

50639

F. c. I.  $\frac{3}{33}$

MATHEMATIKAI  
ÉS  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI  
ÉRTESITŐ.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK FOLYÓIRATA

SZERKESZTI

FRÖHLICH IZIDOR

OSZTÁLYTITKÁR.

HARMINCZHARMADIK KÖTET

1915.

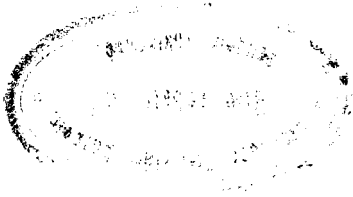
KILENCZ TÁBLÁVAL.



BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1915.



## TARTALOM.

	<i>Lap</i>
BODNÁR JÁNOS: A zimáz és karboxiláz enzimek a burgonya és a cukor- répa raktározó szervében ... ..	591
DÁVID LAJOS: Az elliptikus modulfüggvény új, independens elmélete	271
DOBY GÉZA: Növényi enzimekről. 3. A burgonya levelének invertáza	684
Ifj. ENTZ GÉZA: A <i>Polytoma uvella</i> cytologiai viszonyairól és mitoticus osztódásáról (két táblával) ... ..	611
FARKAS GYULA: Biztos egyensúly potenciál nélkül ... ..	339
— Michelson negatív kísérletének magyarázatai ... ..	355
FREY ERNŐ: Kórszövetteni és klinikai adatok az Alzheimer-féle beteg- séghez ... ..	246
GEÖCZE ZOÁRD: A zérus területű felületről ... ..	730
GROSSCHMID LAJOS: Négyzetes kongruenciák algebrai testekben ... ..	524
HEVESY GYÖRGY: Az elektromosság vezetésének sebességéről folyadé- kokban ... ..	507
HUTYRA FERENCZ és MANNINGER REZSŐ: Bakteriumellenes specifikus fermentumok ... ..	488
KÁRMÁN TÓDOR: Vizsgálatok a rugalmassági határ és a törés feltételeiről	1
KOCH NÁNDOR: A Magyar Adria-Egyesület tengerkutató bizottságának I. és II. Adria-tengeri expedícióján végzett hydrographiai meg- figyelések és azoknak eredménye ... ..	749
KONEK FRIGYES és PACSÚ JENŐ: A paracumarsav és vanillinsav néhány új származéka ... ..	51
KONKOLY THEGE MIKLÓS: Az 1913 <i>f</i> üstökös ( <i>Delavan</i> ) és az 1914 <i>b</i> üstökös (ZLATINSKI) spektruma ... ..	577
— és TERKÁN LAJOS: Előmunkálatok 27 hold-részlet (mare-kráter) és 30 kőzet albedójának spektrálfotometriai úton meghatározásához	456
KÖNIG DÉNES: Vonalrendszerek és determinánsok ... ..	221
KÜRSCHÁK JÓZSEF: A kettős integrálok variálásánál fellépő főegyenletek azonos eltűnéséről ... ..	469
LECHNER GEDEON: Az áramgörbe alakjának befolyása a csendes kisü- lések chemiai hatására ... ..	68
MAUCHA REZSŐ: Adatok az Adria hydrographiai vizsgálatához ... ..	691
MAUTHNER NÁNDOR: A glukometaoxycumarin és a glukoprotocatechusav synthesise ... ..	250

	<i>Lap</i>
MAUTHNER NÁNDOR: A gentisinsav depsidjeinek synthesise .. .. .	533
SZ. NAGY GYULA: Hurkolt és lánczolt algebrai térgörbék algebrai elő- állításáról .. .. .	500
-- Sík- és térbeli algebrai görbék reális meneteiről .. .. .	544
PEKÁR DEZSŐ: Kísérleti tanulmányok az Eötvös-féle gravitációs csava- rási mérleg zavarairól .. .. .	407
PÓLYA GYÖRGY: Az algebrai egyenletek elméletéhez .. .. .	139
PREISZ HUGÓ: Vizsgálatok az antipneumococcus-serum hatása módjáról	711
RADOS GUSZTÁV: A magasabbfokú kongruenciák elméletének egyik kérdéséről .. .. .	702
— A másodfokú binom kongruenciák elméletéhez .. .. .	758
RICHTER ALADÁR: A víztartó szövet és az élettani felemáslevelűség (physiologiai heterophyllia) .. .. .	248
— Borneo egy új Schizæa-ja és a vele rokon fajok physiologiai anato- miája (öt táblával) .. .. .	362
RYBÁR ISTVÁN: A teljes fényvisszaverődés abszolút phasisváltozásai ket- tősen törő közegek belsejében .. .. .	114
SCHAFFER KÁROLY: Az agyvelői akaratos pálya egy eddig nem ismert részének anatómiájáról és jelentőségéről .. .. .	237
SUTÁK JÓZSEF: A Michelson-féle kísérlet elméleti következményei	104
SZÁSZ OTTÓ: Valós elemekből álló végtelen láncztörtek összetartásáról	654
SZÜCS ADOLF: A variációszámítás alaplemmájáról .. .. .	230
TUZSON JÁNOS: A magyar Alföld növényföldrajzi tagolódása .. .. .	143
VENDL ALADÁR: A Surián környékének amfibolitjai (egy táblával) .. .. .	256
VITÁLIS ISTVÁN: A «Congeria dactylus Brus.» rendszertani helyzete (egy táblával) .. .. .	331
— Adatok a Cserhát keleti részének geologiai viszonyaihoz .. .. .	561

## VIZSGÁLATOK A RUGALMASSÁGI HATÁR ÉS A TÖRÉS FELTÉTELEIRŐL.

KÁRMÁN TÓDOR-tól.

A kérdés, melynek megvilágításához jelen dolgozattal hozzájárulni óhajtok, következőképen fogalmazható:

Feltéve, hogy ismerjük valamely isotrop szilárd test rugalmassági határát, illetőleg törési szilárdságát, az egyszerű húzási vagy nyomási igénybevétellel szemben, mely feszültségi állapotok felelnek meg ezeknek a határoknak összetett igénybevétel esetén, vagyis

a) *minő törvényszerűség határozza meg azokat a feszültségi állapotokat, melyeknél megszűnik az alakváltozás lényegében rugalmas jellege és először je'ennek meg a rugalmas alakváltozás mellett jelentékeny maradó alakváltozások?*

b) *mely feszültségi állapotok idézik elő az anyag törését?*

Az ily értelemben általánosított *rugalmassági*, illetőleg *törési határ* feltételeinek megállapítása — hol tehát e határokon nem egyes feszültségi állapotokat, hanem a határállapotok egész összességét értjük — mindenekelőtt nagy fontossággal bír a *műszaki szilárdságtan* szempontjából, minthogy a gyakorlati szilárdsági számítások a szerkezetek biztonságát képlékeny és szivós anyagokon általában a rugalmasság határára, rideg anyagokon a törési határra vonatkoztatják. E szempontból tehát a fent jelzett kérdést, melyet olykor mint a «szilárdságtan alapkérdését» említenek,<sup>1</sup> úgy is lehet fogalmazni, hogy mi az *anyag igénybevételének helyes mértéke?* Azonban nem érdektelen a problema más tudományágak szempontjából sem. Így fontossággal bír a maradó alakváltozások feltételeinek megállapítása

<sup>1</sup> V. ö. pl. WINKELMANN, Handbuch der Physik, 2-te Aufl. (1908) I. p. 855. — O. MOHR, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik. Berlin 1906. p. 187. — A. FÖPPL, Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München 27. (1900) p. 1.

a *geologia* és a *geophysika* szempontjából, a mennyiben felvilágosítást nyerünk a kőzetek törés nélküli deformációjának lehetőségéről. Végül természetes, hogy problémánk egy részét alkotja a szilárd test általános fizikájának is; e tekintetben fontosnak látszik az az eredmény, hogy a szilárdsági kísérletekhez fűződő mikroszkopi vizsgálatok mélyebb értelmet adnak némely tisztán phänomenologikus alapon felállított meghatározásnak, a minő pl. a «képlékenység», «ridegség» stb. és mélyebb betekintést engednek az isotrop szilárd test fizikájának a kristályfizikával való összefüggésébe.

Jelen dolgozat első fejezete mindenekelőtt a kérdés jelen állását ismerteti, különösen kiemelve a még fel nem derített, vitás pontokat. A további fejezetek az ezen kérdéses pontok megvilágítására tervbevett és a M. Tud. Akadémia III. osztályának szíves anyagi támogatásával végrehajtott kísérletek berendezését és eredményeit adják. A szíves támogatásért, melyben részesültem, legyen szabad e helyen is hálás köszönetemet kifejeznem.

## I. FEJEZET.

### A kérdés jelen állása.

#### Hypothesisek és kísérletek.<sup>1</sup>

1. *Rugalmassági, folyási és törési határ.* A rugalmassági elmélet szempontjából valamely isotrop szilárd test bármely pontjában a feszültségi állapot a *három főfeszültség* értéke által van meghatározva. Ha tehát a főfeszültségeket, mint térbeli koordinátákat fogjuk fel, a tér minden pontjának megfelelő egy bizonyos feszültségi állapot. Ezen ábrázolásban tehát a rugalmassági határnak egy felület felel meg, mely magába zárja azt a térrészt, mely a tisztán rugalmas alakváltozással járó feszültségi állapotokat ábrázolja. E felületet a *rugalmasság határfelületének* szokták nevezni. Ugyanígy egy felületet adnak azon feszültségi állapotok, melyekben az anyag összefüggése

<sup>1</sup> A kérdés irodalmára nézve lásd: Encyklopædie der math. Wissenschaften IV. 31 (1914), 8 -10. pont. Szerző megjegyzése a javítás alkalmával.

megszűnik. E második határfelületet a *törés határfelületének* nevezhetjük.<sup>1</sup>

Mindenekelőtt meg kell jegyeznünk, hogy szigorúan véve nem lehet oly értelemben *rugalmassági határról* beszélni, hogy e határon belül minden alakváltozás tökéletesen megfordítható. Minél pontosabb mérőeszközöket használunk, annál hamarabb találunk a rugalmas alakváltozás mellett maradó deformatiót. Ez érthetővé válik, ha tekintetbe vesszük a közönségesen isotropnak tekintett szilárd testek bonyolult szerkezetét; élesen kimondott rugalmassági határt épen csak teljesen homogén és legkisebb részeiben is isotrop anyagon várhatunk. A műszaki gyakorlat általában úgy segít magán, hogy rugalmassági határ alatt azon feszültségi állapotok összességét érti, melyeknél a *maradó* alakváltozás eléri a *rugalmas* alakváltozás egy meghatározott hányadát. Egy ily többé-kevésbé önkényes megállapodás ugyan az egyes anyagok összehasonlítására a gyakorlat szempontjából teljesen megfelelő alapot ad, de céljainkra, a törvényszerűségek kutatására kevésbé alkalmas.

A mi a *törési határt* illeti, ennek fogalmi meghatározása nem okoz ugyan nehézséget, azonban a törést, mint azt később alkalmunk lesz bővebben kifejteni, rendesen labilis egyensúlyi helyzetek sorozata előzi meg, a minnek nemcsak az a következménye, hogy a törés pillanatában uralkodó feszültségi állapot megállapítása kétségessé válik, hanem az egész törési folyamat bizonyos mértékig függővé lesz a kísérleti gép berendezésétől és a kísérlet végrehajtási módjától is. Valóban jellemző az anyagra, mint a tapasztalat mutatja, csupán a maximális terhelés, mely a törést megelőzi.

A *következő vizsgálatokban* — megegyezésben több más kísérletezővel — *képlékeny és szivós anyagokon a rugalmassági határ helyett a folyási határt, rideg anyagokon a törést megelőző maximális terhelésnek megfelelő feszültségi állapotot választottam az összehasonlítás alapjául.*<sup>2</sup> A *folyási határ* az

<sup>1</sup> H. HERTZ (Verhandlungen des Vereines zur Förderung des Gewerbefl. 1882. Ges. Werke I. p. 174) a rugalmasság határfelületét «*Festigkeitsfläche*»-nek nevezi. V. ö. FÖPPL idézett cikkét.

<sup>2</sup> A műszaki irodalom szóhasználatát, nevezetesen REJTŐ tanár

által van jellemezve, hogy jelentékeny maradó alakváltozást tapasztalunk állandó feszültségi állapot, vagy legalább igen csekély feszültségemelkedés mellett. E határ rendszeren sokkal biztosabban megállapítható, mint a rugalmassági határ<sup>1</sup> és jellegzetesebb a maradó alakváltozás beálltára nézve, olyannyira, hogy sokan a folyási határt megelőző maradó alakváltozást csupán az anyag inhomogeneitásának tulajdonítják. Épígy igen valószínű, hogy rideg anyagokon a terhelés maximumát megelőző maradó alakváltozás csak az anyag gyengébb helyeire szorítkozik s a rugalmas alakváltozás határára voltaképen a maximális terhelesnek megfelelő feszültségi állapot jellemző. A rideg anyagok maximális terhelése és a képlékeny anyagok folyási határa annyiban is megfelelnek egymásnak, hogy mindkettő az alakváltozási görbe vízszintes érintője által van jellemezve; e felfogást kísérleteim szépen igazolták, a mennyiben *oly anyagokon, hol folytonos átmenet van a rideg és képlékeny állapot között*, mint pl. a márványon, az *alakváltozási görbe maximuma a folyási határba megy át.*

Ha a következőkben a rugalmasság határáról vagy egyszerűen határállapotokról szólunk, általában az így megállapított határokat értjük.

---

megállapításait követve, az anyagoknak szilárdsági próbákkal szemben való viselkedése alapján a következő típusokat különböztetünk meg: *ridegnek* mondjuk az anyagot, ha a rugalmas alakváltozást jelentékeny maradó alakváltozás nélkül követi a törés; *képlékenynek*, ha jelentékeny maradó alakváltozást szenved közel állandó vagy csökkenő erőszükséglet mellett végül *szívós* anyag alatt oly anyagot értünk, melyen a maradó alakváltozás növekvő erőszükséglet mellett megy végbe. Az egyes típusokat «alakváltozási görbéik» (feszültség, mint a deformatio függvénye) jellemzik.

<sup>1</sup> A folyási határ gyakran élesen meg van határozva az alakváltozási görbe inflexiója által, mely az által jó létre, hogy számos a szívós anyagok típusához tartozó anyag előbb közel állandó erőszükséglet mellett megy át bizonyos maradó deformáción s csak azután kezdődik az erőszükséglet jellegzetes emelkedése. Olykor *felső és alsó folyási határt* is meg lehet különböztetni, minthogy némely anyagon (pl. lágú vasnál) az erőszükséglet a folyás kezdetén kissé csökken s azután ismét nő. Az alakváltozási görbének ez esetben tehát közvetlenül egymásután egy maximuma és egy minimuma van.



2. *Egyszerű hypothesisek.* Bárhogy definiáljuk is a rugalmassági határt, jóformán egyetlen anyag sincs, melynél a rugalmasság határfelületét teljesen ismernők. A legtöbb kísérleti adat egyszerű húzó, nyomó vagy nyíró igénybevételre vonatkozik és a műszaki irodalom hosszú ideig megelégedett azzal, hogy bizonyos egyszerű és plausibilisnek látszó hypothesisek alapján vonjon következtetéseket összetettebb esetekre.

Előbbi ábrázolási módunkat megtartva, egyes izolált pontokból következtettek az egész felület alakjára.

A legrégebb és legegyszerűbb feltevés szerint, melyre nevezetesen LAMÉ és CLAPEYRON, továbbá CLEBSCH<sup>1</sup> alapították szilárdsági számításaikat, a legnagyobb főfeszültség irányadó a rugalmassági határra nézve; e hypothesis azonban a tapasztalatok nem igazolták. Époly kevésbé fedí a tapasztalatokat egy másik, főleg egyes matematikusok által képviselt hypothesis, mely szerint a deformatio-munka (vagyis a rugalmas potential) az igénybevétel helyes mértéke.<sup>2</sup> Mindkét hypothesisnek ellentmond már az az egyszerű tény is, hogy *minden oldalról egyenlő nyomás* esetén ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) sokkal nagyobb feszültségnek vethetjük alá az anyagot és sokkal nagyobb energiamentenységet halmozhatunk fel benne maradó alakváltozás nélkül, mint *egyirányú nyomással* ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ); sőt valószínű, hogy az előbbi esetben egyáltalában sohasem érjük el a rugalmasság határát.

E hypothesiseket elejtve, csak két feltevessel kell bővebben foglalkoznunk: az egyik szerint a rugalmasság határára nézve a *legnagyobb lineáris méretváltozás*, a másik szerint a *legnagyobb és legkisebb főfeszültség valamely függvénye* irányadó.

3. *A legnagyobb lineáris méretváltozás elmélete.* E hypothesis lényegében ST. VENANT-tól<sup>3</sup> származik s ő molekulár-

<sup>1</sup> LAMÉ és CLAPEYRON, Paris, Mém. prés. par divers savants 4 (1833) [1828] p. 465, továbbá Journal f. Math. 7 (1831) p. 150. A. CLEBSCH. Theorie der Elastizität, Leipzig 1862. p. 134.

<sup>2</sup> V. ö. E. BELTRAMI, Ist. Lomb. Rendiconti 18 (1885). R. GIRTLEB, Berichte der kais. Akad. Wien 116 (1907) p. 509.

<sup>3</sup> Résumé des leçons sur l'application de la mécanique par L. NAVIER, 3. éd: avec des notes et des appendices de B. DE ST. VENANT, Paris (1864).

elméleti megfontolásokból vezette le. Szerinte a maradó alakváltozásokhoz a molekulák egy meghatározott relativ eltávolodása szükséges és ez bizonyos pozitív méretnövelésben nyilvánul. Ez alapon pl. egyszerű nyomási kísérletnél a törési határra nézve a kereszt-irányú nyúlás volna irányadó, ellentétben a régibb COULOMB-féle felfogással, mely szerint, mint a következő pontban látni fogjuk, a nyomási szilárdság lényegében az anyagnak csúszó feszültségekkel szemben való ellenállásától függ.

Nevezetes dolog, hogy a ST. VENANT-féle hypothesis, noha kísérletileg voltaképen sohasem nyert igazolást s bár ST. VENANT saját szavai szerint maga sem tekintette «a tudomány utolsó szavának e kérdést illetőleg»,<sup>1</sup> csaknem az egész műszaki irodalom átvette. GRASHOF,<sup>2</sup> a kinek tekintélye egyébként nagymértékben hozzájárult az e hypothesisen alapuló számítási mód elterjedéséhez, annyiban általánosította az elméletet, hogy a pozitív és negatív méretnövelés számára külön határokat vett fel. Az újabb kísérletek azonban azt mutatják, hogy e theoria ily alakban sem állja meg helyét.

A legnagyobb méretnövelés hypothesisén alapul azon, csaknem az összes műszaki tankönyvek által elfogadott gyakorlati számítási eljárás, mely az igénybevétel mértékeül az ú. n. *ideális* (redukált) *feszültséget* tekinti. Az ideális feszültség a három főfeszültség egy lineáris kapcsolata és e szerint a rugalmasság határfelülete síkობól állana.

4. *A rugalmassági határ, mint a legnagyobb és legkisebb főfeszültség függvénye.* Azt a feltevést, hogy a rugalmassági határ csak a két szélső főfeszültségtől függ, általában MOHR-nak tulajdonítják; kevésbé általánosan fogalmazva megtalálható azonban régebbi kutatóknál is. A gondolat, mely e hypothesis alapjául szolgál, COULOMB-tól ered, a mit annál inkább ki akarok emelni, mert e gondolat azóta ugyan többször fel-

---

I. 1. p. CCI. ST. VENANT maga a hypothesis MARIOTTENAK tulajdonítja. Idézi továbbá PONCELET-t, Cours de mécanique appliquée (1839), ki hasonló nézetten volt a kérdést illetőleg.

<sup>1</sup> Résumé des leçons par L. NAVIER, CCV. oldal.

<sup>2</sup> F. GRASHOF. Theorie der Elastizität und Festigkeiten. Berlin 1878.

merült a műszaki irodalomban, a kiváló francia physikus szerzősége azonban mindinkább feledésbe ment.

COULOMB<sup>1</sup> gondolatmenetének megfelelően a rugalmassági határ problémáját így lehet fogalmazni:

Mi a feltétele annak, hogy valamely feszültségi állapot ne okozzon maradó elmozdulást egy szilárd test belsejében, ha a maradó alakváltozást mint csúszást fogjuk fel, melyet bizonyos surlódásszerű ellenállás akadályoz?

Ha e surlódási ellenállásról feltételezzük, hogy egy állandó részből és — hasonlóan két szilárd test egymáson való surlódásához — a csúszási felületre merőleges nyomással arányos egy részből áll, akkor könnyen belátható, hogy az egyensúly feltétele valamely pontban akkor fejezhető ki, hogy a ponton átmenő összes felületelemekre nézve

$$(1) \quad |\tau| < x + f\sigma$$

egyenlőtlenség áll fenn, hol  $\tau$  és  $\sigma$  a tangenciális és normális feszültség értékeit,  $x$  a surlódási ellenállás állandó részét és  $f$  a «surlódási együtthatót» jelenti. Ellenben mihelyt valamely felületelemre nézve

$$(2) \quad |\tau| \geq x + f\sigma,$$

akkor beállhatnak maradó elmozdulások.

E feltevések szerint tehát valamely feszültségi állapot, melyet a három főfeszültség  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  értékével akarunk jellemezni, a rugalmassági határon belül esik, míg minden felületelemre nézve az (1) egyenlőtlenség áll fenn; a rugalmassági határnak pedig azon feszültségi állapotok felelnek meg, melyeknél egy felületelemparra<sup>2</sup> nézve a

$$(3) \quad |\tau| = x + f\sigma$$

<sup>1</sup> CH. A. COULOMB, Essai sur une application des règles de maximis et minimis, Paris, Mém. prés. par div. savants 7 (1776) [1773]. — Coulombnak a szilárdságtan alapjaira vonatkozó gondolatait s hatásukat a későbbi irodalomra igen érdekesen ismerteti BOUASSE, Annales de Chim. et Phys. 23 (1901) p. 198.

<sup>2</sup> Illetőleg egy körkúp érintő síkjaira nézve, ha két főfeszültség egyenlő.

egyenlet, az összes többi felületelemre nézve azonban az (1) alatti egyenlőtlenség áll fenn. Mint az egyszerű számítás mutatja, ez az eset akkor áll elő, ha a két szélső főfeszültség közt a

$$\sigma_1 - \lambda \sigma_3 = C$$

összefüggés áll fenn, hol

$$\lambda = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right)$$

$$C = 2x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right)$$

és

$$\operatorname{tg} \sigma = f.$$

*A középső főfeszültség értéke e feltételben egyáltalában nem szerepel.*

Az e sorokban ismertetett egyszerű és kétségkívül elmés megfontolás a szilárdságtani elméletek egész sorát vontta maga után, melyek közül csak CH. DUGUET,<sup>1</sup> továbbá újabban A. MESNAGER<sup>2</sup> és P. LUDWIK<sup>3</sup> dolgozatait akarom említeni. Azonban TRESCA<sup>4</sup> kísérleti eredményei a szilárd testek folyásának feltételét illetőleg, továbbá a THOMSON és TAIT<sup>5</sup> által képviselt «maximum stress difference theory» szintén csak speciális esetei a COULOMB-féle «szabálynak» — mint ő maga teoriáját nevezi — ha a (3) egyenletben  $\lambda = 1$  értéket helyettesítünk. A másik határeset  $x = 0$  a cohæsio nélküli szemcsés közeg (pl. száraz homok) egyensúlyi feltételét adja.

5. *A Mohr-féle elmélet.* MOHR<sup>6</sup> a COULOMB-féle szabályt

<sup>1</sup> CH. DUGUET, Limite d'élasticité et resistance à la rupture, T. II. Paris (1885); v. ö. P. ROTH, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues. Berlin 1902.

<sup>2</sup> A. MESNAGER, C. R. Paris 126 (1898) p. 515.

<sup>3</sup> P. LUDWIK, Technologische Mechanik. Wien 1910.

<sup>4</sup> TRESCA, Mém. prés. par divers savants à l'Académie, Paris 18 (1864) p. 733 és 20 (1869) p. 281 és p. 617.

<sup>5</sup> THOMSON and TAIT, Treatise on natural philosophy I. 2, Cambridge 1882 p. 422.

<sup>6</sup> O. MOHR erre vonatkozó iratai: Civilingenieur 28 (1882) p. 113. Zeitschrift d. Ver. d. Ing. (1900) p. 1524, továbbá Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik. Berlin 1906, p. 187.

általánosabban fogalmazza, midőn a következő két hypothesisit állítja fel:

a) a rugalmassági határ független a középső főfeszültség értékétől;

b) a rugalmassági határt bármely igénybevétel esetén egy

$$\tau = f(\sigma)$$

alakú összefüggés határozza meg oly értelemben, hogy a határállapotban egy felületelempárra nézve ezen egyenlet, a többi felületelemre nézve pedig a

$$\tau < f(\sigma)$$

egyenlőtlenség áll fenn. A rugalmassági határon belül minden felületelemre nézve az utóbbi egyenlőtlenségnek kell fennállania.

A két feltevés összefoglalva egyenértékű azzal a hypothesisissal, hogy a rugalmassági határt egy  $\sigma_1 = g(\sigma_3)$  alakú egyenlet határozza meg, hol  $\sigma_1$  a legnagyobb,  $\sigma_3$  a legkisebb főfeszültséget jelenti.

MOHR ismert grafikus ábrázolásában<sup>1</sup> (melyre egyébként MOHR és DUGUET egymástól függetlenül jutott) minden feszültségi állapotnak egy kör felel meg és a  $\tau = f(\sigma)$  egyenlet által meghatározott görbe a határállapotoknak megfelelő körök burkolója. A mi ábrázolásunkat alkalmazva a  $\sigma_1 = g(\sigma_3)$  egyenlet a

<sup>1</sup> MOHR a feszültségi állapotok ábrázolására a

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

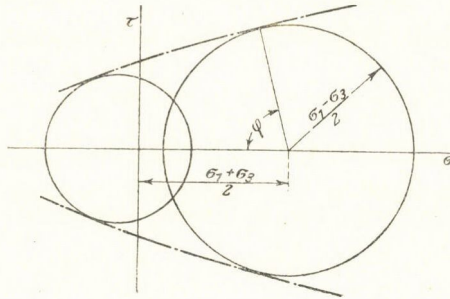
összefüggéseket használja fel, melyek az egy  $\alpha$  szög alatt hajló és  $\sigma_2$  irányán átmenő síkra vonatkoztatott merőleges és tangenciális feszültségeket adják meg a  $\sigma_1$  és  $\sigma_3$  főfeszültségek függvényében. Minthogy ezen egyenletek a  $\tau, \sigma$  koordinatarendszerben mint egy kör paraméteres egyenletei foghatók fel, e koordinatarendszerben minden feszültségi állapotot egy kör ábrázol, melynek sugara  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  és középpontja  $\sigma$  tengelyen, a kezdőponttól  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  távolságra fekszik (l. az 1. ábrát).



határfelületnek egy a  $\sigma_2$  tengelyre merőleges sikkal való metszetét határozza meg és a MOHR-féle hypothesis lényege épen abban áll, hogy ez az egyetlen metszet az egész felület meghatározza. A hypothesis kísérleti igazolása tehát az egész problémát igen lényegesen egyszerűsítiené.

6. A Mohr-féle elméletet támogató kísérletek. A MOHR-féle elmélet mellett szól mindenekelőtt az újabb kísérletek egy sorozata, melyeket angol és amerikai kísérletezők képlékeny és szivós anyagokkal végeztek. A kísérletek célja a folyási határ összehasonlítása volt különböző összetett igénybevételeknél.

J. GUEST<sup>1</sup> vas- és veresrézcsöveket vizsgált meg, egyidejűleg igénybe véve őket húzásra és torsióra, húzásra és belső nyo-



1. ábra.

másra, továbbá torsióra és belső nyomásra. E. L. HANCOCK<sup>2</sup> tömör rúdakon a torsiót húzással, W. A. SCOBLE<sup>3</sup> a torsiót hajlítással kombinálta. Mind e kísérletek azt mutatják, hogy a középső főfeszültségnek valóban nincs befolyása a folyási határra. A másik két főfeszültségre nézve pedig jó közelítéssel igazolták a kísérletek a  $\sigma_1 - \lambda \sigma_3 = C$  összefüggést, hol a megvizsgált anyagoknál  $\lambda$  közel áll az egységhez.

A régebbi kísérletek közül BAUSCHINGER<sup>4</sup> összehasonlító húzó,

<sup>1</sup> J. GUEST, Phil. Mag. 50 (1900) p. 69.

<sup>2</sup> E. L. HANCOCK, Phil. Mag. 12 (1906) p. 418, ibid. 15 (1908) p. 214.

<sup>3</sup> W. A. SCOBLE, Phil. Mag. 12 (1906) p. 533.

<sup>4</sup> J. BAUSCHINGER, Mittheilungen aus dem techn. mech. Labor. München 8 (1874).

nyomó és csavaró kísérleteit lehet megemlíteni, melyeket Bessemer-aczéllal végzett és melyek nagyjában szintén megfelelnek a MOHR-féle elméletnek. Nem szabad azonban elfeledni, hogy e kísérletek csak egyes izolált értékeket adnak és ennél fogva korántsem oly bizonyító erejűek, mint pl. GUEST kísérletei, melyek a feszültségi állapotok egész folytonos sorára vonatkoznak.

A mint látjuk tehát, *képlékeny* és *szívós* anyagokon a MOHR-féle feltevéseket a tapasztalat meglehetősen biztonsággal igazolja; <sup>1</sup> sokkal kevésbé meggyőzőek azonban a *rideg* anyagokra vonatkozó kísérletek. Itt mindenekelőtt hivatkozni lehet BAUSCHINGER <sup>2</sup> cement-próbatestekkel végzett összehasonlító húzási, nyomási és nyírási kísérleteire. MOHR a nyírási szilárdságra nézve egy egyszerű interpolációs képletet ad azon az alapon, hogy a feszültségi állapotokat ábrázoló körök burkolóját közelítőleg egyenessel helyettesíti. Így a nyírási szilárdságot a húzási ( $\sigma_h$ ) és nyomási ( $\sigma_{ny}$ ) szilárdság függvényében a  $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_h \sigma_{ny}}$  képlet adná meg. A BAUSCHINGER-féle kísérletekből középértéket számítva, e képlet a tapasztalattól ugyancsak kb. 8—9%-kal tér el, azonban maguk az egyes értékek igen ingadozók és egyes kísérleteken belül nagy eltérések fordulnak elő. Azonkívül, mint már fennebb megjegyeztük, a kérdés eldöntésére egyes izolált határállapotok összehasonlítását nem tarthatjuk kielégítőnek.

A MOHR-féle feltevések igazolásának szempontjából inkább figyelemreméltóak FÖPPL <sup>3</sup> kísérletei, ki közvetlenül azt akarta megvizsgálni, vajjon a középső főfeszültség értéke valóban lényegtelen-e a nyomási szilárdságra nézve? E célból a közönséges nyomási próbán kívül még egy második szilárdsági állapotot létesít, melynél a harmadik főfeszültség a legnagyobb főfeszültséggel egyenlő. Ha a MOHR-féle feltevés helyes, akkor az ezen

<sup>1</sup> GUEST kísérleteihez hasonló eredményekre vezettek még ifj. SZILY K. kísérletei (Nemzetközi anyagvizsgáló kongresszus, Budapest 1901), melyeknél belső nyomásra igénybevett csöveket húzásnak vetett alá.

<sup>2</sup> J. BAUSCHINGER, Mittheilungen aus dem techn. mech. Labor. München 8 (1879).

<sup>3</sup> A. FÖPPL, Mittheilungen aus dem techn. mech. Labor. München 27 [1900].

igénybevételi módnak megfelelő szilárdság — melyet FÖPPL «*Umschlingungsfestigkeit*»-nek nevez — egyenlő a nyomási szilárdsággal. FÖPPL kísérletei szerint a kétféle szilárdság közel egyenlő, ha a nyomólapok és a próbatest közé kenőanyagot vezetünk be, ellenben igen különböző értékkel bír, ha a próbatest a nyomólapokkal közvetlenül érintkezik. Vajjon a nyomási szilárdság helyes értékét csakugyan a nyomólapok kenése útján kapjuk-e, mint FÖPPL feltételezi, véleményem szerint igen kétséges, úgy hogy FÖPPL ezen kísérleteit nem tartom teljesen meggyőzőeknek, különösen minthogy később ismertetendő kísérleteim ellenkező eredményre vezettek.

7. *A Mohr-fele hypothesisek ellen szóló kísérletek.* Ez irányban főleg azok a *nagynyomású térben végezett szakítási kísérletek* jönnek tekintetbe, melyeket W. VOIGT kezdeményezésére és vezetése alatt két tanítványa végzett rideg anyagokkal. Ezek közül SELLA<sup>1</sup> megfigyelései kősórúdacsákra, JANUSZKIEWICZ<sup>2</sup> kísérletei stearinsav, palmitinsav és parafin keverékéből előállított præparatumokra vonatkoznak. Az anyagok megválasztásánál a præparatumok homogeneitása mellett a képlékenység lehető kizárása volt az irányadó szempont; a kísérleti berendezés nagy előnye, hogy — ellentétben más összetett igénybevételre vonatkozó kísérletekkel — a *feszültség eloszlása* a próbatestben csaknem teljesen *homogen* lehetett. A kísérleteknek kétségtelenül gyenge pontja azonban, hogy a próbatestek igen kis méretűek voltak.

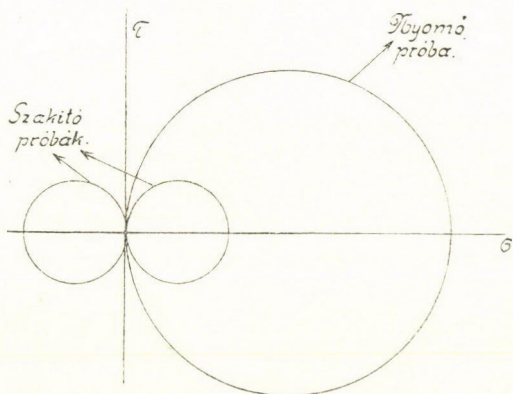
A kísérletek úgy történtek, hogy a húzófejek közé fogott próbatestet előbb minden oldalról egyenletes nyomás alá vetették s azután axiális húzással a hosszirányú feszültséget addig csökkentették, míg a próbatest elszakadt. A feszültségi állapotot tehát úgy jellemezhetjük, hogy — nyomási feszültséget számítva pozitív előjellel — a két nagyobb főfeszültség volt egyenlő. ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .) A kísérletek sora, összevetve a közönséges húzási szilárdsággal, azt mutatja, hogy a hossz- és keresztirányú fő-

<sup>1</sup> Annalen der Physik 53 (1894) p. 43. — Újabban hasonló kísérleteket végzett teljesen hasonló eredménnyel W. E. WILLIAMS, Phil. Mag. 15 (1908) p. 81.

<sup>2</sup> Annalen der Physik 67 (1899) p. 452.



feszültségek különbsége az összes esetekben közel ugyanoly nagy volt. Ha azonban ehhez hozzáveszszük, hogy a megvizsgált anyagok nyomási szilárdsága a húzási szilárdságnak körülbelül 4—5-szöröse, tagadhatatlan, hogy ez esetben a tények valóban ellenmondásban állanak a MOHR-féle hypothesis-sal. Ez utóbbi szerint ugyanis a határállapotok csak a két szélső főfeszültség értékétől függenek és így ha, mint a szakítási kísérletek mutatták, a rugalmassági, illetőleg törési határra nézve a két szélső főfeszültség különbsége irányadó, ennek a különbségnek a nyomási kísérletben is ugyanazon értékkel kellene bírnia. Ez eset-



2. ábra.

ben — mint VOIGT<sup>1</sup> is kiemeli — a határállapotoknak megfelelő körök nem is birhatnak közös burkolóval, mely az összes rugalmas alakváltozást előidéző feszültségi állapotokat magába zárná (l. a 2. ábrát).

8. *A Mohr-féle hypothesisok érvényességi köre.* E kísérletek mindenesetre annyit bizonyítanak, hogy a MOHR-féle hypothesisok oly általánosságban, mint MOHR felállította őket, nem tarthatók fenn. A kérdéses pontok a következőkben foglalhatók össze :

a) A kísérleti esetek egy jelentékeny részében a rugalmas-

<sup>1</sup> W. VOIGT, Annalen der Physik 4 (1901) p. 567.

sági határ lényegében csak a két szélső főfeszültség különbségétől függ. Más esetek ennek határozottan ellentmondanak.

*Kérdéses tehát, mely esetekben függ a rugalmassági határ általában csak a két szélső főfeszültségtől, s mely esetekben van befolyással a harmadik főfeszültség is. Ehhez járul egy speciálisabb kérdés: mely esetekben irányadó a két szélső főfeszültség különbsége.*

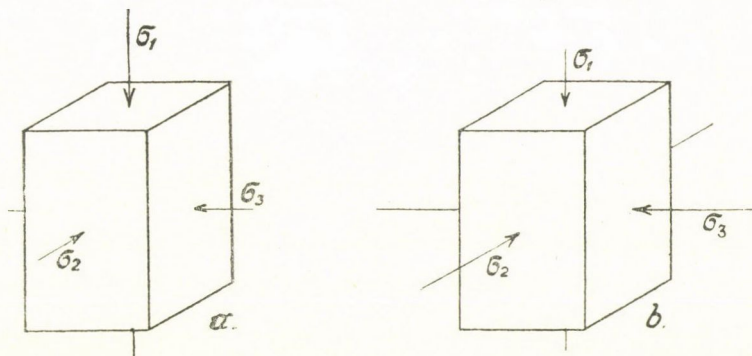
b) MOHR második hypothesis azt követeli, hogy a rugalmasság határát bármely igénybevételnél egy, a tangentiális és normális feszültség között fennálló összefüggés határozza meg. Ha azonban az ember a tényeket, nevezetesen a törést kísérő jelenségeket szemügyre veszi, kétségesnek látszik, hogy oly különböző jellegű folyamatok, mint pl. a rideg anyagok törése szakítási és nyomási próbánál, egy egységes törvényszerűség által legyenek meghatározva. Lényegében a törés két típusát lehet megkülönböztetni,<sup>1</sup> a szerint, a mint az anyag összefüggése szakadás vagy a részeknek egymáson való csúszása útján szűnik meg. A szakadást jellemzi, hogy a törési felület merőleges a legnagyobb húzó (illetőleg legkisebb nyomó) feszültség irányára, míg a csúszás útján bekövetkező törésnél a törési felület a főfeszültségekkel ferde szöveget alkot. Azonfelül a törési felület az első típusnál rendszeren fényes felszínnel bír, míg a második típusnál finom, lisztszerű porral van fődve.

*Ezzel eljutottunk a második felvilágosításra szoruló kérdéshez: vajjon mely esetekben következik be szakadás és mely esetekben csúszásszerű törés? mily feltételeknek kell a főfeszültségek közt fennállniok, hogy az egyik vagy másik eset következék be?*

9. *A kísérletek terve.* Az alábbiakban ismertetendő kísérletek lényege abban állott, hogy a próbatestek igénybevételénél a főfeszültségeket lehetőleg egymástól függetlenül lehetett

<sup>1</sup> L. PRANDTL egy a német természettudósok 1907. évi nagygyűlésén tartott előadásában a törés két típusát a «Verschiebungsbruch» és «Trennungsbruch» szóval jelöli. A törés két típusára ráutalt sokkal régebben W. THOMSON, Proc. Roy. Soc. 17 (1869) p. 312. Érdekes, hogy már COULOMB a csúszásra vonatkozó  $\tau < \alpha + f\sigma$  feltételhez a szakadásra való tekintettel még a  $\sigma < \sigma_{max}$  feltételt is hozzáfűzi.

változtatni. Ezenkívül fontosnak tartottam, hogy lehetőleg *homonogén feszültségi eloszlást* tudjak létesíteni s így eltértem attól a módszertől, melyet eddig a legtöbb kísérletező követett, t. i. különböző igénybevételeknek, minő a húzás, torsio, hajlítás, belső nyomás, egymással való kombinálásától. *E helyett nyomási és szakítási kísérleteket vettem terbe oldalirányú egyenletes folyadéknyomás egyidejű alkalmazása mellett.* Ez elrendezéssel a feszültségi állapotok két sorát lehet létesíteni, melyek abban különböznek egymástól, hogy az első sorozatban (nyomási kísérletek [l. 2. ábra a]) a két nagyobb, a második



3. ábra.

sorozatban (szakítási kísérletek [l. 2. ábra b]) a két kisebb főfeszültség egyenlő.<sup>1</sup> E két kísérletsor a felvetett kérdéseket ugyancsak arra a speciális esetre dönti el, midőn két-két főfeszültség egyenlő, de e speciális eset egyrészt gyakorlatilag a legfontosabb, másrészt remélhető, hogy felvilágosítást és útmutatást ad a további kutatásra az általános esetet illetőleg is, midőn mindhárom főfeszültség különböző értékkel bír. A mi a problémában valóban jellegzetesnek látszik, az lényegében bennfoglaltatik már speciális esetünkben is.

<sup>1</sup> A különbség analog ahhoz, mely a FÖPPL-féle *Zerrungsfestigkeit* és *Umschlingungsfestigkeit* közt fennáll, de a FÖPPL-féle kísérletek minden sorozatból csak egy-egy feszültségi állapotot ragadnak ki, a mennyiben két főfeszültség egyenlő, a harmadik pedig mindig zérus. V. ö. A. FÖPPL, l. c.

A következő második fejezet a kísérleti gép szerkezetét és a kísérleti berendezést ismerteti, a további fejezetek a kísérletek eredményeit foglalják össze.

## II. FEJEZET.

### A kísérleti berendezés.

Az első kísérletsorozat (l. III. fejezet) *nyomási* kísérletekből állott: *a hengeralakú próbatestek egyrészt szilárd nyomófejek közé fogva axiális nyomásnak, másrészt egyidejűleg palástfelületükön egyenletes folyadéknyomásnak voltak alávetve.* A következőkben lényegében e nyomási kísérletekre szolgáló berendezést ismertetjük.

1. *A kísérleti gép.* A kísérleti gép szerkesztésekor az volt a vezető szempont, hogy a nyomófejek által gyakorolt axiális erőt és a folyadéknyomást egymástól *függetlenül lehessen változtatni és mérni.* A kísérleti gép vázlatos elrendezését a 4. ábra mutatja.

A *folyadéknyomás* létesítése úgy történik, hogy a vízzel telt *a* térben kézi szivattyúval nyomást létesítünk és ezt a nyomást a *b* dugattyú kb. 1:24 arányban megsokszorozva átviszi a *c* térre. A *c* és *d* terek glicerinnel vannak megtöltve és az *e* betét fúrásán át közlekednek egymással úgy, hogy a *d* térben elhelyezett próbatest palástfelületén a *b* dugattyú által létesített nyomásnak van alávetve. A glicerin azért előnyös a nagy nyomású tér töltésére, mert egyrészt csak kb. félfannyira komprimálható, mint a víz, másrészt viscositásánál fogva a tömitést megkönnyíti.

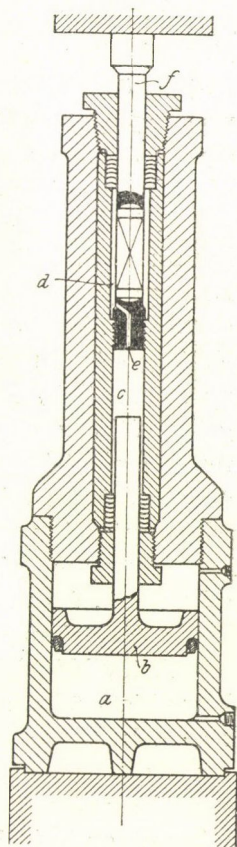
Az *axiális nyomás* átvitele a próbatestre következőképen történik: Az egész készülék egy normális nyomási kísérletekre szolgáló hidraulikus sajtó dugattyúján nyugszik, az *f* dugattyú pedig, mely felülről a *d* térbe behatol, ugyane sajtó felső nyomólapjára támaszkodik; ha tehát a próbatestet az *f* dugattyú és a kísérleti gép vázába becsavart *e* betét közé fogjuk, a sajtó dugattyúja által gyakorolt egész erőhatás a próbatest keresztmetszetére vitetik át. A próbatest tehát oly axiális nyomóerőnek

van alávetve, mely független a  $d$  térben uralkodó nyomástól és eltekintve a tömitéskor előálló surlódástól (1. a 2. pontot), époly módon mérhető, mint a nyomóerő közönséges nyomási kísérletekben. Hogy ez erőhatásnak a próbatest tengelyével való párhuzamossága biztosíttassék, több helyen gömbfelület van közbeiktatva.

A kísérleti gép az *esseni* KRUPP-czég-től származik; a magas nyomású henger — mely 6000 atmosphæra belső nyomásra van számítva — két melegen egymásra húzott aczélesőből áll, 24, illetőleg 45 mm falvastagsággal; a belső cső furata 50 mm. A szerkezeti részek közül az  $e$  betét és az  $f$  dugattyú van legnagyobb igénybevételnek alávetve. Ezek ennél fogva 4%-os különleges KRUPP-féle nikkelaaczélből készültek. Ennek az anyagnak rugalmassági határa kb. 10,000 atm; minthogy az  $f$  dugattyú és a próbatest egyenlő átmérőjű, az utóbbinak axiális főfeszültségét  $e$  határig lehetett fokozni. A keresztirányú nyomás felső határa 6000 atm. volt.

2. Az erőhatások mérése a surlódás tekintetbevételével. Az axiális erő és a  $d$  térben uralkodó nyomás mérése folyadékmanométerekkel történt, melyek közül az egyik a hydraulikus sajtó hengeréhez, a második pedig az  $a$  térhez volt kapcsolva. Mindkét mérést lényegesen befolyásolják a surlódási ellenállások, melyek a  $D_1$ , illetőleg  $D_2$  dugattyú és tömitéseik közt beállanak. Azonban a közelebbi vizsgálat azt mutatta, hogy  $e$  surlódási erők oly állandó törvényszerűségeknek vannak alávetve, hogy igen nagy pontossággal tekintetbevehetők és a mérés megbízhatóságát egyáltalában nem befolyásolják.

A surlódási erők meghatározása úgy történt, hogy a  $b$  és  $c$  teret teljesen megtöltöttem glicerinnel és a manométereket



4. ábra.

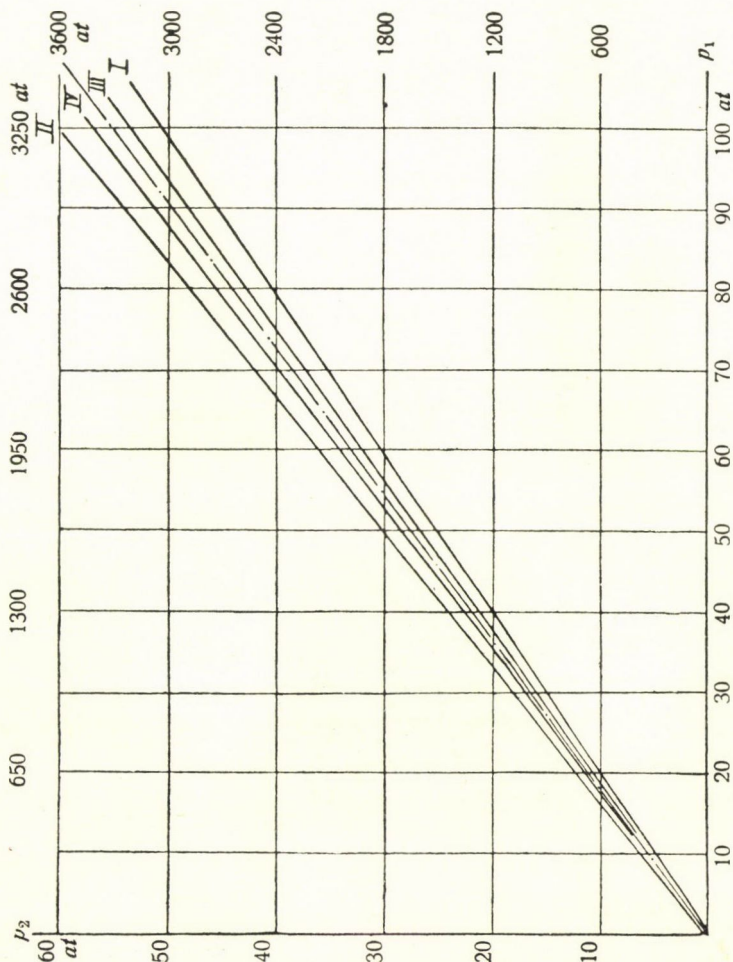
összehasonlítottam a két dugattyú különböző irányú elmozdulásaikor. Jelöljük azt a surlódóerőt, mely a  $b$  dugattyúnak a kísérleti gép vázához való elmozdulásakor beáll,  $R_1$ -gyel, a kísérleti gép és az  $f$  dugattyú relatív elmozdulásánál fellépő surlódást pedig  $R_2$ -vel. Könnyen belátható, hogy a manometerek jelzésének különbsége oly esetekben, midőn a két dugattyú a kísérleti gép vázához képest egyirányú elmozdulást végez, az  $R_1 + R_2$  összegnek, ha pedig a két dugattyú egymásfelé közeledik vagy egymástól eltávolodik, az  $R_1 - R_2$ , illetőleg  $R_2 - R_1$  különbségnek felel meg. Ily módon megkaphatjuk tehát  $R_1$  és  $R_2$  értéket mint a  $d$  térben uralkodó nyomás függvényét.

A jelzett módon összesen négy mozgási állapotot figyelhetünk meg. Két mozgási állapotot kapunk azáltal, hogy a  $D_1$  dugattyú maga előtt tolja a  $D_2$  dugattyút, vagy viszont  $D_2$  a  $D_1$ -et. A harmadik mozgási állapotban a két dugattyú egyidejűleg előrehatol; minthogy a folyadék az alkalmazott nagy nyomásoknál igen jelentékeny térfogatváltozást szenved, a dugattyú útja ez esetben is elég nagy volt arra, hogy meghatározott surlódási állapot álljon elő. Végül a negyedik mozgási állapotot úgy nyerjük, hogy mindkét szivattyút egyidejűleg lassan tehermentesítjük.

A négy mozgási állapotnak megfelelő manometer-leolvasásokat az 5. ábra mutatja. A surlódás, mint látjuk, igen jó közelítéssel lineárisan nő a  $c$  térben uralkodó nyomással.

A további kísérletekben közvetlenül az 5. ábra diagrammját használtam fel a surlódási ellenállásoknak megfelelő correctiók meghatározására. Minthogy a voltaképeni kísérlet előtt minden egyes alkalommal előbb a  $c$  térben nyomást kellett létesíteni s ezalatt a próbatest lazán volt a két nyomófej közé helyezve, minden egyes alkalommal módomban állott a surlódási viszonyok ellenőrzése. Ez ellenőrző megfigyelésekkor a surlódási ellenállások igen állandóaknak bizonyultak, olyannyira, hogy ha a leolvasások nem feleltek meg az 5. ábrán látható diagrammnak, nagy valószínűséggel arra lehetett következtetni, hogy a tömítőgyűrűk valamelyike sérülést szenvedett. A tömítés helyreállítása után szabályszerűen beálltak ismét a normális surlódási viszonyok.

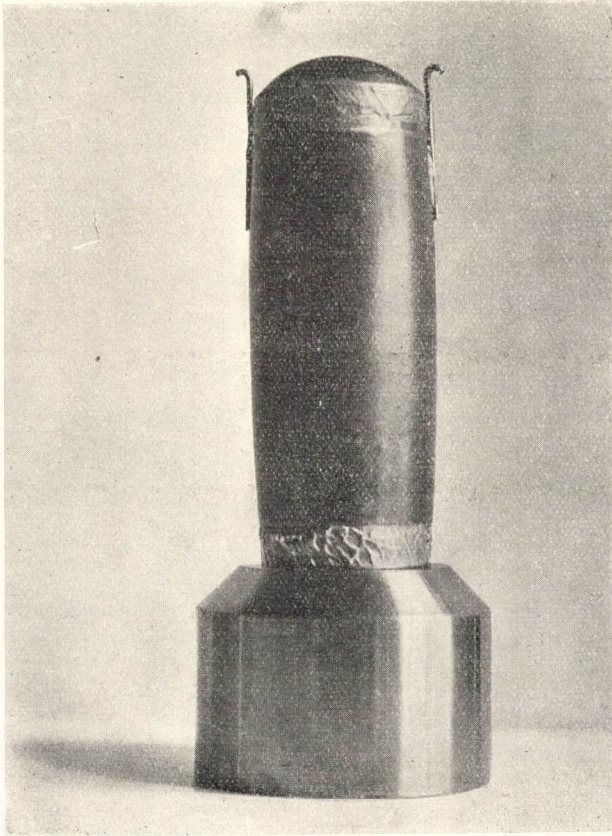
3. A *deformatio mérése*. Az alakváltozás mérésére két mikrométercsavar szolgált, melyek a kísérleti gép felső zárólapjához voltak erősítve. E mikrométercsavarok közvetlenül a



5. ábra.

nyomókészülék vázának és a hidraulikus sajtó felső nyomólapjának relatív elmozdulását mérték. Az így mért hosszváltozásban a próbatest deformációján kívül bennfoglaltatik a készülék közbeeső részeinek, nevezetesen az  $f$  dugattyúnak rugalmas alakváltozása is. Ez utóbbinak kiküszöbölésére külön nyomási

kísérleteket végeztem, melyekben a próbatest helyét ismert rugalmassági modulussal bíró, kemény aczélszál foglalta el, mely csak a rugalmassági határon belül lőn igénybevéve úgy, hogy



6. ábra.

e kísérlet adataiból ki lehetett számítani a kísérleti géphez tartozó részek rugalmas alakváltozásait.

A deformatio mérésére használt mikrométercsavarok  $\frac{1}{100}$  mm. leolvasását engedték meg; minthogy a kísérletek célja nem annyira a rugalmas alakváltozások mérése, mint a rugalmassági határ megállapítása és a maradó hosszváltozások mérése volt, e



pontosság teljesen elegendőnek látszott. A nyert alakváltozási görbék (7 és 8. ábra) szabályossága a mérési módszer megbízhatóságát bizonyítja. Meg kell azonban jegyezni, hogy oly esetekben, midőn a próbatest nem egyenletesen deformálódott, a mérés természetesen csupán középértékeket szolgáltat; így nevezetesen a nyomólapok befolyása csak úgy lehetne kiküszöbölhető, ha a mérőeszközöket közvetlenül a próbatestre erősíthetnők.

4. A *próbatetek előkészítése.* A próbateteket (*márvány* és *homokkő* szolgált kísérleti anyag gyanánt) pontosan leesztergályoztattam a nyomólapok átmérőjével megegyező 40 mm átmérőre. A hengerek hossza 100 és 110 mm közt változott. Rudeg anyagoknál tudvalevőleg fennforog az a nehézség, hogy rövid hengereknél a nyomólapokon való surlódás jelentékenyen növeli a nyomási szilárdságot úgy, hogy a látszólagos nyomási szilárdság annál nagyobb, minél rövidebb a henger; hosszú hengerek ellenben könnyen kihajlanak. PRANDTL és RINNE<sup>1</sup> idevágó kísérletei azt mutatták, hogy a hossz és az átmérő viszonyának legkedvezőbb értéke  $\frac{l}{d} = 2,5$  és  $3,5$  között fekszik. E határok között a hosszúnak már csak elenyésző csekély befolyása van a nyomási szilárdságra; a kihajlás veszélye pedig még nem játszik szerepet. Saját kísérleteimből is az tűnt ki, hogy a nyomólapok befolyása, ha a deformatio inhomogen eloszlására más ok nincsen, csak az alaplakok közvetlen szomszédságára terjedt ki, úgy hogy a próbatetek középső részein a feszültségeloszlás gyakorlatilag véve homogénnek tekinthető.

Mindjárt az első kísérletekben azt a tapasztalatot tettem, hogy az anyag szilárdságára nézve nagy befolyással van, vajjon megakadályozzuk-e a nyomást átvivő folyadéknak a porusokba való behatolását vagy nem? Könnyen megérthető, hogy egy porosus anyag igénybevétele, ha a porusok megtelnek folyadékkal, egészen más, mint egy folytonos közegé. Minthogy a teoriák, melyeknek érvényességi körét akarjuk megvizsgálni, continuumra vonatkoznak, gondoskodni kellett róla, hogy a próbatest a folyadék behatolása elől elzárassék. E célra a

<sup>1</sup> V. Ö. RINNE, Neues Jahrbuch für Mineralogie 2 (1909) p. 121.

próbatesteket vékony, 0.1 mm vastagságú, kilágyított sárgaréz-pléhből álló védőburokkal láttam el. E védőburok szorosan a próbatestre simult és végei a nyomólapok palástfelületére voltak forrasztva úgy, hogy a két nyomólap a próbatesttel együtt egy elzárt egészet alkotott, mint ez a 6. ábrán látható.

A vékony papirszerű sárgarézpléh teljesen követte a próbatest deformációját és csak igen ritkán, nagy deformációk után történtek repedések. A külső nyomás oly erősen rászorította a sárgarézhüvelyt a próbatest felületére, hogy a kísérlet után a lefejtett sárgarézpléh a felület hű lenyomatát mutatta.

Természetesen felmerül az a kérdés, mennyiben szolgáltat a sárgarézhüvely alkalmazása hibaforrást, illetőleg mennyiben befolyásolhatja az axiális erő és az oldalnyomás átvitelét. E kérdés eldöntésére mindenekelőtt szakítási kísérleteket végeztem a felhasznált vékony sárgarézpléhhel. A szakítási próbák a folyási határ értékéül kb. 1500 atm-t, a szakítási szilárdság értékéül 2500 atm-t adtak. Ha a hüvelyt belső nyomásra képzeljük igénybevéve, úgy e határértékek kb. 7.5, illetőleg 12.5 atm nyomáskülönbségnek felelnek meg. Ez tehát a maximális érték, melylyel a hüvely növelheti látszólag a próbatest felületére működő nyomást. Az így keletkező hiba azonban a legtöbb kísérletben kisebb 1%-nál s csak néhány alacsony nyomással végzett kísérletben emelkedik 2.5%-ig. Még csekélyebb az a hiba, melyet a rézhüvely által átvitt axiális erő okoz. A maximális erő, melyet a rézhüvely hosszirányban átvinni tud, kb. 200 kgra rug; ez elosztva a próbatest keresztmetszetére, kb. 16 atm feszültségnek felel meg, a mi a kísérletekben szereplő nagy igénybevételek mellett alig jöhet számba.

5. *Kísérleti eljárás.* A kísérleti eljárásnál a nyomásmérés pontosságának érdekében főleg arra kellett ügyelni, hogy a megfigyelések alatt a dugattyúk mozgási irányukat megtartsák, nehogy a surlódási állapot változzék. Általában a következő eljárást követtem:

Mindenekelőtt a nagy nyomású térben a *b* dugattyú felfelé szorítása útján előállítottam azt a nyomást, melyet a kísérlet alatt fenn akartam tartani és a voltaképeni kísérlet megkezdése előtt megvártam, míg az ellenkező, a *b* dugattyú lefelé való

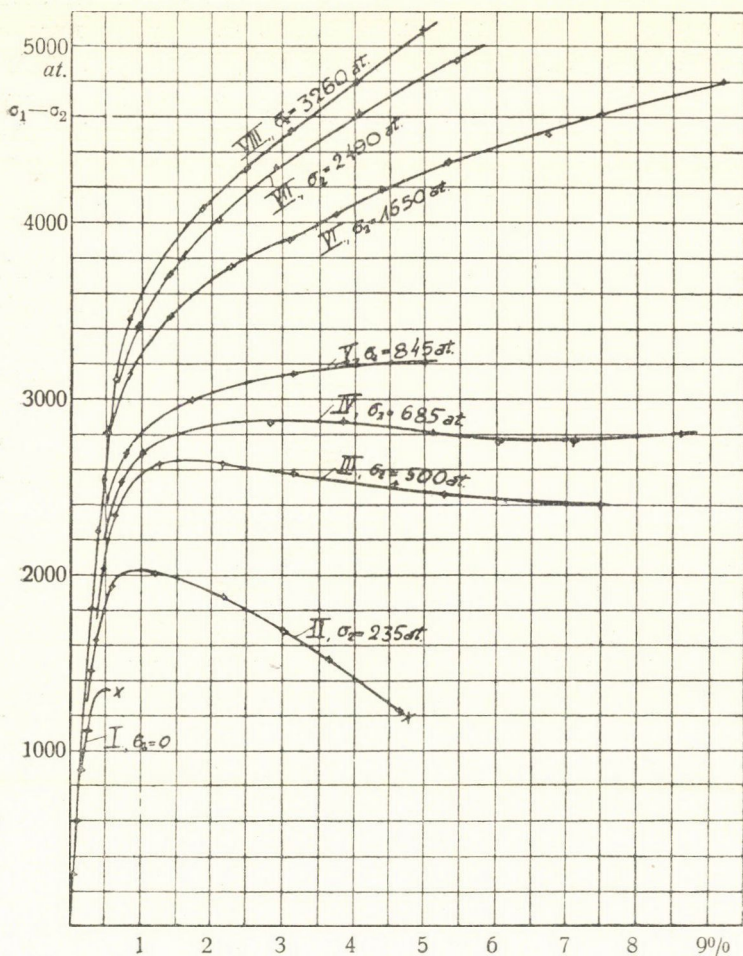
mozgásának megfelelő surlódási állapot beállott. A kísérletek ezen előkészítő stadiumában, mint már említettem, alkalom nyílt a surlódási viszonyok ellenőrzésére. Ezt a surlódási állapotot fenntartottam azután a terhelés egész folyamata alatt azáltal, hogy az  $a$  térrel összekötött szivattyú kibocsátó szelepét kissé kinyitottam és így a  $D_1$  dugattyú állandó lassú lefelé mozgását biztosítottam. Ez azért is szükséges, mert egyébként a nyomás a  $c$  térben a próbatest deformációjának megfelelően állandóan emelkednék; a szelepet igen finoman úgy lehetett beállítani, hogy a nyomás közel állandó maradt. Tehermentesítés előtt természetesen változtatni kellett a surlódási állapotot; azonban a megfigyelések előtt mindig megvártam, míg az ellenkező surlódási állapot beállott s azután ezt az állapotot a tehermentesítés egész tartama alatt fenntartottam. Így a surlódásnak megfelelő correctiót mindkét esetben megbízható módon tekintetbe lehetett venni.

### III. FEJEZET.

#### A nyomási kísérletek eredményei.

A jelen fejezetben ismertetett első kísérletsorozatban kísérleti anyag gyanánt *márvány* (kékes erezetű, fehér karrarai márvány) és *veres homokkő* (a Majna mellett fekvő mutenbergi bányából) szerepelt. A márványt azért tartottam alkalmas kísérleti anyagnak, mert közönséges nyomási próbáknál rendkívül egyenletes eredményeket ad. Tapasztalataim szerint egyazon eredetű próbatestek között legfeljebb 3—5%-os eltérések fordulnak elő. A színes homokkő szintén igen homogennek bizonyult, azonban nagy porositása folytán szilárdsága igen függ a nedvességtartalomtól.

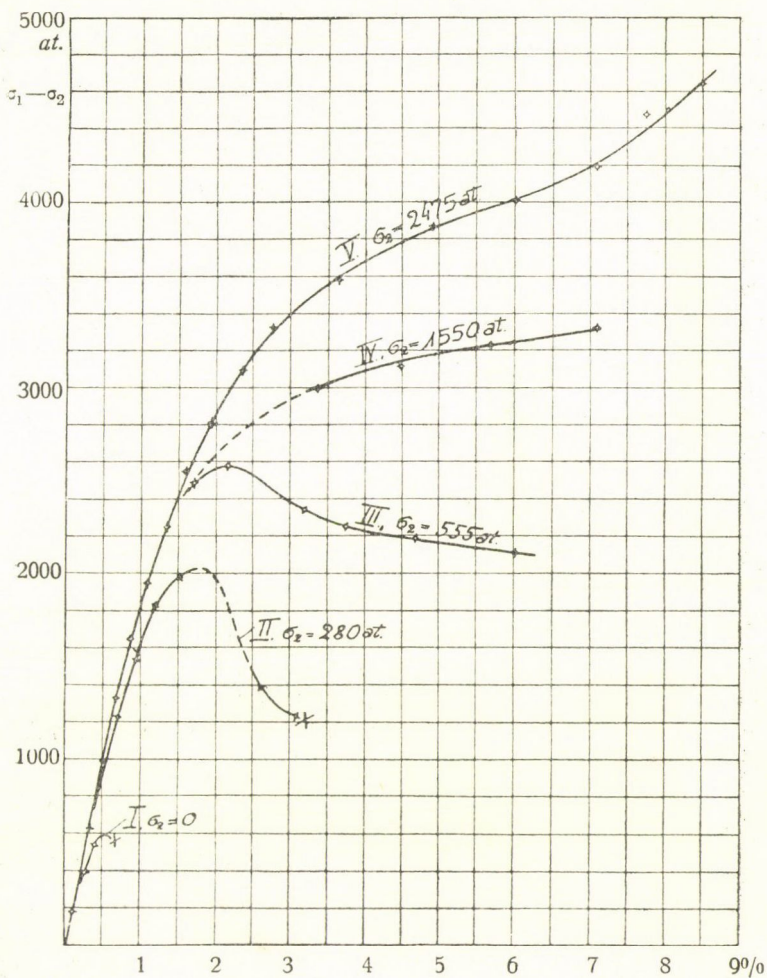
Az előzetes tájékoztató kísérletek, valamint a nem egészen hibátlan kísérletek leszámításával (ilyen volt összesen 7, melyek közül 6 esetben a védőhüvely tömitetlensége vagy szakadása, 1 esetben ferde beállítás zavarta a kísérletet) 16 teljesen megbízható kísérletről számolhatok be, melyek közül 10 márványra, 6 homokkőre vonatkozik. A következőkben e kísérletek s a hozzá-



7. ábra.

jük füződő mikroskopi vizsgálatok eredményeit igyekszem lehetőleg rendszeresen összefoglalni.

1. Az alakváltozási görbe változása a «köpenynyomással». Az első érdekes tény az anyag alakváltozási görbéjének a próbatest palástfelületére ható nyomástól való függése. A 7. és 8. ábra a keresztmetszet egységére eső terhelést tünteti fel, mint a



8. ábra.

százalékos hosszváltozás függvényét, hol «terhelés» alatt az axiális irányú feszültség és a próbatest palástfelületére ható nyomás különbségét értjük.<sup>1</sup> A mint az ábrák mutatják, az alak-

<sup>1</sup> Megjegyezzük, hogy úgy a terhelés, mint a hosszváltozás a próbatest eredeti méreteire van számítva.

változási görbe jellege a nyomás emelkedésével teljesen megváltozik: *ugyanazon anyagnál megjelenik folytonos átmenetben az alakváltozási törvény mindhárom típusa, mely a rendes szóhasználat szerint rideg, képlékeny és szívós anyagokra jellemző.* Ha pl. a márványt vesszük, ez közönséges nyomási kísérletnél, csaknem tökéletesen *ridegnek* bizonyul, a mennyiben a rugalmas alakváltozás után a feszültség csakhamar eléri maximumát (kb. 1300 atm) s a terhelés rohamos csökkenése közben elenyésző csekély maradó deformatio után bekövetkezik a törés. A mint látjuk, növekvő köpenynyomással a terhelésnek a maximumot követő csökkenése lassúbb lesz s a törés csak tetemes maradó alakváltozás után következik be. (l. pl. a III. sz. próbatestnél). Kb. 650—700 atm oldalnyomásnál az alakváltozási görbe teljesen megfelel a *képlékeny* anyagok jellegzetes alakváltozási törvényének: az anyag állandó feszültségi állapot mellett mind tovább és tovább deformálódik. A nyomást még tovább fokozva, a *szívós* anyagok típusának megfelelő alakváltozási görbéket kapunk, vagyis most már a deformatio mindinkább növekvő erőhatások alatt megy végbe. E nagy nyomás alatt — mint a szívós anyagoknál, közönséges nyomási próbánál — *a deformatio emeli a rugalmasság határát*, a mennyiben tehermentesítés és újonnan való terhelés után a további maradó deformatio nem az eredeti rugalmassági határon, hanem csak az előbb elért legnagyobb terhelés meghaladtával veszi kezdetét. A szívós anyagok tipikus alakváltozási görbéjét mutatják a VI—IX. sz. próbatestek, azonban figyelemreméltó, hogy a köpenynyomás befolyása az alakváltozási görbe változására mindinkább csökken. Így pl. az 1650 és 2490 atm köpenynyomás alatt végzett kísérletek még jelentékenyen különböző alakváltozási görbét adnak, míg 2490 és 3260 atm közt a köpenynyomásnak már alig van befolyása az alakváltozási görbére. Úgy látszik, ez utóbbi nagy nyomás alatt egy határalakhoz közeledik úgy, hogy bizonyos értéken túl a köpenynyomás további növekedésének már csak elenyésző csekély befolyása van.

2. *A rugalmassági határ, illetőleg nyomási szilárdság változása a köpenynyomással.* Problemánk szempontjából a vizsgálatok leglényegesebb pontja a *főfeszültségek összetartozó érté-*

*keinek meghatározása a rugalmasság határán. Az alakváltozási görbék változása mindenekelőtt azt mutatja, hogy folytonos átmenet van a terhelésnek a törést megelőző maximuma és a folyási határ között. Az e határoknak megfelelő állapotokat tekintve a rugalmasság jellegzetes határállapotaiul, a következő táblázatokat nyerjük a főfeszültségek különbségének a kisebbik főfeszültséggel való változására nézve:*

Márvány.

A próbatest száma	Köpenynyomás ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) atm.	Rugalmassági határ ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) atm.
I	0	1360
II	235	2100
III	500	2650
IV	685	2880
V	845	3210
VI	1650	3900

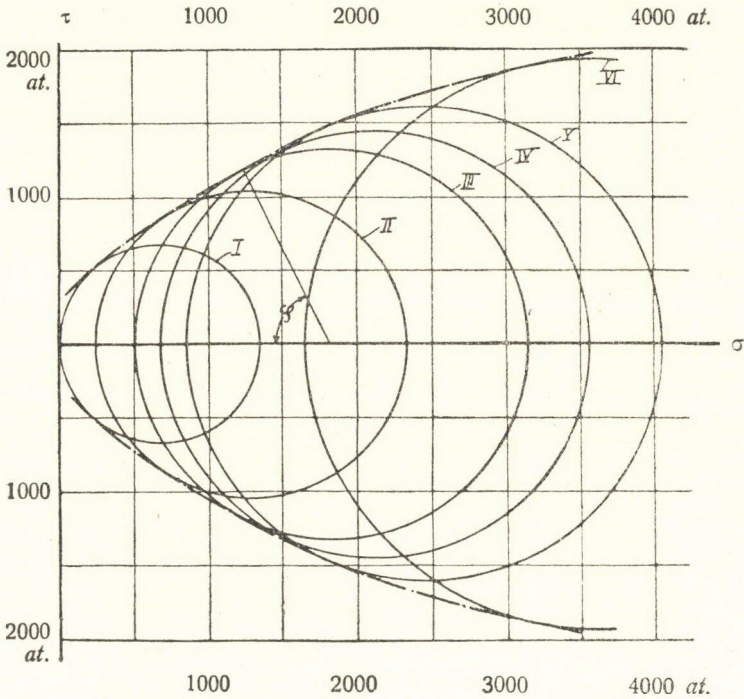
Homokkő.

A próbatest száma	Köpenynyomás ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) atm.	Rugalmassági határ ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) atm.
I	0	690
II	280	2040
III	555	2580
IV	1550	3300
V	2475	4000

A határállapotoknak MOHR-féle ábrázolása a 9—10. ábrán látható diagrammokra vezet. A feszültségi állapotoknak megfelelő körök, a mint látjuk, igen szabályos burkolót adnak, mely nevezetes módon teljesen hasonló alakú, mint a milyennek MOHR dolgozataiban ezeknek vagy hasonló adatoknak ismerete nélkül megadta.

A táblázatokban és diagrammokban csak azon alakváltozási görbéket vettem tekintetbe, melyeknél maximumot vagy határozott folyási határt lehet megállapítani. A szivós alakváltozás

typusához tartozó görbék nem mutatnak mindig éles folyási határt. E kísérleteket úgy vehetnők tekintetbe, hogy összehasonlítjuk, mely terhelések idézik elő különböző oldalnyomás mellett ugyanazt a maradó alakváltozást. Bármily alapon végezzük is azonban az összehasonlítást, arra az eredményre jutunk, hogy a főfeszültségek különbsége  $\sigma_2$  kis értékeinél közelítőleg arányosan



9. ábra.

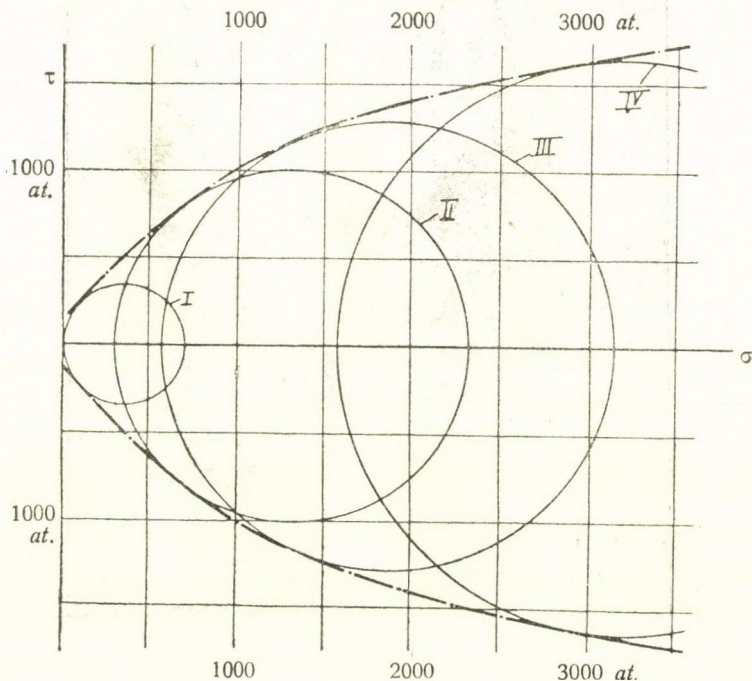
nő az oldalnyomással, később a nyomás befolyása mindinkább csökken és nagy nyomás mellett egy állandó határértékhez közeledik, úgy hogy nagy köpenynyomás alatt végzett nyomási kísérletben a rugalmassági határ lényegében csupán a főfeszültségek különbségétől függ.

Vagyis az ezen kísérletek tárgyát tevő, rendes körülmények közt rideg anyagokra nézve nagy köpenynyomások mellett ugyanaz a törvényszerűség áll, mely szívós anyagokra



nézve, minő a vas és az aczél, rendes atmosphaerikus nyomás mellett érvényes.

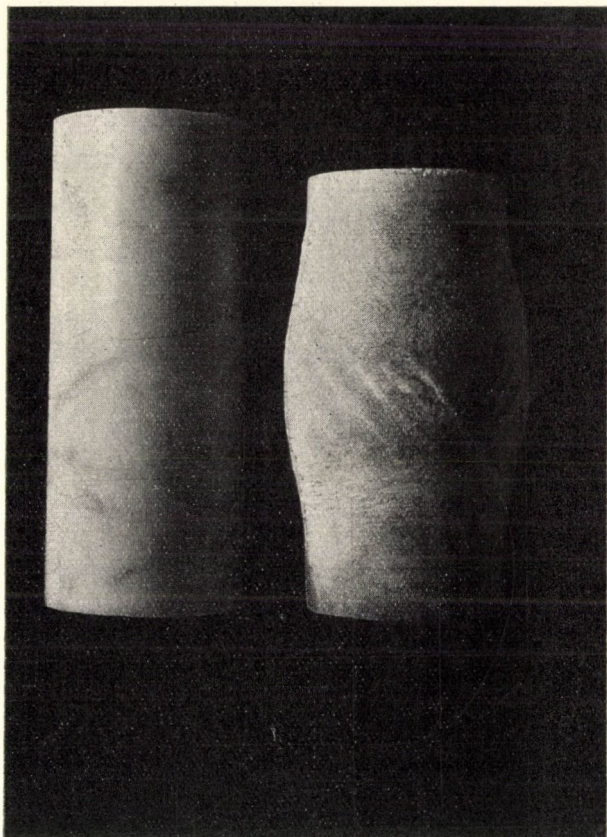
Mielőtt áttérnénk e tények közelebbi megvilágítására a mikroskopi vizsgálatok alapján, előbb azokat a következtéseket akarjuk összeállítani, melyeket a próbatestek közvetlen megfigyeléséből levonhatunk.



10. ábra.

