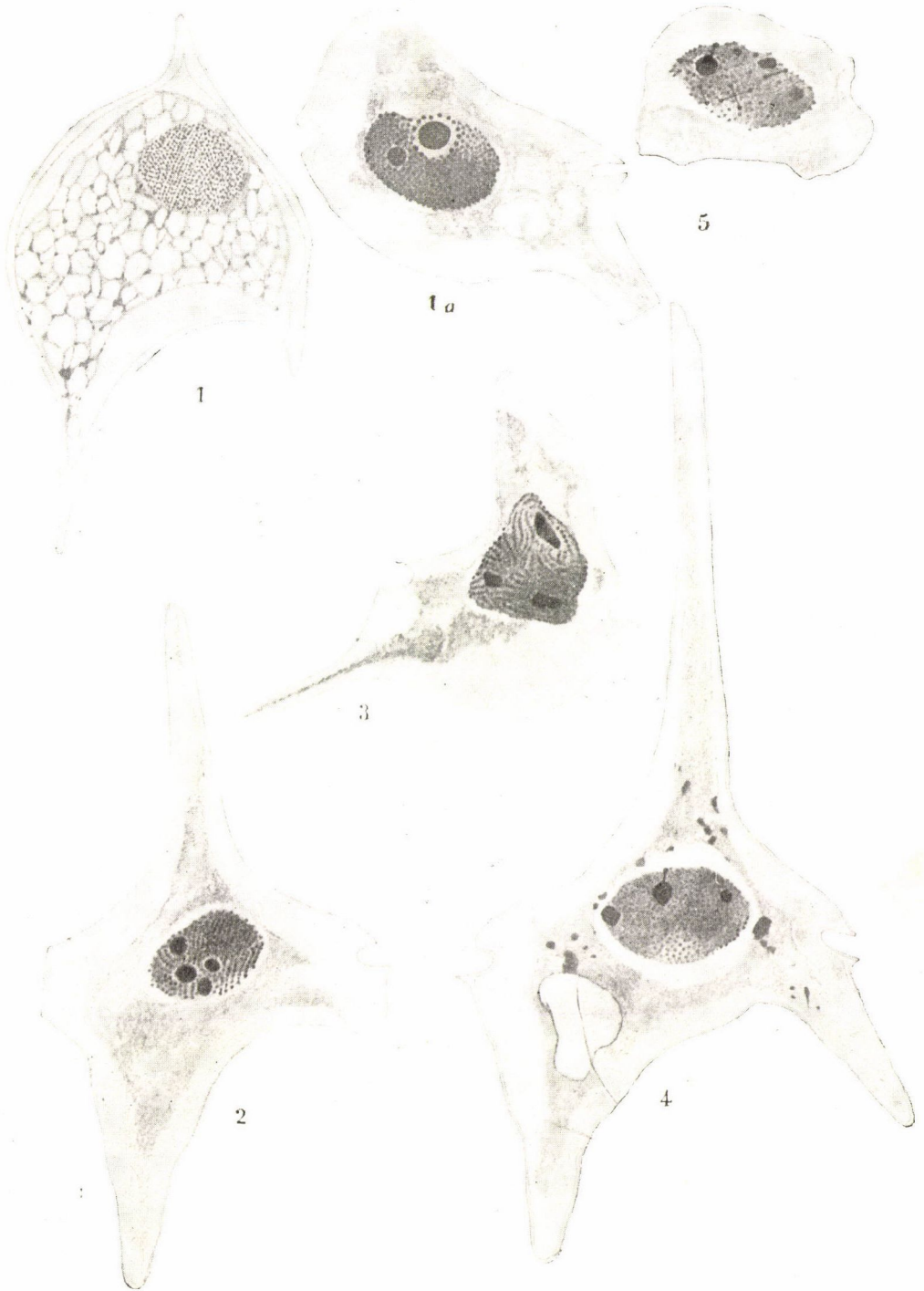
II. Az inhomogen linearis egyenlőtlenségek következményei.

5. §. Ha x_1, \dots, x_r alávétvék az

$$x_i \geq 0, \dots, x_r \geq 0 \tag{17}$$

egyenlőtlenségeknek, és, ha az a_0, a_1, \dots, a_r constansok nemnegatívok, akkor

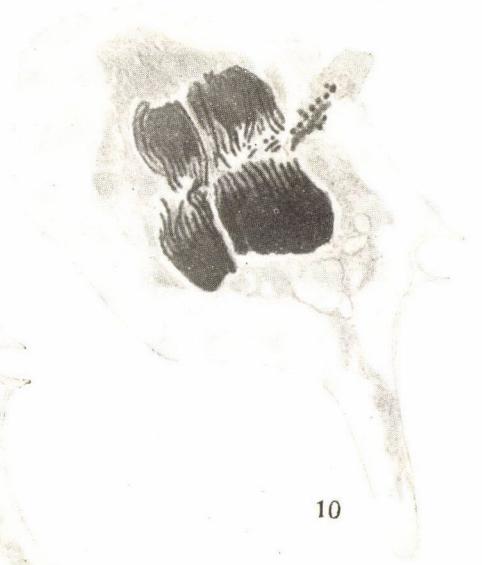
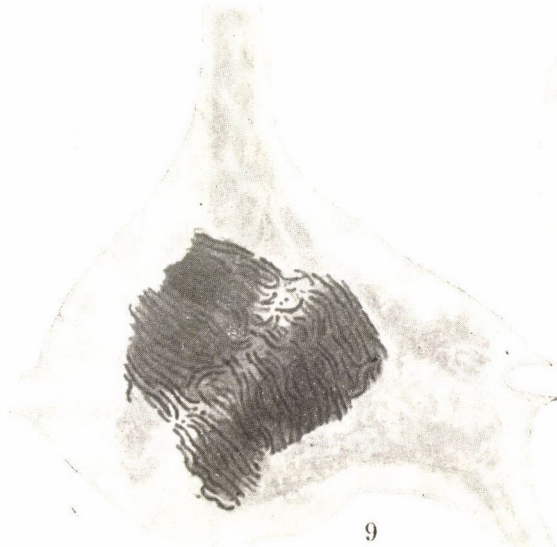
$$y \equiv a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_r x_r \geq 0. \tag{18}$$



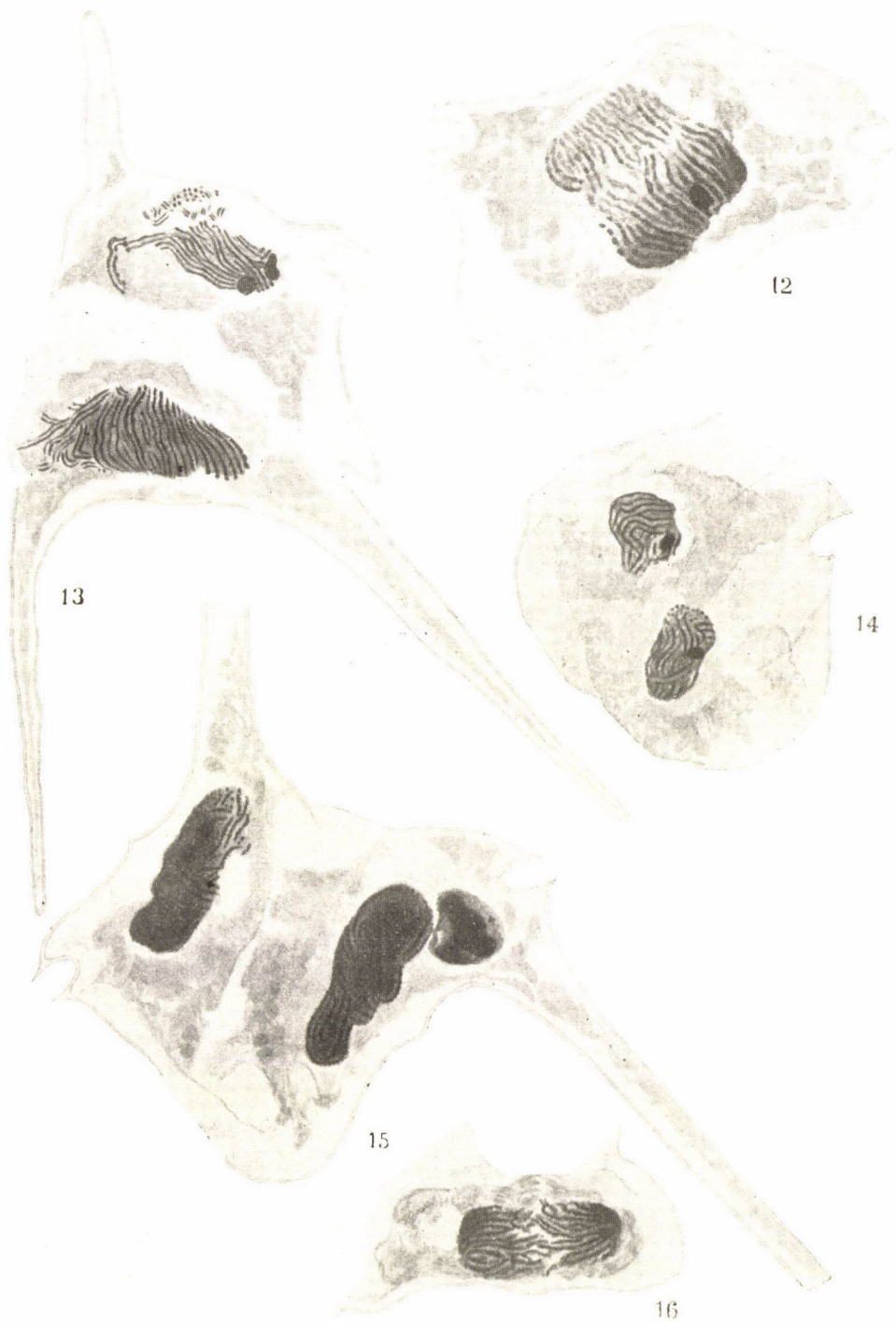














A SZEPES-GÖMÖRI ÉRCZHEGYSÉG NEHÁNY KRISTÁLYODOTT PYRITJÉRŐL.

ZIMÁNYI KÁROLY lev. tagtól.

(Három táblával és négy szövegrajzzal.)

A következőkben a Szepes-Gömöri Érczhegység néhány bányahelyéről kristályodott pyriteket írok le, a melyeket több alkalommal a Magyar Nemzeti Múzeum részére gyűjtöttem.

A nevezett Érczhegység vasbányáiban, mivel a felső szintek barnavaskövét már legnagyobbbész lefejtették, most főképpen pátvaskőre dolgoznak.

A pyrit rendszeren még más ásványoknak kíséretében (*chalkopyrit, tetraëdrit, arsenopyrit, galenit, quarz, baryt, calcit* stb.) gyakrabban, vagy gyéribben található, azonban nem oly terjedelemben, vagy tömegesen, hogy a termelt vasércz minőségét megrongálná. Kristályai vagy a pátvaskőbe növe, vagy ennek üregeinek és hasadékainak falán, de a chalkopyritben, ritkábban a barytra növe is előfordulnak. Nagyobb, fényeslapú és szépen kifejlett kombinációi csak némely bányában gyakoriabbak, így például Sajóházán,¹ a melyek, akárcsak a franciaországi Alleverd és Vizille (Dép. Isère) környékéről valók, minden ásványgyűjteménynek díszei. Más helyeken, a hol szintén közönségesek a pyritkristályok, mint Rozsnyórudnán, vagy az Igló határában emelkedő Gretel-hegy bányáiban, a zavart és görbültfelületű kristályok egymással többnyire hypoparallel állásban

¹ Mathemat. és Természettud. Értesítő 28. köt. 180. l. 1910.

nöttek össze. Ötösbányán (Kotterbach),¹ Szalánkon és Bindtbányán az olykor soklapú, de apró kristálykák inkább bennöve a sideritben, vagy a vastos fehér telérquartzban fordulnak elő.

A megvizsgált pyrit lelethelyei Gömör-rákos, Rozsnyó, Alsó-sajó Gömör vármegyében, Alsó-, Felsőszalánk és Bindtbánya Szepes vármegyében.

Ötösbánya. 1. Gömör-rákos. 1904. 10. 1. 10. 10. 10. 10.

A rimamurány-salgótarjáni vasmű r. t. Gömör-rákos határában levő vaskőbányaiban a pyrit csak szórványosan található, többnyire az ott közönséges vasesillám mellett, kis, rostoslapú hexaéderek alakjában. Ritkábban találhatunk a nagyobb szemű pátvaskő üregeiben lencsealakú siderit-rhomboédereket, a melyek kívül már limonittá alakultak, ezeknek kísérői egyszerű pentagondodekaéderekes pyritok.

A megmért szabadkristályok szintén sideriten ültek, a mely a ránövés helyein itt-ott még látható is volt. Az 1-2 cm. nagyságú pentagondodekaéderekes kombinációk kifejlődését az V. tábla 1. ábráján láthatjuk. Az uralkodó alak e $\{210\}$ lapjait levélborítékalakú, egészen alacsony kiemelkedések sűrűn borítják, a melyeket vicinális lapocskák és $\vartheta \{430\}$ laprészelei határolnak. Az utóbbi pentagondodekaéder lapjait pedig pikkelyekre emlékeztető, görbült vicinális lapocskák lepik el. E felületi szerkezet következtében a lapokról nyert tükörképek zavartak vagy csoportosak voltak, ellenben a többi alak lapjai mind kitűnően tükröztek; $o \{111\}$, $n \{211\}$ és $s \{321\}$ lapjai jól kifejlettek, közép nagyságúak voltak. Az oktaéderlapok többnyire teljesen tükörsímák, néha gyéren és finoman rostosak is az $[o:n]$ élek irányában; $s \{321\}$ lapjai ugyancsak kissé rostozottak az $[o:e]$ élekkel párhuzamosan. Az $n \{211\}$ különben tökéletesen sík lapjai kissé bágyadtfényűek.

$\Sigma \{532\}$ a pyritnek ritkább alakja, lapocskái az $[101:110 = \bar{1}11]$ övben az $[s:n]$ éleket tompítják, ezen kívül még benni fekszenek a

¹ Földtani Közlöny, 28. köt. 165. l. 1898. és Annales histor. natur. Musei Nation. Hungar. 2. köt. 93. l. 1904.

[210 : 112 = 241] övben is. A sajjóháza pyriten ez a dyakisodokaeder jellemző és gyakran uralkodó is.¹

A megmért kristályok egyikén még az {533} és {15.8.8} ikositetraédereknek egy-egy lapja is megvolt, a melyeket kicsiségük és keskenységük daczára még szabad szemmel is jól meg lehetett különböztetni (V. tábla 1. ábra). Az {533} ikositetraédernek helyzetét a jellemző övön kívül még a [321 : 430 = 341] övben is megállapíthattam. Ezt az ikositetraédert először MAURITZ² figyelte meg a porkurai, később pedig LIFFA³ az almásseli pyriten is, mind a két lelethelyről keskeny, fényes csíkok alakjában.

{15.8.8} síma, kis lapocskája közel fekszik (211)-hez, de tükörképe éles és különvált. Tudtommal eddig csak a porkurai pyriten⁴ figyelték meg széles, jól tükröző lappal.

Az alakok megállapítására mért szögek a következők; n a mért élek számára vonatkozik.

	Mérés :	n	Számítás :
$e : e' = (210) : (2\bar{1}0) = 53^\circ 10'$		2	$53^\circ 7' 48''$
$\vartheta = : (430) = 10 15$		2	10 18 17
$o : n = (111) : (211) = 19 29$		4	19 28 16
$: n = : (15.8.8) = 17 44$		1	17 42 48
$: = : (533) = 14 33$		1	14 25 12
$: s = : (321) = 22 8$		3	22 12 28
$: e = : (210) = 39 15$		3	39 13 53
$n : n' = (211) : (112) = 33 34$		1	33 33 26
$: \Sigma = : (532) = 6 32$		1	6 35 12
$: s = : (321) = 10 45$		2	10 53 36
$\Sigma : o = (532) : (111) = 20 31$		2	20 30 51
$: e = : (210) = 19 31$		1	19 25 4
$\vartheta : s = (430) : (321) = 15 52$		2	15 48 58
$: = : (533) = 27 44$		1	27 48 39

2. Rozsnyó.

A pyrit a «SZADLOVSZKY»-bányából való, azonban, hogy annak mely részéről, azt nem sikerült megtudnom. Az egyszerű krista-

¹ Mathemat. és Természettud. Értesítő. 28. köt. 181. l. 1910.

² Mathemat. és Természettud. Értesítő, 21. köt. 361. l. 1903.

³ Földtani Közlöny. 38. köt. 291. l. 1908.

⁴ Földtani Közlöny az id. helyen 283. l.

lyok típusa eltérő azokétól, a melyek sideritbe, tetraédritbenőve, vagy a chalkopyrit üregeiben fordultak elő.¹

Több centimeter nagyságú fehér, részben átlátszó oszlopos quarzokon egyenkint vagy kisebb csoportokban gyéren pentagonododekaéderez kristálykák (1—3 mm) ültek, a melyeknek többé-kevésbé rostos lapjaik mindig fényesek voltak. A quarz-kristályok egyik oldalát dolomit és csillámpikkelyek vonták be.

Az egyszerű combinatiókon uralkodik e {210}, jól kifejlett a simalapú hexaéder és egy tompább pentagonododekaéder rostozott lapokkal; gyakoriak még a ϑ {430} síma fényes lapocskái, többnyire teljes számmal. Az o {111}, n {211} és * {19.9.1} dyakisododekaéder ritkébbak, csak egészen alárendelt egyes lapokkal fejlettek ki. (V. tábla, 2. ábra.)

Az említett tompább pentagonododekaéder rostozott lapjai szabad szemmel, vagy egyszerű nagyítóval egységesnek tünnek fel, de a geniometeren 2—4 élesen látható, egymáshoz közelfekvő tükröképet nyerünk, a melyek nem fedik egymást; ámbár a kifogástalan tükrözés a biztos beállítást lehetővé tette, a hajlások változók voltak és csaknem minden kristályon más-más alaknak feleltek meg. A lapok legtöbbje a hexaéderhez 20°—24°-nyi szöggel hajlik, leggyakrabban \mathfrak{D} {830}, k {520}, {12.5.0} és O {730} alakokhoz tartoznak.

Hasonlót figyeltem meg a szalánki BOGDANEZ-akna pyritjein, a melyeken a rovátkoltlapú pentagonododekaéderek f {310} táján feküdtek.

A határértékek alább közölt szögtáblázatából a lapok ingadozó helyzete látható; a legjobb mérések,² olykor közelebb állanak a számított értékekhez, mint a többiek, de nem mindig. A hajlások túlnyomó része már ismert pentagonododekaéderekre vonatkoztatható. Ezek a változóhajlású pentagonododekaéderek egymás mellett való kifejlődésében semmiféle összefüggést sem állapíthattam meg.

* {19.9.1} új dyakisododekaéder öt kristályon volt meg vagy

¹ Annales hist.-natur. Muséi Nation. Hungaric. 23. köt. 560—561. l. 1915.

² Kővér nyomással feltüntetve.

csak egy magános lappal, vagy két szomszédos oktansban $e\{210\}$ -tól felül és alul egy-egy lappal. Az elég jól tükröző lapocskák némelyike gyöngén rostos a $[210:19.9.1]$ élek irányában. Tekintve a lapok kicsinyiségét, a mérések eredménye elég jó, de némelyek egymástól $20'$ — $45'$ -nyire is eltértek; ezért, továbbá a szokatlan és magas indexek miatt az alakot egyelőre nem tekintem véglegesnek. A rozsnói pyriten a biztosan megállapítható alakok tehát ezek:

$$\begin{array}{ll} a \{100\} & \vartheta \{430\} \\ o \{111\} & n \{211\} \\ e \{210\} & s \{321\}. \end{array}$$

A SZADLOVSZKY-bánya pyritjein megfigyelt combinatiók a következők:¹

$$\begin{array}{ll} e, a, o & e, a, \{hko\}, o \\ a, e, o & e, a, \{hko\}, \vartheta, o \\ a, o, e & e, a, \{hko\}, \vartheta, o, n \\ o, a, s, e & e, a, \{hko\}, \vartheta, * \{19.9.1\} \\ o, a, \{hhl\} & e, a, \{hko\}, \vartheta, * \{19.9.1\}, o \\ o, a, \{hko\} & e, a, \{hko\}, \vartheta, * \{19.9.1\}, o, n \\ e, a, \{hko\}, \vartheta & \end{array}$$

	Mérés:	<i>n</i>	<i>kr</i>	Számítás:
$a:e = (100) : (210)$	$= 26^\circ 33'$	31	9	$26^\circ 33' 54''$
$:\vartheta =$	$:(430) = 36 49$	14	6	36 52 11
$n:e = (211) : (210)$	$= 24 11$	4	2	24 5 41
$a:\delta = (100) : (610)$	$= 9 13-9^\circ 48'$	3	2	9 27 44
$:\delta =$	$:(510) = 11 13-11 47$	5	2	11 18 36
$:h =$	$:(410) = 13 1-13 55$	4	3	14 2 10
$:\gamma =$	$:(720) = 15 41-15 51$	2	2	15 56 44
$:\varepsilon =$	$:(10.3.0) = 16 14-16 34$	2	1	16 41 57
$:f =$	$:(310) = 18 0-18 56$	5	3	18 26 5
	$= 18^\circ 35'$			
$:\star =$	$:(14.5.0) = 19 1-19 30$	3	2	19 39 14
$:\mathfrak{D} =$	$:(830) = 20 4-20 49$	10	7	20 33 21
	$= 20^\circ 45'$			
$:k =$	$:(520) = 21 3-21 54$	16	7	21 48 5
$:=$	$:(12.5.0) = 22 1-22 59$	18	7	22 37 11

¹ A bal oszlopban felsorolt első öt combinatiót lásd a 412. lapon idézett helyen (XI. tábla 4—6. ábra és XII. tábla 1—2. ábra). A rostozott lapú pentagondodekaédereket $\{hko\}$ általános indexekkel jelöltem.

		Mérés:	<i>n</i>	<i>kr</i>	Számítás:		
$\theta =$	$(730) = 23$	0—23	23	17	6	23	11 55
	$= 23^\circ 10'$						
$\gamma =$	$(940) = 23$	34—24	0	7	3	23	57 45
	$(11.5.0) = 24$	3—24	37	3	1	24	26 38
	$= 24^\circ 12'$						
*: $a = (19.9.1):$	$(100) = 25$	8—25	47	5	5	25	28 57
: $a' =$	$(010) = 64$	15—64	35	3	3	64	41 4
: $a'' =$	$(001) = 87$	14—87	20	2	2	87	16 31
: $e =$	$(210) = 2$	44—2	53	3	3	2	59 0
: $' =$	$(19.9.1) = 5$	22 5	32	2	2	5	26 58

3. Alsósajó.

Az alsósajói pátvaskőbányákban a pyrit csak szórványosan található, azonban a cinnabarit-telérek közelében úgy a porphyroidpalában, mint magukban a telérekben is gyakoribb. ZEUSCHNER¹ szerint a «Quodlibet»-bányában chalkopyrittel önálló telepet alkotott.

Alsósajón is a pyrit mint a cinnabarit kísérője az utóbbinál korábbi képződésű; találkozunk ugyanis pyritkristályokkal, a melyekre a cinnabarit telepedett; a paragenesis sorrendje tehát egyező, mint azt BREITHAUPT² más lelethelyekre is megállapította. Az előfordulási viszonyokat röviden többen³ említik, ZEPHAROVICH és MELCZER néhány kristálytani megjegyzést is fűz hozzá.

¹ L. ZEUSCHNER: Beschreibung der pluton. und metamorph. Felsarten der Erzgänge in der Tatra und den benachbarten Gebirgsketten. — Jahresschriften der Krakauer gelehrten Gesellschaft. Jahrg. 1850. Heft No. 3.

² A. BREITHAUPT: Die Paragenesis der Mineralien. Freiberg 1849, 259-261. l.

³ C. C. v. LEONHARD: Handb. einer allgem. topogr. Mineralogie. 1808. 2. 560. l. — C. A. ZIPSER: Versuch eines topogr. mineral. Handbuchs von Ungern. 1817. 395. l. — J. JONÁS: Ungerns Mineralreich. 1820. 366. l. — F. S. BEUDANT: Voyage min. et géol. en Hongrie 1822. 2. 82—84. l. — F. v. HAUER und F. FÖTTERLE: Geolog. Übersicht d. Bergbaue d. öster. Monarchie. 1855. 46. l. — B. v. COTTA und E. v. FELLEBERG: Die Erzlagerstätten Ungarns etc. 1862. 122. és 193. l. — V. v. ZEPHAROVICH: Mineralog. Lexikon 1873. 2. 253. l. — MELCZER G.: Gömör megye ásványai 533. l. EISELE G.: Gömör és Kishont törv. egyes. várm. Bányászati Monografiája. Selmeczbánya, 1907. című munkában.

A megmért pyritkristályok részint még az 1896-ban gyűjtött cinnabarit-példányokról valók,¹ részint azokról a telérpéldányokról, a melyeket néhány év előtt a már hosszabb idő óta beszüntetett bánya hányóin szedtem.²

A pyritkristályok kicsinyek, legfeljebb 3—5 mm nagyk, nem mutatósak; az üregek falaira, a cinnabaritkristályokkal nőttek, csaknem körskörül kifejlettek és több lapúak, ellenben a telériköltésekbe nőttek, a mely utóbbiak anyaga főképpen *quarz*, *calcit*, *baryt* és vaskos *tetraëdrit*, kevésbé szép, egyszerű combinatiók.

Tizennégy megmért kristályon a következőkben felsorolt alakokat állapíthattam meg.

Megfigyelt alakok	A megmért kristályok sorszáma.													
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
<i>a</i> {100}	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
<i>ε</i> {10.3.0}	*	*	.
<i>f</i> {310}	*	*	*	*
<i>∅</i> {830}	*	*	*	.
<i>k</i> {520}	*	.	?	*
<i>e</i> {210}	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
<i>l</i> {530}	.	*	*
<i>x</i> {850}	.	.	*	.	.	.	*	*	*	*	.	.	*	*
<i>∅</i> {430}	*	*	*	*	.	*	*	*	*	*	*	*	*	*
<i>j</i> {960}	*	*
<i>v</i> {650}	*	*	*	*	*	?	*	*	*	*
<i>{hko}</i>	*	*	.	.	.	*	.
<i>o</i> {111}	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
<i>n</i> {211}	.	*	*	*	.	*	*	.	.	.	*	*	*	*
<i>s</i> {321}	*	*	*	.
<i>g</i> {951}	*	*	*	.
<i>Y</i> {10.6.1}	.	.	*	*	*
<i>{hkl}</i>	*	*

A leggyakoribb, mondhatni állandó alakok *e* {210}, *o* {111}, *a* {100} és *∅* {430}, gyakoriak *v* {650} és *n* {211}; a többi ritka, ámbár némelyek jól kifejlett lapjaikkal jellemzőnek mondha-

¹ Mathem. és Természettud. Értesítő. 23. köt. 486—488. l. 1905.

² Annales Musei Nation. Hungarici. 13. köt. 558. l. 1915.

tók erre a lelethelyre; mások pedig egészen alárendelt keskeny lapok, vagy mint $f\{310\}$, $\xi\{11.4.0\}$, $\mathfrak{D}\{830\}$, $k\{520\}$ keskeny csikjai egymás mellett sűrűn váltakozva egy szélesebb, rostos lapot alkotnak. Leggyakrabban uralkodik $e\{210\}$, ritkábban $a\{100\}$, míg a quarzos és calcitos telérekbe nőtt kristályokon olykor $\vartheta\{430\}$.¹

Az egyes alakok kifejlődését és lapjaik felületének milyenségét illetőleg a következőket jegyezhetem meg.

A hexaéder nagy lapjai mindig a szokott irányban rostosak, ellenben ha keskenyek, tökéletesen simák; sokszor csak mint keskeny csikok rostozzák $e\{210\}$ lapjait (VI. tábla 2. és 6. ábra). Az $e\{210\}$ lapjai simák vagy rostosak a jellegző élek irányában, nem ritkán a lapok nagyobb része sima, csak a hexaéderrel szomszédos, a laposabb pyritoédereknek megfelelő fele rovátkolt. (VI. tábla 6. ábra.)

$\vartheta\{430\}$ és $\nu\{650\}$ alakoknak apró lapocskái mindig kifogástalan simák, ellenben ha szélesek vagy nagyok, akkor rostozottak.

$\varepsilon\{10.3.0\}$ -nak két kristályon három szélesebb, finoman rovátkolt lapját figyeltem meg; a jól beállítható tükörképek mellett még egy vagy két gyöngébbet is lehetett megkülönböztetni, a mely utóbbiak az előbbtől 15'—20'-nyire voltak és közelebb feküdtek (100)-hoz. Mind a két kristályon az egyszerűbbjelű $f\{310\}$ is megvolt, de nem ugyanabban az övben, mint $\varepsilon\{10.3.0\}$ lapjai (VI. tábla 5. ábra); ez utóbbi alakra a dolgozat végén még egyszer visszatérek.

	Mérés:	n	Számítás:
$\varepsilon : o = (10.3.0) : (111) = 43^\circ 58'$		1	$44^\circ 2' 10''$
$: n = \quad : (211) = 25 53$		1	$25 55 28.$

Az $f\{310\}$ pentagonoddekaédert három kristálynak egy-egy övében szélesebb lapokkal, a már fennebb említett oscillálásban állapítottam meg; a rostozott lap reflexsorából az élesebbek és különváltak az f , ζ , \mathfrak{D} és k csikjainak megfelelők, mint ez a mérések kielégítő megegyezéséből is kitűnik.

¹ V. ö. a 2. szövegrajzot a 422. lapon.

	Mérés:	n	Számítás:
$f : o = (310) : (111) = 42^\circ 54'$		1	$43^\circ 5' 20''$
$e' = : (0\bar{2}1) = 106 \quad 14$		1	$106 \quad 25 \quad 48$
$g = : (951) = 11 \quad 53$		3	$11 \quad 58 \quad 0.$

A \mathcal{D} {830} alakot először a porkurái¹ és fojnicaí,² újabban pedig egy coloradói³ pyriten figyelték meg keskeny, de jól mérhető lapokkal.

	Mérés:	n	Számítás:
$\mathcal{D} : g = (830) : (951) = 10^\circ 8'$		1	$10^\circ 8' 16''$
$n' = : (121) = 48 \quad 1$		1	$48 \quad 0 \quad 51.$

A keskenylapú pentagondodekaéderek között még gyakoribb a x {850}; egyes, keskeny lapjait több kristályon felismerhettem; de még gyakrabban mint rostozást e {210}, vagy ϑ {430} lapjain, olykor mint külön megkülönböztethető, fényes csikokat az imént említett két pentagondodekaéder lapjai között. A tükörképek gyöngék és kiszélesedettek voltak, a miért is az egyes mérések tagabb határok közt ingadoztak $(100) : (850) = 31^\circ 44' - 32^\circ 9'$, viszont mások a számított értékekkel jól egyeztek.

Az oktaéder, az ikositetraéder és a három dyakisdodekaéder lapjai kifogástalanul simák és fényesek.

Jellemző az alsósajói pyritkristályokra, hogy a két magas-indexű dyakisdodekaéder g {951} és Y {10.6.1} nagy lapokkal fejlett ki (VI. tábla 5. és 6. ábra), míg az egyszerűbbjelű és különben gyakori s {321} alárendelt.

Y {10.6.1} közönségesebb alakja a pyritnek némely lelethelyén (Bélabánya)⁴ nagy, söt uralkodó (Caravaca)⁵ lapokkal is kifejlett; ellenben g {951} tudtommal eddig csak Ötösbányáról (Kotterbach)⁶ ismeretes hiányosságú, keskeny lapokkal.

¹ Mathem. és Természettud. Értesítő. 21. köt. 359. és 361. l. 1903.

² Földtani Közlöny 35. köt. 484. l. 1905.

³ Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie. 44. köt. 152—153. l. 1907.

⁴ Mathemat. és Természettud. Értesítő. 16. köt. 274. l. 1898.

⁵ Boletiu de la Real Socied. Espan. de Histor. natur. Febrero, 1911. 99. l.

⁶ Annales histor. natural. Musei Nation. Hungarici. 1904. 2. köt. 93. f.

$Y\{10.6.1\}$ és $g\{951\}$ lapjai nagyon tompa szög alatt hajlanak $\{210\}$ szomszédos lapjához, különben is e két dyakisdodekaéder némely szögértéke, mint ez az alább közölt táblázatból látható, keveset tér el egymástól; azonban a megállapítható övviszonyok — $g\{951\}$ a $[210 : 111 = 1\bar{2}1]$, $Y\{10.6.1\}$ a $[850 ; 211 = 58\bar{2}]$ övben és a kifogástalan tükrözés a két alak megkülönböztetését egészen kétségtelenné teszik.

$(10.6.1) : (10.\bar{6}.1) = 61^\circ 41\frac{1}{2}'$	$(951) : (9\bar{5}1) = 57^\circ 48\frac{3}{4}'$
$: (10.6.\bar{1}) = 9 48\frac{3}{4}$	$: (9\bar{5}\bar{1}) = 11 5\frac{3}{4}$
$: (1.10.6) = 56 18\frac{3}{4}$	$: (195) = 56 32\frac{1}{4}$
$: (100) = 31 18\frac{3}{4}$	$: (100) = 29 32$
$: (111) = 33 0\frac{3}{4}$	$: (111) = 33 9$
$: (210) = 6 35$	$: (210) = 6 4\frac{3}{4}$

A megmért kristályokon $g\{951\}$ és $s\{321\}$ lapjai egymás mellett fejlettek ki és pedig az előbbi egy-egy kristályon 10—12 lappal, némely oktansban teljes számmal is. A szóban levő dyakisdodekaéder a $[210 : 111 = 1\bar{2}1]$ fő-övön kívül még a következőkhöz is tartozik: $[830 : 121 = 3.\bar{8}.13]$, $[310 : 021 = 13\bar{6}]$ és $[950 : 001 = 5\bar{9}0]$, a melyek¹ közül az utolsó kivételével a többi a megmért kristályokon meg is állapíthatam. Ha (210) -ból és (111) -ből kiindulva az indexeket ismételt összeadással komplikáljuk,¹ $g\{951\}$ jelét csak a IV. rangú alakok közt kapjuk meg (210) és (741) indexeiből; ugyanebbe a sorba tartozik a Porkuráról² ismeretes $\{11.8.5\}$ is. Az indexek komplikációját folytatva, még az V. és VI. rangú dyakisdodekaéderekhez jutunk, a melyek közül ugyancsak ismeretesek a pyriten $\bar{a}\{14.9.4\}$,³ $\mathcal{B}\{654\}$ ⁴ és $h\{13.7.1\}$.⁵

A felsorolt alakok megállapítására mért szögértékeket középértékben a következő táblázatban állítottam össze, a melyben n a mért élek számára vonatkozik. Megjegyzem, hogy a nagyon

¹ V. GOLDSCHMIDT: Über die Entwicklung der Krystallformen. — Zeitschrift für Krystallogr. und Mineral. 28. köt. 1. l. és 414. l. 1897.

² Mathem. és Természettud. Értesítő 21. köt. 359. és 363. l. 1903.

³ Ugyanott. 28. köt. 181. és 184—185. l. 1910.

⁴ Földtani Közlöny 35. köt. 484. l. 1905.

⁵ Annales histor. natural. Musei Nation. Hungar. 2. köt. 93. l. 1904. és: Földtani Közlöny. 40. 552. l. 1910.

tág határok közt ingadozó, vagy az egyáltalában megbízhatatlan méreéseket nem vettem figyelembe. Az [100:010] övben a pentagon-dodekaéderek hajlását vagy a hexaéder, vagy az $e\{210\}$ lapjaihoz mértem, a minél az utóbbiak tükrözése volt irányadó.

	Mérés:	n	Számítás:
$a:s = (100)$	$(10,3,0) = 16^\circ 50'$	1	$16^\circ 41' 57''$
$e:\varepsilon = (210)$	$(10,3,0) = 9 47$	2	9 51 57
$a:f = (100)$	$(310) = 18 22$	4	18 26 5
$e:\mathfrak{D} = (210)$	$(830) = 20 31$	3	20 33 21
$e:\mathfrak{D} = (210)$	$(830) = 6 2$	1	6 0 33
$a:k = (100)$	$(520) = 21 44$	3	21 48 5
$e =$	$(210) = 26 31$	98	26 33 54
$l =$	$(530) = 30 57$	2	30 57 49
$x =$	$(850) = 31 54$	7	32 0 15
$e:x = (210)$	$(850) = 5 24$	2	5 26 21
$a:\mathfrak{S} = (100)$	$(430) = 36 51$	52	36 52 11
$j =$	$(970) = 37 50$	3	37 52 30
$v =$	$(650) = 39 46$	23	39 48 20
$e:v = (210)$	$(650) = 13 11$	5	13 14 26
$o:a = (111)$	$(100) = 54 43\frac{1}{2}$	30	54 44 8
$n =$	$(211) = 19 28$	21	19 28 16
$g =$	$(951) = 33 8\frac{1}{2}$	18	33 9 6
$s =$	$(321) = 22 14$	14	22 12 28
$e =$	$(210) = 39 15$	24	39 13 53
$\mathfrak{S} =$	$(430) = 36 7$	3	36 4 16
$v =$	$(650) = 35 33$	4	35 36 15
$Y =$	$(10,6,1) = 33 3$	5	33 0 46
$e:e' = (210)$	$(102) = 66 20$	1	66 25 19
$\mathfrak{S}' =$	$(304) = 57 28$	1	57 32 38
$n =$	$(211) = 24 31\frac{1}{2}$	15	24 5 45
$s =$	$(218) = 53 14\frac{1}{2}$	2	53 18 3
$\mathfrak{S}:\mathfrak{S}' = (430)$	$(304) = 61 14$	2	61 18 52
$Y:e = (10,6,1)$	$(210) = 6 31$	5	6 34 55
$e:e' =$	$(102) = 62 41$	2	62 42 35
$x =$	$(850) = 4 58$	1	5 0 37
$n =$	$(211) = 19 34\frac{1}{2}$	3	19 39 20
$Y' =$	$(1,10,6) = 56 14\frac{1}{2}$	2	56 18 21
$a =$	$(100) = 31 20$	2	31 18 40
$a' =$	$(010) = 59 10$	1	59 9 43
$v =$	$(650) = 10 4$	1	10 6 0
$g:a = (951)$	$(100) = 29 33$	6	29 33 3
$a' =$	$(010) = 61 4$	5	61 5 40
$g' =$	$(951) = 11 7$	7	11 5 43

	Mérés :	<i>n</i>	Számítás :
$g : g'' =$	(519) = 56 32	2	56 32 12
$: \vartheta =$	(430) = 9 30	2	9 34 27
$: v =$	(650) = 11 56	1	12 4 59
$: n' =$	(121) = 37 47	1	37 52 35

Az utóbbiakban felsorolt, biztosan megállapított alakokon kívül még néhányat megfigyeltem egy-két apró, vagy csikalakú lappal; ezek nagyobb részét a pyriten már ismeretes pentagon-dodekaéderek voltak, a * -gal jelöltek azonban egyáltalában újak volnának. Tekintettel azonban a többé-kevésbé ingadozó mérésekre, a hiányos lapszámra, vagy az új alakok magas indexeire, egyelőre csak a kérdésesek közé sorolhatom.

b {910}	π {870}
c {710}	ξ {980}
ζ {11.4.0}	d {110}
{740}	* {551}
g {320}	* {20.11.1}
D {540}	* {45.5.3}

Ezek meghatározására szolgált mérések a következők:

	Mérés :	<i>n</i>	Számítás :
$a : b =$	(100) : (910) = 6° 10'	1	6° 20' 24"
$: c =$	(710) = 8 17 ca.	1	8 7 48
$: \zeta =$	(11.4.0) = 19°—15—19°50'	4	19 58 59
$e : =$	(210) : (740) = 3 5	1	3 10 51
$a : g =$	(100) : (320) = 33 33—34°13'	5	33 41 30
$: D =$	(540) = 38 49	1	38 39 35
$e : D =$	(210) : (540) = 12 24	1	12 5 41
$a : \pi =$	(100) : (870) = 41 3	1	41 11 9
$: \xi =$	(980) = 41 40	1	41 38 0
$: d =$	(110) = 44 25—45°20' ca.	3	45 0 0
$g : \xi =$	(519) : (4.0.11) = 10 51	1	10 37 16
* $: a =$	(11.1.20) : (010) = 87 26—87° 35'	2	87 29 29
$: a' =$	(001) = 28 36—28° 53'	2	28 54 38
$: o =$	(111) = 35 58	1	36 2 13
$: y =$	(10.6.1) = 59 29	1	59 25 55
* $: a =$	(5.3.45) : (001) = 7 30	1	7 23 0
$: a' =$	(010) = 93 50	1	93 47 27
$: o =$	(111) = 47 18	1	47 35 46
$: n' =$	(112) = 27 53	1	28 9 5
* $: a =$	(155) : (100) = 82 1	1	81 57 2
$: o' =$	(111) = 27 21	1	27 12 54

Megemlítem még, hogy a keskeny, csikalakú ζ (4.0.11) lap az $[519:951=11.\overline{19.4}]$ övhöz is tartozik, de a megmért kristálykán kissé ezen kívül esett.

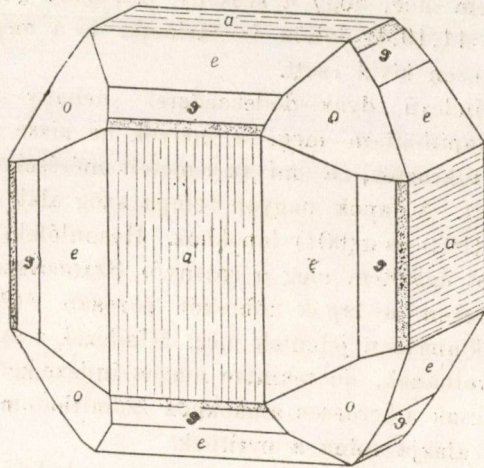
A magasindexű dyakisdodekaéderek néhány lapját két kristályon állapíthattam meg, a melyek ha kissé gyöngébben is, de élesen tükröztek, a mi az ismételt méréseknél jó eredményeket adott. A lapok nagyon tompa szög alatt hajlottak a szomszédos e (102) és a (001) lapokhoz. Hasonlófekvésű dyakisdodekaédereket figyeltem meg a rozsnói SZADLOVSZKY-bányából gyűjtött pyriteken, a lapok többször párosan e (210) lap két szomszédos oktansában jelentek meg. Mindezek a dyakisdodekaéderek újak volnának, de tekintve magas indexeiket és komplikált jeleiket, csak a kérdéses alakokhoz számíthatom. Az $\star\{551\}$ ugyancsak új alakja volna a pyritnek.

A kristályok combinatiója vagy pentagondodekaédeses, vagy hexaédeses; az elsők a gyakoribbak, az utóbbiak ritkábbak. A legegyszerűbb kristályokon $e\{210\}$ magában is előfordul, de egyszerű hexaédert nem láttam. A két combinatio-typus közt mintegy átmenetet alkotnak azok a kristályok, a melyeken $a\{100\}$ és $e\{210\}$ közel egyensúlyban fejlettek ki. A kalcitos és quarzos telérekbe nőtt kristálykákon $\nu\{650\}$ hiányzott, de ennek lapjainak, nemkülönben az $e\{210\}$ és $\vartheta\{430\}$ trigonos csúcsai körül összefutó éleknek helyén érdes, vagy aprógödrös, egyenetlenfelületű lapok vannak, a melyek szétszórt, bizonytalan tükröképeket eredményeznek (1. és 2. szövegrajz). A bennőtt kristályok közt olyakat is találhatunk, a melyeken $\vartheta\{430\}$ az uralkodó alak.

$Y\{10.6.1\}$ és $g\{951\}$ ugyanazon kristályon nem fordultak elő, mind a kettőnek lapjai többnyire nagyobbak, mint a velük szomszédos $o\{111\}$ és $n\{211\}$ alakokéi.

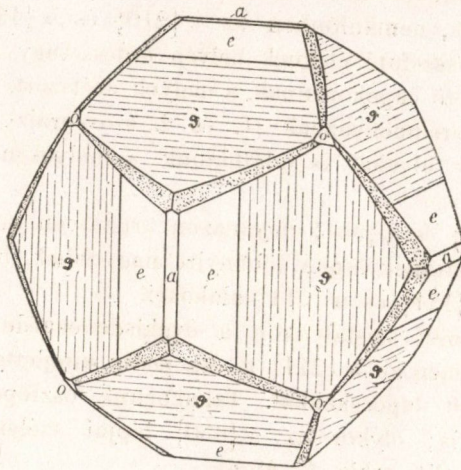
A hexaédeses kristályokon a dyakisdodekaéderek hiányoztak, gyakran még az $n\{211\}$ is, ha pedig kifejlettek, csak egészen alárendelt lapocskákkal. Találkozunk oszloposan elnyúlt kristályokkal is; olykor az $\nu\{650\}$ lapjai szélesebbek, mint $e\{210\}$ lapjai (VI. tábla, 3. ábra).

A megfigyelt combinatiók az alakok fejlettségének sorrend-



1. ábra.

jében a következők; megjegyzem, hogy az egészen apró, vagy keskeny csikalakú, hiányos számú lapocskákat a rajzokon elhagytam.



2. ábra.

- e, o*
e, a
e, o, a
e, o, n
a, v, o, e (5. krist. VI. táb. 3. ábra)
e, o, a, g, v (1. krist. VI. táb. 1. ábra)
g, e, a, o, x, {hkl} (10. krist.)
e, a, g, o, x, {hko} (8. és 9. krist.)
e, o, g, n, l, a (7. krist. VI. táb. 2. ábra)
e, a, Y, n, o, v (4. krist.)
e, Y, n, g, v, o, a (4. krist.)
a, e, g, o, n, v, l (2. krist. VI. táb. 4. ábra)
a, e, o, g, v, j, n (6. krist.)
e, g, Y, o, n, v, a, x (3. krist. VI. táb. 6. ábra)
e, a, o, n, g, g, v, s, f, D, k (11. krist.)
e, a, g, o, n, s, f, s, g, v, D (12. krist. VI. táb. 5. ábra)
e, a, g, s, g, o, v, n, s, f, D, x (13. krist.)
*e, a, Y, g, o, n, v, f, k, x, j, ** {20.11.1.} (14. krist.)

A negyedik kristálynak két fele egymáshoz képest mintegy eltolódott és hypoparallel állásban nőtt tovább, ámbár mind a kettőn az uralkodó alak $e\{210\}$ combinatiójuk nem tökéletesen ugyanaz. Az egyikben a hexaéder lapjai keskenyek és $Y\{10.6.1\}$ lapjai nagyobbak, $g\{430\}$, $v\{650\}$ és $o\{111\}$ alárendeltek; a másikon a hexaéderlapok szélesebbek, $o\{111\}$ -nek lapjai nagyobbak, $Y\{10.6.1\}$ -nak lapjai pedig kisebbek.