3. A maradó deformatio befolyása a próbatestekre. A maradó deformatio — úgy mint a fémeknél — térfogatváltozás nélkül megy végbe, és pedig elegendő nagy nyomás mellett az anyag összefüggésének minden lazítása nélkül.<sup>1</sup> Néhány próba-

<sup>1</sup> A rideg anyagok törés nélküli maradó deformációja nagy nyomás alatt magában véve nem új dolog. Eltekintve a földkéreg belsejében végbe menő deformációktól, melyek világosan mutatják egyes rideg kőzetek maradó deformációját repedés nélkül, KICK továbbá ADAMS és NICHOLSON kísérletileg

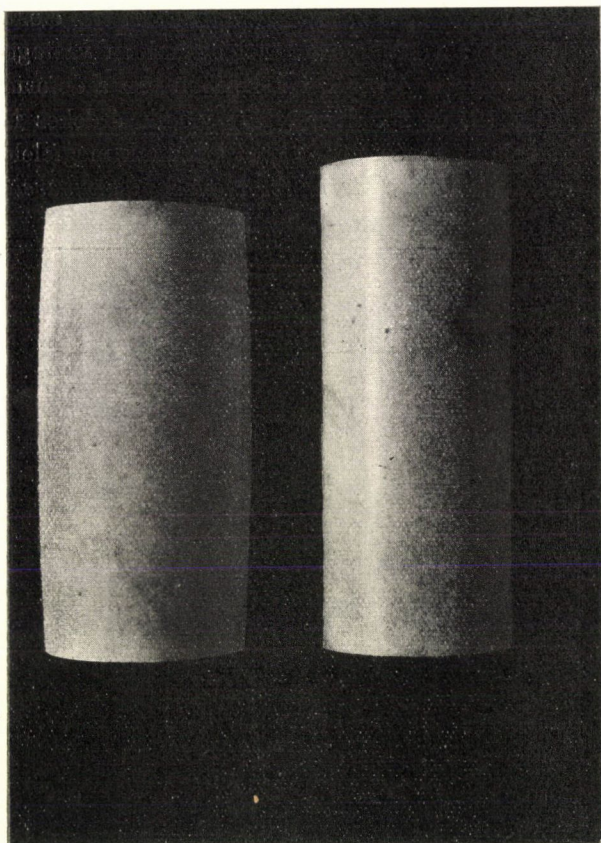


11. ábra.

testet igénybevétel után ismét lecsiszoltattam s normális nyomási próbának vettem alá. E testek szilárdsága 10—12% előzetes maradó hosszváltozás után is csupán 15—20%-kal csökkent az eredeti szilárdsághoz képest. Külsőleg más változást

---

kimutatta a rideg anyagok egész sorára, hogy minden oldalról nyomás alá vetve alakíthatóvá válnak. Az ezen dolgozatban ismertetett kísérletek azonban — egészen eltekintve eredetileg kitűzött feladatunktól — abban a tekintetben is haladást képviselnek, hogy felvilágosítást adnak a *feszültségi állapotokra nézve, melyek mellett a deformatio végbemegy.*

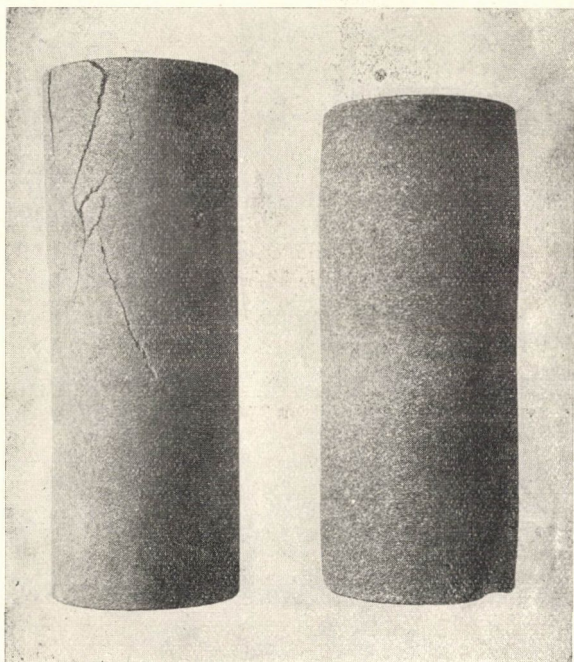


12. ábra.

az ily újra lecsiszolt próbatesten nem lehetett tapasztalni, mint azt, hogy a már egyszer maradó alakváltozást szenvedett anyag valamivel fehérebb és kevésbé átlátszó.

A próbatestek alakja és külső felülete azonban a deformatio után igen különböző az alakváltozási görbe típusa szerint. Ha a maradó alakváltozás *csökkenő terhelés mellett ment végbe*, a deformatio a próbatest hosszirányában igen egyenlőtlenül oszlik el, a mennyiben a középső része sokkal erősebb hosszváltozást szenved s így a térfogat állandósága folytán a próbatest közepén erősen kidudorodik (l. 11. ábrát); ellenben, *ha a*

*deformatio növekvő erőszükséglet mellett történt, eloszlása sokkal egyenletesebb; a próbatest közel egyenlően vastagodik meg, csupán a nyomólapok közvetlen közelében van a deformatio akadályozva (l. a 12. és 13. ábrát). Egy másik érdekes különbség, ugyanecek az alakváltozási görbe két típusának megfelelően, hogy csökkenő vagy állandó terhelés mellett igénybevett próba-*



13. ábra.

*testeken bizonyos határozott irányokat követő vonalakkól álló felületi rajzok keletkeznek, míg a szívós alakváltozáson átment próbatestek sima felülettel bírnak. Azt hiszem, nem érdektelen, ha mindkét pontra kissé bővebben kitérünk.*

4. *A deformatio eloszlása.* A deformatio különböző eloszlása szükségszerű következménye az alakváltozási görbe jellegének. Az alakváltozás egyik típusát, mint többször megjegyeztük, az jellemzi, hogy az *anyag rugalmassági határa,*

tehát *ellenálló képessége a további maradó alakváltozással szemben a deformatio következtében csökken*. Ha tehát ily anyagon a próbatest egy része előbb lépi át a rugalmasság határát — akár anyaghiba folytán, akár a feszültség egyenlőtlen eloszlása következtében —, a maradó deformatio főként e hely környezetére összpontosul, mert az első deformatio ezt a részt még jobban gyöngítette s így *egyre növekvő, újabb alakváltozást vont maga után*, a próbatest többi része ellenben a terhelés csökkenése folytán egyáltalában nem lépi át a rugalmassági határt. A jelen esetben elegendő a feszültség-eloszlásnak csekély egyenlőtlensége, mely a nyomólapok befolyására vezethető vissza, hogy a próbatest középső része aránytalanul erősebb maradó alakváltozást szenvedjen, mint a nyomólapok közelében lévő részek. Ezzel szemben *szívós alakváltozásnál a maradó deformatio növeli az anyag ellenálló képességét* és így egy korábban beállott lokális alakváltozás mind az anyag inhomogeneitására, mind pedig a feszültség eloszlására *kiegyenlítő hatással van*. Az egyenletes alakváltozás feltétele tehát — mint ez egyébként a szakítási próbánál beálló contractio elméletéből jól ismeretes<sup>1</sup> — lényegében az, hogy az alakváltozás növekvő terhelés alatt menjen végbe; az ellenkező eset a szakítási próbánál lokális összehúzódásra, a nyomási próbánál, a mennyiben törés nem áll be, lokális kidudorodásra vezet.

5. *Felületi rajzok*. A felületi rajzok magyarázatát illetőleg két kérdés merül fel: egyrészt mivel függ össze a vonalak jellegzetes *iránya*, másrészt mi az oka, hogy egyes *izolált* vonalak a felszínen láthatólag megjelennek?

a) A mi a felületi rajzokon *kitüntetett irányokat* illeti, kísérleteim kétségkívül a COULOMB-MOHR-féle felfogást igazolják. Mint az első fejezetben kifejtettük, e felfogás szerint a rugalmassági határt a tangentiális és normális feszültség egy meghatározott összefüggése határozza meg úgy, hogy a határállapotban vannak bizonyos kitüntetett felületelemek, melyekben elcsúszás történhetik, minden más irányban azonban a tangen-

<sup>1</sup> V. ö. CONSIDÈRE, Annales des ponts et chaussées 9 (1885) p. 574 és 11 (1896) p. 5.

tiális feszültség kisebb, semhogy a maradó ellenállás a gátló ellenállást legyőzhetné. Ezek a csúszási felületek a főfeszültségekkel meghatározott szöveget zárnak be; ez a szög MOHR elmélete szerint a határgörbe alakjától függ és pedig oly módon, hogy — ha egyszerűség kedvéért a csúszási felületnek a legnagyobb és legkisebb főfeszültségen átmenő sikkal való metszését nevezzük «csúszási iránynak» — a főfeszültségekre szimmetrikus két csúszási irány által bezárt hegyes szöveget a határgörbe normálisának a  $\sigma$  tengelyhez való hajlása adja meg. Ha tehát, mint azt MOHR<sup>1</sup> feltételezi, a felületi rajzok a felületen előálló csúszások irányát mutatják, akkor a felületi rajzokon le-mért szögek közvetlenül összehasonlíthatók a kísérletileg megállapított és a 9—10. ábrán feltüntetett határgörbével. Az így összehasonlítandó értékeket a következő táblázat 2. és 3. oszlopa adja; a deformált próbatesteken mért szöveget ugyanis, melyek az 1. oszlopban vannak feltüntetve, összehasonlítás végett redukálni kell a próbatest eredeti alakjára és méreteire, minthogy a vonalak a deformatio első stadiumában keletkeznek és később természetesen a további deformatióval eltorzulnak. E reductio megkönnyítésére a próbatestek felületét a kísérlet előtt beosztással láttam el.

## Márvány.

Köpeny-nyomás at.	$\varphi$ mért értékei		$\varphi$ számított értékei
	korr. előtt	korrigálva	
0	54°	54°	53°
235	59°	58°	58°
500	72°	65°	63°
685	83°	70°	73°

## Homokkő.

Köpeny-nyomás at.	$\varphi$ mért értékei		$\varphi$ számított értékei
	korr. előtt	korrigálva	
0	38°	38°	40°
280	70°	68°	63°
555	82°	73°	70°

<sup>1</sup> O. MOHR dolgozataira nézve l. a 16. jegyzetet.

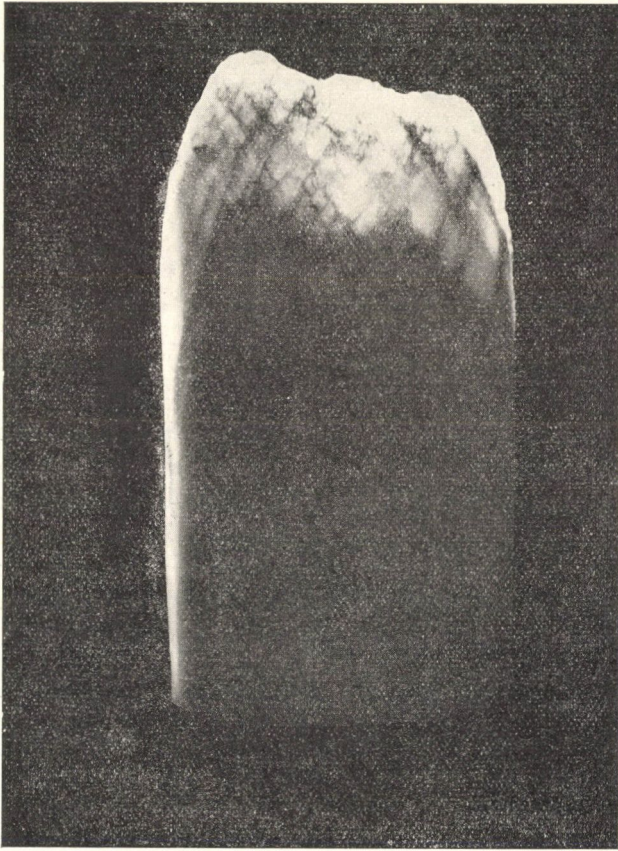
b) A felületi rajzok itt vázolt MOHR-féle magyarázata, mely csaknem teljesen egyezik azzal, melyet MESNAGER<sup>1</sup> adott, nem terjeszkedik ki arra, a dolog lényegét voltaképen mélyebben érintő kérdésre, miért jelennek meg egyáltalában láthatólag egyes vonalak. A nehézség nyilván abban áll, hogy a csúsztási felületek minden ponton egyformán mennek át s így ha egyes *irányok* ki is vannak tüntetve, még sincs ok, hogy egyes *izolált vonalak* meg legyenek különböztetve. E kérdést illetőleg, melyet göttingeni habilitációs iratomban bővebben tárgyaltam,<sup>2</sup> e helyen csak arra akarok szorítkozni, a mi szorosabban véve tárgyunkhoz tartozik. Az a tény, hogy a szívós alakváltozáson átment próbatestek nem mutatnak felületi rajzokat, arra a következtetésre vezetett, hogy a vonalak keletkezése a maradó alakváltozás eloszlásával függ össze; ezért vizsgálat tárgyává tettem azt a kérdést, hogy miként oszlik el a deformatio egy — valamely oknál fogva — gyengébb hely közelében, hol az anyag rugalmassági határa kisebb, mint a környezetben. Ezt a kérdést tetszés szerinti alakváltozási görbe esetén igen nehéz lenne megoldani; aránylag egyszerű matematikai eszközökkel megoldható azonban *tökéletesen képlékeny közeg*, vagyis oly anyag esetében, melynek rugalmassági határa a maradó deformatio hatása alatt állandó marad. Számításaimban az egyszerűség kedvéért két dimenziós feszültségi állapotot vettem alapul. Ez a vizsgálat, melyhez a matematikai eszközöket a képlékeny deformationak ST. VENANT<sup>3</sup> és tanítványai által kifejtett elmélete szolgáltatja, arra az eredményre vezetett, hogy egy ily «hibás hely» befolyása két sávra szorítkozik, melyek a MOHR-féle csúsztási irányokkal analog csúsztási irányokat követik és a hibás hely átmérőjével hasonló rendű szélességgel bírnak. E két sávon kívül az anyag homogen

<sup>1</sup> A. MESNAGER. C. R. Paris 126 [1898] p. 515.

<sup>2</sup> E helyen egyáltalában nem akarok a kérdés bővebb irodalmára kiterjeszkedni. Az e pontban érintett kérdést tárgyalja speciálisan RÉTHY MÓR Math. és Természettudományi Ért. 1909, azonban teljesen más feltevések alapján.

<sup>3</sup> A képlékeny deformatio elméletének alapjaira nézve v. ö. HAAR-KÁRMÁN, Gött. Nachrichten 1909, hol egyszersmind a régebbi irodalom is össze van állítva.

alakváltozása nem szenved módosítást. A sávokba eső részek ellenben egyenlőtlen deformatiót szenvednek oly módon, hogy egy réteg a csúszási iránynyal párhuzamosan előre szorítottatik, a másik ellenben visszamarad s így a két réteg között jóformán



14. ábra.

véges elcsúszás áll elő. Ez az elméleti vizsgálat érthetővé teszi a felületi rajzok keletkezését. Oly esetben ugyanis, midőn a deformatio az anyag rugalmassági határának leszállításával jár, a hibás helyekből kiinduló sávok egyenlőtlen deformatiója még inkább fokozódni fog úgy, hogy végül repedések állhatnak elő.



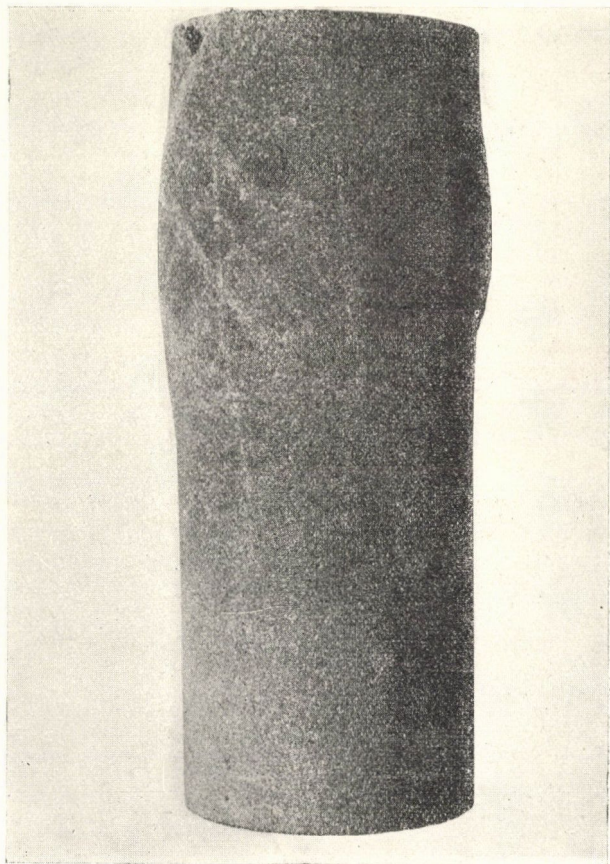
Ha a deformatio a rugalmassági határt kevésbé csökkenti, az egyenlőtlenül deformált sávokat felületi egyenlőtlenségek vagy gyűrődések révén veszszük észre, minthogy a sávok mentén erős



15. ábra.

húzásnak alávetett részek behúzódnak és a nyomott részek ki-  
dudorodnak. Ennek megfelelően a felületi rajzok valóban részben  
hajszálrepedésekből, részben felületi gyűrődésekből állnak, és  
pedig hajszálrepedéseket kapunk egészen alacsony nyomásnál,  
míg a nyomás növekedésével előbb meglehetősen durva gyűrő-

dések állnak elő, később pedig, ha elérjük a képlékenység határát, csupán aránylag finom felületi egyenlőtlenégeket tapasztalunk. A felületi rajzok e különböző neveit szépen látni a



16. ábra.

14—16. ábrán. Ha most a nyomást még jobban fokozzuk, úgy, hogy a deformatio növekvő terhelés mellett megy végbe, akkor, mint már kifejtettük, a deformatio kiegyenlítőleg hat az anyag inhomogeneitására és a hibás hely befolyása épúgy, mint azt tisztán rugalmas alakváltozásra nézve számítással ki lehet

mutatni, a közvetlen környezetre szorítkozik. Ezért nem kaphatunk szívós alakváltozás esetén felületi rajzokat.<sup>1</sup>

A nélkül, hogy akár a számított és mért szögeknek a fenti táblázatból látható elég jó megegyezését, akár további következtetéseinknek a tapasztalatokkal egybehangzó voltát túlbecsülnők, azt hiszem, annyi kétségtelennek látszik, hogy:

1. a felületi rajzokat jellemző szögek nem az anyag állandói, hanem a feszültségi állapotra, nevezetesen a rugalmasság határállapotaira jellegzetesek;

2. hogy a felületi rajzok keletkezése az anyag inhomogeneitásával és az alakváltozási görbe jellegével függ össze és megérthető minden külön hypothesis nélkül, tisztán a maradó alakváltozás eloszlása alapján.

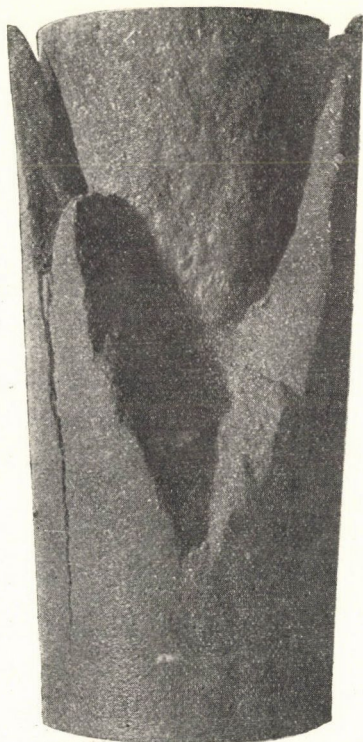
6. *A törés.* Nehezebb feladat a törés feltételeit az alakváltozási görbe tulajdonságai alapján megállapítani. Annyi kétségtelen, hogy azokban az esetekben, melyekben a próbatest törést szenvedett, ez az alakváltozás oly stadiumában következett be, midőn a terhelés a növekvő alakváltozás mellett csökken. Ha a rugalmas alkotórészekkel bíró kísérleti gépet és a próbatestet egyetlen egyensúlyban levő rendszernek tekintjük, az egyensúly feltételeinek közelebbi vizsgálata alapján azt találjuk,<sup>2</sup> hogy egyensúly csak úgy állhat fenn, ha a terhelés a deformatio növekedésével nem túlságos erősen csökken; ellenkező esetben egy határhoz érünk, melyen az összrendszer egyensúlyi állapota felbomlik. A mennyiben valóban ez ad alkalmat a törés bekövetkeztére, úgy ebben az a lényeges, hogy a törés pillanata nem független a kísérleti gép és a próbatest befogásának rugalmasságától. Azonban vajjon csakugyan az összrendszer

---

<sup>1</sup> Ezzel látszólag ellentétben áll az a tény, hogy szívós fémeken gyakran szép felületi rajzokat lehet kapni. Azonban a közelebbi megfigyelés azt mutatja, hogy felületi rajzok csak oly fémeken jelennek meg, melyeknek igen erősen kimondott folyási határuk van, úgy hogy közvetlenül a rugalmassági határ átlépése után a deformatio állandó, sőt voltaképp csökkenő terhelés alatt megy végbe.

<sup>2</sup> E gondolatmenetet bővebben kifejtettem doktori értekezésemben: Untersuchungen über Knickfestigkeiten. Berlin 1909, p. 37. (Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens.)

egyensúlyának labilitása-e az, a mi a törést maga után vonja, erre általános érvényű igenlő választ alig mernék adni. A tapasztalatok csak azt mutatják, hogy minél rohamosabb a terhelés csökkenése, annál hamarabb következik be a törés, azonban lehetséges, hogy megfordítva: a terhelés csökkenését már a



17. ábra.

lokális repedések okozzák. Mint-hogy az egész folyamatban a terhelés sebessége is szerepet játszik, a törés feltételeinek megbízható megállapítására külön, kiterjedt kísérletek lennének szükségesek.

Kísérleteinkben a törés minden esetben többé-kevésbé szabályos csúszással kezdődött; a törési felületek nagyjában ugyanazon szöveget zárják be a főfeszültségek irányával, mint a próbatest felületén látható hajszálrepedések. A primär csúszási felületeken kívül gyakran találunk többnyire függélyes secundär repedéseket, melyek úgy jönnek létre, hogy az elcsúszott darabok szétrepesztik az anyagot. E secundär törésfelületeket meg lehet különböztetni a csúszási felületektől fényes, kemény felszínük alapján. Érdekes törési felületet mutat a 17. ábrán látható homokkőhenger, melyen a primär törési

felület csaknem teljes szabályos körkúpot alkot. Ez a kúp behatolva a próbatest másik részébe, később a függélyes repedések egész sorát idézte elő.

7. *A márvány mikroszkopi vizsgálata.* Ezek után áttérhetünk arra a fontosabb kérdésre, mily módon érthető meg: a) *hogyan a közönséges nyomási próbával szemben ridegnek bizonyult anyagok nagy nyomás alatt törés nélküli maradók*

deformációra képesek és általában úgy viselkednek, mint a képlékeny, illetőleg szívós anyagok; b) hogy a rugalmassági határ kezdetben a próbatestet körülvevő térben uralkodó nyomással közel arányosan nő, később azonban egy állandó határhoz közeledik? Mint jeleztük, ezekre a kérdésekre nézve csak úgy nyerhetünk felvilágosítást, ha az anyag szerkezetét tekintetbe vesszük és a deformatio által okozott változást mikroskopi úton próbáljuk követni. Egyszerűbb szerkezeténél fogva mindenekelőtt a márvánnyal fogunk foglalkozni.

Az isotrop anyagnak látszó márvány — egyébként épúgy, mint a homokkő — a szilárd anyagok ahhoz az osztályához tartozik, melyeket W. VOIGT<sup>1</sup> műszavával *«quasi isotrop»* anyagoknak lehet nevezni. Ezen elnevezéssel VOIGT oly kristályos vagy helyesebben kristálytörmelékekből álló anyagokat jelöl meg, melyekben a kristályrészek irányítása minden irányban egyenletesen oszlik el úgy, hogy az anyag a rugalmas deformációval szemben isotrofnak látszik. Ez nevezetesen akkor lehetséges, ha a kristályrészek kiesinyek a test méreteihez képest, ellenben elég nagyok a molekuláris távolsághoz viszonyítva. Ehhez a typushoz tartoznak kőzeteken kívül csaknem az összes fémek és fémötvények is. A fémek képlékeny deformációját kristályos szerkezetük tekintetbevételével EWING és ROSENHAIN<sup>2</sup> tették vizsgálat tárgyává s kimutatták, hogy a képlékeny deformatio lényegében a kristályszemcsék belső deformációjára útján jó létre és pedig részben a kristálylemezek egymáson való elcsúszása (translatio), másrészt *ikerkristályok képződése* által.<sup>3</sup> Ez a magyarázata, hogy a fémek nagy képlékeny alakváltozá-

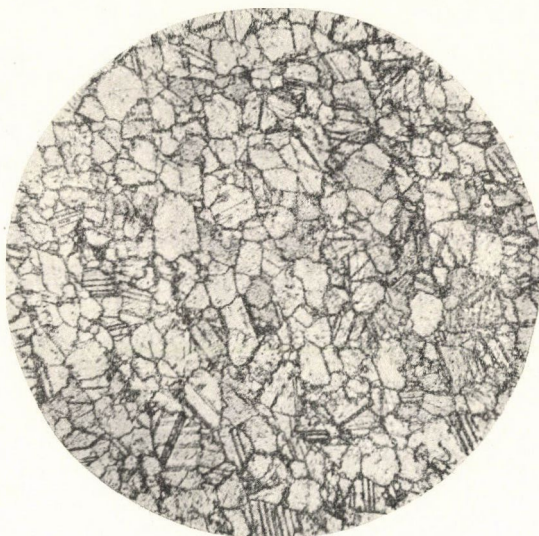
<sup>1</sup> W. Voigt, Gött. Abhandlungen (1887) — Annalen der Physik 38 (1889) p. 573. — Hasonló eredményekre jut W. THOMSON: «It seems, that a homogeneous isotropic solid is but an *isotropically maced crystal*.» Proc. of Roy. Soc. of Edinburgh 16 (1890) p. 693.

<sup>2</sup> EWING és ROSENHAIN, Phil. Trans. 193 (1899) p. 353 és 195 (1902) p. 279. Az ezen dolgozatokhoz fűződő vitát illetőleg v. ö. W. ROSENHAIN, Journal of Iron and Steel Inst. 65 (1904) p. 335 és 70 (1906) p. 189, továbbá OSMOND, FRÉMONT, CARTAUD, Revue de Métallurgie (1904.)

<sup>3</sup> A kristályok képlékeny deformációjára nézve v. ö. O. MÜGGE, Neues Jahrbuch für Mineralogie 1 (1898) p. 71 és 2 (1899) p. 55.

sokat szenvedhetnek az anyag összefüggésének lazítása nélkül: a kristályos szemcsék alakja oly rendkívül sokféle módon változhatik, hogy a legkülönbözőbb alakváltozások lehetségesek a szemcsék összefüggésének lazítása nélkül.

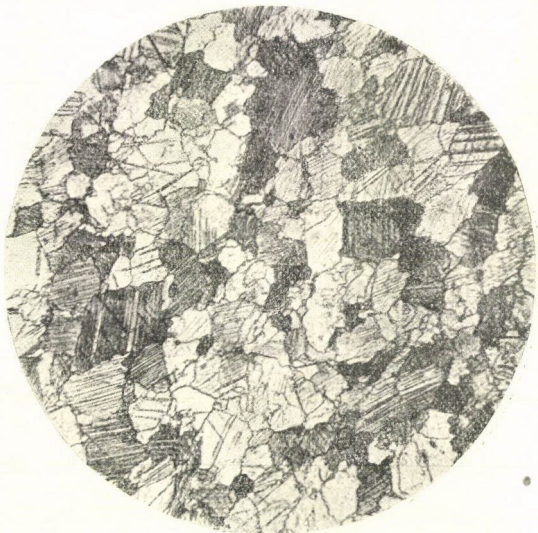
A márvány szorosan egymáshoz illő mészpát-kristályok halmaza rendszeresen semmi, vagy igen kevés kötő-anyaggal. Mint-hogy a mészpátnál igen könnyen képződnek ikerkristályok, valószínűnek látszott, hogy a márvány képlékeny alakváltozá-



18. ábra.

sában szintén ikerkristályok keletkezése játszsza a főszerepet. Ezt a deformált próbatestekből vett metszetek mikroskopi vizsgálata meg is erősítette. Ikerkristályok a márvány mikroskopi képében láthatók ugyan már az igénybevétel előtt is (l. 18. ábra), de számuk a deformatio következtében aránytalanul megnagyobbodott. A 19. és 20. ábrán látható mikroskopi képek a 10-es számú próbatestből vannak véve, mely 2500 atm nyomás alatt 9% maradó hosszváltozást szenvedett. Mint látható, egyes kristályszemcsék sűrű vonalas rajzot mutatnak; a vonalak egyes szemcséken belül határozott irányokat követnek,

de a különböző szemcsében irányításuk más és más; polarizált fényben egy ily szemese csupa váltakozó színű vékony sávból áll, jeléül annak, hogy ikerképződéssel van dolgunk. Míg e próbatesten a szemcsék egy része úgy látszik még egyáltalán nem szenvedett változást, a 21. ábrán látható képen jóformán az összes szemcsék sűrűn tele vannak szórva vonalakkal. Ez az ábra egy kb. 13% hosszváltozást szenvedett próbatestből vett met-szetre vonatkozik; a próbatest már közvetlenül a törés előtt állott.

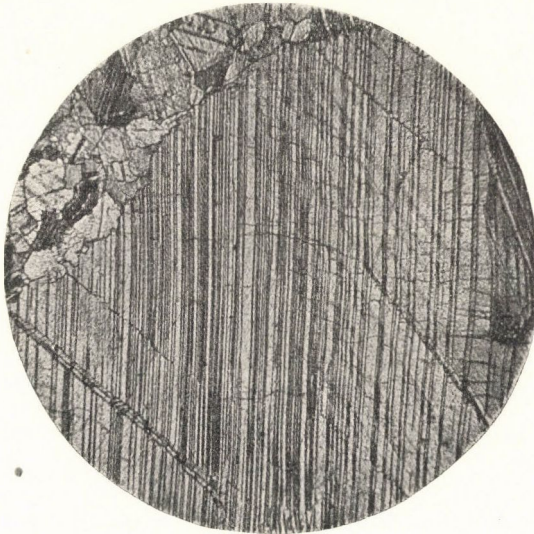


19. ábra.

Ha a *nagy nyomás alatt képlékenyen* deformált anyag mikroszkopi képevel szembeállítjuk a közönséges nyomási próbánál vagy *alacsony nyomás alatt rideg* törést szenvedett anyag képét (l. 22. ábra), mindenekelőtt azt látjuk, hogy itt az ikerkristályok száma a természetes állapothoz képest alig nőtt, ellenben a szemcsék elválasztó vonalai megvastagodtak; ez kétségkívül onnan ered, hogy míg a képlékeny deformációnál a *szemcséken belül* történt változás, itt a *szemcsék egymáshoz képest* mozdultak el. Gyakran az egész metszeten nagyjában párhuzamos vonalak vonulnak át. Ily esetben, úgy látszik, leg-

inkább azok a szemcsék szenvedtek deformatiót, melyek e vonalak mentén vannak; néhányuk repedést is mutat. E megvastagodott határvonalak közül a legerősebbek szabadszemmel is láthatók hajszálrepedések alakjában. Véleményem szerint ugyanúgy jönnek létre, mint a felületen látható hajszálrepedések s az ilyen repedésekből keletkezik később a törés.

8. *Intra- és intergranularis deformatio.* Mint a mikroskopi képek mutatják, a *deformatiónak két főmódozatát lehet meg-*



20. ábra.

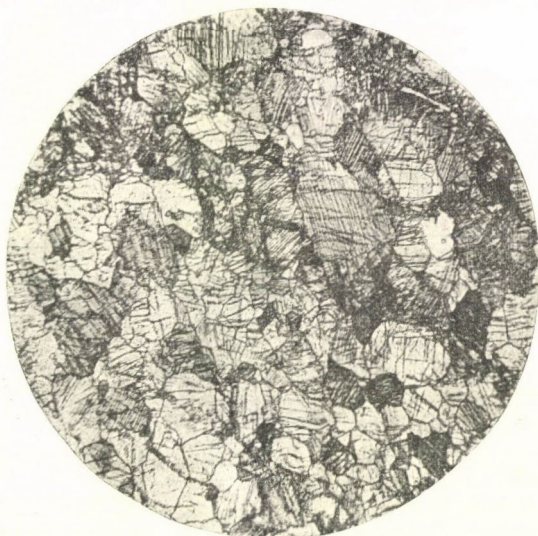
*különböztetni,* a szerint, a mint a *deformatio* a *kristályos szemcséken belül* megy végbe, vagy pedig a *szemcsék relativ elcsúszásából áll.* Latin műszóval a két típust «*intra- és intergranuláris*» *deformatiónak* nevezhetjük. Más műszóval *kristályos és banális deformatiónak* is mondják. A *tisztán intra-*, illetőleg *intergranuláris deformatio* azonban természetszerűleg csak egy-egy véglet és e két véglet közt folytonos átmenet van, a szerint, a mint a *deformatiónak* egyik vagy másik módja jut erősebben érvényre.

E típusokat tartva szem előtt, a *deformatio* lefolyásáról és



jellegzetes kísérő jelenségeiről a következő kvalitatív képet nyerjük.<sup>1</sup>

A szemcsék közti (*intergranuláris vagy banális*) *deformatio* alacsony nyomás alatt jó létre; minél nagyobb a nyomás, annál inkább akadályozza a szemcsék összepréselésével ezeknek relativ elmozdulását. Ugyanez oknál fogva természetes, hogy a nyomásnak nagy befolyása van az elmozdulás lehetőségére s innen magyarázható, hogy a *rugalmassági határ* a



21. ábra.

*próbatest körüli térben uralkodó nyomással nő.* Másrészt az elmozdulás az egyes szemcsék összefüggését lazítja, határfelületeket lecsiszolja s innen érthető, hogy a *deformatio* az anyag ellenálló képességét csökkenti, *további alakváltozással szemben a rugalmassági határt leszállítja.*

*Az intergranuláris deformatio karakteristikuma tehát az, hogy a rugalmassági határnak megfelelő főfeszültségek különb-*

<sup>1</sup> A kérdés irodalmára nézve lásd Enzyklopædie der math. Wissenschaften. IV. 31. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre, 1914., 21. és 22. pont. Szerző megjegyzése a javítás alkalmából.

sége a köpenynyomással nő, mint azt a Coulomb-féle elmélet követeli és hogy a deformatio csökkenő erőhatás mellett megy végbe.

Ezzel szemben a tisztán szemcséken belüli (intragranuláris vagy kristályos) deformatio akkor áll elő, ha a nyomás elegendő nagy arra, hogy a szemcsék relativ elcsúszását csaknem teljesen meggátolja s innen ered, hogy ez esetben a nyomásnak már nincs többé a rugalmassági határra befolyása, hanem

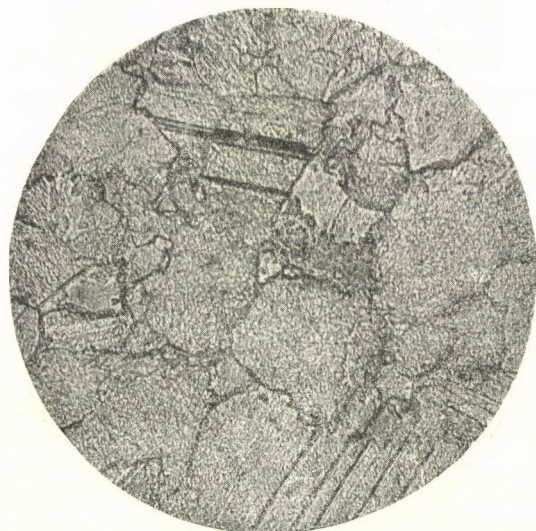


22. ábra.

erre nézve csak a különböző irányú nyomófeszültségek különbözősége irányadó. A deformatio fokozatosan áll be. Előbb azok a kristályszemcsék jönnek sorra, melyeknek irányítása az adott feszültségi állapot mellett kedvező az ikerképződés vagy translatio bekövetkeztére. Minthogy azonban a deformatio során egyre kedvezőtlenebbül fekvő szemcsék kerülnek sorra, az is megérthető, hogy a deformatio folytatására egyre növekvő erőhatásra van szükség, vagyis a terhelés folyamán az újabb deformatióval szemben a rugalmassági határ emelkedik.

Így tehát a rugalmassági határnak a deformatióval való

emelkedésére nézve, melyre a francia szerzők az «*écrouissage*» műszót használják, s mely a fémek technológiájában játszik különösen fontos szerepet, egyszerű és természetes magyarázatot nyerünk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a fémek közös nyomáson végzett szilárdsági próbákkal szemben mutatják azt a tipikus intragranuláris deformációt, melyet a márványon csak kb. 2000 atm nyomáson felül tapasztalunk. Ez valószínűleg



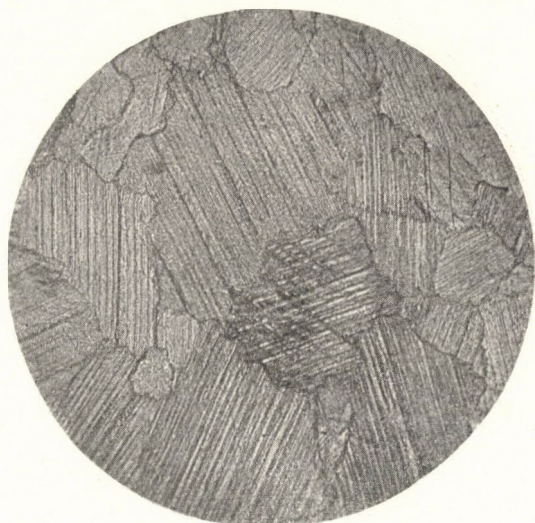
23. ábra.

onnan ered, hogy a fémeken a kristályszemcsék sokkal jobban egymáshoz vannak növe.

A deformatio két tipikus módozatát igen szépen láthatjuk a 23—25. ábrán, melyek igen erős (175-szörös) lineáris nagyítással készültek.

Vajjon mennyire sikerülhet azt a *qualitativ* képet, melyet a mikroskopi vizsgálatok alapján a deformatio típusairól alkotunk, *quantitativ* vizsgálatokkal mélyíteni, arról ma még alig nyilatkozhatunk. Mindenekelőtt abban az irányban volna szükségünk további felvilágosításra, minő erőhatások alatt állanak elő *egyszerű kristályokon* maradó alakváltozások, mint az iker-

kristályképződés és a translatio. Ily irányban egyetlen kísérleti vizsgálatról tudok, t. i. W. VOIGT méréseiről a mészpát maradó deformációját illetőleg. Ha e kristályphysikai adatok rendelkezésünkre fognak állani, akkor talán lehetséges lesz mintegy «statisztikai alapon» megalkotni a «quasi isotrop» anyagok maradó alakváltozásának elméletét oly módon, a mint VOIGT levezette középértékek számítása útján a quasi isotrop közeg rugalmasságának törvényeit.<sup>1</sup> S nem lehetetlen, hogy középértékek



24. ábra.

számítása által bizonyos egyszerű összefüggésekre juthatunk a feszültségek között, melyek igazolni fogják, honnan ered a tényeknek és az egyszerű MOHR-COULOMB-féle theoriának gyakran feltűnő megegyezése, daczára, hogy ez utóbbi egyáltalán nem veszi számba az anyag szerkezetét és a deformatio bonyolódott módját.

9. *A homokkő mikroskopi vizsgálata.* A márvány-próba-

<sup>1</sup> Egy ily elmélet első kísérleteit adja R. BÖKER aacheni doktori értekezése (1913). Szerző megjegyzése a javítás közben.

testek mikroskopi képeit azért vettük eddigi fejtegetéseink alapjául, minthogy ezen az anyagon a deformatio két typusa igen tisztán jelentkezik, a mi főleg annak köszönhető, hogy a márvány egynemű kristályszemesékből áll. Oly anyagokon, melyek többféle és gyakran egész különböző szilárdsági tulajdonságokkal bíró kristálytörmelékekből állanak, a deformatio két typusa általában egymás mellett jelenik meg. Így pl. a kísérleteinkhez használt homokkőn, mely quarcz-kristályokból, csillám-



25. ábra.

lemezekből és egy vastartalmú agyagos kötőanyagból áll, az intragranuláris deformatiót csak a csillámlemezekben lehet megállapítani, a mennyiben ezek translatio útján igen erős képlékeny deformatiót szenvedtek. Ezzel szemben a quarcz-kristályokon — úgy látszik — a szemesék relativ elmozdulása játszsza a főszerepet; hogy a szemesék maguk is deformálódnak, arra legfeljebb az enged következtetni, hogy polározott fényben szemlélve a metszeteket, egyes szemesék az analizáló készülék forgatásával nem egyenletesen változtatják színüket. Ez azonban megmagyarázható a præparatumok változó vastagságával is. Hogy



a deformatio azonban lényegében a quareczzemek relativ elmozdulása útján jó létre, azzal összhangzásban van az a tény, hogy a homokkőben — ellentétben a márvánnyal — az anyag összefüggése nagy nyomás alatt végbemenő deformaciónál is lényegesen csökken.

### A nyomási kísérletek eredményeinek összefoglalása.

1. A rugalmassági határ feltételét illetőleg a megvizsgált anyagokon két szélső esetet lehet megkülönböztetni, a mennyiben

a)  $\sigma_2 = \sigma_3$  kis értékeinél a  $\sigma_1 - \sigma_2$ , illetőleg  $\sigma_1 - \sigma_3$  különbség  $\sigma_2$ , illetőleg  $\sigma_3$  értékével arányosan nő, megfelelően a COULOMB-féle elméletnek.

b)  $\sigma_2 = \sigma_3$  igen nagy értékeinél  $\sigma_1 - \sigma_2$  egy állandó határértékhez közeledik, úgy mint azt TRESCA a fémek folyási határára nézve megállapította.

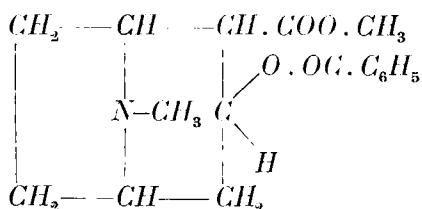
2. E két szélső eset — mint a mikroszkopi vizsgálatok mutatják — megfelel a maradó deformatio két tipikus módzatának: a szemcsék közt (intergranuláris) és szemcséken belül (intragranuláris) vegbemenő deformaciónak.

3. A kísérletek mellékeredményképen felvilágosítást adnak a közönséges szilárdsági próbákkal szemben ridegnek ismert anyagok képlékeny alakíthatóságára és az ezt kísérő jelenségekre (felületi rajzok stb.) nézve.

## A PARACUMARSAV ÉS VANILLINSAV NÉHÁNY ÚJ SZÁRMAZÉKA. <sup>1</sup>

KÖNEK FRIGYES-től és PACSÚ JENŐ-től.

A cocain, a mint azt LIEBERMANN, EINHORN és WILLSTÄTTER hirdette, a benzoylezett ecgoninnak methylestere:



Azt a rendkívüli nagy szerepet, melyet ez az alkaloid manapság a gyógyászat terén visz, helyi érzéstelenítő hatásának köszöni. Az érzéstelenítő hatásnak az az alapföltétele, hogy az ecgoninnak úgy az alkoholos, mint a carboxyl alakjában előforduló hydroxyljében a hydrogent benzoyl, illetve alkylgyök helyettesítse.

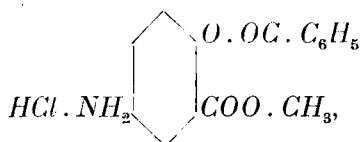
Ha az ecgonin helyett más vegyületeket választunk, melyek alkalmasak arra, hogy ennek az alapfeltételnek eleget tegyenek, akkor az ilyen vegyületek esetleg mutathatják a cocainhatást.

Erre a célra legalkalmasabbak az aminophenolcarbonsavak. Ezek a vegyületek ugyanis az *OH*, *COOH* és *NH<sub>2</sub>* csoportokat tartalmazzák, a melyek közül a hydroxylesoport hydrogenjét benzoyllal, a carboxylesoport hydrogenjét pedig a methylgyökök-

<sup>1</sup> Közlemény az egyetem III. sz. vegytani intézetéből.

kel kell helyettesíteni, hogy az így keletkezett vegyületek a cocaínnal analog szerkezetűek legyenek. Az amino-csoportnak az a szerepe van, hogy chlorhydratképződés mellett, a molekulát vízben oldhatóvá tegye.

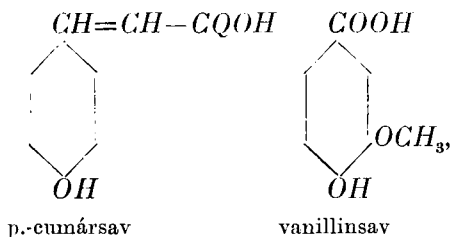
Ez eszmemenet nyomán állította elő KONEK F.<sup>1</sup> a salicylsavból kiindulva az asymmetriás meta-aminobenzoylsalicylsav-methylesterchlorhydratot:



a mely vegyület a nyelvre igen erős érzéstelenítő hatást gyakorolt.

Jelen dolgozatunkban célul tűztük ki a paracumarsavnak és a vanillinsavnak oly származékait előállítani, a melyek a cocaínnal analog szerkezetűek, és megvizsgálni, vajjon gyakorolnak-e e vegyületek a nyelvre érzéstelenítő hatást?

Kísérleteink alapjául pedig azért választottuk a paracumarsavat és vanillinsavat:



hogy az ezekből előállítandó p-aminobenzoyl-p-cumarsav-methylester-chlorhydrat és 5-amino-benzoylvanillinsavmethylesterchlorhydrat viselkedéséből megtudjuk, hogy a *hosszabb szénláncznak, a carboxyl- és hydroxylcsoport para-helyzetének, valamint a methoxycsoport jelenlétének van-e befolyása a physiologiai hatásra?*

A p-cumarsavmethylestert még p-nitrohydrofahéjsavchlorid-dal is kondenzáltuk, hogy megvizsgáljuk, vajjon ezekre a vegyü-

<sup>1</sup> Math. és Term. Ért. XIV. 16—21. ll, 1896.



letekre is vonatkozik-e a cocainra érvényes az a szabály, mely szerint a physiologiai hatás kizárólag csak a benzoylgyök jelenlétében mutatkozik?

A synthesis menete a következő.

### Paracumarsav.

A p-oxyfahéjsavat, vagy p-cumarsavat<sup>1</sup> a legkényelmesebben úgy nyerhetjük, ha p-oxybenzaldehydet PERKIN-féle reakciónak vetünk alá. Minthogy az irodalmi adatok felhasználásával a termelési hányad nem volt kielégítő, a p-cumarsavnak nagyobb mennyiségben való előállítására a PERKIN-féle reactio segítségével a következő eljárást dolgoztuk ki:

Másfél literes, hűtőcsővel felszerelt jénai lombikba 40 g. p-oxybenzaldehydnek és 64 g. vízmentes natriumacetatnak jól összedörzsölt keverékét tesszük s a keverékhez 100 g. eczetsav-anhydridet öntünk. A lombikot 24 óráig 140—150 C°-ra hevítjük s a barnuló pépes tömeget időnkint üvegbottal felkeverjük. Ezután a 100 C°-ra lehűtött vörösbarna, félig folyós anyaghoz egy liter forró vizet öntünk. A leváló sárga acetyl-p-cumarsavat vízzel jól kimossuk és másfél liter hig nátronlúggal rövid ideig forralva, elszappanosítjuk. A lehült oldatból fölös, hig sósav hozzáadására leválik a sárga p-cumarsav. A nyersterméket 2--2<sup>1</sup>/<sub>2</sub> liter vízzel felforraljuk, az oldatot a keletkezett fekete, gyantászerű anyagtól elkülönítjük és  $\text{CuClO}_3$  hozzáadása után csontszénnel színtelenítjük. A kihült oldatból, szűrés után, hig sósavval leválasztjuk a p-cumarsavat, melyet még sok forró vízből kétszer átkristályosítunk. A csaknem fehér tükben kristályosodó termék 206° C-on olvad és pezsegve elbomlik. Termelés: 27·8 g.

### Paracumarsavmethylester.<sup>2</sup>

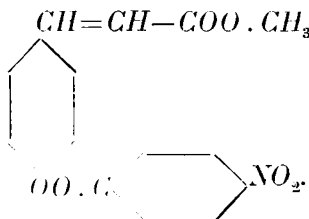
Az estert 80% termelési hányaddal nyerhetjük, ha a p-cumarsav abs. methylalkoholos oldatába száraz sósavgázt vezetünk s

<sup>1</sup> TIEMANN-HERZFELD: Ber. 10., 63. — EIGEL: Ber. 20., 2529. — ZINCKE: Annal. 322., 234.

<sup>2</sup> ZINCKE: Annal. 322., 223.

12 órai állás után a biborvörös folyadékot fölös mennyiségű  $K_2CO_3$  jól lehűtött vizes oldatába csepegtetjük. A vegyület alkoholból hófehér, erősen csillogó, apró kis táblákban válik le, melyek  $136-137^\circ C$ -on olvadnak. Aetherben könnyen oldódik s az aether elpárolgása után visszamaradó ester igen kellemes almailattal bír. Petroleumætherből hosszú, fehér tűkben kristályosodik.

**p-Nitrobenzoyl-paracumarsavmethylester.**



Erős falú palaczkban 2 g. estert (1 mol.) a phenolat képződéséhez szükséges mennyiségű 0.5 g.  $NaOH$ -nak  $50 \text{ cm}^3$  vízben való oldatában feloldunk és a sárga folyadékhoz 2.2 g. (valamivel több egy molekulánál) p-nitrobenzoylchloridból és  $50 \text{ cm}^3$  aetherből készült oldatot öntünk. A jól bedugaszolt palaczkot fél óráig rázógépen erősen összerázzuk. A condensatiós termék hófehér, kocsonyás csapadék alakjában válik ki. Az anyagot szűrőn jól kimossuk előbb híg nátronlúggal, majd vízzel, azután máztalan agyagtányéron kiszáritjuk. A vegyület eczetsavanhydridből hófehér, rozettákban összeálló, selymes fényű, mikroszkopos tűkben válik ki, melyek  $203^\circ C$ -on bomlás nélkül olvadnak. Termelés: 3.3 g.

0.1436 gr. anyag adott: 0.3276 gr.  $CO_2$ -t és 0.0530 gr.  $H_2O$ -t.  
0.2063 gr. anyag adott:  $8.0 \text{ cm}^3$  nitrogent ( $18^\circ C$ , 748 mm).

A  $C_{17}H_{13}O_6N$  képlet alapján számított értékek:

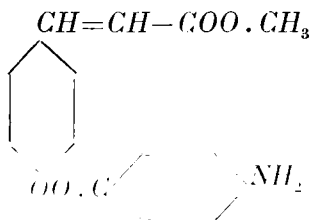
$$C=62.36\% ; H=4.00\% ; N=4.28\% .$$

Kísérletileg talált értékek:

$$C=62.21\% ; H=4.10\% ; N=4.38\% .$$

E vegyület oldhatatlan ligroinban, petroleumætherben és benzolban, valamint ætherben is. Chloroform nehezen oldja, míg alkoholban csaknem oldhatatlan. Ellenben jól oldódik eczetsav-anhydridben és jégezetben. Savakkal rövid ideig forralva nem változik, míg kálilúggal főzve elbomlik és az oldat intensive piros színűre festődik.

p-Aminobenzoyl-paracumarsavmethylester.



A nitroester redukálását legezélszerűbben absolut alkoholos sósav és ón segítségével végezhetjük.

1 gr. finoman porított nitroestert 30 cm<sup>3</sup> sósavgázzal telített abs. alkoholban suspendálunk és vízfürdön felmelegítünk. A tejes zavarodást mutató meleg folyadékhoz, kis időközökben, a nitro-csoport redukálásához szükséges mennyiségű ónt adunk s a vízfürdön időnkint felmelegítve ügyelünk arra, hogy mindig élénk hydrogenfejlődés legyen észlelhető. Félóra múlva, mikor az ón teljesen feloldódott, a teljes zavarodás eltűnik s átlátszó oldatot nyerünk, melyet szűrés után jéggel lehütünk. A hideg oldatból fehér csapadék alakjában kiválik a p-aminobenzoyl-p-cumarsav-methylesterchlorhydrat. A leszűrt és híg alkoholos sósavval kimosott termék sósavval jól megsavanyított forró vízből hosszú fehér tűkben kristályosodik, melyek 205° C körül megvörösödnek és 215° C-on pezsegve elbomlanak. Termelés: 0.7 gr.

Jellemzi a chlorhydratot, hogy vízben rendkívül nehezen oldódik. Fél gramm anyag feloldásához körülbelül 900 gr. forró, sósavval savanyított víz szükséges.

A sulfat rövid, fehér tűkben kristályosodik és még nehezebben oldódik, mint a chlorhydrat.

A szabad amin-t úgy nyerjük, hogy a chlorhydratnak forró

oldatához tömény ammoniát csepegtetünk. A leváló terméket alkoholban feloldjuk és vízzel hígítva kikristályosítjuk. A vegyület 168—169° C-on bomlás nélkül olvad.

0·1354 gr. anyag adott 0·3417 gr.  $CO_2$ -t és 0·0626 gr.  $H_2O$ -t.  
0·1942 gr. anyag adott 8·32 cm<sup>3</sup> nitrogengázt (21° C, 766 mm).

A  $C_{17}H_{15}O_4N$  képlet alapján számított értékek:

$C=68\cdot65\%$  ;  $H=5\cdot08\%$  ;  $N=4\cdot71\%$ .

Kísérletileg talált értékek:

$C=68\cdot82\%$  ;  $H=5\cdot13\%$  ;  $N=4\cdot89\%$ .

A vegyület alkoholban és benzolban könnyen oldódik, vízben teljesen, ætherben csaknem oldhatatlan.

### $\beta$ -(4-nitrophenyl)-propionsav.

(p-Nitrohydrofahéjsav.)

Az irodalom adatai szerint<sup>1</sup> a hydrofahéjsavnak 0°-on való nitrálásakor két isomer nitroszármazék, ortho és para, keletkezik, melyeknek elválasztása sokszori átkristályosítással eszközölhető.

Midőn a hydrofahéjsav nitrálását az irodalomban leírt eljárás szerint megkíséreltük, azt tapasztaltuk, hogy a salétromsav 0°-on a hydrofahéjsavra nem hat, sőt még közönséges hőmérséken is nemcsak hogy dinitroszármazék nem keletkezik, de még monoszámazéknak sincs nyoma. A nitráláshoz tiszteres mennyiségű füstölő  $HNO_3$ -at vettünk, míg az irodalomban leírt eljárásnál a salétromsav mennyiségéről nincs említés téve. Hosszas kísérletezés után sikerült 85° C-on a p-nitrohydrofahéjsavat előállítanunk s az isomer orthovegyülettől egyszerű módon elválasztanunk.

30 gr. hydrofahéjsavra 300 gr. conc.  $HNO_3$ -nak (f. s. = 1·5) és 30 gr. füstölő salétromsavnak keverékét öntjük és folytonos kavarással közben 85° C-ra melegítjük fel. A biborvörös oldatot

<sup>1</sup> GLASER-BUCHANAN : Zeitschr. f. Ch. 1869., 193. — BEILSTEIN-KUHLBERG : Annal. 163., 132.

azonnal két liter jeges vízbe öntjük. Két órai állás után a leülepedett sárga terméket leszűrjük és vízzel addig mossuk, míg a lecsöpögő mosóvíz savas kémhatást már nem mutat. A nyers-terméket vacuumban szárítjuk ki. Az anyag 120° C-tól 154° C-ig olvad, a mi bizonyítja, hogy isomerek keverékéből áll.

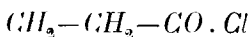
Az isomereknek, az ortho- és paraszarmazéknak, többszöri átkristályosítással való elválasztása nem czélszerű egyrészt azért, mert nyolczszori átkristályosítás sem elegendő az isomerek tökéletes elválasztására, másrészt mert ezek az átkristályosítások sok idő- és anyagveszteséggel járnak. A paraszarmazék ama tulajdonságának felhasználásával, hogy vízben nehezebben oldódik, az elválasztást igen egyszerűen végezhetjük.

A nyersterméket ugyanis feloldjuk 1½ liter forró vízben és az oldatot 65° C-ra hűtjük le. Ezen a hőfokon a paravegyület kiválasztása befejeződik. A gyorsan leszűrt oldatban a további lehüléskor megkezdődik az orthovegyület leválása, mely az anyalúgnak besűrítése által tökéletesíthető.

Ily módon egyszeri felfőzéssel sikerül a két isomer tökéletes elválasztása, melyek azonnal a helyes olvadáspontokat mutatják (az *o*-szarmazék=113° C; a *para*=163° C), melyek ismételt átkristályosítás után sem változnak. A *p*-vegyületből 19.3 gr.-ot, az orthoszarmazékból 8.8 gr.-ot nyertünk, vagyis a 85° C-on való nitrálásakor a hydrofahéjsavnak kb. 63%-a *para*-, és 30%-a orthonitroszarmazékká alakult.

**β-(4-nitrophenyl)-propionylchlorid.**

(*p*-Nitrohydrofahéjsavchlorid.)



E vegyületet a *p*-nitrohydrofahéjsavból H. MEYER általános módszere szerint thionylchlorid segélyével úgy nyerhetjük, ha a

p-nitrohydrofahéjsavat négyszeres mennyiségű thionylchloriddal vízfürdőn 1½ óráig gyengén melegítjük s a fölös mennyiségű thionylchloridot ezután vacuumban elűzzük. A savchlorid vörösbarna olaj alakjában marad hátra, melyet tisztítani felesleges, mivel a thionylchloridos eljárásnak épen az az előnye, hogy semmiféle szilárd melléktermék nem képződik. Az olaj hűtőkeverékben megszilárdul és 34–35° C-on megolvad.

Közönséges nyomáson forralva megfeketedik és elbomlik. Vacuumban destillálva 16 mm. nyomás alatt 189–192° C-on forr és a hűtőben megszilárdul.

0·0668 gr. anyagra elfogyott 3·2 cm<sup>3</sup> *n* 10 AgNO<sub>3</sub> oldat. A C<sub>9</sub>H<sub>8</sub>O<sub>3</sub>NCl képlet alapján számított értékek:

$$Cl = 16·60\%.$$

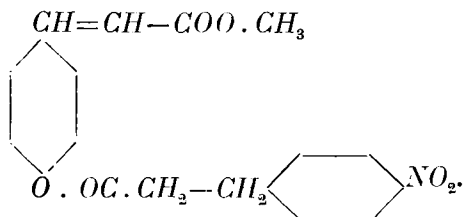
Kísérletileg talált érték:

$$Cl = 16·96\%.$$

A vegyület petroleumætherben, ligroinban, benzolban igen könnyen oldódik, ætherben szintén.

### β-(4-nitrophenyl)-propionyl-paracumarsavmethylester.

(p-Nitrohydrocinnamoyl-paracumarsavmethylester.)



Ezt a vegyületet ugyanúgy nyerjük p-cumarsav methylesterből és β-(4-nitrophenyl)-propionylchloridból, miként a p-nitrobenzoyl-p-cumarsavmethylestert nyertük p-cumarsavmethylesterből és p-nitrobenzoylchloridból. A termék 131–132° C-on olvad meg.

0·1462 gr. alkoholból átkristályosított anyag adott 0·3436 gr.  $CO_2$ -t és 0·0628 gr.  $H_2O$ -t.

0·2147 gr. anyag adott 7·5  $cm^3$  nitrogent ( $20^\circ C$ , 766 mm).

A  $C_{19}H_{17}O_6N$  képlet alapján számított értékek:

$$C=64\cdot19\%; \quad H=4\cdot82\%; \quad N=3\cdot94\%.$$

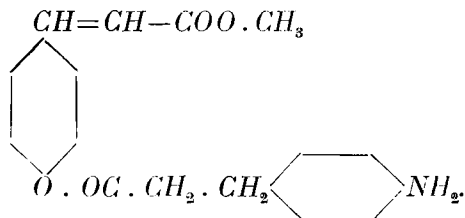
Kísérletileg talált értékek:

$$C=64\cdot09\%; \quad H=4\cdot77\%; \quad N=4\cdot01\%.$$

E vegyület alkoholból fehér tűkben kristályosodik. Savakkal rövid ideig forralva nem változik, míg lúggal főzve elbomlik és az oldat vörös színűre festődik. A vegyület benzolban és chloroformban már hidegen, alkoholban, továbbá ecetsavanhydridben és jégecetben melegítve oldódik. Aether és ligroin nehezen oldja, míg petroleumætherben oldhatatlan.

### $\beta$ -(4-aminophenyl)-propionyl-paracumarsavmethylester.

(p-Aminohydrocinnamoyl-paracumarsavmethylester.)



1 gr. nitroestert 25  $cm^3$  sósavgázzal telített abs. alkoholban feloldunk és a meleg folyadékhoz kis részletekben a nitrocsoport redukálásához szükséges mennyiségű granulált ónt adunk. Ha az ón utolsó részlete is eltűnt, a  $90^\circ C$ -os oldatot sok vízzel felhigítjuk s az ónt  $H_2S$ -sel ismételen leválasztjuk. A megszárt oldatból, szabad lángon besűrítve, már melegen leválik a  $\beta$ -(4-aminophenyl)-propionyl-paracumarsavmethylesterchlorhydrat, melyet hig alkoholos sósavval jól megsavanyított forró vízből kikristályosítunk. A chlorhydrat  $250^\circ C$  körül elbomlik, de már jóval előbb megvörösödik és meglágyul. Termelés 0·5 gr.

A vegyület vízben elég nehezen oldódik, a mennyiben fél gramm anyag feloldásához kb. 300 gr. forró sósavas víz szükséges.

A sulfat fehér, mikroszkopos tűkben kristályosodik és éppen olyan nehezen oldható, mint a chlorhydrat.

A chlorhydratnak forró oldatából tömény ammonia hozzáadása után fehér, kristályos csapadék alakjában leválik a szabad amin, melyet forró alkoholból kristályosítunk. E vegyület hosszú, fehér tűkben kristályosodik, melyek 153—154° C-on lassan, bomlás nélkül megolvadnak.

0.1512 gr. anyag adott 0.3893 gr.  $CO_2$ -t és 0.0808 gr.  $H_2O$ -t.

0.1804 gr. anyag adott 7.1 cm<sup>3</sup> nitrogengázt (20.5° C, 759 mm).

A  $C_{19}H_{19}O_4N$  képlet alapján számított értékek:

$$C = 70.11\% \quad H = 5.88\% \quad N = 4.30\%$$

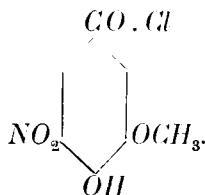
Kísérletileg talált értékek:

$$C = 70.22\% \quad H = 5.93\% \quad N = 4.45\%$$

A vegyület alkoholban és benzolban jól, ætherben nehezen oldódik, vízben oldhatatlan.

### 3-methoxy-4-oxy-5-nitrobenzoylchlorid.

(5-nitrovanillinsavchlorid.)



E vegyület előállításához szükséges 5-nitrovanillinsavat (3-methoxy-4-oxy-5-nitrobenzoésavat) VOGL (Monatshefte XX. 391) eljárása szerint 62% termelési hányaddal készíthetjük, ha a vanillint 0°-on nitráljuk, a keletkezett 5-nitrovanillinnak kalium-sójából hydroxylaminchlorhydráttal aldoxymot készítünk, az al-



doxyból ecetsavanhydriddel forralva a megfelelő nitrilt, a 3-methoxy-4-acetoxy-5-nitrobenzonitrilt állítjuk elő, mely vegyület conc.  $KOH$ -oldattal főzve elszappanosodik s a lúgos oldatból fölös mennyiségű híg kénsav hatására leválik az 5-nitrovanillinsav. A nyersterméket forró jégezetből átkristályosítjuk.

A savchloridot tisztán kapjuk meg, ha az 5-nitrovanillinsavat ötszörös mennyiségű thionylechloriddal 1 óráig vízfürdőn melegítjük s a feles mennyiségű thionylechloridot vacuumban elűzzük. A thionylechlorid utolsó nyomait hangyasavval távolítjuk el.

A lombikban sárga, szilárd anyag, az 5-nitrovanillinsavchlorid marad hátra, melvet tisztítani felesleges. Olvadáspontja  $93-94^{\circ} C$ .  $0.0282$  gr. anyagra elfogyott  $1.21$  cm<sup>3</sup>  $n$  10.  $AgNO_3$  oldat. A  $C_8H_6O_5NCl$  képlet alapján számított érték:

$$Cl = 15.31\%$$

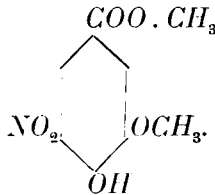
Kísérletileg talált érték:

$$Cl = 15.21\%$$

E vegyület benzolban igen jól oldódik. Ligroin és æther csak nehezen oldják, míg petroleumætherben teljesen oldhatatlan.

### 3-methoxy-4-oxy-5-nitrobenzoësavmethylester.

(5-nitrovanillinsavmethylester.)



Az 5-nitrovanillinsavmethylestert úgy nyerjük, hogy az 5-nitrovanillinsavchloridot abs. methylalkohollal rövid ideig melegítjük. E vegyület forró alkoholból világos sárga, erősen csillogó, finom tükben válik ki, a melyek  $148-149^{\circ} C$ -on bomlás nélkül megolvadnak.

$0.1282$  gr. anyag adott  $0.2240$  gr.  $CO_2$ -t és  $0.0472$  gr.  $H_2O$ -t.

$0.1382$  gr. anyag adott  $7.8$  cm<sup>3</sup> nitrogengázt ( $18.5^{\circ} C$ ,  $747$  mm).

A  $C_9H_9O_6N$  képlet alapján számított értékek:

$$C=47.56\%; \quad H=3.99\%; \quad N=6.17\%.$$

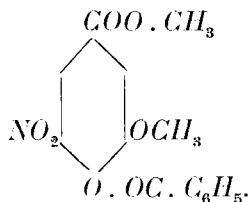
Kísérletileg talált értékek:

$$C=47.72\%; \quad H=4.09\%; \quad N=6.34\%.$$

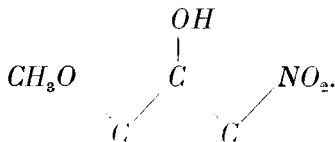
A vegyület benzolban és alkoholban jól oldódik, ligroin csak nehezen oldja, ellenben petroleumætherben, valamint ætherben is oldhatatlan.

### 3-methoxy-4-benzoyloxy-5-nitrobenzoësavmethylester.

(5-nitro-benzoylvánillinsavmethylester.



Az 5-nitrovanillinsavmethylester benzoylozása a szokásos módszerek alkalmazásával nem megy végbe. Sem benzoylchlorid-dal történő egyszerű melegítés, ú. n. savanyú benzoylozás után, sem pedig a SCHOTTEN-BAUMANN-féle általános eljárás szerint nátriumhydroxyd-oldatban nem történik meg a condensatio. Így pl. 5%-os nátronlúg alkalmazásakor 16 órai erős összerázás után sem volt reactio. Konezentráltabb nátriumhydroxyd-oldat nem alkalmazható az ester elszappanosodásának veszélye nélkül. Valószínű, hogy a benzoylozás a hydroxylesoportnak helyzete miatt nem megy végbe. Az 5-nitrovanillinsavmethylesterben ugyanis a hydroxylesoport a methoxyl- és a nitrocsoport közé esik:



Azaz a hydroxycsoporttal szomszédos két ortho-helyzetet gyökök foglalják el, a melyek a hydroxycsoport hydrogenjének más gyökökkel való kicserölését a legnagyobb mértékben megnehezíthetik (sterische Hinderung). E tekintetben különösen a negatív nitrocsoport jelenlétének tulajdoníthatunk fontos szerepet.

A benzoylszármazékot végül is pyridin segítségével sikerült előállítanunk.

4·2 gr. (1 mol.) finoman porított 5-nitrovanillinsavmethyl-estert 20 gr. legtisztább «Kahlbaum» jelzésű pyridinben oldunk s a tiszta oldathoz 2·6 gr. (valamivel több egy molekulánál) benzoylchloridot csepegtetünk. Két órai gyenge melegítés és 12 órai állás után a vörös folyadékot jéggel hűtött hig kénsavba csepegtetjük. A leváló vörös olaj csakhamar nyúlós tömegbe áll össze, mely rövid idő múlva sárga lepénynyé szilárdul. Az anyagot hig kénsavval eldörzsöljük és szűrés után előbb hig nátronlúggal, majd vízzel jól kimossuk és a 100° C-on szárított nyersterméket forró alkoholból átkristályosítjuk. Termelés 4·2 gr. O. p. = 124—125° C.

0·1322 gr. anyag adott 0·2820 gr.  $CO_2$ -t és 0·0478  $H_2O$ -t.

0·2150 gr. anyag adott 8  $cm^3$  nitrogengázt (19° C, 746 mm).

A  $C_{16}H_{13}O_7N$  képlet alapján számított értékek:

$$C=57·98\%; \quad H=3·95\%; \quad N=4·23\%.$$

Kísérletileg talált értékek:

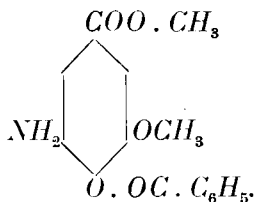
$$C=58·17\%; \quad H=4·01\%; \quad N=4·33\%.$$

E vegyület alkoholból világos, sárgásbarna, csillogó tükben kristályosodik. Benzolban már hidegen, ætherben és ligroinban, valamint jégezetben pedig melegítve oldódik. Petroleumætherben oldhatatlan.

Savakkal huzamosabb ideig forralva elbomlik és benzoësav válik le. Forró alkoholos oldatához nátronlúgot csepegtetve, intenzív vörös színeződés mellett elbomlik és a benzoësavester jellemző szaga tisztán kivehető.

**3-methoxy-4-benzoyloxy-5-aminobenzoésavmethylester.**

(5-amino-benzoylvanillinsavmethylester.)



1 gr. nitroestert vízfürdőn gyengén felmelegített, sósavgázzal telített abs. alkoholban feloldunk s a tiszta oldathoz a nitro-csoport redukálásához szükséges mennyiségű ónt adjuk. Az ón utolsó részletének feloldása után a jól lehűtött oldatot vízzel felhigítjuk és erős hűtés közben nátronlúggal túltelítjük. Az amin mint szürke tömeg kiválik. A ragadós és nehezen szűrhető terméket a szűrővel együtt kiszáritjuk és ætherrel több ízben kifőzzük. Az æther elpárolgása után csaknem fehér tükben nyerjük az 5-amino-benzoylvanillinsavmethylestert. Az alkoholból átkristályosított vegyület 188—190° C-on olvad. Termelés 0·5 gr.

0·1399 gr. anyag adott 0·3282 gr.  $\text{CO}_2$ -t és 0·0623 gr.  $\text{H}_2\text{O}$ -t.

0·1967 gr. anyag adott 8·2  $\text{cm}^3$  nitrogengázt (20° C, 761 mm.).

A  $\text{C}_{16}\text{H}_{15}\text{O}_5\text{N}$  képlet alapján számított értékek:

$$\text{C} = 63\cdot76\%; \quad \text{H} = 5\cdot02\%; \quad \text{N} = 4\cdot65\%.$$

Kísérletileg talált értékek:

$$\text{C} = 63\cdot98\%; \quad \text{H} = 4\cdot95\%; \quad \text{N} = 4\cdot74\%.$$

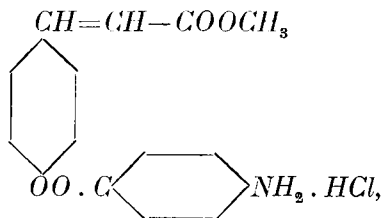
E vegyület forró alkoholban és benzolban jól, ætherben nehezen oldódik, míg vízben teljesen oldhatatlan.

A chlorhydrat előállítására céljából az amint forró, sósavas vízben feloldjuk. Koncentrált sósav hozzáadása után leválik a 3-methoxy-4-benzoyloxy-5-aminobenzoésavmethylesterchlorhydrat. A vegyület sósavval jól megsavanyított forró vízből hosszú, fehér tükben kristályosodik, melyek már 200° C körül megvörösödnek és 236—240° C között pezsegve elbomlanak. A chlorhydrat forró vízben csak nehezen oldódik.

A sulfat rövid, mikroszkopos tűben kristályosodik és forró vízben csaknem oldhatatlan.

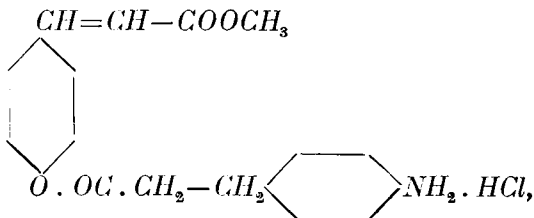
Ily módon tehát a két alapvegyületnek, a p-cumersavnak és a vanillinsavnak a következő három, a cocaínnal analog szerkezetű származékához jutottunk :

I.



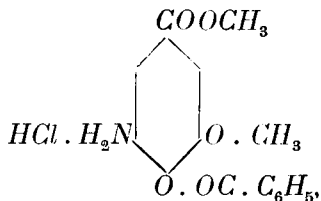
p-aminobenzoyl-p-cumarsavmethylesterchlorhydrat.

II.



p-aminohydrocinnamoyl-p-cumarsavmethylesterchlorhydrat.

III.



5-aminobenzoylvanillinsavmethylesterchlorhydrat.

Behatóbb élettani kísérleteket (anyaghiány miatt) nem végezhettünk, annyit azonban mindenesetre már eddig is megállapíthattunk, hogy ezek a vegyületek a sértetlen epidermisre nem hatnak és hogy a cocaínnak azt a sajátságos érzéstelenítőhatását, a melyet az például a nyelvre gyakorol, nem mutatják, még huzamosabb ideig tartó bedörzsölés után sem. Ez a körülmény azonban még nem zárja ki teljesen ezeknek a vegyületeknek esetleges érzéste-

lenítő hatását. Lehetséges, bár nem valószínű, hogy nyílt seben, vagy bőralatti befecskendezéskor, esetleg belsőleg felvéve, mutathatná-  
nak valamilyen élettani hatást, ha gyöngébbet is, mint a cocain.

Igy tehát az érzéstelenítő hatás megszűnésének, illetve meg-  
gyengülésének okát ezen vegyületek eltérő szerkezetében kell  
keresnünk. Az eltérést részint a hydroxyl-csoportnak a carboxyl-  
hoz való para-helyzete, részint a hosszabb oldalláncz, illetve a  
benne előforduló olefin-kötés, részint pedig a methoxyl-csoport  
jelenléte okozhatja.

Mivel pedig a KONEK által előállított és az idézett helyen  
leírt (*a*)-*m*-aminobenzoylsalicylsavmethylesterchlorhydrat — hol  
e körülmények egyike sem forog fenn — a cocainhatást mutatja,  
jogosultnak látszik az a feltevés, hogy ezek a vegyületek a fenti  
okok miatt hatástalanok.

Ez okok közül első sorban a methylesoporra vonatkozólag  
tétélezhető fel, hogy csökkenti a physiologiai hatást. A tapasztalat  
ugyanis azt mutatja, hogy egy-két kivételt leszámítva, a  
methoxylnek a molekulába való belépése mindig az élettani hatás  
csökkenésével, esetleg teljes megszűnésével jár. Így a strychninből  
egy második methoxyl-csoport belépése folytán keletkezett brucin  
hatásában nagymértékben csökkent; míg a narcotinból a methoxyl  
belépése folytán keletkezett hydrastin már a legcsekélyebb narko-  
tizáló hatást sem mutatja. A *p*-aminobenzoesavpropylester, vagy  
propäsin, a nyálkahártyákra ható erős anaestheticum, míg a guaja-  
colból készített, tehát metoxyl-csoportot tartalmazó, különben tel-  
jesen analog vegyület már jóval csekélyebb élettani hatással bír.  
Ezek és egyéb tapasztalati tények figyelembe vételével a III. sz.  
vegyület élettani hatástalanságát megmagyarázhatjuk.

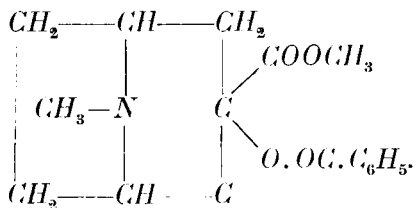
Ha azonban nem is tulajdonítunk a methoxyl-csoportnak  
ilyen gyengítő hatást, a mint hogy az I. és II. sz. vegyületnél  
erről — a methoxyl hiánya miatt — szó sem lehet, akkor hátra-  
maradnak még: a carboxyl- és hydroxyl-csoportok para-helyzete,  
a hosszú oldalláncz, a kettős kötés, mint okozói a physiologiai  
hatás csökkenésének, illetve teljes megszűnésének.