4. Alsó- és Felsőszalánk.

Alsó- és Felsőszalánkon a pyrit vaskosan vagy hintve, de kristályodottan is található:¹ ZEPHAROVICH² Szalánkról (Slovinka) az oktaéder és hexaéder kicsiny, szép combinatióját említi. Kristálytanilag változatosnak ugyan nem mondható, mindazonáltal a bányák különböző helyeiről az előfordulást és morfológiai kifejlődést tekintve többé-kevésbé különbözők a kristályok.

¹ B. v. COTTA und E. v. FELLEBERG: Die Erzlagerstätten Ungarns und Siebenbürgens. — Freiberg, 1862. 116. l.

² V. v. ZEPHAROVICH: Mineralog. Lexikon etc. — Wien, 1859. 1. 336. l.

A BOGDANECZ-aknából való nagyszemű sideriten 1—4 mm méretű erősen rostozott pentagondodekaéderek ülnek; az uralkodó $e\{210\}$ mellett néha alárendelten $a\{100\}$ és $o\{111\}$ is kifejlettek.

Ritkábban találunk a sideritnek lapos rhomboéderein ülő, nagyobb (4—8 mm), szépen kifejlett, hexaéderez kristályokat (V. tábla 3. ábra); itt-ott a sideritre még egyes dolomit- és tetraédritkristályok is telepedtek. Az uralkodó alak lapjai gyéren és finoman rostosak, ellenben $o\{111\}$, $s\{321\}$ és $e\{210\}$ lapjai simák.

Ugyancsak a BOGDANECZ-aknából, de a bánya egy másik részéből valók a szürkés-fehér, pátos barytba nőtt pyritek; ez utóbbinak 1—3 mm nagyságú és rovátkolt lapú kristályai a barytnak erősen vagdalt, likacsos és némileg a sejtquartzra emlékeztető szabad felületeiről többé-kevésbé kiemelkednek. Nyilvánvalóan a baryt a sideritbe volt ágyazva és az utóbbi kioldásának eredményei a barytnak üreges felületei. Az uralkodó $e\{210\}$ lapjai részben simák, azonban a hexaéderlapok táján erősebb a rostozás, a hol ez csaknem minden kristályon finoman és sűrűn rostozott pozitív pentagondodekaéderlapokba megy át. Az egymást követő reflexek mintegy 3° -nyi ivhosszaságban sávként húzódnak végig a látótéren. Többször különvált, erősebb tükörképek is megkülönböztethetők, a melyek $\varepsilon\{10.3.0\}$, $f\{310\}$ vagy $\zeta\{11.4.0\}$ -nak felelnének meg; a hajlások azonban annyira ingadozóak,* hogy az alakok biztosaknak nem tekinthetők. A hexaéder rendesen keskeny, $o\{111\}$ és $n\{211\}$ mindig apró, alárendelt lapokkal, a kérdéses $\delta\{610\}$ pedig néhány hajszálkeskenységű fényes csikkal fejlett ki. (V. tábla 4. ábra.) A hexaéder nem ritkán $e\{210\}$ -al váltakozva mélyebben barázdált lapokat alkot. (V. tábla 5. ábra.)

A DOROTEA-akna XXV. szintjéről eredő telérpéldányok legnagyobb részét közönséges, szürkés-fehér quarzból állanak, kevés siderittel; a quarzba nőttek a pyritkristályok, az arsenopyritkristályok és a vaskos chalkopyrit. A pyritek kicsinyek (2—3 mm), többnyire pentagondodekaéderezek, ritkábban hexaéderezek. Az

* Az egyes mérések legnagyobb eltérése több mint $30'$.

egyszerű combinatiót az V. tábla 6. ábrája érzékíti; $s \{321\}$ lapjai rendszeren nagyobbak mint $o \{111\}$ és $t \{421\}$, a melyek sokszor hiányzanak is. A lapok erős rovátkoltsága, vagy kicsinysége miatt a tükrözés zavart vagy gyöngye, a mi a mért és számított hajlások nagyobb eltérését eredményezte.

A szalánki pyriten méréssel az alábbi alakokat állapíthatam meg.

$$\begin{array}{ll} a \{100\} & \vartheta \{430\} \\ o \{111\} & n \{211\} \\ e \{210\} & s \{321\} \\ & t \{421\} \end{array}$$

	Mérés:	n	Számítás:
$a : e =$	$(210) = 26 \ 31$	15	26 33 54
$: \vartheta =$	$(430) = 36 \ 44$	4	36 52 11
$o : e =$	$(111) : (210) = 39 \ 19$	3	39 19 54
$: s =$	$(321) = 22 \ 3$	3	22 12 27
$: n =$	$(211) = 19 \ 30$	1	19 28 16
$: o' =$	$(\bar{1}\bar{1}1) = 70 \ 30$	1	70 31 44
$e : t =$	$(210) : (421) = 12 \ 41$	3	12 36 16
$s : s' =$	$(321) : (213) = 38 \ 16$	2	38 12 47
$: s'' =$	$(32\bar{1}) = 31 \ 0$	1	31 0 10.

A kérdéses alakokra vonatkozó mért határértékek ezek:

	Mérés:	n	Számítás:
$a : \delta =$	$(100) : (610) = 9 \ 30 - 9 \ 51$	3	9 28
$: \varepsilon =$	$(10.3.0) = 16^{\circ}21' - 16^{\circ}56'$	10	16 ^o 42'
$: f =$	$(310) = 18 \ 20 - 18 \ 57$	4	18 ^o 26
$: \zeta =$	$(11.4.0) = 19 \ 24 - 20 \ 1$	6	19 59.

5. Bindtbánya.

A túlnyomóan nagylevelű, borsósárgaszínű sideritben gyakori a fehér quarz, helyenkint vastos chalkopyrittel, ritkábban még tetraédrittel is. A sideritben nem éppen gyakori üregek falaira csak egyszerű quarzkristályok telepedtek.

Bindtbányáról a telérásványokat BARTELS¹ és utána PAPP²

¹ W. BARTELS: Die Spateisen-Lagerstätten d. Zipser Comitatus in Oberungarn. — Berlin, 1910. 55—58. l.

² PAPP K.: A Magyar Birodalom Vasérc- és Kőszénkészlete. — Budapest, 1916. 42—43. l.

is felsorolja, néhány ásványt pedig SCHMIDT¹ irt le; azonban a szerzők egyike sem említi külön a pyritet, mely pedig a szepes- és gömörvármegyei vasércbányákban általánosan elterjedt. KRENNER² a Földtani Társulat egyik szakülésén sajtószerű kifejlődésű pyritkristályokat ismertetett Bindtről.

A pyritkristályok a fehér, vaskos quarzba, ritkábban a sideritbe és chalkopyritbe, különösen ez utóbbi szomszédságában benőve található. Az igénytelen külsejű pyritkristálykák, fluorsavval a quarzból kioldva, pontosabb megtekintés után a vizsgálatokra érdemesnek bizonyultak. Túlnyomó többségük csak 1–2 mm nagy, ritkán érik el a 3–4 milimétert, de az utóbbiak közt a mérésekhez eléggé sima lapúakat alig találhatni. Kifejlődésük legközönségesebb típusát a VII. tábla 1. rajzán tüntettem fel; rendszeren két vagy három pentagondodekaéder kombinációja, a melyekhez még olykor az oktaéder is járul.

$\{430\}$ lapjai csaknem kivétel nélkül símák, jól tükrözők, sokszor finoman rostosak a jellemző élre merőlegesen; a rostozás azonban nem terjed a lap egész felületére, hanem inkább csak annak közepetáját foglalják el kis vonalkák csoportjai.

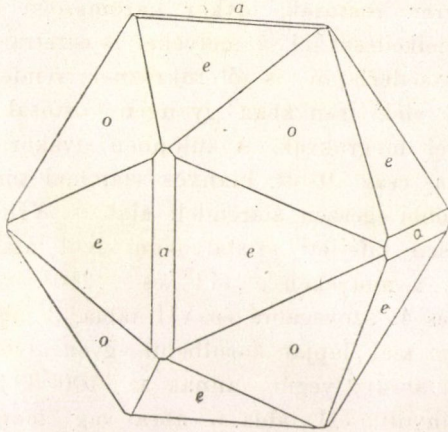
$\{430\}$ -al körülbelül egyensúlyban kifejtett a másik alak $e\{210\}$, illetőleg a Béalabányáról³ már ismeretes, nem egyszerű indexű $\{11.5.0\}$ és az előbbinek vicinálisai $\{17.8.0\}$, $\{21.10.0\}$, $\{19.10.0\}$, a melyeknek többé-kevésbé rovátkolt lapjai ugyan jól tükröznek, de a szögértékeik nagyon változók és a legritkább esetben felelnek meg $e\{210\}$ számított hajlásainak. A nagyobb, szélesebb lapú vicinális alak mellett majdnem mindig még egy keskenyebb lapú is van, a mely az előbbinek szomszédos lapjaival 2° – 3° -nyi normalis szöget alkot. E vicinális pentagondodekaéderek lapjai egymással sokszor váltakozva ismétlődnek. E típus kristályain olykor még az oktaédernek mindig teljesen sima lapjait figyelhetni meg, de sem hexaéder-, sem ikositetraéderlapokat. (VII. tábla 1. ábra.)

Ritkábbak, csak elvétve találhatóak az előbbieket mellett egé-

¹ Természettudományi Füzetek. 10. köt. 20–22. l. 1886.

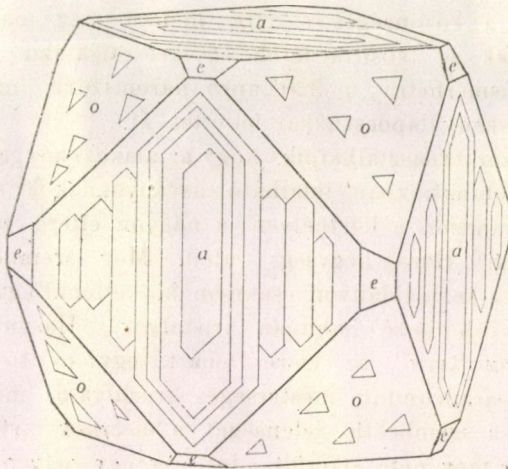
² Földtani Értesítő 1. köt. 30. l. (Szakülési jelentés.) 1880.

³ Mathemat. és Természettud. Értesítő. 16. köt. 274. l. 1898.



3. ábra.

szen más typusú és a lapok felületét tekintve is eltérő kristályok, ezek oktaéderesek; az $o \{111\}$ mellett alárendeltek $a \{100\}$



4. ábra.

és $e \{210\}$, vagy pedig az oktaéderrel egyensúlyban fejlettek ki. Az oktaéderlapok felülete sohasem oly tökéletes síma, mint a pentagondodekaéderekes kristályokon; többnyire zavartak, három

irányban gyéren rostosak, olykor háromszögű rajzokkal vagy pyramisos emelkedésekkel, a melyeket ikositetraéderlapok határolnak. A hexaéderlapok is jól tükröznek, rendszeren $[100:111]$ és $[100:210]$ élek irányában gyöngén rostosak, vagy lépcsős ismétlődésekkel megrakvák. A különben gyakori $n\{211\}$ keskeny lapocskái csak itt-ott, hiányos számmal tűnnek fel, nemkülönben a többi egészen alárendelt alak is (VII. tábla, 2. ábra). Az oktaéderesen kifejtett kristályokon kívül találkoznak közép-kristályok is, a melyeken $o\{111\}$ és $e\{210\}$, vagy $o\{111\}$ és $a\{100\}$, (3. és 4. szövegábra és VII. tábla, 3. ábra), vagy pedig mind a három alak lapjai körülbelül egyensúlyban fejlettek ki. (VII. tábla 4. ábra); végül vannak az $[100:111]$ él irányában oszloposan elnyúlt (VII. tábla, 5. ábra) vagy meroéderes kifejlődés folytán négyzetes habitusú kristálykák, a mi annál szembe-tünőbb, mert az egyik fővben az $e\{210\}$ négy lapja sokszor hiányzik, vagy csak nyomokban van jelen. (VII. tábla, 6. ábra.) A gyakoribb pentagondodekaéderes kristályoktól az oktaéderesek még annyiban is eltérők, hogy az $a\{100\}$ és $n\{211\}$ mindig kifejtettek, a közönséges $e\{210\}$ mellett még más pentagondodekaéderek és ikositraéderek egy-két csikalakú, apró lapocskáit is felismerhetni; $g\{320\}$ apró, háromszögű, míg $\vartheta\{430\}$ egészen keskeny lapocskákkal fejlettek ki.

Többször tapasztalhatjuk, hogy az alakokban gazdag és változatos combinációkban található ásványoknak kristályhabitusa egy és ugyanazon a lelethelyen is nagyon eltérő, példa erre az andreasbergi (Harz hegység) calcit. Még szembe-tünőbb, ha ugyanazon a kézipéldányon csaknem közvetlenül egymás mellett ülnek a különböző habitusú kristályok. Hasonlót figyeltek meg G. vom RATH¹ az Isère Départ. egy pyritjén és BAUMHAUER² a carborundum mesterséges kristályain: mindketten kiemelik ezt a szembe-tülnő jelenséget, a melynek biztos magyarázatát eddig még nem sikerült adni. Az egy helyen és csaknem egy időben növekedett kristályoknál valószínűen a képződési

¹ POGGENDORFF's Annalen d. Physik u. Chemie, 144. köt. 583. l. 1872.

² Zeitschr. für Krystallogr. etc. 50. köt. 85. l. 1912.

Körülmények csekély megváltozása játszhatott közbe, a mely azonban a kristályhabitus megváltoztatására döntő hatású volt.

A megmért kristályokon biztosan a következő tizenkét alakot állapíthattam meg.

a {100}	v {650}
o {111}	n {211}
\mathfrak{D} {830}	{11.6.6}
e {210}	{744}
g {320}	{10.7.7}
\mathfrak{S} {430}	Φ {11.5.5}.

Ezek közül jól kifejtett, teljeslapszámú alakok a {100}, o {111}, e {210} és \mathfrak{S} {430}, míg a különben gyakori v {650}, n {211} és a többi alak csak néhány kicsiny lappal jelent meg.

Ezekon kívül mint kérdéses alakokat felemlíthetem még az alábbiakat, a melyeknek mért szögeik tágabb határok közt ingadoztak, vagy mint keskeny csíkokat csak egyszer figyeltem meg.

α {920}	β {322}
h {410}	{755}
ε {10.3.0}	χ {433}
f {310}	{544}
O {730}	Π {655}
{15.14.14}.	

A következőkben a megfigyelt combinatiókat, az alakok fejlettsége szerint fogyó sorrendben sorolom fel:

Pentagondodekaëderes kristályok:

e ,
 \mathfrak{S} , e
 e , \mathfrak{S}
 \mathfrak{S} , e , o
 e , \mathfrak{S} , o .

Oktaëderes kristályok:

o , a
 o , a , e
 o , a , e , n
 o , e , a , n
 o , a , e , n , g
 o , a , e , n {11.6.6}, {10.7.7}
 o , a , e , n {10.7.7}, \mathfrak{D}
 o , a , e , n , a , g , v
 o , a , e , n , \mathfrak{S} , g , {744}.

Középkristályok:

$$o \{111\} = a \{100\}^1$$

o, a, e

o, a, e, \mathfrak{D}

$o, a, e, \mathfrak{g}, v, n$

o, a, e, g, v, n

$o, a, e, \mathfrak{g}, g, \mathfrak{D}$

$$o \{111\} = e \{210\}$$

o, e, a

o, e, a, \mathfrak{g}

$$a \{100\} = e \{210\}$$

$a, e, o, n, g, \mathfrak{g}$

$a, e, o, \mathfrak{g}, g, v, \Phi$

$$a \{100\} = e \{210\} = o \{111\}$$

$a, e, o, n.$

Néhány combinatiót a VII. táblán (1—4. ábra) ideális ki-fejlődésben és a lapok rostozottságának feltüntetésével láthatunk.

Az alakok meghatározására mért hajlásokat középtértekben a mért élek számával és a számított értékekkel az alábbiakban adom.

	Mérés:	n	Számítás:
$a : \mathfrak{D} = (100) :$	$(830) = 20^\circ 29'$	3	$20^\circ 33' 21''$
$: e =$	$: (210) = 26 35$	58	26 33 54
$: g =$	$: (320) = 33 39$	18	33 41 30
$: \mathfrak{g} =$	$: (430) = 36 51$	10	36 52 11
$: v =$	$: (650) = 39 44$	5	39 48 20
$\mathfrak{g} : \mathfrak{g}' = (430) :$	$(4\bar{3}0) = 73 38$	8	73 44 22
$: o =$	$: (111) = 36 3$	9	36 4 16
$: e' =$	$: (102) = 57 37$	1	57 32 38
$e : e' = (210) :$	$(102) = 66 20$	2	66 25 19
$: o =$	$: (111) = 39 6$	2	39 13 53
$o : a = (111) :$	$(100) = 54 43$	45	54 44 8
$a : \Phi = (100) :$	$(11.5.5) = 32 46$	1	32 44 2
$: n =$	$: (211) = 35 14$	10	35 15 52
$: =$	$: (11.6.6) = 37 32$	2	37 38 46
$: =$	$: (744) = 38 53$	2	38 56 33
$: =$	$: (10.7.7) = 44 51$	2	44 43 38

¹ Az egyenlőségjellel az illető alakok lapjainak egyenlő nagyságát jelölöm.

A közönséges pentagondodekaéder helyébe lépő vicinalisok $\{17.8.0\}$, $\{21.10.0\}$ és $\{19.10.0\}$, valamint a kérdéses alakok mért hajlásai a következők:

	Mérés:	n	Számítás:
(430):	$(11.5.0) = 12^\circ 12' - 12^\circ 34'$	9	$12^\circ 25'$
:	$(17.8.0) = 11 23 - 11 59$	12	11 40
:	$(21.10.0) = 10 45 - 11 23$	4	11 4
:	$(19.10.0) = 8 36 - 9 41$	16	9 7
(111):	$(17.8.0) = 39 34 - 39 57$	6	39 49
:	$(19.10.0) = 38 33 - 38 45$	3	38 45
(100):	$(920) = 12 14 - 12 41$	3	12 32
:	$(410) = 13 42 - 14 25$	5	14 2
:	$(10.3.0) = 16 18 - 17 0$	5	16 42
:	$(310) = 18 31$	1	18 26
:	$(730) = 23 25$	1	23 12
:	$(322) = 43 42$	1	43 19
:	$(755) = 45 36$	1	45 8
:	$(433) = 46 25 - 46 36$	3	46 41
:	$(544) = 48 6 - 48 7$	2	48 32
:	$(655) = 49 21$	1	49 41
:	$(15.14.14) = 52 36$	1	52 51

A Szepes-Gömöri Érczhegységnek hét lelethelyéről (Ötösbánya, Felső- és Alsószalánk, Bindtbánya, Rákosbánya, Rozsnyó Sajóháza, Alsósajó) megvizsgált pyriteknek egyik fő-övében $[100:010=001]$ csupán $a \{100\}$, $e \{210\}$ és $\vartheta \{430\}$ az állandó alakok, ugyancsak ezek többször nagy, vagy uralkodó lapokkal is kifejtettek. Rákosbányán $a \{100\}$ csak mint egyszerű hexaéder volt meg, Sajóházán pedig a közönséges $\vartheta \{430\}$ hiányzott, ellenben $o \{730\}$ gyakori volt. Alsósajón és Ötösbányán $\nu \{650\}$ sem volt ritka, sőt egyes kristályokon nagy, széles lapokkal is megfigyelhettem; vom RATH¹ és GROTH² ezt a pentagondodekaédert egy francziaországi (Dép. Isère) pyritről mint uralkodó alakot említi. Az $e \{210\}$ -nál tompább pentagondodekaéderek közt egyszerűbb jelűek is voltak, melyeknek $\vartheta \{610\}$,

¹ Poggendorff's Ann. d. Physik u. Ch., 144. köt, 582. l. 1872.

² Die Mineraliensammlung d. Kais. Wilhelms Universität. — Strassburg, 1878. 35—36. l.

a {920}, h {410}, γ {720}, f {310}, O {730}, de ezek csaknem kivétel nélkül keskeny, vagy csikalakú és egymással váltakozó lapokkal fejlettek ki. Ezeknek hajlásai, ha a kellő pontossággal mérhettem is, sokszor tágabb határok közt ingadoztak, ilyenkor biztosnak nem tekintettem; kivétel ebben a tekintetben az előbb már említett O {730}.

Ugyanebbe a sorba tartozik a kevésbé egyszerűjelű ε {10.3.0}, a melyet először HESSENBERG¹ a binnenthali pyriten széles és kitünően tükröző három lappal, ZEPHAROVICH² pedig kicsiny, de fényes lapokkal talált és mindketten nagyon jó, a számításal kitünően egyező eredménnyel mérhettek; HESSENBERG azonfelül még kiemeli, hogy miért nem vette az alakot a közeleső és egyszerűbbjelű γ {720}-nak, a mely még más övben is fekszik, de a melyhez a kristályon kifejlett ε {10.3.0} lapjai nem tartoztak. Ezt a pentagondodekaédert az alsósajói kristályokon szintén néhány szélesebb és jól mérhető lappal figyeltem meg, de a rozsnói, szalánki és bindtbányai pyriteken biztosan nem állapíthattam meg. Erre és még más komplikáltabb jelű alakra vonatkozólag a következőkben néhány általános megjegyzést csatolok.

VIOLA³ a cohäσιο-minimumok és a kristálylapok fellépése között bizonyos törvényszerűséget állapított meg. Elméleti levezetéseiből arra következtet, hogy csak a nagy valószínűséggel elfogadható lapok állandóak és fontosak a kristályokon (id. helyen 590. l.), ellenben a kevésbé egyszerűjelű, vagy magasindexű lapokat a vicinálisokhoz és más közelfekvőkhöz mint ezeknek «variatioit» sorolja (573. l.), A szerző ebben a dolgozatában a pyrit [100 : 110] övének alakjait általában és még egy carrarai és egy rosasi (Sardinia) kristályéit ily kritikai szempontból tárgyalja.

Megfigyelésekből meritett tapasztalatokból tudjuk, hogy a

¹ Mineral. Notizen. Neue Folge 2. Heft. Abhandl. d. Senckenberg Gesell. 4. köt. 29—30. l. 1863.

² Lotos 28. köt. 29. l. 1878.

³ C. VIOLA: Beziehung zwischen Cohäsion, Capillarität und Wachstum der Krystalle. — Zeitschrift für Krystallogr. etc. 36. köt. 558—592. l., 1902; továbbá: Grundzüge der Kristallographie. Leipzig, 1904. 12—20. l.

kristályokon általában az egyszerűbb és alacsonyindexű alakok a gyakoribbak, első sorban, a melyek a fő-övek keresztezésében fekszenek; az uralkodó alakok is többnyire egyszerű jelűek. Viszont találunk komplikáltabb jelű, jól kifejlett alakokat, a melyek olykor övekből is megállapíthatók, ezek ugyan nem gyakoriak, de lapjaik fejlettsége és felületi minősége után mégis a biztosan megállapított, önálló alakokhoz kell számítanunk, ilyenek például a pyrit kristályain $\{10.1.0\}$, $\{910\}$, $\{810\}$, $\{610\}$, $\{650\}$, $\{10.6.1\}$, vagy az $[111:210=1\bar{2}1]$ övhez tartozó magasindexű $\{951\}$, $\{741\}$ és $\{13.7.1\}$ dyakisdodekaéderek, a melyek mindegyike még más, a kristályokon megállapított övhöz is tartozik. Feltűnő még az is, hogy a hexaéder és a rhombtizenkettős, a melyeknek lapjai egyaránt cohæsio-minimumoknak felelnek meg (id. helyen 572. l.) és indexeik egyenlőképpen a lehető legegyszerűbbek, mégis a pyritnél gyakoriságukat és fejlettségüket tekintve oly felette különbözök.

Valamely öv alakjainak a cohæsio-minimumokból való levezetésekor VIOLA általában ugyanarra az eredményre jut mint GOLDSCHMIDT¹ és BAUMHAUER;² ugyanis, hogy a magasabbrendű alakok mind ritkábbak (id. helyen 568—560. l.), azonban a III. rendű alakokon túlmenő levezetést már alaptalannak mondja.³ Némely alakra biztosan nem állapíthatja meg, vajjon a cohæsio-minimumainak vagy maximumainak felelnek-e meg; így $\{610\}$ és $\{920\}$ sem minimum, sem maximum nem lehet, ezért $\{610\}$ -t $\{100\}$ -hoz, $\{920\}$ -t pedig $\{410\}$ -hez számítja, $\{10.3.0\}$ pedig valószínűleg $\{320\}$ -hoz tartozik. A pentagondodekaéderek következő sorának $\{430\}$, $\{540\}$, $\{11.9.0\}$, $\{650\}$, $\{760\}$, $\{870\}$ VIOLA szerint valószínűleg $\{430\}$ vagy $\{540\}$ -hez tartoznak (az i. h. 575. l.); viszont más helyen $\{760\}$ -t, $\{870\}$ -t és még néhány közelfekvő pentagondodekaédert $\{110\}$ variatiójának mondja (az i. h. 573. l.)

¹ Über Entwicklung der Krystallformen. — Zeitschrift f. Krystallogr. etc. 28. köt. 1. l. és 414. l. 1897.

² Untersuchungen über die Entwicklung der Krystallflächen im Zonenverbände. — Zeitschrift f. Krystallogr. etc. 38. köt. 628. l. 1904.

³ Grundzüge d. Krystallographie. 19. l.

Minél nagyobb valamely ásvány kristályalakjainak száma, annál több a komplikáltjelű alak is, ezt tapasztalhatjuk például a pyriten, quarzon, calciton vagy baryton. Kétségkívül sok lesz az olyan alak, a melyet a közelfekvő, egyszerűjelűek vicinálisainak tekinthetünk; de lesznek nagyobb számmal olyanok is, a melyeket magas, vagy komplikáltabb indexeik daczára is a megbízható mérések alapján önállóknak kell elfogadnunk, különösen akkor, ha a kristályon megállapítható két öv metszésében fekszenek, mint például h {13.7.1}; még inkább megerősíti az illető alak elfogadhatóságát, ha több lelethelyen is megfigyelték.

A goniometeres méréseket dr. MAURITZ BÉLA egyet. tanár úr szíveségéből a budapesti tud.-egyetem ásvány- és kőzettani intézetében végezhettem, a miért neki ezen a helyen is köszönetet fejezem ki.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1918 jún. 10.-én tartott üléséből.)

A NYOMÁSI SZILÁRDSÁG ELMÉLETE.

I. RÉSZ.

Hengeralakú szilárd test összenyomása.

LAMM DEZSŐ-től.

I. Bevezetés.

Ismeretes, hogy a nyomási szilárdság állandóinak meghatározása igen nagy nehézségekbe ütközik és hogy ez a kérdés mindmáig megoldva nincsen.

Ha egy hengeralakú próbatestet veszünk, melynek átmérője $2r_1$ és magassága $2h$, akkor ezt a testet egy P egyenletesen elosztott erővel tengelye mentén összenyomva, az elméletileg

$$-\varepsilon_h \cdot h = -\frac{P}{r_1^2 \cdot \pi} \cdot \frac{h}{E}$$

összenyomást szenved és keresztirányban minden egyes helyen

$$\varepsilon_r r_1 = \sigma \cdot \varepsilon_h \cdot r_1$$

mérettel tágul, hol is σ a Poisson-féle constans, E a rugalmasági modulus.

A valóságban a test nem így viselkedik, minthogy a nyomott felületen surlódás lép fel, mely megakadályozza a nyomott lapok közelében fekvő részek szabad keresztirányú tágulását, az összenyomás után a test nem henger-, hanem hordóalakot fog felvenni.

Természetesen ez a surlódás okozta megakadályozása a:

test szabad tágulásának lényegesen befolyásolja a test szilárdságát és összenyomását; ezek után magától értetődő, hogy egy aránylag kis magasságú, lapos próbatest szilárdsága lényegesen nagyobb, mint egy magasabb testé.

A probléma, melynek megoldását alant közlöm, a következő:

A test méretei, $2r_1$, $2h$, valamint rugalmassági modulusa, E és a Poisson-féle constans, σ , ismeretesek.

Ezt a testet egy szakító gépen annyira összenyomjuk, hogy eredeti $2h$ magasságú hossza

$$2h' = 2h(1 - \varepsilon_h)$$

méretre csökkent; alapjának átmérője, mely eredetileg $2r_1$ volt, kísérlet után:

$$2r_1' = 2r_1(1 + \varphi \cdot \varepsilon_h \cdot \sigma)$$

méretre nőtt.

Mint hogy h' és r_1' lemérhetők, innét ε_h és φ ismeretesek, φ nyilvánvalóan 0 és 1 között fekvő pozitív szám.

Feladatunk már most ezekből az ismert

$$r_1, r_1', h, h'$$

értékekből a test minden pontjának alakváltozását és feszültségi állapotát meghatározni.

Ami E -t és σ -t illeti, melyeket ismerteknek tételeztünk fel, ez értékeket húzási, vagy hosszabb testekkel végzett nyomási kísérletek útján csak közelítőleg határozhatjuk ugyan meg, de ez a megközelítés oly pontos (miután hosszabb próbatesteknél a súrlódás befolyása kicsiny), hogy az így meghatározott értékek számításainkban teljes biztonsággal használhatók.

Megjegyzem még, hogy levezetett képleteink alapján, ha a próbatest keresztirányú tágulását két helyen mérjük meg, az így nyert r'' , h'' , r_1' , h' értékekből E és σ teljes pontossággal állapítható meg.

Feladatunk ebben a felállításban statikailag még nincsen meghatározva.

a) Első sorban fel kell még vennünk, mint megszorító feltételt, hogy a szakító gép kemény aczélból készült nyomó lapjai, melyek a kísérlet előtt síkok voltak, a kísérlet után is síkok maradnak; vagyis a szakító gép nyomó lapjait abszolút mereveknek tételezzük fel. Ez a feltétel, ha nem is matematikai pontossággal, de elég jó megközelítéssel tényleg fennáll, minthogy a nyomó lapok méretei (vastagsága) a próba testéhez képest oly nagyok és anyaga oly kemény, hogy nem túlszilárd anyagoknál (beton, kő, öntött vas) annak alakváltozásait a kísérlet alatt nem kell figyelembe vennünk.

b) Másodsorban tekintetbe veendő, hogy a súrlódás a normális nyomás következménye, tehát a próbatest homlok-lapjainak mindama pontjainál, melyek a kísérlet alatt elmozdulnak, a radiális súrlódás R_z egy megadott függvénye a normális nyomásnak Z_z -nek:

$$R_z = f \cdot F_2(Z_z)$$

hol, minthogy a súrlódás törvényét ilyen nagy felületű nyomásoknál még igen kevésbé ismerjük, felvesszük, hogy megközelítésben:

$$F_2(Z_z) = Z_z.$$

E szerint ha f a súrlódási tényező,

$$R_z = f \cdot Z_z.$$

Egyenleteinknek ezeket a feltételeket ki kell elégíteniök.

Minthogy különösebb nehézséget nem okoz, a problémát általánosabb felállításban fogom tárgyalni; feltételezem tehát azt, hogy

a) a test köpenyfelületén nyíró erők nem hatnak, a radiális normális nyomás pedig valamilyen tetszés-szerinti függvénye a magasságnak. Az egyszerű nyomási problémánál a köpenyfelület egyáltalában nincsen terhelve, ott sem nyíró, sem normális erők nem hatnak.

b) A hengeralakú próbatest alaplapjai a kísérlet után egy tetszés-szerint megadott forgási felületbe mennek át, ez a felület az egyszerű nyomási probléma esetén egy sík.

c) Az alaplapokon a súrlódás adott függvénye a normális nyomásnak.

A megadott axiális és radiális normális erőkön kívül, melyek a tengelyhez szimmetrikusak, valamint a fellépő radiális irányú súrlódáson kívül más erőrendszer nem hat a testre. Nyomatékkal bíró erőrendszerek, melyek torsziós igénybevételt és tangenciális irányú elmozdulást okozhatnának, nincsenek. A torszióval, melyet ilyen erőrendszerek okoznak, egy másik dolgozatomban foglalkozom.

Ennek az általános problémának egy speciális esete a nyomási kísérlet problémája.

A fent körvonalozott feladattal már régebben foglalkoztam és a mint azt a következőkben kimutatom, sikerült azt teljes általánosságban megoldanom.

Munkám közben került birtokomba Love: «Lehrbuch der Elastizität» című munkája, ki ott megemlíti, hogy az általam tárgyalt probléma megoldását Mr. FILON a «Philosophical Transactions of the Royal Society» 1902. évfolyamában közli.

FILON e dolgozata csak egy particularis megoldás. Ő eleget tesz annak a feltételnek, hogy a köpenyfelület nincs terhelve, az alaplapok síkok maradnak és az alaplapok átmérője összenyomás után nem változik meg.

Nem tesz azonban eleget a feladat fizikai természetéből következő annak a feltételnek, hogy az alaplapokon fellépő normális nyomás és radiális nyíró erő között, mivelhogy a nyíró erő, illetőleg a súrlódás a nyomás folytán keletkezik, egy megadott összefüggésnek kell lenni.

Particularis megoldás, mely ezt a fizikai összefüggést figyelembe nem veszi, mint ki fogom mutatni, végtelen sok van.

Ezekből a megoldásokból lehet azután egy olyan teljes megoldást alakítani, mely a feladat összes feltételeinek eleget tesz.

FILON erre ki sem tér.

Megjegyzem, hogy míg a mi particularis megoldásainkban olyan függvények szerepelnek, melyekről bizonyítva van, hogy azokat határozatlan állandókkal megszorozva és összegezve, az állandók megválaszthatók úgy, hogy az ily módon keletkezett végtelen sor, egy tetszés-szerinti függvényt ábrázoljon, a FILON-

féle particuláris megoldásban szereplő függvényekről ez bizonyítva nincs és így FILON az a megjegyzése, hogy több ilyen particuláris megoldás összegével még egy feltételt ki lehet elégíteni, igen valószínűtlen.

Mr. SCHIFFnek a «Liouville Journal» 1883. évfolyamában megjelent hasonló tárgyú dolgozatára ugyanez mondható. —

Munkám czélja a nyomási kísérletnél fellépő tényleges viszonyok vizsgálása, elsősorban annak a megállapítása, mi okozza az anyag elpusztulását.

Erre vonatkozólag ma a MOHR által felállított hypothesis van elfogadva, a mit Mr. JAMES GUEST kísérletei igazolnak.

Az irodalomban azonban mindeddig hiányzott egy olyan szilárdsági probléma teljes megoldása, melynél egy véges méretekkkel bíró test minden egyes pontjában, tehát az erők fopontjának közvetlenül közelében is, a feszültségi állapot mindenütt ismert volna, anélkül, hogy a működő külerök elosztását illetőleg önkényes hypothesisre lenne szükség.

Ezt a problémát én a körkeresztmetszetű próbatest nyomási igénybevételénél megoldottam, a megoldás alkotja munkám első részét.

Mint hogy a feszültségekre és nyúlásokra nyert kifejezések, melyek complicált rendszerű harmonikus függvények szerint tovahaladó sorokból állanak, nem áttekinthetők, munkám második része egy konkrét számpélda kidolgozásából és a viszonyok graphikus ábrázolásából fog állani.

Czélom itt elsősorban a MOHR által az anyag elpusztulására jellegzetesnek jelzett feszültségi kifejezéseket alakítani és ezeket a kifejezéseket az egyes keresztmetszetre graphikusan felvinni.

A mennyiben levezetéseink helyesek és MOHR theoriája a valóságnak megfelel, akkor egy hengeralakú merev testnek, mint a milyen például a beton vagy a márvány, melynek közepek rugalmassági modulusát egészen a törési határig állandónak vehetjük fel, ama forgási felület mentén kell eltörnie, mely forgási felület meridianvonala az egyes keresztmetszetekbe bérájtolt MOHR-féle feszültségi kifejezések maximumart köti össze.

Mint hogy a tényleges törési alakot a kísérlet megadja, ennek a két felületnek, a számítottak és a kísérletileg meghatározott alaknak jó megegyezése MOHR elméletének matematikai alapon történt bebizonyítását adja.

Dolgozatomban a KIRCHHOFF által bevezetett jelöléseket használom, melyek áttekinthetőbbek, mint a nálunk használatos műszaki mechanikai tankönyvekben szokásos jelölések.

II. Az elmozdulási componensek és feszültségek megállapítása.

A rugalmasság alapegyenlete vektorjellegű vonatkozásban,¹ dilatatióban és rotatióban kifejezve, a következő:

$$(\lambda + 2\mu) \text{Grad } \Delta - 2\mu \cdot \text{Curl } \omega = 0, \quad (1)$$

a mennyiben az egynemű, egyöntetű közegre külső tömegerők nem hatnak és az anyagi rendszer részei egyensúlyban (nyugalomban) vannak. A LOVE könyvében is használt KIRCHHOFF-féle jelöléseket alkalmazva:

$$X_x, X_y, X_z, Y_y, Y_z, Z_z \quad (2)$$

a feszültségi componensek közönséges derékszögű (x, y, z) koordinátákban;

$$R_r, R_\phi, R_z, \Phi_\phi, \Phi_z, Z_z, \quad (3)$$

ugyanezek a komponensek derékszögű (r, ϕ, z) cylinder-coordinátákban;

$$u, v, w \quad (4)$$

az (x, y, z) pont derékszögű elmozdulási componensei.

$$u_r, u_\phi, u_z \quad (5)$$

az (r, ϕ, z) pont derékszögű elmozdulási componensei;

¹ A. E. H. LOVE: Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, vol. I. 1892, vol. II. 1893. Második kiadása Cambridge 1906. Ez utóbbinak német fordítása A. TIMPE-től: Lehrbuch der Elastizität. Leipzig und Berlin 1907; lásd különösen ott a 147—149. és a 157—159. lapot; továbbá a 66. és a 166. lapot.

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{\Phi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_\Phi}{\partial z}, \\
 e_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{u_r}{r}, & e_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\
 e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & e_{r\Phi} &= \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} - \frac{u_\Phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \Phi}
 \end{aligned} \tag{6}$$

a viszonylagos deformatio-(strain-) componensek.

$$\nabla = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [r \cdot u_r] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{7}$$

a térfogati dilatatio;

$$\begin{aligned}
 2\omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial u_\Phi}{\partial z} \\
 2\omega_\Phi &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
 2\omega_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\Phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \Phi}
 \end{aligned} \tag{6a}$$

a rotatio-componensek. Vége ¹

$$\lambda = \frac{\sigma \cdot E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad \alpha = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \tag{9}$$

hol is: $\alpha = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ a minden irányban ható compressio modulusa;

E : a rugalmassági modulus

μ : a csavarodás rugalmassági modulusa, a melyet a műszaki mechanikai tankönyvek G -vel szoktak jelölni.

E jelölések mellett: ²

$$\begin{aligned}
 R_r &= \lambda \cdot \Delta + 2\mu e_{rr}; \\
 \Phi_\Phi &= \lambda \cdot \Delta + 2\mu e_{\Phi\Phi}; \\
 Z_z &= \lambda \cdot \Delta + 2\mu e_{zz}; \\
 R_\Phi = \Phi_r &= \mu \cdot e_{r\Phi}; \\
 \Phi_z = Z_\Phi &= \mu e_{\Phi z}; \\
 Z_r = R_z &= \mu \cdot e_{zr}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

¹ LOVE, i. m. 123. l.

² LOVE. idézett műve első angol kiadása. §. 122, p. 208, (20).

Jelentse továbbá:

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11)$$

a LAPLACE-féle operátort cylinder-coordinátákban.

Ez esetben, ha tekintetbe vesszük, hogy *tengely-symmetrikus* terhelésről lévén szó:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \phi} = \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} = 0,^1 \quad (12)$$

az (1) alapegyenlet henger-coordinátákban a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} &= 0; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + 2\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi) &= 0; \\ \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Ez egyenletek részletes levezetése LOVE már idézett könyvében található.

Ha ezekben az egyenletekben ω_ϕ , ω_r , ω_z -nek a (6a) által már megadott értékét behelyettesítjük, akkor az egyenletek rendezése után kapjuk:

$$\nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} = 0, \quad (14)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} = 0. \quad (16)$$

E fent levezetett egyenletek képezik kiindulási pontunkat, hozzátéve még azt a közismert egyenletet, hogy nyugalom (egyensúly) esetében a térfogati dilatatio egy potential-függvény:

¹ LOVE, i. m. §. 99, p. 168.

$$\nabla^2 \Delta = 0, \quad (17)$$

vagy a (11) kifejezés alapján:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = 0. \quad (18)$$

Követett módszerünk abból fog állani, hogy előbb a (18) egyenletnek keressük oly particularis megoldásait, melyek a határfeltételekkel összeférnek és ezeket a megoldásokat (14), (15) és (16)-ba helyettesítve, keresünk u_r , u_ϕ és u_z -re nézve megfelelő particularis megoldásokat. E megoldásokat határozatlan coefficientsekkel szorozva és összegezve iparkodni fogunk a határozatlan coefficientek értékeit úgy meghatározni, hogy azok a probléma határfeltételeinek megfeleljenek.

Ki fogjuk mutatni, hogy az összes feltételek kielégíthetők olyan particularis megoldások összegével, melyek egyes elemei: r és z valamely függvényének szorzatából állanak, tehát ilyen szerkezetűek:

$$\Delta = R_0(r) \cdot Z_0(z),$$

hol is R_0 és Z_0 pusztán r -nek, illetőleg z -nek függvénye.

Ha e kifejezést a (18) egyenletbe behelyettesítjük, lesz:

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2} \cdot \frac{R_0}{Z_0} = 0. \quad (19)$$

Hogy egyenleteinkben dimensio nélküli változók szerepeljenek, hozzunk be r és z helyett ily változókat, legyen tehát:

$$r = r_1 \cdot y; \quad z = h \cdot x, \quad (20)$$

hol is r_1 a próbatest radiusa, $2h$ pedig annak magassága.

Ez esetben:

$$\begin{aligned} dr &= r_1 dy; & (dr)^2 &= r_1^2 (dy)^2; \\ dz &= h dx; & (dz)^2 &= h^2 (dx)^2; \end{aligned} \quad (21)$$

tehát: ha

$$\frac{dR}{dy} = R'; \quad \frac{d^2 R}{dy^2} = R''; \quad \frac{d^2 Z_0}{dx^2} = Z_0'';$$

jelölést alkalmazunk, a (19)-ből:

$$R_0'' + \frac{1}{y} R_0' + \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 \frac{Z_0''}{Z_0} \cdot R_0 = 0. \quad (22)$$

Tekintettel arra, hogy a próbatest terhelése a XY síkra nézve szimmetrikus, Δ -ra nézve csak oly particularis megoldások jönnek tekintetbe, melyek z -nek páros függvényei.

A (22) egyenlet csak úgy lehet identitás, ha k^2 alatt egy tetszés-szerinti *valós* számot értve:

$$\frac{Z_0''}{Z_0} = \left(\frac{h}{r_1}\right)^2 k^2; \quad (23)$$

a

$$\frac{h}{r_1} = \eta \quad (24)$$

jelölés alkalmazásával a (23)-ből és a (22)-ből lesz

$$Z_0'' - (\eta^2 k^2) Z_0 = 0; \quad (25)$$

$$R_0'' + \frac{1}{y} R_0' + k^2 R_0 = 0. \quad (26)$$

Ha k^2 *positív*, tehát $k = \pm \alpha$, akkor, mint ismeretes,

$$Z_0 = a_1 \mathfrak{C}os(\eta \alpha x) + a_2 \mathfrak{S}in(\eta \alpha x);$$

és

$$R_0 = a_3 J_0(\alpha y) + a_4 Y_0(\alpha y);$$

a (25) és a (26) egyenlet megoldásai, hol is

$$\mathfrak{C}os(\eta \alpha x) = \frac{1}{2}(e^{\eta \alpha x} + e^{-\eta \alpha x}); \quad \mathfrak{S}in(\eta \alpha x) = \frac{1}{2}(e^{\eta \alpha x} - e^{-\eta \alpha x})$$

a hyperbolikus cosinust és sinust

$$J_0(\alpha y) = 1 - \frac{(\frac{1}{2}\alpha y)^2}{1!^2} + \frac{(\frac{1}{2}\alpha y)^4}{2!^2} - \frac{(\frac{1}{2}\alpha y)^6}{3!^2} + \dots \quad (27)$$

J_0 ez első fajú, 0-ad rendű BESSEL-féle függvényt jelenti, $Y_0(\alpha y)$ a másodfajú 0-ad rendű BESSEL-féle függvényt, melynek szerkezete

¹ E. JAHNKE und F. EMDE: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzi gund Berlin, 1909; p. 90.

$$Y_0(ay) = J_0(ay) \lg_n(ay) + \frac{1}{2} ay^2 - (1 + \frac{1}{2}) \frac{(\frac{1}{2} ay)^4}{2!^2} + \\ + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \frac{(\frac{1}{2} ay)^6}{3!^2} - \dots^1$$

hol az a_1, a_2, a_3, a_4 tetszés-szerinti állandók.

Tekintettel arra, hogy $\Xi \ln(\gamma ax)$ páratlan függvénye az x -nek, $Y_0(ay)$ pedig az $y=0$ helyen végtelen értéket ad, ezek a partikuláris megoldások nem használhatók, tehát

$$a_2 = a_4 = 0;$$

és így az egyik partikuláris megoldásunk:

$$\Delta_1 = a_1 a_3 \cdot J_0(ay) \mathfrak{C}os(\gamma ax). \quad (28)$$

Ha viszont k^2 negatív, akkor hasonló módon adódik:

$$K = \pm i\beta, \quad \Delta_2 = b_1 b_3 \cdot J_0(i\beta y) \cos(\gamma \beta x) \quad (29)$$

hol is, mint ismeretes, ($J_0(i\beta y)$) egy reális függvény, mint ez különben a (27) sorból azonnal következik:

$$J_0(i\beta y) = I_0(\beta y) = 1 + \frac{(\frac{1}{2} \beta y)^2}{1!^2} + \frac{(\frac{1}{2} \beta y)^4}{2!^2} + \frac{(\frac{1}{2} \beta y)^6}{3!^2} + \dots^2 \quad (30)$$

Ha a Δ_1 és Δ_2 particularis megoldásokat szemügyre vesszük, azt látjuk, hogy az $y = 0 \sim 1$, $x = 0 \sim 1$ intervallumban mindegyik megoldás egy oscilláló- és egy aperiodikus függvény szorzatából áll, még pedig Δ_1 oscillatorius y és aperiodikus x -re nézve, Δ_2 pedig megfordítva.

A Δ_1 particularis megoldások összegéből tehát előállíthatjuk y -nak, a Δ_2 megoldások összegéből x -nek egy önkényes (willkürlich) függvényét, kényelmetlenek azonban az aperiodikus factorok, melyek, ha a és β minden határon túl nő, végtelen értéket adnak.

E kényelmetlenséget elkerülendő, legyen:

$$a_1 a_3 = \frac{A_0}{\mathfrak{C}os(\gamma a)}; \quad b_1 b_3 = \frac{B_0}{I_0(\beta)}, \quad (31)$$

¹ JAHNKE és EMDE idézett műve: 94. lap, második formula.

² I. mű, 92. lap, ötödik formula.

hol is A_0, B_0 , éppen úgy, mint $\text{Cos}(\eta a)$ és $I_0(\beta)$ constansok; ez esetben:

$$\Delta_1 = A_0 \frac{\text{Cos}(\eta a x)}{\text{Cos}(\eta a)} \cdot J_0(\alpha y); \quad (32)$$

$$\Delta_2 = B_0 \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \cos(\eta \beta x). \quad (33)$$

Mint ismeretes, a , illetőleg β igen nagy értékeinél:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \text{Cos}(\eta a) = e^{\eta a}; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} I_0(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \cdot e^\beta. \quad (34)$$

Ennélfogva az $x=0$ helyen a igen nagy értékeinél

$$\Delta_1 = A_0 e^{-\eta a} J_0(\alpha y);$$

és az $y=0$, helyen β igen nagy értékeinél

$$\Delta_2 = B_0 e^{-\beta} \cdot \sqrt{2\pi\beta} \cdot \cos(\eta \beta x);$$

tehát az $x=0$, illetőleg $y=0$ helyen a , illetőleg β nagy értékeinél mindkét particularis megoldás gyorsan convergál a 0-felé, míg az $x=1$, $y=1$ helyen:

$$\Delta_1 = A_0 J_0(\alpha y); \quad (35)$$

$$\Delta_2 = B_0 \cos(\beta x); \quad (36)$$

azaz véges értékeket ad.

Mint hogy x és y mindig kisebbek az egységnél, ennélfogva: $(1-x)$, illetőleg $(1-y)$ mindig positiv. Így tehát a elég nagy értékeinél;

$$\frac{\text{Cos}(\eta a x)}{\text{Cos}(\eta a)} \approx \frac{e^{\eta a x}}{e^{\eta a}} = e^{-\eta a(1-x)}. \quad (37)$$

Ha tehát $(1-x)$ nem 0, akkor ha a elég nagy

$$\lim_{\eta a \rightarrow \infty} e^{-\eta a(1-x)} = 0;$$

míg, ha $x=1$

$$\lim_{\eta a \rightarrow \infty} e^{-\eta a(1-x)} = 1.$$

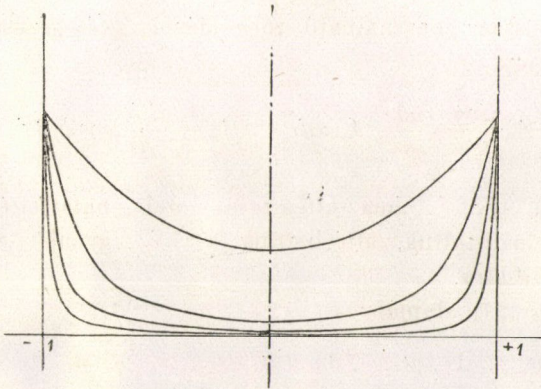
Ugyanezek a megfontolások érvényesek az

$$\frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)}$$

függvényre nézve is.

Az α , illetőleg a β növekvő értékeinél tehát mindkét függvény az 1. ábrában látható alakot veszi fel.

Fentiekből látjuk, hogy a $\Delta_1 + \Delta_2$ függvény a próbatest élei közelében, tehát az $x=1$, $y=1$ hely közelében véges értékeket ad, míg növekvő α , illetőleg β értékeknél, a mint a henger éleitől annak belseje felé haladunk, gyorsan convergál a nulla felé.



1. ábra.

A (32) és (33) particularis megoldásokon kívül, melyekben úgy x , mint y szerepel, a (18) egyenletnek, illetőleg a (22)—(26) rendszernek még a következő ismert particularis megoldása **vannak**:

$$k = 0; \quad R''_0 = R'_0 = 0; \quad R_0 = \text{const}$$

és

$$Z''_0 = 0, \quad Z_0 = D_0 + D'_0 x;$$

tehát:

$$\Delta_3 = D_0 + D'_0 x. \tag{38}$$

Továbbá: $k=0$, de R''_0 és R'_0 nem 0, tehát:

$$R''_0 + \frac{1}{y} R'_0 = 0;$$

ebből

$$R_0 = c_0 \lg(k_0 y)$$

hol is c_0 és k_0 tetszés-szerinti állandók és így

$$\Delta_4 = (c_0 + c_1 x) \lg(k_0 y). \quad (39)$$

Tekintettel arra, hogy a $\lg(k_0 y)$ az $y = 0$ helyen végtelen, a (39) megoldás nem használható, minthogy pedig csak páros megoldásokat használhatunk,

$$D'_0 = 0;$$

és így az összes használható megoldások összegezése alapján nyerjük, hogy:

$$\Delta = \Sigma A_0 \frac{\mathfrak{C}_{05}(\gamma \alpha x)}{\mathfrak{C}_{05}(\gamma \alpha)} \cdot J_0(\alpha y) + \Sigma B_0 \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \cos(\gamma \beta x) + D_0. \quad (40)$$

Miután így Δ ama kifejezését, mely határfeltételeinkkel összefér, előállítottuk, áttérhetünk a (15) egyenlet alapján u_z meghatározásaira.

(15) és (21) alapján:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = - \frac{r_1}{r} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x}. \quad (41)$$

Ha most $\frac{\partial \Delta}{\partial x}$ kifejezését a (40) egyenletből előállítjuk és tekintetbe vesszük, hogy u_z -re nézve csakis olyan particularis megoldások jöhetnek tekintetbe, melyek z -ben páratlanok, a (46) egyenlet bal oldala identikus lévén a (28) egyenlettel, azonnal felírhatjuk azokat a particularis integrálokat, melyekben tetszés-szerinti állandók fordulnak elő:

$$u_z^{(1)} = h D_1 x + A_1 r_1 \frac{\mathfrak{S}in(\gamma r x)}{\mathfrak{S}in(\gamma r)} J_0(\gamma y) + B_1 r_1 \frac{I_0(\delta y)}{I_0(\delta)} \sin(\gamma \delta y) \quad (42)$$

Itt γ , δ , valamint $h_1 D_1$, $A_1 \cdot r_1$, $B_1 \cdot r_1$, tetszés-szerinti állandók, s minthogy u_z egy hossz, ezért írtam $h_1 D_1$ -et D_1 helyett és így tovább, hogy az összes önkényes állandók, mint dimensio nél-

küli számok szerepeljenek, a mi a számítás menetét megkönnyíti.

Hátra vannak még azok a particularis integrálok, melyekben tetszés-szerinti állandók nem szerepelnek, de viszont a (46)-ba helyettesítve, azt identitássá teszik.

A (41) alatti differenciál-egyenlet megoldását a következőképpen végezzük.

A potenciálemléletből ismeretes, hogy ha u és v függvénye az r és z változóknak, akkor:

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]. \quad (43)$$

Végezzük el a ∇^2 operatiót az $r^n = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$ függvényen.

Rendre lesz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} r^n &= nr^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x} = n \cdot r^{n-1} \frac{x}{r} = n \cdot r^{n-2} \cdot x; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} r^n &= n(n-2)r^{n-3} \cdot \frac{x^2}{r} + n \cdot r^{n-2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} r^n &= n(n-2)r^{n-3} \frac{y^2}{r} + nr^{n-2}. \end{aligned}$$

E két egyenletösszeg:

$$\begin{aligned} \nabla^2 r^n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) r^n = \\ &= n(n-2)r^{n-4} \cdot (x^2 + y^2) + 2nr^{n-2} = n^2 r^{n-2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Ezenkívül, minthogy Δ a (17) szerint egy potenciálfüggvény,

$$\nabla^2 \Delta = 0, \quad (45)$$

és éppen így

$$\nabla^2 z = 0. \quad (46)$$

Ha most $u = z$, $v = \Delta$ értékeket helyettesítjük a (43) egyenletbe, úgy minthogy

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \quad \nabla^2(z\Delta) = 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z}.$$

¹ THOMSON és TAIT: Treatise on Natural Philosophy, vol. I, Part. I.. New Edition. Cambridge 1879. p. 179, (10).

Ha ezt az egyenletet a (15) egyenlettel

$$\nabla^2 u_z = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z}$$

összevetjük, azonnal látjuk, hogy a (15) egyenlet egy particuláris megoldása

$$u_z = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot z \cdot \Delta. \quad (47)$$

Egy másik megoldást a következőképpen találhatunk:

A (15) egyenlet:

$$\nabla^2 u_z = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z};$$

ezt r szerint differenciálva:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Delta^2 u_z) = \nabla^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right); \quad (47a)$$

ha

$$u = \Delta, \quad v = r^n,$$

akkor a (43), (44), (45) alapján

$$\nabla^2 (r^n \Delta) = n^2 r^{n-2} \Delta + 2nr^{n-1} \frac{\partial \Delta}{\partial r}.$$

Ha $n=1$ -et választunk, akkor:

$$\nabla^2 (r \Delta) - \frac{(r \Delta)}{r^2} = 2 \frac{\partial \Delta}{\partial r};$$

ezt z szerint differenciálva:

$$\nabla^2 \left(r \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right). \quad (47b)$$

A (47a) és (47b) összevetéséből

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} r \frac{\partial \Delta}{\partial z}; \quad (47c)$$

és ismét

$$u_z^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \int r \frac{\partial \Delta}{\partial z} dr; \quad (47d)$$

és mint már (47)-ben láttuk:

$$u_z^{(3)} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{u} z \cdot \Delta. \quad (47e)$$

Tekintettel azonban arra, hogy $u_z^{(2)}$ és $u_z^{(3)}$ ez a két értéke csak úgy tehet eleget a (46) egyenletnek, ha azokkal a ∇^2 műveletet elvégezve, a jobb oldalon $-\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z}$ -t kapunk, ennélfogva, ha Φ -vel egy tetszés-szerinti állandót jelölünk,

$$u_z = \Phi u_z^{(2)} + (1 - \Phi) u_z^{(3)}.$$

Már most tekintetbe véve Δ -nak (40) alatti értékét és azt körülményt, hogy:

$$\int y \cdot J_0(ay) dy = \frac{1}{a} y \cdot J_1(ay);^1$$

$$\int y \cdot I_0(\beta y) dy = \frac{1}{\beta} y \cdot I_1(\beta y);$$

hol is:

$$I_1(\beta y) = -iJ_1(i\beta y);$$

nyerjük, hogy:

$$u_z^{(2)} = -\frac{1}{2} A_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} h \left[J_0(ay) \frac{\cos(\eta ax)}{\cos(\eta a)} \right] \Phi_1 \cdot x -$$

$$-\frac{1}{2} B_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} h \left[\frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \cos(\eta \beta x) \right] \Phi_2 \cdot x; \quad (48a)$$

$$u_z^{(3)} = -\frac{1}{2} A_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 y J_1(ay) \frac{\sin(\eta ax)}{\cos(\eta a)} (1 - \Phi_1) +$$

$$+\frac{1}{2} B_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 y \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \sin(\eta \beta x) \cdot (1 - \Phi_2). \quad (48b)$$

E két kifejezésben: A_0 , B_0 , a , β a Δ kifejezésében előforduló constansok és Φ_1 és Φ_2 két tetszés-szerinti állandó.

Továbbá jelenti

¹ JAHNKE és EMDE idézett műve 165. és 166. lapja, 12. §.

$$J_1(ay) = -\frac{1}{a} \frac{d}{dy} J_0(ay); \quad (49)$$

$$I_1(\beta y) = -iI_1(i\beta y) = \frac{1}{\beta} \frac{d}{dy} I_0(\beta y); \quad (50)$$

az elsőrendű, elsőfajú BESSEL-féle függvényt, reális, illetőleg imaginárius argumentumnál.

A következőkben látni fogjuk, hogy összes határfeltételeink kielégíthetők, ha:

$$\phi_1 = \phi_2 = 0;$$

ennekfogva u_z ama kifejezése, melyet használni fogunk:

$$\begin{aligned} u_z = & \Sigma A_1 r_1 I_0(\eta y) \frac{\Xi \sin(\eta r x)}{\Xi \sin(\eta r)} - \\ & - \frac{1}{2} \Sigma \frac{\lambda + \mu}{\mu} A_0 r_1 y J_1(ay) \frac{\Xi \sin(\eta a r)}{\Xi \cos(\eta a)} + \\ & + \Sigma B_1 r_1 \frac{I_0(\delta y)}{I_0(\delta)} \cdot \sin(\eta \delta x) + \\ & + \frac{1}{2} \Sigma B_0 \frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 y \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \sin(\eta \beta x) + D_1 h x. \quad (51) \end{aligned}$$

Az u_z és Δ ismert értékeiből most már meghatározhatjuk u_r értékét.

Ugyanis (7) és (12) szerint:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (52)$$

innen:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = \Delta - \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (53)$$

illetőleg (21) szerint

$$\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{u_r}{y} = r_1 \Delta - \frac{r_1}{h} \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (54)$$

A

$$\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{u_r}{y} = 0$$

differentiális egyenlet megoldása, a mint azt a differentiális egyenlet változóinak szétválasztása után azonnal megkapjuk:

$$u_r = \frac{c(x)}{y}.$$

Ha most a constansok variációjának módszerét alkalmazva, $c(x)$ helyett $c(x, y)$ -t veszünk, akkor

$$\frac{\partial u_r}{\partial y} = \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{1}{y} - \frac{c(x, y)}{y^2}; \quad \frac{u_r}{y} = \frac{c(x, y)}{y^2},$$

ha ez értékeket (54)-be helyettesítjük, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} &= \left(r_1 \Delta - \frac{r_1}{h} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot y; \\ c(x, y) &= \int \left(r_1 \Delta - \frac{r_1}{h} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot y dy + \varphi(x); \end{aligned}$$

és így az (54) egyenlet teljes integrálja:

$$u_r = \frac{1}{y} \int \left(r_1 \Delta - \frac{r_1}{h} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot y dy + \frac{\varphi(x)}{y}, \tag{55}$$

hol is $\varphi(x)$ egy tetszés-szerinti függvénye x -nek; mi azonban csakis a $\varphi(x) = 0$ értéket használhatjuk, mivel különben az: $y = 0$ helyen $u_r = \infty$ lenne, a mi lehetetlen.

Ha tekintetbe vesszük, hogy:

$$\begin{aligned} \int y J_0(\alpha y) dy &= \frac{1}{\alpha} y J_1(\alpha y);^1 \\ \int y^2 J_1(\alpha y) dy &= \frac{1}{\alpha} y^2 J_2(\alpha y); \\ &\dots \dots \dots \\ \int y I_0(\beta y) dy &= \frac{1}{\beta} y I_1(\beta y); \\ \int y^2 I_1(\beta y) dy &= \frac{1}{\beta} y^2 I_2(\beta y); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

¹ JAHNKE und EMDE idézett műve 165. és 166. lapja, 10. és 12. §.

$$J_0(\alpha y) + J_2(\alpha y) = \frac{2}{\alpha y} J_1(\alpha y);$$

$$I_0(\beta y) + I_2(\beta y) = \frac{2}{\beta y} I_1(\beta y);$$

akkor megkapjuk, hogy

$$u_r = -\Sigma A_1 r_1 J_1(\gamma y) \frac{\cos(\gamma r x)}{\sin(\gamma r)} -$$

$$- \frac{1}{2} \Sigma A_0 \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 y J_0(\alpha y) - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{r_1}{\alpha} J_1(\alpha y) \right] \frac{\cos(\gamma \alpha x)}{\cos(\gamma \alpha)} +$$

$$+ \Sigma B_1 r_1 \frac{I_1(\delta y)}{I_0(\delta)} \cdot \cos(\gamma \delta x) \dots \quad (56)$$

$$- \frac{1}{2} \Sigma B_0 \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 y \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{r_1}{\beta} \frac{I_1(\beta y)}{I_0(\beta)} \right] \cos(\gamma \beta x) +$$

$$+ \frac{1}{2} [D_0 - D_1] r_1 y.$$

Miután így u_r és u_z , valamint Δ kifejezéseit a (40), az (56), az (51)-ből ismerjük, a feszültségek a (10), a (6), a (12) formulák alapján egyszerű differenciálással képezhetők.

Mintogy e testre forgató erőnyomatékok nem hatnak, u_ϕ , R_ϕ és $Z_\phi = 0$; és az egyedül fellépő nyíró feszültség R_z .

A BESSEL-féle függvények ismert differenciálási formuláit tekintetbe véve,¹ lesz:

Az axialis feszültség:

$$Z_z = \Sigma 2\mu A_1 r \frac{\cos(\gamma r x)}{\sin(\gamma r)} J_0(\gamma y) +$$

$$+ \Sigma \lambda A_0 \left[J_0(\alpha y) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (\alpha y) J_1(\alpha y) \right] \frac{\cos(\gamma \alpha x)}{\cos(\gamma \alpha)} +$$

$$+ \Sigma 2\mu B_1 \delta \frac{I_0(\delta y)}{I_0(\delta)} \cos(\gamma \delta x) + \quad (57)$$

$$+ \Sigma \lambda B_0 \left[I_0(\beta y) + \frac{\lambda + \mu}{\mu} (\beta y) I_1(\beta y) \right] \frac{\cos(\gamma \beta x)}{I_0(\beta)} +$$

$$+ \lambda D_0 + 2\mu D_1;$$

¹ JAHNKE und EMDE, 165. lap, 11. §.

a radiális feszültség:

$$\begin{aligned}
 R_r = & - \Sigma 2\mu A_1 \frac{\text{Cos}(\eta r x)}{\Xi \sin(\eta r)} \left[r J_0(r y) - \frac{1}{y} J_1(r y) \right] + \\
 & + \Sigma A_0 \left[(2\lambda + 3\mu) J_0(\alpha y) + \left[(\lambda + \mu) \alpha y - 2 \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha \cdot y} \right] J_1(\alpha y) \right] \frac{\text{Cos}(\eta \alpha x)}{\text{Cos}(\eta \alpha)} - \\
 & \Sigma 2\mu B_1 \cos(\eta \delta x) \left[\frac{\delta I_0(\delta y)}{I_0(\delta)} - \frac{1}{y} \frac{I_1(\delta y)}{I_0(\delta)} \right] + \quad (58) \\
 & + \Sigma B_0 \left[(2\lambda + 3\mu) \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} - \left[(\lambda + \mu) \beta y + 2 \frac{\lambda + 2\mu}{\beta y} \right] \frac{I_1(\beta y)}{I_0(\beta)} \right] \cos(\eta \beta x) + \\
 & + \mu (D_0 - D_1) + \lambda D_0;
 \end{aligned}$$

a tangenciális feszültség:

$$\begin{aligned}
 \varphi_\varphi = & - \Sigma 2\mu A_1 \frac{\text{Cos}(\eta r x)}{\Xi \sin(\eta r)} \frac{1}{y} J_1(r y) + \\
 & + \Sigma \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{J_1(\alpha y)}{\alpha y} - \mu J_0(\alpha y) \right] A_0 \cdot \frac{\text{Cos}(\eta \alpha x)}{\text{Cos}(\eta \alpha)} - \\
 & - \Sigma 2\mu B_1 \frac{J_1(\delta y)}{y I_0(\delta)} \cos(\eta \delta x) + \quad (59) \\
 & + \Sigma B_0 \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{I_1(\beta y)}{\beta y I_0(\beta)} - \mu I_0(\beta y) \right] \cos(\eta \beta x) + \\
 & + \mu [D_0 - D_1] + \lambda D_0.
 \end{aligned}$$

a csúsztató feszültség:

$$\begin{aligned}
 R_z = & - 2\Sigma \mu A_1 r J_1(r y) \cdot \frac{\Xi \sin(\eta r x)}{\Xi \sin(\eta r)} - \\
 & \Sigma \left[(\lambda + \mu) \alpha y J_0(\alpha y) - (\lambda + 2\mu) J_1(\alpha y) \right] A_0 \frac{\Xi \sin(\eta \alpha x)}{\text{Cos}(\eta \alpha)} + \quad (60) \\
 & + 2\Sigma \mu B_1 \delta \frac{I_1(\delta y)}{I_0(\delta)} \sin(\eta \delta y) + \\
 & + \Sigma \left[(\lambda + \mu) \beta y \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} - (\lambda + 2\mu) \frac{I_1(\beta y)}{I_0(\beta)} \right] B_0 \sin(\eta \beta x).
 \end{aligned}$$

Képezzük végül a $\frac{\partial u_z}{\partial r}$ kifejezést, melyre később szükségünk lesz:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\Sigma A_1 \frac{\Xi \sin(\lambda \gamma x)}{\Xi \sin(\eta \gamma)} r J_1(\gamma y) - \\
 &- \Sigma \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} A_0 a y J_0(a y) \frac{\Xi \sin(\eta a x)}{\Xi \cos(\eta a)} + \\
 &+ \Sigma B_1 \frac{\partial I_1(\delta y)}{I_0(\delta)} \cdot \sin(\eta \delta x) + \\
 &+ \Sigma \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} B_0 \beta y \frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)} \sin(\eta \beta x).
 \end{aligned} \tag{61}$$

III. A határfeltételek kielégítése, a constansok meghatározása.

Az eddigiekben meghatároztuk az összes kifejezéseket, melyek a test egy tetszésszerű pontjában a feszültségi és deformatio-állapotot jellemzik.

Hátra van most feladatunk nehezebb része: úgy meghatározni az eddig határozatlan állandókat, hogy

1. A köpenyfelületen, hol is $r = r_1$, $y = 1$, z értékétől függetlenül mindenütt a nyíró feszültség:

$$R_z = 0 \quad y=1$$

legyen, minthogy ott megfelelő külerő nem működik.

2. Az $y=1$ helyen, a köpenyfelületen a normális feszültség a működő külerővel egyenlő, mely a z -nek, illetőleg az x -nek egy önkényes függvénye:

$$R_r = F_1(x) \quad y=1$$

Az általunk tárgyalt különleges esetben, a köpenyfelületre a külső légnomáson kívül, mely nem esik számításba, semmiféle külső erő nem működik, tehát

$$F_1(x) = 0.$$

3. A henger sík alapjai egy tetszés-szerű forgási felületbe mennek át; a részleteiben tárgyalt esetben tehát, a hol:

$$z = h, \quad x = 1, \quad \text{ott} \quad u_z = \varepsilon h + F_3(y);$$

illetőleg az általunk tárgyalt különleges esetben síkok maradnak

$$z = h, \quad x = 1, \quad \text{ott} \quad u_z = \varepsilon_h \cdot h;$$

azaz:

$$F'_s(y) = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

4. A henger összenyomása ismeretes tehát, ha:

$$x = 1, \quad u_z = -\varepsilon_h \cdot h + F'_s(y);$$

hol is ε_h adott.

5. Az alaplapoknál a külső él keresztirányú tágulása adott

$$y = 1, \quad x = 1, \quad u_{r_1} = \varphi \cdot \varepsilon_h \cdot \sigma \cdot r_1,$$

hol is:

$$0 \leq \varphi < 1.$$

6. Az alaplapokon a súrlódás és a normális nyomás között egy adott összefüggés áll fenn:

$$z = 1, \quad R_z = F'_z(Z_z).$$

Ennek a hat feltételnek kielégítésére rendelkezésünkre áll hat állandó-rendszer: $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, B_0^{(n)}, B_1^{(n)}; D_0, D_1$, továbbá az $a_n, \beta_n, \gamma_n; \delta_n$ paraméterek.

Foglalkozunk először az 1. határfeltétellel:

$$y = 1, \quad R_z = 0.$$

Ennek kielégítésére válaszszuk:

$$\delta_n = \beta_n; \quad (62)$$

legyen továbbá: (lásd R_z (60) alatti kifejezését)

$$2B_1^{(n)}\beta_n I_1(\beta_n) - \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} I_1(\beta_n) - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \beta_n I_0(\beta_n) \right] \cdot B_0^{(n)} = 0, \quad (63)$$

tehát:

$$B_1^{(n)} = \frac{1}{2} B_0^{(n)} \left[\frac{1}{\beta_n} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \right]; \quad (64)$$

jelöljük a zárójelben álló kifejezést a_n -el, ez a kifejezés, a menyiben β_n csakis n -től függ, az n -nek egy függvénye:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta_n} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} \right]; \quad (65)$$

és

$$B_1^{(n)} = B_0^{(n)} \cdot a_n. \quad (66)$$

Ez esetben a (60) alatti R_z kifejezésben a két utolsó tag az $y=1$ köpenyfelület bármely pontjában 0.

A mi az a_n kifejezést illeti, tekintettel arra, hogy

$$\lim_{\beta_n \rightarrow \infty} \frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)} = \lim_{\beta_n \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta_n}}{\sqrt{2\pi\beta_n}};$$

azonnal látható, hogy

$$\lim_{\beta_n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu}. \quad (67)$$

Erre a kifejezésre később még szükségünk lesz.

Megjegyzem itt, hogy az $\frac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)}$ kifejezés igen gyorsan convergál az egység felé, mit a következő kis táblázat mutat:

β_n	$I_0(\beta_n)$	$-I_0(\beta_n)$	$I_0(\beta_n)/I_1(\beta_n)$
3	4,8808	3,9534	1,23
5	27,2340	24,335	1,11
8	427,564	399,873	1,06
11	7288,490	6948,860	1,04

E függvény értéke éppen oly gyorsan közeledik az egységhez, mint a

$$\frac{\text{Cos}(a_n)}{\text{Sin}(a_n)} = \text{Cotg}(a_n)$$

hyperbolikus cotangensé, ha a_n , illetőleg $\beta_n > 10$; akkor a függvény értékét gyakorlati számításban 1-nek vehetjük.

Hogy az $y=1$ helyen az R_z kifejezés első két tagja is identikusan eltűnjön, válasszuk a γ_n értékeket úgy, hogy azok az:

$$J_1(y) = 0 \quad (68)$$

transcendens egyenletnek az egymásra következő gyökei legyenek, az a_n értékeket pedig úgy, hogy azok az

$$F(y) = (\lambda + 2\mu) J_1(y) + (\lambda + \mu) y J_0(y) = 0 \quad (69)$$

transzcendens egyenletnek egymás után következő gyökei legyenek.

Mint a BESSEL-féle függvények elméletéből ismeretes, mindkét egyenletnek végtelen sok, valós, pozitív gyöke van; ezenkívül a $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ érték, azaz két szomszédos gyök különbsége n növekvő értékénél igen gyorsan közeledik a π -hez.

Ugyanez áll az $a_n - a_{n-1}$ különbségre nézve is.

A $J_1(y) = 0$ egyenlet gyökei a JAHNKE und EMDE: «Functionen-tabellen» táblázatgyűjteményében is megtalálhatók, az $F(y) = 0$ egyenlet gyökeit pedig a megfelelő görbe felrajzolásával graphikusan könnyen kiszámíthatjuk, minthogy J_0 és J_1 -re vonatkozó táblázatok nevezett munkában megtalálhatók.

Hogy az $F(y) = 0$ egyenlet két szomszédos gyökének különbsége szintén π felé convergál, az látható a következőkből:

Mint ismeretes:¹

$$\frac{J_1(y)}{y} = \frac{1}{2} (J_0(y) + J_2(y));$$

tehát:

$$F(y) = \lambda J_0(y) + (\lambda + 2\mu) J_2(y);$$

tekintettel azonban arra, hogy y nagy értékeinél

$$\lim_{y \rightarrow \infty} J_0(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} J_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right);$$

tehát

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = (\lambda + \mu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right); \quad (70)$$

és így a $F(y) = 0$ egyenlet két szomszédos gyökének különbsége tényleg π felé convergál.

¹ JAHNKE und EMDE idézett műve, 123. l.

² I. h. 165. lap, 10. §.

Abban az esetben, a mikor

$$m = \frac{10}{3}, \quad \sigma = 0.3, \quad \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2} \frac{m}{m-1} = \frac{5}{7};$$

meghatároztam az

$$J_1(y) - \frac{5}{7}yJ_0(y) = 0$$

egyenlet első öt gyökét, $a_1 \dots a_5$ -öt; ezeket az alanti táblázatban közlöm. Ugyancsak e táblán van feltüntetve a $J_1(y) = 0$ egyenlet első öt gyöke, $\gamma_1 \dots \gamma_5$, melyet JAHNKE és EMDE idézett könyvéből, 123. l., vettem ki:

n	α_n	$\alpha_{n+1} - \alpha_n$	n	γ_n	$\gamma_{n+1} - \gamma_n$
$n=1$	1,4761		1	3,8137	
		3,7771			3,1839
$n=2$	5,2532		2	7,0156	
		3,2366			3,1579
$n=3$	8,4898		3	10,1735	
		3,1817			3,1502
$n=4$	11,6715		4	13,3237	
		3,1634			3,1469
$n=5$	14,8349		5	16,4706;	

mint látható, két szomszédos gyök különbsége elég gyorsan convergál π felé.

A (62), (64), (68) és (69) egyenletek alapján választott állandókkal tehát az

$$R_z = 0, \quad \text{ha } y = 1$$

határfeltétel identikusan ki van elégítve.

Vizsgáljuk most a harmadik feltételt, vagyis:

$$z = h, \quad r = 1, \quad u_z = \varepsilon_n \cdot h + F'_3(y), \quad \frac{\partial n_z}{\partial y} = F'_3(y).$$

A (61) egyenlet alapján nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_z}{\partial y} = & - \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(n)} \gamma_n J_1(\gamma_n y) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(n)} \frac{\lambda + \mu}{\mu} (a_n y) J_0(a_n y) \mathfrak{E}g(\gamma a_n) + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} B_1^{(n)} \beta_n \frac{I_1(\beta y)}{I_0(\beta_n)} \sin(\gamma \beta_n) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} B_0^{(n)}(\beta_n y) \frac{I_0(\beta_n y)}{I_0(\beta_n)} \sin(\gamma \beta_n) = \frac{1}{r_1} F_3'(y). \end{aligned} \quad (71)$$

Ha már most a β_n -eket úgy választjuk, hogy:

$$\gamma \beta_n = n\pi; \quad (72)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{\gamma}; \quad (73)$$

akkor ez esetben $\sin(\gamma \beta_n) = 0$, a kifejezés utolsó két összege elmarad.

Most még csak $A_0^{(n)}$ és $A_1^{(n)}$ -t kell úgy meghatározni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(n)} \gamma_n J_1(\gamma_n y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(n)} \frac{\lambda + \mu}{\mu} (a_n y) J_0(a_n y) \mathfrak{E}g(\gamma a_n) = F_3'(y) \quad (74)$$

legyen.

Ez csak úgy lehetséges, ha $c \cdot \Phi(y)$ alatt egy tetszés-szerinti függvényt értve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(n)} \gamma_n J_1(\gamma_n y) = c \cdot \Phi(y); \quad (74a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(n)} \mathfrak{E}g(\gamma a_n) \cdot (a_n y) \cdot J_0(a_n y) = -2 \frac{\mu}{\lambda + \mu} [c \Phi(y) - F_3'(y)]. \quad (74b)$$

Nekünk tehát az önkényesen választott $c \cdot \Phi(y)$ függvényt $J_1(\gamma_n y)$, illetőleg $y J_0(a_n y)$ szerint tovahaladó sorba kell fejtenünk, a mennyiben e sorok convergensnek, feladatunk meg van oldva.

A BESSEL-féle függvények elméletéből ismeretes, hogy az önkényesen választott $c \cdot \Phi(y)$ függvény bizonyos, DINI által levezetett feltételek mellett fejthető a következő sorba:¹

$$c \cdot \Phi(y) = c_0 + c_1 J_p(k_1 y) + c_2 J_p(k_2 y) + \dots + c_n J_p(k_n y) + \dots$$

¹ V. ö. például: N. NIELSEN Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen; Leipzig 1904., p. 352—355. §. 135; vagy specziális, egyszerű esetre nézve: A. GRAY and G. B. MATHEWS. Treatise on BESSEL-functions; London 1895; p. 30 33.

Ezek a feltételek általában megfelelnek azoknak a DIRICHLET által megadott feltételeknek, melyek mellett egy önkényes függvény FOURIER-féle sorba fejthető. Minthogy a gyakorlatban előforduló függvények e feltételeknek mindig eleget tesznek, azokra részletesen nem térek ki.

Szükséges azonban, hogy $k_1 \dots k_n$ az alatt megadott három transcendens egyenlet egyikének gyöke legyen:

$$\begin{aligned} a) & \quad J_p(y) = 0; \\ b) & \quad J_{p+1}(y) = 0; \\ c) & \quad y \cdot J_{(p+1)}(y) + g \cdot J_p(y) = 0, \end{aligned}$$

hol is g egy tetszés-szerinti állandó.

Fejtsük ki először DIRICHLET szerint, (idézett helyen,) $c \cdot \Phi(y)$ -t a $J_1(\gamma_n y)$ szerint haladó sorba:

$$c \cdot \Phi(y) = \gamma_0 A_1^{(0)} + \gamma_1 A_1^{(1)} J_1(\gamma_1 y) + \dots + \gamma_n A_1^{(n)} J_1(\gamma_n y) + \dots; \quad (75)$$

szorozzuk meg ez egyenlet mindkét oldalát

$$y \cdot J_1(\gamma^{(i)} y)$$

szorzattal és integráljuk 0 és 1 határok között.

Minthogy, miként ismeretes:¹

$$\int_0^1 y J_1(\gamma_n y) J_1(\gamma_i y) dy = 0; \quad \text{ha } \gamma_n \neq \gamma_i,$$

$$\int_0^1 y J_1^2(\gamma_n y) dy = \frac{1}{2} J_0(\gamma_n) J_2(\gamma_n); \quad \text{ha } \gamma_i = \gamma_n,$$

ebből következik, hogy:

$$c \int_0^1 J_1(\gamma_n y) \Phi(y) \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} \gamma_n A_1^{(n)} J_0(\gamma_n) J_2(\gamma_n);$$

és így:

$$A_1^{(n)} = \frac{2c}{\gamma_n \cdot J_0(\gamma_n) \cdot J_2(\gamma_n)} \int_0^1 J_1(\gamma_n y) \Phi(y) \cdot y \cdot dy. \quad (75a)$$

¹ V. ö. például: JAHNKE und EMDE idézett munkáját, 166. l.; harmadik formula; vagy GRAY and MATHEWS idézett munkája 53. l.

Fejtsük már most a kifejezést:

$$c \cdot \Phi(y) - F'_s(y)$$

egy $yJ_0(a_n y)$ szerint tovahaladó sorba, hol, mint (69)-ből következik, az a_n -ek az

$$J_1(y) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \cdot y \cdot J_0(y) = 0$$

transzcendens egyenlet gyökei.

Ez az egyenlet a DINI által a megelőző 462. lapon említett c) csoportba tartozik, hol is $p = -1$, miután $J_{-1} = -J_1$. A constansok meghatározására egy fogást kell alkalmaznunk, minthogy a sorbafejtés nem $J_p = -J_1$, hanem $J_0 = J_{p+1}$ szerint történik.

Ugyanis, az:

$$-2 \frac{\mu}{\lambda + \mu} [c\Phi(y) - F'_s(y)] = A_0^{(1)} \mathfrak{Eg}(\eta a_1)(a_1 y) J_0(a_1 y) + \dots + \\ + A_0^{(n)} \mathfrak{Eg}(\eta a_n)(a_n y) J_0(a_n y) + \dots$$

egyenlet mindkét oldalát dy -al szorozva, integráljunk 0 és y határok között:

$$-2 \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[c \int_0^y \Phi(y) dy - (F_s(y) - F_s(0)) \right] = \\ = A_0' \mathfrak{Eg}(\eta a_1) y J_1(a_1 y) + \dots + A_0^{(n)} \mathfrak{Eg}(\eta a_n) y J_1(a_n y) + \dots, \quad (76)$$

minthogy mint ismeretes:¹

$$\int y J_0(a_n y) dy = \frac{1}{a_n} y J_1(a_n y).$$

Szorozzuk meg most a (76) egyenlet mindkét oldalát

$$J_1(a_i y) dy$$

szorozmánynyal és integráljunk 0 és 1 határok között.

¹ JAHNKE und EMDE idézett műve 165. lap.

Ez esetben a jobboldalon csupa ilyen tag áll:¹

$$\varphi(i, n) = \int_0^1 y J_1(a_n y) J_1(a_i y) dy;$$

azonban ismeretes, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y J_1(a_n y) J_1(a_i y) dy = \\ & = \frac{1}{a_n^2 - a_i^2} | y a_n J_0(a_n y) J_1(a_i y) - y a_i J_0(a_i y) J_1(a_n y) |_0^1; \end{aligned}$$

minthogy azonban a (69) egyenlet szerint:

$$\begin{aligned} J_1(a_i) &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} a_i J_0(a_i); \\ J_1(a_n) &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} a_n J_0(a_n); \end{aligned}$$

ebből kifolyólag:

$$\varphi(i, n) = 0, \quad \text{ha} \quad a_i \leq a_n;$$

míg, ha $a_i = a_n$, mint ismeretes:²

$$\varphi(n, n) = \int_0^1 y J_1^2(a_n y) dy = \frac{1}{2} | J_1^2(a_n) - J_0(a_n) J_2(a_n) |_0^1. \quad (77)$$

Minthogy azonban:³

$$J_1(a_n) = \frac{1}{2} a_n (J_0(a_n) + J_2(a_n)) \quad (78)$$

így (78) és (77) egybevetéséből következik, hogy, ha még rövidség kedvéért

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = g, \quad (78a)$$

hogy:

$$\varphi(n, n) = \int_0^1 y J_1^2(a_n y) dy = \frac{1}{2} | J_1^2(a_n) - 2(g-1) J_0^2(a_n) |. \quad (79)$$

¹ I. h. 166. l.

² JAHNKE és EMDK i. műve 166. lapja.

³ Ugyane mű 165. lapja.

Mínthogy a jobboldalon $\varphi(n, n)$ kivételével, minden tag 0, következík:

$$\begin{aligned}
 & -2c \cdot \frac{\rho}{\lambda + \mu} \left\{ \int_0^1 J_1(a_n y) dy \int_0^y \Phi(y) dy - \int_0^1 F_3(y) J_1(a_n y) dy + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{a_n} F_3(0) [1 - J_0(a_n)] \right\} = \frac{1}{2} A_0^{(n)} \mathfrak{Eg}(\eta a_n) [J_1^2(a_n) - (2g - 1) J_0^2(a_n)]. \tag{79a}
 \end{aligned}$$

Ebból kifolyólag:

$$\begin{aligned}
 A_0^{(n)} &= \frac{4\mu c}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mathfrak{Eg}(\eta a_n) [J_1^2(a_n) - 2(g - 1) J_0^2(a_n)]} \cdot \\
 & \cdot \left[\int_0^1 J_1(a_n y) \left[\int_0^y \Phi(y) dy \right] dy - \int_0^1 F_3(y) J_1(a_n y) dy + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{a_n} F_3(0) [1 - J_0(a_n)] \right]; \tag{80}
 \end{aligned}$$

és, mint már láttuk:

$$A_1^{(n)} = \frac{2c}{r_n J_0(r_n) J_2(r_n)} \int_0^1 J_1(r_n y) \Phi(y) y dy.$$

Bárhogy válaszszuk is a teljesen önkényes $\Phi(y)$ függvényt, a mennyiben $A_0^{(n)}$ és $A_1^{(n)}$ -t a (75), illetóleg a (80) képletekből határozzuk meg, az a feltétel, hogy az

$$r = 1, \text{ helyen } \frac{\partial u_z}{\partial y} = F'_3(y);$$

vagyis a henger homloklapjai egy tetszés-szerinti forgási felületbe mennek át, ki van elégítve.

A $c \cdot \Phi(y)$ függvényt tehát még tetszés szerint választhatjuk és annak megfelelő választásával módunkban van még egy határfeltételt kielégíteni.

A (75) és (80) kifejezésekben előforduló határozott integrálok, ha másként nem, planimeter segélyével mindig meghatározhatók (kiértékesíthetők).

Térjünk át most a második feltételre; ennek értelmében:

$$y = 1, \quad r = r_1, \quad R_r = F_1(x);$$

minthogy már $a_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n, A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, B_1^{(n)}$ ismert mennyiségek, még a: $c \cdot \phi(y), B_0^{(n)}$ függvény, illetőleg constans-rendszer és a D_0 és D_1 állandók szabadok.

Az R_r -nek (58) alatti kifejezésébe $y=1$ -et helyettesítve; és tekintetbe véve, hogy (69) szerint:

$$J_0(a_n) = \frac{1}{a_n} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} J_1(a_n),$$

és (68) szerint:

$$J_1(\gamma_n) = 0,$$

lesz:

$$\begin{aligned} F_1(x) = & - \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu A_1^{(n)} \frac{\mathfrak{C}os(\eta a_n x)}{\mathfrak{S}in(\eta \gamma_n)} \gamma_n J_0(\gamma_n) + \\ & + \frac{(\lambda + 2\mu)\mu + (\lambda + \mu)a_n^2}{(\lambda + \mu)a_n} \cdot A_0^{(n)} J_1(a_n) \frac{\mathfrak{C}os(\eta a_n x)}{\mathfrak{C}os(\eta a_n)} - \\ & - \Sigma B_0^{(n)} \left\{ \left[-2\mu \frac{n\pi}{\eta} a_n + 2\lambda + 3\mu \right] - \right. \\ & \left. - \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \left[\frac{(\lambda + \mu) \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 - 2(\lambda + 2\mu)}{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - 2\mu a_n \right] \right\} \cos(n\pi x) + \\ & + \mu(D_0 - D_1) + \lambda D_0. \end{aligned}$$

Jelöljük a $\{ \}$ -ben levő kifejezést, mely n függvénye, b_n -el, ez:

$$\begin{aligned} b_n = & \left\{ \left[-2\mu \frac{n\pi}{\eta} a_n + (2\lambda + 3\mu) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \left[\frac{(\lambda + \mu) \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 - 2(\lambda + 2\mu)}{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - 2\mu a_n \right] \right\}; \quad (81) \end{aligned}$$

akkor ez esetben:

$$\begin{aligned}
 F_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} 2\mu A_1^{(n)} \gamma_n \frac{\cos(\eta \gamma_n x)}{\sin(\eta \gamma_n)} - J_0(\gamma_n x) + \\
 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu + (\lambda + \mu) a_n^2}{a_n} A_0^{(n)} J_1(a_n) \frac{\cos(\eta a_n x)}{\cos(\eta a_n)} - \\
 - \mu [D_0 - D_1] - \lambda D_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot B_0^{(n)} \cos(n\pi x).
 \end{aligned} \quad (82)$$

Hogy e (77) egyenlet minden értéke identitás legyen, a baloldalon levő kifejezéseket, melyek x függvényei, egy trigonometrikus sorba fejtjük és a megfelelő tagok coefficiensait mindkét oldalon egyenlővé teszszük.

Ha még a:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)\mu + (\lambda + \mu)a_n^2}{(\lambda + \mu)a_n} = c_n \quad (83)$$

jelölést alkalmazzuk, akkor:

$$F_1(x) = s_0 + s_1 \cos(\pi x) + \dots + s_n \cos(n\pi x) + \dots;$$

$$s_n = 2 \int_0^1 F_1(x) \cos(n\pi x) dx, \quad s_0 = \int_0^1 F_1(x) dx;$$

továbbá az első Σ -nak k -edik tagja:

$$\begin{aligned}
 2\mu \gamma_k A_1^{(k)} J_0(\gamma_k) \frac{\cos(\eta \gamma_k x)}{\sin(\eta \gamma_k)} = q_0^{(k)} + q_1^{(k)} \cos(\pi x) + \dots + \\
 + q_n^{(k)} \cos(n\pi x) + \dots;
 \end{aligned}$$

$q_n^{(k)}$ -t közismert módon meghatározva, lesz:

$$q_n^{(k)} = (-1)^n \frac{(\eta \gamma_k)^2}{n^2 \pi^2 + (\eta \gamma_k)^2} \cdot \frac{2\mu}{\eta} \cdot A_1^{(k)} J_0(\gamma_k);$$

és

$$q_0^{(k)} = \frac{2\mu}{\eta} A_1^{(k)} J_0(\gamma_k).$$

Hasonló módon fejthetjük ki a második Σ -nak i -edik tagját:

$$\begin{aligned}
 A_0^{(i)} \cdot c_i \cdot J_1(a_i) \operatorname{Tg}(\eta a_i) \frac{\cos(\eta a_i x)}{\sin(\eta a_i)} = p_0^{(i)} + p_1^{(i)} \cos \pi x + \dots + \\
 + p_n^{(i)} \cos(n\pi x) + \dots;
 \end{aligned}$$

itt lesz:

$$p_n^{(i)} = (-1)^n \frac{\eta a_i}{n^2 \pi^2 + (\eta a_i)^2} c_i J_1(a_i) \mathfrak{Eg}(\eta a_i) \cdot A_0^{(i)}. \quad (85)$$

$$\mu_0^{(i)} = \frac{c_i}{\alpha_i} J_1(a_i) \mathfrak{Eg}(\eta a_i) A_0^{(i)}. \quad (86)$$

Adjuk már most össze mindazokat a tagokat, melyek $\cos(n\pi x)$ -el vannak szorozva és tegyük $\cos(n\pi x)$ együtthatóját a (77) egyenlet mindkét oldalán egymással egyenlővé, akkor lesz:

$$b_0 B_0^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_0^{(k)} + \sum_{i=0}^{\infty} p_0^{(i)} + s_0 \mu_0 D_0 - \lambda D_0; \quad (87)$$

ha azonban u_z , u_r és Δ (51), (56), (40) kifejezéseit megvizsgáljuk, akkor látjuk, hogy

$$B_0^{(0)} = B_1^{(0)} = A_0^{(0)} = A_1^{(0)} = 0;$$

ebből kifolyólag:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) D_0 - \mu D_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} q_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{\infty} p_0^{(i)} + s_0 = \\ &= \frac{2\mu}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} A_1^{(k)} J_0(\gamma_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\alpha_i} J_1(a_i) \mathfrak{Eg}(\eta a_i) A_0^{(i)} + \int_0^1 F_1(x) dx. \end{aligned}$$

Mint hogy pedig a 4. és a 3. határfeltételünk szerint:

$$x = 1, \quad u_z = \varepsilon_h h + F_3(y);$$

ha már most az u_z (51) alatti kifejezésébe $x=1$ -et helyettesítjük, és tekintetbe vesszük, hogy (74a) és (74b) szerint az (51) kifejezés első két tagjának összege $= F_3(y)$, akkor azt kapjuk, hogy:

$$D_1 = -\varepsilon_h; \quad (88)$$

és így:

$$\begin{aligned} D_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\eta} A_1^{(k)} J_0(\gamma_k) + \frac{1}{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^{\infty} A_0^{(i)} \frac{c_i}{\alpha_i} \mathfrak{Eg}(\eta a_i) J_1(a_i) + \\ &+ \frac{\int_0^1 F_1(x) dx - \mu \cdot \varepsilon_h}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (89)$$

Most már a $\cos(n\pi x)$ tag coefficiense:

$$\begin{aligned}
 B_0^{(n)} = & \frac{1}{b_n} \left[(-1)^n \frac{2\mu}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta\gamma_k)^2}{n^2\pi^2 + (\eta\gamma_k)^2} A_1^{(k)} J_0(\gamma_k) + \right. \\
 & + 2 \int_0^1 F_1(x) \cos(n\pi x) dx + \\
 & \left. + (-1)^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta a_i \cdot c_i}{n^2\pi^2 + (\eta a_i)^2} A_0^{(i)} \mathfrak{I} \mathfrak{Q}(\eta a_i) J_1(a_i) \right].
 \end{aligned} \tag{90}$$

Evvel valamennyi constans, mint $c \cdot \Phi(y)$ függvénye meg van határozva és az első négy határfeltétel ki van elégítve.