Mivel pedig a III. vegyületben kettős kötés nincsen és mivel  
a kettős kötés physiologiai hatása úgylis csak a vegyület mérgező  
hatásának növelésében nyilvánul (így például a neurin húszszor

mérgezőbb hatású, mint a cholin, a p-coniceën ugyanannyiszor mérgesebb, mint a coniin), ennél fogva nyomós okul csak a para-helyzet és a hosszú oldalláncz marad meg.

Ha azután tekintetbe vesszük még, hogy a hosszabb oldalláncz csak az I. és II. vegyületben van meg, ellenben a III.-ból hiányzik, akkor e két ok közül az utóbbi is elesik és egyedül csak a hydroxyl- és carboxyl-csoportnak para-helyzete marad fenn, mint az élettani hatás megszűnésének, illetve meggyengülésének egyetlen okozója. Ebből viszont azt a következtetést vonhatjuk, hogy úgy a cocaïnban magában, mint a vele analog szerkezetű vegyületekben az élettani hatást illetőleg döntő fontosságú szerep jut a carboxyl- és hydroxyl-csoport ortho-helyzetének.

E következtetés valószínűségét igazolja úgy a cocaïnnak, mint a KONEK FR. által előállított (*a*)-*m*-aminobenzoylsalicylsav-methylesterchlorhydratnak szerkezete, hol a carboxyl-csoport a hydroxylhez ortho-helyzetet foglal el. E tekintetben igen fontos érvnek tekinthető továbbá a physiologiailag teljesen hatástalan *a*-cocaïn :



A mi szintén csak azt bizonyítja, hogy a carboxyl-csoportnak a szomszédos szénatomhoz kötött hydroxylcsoporttól való eltávolodása az élettani hatás rovására történik.

Mindazonáltal még számos ilyen irányú vizsgálat és kísérlet eredményére lesz szükség, hogy ezen kérdésre határozott feleletet adhassunk.

A II. sz. vegyületben előforduló p-nitrohydrocinnamoyl- vagy  $\beta$ -(4)-nitrophenyl)-propionylgyök esetleges gyengítő hatását — analog kísérleti tények híján — természetesen a jelen esetben sem konstatálhatjuk még.

## AZ ÁRAMGÖRBE ALAKJÁNAK BEFOLYÁSA A CSENDES KISÜLÉSEK CHEMIAI HATÁSÁRA.<sup>1</sup>

LECHNER GEDEON-tól.

Az áramgörbe alakjának befolyását a csendes kisülések ozonképző hatására eddig kevesen és nem végleges eredménnyel tették vizsgálat tárgyává; pedig eltekintve attól, hogy a kérdés elméletileg is érdekes, nagy gyakorlati fontossága van, mert az ozont ma már nagyiparilag városok vízszükségletének sterilizálására kiterjedten alkalmazzák; tehát fontos, hogy gazdaságos előállításának feltételei minden oldalról meg legyenek világítva.

FRÖLICH O.<sup>2</sup> szerint a szakgatott egyenáram ugyanakkora primár áramerősség mellett tetemesen több ozont hoz létre, mint a váltakozó áram, vagyis az ozonképző hatás annál nagyobb, minél meredekebb lefolyású a görbe. Ha azonban az összehasonlítás alapjául az ozonizátoron átmenő secundár áramot vesszük, épen az ellenkezőjét tapasztaljuk; WARBURG és LETTHÄUSER<sup>3</sup> szerint egyforma effektív áramerősség mellett az ozonképző hatás közelítőleg a közép áramerősséggel arányos, ez pedig annál nagyobb, minél laposabb lefolyású a görbe. A görbe alakjának számszerű jellemzésére a formafactort szokás megadni; ez nem egyéb, mint az effectív és a közép intenzitás viszonya, azaz

$$f_i = \frac{i_{eff}}{i_k} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i^2 dt}}{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i dt}$$

<sup>1</sup> A M. Tud. Akadémia 1914. évi nagygyűlésén a Rózsav-jutalommal koszoruzott pályamű.

<sup>2</sup> Elektrotechn. Zeitschrift, 12. 340. (1901.)

<sup>3</sup> Ann. Phys. (4.) 28. 17, (1909.)



ahol  $\tau$  a görbe periodusát jelenti. (Symmetrikus görbén.)  
Sinusalaku áramnál

$$f_{\sin} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.111;$$

minél meredekebb lefolyású a görbe, annál nagyobb a formafactor. Analog módon a feszültség-görbe formafactorához ( $f_E$ ) juthatunk el. A görbét jellemző másik factor a tetőpontfactor (Scheitelfactor), mely nem egyéb, mint a legnagyobb érték viszonya az effectiv értékhez; így például a feszültséggörbe tetőpontfactora:

$$\sigma_E = \frac{E_{\max}}{E_{\text{eff}}}.$$

Sinusalakú áramnál:

$$\sigma_{\sin} = \sqrt{2} = 1.414.$$

A tetőpontfactor is annál nagyobb, minél hegyesebb a görbe.

Hasonló eredményre mint WARBURG és LEITHÄUSER jutottam én is egy korábbi dolgozatomban,<sup>1</sup> melyben többek közt megállapítottam, hogy az ozonizator sarkaira kapcsolt egyforma effectiv feszültség mellett a szakgatott egyenáram hatásosabb, mert ebben az esetben ozonizatoron erősebb áram megy az keresztül. Ugyanis a csendes kisülésekhez egy bizonyos, az elektrisatortól és a benne levő gáztól függő minimális feszültség szükséges, melyen alul a gáztérben vezetési áram nincs.<sup>2</sup> A hegyesebb szakgatott egyenáramnál pedig ezt a minimális feszültséget már kisebb effectiv feszültség esetén elérjük.

Mind e kísérletekben az áramgörbe alakja nem volt pontosan ismeretes; csak annyi volt bizonyos, hogy a váltakozó áram görbéje laposabb, mint a szakgatott egyenáramé. WARBURG és LEITHÄUSER az áramgörbe alakjáról csak annyit tud, hogy felső rezgések következtében a sinusalaktól tetemesen eltér; a közép intenzitást a görbealak ismerete nélkül oly módon határozták meg, hogy egy synchronmotor alkalmazásával az áram-

<sup>1</sup> Doktori értekezés 1909. — Zeitschr. für Elektrochem. 17. 414. (1911.)

<sup>2</sup> A. CHASSY: Compt. Rend. 134. 298. (1902.) — E. WARBURG: Verh. der Deutsch. phys. Ges. 1903. 382. — V. ERLICH és F. RUSS: Zeitschr. für Elektrochem. 19. 330. (1913.)

nak csupán egyik fázisát bocsátották egy galvanometeren keresztül. EHRLICH és RUSS megvizsgálta ugyan az ozonisoron átmenő váltakozó áramot a GEHRCKE-féle «Glimmlight-Oscilloskop» segítségével; azonban így csak nagyon általános képet nyertek az áram lefolyásáról.

Jelen dolgozatom célja éppen az, hogy a görbiformák pontos ismeretére támaszkodva beható vizsgálat tárgyává tegyem a közép intenzitás és az ozonképződés közötti fentebb említett összefüggést. A kísérleti részt megelőzve, legyen szabad már itt megjegyezni, hogy sikerült is — legalább véleményem szerint — WARBURG és LEITHÄUSER észleleteit megerősítve, ezt a törvényszerűséget megállapítanom.

Az ozonisoron átmenő áramnak, valamint a sarokfeszültségnek görbéjét tudtommal RÓKA KÁLMÁN<sup>1</sup> vette fel először pontosan egy, általa az itt szereplő nagy feszültségre való tekintettel módosított JOUBERT-tárcsa segítségével. Kísérleteinek eredménye az, hogy az elektrisor mint condensator a görbének egy vagy több magasabb harmonikus összetevőjét resonantia útján kiemeli, s ezáltal a görbe eltorzul. Kísérleteim ezt is teljesen megerősítik, amiről alább a görbék tárgyalásakor lesz szó.

Az általam követett módszer a görbék felvételére az R. B. OWENS-féle,<sup>2</sup> mely szintén a pontszerű felvételen alapszik, de a nagy feszültség dacára sem kíván módosított JOUBERT-tárcsát. Ez a módszer érzékeny tükrös elektrodynamometer alkalmazásában áll, melynek két álló és egy lengő tekerce van. A váltakozó áramot, melynek görbéjét felvenni akarjuk, az egyik álló tekercsbe vezetjük, míg a másikba egyenáramot vezetünk. A lengő tekercsset egy másik egyenáram-forrásra kapcsoljuk s ebbe az áramkörbe iktatjuk be a JOUBERT-féle tárcsát; ezen keresztül tehát csak egy segédáram folyik. Az egyenáramot az álló tekercsben úgy szabályozzuk, hogy a lengő ne szenvedjen kitérést; ekkor a pillanatcontactus állása által meghatározott fázisban a váltakozó áram és az egyenáram mágnessere egymást

---

<sup>1</sup> Doktori dissertatio 1910.

<sup>2</sup> Engineering 74. 741. (1902.) — Zeitschr. für Instrumentenkunde 23. 128. (1903.)

kompenzálja. Az álló tekercsben folyó egyenáramot galvanométerrel megmérjük; intenzitása arányos a váltakozó áram megfelelő pillanatnyi értékével. A JOUBERT-tárcsán és a lengőn átmenő áram erőssége csak a módszer érzékenységet befolyásolja.

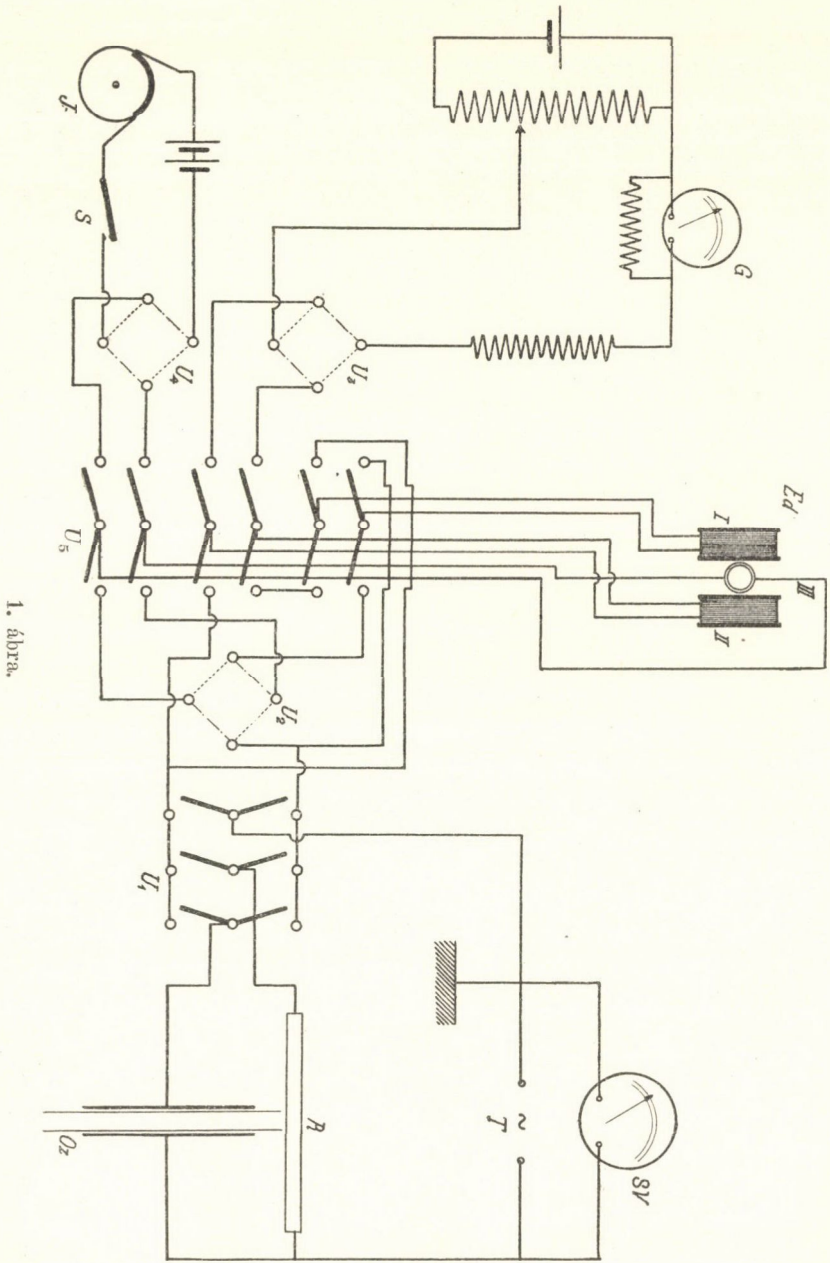
Ez a módszer a szóban levő specialis célra, azaz nagyfeszültségű, de gyenge áramok felvételére igen alkalmasnak bizonyult. Előnye, hogy az áram nem ágazik el, és nincsenek a nagyfeszültségű áramkörben megszakítások. A JOUBERT-tárcsán csak csekély feszültség van, legfeljebb 10 Volt, ezenkívül a kompenzáló null-módszerek előnyeivel is bír, s a pillanatcontactus jósága, valamint időtartamának változása nem gyakorol lényeges befolyást az eredményre.

A kapcsolás az 1. ábrán látható.  $T$  nagyfeszültségű áramforrás kapcsolaihoz — melyek közül az egyik földelve van — egymással parallel az  $Oz$  ozonizátor és a  $R$  ohmikus ellenállás vannak kapcsolva.  $U_1$  átkapcsoló segítségével tetszés szerint az ozonizátoron vagy az  $R$  ellenálláson átmenő áramot lehet az  $Ed$  elektrodynamometerbe vezetni; az utóbbi áram görbéje azonos lesz a kapocsfeszültség görbéjével.

Az elektrodynamometer nemcsak a görbék felvételére, hanem az intenzitás meg a teljesítményi tényezők mérésére is szolgált. Ha a görbét akartam felvenni, akkor az  $U_6$  hat polusú átkapcsolót balra kellett fordítani. Ekkor az I. álló tekercsen a felveendő váltakozó áram, a II. tekercsen a kompenzáló egyenáram és a III. lengőn a segédáram megy keresztül.  $U_3$  és  $U_4$  áramfordítókra azért van szükség, mert a görbének úgy positiv, mint negativ felét fel kell venni. A  $G$  galvanometer shuntjének (mellékszárlatának) változtatásával különböző erősségű áramok görbéjét lehet meghatározni. A görbe valamely pontjának felvétele már most abban áll, hogy a kompenzáló egyenáramot addig módosítjuk, míg az  $S$  áramkulcs zárásakor az elektrodynamometer többé nem tér ki; a  $G$  galvanometer mutatja ekkor a kérdéses pont ordinatáját.

A FRANKÉ-féle rendszerű  $J$  JOUBERT-tárcsát egy synchromotor közvetlen tengelykapcsolással hajtotta.

A görbék ismerete által képesek vagyunk most már az



1. ábra.

elektrodynamometerrel mért  $i_{eff}$  effectív intenzitásból a formafactor útján a közép intenzitást meghatározni. Ebből a célból millimeterpapiroson megrajzoljuk az áramgörbét, ezenkívül az egyes ordináták négyzetre emelése által kiszámítjuk és megszerkesztjük az intenzitás négyzetének görbéjét is. A görbék által bezárt területet planimeterrel megmérjük. Az első görbe területe a közép intenzitással, a másodiké az effectív intenzitás négyzetével arányos, úgy hogy ezekből az adatokból a formafactor könnyen kiszámítható. Hasonlóképen határozzuk meg a feszültséggörbe formafactorát is.

Nem lehet tagadni, hogy a formafactor ilyenképen való meghatározása meglehetősen körülményes és fáradságos dolog.

Az intenzitás, valamint a teljesítményi tényező mérésére az  $U_5$  átkapcsolót jobbra fordítjuk, ekkor  $U_1$  segítségével vagy az ozonizátoron, vagy az ellenálláson átmenő áramot, vagy pedig e két áram összegét lehet mérni.<sup>1</sup> A teljesítményi tényező meghatározása ugyanis a háromampèremeter módszerrel történt, azzal a különbséggel, hogy csak egy mérőműszert alkalmaztam és ezzel felváltva mértem a három ágban folyó áramokat. Ez megengedhető volt azért, mert az áramkör nagy ellenállásaihoz képest ( $R=6-26$  megohm, s az ozonizátor látszólagos ellenállása is ilyen rendű) az elektrodynamometer ellenállása (345 ohm) elhanyagolható. Ha az ozonizátoron átmenő áram  $i$ , az ellenálláson átmenő áram  $i_R$ , s a kettőnek eredője  $i_s$ , akkor sinusalakú váltakozóáramot tételezve fel:

$$k = \cos \varphi = \frac{i_s^2 - i^2 - i_R^2}{2i \cdot i_R}$$

vagy miután az elektrodynamometer kitérése  $n$  az intenzitás négyzetével arányos:

$$k = \frac{n_s - n - n_R}{2 \sqrt{n \cdot n_R}}$$

<sup>1</sup>  $U_2$  segítségével a lengőben kommutálható az áram iránya, s mindkét oldalra megfigyelhető a kitérés, melyekből azután középértéket kell venni.

Az ozonizátor által fogyasztott energia wattokban

$$L = E \cdot i \cdot k,$$

ahol  $E$  az  $SV$  statikus voltmérő által mért sarokfeszültséget jelenti.

Amint látható, a  $k$  és a  $L$  kifejezéseiben nincs benne a  $R$  ellenállás, ami elkerülhetetlen lett volna, ha a teljesítményt úgy mérem, hogy az elektrodynamometert mint wattmérőt kapcsolom. Ez utóbbi eljárásnak útjában állott az, hogy  $R$  grafit ellenállás volt (RUHSTRAT-féle 1 és 5 megohmos ellenállások), mely tudvalevőleg nem állandó, azonkívül csak 0.5 milliampèrrel volt szabad megterhelni. Ilyen körülmények között a wattmérő-kapcsolással — amikor az ozonizátor árama az álló, az ellenállás árama pedig a lengő tekeresen ment át — tulságos csekély kitérést kaptam.

A háromampèremérő-módszernek hátránya, hogy a mérés eredményét a görbealak erősebben befolyásolja, mint a wattmérő esetében.<sup>1</sup> Igaz, hogy kísérleteimben a sinusalaktól rendkívül eltérő görbeformákkal is dolgoztam, amikor már a teljesítményi tényezőnek  $k = \cos \varphi$  definitiója elveszti értelmét. Minthogy azonban  $L$  más módon való pontosabb meghatározása az adott körülmények között nem állott módomban, s tekintettel arra, hogy a fenti módszer szerint való  $k$  meghatározások részben magából a módszer természetéből kifolyólag is<sup>2</sup> valószínűleg nagyobb kísérleti hibában szenvedtek, mint az alkalmazott correctio lett volna, nem maradt más hátra, mint az így nyert  $k$  értékeket teljesítményi tényező gyanánt elfogadni. Minél nagyobb a görbealak eltérése a sinusalaktól, annál nagyobb eltérés lehetséges ennél fogva az ily módon kiszámított teljesítmény és a valódi között; ezzel a körülménnyel tehát az adatok felhasználásakor számolni kell.

A teljesítményi tényezőt az áram- és feszültséggörbékből is meg lehet határozni. Ebből a célból összeszorozzuk az áram és feszültség összetartozó értékeit s megrajzoljuk a wattgörbét.

<sup>1</sup> F. NIETHAMMER: Elektrotechn. Zeitschr. 1899. 701.

<sup>2</sup> Mivel  $k$  képletében a számláló a kitérések különbsége.

Ennek területe, planimeterrel meghatározva, arányos a wattok mennyiségével. Ha ezenkívül ismerjük az  $i^2$  és az  $E^2$  görbék területét, melyek  $i_{\text{eff}}^2$ -fel illetőleg  $E_{\text{eff}}^2$ -fel arányosak, akkor  $k$ -t kiszámíthatjuk.

Ez az eljárás azonban hosszadalmas lévén, csak néhány esetben alkalmaztam, mintegy a háromampèremeter-módszer ellenőrzéseképen. Hátránya még, hogy az áram- és a feszültséggörbét nem lehet egyszerre, hanem csak egymásután felvenni, s a felvétel ideje alatt, mely legalább fél óra, a görbék alakjában, fáziskülönbségében csekély változások történhetnek. Ezenkívül a görbék megrajzolásakor is a hibáknak elég tág tere nyílik.

A két különböző módszerrel nyert  $k$  értékek sok esetben jól egyeznek; némely esetben kevésbé jó volt a megegyezés, de az eltérés nem oly nagy, hogy az eredményekből levont következtetések fenn ne maradhatnának.

Tudvalevő, hogy az ozonisoron átmenő áramnak ( $i$ ) csak egy része, úgyanis a vezetési áram (Leitungsstrom,  $i_L$ ) bír chemiai hatással, míg másik része, az eltolódási áram (Verschiebungsstrom,  $i_v$ ) chemiaillag hatástalan. EHRLICH és RUSS<sup>1</sup> mutatta meg, hogyan lehet a vezetési áramot kiszámítani a következő adatok alapján: <sup>2</sup>

$E$  és  $k$  az egész ozonisorra eső feszültség és teljesítményi tényező.

$E_D$  és  $k_D$  a dielektrikumra eső feszültség és teljesítményi tényező. Ezekhez az értékekhez úgy jutunk, ha az ozonisorot kénesővel töltjük meg és a különböző áramerősségekhez tartozó feszültséget és teljesítményi tényezőt meghatározzuk.

Ezekből a gázrétegekre eső feszültség  $E_i$  és teljesítményi tényező  $k_i$  következőleg számítódik ki:

$$E_i^2 = E^2 + E_D^2 - 2E \cdot E_D (\sqrt{1 - k^2} + k \cdot k_D)$$

$$k_i = \frac{E \cdot k - E_D \cdot k_D}{E_i}$$

<sup>1</sup> Idézett helyen.

<sup>2</sup> A számításra nézve az eredetire utalok, itt csak röviden adom a képleteket, melyeknek segítségével a táblázataimban közölt értékeket kiszámítottam.

A minimum potential alatt  $i_v=i$  és arányos  $E_i$ -vel, az eltolódási áramra eső teljesítményi tényező  $k_v=k$ -val.  $i_v$  a kisülés alatt is arányos marad  $E_i$ -vel s ebből kiszámítható;  $k_v$  hasonlóképen megtartja értékét a kisülés alatt. Ebből már most a vezetési áram kiszámítható:

$$i_L = i^2 + i_v^2 - 2i \cdot i_v (\sqrt{1 - k_i^2} + k_v \cdot k_i)$$

Kísérleteimben az említett értékeket kénesötöltés esetében, valamint a minimum potential alatt meghatároztam s ezekből a vezetési áramot kiszámítottam.

A számítás azonban feltételezi azt, hogy az áram sinus-lefolyású, ennél fogva a kapott értékek csak akkor fogadhatók el, ha az áramgörbe a sinus-lefolyástól nem nagyon tér el. Ennek az ellenkezője legnagyobb mértékben a IV, kísérletsorozatban forog fenn (transformator, szakgatott egyenáram). Itt a számítás oly értékeket eredményez, amelyek a valóságnak aligha felelnek meg, így például a kísérletek egy részében  $E_D$  nagyobb mint  $E$ , a mi azt jelentené, hogy  $E_i$  nem késik az áramhoz képest, hanem siet (v. ö. a vectordiagrammot EHRLICH és RUSS idézett dolgozatában). Ha ez így volna, akkor ebből következtetéseket lehetne levonni a gáztérben fellépő ellenelektromotoros erőre vonatkozólag, tekintetbe véve még, hogy a többi kísérletsorozatban  $k_i$  mindig kisebb 1-nél, míg EHRLICH és RUSS kísérleteiben az 1-hez közeledik. E következtetéseknek azonban útját állja az, hogy a görbék nem sinusalakúak. Mindazáltal közlöm a számítások eredményét, mert az ily módon számított vezetési áram  $i_L$  a IV. kísérletsorozatot kivéve a kihasználással nagyjában egyszerű összefüggést mutat.

A görbealak befolyásáról lévén szó, olyan áramokat kellett vizsgálnom, amelyek egymástól különböző lefolyásúak. Négy különböző áramot állítottam elő a következő módon:

I. A városi váltakozó áram (42 periodus), melynek lefolyása, a mint saját és mások felvételeiből meggyőződtem, majdnem tiszta sinusalakú, egy nagy, 70 cm ütőtávolságú REINIGER, GEBBERT és SCHALL-féle inductor által a kellő feszültségre transformálva.

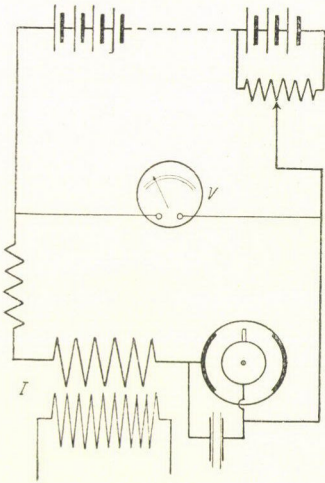
II. A váltakozó áram egy KOCH és STERZEL-félé 0.25 kilowattos olajtransformator által transformálva.



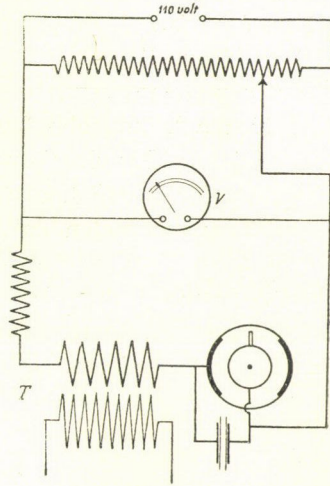
III. Kénesős turbina szakgatóval előállított szakgatott egyen-  
áram az inductor által transformálva.

IV. Szakgatott egyenáram a transzformator által transfor-  
málva.

Mind a négy esetben az áram periodusa 42 Volt másod-  
percenként. Szakgatott egyenáramon ezt úgy értem el, hogy  
a két segmentummal ellátott turbinaszakgatót négy polusú syn-  
chronmotorral<sup>1</sup> hajtottam, melynek fordulatszáma 21 volt másod-



2. ábra.



3. ábra.

percenként úgy, hogy 42 zárás és ugyanannyi megszakítás tör-  
tént. A szakgatóhoz a szokásos módon parallel volt kapcsolva  
egy condensator.

Váltakozó áram esetében a secundär feszültség beállítása  
egyszerűen a primär áramnak ellenállással való szabályozásával  
történt. Szakgatott egyenáramnál azonban a fentebb idézett dol-  
gozatomban már kifejtettek szerint az ellenállás változása a  
primär áramkörben maga után vonja az áram lefolyásának meg-  
változását a secundär körben is. Hogy ez ne következék be,  
úgy jártam el, hogy a primär körbe kapcsolt ellenállás válto-

<sup>1</sup> Ez hajtotta a görbefelvételkor a JOUBERT-tárcsát is.

zatlan maradt s a különböző secundär feszültségek olérésére a primär kör feszültségét változtattam. A III. kísérletsorozatban áramforrásul accumulatorok szolgáltak, melyekből elegendő számút kapcsoltam össze; ezek közül kettő vagy három megfelelő ellenálláson át zárva volt s a [pontos szabályozást ez ellenállásról való leágaztatással értem el. A primär áramkör ellenállása az inductorral együtt állandóan 12·5 Ohmot, a legnagyobb feszültség 37·7 Voltot tett ki (2. ábra).

A IV. kísérletsorozatban a városi 110 Voltos egyenáram volt az áramforrás, melyet kellő ellenálláson át zárva, a feszültséget erről az ellenállásról ágaztattam el. A primär körben itt a transzformátorral együtt állandóan 28 Ohm ellenállás volt bekapcsolva; a legnagyobb feszültség 103 Voltot tett ki (3. ábra).

A leírt módon előállított s mint a görbefelvételek mutatják, csakugyan különböző lefolyású áramok ozonizáló hatását összehasonlíthatni: ez a jelen dolgozat feladata. E végből két kísérletsorozatot hajtottam végre: az egyiket üvegozonisátorral és oxygennel, a másikat levegővel és egy olyan ozonisátorral, melynek belső fegyverzete aranyozott sárgarézcsőből állott, tehát a WARBURG és LEITHÄUSER-féle «Metallapparat»-hoz hasonlóval. Ezek az ozonisátorok vezető folyadékba merültek, mely egyszersmind a külső földelt fegyverzetet alkotta; a folyadék fölé olajréteget öntöttem a jobb szigetelés czéljából. Hasonlóképen a belső csőben is vezető folyadék és fölötte olajréteg volt elhelyezve.

A két kísérletsorozatot egyforma módon az alább vázolt egyszerű kísérleti elrendezéssel valósítottam meg (4. ábra):

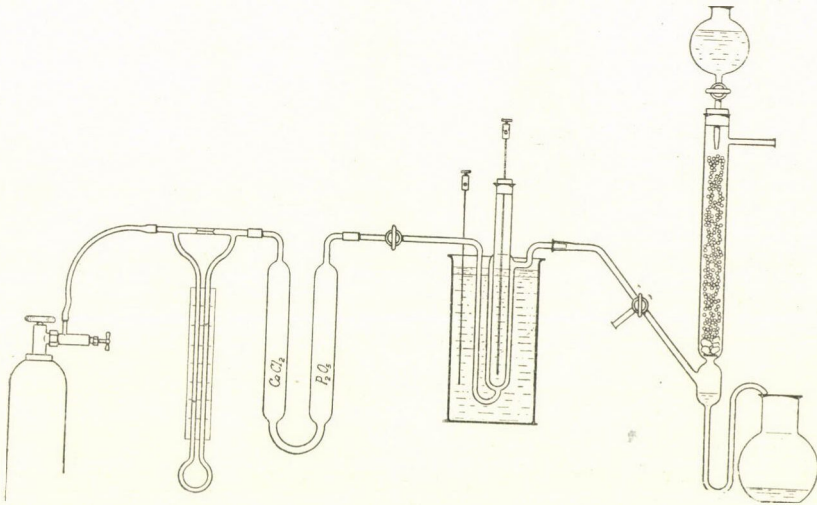
A levegő vagy az oxygen aczélpalaczkból a capillar-manometernek nevezhető ismeretes sebességmérő-készüléken ment át,<sup>1</sup> majd tökéletesen megszáritva az ozonisátorba s innen közvetlenül az elnyelő toronyba jutott. Ez az utóbbi üvegyöngyökkel megtöltött függőleges üvegcsőből áll, a gőz fölfelé halad, míg egy csepegtető tölcserből az elnyelőfolyadék ellenáramban lefelé folyik. Elnyelő folyadékul alkalikus kaliumjodidoldatot alkalmaztam,<sup>2</sup> a kisebb vagy nagyobb gáz sebesség szerint 1/50 vagy

<sup>1</sup> Az oxygen- és levegőáramra más-más capillar-manometert használtam, melyeket empirikusan pontosan kalibráltam.

<sup>2</sup> LECHNER G.: Zeitschr. für Elektrochem. 17, 412 (1911).

1/20 normal koncentrációban. A torony nagyságának alkalmas választásával még nagy gázsebesség mellett is tökéletes absorptio érhető el. A torony alkalmasabb a mosópalaczknál, mert a gáz nem bugyborékol benne, a mi a sebességmérő pontos beállítását megnehezítené, azonkívül az az előnye is van, hogy a gáz útjába nem támaszt ellenállást,

Az elnyelő folyadékot a kísérlet után megsavanyítva és natriumthiosulfat-oldattal megtitrálva, az ozon mennyiségét megkapjuk.



4. ábra.

Tudvalevő, hogy a csendes kisülések desozonizáló hatása miatt a kihasználás az ozon koncentrációjától lényegesen függ. A desozonizáló hatás befolyását ki lehet küszöbölni igen nagy gázsebesség alkalmazásával, mikor az ozon koncentrációja elenyésző kicsiny. Az így kapott kihasználást WARBURG és LEITHÄUSER «Nullausbeute»-nek nevezi. Ez eljárás kísérleti kivitele azonban nagy nehézségekbe ütközött volna.<sup>1</sup> Ezért egy másik módszerhez folyamodtam, a melyet már első dolgozatomban is

<sup>1</sup> A null-kihasználás számítás útján is meghatározható. l. WARBURG és LEITHÄUSER, idézett helyen.

sikerrel alkalmaztam s mely abból áll, hogy az ozon concentratióját a gáz sebesség kellő megválasztása által állandóan tartjuk; ekkor a desozonisatio is állandó, mivel a concentratio függvénye, tehát a kihasználások a megfelelő null-kihasználásokkal arányosak.<sup>1</sup>

Oxygennel végzett kísérleteimben az állandó concentratio literenként 40 mg. volt; a levegővel végzett kísérletekben oly concentratiót választottam, a milyent a gyakorlatban legtöbbször használnak, azaz 5 mg. literenként. Ez az utóbbi kísérlet-sorozat azáltal is közelebb állott a gyakorlati eljárásokhoz, hogy az alkalmazott ozonizatornak egyik fegyverzete fém volt.

Az egyes kísérletek végrehajtásáról még a következőket kell megjegyezni: Elsősorban a gázáramot a kívánt értékre beállítottam, ezután a primár áramot bekapcsoltam és meghatározott idő múlva újra kikapcsoltam. Ez idő alatt gondoskodtam arról, hogy a  $E$  feszültség folyton állandó maradjon, azonkívül megmértem az  $i$  áramerősséget és a  $k$  teljesítményi tényezőt. A kísérlet befejezése és az ozonnak teljes kihajtása után az ozon mennyiségét meghatározva, most már az óránként keletkezett mennyiség  $M$ , a concentratio, az effectiv milliampère óránkénti kihasználás  $A$  és a wattóránkénti kihasználás  $B$  kiszámítható volt.<sup>2</sup> Minden kísérletet többször is megismételtem, és a kapott értékekből középértéket vettem.

A vezetési áram és a formafactor ismeretével kiszámíthatjuk még a közép vezetési áramra eső kihasználást.

$$A_{\text{vL}} = \frac{M}{i_L} \cdot f_i.$$

### Első kísérletsorozat.

Gáz: bombaoxygen szárítva.

Ozonizator üvegből, melynek méretei:

Külső átmérő 30 mm.

<sup>1</sup> V. ö. WARBURG és LEITHÄUSER id. helyen 25. oldal:

$$A = A^\circ - c \frac{A^\circ}{2c_1} = A^\circ - c \cdot \beta.$$

<sup>2</sup> Mind milligrammokban.

Gáztér szélessége 1 mm.

Gáztér hosszúsága 170 mm.

Dielektricum vastagsága 0·8 mm.

Közönséges nyomás, szobahőfok.

Ozonconcentratio 40 milligramm literenként.

Az ozonizátorral parallel ellenállás a feszültség szerint úgy lett megválasztva, hogy mindig körülbelül fél milliampère-rel legyen terhelve.

Mielőtt az áramgörbének a különböző tényezőkre való befolyásáról beszelnék, vegyük szemügyre magukat az áram- és feszültséggörbéket, elsősorban a váltakozó áramét (5—8. ábra). A rajzokon az áram ( $i$ ) és feszültséggörbék ( $E$ ) egymáshoz képest a közöttük lévő phasiskülönbséggel eltolódva vannak ábrázolva. A baloldali lépték milliampèreket, a jobboldali kilovoltokat jelent. A periodus hossza 18 cm. Minthogy a görbék egészen specialis esetre vonatkoznak, csak az általános jellemző tulajdonságok fel- említésére szoritkozom.

Mint a rajzokon látható, úgy a feszültség, mint az áram- görbék tiszta váltakozó áramot képviselnek, azaz a periodus positiv része egyforma nagyságú a negativ részszel. A görbék azonkívül symmetrikusak is, a mennyiben a positiv és negativ részek egymásnak tükörképei. Az ily görbék tudvalevőleg csak a páratlan számú felső harmonikusokat tartalmazhatják.

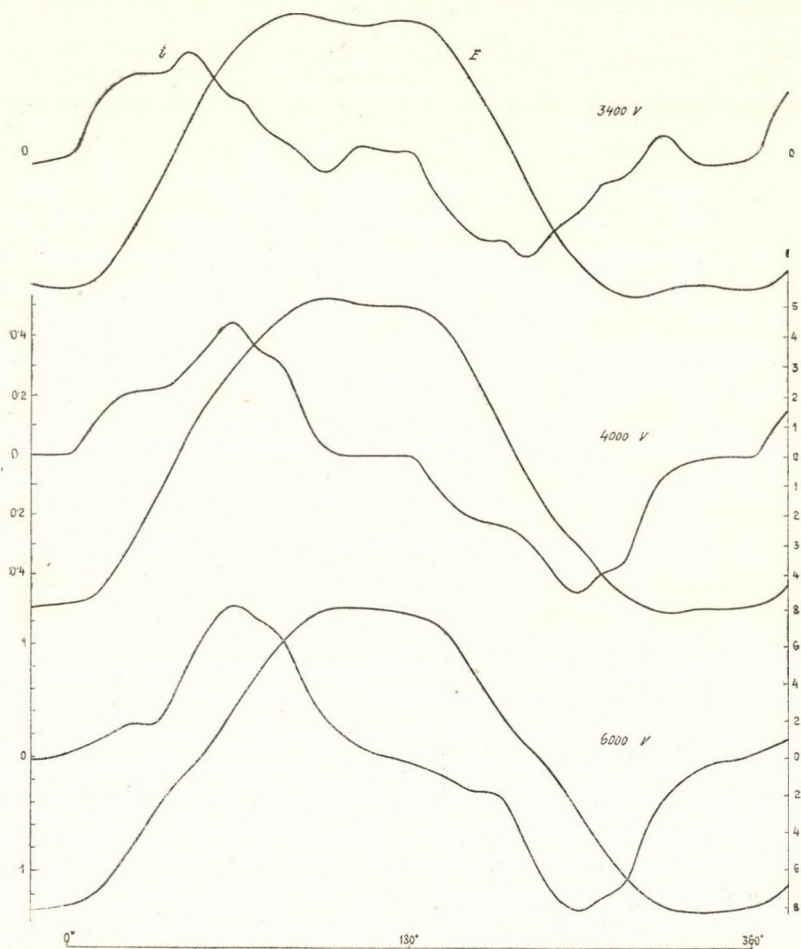
Valamennyi görbe eltér a sinusalaktól, a feszültséggörbék kevésbé, mint az áramgörbék. A görbéket nem elemeztem meg, mivel erre közvetlen szükségem nem volt; de így is megállapítható, hogy a feszültséggörbék legnagyobb részét a terz rezgés következtében térnek el a sinusalaktól,<sup>1</sup> a mit főleg alacsonyabb feszültségeknél észlelhetünk.

Az áramgörbék általában azt a lefolyást tanusítják, a melyet EHRlich és Russ ír le, ugyanis a periodus bizonyos szakában megkezdődik a vezetési áram s ekkor az intensitás hirtelen megnövekedik; a vezetési áram mintegy ráhelyezkedik az el- tololódási áramra. Ez az inductornál látható legvilágosabban, itt

<sup>1</sup> I. RÓKA KÁLMÁN idézett dissertatióját.

## Váltakozó áram, induktor.

MA.

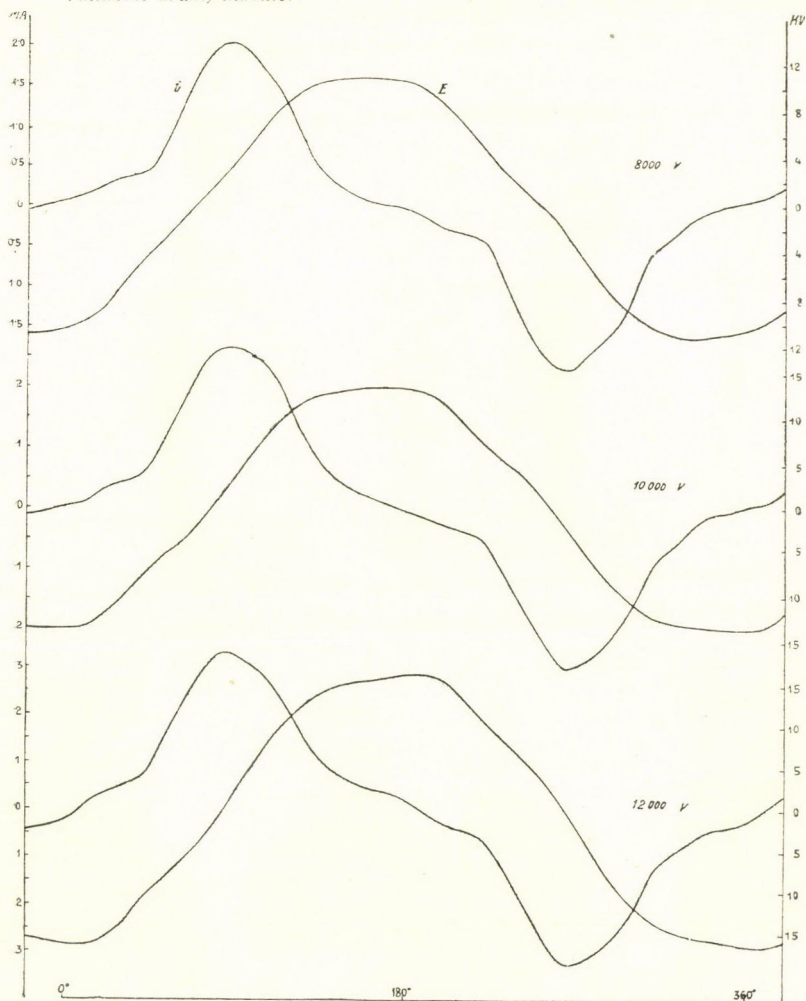


5. ábra.

az áramgörbén a magasabb harmonikusok befolyása csak kis mértékben vehető észre, leginkább az alacsony feszültségeknél.

A transzformatornál hasonló lefolyást tapasztalunk, csak hogy itt igen nagy mértékben eltorzítja a görbét a terz rezgés; ennek daczára a vezetési áram superpositiója itt is tisztán észrevehető.

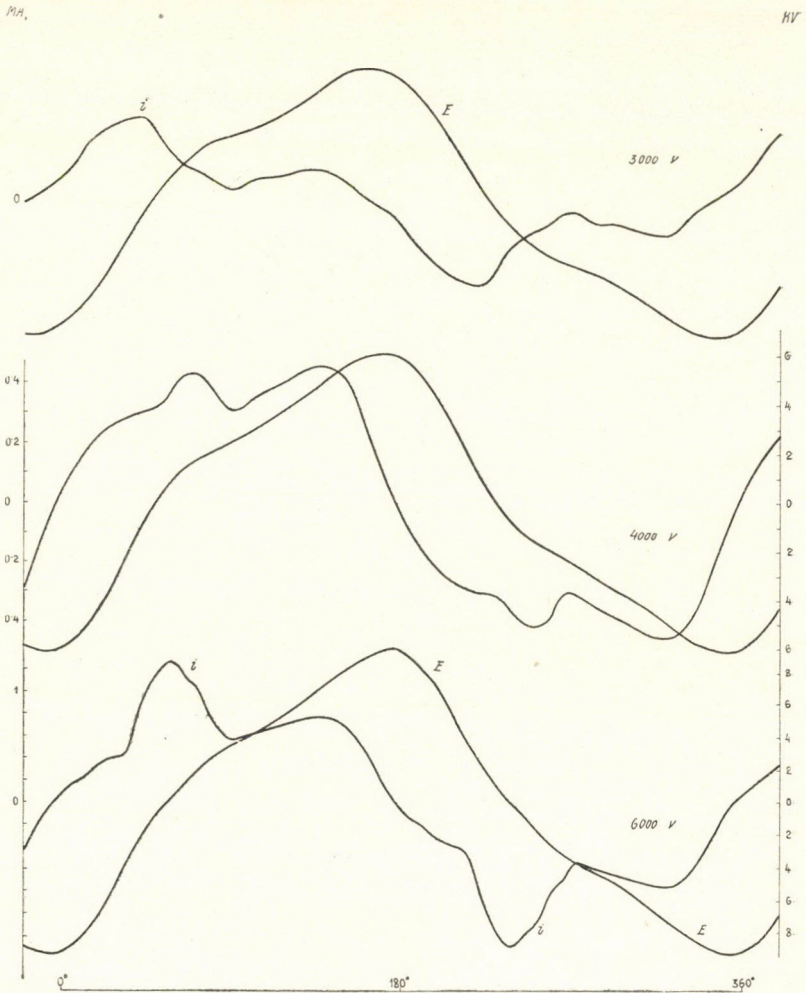
Váltakozó áram, induktor.



6. ábra.

Érdekes a 8. ábrán megfigyelhető rezonancia jelensége, melyről már fentebb szó volt. Növekvő feszültséggel mindinkább közeledve a rezonancia feltételeihez, a 23. harmónikus mindjobban kiemelkedik, míg végre 10,000 Volt-nál csaknem domináló nagyságot ér el.

## Váltakozó áram, transzformátor.



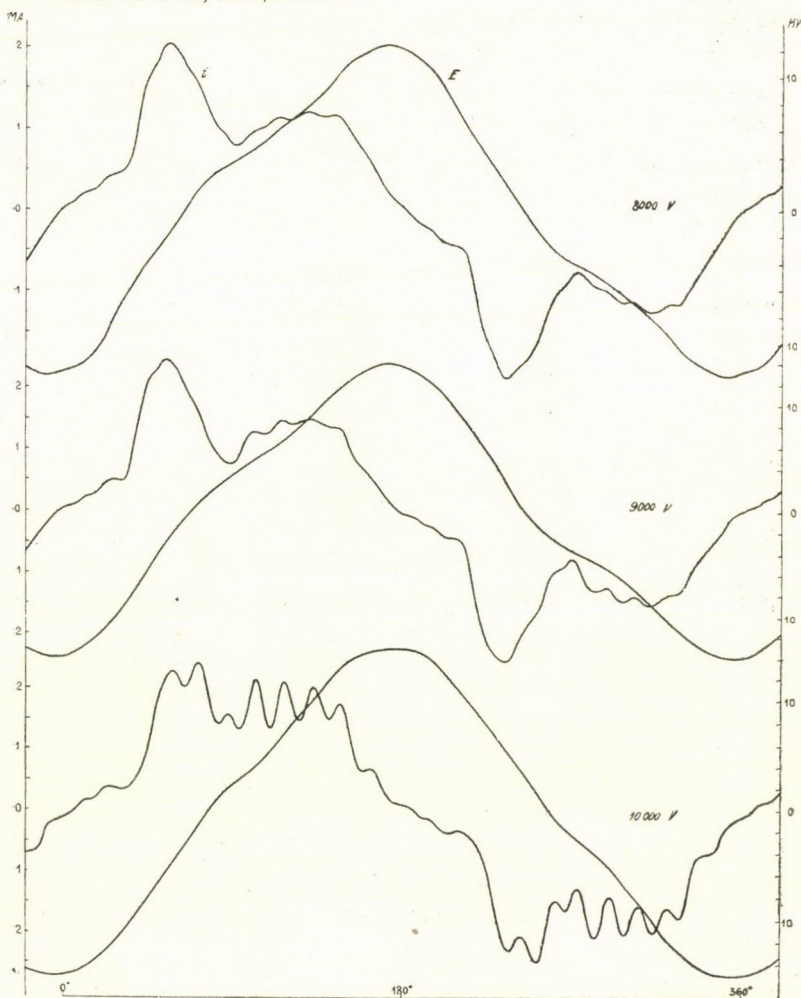
7. ábra.

A gázáram sebessége nincs észrevehető befolyással a görbe alakjára.

Ha a görbéket jellemző áram- és feszültségfactorokat (l. I—IV. táblázat) tekintetbe vesszük, megállapíthatjuk, hogy az inductor áramgörbéje hegyesebb, mint a transzformatoré, viszont



Váltakozó áram, transzformátor.



S. ábra.

a feszültségnél fordítva, a transzformátor görbéje hegyesebb; mindenesetre érdekes, hogy hegyesebb feszültséggörbének nem felel meg egyszersmind hegyesebb áramgörbe is. A jelenség okát talán a felső rezgésekben lehet keresni.

Még megjegyezhetem, hogy úgy az áramfactor, mint a feszült-

ségfactor növekvő árammal és feszültséggel általában bizonyos határig növekedik.

A szakgatott egyenáram görbéi nagyjában hasonló lefolyást mutatnak az egyszerű THOMSON-körben lefolyó aperiodikus<sup>1</sup> kísüléssel, tehát logaritnikus jellegűek. A görbe természetesen nem szimmetrikus, mivel a primár áram zárásának és nyitásának a secundár körben más-más lefolyás felel meg.

Figyelemreméltó, hogy a zárási impulsus növekedő feszültséggel mindinkább háttérbe szorul, úgy, hogy az inductor esetében magasabb feszültségeknél teljesen elenyészik.

A vezetési áramnak az a superpositiója, melyet a váltakozó áramnál világosan megkülönböztethetünk, itt valószínűleg az áramgörbe nagy meredeksége következtében nem vehető észre. Az áram- és feszültség-görbék nagyon hegyesek és a formafactor jóval nagyobb, mint a váltakozó áramnál.

Legfontosabb jelenség az, hogy az áram nagysága a periodus igen nagy részében zérus. Ez egyébként önként értetődik, ha meggondoljuk, hogy az áram lefolyását a rendszer ellenállása, öninductiója és capacitása meghatározza; jelen esetben a periodus időtartama az áram lefolyásához képest igen hosszú. A periodusszámot oly módon kellene megváltoztatni, hogy abban a pillanatban, a melyben az áram a zérus értékét eléri, a következő periodus megkezdődjék. A periodusszám ilyen megváltoztatása, feltéve, hogy az áramzárás időtartama ugyanaz maradt, úgy, hogy a primár áram a megszakítás pillanatáig ugyanazt az értéket éri el,<sup>2</sup> a görbék lefolyását nem változtatja meg, csak az a rész esnék ki, melyben az áram értéke zérus; ellenben az áram és feszültségfactorok értéke megváltoznék.

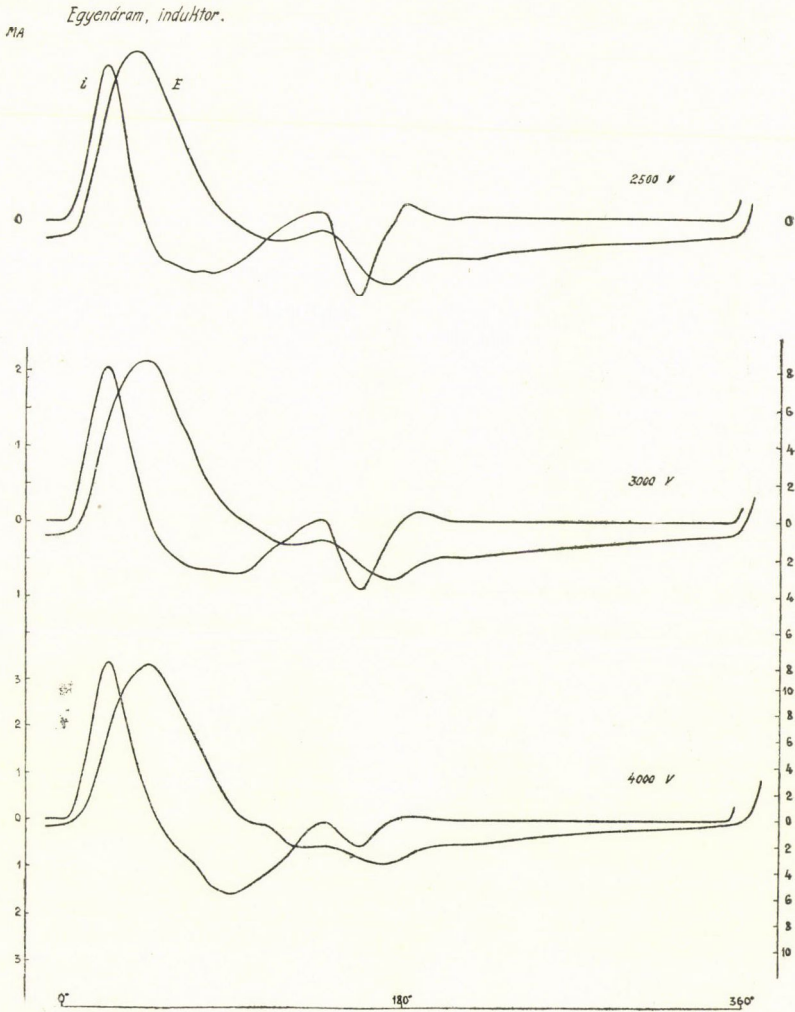
A periodusszámot az említett módon azért nem változtattam meg, hogy a váltakozó áram periodusszámával egyező legyen.

A feszültség lefolyása, mint a görbékből látható, a legtöbb esetben nem fejeződik be a periodus időtartama alatt. Tulajdon-

---

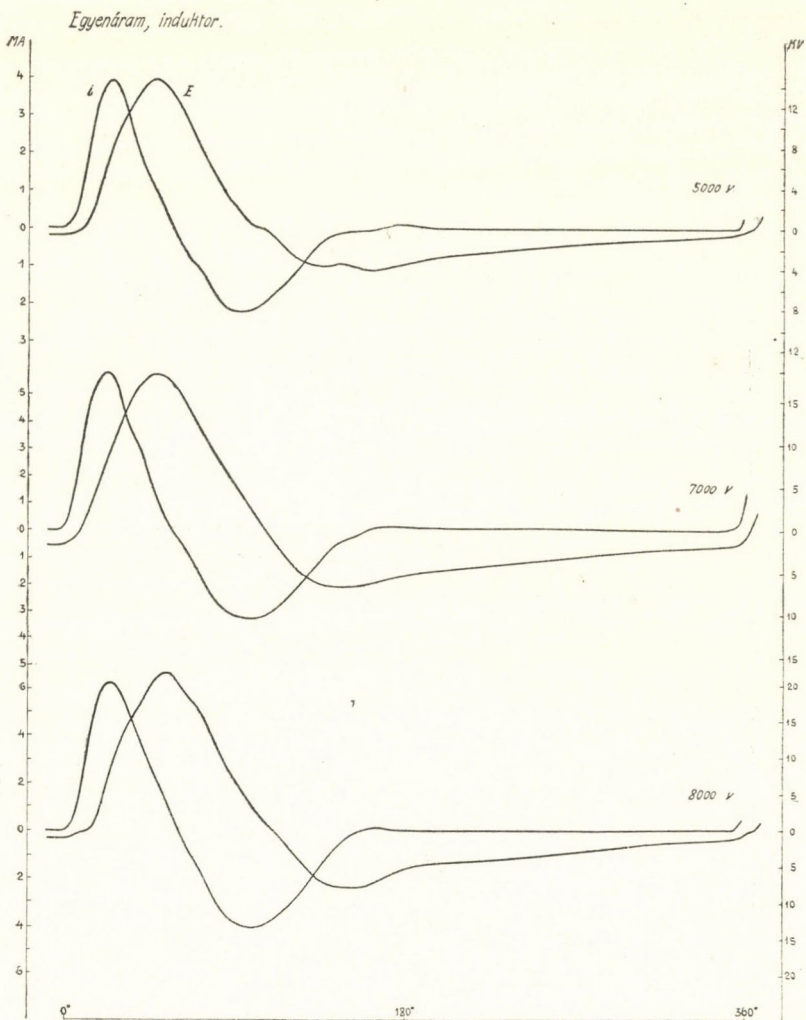
<sup>1</sup> Resonantia következtében itt is lehet periodikus jellegű lefolyás; előzetes kísérleteimben volt alkalmam egy ilyen görbét fölvenni, melynek egy részén egy magasabb felső rezgés helyeződött el.

<sup>2</sup> L. föntebb idézett dolgozatomat.



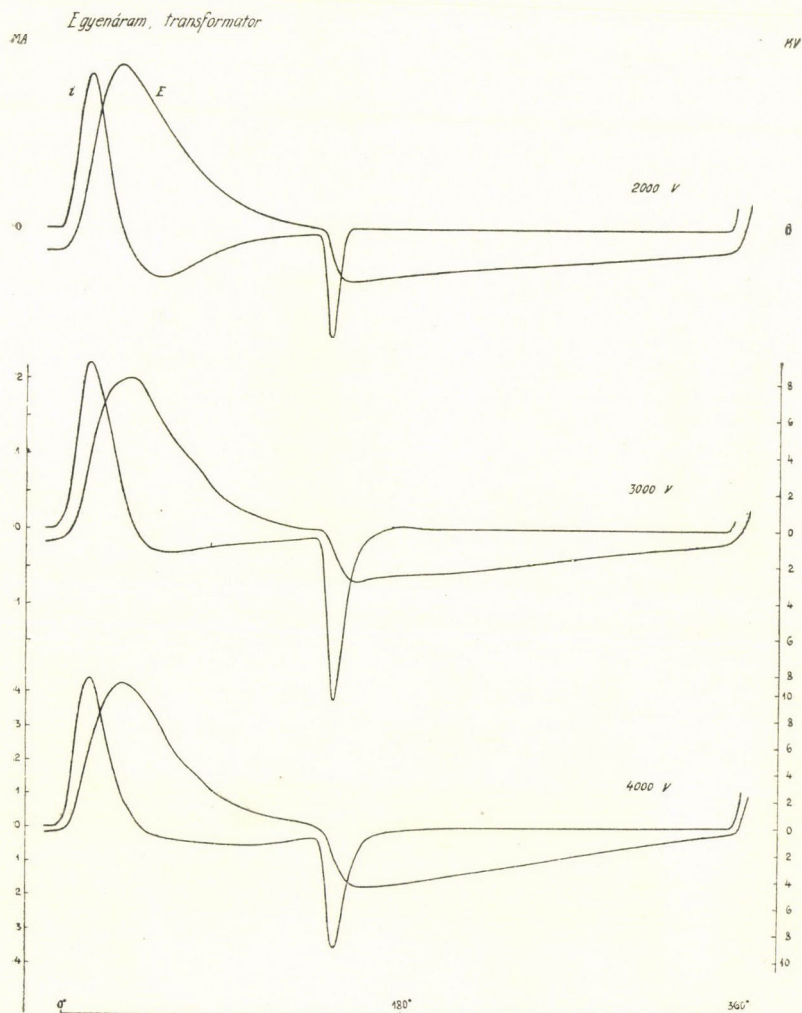
9. ábra.

képen az intenzitás és feszültség lefolyásának egyidejűnek kellene lenni, azonban a feszültség a periodus végén oly lassan változik, hogy itt az intenzitás értéke már elenyésző kicsiny. Általában azt vehetjük észre, hogy a feszültség növekedésével a feszültséggörbe lefolyása rövidebb lesz.



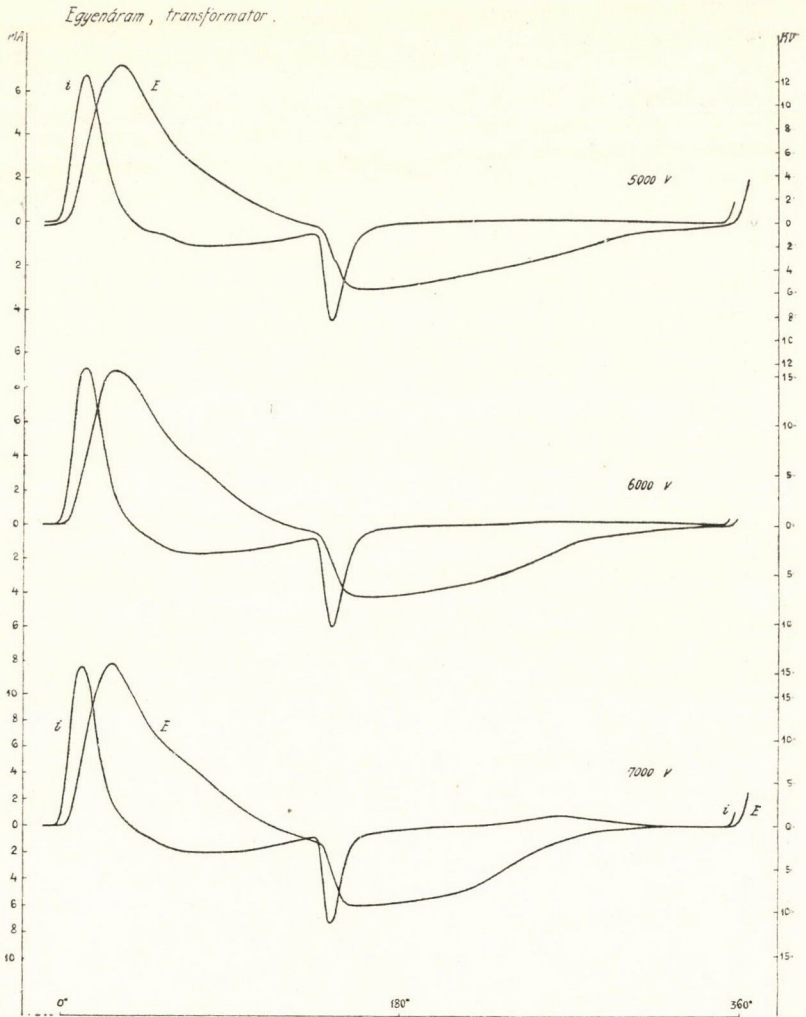
10. ábra.

Az inductor esetében az áramgörbék laposabbak, mint a transzformatornál, a feszültséggörbék pedig hegyesebbek; tehát ugyanaz az eset forog fenn, mint a váltakozó áramnál, ugyanis hegyesebb feszültséggörbének laposabb áramgörbe felel meg és fordítva.



11. ábra.

Áttérek most a görbealaknak a különböző tényezőkre való befolyására; ebből a célból a kísérletek eredményeit az 1—4. táblázatban foglaltam össze. Ezekben a feszültség voltokban, az áramerősség milliampèrekben, a teljesítmény wattokban,  $M$ ,



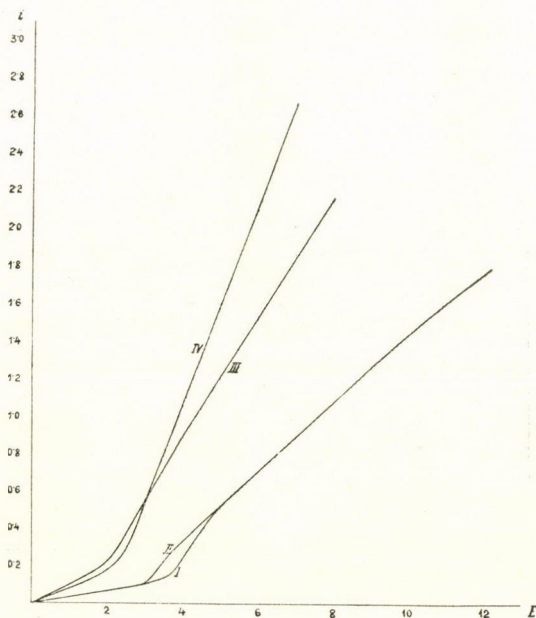
12. ábra.

A,  $A_{KL}$  és  $B$  milligrammokban, végül a gázsebesség óránkénti literekben van feltüntetve.

A táblázatokban foglalt mennyiségek közül azok, a melyeket EHRlich és Russ szerint számítottam ki s a melyek az ozonisa-

tor belsejében uralkodó viszonyokat tüntetik föl, általában ugyanazt a viselkedést tanúsítják, mint a hogy EHRlich és Russ találta, különösen az I. kísérletsorozatban. A IV. kísérletsorozatban észlelt rendellenességekről már föntebb volt szó.

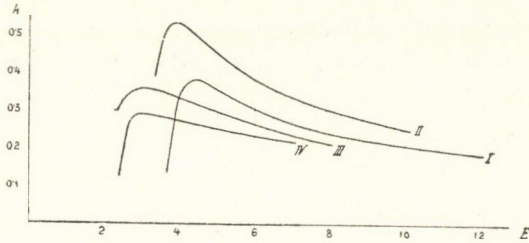
Hogy az áramforma befolyását könnyebben áttekinthessük, az eredmények egy részét grafikonokon is feltüntettem. Vegyük első sorban a 13. ábrát, a mely az effectiv feszültségnek az



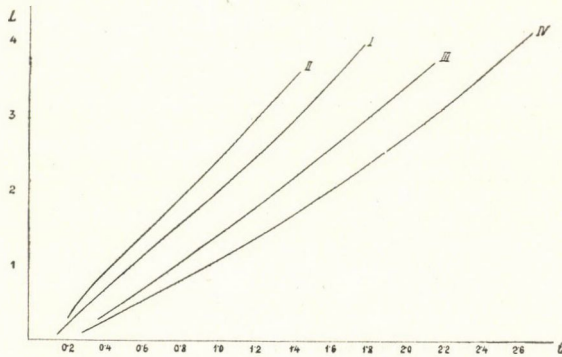
13. ábra.

effectiv intensitással való összefüggését mutatja. A görbék töréspontja a kisülés kezdetének felel meg; innen kezdve igen közelítőleg linearis lefolyásúak. Mindez tökéletesen megfelel az eddigi észleleteknek. Igen szembetűnő itt az áramforma befolyása. Míg a kétféle váltakozó áram között majdnem semmi különbség sincs, addig a szakgatott egyenáramnál az áramerőségek jóval nagyobbak, legnagyobbak a transzformator esetében. A jelenség magyarázatát már a jelen dolgozat elején említettem.

A teljesítményi tényezőnek a görbealaktól való függését a 14. ábra mutatja. A görbealak befolyását következőképen fejezhetjük ki: Minél kisebb az áramfactor, annál nagyobb a teljesítményi tényező.



14. ábra.



15. ábra.

A 15. ábra az intenzitás és teljesítmény közötti összefüggést mutatja. Itt is minél kisebb az áramfactor, annál több wattot vesz föl az ozonizátor adott áramerősség mellett. Hasonló eredményeket találunk EHRlich és Russ-nál is.



I. táblázat. *Váltakozó áram, inductor.*

$$k_D = 0.043$$

$$k_v = 0.043$$

$$i_v = 0.0434 \cdot E_i \cdot 10^{-3}$$

Gáz- sebes- ség	$E$	$i$	$k$	$L$	$E_D$	$E_i$	$k_i$	$i_v$	$i_L$	$f_i$	$f_E$	$\sigma_E$	$M$	$A$	$A_{kL}$	$B$
—	2500	0.082	0.043	—	575	1925	0.043	0.082	0	—	—	—	—	—	—	—
—	3000	0.104	0.043	—	650	2350	0.043	0.104	0	—	—	—	—	—	—	—
—	3400	0.125	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.5	3700	0.154	0.145	0.083	950	2790	0.178	0.121	0.036	—	—	—	14.3	93	—	173
1.4	4000	0.240	0.338	0.324	1425	2670	0.484	0.116	0.146	1.283	1.094	1.31	56.2	234	494	173
2	4200	0.307	0.37	0.46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	4500	0.386	0.38	0.66	2400	2380	0.675	0.103	0.314	1.268	1.09	1.33	119.3	310	482	181
3.1	4600	0.396	0.367	0.67	—	—	—	—	—	—	—	—	124.5	315	—	186
3.4	4700	0.440	0.376	0.75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.1	5000	0.507	0.35	0.886	3225	2180	0.740	0.095	0.445	1.315	1.120	1.39	164	324	484	185
5.8	6000	0.703	0.317	1.335	4475	2075	0.823	0.090	0.653	1.332	1.121	1.36	232.5	331	475	174
7.5	7000	0.905	0.263	1.75	5625	1940	0.804	0.084	0.855	—	—	—	—	—	—	—
9.2	8000	1.07	0.242	2.07	6600	2050	0.807	0.089	1.017	1.33	1.12	1.38	368	344	482	178
12.8	10000	1.42	0.21	2.98	8650	2000	0.864	0.087	1.373	1.318	1.108	1.35	510	360	489	173
16.3	12000	1.765	0.185	3.9	10675	2145	0.820	0.093	1.710	1.277	1.10	1.37	659	374	492	168

II. táblázat. *Váltakozó áram, transformator.*

$k_D = 0.041$

$k_v = 0.041$

$i_v = 0.045 \cdot E_i \cdot 10^{-3}$

Gáz- sebes- ség	$E$	$i$	$k$	$L$	$E_D$	$E_i$	$k_i$	$i_v$	$i_L$	$f_i$	$f_E$	$\sigma_E$	$M$	$A$	$A_{kL}$	$B$
—	2500	0.082	0.041	—	575	1925	0.041	0.082	0	—	—	—	—	—	—	—
—	3000	0.11	0.041	—	675	2325	0.041	0.11	0	—	—	—	—	—	—	—
1.35	3400	0.196	0.417	0.278	1200	2335	0.588	0.105	0.123	—	—	—	48.7	245	—	174
2	3600	0.25	0.50	0.45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.5	3800	0.29	0.52	0.60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	4000	0.328	0.54	0.708	2000	2486	0.835	0.112	0.278	1.061	1.126	1.54	121	370	466	171.2
4	4500	0.425	0.49	0.96	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.1	5000	0.507	0.45	1.15	3050	2550	0.834	0.115	0.450	1.10	—	—	206.5	403.5	504	179.5
7.1	6000	0.701	0.381	1.604	4200	2490	0.847	0.112	0.644	1.124	1.136	1.56	288	410	503	179.5
9.1	7000	0.888	0.330	2.05	5250	2488	0.841	0.112	0.829	1.14	1.13	1.55	367.5	413.5	506	179
11.05	8000	1.085	0.305	2.64	6325	2523	0.864	0.114	1.029	1.15	1.135	1.56	444	409	495	168
12.8	9000	1.27	0.275	3.13	7350	2515	0.864	0.113	1.212	1.173	1.145	1.56	516	407.5	499	165
14.4	10000	1.44	0.25	3.58	8300	2544	0.849	0.115	1.379	1.18	1.14	1.48	578	401	494	163

III. táblázat. *Egyenáram, inductor.*

$$k_D = 0.041$$

$$k_v = 0.041$$

$$i_v = 0.153 \cdot E_i \cdot 10^{-3}$$

Gáz- sebesség	$E$	$i$	$k$	$L$	$E_D$	$E_i$	$k_i$	$i_v$	$i_L$	$f_i$	$f_E$	$\sigma_E$	$M$	$A$	$A_{kL}$	$B$
—	1000	0.104	0.041	—	340	660	0.041	0.104	0	—	—	—	—	—	—	—
—	1700	0.176	0.041	—	550	1150	0.041	0.176	0	—	—	—	—	—	—	—
1.25	2500	0.368	0.319	0.294	1150	1431	0.524	0.219	0.207	—	—	—	49.8	135.2	—	169.5
2.7	3000	0.553	0.357	0.592	1740	1457	0.686	0.223	0.411	1.841	1.392	2.86	107.3	194	481	181.5
4	3500	0.73	0.348	0.89	2325	1480	0.760	0.226	0.601	—	—	—	—	—	—	—
5.2	4000	0.898	0.334	1.20	2900	1490	0.818	0.228	0.780	1.873	1.536	2.96	205.8	228.5	495	171
7.3	5000	1.19	0.292	1.74	3850	1597	0.816	0.244	1.06	1.886	1.455	2.48	291.5	244.4	518	167.5
9.5	6000	1.52	0.265	2.40	4000	1637	0.849	0.250	1.393	1.820	—	—	—	—	—	—
11.8	7000	1.862	0.236	3.08	5925	1644	0.853	0.252	1.734	1.791	1.30	2.60	473	254	489	153.5
14.	8000	2.13	0.216	3.68	6700	1813	0.801	0.277	1.968	1.807	1.395	2.72	558	262	513	151.6

IV. táblázat. *Egyenáram, transformátor.*

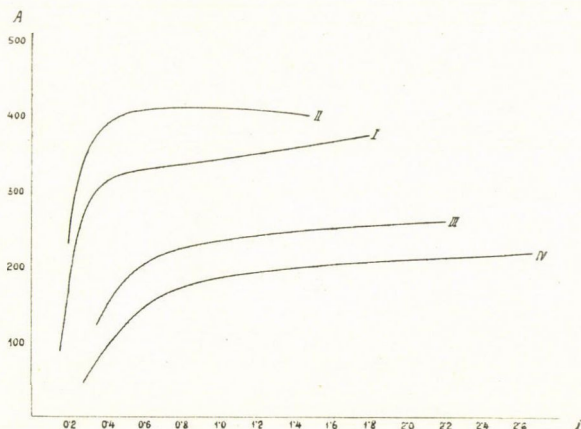
$k_D = 0.06$

$k_v = 0.06$

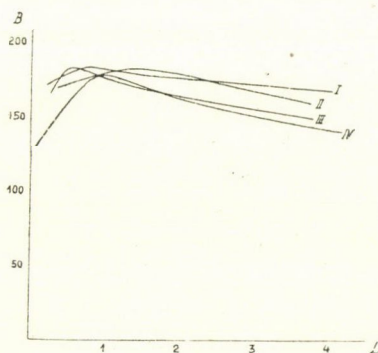
$i_v = 0.118 \cdot E_i \cdot 10^{-3}$

Gáz- sebes- ség	$E$	$i$	$k$	$L$	$E_D$	$E_i$	$k_i$	$i_v$	$i_L$	$f_i$	$f_E$	$\sigma_E$	$M$	$A$	$A_{KL}$	$B$
—	1500	0.116	0.06	—	400	1100	0.06	0.116	0	—	—	—	—	—	—	—
—	2000	0.18	0.06	—	625	1375	0.06	0.18	0	—	—	—	—	—	—	—
0.4	2500	0.29	0.158	0.115	1000	1505	0.223	0.177	0.119	—	—	—	15.1	52	—	132
2	3000	0.573	0.29	0.50	1950	1183	0.636	0.140	0.466	2.222	1.34	2.64	80	139.5	382	160
3.5	3500	0.80	0.28	0.785	2775	987	0.881	0.116	0.745	—	—	—	138	172	—	176
5	4000	1.067	0.27	1.15	3750	831	1.03	0.098	1.065	2.165	1.307	2.67	201	188.5	409	175
7.9	5000	1.54	0.25	1.93	5350	1015	0.915	0.120	1.488	2.03	1.34	2.645	315	204	431	163
11	6000	2.10	0.23	2.90	7125	1543	0.616	0.182	1.951	1.912	1.36	2.58	441	210	432	152
14.7	7000	2.65	0.22	4.08	8775	2140	0.475	0.252	2.42	1.925	1.39	2.685	581.5	220	462	142.5

A 16. ábrán  $A$ -nak az áramerősséggel való változása van szemléltetve. Általában növekedik az intenzitással, eleinte gyorsan, később lassabban; valószínűleg egy maximum felé törekszik, melyet a II. görbe el is ér, s aztán ismét csökken.



16. ábra.



17. ábra.

A görbeforma befolyása következőképen fejezhető ki:  $A$  annál nagyobb, minél kisebb az áramfactor, azaz minél nagyobb a középintenzitás. A táblázatokban kiszámítottam a közép vezetési áramra ( $i_{kL}$ )<sup>1</sup> eső kihasználást ( $A_{kL}$ ); az I., II. és III. kísérlet-

<sup>1</sup> Minthogy a görbe lefolyását a gáztérben magában nem ismerjük,  $i_{kL} = \frac{i_L}{f_i}$  értéke csak közelítő lehet.

sorozatokban ezek az értékek oly közel esnek egymáshoz, hogy beigazoltnak látszik a WARBURG és LEITHÄUSER feltevése, mely szerint az ozonképződés a középintensitással, vagy még pontosabban kifejezve *a gáztéren áthaladó* elektromosság mennyiségével áll egyenes arányban. A IV. kísérletsorozat eredményei ettől eltérnek, a minek okát valószínűleg a sinusalaktól való igen nagy eltérésben kell keresni.

A 17. ábrán végül *B*-nek az ozonizátor terhelésével való összefüggése van feltüntetve. *B* úgy a terheléssel, mint a görbiformával kevésbé változik, nagyobb változás csak a IV. esetben észlelhető. A görbék 1 watt körül maximumot mutatnak, tehát ez a legkedvezőbb terhelése az ozonizatornak, melynél *B* a különböző görbiformák mellett közel állandónak mutatkozik. Egyéb-ként váltakozó áramnál általában nagyobb *B*-t kapunk, mint szakgatott egyenáramnál.

### Második kísérletsorozat.

Levegőáram szárítva.

Az ozonizatornak belső fegyverzete aranyozott rézcső. Méretei:

Külső átmérő 29·2 mm.

Gáztér szélessége 2 mm.

Gáztér hosszúsága 170 mm.

Dielektricum vastagsága 0·8 mm.

Közönséges nyomás, szoba-hőfok.

Az ozon koncentrációja 5 mg. literenként.

Az ozonizatorral parallel ellenállás, mint az előző kísérletsorozatban.

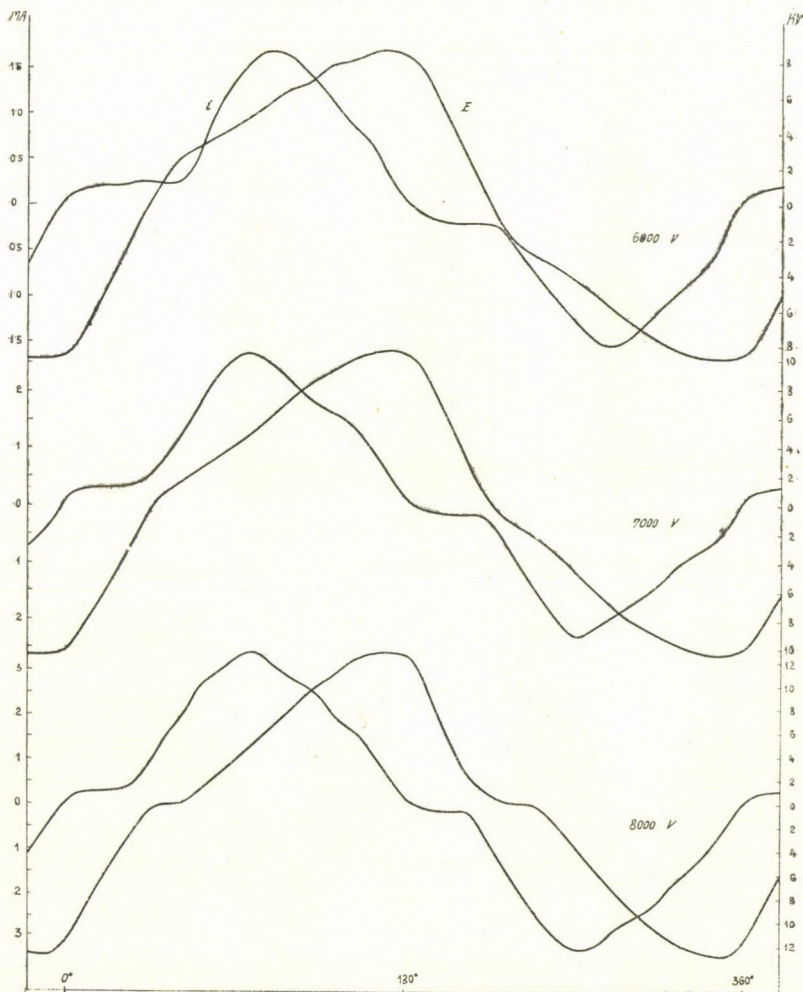
Ebben a kísérletsorozatban csak váltakozó árammal dolgoztam, még pedig ugyanavval az inductorral és transformatorral, mint az elsőkben.

A görbékre (18. és 19. ábra) nagyjában ugyanaz érvényes, a mit az első kísérletsorozatban a váltakozó áramú görbékre mondtam. A feszültséggörbe itt is symmetrikus. Az áramgörbékben azonban már első pillantásra feltűnik, mint lényeges tulajdonság, hogy nem symmetrikusak; a negativ rész kisebb a positiv résznél és nem tükröképei egymásnak. A transformator-

4H

3

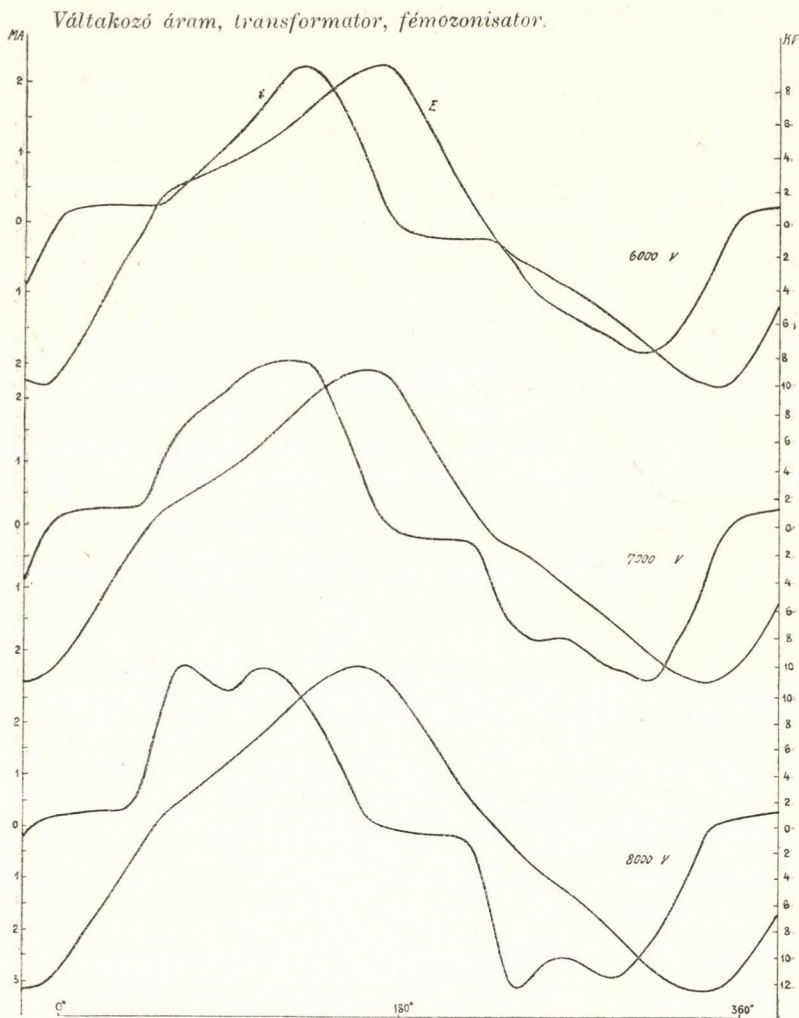
Váltakozó áram, induktor, fémozonisator.



18. ábra.

nál például kisebb feszültségnél a negatív részen nagyobb a terczregés befolyása, mint a pozitív részen. Az áramgörbe itt már nem tiszta váltakozó áram, hanem egyenáram-componense is van, az

MH



19. ábra.

ozonizátor tehát részben egyenirányító hatással bír, a mit galvanométerrel is ki lehet mutatni. A gáznemű vezetőkön előforduló ez a ventilhatás eléggé ismeretes; de ozonizátorokon eddig



tudomásom szerint nem tapasztalták. A jelenség magyarázata valószínűleg abban keresendő, hogy az ozonizátor nem szimmetrikus, hanem egyik fegyverzete fém. Galvanométer segítségével nem volt nehéz megállapítani, hogy a görbe pozitív (nagyobb) felében a fémfegyverzet mint anód szerepel.

E tüneménnyel ezúttal nem foglalkoztam tovább, mivel alkalmas arra, hogy újabb vizsgálatok kiinduló pontjául szolgáljon. Még csak azt jegyzem meg, hogy a transzformátor és az inductor görbéi jobban hasonlítanak egymáshoz, mint az előző kísérletsorozatban, főleg alacsonyabb feszültségeknél; az áram- és a feszültségfactorok is közel vannak egymáshoz. Ennek megfelelnek az alább közölt eredmények, melyek az 5. és 6. táblázatban vannak összefoglalva. Ezekből tüstént szembetűnik, hogy  $A$ ,  $B$  és  $k$  egymással majdnem egyenlő, a mi megerősíti az előző kísérletsorozatból levont szabályt, mely szerint ezeknek a mennyiségeknek egyenlő faktor mellett egyenlőknek kell lenniök.

**V. táblázat. Váltakozó áram, inductor, fémozonizátor.**

Gáz-sebes-ség	$E$	$i$	$k$	$L$	$f_i$	$f_E$	$M$	$A$	$B$
—	4000	0.074	0.013	—	—	—	—	—	—
—	4500	0.082	0	—	—	—	—	—	—
65	6000	0.914	0.72	3.95	1.237	1.108	326	357	82.5
108	7000	1.43	0.64	6.40	1.218	1.140	539	376	84.1
150	8000	1.99	0.565	9.08	1.208	1.22	741	372	82.4

**VI. táblázat. Váltakozó áram, transzformátor, fémozonizátor.**

Gáz-sebes-ség	$E$	$i$	$k$	$L$	$f_i$	$f_E$	$M$	$A$	$B$
—	4000	0.074	0.04	—	—	—	—	—	—
—	4500	0.082	0.02	—	—	—	—	—	—
80	6000	1.135	0.72	4.90	1.250	1.143	400	352.5	81.5
119	7000	1.580	0.67	7.37	1.215	1.163	595	376.5	81.0
147.5	8000	1.98	0.57	9.03	1.249	1.151	734	370.5	81.5

Ennek a kísérletsorozatnak tulajdonképeni célja csak az volt, hogy megvizsgáljam, vajjon más körülmények között (más ozonizátor, gáz, concentratio) is érvényesnek mutatkozik-e a fenti szabályszerűség? Minthogy ezt a közölt adatokból meg lehet állapítani, nem volt szükséges a vezetési áramot és  $A_{kL}$ -et meghatározni.

Talán nem lesz érdektelen, ha végezetül a két kísérletsorozatban váltakozó árammal nyert kihasználásokat abszolút értékeikre vonatkozólag a WARBURG és LEITHÄUSER<sup>1</sup> eredményeivel összehasonlítjuk; ebből a célból ide iktatom azokat az adatokat, melyeket közelítőleg ugyanolyan méretű ozonizátorokkal nyertem (50 periodus-szám mellett):

Üvegozonizátor II, oxigén:

$$A^o = 536, A^{40} = 463, B^o = 188, B^{40} = 154.$$

Fémozonizátor I, levegő:

$$A^o = 383, A^5 = 359.4, B^o = 82.6, B^5 = 77.4.$$

Mint látható,  $A^{40}$  WARBURG-nál nagyobb, a többi érték azonban az enyéimmal meglehetősen összhangzásban van, a mi az adatok biztonságát illetőleg megnyugvással szolgálhat.

### Összefoglalás.

1. Egy alkalmas, elektrisorok áramgörbéjének felvételére eddig nem használt eljárás segítségével nemesak a váltakozó, hanem a szakgatott egyenáram áram- és feszültséggörbéjét is felvettem. Ezáltal az áramnak az elektrisorban való lefolyásáról eddig alkotott nézeteket megerősíthettem.

2. E görbék formafactorát megállapítva, ki lehet számítani a közép áramerősséget. Beigazoltam a WARBURG és LEITHÄUSER ama föltevését, hogy a közép vezetési áramra vonatkozó kihasználás közel állandó. A technikai kihasználás  $B$  a görbe-

---

<sup>1</sup> Id. helyen 33. old. —  $A^o$ ,  $B^o$  nullakihasználás;  $A^c$ ,  $B^c$  a kihasználás  $c$  concentratio mellett,  $A^c = A^o - \beta \cdot c$  képlettel számítva.

alaktól csak csekély mértékben függ, főleg az ozonisorra legkedvezőbb terhelés mellett.

Egész általánosságban az tűnik ki kísérleteimből, hogy a laposabb áram és feszültséggörbe előnyösebb, mivel  $A$ ,  $B$  és  $k$  nagyobb. Ez fontos gyakorlati szempontból, mert irányadó az ozonisatio czéljaira szolgáló generatorok szerkesztésére nézve.

3. Megállapítottam, hogy fémfegyverzetű ozonisorokban a váltakozó áram részben egyirányítást szenved.

Dolgozatom a Kir. József Műegyetem elektrochemiai laboratoriumában készült. Nem mulaszthatom el, hogy e helyen is hálás köszönetemet fejezzem ki a laboratorium vezetőjének, dr. SZARVASY IMRE műegyetemi tanár úrnak, a ki hathatós támogatásával ezen dolgozat elkészülését lehetővé tette.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914. évi június 8.-án tartott üléséből.)

## A MICHELSON-FÉLE KISÉRLET ELMÉLETI KÖVETKEZMÉNYEI.

SUTÁK JÓZSEF-től.

### I. Párhuzamos és merőleges transzlációs mozgás.

Az  $F$  (1. ábra) fényforrásból jövő párhuzamos sugarak a terjedési irányukkal  $45^\circ$ -ú szöget alkotó igen kicsiny vastagságú  $AA'$  tükrről részint átmennek, részint pedig arról visszaverődnek; az előbbieket a fénysugarak terjedési irányára merőleges  $BB'$ , az utóbbiak pedig a rájuk szintén merőleges  $CC'$  tükörről reflektálódnak.

A fényforrás  $d$  sugara az igen kicsiny vastagságú  $AA'$  tükrről találja  $D''$  pontban, melynek úgy a  $CC'$ , mint a  $BB'$  tükörtől való távolsága legyen  $l$ , tehát

$$D''Y'' = D''Z = l.$$

Mozogjon az egész berendezés a fényforrásból jövő fénysugarak irányával párhuzamosan — tehát  $AB$  irányban —  $v$  sebességgel; a fény terjedési sebességét pedig jelöljük  $c$ -vel.

Vizsgáljuk meg, hogy a  $CC'$  és  $BB'$  tükörről reflektált fénysugarak a találkozás pillanatában a megtett utak *következtében mily fáziseltolódást mutatnak, ha az æther a rendszer mozgásában nem vesz részt.*

Ha tehát az æther nyugalomban van, akkor a  $D''$ -ben reflektált fénysugár a  $CC'$  tükörig terjedő útját zavartalanul teszi meg, csakhogy a tükört nem  $Y''$ , hanem  $Y'$  pontban találja, ha  $Y''Y'$  egyenlő azzal az eltolódással  $C'E$ -vel, melyet a tükör a rendszer mozgása irányában amaz idő alatt szenvedett, a mely

szükséges volt ahhoz, hogy a fény az  $l$  távolságot befussa. Ha tehát ezt az időt  $T_1$ -nek nevezzük, akkor

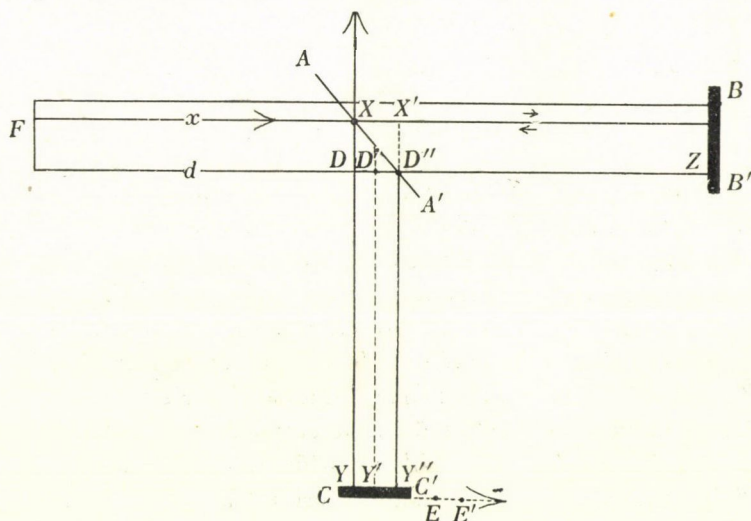
$$D''Y'' = l = cT_1,$$

$$Y''Y' = CE = vT_1.$$

Az  $Y'$  pontban reflektált fény érkezik az  $AA'$  tükörhöz  $T_2$  idő alatt; ha ez idő alatt a  $CC'$  tükör további

$$EE' = Y'Y$$

eltolódást szenved, akkor  $T_2$  idő múlva a reflektált sugárnak  $Y'$  pontja, mivel ez a sugár az ætherben helyzetét nem változtatja,



1. ábra.

már a  $CC'$  tükör  $Y$  pontjával esik egybe. Ennélfogva a reflektált fény az  $AA'$  tükört már nem  $D''$ , hanem egy oly  $X$  pontban fogja találni, melynek a  $CC'$  tükörrre vonatkozó orthogonális projectiója éppen  $Y$ , tehát a reflektált fény úthossza

$$YX = cT_2.$$

Ha  $X$ -nek a  $d$  sugárra vonatkozó orthogonális projectióját  $D$ -nek nevezzük, akkor

$$XD = DD'' = YY'' = CE + EE' = vT_1 + vT_2 = XX',$$

következőleg

$$YX = YD + DX = l + v(T_1 + T_2),$$

tehát

$$cT_2 = l + v(T_1 + T_2);$$

ha ehhez az egyenlethez hozzáadjuk a föntebb megállapított

$$cT_1 = l$$

egyenletet, akkor a

$$c(T_1 + T_2) = 2l + v(T_1 + T_2)$$

relációhoz jutunk.

Ha tehát  $T$ -vel jelöljük azt a  $(T_1 + T_2)$  időt, mely szükséges ahhoz, hogy a  $D''$  pontban reflektált fény az  $X$  pontba érjen, akkor föntebbi egyenletünk alapján

$$T = \frac{2l}{c-v}. \quad (I)$$

A  $d$  fénysugár tehát az  $X$  ponton átmenő és a  $BB'$  tükörről és azután az  $AA'$  tükörről is reflektált fénysugárral fog találkozni, melyet jelöljünk  $x$ -szel. Ez a két sugár azután  $YX$  mentén, merőlegesen az  $x$  sugárra, fog együtt tovább haladni.

Ha már most  $D''$ -nek  $x$ -re való vetületét  $X'$ -sel jelöljük, akkor —  $D''$  egyenlő lévén  $X'$ -sel — az  $x$  sugárnak csak az  $X'$  pontjától kezdődő útjára kell figyelmünket kiterjeszteni, hogy a  $d$  és  $x$  sugaraknak  $X$ -nél létesülő interferenciáját tanulmányozhassuk.

Minthogy  $X'$ -nek a  $BB'$  tükörtől való távolsága szintén  $D''Z$ , a mi föntebbi feltevésünk szerint  $l$ -lel egyenlő, azért, ha  $t_1$ -gyel jelöljük azt az időt, a mely szükséges ahhoz, hogy az  $X'$  pontbeli fénymozgás a  $BB'$  tükörhöz érjen, akkor

$$ct_1 = l + vt_1.$$

Ha  $t_2$ -vel jelöljük azt az időt, mely alatt a  $BB'$  tükörről reflektált fény az  $AA'$  tükörrel merev rendszert alkotó  $X'$  pontba jut, akkor

$$ct_2 = l - vt_2.$$

Végül, ha  $t_3$ -mal jelöljük azt az időt, a mely alatt a fény az ætherbeli  $X'$  pontból az  $AA'$  tükörnek  $X$  pontjához jut, akkor

$$ct_3 = X'X - vt_3 = XD - vt_3.$$

Ámde a föntebbiek szerint

$$XD = vT = \frac{2lv}{c-v},$$

következöleg :

$$ct_3 = \frac{2lv}{c-v} - vt_3.$$

Egyenleteink alapján tehát rendre :

$$t_1 = \frac{l}{c-v},$$

$$t_2 = \frac{l}{c+v},$$

$$t_3 = \frac{2lv}{c^2 - v^2}.$$

Ha tehát  $t$ -vel jelöljük azt az időt, a mely alatt a fénymozgás az ætherbeli  $X'$  pontból a  $BB'$  tükörig  $s$  innen az  $AA'$  tükör  $X$  pontjába eljut, akkor

$$t = t_1 + t_2 + t_3,$$

azaz :

$$t = \frac{2l}{c-v}. \quad (\text{II})$$

Ha pedig berendezésünk a beejtett fénysugarak irányára merőlegesen, azaz  $XY$  irányban mozog  $v$  sebességgel, akkor analog fejtegetések alapján könnyen beláthatjuk, hogy ebben az esetben az  $AA'$  tükör  $D''$  pontján átmenő  $d$  fénysugár fog az  $X$  pontban reflektált sugárral találkozni; a  $t$  és  $T$  felcserélődnek ugyan, de azért egyenlők maradnak.

Ha tehát berendezésünk a beejtett fénysugarak irányával párhuzamosan vagy arra merőleges irányban mozog, akkor ezek a translációs mozgások az interferentia-jelenséget nem befolyásolják. Mivel ezek az elméleti fejtegetések MICHELSON kísérleti eredményeivel harmoniában vannak, azért ezek a kísérletek is, miként az aberratio jelensége, azt igazolják, hogy az æther a testek mozgásában nem vesz részt.

## 2. A régi elmélet.

A  $T$  meghatározására vonatkozó ama fejtegetések, melyeket a 2. ábra szemléltet, tehát a melyek szerint a fény  $T$  idő alatt az  $XC'X''$  utat teszi meg, minek következtében az

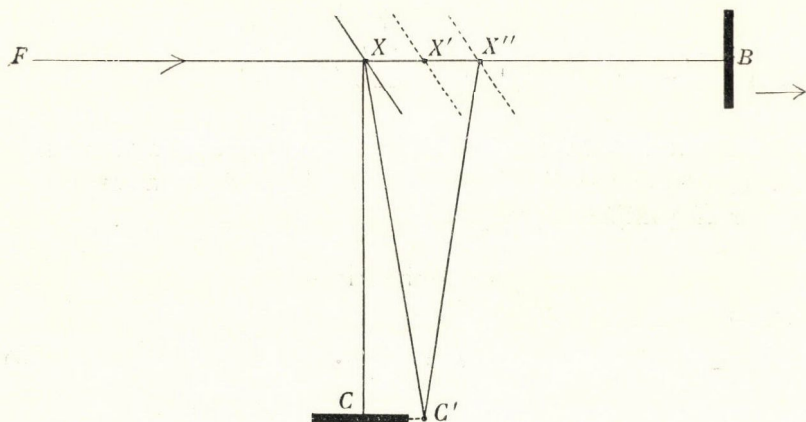
$$\overline{XC'}^2 = \overline{XC}^2 + (\frac{1}{2}\overline{XX''})^2$$

egyenlet alapján

$$\frac{1}{4}c^2T^2 = l^2 + \frac{1}{4}v^2T^2,$$

tehát

$$T = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$



2. ábra.

impliciten azt tételezik fel, hogy az æther berendezésünkkel együtt merev rendszert alkot. Míg az  $X$ -en áthaladó s  $B$ -ben reflektált fénymozgásnak  $X''$ -be való megérkezési idejének,  $t$ -nek meghatározására szolgáló eljárásban, melynek alapján

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2},$$

ugyanazok a fejtegetések impliciten az æther mozdulatlanságát tételezik fel, mert ha impliciten a  $t$  meghatározásban is ragaszkodnak ahhoz a föltevéshez, mely szerint az æther a mozgó berendezéssel együtt merev rendszert alkot, akkor a



$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c} + \frac{l}{c} = \frac{2l}{c}$$

egyenlethez kellett volna jutniok.

*Mivel tehát a régi elmélet a  $t$  meghatározására vonatkozó eljárásában az æther implicite mozdulatlanak tételezi fel, a  $T$  meghatározására [szolgáló] eljárásában meg implicite azt tételezi fel, hogy az æther a mozgó anyagi rendszerrel együtt merev rendszert alkot, következéleg az, ugyanis a régi elmélet, ellenmondást tartalmaz.*

Ennélfogva, ha a régi elméletből vont következtetések, melyek szerint a berendezés translatiós mozgása az interferentia-jelenséget jelentékenyen befolyásolja, semmiféleképen sem egyeztethek össze MICHELSON kísérleti eredményeivel, azért mégsem szabad a klasszikus physikában fellépő ellentmondásra következtetni, a mennyiben magában az elméletben, nem pedig a klasszikus physikában van az ellentmondás.

### 3. Ferde irányú translatiós mozgás.

Ferde mozgás esetében legyen a rendszer mozgása sebességének fénysugármenti komponense  $v_1$ , az erre merőleges  $XD$  irányú (3. ábra) komponense pedig  $v_2$ .

1. A

$$v_2 \leq v_1$$

feltétel elfogadása esetében a rendszer translatiós mozgása létesítette interferentia-jelenséget következésképen tanulmányozzuk.

Ha  $T_1$ -gyel jelöljük azt az időt, a mely alatt a  $D'$ -ben reflektált fény a  $CC'$  tükörhöz jut, akkor — mivel berendezésünk  $v_2$  sebességgel mozog  $XD$  irányban — :

$$cT_1 = l + v_2T_1,$$

honnan

$$T_1 = \frac{l}{c - v_2}.$$

Ha  $T_2$ -vel jelöljük azt az időt, mely alatt a  $CC'$  tükörtől reflektált fény a berendezésünkkel merev rendszert alkotó  $D$  pontba jut, akkor

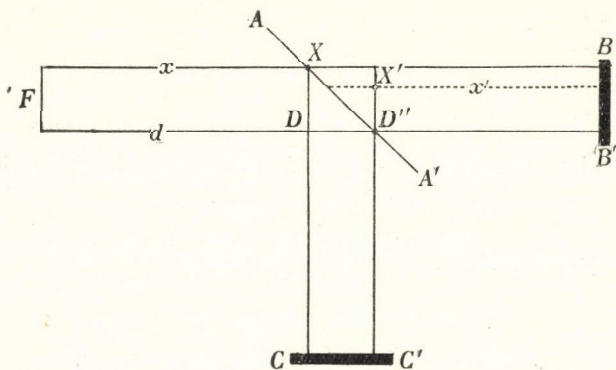
honnan

$$cT_2 = l - v_2 T_2,$$

$$T_2 = \frac{l}{c + v_2}.$$

Ha a  $v_1$  komponens létesítette  $DD''$  eltolódással egyenlő  $DX$  út megtételére a fénynek  $T_3$  időre van szüksége, akkor

$$cT_3 = DX - v_2 T_3.$$



3. ábra.

Ha már most ismét  $T$ -vel jelöljük azt az időt, a mely alatt a  $D''$ -ben reflektált fény  $X$  pontba jut, akkor ez idő alatt a  $v_1$  sebességgel létesített eltolódás nagysága

$$DD'' = DX = v_1 T,$$

ennélfogva fönntebbi képletünk alapján:

$$T_3 = \frac{v_1 T}{c + v_2}.$$

Mivel pedig

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

azért

$$T = \frac{l}{c - v_2} + \frac{l}{c + v_2} + \frac{v_1 T}{c + v_2},$$

honnan

$$T = \frac{2lc}{(c - v_2)(c + v_2 - v_1)}. \quad (\text{III})$$

$X$  pontban a  $d$  sugárral oly  $x'$  sugár fog interferálni, a mely  $t$  idő alatt —  $t$ -nek az 1. fejezetben (II) alatt adott jelentést tulajdonítva — éppen a mozgó berendezésünkkel merev rendszert alkotó  $x$  egyenesbe tolódik. Ha  $D''$ -ből az  $x'$ -re vont merőleges talppontját  $X'$ -nek nevezzük, akkor az 1. fejezetben elmondottak alapján az  $x'$ -ön történő fénymozgást csak  $X'$ -től kezdve kell tanulmányozni.

Ha tehát a fény  $t_1$  idő alatt jut el  $X'$ -ből a  $BB'$  tükörig, akkor, tekintve azt, hogy berendezésünk a fénymozgás irányában  $v_1$  sebességgel halad:

$$ct_1 = l + v_1 t_1,$$

honnan

$$t_1 = \frac{l}{c - v_1}.$$

Hogy a  $BB'$  tükörtől reflektált fény az  $AA'$  tükör  $X$  pontjába jusson, nemcsak az  $l$ , hanem a  $v_1$  komponens létesítette  $DD'' = v_1 T$  eltolódással egyenlő hosszúságú utat is meg kell tennie; ha tehát a fény  $t_2$  idő alatt jut el a  $BB'$  tükörtől az  $AA'$  tükör  $X$  pontjáig, akkor

$$ct_2 = l + v_1 T - v_1 t_2,$$

honnan

$$t_2 = \frac{l}{c + v_1} + \frac{v_1 T}{c + v_1}.$$

Mivel

$$t = t_1 + t_2,$$

azért

$$t = \frac{l}{c - v_1} + \frac{l}{c + v_1} + \frac{v_1 T}{c + v_1},$$

honnan a (III) tekintetbe vételével:

$$t = \frac{2lc(c^2 - v_1^2 + v_1 v_2 - v_2^2)}{(c^2 - v_1^2)(c - v_2)(c + v_2 - v_1)}, \quad (\text{IV})$$

következésképpen

$$t - T = \frac{2lc v_2 (v_1 - v_2)}{(c^2 - v_1^2)(c - v_2)(c + v_2 - v_1)}. \quad (\text{V})$$

2. Ha pedig

$$v_1 \leq v_2,$$

akkor hasonló szellemben találjuk, hogy

$$t = \frac{2lc}{(c-v_1)(c+v_1-v_2)}, \quad (\text{III}')$$

$$T = \frac{2lc(c^2-v_2^2+v_1v_2-v_1^2)}{(c^2-v_2^2)(c-v_1)(c+v_1-v_2)}. \quad (\text{IV}')$$

$$T-t = \frac{2lc v_1(v_2-v_1)}{(c^2-v_2^2)(c-v_1)(c+v_1-v_2)}. \quad (\text{V}')$$

A (III'), (IV') és (V') formulákat a (III), (IV) és (V) formulából úgy is nyerhetjük, ha ezekben a  $t$  és  $T$ , valamint a  $v_1$  és  $v_2$  betűket egymással felcseréljük.

Megállapításainkból következik, hogy

$$t = T$$

a következő esetekben:

1.  $v_1 = 0$ ,
2.  $v_2 = 0$ ,
3.  $v_1 = v_2$ .

Ha pedig

$$\begin{aligned} v_1 &= v \sin \varphi, \\ v_2 &= v \cos \varphi, \end{aligned}$$

akkor  $v_2(v_1-v_2)$  maximumát akkor éri el, ha

$$\varphi = 67\frac{1}{2}^\circ,$$

a  $v_1(v_2-v_1)$  pedig akkor, ha

$$\varphi = 22\frac{1}{2}^\circ.$$

Mivel megközelítéssel

$$v_2(v_1-v_2)_{max.} = v_1(v_2-v_1)_{max.} = \frac{1}{5}v^2,$$

azért, ha az (V), illetőleg (V') nevezőjét közelítőleg  $c^4$ -nek vesszük, akkor

$$(t-T)_{max.} = (T-t)_{max.} = \frac{2lw^2}{5c^3}.$$

Ha már most ismernők földünknek az ætherhez viszonyított sebességének irányát s aztán az 1. ábrán feltüntetett berendezésünket ezzel az iránynyal párhuzamosan állítanók, akkor

kísérleti megfigyeléseinkből következtetést lehetne vonni  $v$  értékére. De ha berendezésünk síkja nem párhuzamos  $v$  irányával, akkor  $v$ -nek csak a berendezés síkjával párhuzamos komponense jön figyelembe, a mi még a maximalis interferentia-csikeltolódást is a megfigyelés határa alá szoríthatja.

Úgy hiszem, hogy az eddigi fejtegetések után fölösleges is talán kijelentenem, hogy MICHELSON kísérleteiből még nagyon korai volna a régi klasszikus mechanika harmoniájában beálló perturbációkra következtetni.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 október 19.-én tartott üléséből)

# A TELJES FÉNYVISSZAZERŐDÉS ABSOLUT PHASISVÁLTOZÁSAI KETTŐSEN TÖRŐ KÖZEGEK BELSEJÉBEN.

RYBÁR ISTVÁN-tól.

## TARTALOM.

1. §. A vizsgálat célja.
2. §. A fényvisszazverődés és törés problémájának megoldása.
3. §. A teljes fényvisszazverődés phasisváltozásai.
  - a) Általános eset.
  - b) A beesés síkja a kristály egy symmetriasíkjával párhuzamos.
4. §. A teljesen visszazverődött fény energiája.
5. §. Kísérleti megfigyelések.

### 1. §. A vizsgálat célja.

A dolgozat célja az anisotrop közegek belsejében végbemenő teljes fényvisszazverődés phasisváltozásainak megvizsgálása.

Ismeretes, hogy az anisotrop közegben isotrop közeg felé haladó minden fénynyaláb  $e$  két közeg határfelületén végbemenő reflexio és törés alkalmával általában két visszazverődött és egy törött nyalábra oszlik. A két visszazverődött fénynyaláb az anisotrop közegben egymástól különböző irányban különböző terjedési sebességgel terjed tova, a törött fény ellenben az anisotrop közegből az isotropba kilép.

Kérdés: változik-e a fény phasisa  $e$  visszazverődés alkalmá-

val vagy sem, s ha megváltozik, mekkora e változás külön-külön mindkét visszaverődött fénynyalábnál?

E kérdésnek megvizsgálása különösen a fény teljes visszaverődésekor kívánatos, mert ekkor a törésszög imaginarius volta miatt mindkét visszaverődött fénynyaláb amplitudója complex, mely körülmény a FRESNEL-féle értelmezés szerint, miként ismeretes, phasisváltozást jelent.

E kérdés egy részét B. BRUNHES<sup>1</sup> kísérletileg megoldotta, a mennyiben a FIZEAU-FOUCAULT-féle interferentialis módszerrel meghatározta a két visszaverődött fény phasisváltozásának különbségét. BRUNHES vizsgálatai tehát a két visszaverődött fénynyaláb phasisváltozásainak különbségére, nem pedig az egyes visszaverődött nyaláb abszolút phasisváltozásaira vonatkoznak.

Az a kísérleti módszer azonban, melylyel az *isotrop* közegek határfelületéről visszaverődött fény abszolút phasisváltozásait meghatároztam,<sup>2</sup> lehetővé teszi az *anisotrop* közegek határfelületéről visszaverődött, előbb említett két fénynyaláb abszolút phasisváltozásának megvizsgálását is.

A következőkben előbb elméletileg vizsgálom meg e kérdést s csak azután térek a kísérleti megfigyelések ismertetésére.

## 2. §. A fényvisszaverődés és törés problémájának megoldása.

Tegyük fel, hogy az anisotrop közegben periodikus rezgés terjed tova. Vonatkoztassuk a tovaterjedő *síkhullámot* oly különben tetszés szerint választott  $X'Y'Z'$  derékszögű koordinatarendszerre, a melynek  $X'Z'$  síkja a hullám normálisával párhuzamos; ekkor a hullám terjedési sebességét  $q$ -t és polározási azimuthját (a polározási síknak az  $X'Z'$  síkkal alkotott szögét)  $\phi$ -t a következő ismeretes összefüggések állapítják meg:<sup>3</sup>

<sup>1</sup> B. BRUNHES: Ann. de Chim. et de Phys. 6. t. 30. p. 98., 145., 1893., Journ. de Phys. 3. t. 2. p. 489., 1893.

<sup>2</sup> RYBÁR J.: M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője 32. 1—30. l. 1914. Annalen der Physik 4. 42. 1171—1195. l. 1913.

<sup>3</sup> F. POCKELS: Lehrb. d. Kristallogoptik p. 179. 1906.

$$(q^2 - a_{22})(q^2 - a_{11} \cos^2 i + 2a_{13} \sin i \cos i - a_{33} \sin^2 i) = (a_{23} \sin i - a_{12} \cos i)^2; \quad (1)$$

$$tg \phi = \frac{q^2 - a_{22}}{a_{12} \cos i - a_{23} \sin i}. \quad (2)$$

E kifejezésekben szereplő  $i$  szög a hullám normálisának a  $+Z'$  tengelylyel alkotott szögét, az  $a_{ik}$   $i, k=1, 2, 3$  együtthatók pedig az anisotrop közegnek az  $X'Y'Z'$  koordinatarendszerre vonatkoztatott Voigt-féle együtthatóit<sup>1</sup> jelentik.

Az utóbbi együtthatók jelentését könnyen megállapíthatjuk. Ha ugyanis  $X, Y, Z$  a kristály főtengelyeit,  $a_1, a_2, a_3$  a hullámnak e főtengelyek irányában való terjedési sebességeit, azaz a *főterjedési sebességeket* jelentik, továbbá, ha az  $X'Y'Z'$  koordinatarendszernek az  $XYZ$  főtengelyekre vonatkoztatott iránycosinusait a következő séma fejezi ki:<sup>2</sup>

$$\begin{array}{c|ccc} & X' & Y' & Z' \\ \hline X & a_1 & a_2 & a_3 \\ Y & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Z & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \quad (3)$$

akkor áll:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = a_1^2 a_1^2 + a_2^2 \beta_1^2 + a_3^2 \gamma_1^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{23} = a_1^2 a_2 a_3 + a_2^2 \beta_2 \beta_3 + a_3^2 \gamma_2 \gamma_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

A fényvisszaverődésnek és törésnek lehető egyszerű tárgyalására czélszerű az eddig még csak tetszés szerint irányított  $X'Y'Z'$  koordinatarendszert úgy megválasztani, hogy az  $X'Y'$  sík az *anisotrop* és az *isotrop* közeg sík határfelületével, az  $X'Z'$  sík pedig az anisotrop közegben terjedő sík hullám *beesési síkjával* párhuzamos legyen.

Ismeretes, hogy úgy a két visszaverődött, mint a törött hullám normálisai a beesés síkjával párhuzamosak, továbbá, hogy e hullámoknak a  $+Z'$  tengelylyel alkotott szögeit, az  $i_{v_1}, i_{v_2}, i_\tau$  szögeket a

<sup>1</sup> Ez együtthatók jelentését lásd alább, (3) és (4)-ben. Egytengelyű közegekre nézve a (33)-ben.

<sup>2</sup> F. POCKELS: l. c. p. 66.



$$\frac{\sin i_b}{q_b} = \frac{\sin i_{v_1}}{q_{v_1}} = \frac{\sin i_{v_2}}{q_{v_2}} = \frac{\sin i_\tau}{c} = \frac{1}{k} \quad (5)$$

egyenletek állapítják meg.<sup>1</sup> Az e kifejezésekben szereplő  $i_b$  a beeső hullám beesési szögét,  $q_b$  a beeső,  $q_{v_1}$ ,  $q_{v_2}$  a két visszaverődött és  $c$  az isotrop közegben terjedő törött hullám terjedési sebességeit jelenti.

Ez egyenletek figyelembe vételével az (1) és (2) alatti formulák a  $q$  eliminálása után következőképp írhatók:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} [a_{22} + (a_{22} - k^2) tg^2 i] [a_{11} - 2a_{13} tgi + (a_{33} - k^2) tg^2 i] = \\ = (a_{12} - a_{23} tgi)^2 (1 + tg^2 i) \end{aligned} \quad (6)$$

$$tg \phi = \frac{(k^2 - a_{22}) tg^2 i - a_{22}}{(a_{12} - a_{23} tgi) \sqrt{1 + tg^2 i}} \quad (7)$$

Az első egyenlet gyökei nyújtják az adott beesési szöghöz  $i_b$ -hez és terjedési sebességhez  $q_b$ -hez, azaz adott  $k$ -hoz tartozó visszaverődési szögeket, a második összefüggés pedig e hullámok polárizációs azimuthjait.

A visszaverődött és a törött hullámok amplitúdói a határfeltételekből számíthatók ki.<sup>3</sup> E feltételi egyenletek jelen esetünkben, a mikor a *beeső hullám közege anisotrop, a törötté pedig isotrop*:

$$\left. \begin{aligned} B \cos i_b \cos \phi_b + V_1 \cos i_{v_1} \cos \phi_{v_1} + V_2 \cos i_{v_2} \cos \phi_{v_2} &= \tau_p \cos i_\tau \\ B \sin \phi_b + V_1 \sin \phi_{v_1} + V_2 \sin \phi_{v_2} &= \tau_m \\ B \sin i_b \cos \phi_b + V_1 \sin i_{v_1} \cos \phi_{v_1} + V_2 \sin i_{v_2} \cos \phi_{v_2} &= \tau_p \sin i_\tau \\ B q_b \sin \phi_b + V_1 q_{v_1} \sin \phi_{v_1} + V_2 q_{v_2} \sin \phi_{v_2} &= \tau_m, \end{aligned} \right\} (8)$$

a hol a  $B$  a beeső,  $V_1$  és  $V_2$  a két visszaverődött,  $\tau = \sqrt{\tau_m^2 + \tau_p^2}$  pedig a törött hullámnak amplitúdóját, továbbá

<sup>1</sup> F. POCKELS: l. c. p. 93., 180.

<sup>2</sup> F. POCKELS: l. c. p. 180.

<sup>3</sup> F. POCKELS: l. c. p. 181., 182., 200.

$$\left. \begin{aligned} \varrho_b &= \frac{t g i_\tau}{c^2 \sin i_b} (a_{11} \cos i_b - a_{13} \sin i_b + a_{12} \cot g \psi_b) \\ \varrho_{v_1} &= \frac{t g i_\tau}{c^2 \sin i_{v_1}} (a_{11} \cos i_{v_1} - a_{13} \sin i_{v_1} + a_{12} \cot g \psi_{v_1}) \\ \varrho_{v_2} &= \frac{t g i_\tau}{c^2 \sin i_{v_2}} (a_{11} \cos i_{v_2} - a_{13} \sin i_{v_2} + a_{12} \cot g \psi_{v_2}) \end{aligned} \right\} (9)$$

jelentik.

Az ismertetett összefüggésekkel a visszaverődés és törés problémája következőképp oldható meg:

Az adott  $i_b$  beesési szöghöz tartozó terjedési sebességet, a  $q$ -t az (1) alatti negyedfokú egyenlet nyújtja. Ez egyenlet négy gyöke közül kettő-kettő ellentetlen egyenlő, mert ez egyenletben  $q$ -nak csak másod- és negyedfokú hatványai szerepelnek. A két pozitív előjelű gyök az  $i_b$  irányban, a két negatív pedig a  $180^\circ - i_b$  irányban terjedő két hullám terjedési sebességeit adja. Minthogy pedig tetszésünktől függ, hogy az  $i_b$  irányban tovaterjedő két hullám (pl. egytengelyű kristály esetén az ordinár és az extraordinár beeső hullám) közül melyiknek visszaverődését vizsgáljuk meg, ezért a két pozitív gyök közül a szóban forgó beeső hullám terjedési sebessége  $q_b$  kiválasztható. Ezután a

$$k = \frac{q_b}{\sin i_b} \text{-vel} \quad (10)$$

a (6) alatti negyedfokú egyenletet képezzük, melynek a  $90^\circ$  és  $180^\circ$  közé eső két gyöke a két visszaverődött hullám visszaverődési szögeit  $i_{v_1}$ -t és  $i_{v_2}$ -t nyújtja. Az így ismeretes  $i_b$ ,  $i_{v_1}$  és  $i_{v_2}$  szögek segítségével a (7) alatti formulával a beeső fény és a két visszaverődött fény polárizációs azimuthjai  $\psi_b$ ,  $\psi_{v_1}$ ,  $\psi_{v_2}$  meghatározhatók. S így, minthogy (5) egyenlet alapján  $i_\tau$  is ismeretes, ezért a (8) alatti egyenletrendszerből a két visszaverődött és a törött hullám amplitudói kiszámíthatók.

### 3. §. A teljes fényvisszaverődés phasisváltozásai.

#### a) Általános eset.

Az eddig itt ismertetett, általában ismeretes eredmények előre-bocsátása után a teljes fényvisszaverődés phasisváltozásainak tárgyalására térek rá.

A (8) alatti egyenletrendszerből

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{(1-\rho_b) \sin \phi_b \cos \phi_{v_2} \sin(i_\tau - i_{v_2}) -}{(1-\rho_{v_2}) \sin \phi_{v_2} \cos \phi_{v_1} \sin(i_\tau - i_{v_1}) -} \\ &\quad - \frac{(1-\rho_{v_2}) \cos \phi_b \sin \phi_{v_2} \sin(i_\tau - i_b)}{(1-\rho_{v_1}) \cos \phi_{v_2} \sin \phi_{v_1} \sin(i_\tau - i_{v_2})} B = \sigma_1 B. \\ V_2 &= \frac{(1-\rho_b) \sin \phi_b \cos \phi_{v_1} \sin(i_\tau - i_{v_1}) -}{(1-\rho_{v_1}) \sin \phi_{v_1} \cos \phi_{v_2} \sin(i_\tau - i_{v_2}) -} \\ &\quad - \frac{(1-\rho_{v_1}) \cos \phi_b \sin \phi_{v_1} \sin(i_\tau - i_b)}{(1-\rho_{v_2}) \cos \phi_{v_1} \sin \phi_{v_2} \sin(i_\tau - i_{v_1})} B = \sigma_2 B. \end{aligned} \right\} (11)$$

A visszaverődött hullámok amplitudóit meghatározó  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$  tényezők pozitív vagy negatív valós számok mindabban az esetben, ha  $i_{v_1}$ ,  $i_{v_2}$ ,  $i_\tau$  szögek valamennyien valósak. Ha azonban e szögeknek csak egyike is imaginárius vagy komplex, akkor a  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$ -nek legalább egyike complex alakot ölt, a mi azt jelenti, hogy az illető hullámok a visszaverődéskor phasisváltozást szenvednek. E phasisváltozásokat a

$$\sigma_1 = s_1 e^{i\delta_1}, \quad \sigma_2 = s_2 e^{i\delta_2}$$

complex mennyiségek argumentumai:  $\delta_1$  és  $\delta_2$  nyújtják.

Az (5) és az (1) alatti egyenletek segítségével könnyen belátható, hogy az  $i_{v_1}$  és  $i_{v_2}$  visszaverődési szögeknek csak az egyike, még pedig a *gyorsabban* tovaterjedő, visszaverődött hullámhoz tartozó szög lehet *complex*; az is azonban csak *elegendő nagy beesési szögnél* és csakis akkor, ha a *beeső* hullám a *lassabban* tovaterjedő beeső hullám.<sup>1</sup> Az  $i_\tau$  ellenben a fény *teljes visszaverődése* alkalmával mindig *complex*.

Tehát a *teljes fényvisszaverődés* intervallumában:

1. ha a beeső hullám a gyorsabban terjedő hullám, akkor mindkét visszaverődött hullám phasisváltozása csakis a teljes visszaverődés folytán származik;

2. ha azonban a beeső hullám a lassabban tovaterjedő hullám, akkor mindaddig, a míg az  $i_{v_1}$  és  $i_{v_2}$  szögek valósak, azaz a míg mindkét visszaverődött hullám a geometriai optika szabályai szerint

<sup>1</sup> P. KAEMMERER: Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an inactiven durchsichtigen Krystallplatten. Inaug. Diss. Gött. p. 87. 1904.

áll elő, mindkét hullám phasisváltozása kizárólag csakis a teljes visszaverődés folytán származik; mihelyt azonban a gyorsabban tovaterjedő visszaverődött hullám visszaverődés-szöge a  $90^\circ$ -ot eléri és a beesési szög további növelésével complexxé lesz, a lassabban haladó visszaverődött hullám phasisváltozása két okból: részben a teljes visszaverődés, részben pedig a másik visszaverődött hullám eltűnése folytán származik.

A teljes fényvisszaverődés phasisváltozásainak az általános esetben való kiszámítási módját fentebb ismertettem. E phasisváltozásoknak explicit formákban való előállítását általános esetben vagy egyáltalában lehetetlen, vagy pedig rendkívül komplikált. Ezért e kérdéssel csakis speciális esetben foglalkozom.

b) *A beesés síkje a kristály egy symmetriasíkjával párhuzamos.*

A teljes fényvisszaverődés phasisváltozásait abban a speciális, de azért még mindig elég általános esetben határozzuk meg, a melyben a beeső hullám beesés-síkje a kristály egy symmetriasíkjával párhuzamos.

Ez esetben ugyanis a kristály optikai együtthatói közül  $a_{23}=0$  és  $a_{12}=0$  lévén,<sup>1</sup> a terjedési sebességeket és a visszaverődési szögeket meghatározó (1) és (6) egyenletek két-két quadratikusan egyenletre esnek szét. Az  $i_b$  beesési szög által meghatározott két,  $i_{v_1}$  és  $i_{v_2}$  irányban tovaterjedő két hullám terjedési sebességei:  $q_1$  és  $q_2$ , továbbá az adott  $k$ -hoz tartozó visszaverődési szögek  $i_{v_1}$  és  $i_{v_2}$  egymástól elválaszthatók.

A beeső fény kétféle tovaterjedési sebessége (1)-ből:

$$\left. \begin{aligned} q_1^2 &= a_{22} \\ q_2^2 &= a_{11} \cos^2 i_b - 2a_{13} \sin i_b \cos i_b + a_{33} \sin^2 i_b \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

és a két visszaverődött fény visszaverődési szöge (6)-ból:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i_{v_1} &= -\sqrt{\frac{a_{22}}{k^2 - a_{22}}} \\ \operatorname{tg} i_{v_2} &= -\frac{a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 + a_{11}(k^2 - a_{33})}}{k^2 - a_{33}} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

<sup>1</sup> A symmetria eme feltételei a (4) alatti meghatározó formulákból következnek.

További tárgyalásainkban két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, a mint a *beeső* hullám a  $q_1$  illetve a  $q_2$  sebességgel terjed tova.

1. Legyen a *beeső* hullám sebessége  $q_1$ .

A (12) szerint  $i_b$  irányban  $q_1 = +\sqrt{a_{22}}$  sebességgel tovaterjedő hullámhoz tartozó visszaverődési szögeket a (13) alatti képletekből nyerjük, ha azokba az (5)-ből és a (12)-ből

$$q_b = k^2 \sin^2 i_b = a_{22} t,$$

azaz

$$k^2 = \frac{a_{22}}{\sin^2 i_b} \quad (14)$$

értéket helyettesítjük:

$$\begin{aligned} t g i_{v_1} &= - t g i_b, \quad \text{azaz} \quad i_{v_1} = 180^\circ - i_b; \\ t g i_{v_2} &= - \frac{a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 + a_{11} \left( \frac{a_{22}}{\sin^2 i_b} - a_{33} \right)}}{\frac{a_{22}}{\sin^2 i_b} - a_{33}}. \end{aligned} \quad (15)$$

A *beeső* és a két visszaverődött hullám polározási azimuthjait a (7) alatti formula nyújtja, ha az abban szereplő  $i$  helyébe rendre a megfelelő szögeket:  $i_b$ ,  $i_{v_1}$ ,  $i_{v_2}$ -t helyettesítjük.

E formula számlálója, ha

$$i = i_b, \quad (k^2 - a_{22}) t g^2 i_b - a_{22} = \left( \frac{a_{22}}{\sin^2 i_b} - a_{22} \right) t g^2 i_b - a_{22} = 0;$$

ha

$$i = i_{v_1}, \quad (k^2 - a_{22}) t g^2 i_{v_1} - a_{22} = (k^2 - a_{22}) t g^2 i_b - a_{22} = 0;$$

ha

$$i = i_{v_2}, \quad (k^2 - a_{22}) t g^2 i_{v_2} - a_{22} \neq 0;$$

a nevezője ellenben, minthogy feltételünk értelmében  $a_{23} = a_{12} = 0$ , mind a három esetben zérus.

E szerint a (7) alatti formula az első két esetben *határozatlan* a  $\psi$ -re nézve, a harmadikban ellenben a polározási azimuth számára  $\psi_{v_2} = 90^\circ$  határozott értéket nyújt. A  $\psi_{v_b}$  és  $\psi_{v_1}$  értékeket tehát más úton kell meghatározni.

Ismeretes ugyanis, hogy a kristályban egy és ugyanabban

az irányban, de különböző  $q_1$  és  $q_2$  sebességgel terjedő két hullám polározási síkjai egymásra merőlegesek; <sup>1</sup> másrészt pedig, mivel a  $\psi_{v_2}$  értéke az  $i_{v_2}$  értékétől függetlenül  $90^\circ$ , ezért úgy  $\psi_b$ , mint  $\psi_{v_1}$  csak zérus lehet. Tehát a jelen esetben

$$\psi_b = 0, \quad \psi_{v_1} = 0, \quad \psi_{v_2} = 90^\circ.$$

Ha már most a polározási azimuthoknak itt nyert értékeivel a visszaverődött hullámok amplitudóit a (11) alatti formulák szerint képezzük, nyerjük, hogy

$$V_1 = -\frac{\sin(i_b - i_\tau)}{\sin(i_{v_1} - i_\tau)} B = -\frac{\sin(i_b - i_\tau)}{\sin(i_b + i_\tau)} B,$$

$$V_2 = 0.$$

Az  $i_b$  és  $i_\tau$  közötti összefüggést az (5) és (14) egyenletek alapján a

$$\frac{\sin i_b}{\sin i_\tau} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{c}$$

formula állapítja meg.

Tehát egyetlenegy visszaverődött hullám származik, a mely a beesés síkjában polározott, a mely  $q_{v_1} = +\sqrt{a_{22}}$  sebességgel terjed tova s a melynek amplitudója  $V_1$ .

E visszaverődött hullám amplitudóját meghatározó tényező, miként az várható volt, az isotrop közegekre érvényes FRESNEL-féle visszaverődési formulák egyikével, még pedig azzal identikus, mely a beesés síkjában polározott komponenshez tartozik.

E szerint további megfontolásainkat teljesen úgy végezhethetjük, mintha isotrop közeggel volna dolgunk. A visszaverődés phasisváltozásait tehát közvetlenül az *isotrop közegekre érvényes formulákból* nyerjük, ha azokban az *isotrop* közeg törésmutatóját

$\frac{c}{\sqrt{a_{22}}}$ -vel pótoljuk.

Ez okból a részletes fejtegetések mellőzésével azonnal a végeredményeket idézem.

Ha  $c$  az (5) egyenletben fellépő állandó és ha  $\frac{c}{\sqrt{a_{22}}} > 1$ , akkor a visszaverődött hullám  $V_1$  amplitudója a teljes fényvisszaverődés határszögleténél

<sup>1</sup> F. Poekels l. c. 34. l. 3. §., 39. l. 6. §.

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{a_{22}}}{c}\text{-nél}$$

kisebb minden beesési szögnél *positív valós*; a teljes visszaverődés intervallumában ellenben *complex*.

E complex amplitudo kifejezése :

$$V_1 = Be^{i\delta_1}$$

alakban írható, a hol az ismert eljárás szerint a  $\delta_1$  phasisváltozást a

$$\cos \delta_1 = \frac{\frac{c^2}{a_{22}} (\cos^2 i_b - \sin^2 i_b) + 1}{\frac{c^2}{a_{22}} - 1},$$

$$\sin \delta_1 = \frac{2 \frac{c}{\sqrt{a_{22}}} \cos i_b \sqrt{\frac{c^2}{a_{22}} \sin^2 i_b - 1}}{\frac{c^2}{a_{22}} - 1}$$

egyenletek határozzák meg.

A phasisváltozás a teljes visszaverődés határszögénél zérus, ezután a beesésszög növekedésével folytonosan növekszik s a rasans beesésnél  $180^\circ$ .

2. Legyen a beeső hullám terjedési sebessége a (12) szerint :

$$q_b = \sqrt{a_{11} \cos^2 i_b - 2a_{13} \sin i_b \cos i_b + a_{33} \sin^2 i_b}.$$

E beeső hullámhoz tartozó két visszaverődött hullám visszaverődés-szögét az (5), a (12) és a (13) alatti formulákból a

$$k^2 = \frac{q_b^2}{\sin^2 i_b} = a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33} \quad (16)$$

helyettesítéssel nyerjük. Ezek :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i_{v_1} &= - \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33} - a_{22}}} \\ \operatorname{tg} i_{v_2} &= - \frac{a_{11}}{a_{11} \cotg i_b - 2a_{13}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

E visszaverődési szögek ismerete után a (7) alatti formula alapján a beeső és a két visszaverődött hullám polárizációs azimuthját  $\phi_b$ -t,  $\phi_{v_1}$ -et és  $\phi_{v_2}$ -t az előző esetben alkalmazott megfontolások útján könnyen meghatározhatjuk. Arra jutunk, hogy

$$\phi_b = 90^\circ, \quad \phi_{v_1} = 0, \quad \phi_{v_2} = 90^\circ.$$

S így a visszaverődött hullámoknak (11) alatt definiált amplitudói a (9) felhasználásával:

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = -\frac{1 - \rho_b}{1 - \rho_{v_2}} B = -\frac{\cotg i_\tau - \frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_b - a_{13})}{\cotg i_\tau - \frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_{v_2} - a_{13})} B,$$

hol az  $i_b$  és  $i_\tau$  között (5) és a (16) alapján a

$$\cotg i_\tau = + \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33} - c^2} \quad (18)$$

összefüggés áll fenn.

Tehát a jelen esetben is csak egyetlenegy visszaverődött hullám származik. E hullám a beesés síkjára merőlegesen polárizott és terjedési sebessége az (1)-ből:

$$q_{v_2} = \sqrt{a_{11} \cos^2 i_{v_2} - 2a_{13} \sin i_{v_2} \cos i_{v_2} + a_{33} \sin^2 i_{v_2}}.$$

E visszaverődött hullám  $V_2$  amplitudója az  $i_{v_2}$ -nek a (17) alatti és  $i_\tau$ -nak a (18) alatti formulákkal való eliminálása után:

$$V_2 = \frac{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_b - a_{13}) - \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33} - c^2}}{\frac{1}{c^2} (a_{11} \cotg i_b - a_{13}) + \frac{1}{c} \sqrt{a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33} - c^2}} B. \quad (19)$$

Vizsgáljuk meg  $V_2$  értékeit, a mennyiben ezek a beesés szögétől függenek.

Igen kis beesési szög esetén első megközelítésben:

$$V_2 = \frac{\frac{a_{11}}{c^2} - \frac{\sqrt{a_{11}}}{c}}{\frac{a_{11}}{c^2} + \frac{\sqrt{a_{11}}}{c}} B = -\frac{\frac{c}{\sqrt{a_{11}}} - 1}{\frac{c}{\sqrt{a_{11}}} + 1} B.$$



$V_2$  előjele a normális beesésnél negatív vagy pozitív a szerint, a mint  $\frac{c}{\sqrt{a_{11}}}$  nagyobb vagy kisebb az egységnél. Mivel a  $B$  amplitudót a beeső, a  $V_2$  amplitudót a visszaverődött hullám normálisaira vonatkoztattuk, s mivel másrészt a beeső és a visszaverődött hullám normálisai igen nagy megközelítéssel ellentett irányúak, azért, ha  $\frac{c}{\sqrt{a_{11}}}$  nagyobb az egységnél, akkor a visszaverődött és a beeső hullám amplitudói a kristály és az isotrop közeg határlapján egyező, ellenkező esetben pedig ellentett irányúak.

$V_2=0$  oly  $i_b=P$  beesési szögnél, a hol a (19) alatti formulában a számláló eltűnik. Az e feltételből folyó quadratikus egyenlet két gyöke közül csakis a

$$\cotg P = \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{c^2}{a_{11}} \sqrt{\frac{\frac{a_{13}^2}{c^4} + \frac{a_{11}}{c^2} \left(1 - \frac{a_{33}}{c^2}\right)}{1 - \frac{a_{11}}{c^2}}} \text{-nek} \quad (20)$$

van physikai jelentése.

E kifejezés az isotrop közegekhez tartozó polározási szögletet meghatározó

$$\cotg P = n$$

összefüggés általánosított alakja.

Erről azonnal meggyőződhetünk, ha a kristályt isotroppá tesszük, azaz, ha felvesszük, hogy a hullám főtérjedési sebességei egyenlők:

$$a_1 = a_2 = a_3 = c'$$

és ha (4) szerint az isotrop közegekre érvényes

$$a_{23} = a_{13} = a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = c'^2, \quad \frac{c}{c'} = n$$

értékeket a (20) alatti összefüggésbe helyettesítjük.

A visszaverődött hullám amplitudója e  $P$  beesésszögnél előjelt változtat.

Térjünk most a teljes visszaverődés tárgyalására.

Vegyük fel azért, hogy  $c$  a beeső hullám terjedési sebességénél  $v_b$ -nél nagyobb. Mivel ekkor (5) szerint  $i_\tau$  mindig nagyobb  $i_b$ -nél, ezért a beesési szög növelésével oly  $\Phi$  beesési szöghöz juthatunk el, a melyhez tartozó törésszög  $90^\circ$ . E  $\Phi$  szög a teljes visszaverődés határszöglete, melyet tehát (18) alapján a

$$a_{11} \cotg^2 \Phi - 2a_{13} \cotg \Phi + a_{33} - c^2 = 0$$

quadraticus egyenlet

$$\cotg \Phi = \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{c^2}{a_{11}} \sqrt{\frac{a_{13}^2}{c^4} + \frac{a_{11}}{c^2} \left(1 - \frac{a_{33}}{c^2}\right)}$$

gyöke határoz meg.

E  $\Phi$ -nél nagyobb beesési szögnél úgy  $i_\tau$ , mint  $V_2$  is complex, ugyanis a (18)-ból és a (19)-ből:

$$\cotg i_\tau = -\sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33})}$$

$$V_2 = \frac{\frac{1}{c^2}(a_{11} \cotg i_b - a_{13}) + \sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33})}}{\frac{1}{c^2}(a_{11} \cotg i_b - a_{13}) - \sqrt{-1} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33})}} B,$$

a hol  $\pm \sqrt{-1}$ -nek negativ előjele használandó, ha azzal a tapasztalattal összhangzásban kívánunk maradni, hogy ekkor a törött hullám amplitudója a határfelülettől való távolsággal exponencialisan csökken.

A  $V_2$  complex volta azt jelenti, hogy a hullám a teljes visszaverődéskor phasisváltozást szenved.

A  $V_2$  kifejezésében a valós és a képzetes rész szétválasztásával arra jutunk, hogy

$$V_2 = B e^{i\delta_2}, \quad (21)$$

a hol a  $\delta_2$  phasisváltozást a szokásos módon képezve, nyerjük:

$$\cos \delta_2 = \frac{(a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b)(a_{11} + c^2) + a_{13}^2 + a_{33}c^2 - c^4}{(a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b)(a_{11} - c^2) + a_{13}^2 - a_{33}c^2 + c^4},$$

$$\sin \delta_2 = \frac{2c(a_{11} \cotg i_b - a_{13}) \sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b + a_{33})}}{(a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i_b)(a_{11} - c^2) + a_{13}^2 - a_{33}c^2 + c^4}.$$

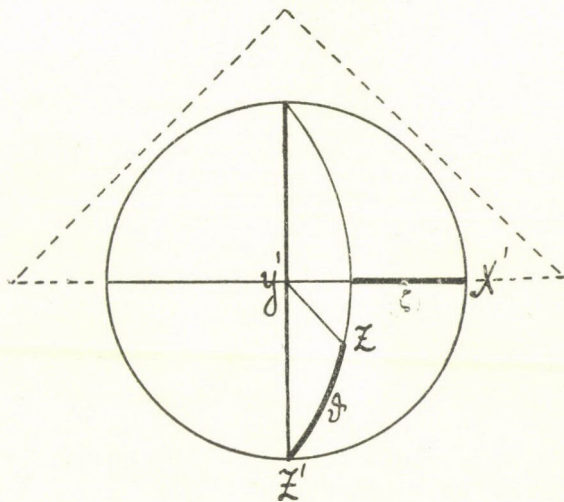
E phasisváltozás megvizsgálása céljából szokás szerint célszerű  $\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}$ -t képeznünk, mely itt:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} = \frac{c\sqrt{c^2 - (a_{11} \cotg^2 i_b - 2a_{13} \cotg i^b) + a_{33}}}{a_{11} \cotg i_b - a_{13}}.$$

Eszerint a phasisváltozás a teljes visszaverődés határszögénél zérus, a beesési szög növelésével folytonosan növekszik s a rasans beesésnél

$$(\delta_2)_{i_b=90^\circ} = 2 \operatorname{arctg} \left( -\frac{c\sqrt{c^2 - a_{33}}}{a_{13}} \right).$$

A míg tehát e phasisváltozás a rasans beesésnél isotrop közeg esetén függetlenül a törésmutatótól mindig  $180^\circ$ , addig



1. ábra.

az anisotrop közegeknél e phasisváltozás értéke, még akkor is, ha a beesési síkja a kristály egy symmetria-síkja, a kristály optikai állandóitól függ. E phasisváltozás értéke az  $a_{13}$  pozitív értékénél,  $180^\circ$ -nál nagyobb, ellenben negatív  $a_{13}$  esetén  $180^\circ$ -nál kisebb. E maximális phasisváltozás tehát a kristály optikai tengelyeinek a beesési síkjához és a határfelülethez viszonyított oly irányításánál egyenlő a  $180^\circ$ -kal, melynél  $a_{13}=0$ .

Vizsgáljuk meg, hogy az  $a_{13}$  egytengelyű kristályok esetén az optikai tengely mily irányításnál zérus.

Mivel egytengelyű kristályoknál a főtérjedési sebességek közül kettő egyenlő, azaz  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $a_3 = e$ , ezért (4) alapján

$$a_{13} = o^2(a_1 a_3 + \beta_1 \beta_3) + e^2 \gamma_1 \gamma_3 = (e^2 - o^2) \gamma_1 \gamma_3.$$

Eszerint  $a_{13} = 0$ , ha vagy  $\gamma_1 = 0$ , vagy  $\gamma_3 = 0$ .

Jelen esetünkben tehát, a mikor a beesés síkja a kristály egy symmetriasíkjával párhuzamos, ez annyit jelent (a (3) alatti séma és az 1. ábra segítségével könnyen belátható), hogy a phasisváltás a rasans beesésnél csakis akkor  $180^\circ$ , ha az egytengelyű kristály optikai tengelye, azaz itt a  $+Z$  tengely vagy 1. a beesés síkjára merőleges:

$$(\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 0),$$

vagy 2. a határfelületre merőleges:

$$(\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1),$$

vagy végül 3. a beesés síkjának és a határfelületnek metszéspontjával párhuzamos:

$$(\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0).$$

#### 4. §. A teljesen visszaverődött fény energiája.

Kimutatjuk, hogy a teljesen visszaverődött hullámban továbbterjedő energia a beeső hullám energiájával egyenlő.

A bizonyítást ismét csakis abban a speciális esetben végezzük, a mikor a beesés síkja a kristály egy symmetriasíkjával párhuzamos.

Ismeretes, hogy ha az elektromos erőt  $\mathfrak{E}(XYZ)$ -vel, a mágneses erőt  $\mathfrak{S}(LMN)$ -nel jelöljük, akkor az energiafluxust a

$$\mathfrak{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{S}]$$

vectorszorozattal kifejezett POYNTING-féle vector határozza meg.

Eszerint az energiafluxus iránya az  $\mathfrak{E}$  és  $\mathfrak{S}$  vectorokkal definiált sík pozitív normálisa, a területegységre vonatkoztatott intenzitása pedig

$$\frac{c}{4\pi} - EH \sin \omega, \quad (22)$$

ha  $E$  az elektromos,  $H$  a mágneses erő számértékét,  $c$  a fénynek a légüres térben való terjedési sebességét,  $\omega$  pedig az  $\mathfrak{E}$  és  $\mathfrak{H}$  vektorok által alkotott szöveget jelenti.

Fenti állításunk igazolására, tehát mindenekelőtt a beeső és a visszaverődött hullámokhoz tartozó energiafluxust kell meghatározni.

A (8) alatti határfeltételekben és a belőlük folyó (11) alatti formulákban szereplő  $B$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\tau_p$  és  $\tau_m$  amplitúdók a mágneses erők amplitúdóit jelentik.<sup>1</sup> E vektorok az illető hullámok polározási síkjában fekszenek és a megfelelő hullámok normálisára merőlegesek.

1. Láttuk, hogy ha a beeső hullám  $q_1$  sebességgel terjed tovább (3. §., b, 1.), akkor az eredmények teljesen olyanok, mintha a visszaverődés  $\frac{c}{\sqrt{a_{11}}}$  törésmutatója isotrop közeg határfelületéről történe, miért is a fenti energiatétel ez esetben bebizonyítottak tekinthető.

2. Ha azonban a beeső hullám terjedési sebessége  $q_2$ , akkor a tétel még bizonyításra szorul.

A jelen esetben a beeső hullám polározás-síkja a beesés síkjára merőleges  $\varphi_b = 90^\circ$ , ezért a beeső hullámhoz tartozó mágneses erő összetevői:

$$L_b = 0, \quad M_b = B \cos \varphi_b, \quad N_b = 0,$$

a hol

$$\varphi_b = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \sin i_b + z \cos i_b}{q_b} + \delta_b \right).$$

A mágneses erő számértéke tehát

$$H_b = B \cos \varphi_b; \quad (23)$$

iránycosinusai pedig

$$f = 0, \quad g = 1, \quad h = 0. \quad (24)$$

<sup>1</sup> F. POCKELS: l. c. p. 174, 175, 176, 181.

E mágneses erőhöz tartozó elektromos erőt az

$$X = \frac{1}{c^2} (a_{11} \mathfrak{X} + a_{12} \mathfrak{Y} + a_{13} \mathfrak{Z})$$

$$Y = \frac{1}{c^2} (a_{21} \mathfrak{X} + a_{22} \mathfrak{Y} + a_{23} \mathfrak{Z})$$

$$Z = \frac{1}{c^2} (a_{31} \mathfrak{X} + a_{32} \mathfrak{Y} + a_{33} \mathfrak{Z})$$

összefüggések adják,<sup>1</sup> ha az azokban szereplő elektromos inductiót  $J(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$  a

$$\frac{\partial J}{\partial t} = c \operatorname{curl} S$$

MAXWELL-féle differentialegyenletekből határozzuk meg.

A számítások végrehajtása után, mivel a jelen esetben  $a_{23} = a_{12} = 0$ , arra jutunk, hogy a beeső hullámhoz tartozó elektromos erő összetevői:

$$\left. \begin{aligned} X_b &= \frac{1}{cq_b^2} (a_{11} \cos i_b - a_{13} \sin i_b) B \cos \varphi_b = K_x B \cos \varphi_b \\ Y_b &= 0 \\ Z_b &= \frac{1}{cq_b^2} (a_{13} \cos i_b - a_{33} \sin i_b) B \cos \varphi_b = K_z B \cos \varphi_b \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ez elektromos erő amplitudója

$$E_b = B \cos \varphi_b \sqrt{K_x^2 + K_z^2} \quad (26)$$

és iránycosinusai:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{K_x}{\sqrt{K_x^2 + K_z^2}} \\ b &= 0 \\ c &= \frac{K_z}{\sqrt{K_x^2 + K_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Mivel pedig itt (24) és (27)-ből:

$$af + bg + ch = 0,$$

azért az elektromos erő a mágneses erőre merőleges, azaz

$$\omega = 90^\circ. \quad (28)$$

<sup>1</sup> F. POCKELS: l. c. p. 81.

Az energiafluxus irányát az elektromos és a mágneses erőnek, azaz a (27) és a (24) alatti iránycosinusokkal definiált irányoknak pozitív normálisai nyújtja. Ez irány cosinusai

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= - \frac{K_z}{\sqrt{K_x^2 + K_z^2}} \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= + \frac{K_x}{\sqrt{K_x^2 + K_z^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Az energiafluxus intenzitását a (22) alatti szorzat adja, ha abba az  $E$ ,  $H$  és  $\omega$ -nak a (26), (23) és (28) alatti értékeit helyettesítjük. Tehát a

$$\frac{c}{4\pi} B^2 \cos^2 \varphi_b \sqrt{K_x^2 + K_z^2}$$

szorzat a beeső fénynyaláb keresztmetszete egységén átáramló energiameennyiséget fejezi ki.

A beeső összes energiát pedig nyerjük, ha az energiafluxus ez intenzitását a keresztmetszettel szorozzuk. E keresztmetszetet könnyen meghatározhatjuk. Ha ugyanis a beeső fény a határfelület  $F$  nagyságú részéről verődik vissza, akkor a beeső nyaláb keresztmetszete  $F \cdot \gamma$ . S így a beeső összes energia a (29) és (25) tekintetbe vételével:

$$U_b = + \frac{c}{4\pi} F B^2 K_x \cos^2 \varphi_b = + \frac{1}{4\pi} \frac{B^2}{\eta_b} F (a_{11} \cos i_b - a_{13} \sin i_b) \cos^2 \varphi_b,$$

vagy (5) figyelembe vételével

$$U_b = + \frac{1}{4\pi} \frac{B^2}{k} F (a_{11} \cotg i_b - a_{13}) \cos^2 \varphi_b.$$

Tehát egy teljes periodus alatt beeső energiameennyiség

$$W_b = \int_0^T U_b dt = \frac{T}{8\pi} \frac{B^2}{k} F (a_{11} \cotg i_b - a_{13}). \quad (30)$$

Hasonló megfontolásokkal ahhoz az eredményhez jutunk, hogy az  $F$  nagyságú felületről visszaverődő fény energiája:

$$U_{v_1} = - \frac{1}{4\pi} \frac{|V_2|^2}{k} F (a_{11} \cotg i_{v_1} - a_{13}) \cos^2 \varphi_{v_1}.$$

Mivel pedig (21) alapján a teljes visszaverődés alkalmával  $|V_2| = B$  és (17) szerint

$$\cotg i_{v_2} = \frac{2a_{13} - a_{11} \cotg i_b}{a_{11}},$$

azért

$$U_{v_2} = + \frac{1}{4\pi} \frac{B^2}{k} F(a_{11} \cotg i_b - a_{13}) \cos^2(\varphi_b + \delta_2).$$

Így tehát egy teljes periodus alatt visszaverődött energia-mennyiség

$$W_{v_2} = \int_0^T U_{v_2} dt = \frac{T}{8\pi} \frac{B^2}{k} F(a_{11} \cotg i_b - a_{13}), \quad (31)$$

azaz

$$W_{v_2} = W_b. \quad (32)$$

Vagyis a teljes fényvisszaverődéskor a beeső összes energia visszaverődik: *a visszaverődött fény intenzitása a beeső fény intenzitásával egyenlő.*

### 5. §. Kísérleti megfigyelések.

A teljes fényvisszaverődést kísérő phasisváltozások megfigyelésére ugyanazt a kísérleti módszert használtam fel, a melyvel az isotrop közegek határfelületéről teljesen visszaverődött fény abszolút phasisváltozásait megvizsgáltam.

E kísérleti módszert több helyen ismertettem,<sup>1</sup> miért is e módszerre mint ismeretesre hivatkozhatom.

A következőkben nem bocsátkozom tehát a kísérleti eljárás újabb ismertetésébe, hanem csakis azokról a kiegészítésekről szólok, a melyek az *anisotrop-isotrop* határfelületről visszaverődött fény interferenciájára vonatkoznak.

Ha ugyanis az isotrop közegekre vonatkozó vizsgálataimnál felhasznált üvegprismát egy anisotrop közegből készített prismával helyettesítjük, akkor a két interferáló hullámnak optikai úthosszai a prismában különbözök. E különbség jelentékeny,

<sup>1</sup> J. RYBÁR: M. Tud. Akadémia Math. és Természettud. Értesítője 32. k. p. 1–30. I. Budapest. 1914. Annalen der Physik 4. 42. 1171–1195. I. 1913.



sok hullámhosszat tehet ki. Ennek az a következménye, hogy ha a FRESNEL-féle kettős tükörről visszaverődött, a prismába belépő fényben a kettős tükör után következő interferentia-térben éles interferentia-csíkok vannak, akkor a kettősen törő hasáb átfogólapján történt visszaverődés után a prismából kilépő fényben a jelentékeny útkülönbség folytán interferenciacsíkok nem figyelhetők meg. Ha tehát a visszaverődött fényvel éles interferenciacsíkokat óhajtunk előállítani, akkor a prisma által létesített útkülönbséget *kompenzálnunk* kell, a mit könnyen elérhetünk, ha a FRESNEL-féle kettős tükör egyik tükré a tükör normalisa irányában önmagával párhuzamosan eltolható. Ez az eltolás rendszeren mikrométercsavar segítségével történhet.

Tehát az éles interferenciacsíkok előállítása akként történhet, hogy a FRESNEL-féle kettős tükör egyik tükrét a kettősen törő prisma helyes beállítása után eltoljuk mindaddig, míg a visszaverődött fényben interferenciacsíkok megfigyelhetők; ezután a visszaverődött fényben elhelyezett hengerlencsét a reá eső sugárnyaláb körül addig forgatjuk, míg a látótérben megfigyelhető interferenciacsíkok élesek lesznek.

Az itt mondottakon kívül a kísérleti berendezésre vonatkozólag még csak azt említem fel, hogy a FRESNEL-féle kettős tükörről történő reflexióhoz tartozó virtuális képek éles képeit nem gömb-, hanem hengerlencsével állítottam elő.<sup>1</sup>

Kísérleteimhez egy nagy mézspátprismát használtam. E mézspátprismának a légüres térre vonatkoztatott főtörésmutatói (vörös fényre nézve):

$$n_o = 1.6555, \quad n_e = 1.4849.$$

Az optikai tengely a prisma átlólapjának a levegőbe haladó normálisával (1. ábra)

$$\vartheta = 45^\circ 29' 20''$$

szöget, a normálison és az optikai tengelyen keresztül fektetett sík pedig a prisma törőéleire merőleges síkkal (a hullám beesés síkjával)

$$\zeta = 51^\circ 4' 30''$$

szöget alkot.

<sup>1</sup> Idézett hely 14. l.

Kísérleti vizsgálataim tehát teljesen általános esetre vonatkoznak, a minnek előnye az, hogy így az elméleti fejtegetések kiindulási pontját tevő (11) alatti alapegyenletek helyessége igazolható.