Hátra van még a c factornak és a $\Phi(y)$ függvények olyatén megállapítása, hogy az 5. és a 6. határfeltételek ki legyenek elégítve.

A mi az 5. feltételt illeti, első pillanatra világos, hogy ez csak egy integrál-feltétel, melynek kielégítése tisztán a c factor megfelelő választásától függ.

Ha a (90) alatti kifejezésbe $A_0^{(i)}$ és $A_1^{(k)}$ már meghatározott értékeiket behelyettesítjük; akkor lesz:

$$\begin{aligned}
 B_0^{(n)} = & \frac{c}{b_n} \left\{ (-1)^n \frac{2\mu}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta\gamma_k)^2}{n^2\pi^2 + (\eta\gamma_k)^2} \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \frac{2J_0(\gamma_k)}{\gamma_k J_0(\gamma_n) J_2(\gamma_n)} \int_0^1 J_1(\gamma_k y) \Phi(y) \cdot y dy \right\} + \\
 & + \frac{2}{b_n} \int_0^1 F_1(x) \cos(n\pi x) dx + \\
 & \cdot (-1)^{n+1} \frac{c}{b_n} \cdot \frac{\mu}{\mathfrak{I} \mathfrak{Q}(\eta a_n) (\lambda + \mu)} \cdot \frac{4}{J_1^2(a_n) - (2\eta - 1) J_0^2(a_n)} \cdot \\
 & \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta a_i}{n^2\pi^2 + (\eta a_i)^2} \cdot \left\{ c_i J_1(a_i) \mathfrak{I} \mathfrak{Q}(\eta a_i) \left[\int_0^1 J_1(a_i y) dy \right]^2 \Phi(y) dy - \right. \\
 & \left. - \int_0^1 F_3(y) J_1(a_i y) dy + \frac{1}{a_i} F_3(0) (1 - J_0(a_i)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{91}$$

A jobboldali kifejezés kizárólag az n , Φ és F_1 , valamint F_3 függvénye, hol a Φ , F_1 és F_3 függvények a határozott integrál jele alatt állanak.

Ennélfogva a (91)-ből és a (80)-ból:

$$\begin{aligned} B_0^{(n)} &= c \cdot \Psi_1(n, \Phi, F_1, F_3); \\ A_0^{(n)} &= c \cdot \Psi_2(n, \Phi, F_1, F_3); \\ A_1^{(n)} &= c \cdot \Psi_3(n, \Phi); \end{aligned}$$

továbbá (66) szerint:

$$B_1^{(n)} = a_{(n)} B_0^{(n)} = c \cdot \Psi_4(n, \Phi, F_1, F_3).$$

Ha már most ezeket a kifejezéseket u_r -nek (56) alatti kifejezésébe behelyettesítjük és ugyanoda $x = 1$ -t, $y = 1$ -t teszünk, akkor az 5. határfeltétel (III. rész, 457. lap) értelmében:

$$\begin{aligned} c \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_2 \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 J_0(a_n) - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{r_1}{a_n} J_1(a_n) \right] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Psi_4 r_1 \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_1 \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} r_1 \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{r_1}{\frac{n\pi}{\eta}} \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \right] \cdot (-1)^n + \right. \\ \left. + \frac{r_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\eta} \Psi_3 \cdot J_0(\gamma_k) + \frac{r_1}{2} \frac{1}{\lambda + \mu} \sum_{i=1}^{\infty} J_1(\alpha_i) \Im g(\eta \alpha_i) \frac{c_i}{\alpha_i} \Psi_2 \right\} \\ = r_1 \varphi \varepsilon_h \cdot \sigma - \frac{r_1 \mu}{2(\lambda + \mu)} \left[\frac{1}{\mu_0} \int_0^1 F_1(x) dx - \varepsilon_h \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

Mint hogy a c factor baloldali, zárójelben álló szorzója csakis az n, Φ, F_1, F_3 -nek, továbbá a test méreteinek függvénye, melyet $\omega(n, \Phi, F_1, F_3)$ -al jelölünk, lesz:

$$c = \frac{1}{\omega(n, \Phi, F_1, F_3)} \left[r_1 \varphi \varepsilon_h \cdot \sigma - \frac{1}{2} r_1 \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[\frac{1}{\mu_0} \int_0^1 F_1(x) dx - \varepsilon_h \right] \right]. \quad (93)$$

Mint hogy $\Phi(y)$ az y -nak egy teljesen önkényesen választható függvénye, végtelen sok olyan megoldás-rendszer:

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, c$$

létezik, mely az első öt feltételt kielégíti, bármely tetszős-szerinti $\Phi(y)$ függvényhez, (mely BESSEL-féle függvények szerint továbbadó convergens sorba fejthető) tartozik egy megoldás-rendszer.

A 6. feltétel (III. rész elején, a 457. lapon) értelmében: $x=1$ helyen:

$$R_z = f.F_2(R_r);$$

hol azonban az f állandó factor, már nem tetszés-szerinti, mint-hogy c -t meghatároztuk.

Mint-hogy úgy az R_z , mint az R_r az $x=1$ helyen így írható:

$$R_z = Q_1(\Phi);$$

$$R_r = Q_2(\Phi);$$

lévén ezek a feszültségek, a megadott r_i , h , ε_h és φ értékeken kívül csakis a Φ önkényes függvény függvényei, így kapjuk az:

$$Q_1(\Phi) = f.F_2[Q_2(\Phi)]$$

functionális, illetőleg integrálegyenletet, melyből, Q_1 , Q_2 , F_2 megadott függvények lévén, az önkényes Φ függvény meghatározandó.

Ez a feladat teljesen általánosan választott F_1 , F_2 és F_3 függvény esetén pontosan meg nem oldható.

Gyakorlatilag azonban, tekintettel a súrlódás és normális-nyomás közötti bizonytalan összefüggésre, nem is szükséges valami túl nagy pontossággal törekednünk a megoldásra.

Teljesen elegendő, ha a $\Phi(y)$ függvényt úgy vesszük fel, hogy az ebből a feltételből kiadódó

$$R_z = f.F_2(Z_z)$$

összefüggés a súrlódás és normális-nyomás között physikailag lehetséges, tehát:

1. R_z mindenütt állandó előjelű és a tengely felé irányul.
2. R_z és Z_z mindketten folytonos függvényei az y -nak a 0 és 1 határok között, de ezeket a határokat nem beleértve; mint ezt mindjárt látni fogjuk.
3. az $y=0$ helyen tartozik $R_z=0$ -nak lenni, mint-hogy az $y=0$ helyen $u_r=0$ és mozgató tendentia nélkül nincsen súrlódás. Az $y=1$ helyen R_z minden körülmények között 0.
4. Az R_z függvény a súrlódás physikai természeténél fogva meg kell, hogy feleljen a Z_z lefolyásainak a 0 és 1 határok kö-

zött: nagy Z_z értékeknek nagy R_z értékek kell, hogy feleljenek meg; ha már az $R_z = F(Z_z)$ összefüggés pontos betartása nem is szükséges, de kell, hogy növekvő Z_z értékeknek növekvő R_z értékek feleljenek meg, minden más lefolyása az R_z függvénynek *physikailag absurdum*.

Mintthogy azonban az $y = 1$ és $y = 0$ helyen $R_z = 0$ kell, hogy legyen, viszont ott Z_z , a normális nyomás semmi esetre sem 0, ebből láthatjuk, hogy az R_z , $y = 0$ és $y = 1$ helyeken *nem lehet folytonos függvénye* Z_z -nak, hanem ott véges értékekről hirtelen 0 értékre kell, hogy csökkenjen.

R_z tehát nem analitikai függvénye y -nak és így hatvány-sorral elő nem állítható.

A mi már most a Φ függvény olyatén meghatározását illeti, hogy a 6. feltétel a sűrűlódás- és normális-nyomást illetőleg ki legyen elégitve, itt a következőképpen járunk el.

Mintthogy $c \cdot \Phi(y)$ egy önkényes függvénye az y -nak, azt egy BESSEL-féle függvények szerint tovahaladó sorral előállíthatjuk. Legyen tehát:

$$c \cdot \Phi(y) = q_1 y \cdot J_0(a_1 y) + q_2 y \cdot J_0(a_2 y) + \dots + q_n y \cdot J_0(a_n y),^1 \quad (94)$$

hol is q_1, q_2, \dots, q_n tetszés-szerinti olyan állandók, melyekhez csak azt a feltételt fűzzük, hogy a (94) sor összetartó legyen.

Eddig a problémát teljes általánosságban tárgyaltuk és annak illetően továbbvittele semmi nehézséget nem okoz.

Túlhosszú képletek elkerülése végett tárgyaljuk tovább csak azt a gyakorlati esetet, mikor:

$$a) \quad F_1(x) = 0;$$

vagyis a köpenyfelületre csakis a külső légnyomás hat,

$$b) \quad F_3(y) = 0; \quad F_3'(y) = 0;$$

vagyis az alsó és felső homloklapok a testnek bekövetkezett deformációjában közben síkok maradnak.

¹ V. ö. a 462. lapon lévő (75) sorkifejtéssel és a 461. lapon idézett vonatkozási helyekkel.

Ez a nyomás által igénybevett körhenger alakú próbatest problémája.

Ez esetben a (74b) képlet szerint:

$$A_0^{(n)} \mathfrak{E}g(\eta a_n) a_n y J_0(a_n y) = -2 \frac{\mu}{\lambda + \mu} q_n y \cdot J_0(a_n);$$

tehát:

$$A_0^{(n)} = -\frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \frac{2}{a_n} \mathfrak{E}otg(\eta a_n) \cdot q_n. \quad (95)$$

Éppen így a (74a)-ból:

$$A_1^{(n)} = \frac{2}{\gamma_n \cdot J_0(\gamma_n) J_2(\gamma_n)} \int_0^1 J_1(\gamma_n y) [y^2 J_0(a_1 y) \cdot q_1 + \\ + y^2 J_0(a_2 y) \cdot q_2 + \dots] dy. \quad (96)$$

Jelölje:

$$\varphi(\gamma_n, a_i) = \int_0^1 y^2 J_1(\gamma_n y) J_0(a_i y) dy; \quad (96a)$$

Akkor (96) írható:

$$A_1^{(n)} = \frac{2}{\gamma_n \cdot J_0(\gamma_n) J_2(\gamma_n)} \sum_{i=1}^{\infty} q_i \varphi(\gamma_n, a_i). \quad (97)$$

A mi illeti a (96a) határozott integrált:

$$\varphi(\gamma, a_i) = \int_0^1 y^2 J_1(\gamma \cdot y) J_0(a_i \cdot y) dy,$$

szorozzuk mindkét oldalát $d\gamma$ -val és integráljunk 0 és γ határok között:

$$\int_0^\gamma \varphi(\gamma, a_i) d\gamma = \int_0^\gamma d\gamma \int_0^1 y^2 J_0(a_i y) J_1(\gamma y) dy.$$

Mínthogy a határok végesek, az integratio sorrendjét felcserélhetjük és lesz:

$$\int_0^\gamma \varphi(\gamma, a_i) d\gamma = \int_0^1 y^2 J_0(a_i y) dy \int_0^\gamma J_1(\gamma y) d\gamma;$$

azonban, mivel áll:

$$\int_0^y J_1(\gamma y) d\gamma = -\frac{1}{y} [J_0(\gamma y) - 1],$$

lesz:

$$\int_0^y \varphi(\gamma, a_i) d\gamma = -\int_0^1 y \cdot J_0(a_i y) J_0(\gamma y) dy + \int_0^1 y J_0(a_i y) dy;$$

azaz:

$$\int_0^y \varphi(\gamma, a_i) d\gamma = \frac{1}{a_i^2 - \gamma_n^2} [\gamma \cdot y J_0(a_i y) J_1(\gamma y) - a_i y J_0(\gamma y) J_1(a_i y)]_0^1 + \left[\frac{y}{a_i} J_1(a_i y) \right]_0^1.$$

Rendezve és γ szerint differenciálva; valamint γ helyébe γ_n -t helyettesítve:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_n, a_i) &= \int_0^1 y^2 J_0(a_i y) J_1(\gamma_n y) dy = \\ &= \frac{\gamma_n \cdot J_0(\gamma_n)}{a_i^2 - \gamma_n^2} \left[J_0(a_i) - 2 \frac{a_i J_1(a_i)}{a_i^2 - \gamma_n^2} \right]; \end{aligned}$$

e szerint a (97)-ből

$$A_1^{(n)} = \frac{2}{J_2(\gamma_n)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{a_i^2 - \gamma_n^2} \left[J_0(a_i) - \frac{a_i J_1(a_i)}{a_i^2 - \gamma_n^2} \right]. \quad (98)$$

Továbbá a többi, már meghatározott constansok a (95) és a (90)-ből

$$A_0^{(n)} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{2}{a_n} \text{Cotg}(\eta a_n) \cdot q_n; \quad (99)$$

valamint:

$$\begin{aligned} B_0^{(n)} &= \frac{1}{b_n} \left[(-1)^n \frac{2\mu}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta \gamma_k)^2}{n^2 \pi^2 + (\eta \gamma_k)^2} \cdot \frac{2J_0(\gamma_k)}{J_2(\gamma_n)} \right. \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{a_i^2 - \gamma_n^2} \left[J_0(a_i) - 2 \frac{a_i J_1(a_i)}{a_i^2 - \gamma_n^2} \right] + \\ &\quad \left. + (-1)^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \frac{c_i \cdot q_i}{n^2 \pi^2 + (\eta a_i)^2} \cdot J_1(a_i) \right]; \end{aligned} \quad (100)$$

$$B_1^{(n)} = a_n B_0^{(n)}. \quad (101)$$

$$D_1 = -\varepsilon_n; \quad (102)$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\eta} \frac{J_0(\gamma_k)}{J_2(\gamma_k)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{a_i^2 - \gamma_k^2} \left[J_0(a_i) - 2 \frac{a_i J_1(a_i)}{a_i^2 - \gamma_k^2} \right] \\ - \frac{2\mu}{(\lambda + \mu)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i q_i}{a_i^2} J_1(a_i) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \varepsilon_n; \quad (103)$$

továbbá:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\eta}{n\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \right]; \quad (103a)$$

$$b_n = \left[2\mu \frac{n\pi}{\eta} a_n + (2\lambda + 3\mu) \right] - \quad (104)$$

$$- \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \cdot \left[\frac{(\lambda + \mu) \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 - 2(\lambda + 2\mu)}{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - 2\mu a_n \right]; \quad (105)$$

$$c_n = \frac{(\lambda + 2\mu)\mu + (\lambda + \mu)^2 a_n^2}{(\lambda + \mu) a_n}; \quad (106)$$

és mint tudjuk, a_n az:

$$(\lambda + 2\mu) J_1(y) - (\lambda + \mu) y J_0(y) = 0 \quad (107)$$

egyenletnek, γ_n az:

$$J_1(y) = 0 \quad (108)$$

egyenletnek n -edik gyöke:

Az $A_0^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, $B_0^{(n)}$, $B_1^{(n)}$, D_0 , D_1 és a többi constansok ily módon meghatározott értékei mind lineáris függvényei a tetszés-szerint választható q_i állandóknak:

$$A_0^{(n)} = s_1(n) q_1 + \dots + s_i(n) q_i; \\ A_1^{(n)} = s'_1(n) q_1 + \dots + s'_i(n) q_i; \\ B_0^{(n)} = s''_1(n) q_1 + \dots + s''_i(n) q_i; \\ B_1^{(n)} = [s''_1(n) q_1 + \dots + s''_i(n) q_i] a_n; \quad (109) \\ D_0 = g_1 q_1 + \dots + g_i q_i - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \varepsilon_n; \\ D_1 = \dots \varepsilon_n;$$

hol is $s_i(n)$, $s'_i(n)$, $s''_i(n)$ az n rendszámnak a (98) és következő képletekben található függvényei, $y_0 \dots y_i$ pedig a (103) kifejezésből kiszámítható állandó factorok.

Ha már most az állandók ez értékeit a feszültségeknek (57), illetőleg (60) képleteibe helyettesítjük, akkor az $x = 1$ helyen:

$$\begin{aligned} Z_z = & \sum_{n=1}^{\infty} 2\mu [s'_1(n) q_1 + \dots + s'_i(n) q_i] \text{Cotg}(\eta \gamma_n) J_0(\gamma_n y) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda [s_1(n) q_1 + \dots + s_i(n) q_i] \left[J_0(a_n y) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (a_n y) J_1(a_n y) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mu [s''_1(n) q_1 + \dots + s''_i(n) q_i] a_n \cdot \frac{n\pi}{\eta} \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda [s''_1(n) q_1 + \dots + s''_i(n) q_i] \left[\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\frac{n\pi}{\eta}\right) y \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \right] + \lambda D_0 + 2\mu D_1. \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést q_i szerint rendezve és tekintetbe véve, hogy $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 2\sigma$ [lévén ugyanis a (9)-ből: $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1 - 2\sigma}{2\sigma} = \frac{1}{2\sigma} - 1$, miből e vonatkozás adódik], a fentírt Z_z -ből:

$$\begin{aligned} Z_z = & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2\mu s'_i(n) \text{Cotg}(\eta \gamma_n) J_0(\gamma_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} s_i(n) \cdot \lambda [J_0(a_n y) - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda + \mu}{\mu} a_n y J_1(a_n y)] + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mu s''_i(n) a_n \frac{n\pi}{\eta} \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot s''_i(n) \left[\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{n\pi}{\eta} y \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \right] \right\} q_i - K \cdot \varepsilon_i, \end{aligned}$$

hol is az első summatio az összes i értékekre vonatkozik.

Röviden ezt a kifejezést így írhatjuk:

$$Z_z = q_1\varphi_1(y) + q_2\varphi_2(y) + \dots + q_i\varphi_i(y) - E \cdot \varepsilon_h; \quad (110)$$

éppen így:

$$R_z = q_1\pi_1(y) + q_2\pi_2(y) + \dots + q_i\pi_i(y); \quad (111)$$

hol is $\varphi_i(y)$ a (110) kifejezésben előforduló BESSEL-féle függvényeknek ismert $s_i(n)$ együtthatókkal való szorzatából képzett összeg. Éppen így $\pi_i(y)$. Végeredményben Z_z és R_z -et mint egy BESSEL-féle függvények ismert együtthatóinak kombinációjából alkotott függvények szerint továbbhaladó sorokat állítottuk elő, a hol most a határozatlan q_i együtthatókat kell még úgy meghatározni, hogy az $x=1, y=1$ helyen legyen:

$$\begin{aligned} u_r &= \varphi \cdot \sigma \cdot \varepsilon_h \cdot r_1; \\ R_z &= F_z(Z_z); \end{aligned}$$

vagy, egyszerűség kedvéért:

$$R_z = f \cdot Z_z;$$

mindjárt megjegyezve, hogy φ és f értékei közül csak az egyik vehető fel tetszés-szerintinek.

A (110) és (111) szerint:

$$\frac{R_z}{Z_z} = \frac{q_1\pi_1(y) + q_2\pi_2(y) + \dots + q_i\pi_i(y)}{q_1\varphi_1(y) + q_2\varphi_2(y) + \dots + q_i\varphi_i(y) - E \cdot \varepsilon_h} = f; \quad 1 > y > 0, \quad (112)$$

Ha Z_z és R_z kifejezéseiben véges számú q_i együtthatót használunk fel, akkor a (112) kifejezést identitássá nem tehetjük, azonban tetszés-szerinti pontosságra megközelíthetjük az $\frac{R_z}{Z_z} = f$ kifejezéssel a 0-t.

A legkisebb négyzetek módszere szerint az:

$$R_z = f \cdot Z_z$$

egyenlet-, illetőleg a (110) és (111) szerint az:

$$S_{(q_1 \dots q_i)} = \sum_{i=1}^i \pi_i(y) \cdot q_i - f \left[\sum_{i=1}^i \varphi_i(y) \cdot q_i - E \cdot \varepsilon_h \right]$$

Ha ez egyenlet determinánsát $|A|$ -val, a q_k -hoz tartozó coefficiensek oszlopának a jobboldali oszloppal való felcserélése után keletkező determinánst $|A_k|$ -vel jelöljük, akkor

$$q_k = \frac{|A_k|}{|A|}. \tag{116}$$

Ily módon, ha a sűrűlési tényezőt, f -et ismerjük, az egyes q_k coefficiensek meghatározhatók, ezek ismerete után viszont:

$$u_r = \varphi \cdot \varepsilon_h \cdot \sigma \cdot r_1 \quad x=1, y=1$$

kiadódik, és innét φ kiszámítható.

A feladat physikai természetéből következik, hogy φ negatív nem lehet, hanem az mindig egy 0 és 1 között levő pozitív szám.

Ha φ -re negatív értéket ad az egyenlet, akkor ez azt jelentené, hogy az $x=1, y=1$ pont a centrum felé mozdult el, a mi lehetetlen.

Hogy mit jelent φ negatív értéke a valóságban, arra mindjárt rá fogunk térni.

Ha, mint felvettük, nem f értéke az adott, hanem φ , vagyis az $x=1, y=1$ pont elmozdulása ismeretes, akkor a (115) egyenletrendszeren kívül még az

$$u_r = \varphi \cdot \varepsilon_h \cdot \sigma \cdot r_1 \quad x=1, y=1$$

egyenletnek is ki kell elégítve lennie, viszont ez esetben természetesen f nincs meghatározva.

Ha az u_r -nak (56) alatti kifejezésében az $A_0, A_1, B_0, B_1, D_0, D_1$ állandóknak (98)–(103) alatti értékeit behelyettesítjük és az egész kifejezést q_i szerint rendezzük, nyerjük:

$$u_r = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \dots + q_i P_i + \sigma \cdot \varepsilon_h \cdot r_1 = \varphi \cdot \varepsilon_h \cdot r_1 \cdot \sigma; \quad x=1, y=1$$

hol is $P_1 \dots P_i$ az (56) kifejezésben a q_i szerint való rendezés után előállott értékei a q_i factorát képező függvényeknek az $x=1, y=1$ helyen.

A $q_1 \dots q_i$ értékeknek tehát a (114) egyenletrendszeren kívül még a

$$q_1 P_1 + q_2 P_2 + \dots + q_i P_i = - (1 - \varphi) \sigma \varepsilon_h r_1$$

egyenletet is ki kell elégítenie.

E szerint a (113) és (115) rendszer kapcsán az:

$$\begin{aligned} m_{11} q_1 + m_{12} q_2 + \dots + m_{1i} q_i + E \cdot f \cdot m_1 \varepsilon_h &= 0; \\ \dots & \\ m_{i1} q_1 + m_{i2} q_2 + \dots + m_{ii} q_i + E \cdot f \cdot m_i \varepsilon_h &= 0; \\ P_1 q_1 + P_2 q_2 + \dots + P_i q_i + (1 - \varphi) \sigma \cdot \varepsilon_h \cdot r_1 &= 0; \end{aligned}$$

egyenletrendszer, ugyanis $i+1$ számú egyenlet i számú ismeretlennel, egyidejűleg tartozik fevnállni.

Tudvalevően ez csak úgy lehetséges, hogy ha a következő determinans eltűnik:

$$\begin{vmatrix} m_{11}, & m_{12}, \dots & m_{1i}, \dots, & m_1 f. \\ m_{21}, & m_{22}, \dots & m_{2i}, \dots, & m_2 f. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i1}, & m_{i2} \dots & m_{ii}, \dots, & m_i \cdot f. \\ P_1 & P_2 \dots & P_i, & \frac{1-\varphi}{E} \sigma \cdot r_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (117)$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy a (113a) és (113b) szerint (478) lap:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \int_0^1 \pi_i(y) \pi_k(y) dy - f \int_0^1 [\varphi_i(y) \pi_k(y) + \pi_i(y) \varphi_k(y)] dy + \\ &+ f^2 \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_k(y) dy; \\ m_k &= \int_0^1 \pi_i(y) dy - f \int_0^1 \varphi_i(y) dy; \end{aligned}$$

akkor azonnal látjuk, hogy a (116) egyenlet *egy összefüggést ad f és φ között*. Ha az egyiket felvesszük, ebből a másik kiadódik.

Vizsgáljuk meg most ezt az összefüggést egy kissé részletesebben:

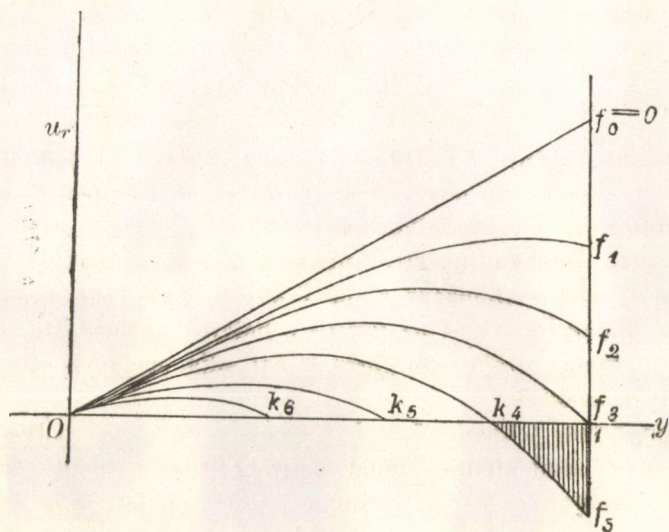
Ha $f=f_0=0$, akkor súrlódás nem lévén, $\varphi=1$ és

$$u_{r_{x=1}, y=1} = \sigma r_1 \varepsilon_h.$$

Ha már most f nő és folytatólagosan felveszi az f_1, f_2, f_3 értékeket, akkor a radiális tágulás mindinkább eltér az $u_r = \sigma \cdot \varepsilon_n \cdot y$ egyenestől és mind kisebb és kisebb lesz.

Az u_r ez értékeit ábrázoló görbék lefolyását a (2) ábra tünteti fel.

Az f és φ közötti (116) összefüggés alapján meghatározhatjuk f -nek egy olyan f_3 értékét, mely mellett az $x=1, y=1$ he-



2. ábra.

lyen $\varphi=0, u_r=0$, vagyis a próbatest éle nem mozdul el helyéből, azonban az $y=0$ és $y=1$ között fekvő belső pontok szenvedtek radiális elmozdulást.

Mi történik, ha a súrlódási tényező még nagyobb?

Ebben az esetben φ -re egy negatív érték adódik és u_r az $y=1$ helyen negatív lenne, a mi azt jelentené, hogy a próbatest homloklapjainak átmérője tágulás helyett összehúzódik, a mi egy nyilvánvaló lehetetlenség.

Ennek a látszólagos ellentmondásnak oka az a feltevésünk, hogy

$$R_z = f \cdot Z_2.$$

Ez azonban csak addig igaz, míg elmozdulás tényleg van. Ha a súrlódás oly nagy, hogy mozgás nem jöhet létre, akkor ott

$$R_z < f \cdot Z_2;$$

ha tehát f értéke oly nagy, hogy u_r már egy $y < 1$ helyen 0 lesz, (a 2. ábrában k_4 pont), akkor e ponton túl az

$$R_z = f \cdot Z_2$$

összefüggés érvénye megszűnik és az $y=k$ és $y=1$ pontok között az R_z csak olyan nagy értéket vesz fel, mely éppen elegendő az elmozdulás megakadályozására.

A 2. ábrában negatív elmozdulások nem jönnek létre, hanem a radiális elmozgás k_4 és 1 között zérus lesz mindenütt és így annak lefolyását az $y=0-1$ határok között a 0 k_4-1 nem folytonos görbülségű görbe vonal adja, melynek irányja a k_4 helyen szakadó.

Ha f még jobban nő, a k_4 successive a k_5-k_6 helyet foglalja el, a homloklap felület mind nagyobb részén nem történik radiális elmozdulás és így bizonyos f érték mellett az az állapot következik be, mikor az $x=1$ helyen y értékétől függetlenül egy pont sem mozdult el. —

Természetesen ugyanez áll fenn, ha a súrlódási tényező ez f értéknél még nagyobb.

Ha f ezt az értéket eléri vagy túlhaladja, akkor, ha

$$x = 1, \text{ az } u_r = 0;$$

és pedig függetlenül az y értékétől; ekkor az u_r (56) alatti kifejezésébe az $A_0, A_1, B_0, B_1, D_0, D_1$ állandók (98)–(103), illetőleg (109) összeállítás kifejezéseit helyettesítve:

$$\begin{aligned}
 u_{rx=1} = & - \sum_{n=1}^{\infty} r_1 \sum_{i=1}^i s_i'(n) q_i \operatorname{Cotg}(\gamma r_n) J_1(\gamma_n y) + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} r_1 \sum_{i=1}^i s_i'' q_i \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} y J_0(a_n y) - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{1}{a_n} J_1(a_n y) \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} r_1 \sum_{i=1}^i (-1)^n s_i'' q_i \frac{I_1\left(\frac{n\pi y}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \cdot a_n - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} r_1 \sum_{i=1}^i (-1)^n s_i'' q_i \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{\mu} y \frac{I_0\left(\frac{n\pi y}{\eta}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \frac{I_1\left(\frac{n\pi}{\eta} y\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} r_1 y \left[\sum_{i=1}^i g_i q_i + 2\sigma \cdot \varepsilon_h \right] = 0;
 \end{aligned} \tag{118}$$

lévén ugyanis (9)-ből:

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - 2\sigma.$$

Ha most megint ezt a kifejezést q_i szerint rendezzük, négyzetre emeljük és dy -nal szorozva, 0 és 1 határok között integráljuk, akkor teljesen hasonló módon, mint előbb, nyerjük:

$$\begin{aligned}
 S(q_1, q_2, \dots, q_i, y) = u_{rx=1} = & q_1 \varrho_1(y) + q_2 \varrho_2(y) + \dots + \\
 & + q_i \varrho_i(y) + \sigma r_1 \varepsilon_h y = 0.
 \end{aligned}$$

Ennek négyzete, integrálva a megadott határok között és rövidség kedvéért bevezetve a következő jelölést:

$$\int_0^1 \varrho_1(y) \varrho_k(y) dy = N_{ik} = N_{ki}; \tag{119a}$$

$$\int_0^1 \varrho_k(y) dy = N_k; \tag{119b}$$

nyerjük:

$$\int_0^1 S^2(q_1 \dots q_i, y) dy = P(q_1 \dots q_i) =$$

$$= q_1 [q_1 N_{11} + q_2 N_{12} + \dots + q_i N_{1i}] +$$

$$+ q_2 [q_1 N_{21} + q_2 N_{22} + \dots + q_i N_{2i}] + \dots$$

$$+ q_i [q_1 N_{i1} + q_2 N_{i2} + \dots + q_i N_{ii}] +$$

$$+ 2 [q_1 N_1 + q_2 N_2 + \dots + q_i N_i] \sigma \cdot r_1 \cdot \varepsilon_h + \frac{1}{3} r_1^2 \sigma^2 \varepsilon_h^2.$$
(120)

Ez a kifejezés minimum akkor lehet, ha :

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{\partial P}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0;$$

tehát ha :

$$N_{11}q_1 + N_{12}q_2 + \dots + N_{1i}q_i + 2N_1 \sigma r_1 \varepsilon_h = 0;$$

$$N_{21}q_1 + N_{22}q_2 + \dots + N_{2i}q_i + 2N_2 \sigma r_1 \varepsilon_h = 0;$$

$$\dots$$

$$N_{i1}q_1 + N_{i2}q_2 + \dots + N_{ii}q_i + 2N_i \sigma r_1 \varepsilon_h = 0.$$
(121)

Ebből a lineáris egyenlet-rendszerből $q_1 \dots q_i$ a közismert módon meghatározhatók.

A $q_1 \dots q_i$ ismerete után most már az $A_0, A_1 \dots$ és a többi állandók és így az összes elmozdulások és feszültségek is, a test minden egyes pontjában ismertek.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy az u_z - és u_r -re nézve a BESSEL-féle és trigonometrikus függvények szerint továbbadó sorok convergensnek és tagonként differentálhatók.

Ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy az összes coefficiensek úgy az eredeti sorokban, mint az azok differentiálása által keletkezett sorokban növekvő n értékek mellett a zérus felé convergáljanak.

A mi az u_r és u_z sorait illeti, be lehet bizonyítani, hogy, k_1, k_2, k_3 alatt egy-egy véges állandót értve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1^{(n)} = n^{-\frac{2}{3}} \sum_{i=1}^i q_i \cdot k_1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_0^{(n)} = n^{-2} \sum_{i=1}^i q_i \cdot k_2;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_1^{(n)} = n^{-2} \sum_{i=1}^i q_i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2\sigma};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0^{(n)} = n^{-1} k_3 \cdot \lim q_n.$$

A mennyiben tehát q_i coefficiensek száma véges, vagy végtelen sok tagot véve, a $\sum q_i$ sor összetartó, a mi szükséges arra, hogy egy függvényt ábrázoljon a (94) kifejezés: akkor az u_r és u_z kifejezései convergenssek.

Mint hogy ezeket a sorokat tagonként differentiálva, csupa ilyen coefficienst kapunk:

$$a_n A_0^{(n)}; \quad \beta_n B_0^{(n)}; \quad \gamma_n A_1^{(n)}; \quad \partial_n B_1^{(n)};$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, \beta_n, \gamma_n, \partial_n) = k_4 n,$$

ennélfogva: $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n B_0^{(n)}$ és $\partial_n B_0^{(n)}$ ugyanolyan rendű végtelen kicsiny szám, mint $\frac{1}{n}$; a $\gamma_n A_1^{(n)}$ pedig, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Az u_r és u_z sorok tehát tagonként differentiálhatók és így az e differentiálhányadosokból képezett R_r, R_z, Z_z, Φ_Φ feszültségek kifejezései szintén convergálnak az $x=0$ és $1, y=0$ és 1 határok között.

Miután így bebizonyítottuk (a részletes levezetést helyszűke miatt nem közlöm), hogy az u_r és u_z elmozdulások számára nyert végtelen sorok convergenssek és tagonként differentiálhatók, a mi, physikai értelemmel bíró problémáról lévén szó, előre várható is volt, evvel kitűzött feladatunkat teljesen megoldottuk.

ÚJABB ADATOK A TAY-SACHS-BETEGSÉG KÓRSZÖVETTANÁHOZ.

SCHAFFER KÁROLY I. tagtól.

I. Az agykéreg tektonikájáról.

Tizenhárom év előtt mint első utaltam arra a tényre, hogy a TAY-SACHS bántalomban, vagyis a csecsemőkori vakságos idiotaságban a nagyagy kérgében foglalt összes idegsejtek degeneráltak. E kóros állapotuknál fogva a WEIGERT-féle velőfestés alapján szembeszökően tűnnek fel, mert minden egyes degenerált idegsejt kirajzolódik az által, hogy az elfajulásból eredő és a haematoxylin által sötétén színeződő szemcsékkel mint elfajulási termékekkel minden idegsejt meg van rakodva. Minthogy pedig ismeretes, hogy a szóbanforgó örökletes idegbántalomban kivétel nélkül minden egyes idegsejt súlyosan beteg, azért is az agykéregnek összes idegsejtjei összességükben vagyis az általuk alkotott rétegek szerint a WEIGERT-festésű agymetszeteken ki fognak tűnni. Ebből a körülményből kiviláglik, hogy a T.-SACHS bántalom kiválóan alkalmas arra, hogy az emberi agykéreg rétegzetes szerkezetét, annak minden részletével kényelmesen feltárja; egy, festés tekintetében kitűnően sikerült esetem lehetővé tette, hogy az agykéreg úgynevezett stratigrafiáját beható vizsgálat tárgyává tegyem.

BRODMANN alapvető vizsgálataiból ismerjük azt a fontos tényt, hogy a kifejlett emberi agykéreg túlnyomó része hat rétegből áll, ezzel szemben van egy kisebb része, mely e tipikus

kéreg kialakulásától teljesen eltérő. Az előbbi kéregalakulat az úgynevezett *homogenetikus*, ez utóbbi az úgynevezett *heterogenetikus* kéregnek felel meg. A heterogenetikus kéreg az emberben az úgynevezett szaglóagyvelőre jellemző; a homogenetikus kéreg a maga részéről két alapformára bomlik: *a) isotipikus* kéregre, mely az emberi agykéreg legnagyobb része és állandóan hatos rétegzésű; *b) allotipikus* kéregre, mely a rétegszámban bizonyos helyileg jellemző változást mutat; ilyen az ötrétegű mozgató kéreg, ilyen a nyolczrétegű látókéreg. BRODMANN e stratigrafiai ismertető jegyek alapján az emberi és állati agykérget topografailag élesen körülhatárolt mezőkre volt képes bontani, melyek közül a legtipikusabb a mozgató, a látó és a szagló agykéreg. Ez összehasonlító vizsgálatai alkalmával azután felette érdekes meghatározásokra jutott, melyek alapján az emberi és az állati agyvelőre nézve élesen megkülönböztető jeleket volt képes felállítani. Másszóval, úgy a mozgató, valamint a látó és szagló agykéregmező más kiterjedést, más határokat, sőt más rétegződési különlegességeket mutat az emberben mint az állatban.

BRODMANN e fontos kutatási eredményeit a TAY-SACHS bántalom (T. S.) egy esetére alkalmazva, meglepő eredményekre jutottam, melyekről röviden beszámolni akarnék. *Nemzetesen arra a felismerésre jutottam, hogy a T. S. bántalomban az agykéregben olyan elhatárolódási és rétegződési viszonyok mutatkoznak, melyek különösen a majomagyvelő megfelelő területeinek azonos viszonyaival jóformán megegyeznek és így a szóbanforgó bántalomban az agykéregben alacsonyabbrendű szerkezeti viszonyokat sikerült találnom.* Vizsgálataimat két területre, jelesen a mozgató és látó mezőkre terjesztettem ki.

A T. S.-bántalomban a mozgató terület az elhatárolás tekintetében teljesen azonos viszonyokat mutat, mint a majomagyvelő. BRODMANN szerint az emberben az allotipikus gyrus centralis anterior (c. a.) és az isotipikus gyrus centralis posterior (c. p.) között a határvonal pontosan a középponti barázda fenekén nyugszik. Ezzel szemben a majomban a mozgató terület, vagyis az area gigantopyramidalis nem éri el a középponti

barázda fenekét, hanem a c. a. hátulsó lejtőjén végződik: «Die kaudale Grenze der Area gigantopyramidalis fällt also beim Affen keineswegs mit dem Fundus des Sulcus centralis zusammen wie beim Menschen, sondern die Area scheint im Vergleich zum Menschen, namentlich im ventralsten Teil, aber auch in ihrem medialen Teile im ganzen oralwärts gedrängt.» Ezt a majom-agyvelő mozgó mezejére nézve jellegzetes elhatárolást a T. S.-bántalomban is kifejezve látjuk oly metszeten, mely a c. a.-t és c. p.-t egyaránt érte. Az isotypikus c. p.-tól az allotypikus c. a. abban különbözik, hogy utóbbinak belső szemcsés lemeze (lamina granularis interna) hiányzik; emberi agyvelőben ez a lemez pontosan a középponti barázda fenekén szűnik meg, vagyis a c. a. és c. p. egymás felé tekintő tekervény ajkainak összetalálkozásánál. Ha már most ezt a lemezt, illetőleg kéregréteget a c. p. felől a c. a.-hoz haladtában figyelemmel követjük, akkor arra a felette érdekes tényre akadunk, hogy ez a réteg túlhaladja a középponti barázda fenekét és a c. a. hátulsó tekervényajkának alsó harmadára felkúszik, miáltal az area gigantopyramidalis hátulsó határvonala magasan, a c. a. hátulsó lejtőjén található. Ebből a magatartásból kitűnik, hogy a T. S.-bántalomban a regio præ- és postcentralis topikus viszonyai kifejezetten majomszerűséget — pithecoïd kialakulást mutatnak, mert az area gigantopyramidalis, mint a majom agyvelőkéregében, frontális irányban való előretolódást tanúsít.

A T. S.-bántalomban a látóterület, az úgynevezett *area striata* két irányban mutat a majom-agyvelővel egyező viszonyokat, jelesen e területnek *a) kiterjedése*, *b) rétegződése* tekintetében. *Ad a)* BRODMANN említi, hogy az emberi *area striata* egészen a *fissura calcarina* mélységében fekszik, a félteke convex felszínére alig terjed át, melylyel szemben egyes alacsonyabb emberfajtákban (herrerok, javánok) feltűnően terjed ki a nyakszirti lebeny oldalsó felszínére. Továbbá kiemeli, hogy alacsonyabb rendű majmokban (*Nicticebus*, *Lemur*) a látómező a *fissura calcarinából* átsap a *gyrus lingualisra* is, melynek legnagyobb részét elfoglalja. Hogyha már most BRODMANN eme meghatározásaival a magam leleteit egybevetem, akkor ki kell emelnem, hogy a T. S.-bántalomban az *area striata* területi kiterjedése

tekintetében az alacsonyabbrendű majmok megfelelő viszonyai-
val teljesen egyező viszonyokat találok, jelesen feltűnő a mezőnek
az egész gyrus lingualisra való kiterjedése. *Ad b)* ugyancsak
BRODMANN emeli ki, hogy némely majomnak olyan calcarina-
typusa van, mely sokkal dúsabb rétegződést mutat, mint az
emberi megfelelő tájék. Jelesen a cebus capucinuson találta
azt, hogy a belső szemcsés réteg nem a szokásos két, hanem
több rétegre hasad és így olyan dús rétegeképződés áll elő, hogy a
látómező az emberben jelentkező 8 réteggel szemben 10–12 ré-
teget tüntet fel. Ez a majomnál mutatkozó túldifferentiálódása
az area striatának a T. S.-bántalomban is előfordul, jelesen
a fissura calcarinában levő és az area striatához tartozó kéreg
területén 11 réteget lehet összeszámolni.

Ha a T. S.-bántalomban mutatkozó és a nagyagygi kéregre
vonatkozó tektonikus sajátságokat összefoglalom, a következő-
ket emelhetem ki: 1. *A regio praecentralis hátulsó (caudalis)*
*határának előrefelé (oralis) eltolódását mutatja, mely körülmé-
ny annyit mond, hogy a c. a. és c. p. közötti határvonal*
*nincs a középponti barázda fenekén, hanem a c. a. hátulsó lej-
tőjén fekszik.* 2. *Az area striata egyrészt a nyokszirti poluson*
túl a convexitásra, másrészt az agyalapon az egész gyrus
lingualisra terjed ki és így a T. S.-bántalomban az area striata
sokkal kiterjedtebb, mint európai emberben reules viszonyok
között. 3. *Az area striata főleg a calcarina vidékén cytotekto-
nikus túldifferentiálódást mutat, miáltal túldúsán tagozódott*
kéreg — mely 10—11 rétegből áll — jő létre.

Ezek a mozzanatok, mint a majom-agykéregnek szerkezeti
sajátlagosságai, a T. S.-betegség képviselőin a homogenitikus
agykéreg pithecooid szerkezetére, vagyis a nagyagygi kéregnek
kezdetlegesebb kialakulására utal. *A nevezett betegség agykérgé-
nek szerkezeti kezdetlegessége ennek csökkent értékű voltát, mintegy*
silányabb mineműségét tárja fel előttünk, mert hiszen kétség-
telen, hogy az emberi nagyagygi kéreg, mint a legmagasabb ért-
elmi működések anyagi alapja, *szerkezetének összességében*
magasabbrendű kialakulást képvisel, mint a majom nagyagygi
kérge, bárha a majom látókérge mint ilyen differentiáltabbnak
is tekintendő. Ez a megállapítás nem csupán önmagában véve

tudományos érdekű, hanem a T. S.-betegség kórszármazására nézve is jelentőséggel bír.

Előző munkáimban határozottan kiemeltem, hogy a T. S.-bántalomban az agyvelő makroszkopos szerkezetében durvább eltérés nem szokott mutatkozni. Tekintve az e bántalomban mutatkozó egyetemleges idegsejtelváltozást: az idegsejtek összességét érő, veleszületett gyengeségre gondoltam. Ez a kizárólagosan az idegelemeket érő rendellenesség az ektodermára, mint az idegelemek csíralevelére vonatkozó választékosságot jelenti s így csíralevelbántalomra lehet következtetni. Utóbbit, mint az idegsejtek protoplasmájának veleszületett szerkezeti rendellenességét képzeltem el, a mivel azt fejezném ki, hogy a T. S.-bántalom képviselőinek agyveleje nem bír életképes protoplasmával, ez már rövid idejű működés után felhasználódik és tönkremegy. *Ezt a felfogást a T. S.-bántalomban a nagyagyvi kéregben kimutatható állati hasonlóság annyiban támogatná, hogy a nagyagyvi kéreg majomszerű szerkezeténél fogva silányabb anyagi alapot jelent, mely mint ilyen a korai kimerülésre, illetőleg elpusztulásra való hajlandóságot magában hordja.* A cytologikus majomszerűség egy mikro-morphologiai elfajulási jelnek tekinthető, a mint hogy ezt PICK A. a heterotopiákra nézve már hosszabb ideje vallotta; ezeket ugyanis az ideges dispositio jeleként fogta fel, mint a fogyatékos kiképződés jelét, melylyel nagyobbfokú megbetegedési hajlandóság járhat.

II. A nagyagyvelő velőállományáról.

Úgy az idegen szerzők vizsgálatai, valamint saját tapasztalásaim is egybevégezően odautalnak, hogy a T. S.-bántalomban a kzp. idegrendszer velőállománya esetenként felette fogyatékos lehet. Súlyos esetben egész agylebenyeknek veleje hiányozhatik, mindenekelőtt a társító rendszerek és a szürke kéregnek velőrostozata hiányozhatik teljesen. *E velőhiány lényegéről kilencz év előtt akként nyilatkoztam, hogy ennek oka csakis a velő kiképződésének zavarában rejthetik és nem alapul a velő elfajulásán.* Újabban a T. S.-bántalomnak három esetében igen sikerült velőfestésű WEIGERT-készítményeket volt alkalmam tanul-

mányozhatni és ez alapon nyert eredményeimről összegezve az alábbiakban számolok be.

Uralkodó vonása a velőfestésű készítményeknek az, hogy a látótelepnek csak kis része, jelesen csak a fasciculus thalamicus FORELI és a lemmiscus-pálya felfogadása helyéül szolgáló nucleus lateralis mutatkozik velősnek, míg a többi túlnyomó része, úgymint nucleus anterior, medialis és pulvinar teljesen velőtlen, mely körülménnyel kapcsolatban azután a látótelepbe besugárzó úgynevezett elülső nyél (stilus anterior), azután a hátulsó nyél (stilus posterior), mint velősugárzásoknak hiánya áll elő. Ennek a szabályszerű jelenségnek magyarázatát MONAKOW ama tanításában találjuk meg, mely szerint vannak bizonyos nagyagyalatti állományok — ezek közé elsősorban a látótelep tartozik —, melyek mindannyiszor zsugorodnak, sorvadnak, valahányszor bizonyos nagyagyi kéregrészek elpusztulnak. Ilyképpen a kéreg alatti agyrészek megfelelő kéregterületektől függenének, mert előbbieknél az utóbbiak felől történő folytonos behatásra szükségük van a célból, hogy rendes szerkezetüket, épségüket megtarthassák és ezeket a kéreg alatti agyrészeket nagyagyi tartozékoknak (Grosshirnantheile) nevezte el. «Es handelt sich hier um phylogenetisch junge (supplementäre) Bildungen grauer Substanz, die bei andern Tieren (z. B. Knochenfischen) nicht oder nur andeutungsweise sich vorfinden, und deren Entwicklung in der Tierreihe aufwärts derjenigen der Grosshirnrinde direkt proportional ist. Das gemeinsame Band, welche diesen architektonisch überall gleichartigen Typus grauer Substanz umgiebt, ist die Abhängigkeit der bezüglichen Nervenzellkomplexe von der Integrität des Grosshirnmantels... Zu der in Frage stehenden grauen Substanz gehören in erster Linie grob-anatomisch... in besondere Kerne zerfallende Abschnitte des Sehhügels. Alle Sehhügelkerne werden nach Zerstörung einer Grosshirnhemisphäre in ihrem Bau durch sekundäre Veränderungen mehr oder weniger schwer geschädigt.»¹

A látótelepnek a fentiekben kimutatott velőtlenességét okvet-

¹ MONAKOW C. v.: Gehirnpathologie, 2. kiadás, 191. l.

lenül a nagygygi kéreg rendellenes állapotával kell kapcsolatba hozni, oly értelemben, hogy a nagygygi kéreg kiterjedt idegsejtmegbetegedése a látótelepben kapcsolatos velőképződési zavarokat okoz, mely zavarnak időpontját a születés utáni időre kell tennem; utóbbi időmeghatározást támogatja az a körülmény, hogy olyan velős pályák, melyek a születést követő 3—4. hónapban kifejlettek, azok a T. S.-bántalomban is velősek. S mint-hogy a leggyorsabban velősödő részek a nagygyvelőnek úgynevezett ősi — palaeoencephal — részéhez tartoznak, míg a látóteleppel kapcsolatos nagygygi részek a fiatalabb, úgynevezett neencephal részek, önként értetődik, hogy a T. S.-bántalomban főképpen a törzsfajlódásileg fiatalabb részek' azok, melyek velőképződése szenved. Ezek után a szóbanforgó betegségben oly velőfejlődési zavarról lehet szólanunk, mely a phylogenetice fiatalabb pályákra szoritkozván, végeredményben egy úgynevezett *törzsfajlódási rendszerbántalom* (phylogenetische System-erkrankung) előállítására vezet.

III. A neuroglia bántalmáról.

A T. S.-bántalom egy esetében a CAJAL-féle glia-impregnatiót alkalmazván, igen tanulságos képet nyertem a neuroglia viselkedéséről; ez irányú tapasztalásaimat a következőkben foglalom össze.

1. *A rostos glia nem szenved, illetve elrostosodás egyáltalán nem következik be.*

2. *Annál súlyosabb elfajulást szenved el a protoplasmás glia, és pedig éppen olyan abszolút kiterjedésben, mint a hogyan az idegsejtek degenerálnak. E szerint a neuroglia és az idegsejtek elfajulása teljesen párhuzamos. A glia elfajulása a sejtest duzzadásában, durvább és szabálytalan szemcséződésben nyilvánul meg, miáltal idomtalan sejtestek jönnek létre, majd vacuolaképződés folytán szinte kimaródott, elrongyolódott sejtestek keletkeznek. A gliadendritek közül azok, melyek ezekhez tapadnak, megduzzadnak és így valósággal formátlanok lesznek, míg az idegszövetbe kisugárzó nyujtványaik rendes vékonyságukat megtartják. A gliadendritek uralkodó elváltozása ezeknek*

rózsafüzérszerű megvastagodása. A súlyosan elfajult gliasejtek végül szétesnek darabokra, miáltal gliadetritus jó létre. Az ér körüli gliatlapok megduzzadnak és mint vastag csomók szegélyezik az ereket.

3. Végül egy fontos elváltozása a gliaszövetnek az úgynevezett *gliogen szemcsés sejteknek tömeges fellépése*, miáltal a T. S.-bántalomban az agyvelőnek oly bomlási folyamata van adva, melyet ALZHEIMER szerint ektodermás jellegűnek mondanak. Jelesen ezek a gliogen szemcsés sejtek azok, melyek a szétesésben levő idegyszövetnek törmelékeit felveszik, szétbontják vegyileg egyszerűbb zsirnemű anyagokra és ezeket azután az érkörüli hézagokban levő mesodermális vándorelemeknek tovább adják.

A fentjelzett vizsgálati adatokból kitűnik, hogy a T. S.-betegségben a gliabántalomnak két mozzanata tekinthető jellegzetesnek és fontosnak: 1. a *neurogliának absolut kiterjedésű megbetegedése*; 2. a *protoplasmás gliának gyors lefolyású elfajulása, mely e szövetelemnek halálára vezet*. Hogyha a protoplasmás glia megbetegedésén kívül még a rostos glia bántalma is előfordul, akkor ez csak ürtöltő jelentőségű és a T. S.-betegség gliabántalmára nézve különleges jelentőséggel nem is bír. Ezzel szemben a protoplasmás gliaszövetnek súlyos degenerációja teljesen egybevágó jelenség az idegyszövetnek súlyos degenerációjával, úgy az elfajulás, mint ennek kiterjedése tekintetében. Ezek után a gliaszövet elváltozásait a T. S.-betegségben az általam felállított ama csoportba sorolnám, melyet a neuroglia sajátlagos bántalmi nevével illettem és a mely bántalmak nem tévesztendőek össze a neurogliának pótló természetű burjánzásával. Végül kiemelném, hogy a T. S.-bántalomban úgy a glia, mint az idegyszövet absolute megbetegedvén, kimondhatjuk, hogy itt mindaz beteg, a mi ektodermális.

IV. A Tay-Sachs bántalom anatómiai jellemzése.

A fenti adatok nem egy irányban egészítik ki és tökéletesítik a T. S.-betegségre vonatkozó ismereteinket s így ennek a felette érdekes örökletes betegségnek még szorosabb anatómiai jellem-

zését teszik lehetővé. A nagyagi kéreg szerkezetében talált majomszerűség, tehát állati hasonlatosság a szóbanforgó bántalomban leledző agyvelőknek alacsonyabb értékűségét derítette ki. A szerkezetnek ez, a születéstől fogva adott kezdetlegessége kétségtelenül arra utal, hogy a T. S.-betegségbe eső agyvelő egy súlyosan hajlamosított idegrendszer. Lássuk már most, hogy e szerkezetileg alacsonyabbrendű idegrendszerben milyen folyamat fejlődik ki.

E folyamatról *általánosságban* kiemelendő, hogy az egy abszolút kiterjedésű cytopathológiás folyamat, mert hiszen a központi idegrendszer minden egyes idegsejtje elfajul. Hozzájárul ehhez a neurogliának éppen oly arányú és rohamos degenerálása, miért is elmondható, hogy a T. S.-bántalomban a súlyos és előrehaladó elfajulási folyamat az összes neuronális és neurogliás elemekre kiterjed. Mindez az idegrendszer összes ektodermás származékainak megbetegedését jelenti, mely körülmény annál fontosabb, mert a degenerálási folyamat alatt a központi idegrendszer mesodermás származékai (erek, hárttyák) teljesen épek maradnak. Ilyképpen olyan folyamattal van dolgunk, mely mint ektodermás bántalom élesen meghatározottnak tűnik fel, tehát *electiv*. Ez ismertető jegyek alapján a T. S.-bántalomban lefolyó elfajulási folyamat a csiralevéldispositio jegyében áll.

E folyamatról *különlegesen* kiemelendő volna elsősorban ennek cytopathológiája. Ez az általam legelőször leírt cystás degeneratio képében folyik le, mi alatt az értendő, hogy részben a sejtestet duzzad hatalmasan, részben a dendritek puffadnak fel helyileg gömbszerűen. E duzzadásnak anyagi alapja az interfibrillumos állománynak rendellenes megszaporodásában áll, a melyet a szerkezetnélküli hyaloplasma elfajulásos túltengésének tekintettem. E duzzadási folyamatban az ingertvezetőknek nézett neurofibrillumok nem szenvednek, a Nissl-féle rögök is csak fokozatosan tűnedeznek, magában a neuronban bőségesen jelentkeznek elfajulási termékek, melyekre részemről mint első utaltam a WEIGERT-féle velőfestés alapján és melyekről ALZHEIMER sudán, neutralis-vörös, később SCHOB, legutóbb WESTPHAL A. skarlát-veres festékekkel kimutatták, hogy e termékek myelinoid és protagonoid természetűek. Ezek alapján kimondható, hogy a

T. S.-betegségben vagyis a csecsemőkori vakságos idiótaságban egy nagyarányú és gyors lepergésű bomlása szerepel az ektodermás képződményeknek, a mi egyenértékű az ideg- és gliaelemeknek rohamos szétbontásával és így a rendes ektodermás szerkezetnek előrehaladó lebontásával (Abbau).

Másodsorban a T. S.-bántalom myelopathológiája volna kiemelendő és itt a nagyagyvelőnek fiatalabb pályáira vonatkozó hiányos velőfejlődési viszonyaira kell utalnunk. E magatartásból, mely semmiképpen sem jelent velődegeneratiót, a nagyagyvelő hiányos, illetve hiányzó felépítésére (Aufbau) kell következtetnünk.

Fentiek szerint a T. S.-bántalom oly endogen középponti bántalomnak minősítendő, melynek lényeges vonásai a következőkben foglalhatók össze.

1. A középponti idegrendszer kérge szerkezetének majomszerűségénél fogva idegbetegségekre való hajlamot árul el.

2. A középponti idegrendszer felépítésében hiányosságot mutat, mert a törzsfajlódásileg legfiatalabb agypályák velőfejlődése hiányzik, szemben az idősebb pályák rendes velősődésével, mely körülmény a nagyagyvelő phylogenetikai rendszer-bántalmát jelenti.

3. Az ilymódon jellemzett, tehát betegsége súlyosan hajlamos idegrendszerben oly kóros folyamat fejlődik ki, mely a középponti idegrendszer ektodermás és már nyilván csírájában meglevő kóros gyengeségén alapszik. Ez a kóros folyamat a neuronális és neurogliás elemeknek gyors pusztulásában áll, mely morphologiailag a szerkezetnélküli protoplasmának előrehaladó elfajulásában nyilvánul meg.

A csecsemőkori vakságos idiótaság beható anatomiai jellemzésének fontossága már abból is kiviláglik, hogy e kórforma az ifjúkori vakságos idiótasággal anyagi lényegében egyező, a mint erre klinikailag VOGT H., anatomiailag magam, mint elsőként utaltunk; [utánunk SPIELMEYER, ROGALSKI, STRÄUSSLER, SCHOB, JANSKY, WALTER és BIELSCHOWSKY. Ilyképpen a csecsemőkori vakságos idiótaság anatomiai jelentősége nagyot nő, sőt tetemesen fokozódik az által, hogy az ifjúkori vakságos idiótaság a cerebellaris heredoataxiával szövődhetik (BIELSCHOWSKY

esete), utóbbi pedig a különböző gerincvelői típusú örökletes bántalmakkal rokon. Ezek szerint igen különböző típusú örökletes idegbetegségek szinte megszakítás nélkül folynak össze egy nagy endogen természetű kórállapotba, a melyet JENDRASSIK heredodegeneratióknak nevezett és a melynek anatómiai mibenlétére nézve fenti megállapításaim szerint a csecsemőkori vakságos idiótaságnak anatómiai meghatározása döntő jelentőséggel bír.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 április 22.-én tartott üléséből.)

A HANKEL-FÉLE FORMÁKRÓL.

SZEGŐ GÁBOR-tól.

E dolgozat tárgya bizonyos quadratos formák vizsgálata, melyeknek determinansa

$$\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} & \cdots & g_{2n} \end{vmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

alakú. A következőkben ama speczialis esetre szorítkozom, midőn e determinans elemei egy valós, korlátos és RIEMANN-féle értelemben integrálható $f(t)$ függvény¹ *momentumai*, azaz, a mikor

$$g_k = \int_a^{\beta} f(t) t^k dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ez esetben e determinans a következő quadratos formához tartozik:

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_a^{\beta} f(t) (x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt = \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n g_{p+q} x_p x_q \quad (G) \\ &\quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

A fenti determinansok az irodalomban HANKEL-féle néven vannak elterjedve; a (G) formákat is HANKEL-féle formáknak

¹ A következőkben egy ilyen függvényt röviden (G) függvénynek nevezek.

nevezem. Ezek az analysis számos fejezetében fontos szerepet játszanak.

Bizonyos előkészítő fejtegetések után (1.—4. §§) rátérek a (G) formák vizsgálatára s egy tételt bizonyítok be (7. §), mely e formák bizonyos állandóira, az «általánosabb értelemben vett sajátértékek»-re vonatkozik. Ezek határozott valós számok, melyek megadhatók mint egy algebrai egyenlet gyökei és a legszorosabb összefüggésben vannak az $f(t)$ függvény értékészletével. Egészben véve hasonló viselkedésűek, mint a TOEPLITZ-féle formák sajátértékei.¹

A 8.—10. §§-ban bizonyos, a momentumok által definiálható polynomokkal foglalkozom, melyek a STELTJES-féle láncztört-elméletben fontos szerepet játszanak.

TARTALOM.

1. §. Egy orthogonális függvényrendszeréről.
2. §. Bizonyos quadratos formákról.
3. §. Egy tétel a (K) formákról.
4. §. Alkalmazás.
5. §. A HANKEL-féle formákról.
6. §. Segédtelemek a quadratos formák elméletéből.
7. §. A HANKEL-féle formák további vizsgálata.
8. §. Bizonyos polynomokról.
9. §. Összefüggés a STELTJES-féle láncztört-elmélettel.
10. §. A láncztörtnevezőkről.

1. §. Egy orthogonális függvényrendszeréről.

1. Legyen

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_n(t) = \sqrt{2} \cos \pi n t; \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\varphi)$$

E függvényrendszer a $0 \leq t \leq 1$ intervallumban normált és orthogonális, azaz

¹ SZEGŐ G.: A Toeplitz-féle formákról. Math. és Természettud. Ért. 35, k. 185—222. o. 1917.

$$\int_0^1 \varphi_p(t) \varphi_q(t) dt = \varepsilon_{pq}; \quad (p, q=0, 1, 2, \dots).$$

E § czélja beigazolni, hogy érvényes az

I. tétel. — Ha $f(t)$ tetszés-szerinti (C) függvény és

$$k_{pq} = \int_0^1 f(t) \varphi_p(t) \varphi_q(t) dt; \quad (p, q=0, 1, 2, \dots),$$

akkor

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq}^2 \rightarrow \int_0^1 (f(t))^2 dt. \quad (1)$$

Legyenek $f_1(t)$ és $f_2(t)$ tetszés-szerinti (C) függvények,

$$k_{pq}^{(\nu)} = \int_0^1 f_\nu(t) \varphi_p(t) \varphi_q(t) dt; \quad (p, q=0, 1, 2, \dots; \nu=1, 2);$$

és legyen

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Ekkor $k_{pq} = k_{pq}^{(1)} + k_{pq}^{(2)}$; és így az I. tétellel teljesen æquivalens a következő:

Ha $f_1(t)$ és $f_2(t)$ tetszés-szerinti (C) függvények és

$$k_{pq}^{(\nu)} = \int_0^1 f_\nu(t) \varphi_p(t) \varphi_q(t) dt; \quad (p, q=0, 1, 2, \dots; \nu=1, 2),$$

akkor

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq}^{(1)} k_{pq}^{(2)} \rightarrow \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt. \quad (1')$$

Ez utóbbi tételnek még egy másik formát adhatunk. Legyen

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; t) &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) [\varphi_0(x) \varphi_0(t) + \varphi_1(x) \varphi_1(t) + \dots + \\ &+ \varphi_n(x) \varphi_n(t)]^2 dx = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq} \varphi_p(t) \varphi_q(t); \quad (2) \\ &(n=0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

¹ A következőkben a « $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik és $= a$ » kijelentést röviden szokás szerint így jelzem: $a_n \rightarrow a$.

akkor

$$\int_0^1 \sigma_n(f_1; t) f_2(t) dt = \int_0^1 \sigma_n(f_2; t) f_1(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq}^{(1)k_{pq}^{(2)}}$$

úgy hogy az I. tétel a következővel egyértékű:

Ha $f_1(t)$ és $f_2(t)$ tetszőszerinti (C) függvények,

$$\int_0^1 \sigma_n(f_1; t) f_2(t) dt \rightarrow \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt. \quad (1'')$$

2. Bebizonyítom először (1') érvényességét abban az esetben, midőn $f_1(t) = \varphi_r(t)$, $f_2(t) = \varphi_s(t)$. Azaz:

Ha

$$\int_0^1 \varphi_p(t) \varphi_q(t) \varphi_r(t) dt = \varepsilon_{pqr}; \quad (p, q, r=0, 1, 2, \dots),$$

akkor

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} \rightarrow \varepsilon_{rs}; \quad (r, s=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen ugyanis először az r, s számok egyike, például $r=0$. Akkor $\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{pq}$; és így

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} = \sum_{p=0}^n \varepsilon_{pps} = \varepsilon_{os} + \sum_{p=1}^n \varepsilon_{pps}.$$

Ha azonban $p \geq 1$, $(\varphi_p(t))^2 = 1 + \cos 2\pi pt$, és így

$$\varepsilon_{pps} = \varepsilon_{os} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{2p, s},$$

úgy hogy

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} = O(1) + (n+1) \varepsilon_{os},^1$$

melyből

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} \rightarrow \varepsilon_{os}. \quad (\text{q. e. d.})$$

¹ $O(1)$ -gyel jelölök egy oly mennyiséget, mely abszolút értékben n -től függetlenül felső határ alatt marad.

Legyen másodszer $r, s \geq 1$; akkor

$$\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} = O(1) + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs}.$$

Ha azonban $p, q, r \geq 1$, akkor

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pqr} &= 2 \int_0^1 \cos \pi p t \cos \pi q t \cdot \varphi_r(t) dt = \\ &= \int_0^1 \{ \cos \pi (p+q) t + \cos \pi (p-q) t \} \varphi_r(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{p+q, r} + \varepsilon_{|p-q|, r}), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} &= O(1) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (\varepsilon_{p+q, r} + \varepsilon_{|p-q|, r}) (\varepsilon_{p+q, s} + \varepsilon_{|p-q|, s}) = \\ &= O(1) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \varepsilon_{|p-q|, r} \varepsilon_{|p-q|, s} = \\ &= O(1) + \frac{\varepsilon_{rs}}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \varepsilon_{|p-q|, r} = \\ &= O(1) + (n-r) \varepsilon_{rs}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqs} \rightarrow \varepsilon_{rs}. \quad (\text{q. e. d.})$$

3. Ezek után rátérhetek az (1'') tétel bizonyítására. Először is a (φ) rendszer teljes. Azaz, ha $f(t)$ tetszés-szerinti (C) függvény, léteznek oly valós a_0, a_1, \dots, a_k állandók, hogy

$$\int_0^1 [f(t) - a_0 \varphi_0(t) - a_1 \varphi_1(t) - \dots - a_k \varphi_k(t)]^2 dt$$

tetszés szerint kicsiny szám. Valóban a FOURIER-féle sorok elméletének elemei szerint, ha $F(\theta)$ a $(-\pi, \pi)$ intervallumban értelmezett (C) függvény, FOURIER-féle sorának n -edik részletösszege $s_n(\theta)$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - s_n(\theta))^2 d\theta \rightarrow 0.$$

Legyen $F(\theta) = f\left(\frac{|\theta|}{\pi}\right)$; ez páros függvény [$F(-\theta) = F(\theta)$] lévén, $s_n(\theta)$ cosinus-polynom és így

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - s_n(\theta))^2 d\theta &= 2 \int_0^{\pi} (F(\theta) - s_n(\theta))^2 d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 (f(t) - s_n(\pi t))^2 dt, \end{aligned}$$

miből állításunk következik.

Legyenek tehát $f_1(t)$ és $f_2(t)$ tetszés-szerinti (C) függvények, ε tetszés-szerinti pozitív szám,

$$F_\nu(t) = a_0^{(\nu)} \varphi_0(t) + a_1^{(\nu)} \varphi_1(t) + \dots + a_k^{(\nu)} \varphi_k(t);$$

és

$$\int_0^1 (f_\nu(t) - F_\nu(t))^2 dt < \varepsilon; \quad (\nu = 1, 2).$$

A (2) tételből

$$\begin{aligned} |\sigma_n(\varphi_r; t)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} \int_0^1 [\varphi_0(x) \varphi_0(t) + \varphi_1(x) \varphi_1(t) + \dots + \\ &+ \varphi_n(x) \varphi_n(t)]^2 dx < 2\sqrt{2}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) f_2(t) dt - \int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) F_2(t) dt \right| &< \\ &< 2\sqrt{2} \int_0^1 |f_2(t) - F_2(t)| dt < 2\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Azonban az imént igazoltak szerint

$$\int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) F_2(t) dt \rightarrow \int_0^1 \varphi_r(t) F_2(t) dt,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \varphi_r(t) F_2(t) dt - \int_0^1 \varphi_r(t) f_2(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^1 |F_2(t) - f_2(t)| dt < \sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}; \end{aligned}$$

úgy hogy

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) f_2(t) dt &< \int_0^1 \varphi_r(t) F_2(t) dt + 2\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon} \\ &< \int_0^1 \varphi_r(t) f_2(t) dt + 3\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) f_2(t) dt > \int_0^1 \varphi_r(t) f_2(t) dt - 3\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon};$$

és mivel ε tetszős szerint kicsiny,

$$\int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) f_2(t) dt \rightarrow \int_0^1 \varphi_r(t) f_2(t) dt; \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

De

$$\int_0^1 \sigma_n(\varphi_r; t) f_2(t) dt = \int_0^1 \sigma_n(f_2; t) \varphi_r(t) dt;$$

és így

$$\int_0^1 \sigma_n(f_2; t) F_1(t) dt \rightarrow \int_0^1 F_1(t) f_2(t) dt.$$

Legyen $|f_2(t)| < M$, akkor

$$|\sigma_n(f_2; t)| \leq \frac{M}{n+1} \int_0^1 [\varphi_0(x) \varphi_0(t) + \varphi_1(x) \varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(x) \varphi_n(t)]^2 dx < 2M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

tehát

$$\left| \int_0^1 \sigma_n(f_2; t) f_1(t) dt - \int_0^1 \sigma_n(f_2; t) F_1(t) dt \right| < 2M\sqrt{\varepsilon};$$

és

$$\left| \int_0^1 F_1(t) f_2(t) dt - \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt \right| < M\sqrt{\varepsilon},$$

miből teljesen az előbb követett módon nyerjük, hogy

$$\int_0^1 \sigma_n(f_2; t) f_1(t) dt \rightarrow \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt. \quad (\text{q. e. d.})$$

Ezzel az I. tétel bizonyítva van.

2. §. Bizonyos quadratos formákról.

4. Legyen $f(t)$ a $(0, 1)$ intervallumban értelmezett tetszőszerinti (C) függvény. Tekintem a

$$\begin{aligned}
 K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 f(t) [x_0 \varphi_0(t) + x_1 \varphi_1(t) + \dots + x_n \varphi_n(t)]^2 dt = \\
 &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq} x_p x_q; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (K)
 \end{aligned}$$

formák seregét. Ha $m \leq f(t) \leq M$, mivel

$$\int_0^1 [x_0 \varphi_0(t) + x_1 \varphi_1(t) + \dots + x_n \varphi_n(t)]^2 dt = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

tehát az

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

feltétel mellett

$$m \leq K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) \leq M; \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Specziálisan, ha $f(t) \geq 0$,

$$K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) \geq 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

a változók minden értéke mellett és így ekkor a

$$D_n(f) = |k_{pq}|_{(p,q=0,1,\dots,n)}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (D)$$

determinansok valamennyien nem-negatívak.

E determinansok egy LANDSBERG-féle¹ egyszerű átalakítás segítségével, melyet itt bővebben nem részletezek, a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned}
 D_n(f) &= \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n+1} f(t_0) f(t_1) \dots f(t_n) \{R_n(t_0, t_1, \dots, t_n)\}^2 dt_0 dt_1 \dots dt_n \\
 &\quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (D')
 \end{aligned}$$

hol

$$R_n(t_0, t_1, \dots, t_n) = |\varphi_p(t_q)|_{(p,q=0,1,2,\dots,n)}.$$

Tekintettel arra, hogy $D_n(1) = 1$, e formulából könnyű észrelni nyerhetők a következő tételek:

$$|D_n(f)| \leq D_n(|f|);$$

¹ G. LANDSBERG: Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen; Math. Ann. 69, 231. o. 1910.

továbbá, ha $0 \leq m, 0 \leq g(t)$,

$$\begin{aligned} m^{n+1} &\leq D_n(f) \leq M^{n+1}, \\ m^{n+1}D_n(g) &\leq D_n(fg) \leq M^{n+1}D_n(g). \end{aligned}$$

Vége a jól ismert SCHWARZ-féle egyenlőtlenséggel

$$D_n(fg) \leq \sqrt{D_n(f^2) D_n(g^2)}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

5. Viaszatérek ismét a (K) formára. Mint jól ismeretes, ez egy

$$\xi_j^{(n)} = l_{j0}^{(n)} x_0 + l_{j1}^{(n)} x_1 + \dots + l_{jn}^{(n)} x_n; \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (3)$$

orthogonális lineáris transzformációval ilyen alakban írható fel:

$$K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \lambda_j^{(n)} \xi_j^{(n)2}; \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (K')$$

hol

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

bizonyos, a (K) formákkal egyértelműen meghatározott valós állandók, az úgynevezett *sajátértékek*.

Hogy a (3) lineáris transzformáció orthogonális, az azt jelenti, hogy identikusan

$$\xi_0^{(n)2} + \xi_1^{(n)2} + \dots + \xi_n^{(n)2} = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

azaz

$$\sum_{j=0}^n l_{jp}^{(n)} l_{jq}^{(n)} = \varepsilon_{pq}; \quad (p, q = 0, 1, \dots, n). \quad (5)$$

Tehát (3)-ból

$$x_j = l_{j0}^{(n)} \xi_0^{(n)} + l_{j1}^{(n)} \xi_1^{(n)} + \dots + l_{jn}^{(n)} \xi_n^{(n)}; \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (3')$$

és így

$$\sum_{j=0}^n l_{jp}^{(n)} l_{jq}^{(n)} = \varepsilon_{pq}; \quad (p, q = 0, 1, \dots, n).$$

A következőkben a (4) állandókkal fogok foglalkozni. Ezek a

$$D_n(f - \lambda) = |k_{pq} - \varepsilon_{pq}\lambda|_{(p, q=0, 1, \dots, n)} = 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

charakteristikus egyenlet gyökei. Ha (4) legkisebb és legnagyobb eleme $\lambda_\alpha^{(n)}$, illetőleg $\lambda_\omega^{(n)}$, akkor (K') -ből világos, hogy

$$\lambda_{\alpha}^{(n)} = \text{Min } K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$\lambda_{\omega}^{(n)} = \text{Max } K_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n),$$

mialatt

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Tehát (K') -re való tekintettel

$$m \leq \lambda_j^{(n)} \leq M; \quad (j=0, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots).$$

3. §. Egy tétel a (K) formákról.

6. E § czélja egy tétel bizonyítása, mely a (K) formák sajátértékeinek eloszlására nézve nyújt felvilágosítást. Ez a

II. tétel. — Legyen $f(t)$ a $(0, 1)$ intervallumban értelmezett (C) függvény, $m \leq f(t) \leq M$, sajátértékei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen továbbá $F(\lambda)$ a (m, M) intervallumban folytonos: akkor

$$m \leq \lambda_j^{(n)} \leq M; \quad (j=0, 1, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots)$$

és

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \rightarrow \int_0^1 F(f(t)) dt.$$

Megjegyzés. Közvetlenül belátható, hogy

$$\lambda_0^{(n)2} + \lambda_1^{(n)2} + \dots + \lambda_n^{(n)2} = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n k_{pq}^2;$$

és így az I. tétel tulajdonképpen a II. tétel ama speczialis esete, mikor $F(\lambda) = \lambda^2$.

Bizonyítás. Tételünk első részét már az előző §-ban igazoltuk. Elég tehát második részével foglalkoznunk.

Kiindulok a következő, JENSEN-féle tételből:¹

Legyen $\Phi(\lambda)$ egy, a véges (m, M) intervallumban korlátos, felülről convex (nem feltétlenül pozitív), $p(t)$ a $(0, 1)$ intervallumban nem-negatív (C) függvény, melyre nézve

¹ I. L. JENSEN: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes; Acta Mathematica 30, 175—193. o. 1906.

$$\int_0^1 p(t) dt > 0;$$

vége $r(t)$ ugyanott a m és M határok közt változó (C) függvény. Akkor

$$\Phi \left(\frac{\int_0^1 p(t) r(t) dt}{\int_0^1 p(t) dt} \right) \cong \frac{\int_0^1 p(t) \Phi(r(t)) dt}{\int_0^1 p(t) dt}. \quad (I)$$

(K') és $(3')$ értelmében

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(n)} &= K_n(f; l_{j_0}^{(n)}, l_{j_1}^{(n)}, \dots, l_{j_n}^{(n)}) = \\ &= \int_0^1 f(t) [l_{j_0}^{(n)} \varphi_0(t) + l_{j_1}^{(n)} \varphi_1(t) + \dots + l_{j_n}^{(n)} \varphi_n(t)]^2 dt; \\ &(j = 0, 1, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Legyen tehát (I) -ben

$$\begin{aligned} p(t) &= [l_{j_0}^{(n)} \varphi_0(t) + l_{j_1}^{(n)} \varphi_1(t) + \dots + l_{j_n}^{(n)} \varphi_n(t)]^2; \\ r(t) &= f(t), \end{aligned}$$

akkor

$$\int_0^1 p(t) dt = l_{j_0}^{(n)2} + l_{j_1}^{(n)2} + \dots + l_{j_n}^{(n)2} = 1;$$

és így

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_j^{(n)}) &\cong \int_0^1 \Phi(f(t)) [l_{j_0}^{(n)} \varphi_0(t) + l_{j_1}^{(n)} \varphi_1(t) + \dots + l_{j_n}^{(n)} \varphi_n(t)]^2 dt; \quad (7) \\ &(j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Ebből (5) -re való tekintettel

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi(\lambda_0^{(n)}) + \Phi(\lambda_1^{(n)}) + \dots + \Phi(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \cong \\ &\cong \int_0^1 \Phi(f(t)) \frac{(\varphi_0(t))^2 + (\varphi_1(t))^2 + \dots + (\varphi_n(t))^2}{n+1} dt \quad (8) \\ &\cong \int_0^1 \sigma_n(1; t) \Phi(f(t)) dt, \end{aligned}$$

úgy hogy az I. tétel szerint

$$\frac{\Phi(\lambda_0^{(n)}) + \Phi(\lambda_1^{(n)}) + \dots + \Phi(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \geq \int_0^1 \Phi(f(t)) dt + \varepsilon_n, \quad (9)$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

E pillanattól fogva *feltételezem, hogy* $m \geq 0$ és így $\lambda_j^{(n)} \geq 0$.
(E megszorítást később könnyen elejthetjük.)

A (7) vonatkozást szorzom $\lambda_j^{(n)}$ -el és összegezek j szerint. Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \lambda_j^{(n)} [\lambda_{j_0}^{(n)} \varphi_0(t) + \lambda_{j_1}^{(n)} \varphi_1(t) + \dots + \lambda_{j_n}^{(n)} \varphi_n(t)]^2 = \\ = K_n(f; \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0^{(n)} \Phi(\lambda_0^{(n)}) + \lambda_1^{(n)} \Phi(\lambda_1^{(n)}) + \dots + \lambda_n^{(n)} \Phi(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \geq \\ \geq \int_0^1 \Phi(f(t)) \frac{K_n(f; \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}{n+1} dt. \end{aligned}$$

Azonban (2)-re való tekintettel

$$\frac{K_n(f; \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}{n+1} = \sigma_n(f; t);$$

és így az I. tétel értelmében

$$\frac{\lambda_0^{(n)} \Phi(\lambda_0^{(n)}) + \lambda_1^{(n)} \Phi(\lambda_1^{(n)}) + \dots + \lambda_n^{(n)} \Phi(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \geq \int_0^1 \Phi(f(t)) f(t) dt + \varepsilon'_n, \quad (10)$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$.

Mint jól ismeretes, minden pozitív intervallumban λ^p alulról convex, ha $p > 1$; és felülről, ha $p < 1$. Ha tehát $1 < r < 2$ és ha a (9)-ben $\Phi(\lambda) = \lambda^r$ -et írunk, nyerjük, hogy

$$\frac{\lambda_0^{(n)r} + \lambda_1^{(n)r} + \dots + \lambda_n^{(n)r}}{n+1} \leq \int_0^1 (f(t))^r dt + \varepsilon_n.$$

Legyen másrészt (10)-ben $\Phi(\lambda) = \lambda^{r-1}$, akkor nyerjük, hogy

$$\frac{\lambda_0^{(n)r} + \lambda_1^{(n)r} + \dots + \lambda_n^{(n)r}}{n+1} \geq \int_0^1 (f(t))^r dt + \varepsilon'_n.$$

Ez utóbbi két egyenlőtlenséget egybevetve belátjuk, hogy

$$\frac{\lambda_0^{(n)r} + \lambda_1^{(n)r} + \dots + \lambda_n^{(n)r}}{n+1} \rightarrow \int_0^1 (f(t))^r dt,$$

azaz tételünk igaz, ha $F(\lambda) = \lambda^r$; ($1 < r < 2$).

Világos továbbá, hogy igaz a tétel akkor is, ha $F(\lambda) = 1$.

Felhasználók most egy segédtételt, mely szerint minden folytonos $F(\lambda)$ függvény a véges és pozitív (m, M) intervallumban tetszés-szerinti pontossággal megközelíthető

$$G(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda^{r_1} + c_2 \lambda^{r_2} + \dots + c_m \lambda^{r_m} \\ (1 < r_k < 2; k=1, 2, \dots, m)$$

alakú függvényekkel.¹ De eme $G(\lambda)$ függvényekre nézve tételünk már bizonyítottnak tekinthető; ha e szerint ε bármily kicsiny pozitív szám és

$$|F(\lambda) - G(\lambda)| < \varepsilon; \quad (m \leq \lambda \leq M),$$

akkor minden n -re

$$\left| \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} - \frac{G(\lambda_0^{(n)}) + G(\lambda_1^{(n)}) + \dots + G(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \right| < \varepsilon$$

lévén,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \leq \int_0^1 G(f(t)) dt + \varepsilon \leq \\ \leq \int_0^1 F(f(t)) dt + 2\varepsilon.$$

Azonban hasonló eredmény érvényes a lim inf-ra és ε tetszés szerint kicsiny, úgy hogy

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \rightarrow \int_0^1 F(f(t)) dt.$$

¹ Ez közvetlen következménye CH. H. MÜNTZ egy tételének: Über den Approximationssatz von WEIERSTRASS [Mathem. Abhandlungen H. A. SCHWARZ gewidmet. Berlin (1914), 303-312. o.]. Megjegyzem, hogy céljainkra sokkal kevesebb elegendő, mint a menyvit MÜNTZ tétele kimond.

Eddig feltételeztük, hogy $m \geq 0$. E megszorítást azonban könnyen elejthetjük. Legyen ugyanis m tetszés-szerinti. Tekintem $f(t)$ helyett az $f(t) - m \geq 0$ függvényt; ennek sajátértékei (6) szerint $\lambda_j^{(n)} - m \geq 0$. Választom továbbá $F(\lambda)$ helyett az $F(\lambda + m)$ függvényt. Ekkor közvetlenül nyerhető, hogy tételünk általános-ságban érvényes.

4. §. Alkalmazás.

7. Legyen a II. tételben $m > 0$ és $F(\lambda) = \log \lambda$. Nyerjük, hogy

$$\frac{\log \lambda_0^{(n)} + \log \lambda_1^{(n)} + \dots + \log \lambda_n^{(n)}}{n+1} \rightarrow \int_0^1 \log f(t) dt.$$

Azonban

$$\lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)} = D_n(f);$$

és így érvényes a

III. tétel. — Ha $f(t) \geq m > 0$ a $(0, 1)$ intervallumban értelmezett (C) függvény, akkor

$$\sqrt[n+1]{D_n(f)} \rightarrow e^{\int_0^1 \log f(t) dt}.$$

Ez ama tétel analogiája, melyet először «Ein Grenzwertsatz über die TOEPLITZ'schen Determinanten etc.» című dolgozatomban² bizonyítottam be. Később ismertem fel ennek a tételnek különös érdekességét, nevezetesen azt a tényt, hogy fordítva, belőle a II. tétel leszámaztatható és így e kettő æquivalensnek tekinthető. E tény egyszerű bizonyítási módját a következőkben fel fogom használni és így részletesen közlöm azt.

Legyen a II. tételben $|f(t)| < \sigma$; ($\sigma > 0$). Tekintem az $1 + af(t)$ függvényt, hol a valós állandó. Ha $|a| < \frac{1}{\sigma}$, akkor e függvény lényegesen pozitív és így a III. tétel alkalmazható; mivel sajátértékei $1 + a\lambda_j^{(n)}$,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \log(1 + a\lambda_j^{(n)}) \rightarrow \int_0^1 \log(1 + af(t)) dt.$$

¹ A következőkben $\sqrt[k]{a}$ -nak (k pozitív egész szám) mindig amaz értékét veszem, melynek mód 2π vett argumentuma a legkisebb.

² Math. Ann. 76, 490—503. o. 1915.

De ha $|x| < 1$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

úgy hogy, ha írjuk

$$\begin{aligned} s_n^{(k)} &= \lambda_0^{(n)k} + \lambda_1^{(n)k} + \dots + \lambda_n^{(n)k}; \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{s_n^{(k)} \alpha^k}{n+1} &\rightarrow \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (f(t))^k \alpha^k \right\} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \alpha^k \int_0^1 (f(t))^k dt. \end{aligned}$$

(Ez az utóbbi lépés meg van engedve, mert a zárójelben álló sor t -ben egyenletesen convergens.)

Alkalmazom most a következő, VITALI-féle tételt:

Legyenek $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ az $|x| \leq R$ körben reguláris és egyenletesen korlátos függvények. Létezzon továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ végtelen sok oly x -re, melyeknek van sűrűsödő pontjuk az $|x| \leq R$ kör belsejében. Akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ létezik, ha $|x| < R$ és pedig egyenletesen, ha $|x| \leq \rho < R$; úgy hogy $f(x)$ reguláris, ha $|x| < R$.

Esetünkben például $R = \frac{1}{2\sigma}$, továbbá

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left\{ \frac{s_n^{(k)}}{n+1} \int_0^1 (f(t))^k dt \right\} x^k.$$

Mivel, ha $|x| \leq R$,

$$|f_n(x)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k |x|^k = \frac{2\sigma|x|}{1-\sigma|x|} \leq 2,$$

továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, ha x valós és $|x| \leq R$, tehát az $|x| \leq \rho < R$ körben egyenletesen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

úgy hogy

$$\frac{s_n^{(k)}}{n+1} \rightarrow \int_0^1 (f(t))^k dt; \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Ebből következik a II. tétel érvényessége amaz esetben, midőn $F(\lambda)$ polynom; de a jól ismert WEIERSTRASS-féle tétel szerint minden folytonos függvény véges intervallumokban polynomokkal egyenletesen és tetszés-szerinti pontossággal megközelíthető, úgy hogy a 3. §-ban követett eljárással nyerjük tételünk érvényességét minden folytonos függvényre.

8. A következőkben szükségem lesz a III. tétel egy általánosítására. Ez a

III'. tétel. — Legyen

$$f(t) = \varphi(t) |t - t_1|^{a_1} |t - t_2|^{a_2} \dots |t - t_k|^{a_k},$$

hol $0 < a_r$, $0 \leq t_r \leq 1$; ($r=1, 2, \dots, k$), a $\varphi(t) \geq m > 0$ pedig a $(0, 1)$ intervallumban értelmezett (C) függvény. Akkor

$$\sqrt[n]{D_n(f)} \rightarrow e^{\int_0^1 \log f(t) dt}.$$

Legyen ugyanis ε tetszés-szerinti pozitív szám. A t_r helyeket befoglalom oly intervallumok belsejébe, melyek összes hossza $< \varepsilon$. Legyen

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{ezekben az intervallumokban} \\ f(t) & \text{ezeken az intervallumokon kívül.} \end{cases}$$

Legyen továbbá ε oly kicsiny, hogy $f(t) \leq f_\varepsilon(t)$. Mivel $f_\varepsilon(t)$ lényegesen pozitív, (8)-ban $\Phi(\lambda) = \log \lambda$ -t írva, lesz

$$\log \sqrt[n]{D_n(f_\varepsilon)} \geq \int_0^1 \log f_\varepsilon(t) S_n(t) dt,$$

hol

$$S_n(t) = \frac{(\varphi_0(t))^2 + (\varphi_1(t))^2 + \dots + (\varphi_n(t))^2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n \cos 2\pi r t.$$

Tehát

$$\log \sqrt[n]{D_n(f)} \geq \int_0^1 \log f(t) S_n(t) dt.$$

Azonban a FOURIER-féle sorok elméletének elemei szerint

$$\int_0^1 \log f(t) \cos 2\pi n t dt \rightarrow 0$$

és így

$$\int_0^1 \log f(t) S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \log f(t) dt,$$

úgy hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} \geq e^{\int_0^1 \log f(t) dt}. \tag{11}$$

Másrészt (D') szerint

$$D_n(f) \leq D_n(f_\varepsilon),$$

tehát

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{D_n(f_\varepsilon)} = e^{\int_0^1 \log f_\varepsilon(t) dt} = \\ &= e^{\int_0^1 \log f(t) dt} + \delta(\varepsilon), \end{aligned} \tag{12}$$

hol $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$. (11) és (12)-t egybevetve következik állításunk helyessége.

5. §. A Hankel-féle formákról.

9. Legyen $f(t)$ a véges (α, β) intervallumban értelmezett tetszés-szerinti (G) függvény; az ebben az intervallumban vett momentumai

$$g_n = \int_\alpha^\beta f(t) t^n dt; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Tekintem a

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_\alpha^\beta f(t) (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt = \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n (g_{p+q} x_p x_q); \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{G}$$

quadratos formák seregét. Mivel a megfelelő

$$D_n^{(\alpha, \beta)}(f) = |g_{p+q}|_{(p, q=0, 1, \dots, n)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots) \tag{13}$$

determinansok HANKEL-félék, azért e formákat is a következőkben HANKEL-féle formáknak fogom nevezni.

A (13) determinansok egy már említett (2. §) LANDSBERG-féle átalakítás segítségével ilyen alakba hozhatók:

$$D_n^{(\alpha, \beta)}(f) = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\int_a^\beta \dots \int_a^\beta}_{n+1} |f(t_0) f(t_1) \dots f(t_n) \prod_{\substack{p < q \\ p, q=0, 1, \dots, n}} (t_p - t_q)^2 dt_0 dt_1 \dots dt_n; \quad (13')$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Ebből

$$|D_n^{(\alpha, \beta)}(f)| \leq D_n^{(\alpha, \beta)}(|f|),$$

továbbá, ha $0 \leq m \leq f(t) \leq M$, $0 \leq g(t)$,

$$m^{n+1} D_n^{(\alpha, \beta)}(g) \leq D_n^{(\alpha, \beta)}(fg) \leq M^{n+1} D_n^{(\alpha, \beta)}(g).$$

Vége a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség segítségével

$$D_n^{(\alpha, \beta)}(fg) \leq \sqrt{D_n^{(\alpha, \beta)}(f^2) D_n^{(\alpha, \beta)}(g^2)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen

$$g_n^{(0)} = \int_a^\beta t^n dt = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Tekintem a (G) formákat a

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha, \beta)}(1; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_a^\beta (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt = \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n g_{p+q}^{(0)} x_p x_q = 1 \end{aligned}$$

mellékfeltétel mellett. Ha $m \leq f(t) \leq M$, ekkor

$$m \leq G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) \leq M; \quad (14)$$

speciálisan, ha $f(t) \geq 0$,

$$G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) \geq 0; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

10. Írjuk rövideg kedvéért

$$x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n = X_n(t);$$

és alkalmazzuk a (G) formában szereplő integrálra a

$$\tau = \frac{2}{\beta - \alpha} (t - \alpha) - 1$$

helyettesítést. Nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left\{ X_n \left(\frac{\beta - \alpha}{2} (\tau + 1) + \alpha \right) \right\}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

ha $f(t) = \varphi(\tau)$. Az x_0, x_1, \dots, x_n változókat alávetem egy linearis transzformációnak, melyet ama követelés által definiálok, hogy az

$$X_n \left(\frac{\beta - \alpha}{2} (\tau + 1) + \alpha \right) = y_0 + y_1 \tau + \dots + y_n \tau^n$$

egyenlőség τ -ban azonosan teljesüljön. E transzformációval, melynek determinansa $d_n \neq 0$, a (15) forma a következőbe megy át:

$$\frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) (y_0 + y_1 \tau + \dots + y_n \tau^n)^2 d\tau;$$

ennek determinansa

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^{n+1} D_n^{(-1, 1)}(\varphi) = d_n^2 D_n^{(\alpha, \beta)}(f).$$

Speciálisan

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^{n+1} D_n^{(-1, 1)}(1) = d_n^2 D_n^{(\alpha, \beta)}(1);$$

és így

$$\frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)} = \frac{D_n^{(-1, 1)}(\varphi)}{D_n^{(-1, 1)}(1)}. \quad (16)$$

E formula lehetővé teszi, hogy a következőkben az $\alpha = -1$, $\beta = 1$ speciális esetre szorítkozzunk.