Ez általános esetben minden beeső hullámhoz két visszaverődött hullám (egy ordinár és egy extraordinár hullám) tartozik. A phasisváltozások a (8) és (11) alatti határfeltételekből számíthatók ki. De e számítások végrehajtásában bizonyos egyszerűsítések lehetségesek. Ugyanis ismeretes, hogy egytengelyű kristályok esetében az ordinár és az extraordinár hullámok terjedési sebességei, továbbá a két visszaverődött hullám visszaverődésszögei explicit függvénynyel fejezhetők ki.<sup>1</sup>

A fenti négy adat:  $n_o$ ,  $n_e$ ,  $\vartheta$  és  $\zeta$  teljesen elégséges a VOIGT-féle optikai együtthatók meghatározására.

Egytengelyű kristályok esetében ugyanis az  $a_1$  és  $a_2$  főterjedési sebességek egymással egyenlők s így

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{n_o^2}, \quad a_3 = \frac{1}{n_e^2},$$

miért is a (4) alatti optikai együtthatók:

$$\left. \begin{aligned} a_{jj} &= \frac{1}{n_o^2} + \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \gamma_j \\ a_{jl} &= \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \gamma_j \gamma_l; \quad j \neq l. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

$j, l = 1, 2, 3$

Az 1. ábra szerint, a hol  $Z$  az optikai tengely irányát jelzi,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \cos \zeta \sin \vartheta \\ \gamma_2 &= \sin \zeta \sin \vartheta \\ \gamma_3 &= \cos \vartheta. \end{aligned}$$

A hullámok terjedési sebességeit meghatározó (1) alatti negyedfokú egyenlet a (33) alatti együtthatók helyettesítésével két

<sup>1</sup> F. POCKELS: l. c. p. 21., 101.

<sup>2</sup> F. POCKELS: l. c. p. 101.

másodfokú tényezőre esik szét, úgy hogy az ordinär és az extra-ordinär hullámok terjedési sebességei egymástól szétválaszthatók. Ezek:

$$q_r = \frac{1}{n_o}$$

$$q_o = \sqrt{\frac{1}{n_r^2} - \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_r^2}\right)(\gamma_1 \sin i + \gamma_3 \cos i)^2}. \quad (34)$$

Hasonlóképen a visszaverődési szögek is a (6) alatti egyenletben szétválaszthatók. Ugyanis:

Az ordinär hullám visszaverődésszöge a

$$\sin i_{r_o} = \frac{\sin i_o}{n_o q_o} = \frac{1}{n_o k},$$

az extraordinär hullám visszaverődésszöge pedig a

$$C_0 \operatorname{tg}^2 i_{r_e} + 2C_1 \operatorname{tg} i_{r_e} + C_2 = 0$$

egyenletből számítható ki,<sup>1</sup> a hol

$$C_0 = \frac{1}{n_r^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_r^2}\right) \gamma_1^2 - k^2;$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_r^2}\right) \gamma_1 \gamma_3;$$

$$C_2 = \frac{1}{n_r^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_r^2}\right) \gamma_3^2.$$

Ezeknek az általában ismert vonatkozásoknak előrebocsátása után kísérleti eredményeimnek ismertetésére térek rá.

Kísérleteimben folyadék gyanánt ligroint használtam.

A ligroin törésmutatója (vörös fényre nézve)

$$n = \frac{1}{c} = 1.4000.$$

I. Legyen a beeső hullám ordinär.

<sup>1</sup> F. POCKELS: p. 101.

A törött hullám (5) alapján a mézspát-levegő határfelületről történő reflexiónál

$$\Phi_0 = \arcsin \frac{1}{n_0} = 37^\circ 9' 37''$$

beesési szögénél, a mézspát-ligroin határfelületről történő reflexiónál pedig

$$\Phi'_0 = \arcsin \frac{n}{n_0} = 57^\circ 44' 40''$$

beesési szögénél eltűnik.

A teljes fényvisszaverődés számított és észlelt phasisváltozásait a következő táblázatban foglalom össze :

### I. A beeső fény ordinár.

#### a) *A visszaverődött fény ordinár.*

$i_b$	$\psi_b$	$i_{vo}$	$\psi_{vo}$	$\delta_o$	$\delta'_o$	$\delta_o - \delta'_o$	
						számított	észlelt
40°	+79° 2' 50"	+140°	+34° 56' 30"	+65·3°	0°	+65·3°	+58·8°
45°	72° 7' 40"	135°	34° 19' 20"	90·1°	0°	90·1°	88·4°
50°	65° 49' 45"	130°	33° 55' 0"	102·6°	0°	102·6°	97·8°
55°	60° 14' 15"	125°	33° 43' 10"	112·5°	0°	112·5°	111·1°
60°	55° 22' 30"	120°	33° 43' 20"	121·9°	45·9°	76·0°	80·3°
65°	51° 12' 20"	115°	33° 55' 50"	131·3°	81·1°	50·2°	49·1°
70°	47° 39' 40"	110°	34° 20' 20"	147·3°	116·7°	30·6°	30·9°
75°	44° 40' 15"	105°	34° 58' 20"	162·9°	135·7°	27·2°	27·2°

#### b) *A visszaverődött fény extraordinár.*

$i_b$	$\psi_b$	$i_{ve}$	$\psi_{ve}$	$\delta_e$	$\delta'_e$	$\delta_e - \delta'_e$	
						számított	észlelt
40°	+79° 2' 50"	+134° 23' 20"	-55° 44' 30"	+83·1°	-180°	+263·1°	+261·9
45°	72° 7' 40"	128° 0' 40"	56° 11' 50"	124·4	—	124·4	—
50°	65° 49' 45"	121° 20' 50"	56° 18' 0"	147·8	0°	147·8	137·9
55°	60° 14' 15"	114° 13' 20"	56° 1' 30"	165·6	0°	165·6	156·3
60°	55° 22' 30"	106° 11' 50"	55° 12' 0"	190·4	+76·7°	113·7	118·9
65°	51° 12' 20"	95° 12' 20"	53° 7' 20"	197·2	139·3	57·9	58·8

E táblázatokban  $i_b$  jelenti a beesésszöveget,  $i_{v_0}$ ,  $i_{v_e}$  a visszaverődési szögeket,  $\psi_b$ ,  $\psi_{v_0}$ ,  $\psi_{v_e}$  a hullámok polározási síkjainak a beesési sikkal alkotott szögeit,  $\delta_0$ ,  $\delta_e$  a mézspát-levegő,  $\delta'_0$ ,  $\delta'_e$  a mézspát-ligroin határfelületről történő visszaverődések phasis-változásait. Az  $o$  illetve  $e$  index kifejezi azt, hogy az illető mennyiség a visszaverődött ordinär illetve extraordinär hullámra vonatkozik.

II. Legyen a beeső hullám extraordinär.

A teljes fényvisszaverődés határszögletét (5) alapján a

$$\frac{q_b^2}{\sin^2 i_b} = c^2,$$

azaz (34) szerint a

$$\frac{1}{n_e^2} (1 + \cotg^2 \Phi) - \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) (\gamma_1 + \gamma_2 \cotg \Phi)^2 = c^2$$

quadratikus egyenlet nyújtja.

A mézspát-levegő határfelületről történő reflexióhoz tartozó eme szöglet

$$\Phi_e = 38^\circ 48' 50'',$$

a mézspát-ligroin határfelületről történő visszaverődéshez tartozó pedig

$$\Phi'_e = 63^\circ 27' 20''.$$

A számított és az észlelt értékeket a következő táblázat tünteti fel:

## II. A beeső fény extraordinär.

### a) A visszaverődött fény ordinär.

$i_b$	$\psi_b$	$i_{v_0}$	$\psi_{v_0}$	$\delta_0$	$\delta'_0$	$\delta_0 - \delta'_0$	
						számított	észlelt
40°	10°57'10"	141°44'30"	35°13' 0"	+17·2°	0	+17·2°	+18·0
45°	17°52'20"	137°11'10"	34°34'10"	39·0	0	39·0	38·9
50°	24°10'15"	132°47'40"	34° 7'20"	52·5	0	52·5	53·0
55°	29°45'45"	128°37'10"	33°50'30"	63·3	0	63·3	62·9
60°	34°37'30"	124°43'50"	33°42'50"	73·1	0	73·1	72·8
65°	38°47'40"	121°13'10"	33°42'10"	81·5	26·2	55·3	54·3
70°	42°20'20"	118°12' 0"	33°46'20"	90·2	58·8	31·4	31·0
75°	45°19'45"	115°48'50"	33°52'50"	95·8	78·3	17·5	18·0

b) *A visszaverődött fény extraordinär.*

$i_b$	$\psi_b$	$i_{ve}$	$\psi_{ve}$	$\delta_e$	$\delta'_e$	$\delta_e - \delta'_e$	
						számított.	észlelt
40°	-10°57'10"	+136°33'20"	-55°29'40"	+ 27·9°	0°	+ 27·9	+ 27·2
45°	17°52'20"	130°49'50"	56° 1'40"	67·1	0	67·1	66·3
50°	24°10'15"	125° 7' 0"	56°16'40"	92·2	0	92·2	92·7
55°	29°45'45"	119°26'20"	56°15'50"	110·9	0	110·9	110·8
60°	34°37'30"	113°49'10"	55°59'30"	126·5	0	126·5	125·6
65°	38°47'40"	108°17' 0"	55°28' 0"	139·3	47·3	92·0	93·1
70°	42°20'20"	102°50'50"	54°41'10"	149·3	93·4	55·9	55·1
75°	45°19'45"	97°31'20"	53°38'30"	160·2	127·2	33·0	32·7

Az  $i_b$ ,  $i_{v_0}$ ,  $i_{ve}$ ,  $\psi_b$ ,  $\psi_{v_0}$ ,  $\psi_{ve}$ ,  $\delta_0$ ,  $\delta'_0$ ,  $\delta_e$ ,  $\delta'_e$  jelentései ugyanazok, mint az előző esetben.

A számított és az észlelt értékek a II. esetben jobban egyeznek egymással, mint az I.-ben, a minek valószínűleg az az oka, hogy a mézspát-ligroin határfelületről történő visszaverődéshez tartozó polározás-szöglet az I. esetben az észlelés intervallumában (az extraordinär visszaverődött félynél 45° körül) van, a hol a felületi réteg jelentékenyen befolyásolhatja a jelenséget.

Látható, hogy ha a beeső hullám ordinär, akkor e hullámból származó extraordinär hullám 65° és 70° beesési szögek között eltűnik. E hullám eltűnése a visszaverődött ordinär hullám phasisában változást okoz, úgy, hogy az I. a) táblázatban a 70° és a 75° beesési szögekhez tartozó phasisváltozások részben a teljes fényvisszaverődés folytán, részben pedig a másik (extraordinär) visszaverődött hullám eltűnése folytán származnak.

Végül legyen szabad hálás köszönetemet kifejeznem BÁRÓ EÖTVÖS LORÁND és FRÖHLICH IZIDOR tanár uraknak ama hathatós támogatásukért, a melylyel munkám sikerét előmozdítani sziveskedtek. Köszönettel tartozom továbbá WINKLER LAJOS tanár úrnak is, azért a szivességéért, hogy kísérleteimhez chemiailag tiszta ligroint és toluolt kellő mennyiségben rendelkezésemre bocsátott.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 október 19.-én tartott üléséből.)

## AZ ALGEBRAI EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

PÓLYA GYÖRGY-TŐL.

Legyen az

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

polinomnak minden gyöke reális; legyen továbbá a

$$b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_{n+m}x^{n+m} \quad (m \geq 0)$$

polinomnak minden gyöke reális és azonfelül az első  $n + 1$  együtthatója:  $b_0, b_1, \dots, b_n$  pozitív. Akkor az

$$F(x, y) \equiv b_0f(y) + b_1xf'(y) + b_2x^2f''(y) + \dots + b_nx^nf^{(n)}(y) = 0 \quad (1)$$

$n$ -edfokú reális algebrai görbének  $n$  reális metszéspontja lesz a következő egyenesek bármelyikével:

$$sx - ty + u = 0,$$

a hol  $s \geq 0, t \geq 0, s + t > 0, u$  reális.

Bizvást mondhatjuk, hogy ez a tétel a gyök-reálitásra vonatkozó tételek egyik legáltalánosabbika. Valóban, sorra vizsgálva a következő egyeneseket

$$x = 1, \quad y = 0, \quad x = y,$$

egymásután nyerjük, mint tételünk speciális eseteit:

I. HERMITE és POULAIN<sup>1</sup> egy tételét, a mely szerint a

$$b_0f(y) + b_1f'(y) + b_2f''(y) + \dots + b_nf^{(n)}(y)$$

polinom minden gyöke reális. Továbbá

---

<sup>1</sup> Nouvelles Annales des Mathématiques, 1867, Volume 26. 21—33. o.

II. J. SCHUR-nak<sup>1</sup> egy tételét, a mely MALO-nak<sup>2</sup> egy szép eredményét továbbfejlesztve azt mondja ki, hogy a

$$b_0 f(0) + b_1 x f'(0) + b_2 x^2 f''(0) + \dots + b_n x^n f^{(n)}(0) = \\ = a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + 2! a_2 b_2 x^2 + \dots + n! a_n b_n x^n$$

polinom minden gyöke reális. Végül

III. azt a tényt, hogy a

$$b_0 f(x) + b_1 x f'(x) + b_2 x^2 f''(x) + \dots + b_n x^n f^{(n)}(x)$$

polinom minden gyöke reális; ez J. SCHUR-nak és a szerzőnek egy közös munkájában<sup>3</sup> foglaltatik.<sup>4</sup>

Viszont az I., II., III. alatt felsorolt speciális esetekből könnyen folyik az általános tétel, rögtön szembeötlő változó-cserék segítségével. Tételünk épen nem tesz egyebet, csak egy kijelentésbe és közös nézőpont alá foglalja össze az I., II., III. alatti tételeket.

Ismeretesnek teszem föl e helyen HERMITE I. alatti tételének egyszerű bizonyítását.<sup>5</sup> Célom az I. alatti tételből kiindulólag új bizonyítását nyújtani a mélyebben fekvő II. és III. alatti tételeknek.

Könnyen elvégezhető folytonossági megfontolások (I. J. SCHUR id. h.) alapján arra az esetre szorítkozhatunk, midőn az  $f(x)$  polinom  $n$  reális gyöke mind különböző. Tudvalevő (I. J. SCHUR i. h.), hogy ekkor bármely  $x = \text{const.}$  egyenesnek az (1) görbével való  $n$  reális metszéspontja is mind különböző.

Az (1) görbe tehát  $n$  ágból áll, a melyek között nincs kettő, a melynek közös pontja volna és a melyek mind  $x$ -nek folytonos, egyértelmű függvényeit ábrázolják, bármely (reális) értéket

<sup>1</sup> Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1914, Bd. 144, 75—88. o.

<sup>2</sup> Journal des Mathématiques spéciales, Quatrième serie, Tome IV, 7. o., 1895.

<sup>3</sup> Crelles Journal etc. 1914, Bd. 144, 89—113. o.

<sup>4</sup> Megjegyzem itt, hogy az I. alatti tételhez ugyan nem, de a II. és III. alatti tételekhez elengedhetetlenül szükséges a  $b_i$ -k előjelére vonatkozó föltevés, mint az a bizonyításból is ki fog tűnni.

<sup>5</sup> L. POULAIN, J. SCHUR i. h. és azonkívül NETTO: Vorlesungen über Algebra, Bd. I, 212. o.



is vegyen föl  $x$ . Azt mondom, hogy *mindegyik ágba*n  $y + \infty$ -től  $-\infty$ -ig változik, ha  $x - \infty$ -től  $+\infty$ -ig halad.

Valóban, meg lévén adva egy tetszőszerinti  $x$ , a mely  $x \leq 0$ ,  $t$ -nek  $n$ -számú reális értékét határozza meg hozzá a

$$F(x, tx) = 0$$

egyenlet. Következésképpen a

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{F(x, tx)}{x^n} = a_n (b_0 t^n + n b_1 t^{n-1} + n(n-1) b_2 t^{n-2} + \dots + n! b_n)$$

polinomnak minden gyöke reális, és — a  $b_i$ -k előjele miatt — *negatív*. Az  $\frac{y}{x}$  viszony tehát egy bizonyos *negatív* szám felé tart minden ágba külön-külön, ha  $x$  pozitív vagy negatív végtelenné lesz, és ez még sokkal több, mint a mennyit eredetileg állítottunk.

Elég az hozzá, hogy mind az  $n$  ágba  $y$  mint  $x$  függvénye  $+\infty$ -től  $-\infty$ -ig halad, a mint  $x$  változik, tehát mind az  $n$  ágat fogja metszeni valamely tetszőszerinti  $y = \text{const.}$  egyenes. Az (1) görbének tehát legalább  $n$  metszéspontja van egy tetszőszerinti  $y = \text{const.}$  egyenessel; mivelhogy  $n$ -edfokú, legfeljebb csak  $n$  metszéspontja lehet és így pontosan  $n$  metszéspontja van (a mi, melleleg megjegyezve, csak úgy lehet, hogy mind az  $n$  ág monoton). Speciálisan, az  $y = 0$  egyenest szemügyre véve látjuk, hogy az

$$F(x, 0) \equiv a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 x + \dots + n! a_n b_n x^n = 0$$

egyenletnek mind az  $n$  gyöke reális és különböző: ez J. SCHUR-nak II. alatti nevezetes tétele, a melyet be akartunk bizonyítani.

A III. alatti, vagy rögtön az általános tétel is fáradság nélkül következik az éppen kifejtett geometriai képből, a mint azt fölőseleg részleteznem.



# A MAGYAR ALFÖLD NÖVÉNYFÖLDRAJZI TAGOLÓDÁSA.

TUZSON JÁNOS lev. tagtól.

## A) Az Alföld növényformái.

Alföldünk flórája régi időktől fogva különös érdeklődés és feldolgozás tárgya. A továbbiakban idézett munkák és közlemények egyes részletekre vonatkozólag számos szerzőtől értékes adatokat tartalmaznak. Ezek a munkák a Bánság, a Duna-Tisza köze egyes részeinek, Békés megyének, Nagyvárad környékének és más hasonló részleteknek flóráját, vagy e flóra egyes ökológiai csoportjait, mint az Alföld homokpusztáinak, szíkeseinek, fás területeinek növényközvetkezteit ismertetik. Különösen KITABEL, HEUFFEL, SADLER, KERNER, BORBÁS és SIMONKAI, nemkülönb. MENYHÁRT, HOLLÓS, THAISS, BERNÁTSKY, PRODÁN, TÓKÉS, WAGNER, és mások vettek részt az Alföld flórájának felkutatásában (dolgozataik hátrább sorra kerülnek).

Az Alföld flóráját azonban feldolgozottak még korántsem mondhatjuk: több fontos részlet, mint pl. a Hortobágy és részben a Nyírség még ismertetésre vár, irodalmunkból néha még a közönségesebb növényfajaink elterjedése iránt sem tájékozódhatunk részletesebben, és olyan dolgozatunk sincs, mely az Alföld flórájának legalább főbb formációit és ezek alapján az Alföld növényföldrajzi tagolódását annak egész területére vonatkozólag összefoglalóan ismertetné.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> E tárgyra vonatkozik «Képek az Alföld növényvilágából». című, a Természettud. Közöny, 1914. 329. old. — és a Botanikai Közlemények 1914 évi 3. füzetében megjelent «A Magyar Alföld fontosabb növényformációi» című dolgozatom.

Az Alföld különböző részére mintegy 15 év óta számos botanikai kirándulást tettem: — nem említve Budapest közelebbi és távolabbi környékét — Szeged, Szabadka környékén három ízben, Kecskemét, Nagyvárad és Debreczen táján egy-egy ízben és a Deliblati homokpusztán két ízben tartózkodtam a jelzett célból. Az ekkor tett megfigyeléseim eredménye és részben az irodalom alapján foglaltam össze «Magyarország fejlődéstörténeti növényföldrajzának főbb vonásai» cz. dolgozatomban az Alföld flórájának fejlődéstörténeti jellemzését. Hogy a jelen alkalommal az Alföld flórájának viszonyairól részletesebben számolhatok be, azt egyrészt annak köszönhetem, hogy a Magyar Tudományos Akadémia lehetővé tette számomra, hogy 1912 nyarán a Délorosz puszták flóráját az Alföldével összehasonlítólág tanulmányozzam: másrészt pedig annak, hogy a Magyar Földrajzi Társaság részéről az Alföld tudományos kutatására alakult bizottság megbízott az Alföld virágos növényeinek és növényföldrajzának tanulmányozásával és ismertetésével. E megbízás kapcsán és az orosz pusztákon tett tapasztalataim alapján megkísérleltem tavaly az Alföld flórájának áttekintő felvételét. Leghelyesebben pedig úgy véltem elérni ezt a célt, ha a Déldunától kiindulva, most már egyfolytában utazom be az Alföldet, egészen föl a Nyírségig. Ezt az utamat Kiss JÓZSEF egyet. hallgató úr és az intézeti szolga kíséretében június 2.-an kezdtem meg és a Nyírségen június 28.-án fejeztem be. Azok az útvonalrészletek, a melyeket kocsin, vagy a Duna mentén és a Hortobágy folyón csónakon tettem meg, a következők: Dunadombtól északi irányban Leánykútig; Zombor—Bezdán; Mohács—Bezdán; Zombor—Regőcze—Vármegyehatár—Kiskúnhalas; Szeged—Csengele—Kistelek környéke; Horgos—Tisza-folyó—Kamaráserdő; Ujszász, a Zagyva és a Tápió környéke; Debreczen—Hortobágy; Nyírbátor—Bátorliget (az Ecsedi-Láp irányában).

Az alábbiakban első sorban azokról a megfigyeléseimről számolok be, a melyeket az Alföld fontosabb növényformációira vonatkozólag ezen az utamon tettem.

Az összes gyűjtött növényeket nem sorolom fel, csak annyit, a mennyit az egyes részek növényföldrajzi jellemzésére szükségesnek gondolok. Nemkülönben ki kell emelnem azt is, hogy

az egyes megnevezett alakok systematikai értékével sem foglalkozom itt. Jóllehet teljes tudatában vagyok annak, hogy a fajok gyanánt felsoroltakat sok esetben csak a varietas vagy forma rangja illeti meg. Ezek tisztázására csakis a végleges munka systematikai felsorolásában gondolhatok. Itt csupán arra törekedtem, hogy az illető növényt félreismerhetetlenül kifejezzem.

A beutazott részek fennebbi sorrendjét követve először a Delibláti homokpusztával foglalkozom.

Dunadombó tájáról a Duna medrétől kiindulva és egyenesen észak felé haladva, Leánykút irányában a következő formatiókkal találkoztam.

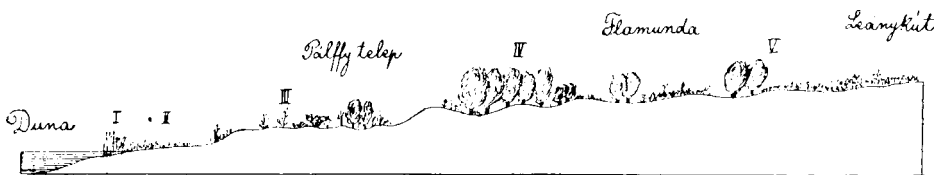
### I. A Duna szélének és mocsarainak formatiója.

A Duna sekélyvizű partján: (1. kép, I.)

*Phragmites communis*,  
*Glyceria aquatica*,  
*Scirpus lacustris*,  
*Nymphaea alba*.

Kivülebb az iszapos parton (1. kép, II.) a

*Sagittaria sagittifolia*,      *Heleocharis palustris*,  
*Butomus umbellatus*,      *Juncus compressus*,



1. kép. A Delibláti homokpuszta formatiói a Dunától Leánykútig: I—II. a Duna szélének és mocsarainak, — III. a kifújtt homoklapály, — IV. a ligetes homokbuczkák, — V. a füves homokbuczkák formatiója. A szövegben I—IV. formatiók.

*Roripa silvestris*,      *Galium palustre*,  
*Potentilla reptans*,      *Myosotis palustris*  
*P. anserina*,

fajok szövetkezete ment át lassankint a szárazabb homokpad növényzetébe. A Dunától kisebb-nagyobb távolságra levő mocsarak közül, a melyek az általam követett útvonaltól nyugatra valamikor szakadatlanul folytatódtak az Alibunári mocsarakba, már évekkel ezelőtt vizsgáltam volt meg egyet, nem messze Kevevárától. Ebben a következő fajok voltak a gyakoriabbak:

<i>Salvinia natans,</i>	<i>Hydrocharis morsus ranae,</i>
<i>Sparganium ramosum,</i>	<i>Nuphar luteum,</i>
<i>Potamogeton crispus,</i>	<i>Ceratophyllum demersum,</i>
<i>P. lucens,</i>	<i>Myriophyllum spicatum,</i>
<i>P. pectinatus,</i>	<i>Oenanthe aquatica,</i>
<i>Stratiotes aloides,</i>	<i>Senecio paludosus.</i>

Helyenként a süppedős, nyirkos agyagon a *Marsilia quadri-  
folia* tovakúszó telepei s a *Heleocharis acicularis* finom szá-  
lacskaí tüntek fel.

## II. A kifujt homoklapály formatiója. (1. kép, II—III.)

Visszatérve a Deliblati homokpuszta déli széléhez, azt találjuk, hogy a Duna áradásos területéhez  $1\frac{1}{2}$ —2 m magas homokpadka csatlakozik, mely egyúttal alja annak a homoktengernek, melyet a szél észak felé hordott el, hogy belőle a Deliblati homokpuszta buczkáit építse. Ez a homoktalp igen termékenyen, kötött homoktalaj. A Duna felé lejtő homlokán (1. kép, II.)

*Bromus sterilis,*  
*Euphorbia Gerardiana* és  
*Carduus nutans*

uralkodik a formatióban. Beljebb (1. kép, III.) ugyanezek között a gyér vegetatiót helyenkint az *Astragalus onobrychis* és az *A. dasyanthus* csoportjai élénkítik. Itt-ott jobbtalajú mélyedések sem hiányoznak, melyekben

*Carex flacca,*  
*Orchis coriophora* és  
*Leontodon hispidus* virított.

Feljebb a hullámos homoklapályon cserjés jelentkezik. A rossz talaj és a Kossova szél ezeken a részeken a *Populus alba*-t és a *Juniperus communis*-t földre terülő, apró cserjékké alakítja. Zeg-zugos ágazatukkal alig emelkednek 1—1·5 m-nyire a talaj fölé. A cserjecsoportok között a jobbtalajú helyek füvesek és díszüket ismét csak az *Astragalus dasyanthus* és az *A. onobrychis* festői csoportjai alkotják, melyek közé *Salvia pratensis*, *S. nemorosa*, néhol *Gymnadenia conopea* vegyül, meg a *Chrysopogon gryllus* csoportjai. Máshol — és ez a gyakoribb — a puszta homoktalaj látszik ki. Az ilyen homokfenéken már gyérebb a borókás, fütakarója is szegényes. Jellemző fajok itt:

*Equisetum ramosissimum*,  
*Alyssum tortuosum*,  
*Euphorbia Gerardiana*,  
*Fumana procumbens* és  
*Hieracium Bauhini*.

Helyenként nagy foltokat foglal el a *Salix rosmarinifolia*, közötté *Calamagrostis epigeios*, *Erysimum canescens*, *Cytisus nigricans*, *Verbascum lychnitis* virit; néhol pedig a nyirkosabb helyeken középnagy fákká nőtt *Populus alba* és *Alnus glutinosa*-csoportok tűnnek fel, alattuk pedig *Phragmites communis*.

Feljebb, a Pálffy-teleptől északra, a hol a futóhomok-torlaszok kezdődnek, hajdan valóságos homoksivatag volt. Most ezt nagyrészt ültetett ákáczosok borítják, csak itt-ott, egy-egy széljárta zúgban kavargó még a futóhomok, kopár területet alkotva. Ezekről a legelső, széltől leginkább bolygatott homoktorlaszoktól északra egészen elűtő formatio következik.

### III. A ligetes homokbuczkák formációja. (1. kép, IV.)

Itt a magas dombokká és völgyekké torlaszolt homokot nagyrészt a természet maga kötötte meg. Rajta különösen a *Tilia tomentosa* és helyenkint a *Quercus pedunculata* festői csoportjai láthatók, nagy részén pedig, a nagyobb facsoportok között *Cotinus coggygria* és *Juniperus communis*-től jellemzett

sűrű cserjések vannak. E fajok, különösen a mélyedésekben, más fák<sup>1</sup> társaságában áttörhetetlen sűrűséget alkotnak.

A fák és cserjék között és a tisztásokon a pusztai meg erdei növényeknek igen érdekes keverékét találjuk. A kötöttebb, füves talajon :

<i>Muscari comosum,</i>	<i>Cytisus nigricans,</i>
<i>Iris variegata,</i>	<i>C. Heuffelii,</i>
<i>Cephalanthera rubra,</i>	<i>C. hirsutus,</i>
<i>Comandra elegans,</i>	<i>Knautia arvensis</i>

és a Delibláti homokpuszta egyik legérdekesebb növénye, az *Artemisia latifolia*.

A kevésbé kötött, homokos helyeken :

<i>Festuca vaginata,</i>	<i>Erysimum canescens,</i>
<i>Anthericum ramosum,</i>	<i>Alyssum tortuosum,</i>
<i>Alsine glomerata</i>	<i>Linum glabrescens,</i>
<i>Gypsophila paniculata,</i>	<i>L. perenne,</i>
<i>Dianthus Pontederæ,</i>	<i>Euphorbia Gerardiana,</i>

(mely utóbbit a homokpusztának a löszszel való érintkezése táján az *Euphorbia angustifrons* váltja fel, hogy azután, kijebb a tiszta löszben az *Euphorbia pannonica* lépjen fel),<sup>2</sup>

<i>Sedum Sartorianum</i>	<i>Asperula cynanchica,</i>
<i>Helianthemum nummularium,</i>	<i>Campanula sibirica,</i>
<i>Peucedanum arenarium,</i>	<i>Echinops ritro,</i>
<i>Onosma arenarium,</i>	<i>Jurinea mollis,</i>
<i>Thymus Marschallianus,</i>	<i>Tragopogon floccosus</i>

és más pusztai fajok. A ritkás növénycsoportokban pedig feltűnően emelkednek ki helyenkint a homokból a sárga *Orobanche ritro* vaskos virágzatai. Gyakori itt az *Anchusa ochroleuca* is, melynek fehér, rózsaszín, lilás és kék virágú alakjai szeszélyesen

<sup>1</sup> L. TUZSON J. Magyarország fejlődéstörténeti növényföldrajzának főbb vonásai. Math. és Természettud. Ért. XXIX. 1911. 580. old.

<sup>2</sup> Erre vonatkozólag l. BERNÁTSKY J.: «Egy ritka *Euphorbia*-fajunkról», «Növénytani közlem.» 1908, 116. old.



váltakoznak. A mélyebb homokteknők bozótjában *Aristolochia clematitis*, *Thalictrum aquilegifolium*, *Rubus caesius* és *Hedera helix* alkot a pusztai növényekétől elütő szövetkezetet. A fák alatt itt-ott a *Fritillaria tenella* termései meredeznek, a fák koronájára pedig helyenkint a borszőlőnek elvadult vagy talán tőalakja: a *Vitis silvestris* kúszik.

#### IV. A füves homokbuczkák formációja. (1. kép, V.)

Észak felé tovább haladva, Flamunda táján észrevétlenül egy más formációba megyünk át. Tulajdonképen az előbbivel együtt oly változatos, hogy éles határt és feltűnő különbséget alig találunk köztük. Ha ennek ellenére mégis megkülönböztetem ezt a formációt, azért történik, mert hiányzik benne a *Juniperus communis*; erdős, bozotos részlete kevesebb és a nagy fákból álló ligetek hiányzanak benne, ellenben gyakoriak rajta a nagy füves mezők. Utóbbiaknak feltűnőbb növényfaja az *Anemone pulsatilla*, *Rindera umbellata*, *Paeonia tenuifolia*, *P. peregrina* és helyenkint nagy területeket lep el az *Anthyllis polyphylla*. *Festuca vaginata*-s és *Astragalus dayanthus*-os homokbuczkái hasonlóak az előbbiéhez. A füves mezőkön helyenkint nagy foltokban díszlik a *Verbascum lychnitis*, *Carduus nutans*, ezeken kívül pedig a *Geranium sanguineum*, *Dictamnus fraxineus*, *Orlaya grandiflora*, *Veronica Jacquini*, *Asperula glauca*, *Campanula persicifolia*, *C. rapunculus*, *Chrysanthemum corymbosum*, *Inula hirta* és más fajok virágai tűntek fel.

Junius 11.-én utaztam a Bánság pusztáiról Zomborba, hogy a bács megyei fontosabb formációkat tanulmányozzam. Ezekben Zombor környéke — a mint PRODÁN közléséből<sup>1</sup> is kivehető — rendkívül gazdag. Nyugat felől a Dunának parti és szigeti növényformációi érintkeznek a fekete lösz-terület tölgyes erdőivel. Ezeket itt-ott szikes tisztások szaggatják meg. Szikesek megismétlődnek bőségesen a megye más részeiben is, még pedig részben szikes tavak körül, részben pedig száraz területeken.

<sup>1</sup> PRODÁN Gy.: Adatok Bács-Bodrog megye és környékének flórájához, Botan. Közl. 1910, 149. old.

A Duna felől haladva ilyen szíkesek flóráját Körtés táján vettem fel, majd Regőczen át Vármegyehatár felé irányult utam, a hol már a Duna-Tisza közének homokbuczkás területeit értem el. — Az áttanulmányozott formatiókat tünteti fel a 2. rajz, a melyen azok egy a Dunára merőlegesen képzelt vonalra vetítve vannak feltüntetve.

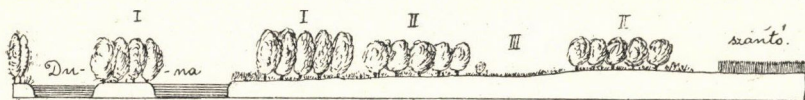
A rajzon legelől a Duna medrének, szigetének és partjának metszete van feltüntetve. Ezek flóráját — Mohácstól Bezdánig PRODÁN Gy. tanár úr társaságában csónakon téve meg az utat — több szigeten és parti részleten figyeltem meg, a minek eredményeit röviden a következőkben foglalhatom össze.

### V. A nyirkos homokszigetek és a part formatiója

(2. kép, I.)

egymással teljesen egyező és így összefoglalható. Éles ellentétben áll a Duna «száraz homokszigeteinek és partjának» formatiójával, a melyről a továbbiakban (1. 23. old.) van szó.

Mohács közelében először az ú. n. «Czigánysziget»-en kötöttünk ki. E sziget nyirkos homokján ott, a hol füzes nem



2. kép. A dunamenti erdők formatiói Bezdán táján: I. a nyirkos homokszigetek és part, — II. a tölgyerdők, — III. az erdei szíkesek formatiója.

A szövegben V—VII. formatiók.

árnyékolja be azt, legtömegesebben *Roripa* fajok voltak; még pedig *Roripa amphibia*, *R. silvestris* és *R. palustris*. Ezeken kívül a tisztás helyeken: *Typhoides arundinacea*, *Poa nemoralis*, *Bromus commutatus*, *Carex stricta*, *Rumex conglomeratus*, *Ranunculus sceleratus*, *Potentilla supina*, *Veronica anagallis*, *Plantago maxima*, *Gnaphalium uliginosum*, *Bidens tripartita*.

Ezt a szövetkezetet itt-ott a part mentén *Salix amygdalina*-csoportok váltják fel, beljebb pedig sűrű ligetet al-

kotva a *Salix alba* uralkodik. A kevésbbé beárnyékolt helyeken a *Valeriana officinalis* és *Senecio paludosus* hatalmas példányai emelkednek ki a bozótból. Hasonló szövetkezeteket figyeltem meg lejjebb, a Duna jobbpartján a Bóki révház környékén. A partot itt egészen a víz széléig erdő borítja, a mely a *Salix alba*, *Populus alba*, *P. nigra*, *Quercus pedunculata*, *Ulmus glabra* és *U. laevis* fajoknak a nyirkos, iszapos homoktalajban feltünően nagyra növő példányaiból áll. Az erdő alján gyakori a *Carex riparia*, *C. remota*, *Evonymus verrucosa*, *Scutellaria hastifolia*, egy iszapos mélyedésben pedig tömegesen növe, érdekes csoportokat alkot a *Hippuris vulgaris*.

Lejjebb, a balparton, a karapancsi erdőnél kötöttünk ki. A part omlós homokját helyenkint a *Triticum repens* köti meg. A parton az erdő előtt bozótos szegély vonul, amelyben tömegesen nő az *Euphorbia palustris* és *Thalictrum flavum*. Az erdőt magát ugyanazok a fa-fajok alkotják, a melyeket fennebb, a bóki révház környékéről említettem: alját eléggé sűrűn növi be a *Rubus caesius*, *Rumex conglomeratus* és *Lythrum salicaria*. Itt találtuk meg először a Duna délibb partvidékeinek érdekes ritkaságát, a *Crataegus nigra*-t.

Tovább haladva a Duna jobb partján, a Digánzsi erdőnél kötöttünk ki. A főleg kocsányos tölgyből (*Quercus pedunculata*) és fehérlevelű fűzből (*Salix alba*) álló erdőben szintén megtaláltuk a *Crataegus nigra*-t. Gyakori volt a:

<i>Typhoides arundinacea,</i>	<i>Poa nemoralis,</i>
<i>Deschampsia caespitosa,</i>	<i>Carex remota,</i>
<i>Phragmites communis,</i>	<i>Aristolochia clematitis,</i>

a már említett három

<i>Roripa,</i>	<i>Brunella vulgaris;</i>
----------------	---------------------------

az erdőhöz csatlakozó kaszálón pedig

<i>Equisetum ramosissimum,</i>	<i>Scirpus triquetar,</i>
<i>Phragmites communis,</i>	<i>Sc. radicans,</i>
<i>Glyceria aquatica,</i>	<i>Heleocharis palustris,</i>
<i>Cyperus fuscus,</i>	<i>Stellaria aquatica</i>

volt meg nagyobb mennyiségben.

## VI. A tölgyerdők formatiója (2. kép, II.)

Bezdán irányában a parti erdőkhöz fokozatosan csatlakozik, néhol azonban rétek, szántóföldek választják el az utóbbi-tól. A bezdáni tölgyes erdőben

<i>Quercus pedunculata,</i>	<i>U. glabra,</i>
<i>Q. cerris,</i>	<i>Acer tataricum,</i>
<i>Q. lanuginosa,</i>	<i>Pirus piraster,</i>
<i>Ulmus laevis,</i>	<i>P. malus</i>

fajok estek utunkba, a melyek alatt *Corylus avellana*, *Evonymus verrucosa*, *Cornus sanguinea*, *Sambucus nigra* és *Sambucus ebulus* fajokból álló eserjés van; az erdő alján, a tisztásokon és az erdőszélen pedig gyakori a

<i>Dactylis glomerata,</i>	<i>Hypericum hirsutum,</i>
<i>Poa nemoralis,</i>	<i>H. perforatum,</i>
<i>Festuca rupicola,</i>	<i>Lysimachia nummularia,</i>
<i>Rumex crispus,</i>	<i>Stachys silvestris,</i>
<i>Lychnis flos cuculi,</i>	<i>Verbascum blattaria,</i>
<i>L. coronaria,</i>	<i>Scrophularia nodosa,</i>
<i>Turritis glabra,</i>	<i>Campanula persicifolia,</i>
<i>Geum urbanum,</i>	<i>Bellis perennis,</i>
<i>Astragalus glycyphyllus,</i>	<i>Lapsana communis.</i>

## VII. Az erdei szikesek formatiója (2. kép, III.).

A bezdáni tölgyes egy helyen szikes tisztást zár körül. Az erdő szélén gyakori a *Q. lanuginosa* és itt-ott legközelebb férkőzik a jellemző sziki formatióhoz a vadalmafa. Az erdőszélen, a szikes mellett a

<i>Trifolium arvense,</i>
<i>Peucedanum officinale,</i>
<i>Plantago lanceolata,</i>
<i>Aster canus</i>

tűnt fel; magán a szikes tisztáson pedig

<i>Atropis distans,</i>	<i>Trifolium laevigatum,</i>
<i>Bromus hordeaceus,</i>	<i>Tr. striatum,</i>
<i>Lolium perenne,</i>	<i>Veronica acynifolia,</i>
<i>Hordeum maritimum,</i>	<i>Plantago maritima,</i>
<i>Allium vineale,</i>	<i>Aster tripolium,</i>
<i>Ranunculus pedatus,</i>	<i>Hieracium Bauhini,</i>
<i>Crassula caespitosa,</i>	<i>Scorzonera Jacquiniiana</i>

a jellemzőbb fajok, a melyek, valamint még más a nyirkos és mérsékelt szikes talajt elviselő, eléggé sűrű rétet alkotnak. Feltűnt itt a *Crypsis*, *Heleochloa*, *Statice* és *Salicornia* hiánya, a melyek azonban a *Salicornia* kivételével más, bácsmegyei szikeseken nagyobb mennyiségben is megvannak. A *Salicornia* úgy látszik hiányzik a Zombor vidéki szikesekről. Ezt a növényt PRODÁN<sup>1</sup> sem említi Bácsmegyéből.

A Dunától távolodva a tölgyerdőkre fekete lősz talaju területek következnek, a melyek kultúra alatt állanak, csupán az agyagos vagy finoman iszapos szikterületek talaja maradt érintetlenül, illetőleg ezeket nem szántják, hanem csak kaszálják vagy legeltetik.

### VIII. Az iszapos szikesek formatiója. (3. kép.)

Ilyen területet Zombortól északra, Körtés mellett vizsgáltam meg, a melyen négyféle növényoszóvetkezettel, négy emeletet lehet megkülönböztetni (3. kép). Legmagasabban — a következőből mintegy 20—40 cm-nyire, — emelkedik ki (3. kép, IV.)

1. a szikpadka<sup>2</sup> assotiatiója. Ebben eléggé kevert, nem tisztán halophyta növényzet van, a melynek fajai közül egyik sem mondható uralkodónak. Ilyenek:

<sup>1</sup> PRODÁN Gy. Botan. Közl. 1910. 153. old.

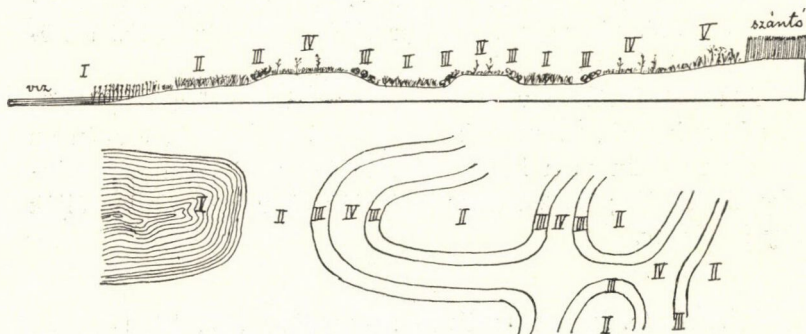
<sup>2</sup> Ezt a kifejezést, valamint a továbbiakban leírt «szikfok» elnevezést is a hortobágyi pásztornép megfelelő elnevezését követve használom; különben részben mások is használták már hasonlóan, növényföldrajzi kifejezés gyanánt.

*Festuca pseudovina.*  
*Bromus hordeaceus,*  
*Camphorosma ovatum,*  
*Lepidium perfoliatum,*

*Melilotus officinalis,*  
*Trifolium minus,*  
*Alectrolophus major,*  
*Carduus hamulosus.*

Ez a szövetkezet a szikes szélén fokozatosan megy át a valamivel magasabb fekvésű szántóföldekbe, melyek felé a *Thalictrum angustissimum*, *Ajuga genevensis* és más nem sós réti növények hovatovább gyakoribbak.

2. A szikpadka lejtőjének assotiatiója. (3. kép III.) A szikpadka rövid lejtőjén (3. kép II.) lényegesen más a flóra, hasonló



3. kép. Iszapos szikes puszta, Körtés mellett, Bács-Bodrog megyében: I. a szikes tó, — II. a szikes lapos, — III. a szikpadka lejtőjének, — IV. a szikpadka assotiatiója; fent metszetben, lent alapnézetben. A szövegben a VIII. formatio 4—1 assotiatiója.

a továbbiakban ismertetett homokpusztai szikesnek vakszik assotiatiójáéhoz (18. old.). Itt a talaj igen kemény és helyenként a kivirágzott sótól fehér. Rajta a *Camphorosma ovatum* egyes példányai mellett tömegesen nő a *Lepidium crassifolium*. A padkának és egyszersmint lejtőjének szeszélyes kanyarodásait a *Lepidiumos* öv pontosan követi, a mely a *Lepidium viritasa-*kor, mint a környezet sötétebb színű növénytakarójától élesen elütő, ide-oda kanyargó hófehér sáv ötlük szemünkbe.

3. A szikes lapos assotiatiója. (3. kép II.) A következő emelet lefelé: a szikes lapos (3. kép III.), a mely a fentiek szerint

alig fekszik valamivel mélyebben a szikpadkánál, de talaja már vizenyős, nyirkos. Itt nagy területeket borít majdnem tisztán az *Atropis limosa*, melyet helyenként az *Agrostis alba* vált fel és e pázsit-fajok között gyakori a *Heleocharis uniglumis* is.

4. A szikes tó assotiatiója. (3. kép I.) A szikes legmélyebb részét sekély tó foglalja el, melynek szegélyén és szennyes vizében, a szélen, *Scirpus maritimus* nő tömegesen.

A körtési szikesen nem láttam a *Statice Gmelini*, *Salicornia herbacea*, *Heleochoa alopecuroides*, *H. schoenoides*, *Crypsis aculeata*, *Plantago maritima*, *Artemisia monogyna*, *Chenopodium glaucum*, *Atriplex tataricum* halophyta fajokat. Ezek PRODÁN idézett dolgozatából kivehetőleg, a hol csupán a *Salicornia* és a *Chenopodium* nincs említve, a környéken nem hiányzanak, de úgy látszik ritkábbak, mint az előbb említett fajok.

Junius 15.-én érkeztünk Regőczen át a vármegyehatári vasuti őrház környékére, a mely már a Duna-Tisza közének homokterületére esik. A buczkás, helyenkint futóhomokos terület némely mélyebb részét erdő borítja.

### IX. A homokpusztai fehérnyárfa-erdő formatiója.

Maga az erdő, vagy helyesebben liget, főleg *Populus alba* és ezenkívül *P. nigra* fák hatalmas példányaiból áll. A tisztásoktól megszaggatott erdő alján gyakori: a

<i>Festuca vaginata</i> ,	<i>Astragalus austriacus</i> ,
<i>Epipactis latifolia</i> ,	<i>A. glycyphyllus</i> ,
<i>E. rubiginosa</i> ,	<i>A. onobrychis</i> ,
<i>Cephalanthera rubra</i> ,	<i>Hypericum perforatum</i> ,
<i>Potentilla arenaria</i> ,	<i>Lithospermum arvense</i> ,
<i>Genista tinctoria</i> ,	<i>Stachys recta</i> ,
<i>Anthyllis polyphylla</i> ,	<i>Tragopogon floccosus</i> .

### X. A fátlan homokbuczák formatiója.

Az előbbivel váltakozva terül el a Duna-Tisza közének homokbuczás, hullámos pusztáin. A leírt nyárfaerdők a mélyebb

fekvésű részleteket foglalják el, a fátlan homokbuczkák a magasabb fekvésűeket. Utóbbiakon az egészen laza, a futóhomokos, a félig kötött és a füves részletek átmenetesen váltakoznak. A kötöttebb, füves helyeken a következő növények gyakoriak:

<i>Equisetum ramosissimum,</i>	<i>Melandryum album,</i>
<i>Stipa pennata,</i>	<i>Dianthus Pontederæ,</i>
<i>St. capillata,</i>	<i>Potentilla arenaria,</i>
<i>Calamagrostis epigeios,</i>	<i>Astragalus virgatus,</i>
<i>Bromus sterilis,</i>	<i>Helianthemum canum,</i>
<i>Br. squarrosus,</i>	<i>Fumana procumbens,</i>
<i>Secale silvestre,</i>	<i>Alkanna tinctoria,</i>
<i>Scirpus holoschoenus,</i>	<i>Myosotis lappula,</i>
<i>Iris arenaria,</i>	<i>Calamintha acynos,</i>
<i>Salix rosmarinifolia,</i>	<i>Teucrium chamaedris,</i>
<i>Kochia arenaria,</i>	<i>Scabiosa ochroleuca,</i>
<i>Silene otites,</i>	<i>Helychrysum arenarium.</i>

*Populus alba* és *P. nigra* csoportok itt-amott e «fátlan» pusztai részeken is ismétlődnek. Az előbbi inkább a mélyedésekben nő, az utóbbit gyakran láttam a buczkákön is, a hol a szél gyökereiről a homokot néhol el is hordta, és ezek ilyen helyeken hosszú kötelek módjára kigyóznak a homok felületén, hogy helyenként belőlük egész sora sarjadzzék a fiatal csemetéeskéknek. Néhol az elhordott homokból a szél finom fodros torlaszokat épít, melyek vakító felületén csupán egy-két tő *Festuca vaginata* él. Ecetszerű gyökérzetének barna szálai az ilyen helyeken hosszúra megnyulva hálózák be és markolják össze a homokot, sajátságos kiálló kupaczkokat alkotva a folyton változó, vándorló felületű homokban.

A vármegyehatári homokpuszta florisztikailag csatlakozik a Duna-Tisza közének többi homokpusztájához, ámbar feltűnő a terület szegénysége *Cytisus*okban; nem láttam továbbá a *Dianthus polymorphus*-t, *Vinca herbacea*-t és *Jurinea mollis*-t; pedig reggeltől estig e homokpuszta jókora részét bejártam.

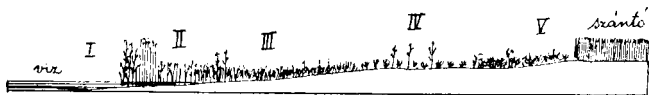


### XI. A pusztai kevert erdő formatiója.

Vármegyehatártól Kiskunhalas felé haladva még a Fehér-tó előtt erdő terül el, a mely sem a Duna homokos partjának ligeteivel (V. formatio), sem pedig az ettől beljebb fekvő, üde duna menti tölgyesekkel (VI. formatio) nem egyezik, de elűt a homokpuszták nyáras erdeitől (X. formatio) is. Sok benne az ültetett részlet, de nagyrésze magától odatelepedett őshonos fajokból áll, ilyen: a *Salix cinerea*, *Populus nigra*, *P. tremula*, *P. alba* és sok benne az utóbbi kettő kereszteződéséből keletkezett *P. canescens*, továbbá *Ulmus pedunculata*, *Quercus pedunculata*, *Berberis vulgaris*, *Ligustrum vulgare*; közöttük ültetett *Celtis australis*, a mely azonban magától is szaporodik. A fák és cserjék alatt és az apró tisztásokon a laza, nyirkos homokban buja növésű aljnövényzet, ú. m.: *Muscari comosum*, *Iris variegata*, *Urtica dioica*, *Chelidonium majus*, *Anthriscus trichosperma*, *Galium aparine*, *Salvia austriaca*.

### XII. A szikes rét formatiója Kiskunhalas mellett.

A Fehér-tó környéke kisebb-nagyobb terjedelemben szikes. A homokos talaju szántókhoz a tó felé szikes rétek csatlakoznak, a melyekben itt-ott vizes mélyedések és kiemelkedőbb szá-



4. kép. A szikes rét formatiója Kiskunhalas mellett: I. a szikes tó formatiója, — II. a szikes lapos, — III. a nyirkosabb szikes rét, — IV. a szárazabb szikes rét, — V. szikmentes homoktalajú rét, melyhez szántóföld csatlakozik. A szövegben a XIII. és XII. formatio.

raz szikesek vannak. Ezt a változatos formatiót sematikusan mutatja a 4. kép. A szántóföldekhez csatlakozó homokos talaju magasabb fekvésű, szikmentes réten (4. kép V.) gyakori a

*Festuca vaginata*,

*L. catharticum*,

*Linum perenne*,

*Polygala vulgaris*,

*Knautia arvensis*; nyirkosabb helyein a *Rumex crispus*. Ehhez a részhez átmenetesen csatlakozik a szikes rét szárazabb része (4. kép IV.), a mely sokban emlékeztet a körtési szikpadkához (VIII. formatio), de annál üdébb és változatosabb. Rajta tömeges a *Festuca pseudovina*, továbbá elszórtan itt-ott *Lepidium crassifolium*, *Melilotus officinalis*, *Lotus siliquosus*, *L. tenuifolius*, *Alectrolophus major*, *Scorzonera Jacquini*. A nyirkosabb részek felé (4. kép III.) a növénytakaró is üdébb, több a *Lotus siliquosus*, itt-ott *Aster tripolium*, *Scorzonera parviflora*, *Atropis distans* és *Agrostis alba*, hogy lassanként a mélyebb részeken különösen a két utóbbi válják uralkodóvá.

### XIII. A szikes tó formatiója.

Az előbbi nyirkos rét növényeihez a vízparton (4. kép II.) *Cirsium brachycephalum* és *Typhoides arundinacea* vegyül, hogy — a rét növényei elmaradozva — a víz szélén (4. kép I.) *Scirpus maritimus*, *Sc. lacustris* és *Phragmites communis* vegye át az uralmat. A Fehér-tó szikes vizében nem sok növény van: a világosszürke, kemény fenék a sekély helyeken sincs növényekkel borítva, csupán itt-ott takarja el azt *Chara crinita*-gyep, vagy a *Potamogeton interruptus* alkotta hinár.

### XIV. A nyárfaligetes homokbuczkák formatiója.

Szeged környékén és általában a Duna-Tisza közén gyakori formatio, a mely sokban emlékeztet a Vármegyehatár tájáról leírt fehérynárfa-erdő formatiójára. Ettől csupán abban különbözik, hogy míg az utóbbi nagy fákból álló, sűrű erdő a homokbuczkák mélyedéseiben, addig a nyárfaligetes homokbuczkák formatióját kisebb ligetecskék jellemzik, a melyek főleg közép-nagy és apróbb fehérynárfákból állanak; alattuk és a közöttük levő füves homokbuczkákon pedig tipikus pusztai növényzet van. Ez a formatio mintegy átmenet az említett fehérynárfa-erdő formatiójától a továbbiakban leírandó cserjés homokpuszták formatiójához (26. old. XX.). Mezőgazdasági kultúrára az erdős formatio területe a legalkalmasabb, még a ligetes homokbuczkák

is nagyrészt megfelelnek, azonban a cserjés homokpuszták sem a mezőgazdaság, sem a kertészet céljaira nem alkalmasak. A nyárfaligetes formatio a pusztán igen szép tájképet nyújt; bármerre tekintünk, a láthatárt fehérnyárfa-ligetek takarják, a melyek szélein az apróbb csemetékből álló cserjés észrevétlenül megy át a buczkák füves mezőibe. Az utóbbiakkal itt-ott szabadon álló homokos részletek is váltakoznak.

Ezt a formatiót Csengele környékén főleg a következő fajok alkotják:

<i>Equisetum ramosissimum,</i>	<i>Thalictrum minus,</i>
<i>Stipa pennata,</i>	<i>Thalictrum angustissimum,</i>
<i>St. capillata,</i>	<i>Anthyllis polyphylla,</i>
<i>Calamagrostis epigeios,</i>	<i>Astragalus austriacus,</i>
<i>Apera spica venti,</i>	<i>A. virgatus,</i>
<i>Festuca vaginata,</i>	<i>Viola arvensis,</i>
<i>Bromus squarrosus,</i>	<i>Oenothera biennis,</i>
<i>Secale silvestre,</i>	<i>Anchusa officinalis,</i>
<i>Scirpus holoschoenus,</i>	<i>Onosma avenarium,</i>
<i>Carex glauca,</i>	<i>Thymus collinus;</i>
<i>Salix rosmarinifolia,</i>	<i>Verbascum lychnitis,</i>
<i>Populus alba,</i>	<i>Linaria genistifolia,</i>
<i>F. nigra,</i>	<i>Knautia arvensis,</i>
<i>Silene conica,</i>	<i>Scabiosa ochroleuca,</i>
<i>Silene otites,</i>	<i>Campanula sibirica,</i>
<i>Gypsophila paniculata,</i>	<i>Achillea ochroleuca,</i>
<i>Dianthus Pontederæ,</i>	<i>Centaurea Sadleriana,</i>
<i>D. serotinus</i> (még nem virít),	<i>Tragopogon floccosus.</i>

Feltűnő volt itt a *Cytisusok* és a *Jurinea mollis* hiánya, a melyek az ugyanilyen formatióban máshol a Duna-Tisza közén többnyire megvannak.

A hol a ligetes homokbuczkák mélyebb lapálylá simulnak, ott szikesek jelentkeznek s a mélyedésekben szikes tócsák, tavak. A kevésbé szikes vizű tavak, mocsarak flórája dúsabb, változatosabb: ilyen pl. a Kamaráserdői tó, a királyhalmi pusztán a Bogárzó, a Négyökrű tó stb. Ezek, valamint környezetük flórája más összetételű, mint az igazi szikes tavaké. Az utób-

biak közül legnagyobb e tájon a Fehértó, de több apróbb esett utamba, pl. Kistelek környékén, Horgos közvetlen közelében stb. E kétféle formatio közül az utóbbiról szölok először: a horgosi szikesről; és később (XVIII alatt) térünk rá az előbbire.

### XV. A homokpusztai szikesek formatiója (5. kép).

Horgos mellett következőleg tagolódik.

1. A szikes padka associatiója (5. kép, I.) részben tipikus sziki növényekből áll, mint némileg a *Festuca pseudovina*,



5. kép. Homokpusztai szikes Horgos mellett: I. szikpadka, — II. ennek lejtője, — III. vakszik, — IV. a tócsa meredek lejtős partja, — V. a szikes tócsa. A IV. és a középső III. közt kiszáradó félben levő szikes tócsafénék, melyben egy nagyra nőtt *Atropis limosa* csokor áll. A szövegben a XV. formatio 1—3 associatiója.

továbbá *Camphorosma ovatum*, *Statice Gmelini*, *Plantago maritima*, *Scorzonera Jacquiniiana*; részben pedig a mérsékelt szikes homoktalajon is növé

<i>Allium vineale</i> ,	<i>M. minima</i> ,
<i>Iris pumila</i> ,	<i>Seseli varium</i> ,
<i>Lepidium perfoliatum</i> ,	<i>Salvia nemorosa</i> ,
<i>Potentilla arenaria</i> ,	<i>Alectrolophus major</i> ,
<i>Medicago lupulina</i> ,	<i>Achillea collina</i> növik be.

A hol azonban a padka kissé süllyed, a vakító fehér szik tűnik elő, a melyet már igazi sziki növények és ezek is csak gyéren borítanak.

2. A vakszik associatiója (5. kép, III.). Ennek legkopárabb részein a *Lepidium crassifolium* nő magában; itt-ott pedig az *Atropis distans*, *Camphorosma ovatum*, *Artemisia monogyna* és *Scorzonera Jacquiniiana* csatlakozik hozzá; a csenevész növény-csoportocskák mellett pedig főleg a fehér, kopár sziklatalaj szabja meg az associatio jellemző tájképét.

A Horgos mellett megvizsgált szikesen a vakszik associatiója hirtelenül lejtő parttal megy át a szikes tócsába, s így ennek tudható be, hogy a bácsmegyei Körtés mellől az előbb leírt szikes (12. oldal) «lapos» associatiója itt nem kiterjedt mező, hanem csak keskeny koszorú alakjában (5. kép, IV.) övezi a tócsát.

Általában úgy látszik, hogy az Alföld szikeseinek flórája mindig a tárgyalt háromféle associatio figyelembevételével ítélendő meg. Ha magasság szerint teljes tagoltságú a szikes, akkor: a magasabb szikpadka, alább a vakszik és legmélyebben a szikes lapos associatióját mindig jól meg lehet ugyanazon a szikesen is különböztetni. Ha azonban a magassági tagoltság nem teljes, akkor hiányzik majd az egyike, majd a másika az associatióknak. Ezenkívül pedig a «lapos» átmehet «szikes tó»-ba és másfelől a mérsékeltbben szikes padka a gyengén szikes, dús növényzetű szikes réttbe.

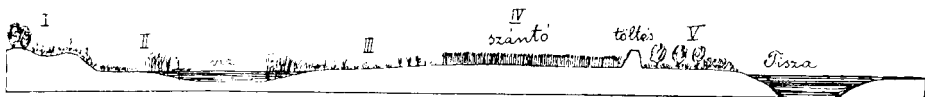
3. A szikes tócsa associatiója. A lejtős part flórája (5. kép. IV.) a szikes laposok növényfajaiból, ú. m. *Agrostis alba*, *Plantago maritima*, *Atropis limosa* és más idetartozókból tevődik össze. Ezekkel keveredik a *Scirpus maritimus* is, mely a tócsába (5. kép, V.) behatolva, a mélyebb részeken a *Scirpus lacustris*-hoz csatlakozik és lényeges tagja a szikes tó associatiójának. A tócsa feneke itt nem kemény talaju, mint a kiskunhalasi Fehértóról említettük, hanem süppedékes, homokos iszap. Vize pedig nem oly tiszta, mint azé, hanem moszatoktól van átfonva, a melyek tömegét a kiszáradó víz, leapadva, szennyes, fehéres rongyok módjára aggatja a *Scirpusok* szárára.

## XVI. A füves homokbuczkák formatiója a Tisza mellett.

Ha Horgostól a Tisza folyó felé haladunk (6. kép), utunkba esik a «Tévedő» erdő, a mely legnagyobbrészt ültetett. A tisztásokon és különösen a Tisza felé eső szélén a homokbuczkákat nagyrészt olyan pusztai növényzet növi be, a milyen a Duna-Tisza köze homokpusztáit jellemzi. Itt a «Tévedő» buczkáin szedtem a következő növényeket:

<i>Chrysopogon gryllus,</i>	•	<i>Onobrychis viciaefolia,</i>
<i>Bromus subsquarrosus,</i>		<i>Hypericum perforatum,</i>
<i>Iris pumila,</i>		<i>Seseli annuum,</i>
<i>Gypsophila paniculata,</i>		<i>Verbascum lychnitis,</i>
<i>Dianthus Pontederacae.</i>		<i>V. phlomoides,</i>
<i>Thalictrum minus,</i>		<i>Orobanche arenaria,</i>
<i>Erysimum canescens,</i>		<i>Plantago hungarica,</i>
<i>Sedum Sartorianum,</i>		<i>Scabiosa ochroleuca,</i>
<i>Cytisus arenarius,</i>		<i>Artemisia campestris,</i>
<i>Astragalus dasianthus,</i>		<i>Hieracium echioides.</i>

A «Tévedő» mellett az utolsó homokbuczkasor (6. kép, I.) fejezi be a Duna-Tisza közének jellemző területét, úgy hogy az erre eső *Középdunai flóratájék itt a Duna homokjával*



6. kép. Metszet a Horgos melletti «Tévedő» erdő legszélső homokbuczkavonulatától a Tiszáig: I. szélső homokbuczka-sor, mely egyúttal a középdunai flóratájék határa, — II. a Kenderes-tó, a metszet síkjába eltolva, — III. ennek szíkes partja, — IV. televényben dús szántóföldek, — V. a töltésen túl a Tisza árterületén levő parti formatio. A szövegben a XVI., XVII. és XVIII. formatio.

*egészen a Tiszáig terjed, csak a Tisza ártere az, a mit már a Tiszai flóratájékhoz számíthatunk. És így van ez a Tisza mentének legnagyobb részén, csak északabbra, Szolnok és Alpár között huzódik vissza a Duna felé a Középdunai flóratájék homokos területe, egészen Nagykőrös és Czegléd közelébe öblösödvé be.* <sup>2</sup>

Ha a Tévedő legszélsőbb homokbuczkáiról a Tisza völgyébe ereszkedünk le, az árvédelmi töltésig dúsán termő szántóföldekre jutunk. Csak itt-ott van egy-egy mélyebb, mocsaras rész (pl. a Kenderes-tó, Kamaráserdő irányában), a mely nem kultiválható.

<sup>1</sup> L. JÁVORKA S.-nak e fajra vonatkozó cikkét, Botan. Közl. 1915, 1—2. f.

<sup>2</sup> L. Magyarország geológiai térképét is (1896), melyen a diluvialis homok nyugati határai egybevágznak a Középdunai flóratájék határaival.

Környékén szikes kaszáló terület, a mely már a tiszai flórajék szikeseire emlékeztet. Maga a tiszamenti partvidék is lényegesen elüt a Dunától.

### XVII. A Tisza iszapos partjának formatiója (6. kép, V.).

Míg a Duna homokos partja mentén gyakoriak a helyenként áttörhetetlen erdőségek, a melyekben (V. és VI. formatio, 8., 9., 10. old.) a fűz és nyárfa fajok mellett a szilnek, tölgynek is nagy szerepe van; addig a Tisza iszapos partján legfeljebb itt-ott van egy-egy fűzfa-csoport, a tölgyesek itt teljesen hiányznak. Ha Horgos irányában az árvédelmi töltést átlépve a Tisza medréhez megyünk, a tulsó partot teljesen fátlannak találjuk. A lankás part nem omlékony homok, hanem pépszerű iszap, melynek a különféle vízállás okozta rétegei gyenge lejtéssel mennek át a fátlan rónaság legelőibe. Az innenső parton az iszapot jobban megfigyelhetjük: a száradás következtében repedezett, s a mély repedések összeérve, sokszögű táblákra osztják a süppedős lejtőt. Ezen a növényzet ritka, az áradások nem engedik lábra kapni; különösen a *Ranunculus sceleratus* és *Roripa silvestris* él rajta. A parttétőn azonban buja növényzet kezdődik, még pedig elől alacsonyabb növésű *Salix amygdalina*, hátrább *Salix alba* csoportok vannak egészen a töltésig (6. kép, V.) E fűzeseket állandóan nyesik, ezekből készítik a töltés tetején készletben tartott hullámtörő rőzsényalábokat.

E fűzesekben gyakori a *Salix alba*; legalább részben ültetettek: a hullámveréstől védik a töltést. Ezekben a fűzesekben és azoknak tisztásain a következő növényfajokat találtam, nagyrészt virágzásban:

*Potamogeton natans*  
a száradó iszapon,  
*Triglochin paluste*,  
*Sagittaria sagittifolia*,  
*Alisma plantago*,  
*Butomus umbellatus*,  
*Glyceria aquatica*,

*Scirpus maritimus*,  
*Heleocharis acicularis*,  
*Heleocharis palustris*,  
*Carex stricta*,  
*Rumex crispus*,  
*R. conglomeratus*,  
*Polygonum tomentosum*,

<i>Thalictrum flavum,</i>	<i>Lysimachia vulgaris,</i>
<i>Roripa palustris,</i>	<i>L. nummularia,</i>
<i>R. amphibia,</i>	<i>Calystegia sepium,</i>
<i>Rubus caesius,</i>	<i>Cuscuta lupuliformis,</i>
<i>Glycyrrhiza echinata,</i>	<i>Symphytum officinale,</i>
<i>Lathyrus tuberosus,</i>	<i>Scutellaria hastifolia,</i>
<i>Euphorbia palustris,</i>	<i>Gratiola officinalis,</i>
<i>E. lucida,</i>	<i>Senecio paludosus,</i>
<i>Lythrum salicaria,</i>	

A töltésen túl a magasabban fekvő síkon, a mint már említém, a kitünő, humosus hordaléktalajon dús vetések terülnek el, a melyek helyét a szabályozás előtt ugyanaz a flóra foglalhatta el, mint az előbb leírt, töltésentúli részt. Most legfeljebb a vetések ruderális növényeit szedheti itt a botanikus; köztük a messziről feltűnő *Delphinium orientale*-t. A hol a talaj mélyebben fekszik, pl. a Kenderes-tó mellett (6. kép III.), ott szikes legelőre akadunk; rajta a *Statice Gmelini*, *Trifolium striatum* stb. jelzi, hogy szikes mező.

A Kenderes-tó mellett ismét a Dunáig terjedő homokpuszta legkeletibb buczkasorára akadunk, a melytől kezdve az előbb és a továbbiakban felsorolt középdunai flóratájéki homokpusztai növényvilággal találkozunk. Azonban mindjárt egy újabb medence van előttünk: a kamaráserdői tó. Ennek és a buczkák mellett a Tisza felé terjedő szomszédos tónak oly egyforma a flórája, hogy azt egyszerűség okából összefoglalom, habár szigoruan véve a Kenderes-tó már a tiszai flóratájék határán túl esik és talán kissé szikes. Az összefoglalást azonban annál is inkább megengedhetőnek tartom, mert a tiszai flóratájék mocsaraira, láposaira jellemző *Beckmannia*-s formatio a Kenderes-tó szélén ninesen meg.

### XVIII. A homokpusztai tó formatiója.

Hogy az alföldi homokpuszták mocsári és tavi flórája különösen *Cyperacea*-kban, *Graminea*-kban és a *Helobiae*-hez tartozókban igen gazdag, azt mondanom is felesleges. Ez minden-



esetre a Szeged körüli tavakra, mocsarakra is áll. Ha ennek ellenére is itt csak néhány növényt említek fel, az abban leli magyarázatát, hogy csupán a kamaráserdei- és a Kenderes-tóban és ezek szélén, az utazásomon tényleg gyűjtött júniusi flóráról van szó. Hogy általában az Alföld tavainak, vizes helyeinek maga ez a júniusi flórája is mily változatos és gazdag, az különben a különböző helyek ilyesféle területeiről ebben a dolgozatban felsorolt növények listáiból is kiderül, csak össze kell vonnunk az összetartozókat. Ettől az összevonástól azonban, a mint már előbb is említettem, ezidőszerint még tartózkodnom kell, *nehogy a különböző associatiók összekeveréséből olyan formatio adódjék össze, a mely együtt, egy formatióban sehol sem foglal és ökológiai okokból együtt nem is foglalhat helyet.*

A tó szélén és annak vizében a következő fajok a feltünőbbek és gyakoribbak:

<i>Typha angustifolia,</i>	<i>C. vulpina,</i>
<i>Stratiotes aloides,</i>	<i>Nymphaea alba,</i>
<i>Agrostis alba,</i>	<i>Galega officinalis,</i>
<i>Phragmites communis,</i>	<i>Myriophyllum spicatum,</i>
<i>Glyceriu aquatica,</i>	<i>Oenanthe aquatica,</i>
<i>Scirpus lacustris,</i>	<i>Limnanthemum nymphaeoides,</i>
<i>Carex hirta,</i>	<i>Galium palustre.</i>

### XIX. A Duna száraz homokszigeteinek és partjának formációja.

Erről már a Duna nyirkos homokszigetei és partja növényzetének tárgyalásakor (V. formatio, 8. old.) említést tettem, mint olyanról, mely az utóbbival ellentétben áll. Ilyen száraz homoksziget pl. a Csepelsziget és száraz homokpart: a káposztásmegyeri puszta. Ezek flórája, a Duna nagy fáktól borított ligetes, erdős, áradásos homokszigeteinek és partjának flórájával szemben, xerophyta pusztai elemekből áll; csupán közvetlenül a vízparton találunk rajtuk vizet kedvelő növényeket. A Csepel-sziget homokhátaít a következő fajok jellemzik:

*Ephedra vulgaris*,  
*Tragus racemosus*,  
*Stipa pennata*,  
*Phleum phleoidis*,  
*Koeleria glauca*,  
*Melica ciliata*,  
*Festuca vaginata*,  
*Bromus inermis*,  
*Secale silvestre*,  
*Hordeum murinum*,  
*Colchicum arenarium*,  
*Allium flavum*,  
*A. sphaerocephalum*,  
*Polygonum arenarium*,  
*Kochia arenaria*,  
*Gypsophila fastigiata*,  
*G. paniculata*,  
*G. hungarica*,  
*G. muralis*,

*Alsine setacea*,  
*Dianthus serotinus*,  
*Camelina microcarpa*,  
*Lepidium perfoliatum*,  
*Erysimum canescens*,  
*Syrenia angustifolia*,  
*Alyssum tortuosum*,  
*Astragalus onobrychis*,  
*Linum austriacum*,  
*L. glabrescens*,  
*Viola Kitaibeliana*  
*Salvia austriaca*,  
*Verbascum lychnitis*,  
*Veronica spicata*,  
*Aster linosyris*,  
*Anthemis ruthenica*,  
*Achillea ochroleuca*,  
*Centaurea Sadleriana*,  
*C. micrantha*.

Hasonló a Duna száraz homokpartjának flórája is e tájon, a mire legjellemzőbb példaképen a káposztásmegeyeri pusztát hozhatom fel, a melynek őseredeti flórája a főváros j edésével és különösen a homoktégla-gyár működésével kapcsolatosan hovatovább szűkebb térre szorul ugyan, de néhány évvel ezelőtt és így pl. még 1905-ben is, a midőn a bécsi nemzetközi botanikus kongresszus tagjai megtekintették, még eléggé szüzi állapotában volt meg. Ennek flórájából többszöri kirándulásom és gyűjtésem alapján a következő jellemzőbb fajokat sorolhatom fel:

*Ephedra vulgaris*,  
*Koeleria glauca*,  
*Eragrostis minor*,  
*Poa annua*,  
*Poa bulbosa*,  
*Festuca vaginata*,

*Carex nitida*,  
*C. stenophylla*,  
*Colchicum autumnale*,  
*Allium sphaerocephalum*,  
*Iris arenaria*,  
*I. punila*,

<i>Polygonum arenarium,</i>	<i>Euphorbia Gerardiana;</i>
<i>Kochia arenaria,</i>	<i>Viola arvensis,</i>
<i>Corispermum nitidum,</i>	<i>V. arenaria,</i>
<i>Salsola kali,</i>	<i>Peucedanum arenarium,</i>
<i>Cerastium semidecandrum,</i>	<i>P. oreoselinum,</i>
<i>Holosteum umbellatum,</i>	<i>Vinca herbacea,</i>
<i>Silene otites,</i>	<i>Cynoglossum officinale,</i>
<i>S. conica,</i>	<i>Anchusa officinalis,</i>
<i>Anemone grandis,</i>	<i>Nonnea pulla,</i>
<i>A. nigricans,</i>	<i>Alkanna tinctoria,</i>
<i>Thlaspi perfoliatum,</i>	<i>Salvia pratensis,</i>
<i>Draba verna,</i>	<i>Verbascum phoeniceum,</i>
<i>Erysimum canescens,</i>	<i>Veronica triphylla,</i>
<i>Alyssum arenarium,</i>	<i>V. prostrata,</i>
<i>A. calycinum,</i>	<i>V. praecox,</i>
<i>Reseda lutea,</i>	<i>V. polita,</i>
<i>Saxifraga tridactylites,</i>	<i>Plantago arenaria,</i>
<i>Potentilla arenaria,</i>	<i>Aster linosyris,</i>
<i>Cytisus austriacus,</i>	<i>Anthemis ruthenica,</i>
<i>Astragalus onobrychis,</i>	<i>Achillea pectinata,</i>
<i>A. excapus,</i>	<i>Seneco vulgaris,</i>
<i>Vicia lathyroides,</i>	<i>Jurinea mollis.</i>
<i>Erodium cicutarium,</i>	

A káposztásmegyeri homokpuszta sokban hasonlít a Vármegyehatár környékéről leírt fátlan homokpusztához (13. old.), vagy a nyárfaligetes (16. old.) és a eserjés (26. old.) homokpuszták szabadabb részeihez, úgy, hogy formatiója ezekével igen rokon; azonban — egyelőre legalább — egyikkel sem olvasható egybe, ellenben a Csepelszigetével azonosnak mondható. A káposztásmegyeri homokpuszta nem fátlan: itt-ott a *Populus nigra* és *Salix alba* nagy példányaira akadunk rajta, egyes részein a *Lycium europaeum* és a *Hyppophae rhamnoides* áttörhetetlen sűrűt alkot, a patak mentét pedig füzes szegélyezi. Ez azonban csak itt-ott tapasztalható: nagyrészen a puszta fátlan és úgy látszik nem alkalmas a fatenyészetre. Az ilyen részek formatiója éles ellentétben áll a Dunának mohácsi, karapancsi, bezdáni stb. homokpartja buja növésü

fák alkotta ligeteivel. A látszólag azonos ökológiai viszonyok mellett a különbség igen szembevető és azt hinnők, hogy talán homokbuczkái magasabbak, mint az említett áradásos helyek homokpadjai és talán a talajvíz mélysége okozza azt, hogy silány rajta a fatenyészet. — A dolog azonban nem így áll, mert vannak a káposztásmegyeri pusztának mélyre leásott teknői is, a melyeket be is ültettek fekete nyárfával, de e fák évek során át is csak csenevész cserjék maradtak. E helyek mohás talaját a füvek is csak igen gyéren nővik be. Így tehát nem a vízhiányban hanem a talaj minőségében rejlik a fátlanság oka.