11. Tekintem a

$$G_n^{(-1, 1)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_{-1}^1 f(t) (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt \quad (17)$$

quadratos formát, melynek determinansa $D_n^{(-1, 1)}(f)$. Érvényes a

IV. tétel. — Ha $f(t) \geq m > 0$ a $(-1, 1)$ intervallumban értelmezett (G) függvény, akkor

$$\sqrt[n+1]{\frac{D_n^{(-1, 1)}(f)}{D_n^{(-1, 1)}(1)}} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} = \Gamma^{(-1, 1)}(f).$$

Alkalmazzuk ugyanis a (17) integrálban a $t = \cos \pi \theta$ helyettesítést.

$$G_n^{(-1, 1)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) = \pi \int_0^1 f(\cos \pi \theta) \{X_n(\cos \pi \theta)\}^2 \sin \pi \theta d\theta. \quad (17')$$

Az x_0, x_1, \dots, x_n változókat alávetem egy lineáris transzformációnak, melyet ama követelés által definiálok, hogy az

$$X_n(\cos \pi \theta) = y_0 \varphi_0(\theta) + y_1 \varphi_1(\theta) + \dots + y_n \varphi_n(\theta)$$

egyenlőség θ -ban azonosan teljesüljön. (Itt $\varphi_0(\theta), \varphi_1(\theta), \dots$ az 1. §-ban szereplő függvények.) E transzformáció, melynek determinansa $e_n \neq 0$, a (17') formát a következőbe viszi át:

$$\pi \int_0^1 f(\cos \pi \theta) \sin \pi \theta [y_0 \varphi_0(\theta) + y_1 \varphi_1(\theta) + \dots + y_n \varphi_n(\theta)]^2 d\theta.$$

Ennek determinansa

$$A_n(f) = e_n^2 D_n^{(-1, 1)}(f).$$

Speciálisan

$$A_n(1) = e_n^2 D_n^{(-1, 1)}(1);$$

és így

$$\frac{D_n^{(-1, 1)}(f)}{D_n^{(-1, 1)}(1)} = \frac{A_n(f)}{A_n(1)}.$$

Azonban a III' tétel értelmében

$$\sqrt[n+1]{A_n(f)} \rightarrow \pi e^{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \log \{f(\cos \pi \theta) \sin \pi \theta\} d\theta};$$

és

$$\sqrt[n+1]{A_n(1)} \rightarrow \pi e^{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \log \sin \pi \theta d\theta},$$

tehát

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{\frac{D_n^{(-1, 1)}(f)}{D_n^{(-1, 1)}(1)}} &\rightarrow e^{\int_0^1 \log f(\cos \pi \theta) d\theta} = \\ &= e^{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}} = \Gamma^{(-1, 1)}(f). \end{aligned}$$

(q. e. d.)

Ebből következik (16)-ra való tekintettel a

IV'. tétel. — Ha $f(t) \geq m > 0$ a véges (a, β) intervallumban értelmezett (C) függvény, akkor

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{\frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)}} &\rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \log \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}} = \\ &= e^{\frac{1}{\pi} \int_a^\beta \log f(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}} = \Gamma^{(\alpha, \beta)}(f). \end{aligned}$$

12. HILBERT kiszámította¹ az itt szereplő $D_n^{(\alpha, \beta)}(1)$ számok asymptotikus értékét. Egyszerű segédeszközökkel nyeri, hogy

$$D_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{(n+1)^2} D_n^{(-1, 1)}(1); \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

és

$$\sqrt[n+1]{D_n^{(-1, 1)}(1)} = \frac{\pi}{2n} (1 + \varepsilon_n),$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Tehát

$$\sqrt[n+1]{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)} = 2\pi \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)^{n+1} (1 + \varepsilon'_n),$$

hol $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Ez utóbbi eredmény felhasználásával imént kimondott tételünk ilyen alakot ölt:

IV'' tétel. — Ha $f(t) \geq m > 0$ a véges (a, β) intervallumban értelmezett (C) függvény, akkor

$$\left(\frac{4}{\beta - \alpha}\right)^{n+1} \sqrt[n+1]{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)} \rightarrow 2\pi \Gamma^{(\alpha, \beta)}(f).$$

¹ D. HILBERT: Ein Beitrag zur Theorie des LEGENDRE'schen Polynoms Acta Mathematica 18, 155—159. o. 1894.

6. §. Segédtelemek a quadratos formák elméletéből.

13. Előbbi eredményeink megfelelő interpretálása és általánosítása céljából idéznem kell egy egyszerű tételt a quadratos formák elméletéből.

Legyen

$$A(x) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n a_{pq} x_p x_q; \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

tetszés-szerinti quadratos forma,

$$A(x) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n a_{pq} x_p x_q; \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

positiv definit. Létezik oly

$$x = L(\xi) \tag{18}$$

linearis transformatio, melynek alkalmazása után

$$A(x) = \lambda_0 \xi_0^2 + \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2; \tag{19}$$

és

$$A(x) = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2; \tag{20}$$

hol a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ állandók egyértelműen meghatározott valós számok, melyek gyökei az

$$|a_{pq} - \lambda a_{pq}|_{(p, q=0, 1, \dots, n)} = 0 \tag{21}$$

egyenletnek.

Először is kimutatom (18) létezését. Legyen

$$x = M(y)$$

egy linearis transformatio, mely $A(x)$ -et négyzetek összegébe viszi át. Azaz

$$A(x) = A(M(y)) = y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Mivel $A(x)$ positiv definit, e transformatio determinansa $\neq 0$.

Tekintem most az

$$A(x) = A(M(y))$$

quadratos formát; mint ismeretes, létezik oly

$$y = Q(\xi)$$

orthogonalis linearis transformatio, mely ezt

$$A(x) = \lambda_0 \xi_0^2 + \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2$$

alakba hozza, mialatt

$$A(x) = y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Tehát az

$$L(\xi) = MQ(\xi)$$

linearis transformatio a kívánt tulajdonsággal rendelkezik. E transformatio determinansa $\neq 0$.

Hogy λ_r eleget tesz a (21) egyenletnek, az nagyon könnyen igazolható. Ugyanis

$$A(x) - \lambda_r A(x) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n (a_{pq} - \lambda_r a_{pq}) x_p x_q = \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_r) \xi_k^2;$$

és így a jobboldalon álló quadratos forma determinansa 0; de az $L(\xi)$ transformatio determinansa $\neq 0$, úgy hogy

$$|a_{pq} - \lambda_r a_{pq}|_{(p, q=0, 1, \dots, n)} = 0. \quad (\text{q. e. d.})$$

14. A $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok nyilvánvalóan a sajátértékek általánosításainak tekinthetők. Valóban, ha $a_{pq} = \varepsilon_{pq}$, azaz

$$A(x) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

akkor ezek a közönséges sajátértékekre redukálódnak. A következőkben e számokat az $A(x)$ forma « $A(x) = 1$ feltétel mellett vett (általánosabb értelemben vett) sajátértékei»-nek, vagy ha félreértés nem állhat fenn, egyszerűen «sajátérték»-eknek nevezem. Ha közülük a legkisebb λ_α és a legnagyobb λ_ω , akkor (19) és (20)-ra való tekintettel

$$\lambda_\alpha = \text{Min } A(x);$$

$$\lambda_\omega = \text{Max } A(x),$$

mialatt $A(x) = 1$. Ha tehát $m \leq A(x) \leq M$, mialatt $A(x) = 1$, akkor

$$m \leq \lambda_k \leq M, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Végül egyszerűen belátható, hogy ha p és q tetszés-szerinti valós állandók, akkor $pA(x) + qA(x)$ «sajátérték»-ei

$$p\lambda_k + q; \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

7. §. A Hankel-féle formák további vizsgálata.

15. Legyen az előbbi §-ban

$$\begin{aligned} A(x) = G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_a^\beta f(t) (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt = \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n g_{p+q} x_p x_q; \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} A(x) = G_n^{(\alpha, \beta)}(1; x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_a^\beta (x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n g_{p+q}^{(0)} x_p x_q. \end{aligned}$$

(Ez utóbbi forma pozitív definit.)

Jelölöm a

$$|g_{p+q} - \lambda g_{p+q}^{(0)}| (p, q=0, 1, \dots, n) = 0 \quad (23)$$

egyenlet gyökei, azaz a «sajátérték»-eket

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}\text{-nel, } (n=0, 1, 2, \dots).$$

Akkor (14) és (22) szerint

$$m \leq \lambda_j^{(n)} \leq M; \quad (j=0, 1, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots).$$

Továbbá (23)-ból közvetlenül világos, hogy

$$\lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)} = \frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)}.$$

E szerint IV'. tételünk ilyen formában mondható ki:

$$\frac{\log \lambda_0^{(n)} + \log \lambda_1^{(n)} + \dots + \log \lambda_n^{(n)}}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \log f(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}.$$

Kiindulva most e tételből és szószerint követve a 4. § eljárását, a következő tételt nyerem.

V. tétel. — Legyen $f(t)$ a véges (α, β) intervallumban értelmezett (C) függvény, $m \leq f(t) \leq M$; legyen $F(\lambda)$ folytonos a (m, M) intervallumban. Írjuk

$$g_n = \int_a^\beta f(t) t^n dt;$$

$$g_n^{(0)} = \int_a^\beta t^n dt;$$

és legyenek végre a

$$|g_{p \cdot q} - \lambda g_{p+q}^{(0)}|_{(p, q=0, 1, \dots, n)} = 0$$

egyenlet gyökei

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Akkor

$$m \leq \lambda_j^{(n)} \leq M; \quad (j=0, 1, \dots, n; \quad n=0, 1, 2, \dots);$$

és

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \dots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_a^\beta F(f(t)) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}.$$

16. E tételnek csupán egyetlen alkalmazását említem. Legyen x tetszés-szerinti valós vagy complex szám, mely nem esik a (m, M) intervallumba. Mivel ekkor $F(\lambda) = \log |\lambda - x|$ folytonos, mialatt $m \leq \lambda \leq M$ és

$$(\lambda_0^{(n)} - x)(\lambda_1^{(n)} - x) \dots (\lambda_n^{(n)} - x) = \frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f-x)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)},$$

ezért érvényes a

VI. tétel. — Ha $m \leq f(t) \leq M$ a véges (a, β) intervallumban értelmezett (C) függvény és x nem esik a (m, M) intervallumba, akkor

$$\sqrt[n+1]{\left| \frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f-x)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)} \right|} \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\beta-a} \right)^{n+1} \sqrt[n+1]{\left| D_n^{(\alpha, \beta)}(f-x) \right|} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_a^\beta \log |f(t)-x| \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}} = \Gamma^{(\alpha, \beta)}(|f-x|).$$

E tétel mint könnyen belátható — a IV'. tétel általánosítása.

17. Legyenek $m \leq f(t) \leq M$, $0 < \mu \leq \varphi(t) \leq M$, mindketten a véges (a, β) intervallumban értelmezett (C) függvények; ugyanitt

$$m^* \leq \frac{f(t)}{\varphi(t)} \leq M^*.$$

Legyen továbbá

$$r_n = \int_a^\beta \varphi(t) t^n dt; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Tekintem az

$$A(x) = G_n^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_n)$$

quadratos formát a

$$A(x) = G_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x_0, x_1, \dots, x_n) = 1$$

feltétel mellett. Nyilvánvaló, hogy

$$m^* \leq A(x) \leq M^*;$$

és ha a

$$|g_{p+q} - \varrho \gamma_{p+q}|_{(p, q=0, 1, \dots, n)} = 0$$

egyenlet gyökei, a «sajátérték»-ek:

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \dots, \varrho_n^{(n)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

akkor a 6. § értelmében e számok valamennyien valósak és a (m^*, M^*) intervallumba esnek. Továbbá

$$\varrho_0^{(n)} \varrho_1^{(n)} \dots \varrho_n^{(n)} = \frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)}.$$

Legyen egy pillanatra $m > 0$; akkor a IV'. tétel értelmében

$$\sqrt[n+1]{\frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)}} \rightarrow \Gamma^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{f}{\varphi}\right),$$

azaz $(\varrho_j^{(n)} \geq m^* > 0)$

$$\frac{\log \varrho_0^{(n)} + \log \varrho_1^{(n)} + \dots + \log \varrho_n^{(n)}}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_a^\beta \log \frac{f(t)}{\varphi(t)} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}.$$

E tételből kiindulva és szószerint alkalmazva a 4. §-ban vázolt eljárást, nyerem, hogy érvényes a

VII. tétel. — Legyenek $f(t)$ és $\varphi(t)$ a véges (α, β) intervallumban értelmezett (C) függvények, ugyanítt

$$0 < \mu \leq \varphi(t) \leq M;$$

$$m^* \leq \frac{f(t)}{\varphi(t)} \leq M^*;$$

legyen továbbá

$$g_n = \int_a^\beta f(t) t^n dt;$$

$$\gamma_n = \int_a^\beta \varphi(t) t^n dt;$$

és jelöljük a

$$|g_{p+q} - \varrho g_{p+q}| \quad (p, q=0, 1, \dots, n) = 0$$

egyenlet gyökei

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \dots, \varrho_n^{(n)}\text{-nel}; \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Legyen végre $F(\varrho)$ a (m^*, M^*) intervallumban folytonos, akkor

$$m^* \leq \varrho_j^{(n)} \leq M^*; \quad (j=0, 1, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots),$$

és

$$\frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \dots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_a^\beta F\left(\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}.$$

18. E tételnek is csupán egyetlen alkalmazását említem. Legyen x tetszés-szerinti valós vagy complex szám, mely nem esik a (m^*, M^*) intervallumba; akkor $F(\varrho) = \log|\varrho - x|$ ebben az intervallumban folytonos és áll:

$$(\varrho_0^{(n)} - x)(\varrho_1^{(n)} - x) \dots (\varrho_n^{(n)} - x) = \frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(f - x\varphi)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)},$$

úgy, hogy

$$\sqrt[n+1]{\frac{|D_n^{(\alpha, \beta)}(f - x\varphi)|}{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)}} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_a^\beta \log \frac{|f(t) - x\varphi(t)|}{\varphi(t)} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(\beta-t)}}} = \Gamma^{(\alpha, \beta)}\left(\left|\frac{f}{\varphi} - x\right|\right).$$

Azonban

$$\sqrt[n+1]{\frac{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)}} \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\beta-a}\right)^{n+1} \sqrt[n+1]{D_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi)} \rightarrow \Gamma^{(\alpha, \beta)}(\varphi),$$

miből következik a

VIII. tétel. — Legyenek $f(t)$ és $\varphi(t)$ a véges (a, β) intervallumban értelmezett (C) függvények,

$$0 < u \leq \varphi(t) \leq M;$$

$$m^* \leq \frac{f(t)}{\varphi(t)} \leq M^*;$$

és x tetszés-szerinti szám, mely nem esik a (m^*, M^*) intervallumba. Akkor

$$\sqrt[n+1]{\frac{|D_n^{(\alpha, \beta)}(f-x\varphi)|}{D_n^{(\alpha, \beta)}(1)}} \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{\beta-\alpha}\right)^{n+1} \sqrt[n+1]{|D_n^{(\alpha, \beta)}(f-x\varphi)|} \rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{\pi} \int_a^{\beta} \log |f(t)-x\varphi(t)| \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}} = \Gamma^{(\alpha, \beta)}(|f-x\varphi|).$$

Ez a VI. tétel általánosítása.

8. §. Bizonyos polynomokról.¹

19. Legyen $f(t)$ az (α, β) intervallumban² értelmezett (C) függvény. Képezem az

$$\int_a^{\beta} f(t) (x-t) (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) x_p x_q \quad (n=1, 2, \dots),$$

formát, melynek determinansa

$$D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot) (x-\cdot)\} = |x g_{p+q} - g_{p+q+1}|_{(p, q=0, 1, \dots, n-1)}$$

egy x -ben n -edfokú polynom. Feladatul tűzöm ki az

$$I_r^{(n)} = \int_a^{\beta} f(x) D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot) (x-\cdot)\} x^r dx \quad (r=0, 1, \dots, n)$$

integrálok kiszámítását.

(13') alkalmazásával

¹ L. e. fejezetre vonatkozóan: E. H. HEINE: Handbuch der Kugelfunctionen. Zweite Auflage, Berlin, 1878-81.

² A 8. és 9. §§-ban (α, β) nem tartozik végesnek lenni. Az összes itt szereplő

$$\int_a^{\beta} f(t) t^r dt$$

integráloknak azonban természetesen létezniök kell.

$$I_r^{(n)} = \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{\alpha}^{\beta}}_{n+1} f(x) f(t_0) \dots f(t_{n-1}) (x-t_0) \dots;$$

$$(x-t_{n-1}) \prod_{p < q}^{0, \dots, n-1} (t_p - t_q)^2 x^r dx dt_0 \dots dt_{n-1}.$$

Bevezetem most a következő jelöléseket:

$$x = t_n;$$

$$g(t; t_0, t_1, \dots, t_n) = g(t) = (t-t_0)(t-t_1) \dots (t-t_n);$$

$$A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) = f(t_0) f(t_1) \dots f(t_n) \prod_{p < q}^{0, 1, \dots, n} (t_p - t_q)^2;$$

melyek felhasználásával

$$I_r^{(n)} = \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{\alpha}^{\beta}}_{n+1} A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) \frac{t_n^r}{g'(t_n)} dt_0 dt_1 \dots dt_n.$$

De $A_n(t_0, t_1, \dots, t_n)$ a változók szimmetrikus függvénye és így

$$I_r^{(n)} = \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{\alpha}^{\beta}}_{n+1} A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) \frac{t_k^r}{g'(t_k)} dt_0 dt_1 \dots dt_n; \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Ebből

$$I_r^{(n)} = \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} \dots \int_{\alpha}^{\beta}}_{n+1} A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{t_k^r}{g'(t_k)} \right\} dt_0 dt_1 \dots dt_n.$$

Legyenek egy pillanatra $t_p \neq t_q \neq 0$ fix számok. Tekintem a

$$G_r(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t_k^{r+1}}{g'(t_k)} \frac{g(t)}{t-t_k} - t^{r+1}; \quad (r=0, 1, \dots, n)$$

polynomot, mely n -edfokú, ha $r \leq n-1$, és $n+1$ -edfokú, ha $r=n$. Legyen először $r \leq n-1$; mivel minden k -ra $G_r(t_k) = 0$, tehát $G_r(t)$ azonosan eltűnik és így

$$\sum_{k=0}^n \frac{t_k^{r+1}}{g'(t_k)} \frac{g(t)}{t-t_k} = t^{r+1},$$

melyben $t = 0$ -t írva nyerjük, hogy

$$\sum_{k=0}^n \frac{t_k^r}{g'(t_k)} = 0; \quad (r=0, 1, \dots, n-1). \quad (24)$$

Legyen továbbá $r=n$. Ekkor is $G_r(t_k) = 0$, tehát

$$\sum_{k=0}^n \frac{t_k^{n+1}}{g'(t_k)} \frac{g(t)}{t-t_k} - t^{n+1} = cg(t),$$

hol c állandó. Amde t^{n+1} együtthatóinak összehasonlítása mutatja, hogy $c = -1$ és így

$$\sum_{k=0}^n \frac{t_k^{n+1}}{g'(t_k)} \frac{g(t)}{t-t_k} = t^{n+1} - g(t),$$

melyben $t = 0$ -t írva

$$\sum_{k=0}^n \frac{t_k^n}{g'(t_k)} = 1. \quad (25)$$

A (24)- és (25)-ből következik, hogy

$$I_r^{(n)} = 0; \quad (r=0, 1, \dots, n-1), \quad (26)$$

és

$$I_n^{(n)} = \frac{1}{(n+1)!} \int \dots \int_{\substack{\beta \\ \alpha \\ n+1}} A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) dt_0 dt_1 \dots dt_n = D_n^{(\alpha, \beta)}(f). \quad (27)$$

Ha e szerint $P(x)$ tetszés-szerinti $n-1$ -edfokú polynom,

$$\int f(x) D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot)(x-\cdot)\} P(x) dx = 0.$$

Legyen most $f(t) \geq 0$ és $g_0 > 0$. Akkor minden n -re $D_n^{(\alpha, \beta)}(f) > 0$ és így a

$$D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot)(x-\cdot)\} = D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f) x^n + \dots$$

polynomok valóban n -edfokúak. Írjuk

$$Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{D_0^{(\alpha, \beta)}(f)}}; \quad Q_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}\{f(\cdot)(x-\cdot)\}}{\sqrt{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f) D_n^{(\alpha, \beta)}(f)}}; \quad (28)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

A (27)-re való tekintettel

$$\int_a^{\beta} f(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = 0; \quad \text{ha } m \geq n;$$

és

$$\int_a^{\beta} f(x) Q_n^2(x) dx = 1,$$

vagy rövidebben

$$\int_a^{\beta} f(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = \varepsilon_{mn}; \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

E polynomok, melyek (28) szerint $f(t)$ momentumai segítségével egyszerűen megadhatók, számos érdekes tulajdonsággal bírnak.

Ha $f(t) = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, nyerem (egy állandó szorzótól eltekintve) a LEGENDRE-féle polynomot, $P_n(x)$ -et. Mivel $P_n(1) = 1$, tehát

$$P_0(x) = 1; \quad P_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(-1, 1)}(x-\cdot)}{D_{n-1}^{(-1, 1)}(1-\cdot)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

20. Legyen ezek után

$$\pi_0(x) = 1; \quad \pi_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}\{f(\cdot)(x-\cdot)\}}{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f)} = x^n + \dots; \quad (29)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Nyilvánvaló, hogy

$$\int_a^{\beta} f(x) \pi_m(x) \pi_n(x) dx = 0; \quad (m \geq n). \quad (30)$$

Képezem $n \geq 2$ -re a

$$R_{n-1}(x) = \pi_n(x) - x\pi_{n-1}(x)$$

$n-1$ -edfokú polynomot. Legyen egy pillanatra

$$R_{n-1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \gamma_{n-1, r} \pi_r(x).$$

Állítom, hogy ha $n > 2$ és $0 \leq r \leq n-3$, akkor $\gamma_{n-1, r} = 0$.

Valóban ekkor

$$\begin{aligned} \gamma_{n-1, r} \int_a^{\beta} f(x) \pi_r^2(x) dx - \int_a^{\beta} f(x) F_{n-1}(x) \pi_r(x) dx = \\ = \int_a^{\beta} f(x) (\pi_n(x) - x \pi_{n-1}(x)) \pi_r(x) dx = 0, \end{aligned}$$

úgy, hogy $\gamma_{n-1, r} = 0$ és így

$$\pi_n(x) = (x + \gamma_{n-1, n-1}) \pi_{n-1}(x) + \gamma_{n-1, n-2} \pi_{n-2}(x); \quad (n \geq 2).$$

Azaz érvényes a

IX. tétel. — A (29) polynomsorozat három successiv tagja között a következő recursív összefüggés áll fenn:

$$\pi_n(x) = (x + r_n) \pi_{n-1}(x) + s_n \pi_{n-2}(x); \quad (n \geq 2),$$

hol r_n, s_n valós állandók.

9. §. Összefüggés a Stieltjes-féle láncztört-elmélettel.¹

21. Legyen $f(t) \geq 0$ az (a, β) intervallumban értelmezett (G) függvény, $g_0 > 0$. Képezem STIELTJES-szel a

$$F(x) = \int_a^{\beta} \frac{f(t)}{x-t} dt \quad (31)$$

analitikai kifejezést, melynek formális kifejtése

$$F(x) = \frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x^2} + \dots + \frac{g_n}{x^{n+1}} + \dots \quad (31')$$

STIELTJES vetette fel a következő problémát:

Keresendő oly

$$\frac{k_1}{|x+l_1|} + \frac{k_2}{|x+l_2|} + \dots + \frac{k_n}{|x+l_n|} + \dots \quad (32)$$

¹ A STIELTJES-féle láncztörtekre vonatkozóan l. O. PERKON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig, 1913.

alakú láncztört, melynek a következő tulajdonsága van: Ha $\frac{K_n(x)}{L_n(x)}$ jelenti e láncztört n -edik közelítőtörtjét ($L_n(x)$ foka n , $K_n(x)$ foka $n-1$), akkor ennek x^{-1} szerinti kifejtése x^{-2n} -ig bezárólag (31')-sal megegyezik, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Ha van ilyen láncztört, akkor azt a $F(x)$ -hez asszociált láncztörtnek nevezzük.

Érvényes a

X. tétel. — A

$$\begin{aligned} k_1 &= g_0; & l_1 &= -\frac{g_1}{g_0}; \\ k_n &= s_n; & l_n &= r_n; \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

adatokkal definiált (32) láncztört a kívánt tulajdonságú, azaz $F(x)$ -hez asszociált.

Először teljes inductióval bebizonyítom, hogy

$$L_n(x) = \pi_n(x); \quad (33)$$

$$K_n(x) = \int_a^{\beta} f(t) \frac{\pi_n(x) - \pi_n(t)}{x-t} dt; \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (34)$$

(Mint a láncztört-elméletben általában írni szokás: $L_0(x) = 1$, $K_0(x) = 0$.)

Állításunk érvényes, ha $n = 0$. Továbbá

$$\pi_1(x) = \frac{1}{g_0} \int_a^{\beta} f(t) (x-t) dt = x - \frac{g_1}{g_0} = x + l_1 = L_1(x);$$

és

$$\int_a^{\beta} f(t) \frac{\pi_1(x) - \pi_1(t)}{x-t} dt = \int_a^{\beta} f(t) dt = g_0 = k_1 = K_1(x);$$

tehát érvényes akkor is, ha $n = 1$. Legyen általában minden n -nél kisebb indexre érvényes ($n \geq 2$). A láncztört-elmélet elemei szerint

$$\begin{aligned} L_n(x) &= (x + l_n) L_{n-1}(x) + k_n L_{n-2}(x); \\ K_n(x) &= (x + l_n) K_{n-1}(x) + k_n K_{n-2}(x); \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Tehát

$$L_n(x) = (x + r_n) \pi_{n-1}(x) + s_n \pi_{n-2}(x) = \pi_n(x).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} K_n(x) &= (x+r_n) \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_{n-1}(x) - \pi_{n-1}(t)}{x-t} dt + \\ &+ s_n \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_{n-2}(x) - \pi_{n-2}(t)}{x-t} dt = \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_n(x) - \pi_n(t)}{x-t} dt - \\ &- \int_a^\beta f(t) \pi_{n-1}(t) \frac{x-t}{x-t} dt = \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_n(x) - \pi_n(t)}{x-t} dt, \end{aligned}$$

melyekkel (33) és (34) igazolva van.

Ezek után könnyű szerrel következik a X. tétel. Ugyanis

$$\begin{aligned} R_n(x) &= F(x) - \frac{K_n(x)}{L_n(x)} = \int_a^\beta \frac{f(t)}{x-t} dt - \\ &- \frac{1}{\pi_n(x)} \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_n(x) - \pi_n(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi_n(x)} \int_a^\beta f(t) \frac{\pi_n(t)}{x-t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi_n(x)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{x^r} \int_a^\beta f(t) \pi_n(t) t^{r-1} dt, \end{aligned}$$

melyből, tekintettel $\pi_n(t)$ alaptulajdonságára,

$$R_n(x) = F(x) - \frac{K_n(x)}{L_n(x)} = \frac{1}{\pi_n(x)} \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{e_r}{x^r},$$

hol e_r valós állandó. De

$$\frac{1}{\pi_n(x)} = \frac{1}{x^n} + \frac{e'_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{e'_{n+2}}{x^{n+2}} + \dots,$$

hol e'_r szintén valós állandó. E szerint

$$R_n(x) = \frac{e_{n+1}}{x^{2n+1}} + \dots,$$

melyvel tételünk igazolva van.¹

¹ Az itt vázolt gondolatmenet, ha lehet ezt a kifejezést használni, fordítottja annak, a melyet STIELTJES követ. Ő a láncztört asszociált voltából származtatja le a (30) relatiókat, itt ennek a fordítottja történik.

10. §. A láncztörtnevezőkről.

22. E § ezélya a $\pi_n(x)$ polynomok, a «láncztörtnevezők» vizsgálata. Legyen (α, β) ismét véges és $f(t) \geq m > 0$. Mivel

$$\pi_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot)(x-\cdot)\}}{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f)} = \frac{|xg_{p+q} - g_{p+q+1}|_{(p, q=0, 1, \dots, n-1)}}{|g_{p+q}|_{(p, q=0, 1, \dots, n-1)}}; \quad (n \geq 1),$$

tehát $\pi_n(x)$ gyökei megegyeznek a

$$G_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(tf(t); x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} g_{p+q} x_p x_q$$

formának a

$$G_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f; x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} g_{p+q} x_p x_q = 1$$

mellékfeltétel mellett vett sajátértékeivel. Ugy hogy a VII. tétel alkalmazásaképpen érvényes a

XI. tétel. — Legyen $f(t) \geq m > 0$ a véges (α, β) intervallumban értelmezett (C) függvény. A hozzá tartozó

$$\pi_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot)(x-\cdot)\}}{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f)} = (x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)}) \dots (x-x_n^{(n)}); \quad (n \geq 1)$$

polynomok összes gyöke valós, az (α, β) intervallumba esik és ha $F(x)$ egy itt értelmezett folytonos függvény,

$$\frac{F(x_1^{(n)}) + F(x_2^{(n)}) + \dots + F(x_n^{(n)})}{n} \rightarrow \frac{1}{\pi_\alpha} \int_\alpha^\beta F(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}.$$

Ebből következik a

XII. tétel. — A XI. tétel feltételei mellett az összes $\pi_n(x)$ polynomok gyökei mindenütt sűrűn lepik el az (α, β) intervallumot.

E tételt először ama speciális esetben igazoltam, mikor $f(t)=1$, $\alpha=-1$, $\beta=1$, azaz a mikor $\pi_n(x)$ (egy szorzó tényezőtől eltekintve) megegyezik a LEGENDRE-féle polynomokkal.¹

¹ SZEGŐ G.: I. h. 217. o.

A bizonyítás egyszerű módon történik. Legyen ugyanis (α', β') oly belső intervallum, melybe egyetlen $x_j^{(n)}$ sem esik. Legyen $\alpha < \alpha' < \alpha^* < \beta^* < \beta' < \beta$; és értelmezzük $F(x)$ -et így:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \alpha \leq x \leq \alpha' \text{ és } \beta' \leq x \leq \beta; \\ 1 & \alpha^* \leq x \leq \beta^*; \end{cases}$$

egyébként pedig változzék linearisan. A feltevés szerint ekkor minden n -re

$$F(x_1^{(n)}) + F(x_2^{(n)}) + \dots + F(x_n^{(n)}) = 0;$$

és mégis

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}} > \frac{1}{\pi} \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}} > 0,$$

a mi ellentmond a XL. tételnek. Tehát állításunk igaz.

23. A VIII. tétel következménye a

XIII. tétel. — A XL. tétel feltételei mellett minden oly x -re, mely nem esik az (α, β) intervallumba:

$$\sqrt[n]{|\pi_n(x)|} \rightarrow e^{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \log|x-t| \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}} = \Gamma^{(\alpha, \beta)}(|x-|).$$

E tétellel részletesebben foglalkozom. Az itt szereplő integrálra a

$$\cos \theta = \frac{2}{\beta-\alpha} (t-\alpha) - 1$$

helyettesítést alkalmazva

$$\Gamma^{(\alpha, \beta)}(|x-|) = e^{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log|A+B \cos \theta| d\theta} = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|A+B \cos \theta| d\theta},$$

hol rövideg kedvéért

$$A = x - \frac{\alpha+\beta}{2}; \quad B = \frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0.$$

De

$$|A+B \cos \theta| = \left| \frac{B}{2} z^2 + Az + \frac{B}{2} \right|_{z=e^{i\theta}} = \frac{|B|}{2} |(z-z_1)(z-z_2)|_{z=e^{i\theta}},$$

hol $z_1 z_2 = 1$. Alkalmazva az ismert

$$e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z-\xi|_{z=e^{i\theta d\theta}} = \text{Max} (1, |\xi|)^1$$

formulát, nyerjük, hogy

$$\Gamma^{(\alpha, \beta)}(|x-\cdot|) = \frac{|B|}{2} \text{Max} (1, |z_1|) \text{Max} (1, |z_2|);$$

és mivel $|z_1| \cdot |z_2| = 1$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\alpha, \beta)}(|x-\cdot|) &= \frac{|B|}{2} \text{Max} (|z_1|, |z_2|) = \text{Max} \left| \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - B^2}}{2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \text{Max} \left| x - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \right| = p(x). \end{aligned}$$

Ez utóbbi minden x mellett egy határozott valós, nem-negatív érték, mely az x változó függvényeként felfogva mindenütt folytonos.

Ebből következik a XIII. tétel következő kibővítése:

XIII'. tétel. — Legyen a XI. tétel feltételei mellett $a \leq x \leq \beta$; akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\pi_n(x)|} \leq p(x) = \frac{\beta - a}{4}.$$

Valóban, először is világos, hogy emez x értékekre $p(x) = \frac{\beta - a}{4}$.

Ugyanis létezik oly θ_0 , hogy

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - a}{2} \cos \theta_0;$$

és így

$$x - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\beta - a}{2} e^{\pm i\theta_0}.$$

Továbbá a XI. tételre való tekintettel, ha $\mu > 0$ és $a \leq x \leq \beta$,

$$|x - x_j^{(n)}| < |x + i\mu - x_j^{(n)}|,$$

¹ SZEGŐ G.: I. h. 199. o.

úgy hogy

$$|\pi_n(x)| < |\pi_n(x+i\mu)|,$$

melyből

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|\pi_n(x)|} \leq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\pi_n(x+i\mu)|} = \rho(x+i\mu);$$

és mivel μ tetszés-szerinti,

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|\pi_n(x)|} \leq \rho(x) = \frac{\beta-a}{4}. \quad (\text{q. e. d.})$$

Felvetem most a következő kérdést:

Adva lévén a

$$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$$

tetszés-szerinti complex állandók sorozata; mi lesz a complex x -síokban a

$$c_0\pi_0(x) + c_1\pi_1(x) + \dots + c_n\pi_n(x) + \dots \quad (35)$$

*polynomsor convergentia-tartománya?*¹

Mielőtt e kérdésre felelhetnék, meg kell vizsgálnom $\rho(x)$ viselkedését a complex x -síokban.

24. XIV. tétel. — Az egész complex x -síokban, a valós (a, β) intervallum kivételével,

$$\rho(x) > \frac{\beta-a}{4}.$$

Ugyanis a fenti jelölésekkel

$$\rho(x) = \frac{|B|}{2} \text{Max}(|z_1|, |z_2|),$$

hol $|z_1| \cdot |z_2| = 1$. Tehát

$$\rho(x) \geq \frac{|B|}{2} = \frac{\beta-a}{4};$$

és az = jel akkor és csak akkor érvényes, ha $|z_1| = |z_2| = 1$.

¹ E kérdéssel különböző megszorítások mellett már többen foglalkoztak. V. ö.: O. BLUMENTHAL: Über die Entwicklung einer willkürlichen Function etc. Göttingen, 1898.

Azaz az = jel akkor és csak akkor érvényes, ha

$$x - \frac{a+\beta}{2} \pm \sqrt{(x-a)(x-\beta)} = e^{\pm i\theta_0},$$

$$\frac{\beta-a}{2}$$

vagyis

$$x = \frac{a+\beta}{2} + \frac{\beta-a}{2} \cos \theta_0,$$

a mi azt jelenti, hogy x az (a, β) intervallumba esik.

Tekintem most amaz x helyeket, a hol

$$p(x) = y \frac{\beta-a}{4},$$

ha $y > 1$ fix. Két eset lehetséges. Vagy

$$\frac{x - \frac{a+\beta}{2} + \sqrt{(x-a)(x-\beta)}}{\frac{\beta-a}{2}} = ye^{i\theta};$$

és így

$$\frac{x - \frac{a+\beta}{2} - \sqrt{(x-a)(x-\beta)}}{\frac{\beta-a}{2}} = \frac{\frac{\beta-a}{2}}{x - \frac{a+\beta}{2} + \sqrt{(x-a)(x-\beta)}} = \frac{1}{ye^{i\theta}},$$

vagy pedig ugyanez a két egyenlet érvényes, csupán a jobb-
oldalakat felcserélendő. Mindkét esetben

$$x - \frac{a+\beta}{2} = \frac{\beta-a}{4} \left(ye^{i\theta} + \frac{1}{y} e^{-i\theta} \right).$$

Legyen $x = u + iv$, akkor

$$u = \frac{a+\beta}{2} + \frac{\beta-a}{4} \left(y + \frac{1}{y} \right) \cos \theta;$$

$$v = \frac{\beta-a}{4} \left(y - \frac{1}{y} \right) \sin \theta.$$

Ez egy *ellipsis* parameteres egyenlete; az ellipsis középpontja

$$x = \frac{a+\beta}{2}, \text{ tengelyeinek hossza:}$$

$$\frac{\beta - a}{2} \left(g \pm \frac{1}{g} \right);$$

és gyújtópontjai $x = a$, $x = \beta$. Fordítva, ha adva van egy ellipsis, melynek középpontja $x = \frac{a + \beta}{2}$, gyújtópontjai $x = a$ és $x = \beta$, akkor ez a g alkalmas megválasztása mellett a fenti ellipsis-sel egybeesik. Valóban, ha

$$u = \frac{a + \beta}{2} + t_1 \cos \theta;$$

$$v = t_2 \sin \theta;$$

hol

$$t_1 > 0, t_2 > 0; \text{ és } t_1^2 - t_2^2 = \left(\frac{\beta - a}{2} \right)^2,$$

akkor

$$g = \frac{2}{\beta - a} (t_1 + t_2)$$

teljesíti követelésünket. Tehát érvényes a

XV. tétel. — A

$$p(x) = g \frac{\beta - a}{4}; \quad (g > 1) \quad (36)$$

feltételt egy ellipsis területének a pontjai elégítik ki, melynek középpontja $x = \frac{a + \beta}{2}$, gyújtópontjai $x = a$ és $x = \beta$. Emez ellipsisek összesége, mialatt g átfutja az 1-nél nagyobb valós számok halmazát, megegyezik az $x = a$ és $x = \beta$ pontok, mint gyújtópontok meghatározta homofocalis ellipsisek seregével.

Mivel az (a, β) intervallumban $p(x) = \frac{\beta - a}{4}$, tehát a (36) ellipsis belsejét a

$$p(x) < g \frac{\beta - a}{4},$$

külsejét pedig a

$$p(x) > g \frac{\beta - a}{4}$$

egyenlőtlenség jellemzi.

Ebből következik, hogy ha $g_1 > g_2 > 1$, akkor a

$$p(x) = g_1 \frac{\beta - a}{4}$$

ellipsis teljesen belsejében tartalmazza a

$$p(x) = g_2 \frac{\beta - a}{4}$$

ellipsis kerületét.

Végül megjegyzem, hogy az (a, β) intervallum megfelel (36) ama határesetének, mikor $g = 1$. A következőkben ezt is beleszámítom a homofocalis ellipsis-seregbe, illetőleg beszélek a $p(x) = \frac{\beta - a}{4}$ ellipsisről.

25. Ezek után megfelelőhetünk a 23.-ban fölvetett kérdésre. Legyen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c \geq 0.$$

Ha x nem esik az (a, β) intervallumba, akkor a XIII. tétel szerint

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n \pi_n(x)|} = cp(x);$$

ha pedig $a \leq x \leq \beta$, akkor a XIII'. tétel alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n \pi_n(x)|} \leq cp(x) = c \frac{\beta - a}{4}.$$

A (35) sor egy x helyen convergens, kétes viselkedésű, illetőleg divergens, a mint

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n \pi_n(x)|} \leq 1.$$

Legyen tehát

$$a) \quad c \leq \frac{4}{\beta - a}.$$

A

$$p(x) = \frac{1}{c}$$

ellipsis belsejében a sor convergens, rajta kétes viselkedésű és az ellipsisen kívül divergens.

$$b) \quad c > \frac{4}{\beta - a}.$$

Ekkor a XIV. tétel szerint az egész síkban

$$cp(x) > 1,$$

tehát a sor mindenütt divergens. Azaz érvényes a

XVI. tétel. — Legyen $f(t) \geq m > 0$ a véges (α, β) intervallumban értelmezett (C) függvény. Képezem a

$$\pi_0(x) = 1; \quad \pi_n(x) = \frac{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \{f(\cdot)(x-\cdot)\}}{D_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(f)}; \quad (n \geq 1)$$

polynomok segítségével a

$$c_0\pi_0(x) + c_1\pi_1(x) + \dots + c_n\pi_n(x) + \dots$$

polynomsort, hol $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ tetszés-szerinti complex állandók.

Legyen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c.$$

Ha $c \leq \frac{4}{\beta - \alpha}$, akkor e sor az x -sík egy egészen határozott (c -től függő) ellipsisének belsejében convergens és ott regularis analitikai függvényt állít elő. Az ellipsisen kívül a sor divergens.

Ha $c > \frac{4}{\beta - \alpha}$, a sor az egész x -síkban divergens.

Egyéb alkalmazásokra itt nem terjeszkedem ki.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1917 deczember 10.-i meg nem tartott ülésére bejelentve, 1918 márczius 18.-i ülésen előterjesztve.)

A BOTESI CHALKOPYRIT.

(Két táblával.)

MAURITZ BÉLA 1. tagtól.

Székfoglaló értekezés.

Az 1902. évben a Magyar Nemzeti Múzeum ásványtárának tulajdonában levő magyarországi chalkopyritek kristálytani viszonyait tanulmányoztam.¹

Többek között rendelkezéseimre állottak a botesi chalkopyrit-kristályok. Ezek 3—8 mm átmérőjű, rendetlenül és torzultan kifejlődött, erősen rostozott, hol homályos, hol pedig kékesre futtatott fénylő kristályok voltak. Mindössze hat kristályalakot lehetett rajtuk felismerni, úgymint a pozitív és negatív alapbisphenoidot, azaz az $\{111\}$ és $\{1\bar{1}1\}$ alakokat, az elsőrendű prizmát $\{110\}$, végül pedig három másodrendű bipyramist, úgymint az $\{101\}$, $\{201\}$ és $\{605\}$ alakot. Ikerösszenövéseket csakis az alapbisphenoid szerint találtam. Mindezek a kristályok a kristálytani vizsgálat céljaira nem valami elsőrangú anyagot szolgáltatottak.

Az 1911. évben az Erdélyi Érczhegységben kutatva, felkerestem a botesi bányákat is és ez alkalommal olyan stufákat gyűjtöttem, a melyeknek chalkopyrit-kristályai valóban párjukat ritkítják.

A botesi arany-tellurércztelére a kárpáti homokkővet szelik át.² A gyűjtött stufák matrixa csillámos-palás kárpáti

¹ MAURITZ BÉLA: Adatok a magyar chalkopyritek kristálytani ismeretéhez. Természettudományi Füzetek. XXV. 1902. 448.

² PÁLFY MÓRICZ: Az Erdélyrészi Érczhegység bányáinak földtani viszonyai és ércztelerei. Magyar Földtani Intézet Évkönyve: XVIII. 454.

homokkő, a melyre fehér fennőtt quarczkristályokból álló réteg telepedett. Ezeken a quarczkristályokon ülnek a ragyogó fémfényű, helyenként gyengén ibolyára futtatott chalkopyrit-kristályok, melyek hol szabadon fejlődtek ki, hol pedig sűrűn egymás mellé telepedve gömbszerű csoportokat alkotnak. A biztosan megállapított kristályalakok száma tizennégy; vagyis olyan nagy szám, a melylyel alig egy-két chalkopyrit-lelőhely vetekedik. Ez alakok a következők:

basis	$c = \{001\}$
elsőrendű prisma	$m = \{110\}$
elsőrendű pozitív bisphenoidok	$p = \{111\}$
	$x = \{113\}$
elsőrendű negatív bisphenoid	$r = \{1\bar{1}1\}$
másodrendű bipyramisok	$e = \{101\}$
	$b = \{605\}$
	$o = \{504\}$
	$h = \{302\}$
	$g = \{203\}$
	$z = \{201\}$
pozitív skalenoéderek	$y = \{313\}$
	$v = \{311\}$
	$w = \{641\}$

Habitus tekintetében a kristályok rendkívül változatosak:

Sphenoidalis termet, melyen uralkodó alak az $\{111\}$ bisphenoid, a ritkaságok közé tartozik. Az ilyen termetű combinationokon még a $\{1\bar{1}1\}$, $\{101\}$ és $\{201\}$ alakokat lehet felismerni (11. rajz).

Sokkal gyakoribbak a pyramidalis termetű kristályok. Ezeknek habitusát vagy az elsőrendű pozitív és negatív bisphenoidoknak egyensúlyban való kifejlődése, vagy pedig a másodrendű bipyramisok uralkodása idézi elő.

Az $\{1\bar{1}1\}$ pozitív bisphenoid lapjai igen ritkán teljesen ragyogóan simák, hanem többnyire igen csinosan rostozottak.

A rostok párhuzamosan haladnak más alakoknak a lapjaival, mint az $\{101\}$, $\{201\}$ és $\{110\}$ lapjaival, úgy hogy az $\{111\}$ lapjain többnyire öt irányú rostozást lehet megfigyelni (7. rajz). A rostozottság sűrűsége igen különböző; rendszeren azonban meglehetősen ritka.

A negatív bisphenoid $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ lapjai mindig teljesen simák és ragyogóan fényesek. Ez az alak néha csaknem ugyanakkora lapokkal fejlődött ki, mint a megfelelő pozitív alak. Ilyen esetekben az oktansok megkülönböztetése, a mint azt már SADEBECK¹ és SCHIMPER² is tette, csakis azon az alapon történt, hogy pozitívnak vétettek azok a bisphenoid-lapok, a melyek rostozottak, és negatívnak a teljesen simák és ragyogóan fényesek.

Az $x = \{11\bar{3}\}$ bisphenoid lapjai kizárólag a pozitív oktansokban ismerhetők fel. A lapok mindig igen aprók (5. rajz). sőt legtöbbször a másodrendű bipyramisok sarkélein csak rostos fogazottság jelzi e lapokat (7. rajz). Ilyen kristályokon az $\{111\}$ bisphenoid is hiányozhat és szintén csakis az $\{101\}$ másodrendű bipyramis váltakozó sarkélein jelentkező rostok árulják el az $\{111\}$ bisphenoidot (7. rajz).

Némely kristályon a pozitív bisphenoidok zónájában igen érdes, tökéletlen és apró lapok figyelhetők meg, a melyeknek hajlásszögértékei közel járnak az $n = \{112\}$ alakéihoz; utóbbit mégsem számítom a biztosan megállapított alakok közé.