### XX. A cserjés homokpuszta formatiója.

Monortól nem messze, a vasadi határban, a 16. oldalon már említett cserjés homokpusztákra akadunk. Jellemző növényföldrajzi képet az ad ennek a területnek, hogy gyéren, itt-ott csoportosan álló cserjékkel van borítva, a melyek között a homokpuszta tipikus növényei ritkásan álló csokrokban helyezkednek el, szabadon hagyva maguk között a homokot; néhol pedig átengedik ennek felületét a *Cladonia endiviaefolia*, *Cl. furcata* és *Parmelia prolixa* zuzmók tömötten álló telepeinek. A cserjéseket főleg: *Populus alba* és *Juniperus communis*, — ezeken kívül pedig *Populus nigra*, *Berberis vulgaris* és a mélyedésekben *Salix rosmarinifolia* alkotja. Több, különböző időben tett kirándulásomon e pusztán a következő jellemzőbb növényfajokat gyűjtöttem:

<i>Equisetum ramosissimum</i> ,	<i>Epipactis palustris</i> ,
<i>Juniperus communis</i> ,	<i>Salix rosmarinifolia</i> ,
<i>Stipa pennata</i> ,	<i>Populus alba</i> ,
<i>St. capillata</i> ,	<i>P. nigra</i> ,
<i>Calamagrostis epigeios</i> ,	<i>Quercus lanuginosa</i> ,
<i>Apera spica venti</i> ,	<i>Loranthus europaeus</i> ,
<i>Koeleria glauca</i> ,	<i>Polygonum arenarium</i> ,
<i>Festuca vaginata</i> ,	<i>Salsola kali</i> ,
<i>Scirpus holoschoenus</i> ,	<i>Alsine glomerata</i> ,
<i>Carex nitida</i> ,	<i>A. selacea</i> ,

<i>Gypsophila paniculata,</i>	<i>Cynanchum laxum,</i>
<i>Dianthus polymorphus,</i>	<i>Lappula echinata,</i>
<i>D. serotinus,</i>	<i>Alkanna tinctoria,</i>
<i>Kohlruschia prolifera,</i>	<i>Onosma arenarium,</i>
<i>Potentilla argentea,</i>	<i>Teucrium chamaedrys,</i>
<i>Berberis vulgaris,</i>	<i>Salvia pratensis,</i>
<i>Erysimum canescens,</i>	<i>S. nemorosa,</i>
<i>Syrenia angustifolia,</i>	<i>Thymus collinus,</i>
<i>Alyssum tortuosum,</i>	<i>Verbascum austriacum,</i>
<i>Berteroia incana,</i>	<i>Linaria genistifolia,</i>
<i>Sedum Sartorianum,</i>	<i>Veronica spicata,</i>
<i>Genista tinctoria,</i>	<i>Plantago lanceolata,</i>
<i>Medicago minima,</i>	<i>P. arenaria,</i>
<i>M. falcata,</i>	<i>Filago arvensis,</i>
<i>Melilotus officinalis,</i>	<i>F. germanica,</i>
<i>M. albus,</i>	<i>Gnaphalium luteo album,</i>
<i>Trifolium pratense,</i>	<i>Helychrysum arenarium,</i>
<i>Tr. montanum,</i>	<i>Inula britannica,</i>
<i>Tr. arvense,</i>	<i>Anthemis ruthenica,</i>
<i>Astragalus virgatus,</i>	<i>Achillea pectinata,</i>
<i>Erodium Neilreichii,</i>	<i>Xeranthemum annuum,</i>
<i>Tribulus orientalis,</i>	<i>Centaurea arenaria,</i>
<i>Euphorbia Gerardiana,</i>	<i>C. micrantha,</i>
<i>Eryngium campestre,</i>	<i>C. Sadleriana,</i>
<i>Chaerophyllum temulum,</i>	<i>Crepis rhoeadifolia,</i>
<i>Seseli varium,</i>	<i>Chondrilla juncea.</i>
<i>Peucedanum oreoselinum,</i>	

Ott, a hol ez a terméketlen cserjés homokpuszta, termékenyebb homokba megy át, régen tölgyesek állhattak. A szántóföldek között ma is hirdetik ezeket egyes idős *Quercus lanuginosa* példányok és csoportok. Ezeket az öreg tölgyfákat helyenként bőven lepi el a *Loranthus europaeus*. A monori homokpusztához a «Pióczás» mocsáron túl erdő csatlakozik, a mely szintén az ősrégi tölgyesek maradványa.

## XXI. A homokpuszta benőtt mocsarainak formatiója.

A vasadi homokpuszta közelében van egy mocsár, a «Pióczás.» Néha teljesen kiapad a vize, máskor nagy területen víz lepi el; azonban teljesen be van növe növényzettel, sőt a szélén van egy öv, a mely rendesen jó kaszáló. Ez igen kevéssé szikes rét, a mely azonban néha szintén víz alá kerül. Lápszerűnek nem mondható: a talaja és egész növényzete is olyan, hogy megkülönböztetendő egyrészt a lápos turjánoktól, másrészt pedig alföldünk nyíltvizü mocsaraitól is. A szélén elterülő nyirkos rétszegélyen gyakori a *Carex distans*, *C. Oederi*, *Ranunculus repens*, *Potentilla anserina*, *P. reptans* és itt szedtem évekkal ezelőtt az utóbbinak *aurantiaca* alakját<sup>1</sup>; továbbá *Triglochin palustre*, *Achillea asplenifolia*, *Lotus siliquosus*, *L. tenuifolius*, *Erythraea pulchella*, *Teucrium scordium*, *Gratiola officinalis*, *Cirsium canum*, *Serratula tinctoria*, *Scorzonera parviflora* és *Sc. Jacquini*. Valamivel beljebb megy a víz felé a *Glyceria fluitans*, *Scirpus maritimus*, *Sc. Tabernae montani*, *Carex flacca*, *Heliocharis palustris*, *Juncus compressus*. Még beljebb a *Carex hirta*, *C. panicea*, *C. riparia*, *C. paniculata*, *C. acutiformis*, *C. vulpina*, *Eriophorum angustifolium*, *Iris pseudacorus*, mely utóbbi egészen mélyen a *Phragmites communis* között szép sárga virágaival itt is, ott is élénkíti a sás- és pázsitfélék egyhangu sűrűségét.

Ezekon kívül *Typha angustifolia*, *Alisma plantago*, *Lythrum salicaria*, *Stachys palustris*, *Cirsium brachycephalum*.

## XXII. A homokpusztai turjánok formatiója. (7. kép, I, II.)

Dabas közelében (Pest m.) sajátságos formatióval találkozunk, a mely kétségtelenül Alföldünk legősibb formatiói közül való, hasonlóan, mint a következő mocsárszemek formatiója és egyúttal mint a nyírségi zombékos, lápos területeké is. A turján ingoványos, mélyen fekvő rét, a melyen itt-ott nyílt

<sup>1</sup> A *Potentilla reptans* f. *aurantiaca* előfordulása Magyarországon, Botán. Közlemények, 1906, 149, és Oesterr. Bot. Ztschr. 1907. 18. old.

víztükör is van. A víztükrös helyektől fokozatok különböztethetők meg, a kevésbé vizes rétek felé; azonban valamennyinek a talaja lápszerű, fekete humusos, vizes.



7. kép. A dabasi (Pest m.) turjánok és mocsárszemek: I. a turjánok nyirkos ősrétjeinek-, és II. vizeinek associációja; III. a közelükben levő cserjés homokpuszták — és IV. a mocsárszemek formációja. A szövegben a XXII. és XXIII. formációk.

Nagyjából ezt a formációt két associációra bonthatjuk:

1. A turjánok vízi associációjában (7. kép, II.) a következő fajokat szedtem:

<i>Typha latifolia</i> ,	<i>Iris pseudacorus</i> ,
<i>T. angustifolia</i> ,	<i>Nymphaea alba</i> ,
<i>Alisma plantago</i> ,	<i>Ranunculus lingua</i> ,
<i>Phragmites communis</i> ,	<i>Myriophyllum spicatum</i> ,
<i>Glyceria aquatica</i> ,	<i>Hottonia palustris</i> ,
<i>Carex gracilis</i> ,	<i>Utricularia vulgaris</i> ,
<i>Scirpus Tabernaemontani</i> ,	<i>Galium palustre</i> ,
<i>Sc. lacustris</i> ,	<i>Senecio paludosus</i> ,
<i>Lemna minor</i> ,	<i>Cirsium brachycephalum</i> .
<i>L. trisulca</i> ,	

2. A nyirkos ősrétek associációja (7. kép, I.): dús növényzetű, fajokban gazdag és változatos virágszínekkel pompázik. A júniusban gyűjtött fajok a következők:

<i>Nephrodium thelypteris</i> ,	<i>Scirpus holoschoenus</i> ,
<i>Equisetum arvense</i> ,	<i>Heleocharis palustris</i> ,
<i>Agrostis alba</i> ,	<i>Carex riparia</i> ,
<i>Holcus lanatus</i> ,	<i>C. flacca</i> ,
<i>Poa pratensis</i> ,	<i>C. vesicaria</i> ,
<i>Glyceria fluitans</i> ,	<i>C. tomentosa</i> ,
<i>Eriophorum angustifolium</i> ,	<i>C. pseudocyperus</i> ,

*Juncus acutiflorus,*  
*J. atratus,*  
*J. compressus,*  
*J. glaucus,*  
*Veratrum album,*  
*Colchicum autumnale,*  
*Iris sibirica,*  
*Ophris aranifera,*  
*Orchis palustris,*  
*Alnus glutinosa,*  
*Cerastium anomalum,*  
*Lychnis flos cuculi,*  
*Caltha cornuta,*

*Ranunculus repens,*  
*Lotus siliculosus,*  
*Vicia cracca,*  
*Euphorbia lucida,*  
*Myosotis palustris,*  
*Glechoma hederacea,*  
*Stachys officinalis,*  
*Salvia pratensis,*  
*Plantago altissima,*  
*Valeriana dioica,*  
*Achillea asplenifolia,*  
*Centaurea jacea.*

A Dabas közelében levő turjánokat úgy a nyíltvizű, mint a benőtt mocsaraktól meg kell és jól meg lehet különböztetni, nemkülönben a következőktől is.

### XXIII. A mocsárszemek <sup>1</sup> formatiója (7. kép, IV.)

gyakran megismétlődik Dabastól délre, Kunszentmiklós irányában, különösen ott, a hol a királyi uradalom erdői, pusztái vannak. A «mocsárszemek» tulajdonképen olyan homokbuczkás területen vannak, a melyet a cserjés homokbuczkák formatiója jellemez (XX. 26. old.). Maguk a mocsárszemek a buczkák közötti mélyedésekben vannak; nyirkos teknők, laposok, a melyekben már egy-két ásónyom mélységben szennyes, sárgás víz fakad. Közepükön igen gyakran kerekded, süppedős víztócsa van, a mely vagy be van növe, vagy közepén nyílt víztükröt mutat.

Ezeket a mocsárszemeket tehát nemcsak az jellemzi, hogy vizes mélyedések, hanem ezenkívül az is, hogy a terméketlen, illetőleg a cserjés homokpuszta mélyedései (7. kép, III.): a ki-

---

<sup>1</sup> A helybeliek ezeket részben szintén turjánoknak nevezik, de a kettő között nagy a különbség. Így a megkülönböztetés okából az itt közölt új kifejezést ajánlom. Magukat a szóban levő tócsákat a helybeliek «kopolyák»-nak is nevezik.



emelkedő buczkákön az utóbbinak jellemző növényfajait találjuk meg. Így a formáció jellemzéséhez tulajdonképen hozzátartozik a mocsárszemeket körülvevő buczkák floristikai jellemzése is. Ezek flórája, a mint említém, egyezik a 168. oldalon leirt cserjés homokpusztákéval és az ott leirt pusztá — a vasadi — Dabastól nem lévén messze, tulajdonképen egyszerűen utalhatnánk az ott közöltekre. Azonban itt is követni kívánom azt az elvet, hogy minden egyes esetben csakis az illető helyen meggyűjtött növényeket veszem figyelembe és kerülni kívánom az általánosítást és összefoglalásokat. Ennek folytán itt külön felsorolom a mocsárszemek körül levő cserjés homokbuczák növényeit. Ezt annál is inkább követendőnek vélem, mert az itt gyűjtött növényeim névsora nem fedi a monori pusztán gyűjtöttekét. Pl. daczára a két terület növényföldrajzi identicitásának a *Dianthus polymorphus*-t a dabasi cserjés homokbuczákön nem találtam; viszont a monoriakon a *Linum glabrescens*-t nem szedtem, vagy legalább is bizonyos, hogy ott nem oly tömeges ez a növény, mint emitt stb.

A dabasi mocsárszemek körüli homokbuczákön a következő növényfajokat találtam meg:

<i>Stipa pennata,</i>	<i>Berberis vulgaris,</i>
<i>Phleum phleoides,</i>	<i>Alyssum tortuosum,</i>
<i>Calamagrostis epigeios,</i>	<i>Anthyllis polyphylla,</i>
<i>Koehleria glauca,</i>	<i>Astragalus virgatus,</i>
<i>Festuca vaginata,</i>	<i>Linum glabrescens,</i>
<i>Bromus squarrosus,</i>	<i>Euphorbia Gerardiana,</i>
<i>Br. tectorum,</i>	<i>Helianthemum chamaecistus,</i>
<i>Secale silvestre,</i>	<i>Onosma arenarium,</i>
<i>Carex nitida,</i>	<i>Verbascum lychnitis,</i>
<i>Populus alba,</i>	<i>Orobanche arenaria,</i>
<i>P. nigra,</i>	<i>Galium verum,</i>
<i>Alsine viscosa,</i>	<i>Achillea ochroleuca,</i>
<i>Silene otites,</i>	<i>Tragopogon floccosus.</i>
<i>Dianthus pontederæ,</i>	

A buczkák alján természetesen érintkezik ez a pusztai, xerophita vegetáció a következővel: a mocsárszemek flórájával

úgy, hogy a két formationak ama fajai, melyek a termőhelyben nem nagyon válogatósak, az érintkezési vonalon keverednek.

A mocsárszemek vizében a *Scirpus Tabernaemontani* és *Phragmites communis*, főleg azonban az előbbi uralkodik. A rendesen kerek tócsa körül *Schoenus nigricans* helyezkedik el, néha fekete füzereivel szabályos koszorút alkotva. A mocsárszem körül nyirkos, fekete, homokostalaju lapos terül el; sőt ahol a víztócsa a középről hiányzik, csak ilyen terület van a buczkák teknőjében. Az ilyen laposok néha eléggé nagy kiterjedésűek. Jellemző növényföldrajzi tájképet kölcsönöz ezeknek a *Betula pendula*, a mely festői csoportokban helyezkedik el, hogy a szabadon hagyott tisztásokat a ritkásan álló *Juniperus communis* cserjék díszítsék. Harmadik, jellemző fás növénye a *Salix rosmarinifolia*: apró növésű, alig emelkedik ki a pázsitból. A talaj kevésbé füves részein feltűnik két gombafaj: arany-sárga kalapjaival tömegesen jelentkezik a *Hygrocybe intermedius* és az apróbb *H. miniatus*. Itt-ott nagyobb területen borítja a talajt a *Cladonia pyxidata* zuzmó telepe. E laposok flórája nyireseivel a Nyírség lágjaira emlékeztet, de növényfajai mások. Lényegesen különbözik továbbá a turjános rétek flórájától is: emezek díszes virágpompáját itt hiába keressük, inkább pázsitok és Cyperaceák uralkodnak rajta; egyhangúbb zöldes színébe csak itt-ott vegyül egy-egy élénkebb színű virág-csoport. Az említetteken kívül a következő növényfajok sorolандók fel itt:

*Calamagrostis epigeios*

a széleken,

*Deschampsia caespitosa*,

*Scirpus holoschoenus*,

*Carex flacca*,

*Orchis palustris*,

*O. coryophora*,

*Anacamptis pyramidalis*,

*Epipactis rubiginosa*

nagy számmal,

*E. palustris*,

*Genista elatior*,

*Ononis spinosa*,

*Dorycnium germanicum*,

*Polygala vulgaris*,

*Plantago media*,

*Valeriana officinalis*,

*Leontodon hispidus*.

## XXIV. A Tisza lassufolyásu mellékvizeinek formatiója.

E vizek közül bejártam a Zagyva, Tápió és a Hortobágy folyót. Jellemzi őket, hogy lassufolyásu, iszapos, zavaros, «szőke» vizű folyók, a melyek néhol egész szélességükben be vannak növe növényzettel; sőt pl. a Hortobágy néhol keskeny ladikkal is áttörhetetlen. Partjuk vagy fátlan, vagy pedig *Salix alba* fák szegélyezik. A Hortobágy folyó partja teljesen fátlan; csupán egy helyen, a csárda melletti hídtól felfelé eső részleten láttam néhány idős *Populus alba*-t egy sorban.

A Zagyva és a Tápió vizében és partszélén gyakoriabbak és nagyrészt tömegesen nőnek a következő növényfajok :

<i>Typha angustifolia,</i>	<i>Lemma minor,</i>
<i>Sparganium ramosum,</i>	<i>Iris pseudacorus,</i>
<i>Potamogeton natans,</i>	<i>Polygonum amphibium,</i>
<i>P. crispus,</i>	<i>Roripa amphibia,</i>
<i>P. lucens,</i>	<i>R. austriaca,</i>
<i>Sagittaria sagittifolia,</i>	<i>Trapa natans,</i>
<i>Butomus umbellatus,</i>	<i>Euphorbia palustris,</i>
<i>Typhoides arundinacea,</i>	<i>Oenanthe aquatica,</i>
<i>Phragmites communis,</i>	<i>Limnanthemum nymphaeoides,</i>
<i>Glyceria aquatica,</i>	<i>Scutellaria galericulata,</i>
<i>Scirpus maritimus,</i>	<i>Stachys palustris,</i>
<i>Sc. lacustris,</i>	<i>Veronica anagallis,</i>
<i>Heleocharis palustris,</i>	<i>Cirsium brachycephalum,</i>
<i>Acorus calamus,</i>	

A nyirkos parton :

<i>Triticum repens,</i>	<i>Roripa silvestris,</i>
<i>Heleocharis palustris,</i>	<i>Potentilla reptans,</i>
<i>Carex riparia,</i>	<i>Glycyrrhiza echinata,</i>
<i>C. stricta,</i>	<i>Lathyrus tuberosus,</i>
<i>C. vulpina,</i>	<i>Lythrum salicaria,</i>
<i>Allium scorodoprasum,</i>	<i>Lysimachia vulgaris,</i>
<i>Rumex crispus,</i>	<i>L. nummularia,</i>
<i>R. conglomeratus,</i>	<i>Calystegia sepium,</i>

*Symphytum officinale*,  
*Scutellaria hastifolia*,  
*Verbascum blattaria*,

*Knautia arvensis*,  
*Sonchus asper*.

A Hortobágy folyó (8. kép) igen jellemző képét adja a Tiszai flóratájék lassu folyásu, fátlan partu vizeinek. Csolnakkal haladtam rajta végig és így növényformatiójának elhelyezkedését behatóbban megfigyelhettem. Mint már előbb említettem: néhol a nádas egész szélességét benötte. A csolnak csak a kaszával kivágott keskeny síkátorban haladhat, és két embernél több alig ülhet bele, mert a víz helyenként oly sekély, hogy nagyobb súly alatt megfenekelne a csolnak. A part (8. kép, I.) mindenütt lankás lejtővel megy át az emelkedettebb mező-



8. kép. A Hortobágy folyó és partja keresztmetszete: I. a lankás part, II. a víz széle, III. szárazabb mezőség, IV. a nyirkos lapos. A szöveg XXIV és XXVI formatiója.

ségbe (8. kép, III.). A víz szélén *Scirpus maritimus*, *Heleocharis palustris*, *Ranunculus repens*, *Roripa silvestris* gyakoriak. A vízben (8. kép, II.) *Scirpus lacustris* és *Typha angustifolia* csoportok váltakoznak, hogy a nyílt víz belsőbb részeiben a *Glyceria aquatica* tömött öve szegélyezze a nádasat. Ez az öv rendszeren küljebb-beljebb kanyarog: öblöket vagy néhol egészen körülzárt terecskéket fog körül, a melyek nyílt vizét a *Trapa natans* levélmozaikja borítja, s a nádasban tömérdek *Lemna minor* takarja a vizet. A *Glyceria*, *Scirpus*, *Phragmites* és *Typha* egyforma, karcsu szárai között csupán a *Sparganium ramosum* elágazó szára zavarja az egyformaságot, a mely faj rendszeren a víz felőli belső szélén helyezkedik el. A *Trapa natans* takarót néhol a *Hydrocharis morsus ranae*, vagy a *Nymphaea alba* teszi változatossá; vagy itt-ott a folyó közepén is egy-egy *Scirpus lacustris* csoport emelkedik ki. (8. kép, V.)

**XXV. A tiszamenti mezőség formatiója.**

Ha Ujszász környékén nagyobb területet járunk be, akkor azon a részen, a hol azt a Tápió és Zagyva folyócskák szelik át, igen kevés változatosságot mutató mezőséget találunk, melynek iszapos-agyagos talaját e folyócskák vize meg a Tisza simította teljes síksággá. A hol a talaj valamivel magasabb, ott kitünő termőföldek, dús növényzetű rétek terülnek el. A mélyebb síkságon azonban elárulja a növényzet, hogy az már szikes mező; a miben aztán a talaj felszínének mélysége szerint több fokozat tapasztalható. Ezek szerint ez az egységesnek látszó mezőségi formáció változatos; és ha keressük azt, hogy mi az, a mi mégis egységes növényföldrajzi külsőt kölcsönöz neki, akkor elsősorban azt hozhatjuk fel, hogy fátlan. Ez a fátlanság a Tiszai flóratájék mezőségeit feltűnően különbözővé teszi a Középdunai flóratájék cserjés és ligetes homokpusztáitól. A Tiszai flóratájék mezőségei leginkább közelítik meg a sztep fogalmát. A Délorosz sztep-terület bizonyos, mérsékeltén sós talajú részleteihez is leginkább hasonlíthatók. Ez a hasonlóság azonban csak a fátlanságban áll, a kettőnek növényszövetkezetei lényegesen eltérő összetételűek. A Tisza és mellékvizei környezetével floristikailag azonos területek a Délorosz-pusztákon nem akadtak utamba, legfeljebb megközelítő hasonlóságokról lehet szó, mint a hogy pl. a Tauri pusztákon a Golajaprisztan közelében levő mérsékeltén sós puszták vagy az Aszkania Nova melletti «pod»-ok sokban emlékeztetnek a Tiszai flóratájék kevésbé sós mezőségeire és laposaira. A mint előbb említettem: a Volga, a Don és más folyók homokbuczkás környezete növényszövetkezetei összetételében is hasonlít a Középdunai flóratájék homokpusztáihoz; maguk a fekete és barna földű délorosz sztepek azonban úgy a Középdunai, mint a Tiszai flóratájéktól lényegesen elütnek.<sup>1</sup> Ennek okát egyrészt és főleg a Dél-

---

<sup>1</sup> V. ö. Tuzson J.: Jelentés oroszországi utamról, Akad. Ért. 1913. 277. sz.; — Utazásom a Délorosz Pusztákon, Természettud. Közl. 1913. 586. füz.; — A Délorosz Puszták összehasonlító flórája, I. Botan. Közlem. 1913, 181. old.

orosz puszták száraz talajában, másrészt ugyanilyen klimájában kell keresnünk, valamint — mindenesetre kisebb mértékben — fejlődéstörténeti körülményekben is.

Az a teljes fátlanság, a mely pl. a Tauri pusztákat jellemzi, a Tiszai flóratájékról szorosán véve nem állítható: bármerre, a legfátlanabb tiszamenti mezőségeken is az ültetett fa, mint akác, nyár-félék, kőris stb. úgy a hogy, megél; a mint azt különösen a tanyák körül tapasztaljuk. Csak maguktól nem települnek oda fás, cserjés részletek; a minék ezek szerint nem a fás növények megélhetéséhez szükséges termőhelyi feltételek hiánya az oka, hanem valószínűleg a magvak csírázására, vagy a csemeteécskék legfiatalabb állapotban való megélhetésére alkalmatlank a Tiszai flóratájék mezőségei. Ezzel szemben a Tauri pusztákon az ültetett fákkal tett kísérletek is mind eredménytelenek maradtak.

A mint előbb kiemeltem, a tiszamenti mezőségek összességükben eléggé egységes növényföldrajzi képet nyújtanak, e mellett azonban közelebbről megfigyelve azokat, rajtuk bizonyos floristikai változatosság mégis megvan. Más szóval e mezőségek flórája egységes formatio, de több associatióra bontható.

1. A szikes mezőség associatiója. Olyan igazi vakszikes területek, mint a milyenek a Duna-Tisza közének homokpusztáin vannak — a milyen pl. az előbbieken Horgos mellől leírt szikes —, sem a Tápió és a Zagyva környezetében, sem a Hortobágyon nem estek utamba. Azok a szikes mezők, a melyek a Tiszai flóratájékon vannak, eléggé tömötten és egyenletesen gyepek: a homokpusztai vakszikes, fehér, kopár foltok, a melyeken egy-egy csoportban majd csupán *Crypsis*-ek, majd tisztán *Lepidium crassifolium* vagy *Camphorosma ovatum* nőnek, hiányoztak a Tiszai flóratájék szóban levő szikes mezőn. E helyett ezeken a mezőkön még a legszikesebb «fok»-okban is kevert gypet alkotott a *Lepturus pannonicus*, *Alopecurus geniculatus* stb. (l. tovább a Hortobágy megfelelő associatióját). A Középdunai flóratájék szikeseinek növényfajai majdnem mind megvannak a Tiszai flóratájékéin is és megfordítva; úgy, hogy a két flóralista között alig van különbség; de az egyes fajok csoportosulása és tömegessége tekintetében lényeges differentiak vannak. —

A Tápió, Zagyva lapályán és a Tiszának ezek közelébe eső környezeten, vagyis Ujszász tájékán, a szikes mezők helyenkint tömött, máshol ritkább gyepében a következő növényfajokat gyűjtöttem :

<i>Typhoides arundinacea,</i>	<i>Medicago falcata,</i>
<i>Poa palustris,</i>	<i>Melilotus officinalis,</i>
<i>Atropis limosa,</i>	<i>M. albus,</i>
<i>Festuca pseudovina,</i>	<i>Trifolium laevigatum,</i>
<i>F. arundinacea,</i>	<i>Lotus tenuifolius,</i>
<i>Bromus hordeaceus,</i>	<i>Euphorbia virgata,</i>
<i>Br. inermis,</i>	<i>Lythrum hyssopifolium,</i>
<i>Br. commutatus,</i>	<i>Statice Gmelini,</i>
<i>Br. tectorum,</i>	<i>Salvia nemorosa,</i>
<i>Hordeum maritimum,</i>	<i>Plantago tenuiflora,</i>
<i>Iris graminea,</i>	<i>Pl. major,</i>
<i>Camphorosma ovatum,</i>	<i>Galium verum,</i>
<i>Gypsophila muralis,</i>	<i>Knautia arvensis,</i>
<i>Myosurus minimus,</i>	<i>Achillea collina,</i>
<i>Adonis aestivalis,</i>	<i>Artemisia monogyna,</i>
<i>Lepidium crassifolium,</i>	<i>Carduus nutans,</i>
<i>L. perfoliatum,</i>	<i>Crepis setosa,</i>
<i>Ononis spinosa,</i>	<i>Scorzonera Jacquiniiana.</i>

2. A termékeny mezőség associációja. Ezek magasabban fekvő területek, a melyek hordaléktalaja kitünő termőföld. Nagy részük — maholnap már kivétel nélkül — kultúra alatt áll és így őseredeti flórájuk közvetlenül már alig állapítható meg. Azonban minden bizonnal ezek is fátlan és különösen a vizek közelében rendkívül dús réti növényzettel borított mezőségek voltak.

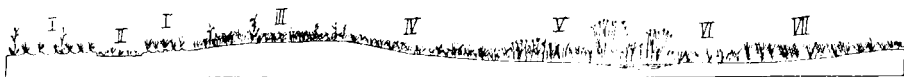
Csupán egy helyen akadtam kisebb részletére ennek az associációnak, a mely talán ősi állapotát mutatja egy ilyen termékeny mezőség növényzetének. Ez a gróf DESSEWFFY-féle uradalom területén van, ültetett erdő közelében, a Zagyva mellett, mely a fáczántenyésztés kedvéért áll állandóan érintetlenül. A dús növényzetben aránylag kevés viritó fajt találtam (junius 22.-én), ezek névsora a következő:

<i>Alopecurus pratensis,</i>	<i>Glycyrrhiza echinata,</i>
<i>Festuca arundinacea,</i>	<i>Vicia cracca,</i>
<i>Ornithogalum pyramidale,</i>	<i>Lathyrus tuberosus,</i>
<i>Salix alba,</i>	<i>Euphorbia virgata,</i>
<i>Asparagus altilis,</i>	<i>Lythrum virgatum,</i>
<i>Clematis integrifolia,</i>	<i>Verbascum blattaria,</i>
<i>Thalictrum angustissimum,</i>	<i>Linaria vulgaris,</i>
<i>Reseda lutea,</i>	<i>Galium boreale,</i>
<i>Astragalus glycyphyllus,</i>	<i>Tragopogon orientalis.</i>

Ez az associatio további tartozékaival valaha nagy kiterjedésben foglalta el a mai szántóföldek helyét, ma azonban már tulajdonképen csak következtetések kapcsán volna teljesebben megállapítható; számos oly apróbb részletet, mint az említett, kellene gondosan felkeresni, és növényfajajukat összefoglalva következtetni a tiszai flóratájék termékeny mezőségeinek associatiójára.

## XXVI. A hortobágyi szíkes puszta formatiója (9. kép).

A Hortobágy a Tiszai flóratájék legtipusosabb részlete. Sok hasonlóságot mutat az előbb tárgyalt tiszamenti mezőséghez, ugyanannyira, hogy associatióit bátran hozzá lehetne csatolni a tiszamenti mezőség formatiójának megfelelő associatióihoz.



9. kép. A hortobágyi szíkes puszta: I a szikpadka, II a szikfok, III a füves mező és IV—VII a lapos associatiója. A szövegben a XXVI. formatió.

Illetőleg az egyiktől: a szíkes mezőségtől a továbbiakban leírt «magasabban fekvő mezőség» oly kevésbé tér el, hogy a kettőt össze is lehetne foglalni. Ha ennek ellenére a Hortobágyot külön formatiónak veszem, azt az a körülmény indokolja, hogy — legalább is az utamba esett részletein — egyrészt hiányzik belőle a «termékeny mezőség», másrészt meg jellemző szikfokai



és szikpadkái nagy kiterjedésben különálló egységgé teszik a Hortobágyot. Mint a Tiszai flóratájék többi szikes mezője, úgy a Hortobágy is teljesen fátlan. Két napi botanizálás közben csak az előbb említett *Populus alba* csoportot láttam. Hogy azonban a Hortobágnak legalább is egyes részletei nem alkalmatlanok a fatenyésztésre, azt bizonyítja pl. a csárda és a híd között levő akáczos. Ezt különösen azért hangsúlyozom, mert az igazi fátlan sztepeken, mint a milyenek pl. a Tauri puszták, a mint említém, minden fásítási kísérlet hiába való. Az associatiók jellemzésére sok növényfajt nem sorolhatok fel: egyrészt azért, mert különösen a szikpadka és a szikfokok associatióját aránylag kevés faj alkotja, másrészt pedig azért, mert utamon csak június végén jutottam a Hortobágyra, a mikor a növényzet ott részben a nap pörkölő melegétől, részben a legeltetés folytán már gyéren nyújtja a tanulmányozásra alkalmas példányokat.

1. A magasabban fekvő mezőség associatiója (9. kép, III.). Kevésbé szikes, kötött talaján a következő növényfajokat gyűjtöttem:

<i>Alopecurus pratensis,</i>	<i>Tr. laevigatum,</i>
<i>Koehleria gracilis,</i>	<i>Tr. repens,</i>
<i>Festuca pseudovina,</i>	<i>Lotus corniculatus,</i>
<i>Triticum repens,</i>	<i>Euphorbia cyparissias,</i>
<i>Hordeum murinum,</i>	<i>Plantago lanceolata,</i>
<i>Carex stenophylla,</i>	<i>Galium verum,</i>
<i>Melandryum viscosum,</i>	<i>Achillea collina,</i>
<i>Gypsophila muralis,</i>	<i>Inula britannica,</i>
<i>Potentilla argentea,</i>	<i>Carduus nutans,</i>
<i>Trifolium arvense,</i>	<i>Crepis setosa,</i>
<i>Tr. striatum,</i>	<i>Scorzonera Jacquiniana.</i>

2. A szikpadka associatiója (9. kép, I.) nagy kiterjedésű területet foglal el, a melynek növényföldrajzi képét a *Festuca pseudovina* szabja meg. Eléggé ritkásan, de majdnem szabályosan elosztva helyezkednek el e pázsit csokrai a szikes talajon. Jellemzővé teszi e flóráképet az, hogy a pázsitcsokrok alatt, ezek gyökérzetétől szorosan összefogott rögök emelkednek ki, üstök módjára viselve hátukon a sugarasan berzedő levélesokrot és a

pázsitnak magasra nem növényes és nem nagy füzért viselő szárait. Ezenkívül itt-ott a *Carduus hamulosus* és *Achillea collina* eltörpült példányai vegyülnek a gyéren álló *Festuca*-s rögök közé, valamint a *Hordeum maritimum*, *Scorzonera Jacquiniiana*, továbbá *Camphorosma ovatum*, *Gypsophila muralis*, nemkülönben az előbb leírt, magasabb fekvésű mezőség associatiója fajainak egyes példányai tengődnek a kökemény padkán.

A göröngyös szikpadkát itt-ott egy másik, a Hortobágyra igen jellemző alakulás váltja fel, nevezetesen

3. a szikfok associatiója (9. kép, II.). A szikfokok alig 15—20 cm-rel mélyebb, lapos fenekű, ide-oda kanyargó medrek, a melyekben tavasszal víz van, ellenben nyáron teljesen szárazak, kökemény talajuk. Növényfajuk nem sok van, de úgy látszik több, mint a padkának és sűrűbben vannak benőve, mint emez. Növényeik azonban rendkívül aprók, visszamaradnak növésekben: a *Polygonum aviculare*, *Gypsophila muralis*, *Myosurus minimus*, *Plantago tenuiflora*-fajok példányait alig tudjuk ujjunk hegyével szedni; igen apró növényes az *Alopecurus geniculatus* és *Spergularia marginata* is, a melyek az előbbiekkal és egy *Nostoc*-kal a szikfoknak lapos medrét betakarják. Közöttük csak itt-ott látunk valamivel nagyobbacska gyepvankosokat, ezek az *Atropis distans* és a *Lepturus pannonicus* aprónövényes példányai. Itt-ott a *Hordeum maritimum*-ot, a *Heleocharis palustris*-t és *Juncus bufonius*-t is megtaláljuk e szövetkezetben. Mind igen apró növényesek.

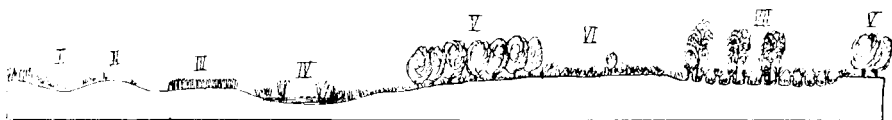
A Hortobágyon igen fontos és terjedelmével is számottevő

4. a szikes laposok associatiója (9. kép, IV—VII.). Ez a száraz mezőknél valamivel mélyebben fekvő, lefolyás nélküli, kiterjedt mező, a melynek belsőbb részeiben víz áll. Határát jelzi növényzete, a mely igen dús és magas; feltűnően elüt a száraz mező szegényes vegetációjától. Tömeges növénye az *Alopecurus geniculatus*, *Agrostis alba*, *Beckmannia erucaeformis*, *Glyceria fluitans*, *Heleocharis palustris*. Míg a *Beckmannia* és az *Agrostis* a vizenyösebb részekről kissé visszamarad, addig a *Glyceria* itt fejlődik dúsabban. Itt-ott az előbbiekek közé *Lysimachia nummularia*, *Veronica scutellata* vegyül; a víz közelében pedig feltűnik a *Peplis portula*, *Juncus effusus*, *Scirpus*

*maritimus*. A vízből *Scirpus lacustris* csoportok nyulnak ki, alattuk pedig az *Utricularia vulgaris* sárga virágai emelkednek a víz fölé. A Hortobágy laposai habitusukban emlékeztetnek a Tauri puszták «pod»-jaira: *Beckmannia eruciformis* állományuk közös vonás. A Tauri puszták «pod»-jainak azonban, egyes keleti növények, mint pl. a *Lythrum thymifolium*, *Agropyrum ramosum*, *Rumex Marschallianus*, a peremén növé *Centaurea inuloides* stb. egészen elütő növényföldrajzi jelentőséget kölcsönöznek.

### XXVII. A nyírségi homokpuszták formatiója (10. kép).

A Hortobágyon oly jellemzően kifejezésre jutó Tiszai flóratájék Debreczentől északra, a Nyírség homokos területének határán ér véget. Itt már a fatenyészet a vasuton utazót is figyelmezteti a Tiszai flóratájékkal szemben a nagy változásra. A szabad terü-



10. kép. A Nyírség homokpusztái, erdős és zombékos részei: I—II. homokbuczkák, III. szántóföldek, IV. mocsár, V. erdő. VI. rét, VII. zombékos. A szövegben a XXVII, XXVIII és XXIX formatió.

leteken pedig ismét a dunai flóratájéokra emlékeztető homokpusztai növényösszetevések tűnnek fel. Azonban már változott összetételben: az északibb fekvés, a Nyírség apróbb szemű, kissé sárgás homokjának eltérő volta és a nagyobb talaj- és légnedvesség, egyrészt a Duna-Tisza köze egyes xerophyta fajait kizárja vagy legalább is háttérbe szorítja, másrészt az előbbinek homokpusztai növényösszetevésébe számos, az északibb tájakra és a hegységekre jellemző fajokat kever.

Nyirbátor környékén a homokbuczkák formatióját a szántóföldek között itt-ott kultiválatlanul álló apró részleteken és a szél által felhordott homokháton, kiöblösített tölesérek oldalán (10. kép, I, II.) figyelhettem meg. E részletek növényfajai főleg a következők:

<i>Equisetum ramosissimum,</i>	<i>Silene otites,</i>
<i>Chrysopogon gryllus,</i>	<i>S. conica,</i>
<i>Agrostis vulgaris,</i>	<i>Melandryum album,</i>
<i>A. canina,</i>	<i>Gypsophila paniculata,</i>
<i>Apera spica venti,</i>	<i>Kohlrauschia prolifera,</i>
<i>Koeleria gracilis,</i>	<i>Dianthus Pontederac,</i>
<i>Poa pratensis,</i>	<i>D. carthusianorum,</i>
<i>Festuca vaginata,</i>	<i>Papaver rhoeas,</i>
<i>F. glauca,</i>	<i>Camelina microcarpa,</i>
<i>Bromus hordeaceus,</i>	<i>Erysimum canescens,</i>
<i>Br. squarrosus,</i>	<i>Alyssum calycinum,</i>
<i>Br. tectorum,</i>	<i>Berteroa incana,</i>
<i>Cynodon dactylon,</i>	<i>Medicago falcata,</i>
<i>Anthericum ramosum,</i>	<i>M. lupulina,</i>
<i>Allium vineale,</i>	<i>Trifolium arvense,</i>
<i>Rumex acetosella,</i>	<i>Tr. campestre,</i>
<i>R. acetosa,</i>	<i>Tr. diffusum,</i>
<i>Salsola kali,</i>	<i>Dorycnium germanicum,</i>
<i>Scleranthus annuus,</i>	<i>Vicia villosa,</i>

mely utóbbinak egyes példányai rózsaszínes virágokkal és kevésbé molyhos voltokkal hajlanak a *glabrescens* Koch-alakhoz,

<i>Coronilla varia,</i>	<i>Scabiosa ochroleuca,</i>
<i>Euphorbia Gerardiana,</i>	<i>Jasione montana,</i>
<i>Vicia grandiflora,</i>	<i>Filago arvensis,</i>
<i>Hypericum perforatum,</i>	<i>Helichrysum arenarium,</i>
<i>Viola arvensis,</i>	<i>Anthemis ruthenica,</i>
<i>Oenothera biennis,</i>	<i>A. tinctoria,</i>
<i>Anchusa officinalis,</i>	<i>Achillea collina,</i>
<i>Onosma arenarium,</i>	<i>Centaurea cyanus,</i>
<i>Echium vulgare,</i>	<i>C. scabiosa,</i>
<i>Thymus collinus,</i>	<i>Crepis rhoeadifolia,</i>
<i>Verbascum phlomoides,</i>	<i>Cr. tectorum,</i>
<i>Linaria vulgaris,</i>	<i>Chondrilla juncea,</i>
<i>L. genistifolia,</i>	<i>Hieracium echiodides,</i>
<i>Plantago hungarica,</i>	<i>Leontodon hispidus,</i>
<i>Asperula cynanchica,</i>	<i>Tragopogon pratensis.</i>

E homokpuszták nagyrészt kultúra alatt állanak: legnagyobb részük vetés, itt-ott szőlő-, dohány-föld, gyümölcsös; a magára hagyott terület vajmi kevés; azonban az említett apróbb részleteken megfigyelhető növényfajok is eléggé tájékoztatnak aziránt, hogy a Nyírség szabad homokpusztái egyrészt sokban hasonlítanak a Duna-Tisza közéhez, de sokban el is ütnek attól. Ez az eltérő volta a Nyírség növényzetének a Duna-Tisza köze flórájától még inkább szemünkbe tűnik akkor, ha a Nyírségnek a következőkben leírt többi formációját is figyelembe vesszük. A Középdunai flóratájék ammophil flórájának számos növényfaja, mint pl. *Secale silvestre*, *Quercus lanuginosa*, *Astragalus austriacus*, *Fumana procumbens*, *Alkanna tinctoria*, *Echinops ritro* stb. a Nyírségen hiányzik, vagy legalább is háttérbe szorul rajta. Azt a növényföldrajzi képet, pl., a melyet a Duna-Tisza közén a fátlan, vagy a cserjés homokpuszta formációja nyújt (13., 26. old), hiába keressük a Nyírségen. Ezzel szemben pedig a Nyírség flórájába északibb és nedvesebb termőhelyi növényfajok keverednek, a mi — a mint említém — különösen akkor domborodik ki, ha a következő formációkat is figyelembe vesszük.

## XXVIII. A nyírségi, homokpusztai lápok formációja,

(10. kép, VII.)

Több helyen megvan a Nyírségen. Az, a melyet itt leírok, Nyirbátortól az Ecsedi-láp felé eső irányban, Bátorliget környékén van, az ú. n. Csapóberekben. Valóságos subarktikus tájék képe tárul itt elénk: nagy kiterjedésű zombékosok, nyiresek, a melyek flórája sokban emlékeztet a Moesz által leírt,<sup>1</sup> brassó-megyei Rétyi Nyirre. Hasonló reliktum-lápokat figyeltem meg a Délorosz sztepeken, szintén délibb fekvésű pusztai területeken, nevezetesen: a Voronyezsi sztepek közepette, sőt egyet még délebbre, a kirgiz pusztákon is, a Mugodzsar domboktól északra, az Aktjubinszki kerületben.

<sup>1</sup> MOESZ G., A Rétyi Nyir növényzete, •Magy. Botan. Lapok, 1910. 333. old.

A nyírségi lápok sok helyen zsombékosok. A zsombékokat úgy látszik főleg a *Carex stricta*, *C. paradoxa* és *Calamagrostis neglecta* ősrégi példányai alkotják.<sup>1</sup> Néhol szabályos közökkel elosztva 1 m magas oszlopok gyanánt emelkednek ezek ki; tetejükön viselve a nevezett *Carex* és *Calamagrostis* fajok ivesen széthajló, hosszú, vékony leveleiből álló üstököt. Az oszlopok tövén és törzsén *Nephrodium thelypteris* csokrok helyezkednek el, közöttük pedig a nyirkos láptalajon főleg *Menyanthes trifoliata* és *Comarum palustre* nő. A zsombékosokból itt-ott *Betula pubescens*, *Rhamnus frangula*, *Salix cinerea*, *Populus tremula* emeli koronáját, de sűrűbb erdő nem igen telepszik itt meg. Máshol a lápos talaj nem zsombékos, hanem magasra növő lápi növényzettel, nyírfa-csoportokkal és erdőrészetekkel benőtt sík terület. A kettő egymástól mint 1. a zsombékosok és 2. a nyírfa-igetes lápok associációja különböztetendő meg, azonban növényfajaik annyira keverednek, és a két associatio néhol annyira egybeolvad, hogy külön-külön floristikai jellemzésüket ez alkalommal még nem kísérelhetem meg. Fontosabb növényfajajukat ennél fogva a formatio jellemzéseül együtt sorolom fel. Ezek a már említetteken kívül a következők:

<i>Nephrodium thelypteris</i> ,	<i>Typha latifolia</i> ,
<i>Equisetum arvense</i> ,	<i>Sparanium ramosum</i> ,

---

<sup>1</sup> E zsombékok növényfajaira vonatkozólag az előzetes közleményemben (Botan. Közlemények, 1914. 51. old.) közöltek helyesbítenem kell. Bennük ugyanis a *Carex filiformis*-nak nincsen szerepe. Közleményembe ez a faj egy hiányos (a késői gyűjtés következtében termés nélküli) példány elnézése folytán, hibásan csúszott be. Erre gyűjtéseim teljes anyagának ismételt átvizsgálásakor jöttem rá és sietek a correctiót itt magam végezni, a mi mindig a legtisztább, és a saját közlés a legautentikusabb adat lévén, minden kétséget leginkább eloszlató eljárás. Ha ezt általánosan követnék és követték volna, úgy pl. az *Iris lepida*-t a Bánságban, a *Geranium collinum*-ot Erdélyben, az *Erica carnea*-t Sziléziában stb. stb. nem keresnök még most is hiába, és nem állnának a tudományban mint teljes biztonsággal *soha meg nem czáfolható* adatok. A KERNER-féle «zsombék-formatio» és a nyírségi között mindamellettt lényeges különbség áll fenn, habár a zsombék-oszlopok alkotásában mindkét esetben kétségtelenül a *Carex stricta*-nak jut a főszerep.

<i>Phragmites communis</i> ,	<i>Ranunculus lingua</i> ,
<i>Alisma plantago</i> ,	<i>Roripa amphibia</i> ,
<i>Butomus umbellatus</i> ,	<i>R. palustris</i> ,
<i>Typhoides arundinacea</i> ,	<i>Lythrum salicaria</i> ,
<i>Scirpus lacustris</i> ,	<i>L. virgatum</i> ,
<i>Sc. maritimus</i> ,	<i>Oenanthe aquatica</i> ,
<i>Sc. Tabernaemontani</i> ,	<i>Lysimachia vulgaris</i> ,
<i>Sc. holoschoenus</i> ,	<i>L. nummularia</i> ,
<i>Carex pseudocyperus</i> ,	<i>Scutellaria galericulata</i> ,
<i>C. hirta</i> ,	<i>S. hastifolia</i> ,
<i>C. riparia</i> ,	<i>Stachys palustris</i> ,
<i>C. vesicaria</i> ,	<i>Veronica anagallis</i> ,
<i>C. paludosa</i> ,	<i>Pedicularis palustris</i> ,
<i>Lemna minor</i> ,	<i>Galium palustre</i> ,
<i>Iris pseudacorus</i> ,	<i>Asperula aparine</i> ,
<i>Orchis palustris</i> ,	<i>Senecio paludosus</i> ,
<i>Stellaria aquatica</i> ,	<i>Ligularia sibirica</i> .

A zombékos szélein, a szárazabb, homokos, korhadékos hátakon: *Salix rosmarinifolia*, *Polygonum persicaria*, *Lychnis flos cuculi*, *Sisymbrium Sophia*, *Satureja acinos*, *Campanula cervicaria*, *Achillea millefolium* és más fajok nőttek.

A nyírségi zombékosokhoz habitusukkal és azzal, hogy főleg *Carex stricta* alkotta őket, hasonlók a KERNER A.-tól ismertetett<sup>1</sup> pestmegyei zombékosok. Flórájuk összetételében azonban amazok, subarcticus jellemvonásaik révén lényegesen elütnek ezektől. Fejlődéstörténeti szempontokból a Nyírség lápjai közelebbi kapcsolatban állanak a Dabas környékéről leirt turjánok formációjához. Az utóbbiak az Alföld homokpusztái közepette szintén reliktum-lápok és flórájuk, különösen pedig a mocsárszemek körül levő nyireseik, szintén glacialis reliktum-lápok. Ha ezek flórája kipusztulna onnan, úgy északi és hegyi növényfajaival, az Alföld homokpusztái közepébe az bizonyára sohasem telepedne vissza. Ezzel szemben a Soroksár környékéről KERNER-

<sup>1</sup> A. KERNER, Die Zombék-Moore Ungarns, Verhandl. Zool.-Botan. Ges. Wien, VIII. 1858. 35. és 315. old., VII. tábla.

től leírt *Carex stricta*-s zombékosok flórája ma is összetevődhetik ott bármikor.

### XXIX. A nyírségi homokterület erdős formációja

(10. kép, V, VI).

A hol a talaj emelkedettebb, ott az előbb említett nyírfaligetes lápokhoz, a «Csapó Berek»-hez, szárazabb talajú, domboktól, völgyektől változatos erdőségek formációja csatlakozik, a mely csupa lombos fákból és cserjékből áll. Az Alföld egyetlen, de máshol igen jellemző cserjéje, a *Juniperus communis*, a Nyírség e részéről úgy látszik teljesen hiányzik.

A szóban levő erdőségek nagy kiterjedésűek; bennük erdős, ligetes részletek tisztásokkal, mocsaras, ingoványos helyekkel váltakoznak és bennük az Alföldnek fajokban és egyedekben legdúsabb, leggazdagabb flórája diszlik. Az erdei növényvilág közepette pedig az itt-ott jelentkező szabad homokbuczkákon pusztai növényfajok, mint: *Chrysopogon gryllus*, *Gypsophila paniculata*, *Euphorbia Gerardiana*, *Helichrysum arenarium* stb. teszik változatossá ezt az érdekes formációt.

A formatio összes növényfajait meggyűjteni egy áttekintő növényföldrajzi tanulmányuton lehetetlen; és kerülni kívánom itt azt is, hogy flóra-listákat pusztai feljegyzés vagy irodalom alapján közöljek. Ez okból felsorolásom nyújt ugyan növényföldrajzi betekintést ez érdekes formatio növényvilágába, de annak gazdagságát koránt sem meríti ki.

Itt is két associatiót kell megkülönböztetni. Ezek egyike a nagyobb tisztások, rétek associatiója, a melyeknek legfeltünőbb növényalakja a *Veratrum album*; másika az erdő maga, a melyet itt-ott apróbb tisztások tesznek változatossá. Az utóbbiakon az *Epipactis palustris* és néhol az *Erigeron annuus* tömeges megjelenése tűnt fel. Ez a két associatio — a réteké és az erdőé — tulajdonképen két összefonódott külön formatio; és ilyenek gyanánt tekintendő a közéjük ékelődő mocsarak formációja és a homokbuczkás tisztásoké is. Utóbbi azonos a Nyírségnek előbb leírt homokpusztai formációjával (41. old.). Ez a négy formatio keveredik tehát itt össze egy szép és érdekes tájékká; közülük a tisztások és az



*erdők* flóraelemei a legközelebbi ökológiai vonatkozásban állanak egymással és egymástól itt nehezen is választhatók el. Ez okból növényfajaikat egybefoglalva sorolom fel a következőkben:

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| <i>Pteridium aquilinum,</i>                       | <i>Aristolochia clematitis,</i>   |
| <i>Phleum phleoides,</i>                          | <i>Silene multiflora,</i>         |
| <i>Alopecurus fulvus,</i>                         | <i>Melandryum album,</i>          |
| <i>Calamagrostis epigeios,</i>                    | <i>Dianthus glabriusculus,</i>    |
| <i>Holcus lanatus,</i>                            | <i>D. pontederac,</i>             |
| <i>Briza media,</i>                               | <i>Saponaria officinalis,</i>     |
| <i>Festuca arundinacea,</i>                       | <i>Clematis flammula,</i>         |
| <i>F. pratensis,</i>                              | <i>Thalictrum aquilegifolium,</i> |
| <i>Bromus asper,</i>                              | <i>Th. angustissimum,</i>         |
| <i>Bromus commutatus,</i>                         | <i>Th. galioides,</i>             |
| <i>Agropyrum intermedium,</i>                     | <i>Th. minus,</i>                 |
| <i>Carex tomentosa,</i>                           | <i>Turritis glabra,</i>           |
| <i>Juncus effusus,</i>                            | <i>Potentilla recta,</i>          |
| <i>J. articulatus,</i>                            | <i>Filipendula ulmaria,</i>       |
| <i>J. atratus,</i>                                | <i>Sanguisorba officinalis,</i>   |
| <i>J. bufonius,</i>                               | <i>Genista tinctoria,</i>         |
| <i>Lilium martagon,</i>                           | <i>Cytisus nigricans,</i>         |
| <i>Muscari comosum,</i>                           | <i>Ononis spinosa,</i>            |
| <i>Asparagus tenuifolius,</i>                     | <i>O. hircina,</i>                |
| <i>Polygonatum multiflorum,</i>                   | <i>Trifolium pannonicum,</i>      |
| <i>Iris variegata,</i>                            | <i>Anthyllis polyphylla,</i>      |
| <i>Gladiolus imbricatus,</i>                      | <i>Onobrychis viciaefolia,</i>    |
| <i>Orchis ustulata,</i>                           | <i>Lathyrus pratensis,</i>        |
| <i>Anacamptis pyramidalis,</i>                    | <i>Geranium silvaticum,</i>       |
| <i>Epipactis palustris,</i>                       | <i>Linum perenne,</i>             |
| <i>Salix cinerea,</i>                             | <i>Polygala vulgaris,</i>         |
| <i>Populus alba,</i>                              | <i>Euphorbia lucida,</i>          |
| <i>P. tremula,</i>                                | <i>E. villosa,</i>                |
| <i>Corylus avellana,</i>                          | <i>Acer tataricum,</i>            |
| <i>Quercus pedunculata,</i>                       | <i>Rhamnus cathartica,</i>        |
| <i>Ulmus scabra</i> (termés nél-<br>kül szedtem), | <i>Tilia tomentosa,</i>           |
| <i>U. glabra,</i>                                 | <i>Hypericum perforatum,</i>      |
|   | <i>H. montanum,</i>               |

<i>Chamaenerium angustifolium,</i>	<i>Viburnum opulus,</i>
<i>Cornus sanguinea,</i>	<i>Knautia arvensis,</i>
<i>Fraxinus excelsior,</i>	<i>Campanula glomerata,</i>
<i>Ligustrum vulgare,</i>	<i>C. persicifolia,</i>
<i>Myosotis silvatica,</i>	<i>C. rotundifolia,</i>
<i>Cerintho minor,</i>	<i>Inula salicina,</i>
<i>Teucrium chamaedrys,</i>	<i>I. hirta,</i>
<i>Nepeta pannonica,</i>	<i>Achillea asplenifolia,</i>
<i>Brunella laciniata,</i>	<i>A. pannonica,</i>
<i>Melittis melissophyllum,</i>	<i>Chrysanthemum leucanthemum,</i>
<i>Salvia pratensis,</i>	<i>Senecio erucifolius,</i>
<i>Verbascum phoeniceum,</i>	<i>Crepis foetida,</i>
<i>V. blattaria,</i>	<i>Cr. biennis,</i>
<i>V. lychnitis,</i>	<i>Cirsium pannonicum,</i>
<i>Scrophularia nodosa,</i>	<i>C. canum,</i>
<i>Veronica spicata,</i>	<i>Centaurea scabiosa,</i>
<i>V. orchidea,</i>	<i>C. axillaris,</i>
<i>V. longifolia,</i>	<i>Hypochaeris maculata,</i>
<i>Digitalis ambigua,</i>	<i>Leontodon hispidus,</i>
<i>Alectrolophus major,</i>	<i>Tragopogon orientalis,</i>
<i>Melampyrum cristatum,</i>	<i>Scorzonera purpurea.</i>
<i>Galium mollugo,</i>	
<i>G. verum,</i>	

\*

Ezzel az Alföldnek általam eddig megismert *természetes* növényformációit mind felsoroltam. Kétségtelen, hogy még mások is vannak és hogy az *associációk* pontos megállapítása, különösen pedig az összes növényfajok helyes besorolása terén még igen sok a tennivaló. Ez még évekre terjedő, kitartó munkát igényel. Nemkülönben az is, a mit már dolgozatom elején hangsúlyoztam, t. i. az Alföldről leirt növény-«*fajok*» helyes systematikai értékelése, szóval a részletes, *diagnosisis enumeratio*.

Itt csupán még két *formatio-csoportot* óhajtok megemlíteni, a melyeknek a szigoruan vett tudományos növényföldrajzi jellemzésben csak alárendeltebb jelentőségük van; annál nagyobb súlyuk van azonban gyakorlati szempontokból. Ezek: a *ruderális-* és a *kultur-növényekből álló formatiók*.

## XXX. A ruderalis növényformációk.

A fellazított talajba, utak szélére, házak, kertek közelébe, szántóföldekre előszeretettel települő ruderalis vagy gyomnövények, egy ilyen kisebb növényföldrajzi egységen belül, mint a milyen az Alföldi flórákörnyék, meglehetősen ugyanazok. Ezek formációiban a flóratájékokra való tagolódás nem, vagy igen kevéssé jut kifejezésre. Előfordulási viszonyaik a legtöbb esetben a véletlen eshetőségektől függenek. Egyes gyomnövényektől nem lehet ugyan megtagadni, hogy pl. inkább csak délen teremnek (pl. *Anchusa ochroleuca*), a legtöbbnek előfordulása azonban csak attól függ, hogy magvakkal, zsákokkal stb. véletlenül odaczipelték-e, vagy se. Ezen a réven azután localis ritkaságok is megtelepedhetnek minden növényföldrajzi jelentőség nélkül (például *Asperula orientalis*, *Xanthium orientale*, *Rudbeckia laciniata*, *Solidago serotina*, *Erechtites hieracifolius* stb.).

Az is kérdéses, hogy miként alkalmazható itt a formatio fogalma. Néha a *Centaurea cyanus* vagy az *Apera spica venti*, a *Papaver rhoeas*, *Delphinium orientale*, *Stachys annua*, *Carduus nutans*, *C. acanthoides*, *Centaurea micrantha*, *Oenothera biennis*, stb. oly impozáns tömegben lép fel a vetésben, ugaron, parlagokon stb., hogy tömegük külön-külön ruderalis formációnak volna nevezhető. Máskor azonban (legalább látszólag), ugyanolyan körülmények között, oly változatos csoportosulás mellett fordulnak elő, hogy az egyes fajok tömeges fellépésének növényföldrajzi értékét ez teljesen lerontja.

A következő felsorolásban néhány fajról tesztek említést, a melyek — anélkül, hogy külön gyűjtöttem volna az idevonatkozó adatokat — az Alföldre tett botanikai kirándulásaimon véletlenül ötlöttek szemembe.<sup>1</sup>

*Apera spica venti*,  
*Sclerochloa dura*,

*Bromus sterilis*,  
*Br. tectorum*,

<sup>1</sup> Gyomnövényeink összefoglaló leírását l. WAGNER J.: Magyarország gyomnövényei, 1908. Érdekes idevágó adatokat közöl MOESZ G. «Néhány bevándorolt növényünk» cz. cikkében; Botan. Közlem. 1910, 136. old. részletes irodalommal.

- Aegilops cylindrica*,  
*Hordeum murinum*,  
*Rumex acetosa*,  
*R. acetosella*,  
*Polygonum aviculare*,  
*P. convolvulus*,  
*P. persicaria*,  
*Chenopodium album*,  
*Ch. glaucum*,  
*Ch. hybridum*,  
*Ch. murale*,  
*Ch. vulvaria*,  
*Atriplex patulum*,  
*A. roseum*,  
*Salsola kali*,  
*Amaranthus retroflexus*,  
*Stellaria media*,  
*Holosteum umbellatum*,  
*Scleranthus annuus*,  
*Nigella arvensis*,  
*Delphinium consolida*,  
*D. orientale*,  
*Chelidonium majus*,  
*Glaucium corniculatum*,  
*Papaver rhoeas*,  
*Fumaria officinalis*,  
*Lepidium campestre*,  
*L. draba*,  
*L. perfoliatum*,  
*L. ruderale*,  
*Sisymbrium Loeselii*,  
*S. Sophia*,  
*Sinapis arvensis*,  
*Diplotaxis muralis*,  
*Raphanus raphanistrum*,  
*Berteroa incana*,  
*Conringia orientalis*,
- Reseda lutea*,  
*R. luteola*,  
*Trifolium arvense*,  
*Vicia grandiflora*,  
*Erodium cicutarium*,  
*Tribulus orientalis*,  
*Euphorbia cyparissias*,  
*E. helioscopia*,  
*Abutilon avicennae*,  
*Hibiscus ternatus*,  
*Thymelaea passerina*,  
*Oenothera biennis*,  
*Anagallis arvensis*,  
*Convolvulus arvensis*,  
*Heliotropium europaeum*,  
*Cynoglossum officinale*,  
*Lappula echinata*,  
*Asperugo procumbens*,  
*Anchusa officinalis*,  
*A. ochroleuca*,  
*A. italica*,  
*Nonnea pulla*,  
*Myosotis micrantha*,  
*Lithospermum arvense*,  
*Ajuga chamaepitys*,  
*Marrubium vulgare*,  
*Lamium purpureum*,  
*L. amplexicaule*,  
*Stachys annua*,  
*St. recta*,  
*Lycopsis arvensis*,  
*Linaria vulgaris*,  
*Veronica polita*,  
*V. praecox*,  
*V. triphylla*,  
*Melampyrum barbatum*,  
*Plantago major*,

<i>Valerianella olitoria,</i>	<i>Carduus nutans,</i>
<i>Erigeron canadensis,</i>	<i>Cirsium arvense,</i>
<i>Xanthium strumarium,</i>	<i>Onopordon acanthium,</i>
<i>X. orientale,</i>	<i>Centaurea cyanus,</i>
<i>Galinsoga parviflora,</i>	<i>C. micrantha,</i>
<i>Anthemis arvensis,</i>	<i>C. solstitialis.</i>
<i>A. tinctoria,</i>	<i>Cichorium intybus,</i>
<i>Matricaria chamomilla,</i>	<i>Crepis rhoeadifolia,</i>
<i>M. inodora,</i>	<i>Cr. biennis,</i>
<i>Artemisia vulgaris,</i>	<i>Cr. setosa,</i>
<i>A. pontica,</i>	<i>Cr. tectorum,</i>
<i>Carduus acanthoides,</i>	<i>Lactuca scariola,</i>

### XXXI. A kulturformatiók.

Az előbbieken több helyen rámutattam, hogy Alföldünk területét a mezőgazdaság és a kertészet oly nagy részén vette kultúra alá, hogy bizonyos termékenyebb talajfélések őseredeti flóráját ma már alig lehet megállapítani rajta. Ilyenek különösen a Bánság és Bácska löszterületei, a Tiszai flóratájék nem szikes, alluviális talajú részei, a Duna—Tisza közének termékeny homokú részletei, a melyek főleg a nyárfaerdős és ligetes formációk helyén terjeszkednek.

Ezek a területeken a legkülönfélébb kulturnövényekkel keverten találkozunk. Az Alföld négy flóratájékán úgyszólván minden kulturnövényünket kisebb-nagyobb mértékben mindenütt tenyésztik. A mezőgazdaság a szántóföldek, szőlők, rétek, sőt újabban a mesterséges legelők művelésével, — a kertészet a gyümölcsösök, veteményesek terjesztésével — és nem kis arányokban az erdőszet is erdők telepítésével úgyszólván mindenütt egyaránt közreműködik az Alföld termőképességének czélszerű kihasználásában és fokozásában.

Hogyha azt az irányt követjük, a melyben végig utaztam az Alföldet, először a Delibláti pusztá áll előttünk. Itt gazdaságilag, de egyszersmind növényföldrajzi szempontokból is azoknak a nagy kiterjedésű akáczos erdőknek van nagyobb jelentősége, a melyeket e homokpuszta délíbb, futóhomokos, régen

sivatagszerű részeire varázsolt a magyar erdészet.<sup>1</sup> A deliblái puszta kulturális jelentősége főleg ebben van. A legdélibb «kifújtt homoklapály» formációjába tett mezőgazdasági telepítvények nem sikerültek: ezen a talajon, a mint az illető formatio (II. 4. old.) tárgyalásában is említettem, úgy látszik hiába minden ez irányú törekvés. A deliblái puszta északibb részeiben a mezőgazdaságnak főleg a füves mezők (IV. formatio 7. old.) legelőül való kihasználása körül van szerepe. Ez azonban növényföldrajzilag jelentéktelen: az ősflóra kihasználásáról van itt szó és a beavatkozás főleg és majdnem kizárólag abból áll, hogy a teljesen viztelen homokhátak között mélyfúrásos kutakat létesítettek, a melyek lehetővé teszik a legelő állat otttartását. A kultúrával kapcsolatos utak, bevágások lejtőinek és futóhomokos oldalaknak megkötésére, az ottani pusztai flóra ujjmutatásait használva fel, főleg a *Festuca vaginata*-t vetik.

A deliblái homokpuszta *Tilia tomentosa* ligetei és ákácztelepítvényei a méhtenyésztés czélját is nagyban szolgálják.

A Bánság többi részét alluvium borítja. Itt a Duna közelébe eső hajdani mocsaras területek lecsapolás folytán nemsokára már teljesen eltűnnek; az Alibunári mocsaraknak is már csak apró tócsaszámba menő maradványain kutathatjuk ezek flóráját. Az egész területet meghódította a kultúra. Különösen a délibb részek növényföldrajzi képét főleg a tengeri (*Zea mays*) szabja meg; észak felé pedig hovatovább buzaföldek kalásztengere borítja a tájat. Ezeken kívül a legkülönbélebb mezőgazdasági növényeket kultiválják; közöttük természetesen a szőlőt is, különösen a lapályra támaszkodó lejtőkön. A legváltozatosabb vetéstáblák között Temesvár közelében egy alkalommal hatalmas riczinustáblát (*Ricinus communis*) is láttam.

A temesmegyei községekben, különösen délen, feltűnik az utasnak a nagyszabású selyemhernyótenyésztés is: az utakat mindenütt félig lekopasztott eperfák (*Morus alba*) szegélyezik.

---

<sup>1</sup> Erre vonatkozólag I. AJTAI J.: A deliblái kincstári homokpuszta, Erdészeti Lapok LX. 1912. 25., 65. old. A deliblái puszta fás növényeiről írt BERNÁTSKY J. A deliblái homok fás növényzete cím alatt. Erdészeti kísérletek, 1910, XII., 3—4. sz.

A Duna—Tisza közének délibb részei: a bács-bodrogmegyei lőszterületek szintén a legintenzívebb mezőgazdasági kultúra alatt állanak. Főleg a nagyterjedelmű buzaföldek szabják meg a tájék képét. Kultívalatlan területre, a mint előbb az illető helyen kiemeltem, alig akadunk. Csupán a dunamelléki áradásos területek ligetei és erdőségei s a beljebb fekvő szikesek képviselik az ősterületeket. Újabban e szikesek vizeinek lecsapolására társulatok alakultak. A lecsapolás után a szikes területek legelőinek javulását és legalább is azt reménylik, hogy a legelő állatok a szikes tócsák, tavak helyén is barangolhatnak. Ez a lecsapolás nagyobb eredményekkel nem is kecsegtethet: a a szikes tó medréről alig lehet egyéb, mint vakszik, vagyis olyan *Lepidium crassifolium*-os terület, a milyent Körtés és Horgos mellől leírtam (VIII. és XV. formatio, l. 11. és 18. old.). Az Alföld szikesei hasznosításának kérdésére alig van oly megoldás, a mely jelentékenyebb eredményekre vezetne. Javítani lehet valamit a helyzeten, de — legalább mai ismereteink szerint — sokat nem. A sziksót eltüntetni nem lehet, a sziksós talaj pedig kulturára nem alkalmas. Bő tere nyílik ugyan még e téren a kísérletezésnek; így pl. az idegenföldi sziklakó és legalább legeltetésre alkalmas növényfajokkal;<sup>1</sup> de elsősorban a hazai, legeltetésre alkalmas, sziklakó növényfajainkat<sup>2</sup> kell számításba venni és ezek közül a legmegfelelőbbeket mesterségesen megtelepíteni. Ezenkívül a fás növényekkel való beültetés kérdése is felszínen van. Igazi sziklakó fák tudtom szerint nincsenek sehol és legkevésbé a mi tájainkon. Egyik-másik fa- és cserjefaj<sup>3</sup> megnő ugyan a mérsékelt szikes helyeken, de csak apró, csenevész példányokká, úgy hogy nagyobb eredményt velük alig lehet elérni. Cserjékkel és apróbb fákkal benőtt szikest az Aral-tótól északra, Cselkár mellett láttam és pedig az *Elacagnus angustifolia* nőtte ezeket be egyes helyeken. A vakszikés foltokat azon-

<sup>1</sup> Ide vág MOESZ G. cikke: Az Alföld szikesei és az ausztráliai 'salt-bush. Természettud. Közl. 1909. 811. old.

<sup>2</sup> L. BERNÁTSKY J.: A magyar Alföld sziklakó növényzetéről. Ann. Mus. Nat. Hung. 1905, 121. old.

<sup>3</sup> L. BERNÁTSKY J.: A szikes talajok növényzete, különös tekintettel a befásítás kérdésére. Erd. Kísérletek, XI. 1913, 3—4. sz.

ban ez is szabadon hagyta és egyáltalán apró növésű volt úgy, hogy nagyobb hasznot nem igen hozhat. Mindamellett úgy a fás, — mint fűnemű — és különösen pozsgás sziklakó növényfajokkal, a jövő feladata Alföldünk szikesein kísérletezni. Ezzel természetesen a lecsapolásnak és mesterséges talajjavításnak is karöltve kell járnia.

A Duna—Tisza közének nagyrészt diluviális homokkal borított területe, vagyis a mi Középdunai flóratájékunk, a Bánság és a Bácska kultiválásától lényegesen eltérő, úgyszólván speciális gazdálkodás színhelye. A homokpuszták — a mi nyárfaligetes homokpusztái formációink területein — és maguk a futóhomokos részek is eléggé termékenyek; a humuszos, kissé kötöttebb, agyagosabb, ú. n. feketehomokos puszták pedig kiválóan jó szántóföldek: *szőlő, buza, dinnye, kajszinbaraczk* stb. dúsan terem rajtuk. A lazább homokú részekben azonban a szántott homokot könnyen hordja a szél; ezért sok helyen vetéskor, ültetéskor szalmát hengerelnek belé, hogy azt összetartsa.

Szeged, Szabadka, Kecskemét és általában Pestmegye homokpusztái ott, a hol jó a homok, úgyszólván teljesen kultúra alá vannak véve. Csupán a szikések és az előbbieken ismertetett eserjés homokpuszták formációjától (XX. 26. old.) jellemzett területek, valamint a turjános (XXII. 28. old.), mocsárszemes (XXIII. 30. old.) és mocsaras helyek és az ösrétek (22., 28., 29. old.) vannak érintetlen állapotukban, illetőleg a flóráról lényegesen befolyásoló beavatkozás nélküli használat (legeltetés és kaszálás) alatt.

A homokpuszták többi, legnagyobb részén intenzív gazdálkodás folyik: nagy vetéstáblák csatlakoznak egymáshoz és néhol az egész pusztát gyümölcsös kertekre, dinnyésekre van osztva. Ezekből sok különlegesen jó termény kerül ki; a mint az például a kecskeméti meggyről, kajszinbaraczkáról, a szegedi paprikáról stb. általánosan elismert. Hogy milyen dús veteménytermést lehet a homokon elérni, azt bőségesen bizonyítják a Budapest körüli bolgár kertészetek is. A Duna—Tisza köze homokpusztáinak kulturformációi között hovatovább nagyobb jelentősége van az erdőknek is. Legnagyobb szerepe és jelentősége a száraz homokpusztákon az ákáczerdőknek van, ezenkívül *Pinus*



*silvestris* és *Pinus laricio* telepítvényekkel találkozunk és különösen az utóbbi ígér szép eredményeket.<sup>1</sup>

A Tiszai flóratájék alluviuma különösen buzatábláktól van borítva. Emellett azonban tengeri, szőlő, dohány, repce, lóhere és általában a legkülönbélebb, főleg mezőgazdasági növényeket kultiválják síkságain. Ezenkívül pedig, különösen városok közelében, a kertészet, gyümölcészet is virágzó. Termékeny pusztáit gyakran kiterjedt szikes mezők váltják fel, különösen a Tisza lassú folyású vizeinek: a Tápiónak, Zagyvának, Hortobágnak környezetén. Legnagyobb a szikes mezők között a Hortobágy, a melyet eddig úgyszólván kizárólag ősi állapotában, legelő gyanánt használtak. A folyamatba tett parcellázás a nagy Hortobágy jövőjére nézve mindenesetre új perspectivát nyújt. Az Alföld szikes mezőiről előbb mondottak azonban a Hortobágyra is teljes mértékben vonatkoztathatók: egyes részletei, különösen pedig a magasabban fekvő mezőség (39. old.), itt-ott eredménynyel lesznek kultiválhatók. A «szikfok», a «szikpadka» és a «laposok» (XXVI. formatio 2., 3., 4. associatiója) azonban, a már említettek szerint, a szántó-vető- és kertgazdaság számára kevés eredményt nyújtanak.

A Nyírség, növénykulturái tekintetében, sokban hasonlít a Duna—Tisza közének diluviális homoktól borított részéhez; csak hogy nyirkosabb volta és nagy kiterjedésű mocsaras, lápos és erdős területei speciális viszonyokat teremtenek.

Szabad homokpusztái eléggé bő és állandó termést adnak, a mi fennebb a XXVII. formatio tárgyalásában is kiemelt, állandó talájdnedvességnek tudható be.

Az alföldi kulturformatiók e futolagos vázolásából is kiderül, hogy az Alföldi flórakörnyék kulturnövényei szempontjából bizonyos fokig egységes, épen úgy, mint vadon növe flórája is az. E mellett azonban az ismertettek szerint a Bánság, a Duna—Tisza köze, a tiszai tájék és a Nyírség kulturformatiói sokban el is ütnek egymástól: a négy flóratájékre való tagolódás a kulturnövényeken is visszatükröződik.

<sup>1</sup> L. Kriss F.: Az alföldi homokterületek erdősítésénél követendő újabb eljárások. Erdészeti Lapok, 1913, 7. füz.

### Növényföldrajzi összefoglalás.

Azok alapján, a miket az előbbieken leirt utamon észleltem, valamint a kapcsolatos irodalom és régebbi megfigyeléseim figyelembevételével, a következőkben kísérlem meg összefoglalni az Alföld növényföldrajzi tagolódását. Részletes körülhatárolásokról és így az illető vonalaknak a térképen való megvonásáról ez alkalommal még nem lehet szó; csakis arról, hogy van-e az Alföldnek oly jelentősebb növényföldrajzi tagolódása, a mely egyrészt ökológiai, másrészt fejlődéstörténeti okokkal kapcsolatosan jelentékenyebb növényföldrajzi értékkel bír?

A mint az Alföld fejlődéstörténeti növényföldrajzára vonatkozólag, a Dunai flórákerület többi flórákörnyékéhez viszonyítva a fennebb idézett<sup>1</sup> dolgozatomban bővebben kifejtettem: az Alföld olyan egységes flórákörnyék, a melyet csekély kivétellel nyugateurópai, szteplakó növényfajok jellemeznek. Ezzel teljesen egybevág az a körülmény, hogy egy tekintélyes sorozata ezeknek a pusztai növényeknek, ha változó arányokban is, de az egész Alföldi flórákörnyéken<sup>2</sup> előfordul.

Az Alföld flórájáról pontos számszerinti statisztikával nem rendelkezünk. Nehézségekbe ütközik az ilyennek összeállítása már csak azért is, mert a fajok irodalmunkban tulságosan fel vannak aprózva; még a nagyobb flóraműveinkből is túlmagas számokat kapunk. A megfelelő redukeziókat pedig ezidőszerint csak megközelítőleg lehetne végezni. Így értelmezendő — csupán a pusztai fajokra vonatkozólag — az a statisztika, a melyet egyik cikkemben közöltem.<sup>3</sup> A fenti szempontból kell megítélnünk BORBÁS-nak a magyar homokpusztákra vonatkozó felsorolása végösszegeit is, melyek szerint a Duna—Tisza közéről 103 fás és 612 fűnemű, a temesi homokpusztáról 92 fás és 506 fűnemű, a Nyírségről pedig 76 fás és 425 fűnemű homoklakó növényt sorol fel. E számok közül az utóbbira azonban ki kell

<sup>1</sup> Tuzson I.: Magyarország fejlődéstörténeti növényföldrajzának főbb vonásai. Math. és Természettud. Ért. XXIX. köt. 558. old.

<sup>2</sup> L. az id. dolgozat térképmellékletét.