Egyetlen olyan kristályt találtam, a melyen csakis az $\{111\}$ és $\{101\}$ alakok fejlődtek ki; a két alak egyensúlyban lévén, középkrisztályszerű combinatio jött létre (3. rajz).

A megvizsgált kristályok zömének pyramidalis termetét a másodrendű bipyramisok uralkodása szabja meg. A hat biztosan megállapított bipyramis közül három szokott a legnagyobb lapokkal képviselve lenni, úgymint $\{201\}$, $\{101\}$ és $\{605\}$. Vannak egyének, a melyeken csakis az $\{101\}$ alak lapjai figyelhetők meg szabad szemmel, míg a $\{201\}$ és $\{605\}$ alakok csakis a vízszintesen haladó sűrű rostozottságon ismerhetők fel. Ilyen egyéne-

¹ SADEBECK: Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesell. XX. 595; 1868.

² SCHIMPER: Groth, Mineraliensammlung Universität Strassburg 53., 1878.

ken az $\{101\}$ lapjainak pozitív oktansokba eső része az $\{111\}$ alak lapjaival párhuzamosan rostozott, míg a negatív oktansokba eső fél vízszintesen rostozott; a két rostozás tehát egymásra merőleges és szép szymmetrikus eloszlású (7. rajz). Jóval hegyesebb pyramidalis termetűek azok a kristályok, a melyeken a $\{201\}$ alak uralkodik; ennek az alaknak a lapjai hol simák és ragyogóan fényesek, hol pedig szintén finoman vízszintesen rostozottak (1. rajz).

Igen jellemző és a kristályok világában kissé szokatlan egy olyan magas indexű alaknak az uralkodó megjelenése, mint a milyen a $\{605\}$ alak. Már a botesi chalkopyritek első vizsgálata alkalmával megállapítottam ezt az alakot, sőt annak idején találtam kristályokat, még pedig ikreket, a melyeken kizárólag ez az egyetlenegy bipyramis volt megállapítható. Habár ilyeneket most nem találhattam, mégis azt állíthatom, hogy a botesi chalkopyritnek ez a legjellemzőbb kristályalakja, a mely csaknem minden kristályon, ha csak finom rostok alakjában is, de mégis felismerhető, sok esetben pedig mint uralkodó alak jelenik meg. Úgy látszik, hogy a chalkopyrit azok közé a csekélyszámú kristályosodott ásványok közé tartozik, a melyek között a magas indexű alakok nem mennek ritkaságszámba, a mit különben régebben már PENFIELD¹ is megállapított a pennsylvaniai French Creek-bányából származó kristályokon. A $\{605\}$ bipyramis lapjai hol teljesen simák, hol pedig vízszintesen igen erősen és igen sűrűn rostozottak (1. és 5. rajz). A $\{302\}$ bipyramis sohasem lesz uralkodó alakká, habár lapjai néha tekintélyesebb mértékben hozzájárulnak a combinatiók habitusának kialakulásához (2. rajz).

A $\{504\}$ bipyramis lapjait igen elvétve lehet a másodrendű bipyramisok zónájának sűrű rostjai között mint finom rostot felismerni (5. rajz).

A $\{203\}$ alak a basis és az $\{101\}$ lapjai között mint igen keskeny sáv jelenik meg; lapjai mindig erősen érdesek, mintegy ki vannak marva.

A basis $\{001\}$ a legtöbb kristályon megállapítható, de több-

¹ American Journal of Science, 1890. 207.

nyire csak mint igen apró, alig fénylő lapocska; néhány kristályon azonban nagyobb, de gyengén fénylő négyzetet alkot (5. és 6. rajzok.)

Az elsőrendű prisma $\{110\}$ igen gyakori alakja a botesi chalkopyritnek; nagyság és kifejlődés tekintetében igen változatos; lapjai rendszerint vízszintesen igen sűrűn és igen finoman rostozottak (7. rajz).

A három megállapított skalenoöder közül a leggyakoribb az $\gamma = \{313\}$ alak. Lapjai rendszerint csak mint az $\{111\}$ és $\{101\}$ alakok közé illeszkedő fényes sávok jelennek meg (2. és 6. rajz); egyetlen olyan kristályt találtam, a melyen ez az alak uralkodóbban lép előtérbe és a kombinációnak kissé skalenoöderes termetet ad. Máskülönb en ezt a skalenoödert más lelőhelyekről származó chalkopyritkristályokon is megállapították; így többek között annak idején a kapnikbányai chalkopyriten is felismertem.

A két másik skalenoödert eddig a chalkopyriten nem figyelték meg, e kettő az ásványra nézve új alak.

A $w = \{641\}$ skalenoödernek egyetlen lapját állapítottam meg. Az (101) szerint alkotott ikerkristály egyik egyénén az (110) és (201) lapok között szép széles fényes sávot alkot (14. rajz). A legszorgosabb kutatás mellett sem sikerült ennek az alaknak még egy lapját akár ezen a kristályon, akár pedig egy másikon felismerni. Az alak bizonyosságát illetőleg ennek az egyetlen lapnak a kifejlődése minden kétséget kizár; az alakot minden fentartás nélkül biztosan megállapítottának kell tekinteni.

A harmadik megfigyelt skalenoöder, tudniillik $v = \{311\}$, több kristályon több lappal volt megállapítható; a lapok mindig igen aprók, igénytelenek és fénytelenek; felismerésüket nagyon megkönnyíti az a körülmény, hogy a (201): (110) és (111): ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$) zónák kereszteződésében fekszenek (6. rajz).

Negatív skalenoödereket nem találtam.

Bizonytalanul megállapítottának veszem az $s = \{513\}$ skalenoödert, a melyet egyetlen fénylő, de kissé rostos lappal az (111) és (201) lapok között figyeltem meg; azonban a mért és

számított hajlásszögek a megengedhetőnél jobban eltérnek egymástól:

	mért	számított
(413).(111) =	$29^{\circ} 37' \frac{1}{2}$	$28^{\circ} 25'$
(513).(201) =	$9^{\circ} 26'$	$10^{\circ} 40' \frac{1}{2}$

A 6. rajz a botesi chalkopyriten megfigyelt tizennégy kristályalak combinatióját tünteti fel; mind a tizennégy alak egyidejűleg egy kristályon nem szokott kifejlődni. Ez a rajz csak eszményi kép, a mely azt akarja bemutatni, hogy körülbelül milyen mértékben vannak az egyes alakok leggyakrabban kialakulva. Az egyszerűbb combinatiók, a melyeket az 1., 2., 5. és 11. rajz érzéket, szintén eszményi képek, a melyeket általában szokásos volt úgy a multban, mint a jelenben a könnyebb megértés végett a leíráshoz mellékelni. A valóságot azonban sokkal jobban fejezik ki azok a képek, a melyek a kristályokat az ő igazi torzult alakjukban tüntetik fel.

A botesi chalkopyritek alig találhatók eszményi symmetriájú kristályokban, hanem csaknem kivétel nélkül igen jellemzően el vannak torzulva, úgy, a mint őket a 6—10. és 12—14. rajz mutatja. A leggyakoribb torzulás abban mutatkozik, hogy a kristályokon az egyik positiv bisphenoidlap túlságos nagyra fejlődik ki, a kristály e lap szerint mintegy el van terülve és azonkívül egy irányban meg is van nyúlva, úgy a mint azt a 6., 7. és 9. rajz érzékíti, a mely combinatiók az $\{1\bar{1}\bar{1}\}$ lap szerint elterültek és a $(20\bar{1}).(021)$ éllel párhuzamosan megnyúltak. Az $(1\bar{1}\bar{1})$ lapon rendszeren csinos háromszög alakú rostozás mutatkozik, a mely $\{101\}$ és $(1\bar{1}0)$ éleivel párhuzamosan halad (9. rajz).

Ritkábban vannak a kristályok a $\{201\}$ bipyramis lapjával párhuzamosan elterülve, a mint azt a 8. rajz szemlélteti; az ilyen combinatiók egyidejűleg még az $(1\bar{1}0).(20\bar{1})$ éllel párhuzamosan megnyúltak. Úgy az utóbbi módon, mint különösen az előbbi módon torzult kristályoknak némileg dárdszerű termetük van.

Az egyszerű kristályok a legnagyobb ritkaságok közé tartoznak; csaknem az összes megvizsgált kristályok ikreknek bizonyultak. A chalkopyrit többféle törvény szerint alkot ikre-

ket; de ezek közül csakis azok általánosan elterjedtek, a melyek a következő törvény szerint vannak alkotva: ikerlap az alap(-)bisphenoid egyik lapja, a mely alkalommal nem egyenértékű, hanem pozitív és negatív bisphenoid-lapok nőnek egymással össze, úgy hogy az ikersík az ikerkristálynak nem symmetriasíkja, a mint azt különben már SADEBECK is megállapította.

Az ilyenfajta ikerekről az eszményi rajzok teljesen hamis képet nyújtanak, a mennyiben ezek az ikrek mindig nagyon is el vannak torzulva (4. és 7. rajz).

Az a kialakulás, melyet a 10. rajz szemléltet, ritkán található meg; itt az iker az ikerlappal párhuzamosan ellaposodott és teljesen rhombusos hemimorph symmetriája van.

A megvizsgált kristályok túlnyomó részén azt a kifejlődést látjuk, hogy az egyik egyén csak igen vékony, az ikerlappal párhuzamos réteget alkot (4., 7. és 12. rajz), a bisphenoid lapja uralkodik rajta; a többi alak csak igen kis lapokkal van képviselve; a másik egyén meglehetősen symmetriásan van kifejlődve. A vékonyan kifejlődött egyén a symmetriásan kialakultnak csak mintegy alapzatát alkotja. Az ikerlappal párhuzamos irányú és nagyra termett bisphenoid(lapon) díszes, az $\{101\}$ és $\{201\}$ alakok lapjaival párhuzamos rostozást találunk. A 12. rajz egy ilyen ikerkristályt a szokásostól eltérő felállításban érzékit, a mennyiben az ikersík a képsíkra merőlegesen áll.

Legérdekesebb az az ikerkristály, a melyet a 14. rajz szemléltet. Ezen az ikertörvény a következő: ikersík az $\{101\}$ másodrendű bipiramisnak egyik lapja. Ez az az ikertörvény, a mely már 1822 óta, mióta HAIDINGER¹ felfedezte, de röviddel utána, 1825-ben kétértelműen fejezte ki,² olyan sok vitára adott alkalmat. Utána NAUMANN,³ SADEBECK,⁴ SCHIMPER,⁵ FLET-

¹ HAIDINGER: *Memoirs of the Wernerian Society* IV. 1. 1822.

² HAIDINGER: *Edinburgh Journal of Science* III. 68. 1825.

³ NAUMANN: *Lehrbuch der Krystallographie* II. 1830. 281.

⁴ SADEBECK: *Zeitschr. d. d. geol. Gesell.* XX. 595: XXI. 642; XXX. 601.

⁵ SCHIMPER: *Groth, Mineraliensammlung der Universität Strassburg.* 1878. 53.

CHER¹ és BAUMHAUER² igen behatóan foglalkozott a kérdéssel, melyet FLETSCHERnek sikerült tisztáznia, míg BAUMHAUER megint csak némi zavart idézett elő a kérdésben.

Említett munkámban e törvény pontos megállapításával én is igen behatóan foglalkoztam, miután a kapnikbányai chalkopyritkristályok között egyetlen egy ikerkristályra akadtam, a mely e szerint az ikertörvény szerint alkotódott. Az idevonatkozó adatokat nem ismétlem, hanem utalok említett munkámra.³ Ez a kapnikbányai kristály pontosan hódol az ikertörvény FLETCHER-féle fogalmazásának: ikerlap az $\{101\}$ másodrendű bipyramis egyik lapja. A botesi egyetlen ikerkristály, a mely e szerint az ikertörvény szerint keletkezett, szintén a legpontosabban tesz eleget ennek az ikertörvénynek, úgy hogy az eddig talált két magyarországi ilyenfajta iker csak megerősíti és igazolja az ikertörvénynek FLETCHER-féle fogalmazását.

Reményilem, hogy idővel talán sikerülni fog ezt az ikertörvényt még más magyarországi chalkopyrit-kristályokon is kimutatni.

*

A legfontosabb mérési adatok:
tengelyarány $a : c = 1 : 0.98525$.

	számított	mért
(001).(203) =	33° 18'	33° 20'
(001).(101) =	44° 34½'	44° 34½'
(001).(605) =	49° 46½'	49° 47'
(001).(504) =	50° 55½'	50° 55'
(001).(302) =	55° 55'	55° 55'
(001).(201) =	63° 05½'	63° 06'
(001).(111) =	54° 20'	54° 20'
(001).(113) =	24° 54½'	24° 57'
(111).(111) =	70° 07½'	70° 09'
(001).(313) =	46° 05'	46° 06'

¹ FLETCHER: Phil. Mag. XIV. 266. 1882. és Groth's Zeitschrift f. Kryst. u. Min. VII. 321, 1882.

² BAUMHAUER: Groth's Zeitschrift f. Kryst. u. Min. XXX. 274.

³ MAURITZ: Természetráji Füzetek. XXV. 465; 1902.

	számított	mért
(313).(133) =	37° 35'	37° 33'
(313).(111) =	21° 54'	21° 55'
(313).(101) =	13° 10'	13° 09'
(311).(111) =	29° 31 ¹ / ₄ '	29° 30'
(311).(110) =	31° 37'	31° 38'
(311).(001) =	72° 12 ¹ / ₄ '	72° 14'
(311).(201) =	19° 17 ¹ / ₂ '	19° 19'
(311).(131) =	50° 24'	50° 27'
(641).(110) =	13° 50'	13° 50'
(641).(204) =	37° 04 ¹ / ₂ '	37° 06'
(201).(111) =	39° 05 ¹ / ₂ '	39° 05'
(201).(110) =	50° 54 ¹ / ₂ '	50° 54'

Ikerszög azokon az ikreken, melyeknek ikerlapja az alap-bisphenoid {111} egyik lapja :

$$(111).(\underline{111}) = 37^\circ 20' \quad 37^\circ 21'.$$

Ha az {101} másodrendű bipyramis egyik lapja az ikerlap

$$\begin{aligned} (101).(\underline{101}) &= 1^\circ 42' & 1^\circ 43' \\ (111).(\underline{111}) &= 1^\circ 23\frac{1}{2}' & 1^\circ 25'. \end{aligned}$$

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 márczius 18.-án tartott üléséből.)

RITKA SVÉDORSZÁGI ÁSVÁNY MAGYARORSZÁGBAN.

KRENNER JOZSEF r. tagtól.

IGELSTRÖM LARS híres svéd mineralogus Filipstadban, Werm-landban, 1864-ben egy érdekes ásványt fedezett fel, melynek igen sajátosságos, mondhatni csodálatos tulajdonságai vannak.¹

Apró, kis táblácskák ezek, melyek eredetileg szintelenek és átlátszók, de a levegőre hozva bronz-színt vesznek fel, később pedig barnák és végre feketék lesznek. A fekete szín, mely be-rekeszti ezt a csodálatos színváltozást, maradandó és állandó, és vele tökéletes átlátszatlan-ság is jár.

IGELSTRÖM chemiai tekintetben is megvizsgálta ezeket a táblács-kákat és azt találta, hogy azok manganoxidulból és vízből álla-nak és pedig a legegyszerűbb proportiók szerint:

	$Mn(OH)^2$	theoretikus képletnek
a mi	MnO	79.7%
	H_2O	20.3 « felelne meg.

Ő, ezen a ritka mangan-ásványon és pedig azon, mely a filip-stadti, pajsbergi bányából való volt, a következőket mutatta ki:

MnO	76.400
MgO	3.140
CaO	1.270
FeO	0.006
H^2O	15.350
CO^2	(3.834) ²
	<hr/> 100.000

¹ POGGENDORFF. Ann. d. Phys. u. Chem. 122. köt. 181 l. 1864.

² A veszteségből számított ki.

Ez az ásvány a lombikban hevítve sok vizet adott és e közben is élénk színváltozása mutatkozott, a mennyiben az eredetileg fehér színű táblák, gyönyörű rézrozsdazölddé, később szürkészölddé és végre barnásfeketévé váltak.

A felfedező az ásványnak a tűzben mutatott színváltozása miatt a *pyrochroit* nevet adta.

A kristály alakját, mint alárendelt hatszöges prizmat kombinálva, a domináló véglappal határozta meg.

A fehér kristályokon a véglap élénk gyöngyházfényt mutat, mely egyszersmind kitünő hasadási lap is, és a színváltozás után az marad, a fekete kristályokon is.

A felfedező szerint az ásvány fehér gyöngyfényű 2—4 mm. vastag ereket képez mágnesvasban, mely utóbbi hausmannit tömegekben van beágyazva.

Svédországban még más helyen is akadtak ez ásványra, így Orebron Sjögrufvaban és Langbanhyttanon, az ottani mangánbányákban.¹

Ezt a ritka svéd ásványt megtaláltam hazánkban is, és pedig Vaskön, a régi Moraviczán, Krassó-Szőrény megyében.

Az ottani mágnesvasbányákban találni ritkán manganezereket is, a melyek közt a *pyrochroit* is termett.

A magyar ásvány 1—2 mm. széles vékony hatszöges táblákat alkot, melyek a domináló véglapból és a 0·5—1 mm. magas hexagonalis oszlopból állanak. Ezek már fekete színűek.

A kristályok csakis melegített sósavban oldhatók, az oldat azonban nem szintelen, hanem sárgás, a mi kevés vastartalomra utal.

A kristályok üvegesőben vizet veszítettek, mely a cső hidegebb részén cseppek alakjában gyült össze. Borax-gyöngyben és szodában a jellegző reakciót mutatta. A basis szerint kitünően hasad.

Alapásványa spongya-szerű limonitos mészpát, melyen finom

¹ Czelomon tul mennék, ha a svéd ásványon végzett egyéb kutatások eredményét nevezetesen SJÖGREN A. és HJ. FLINK G., BERTRAS E., de SCHULTEN A., STARE E. és MAUZELIUS R.-t itt felsorolnám.

szemesü fekete réteg van és erre telepednek a pyrochroit kristályok, melyek össze-vissza szabálytalanul vannak összenőve.

A pyrochroitokra fehér calcit kristályok nőttek, melyeken a $(0\bar{2}\bar{2}1)$ — $2R$ romboeder és ezek csucsán a $(01\bar{1}2)$ — $\frac{1}{2}R$ romboeder van kifejlődve. A calcit, mint utolsó képződmény berekeszti az ásványkiválásnak a sorát.

Ezzel a magyarországi ásványok egy fajjal szaporodtak.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 október 21.-én tartott üléséből.)

A PÓKOK IZOMRENDSZERE.

II.

Az izmok összeköttetése más szövetekkel.¹

(Kivonat.)

LENDL ADOLF-tól.

A pókok tipikus izomrostjai különböző más szövetekkel állnak összeköttetésben, még pedig felső végükön (tapadási helyükön), a chitinváz mozdíthatatlan pontján, hypodermis-sejtekkel; alsó végükön, a chitinbőr mozgatható pontján, hypodermis-sejtek átalakulásából keletkezett inakkal, vagy fibrillás insejtekkel érintkeznek; egész oldalsó felületükön a lacunás kötőszövethez tartozó perimysium és ugyane szövethez tartozó vértak vonulnak végig, mely utóbbiak vért és különböző vérsejteket vezetnek az izomrostokhoz; végül az idegrendszer kerületi száalai járulnak az izmokhoz, hogy sajtószerű idegvégződéseket létesítsenek rajtuk.

Az izmok tapadási helyén a hypodermis-sejteken némi alaki elváltozást veszünk észre, nemesak mert a hypodermis — mint általában mindenütt — külső felületén chitinszalakat választ ki magából, hanem azért is, mert sejtjeinek plasmája fibrillák alakjában kihúzódik az izomfibrillák vége felé, hogy érintkezésbe jusson velük. E plasmafibrillák helyenként nagyon határozottan fejlődnek ki s ilyenkor tonofibrilláknak nevezzük őket; végükkel összeköttetésbe lépnek az izomfibrillák végével

¹ V. ö.: LENDL ADOLF. A pókok harántesíkkolt izomrostjainak szövettani szerkezete. Math. és Termitt. Értesítő XXXIV. kötete, 258—265. l., 1916.

s ennek következtében azt a látszatot keltik, mintha emezeknek a folytatásai volnának, vagyis mintha az izomfibrillák végei a hypodermis-sejteken át a legbelső chitinrétegig jutnának. Szemünk különösen a festett metszeteken téved; ellenben ha színezetlen metszeteket sarkított fényben vagy ultravilágításban vizsgálunk, akkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az izomszövet ez elemei, az *izomfibrillák végrészei valóban nem érik el a chitinréteg belső színét*, mert csak a hypodermis plasma- vagy tonofibrilláinak zónájába nyúlnak. A keresztbe fordított nikolok között ugyanis úgy a chitinszalak, mint az izomfibrillák végrészei megvilágosodnak, míg a közöttük fekvő hypodermis plasma- vagy tonofibrilláival együtt sötétben marad a képen és jól látható módon elválasztja egymástól a chitint és az izomszövetet. Ultravilágításban pedig elsötétedik a chitin, tejszerűen megfehéredik a hypodermis és az izomfibrillák végei csillognak; ennek alapján eldönthetjük tehát, hogy az utóbbiak éppen csak érintik a hypodermist, illetőleg ennek plasma- és tonofibrilláit, de sehol sem jutnak el a chitin sötét széléig.

A szerzők, a kik eddig főként csak a rovarok izmainak a chitinvázzal való összeköttetését tanulmányozták, ebben a tekintetben nem tudtak egyöntetű véleményre jutni. A sarkított fénynek és még inkább az ultravilágításnak használata által azonban kétségtelenül meggyőződhetünk előbbi állításom helyességéről.

A hypodermis belső felületét takaró *alaphártya az izmok tapadási pontjai körül felhajlik, hogy közvetlenül az izomrosthüvelyben folytatódjék*.¹ Ilyen helyütt finoman rostos, lyukas és hézagosan hálózatos az alaphártya; ez teszi lehetővé, hogy ott — az izomrostok töve mellett — vérfolyadék és ezzel együtt vérsejtmagvak szivárognak az alaphártya alá; a vérfolyadék a hypodermisen oszlik el, *a vérsejtmagvak pedig az izomrostok belsejébe kerülnek*, a hol azután mint úgynevezett izommagvak az izomfibrilla-nyaláb hasadékaiban deformálódnak, szétesnek és felhasználatnak. Erről a megállapításról az irodalom eddig nem emlékezik meg.

¹ Ezt állította SNETHLAGE (1904), de a többi szerző — a rovarok izmairól szólva — kétségbe vonta ennek helyességét.

A lacunás kötőszövetben kialakuló, külön e célra szolgáló erezet vezet a vért és a sok vérsejtmagot éppen az izmok tapadási helyéhez.

Az izmok alsó végén — a támadási ponton — másféleképpen érintkeznek az izomfibrillák a hypodermissel, még pedig háromféle módon lépnek egymással összeköttetésbe; először hypodermis-sejtekből fejlődő, valóságos inak közbejöttével; másodsor a szintén ilyen sejtek elváltozásából keletkező fibrillás inas sejtek közvetítésével és harmadszor magának az izomrostnak, illetőleg fibrilláinak sajátos átalakulásából eredő álinak segítségével járulnak egymáshoz. Az *izomfibrilla-nyaláb alsó vége tehát mind a három esetben — miként az izmok tapadási helyén — csak a hypodermissel, nem pedig a chitinnel lép összeköttetésbe.*

A *valóságos inak* főként az entapophysiseken találhatók; ez utóbbiak befelé türemlő, csőszerű chitinnyújtványok, melyeknek a vége felületnagyoobítás céljából bunkós, vagy sugarakban szétfosló. Különösen a merev és meghajlitott entapophysiseknek más feladatuk is lehet, így például a támadási pont áthelyezése, illetőleg a támadási irány megváltoztatása, mert ennek értéke van az erő kifejtésben.

A hypodermis az entapophysis egész felületét takarja és sejtei a chitines bunkón, vagy a chitinsugarak végén elég hosszú, rostosnak látszó inszálakká nyúlnak ki. Többnyire néhány sejt együttvéve alkot egy-egy ilyen inszálakat, melyben ugyanennyi sejtmagot lehet megkülönböztetni. Az inszálak nyele szorosan odatapad a chitin felületéhez, mert eredetileg — mint hypodermis is — odatartozott; ellenben az inszálak szabad vége többedmagával kehelyalakot ölt s ezekben a rojtospéremű inkelyhekbe illeszkedik bele az izomrostok fibrilla-nyalábainak pamatos vége.

Sarkított fényben az izomfibrillák vége és az entapophysis chitines részei megvilágosodnak, azonban az inszálak és az inkelyhek zónája szélesen sötétlik közöttük. Az ilyen képekből kétségtelenül megállapíthatjuk, hogy az izomfibrillák nem érik el a chitint.

A hol entapophysisek híján, esetleg kisebbszertű chitin-

vastagodásokon támadják az izmok a bőrváz mozgatható pontját, ott külön inak nem alakulnak ki, hanem a többnyire kissé megnagyobbodott hypodermis-sejtek egész plasmateste rontosodik meg, hogy az izomrostok alsó végével lépjen összeköttetésbe; ezeket *fibrillás ínsejteknek* nevezem.

A hol pedig az izom feladata nem annyira az erőkifejtésben rejlik, mint inkább csak egyes chitines pontoknak a rögzítését célozza, ott nem a hypodermis-sejtekből, hanem *magának az izomfibrilla-nyaláb alsó végének elváltozásából szoktak álnak kifejlőlni*. Ezek a helyi kivánalmak szerint kétfélék, még pedig vagy rövidek és szélesek — így például ha valamelyik különben mozgatható izt erővel kell bizonyos helyzetben megtartani, hogy egy másik rész fordulhasson rajta, vagy pedig nagyon hosszúak és vékonyak, ha úgyszólván erőkifejtés nélkül kell valamely távolfekvő pontot rögzíteni, illetőleg ha tulajdonképpen csak az egyébként gyöngye izom támasztási irányának egyenes meghosszabbítása válik szükségessé.

Az izomfibrillák alsó végük felé mind a két esetben szabálytalanul pálczikákra tagolódnak, vagy pedig egyáltalán nem is tagolódnak, hanem az inakhoz hasonló szálakká változnak. E közben az izomfibrilla-nyaláb feltűnően vékonyodik, mert a nyalábnak csak a legbelső fibrillái nyúlnak ki végig, a kerületen fekvők ellenben elmaradoznak a nyaláb felületén; végül csak néhány ilyen szálszerűen megváltozott izomfibrilla halad az illető pont hypodermiséig, a hol ennek sejtjeihez simul.

E szerint az *izomrostok felső és alsó vége alakfejlődésében lényegesen különbözik egymástól*; azonban megegyezik abban, hogy az izomszövet sem itt, sem ott nem érintkezik közvetlenül a chitinnel, hanem mindenütt csak a hypodermissel. Erről már sokat vitatkoztak a szerzők, azonban a kérdést nem sikerült eldönteniök és pedig főképpen azért nem, mert nem különböztették meg az izomrostok felső és alsó végét egymástól s így ezeknek a chitinnel való különböző összeköttetése megzavarta véleményüket.¹

¹ WEISMANN (1864) és VIALLANES (1882) szerint az izomfibrillák nem érik el a chitint, csak a hypodermis (epidermis) sejtekhez nőnek. PANTEL

A tipikus izomrostok csaknem mindegyikének külön-külön perimysium-tömlője van; ¹ ez azonban nem tartozik magához az izomrost szövetéhez, hanem a lacunás kötőszövethez, a mely laza hálózataival kitölti a testüreget, belenő mindenütt a hézagokba s a szervek közé, sőt határhártyáival be is burkolja az utóbbiakat. A perimysiumtömlő is ilyen, az izomrosttól tulajdonképpen független határhártya. Felső és alsó peremével — az izomrostok töve körül — a hypodermis alaphártyáján fekvő határhártyákban folytatódik, de olyformán, hogy ott likacsos, miért is a vérfolyadék belefolyhat és ki is ömölhet belőle. A tömlő olyan bő, hogy az izomrostot, ha összehúzódik és megvastagodik, nem akadályozza; egyszerűen helyben marad és benne szabadon mozog az izomrost; ennek következtében az utóbbi — ha működik — folytonosan vérfolyadékot szív a tömlőbe, de azután ismét ki is szorítja belőle. Az izomrost tehát perimysiumtömlőjén belül folytonosan változó, friss vérben ázik. A szerzők a tracheákkal lélekző Arthropodák izmaiban nem ismertek fel ilyen berendezést, a mi természetes is, mert a trachearendszer végső finom elágazódásai egész hálózattal fogják körül az izomrostokat, hogy levegőt vigyenek oda.

A tömlők között sok helyütt csekélyke hálózatos kötőszövetet találunk, melyet *izomrostközi kötőszövetnek* nevezhetünk. Ez a külső lacunás kötőszövettel áll összeköttetésben, melyből vért vesz át, hogy a nagyobb izmok belsejében a perimysiumtömlők közé vezesse. Ily módon csakis apróbb vérsejteket tartalmazó friss (oxydált) vér kerül az izmokba, mely vérnek körülvezetésére vértak alakulnak ki a rostközi kötőszövetben, ámbár ezek nem olyan fejlettek, mint a külső kötőszövetben levők.

Ez az apróbb vérsejteket tartalmazó vér azonban sohasem

(1898), HECHT (1899), HOLMGREN (1902) és SNETHLAGE (1905) ennek ellenkezőjét állította. LEYDIG (1885), HENNEGUY (1906), PÉREZ (1910), TÖRNE (1911) és P. SCHULZE (1911) látta a hypodermis-sejtek plasma- és tonofibrilláit is; általában rovarokon végezték vizsgálataikat, csak LEYDIG tárgyalja röviden a pókok izomrostjainak összefüggését a chitinvázzal. SCHRÖDER (1913) szerint a tonofibrillák behatolnak a belső chitinrétegekbe is.

¹ A Tracheaták izmaiban nem találjuk ezeket a tömlőket.

jut a perimysiumtömlők belsejébe, mindig csak közöttük az egész izomban áramlik ide-oda. A tömlők belsejébe — tehát közvetlenül az izomrostok felületére — különös módon csakis vérsejtek nélkül való friss vér juthat. Erről legkönnyebben a lábak vérkeringésének tanulmányozása által győződhetünk meg. A potroh hátedényéből erős lüktetéssel a fejtor felé kihajtott friss vér ugyanis szabadon úszó, apróbb vérsejteket tartalmaz, még pedig elég nagy számmal s ez a vér¹ a fejtor főerein át mindegyik láb főerébe kerül, hogy egész mennyisége mindjárt a láb tövén kétfelé váljék. A vér itt még zárt edényekben kering; egyik része az izról-izre vékonyodó főérben változatlanul folyik tovább, másik része ellenben a főér oldalán fekvő *vérszűrőbe* jut.²

A vérszűrő szintén zárt véredény, melynek belseje azonban hálózatos kötőszövettel sűrűn ki van töltve. E hálózat szálai között, a hurkokban és szűk hálószemekben százával, ezrével fogódnak meg az apróbb vérsejtek s amint a vér ismétlődő áradata folytonosan hozza őket, úgy a mind szűkebb szemű hálózatban tovább is tolódnak, míg végre lesúrlódik róluk a sejtplasma, melyből a sejtmag csupaszon kiszabadul. A vérszűrőnek egyik főágán azután kifolyik a sejtplasmával sűrített, vérsejt nélkül maradt, átszűrt vérfolyadék; másik főágán, a mely oldalt ered, kevés vérfolyadékkal együtt ezrével tódulnak ki a csupasz vérsejtmagvak.

Az első főág elég bő és zárt véredény, mely az illető iz (a czomb- vagy térdiz, esetleg a száríz) distalis végéig halad, hogy ott mellékágakra oszladozzék; ez utóbbiak a főbb izmok tapadási helyén a perimysiumtömlők belsejébe vezetik a vérsejt nélkül való friss vért. A másik főág szintén a kerület felé halad, a hol az alaphártyán több helyütt mellékágakra oszlik és a hozzátartozó vérelosztó erezzel a likacsos *alaphártya alá*

¹ A kevert és chylustartalmú vér a potrohon belül marad és nem jut a fejtorba.

² A nagy pókok lábaiban tulajdonképpen két vagy három vérszűrő van; az első a trochanter és femur könyökében fekszik, a második a femur és genu között, a harmadik a száríz végén, de ez utóbbinak a jelenléte bizonytalan.

bocsátja az apróbb vérsejtmagvak sokaságát, még pedig éppen az izomtapadási helyek közelében, honnan — mint úgynevezett izommagvak — az izomrostok belsejébe jutnak. Ezeket a vérsejtmagvakat az izomtapadási sejtek között gyakran olyan helyzetben találjuk, hogy szinte látjuk az izomrostokba való bevándorlásuk módját.¹ Ugyanis kívülről a folytonosan megújuló vérnyomás által hajtva odatolódnak az izomrost felső végéhez, a honnan maga az ismételten megnyúló és megrövidülő izomrost szívja be őket belsejébe. Azután, ha már bekerültek a fibrilla-nyaláb belsejébe, az izomrostnak minden újabb mozgása nyomja, vagy húzza őket, miért is csakhamar deformálódnak. Többnyire az ismert dugóhúzó formát veszik fel; közben a maghártyájukból kifolyik a tartalmuk, hogy a fibrilla-nyaláb táplálását szolgálja.

Mindezt úgy a pikrokarminnal, mint az APÁTHY-féle hæmatein I. A.-val festett metszetekben, különösen az ultravilágítás felhasználásával tanulmányozhatjuk s vizsgálataink során csakhamar meggyőződünk, hogy a szerzőknek ezekről a sejtmagvakról eddig hiányos és téves nézetük volt. Eddig ugyanis ezeket a bevándorolt sejtmagvakat az izomszövethez tartozó magvaknak tekintették és mert helyenként és időnként fölülte nagy számmal, hosszú sorokban találták őket az izomfibrillák között, azt hitték, hogy ott bizonyos körülmények folytán igen gyors amitotikus osztódással szaporodnak el; azonban sohasem találtak egyet sem éppen oszlás közben, ezért újabban kétségbe is vonták e nézet helyességét és a kérdés továbbra is eldöntetlenül maradt.

A láb főerével és ennek főbb ágaival együtt halad a kettős főideg, illetőleg ennek is minden főelágazása; ellenben a vérszűrők ágait nem követik az idegek sem a perimysiumtömlők, sem az alaphártya felé.

A főidegnek és főérnek közös külső, elég durva kötőszöveti burka van s ezen belül külön burka van a főidegnek. Az utóbbinak a szöveti szerkezete a következő:

¹ Ezeket a vérsejtmagvakat említi SNETHLAGE (1905) és Epithel-Muskelkerne névvel jelöli őket. SCHRÖDER (1913) tévedésnek tartja az előbbinek megfigyelését.

A finom neurofibrillák egész hosszúságukban perifibrilláris anyaggal¹ körülfogalva nyalábokban fekszenek egymás mellett; számuk nem nagy; néhányan együttvéve tartoznak egy-egy ilyen *idegfibrilla-nyaláb* kötegébe, melyet vékony kötőszöveti hártya laza hüvelyként burkol körül. E hüvelyhártýában hosszú kötőszöveti fibrillákat látunk, melyek a hártýán szétterülő és plasmanyújtványokkal elágazó kötőszöveti sejtek plasmájában haladnak hosszant a neurofibrillákkal párhuzamosan. Az idegfibrilla-nyalábok mindegyike a hüvelyével és a hozzátartozó kötőszöveti sejtekkel, meg fibrillákkal együtt egy-egy vékony kábelnek, vagy *idegrostnak* tekintendő.

A kötőszöveti sejtek magva kerekded és apró, de csak ha a durván szemcsézett plasmatestük tömötten összehúzódott az idegrosthüvely felületén; ellenben hosszúkás, orsóalakú e sejt-mag, ha a kötőszöveti fibrillák mellett fekszik s ilyenkor a sejtplasma is elnyúlik a fibrillák mentén. A sejtek nyújtványokkal összeköttetésbe lépnek egymással, sőt a szomszédos idegrostok között is létesítenek finomszálú áthidalásokat, a miben egyes áthajló kötőszöveti fibrillák szintén részt vesznek.

Az idegrostok — mindegyik a maga hüvelyében — elkülönülten futnak egymás mellett az idegben; illetőleg, egynéhány együtt egy-egy csoportban, vagy összetett kábelben szalad, a melynek szintén külön laza kötőszöveti burka van. Nyolcz-tiz ilyen *idegrostcsoport* tölti ki a főidegnek egyik felét.

A főidegnek ezt a szerkezetét a GOLGI gyors ezüstözéssel, vagy a hamatein I. A-val festett harántmetszeteken is látjuk világosan, ha ultravilágításban elemezzük: az idegelemek (a neurofibrillák nyalábjai) haloványan kékes színűek, a kötőszöveti burkok pedig rózsaszínűek, vagy sárgák, esetleg narancsvörösek, a kötőszöveti sejtek plasmája tejszerűen fehérlik e burkokon és az üres közök — úgy a fibrilla-nyaláb és a rosthüvely, mint az egyes idegrostok, vagy ezek csoportjai és burkaik között — feketék, mint maga a mikroskopi kép mezeje. Az ultravilágítást e különböző szövetek elemeinek megkülönböztetésére tudtommal eddig senki sem használta.

¹ Ultravilágításban helyenkint jól látható.

A neurofibrillákat, a kötőszöveti fibrillákat és sejteket természetesen csak nagyon vékony hosszanti metszeteken tanulmányozhatjuk, még pedig a GOLGI-féle gyorseszűstözés toluidinkék utánfestéssel és a methylenkék festés szolgáltatja a leghasználhatóbb készítményeket. Ezekben azt is látjuk, hogy a kötőszöveti fibrillák, ámbár nagyon hosszúak, mégsem vonulnak végig az egyes idegrostokon, hanem helyenként *körte*-, vagy *lapátforma végekkel fejeződnek be* az idegrosthüvely hártáján, a kötőszöveti sejtek plasmáján belül.

Az egyes vékonyabb-vastagabb idegrostcsoportok saját kötőszöveti burkukkal és rendeltetési helyüknek megfelelően (például minden lábízben egy-kettő) főágakként válnak ki a főidegből. Egyes idegrostok (kettesével-hármasával is) szintén saját rosthüvelyükben e főágakból mint mellékágak lépnek ki, a melyek az illető ízkerületéhez törekszenek, hogy az alaphártya felől az izmok felső és alsó végéhez jussanak.

Közben vékonyabb idegszálakra is bomlanak, miközben rosthüvelyüket elvesztik, de már ekkor vagy az alaphártyán, vagy a külső izomburkokon futnak tovább és sajátágosan kialakuló, nyújtottan reczés, lacunás kötőszövet, meg egy-két hártyas vértút kíséri és rögzíti őket, míg végre végződésük közelében vagy a perimysiumtömlőkön, vagy a külső izomburkon egyes neuro- és kötőszöveti fibrillákra válnak szét.

Az irodalomból ismert — az ízeltlábúak közül főként a rovarokra vonatkozó — minden más állitástól eltérően megállapíthatjuk, hogy *a pókok motoricus idegvégződéseinek nem az izomrostokon, hanem a perimysiumtömlők külső felületén terülnek el*; a külső izomburkokon levők talán nem motoricusak. Tehát nem a mozgó és a perimysiumtömlőn belül vérrel körülöblített izomrost szövetéhez csatlakoznak az idegvégkészülékek, hanem a helyben maradó perimysiumtömlőkhöz.

Az Arthropodák motoricus idegvégződéseiről a magyar kutatók közül legelsőbben BALOGH KÁLMÁN (1865) és azután THANOFFER LAJOS (1881) értekezett; utóbbi a *Hydrophilus* izomrostjainak külső hüvelyhártáján (epilemmáján) találta az idegvégkészülékeit; későbbben azonban eltért ettől az állitásától. Igen régóta (1840 óta) tartja magát — a rovarokra vonatkozólag

... az a nézet, mely szerint a motoricus idegek csakis magán az izomroston fekvő DOYERE-féle véglemezzel járulnak ahhoz, sőt ezen át az idegfibrillák összeköttetésbe lépnek az izomrost közbülső határesíkjaival (a KRAUSE-féle vonalakkal), a mint ezt ENGELMANN (1875), későbben FOETTIGER (1880) és mások is állították. ARNDT (1873) és GREEF (1888) azonban másféle motoricus idegvégződéseket ismertetett és RAMÓN Y CAJAL (1890) idegfibrillahálózatokat írt le, melyek az izomrostcsoportok egész felületét bevonják. MONTI és BENEDICENTI (1895) hasonló eredményekre jutott. RETZIUS (1892), KÜHNE (1895) és újabban GOLGI saját módszere szerint végzett vizsgálatai alapján a hurkokban visszatérő motoricus hálózatokban ismerte fel az idegek végkészülékeit az izomrostok felületén. APÁTHY ISTVÁN és az ő nyomán BETHE még sokkal bensőségesebb összeköttetést vesz fel, mit azonban HEIDENHAIN legújában kétségbe von.

Észrevehetjük, hogy valamennyi szerző — ámbár egyébként eredményeik eltérnek egymástól — magán az izomroston találta az idegvégkészülékeket, azonban a pókok izomrostjait és az idegvégkészülékekkel való összefüggésüket egyikük sem választotta tanulmánya tárgyául, holott a pókok e tekintetben határozottan különböznek a Tracheatáktól, a mennyiben idegvégzódéseik nem az izomrostokon, hanem perimysiumtömlőik külső felületén terülnek el, bizonyára azért, mert e tömlőkön belül vérfolyadék öblíti körül az izomrostokat.

Az izmokon háromféle idegvégződést lehet megkülönböztetni: 1. az izmok felső végén az alaphártyáról vonul egy, vagy néhány neurofibrilla, esetleg egy-két kötőszöveti fibrilla kíséretében a perimysiumtömlőkre, hogy ennek külső felületén jellemző módon hosszant elterjedjen; 2. az izmok alsó végén a rögzítő lacunás kötőszövetből rövid arborisatióval járul egy-egy neuro- és kötőszöveti fibrilla a perimysiumtömlő alsó széléhez; 3. a külső izomburkon pedig harántul futó, hosszú idegvégződést találunk bonyolult kötőszöveti szerkezettel odakötve.

Az első esetben kötőszöveti sejtek rögzítik mind a kétféle fibrillát a perimysiumtömlő hártájához. E sejtek hosszú vonalon elég szabályos távolságokban vannak egymástól; plasmájukban fekszenek itt-ott hosszú kötőszöveti fibrillák, a melyek

bizonyára támasztékul szolgálnak a mellettük haladó neurofibrilláknak. Az utóbbiak sok helyütt láthatóan (ultravilágításban) perifibrilláris anyaggal vannak beburkolva, azonban az előbb említett sejtek szétterülő plasmája is belepi őket és éppen e helyeken, vagyis a kötőszöveti sejtek plasmájával beterített részekben alakulnak ki a neurofibrillák oldalágaiként az ismert agancsalakú végződéssek.

Az izomrostok alsó végén sokkal egyszerűbb az idegvégkészülék. Ugyanis a perimysiumtömlő külső felületén rövid gyökérszerű elágazódással és inkább harántul terül el egy-egy neurofibrilla vége néhol egy-egy szintén odatapadó kötőszöveti fibrilla segítségével.

Végül a külső izomburkon maradó idegrostok előbb vértutak kíséretében harántul körülfutnak az egész izmon, ennek alsó vége közelében, azután vékonyabb szálakra oszladozva számos kötőszöveti sejt közvetítésével odasimulnak a burokhártyák külső felületéhez. E sejtekben finom kötőszöveti fibrillák fejlődnek ki, a melyek körte- vagy lapátalakú végekkel tapadnak oda az izomburokhoz; közelükben a neurofibrillák agancsalakú végződéssei sokkal csekélyebbek, mint a milyenek az első esetben leírtak.

A metszetekben általában csak nagyon ritkán találunk motoricus idegvégződéseket. Ezek közül tehát mindegyik egy egész nagy izomrostesoportnak szól, holott a rovarok izmaiban — egyes szerzők szerint — mindegyik izomrostnak egy vagy több külön-külön idegvégződése volna. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha a ferde hosszanti metszetekben a helyenként üresen fekvő perimysiumtömlőket vizsgáljuk tüzetesen, mert kétségtelenül látjuk rajtuk, hogy a végső idegszálak a perimysiumtömlők között keresztül haladnak az izmokon, úgy, hogy egész izomrostesoportoknak szolgálhatnak idegvégződésekkel, azonban nem mindegyik izomrostnak jut belőlük.

ADALÉKOK A NÉGYZETES MARADÉKOK ÉS NEM-MARADÉKOK FLOSLÁSÁNAK ELMÉLETÉHEZ.

GROSSCHMID LAJOS-tól.

Ha vizsgáljuk azokat a törvényszerűségeket, a melyek az adott páratlan p prímszám modulusra vett négyzetes maradékok és nem-maradékok egymásra következési sorrendjében uralkodnak, akkor nagy jelentőséget kell tulajdonítanunk az úgynevezett *successiók* ismeretének, vagyis a mod p teljes maradéksor ama részlet-sorozataira vonatkozó tényeknek, a mely sorozatok csupa egymásra következő és mod p azonos *quadratos characterü* számokból állanak.

Ebben az irányban végzett eddigi vizsgálatainkban igen czélszerűnek bizonyult a következő fogalom bevezetése.¹

Ha $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, és :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right) = \dots = \left(\frac{a+k-1}{p}\right) \neq \left(\frac{a+k}{p}\right); \quad k \geq 1,$$

a hol $\left(\frac{a}{p}\right)$ a LEGENDRE-féle maradék-symbolum, míg p -vel osztható m esetében $\left(\frac{m}{p}\right) = 0$; akkor azt mondjuk, hogy az a szám mod p k -ad fokú és e körülményt az

$$n(p, a) = k$$

egyenlettel fejezzük ki. Ha pedig az a p -vel osztható, akkor megállapodunk, hogy

$$n(p, a) = 0$$

legyen.

¹ V. ö. A négyzet-maradékok eloszlásáról; Math. és Termtud. Ert. 34. K., 236–252. oldal. (1916.)

Magosabbfokúnak nevezzük az a számot mod p akkor, ha:¹

$$k > 2.$$

*

A fokszámnak ezt a fogalmát használván, bemutatunk a jelen alkalommal egynéhány érdekes tényt a mod p *magosabbfokú számok* elmélete köréből. Ezek a tények sajátzerű összefüggésbe hozzák az úgynevezett *totalis linearis* s illetőleg *modularis csoport* bizonyos egyszerű *cyklikus alcsoportjait* azoknak a négyzetes polynomoknak mod p tekintendő quadratos maradékcharaktereivel, a mely másodfokú többtagúak maradékcharakterei éppen a magosabbfokú számok fokszámára vonatkozó általános kritériumban szerepet játszanak.

Mostani fejtegetéseink szervesen kapcsolódnak egy megelőző értekezésünkben megállapított eredményhez, miért is annak jelöléseit megtartva, a szükséghez képest hivatkozunk az ott bebizonyított tételekre.²

1. §.

Mindenekelőtt idézzük a következő congruentia-identitást:³

$$Q_m(\lambda) \cdot Q_m(\mu) \equiv (\lambda + \mu + 2\omega)^2 \cdot Q_m(S_2^{(\omega)}\mu), \pmod{p}; \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu + 2\omega \not\equiv 0 \pmod{p})$$

a melyben a véges λ, μ a

$$Q_m(x) \equiv x^2 + 2(2m+1)x + 1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1^*)$$

congruentia gyökeitől — a mennyiben ilyenek léteznek — különbözöek, és $\omega = 2m + 1$, m egész és $0 < m < p - 1$, míg $S_2^{(\omega)}$ a

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2\omega \end{pmatrix} \pmod{p}$$

¹ A $k = 1, 2$ esetek fönt idézett dolgozatunkban kimerítő elintézését nyertek.

² A linearis congruentia-csoport és a négyzet-maradékok eloszlása; A Szt. István Akad. Értesítője. III. évf. 1. sz. 32—48. old. Budapest. 1918.; ezt a dolgozatot *Lin. csoport* megjelöléssel idézzük.

³ *Lin. csoport*; III rész, (28*).

linearis congruentia-substitutio. Ha az (1*)-nak vannak racionális megoldásai, akkor ezek az $S_i^{(\omega)}$ úgynevezett *polusai*; ha egy ilyen polus ϱ , akkor

$$S_i^{(\omega)} \varrho \equiv \varrho \pmod{p},$$

és viszont is: ha $S_i^{(\omega)}$ nem az identitás, azaz λ véges,¹ akkor az

$$S_i^{(\omega)} \nu \equiv \nu \pmod{p}$$

congruentiában ν okvetlenül polus.

Legyen már most:

$$\left(\frac{Q_m(\lambda)}{p} \right) = \left(\frac{\Delta(S_i^{(\omega)})}{p} \right) = +1; \quad \Delta(S_i^{(\omega)}) \equiv \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2\omega \end{vmatrix} \pmod{p},$$

tehát $S_i^{(\omega)}$ az idézett dolgozatban $M_\omega(S)$ -sel jelölt ciklikus csoport substitúciója;² akkor (1)-ből kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{Q_m(\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega)} \mu)}{p} \right);$$

és általában a:

$$\mu (\equiv) S_i^{(\omega)} \mu, S_i^{(\omega) 2} \mu, \dots \pmod{p}$$

helyettesítéssel az (1)-ben, hacsak:

$$\left. \begin{aligned} \lambda + S_i^{(\omega)} \mu + 2\omega &\equiv 0, \\ \lambda + S_i^{(\omega) 2} \mu + 2\omega &\equiv 0, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

sorjában:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega)} \mu)}{p} \right) &= \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega) 2} \mu)}{p} \right), \\ \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega) 2} \mu)}{p} \right) &= \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega) 3} \mu)}{p} \right), \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

szóval:

$$\left(\frac{Q_m(\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega)} \mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega) 2} \mu)}{p} \right) = \dots = \left(\frac{Q_m(S_i^{(\omega) n} \mu)}{p} \right), \quad (2)$$

¹ Lin. csoport, II. rész, 2. §.

² Lin csoport, II. rész, 2. és 3. §.

ha n az a legkisebb pozitív exponens, a melylyel:

$$\lambda + S_i^{(\omega)n} \mu + 2\omega \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

Mivel feltettük, hogy $\omega = 2m + 1$, azért:

$$\left(\frac{\omega^2 - 1}{p}\right) = \left(\frac{\bar{m}}{p}\right),$$

a hol $\bar{m} \equiv m(m + 1) \pmod{p}$ és $\omega^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, mert $0 < m < p - 1$. Innen következik, hogy az M_ω csoport jelenleg vagy csupa *elliptikus*, vagy pedig csupa *hyperbolikus* substitutióból áll, a szerint, a mint

$$\left(\frac{\omega^2 - 1}{p}\right) = \left(\frac{\bar{m}}{p}\right) = +1, \text{ avagy } -1.$$

Az M_ω fokszáma: ¹

$$q = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{\bar{m}}{p}\right) \right).$$

Tegyük egyszerűség kedvéért:

$$Q_m(x) \equiv Q(x); \quad (\text{mod } p),$$

és legyen $S_i^{(\omega)} = S$ az M_ω -nak oly substitúciója, a melynek q egymásra következő hatványa az egész ciklikus M_ω csoportot származtatja, vagyis: ²

$$M_\omega(S) = (1, S, S^2, \dots, S^{q-1}).$$

Ezek után világos, hogy, ha $\alpha \neq \beta$ és $0 < \alpha, \beta \leq q - 1$, akkor mindig:

$$S^\alpha \mu \not\equiv S^\beta \mu; \quad (\text{mod } p);$$

mert az ellenkező esetben volna:

$$S^{\alpha-\beta} \mu \equiv \mu; \quad (\text{mod } p),$$

¹ Lin. csoport, II. rész, 2. §. (22).

² Ilyen S van $\varphi(q)$ számú, a hol φ az EULER-féle függvény-jel, Lin csoport, II. rész, 3. §.

a honnan, mivel μ nem polus, következne, hogy: $S^{\alpha-\beta}=1$, a mi pedig $0 < |\alpha-\beta| < q$ miatt nem lehetséges. Szóval a q -számú:

$$\mu, S\mu, S^2\mu, \dots, S^{q-1}\mu$$

argumentum-értékek egymásközt mod p bizton különbözöek.

Innen következik, hogy a

$$Q(S^{\alpha}\mu) \equiv Q(S^{\beta}\mu) \pmod{p}$$

congruentia, az α -, β -ra föntebb tett feltevések mellett, akkor, és csakis akkor teljesül, ha:

$$S^{\alpha}\mu + S^{\beta}\mu + 2\omega \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4)$$

Már most:

A) ha

$$\left(\frac{Q(\mu)}{p}\right) = -1,$$

akkor $0 \leq \alpha \leq q-1$ mellett sohasem lehet:

$$\lambda + S^{\alpha}\mu + 2\omega \equiv 0; \pmod{p}. \quad (5)$$

Ugyanis, ha (5) egyáltalában lehetséges, akkor csakis egyetlen α értékre lehetséges a $(0, q-1)$ közből, mert különben:

$$S^{\alpha}\mu \equiv S^{\beta}\mu; \pmod{p} \\ (\alpha \neq \beta)$$

volna, ellenkezésben a föntebb találtakkal. Ez az egyetlen α tehát, ha létezik, egyben a legkisebb nem-negatív ilyen α is; szóval — ha csak $\alpha \geq 1$, akkor — (2) alapján kapnók:

$$-1 = \left(\frac{Q(\mu)}{p}\right) = \left(\frac{Q(S^{\alpha}\mu)}{p}\right) = \left(\frac{Q(-\lambda-2\omega)}{p}\right) = \left(\frac{Q(\lambda)}{p}\right) = +1,$$

a mi nem lehet; ha pedig $\alpha=0$, akkor: $\mu \equiv -\lambda-2\omega \pmod{p}$, és így:

$$-1 = \left(\frac{Q(\mu)}{p}\right) = \left(\frac{Q(\lambda)}{p}\right) = +1$$

adódnék, a mi ugyanaz az abszurditás.

A jelen esetben tehát (2) helyett írhatjuk:

$$-1 = \left(\frac{Q(\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q(S\mu)}{p} \right) = \dots = \left(\frac{Q(S^{q-1}\mu)}{p} \right). \quad (A)$$

*

Másként áll a dolog, ha:

B) $\left(\frac{Q(\mu)}{p} \right) = +1$. Ekkor igenis lehet olyan legkisebb *nem-negatív* n a $(0, q-1)$ közben, hogy:

$$\lambda + S^n\mu + 2\omega \equiv 0; \quad (\text{mod } p).$$

Ha n ilyen szám, akkor nyilván:

$$Q(S^n\mu) \equiv Q(\lambda); \quad (\text{mod } p);$$

míg¹

$$S^{n+1}\mu \equiv \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2\omega \end{pmatrix} S^n\mu \equiv \frac{-\lambda^2 - 2\omega\lambda - 1}{0} \equiv \infty; \quad (\text{mod } p).$$

Megállapodunk, hogy

$$\left(\frac{Q(S^{n+1}\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q(\infty)}{p} \right) - \left(\frac{Q(\frac{1}{\infty})}{p} \right) = 1 \quad (6)$$

legyen; a miért is a (2) egyenletekben szabad $(n+1)$ -et is írni. Ha tovább megyünk, akkor találjuk, hogy:

$$S^{n+2}\mu \equiv S\infty \equiv \lambda; \quad (\text{mod } p),$$

azaz általában:

$$S^{n+k+2}\mu \equiv S^k\lambda; \quad (\text{mod } p);$$

s mivel ugyancsak (2) alapján, $\mu \equiv \lambda$ mellett:

$$+1 = \left(\frac{Q(\lambda)}{p} \right) = \left(\frac{Q(S\lambda)}{p} \right) = \dots, \quad (7)$$

azért világos, hogy a jelen esetben (2) így egészíthető ki, a (6) conventio szemmel tartásával:

¹ A ∞ bevezetésére nézve l. Lin. csoport, II. rész, 1. §.

$$\begin{aligned}
 +1 &= \left(\frac{Q(\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q(S\mu)}{p} \right) = \dots = \left(\frac{Q(S^n\mu)}{p} \right) = \left(\frac{Q(0)}{p} \right) = \\
 &= \left(\frac{Q(\lambda)}{p} \right) = \left(\frac{Q(S\lambda)}{p} \right) = \dots = \left(\frac{Q(S^a\lambda)}{p} \right) = \dots.
 \end{aligned} \tag{B}$$

Azt állítjuk, hogy a (B) második sorában sohasem lehet:

$$\lambda + S^a\lambda + 2\omega \equiv 0; \quad (\text{mod } p). \tag{8}$$

Nevezetesen, egy ilyen összefüggésből következne, miként föntebb, hogy:

$$S^{a+2}\lambda \equiv \lambda; \quad (\text{mod } p),$$

vagyis, mivel λ nem polus, $S^{a+2} = 1$, azaz $a + 2 \geq q$, s így $q - 1 \leq a + 1$; másoldalról azonban világos, hogy:

$$n + 2 + a \leq q - 1,$$

vagyis: $n \leq -1$, holott n nem-negatív.

A jelen esetben tehát a (2) teljesebb alakja (B), a melynek második sorában a $Q(\lambda)$, modulo p biztosan nem ismétlődik.

*

Kimutatjuk ezek után, s ez jelen észrevételeink *legfontosabb eredménye*, hogy:

1) az (A) egyenletsorban *mindazok* a mod p különböző $Q(x)$ értékek fellépnek, a melyekre nézve:

$$\left(\frac{Q(x)}{p} \right) = -1;$$

2) a (B) egyenletekben pedig *mindazok*, a melyekre:

$$\left(\frac{Q(x)}{p} \right) = +1.$$

Legyen e végből R a

$$Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(p-1) \tag{10}$$

értéksorban foglalt s mod p különböző négyzet-maradékok száma; N pedig ugyanebben a sorozatban a mod p különböző négyzet-nem-maradékoké. Határozzuk meg az R , N számosságokat.

A (10) sorozatban van, mint könnyű meggyőződni, összesen :

$$q = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{m}{p} \right) \right)$$

számú, zérustól és egymástól mod p különböző Q -érték; úgy hogy :

$$R + N = q = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \right). \quad (11)$$

Számítsuk ki az R -et. Tudjuk,¹ hogy $Q(x)$ akkor és csakis akkor quadratos maradék mod p , ha :

$$x \equiv \frac{\lambda^2 - 1}{2(\lambda + \omega)}; \quad (\text{mod } p), \quad (12)$$

a hol λ véges, nem polus és $\lambda + \omega \not\equiv 0 \pmod{p}$. Ha tesszük :

$$\lambda + \omega \equiv 2\tau, \quad (\text{mod } p),$$

akkor (12) átmege az

$$x \equiv \tau + \frac{m}{\tau} - \omega \quad (\text{mod } p) \quad (13)$$

congruentiába. Ha azonban

$$Q(x) \equiv Q(y); \quad (\text{mod } p),$$

akkor :

$$(x - y)(x + y + 2\omega) \equiv 0; \quad (\text{mod } p);$$

úgy, hogy vagy :

$$\tau + \frac{m}{\tau} \equiv \tau' + \frac{\bar{m}}{\tau'}, \quad (\text{mod } p), \quad (14_1)$$

vagy pedig :

$$\tau + \frac{m}{\tau} \equiv -\tau' - \frac{\bar{m}}{\tau'}; \quad (\text{mod } p), \quad (14_2)$$

hacsak

$$y \equiv \tau' + \frac{\bar{m}}{\tau'} - \omega; \quad (\text{mod } p).$$

¹ Lin. csoport, III. rész, 2. §.

De (14₁)-ből adódik:

$$(\tau - \tau') \left(1 - \frac{\bar{m}}{\tau\tau'} \right) \equiv 0; \quad (\text{mod } p),$$

míg (14₂)-ből:

$$(\tau + \tau') \left(1 + \frac{\bar{m}}{\tau\tau'} \right) \equiv 0; \quad (\text{mod } p);$$

azaz: a (13)-ból a

$$\tau, \frac{m}{\tau}, -\tau, -\frac{\bar{m}}{\tau} \quad (15)$$

parameterekkel kapott x -ek mod p ugyanazt a $Q(x)$ négyzetmaradékot nyújtják és csakis e négy összetartozó érték vezet azonos $Q(x)$ -hez. A τ véges, zérustól különböző és $2\tau - \omega \equiv \lambda$ nem polus. Nézzük, mikor lehet a (15) alatti négy érték ketteje mod p congruens? A

$$\left. \begin{array}{l} \tau \equiv -\tau \\ \frac{\bar{m}}{\tau} \equiv -\frac{\bar{m}}{\tau} \end{array} \right\}; \quad (\text{mod } p)$$

congruentiák nyilván nem lehetségesek; továbbá

$$\tau \equiv \frac{m}{\tau} \quad (\text{mod } p)$$

adná, hogy:

$$\tau \equiv \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 - 1}; \quad (\text{mod } p),$$

azaz:

$$2\tau - \omega \equiv -\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1} \equiv \text{polus}; \quad (\text{mod } p),$$

a mit kizártunk. Marad tehát a

$$\tau^2 \equiv -\bar{m}; \quad (\text{mod } p)$$

lehetőség, a melyhez szükséges és elegendő, hogy $\left(\frac{-\bar{m}}{p}\right) = +1$ legyen. Evidens, hogy a $\pm \sqrt{-\bar{m}}$ értékek nem kivételesek; és ekkor a (15) helyett kapjuk a: $+\sqrt{-\bar{m}}, -\sqrt{-\bar{m}}$ ambót.

Mindezeket szem előtt tartván, kaptuk tehát, hogy:

$$R = \frac{1}{4} \left\{ p-1 - \left(1 + \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \right) - \left(1 + \left(\frac{-m}{p} \right) \right) \right\} + \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-\bar{m}}{p} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(p-1 - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \left(1 - \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \right), \quad (16)$$

a mi által az R számosságot kifejeztük. Ha most (11)-ből kiszámítjuk az N -et, akkor nyerjük az:

$$N = \frac{1}{4} \left(p-1 - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \right) \quad (17)$$

képletet.

*

Közbevetőleg megjegyezzük, hogy a (16) és (17) képletek speciális esetei két általánosabb relációnak, a melyeket E. JACOBSTHAL⁴ egyik formulájából minden nehézség nélkül származtathatunk. Ez a JACOBSTHAL képlet a következő:

$$f(b, c) = \sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{m^2 + bm + c}{p} \right) = p-1 - p \cdot \left(\frac{D}{p} \right)^2;$$

$$(D \equiv b^2 - 4c \pmod{p}).$$

Ebből az egyenletből — egyszerű meggondolások s egy kis számolás után kapjuk, hogy:

$$R = \frac{1}{4} \left\{ p \left(2 - \left(\frac{D}{p} \right)^2 \right) - 1 - \left(\frac{D}{p} \right) \left(1 - \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \right\},$$

$$N = \frac{1}{4} \left\{ p \left(\frac{D}{p} \right)^2 + 1 - \left(\frac{D}{p} \right) \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \right\};$$

a hol R és N az $x^2 + bx + c$ polynomra nézve ugyanazt jelentik, mint ugyane betűk föntebb az $x^2 + 2\omega x + 1$ négyzetes alakra nézve. Ha a legutóbbi két képletben tesszük:

$$D \equiv 4(\omega^2 - 1) \equiv 16\bar{m}; \pmod{p},$$

akkor újból előállanak a (16), (17) egyenletek.

⁴ Ueber die Darstellung der Primzahlen der Form $4n+1$ etc., Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 132., p. 238-245., Berlin 1907.

Ezek után kimutatjuk, hogy: az (A) egyenletsorban a $Q(x)$ -nek mind az N különböző nem-maradék-értéke bizonyosan fellep, míg a (B) egyenletekben mind az R maradék-értéke, függetlenül a kezdő μ -értéktől.

Legyen az (A) alatt szereplő s mod p különböző Q -k száma \mathfrak{N} ; akkor bizonyos, hogy:

$$\mathfrak{N} \leq N;$$

míg viszont az (A)-ban előforduló q -számú Q — mint fentebb találtuk — legfeljebb páronként eshetik össze mod p , miért is világos, hogy:

$$\mathfrak{N} \geq 1 + \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2},$$

ha q páratlan, míg

$$\mathfrak{N} \geq \frac{q}{2},$$

ha q páros; mindkét esetben érvényes tehát az:

$$\mathfrak{N} \geq \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{2} (1 - (-1)^q) \right) \quad (18)$$

egyenlőtlenség. A (18) jobboldalán írjuk be a

$$q = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \right)$$

értéket; ezáltal kapjuk az:

$$\frac{1}{4} \left(p+1 - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) - (-1)^q \right) \quad (19)$$

kifejezést. De meggondolva, hogy:

$$\left(\frac{m}{p} \right) = (-1)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{m}{p} \right) \right), \quad (20)$$

írhatjuk:

$$(-1)^q = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{m}{p} \right) \right) = \left(\frac{-\bar{m}}{p} \right),$$

vagyis a (19) alatt lévő érték nem egyéb, mint N . Tehát valóban: $N = \mathfrak{N}$, a mi bebizonyítandó volt.

Egy kis módosulás lép fel a bizonyításban a (B) esetre nézve. Ez onnan ered, hogy a (B) esetben számot kell vetnünk a $Q(\infty)$ előjöttével, a mely helyett a $Q(0) \equiv 1 \pmod{p}$ értéket adoptáltuk s így tehát a $Q(0) \pmod{p}$ esetleg 3-szor található a (B)-ben szereplő Q -k között. Legyen \mathfrak{R} a (B)-ben található s modulo p különböző Q -értékek száma. Evidens, hogy:

$$\mathfrak{R} \leq R;$$

míg másrészt, a $Q(\infty)$ külön tekintetbe vételével, analog megfontolás alapján, mint az (A) esetben, találjuk, hogy:

$$\mathfrak{R} - 1 \geq \frac{1}{2} \left(q - 2 - \frac{1}{2} (1 - (-1)^q) \right).$$

De, miként előbb, könnyen látjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} \left(q - 2 - \frac{1}{2} (1 - (-1)^q) \right) = \\ & = \frac{1}{4} \left(p - 1 - \left(\frac{\bar{m}}{p} \right) \left(1 - \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \right) = R. \end{aligned}$$

Így tehát jelenleg is: $R = \mathfrak{R}$, qu. e. d.

Ezekből az eredményeinkből azt is látjuk, hogy úgy az (A), mint a (B) esetben, a tényleg előforduló s mod p különböző Q -értékek számosságainak a párosítás révén elérhető *minimuma* maga a *maximális* R , illetőleg N ; vagyis, hogy ezekben az egyenletekben minden $S^a \mu$ argumentummal együtt a

$$\mu' \equiv -S^a \mu - 2\omega \pmod{p}$$

argumentum is *de facto* fellép; kivéven az $x \equiv -\omega \pmod{p}$ argumentumot, a melynek párja önmaga s a mely tehát a föntiek alapján biztosan csak egyszer fordul elő az $S^a \mu$ -k sorában; és továbbá a 0-t, a melyhez a -2ω -n kívül, megállapodásaink szerint, a ∞ is tartozik, úgy, hogy a (B)-ben a $Q(0) \equiv 1$ érték 3-szor fordul elő.

Minthogy pedig:

$$Q(-\omega) \equiv -(\omega^2 - 1) \equiv -4m; \quad (\text{mod } p),$$

és

$$\left(\frac{-\bar{m}}{p}\right) = (-1)^q,$$

azért a $Q(-\omega)$ az (A), illetőleg (B) sorban lesz, a szerint, a mint q páratlan, illetőleg páros.

2. §.

Mielőtt idáig nyert eredményeinket a k -adfokú számokat érintő vonatkozásukban alkalmaznók, egy kis észrevételt teszünk az $\left(\frac{\bar{m}}{p}\right) = +1$ feltevésével kapcsolatban,

Ugyanis, ha: $\left(\frac{\bar{m}}{p}\right) = \left(\frac{\omega^2-1}{p}\right) = +1$, akkor az M_ω substitúciói valamennyien *elliptikusak*, s így az M_ω -t származtató és

$$q = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{\bar{m}}{p}\right) \right) = \frac{1}{2} (p-1)$$

periodussal bíró $S_\lambda^{(\omega)}$ -nak vehetjük az:¹

$$S_\lambda^{(\omega)} = \begin{pmatrix} \frac{\varrho_2 g^2 - \varrho_1}{g^2 - 1} & -1 \\ 1 & \frac{\varrho_2 g^2 - \varrho_1}{g^2 - 1} + 2\omega \end{pmatrix} = S$$

substitútiót, a melyben tehát:

$$\lambda \equiv \frac{\varrho_2 g^2 - \varrho_1}{g^2 - 1}; \quad (\text{mod } p),$$

míg g a p -nek *primitív gyöke*, és:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &\equiv -\omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \\ \varrho_2 &\equiv -\omega - \sqrt{\omega^2 - 1} \end{aligned} \right\} (\text{mod } p)$$

a $Q(x)$ -et mod p zérussá tevő két polus-érték.

¹ Lin. csoport. II. rész. 3. §.

Legyen $\mu + \omega \pmod p$ a zérustól különböző, és keressük azt a legkisebb pozitív e exponenst, a melyre nézve:

$$\mu + S^e \mu + 2\omega \equiv 0 \pmod p. \quad (20^*)$$

Eleve tudjuk, hogy ilyen pozitív e minden éppen jellemzett μ -höz tartozik. Feladatunk tehát a (20*) congruenciát kielégítő legkisebb pozitív e -érték megkeresése. Ez igen egyszerű; tudnillik a folyvást idézett dolgozat alapján:

$$S^e = \begin{pmatrix} \lambda (g^{2^e}) & -1 \\ 1 & \lambda (g^{2^e}) + 2\omega \end{pmatrix},$$

a hol

$$\lambda (g^{2^e}) \equiv \frac{\varrho_2 g^{2^e} - \varrho_1}{g^{2^e} - 1}; \quad (\text{mod } p);$$

s így az e -re feloldandó congruenciánk a következő:

$$\mu + 2\omega + \frac{\frac{\varrho_2 g^{2^e} - \varrho_1}{g^{2^e} - 1} \cdot \mu - 1}{g^{2^e} - 1} \equiv -\mu - 2\omega; \quad (\text{mod } p). \quad (21)$$

A (21) congruenciából találjuk, egy kis egyszerűsítés után, hogy:

$$g^{2^e} \equiv A(\mu)^2; \quad (\text{mod } p), \quad (22)$$

ahol

$$A(\mu) \equiv \frac{\mu - \varrho_2}{\mu - \varrho_1} \equiv \frac{Q(\mu)}{(\mu - \varrho_1)^2} \equiv \frac{(\mu - \varrho_2)^2}{Q(\mu)}; \quad (\text{mod } p).$$

Ezek szerint tehát:

$$g^e \equiv \pm A(\mu); \quad (\text{mod } p), \quad (23)$$

így, hogy e -re a következő két értéket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &\equiv \text{ind}_g A(\mu) \\ e_2 &\equiv \text{ind}_g A(\mu) + \frac{p-1}{2} \end{aligned} \right\}; \quad (\text{mod } (p-1)). \quad (24)$$

Mi keressük e -nek a $(0, g)$ közbe eső értékét, e határok kizárásával. Észrevesszük, hogy a

$$A(\mu) \equiv \pm 1, \quad (\text{mod } p)$$

feltevés a helytelen

$$(\mu + \omega) (\varrho_1 - \varrho_2) \equiv 0 \pmod{p}$$

congruentiához vezet, miért is a $\Lambda(\mu)$ indexe sem zérus, sem pedig $\frac{p-1}{2}$ nem lehet modulo $p-1$. Ebből azonban nyomban következik, hogy (24)-ben vagy az e_1 , vagy pedig az e_2 legkisebb pozitív maradéka mod $(p-1)$ — a $\left(0, \frac{p-1}{2}\right)$ köz belsőjébe esvén feladatunkat megoldja. Ha μ helyett $S^\alpha \mu$ -t teszünk, akkor azonos módon kapjuk azt a β exponenst, a melylyel az:

$$S^\alpha \mu + S^\beta \mu + 2\omega \equiv 0 \pmod{p}$$

relatio teljesül.

Mindezekből látjuk tehát, hogy a tárgyalt *elliptikus* esetben, a Q -párok eloszlását az (A) , (B) egyenlet-sorokban, *explicit formulákkal* követhetjük.¹

3. §.

Eme kis kitérés után feltesszük, hogy $k > 2$ és alkalmazzuk az 1. §.-ban talált tényeket a legalább k -adfokú számok elméletére.

E végből idézzük a következő általános tételt:²

Ahhoz, hogy az a szám legalább k -adfokú legyen ($k > 2$) mod p , szükséges és elegendő, hogy létezzék oly véges t érték, a melyre nézve:

$$t(t^2 - 1) \not\equiv 0; \pmod{p},$$

és a melylyel:

$$a \equiv a(t) \equiv \frac{1}{4}(t + t^{-1} - 2); \pmod{p}, \quad (25)$$

míg:

$$\left(\frac{Q_1(t)}{p}\right) = \left(\frac{Q_2(t)}{p}\right) = \dots = \left(\frac{Q_{k-2}(t)}{p}\right) = +1; \quad (26)$$

a hol, mint föntebb mindenütt:

$$Q_m^1(x) \equiv x^2 + 2(2m+1)x + 1; \pmod{p}.$$

¹ Az ú. n. *Galois-féle imaginariusok* igénybe vétele révén a *hyperbolikus* esetben is teljesen analog kifejtések érvényesek. E mennyiségeknek a jelen másodfokú körben szükségelt bevezetésére nézve l. pd.: *G. Vivanti (A. Cahen)*, Les fonctions polyédriques et modulaires (Paris, 1910), p. 162—169.

² l. Lin. csoport, I. rész, B)

Ha ezt a tételt kapcsolatba hozzuk az 1. §. eredményeivel, akkor igen érdekes *explicit származtatását* adhatjuk meg ama t értékek complexumának, a melyekkel a (25)-ből nyert $a(t)$ -kre nézve mindig:

$$n(p, a(t)) \geq k > 2$$

adódik.

A p mindvégig megadott pozitív páratlan primszám.

Legyen ismét $\omega = 2m+1$, $m > 0$, és jelöljük a Q -k indexeivel való egyöntetűség kedvéért — az $M_\omega(S)$ csoportot röviden $M_{\omega-1} = M_m$ -mel; akkor az 1. §.-ban kifejtett megfelekezés szerint, a Q_m formához tartozó csoport lesz M_m . Ugyanígy az M_m fokszáma legyen:

$$q_m = \frac{1}{2} \left(p - \left(\frac{m^2 + m}{p} \right) \right),$$

és egy az M_m -et származtató substitutio S_m , vagyis:

$$M_m = (1, S_m, S_m^2, \dots, S_m^{q_m-1}).$$

Már most feltesszük, hogy a μ_m kezdő argumentum, hacsak $1 \leq m < k-2$, mindig olyan, hogy:¹

$$\left(\frac{Q_m(\mu_m)}{p} \right) \equiv \pm 1,$$

és a:

$$\mu_m, S_m \mu_m, S_m^2 \mu_m, \dots, S_m^{q_m-1} \mu_m$$

értékeket röviden az M_m -hez tartozó *homolog értékeknek* nevezzük; akkor az 1. §. (B) egyenleteiről mondottak, az éppen idézett tétellel egybefoglaltatván, a következő *végconclusióhoz* vezetnek:

Ha a t véges és $t(t^2-1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, akkor az

$$a(t) \equiv \frac{1}{4} (t + t^{-1} - 2) \pmod{p}$$

¹ Már az 1. §.-ban említettük, hogy a Q_m -et maradékká tevő μ_m -ek explicit alakja:

$$\mu_m \equiv \tau_m + \frac{m(m+1)}{\tau_m} - (2m+1); \pmod{p},$$

kellő megszorítással a τ_m értéktartományára vonatkozólag.

számosztályra nézve az

$$n(p, a(t)) \geq k > 2$$

egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül, ha a $t \pmod p$ *simultan* congruens egy az M_1 -hez, M_2 -höz, ..., M_{k-2} -höz tartozó homolog értékkel; azaz tehát, ha vannak oly:

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_{k-2}$$

exponensek, a melyekkel:

$$t \equiv S_1^{a_1} \mu_1 \equiv S_2^{a_2} \mu_2 \equiv \dots \equiv S_m^{a_m} \mu_m \equiv \dots \equiv S_{k-2}^{a_{k-2}} \mu_{k-2}; \pmod p. \quad (27)$$

Így hát a fönti t egy, a:

$$\begin{array}{cccc} \mu_1, & S_1 \mu_1, & S_1^2 \mu_1, \dots, & S_1^{q_1-1} \mu_1, \\ \mu_2, & S_2 \mu_2, & S_2^2 \mu_2, \dots, & S_2^{q_2-1} \mu_2, \\ & \dots & \dots & \dots \\ \mu_m, & S_m \mu_m, & S_m^2 \mu_m, \dots, & S_m^{q_m-1} \mu_m, \\ & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k-2}, & S_{k-2} \mu_{k-2}, & S_{k-2}^2 \mu_{k-2}, \dots, & S_{k-2}^{q_{k-2}-1} \mu_{k-2} \end{array} \quad (T_k)$$

táblázatnak mind a $k-2$ sorában fellépő érték $\pmod p$.

Azok a t értékek viszont, a melyek a (T_k) minden sorában előfordulnak ugyan, de a melyek a (T_{k+1}) -nek ... a melynek első $k-2$ sora nyilván a (T_k) -t alkotja -- utolsó, vagyis $(k-1)$ -edik sorában nem szerepelnek, mindazokat az $a(t)$ számokat adják, a melyekre nézve:

$$n(p, a(t)) = k.$$

A (T_k) táblázatnak e tételben kidomborodó jellegzetes tulajdonsága révén, mint látjuk, az $M_w(S)$ ciklikus csoportok a legszerveesebb összefüggésbe kerültek a magasabbfokú számokkal; a mennyiben e csoportok ismeretével a (T_k) táblázat is rendelkezésre áll, mint a mely azután, a jelzett módon, közvetlenül nyújtja az összes legalább k -adfokú számokat.

Végezetre megjegyezzük, hogy ezzel az eljárással minden legalább k -adfokú $a(t)$ -t *pontosan kétszer* kapjuk. Ugyanis, ha valamely t -re (27) fennáll, akkor, mivel $t \not\equiv t^{-1} \pmod p$, s mivel:

$$\left(\frac{Q_m(t)}{p}\right) = \left(\frac{Q_m(t^{-1})}{p}\right), \quad (1 \leq m \leq k-2),$$

azért a t^{-1} is biztosan involvál egy a (27)-hez analog congruentiasort, míg:

$$a(t^{-1}) \equiv a(t); \quad (\text{mod } p),$$

s így a t^{-1} ugyanahhoz az a számhoz vezet. Más oldalról viszont, ha t is, t' is legalább k -adfokú $a(t)$, $a(t')$ számokat származtatnak, és

$$a(t) \equiv a(t'); \quad (\text{mod } p),$$

akkor vagy:

$$t' \equiv t; \quad (\text{mod } p),$$

avagy pedig:

$$t' \equiv t^{-1}; \quad (\text{mod } p);$$

úgy hogy ugyanaz az $a(t) \text{ mod } p$ csakis a t , t^{-1} párból eredhet; qu. e. d.

*

Megemlítjük még, hogy jelen eredményünknek igen szemléletes *geometriai* formulázását adhatjuk, ha minden $\text{mod } p$ vett t értéket a Gauss-féle sík egységsugarú és 0 középponttal bíró körének

$$z(t) = \varepsilon^{\frac{2\pi t}{p} i}$$

pontja által reprezentálunk. Itt ε a természetes log-rendszer alapszáma, i az imaginárius egység. Írjuk ugyanis:

$$\varepsilon^{\frac{2\pi x}{p} i} = \exp x,$$

akkor az 1 sugarú és 0 centrumu körbe írt reguláris p -oldalú polygon szögpontjainak vehetjük az:

$$\exp 0 = 1, \quad \exp 1, \quad \exp 2, \dots, \quad \exp (p-1)$$

pontokat, míg az M_m -hez tartozó homolog értékeknek megfelelő szögpontok lesznek:

$$\exp \mu_m, \quad \exp S_m \mu_m, \dots, \quad \exp S_m^{q_m-1} \mu_m,$$

a melyek mind különbözőek.¹ Ha e homolog szögpontokat, például a valós tengelytől számított legkisebb nem-negatív argumentumaik növekedő sorrendjében egymással összekötjük, akkor egy, általában nem regularis polygont kapunk, a melyet az M_m -hez tartozó maradék-polygonnak nevezhetünk.

E fogalmak érvényesítésével a k -adfokú számokra talált tételünk egyszerűen így hangzik:

Az

$$n(p, a(t)) \geq k > 2$$

egyenlőtlenség szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\exp t$ szögpont az $\exp 0 = 1$, $\exp 1$, $\exp(p-1)$ szögpontoktól különbözők, és továbbá, hogy az

$$\exp t = \varepsilon \frac{2\pi i}{p}$$

közös szögpontja legyen az

$$M_1\text{-hez, } M_2\text{-höz, } \dots, M_{k-2}\text{-höz}$$

tartozó maradék-polygonoknak.

*

Példaképpen vegyük $p=19$ -et, és keressük a legalább 4-edfokú $a(t)$ számokat. Most tehát $k=4$, $k-2=2$, és

$$Q_1(x) \equiv x^2 + 6x + 1, \quad Q_2(x) \equiv x^2 + 10x + 1; \quad (\text{mod } p);$$

míg

$$\bar{1} = 2, \quad \bar{2} = 6;$$

szóval:

$$\left(\frac{\bar{1}}{19}\right) = -1, \quad \left(\frac{\bar{2}}{19}\right) = +1;$$

úgy, hogy az M_1 csoport, a melynek fokszáma:

$$q_1 = \frac{1}{2} \left(19 - \left(\frac{\bar{1}}{19}\right) \right) = 10,$$

¹ L. 4. old. — A homolog értékek sorából e polygonos representálásnál a ∞ -t egyszerűen kihagyjuk.

csupa hyperbolikus, az M_2 csoport pedig,

$$q_2 = \frac{1}{2} \left(19 - \left(\frac{2}{19} \right) \right) = 9$$

fokszámmal, csupa elliptikus substitutiókból áll. Az M_1 -et származtató S_1 -nek vehetjük:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

az M_2 -t származtató S_2 -nek pedig:

$$S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az S_1 periodusa 10, az S_2 -é 9. Ha

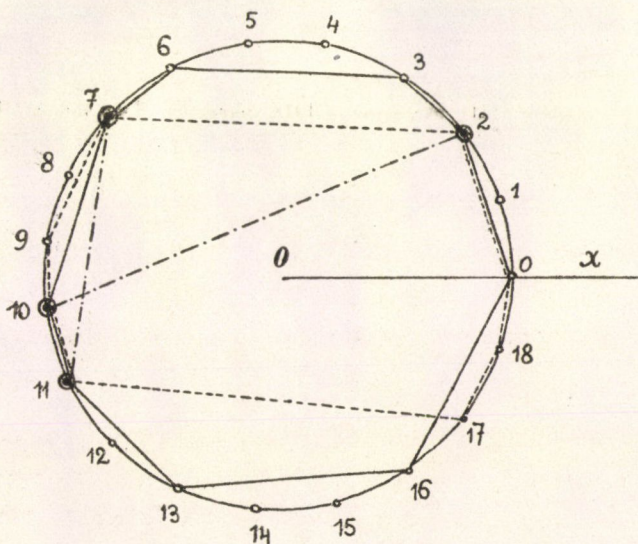
$$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv 0; \quad (\text{mod } 19),$$

akkor az M_1 -hez tartozó $0, S_1^0, \dots, S_1^9 0$ homolog értékek lesznek:

$$0, 10, 16, 3, 13, 6, 2, \infty, 11, 7;$$

az M_2 -höz tartozók pedig:

$$0, 7, 18, 11, \infty, 17, 10, 2, 9.$$



A két sorozat közös elemei a 0-on s ∞ -en kívül:

$$2, 10; 7, 11,$$

a melyekkel:

$$\left. \begin{aligned} a(2) \equiv a(10) &\equiv \frac{1}{4}(2 + \frac{1}{2} - 2) \equiv 12, \\ a(7) \equiv a(11) &\equiv \frac{1}{4}(7 + \frac{1}{7} - 2) \equiv 4, \end{aligned} \right\} \pmod{19};$$

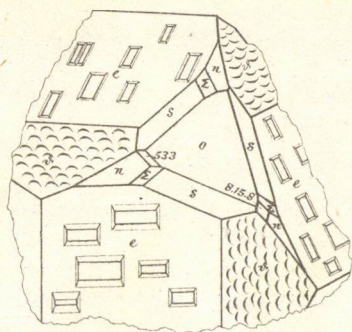
s valóban, a:

$$\begin{array}{l} \text{Res. : } 1, \quad 4, 5, 6, 7, \quad 9, \quad 11, \quad 16, 17, \\ \text{NRes. : } 2, 3, \quad 8, \quad 10, \quad 12, 13, 14, 15, \quad 18 \end{array}$$

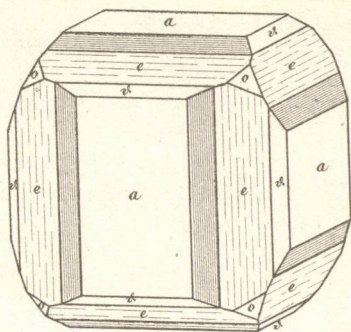
tabella mutatja, hogy 4 és 12 az egyedüli mod 19 4-ed fokú számok.

Az ábra a fentebb értelmezett *maradék-polygonok* által szemlélteti a $p=19$ esetben fellépő viszonyokat. Az M_1 -hez, illetőleg M_2 -höz tartozó *maradék-polygonok* közös szögpontjai — 2, 7, 10, 11 — kis körökkel vannak bekerítve.

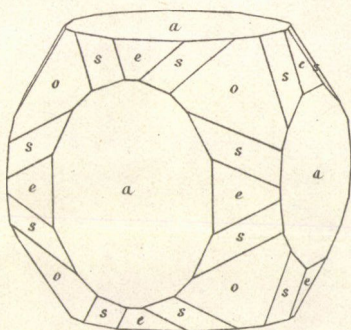
(A M. T. Akadémia III. osztályának 1918 márczius 18.-án tartott üléséből.)



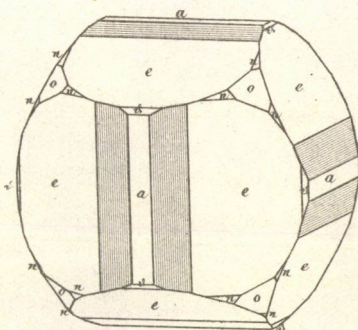
1.



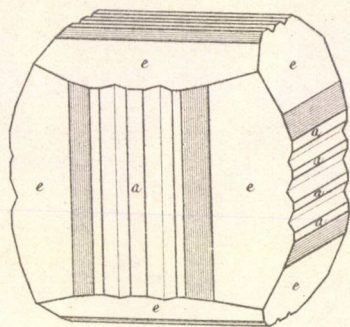
2.



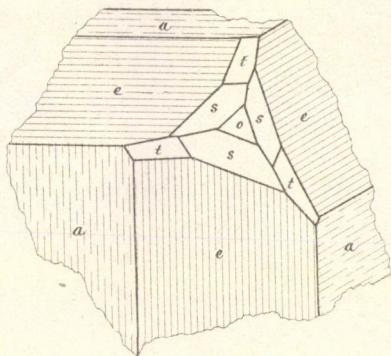
3.



4.



5.

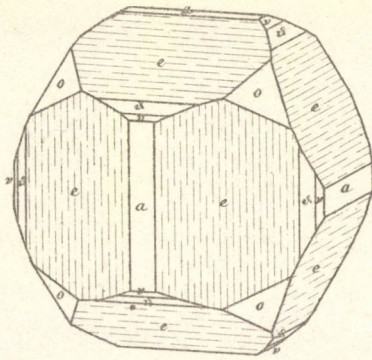


6.

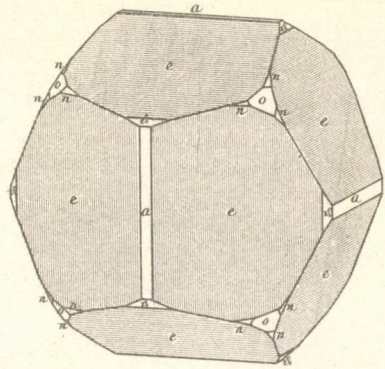
Auct. delin.

Lith. Grund V. utódtai Budapest.

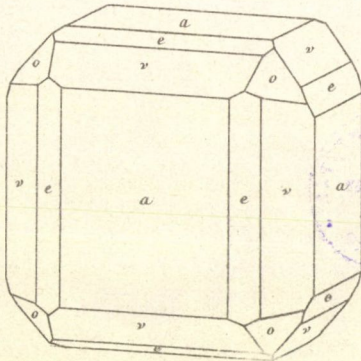




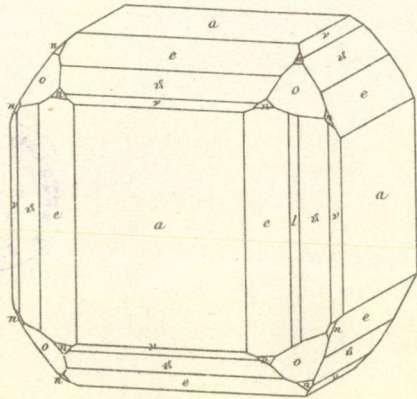
1.



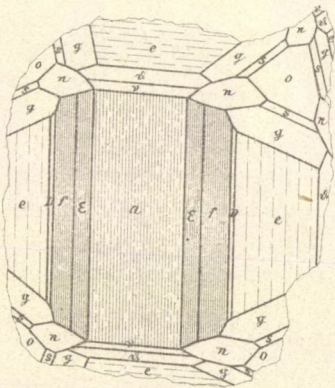
2.



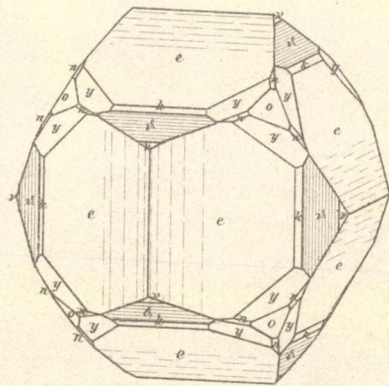
3.



4.

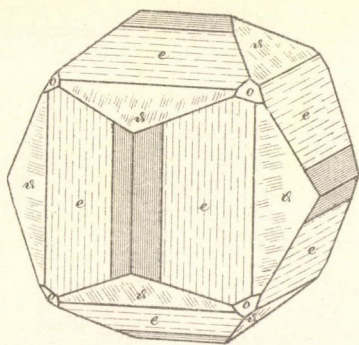


5.

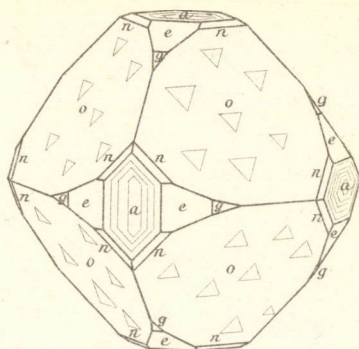


6.

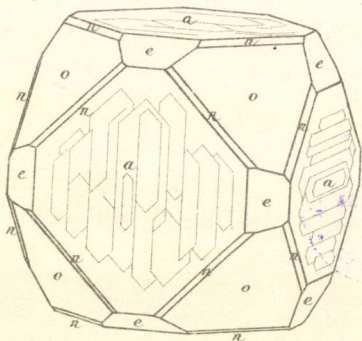




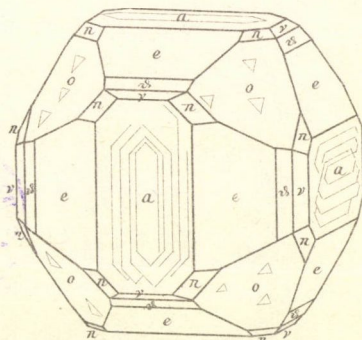
1.



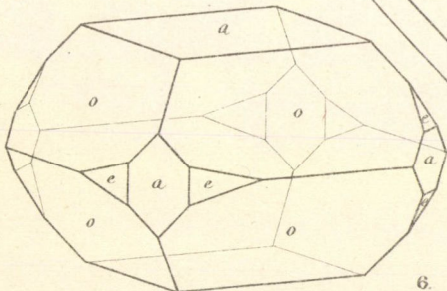
2.



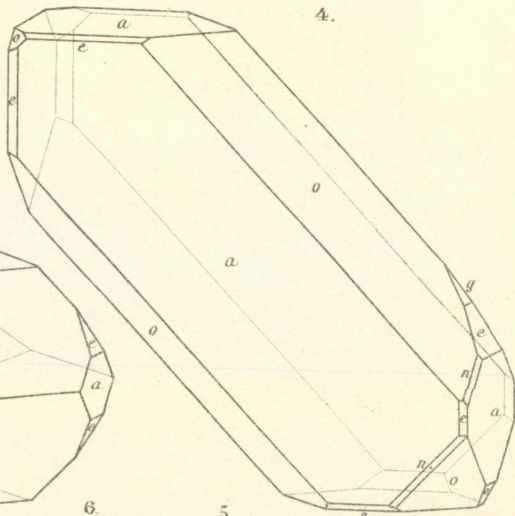
3.



4.



6.



5.