<sup>3</sup> Természettud. Közl. 1914. 331. old.

emelnünk, a mint maga BORBÁS is megjegyzi, hogy adatai lényegesen hiányosak. Messzevezetne BORBÁS e dolgozatának adatait itt részletesen megbeszélnem. Nagy fáradsággal és növényismerettel készült, de a rendelkezésére álló adatok még nagyon hézagosak voltak. Csupán a formációk jellemzéséül az előbbieken tőlem közölt adatok között is eléggé tekintélyes azoknak a száma, a melyek a BORBÁS-tól felvettekhez képest helyesbités és pótlásszámba mennek.

Az Alföld növényfajainak és ezek elterjedésének megállapításában igen fontosak a fentem kívül BORBÁS V.-nek Békésmegye flórája<sup>1</sup> és Budapest flórája<sup>2</sup> czimű munkája; nemkülönben SIMONKAI L. Aradmegye növényvilága<sup>3</sup> és Nagyvárad flórája<sup>4</sup> czimű dolgozata. Ezekon kívül fontosak Alföldünk száklakó és fás növényeire vonatkozólag BERNÁTSKY J. dolgozatai;<sup>5</sup> továbbá Kecskemét vidékére HOLLÓS L.,<sup>6</sup> Kalocsa vidékére MENYHÁRTH L.,<sup>7</sup> Bács-Bodrogmegyére vonatkozólag PRODÁN GY.<sup>8</sup> és Csanádmegyére nézve THAISZ L.<sup>9</sup> czikkei. Ezek adatait a régibb irodalommal és saját gyűjtéseim eredményeivel egybevetve, az Alföldünket, mint egységes flórakörnyéket jellemző, annak minden részében előforduló növények közül a következő fajokat emelhetem ki:<sup>10</sup>

<sup>1</sup> Magy. Tud. Akad. Értek. a természettud. köréből. 1881, XI. 8.

<sup>2</sup> Budapestnek és környékének növényzete. 1879.

<sup>3</sup> Aradm. Monographiájá-ban. 1893.

<sup>4</sup> Nagyváradnak és vidékének növényvilága. 1890.

<sup>5</sup> A Magyar Alföld száklakó növényzetéről. Ann. Mus. Nat. Hung. 1905. 121. old. A magyar Alföld fás növényzete. Erdészeti kísérletek 1914. 3. sz.

<sup>6</sup> Kecskemét multja és jelene, 1896.

<sup>7</sup> Kalocsa vidékének növénytenyésztete, 1877.

<sup>8</sup> Adatok Bács-Bodrog m. flórájához. Botan. Közl. 1910, 149. old.

<sup>9</sup> L. 70. old. idézetét.

<sup>10</sup> Míg az eddigiekben közölt növények megvizsgált és egyetemünk növényrendszertani és növényföldrajzi intézetének herbáriumában levő, főleg az 1913. évi alföldi utamon gyűjtött példányokon alapszanak, addig úgy ez a lista, mint a továbbiak is — legalább részben — a fennemlített irodalomból vannak meritve.

A felsorolással nem törekedtem arra, hogy az Alföld minden részére elterjedő növények teljes jegyzékét közelítsem meg, hanem csak egy jellemző sorozatot igyekeztem itt adni.

<i>Chrysopogon gryllus,</i>	<i>A. repens,</i>
<i>Andropogon ischaemum,</i>	<i>A. intermedium,</i>
<i>Digitalia sanguinalis,</i>	<i>Hordeum maritimum,*</i>
<i>Stipa pennata,</i>	<i>H. murinum,</i>
<i>St. capillata,</i>	<i>Cyperus pannonicus,*</i>
<i>Crypsis aculeata,*<sup>1</sup></i>	<i>Sc. holoschoenus,</i>
<i>Heleochoa explicata,*</i>	<i>Carex verna,</i>
<i>H. schoenoides,*</i>	<i>C. distans,*</i>
<i>Phleum phleoides,</i>	<i>Juncus compressus,*</i>
<i>Agrostis alba,*</i>	<i>J. Gerardi,*</i>
<i>Calamagrostis epigeios,</i>	<i>Gagea pusilla,</i>
<i>Apera spica venti,</i>	<i>Allium flavum,</i>
<i>Avenastrum pubescens,</i>	<i>A. sphaerocephalum,</i>
<i>Arrhenatherum elatius,</i>	<i>A. vineale,</i>
<i>Koeleria gracilis,</i>	<i>Ornithogalum umbellatum,</i>
<i>Atropis distans,*</i>	<i>O. narbonense,</i>
<i>A. limosa,*</i>	<i>Muscari botryoides,</i>
<i>A. Peisonis,*</i>	<i>M. comosum,</i>
<i>Festuca arundinacea,</i>	<i>Asparagus officinalis,</i>
<i>F. pseudovina,*</i>	<i>A. tenuifolius,</i>
<i>F. vaginata,</i>	<i>Iris variegata,</i>
<i>F. sulcata,</i>	<i>I. subbarbata,*</i>
<i>Bromus hordeaceus,</i>	<i>Orchis coriophora,</i>
<i>B. commutatus,</i>	<i>O. morio,</i>
<i>Br. squarrosus,</i>	<i>O. ustulata,</i>
<i>Br. sterilis,</i>	<i>Anacamptis pyramidalis,</i>
<i>Br. tectorum,</i>	<i>Coeloglossum viride,</i>
<i>Beckmannia erucaeformis,*</i>	<i>Gymnadenia conopea,</i>
<i>Lepturus pannonicus,*</i>	<i>Epipactis latifolia,</i>
<i>Agropyrum cristatum,</i>	<i>Populus alba,</i>

<sup>1</sup> A \*-gal jelölt növények szikeseink fajai, melyek főleg a Középdunai és a Tiszai flórákörnyéken figyeltettek meg. Minthogy nagyrészt a Hortobágyon is megvannak, feltehető, hogy a nyírségi szikeseiken sem hiányzanak, de az utóbbiakról igen kevés adattal rendelkezünk.

A vízi és mocsári növényeket, — mint mediumhoz kötötteket és nagyrészt általánosan elterjedteket, — a felsorolásból kihagytam, legfeljebb egyes parti lakók vannak felvéve.



- P. nigra*,  
*P. tremula*,  
*Salix alba*,  
*S. cinerea*,  
*S. rosmarinifolia*,  
*Quercus pedunculata*,  
*Ulmus glabra*,  
*U. laevis*,  
*Rumex crispus*,  
*R. acetosella*,  
*R. limosus*,\*  
*Polygonum arenarium*,  
*Atriplex litorale*,\*  
*A. microspermum*,\*  
*A. roseum*,  
*Camphorosma ovatum*,\*  
*Kochia arenaria*,  
*Corispermum nitidum*,  
*Salicornia herbacea*,\*  
*Suaeda salsa*,\*  
*Salsola kali*,  
*S. soda*,\*  
*Cerastium anomalum*,\*  
*C. brachypetalum*,  
*C. semidecandrum*,  
*C. vulgatum*,  
*Holosteum umbellatum*,  
*Spergularia marginata*,\*  
*Alsine verna*,  
*Arenaria serpyllifolia*,  
*Silene conica*,  
*S. multiflora*,  
*S. otites*,  
*S. viscosa*,  
*Melandryum album*,  
*Gypsophila fastigiata*,  
*G. paniculata*,
- Kohltrauschia prolifera*,  
*Dianthus Pontederacae*,  
*Anemone silvestris*,  
*Myosurus minimus*,  
*Ranunculus bulbosus*,  
*R. lateriflorus*,\*  
*R. pedatus*,\*  
*R. polyanthemus*,  
*R. sceleratus*,  
*Thalictrum angustissimum*,  
*Th. aquilegifolium*,  
*Th. flexuosum*,  
*Th. galioides*,  
*Th. minus*,  
*Lepidium crassifolium*,\*  
*L. perfoliatum*,\*  
*Roripa Kernerii*,\*  
*Arabis hirsuta*,  
*Turritis glabra*,  
*Camelina microcarpa*,  
*Erysimum canescens*,  
*Alyssum calycinum*,  
*A. desertorum*,  
*A. tortuosum*,  
*Berteroa incana*,  
*Sedum caespitosum*,\*  
*S. Sartorianum* (a tiszai  
 flóratájékon ritka),  
*S. maximum*,  
*Saxifraga tridactylites*,  
*Pirus piraster*,  
*P. malus*,  
*Potentilla arenaria*,  
*P. argentea*,  
*P. recta*,  
*Filipendula hexapetala*,  
*Agrimonia eupatoria*,

- Rosa austriaca*,  
*R. dumetorum*,  
*R. spinosissima*,  
*Prunus fruticosa*,  
*Pr. mahaleb*,  
*Pr. nana*,  
*Genista tinctoria*,  
*Cytisus austriacus*,  
*C. nigricans*,  
*Medicago falcata*,  
*M. lupulina*,  
*M. minima*,  
*Trifolium alpestre*,  
*Tr. angulatum*,\*  
*Tr. arvense*,  
*Tr. campestre*,  
*Tr. diffusum*,  
*Tr. filiforme*,\*  
*Tr. fragiferum*,\*  
*Tr. laevigatum*,\*  
*Tr. montanum*,  
*Tr. parviflorum*,\*  
*Tr. striatum*,\*  
*Anthyllis polyphylla*,  
*Lotus siliquosus*,  
*L. tenuifolius*,\*  
*Dorycnium herbaceum*,  
*Astragalus asper*,  
*A. dasycanthus*,  
*A. excapus*,  
*A. onobrychis*,  
*A. virgatus*,  
*Oxytropis pilosa*,  
*Onobrychis viciaefolia*,  
*Vicia angustifolia*,  
*V. cracca*,  
*V. pannonica*,  
*V. tenuifolia*,  
*V. tetrasperma*,  
*V. villosa*,  
*Geranium pusillum*,  
*G. sanguineum*,  
*Linum austriacum*,  
*L. catharticum*,  
*L. hirsutum*,  
*L. perenne*,  
*Tribulus terrestris*,  
*Polygala vulgaris*,  
*Euphorbia Gerardiana*,  
*E. villosa*,  
*E. virgata*,  
*Acer campestre*,  
*A. tataricum*,  
*Rhamnus cathartica*,  
*Rh. frangula*,  
*Lavatera thuringiaca*,  
*Althaea pallida*,  
*Malva silvestris*,  
*Hypericum perforatum*,  
*Helianthemum vulgare*,  
*Viola arvensis*,  
*Eryngium campestre*,  
*Bupleurum tenuissimum*,\*  
*Pimpinella saxifraga*,  
*Seseli annuum*,  
*S. varium*,  
*Peucedanum arenarium*,  
*Orlaya grandiflora*,  
*Statice Gmelini*,\*  
*Vinca herbacea*,  
*Cynanchum vincetoxicum*,  
*Cynoglossum officinale*,  
*Anchusa officinalis*,  
*Nonnea pulla*,

- Myosotis stricta*,  
*Lithospermum arvense*,  
*L. officinale*,  
*Onosma arenarium*,  
*Echium vulgare*,  
*E. rubrum*,  
*Ajuga genevensis*,  
*Teucrium chamaedrys*,  
*Brunella laciniata*,  
*Stachys germanica*,  
*Calamintha acynos*,  
*Thymus Marshallianus*,  
*Verbascum blattaria*,  
*V. lychnitis*,  
*V. phlomoides*,  
*V. phoeniceum*,  
*Veronica chamaedrys*,  
*V. longifolia*,  
*V. multifida*,  
*V. orchidea*,  
*V. prostrata*,  
*V. spicata*,  
*V. verna*,  
*Euphrasia stricta*,  
*Odontites lutea*,  
*O. rubra*,  
*Melampyrum arvense*,  
*M. cristatum*,  
*Plantago arenaria*,  
*Pl. maritima*,\*  
*Pl. sibirica*\* (inkább a ke-  
 leti részekén),  
*Pl. tenuiflora*,\*  
*Galium pedemontanum*,  
*G. verum*,  
*Viburnum opulus*,  
*Cephalaria transsilvanica*,
- Knautia arvensis*,  
*Scabiosa ochroleuca*,  
*Campanula glomerata*,  
*C. rapunculus*,  
*C. sibirica*,  
*Aster tripolium*,\*  
*Linosyris vulgaris*,  
*Gnaphalium luteo album*,  
*Helychrysum arenarium*,  
*Inula germanica*,  
*I. oculus Christi*,  
*Anthemis tinctoria*,  
*A. ruthenica*,  
*Achillea asplenifolia*,\*  
*A. Neireichii*,  
*A. pannonica*,  
*A. setacea*,  
*Artemisia absinthium*,  
*A. campestris*,  
*A. monogyna*,\*  
*A. scoparia*,  
*A. vulgaris*,  
*Senecio campester*,  
*S. Jakobaea*,  
*S. vulgaris*,  
*Xeranthemum annuum*,  
*Jurinea mollis*,  
*Centaurea Rhenana*,  
*Leontodon hispidus*,  
*Crepis biennis*,  
*Cr. rhoeadifolia*,  
*Cr. setosa*,  
*Cr. tectorum*,  
*Hieracium Bauhini*,  
*H. echioides*,  
*H. pilosella*,  
*H. umbellatum*,

<i>Hypochaeris maculata,</i>	<i>Tr. orientalis,</i>
<i>Taraxacum serotinum,</i>	<i>Scorzonera hispanica,</i>
<i>Chondrilla juncea,</i>	<i>Sc. Jacquiniiana,*</i>
<i>Tragopogon floccosus,</i>	<i>Sc. purpurea.</i>

Eme felsorolt és még más, az egész Alföldi flórákörnyéken elterjedt növényfajok arra vallanak, hogy bizonyos fokig egységes flóráterülettel van dolgunk. Másrészt azonban az Alföld flórájában eléggé mélyreható különbségek is vannak, a mit — habár a továbbiaktól eltérő módon és kevésbé határozottan — már SIMONKAI is kifejezésre juttatott.<sup>1</sup>

Az előzőekben kifejtettek szerint az Alföldi flórákörnyéken négy flóratájékot különböztethetünk meg, a melynek növényzete úgy ökológiai, mint statisztikai szempontból, de fejlődéstörténetileg is lényegesen elütő egymástól. Ez a négy flóratájék: 1. a Bácsági-, 2. a Közép-dunai-, 3. a Tiszai- és 4. a Nyírségi flóratájék. Rövid jellemzésüket most már, az előzőekben és az irodalomban rendelkezésünkre álló adatok alapján, a következőekben foglalhatom össze.

### 1. A Bácsági flóratájék.

Legnagyobb súlyt helyeztem e flóratájéknál a deliblati homokpusztára és szűkebb környezetére, a mely leginkább kifejezi a Bácsági flóratájékot és a melynek a vele északon határos flóratájékokkal szemben egyik legfontosabb sajátossága az, hogy vonatkozásokat mutat a déljobb, a szerémségi- és némileg a Keletmagyarországi flórákörnyékhez, sőt az Illyriai flórákerülethez is. Ezenkívül belőle az Alföld többi flóratájékának számos fontos növénye hiányzik. Az előbbi sajátosság földrajzi fekvésével és így fejlődéstörténeti okokkal kapcsolatos. Az utóbbi, t. i. a hiányok, úgy hiszem, ezenkívül ökológiai okokkal is. A Bácsági flóratájék északi határa csakis részletes, további vizsgálatok alapján lesz megvonható; talán Versecz tájékán, kelet—nyugati irányban.

<sup>1</sup> SIMONKAI L.: Növényföldrajzi vonások. Math. Természettud. Közl. XXIV. 1891. 577.



Az alább jellemzésül felsorolt növényfajok két csoportra oszlanak. Egyikük olyan fajokból áll, a melyek az Alföldi flóra-környék másik három tájékáról hiányzanak, csakis a Bánságin vannak meg; másik csoportjuk pedig olyanokból, a melyek amazokon vannak meg és a Bánsági flóratájékon hiányzanak. Illetőleg mindkét esetre vonatkozólag: ha meg is vannak, de az illető területre vonatkozólag csak az érintkezési részen; vagy viszonylagosan azon igen alárendelt szerepet játszanak. Az utóbbi növények \*-gal jelölve. Külön ki kell itt emelnünk, hogy az Alföldet környező dombvidék itt és általában az összes tárgyalásaimban, mint az Alföldhöz nem tartozó rész, teljesen figyelmen kívül marad.

*A Bánsági flóratájék jellemző növényei, melyek az Alföld többi részén hiányzanak, vagy itt alárendelt szerepűek:*

<i>Erythronium dens canis,</i>	<i>Astragalus dasyanthus,*</i>
<i>Allium ammophilum,</i>	<i>Linum tauricum,</i>
<i>Fritillaria tenella,</i>	<i>Euphorbia paradoxa,*</i>
<i>Quercus hungarica,*</i>	<i>Cotinus coggygria* (a titeli</i>
<i>Q. Streimii,</i>	<i>fennsíkon is),</i>
<i>Comandra elegans,</i>	<i>Rhamnus tinctoria,</i>
<i>Helleborus odoratus,</i>	<i>Malva erecta,</i>
<i>Paeonia tenuifolia,</i>	<i>Tilia tomentosa (a Nyírségi</i>
<i>P. peregrina,</i>	<i>flóratájékon is),</i>
<i>Potentilla alba,</i>	<i>Hypericum elegans,*</i>
<i>Rosa<sup>1</sup> transsilvanica,*</i>	<i>Oenanthe banatica,*</i>
<i>R. solstitialis,</i>	<i>Gentiana cruciata,</i>
<i>R. hemitricha,</i>	<i>Rindera umbellata,</i>
<i>R. micrantha,</i>	<i>Anchusa ochroleuca,</i>
<i>R. pseudocuspidata,</i>	<i>Veronica crinita,</i>
<i>Genista hungarica,*</i>	<i>V. hybrida,</i>
<i>Cytisus hirsutus,</i>	<i>Asperula montana,</i>
<i>Trifolium pallidum,*</i>	<i>Lonicera xylosteum,</i>

<sup>1</sup> A felsorolt *Rosa* fajokat BOBBÁS «A magyar homokpuszták növényvilága» (61. old.) nyomán közlöm. L. különben általában a fennebb, a 3. és 56. oldalon, a nomenklaturára vonatkozólag előrebocsátottakat.

<i>Aster canus</i> ,*	<i>Senecio vernalis</i> ,*
<i>A. punctatus</i> ,*	<i>Centaurea atropurpurea</i> ,
<i>Artemisia latifolia</i> ,	<i>Scorzonera stricta</i> ,

Számszerint nem sok az, a mit itt felsoroltam; vannak azonban ezek között igen sokat mondók. Ha a II., III. és IV. formációban leírt *Tilia tomentosa*-s ligetekre gondolunk, melyek alját a *Comandra elegans*, *Fritillaria tenella*, *Artemisia latifolia* ékesíti; vagy a *Rindera umbellata*-s mezőkre, a melyeken a keleti puszták *Paeonia tenuifolia*-ja diszlik stb., akkor ezek mindegyikét külön-külön is nagy növényföldrajzi értékkel kell felruháznunk.

Hozzájárulnak még a növényföldrajzi különbséghez azok a növényfajok, a melyek az Alföld többi flóratájékán megvannak, a Bánsági flóratájékon pedig hiányzanak vagy viszonylag igen alárendelt szerepet játszanak.

A melyekről biztosan tudom, hogy megvannak, de az utóbbiakhoz sorozandók, azok nemcsak ebben, hanem az illető flóratájékre vonatkozólag a további felsorolásokban is \*-gal jelölvék.

<i>Apera spica venti</i> ,*	<i>Quercus conferta</i> *
<i>Bromus patulus</i> ,	<i>R. acetosella</i> ,*
<i>Br. sterilis</i> ,*	<i>Atriplex tataricum</i> ,
<i>Elymus caput medusae</i> ,	<i>Corispermum hyssopifolium</i>
<i>Carex praecox</i> ,	(a Tiszai flóratájékról nincs
<i>Arum maculatum</i> ,	adatom),
<i>Allium scorodoprasum</i> ,*	<i>Cerastium obscurum</i> ,
<i>A. vineale</i> ,	<i>Silene longiflora</i> ,
<i>Iris arenaria</i> ,	<i>S. nutans</i> ,
<i>Corylus avellana</i> ,	<i>Dianthus polymorphus</i> , <sup>1</sup>
<i>Alnus incana</i> ,	<i>D. collinus</i> ,

<sup>1</sup> Hiányzik a Tiszai flóratájékon is, vagy legalább is igen alárendelt szerepe lehet ott. Ez azonban nem oly meglepő, mint az, hogy a Bánság homokjáról hiányzik. L. még a 73. old. jegyzetét.

- D. serotinus* (HEUFFEL<sup>1</sup> említi, BORBÁS kérdésesnek mondja, én sem találtam, a Tiszai flóratájékon is hiányzik),  
*Ranunculus illyricus*,  
*R. pedatus*,\*  
*Papaver dubium*,  
*Thlaspi perfoliatum*,  
*Isatis tinctoria*,\*  
*Sisymbrium sinapistrum*,  
*Arabis auriculata*,  
*Bunias orientalis*,  
*Sedum bologniense*,  
*Rosa canina*,\*  
*Genista elatior* (a Nyírségről sem említik, én is ott csak a *G. tinctoria*-t láttam),  
*Cytisus biflorus*,  
*Medicago prostrata*,  
*Trifolium aureum* (a Tiszai flóratájékról az idézett dolgozatok szintén nem említik; én sem szedtem),  
*Tr. diffusum*,\*  
*Tr. rubens*,  
*Astragalus excapus* (a delibláti pusztáról HEUFFEL említi i. h. 58. old., de ez tévedés lesz; BORBÁS itt nem találta, én sem. A Tiszai flóratájékról is hiányzani látszik),  
*Vicia lathyroides*,  
*V. sordida*,  
*Staphylea pinnata* (a Tiszai flóratájékról sem említik),  
*Tilia cordata*,  
*Viola ambigua*,  
*V. arenaria* (a Tiszai flóratájékról is hiányzani látszik),  
*Chaerophyllum bulbosum*,  
*Ch. temulum*,  
*Bupleurum rotundifolium*,  
*Falcaria sioiides*,  
*Seseli glaucum*,  
*Libanotis montana*,  
*Feucedanum cervaria*,  
*P. oreoselinum* (az utóbbi négyre vonatkozólag a Tiszai flóratájékról sincsen biztos adat),  
*Androsace maxima* (elterjedése a Bánsági flóratájékon korlátolt, a Tiszai flóratájékról alig van biztos adat),  
*Pulmonaria mollissima*,  
*Ajuga chamaepitys*,  
*Teucrium montanum* (a Tiszai flóratájékról sincs adat),  
*Sideritis montana* (a Nyírségi flóratájékról sincs adat),  
*Dracocephalum austriacum*, (a tiszai flóratájékról sincs adat),  
*Phlomis tuberosa* (a Nyírségről sincs adatom, de a Hortobágyon THAISZ szerint megvan),  
*Salvia austriaca*,  
*Verbascum austriacum* (a Nyírségről sincs adatom),

<sup>1</sup> HEUFFEL J.: Enumeratio pl. in Banatu, 1858.

*V. thapsiforme* (a *Veronica arvensis* és *V. triphylla* elterjedt, közönséges fajt BORBÁS a delibláti homokpusztáról hiányzóznak jelzi. HEUFFEL a Bánát síkságairól mindkettőt felsorolja),  
*Melampyrum barbatum*,  
*Asperula cynanchica*,\*  
*Campanula bononiensis*.  
*C. rotundifolia* (a két utóbbit a Tiszai flóratájékról sem említik),  
*Filago montana* (a Tiszai flóratájékról sem említik),  
*Inula ensifolia*,  
*Artemisia pontica*,  
*Lactuca viminea*.

E «hiányzó» növényfajok kérdése mindenesetre igen nehéz: a behatóbb, újabb megfigyelések változtathatnak a sorozaton, sőt lehet, hogy kisebb, itt figyelembe nem vett források is tartalmaznak idevágó adatokat. HEUFFEL, BORBÁS<sup>1</sup> és BERNÁTSKY<sup>2</sup> munkáiból és a többi idézett dolgozathoz, valamint a magam kétszeri, eléggé intenzív gyűjtéséből a fenti sorozat adódik. Ezenkívül fontos ismételtén megjegyezmem, hogy a főszűly itt a delibláti pusztára esett és még egyáltalán kérdéses, hogy hol vonandó meg a Bánsági flóratájék északi határa. Nagy része azonban a fenti növényeknek e flóratájék fő kifejezőjéről, a delibláti pusztáról, tényleg hiányzik, avagy ha egyik-másik meg is van ott, igen szórványos lehet, csakis így kerülhette ki annyi megfigyelő szemét. Így a fenti növények mindenesetre az előbbi sorozattal együtt igen lényegesen hozzájárulnak a Bánsági flóratájék jellemvonásainak megismeréséhez.

## 2. A Középdunai flóratájék.

Attól a vonaltól terjed dél felé, a mely Vác tájékától a Mátra-hegység déli lábához vonható, egészen le, Ujvidék tájáig. — Még pedig nagy részben arra a homokterületre esik a flóratájék, a melyet a Duna változó medréről hordott a szél nyugat felé.

<sup>1</sup> BORBÁS V.: A magyar homokpuszták növényvilága, 1886.

<sup>2</sup> BERNÁTSKY I.: A delibláti homok fás növényzete. Erd. Kísérletek, 1910, 95. old.

Ennek a homokterületnek keleti határa fent pl. Czegléd táján, távol esik ugyan a Tiszától; Csongrádtól kezdve lefelé azonban egészen a Ferencz-csatornáig, majdnem a Tisza mellett vagy ahhoz igen közel halad. Ettől délre az aránylag sokkal kisebb bácsmegyei löszterületen folytatódik a Középdunai flóratájék, a mely utóbbi részlet a további jellemzésben kevésbé van figyelembe véve. Az első sorban jellemzett, túlnyomó része a Középdunai flóratájéknak tehát a Duna alluviális és diluviális homokján terül el, a mely terület, a mint ismeretes, geologiai szempontból is egységes. A Tiszától nyugatra eső részből a Tiszai flóratájéknak egy keveset csupán északibb részében, az Alpártól északra eső Tiszamentén juttat. Flóráját a laza homok pusztai növényfajai jellemzik, valamint a homokos szikések halophytái. Számos faj hiányzik úgy a megelőzőn, mint a Tiszai flóratájékon. Viszont a bánsági homokpuszták déli vonatkozású és a Nyírség északi vagy hegységi vonatkozású növényfajai róla hiányzanak. Számos kapcsolat fűzi a Duna, Morva, Rajna és más folyóknak tőlünk nyugatra eső homokos, kiszáradt medenczéihez. Fejlődéstörténeti szempontból flórája vonatkozásban áll a xerophyta növénysszövetkezetektől lakott déli és délnyugati hegyes-dombos vidék meleg klímájú, fátlan területeinek flórájával.

*Jellemző, az Alföld más flórájátékain hiányzó, vagy ott alig számottevő növényei a Középdunai flóratájéknak a következők:*

*Equisetum hiemale,\**  
*Ephedra vulgaris,*  
*Apera interrupta,*  
*Ventenata dubia,*  
*Melica ciliata,\**  
*Festuca valesiaca,\**  
*F. stricta,*  
*Bromus pannonicus,*  
*Haynaldia villosa,*

*Secale silvestre* (a Bánsági flóratájékról is említi, de kétes. L. BORBÁS: Magyar Homokpuszták, 71. old.),  
*Carex ericetorum,*  
*Carex humilis,*  
*Sternbergia colchiciflora\** (Békés megyében is),<sup>1</sup>  
*Iris pumila,\**

<sup>1</sup> L. THAISZ L.: Additamenta, Magy. Bot. Lapok, 1907. 166 oldal; és kérdéses helyen, NEILREICH, Nachtr. 21. old. BORBÁS V. Békésm. fl. 53. old.

- Ophrys aranifera*,  
*Orchis purpurea*,  
*Epipactis rubiginosa*,  
*Quercus lanuginosa*\* (a deli-  
 bláti pusztán is),  
*Kochia sedoides* (Békés megyé-  
 ben és Torontálban is),  
*Alsine setacea*,  
*Herniaria incana*\* (Debreczen  
 környékén is),<sup>1</sup>  
*Dianthus polymorphus* (a Nyir-  
 ségi flóratájékon is),  
*Thalictrum glaucescens*,  
*Thlaspi Jankae*,  
*Isatis praecox*\* (Arad megyé-  
 ben is),  
*Erysimum erysimoides*\*,  
*Alyssum linifolium* (csak a  
 titeli fennsík),  
*Reseda phyteuma*,  
*Crataegus nigra*\* (a bánsági  
 Duna-szigeteken is),  
*Rosa coriifolia*\*,
- R. obtusifolia*,  
*Cytisus biflorus*\*,  
*Astragalus linearifolius* (a Bán-  
 sági flóratájékon kérdéses),  
*Tribulus orientalis*\*,  
*Seseli hippomarathrum*,  
*Blackstonia perfoliata*,  
*Bl. serotina*,  
*Convolvulus cantabricus* (a  
 titeli fennsík),  
*Teucrium botrys*,  
*Salvia dumetorum* (talán Bé-  
 késmegyében is, l. BORBÁS :  
 i. h. 75. old.),  
*Thymus lanuginosus*\* (a Nyir-  
 ség szélén is),<sup>1</sup>  
*Globularia Willkommii*,  
*Scabiosa agrestis*,  
*Sc. canescens*,  
*Centaurea Sadleriana*,  
*Hieracium macranthum*,  
*H. praealtum*\*,  
*Scorzonera laciniata*\*.

E felsorolt fajok mellett némi növényföldrajzi súlylyal bir-  
 nak azok a növények is, a melyek a Középdunai flóratájékon  
 az Alföld többi flóratájékához viszonyítva hiányzóknak mutat-  
 hatók ki. Ilyenek a következők:

- Quercus austriaca*,<sup>2</sup>  
*Dianthus armeria*,  
*Clematis recta*\*,
- Rosa dumalis*,  
*Cytisus supinus* (a Tiszai flóra-  
 tájékról sincs adat),

<sup>1</sup> L. RAPAICS R.: Adatok Debreczen flórájához, Természettud. Füzt.,  
 1913. 2. füzt.

<sup>2</sup> BERNÁTSKY J.: A Magy. Alföld fás növényzete. Erd. kisérlet. 1914.  
 151. old. Szabadkáról említi. Vajjon őshonos-e ott? PRODÁN i. h. 152. old.  
 említi Bácsmegyéből; magam is gyűjtöttem itt, a bezdáni erdőben.

<i>Linum flavum</i> *,	<i>Viola silvestris</i> ,
<i>L. tenuifolium</i> * (e két <i>Linum</i> - faj a Tiszai flóratájék síkságain is hiányzik, vagy igen szór- ványos a halmos részekén),	<i>Trinia Kitaibelii</i> ,
<i>Tilia tomentosa</i> (a Tiszai flóra- tájékon is hiányzik),	<i>Nepeta pannonica</i> ,
	<i>Veronica foliosa</i> *,
	<i>Filago germanica</i> *,
	<i>Inula hirta</i> *.

Mindössze e néhány fajt gyanítom olyannak, mely az Alföld többi flóratájékához viszonyítva mint «hiányzó», a Duna-Tisza közéről említendő, melynek a mint előbb is említém, csak «némi» jelentőséget lehet tulajdonítanunk. A ki azonban a Duna—Tisza közét és a többi flóratájékat is ismeri, tudja jól, hogy sok hiányzik az előbbiből olyan, a mi a Tiszai, a Nyírségi és a Bánsági flóratájékon meg van és hogy növényföldrajzilag amaz jelentékenyen elűt az utóbbiak mindegyikétől. Hogy ez a körülmény a «csak róla hiányzó» fajokban kimutatásszerűen nem tüntethető fel, annak oka az, hogy pusztai növényoszövetkezetei mellett, aránylag kisebb jelentőséggel ugyan, de előfordulnak rajta mindenféle erdei, réti, hegységi növények is, és különösen változatossá teszik flóráját a délibb, dunamenti áradásos területek ligetei, erdőségei, a nyíres turjános részletek (l. 28. old.), valamint a bácskai löszterületek. Ezeknek növényfajai a Duna-Tisza közének zömét és növényföldrajzi különlegességét kitevő homokpusztákról hiányzanak, azonban az egész Középdunai flóratájékról mégsem mutathatók ki hiányzóknak. Hasonlóan áll a dolog a középdunai flóratájéknak a többihez viszonyítva «saját»-nak mondható, előbb (67. o.) felsorolt növényfajaival is: «Dunai» jellegű homokpuszta-foltok előfordulnak a Tiszai flóratájékban, sőt úgy látszik még a Hortobágyon is. Ezeken pedig, mint flóraszigeteken, a Középdunai flóratájék számos jellemző homokpusztai növényfaja megvan. Így — habár ezek a Tiszai flóratájékon alig birnak jelentőséggel — mégsem mutathatók ki, mint *csakis* a Duna-Tisza közén előfordulók.

Így a Középdunai flóratájék jellemzésekor azokra a felsorolásokra kell nyomatékosan rámutatnunk, a melyek az előbbieken Vármegyehatár — Kiskunhalas — Szeged — Csepelsziget — Ká-

posztásmegyer—Monor vidékének pusztai flórájára vonatkoznak. Igen érdekes és fontos továbbá az a felsorolás, a melyet PRODÁN Gy. Bács-Bodrog megye területéről<sup>1</sup> és a titeli fennsíkról<sup>2</sup> adott. Az utóbbi részletnek egyes növényfajok, mint az *Alyssum linifolium*, *Cotinus coggygria*, *Convolvulus cantabricus* igen sajátosságos jelleget kölcsönöznek, úgy, hogy ha nem volna csak egy kisebb, elütő flóraszízigetről szó, a Középdunai flóratájéktól való különválasztás kérdése merülne fel.

### 3. A Tiszai flóratájék.

Dél felé a bánsági flóratájékhoz csatlakozva, a Tisza és mellékfolyói iszapjából alakult síkságon terjed el, főkép a Tisza folyó és a Keletmagyarországi flórakörnyék határa között. Legjellemzőbb kifejezője a Hortobágy. Sok rajta a fátlan terület, a nagy kiterjedésű, agyagos, szíkes és a félig sós «lapos» terület. Hiányzik rajta, illetőleg csakis egyes kisebb homokfoltjaira szorul nemesak a Bánsági, hanem a Középdunai flóratájék számos homoklakó pusztai növénye; nemkülönben a Nyírség némely északibb növényfaja is. Agyagos szíkeseinek is más összetételű a flórája, mint a Középdunai flóratájék homokos szíkeseié. Keleti határszélén, a mint SIMONKAI Nagyvárad flórájában (25. old.) kifejti, gyakoriak a Keletmagyarországi flórakörnyékkel való vonatkozások.

A Tiszai flóratájék területére vonatkozik két nagyobb flóramunka, ú. m. SIMONKAI L. Arad vármegye és Arad természetrajzi leírása (1893), továbbá BORRÁS V. Békés megye flórája.<sup>3</sup> Ezenkívül adatokat tartalmaz BORRÁS V.-nek «A magyar homokpuszták» című, már többször idézett dolgozata, a melyeket BORRÁS Debreczen és Hajdu megye leírásából (1882) merített. Számos adatot közöl a területről THAISZ L. is.<sup>4</sup>

A Tiszai flóratájéknak flóra-listákkal való jellemzése épen

<sup>1</sup> Botanikai Közlemények, 1910, 149. old.

<sup>2</sup> Magyar Botanikai Lapok, 1911, 325. old.

<sup>3</sup> M. T. Akad. Értek. 1881, XI. 8.

<sup>4</sup> THAISZ L.: Florisztikai adatok Csanád vármegyéből, Növényt. Közl. 1902. 2. füz.; Adatok Csongrád vármegye növényzetének ismeretéhez, u. o. 1903. 89. old.; Addit. nov. Fl. Hung. Magy. Bot. Lapok, 1907. 166. old.



oly, sőt még nagyobb nehézségekbe ütközik, mint a Középdunai flóratájéké. Az okozza ezt, hogy a mint nyugaton a Középdunai, épen úgy érezteti rajta délen a Bánsági flóratájék hatásait; keleti határa pedig az erdélyi hegyvidékkel érintkezve, ezzel mutat floristikai kapcsolatokat anélkül, hogy ez szabná meg a Tiszai flóratájék zömét kitevő, fátlan, részben szikes mezők és laposok flóráját.

A keleti és délkeleti érintkezési tájéknak (nem értve ide a dombvidék szélét, hanem csakis az alföldi lapály széleit) sajátos flóraviszonyait igen érdekesen világítja meg az a flóra-lista, a melyet SIMONKAI az aradmegyei «alföldi erdők» leírásában nyújt,<sup>1</sup> a melyben megtaláljuk pl. a

<i>Cynosurus cristatus,</i>	<i>R. dimorpha,</i>
<i>Festuca myurus,</i>	<i>R. transsilvanica,</i>
<i>Quercus conferta,</i>	<i>Hypericum hirsutum,</i>
<i>Cardamine impatiens,</i>	<i>Verbascum nigrum,</i>
<i>Spiraea media,</i>	<i>Galium rubroides,</i>
<i>Potentilla chrysantha,</i>	<i>Carpesium cernuum,</i>
<i>Rosa caryophyllacea,</i>	<i>Achillea crythmifolia,</i>

stb. fajt. Hasonló keleti vonásokat találunk Nagyvárad vidékén, a honnan SIMONKAI pl. felsorolja a

<i>Melica picta,</i>	<i>R. transsilvanica,</i>
<i>Orchis elegans,</i>	<i>Mentha cuspidata,</i>
<i>Ranunculus Steveni,</i>	<i>M. reversa,</i>
<i>Thalictrum peucedanifolium,</i>	<i>M. Skofitziana</i>
<i>Rosa solstitialis,</i>	

<sup>1</sup> Az ú. n. «*subtilis*» fajokat vagy «*fajocskákat*» lehetőleg nem vettem figyelembe sem SIMONKAI, sem másnak a dolgozatából. Ezen a téren sok esetben átlépték a *legszélsőbb* határokat is. Hiába igyekeznek a «fajocskák» kifejezéssel helyreigazítani a túlhajtott fajfaragást; a tudomány ilyen kategoriákat nem ismer és bizonyára nem is fogja ezeket bevenni soha. Egykönnyen azonban nem tudunk szabadulni tőlük: csak hosszantartó monographikus munkák küszöbölhetik ki azokat. A mennyiben állandó alakok, növényföldrajzilag fontosak; azonban systematikai szempontokból, mint «fajok», nem engedhetők meg. Teljes tudatában vagyok annak, hogy itt-ott dolgozatomban is szerepelnek ilyen fajocskák.

fajokat, mint keleti flóraelemeket. Ezekkel szemben pedig kiemeli SIMONKAI Nagyvárad flórájára vonatkozólag több, a nyugatibb Alföld tipikus növényének elmaradását, mint :

<i>Tragus racemosus,</i>	<i>Dianthus serotinus</i> (úgy látszik az egész Tiszai flóratájékról hiányzik. A Bánáti flóratájékon is kérdéses),
<i>Crypsis aculeata,</i>	
<i>Heleochoa schoenoides,</i>	
<i>Cyperus pannonicus,</i>	
<i>Polygonum arenarium,</i>	<i>Alyssum minimum,</i>
<i>Camphorosma,</i> —	<i>A. montanum,</i>
<i>Kochia-</i> és <i>Suaeda</i> -fajok,	<i>Glycyrrhiza echinata,</i>
<i>Salsola soda,</i>	<i>Tribulus orientalis,</i>
	<i>Artemisia monogyna.</i>

A Tiszai flóratájék jellemző növényközösségeit az említett keleti szegélyen tehát már nem, vagy lényegesen megváltozva találjuk, úgy, hogy a Tiszai flóratájék igazi képét azok a flóra-listák nyújtják, a melyek pl. BORBÁS V. Békés vármegye flórájában és a tőlem az előbbieken Újszász környékéről, a Tápió és Zagyva vidékéről és a Hortobágyról közölvék (33.—41. old.).

Keleti növényfajok itt-ott elvetődnek a Tiszai flóratájék beljebb eső részeibe is, különösen pedig az itt-ott levő erdős részletekbe. Ez épen jellemző a Tiszai flóratájékra; azonban számuk a Tiszai Alföld igazi belsejében nagyon megcsappan. Így BORBÁS Békés megye flórájában (24. old.), fás vidékéről szólva, már csak a következőket említi ilyenek gyanánt :

<i>Melica altissima,</i>	<i>Chrysanthemum serotinum,</i>
<i>Polygonatum latifolium,</i>	<i>Hieracium auriculoides,</i>
<i>Hesperis runcinata,</i>	<i>Lactuca Chaixii,</i>
<i>Aster punctatus,</i>	<i>L. quercina.</i>
<i>Inula salicina,</i>	

Úgy látszik, hogy a Tiszai flóratájék száraz, füves mezőin hajdan a *Salvia nutans* is elterjedtebb volt, mint most (I. BORBÁS : Békés megye flórája 75. o. és THAISZ L. : Addit. Magy. Bot.

Lap. 1907, 167. old.). Különben Kecskemét száraz legelőin is megvolt régente ez a tipikus pusztai növény (l. HOLLÓS: Kecskemét növényzete, 87. old.).

A Középdunai flóratájék homokpusztáinak flóraelemei — a mint előbb is említém — szintén több helyen fellépnek a Tiszai flóratájékon. Így BORBÁS szerint Orosháza, Szarvas, Kondoros vidékének homokpusztafoltjain a következő fajait találjuk meg a Középdunai flóratájéknak: <sup>1</sup>

<i>Equisetum ramosissimum,</i>	<i>Trigonella monspeliaca,</i>
<i>Koeleria cristata,</i>	<i>Astragalus austriacus,</i>
<i>Carex Schreberi,</i>	<i>Linum austriacum,</i>
<i>Allium Borbásii,</i>	<i>Euphorbia Gerardiana,</i>
<i>Salsola kali,</i>	<i>Lappula echinata,</i>
<i>Cerastium semidecandrum,</i>	<i>Nonnea pulla,</i>
<i>Silene viscosa,</i>	<i>Calamintha acynos,</i>
<i>Thalictrum flexuosum,</i>	<i>Thymus Marschallianus,</i>
<i>Sisymbrium sinapistrum,</i>	<i>Crepis rhoeadifolia,</i>
<i>Erysimum canescens,</i>	<i>Taraxacum serotinum,</i>
<i>Alyssum minimum,</i>	<i>Scorzonera laciniata.</i>
<i>A. calycinum,</i>	

Ezekkel szemben BORBÁS Békés megyére nézve hiányzóknak jelzi (19. o.) a *Lepidium crassifolium*-ot, *Achillea asplenifolia*-t és *Aster canus*-t, a melyet SIMONKAI sem említ, sem Nagyvárad, sem Arad megye flórájában.

Nagyvárad mellől pedig SIMONKAI a mi Középdunai flóratájékunk következő fajait említi:

<i>Agropyrum cristatum,</i>	<i>C. ratisbonensis,</i>
<i>Silene mutans,</i>	<i>Melilotus macrorrhizus,</i>
<i>Cytisus biflorus,</i>	<i>Trifolium parviflorum,</i>
<i>C. pallidus,</i>	<i>Aster punctatus,</i>

<sup>1</sup> BORBÁS felemlíti e dolgozatában (18. old.), hogy a *Dianthus polymorphus* az iméri, vésztői, fási szikeseken nő. Ez is a Középdunai flóratájék jellemző növénye volna, de itt tévedés van a dologban, mert a *Dianthus polymorphus* szíkes helyen nem terem.

Mint a Tiszai flóratájéokra jellemzőre kell itt rámutatnunk arra a felsorolásra, mely a csakis, vagy főleg a Középdunai flóratájékon szereplő növényfajokat tartalmazza (209. old.) és így a Tiszai flóratájékkal szemben különbséget jelentve, magát az utóbbit is jellemzi. Ezenkívül pedig fontosak a Tiszai flóratájék növényei közül azok, amelyeket az újszászi és hortobágyi szikes mezők, szikpadka, szikfok és laposok flórájából felsoroltam (177.—183. old.).

Ha a Tiszai flóratájéknak mindeme jellemvonásait, valamint még egyes sajátosságait, mint pl. *Bulbocodium ruthenicum*, *Vicia picta* stb. figyelembe vesszük, az Alföld másik három flóratájékától lényegesen elütő területrész domborodik ki előttünk.

#### 4. A Nyírségi flóratájék

azt a homokterületet foglalja el, a mely az Ecsedi-Láp és Nyíregyháza közötti és Debreczentől északra eső alföldi területrészen terjed el. Jellemzi az, hogy a Középdunai flóratájék szárazabb és forróbb homokjának növényfajai közül több hiányzik rajta; de még inkább az, hogy flórája számos északi, lápi növényfajt tartalmaz és így pleistocaen relictum-flóraterrületnek tekinthető. Finom, diluviális homoktalaját a Tisza, Túr, Szamos, Zilah és más környező vizek hordták ki az Északkeleti és Keleti Kárpátok völgyeiből. Az e vizektől bőségesen áztatott homokteknőkben valamikor subarktikus természetű lápok keletkeztek, melyek növény-szövetkezetének számos faja ma is megvan. Ebben a tekintetben hasonlít a Nyírség pl. a floristikailag Moesz-től<sup>1</sup> ismertetett Rétyi Nyírhez vagy pedig a Délorosz pusztáknak tölem ismertetett chrjenovojei relictum-lápjához (L. Termtud. Közl. 1913. 689. old.). Flórája azonban nemcsak nedves és lápos területein jellemző, hanem szárazabb, homokos részleteiben is. Ezekben csak szegényesen tükröződik vissza a dunai homokpuszták flórája, a melybe rajtuk szintén északi, illetőleg hegyi flóraelemek vegyülnek.

Az Alföld többi flóratájékával szemben csakis a Nyírségben vannak meg, vagy csak itt jutnak nagyobb jelentőségre a következő fajok:

<sup>1</sup> A Rétyi Nyír növényzete, Magy. Bot. Lapok, 1910, 333. old.

<i>Calamagrostis neglecta</i> ,	<i>Hypericum montanum</i> ,
<i>Iris hungarica</i> (a nyírségi termő- helyekkel alig egyeztethető a növény természeté. Borbás <sup>1</sup> nyomán közlöm, de az adat megerősítésre szorul),	<i>Daphne cneorum</i> ,
<i>Gladiolus imbricatus</i> ,	<i>Bupleurum falcatum</i> ,*
<i>Ulmus scabra</i> , l. 47. o.	<i>Tordylium maximum</i> ,*
<i>Lychnis coronaria</i> ,*	<i>Myosotis silvatica</i> ,
<i>Dianthus glabriusculus</i> ,*	<i>Salvia glutinosa</i> (a bácskai erdőkben is),
<i>Pulsatilla patens</i> ,	<i>Veronica pallens</i> ,
<i>Filipendula ulmaria</i> ,	<i>Jasione montana</i> , (a Közép- dunai flóratájékon is, helyen- ként bőven; a Tiszai flóra- tájékon és a temesi pusztákon úgy látszik hiányzik),
<i>Comarum palustre</i> ,	<i>Senecio erucifolius</i> , <sup>2</sup>
<i>Trifolium pannonicum</i> ,	<i>Ligularia sibirica</i> ,
<i>Geranium rotundifolium</i> ,	<i>Centaurea axillaris</i> .
<i>Linum hirsutum</i> ,	

E jellemző növényfajok mellett növényföldrajzi jelentőséggel bírnak, különösen a szintén homoktalajú Középdunai flóratájékhoz viszonyítva, az Alföldi flórákörnyék többi flóratájékának a Nyírségen hiányzó növényfajai. A mint valamennyi flóratájék ilyen természetű flóra listájára vonatkozólag már említettem, a Nyírségre fokozott mértékben áll, hogy nem tökéletes. A mint az itt közölt felsorolások számos korrekciót tárnak eléink a Borbás féle adatokkal szemben,<sup>3</sup> épen úgy kétségtelen, hogy az Alföld és különösen a Nyírség flórájának behatóbb megismerése az itt közölt felsorolásokon is korrekciókat fog szükségessé tenni. A többi mellett a Nyírségre vonatkozólag azért emelem ki ezt

<sup>1</sup> Borbás V.: A Magyar Homokpuszták, 1886, 74. old.

<sup>2</sup> KANITZ A.: Sertum fl. terr. Nagy-Kőrös. Verh. zool.-boot. Ges. 1862. 208. old. említi Nagy-Kőrösről; HOLLÓS (Kecskemét növényzete, 82. old.) nem találta. A Bácságból HEUFFEL Enum. Pl. Banat. 1858. 102. old. említi; Borbás A Magyar Homokpuszták, 1886, 78. old. nem sorolja fel. A Tiszai flóratájékról KOREN (Szarvas viránya) említi Kondorosról, de Borbás (Békés megye fl. 1881. 68. old.) szerint ez a *f. canescens* alak lehet.

<sup>3</sup> A magyar homokpuszták növényvilága, 1886. 54—100. old.

nyomatékosan, mert ennek flóráját valóban nagyon hézagosan ismerjük.

A Nyírség eme hiányzó, vagy viszonylag csekély szerepű (esetleg keresendő) növényfajai a következők volnának:

<i>Tragus racemosus</i> ,	<i>Fumaria Vaillantii</i> ,
<i>Hierochloe odorata</i> ,	<i>F. Schleicheri</i> ,
<i>Brachypodium pinnatum</i> ,	<i>Brassica elongata</i> ,
* <i>Secale silvestre</i> (a Bánsági	* <i>Syrenia angustifolia</i> ,
flóratájékon kérdéses),	<i>Trigonella monspeliaca</i> ,
<i>Aegylops cylindrica</i> ,	<i>Astragalus austriacus</i> , (a bán-
<i>Carex nitida</i> ,	sági flóratájékon is kérdéses),
<i>Anthericum ramosum</i> (a Tiszai	* <i>Linum glabrescens</i> ,
flóratájékra vonatkozólag is	<i>Euphorbia pannonica</i> ,
igen ritkának tekinthető, alig	* <i>Trinia glauca</i> ,
van a szélekről 1—2 adat),	<i>Anchusa italica</i> ,
<i>Allium Borbásii</i> ,	* <i>Alkanna tinctoria</i> ,
* <i>A. moschatum</i> ,	<i>Salvia aethiopsis</i> ,
* <i>A. rotundum</i> ,	<i>Linaria genistifolia</i> ,
* <i>Ornithogalum collinum</i> ?	<i>L. italica</i> ,
<i>Crocus reticulatus</i> ,	* <i>Asperula glauca</i> ,
<i>Cephalanthera rubra</i> , (a Tiszai	<i>Inula aspera</i> ,
flóratájéknak csak széléről	<i>Anthemis ruthenica</i> ,
van adat),	<i>Eichinops ritro</i> (a Tiszai flóra-
<i>Salix amygdalina</i> ,	tájékon csak Temesvár mel-
* <i>Quercus lanuginosa</i> ,	lett; l. TÖKÉS L. i. h. 48.
<i>Corispermum canescens</i> ,	old.),
<i>Delphinium orientale</i> ,	* <i>Centaurea arenaria</i> ,
* <i>Alsine glomerata</i> ,	<i>Hieracium auriculoides</i> .

A «hiányzók» eme aránylag nagy sora kétségtelenül kapcsolatos azzal, hogy a négy alföldi flóratájék közül a Nyírségit — a mint előbb is említettük — a legkevésbé ismerjük; és teljes tudatában vagyok annak, hogy e sorozat több faja elő fog kerülni a Nyírségről; nagy része azonban tényleg hiányzik onnan, vagy

<sup>1</sup> A név elé tett csillag azt jelenti, hogy az illető növényfaj a Tiszai flóratájékon is hiányzik, vagy igen ritka.

legalább is igen szórványos lehet és így a megelőző felsorolás fajai mellett hiányuk lényegesen hozzájárul a Nyírség növényföldrajzi jellemvonásaihoz. Hogy itt több oly fajt is felvettem, a mely a Tiszai flóratájékon is hiányzik, annak az a jelentősége, hogy a mennyiben homoklakók, a Tiszai flóratájékról való hiányuk — ritkák és kisebbek lévén itt a homokpuszták — nem sokat mond, ellenben a Nyírség homokpusztáiról való elmaradásuk nagyobb növényföldrajzi különbséget fejez ki.

\*

Mind a négy flóratájéket együttesen véve szemügyre, ez alkalommal is ki kell emelnem, hogy a Délorosz pusztáktól, a melyekkel oly előszeretettel hozták és hozzák őket vonatkozásba, igen lényegesen elütnek. Elsősorban is — a Hortobágy és más szikes területek kivételével — az Alföld nagyrészt fás terület, vagy legalább is fa és cserje vegetációra minden részében alkalmas. Ellenben a Délorosz puszták zömét kitevő fekete és barna földű területek, tehát az igazi sztepek, teljesen fátlanok és fatenyészetre alkalmatlanok. Ez pedig — nem is szólva a fűnemű flóra összetételében tapasztalható különbségekről — nagy eltérés a kettő között. Közlebbi hasonlóságot a Délorosz puszták és Alföldünk között egyrészt abban találok, hogy az előbbit átszelő folyók itt-ott szintén homokos területeket formáltak, a melyek hasonlóan fásak, és a melyek fűnemű flórajuk összetételében is mutatnak vonatkozást a Dunai flóra-kerülethez. Másrészt pedig abban, hogy a délorosz puszták sztepevegetációját — különösen a nyugatibb részekben — igen jelentékeny arányban olyan növényfajok teszik ki, melyek Nyugat-Európában s így Alföldünkön is előfordulnak. Ezt a kétségtelen tényt azonban növényföldrajzi szempontból igen könnyű félremagyarázni. Két terület növényföldrajzi hasonlóságában ugyanis nemcsak a közös fajok száma dönt, hanem az is, hogy az elütő és egyező növényfajok egymáshoz viszonyítva milyen individuumszámmal szerepelnek az illető növényösszetételben. Egy területen pl. meg lehet a mi *Jurinea mollis*unk; ha ez ott csak ritkán, szálanként fordul elő, ellenben a nálunk nagy ritkaság számba menő *Polygala sibirica* ott gyakori növény, a melylyel lépten-nyomon találkozunk, akkor ez

a körülmény e két növény kölesönös előfordulásában kifejezésre jutó rokonságát a két flórának nagyon gyengíti. Ilyen példát a Délorosz puszták egyes részei és az Alföld flórája közötti viszonyra számosat hozhatnák fel. Ebből a szempontból a Délorosz pusztáknak még az a néhány folyómenti részlete is, melyet az Alfölddel, a fa és cserjevegetáció és általában a flóra alapján, pusztán flóra-listák alapján közelebbi vonatkozásba lehet hozni, az Alföldtől lényegesen elütő. Még inkább ilyennek találjuk pedig a két területet akkor, ha a Délorosz pusztáknak nálunk hiányzó saját, keleti növényfajait vesszük figyelembe.<sup>1</sup>

Az Alföld pusztai flórája, a mint már előbb is érintettem, a Duna-Tisza medenczéjének fokozatos kiszáradása után, igen csekély kivétellel, Európa nyugati, különösen pedig délnyugati és déli síkságairól és erdőtlen hegyvidékeiről származott. Ezt a flórát pedig az Alföld, pusztai vagy sztepszerű területének nagy kiterjedésénél fogva, a legimpozánsabb pusztai flórává tudta egyesíteni. A mi pedig a két terület szikes mezőit és laposait illeti, azok szintén lényegesen különböznek egymástól, a mint azt előbb a 183. oldalon is kiemeltem.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> L. Tuzson J.: Magyarország fejlődéstörténeti növényföldrajzának főbb vonásai, *Math. Természettud. Ért.* 1911. 570—573. old.

<sup>2</sup> Erre vonatkozólag l. még Tuzson J.: Adatok a Délorosz Puszták flórájához, *Botan. Közlem.* 1913. 183—186. old.

Az előbbieken idézett irodalommal kapcsolatosan megemlíteném, hogy dolgozatom teljes lezárása után, két ide vonatkozó cikk jelent meg, ú. m. WAGNER J. A delibláti kinestári homok pusztá növényvilága, *Erd. Kisérl.* 1914. 235. old. és LENGYEL G. Botan. kirándulás Bátorligetbe, *Magy. Bot. Lapok*, 1914. 221. old., a melyek adatait már nem vehettem figyelembe.



## VONALRENDSZEREK ÉS DETERMINÁNSOK.

KÖNIG DÉNES-től.

A következő megfontolások célja a *graph*-ok (vonalrendszerek) alkalmazását a determinánselméletben bemutatni. Első sorban olyan determinánsok jönnek itt tekintetbe, melyeknek 0-tól különböző elemei egymástól független változóknak tekintetnek. Ilyen  $n$ -edfokú determinánssal ábrázolt többváltozós racionális egész függvényről FROBENIUS kimutatta,<sup>1</sup> hogy csak akkor redukibilis, ha van a determinánsnak  $a$ -számú oly sora és  $n-a$  számú oly oszlopa, melyeknek közös elemei valamennyien 0-ok.

A *graph*ok alkalmazásával e tételnek egyszerű és szemléletes új bizonyítását adjuk a következőkben.

Legyen tehát

$$D = |a_{ik}|, \quad k=1, 2, \dots, n$$

olyan determináns, melyben a 0-tól különböző elemek független változók.  $D$ -hez a következő módon rendelünk egy  $G$  *graph*ot. A determináns sorainak bizonyos

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

oszlopainak pedig bizonyos

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

pontokat feleltetünk meg. Az  $A_i$  és  $B_k$  pontokat akkor és csak akkor kötjük össze egy  $A_i B_k$  éllel, ha  $a_{ik} \neq 0$ . Két  $A$  pontot, valamint két  $B$  pontot sohasem kötünk össze. Minden így keletkező *graph*-

---

<sup>1</sup> *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen.* Sitzungsber. d. kgl. Preussischen Akademie der Wiss., 1912., I. k., 456—477. l.

nak az a jellegzetes tulajdonsága van, hogy minden, éleiből alkotott zárt vonal páros számú élből áll, mert az  $A$  és  $B$  pontok *váltakozva* követik egymást. Az ilyen úgynevezett *páros körüljárású* graphok a graphok elméletének egyéb alkalmazásainál is nevezetes szerepet játszanak.<sup>1</sup> A most adott megfeleltetéssel minden 0-tól különböző determináns-elemnek a graph egy meghatározott éle felel meg, és viszont.

Egy graph (önmagában) *összefüggő*-nek nevezetik, ha minden csúcsból minden csúcsába (minden élből minden élbe) a graph élein el lehet jutni. Ha a graph nem összefüggő, *egyértelműen* «szétesik» önmagukban összefüggő részekre. E tény triviális voltában rejlik a graphok bizonyos algebrai alkalmazásának előnye és egyszerűsítő volta.

Ha egy graph bizonyos élei oly tulajdonságúak, hogy a graph minden csúcsából közülök egy és csak egy indul ki, akkor az ily élek összességét a graph egy *elsőfokú faktorá*-nak<sup>2</sup> (osztójának) nevezzük.

Az imént definiált  $G$  graph minden elsőfokú faktora ilyen típusú:

$$A_1B_{i_1}, A_2B_{i_2}, \dots, A_nB_{i_n},$$

hol

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

az 1, 2, ...,  $n$  számok permutációját jelenti. Egy elsőfokú faktornak megfelelő determináns-elemek szorzata

$$a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

tehát a  $D$  determináns egy 0-tól különböző tagját adja, és

<sup>1</sup> Így például a graphok halmazelméleti alkalmazásainál; v. ö. az első matematikai-philosophiai kongresszuson (Páris, 1914) tartott előadásomat (*Sur un problème de la théorie générale des ensembles et la théorie des graphes*), melynek a Revue de Métaphysique et de Morale-ban kellene megjelenni.

<sup>2</sup> Ezt az elnevezést az úgynevezett reguláris graphok elméletéből vesszük át (V. ö.: PETERSEN: «Die Theorie der regulären Graphs», Acta Mathematica, 15. k., 193. l.). Ott az elnevezést a számelmélettel való analogia indokolja. Elsőnél magasabb fokú faktorokról e dolgozatunkban nem lesz szó.

viszont; a  $D$ -nek (0-tól különböző) tagjai és a  $G$  graph elsőfokú faktoraik kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban vannak egymással. FROBENIUS tételének bizonyításánál feltehető, hogy  $D$  nem azonosan 0, azaz  $G$ -nek van egy elsőfokú faktora. Az  $A$  (vagy  $B$ ) pontok czélszerű indexezésével (a mi a  $D$  sorainak vagy oszlopainak permutációjával æquivalens) elérhető, hogy ez a faktor

$$A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n \quad (K)$$

legyen, mely a determináns főtagjának felel meg. A következőkben tehát állandóan felteszszük, hogy  $A_1$  a  $B_1$ -gyel,  $A_2$  a  $B_2$ -vel, ...,  $A_n$  a  $B_n$ -nel egy-egy él által össze van kötve, és e létezőnek feltételezett faktort ( $K$ )-val fogjuk jelölni.

Ha egy él egy elsőfokú faktorhoz tartozik, *valódi*-nak nevezük, ellenkező esetben *látszólagos* élnek. Látszólagos él a determináns oly «látszólagos» elemének felel meg, melytől a determináns nem is függ, mert a hozzátartozó aldetermináns azonosan eltűnik; a determináns nem változik, ha látszólagos elemeiket 0-okkal pótoljuk. Egy vagy több látszólagos él elhagyásával semmiféle elsőfokú faktorból sem hagyunk el élt, s így, ha egy él valódi volt, akkor az ilyen elhagyásokkal keletkező graphnak is valódi éle marad, akár szétesik ez által a graph, akár nem.

Tegyük először fel, hogy  $D$ -ben nincs látszólagos elem, valamint azt, hogy  $D$  reducibilis:

$$D = D_1D_2,$$

hol  $D_1$  is,  $D_2$  is tartalmaz legalább egy változót. Minthogy látszólagos eleme  $D$ -nek nincs, azért minden (0-tól különböző)  $a_{ik}$  determináns-elem vagy  $D_1$ -ben, vagy  $D_2$ -ben előfordul. Minthogy továbbá a determináns az elemeinek lineáris függvénye, azért minden  $a_{ik}$  elem vagy csak  $D_1$ -ben, vagy csak  $D_2$ -ben fordul elő. Ha már most  $a_{ik}$  a  $D_1$ -ben fordul elő, akkor minden ugyanabból a sorból vett  $a_{il}$  is  $D_1$ -ben fordul elő, mert ellenkező esetben a determináns egy tagjában előfordulna az  $a_{ik} a_{il}$  szorzat; már pedig minden tag minden sorból csak egy elemet tartalmaz. Ugyanez áll természetesen az oszlopokra (második indexekre) is. Minthogy két oly determinánselemnek, melyek egy

sorból, illetve egy oszlopból valók, oly élek felelnek meg, melyeknek egyik ( $A$  illetve  $B$ ) végpontjuk közös, vagyis, a melyek egymáshoz csatlakoznak, azért meggondolásunk azt mutatja, hogy ha egy  $e$  él oly elemnek felel meg, mely  $D_1$ -ben fordul elő, akkor minden olyan élnek, mely  $e$ -ből folytonos úton elérhető, szintén  $D_1$ -beli elem felel meg. Tehát, ha egy élnek megfelelő determináns-elem nem  $D_1$ -ben, hanem  $D_2$ -ben fordul elő (s ilyen feltevésünk szerint van), akkor ez az él  $e$ -ből nem érhető el és így graphunk *nem lehet összefüggő*: a  $D_1$ -beli elemeknek megfelelő élek összessége,  $G_1$  a  $D_2$ -nek megfelelő  $G_2$  graph-fal nem tartalmaz közös csúcsot és vele nem függ össze.  $G_1$ -ben is,  $G_2$ -ben is mindenesetre van ( $K$ )-beli él, mert, mint láttuk,  $A_i B_k$ -val együtt  $A_i B_i$  (s ép így  $A_k B_k$ ) is  $G_1$ -hez, illetve  $G_2$ -höz tartozik. Ha már most az

$$A_{i_1} B_{i_1}, A_{i_2} B_{i_2}, \dots, A_{i_\alpha} B_{i_\alpha}$$

élek  $G_1$ -ben, a többi ( $K$ )-beli él pedig, t. i.

$$A_{i_{\alpha+1}} B_{i_{\alpha+1}}, \dots, A_{i_n} B_{i_n}$$

a  $G_2$ -ben ( $(i_1, \dots, i_\alpha, \dots, i_n)$  az  $1, 2, \dots, n$  számok permutációja) fordul elő, akkor, miután beláttuk, hogy  $G_1$ -beli csúcsot  $G_2$ -belivel semmiféle él sem köt össze, kiderült, hogy a  $D$

$$i_1, i_2, \dots, i_\alpha$$

-edik sorának és

$$i_{\alpha+1}, i_{\alpha+2}, \dots, i_n$$

-edik oszlopának közös elemei mind 0-ok. Ily módon erre az első esetre bebizonyítottuk FROBENIUS tételét; sőt, minthogy itt a «sor» és «oszlop» szavak felcserélhetők, az is kiderült, hogy az említett  $\alpha$  ( $n-\alpha$ )-számú 0-elemhez *szimmetrikusan fekvő elemek is valamennyien* 0-ok.

E meggondolások szerint  $D = D_1 D_2 \dots D_s$  irreducibilis  $D_1, \dots, D_s$  faktorainak kölcsönösen egyértelműen oly  $G_1, G_2, \dots, G_s$  graphok felelnek meg, melyek a  $D$ -nek megfelelő  $G$  graphot kimerítik s melyek önmagukban összefüggők, de egymással nem függnek össze. Minthogy egy graph csak egyféleképp bomlik szét,

azért minden  $D$  determináns is egyértelműen bomlik irreducibilis faktorokra.

Mielőtt most már arra a második esetre térnénk át, midőn a determináns látszólagos elemet is tartalmaz, néhány czélszerűnek bizonyuló elnevezést és néhány egyszerű tételt bocsátunk előre.

Egy graphunk éleiből álló,  $A_i$ -ből  $B_k$ -ba vezető, kettőspont nélküli oly utat, melynek első, harmadik, ötödik, . . . utolsó <sup>1</sup> éle ( $K$ )-ből való, *nyílt  $K$ -út*-nak nevezünk. Míg *zárt  $K$ -út* az oly kettőspont nélküli zárt vonal, melynek minden második éle ( $K$ )-hoz tartozik.

1. *Egy zárt  $K$ -útnak,  $U$ -nak minden  $e$  éle valódi él.*

Valóban, ha  $e$  a ( $K$ )-hoz tartozik, a tétel igaz; ellenkező esetben pedig az  $U$ -ban nem szereplő ( $K$ )-beli élek, együttvéve a ( $K$ )-ban nem szereplő  $U$ -beli élekkel, egy  $e$ -t tartalmazó elsőfokú faktorát adják graphunknak.

Tételünk meg is fordítható:

2. *Minden ( $K$ )-ba nem tartozó valódi  $e$  él, éle egy zárt  $K$ -útnak.*

Legyen ugyanis ( $K'$ ) az  $e = A_i B_k$  ( $i \neq k$ ) élt tartalmazó elsőfokú faktor. Az elsőfokú faktor definíciója szerint az  $A_i B_k$ -hoz csatlakozó egyik ( $K$ )-beli  $A_k B_k$  él  $A_k$  végpontjához csatlakozik egy ( $K'$ )-beli  $A_k B_l$  él, ehhez ismét egy ( $K$ )-beli  $B_l A_l$  él, majd egy ( $K'$ )-beli  $A_l B_m$  él stb. Az eljárást folytatva, mindig egymáshoz csatlakozó oly éleket nyerünk, melyek váltakozva ( $K'$ )-höz vagy ( $K$ )-hoz tartoznak. A csúcsok véges száma miatt egyszer egy már szerepelt csúcshoz jutunk vissza; de ez csak az első  $A_i$  lehet, mert minden másból már egy előbb szerepelt ( $K$ )-beli él és egyszersmind egy már előbb szerepelt ( $K'$ )-beli él is kifutott. Vonalunk tehát záródik és egy  $A_i B_k$ -t tartalmazó zárt  $K$ -utat szolgáltat.

A mi a nyílt  $K$ -utakat illeti, a következő tételre lesz szükségünk:

3. *Ha  $A_i$ -t  $B_k$ -val, valamint  $A_k$ -t  $B_l$ -lél egy-egy nyílt  $K$ -út,*

<sup>1</sup> Ugyanis minden nyílt  $K$ -út páratlan számú élből áll.

$U_1$ , illetve  $U_2$  köti össze, akkor van oly nyílt  $K$ -út is, mely  $A_i$ -t  $B_l$ -lél köti össze.

$U_1$ -nek utolsó és  $U_2$ -nek első éle közös:  $A_k B_k$ ; egymásután befutva  $U_1$ , majd  $U_2$  éleit, de a kétszer szereplő  $A_k B_k$ -t csak egyszer véve tekintetbe, máris oly  $A_i$ -ből  $B_l$ -be vivő utat nyerünk, melynek minden második éle ( $K$ )-ből való. De ennek az útnak többszörös pontjai (többszörös élei) is lehetnek. Hogy azonban nem lehet minden  $A_i$ -ből  $B_l$ -be vivő ilyen útnak többszörös pontja, belátható onnan, hogy a lehető legkevesebb számú élből álló  $A_i$ -ből  $B_l$ -be vivő oly  $U$ -út, melynek első, harmadik, . . . éle ( $K$ )-ből való, bizonyára nem tartalmaz többszörös pontot, azaz «nyílt  $K$ -út». Valóban, ha  $U$ -nak van többszörös pontja, akkor  $A_i$ -ből kiindulólág befutva az  $U$ -t, lesz egy első csúcs,  $A_r$ , melyen már áthaladtunk. (Ez igazán csak  $A$ -csúcs lehet, mert  $B_r$ -rel együtt a mindenkor megelőzőleg fellépő  $A_r$  is ilyen többszörös pont volna). Másodszor jutva az  $U$ -n  $A_r$ -be,  $U$ -nak egy  $A_r$ -et tartalmazó zárt részét nyerjük; e zárt utat  $U$ -ból elhagyva ( $A_r B_r$ -et természetesen csak egyszer), feltételünknek ugyancsak megfelelő, de kevesebb élből álló utat nyerünk. Ezzel tételünk, melyben az  $A$  és  $B$  betűk természetesen felcserélhetők, ki van mutatva.

Két ( $K$ )-beli élt,  $A_i B_i$ -t és  $A_k B_k$ -t egybelánczoltnak nevezünk, ha  $A_i$ -ből  $B_k$ -ba és  $A_k$ -ből  $B_i$ -be vezet nyílt  $K$ -út. Ha még minden ( $K$ )-beli élt önmagával is egybelánczoltnak nevezünk, akkor a 3. tételből azonnal következik a következő tétel:

4. Ha  $A_i B_i$  az  $A_k B_k$ -val és  $A_k B_k$  az  $A_l B_l$ -lél egybe van lánczolva, akkor  $A_i B_i$  az  $A_l B_l$ -lél is egybe van lánczolva.

Továbbá:

5. Ha  $A_i B_i$  és  $A_k B_k$  ugyanannak a zárt  $K$ -útnak élei, akkor egybelánczoltak.<sup>1</sup>

Valóban: a zárt  $K$ -útnak van egy része, mely  $A_i$ -ből  $B_k$ -ba

---

<sup>1</sup> E tétel nem fordítható meg. Ha  $A_i B_i$  és  $A_k B_k$  egybelánczoltak, akkor csak annyi bizonyos, hogy van mindkettejüket tartalmazó oly zárt vonal, melynek minden második éle ( $K$ )-beli él. De lehet, hogy minden ilyen zárt vonalnak van többszörös pontja, sőt többszörös ( $K$ )-beli éle.

vezető nyílt  $K$ -út s egy másik része, mely  $A_k$ -ból  $B_i$ -be vezető nyílt  $K$ -út.

Végül még a következő tételre lesz szükségünk:

6. Ha a graph összefüggő és minden éle valódi, akkor bármely két ( $K$ )-beli éle egybe van lánczolva, azaz minden  $A_i$ -ből minden  $B_k$ -ba vezet nyílt  $K$ -út.<sup>1</sup>

Ellenkező esetben volna ugyanis oly  $A_i B_k$  él, hogy  $A_i B_i$  és  $A_k B_k$  nem egybelánczoltak (Mert, ha minden  $A_i B_k$  él egybelánczolt ( $K$ )-beli élek végpontjait kötné össze, akkor a graph összefüggő volna és a 4. tétel következtében bármely két ( $K$ )-beli él egybelánczolt volna). De ekkor, feltevésünkkel ellentétben,  $A_i B_k$  látszólagos él. Ha ugyanis valódi él volna, akkor 2. tételünk szerint egy zárt  $K$ -útnak volna az éle. E zárt  $K$ -út tartalmazná  $A_i B_i$ -t és  $B_k A_k$ -t s így 5. tételünk szerint e két él mégis egybelánczolt volna.

Most visszatérünk FROBENIUS tételének bizonyítására.

A másik eset el lévén intézve, feltehetjük, hogy az irreducibilis  $D_1, D_2, \dots, D_s$  tényezőkre bomló

$$D = D_1 D_2 \dots D_s \quad (s \geq 2)$$

determinánsban van látszólagos elem is. Ha ezeket 0-okkal pótoljuk, akkor a  $D$ -ből keletkező  $D'$  determinánsnak (mely mint változóinak függvénye  $D$ -vel megegyezik) megfelelő  $G'$  graph, mint láttuk, nem összefüggő, hanem megfelelőleg a  $D_1, \dots, D_s$  tényezőknél, önmagukban összefüggő  $G_1, G_2, \dots, G_s$  részekből áll, melyek közt nincsen összeköttetés. Az eredeti  $D$  determinánsnak megfelelő  $G$  graph most már  $G'$ -nek éleiből, melyek valódiak,<sup>2</sup> valamint néhány (legalább egy) oly látszólagos élből áll, mely két különböző<sup>3</sup>  $G_i$ -hez tartozó csúcsot köt

<sup>1</sup> E tétel lényegileg æquivalens FROBENIUS említett dolgozatának IV. tételével (id. h., 461. l.).

<sup>2</sup> Minthogy  $G'$ -nek van elsőfokú osztója, azért világos, hogy az a két kijelentés, hogy «a  $G_i$ -beli  $e$  él  $G_i$ -nek valódi éle» és « $e$  a  $G'$ -nek valódi éle» egymással æquivalens.

<sup>3</sup> Ha ugyanis az  $A_k B_i$  élnek mindkét végpontja ugyanahhoz a  $G_i$ -hez tartozik, akkor, minthogy az  $A_k B_i$  él az  $A_k$ -ból  $B_i$ -be vezető nyílt  $K$ -úttal együtt (ilyen a 6. tétel szerint van) zárt  $K$ -utat ad, 1. tételünk szerint  $A_k B_i$  valódi él.

össze. Elegendő most már a  $G$  graphra (nem  $G'$ -re) kimutatni, hogy

7. Van oly  $G_i$ , melynek minden  $A$ -csúcsából csak ugyanennek a  $G_i$ -nek  $B$ -csúcsába fut él.

Tegyük fel az ellenkezőt. Akkor  $G_1$ -nek valamely  $A$ -csúcsából, melyet  $A^{(1)}$ -gyel jelölünk kiindul egy más  $G_i$ -nek — ezt jelölhetjük  $G_2$ -vel — egy  $B$ -csúcsába,  $B^{(2)}$ -be egy  $e_{12}$  él;  $G_2$ -nek egy  $A$ -csúcsából,  $A^{(2)}$ -ből kiindul egy, például  $G_3$ -ba tartozó,  $B^{(3)}$  csúcshoz egy  $e_{23}$  él, azután lesz egy

$$e_{34} = A^{(3)}B^{(4)}, e_{45} = A^{(4)}B^{(5)}, \dots$$

él, hol  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$  a  $G_i$ -be tartozik. A  $G_i$ -k véges száma miatt lesz egy első  $G_i$ , mondjuk:  $G_\mu$ , mely már egyszor mint  $G_\nu$  ( $\nu < \mu$ ) szerepelt. Így a  $G_i$ -knek egy

$$G_\nu, G_{\nu+1}, G_{\nu+2}, \dots, G_{\mu-1},$$

cyklusához jutunk. Minden  $G_i$ -nek ( $i = \nu, \nu+1, \dots, \mu-1$ ) egy  $A^{(i)}$  csúcsa össze van kötve az

$$e_{i, i+1} = A^{(i)}B^{(i+1)}$$

élel a  $G^{(i+1)}$ -nek  $B^{(i+1)}$  csúcsával ( $i = \mu - 1$  esetében  $i + 1$  helyébe  $\nu$  teendő). A 6. tétel szerint minden  $B^{(i)}$ -ből vezet  $G_i$ -ben  $A^{(i)}$ -be egy nyílt  $K$ -út, melyet  $K_i$ -vel jelölünk. Ekkor

$$e_{12}, K_2, e_{23}, K_3, \dots, e_{\mu-2, \mu-1}, K_{\mu-1}, e_{\mu-1, 1}, K_1$$

e sorrendban együttesen egy zárt  $K$ -utat szolgáltat. De ez lehetetlen: 1. tételünk szerint az  $e_{i, i+1}$  látszólagos élek nem lehetnek zárt  $K$ -útnak élei.

Ha már most  $G_r$  az a  $G_i$ , melynek egy  $A$  pontjából sem fut egy  $G$ -beli él sem más  $G_i$  pontjához és a  $(K)$ -beli élek közül ez a  $G_r$  az

$$A_{i_1}B_{i_1}, A_{i_2}B_{i_2}, \dots, A_{i_\alpha}B_{i_\alpha}$$

éleket tartalmazza, míg a többi  $(K)$ -beli él, t. i.:

$$A_{i_{\alpha+1}}B_{i_{\alpha+1}}, \dots, A_{i_n}B_{i_n}$$



más  $G_i$ -ben fordul elő, akkor graphunkban egy oly  $A_i B_{i_t}$  él sincs, melyre nézve  $s = 1, 2, \dots$ , vagy  $\alpha$  és egyidejűleg  $t = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$  vagy  $n$  volna.  $D$  determinánsukra ez az eredmény azt mondja, hogy az

$$i_1, i_2, \dots, i_\alpha$$

-edik sor és az

$$i_{\alpha+1}, i_{\alpha+2}, \dots, i_n$$

-edik oszlop közös elemei 0-ok. Ezzel FROBENIUS tételét látszólagos elemek esetére is bebizonyítottuk.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 november 16.-án tartott üléséből.)

## A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ALAPLEMMÁJÁRÓL.

SZÜCS ADOLF-tól.

A midőn be akarjuk bizonyítani, hogy az az

$$y = y(x)$$

egyértékű, első  $n$  differenciálhányadosával együtt folytonos függvény, mely adott határfeltételek mellett az

$$\int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

integrálnak (a melyben  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , ...) szélső értékét szolgáltatja, eleget tesz a

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$$

EULER-féle differenciálegyenletnek, szükségünk van<sup>1</sup> a következő, PAUL DU BOIS-REYMOND-tól származó tételre, amelyet a variációszámítás alaplemmájának szokás nevezni:

*Ha az  $M(x)$  függvény folytonos az  $(a, b)$  intervallumban és*

$$\int_a^b M(x) \frac{d^n \eta}{dx^n} dx = 0 \quad (n \geq 1)$$

*mindazokra az  $\eta(x)$  függvényekre nézve, a melyek első  $n$  diffe-*

---

<sup>1</sup> P. DU BOIS-REYMOND: *Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung*. Math. Annalen, Bd. 15 (1879), p. 564.

ZERMELO: *Über die Herleitung der Differentialgleichung bei Variationsproblemen*. Math. Annalen, Bd. 58 (1904) p. 558.

renziál-hányadosukkal együtt folytonosak az  $(a, b)$  intervallumban és a melyek kielégítik az

$$\begin{aligned}\eta(a) = \eta'(a) = \dots = \eta^{(n-1)}(a) &= 0, \\ \eta(b) = \eta'(b) = \dots = \eta^{(n-1)}(b) &= 0\end{aligned}$$

feltételeket, akkor  $M(x)$  legfeljebb  $n-1$ -edfokú racionális egész függvény.

E tételnek első bizonyítása DU BOIS-REYMOND-tól, két újabb bizonyítása ZERMELO-tól származik.<sup>1</sup> A következő sorokban e tételt az eddigiektől eltérő módon és  $M(x)$ -re vonatkozólag kevesebb feltételt tartalmazó alakban fogjuk bebizonyítani. Ez az általánosabb alak így szól:

Ha az  $M(x)$  függvény folytonos az  $(a, b)$  intervallumban és

$$\int_a^b M(x) \frac{d^n \eta}{dx^n} dx = 0 \quad (n \geq 0) \quad (1)$$

mindazokra az  $\eta(x)$  függvényekre nézve, a melyek első  $s$  differenciálhányadosukkal együtt folytonosak az  $(a, b)$  intervallumban és a melyek kielégítik az

$$\begin{aligned}\eta(a) = \eta'(a) = \dots = \eta^{(s)}(a) &= 0, \\ \eta(b) = \eta'(b) = \dots = \eta^{(s)}(b) &= 0\end{aligned} \quad (2)$$

feltételeket, akkor  $M(x)$  legfeljebb  $n-1$ -edfokú racionális egész függvény az  $n > 0$  esetben és azonosan zérus az  $n=0$  esetben.

A bizonyításkor fel fogjuk használni a tételnek azt a jól ismert speciális esetét, midőn  $n=0$ ,  $s \geq 0$  és csak azt az esetet fogjuk szem előtt tartani, midőn  $n \geq 1$ . A tétel természetéből folyik továbbá, hogy ha a tétel igaz adott  $n$  és  $s$  számokra nézve, a hol  $s > 0$ , akkor igaz  $n$  és  $s-1$ -re is, mert a mint az  $\eta$ -ra vonatkozó megszorításokat kevesbítjük, az  $M$ -re vonatkozó feltételek halmaza nő. Az  $s$ -ről feltehetjük tehát, hogy

$$s \geq n.$$

Végül megjegyezzük, hogy egy függvény zérusadik differenciálhányadosán mindig magát a függvényt értjük.

<sup>1</sup> L. DU BOIS-REYMOND és ZERMELO idézett dolgozatait.

Legyen  $\zeta(x)$  tetszés szerinti folytonos függvény az  $(a, b)$  intervallumban, a melynek még  $s-n$ -edik differenciálhányadosa létezik és folytonos és a melyre nézve

$$\begin{aligned}\zeta(a) &= \zeta'(a) = \dots = \zeta^{(s-n)}(a) = 0, \\ \zeta(b) &= \zeta'(b) = \dots = \zeta^{(s-n)}(b) = 0.\end{aligned}$$

Ekkor az

$$\eta(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} \zeta(y) dy - P(x)$$

eleget tesz a (2) feltételeknek, ha a  $P(x)$  függvény  $s$ -szer differenciálható,  $P^{(s)}(x)$  folytonos és

$$\begin{aligned}P(a) &= P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = \dots = P^{(s)}(a) = 0, \\ P(b) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-y)^{n-1} \zeta(y) dy, \\ P'(b) &= \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b (b-y)^{n-2} \zeta(y) dy, \\ &\vdots \\ P^{(k)}(b) &= \frac{1}{(n-k-1)!} \int_a^b (b-y)^{n-k-1} \zeta(y) dy, \\ &\vdots \\ P^{(n-1)}(b) &= \int_a^b \zeta(y) dy, \\ P^{(n)}(b) &= \dots = P^{(s)}(b) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

E feltételeknek megfelelően mindig lehet egy legfeljebb  $2s+1$ -edfokú racionális egész függvényt találni,<sup>1</sup> a melyet explicit alakban így állithatunk elő:

<sup>1</sup> E legfeljebb  $2s+1$ -edfokú racionális egész függvény meghatározása az HERMITE-féle interpoláció speciális esete (HERMITE, *Sur l'interpolation*. Journal für die reine und angew. Math. Bd. 84, 1878). Az explicit megoldásra vonatkozólag I. ZEMPLÉN Gy.: *Adalék az interpoláció és a parciális törtek elméletéhez*. Math. és Phys. Lapok, IX. k. (1900), 386. l.

$$P(x) = \begin{vmatrix} 0 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+2} \dots - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2s+1} \\ A_0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \\ A_1 \quad \binom{s+1}{1} \quad \binom{s+2}{1} \quad \dots \quad \binom{2s+1}{1} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_s \quad \binom{s+1}{s} \quad \binom{s+2}{s} \quad \dots \quad \binom{2s+1}{s} \end{vmatrix},$$

ahol

$$A_k = \frac{1}{k!(n-k-1)!} \int_a^b (b-y)^{n-k-1} \zeta(y) dy$$

a  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  értékekre és

$$A_k = 0,$$

ha  $k = n, n+1, \dots, s$ .

A felírt  $P(x)$  függvényről közvetlenül kimutatható, hogy a (3) feltételeket kielégíti. Ha ugyanis  $P(x)$ -et az  $x = a$  hely környezetében kifejtjük, látjuk, hogy  $(x-a)$ -nak  $s+1$ -nél alacsonyabb hatványai nem fordulnak elő, tehát

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(s)}(a) = 0.$$

Továbbá

$$P^{(k)}(b) = k! \begin{vmatrix} 0 - \binom{s+1}{k} \dots - \binom{2s+1}{k} \\ A_0 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_k \quad \binom{s+1}{k} \dots \binom{2s+1}{k} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_s \quad \binom{s+1}{s} \dots \binom{2s+1}{s} \end{vmatrix}$$

$$= k! A_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{s+1}{1} & \binom{s+2}{1} & \dots & \binom{2s+1}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{s+1}{s} & \binom{s+2}{s} & \dots & \binom{2s+1}{s} \end{vmatrix}.$$

Foglalkozunk a

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{s+1}{1} & \binom{s+2}{1} & \dots & \binom{s+1+p}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{s+1}{p} & \binom{s+2}{p} & \dots & \binom{s+1+p}{p} \end{vmatrix}$$

determinánssal.<sup>1</sup> Ha az utolsó oszlopból kivonjuk az utolsó-előttit, ebből a megelőzőt és így tovább, végre a másodikból az elsőt és alkalmazzuk az

$$\binom{m}{r} - \binom{m-1}{r} = \binom{m-1}{r-1}$$

identitást, kapjuk, hogy

$$D_p = D_{p-1}.$$

Tehát

$$D_p = D_{p-1} = D_{p-2} = \dots = D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \binom{s+1}{1} & \binom{s+2}{1} \end{vmatrix} = 1.$$

E szerint

$$P^{(k)}(b) = k! A_k D_s = k! A_k;$$

és ezt akartuk bebizonyítani.

Ha a  $P(x)$ -et megadó determinánst az első oszlop elemei szerint kifejtjük,  $P(x)$ -et a következő alakban kapjuk:

<sup>1</sup> Ilyen és általánosabb determinánsok értékének meghatározására nézve l. STERN: *Über einen Satz aus der Determinantentheorie*. *Crelle's Journal für die reine und angew. Math.* Bd. 66. (1866), p. 287.

$P(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \dots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$ , a hol a  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  racionális egész függvények a  $\zeta(x)$  függvény választásától függetlenek. A következőkben a  $P(x)$  függvénynek ez az alakja lesz fontos; az, hogy  $P(x)$  racionális egész függvény, nem játszik szerepet.

Helyettesítsük most az

$$\eta(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} \zeta(y) dy - A_0\varphi_0(x) - \dots - A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

függvényt az (1) egyenletbe; akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b M(x) [\zeta(x) - A_0\varphi_0^{(n)}(x) - \dots - A_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n)}(x)] dx = 0;$$

azaz

$$\int_a^b M(x) \zeta(x) dx - A_0 \int_a^b M(x) \varphi_0^{(n)}(x) dx - \dots - A_{n-1} \int_a^b M(x) \varphi_{n-1}^{(n)}(x) dx = 0.$$

Legyen röviden

$$k!(n-k-1)! a_k = \int_a^b M(x) \varphi_k^{(n)}(x) dx, \\ (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

és helyettesítsük  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  értékeit; ekkor:

$$\int_a^b M(x) \zeta(x) dx - a_0 \int_a^b (b-x)^{n-1} \zeta(x) dx - \dots - a_k \int_a^b (b-x)^{n-k-1} \zeta(x) dx - \dots - a_{n-1} \int_a^b \zeta(x) dx = 0,$$

vagy másként írva

$$\int_a^b \zeta(x) [M(x) - a_0(b-x)^{n-1} - a_1(b-x)^{n-2} - \dots - a_{n-1}] dx = 0.$$

Azonban  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  constans, a  $\zeta(x)$  választásától független számértékek; tehát a folytonos

$$N(x) = M(x) - \alpha_0 (b-x)^{n-1} - \alpha_1 (b-x)^{n-2} - \dots - \alpha_{n-1}$$

függvénynek megvan az a tulajdonsága, hogy bármely  $\zeta(x)$  függvényre nézve, mely az  $(a, b)$  intervallumban  $n-s$ -edik differenciálhányadosával együtt folytonos és a mely első  $n-s$  differenciálhányadosával együtt eltűnik az intervallum határhelyein, fennáll az

$$\int_a^b N(x) \zeta(x) dx = 0 \quad (4)$$

egyenlőség. Ez az  $N(x)$  függvény tehát<sup>1</sup> azonosan zérus és így  $M(x)$  legfeljebb  $n-1$ -edfokú racionális egész függvény.

Megjegyezzük, hogy következtetéseink érvényben maradnak, ha a tételben foglalt és  $\eta(x)$ -re vonatkozó megszorításokhoz fűzzük azt is, hogy  $\eta(x)$  analitikai függvény legyen. Egyrészt ugyanis, ha  $\zeta(x)$ -et analitikainak választjuk, akkor

$$\eta(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} \zeta(y) dy - P(x)$$

szintén az, mert az általuk szerkesztett  $P(x)$  függvény analitikai; másrészt abból, hogy a (4) egyenlet (a melyben  $N(x)$  adott folytonos függvény) minden, a határfeltételeknek megfelelő analitikai  $\zeta(x)$  függvényre nézve fennáll, már következik,<sup>2</sup> hogy  $N(x) \equiv 0$ .

<sup>1</sup> BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Leipzig, 1909, p. 25.

<sup>2</sup> BOLZA, loc. cit.



## AZ AGYVELŐI AKARATOS PÁLYA EGY EDDIG NEM ISMERT RÉSZÉNEK ANATOMIÁJÁRÓL ÉS JELENTŐSÉGÉRŐL.

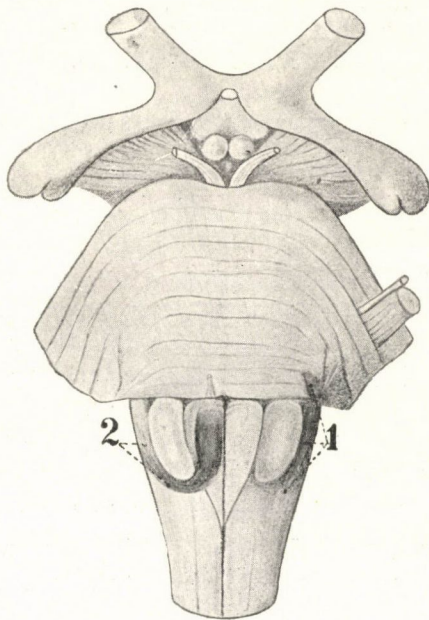
SCHAFFER KÁROLY I. tagtól.

Az akaratos ingerület középponti pályája a loborpálya, a pyramis, mely kiindulva a nagyagyvelő mozgó kérgéből, az akaratos ingerületet vezeti egyrészt a keresztezett gerincvelői félhez, a melyből a végtagmozgató idegek származnak, másrészt a keresztezett és azonos nyúltvelői félhez, a melyből az arcot, a nyelvet, garatot, géget és nyeldeklet mozgó idegek indulnak ki. Látnivaló e berendezésből, hogy a loborpályának két része van: egy gerincvelői, a *pyramis spinalis* és egy nyúltvelői, a *pyramis bulbaris*. A loborpályának eme két ismeretes részéhez vizsgálataim egy harmadik, eddig ismeretlen részt fűznek, mely a nagyagyvelő mozgó kérgének az azonos oldali kisagyvelői féllal való kapcsolatát jelentvén, *pyramis cerebellaris* névvel jelölhető.

A pyramis cerebellaris felismerését bizonyos, esetenként túlerősen kifejlődött és a nyúltvelőnek, illetve a hídnak alapi részén megjelenő nyalábok tették lehetővé. Két ilyen nyaláb az, mely a pyramis cerebellaris megállapítása tekintetében fontosnak mondható; az egyik a nyúltvelő oldalsó felszínén lép fel; ezt *fasciculus bulbi lateralis* névvel jelöltem meg; míg a másik a nyúltvelőnek hasi és oldalsó felszínén fut és *fasciculus bulbi ventrolateralis* névvel illethető. (1. rajz.)

Az előbbeni, a *f. bulbi lateralis*, mindenkoron a nyúltvelőnek az olajka mögötti részében, a kötélképző testen található; legtöbbször a híd hátulsó szélén mint 1—2 mm széles,

lapos, olykor dudoros velőcsík tűnik fel és a kötélidomú testen végigfutva a gerincvelő irányában, ennek oldalkötéli felszínén vagy az I., illetve II. nyaki gyökere magasságában észrevétlenül elvész, vagy magasabban, az olajka alsó csúca alatt (tehát a nyúltvelő zárt részében) ellaposodva, önállóságát teljesen elveszti. E lefutás közben lefelé mindjobban megkarcsúsodik, s kihegyesedve eltűnik. Olykor e csíknak látszólag folytatása van egy, a



1. rajz. A híd és nyúltvelő alapja.

1=fasciculus pontobulbi lateralis. 2=fasciculus bulbi ventrolateralis.

híd alapi részén jelentkező csík képében, mely, szemben a nyúltvelői velőpamatnak egységes voltával, többnyire 2—3, különböző vastagságú pamatból áll, melyek a híd alapi és külső részében többé-kevésbé nyílrányban futva, végül is alábujnak a híd harántvelőrostjai alá. Ily esetben egy *fascic. ponto-bulbi lateralis*-ről is szólhatnánk.

Az utóbbi, vagyis a *fasciculus bulbi ventrolateralis* a nyúltvelőnek lobornyalábjáról válik le olyképen, hogy a híd hátulsó

szélén, a lobor hasi felszínén egy lapos, 1—3 mm széles velőpamat válik láthatóvá, mely lefelé mind dudorosabb, vastagabb lesz és elérve az olajka alsó csúcsát s eddigi nyilirányú lefutását elhagyva, oldalt kanyarodik és az olajkát alulról ív alakjában körülvevén, a kötélidomú testre felkapaszkodik és azon fut fel-fel a kisagyvelő felé. E kifejezetten ívalakú lefutásánál fogva a *fasc. arcuatus* nevet is megérdemelné. E nyalábbal kezdeményezésemre és vezetésem alatt intézetemben HAJÓS IMRE dr. foglalkozott és már ez alapon ismeretessé vált a morfológiája. Csak annyit emelek ki e vizsgálatokból, hogy a jelzett ívalakú kötél részben egyoldalt és ekkor baloldalt, részben kétoldalt lép fel, mindkét esetben vagy mint egységes, olykor feltűnően vastag, vagy mint apróbb, vékonyabb velőfonalakra szétbomlott velőnyaláb, mely utóbbi esetben a velőfonalak héj módjára veszik körül az olajkát.

Míg a *fasc. bulbi ventrolateralis*nak jelentőségét már a szabad szemmel megejtett vizsgálódás legalább is valószínűvé tudta tenni, addig a *fasc. bulbi lateralis* helyes értékelését csakis a sorozatos metszeteken (festve Weigert-féle hæmatoxylinnal) lehetett megejteni. A *fasc. bulbi ventrolateralis* ugyanis a nyúltvelői loborból látszik leválni, és mert a kötélidomú testtel olvad össze, utóbbi pedig a kisagyvelő férgébe hatol: már eleve, a mikroskopi vizsgálat nélkül is valószínű volt, hogy e pamat a loborpályának a kisagyvelővel való összeköttetését végzi. A *fasc. bulbi lateralis*nak szabad szemmel látható viszonyai ilyenmő következtetést nem tettek lehetővé s azért a sorozatos felmetszés és a metszetek alapján megejtendő rekonstrukció tette lehetővé annak az érdekes ténynek megállapítását, hogy ez a velőnyaláb is a loborpálya származéka és végződése a kötélidomú test útján a kisagyvelőben van. Szabadjon e viszonyokat egészen röviden összefoglalva az alábbiakban adnom, megjegyezvén, hogy főleg a *f. ventrolateralis*ra nézve nem csupán ép, hanem kóros anyag is állott rendelkezésemre, a melyben a szóban forgó nyaláb elfajult állapotban lévén, lefutása könnyen volt követhető.

1. A *fasciculus bulbi ventrolateralis sive arcuatus* a nyúltvelői lobornak a hiddal határos részében a lobor velőtömegébe tartozónak mutatkozik, tehát tőle el nem különíthető; kissé

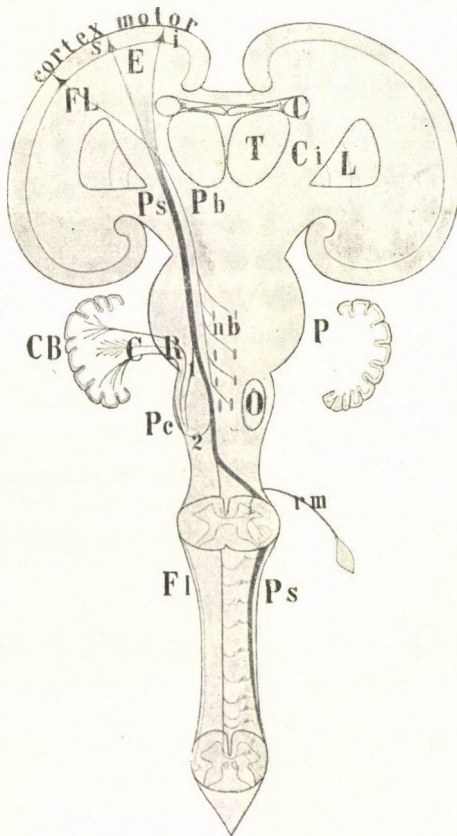
távolabb a hídszélről kezd egy elhatárolt, egyéni nyaláb a lobornak szabad hasi szélén megjelenni, mely a külső ivelt rostok révén különül el a nyúltvelői lobor területétől. Ez a velőnyaláb ily formában megmarad az olajka alsó csúcsáig és itt végzi oldalra-kanyarodását, miközben körüljárja az olajkát s a nyúltvelő oldalsó szélén felkúszva, eléri a kötélidomú test területét, a melybe egyszerűen beleolvad. A mennyiben a *f. arcuatus* tömeges nyaláb képében egyoldalt jelenik meg, a kötélképző test ezen oldalon a nyaláb rostmennyeségével arányosan annyira nagyobodik, hogy a túoldalali kötélképző testhez képest feltűnően szélesebbnek, nagyobb területűnek mutatkozik. Itt a kötélképző testben, ennek rostjaival a nyaláb oly bensően látszik összekeveredni, hogy önálló lefutásáról szólni sem lehet. A másodlagos elfajulásban levő nyaláb ugyanezt mutatja, nevezetesen a kóros voltak által kiváló nyalábrostok oly benső elegyedést tanúsítanak a kötélidomú testnek rostjaival, hogy ez alapon is csak azt kell felvinnünk, mint a mit az ép nyaláb adta készítmények nyomán állítunk. Persze a benső elegyedése a rostoknak még kórosan elfajult nyaláb esetén is kizárja a rostoknak magasabb irányban való követését, de tekintve a kötélidomú testnek a kisagyvelő kérgében, a Purkinje-féle idegsejtek körül való végződését: megokolt feltevés, hogy az ivelt nyúltvelői nyaláb is, ép a benső elegyedésnél fogva, ugyane sejtek körül leli végét.

A jelzett lefutási viszonyok alapján azt kell mondanunk, hogy a *f. bulbi ventrolateralis* a nyúltvelői lobornyalábnak egy levált pamata, a mely az ugyanazon oldali kötélidomú testtel való egyesülésénél fogva az azonosoldali kisagyvelői fél kérgéhez (felső féreg) jut, tehát: *a fasc. bulbi ventrolateralis oly lobornyaláb, mely a homolateralis kisagykéreggel létesít kapcsolatot.*

2. A *fasciculus bulbi lateralis*ra vonatkozó sorozatos metszetek is azt igazolják, hogy e nyaláb a hídnak loborpályájából válik le olyképen, hogy a híd, illetve a nyúltvelő szabad ventrolateralis felszínére lecsúszva, az olajka alsó csúcsáig való haladtában mindjobban megvékonyodik. Kétségtelen, hogy e lefutásban rostokat veszít. Ez akképen történik, hogy a nyalábból szakadatlanul vékony rostpamatoctskák hasadnak le, a melyek a leválás alkalmával egyúttal fel- és visszafelé hajlanak és csat-

lakoza most a kötélidomú test rosttömegéhez, ebbe olvadnak belé. Ez alapon nyilvánvaló, hogy a *f. bulbi lateralis* is oly lobornyaláb, mely az azonos oldali kötélidomú testhez való csatlakozása révén a homolateralis kisagyi kéreghez jut.

Ez észletekkel bizonyítva van az a körülmény, hogy a



2. rajz. A loborpálya lefutásának vázlata.

*Es* = felső végtag középpontja; *Ei* = az alsó végtag kp.-ja; *FL* = az arcnyelv-nyeldekklő-gége középpontja; *C* = nucl. caudatus; *T* = thalamus; *Ci* = belső tok; *L* = nucl. lenticularis; *Ps* = pyramis spinalis; *Pb* = pyramis bulbaris; *nb* = nuclei bulbares; *P* = pons; *CB* = cerebellum; *O* = olajka; *PC* = pyramis cerebellaris; *CR* = corp. restiforme; *rm* = mozgató gyök; *Fl* = kisagyi pálya; *1* = fasciculus bulbi lateralis; *2* = fasciculus bulbi ventrolateralis.

híd, illetve nyúltvelő területén a loborpályából az azonosoldali kisagyi félhez futó rostok válnak le s így egy *kisagyvelői lobor-rész* — *pyramis cerebellaris* — létezése igazolva van. (2. rajz.) Eme leletnek három irányban lehet jelentősége, ugyanis 1. anatómiai, 2. physiologiai és 3. biologiai tekintetben.

1. *Anatomiailag* az a kérdés merül fel, vajjon a kisagyvelői lobrot alkotó nyalábok, vagyis a *fasciculus bulbi lateralis* és *ventrolateralis* kivételes képződések, tehát rendellenes nyalábok-e, avagy csak fejlettségük foka révén rendellenesek-e? Szabadjon e kérdésre azzal a megállapítással válaszolnom, hogy 100 emberi agyvelőn 80-szor találkoztam a jelzett nyalábokkal s így anomalis mivoltuk tarthatatlan. Ezzel szemben ki kell emelnem, hogy e nyalábokban a rendellenesség csupán szokatlanul erős fejlettségükben nyilvánul meg, mert gyakran tapasztaltam, hogy gyenge kiképződésben, annyira, hogy jóformán csak mikroskoppal voltak felismerhetők, szinte szabályszerűen mutatkoztak; ez különösen a *f. bulbi ventrolateralis*ra áll. *Azt kell tehát mondanom, hogy a kisagyvelői lobor állandó része a loborpályának; rendellenes volta egyedül szokatlanul erős kiképződésében nyilvánulhat meg esetenként, a mikor is rendelleneseknek tetsző híd-nyúltvelői nyalábok képében jelentkezhetik.* Ez utóbbiak egy alapjában véve rendes pályának, a kisagyvelői lobornak, túltengő alakját képviselik.

2. *Physiologiailag* a kisagyvelői lobornak természetére a következő viszonyok vetnek fényt.

A loborpályának két főműködését ismerjük, ugyanis a *mozgatót* és a *zsongcsökkentőt*; hiszen ismeretes, hogy a loborpálya egyoldali roncsolása alapján támadt féloldali bénulás egyidejűleg a kóros zsongfokozódás képét adja, vagyis a hiányzó loborműködés a bénulásban és zsongnövekedésben nyilvánul. Tekintettel arra a körülményre, hogy a loborpályának kisagyi része a kisagyvelőhöz jut, utóbbinak pedig, mindenestre az emberben, nem annyira mozgató, mint sokkal inkább zsongot szabályozó működése van: több mint valószínű, hogy a kisagyvelői lobornak is a zsongfejlesztéshez van köze zsongcsökkentő irányban. És ha most meggondoljuk, hogy a kisagyvelőhöz a *zsongcsökkentő* kisagyvelői lobor a kötélidomú testtel jut, ez utóbbi

pedig úgy az állatkísérlet, valamint az emberi pathologia adatai alapján *zsongnövelő* pálya: akkor az előtt a tény előtt állunk, hogy a kötélidomú testben két, ellenirányú működéssel felruházott pályatest foglaltatik. Tudva továbbá azt az anatómiai tény, hogy a kötélidomú test rostjai, mint fentebb említém, a kisagyi kéreg Purkinje-féle idegsejtjei körül végződnek ecetszerűen, s ugyanily végződést tulajdonítva a kisagyi lobornak is: azt a lehetőséget látjuk, hogy a Purkinje-féle idegsejt a kötélidomú test révén zsongnövesztő, a kisagyi lobor útján zsongcsökkentő befolyásnak lehet kitéve. S minthogy jórészt a kisagyvelőből indul ki a rendes izomzsong, felvehető a jelzett anatómiai és physiologiai viszonyok alapján, hogy a Purkinje-féle sejtje a kisagyvelőnek egy *zsongszabályozó középpont* jellegével bír.

*E következtetések alapján fel kell vennünk, hogy a nagyagy a kisagyra zsongmódosító irányban hat.* E felismerésre nézve érdekes körülmény, hogy a mozgató nagyagyi kéreg ezt a behatását az *azonosoldali* kisagyfélre fejt ki, holott ismeretes, hogy a nagyagyi *félteke* a kisagyi *keresztezett* féltekére hat, mert agyi góczbántalom esetén a túloldali kisagyi félteke sorvad. Érdekes továbbá az agybehatásnak a kisagyi loborpálya útján kifejtett azonos oldalisága annál az oknál fogva is, mert e tekintetben egyezik a kisagynak a gerinczvelői mozgató magvakra vonatkozó azonos oldali hatásával; más szóval a kisagyi behatás azonos oldaliságával felelkezően a loborpályának kisagyi hatása ugyanilyen. Ez a körülmény annál feltűnőbb, mert ismeretes a loborpályának típusosan keresztezett, túloldali hatása; azt mondhatnók, hogy a loborpálya kisagyi része homolateralis voltában valósággal kisagyi jelleg jut kifejezésre.

3. *Biologiatilag* a fentebb leírt nyalábok igen figyelemreméltónak mutatkoznak annál a körülménynél fogva, hogy 1. fejlettségük esetről-esetre változó és 2. meghatározott kóros körülmények között tanúsítják a fejlettségi túltengést.

Már az a körülmény, hogy fejlettségükben feltűnő labilitást mutatnak, oda utal, hogy a fejlődés zavaraira hajlamosítvák; azt kell mondanom, hogy túltengő, illetve korcs kialakulásuk oda utalhat, egyéb jelek társaságában, hogy az ily agyvelő bizonyos bennrejlő gyengeségben leledzik. Ez utóbbi eshetőség érdekes meg-

világításba jut azáltal, hogy a leírt és még egyéb híd-nyúltvelői nyalábokat túltengő formában a hűdéssel elmezavar — paralysis progressiva — eseteiben találtuk EPSTEIN LÁSZLÓVAL és HAJÓS IMRÉVEL együtt. Ha tekintettel vagyunk arra a NAECKE és mások által is megállapított körülményre, hogy a paralysses agyvelő aránylag nagy számban mutat még egyéb kifejlődésbeli rendellenességeket, a melyeket az elfajulás jelei — stigmata degenerationis — neve alatt szokás összefoglalni: akkor érthető a szerzők egy részének az az állásfoglalása, a mely szerint ily agyvelő egy már kezdettől fogva csökkent értékű szervnek tekinthető.

Ez általános meghatározás után szabadjon a leírt híd-nyúltvelői nyalábok rendellenes formában való jelentkezésük ismertető jegyeit a következőkben összefoglalnom. *E nyalábok feltűnnek a már jelzett rendellenes erős kialakulásukon kívül rendellenes elhelyezkedésük által is*, mert fentebb utaltunk arra, hogy mint a loborpálya levált részei rendellenes módon futnak végig a híd alapján, illetve a nyúltvelő oldalán, a mily elhelyezkedést a loborpálya rostjai rendes körülmények között nem mutatnak. Ilyen, a kifejlődési fok és az elhelyezkedés rendellenessége által szembevető lobornyalábok, bár semmiképen sem fordulnak elő a paralysisben egyedül, de mindenesetre a leggyakrabban. E körülményekből és tényekből a következők folynak.

A loborpálya fejlődési és elhelyezkedési változatai oly szerkezetbeli labilitásra utalnak, mely az idegrendszernek a rendestől eltérő megalapozására enged következtetni. A megalapozásnak rendellenessége a paralysses egyén középponti szervében lévén a legkifejezettebb és leggyakoribb, ez utóbbit az emberi szervezet oly részének kell tekintenünk, mely eltérő szervezeti jelek révén a megalapozás gyengébb voltát, az ú. n. *endogen dispositiót* árulja el. E dispositio természete az elfajulási jelekből semmiképen sem tűnik ki, de valószínű, hogy az ily jeleknek túlerős, szertelen kifejlődése az idegrendszer kóros hajlandóságának nagyobb fokára utalhat. A paralysses egyén idegrendszerét egy, mindenképen már kezdettől fogva gyengült szervnek kell tekintenünk. Ilyképen a paralysis kórszármazásában az endogenesisnek



határozott jelentősége van, mely az *exogen tényezővel*, a lueses fertőzés jelentőségével vetekedik. Ez utóbbi ugyanis csupán az endogen módon disponált idegrendszer talaján fejtheti ki vészt-hozó hatását, a mit OBERSTEINER így fejez ki: «Paralyticus nascitur et fit.»

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 nov. 16.-án tartott üléséből.)

# KÓRSZÖVETTANI ÉS KLINIKAI ADATOK AZ ALZHEIMER-FÉLE BETEGSÉGHEZ.

FREY ERNŐ-től.

(Kivonat.)

A szerző a budapesti egyetem agyszövetteni intézetéből származó dolgozatában kimutatja, hogy szemben egyes szerzők véleményével, az Alzheimer-féle bántalom nem önálló kóralak, hanem az aggsági elmezavarnak egy atypusos formája, a mely leginkább a szorosán vett aggkor előtti időben jelentkezik. Kórszövetteni szempontból az aggsági elmezavar és az A.-féle betegség között csupán fokozati és lokalizációs különbségek mutatkoznak; utóbbinál a gyrus angularisban és a halántéklebenyben mutatkoznak a legsúlyosabb anatómiai elváltozások, melyek nagyfokú agysorvadásban, az úgynevezett gliarozettáknak tömeges kiképződésében és a fibrillumok sajátos elváltozásában nyilvánulnak. A gliarozettákat oly módon tekinti előállottnak, hogy a tömörült gliaretikulumba kóros anyagcsere-termékek rakódnak be, a melyek a környező gliarostokra ingerképen látszanak hatni, mert ezek túltengenek. Az idegsejtek a zsíros-festékes elfajulás képét adják. A fibrillumok elfajulása ezek rendellenes megvastagodásában mutatkozik, a mi az egyes fibrillumoknak összetapadása folytán áll elő. E fibrillumelváltozás három fokot mutat. Kezdetben egyes finom fibrillumok kitűnnek rendkívül erős festhetőségük által és ezeknek pamatokba való összeverődése már ekkor szembeszökő; a sejtestest és mag változatlanul látszik. A bántalom előbbrehaladt fokán a kóros fibrillumok igen változatos hurok- és

esokorszerű alakzatokká változnak át, mi mellett a sejtmag szinte megnagyobbodottnak látszhatik, míg a sejttest tünező félben van. A sejtbetegség végső fokán a sejttest és a mag eltűnt és fennmaradt a rendellenesen megvastagodott fibrillumoknak kibogozhatatlan hálózata, mely mint ilyen a néhai idegsejtnek egyedüli jelzője.



(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1914 nov. 16.-án tartott üléséből.)

# A VÍZTARTÓ SZÖVET ÉS AZ ÉLETTANI FELEMÁSLÉVELŰSÉG (PHYSIOLOGIAI HETEROPHYLLIA).

RICHTER ALADÁR I. tagtól.

(Kivonat)

A terjedelmes munkálat vizsgálati anyagát a leideni botanikus kert szolgáltatta. A mű, melyhez 12 tábla-rajz és a párolgási görbék adatait s graphikonjait feltüntető négy táblázat tartozik, Leiden tud.-egyetemének mintaszerűen megépített új növénytani intézetében és utóbb a bécsi k. k. Naturhistorisches Hofmuseum növénytani osztályában készült el az 1914. év folyamán és összesen I—X. fejezetre oszlik.

Az I. fejezetet alkotó bevezetésben a szerző rövid képét adja egyszersmind a *magyar birodalmi botanikus kertért* és a *magyar botanikus muzeumért* való eddigi küzdelmének. Az abban felvetett eszmékkal, a mint a béke helyreállott, nyilvánvalólag foglalkozni is fog a közoktatási kormány, minthogy a *magyar közművelődés ezen túl egyáltalában nem nélkülözheti a korszerű kívánalmaknak megfelelő botanikus kertet és botanikus muzeumot*, már általános kulturai hatásuk nagy erejénél fogva sem.

A további fejezetekben szól a szerző: II. A vizsgálat anyagáról, céljáról és módszeréről; III. A kísérlet alá vont *Peperomia* leveleinek részletes physiologiai anatómiájáról; IV. A kísérlet alá vont *Piper*-levelek általános physiologiai anatómiájáról; V. A *Piperaceae* leveleinek összehasonlító alaktani (anatómiai) vizsgálatából levonható élettani tanulságokról; VI. A *Piper* és *Peperomia* kísérleti táblázataiból levonható általános (szorosabban a víztartószövet physiologiai-anatómiai) tanulságok-

ról; VII. A *Piper*- és *Peperomia*-levelek ellenállási képességének részletes élettani és alaktani értelmezéséről; VIII. A *Peperomia*ák élettani felemáslevelűségéről.

Ennek kapcsán, hivatkozással SCHIMPER és HABERLANDT észleleteire, arra figyelmeztet a szerző, hogy általános érvényű biológiai tételek megállapítására a meleg- és forró-égővi növényzet vezet, kevésbé Európa flórája, amely tagozatilag is sokkal egyszerűbb. Körülbelül ez adja az okát annak, hogy a hollandusok buitenzorgi botanikus kertje Jáva szigetén a világon a legelső.

Végül a IX. fejezet adja az idézett irodalom jegyzékét 1805-től napjainkig, a X. fejezet pedig a szöveghez mellékelt I—XII. tábla (eredeti mikroszkopi vizsgálatokon alapuló) 1—96. ábrájának a magyarázatát.

A szerző a teljesen kész munkát ama kívánsággal terjeszti be, hogy az a tárgy általános tudományos érdekénél fogva, a magyarral együtt, lehetőleg német nyelven is megjelenhessék a Magyar Tud. Akadémia külön kiadványai során.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 januárius 18.-án tartott üléséből)

## A GLUKOMETAOXYCUMARIN ÉS A GLUKOPROTO-CATECHUSAV SYNTHESISISE.<sup>1</sup>

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Különböző növényekből nagyszámú cumaringlukosidet különítettek el, a melyek hydrolysisikor egy oxycumarin-származéokra és egy czukorféleségre bomlanak. Így EYKMAN<sup>2</sup> a *Skimmia japonica* kérgéből egy glukosidet különített el, a mely hydrolysisikor metaoxycumarinre és egy jobbra csavaró czukorra bomlik. Az aesculin<sup>3</sup> a vadgesztenyefa kérgében fordul elő és szerkezetére nézve az aesculetin glukosidja. Egy izomer glukosid a daphnin,<sup>4</sup> mely a daphnetin származéka és a *Daphne Mezereum* kérgében és virágaiban fordul elő. Hasonlóképen a fenti oxycumarineknak methylszármazékait, így a scopolint<sup>5</sup> és a fraxint<sup>6</sup> is fellelték. E glukosideknek nagyszámú természetes előfordulása arra indított, hogy előző glukosidsynthesiseimmel<sup>7</sup> kapcsolatban a cumaringlukosidek synthesisét kísérlejem meg. E célból kiindulási test gyanánt a metaoxycumarint választottam, a melyet PECHMANN eljárása szerint resorcinból és almasavból nyertem. E metaoxycumarint vizes-acetonos oldatban, natriumhydroxyd

---

<sup>1</sup> A budapesti kir. m. tud. egyetem II. chemiai intézetében készült dolgozat.

<sup>2</sup> *Recueil d. Trav. chim. des Pays-bas.* 1884, 204.

<sup>3</sup> Rochleder F. *Jour. prak.* 87, 1, 101, 415.

<sup>4</sup> Rochleder F. *Jour. prak.* 90, 442.

<sup>5</sup> *Arch. d. Pharm.* 226 (1888).

<sup>6</sup> *Arch. d. Pharm. u. Chemie* 34, 354.

<sup>7</sup> *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 29. k., 36 és ugyanott 970. ll. 31. köt. 89. l. 32. köt. (1914); *Jour. prakt.* 82, 271 (1910); 83, 556 (1911); 85, 564 (1912); 88, 764 (1913).

jelenlétében, kondenzáltam  $\beta$ -acetobromglukozzal a tetraacetylglukocumarinná. Ha e tetraacetylszármazékot hosszabb ideig baryumhydroxydoldattal összerázzuk, akkor glukometaoxycumarinná szappanosodik el. Az így nyert cumaringlukosid összes tulajdonságaiban igen nagy hasonlatosságot mutat a skimmin nevű természetes glukosiddal, a melytől szerkezetére nézve csak abban tér el, hogy a glukoz helyett egy izomer czukrot tartalmaz. Nem tartom feleslegesnek felemlíteni, hogy ez a mesterséges glukosid az első, synthesis segélyével előállított cumaringlukosid.

Előző, a glukosidsavak synthesisére vonatkozó vizsgálataim <sup>1</sup> folytatásaképen újabban sikerült nekem a phenolcarbonsavak glukosidjainak egy új képviselőjét, a glukoprotocatechusavat is előállítanom. E synthesisnél alkalmazott eljárást <sup>2</sup> a glukosyringasav előállításával kapcsolatban tettem legelőször közzé. A synthesis eszközlése céljából a protocatechusavmetylesterből indultam ki és vizes-acetonos oldatban natronlúg jelenlétében  $\beta$ -acetobromglukozzal kondenzáltam tetraacetylglukoprotocatechusavmethylesterre. Az acetylszármazék elszappanosítására azt hosszabb ideig big baryumhydroxydoldattal állni hagytam, miáltal, hasonlóképen mint az előző esetekben, nemcsak az acetylgyökök, hanem a carboxylgyökön levő methylgyök is kiváltak a vegyületből. A mi e vegyület szerkezetét illeti, a glukoz maradéka valószínűleg paraállásban van a carboxylgyökhöz, mert a vegyület vaschloriddal sárga színreactiót ad. Isovanillinsav vaschloriddal hasonlóképen sárga színreactiót ad, míg vanillinsav nem ad színreactiót. Teljes bizonyossággal e kérdést akkép lehet majd eldönteni, hogy a glukosidsavat fölös diazomethannal kezeljük és ezután hydrolysisnek vetjük alá. E synthetikus glukoprotocatechusavnak tulajdonságai érdekel birnak a phenolcarbonsavaknak glukozzal alkotott vegyületeinek természetes előfordulása miatt.

### KISÉRLETI RÉSZ.

Az alábbi kísérletekhez szükséges metaoxycumarint PECHMANN eljárása szerint resorcinból és almasavból állítjuk elő.

<sup>1</sup> loc. cit.

<sup>2</sup> loc. cit.

Előző kísérleti módozatok szerint nem sikerül a metaoxycumarint acetobromglukozzal kondenzálni, mert a natronlúg hozzáadagolásakor az oxycumarin natriumsója kiválik. A kísérleti körülményeknek czélszerű megváltoztatásával az alábbi módon azonban sikerül a kondenzációt jó termelési hányaddal létesíteni.

3 g metaoxycumarint feloldunk 0·7 natriumhydroxydból és 10 cm<sup>3</sup> vízből készített oldatban. Ezután 7·5 g acetobromglukoz acetonos (10 cm<sup>3</sup>) oldatát öntjük hozzá, miközben külső hűtéssel a hőmérséklet emelkedését meggátoljuk. Az oldatot 5 óra hosszat közönséges hőmérsékleten állni hagyjuk. Ha ez alatt zavarodás állna elő az oldatban, egynehány cm<sup>3</sup> acetont adunk hozzá, míg ismét homogen lesz. Az acetont ezután vacuumban közönséges hőmérsékleten az oldatból leszívattjuk, miközben a kondenzációs termék már részben az oldatból kristályok alakjában kiválik. Ezután a 300 cm<sup>3</sup> víz hozzáadagolására kiváلتott kristályokat porcellánszűrőn leszűrjük és hideg vízzel jól kimossuk. A kristályokat agyagtányéron szárítjuk ki és meleg methylalkoholból kristályosítjuk át, miközben csontszénnel színtelenítjük. Hozadék 60%. 0·1302 g anyag adott: 0·2670 g CO<sub>2</sub>-t és 0·0578 g H<sub>2</sub>O-t. C<sub>23</sub>H<sub>24</sub>O<sub>12</sub> képlet alapján a számított értékek: C= 56·09%, H=4·87%.

Kísérletileg talált értékek: C=55·91%, H=4·93%. A tetraacetylglukometoxycumarin szintelen tükben kristályosodik, a melyek 177—178 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik acetonban, meleg alkoholban és benzolban. Aetherben a vegyület hidegen nehezen oldódik, könnyebben melegen. Petroleumaetherben a termék melegen csak nehezen oldódik.

### Glukometaoxycumarin.

Az előbb ismertetett acetylzármazék elszappanosítását akkép eszközöljük, hogy hosszabb ideig hig baryumhydroxyddal összerázzuk és a beszárított reactioelegyből a glukosidet alkohollal extraháljuk. 3 g finomra porított tetraacetylzármazékot 200 cm<sup>3</sup> 6%-os baryumhydroxyddal 16 óra hosszat jól összerázzunk. A fölös baryumhydroxyd eltávolítására az oldatot széndioxyddal telítjük, a kiváló baryumcarbonatot leszűrjük és



vizzel jól kimossuk. A szüredéket vacuumban 10 mm. nyomás alatt és 45 C° hőmérsékleten bepároljuk. A majdnem teljesen bepárolt oldatot vacuumexsiccatorban teljesen beszáritjuk, a maradékot porítjuk és tömény alkohollal háromszor extraháljuk. Az egyesített alkoholos kivonatokat vacuumban bepároljuk és a maradékot tömény alkoholból átkristályosítjuk. Hozadék 70 %.

0·1220 g anyag adott: 0·2479 g  $CO_2$ -t és 0·0534 g  $H_2O$ -t.  $C_{15}H_{16}O_8$  képlet alapján a számított értékek:  $C=55\cdot55\%$ ,  $H=4\cdot93\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=55\cdot38\%$ ,  $H=4\cdot86\%$ . A glukosid szintelen tükbén kristályosodik, a melyek vacuumban kiszáritva, előzőleg 210 C°-on összezsugorodnak és ezután 219—220 C°-on olvadnak. A vegyületnek keserű íze van. A termék hideg alkoholban és vízben nehezen oldódik, könnyen ellenben melegen. A vegyület meleg acetonban igen nehezen oldódik és meleg aetherben majdnem oldhatatlan. A termék nehezen oldódik hideg benzolban, könnyen ellenben melegen. Ha a glukosidet 10%-os natronlúggal hidegen állni hagyjuk, lassan feloldódik.

### Tetraacetylglukoprotocatechusavmethylester.

E vegyület előállításához szükséges protocatechusavmethylestert protocatechusavból methylalkohol és sósavgáz segélyével állítjuk elő és további tisztítás céljából benzolból kristályosítjuk át.

A kondenzációt a következőképen eszközöljük: 3·2 g protocatechusavmethylestert, 8 g acetobromglukozt 20 cm<sup>3</sup> acetonban oldunk és hűtés közben 0·7 g natriumhydroxydból és 10 cm<sup>3</sup> vízből készített oldattal elegyítjük. Félórai állás után újból 20 cm<sup>3</sup> acetont és 5 cm<sup>3</sup> vizet adunk hozzá, ezután pedig a reactiokeveréket 5 óra hosszat állni hagyjuk. Az aceton legnagyobb részét vacuumban közönséges hőmérsékleten leszivattyújuk és a visszamaradó olajat többször hideg vízzel dekantálás útján jól kimossuk. Az utolsó mosó vizet leöntjük és a visszamaradó olajat kevés meleg methylalkoholban oldjuk, csontszénnel színtelenítjük és óvatosan vizet adagolunk hozzá, míg csekély zava-

rodás áll be. Ha az oldatba most már előzőleg nyert egy-néhány kristályt adunk, az oldat lehűlésekor a kristályosodás beáll. A további tisztítás céljából a vegyületet hig methylalkoholból kristályosítjuk át. Hozadék 1·5 g.

0·1406 g anyag adott: 0·2719 g  $CO_2$ -t és 0·0653 g  $H_2O$ -t.  $C_{22}H_{27}O_{13}$  képlet alapján a számított értékek:  $C=52·90\%$ ,  $H=5·41\%$ . Kísérletileg talált értékek:  $C=52·73\%$ ,  $H=5·16\%$ .

A tetraacetylglukoprotocatechusvmetylester szintelen tükben kristályosodik, a melyek 167—168 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, actonban és benzolban. Meleg aetherben a termék oldódik.

### Glukoprotocatechusav.

Az előbb ismertetett acetylzármazék elszappanosítására a terméket hosszabb ideig hig baryumhydrxydoldattal állni hagyjuk. E reakciónál a glukosidsav baryumsója áll elő, a melyet hig kénsavval szétbontunk és a szabad glukosidsavat alkohollal való extractio utján különítjük el.

3 g acetylzármazékat 10 g baryumhydroxydból és 105 cm<sup>3</sup> vízből készített oldattal 23 óra hosszat 37·5 C°-on állni hagyunk. Ezután vízzel felhigítjuk és a fölös baryumhydroxyd eltávolítására széndioxyddal telítjük. A kiválot baryumcarbonatot leszűrjük és vízzel jól kimossuk. A szüredéket vacuumban 40 C°-on töményítjük és hidegen hig kénsavval semlegesítjük. A kiválot baryumsulfatot PUKALL féle porzellánhenger segítségével az oldattól elkülönítjük. Az oldatot vacuumban alacsony hőmérsékleten teljesen bepároljuk és a maradékat vacuumexsicatorban kiszáritjuk. A porított terméket eczetesterrel háromszor kivonjuk és az oldatot vacuumban bepároljuk. A további tisztítás céljából a terméket eczetesterből kristályosítjuk át. 0·1433 g anyag adott: 0·2583 g  $CO_2$ -t és 0·0671 g  $H_2O$ -t.  $C_{13}H_{16}O_9$  képlet alapján a számított értékek:  $C=49·36\%$ ,  $H=5·06\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=49·15\%$ ,  $H=5·20\%$ .

Az optikai analysishez a glukosid vizes oldalát alkalmaztam. A lemért anyag súlya = 0·1742 g. Az oldat súlya 11·1738 g és sűrűségét  $d^{17}=1·0051$ -nek találtam. Egy decziméter hosszú-

ságú csőben az oldat  $D$  fényben  $17\text{ C}^\circ$ -on  $\alpha = -1\cdot19^\circ$  csavaróképességet mutatott. Ennélfogva:

$$[\alpha]_D^{17} = -75\cdot94^\circ$$

A glukoprotocatechusav szintelen tűkben kristályosodik. A vacuumexsiccatorban szárított anyag  $70\text{ C}^\circ$ -on megpuhul és  $81\text{—}82\text{ C}^\circ$ -on olvad. A vegyület igen hydroskopikus. Vizben és alkoholban a termék könnyen oldódik. Benzolban és aetherben majdnem oldhatatlan. Vaschloriddal a glukosidsav egy sárga szineződést ad. Semleges ólomacetattal nem, bázisos ólomacetattal pedig fehér csapadékot ad. A vegyületnek savanyu íze van és frissen előállított gelatinoldattal nem ad csapadékot. A lúgos FEHLING-féle oldatot nem redukálja. Híg savak igen könnyen hydrolyzálják.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 január 18.-án tartott üléséből.)

## A SURIÁN KÖRNYÉKÉNEK AMFIBOLITJAI.

VENDL ALADÁR-tól.

(I. tábla.)

A Surián környékét (Hunyad megye, 23. zóna XXIX. oszlop DNy) kristályos palák építik fel. Még pedig a kristályos paláknak az a csoportja, melyet MRAZEC az *első csoport* kristályos paláinak, SCHAFARZIK pedig *csillámpala-csoportnak* nevez. E csoport kőzetei közül a Surián vidékén maga a *csillámpala* az uralkodó.

A csillámpala teljességében átkristályosodott kőzet, mely injekciókkal az eruptív eredetű biotitgneiszszal áll összeköttetésben. Kifejlődésében elég változatos. Helyenként erősen földpáttartalmú s paragneisznak minősítendő, mint a D. Negru és a Titianul környékén. Az eruptív eredetű gneisztól távolabb mindinkább előtérbe lép a muszkovit a biotit rovására, a lepidoblasztos kifejlődés uralkodóvá válik és a pegmatitos-pneumatolitos injekciótermékekkel átjárt pontokon csaknem teljesen muszkovit-csillámpalát találunk, mely itt *gránátot*, *disztént*, *turmalint* s esetleg *staurolitot* is tartalmaz.

A csillámpalában lépnek fel többnyire telérszerű betelepülések alakjában az *amfibolitok*. E betelepülések geomorfologiai szempontból csak kisebb jelentőségűek, mert vékonyak, ritkán érik el a 100 m vastagságot. Általában a csillámpaláknál ellentétebb kőzetek s ezért néha kimeredő kúpokat formálnak, melyek gyakran szembeszökők.

Feltűnő, hogy az amfibolitok néha szerpentinrel váltakozva vagy szerpentinek társaságában lépnek fel, mint pl. a Valea Dobreiban, a völgy 1370 m és 1440 m magasságú szakaszában. Ezt a körülményt azért emelem már itt is ki, mert eddigi helyszíni megfigyeléseim és még be nem fejezett laboratóriumi vizsgálataim arra látszanak mutatni, hogy a kudzsir-szebeni hava-

sok szerpentinjei és amfibolitjai gyakran szoros, genetikus összefüggésben állanak egymással.

Az amfibolitok eloszlására vonatkozólag annyit jegyezhetek meg, hogy itt — a Surián környékén — az amfibolitok minden szabály nélkül lépnek fel a csillámpalában s paragneiszos félésegeiben.

A megvizsgált amfibolitok elegyrészeik kialakulása s eloszlása szerint háromfélék:

- a) Plagioklászamfibolitok.
- b) Gránátos amfibolitok.
- c) Zoizitamfibolitok.

Az egyes csoportokat átmeneti típusok kötik össze egymással.

#### a) *Plagioklászamfibolitok.*

Jellemző e kőzetekre a plagioklász, mely mérsékelten bázisos. Zoizit és gránát vagy teljesen hiányzik, vagy alárendelt. Texturájuk általában palás; gyakran azonban a tömeges kőzetek megjelenési formájára emlékeztető. Ilyenkor makroszkoposan inkább tömeges kőzetekre — pl. dioritra — emlékeztetnek. Strukturájuk homeoblasztos; még pedig gyakran granoblasztos, ritkán nematoblasztos s gyakran poikiloblasztos.

*Amfibolit a Salaneleről, 1710 m magasságból.* E kőzet makroszkoposan inkább tömeges kőzetre emlékeztet; szabad szemmel csak *plagioklász* és *amfibol* ismerhető fel benne. Ezekon kívül elegyrészei még a *biotit*, *kvarcz*, *titanit*, *magnetit*, *apatit*.

A *plagioklászok* üdék, gyakran albitikrek, ritkábban periklinek is. Xenoblasztok; közel  $\perp a$ -ra metszeten a kioltás:  $+11^\circ$ , a mi savanyú andezinnak ( $Ab_{73} An_{27}$ ) felel meg. A makroszkoposan fekete *amfibol* is xenoblasztos; néha azonban a prizma zónája:  $\{110\}$ ,  $\{100\}$ ,  $\{010\}$  jól észrevehető. Egyénei 1—3 mm hosszúak. Pleochroizmusa elég erős:  $\gamma$  = zöld,  $\beta$  = fakó sárgászöld,  $\alpha$  = halavány szalmasárga. Kioltás (010) lapon  $15\frac{1}{2}^\circ$ .  $\gamma - \alpha = 0.020$ .<sup>1</sup> Az amfibolban zárványként plagioklász, titanit,

<sup>1</sup> A Babinet-féle kompenzátorral meghatározva, valamennyi esetben *Na* fényben.

biotit, magnetit fordul elő. A szintelen xenoblasztokban fellépő *kvarcz* igen alárendelt. Az amfibolok közt igen alárendelten lép fel apró lemezekben a *biotit*; pleochroizmusa:  $\gamma$  = barnászörös,  $\beta = \gamma$ ,  $\alpha$  = igen világossárga. A biotit apró keskeny csikokban zárványként a plagioklászokban is előfordul. *Titanit* aránylag igen sok lép fel, a mit különben a kőzet kémiai összetétele is bizonyít. Egyénei sárgásszürke színűek, elliptikus, vagy szabálytalan alakúak s gyakran kisebb-nagyobb csomókban csoportosultak, néha pedig olvasószerűen csatlakoznak egymáshoz. Az *apatit* vékony, prizmás idioblasztokban kifejlődött, néha még a terminális konturok is észlelhetők. *Magnetit* részben közel izometrikus, részben szabálytalan szemekben elég nagy mennyiségben fordul elő, főként a titanitok társaságában.

A kőzet strukturája granoblasztos, átmenetekkel a poikiloblasztos kifejlődésbe. (I. tábla, 3. ábra.) Fajsúlya 3·179.

Kémiai alkotása :

	%	Mol. %
$SiO_2$ ... ..	48·07	52·60
$TiO_2$ ... ..	1·43	1·17
$Al_2O_3$ ... ..	19·00	12·27
$Fe_2O_3$ ... ..	2·94	11·28
$FeO$ ... ..	9·64	
$MnO$ ... ..	0·13	0·12
$CaO$ ... ..	10·55	12·41
$MgO$ ... ..	4·11	6·72
$K_2O$ ... ..	0·36	0·25
$Na_2O$ ... ..	2·99	3·18
$P_2O_5$ ... ..	0·89	100·00
Izz. veszt. ... ..	0·51	
Összesen ... ..	100·62	

Elemző: EMSZT KÁLMÁN dr.

A megfelelő OSANN-GRUBENMANN-féle paraméterek :

$S = 53·77$ ;  $A = 3·43$ ;  $C = 8·84$ ;  $F = 21·69$ ;  $M = 3·57$ ;  
 $T = 0$ ;  $K = 0·89$ .

$a_{2·0}$   $c_{5·2}$   $f_{12·8}$ .

Az új OSANN-féle paraméterek: <sup>1</sup>

$$SAIF = 17.0, 4.0, 9.0$$

$$AlCalk = 13.0, 13.5, 3.5$$

$$NK = 9.3$$

$$MC = 3.5.$$

Ez értékek csaknem teljesen megegyeznek a *Seeheimer Gemeindebruch gabbrojának* megfelelő számaival:

$$SAIF' = 17.0, 4.0, 9.0$$

$$AlCalk = 13, 14.5, 2.5$$

$$NK = 9.0$$

$$MC = 3.6.$$

*Amfibolit a Valea Dobrei eredete közelében*, a Surián-ról a Párvára vivő úton levő fakereszt alatt a Valea Dobrei árkából, 1860 m magasan. A telérszerű betelepülés a gránátos esillámpalában 25—30 m vastag.

E kőzet szivós, a kalapácsütésnek alig enged. Makroszkoposan dioritos habitusú, rétegzettség alig észlelhető. Elegyrészei: *plagioklász*, *amfibol*, *magnetit*, *apatit*, *pirit*, melyekhez hiszterogén elegyrész alakjában még a *chlorit* és az *epidot* járul.

A *plagioklászok* zavarosak, muszkovitos és epidotos bomlási termékekkel teltek; ezért közelebbi meghatározásuk nem biztos. Az *amfibol* valamennyi itt említendő kőzet amfiboljától eltérő sajátságú. Egyénein az {110}, {100}, {010} sokszor jól kifejtett; a terminális lapok azonban nem. Pleochroizmusa a többi amfibolit amfiboljától eltérő:  $\alpha$  = sárga;  $\beta$  = sárgásbarna;  $\gamma$  = barna.  $c:c = \text{cca } 16^\circ$ . Az amfibolok részben *chloritosan* átalakultak, mely folyamattal karöltve *epidot* is bőségesen képződött, úgy hogy helyenként az amfibolt egészen ily chlorit-epidotos bomlási termékek helyettesítik. Az *apatit* sűrűn fordul elő apró, szintelen hatszögletes metszetekben főleg az amfibolokban, de a földpátok között is keskeny hosszú prizmákban. A *magnetit* apró szemekben, a *pirit* itt-ott 1—2 mm nagyságot is elérő szemekben figyelhető meg.

<sup>1</sup> OSANN A.: Petrochemische Untersuchungen, Heidelberg, 1913.

A kőzet strukturája granoblasztos.

*Amfibolit a Stina Gileitől D-re*, az 1274 m magas kúp mellett.

E kőzet finom szemű, elég rétegzett, tömött; makroszkoposan csak a rövid szálas amfibolok ismerhetők fel benne. Elegyrészei: *plagioklász*, *zoizit*, *amfibol*, *biotit*, *muszkovit*, *kvarcz*, *magnetit*, *titanit*, *pirit*, *rutil*, *zirkon*.

A kevés *plagioklász* gyakran albitikres, savanyú andezinszerű. Xenoblasztos s főként a zoizitok társaságában lép fel aránylag alárendelten. A *zoizit* parányi, közel izometrikus szemekben lép fel helyenként, plagioklászszal és szintelen *kvarcz*-czal együtt apró csomókban. Optikai tulajdonságai alapján  $\alpha$ -zoizitnak bizonyul:  $\alpha = c$ ,  $v > \rho$ , optikailag pozitív. Ugyancsak a zoizitok közelében észlelhető igen alárendelten a *muszkovit* apró pikkelykében. Az elegyrészek között túlnyomó az *amfibol*. A többi csak az amfibolok közt levő hézagokat tölti ki. Az amfibolok aránylag rövid szálasak, mikroszkop alatt halavány színűek; xenoblasztosak, néha azonban az  $\{110\}$  és  $\{010\}$  jól megállapítható. Pleochroizmusuk:  $\gamma$  = halaványzöld,  $\beta$  = halavány zöldesbarna,  $\alpha$  = halavány zöldessárga.  $c : \gamma = \text{cca } 16^\circ$ .  $\gamma - \alpha = 0.021$ . Az amfibol egyéneket a szintelen — főként plagioklász — elegyrészek valósággal rostaszerűen átjárták. A *biotit* itt-ott egészen alárendelten lép fel apró pikkelykében; tengelyszöge  $0^\circ$  körül. A *magnetit* gyakori karélyos-öblös szélű és izometrikus szemekben. A *titanit* ritka elliptikus szürkessárga szemcsékben, az amfibolokban. Igen ritkán előforduló elegyrész a *pirit* is apró szemekben. A *rutil* igen ritka elegyrész barnás-sárga és világossárga tojásdad, vagy szabálytalanul, hajoltan megnyúlt apró szemekben. A *zirkon* szintelen parányi prizmákban fordul elő.

A kőzet strukturája poikiloblasztos, a mi helyenként egész típusosan jelentkezik, a mennyiben az amfibol egyéneit a szintelen földpátzárványok valósággal *rostaszerűen* átjárják. (I. tábla, 5. ábra.)

E kőzetben a plagioklászt már alárendelten *zoizit* helyettesíti, mely a plagioklász rovására képződött. Ez a kőzet tehát már *átmenet a zoizitos amfibolitok csoportjába*.



b) *Gránátos amfibolitok.*

A Surián környékének gránátos amfibolitjai strukturájuk tekintetében vagy  $\alpha$ ) homeoblasztosak, vagy  $\beta$ ) heteroblasztosak. Az előbbieket rendszeren *granoblasztosak* s a gránát itt nagyságra nézve egyenlőértékű a többi tipomorf elegyrésszel. A heteroblasztos gránátos amfibolitok gránátja a többi elegyrész között *porfiroblasztokat* alkot.

a) *Gránátos amfibolit a Titianul tetejéről* (172 m) paragneiszban. A telér széle igen durva szemű, pegmatitos jellegű, itt az amfibol s a plagioklász néha 5—6 cm nagyságot is elér. Maga a kőzet típusa középszemű, gyengén rétegzett; makroszkoposan csak a fekete, néha 3 mm hosszúságot is elérő *amfibol* és *plagioklász* ismerhető fel benne. Ezenkívül elegyrészei még a *gránát*, a *kvarcz*, az *apatit*, a *titanit*, a *magnetit*, a *pirit* s az *epidot*.

A *plagioklászok* néha albit-, ritkábban periklinikrek is.  $\perp$  a metszeten a kioltás:  $+17 - +18^\circ$ , a mi oligoklász-andezinnak felel meg (31—32% *An*),  $\alpha$  körül optikailag negativek. A plagioklász fajsúlya: 2·653 (piknometerrel). Elég üdék, néha azonban szintelen-sárgás *epidotot* tartalmaznak apró, szabálytalan konturú szemekben bomlási termék gyanánt; másutt szericitesen bomlottak, vagy egyszerűen csak zavaros belsejűek. A plagioklász mennyisége majdnem eléri az amfibolét. Az *amfibol* egyénein néha az  $\{110\}$  és  $\{010\}$ , ritkán az  $\{100\}$  is felismerhető. Pleochroizmus:  $\gamma$  = sötét kékes-zöld,  $\beta$  = zöld,  $\alpha$  = sárga.  $c : c = 16\frac{1}{2}^\circ$ .  $\gamma - \alpha = \text{cca } 0\cdot030$ . Fajsúly = 3·225 (piknometerrel). Az amfibol ritkán *chloritosan* bomlott. Zárványként gyakori az amfibolban a plagioklász, ritkább a biotit. A *kvarcz* alárendelt; illetőleg csak ott lép fel jelentékenyebb mennyiségben koncentrációva szintelen xenoblasztokban, hol a kőzet pegmatitos kifejlődésű. Ugyancsak itt fordul elő aránylag nagyobb mennyiségben a *biotit* is; pleochroizmusa:  $\gamma$  = barna,  $\beta = \gamma$ ,  $\alpha$  = narancssárga. A *gránátok* mennyisége nem nagy; aprók, rózsaszínűek, izotropok, idioblasztok, rendszeren rombtizenkettősök; sokszor azonban xenoblasztosak, szabálytalan alakúak. Gyakran apró, anizotrop mikrolitokat tartalmaznak. *Apatit*, *titanit*, *magnetit* és kevés *pirit* a szokott módon fordul elő.

A kőzet struktúrája granoblasztos, mely erősen emlékeztet a gabbró struktúrájára. (I. tábla, 2. ábra.)

Ebben az amfibolitban a gránátok mennyisége még alárendelt, úgy hogy az előző csoportba való átmenetnek tekinthető.

*Gránátos amfibolit a D. Cioaca és Muncetul Birailor közt DNy felé a Tájába vezető kis árokban 1190 m magasan.* Ez a meglehetősen öregszemű kőzet mintegy 2 m vastag telér alakjában kifejlődött a biotitos csillámpalában; itt-ott vékony — 1 mm — kvarczerekkel átjárt. Dőlése  $17^{\circ}30'$ . Ugyanabban az árokban 1050 m magasságban egy 4 m vastagságú és 1000 m magasan egy kb. 5 m vastag, az előzővel egyező minőségű amfibolittalért tárt fel a patak vize.

Az 1190 m magasságban előforduló kőzetben makroszkoposan a néha 0·5 cm hosszúságot is elérő *amfibol*, *kvarcz*, *plagioklász*, apró *gránát* s alárendelten kevés *biotit* ismerhető fel. Ezeken kívül csak mikroszkop alatt felismerhető elegyrészek még a *zoizit*, *muszkovit*, *magnetit*, *apatit* és a *rutil*.

A *plagioklászok* xenoblasztok, néha azonban (010) szerint táblásak. Eredetileg ikerlemezesek voltak; sokszor azonban ez alig kivehető, mert erősen elbomlottak, zavarosak, részben szericizté, részben *zoizittá* ( $\alpha$ ) alakultak át. A szericizten kívül itt-ott nagyobb *muszkovitjikkelykék* is előfordulnak. A *kvarcz* viztiszán átlátszó xenoblasztokban elég nagy mennyiségben lép fel; nagysága néha 0·5—0·6 mm-t is elér; többnyire amfibol-mikrolitokkal átjárt. Az *amfibol* általában xenoblasztos kifejlődésű, néha azonban egyénein az  $\{110\}$ ,  $\{010\}$  kivehető. Pleochroizmusa:  $\gamma$  = világos barnás-zöld,  $\beta$  = zöldessárga,  $\alpha$  = világossárga.  $c : c17^{\circ}$ .  $\gamma - \alpha = 0\cdot019$ . Helyenként az amfibol földpátokkal sűrűn át van járva. A *gránát* aránylag eléggé háttérbe szorul s apró, néha azonban 0·2 mm átmérőt is elérő izometrikus szemekben fordul elő. A *biotit* csak helyenként, bizonyos vékony rétegekben lép fel, miként ez a kézipéldányokon is jól látható. A *magnetitről* és az *apatitról* különös megjegyezni való nincsen. A *rutil* apró tojásalakú szemekben lép fel főként az amfibolokban; pleochroizmusa:  $\varepsilon$  = barnássárga,  $\omega$  = világossárga.

A kőzet kitünően rétegzett; struktúrája granoblasztos, párosulva alárendeltebb poikiloblasztos struktúrával.

A zoizit alárendelt fellépése folytán ez a kőzet már átmenet a zoizitos amfibolitok felé.

$\beta$ ) *Gránátos amfibolit a Pureul Rescoaleiből.* DNy—EK-i csapású paragnejszszerű csillámpalából, 950 m t. sz. f. magasságból. E kőzet telérszerűen lép fel a csillámpalában.

A kőzet rétegződése csak gyengén kifejlődött, inkább tömeges habitusra emlékeztet. Makroszkoposan a néha  $\frac{1}{2}$  cm átmérőt is elérő *gránátporfiroblasztok*, *amfibol* s helyenként fehér foltok ismerhetők fel, melyek között itt-ott *muszkovitlemezkek* is megcsillannak. Ezekon kívül elegyrészek még: *plagioklász*, *biotit*, *zoizit*, *magnetit*, *rutil*, *zirkon*, *titanit* és *apatit*.

A *plagioklász* egyénei csak ritkán ikerlemezesek, bázisos oligoklászok. Helyenként erősen át vannak lyuggatva rostaszerűen amfibollal. Az *amfibolok* minden idiomorfizmus nélkül apró, keskeny foltocskákban sűrű halmazokban figyelhetők meg, közöttük itt-ott nagyobb egyénekkel. Pleochroizmusuk:  $\gamma$  = világoszöld,  $\beta$  = halavány zöldessárga,  $\alpha$  = halaványsárga;  $c : c = 18^\circ$ .  $\gamma - \alpha = 0.022$ . Fajsúly: 3.078. Az amfibol keskeny, hosszú foszlányokban a gránát egyéneit körülveve sűrűbben lép fel, mint egyebütt. Ezek az amfibolszálak  $c$  tengelyükkel a gránát felületére közel merőleges elhelyezkedésűek, a nélkül azonban, hogy típusos kelifit volna kifejlődve (I. tábla, 1. ábra). A *gránát* nagy mennyiségben lép fel, rózsaszínű egyénei néha 5 mm átmérőt is elérő porfiroblasztok alakjában tűnnek szembe. A gránátok izotropok s zárványként rutilt tartalmaznak. A *zoizit* a apró, szabálytalan konturú, de nagyjában mégis gömbölyded szemekben s már makroszkoposan is észlelhető fehér foltokban fordul elő plagioklászszal s kevés *muszkovittal* együtt. Indigókék interferencia-színéről könnyen felismerhető. A *biotit* igen alárendelt elegyrész apró foszlányok alakjában; rendszeren ott fordul elő, hol valamelyik gránát a zoizitos fehér terecskékkal érintkezik. A *magnetit* az amfibolokban és azokon kívül a zoizitos terecskékből fordul elő. A *rutil* apró, elliptikus szemekben az amfibolokban s ritkábban a gránátokban figyelhető meg. Pleochroizmusa:  $\varepsilon$  = barnássárga,  $\omega$  = sárga. A *zirkon* szintelen, parányi kristálykái és a *titanit* tojásdad szemecskéi ritkák. Az *apatitról* különös felemlíteni való nincs.

Ez amfibolit strukturája heteroblasztos, a mennyiben nagyobb gránátporfiroblasztok fejlődtek ki. A gránátgyének a többé-kevésbé granoblasztos, részben diablasztos alapanyagban helyezkednek el. Minthogy e kőzetben a plagioklász kis részét már zoizit helyettesíti, már átmenetnek tekintendő a következő csoportba.

A kőzet fajsúlya: 3·152.

Kémiai alkotása:

	%	Mol. %
$SiO_2$ ... ..	47·65	50·59
$TiO_2$ ... ..	0·63	0·50
$Al_2O_3$ ... ..	19·33	12·11
$Fe_2O_3$ ... ..	1·57	9·83
$FeO$ ... ..	9·63	
$MnO$ ... ..	0·12	0·10
$CaO$ ... ..	10·67	12·18
$MgO$ ... ..	7·55	11·99
$K_2O$ ... ..	0·22	0·15
$Na_2O$ ... ..	2·47	2·55
$P_2O_5$ ... ..	0·42	100·00
Izz. veszt. ... ..	0·68	
Összesen ... ..	100·94	

Elemző: EMSZT KÁLMÁN dr.

A megfelelő paraméterek:

$S = 51·09$ ;  $A = 2·70$ ;  $C = 9·41$ ;  $F = 24·69$ ;  $M = 2·77$ ;  
 $T = 0$ ;  $K = 0·85$ .

$a_{1·5}$   $c_{5·0}$   $f_{13·5}$

$SAlF = 16·0, 3·5, 10·5$

$AlCalk = 13·5, 13·5, 3·0$

$NK = 9·4$

$MC = 4·9$

Ezek az értékek igen közel állanak a *Seeheimer Hoflager-gabbrojának* megfelelő számaihoz:

$SAlF = 16, 4, 10$

$AlCalk = 13, 13·5, 3·5$

$NK = 9·0$

$MC = 4·1$

c) *Zoizitamfibolitok.*

Jellemző e kőzetekre a *zoizit* nagyobb mennyiségben való fellépése. A plagioklász háttérbe szorul. A zoizit-egyének kisebb csoportokban — gyakran egyenlő orientációban — helyezkednek el. Ezek a csoportok már makroszkoposan is szembe tűnnek fehér foltok alakjában. Gyakran e zoizit-foltokban aránylag elég sok plagioklász fordul elő, mert ez utóbbi anyaga nem használódott fel teljesen a zoizit képződésére. Néha azonban a zoizit egyenletesebben szétszórva is előfordul. Strukturájuk homeoblasztos.

*Zoizitamfibolit a Valea Dobrei*ből. Ez a kőzet a Valea Dobrei biotitos csillámpalájában 1390 m magasan mintegy 25—30 m vastagságú telér alakjában lép fel. Dőlése  $19^{\circ} 35'$ . A telért helyenként vékony repedések járták át, melyeket másodlagosan kvarcos infiltráció töltött ki.

A kőzet jól rétegzett, a mi főként az amfibolok közel || elhelyezkedésében nyilvánul meg leginkább. Makroszkoposan e kőzetben csak a 0.5—2 mm hosszú *amfibolok* ismerhetők fel, melyek között szétszórtan apró *fehér foltok* fordulnak elő. E fehér foltok túlnyomó részben *zoizit*ből és *plagioklász*ból állanak a mikroszkopos vizsgálat szerint. Az említettekén kívül elegyrészek még: a *muszkovit (szericzit)*, *magnetit*, *titanit*, *apatit*, *rutil*.

A *plagioklász* jóval kevesebb, mint az eddig említett kőzetekben és főként a zoizitok környékén fordul elő. Egyénei többnyire erősen zavarosak és szericzitesek. Bázisos oligoklászok. Néha albit-, ritkábban periklinikrek.

Az *amfibolok* halvány zöldes színűek, gyengén pleochroosak:  $\gamma$  = halványzöld,  $\beta$  = világos zöldessárga,  $\alpha$  = igen világos zöldessárga.  $c : c = cca 17^{\circ}$ .  $\gamma - \alpha = 0.018$ .

A *zoizit* a plagioklász helyettesítője s legnagyobb mennyiségben a már makroszkoposan is feltűnő lencseszerű fehér foltokban fordul elő. Egyénei meglehetősen idioblasztok, a mennyiben többnyire hosszúkás parallelogramma alakú, vagy négyzetes metszetekben tűnnek szembe.  $\{010\}$  szerint való hasadásuk jól megállapítható. Átlagban 0.2 mm-nél rövidebbek, néha azonban

még egyszer akkorák is akadnak. Színtelenek, optikailag pozitívak;  $a = c$ ;  $v > \rho$ ; indigokék interferencia-szint mutatnak. Egészben véve tehát *zoizit*  $\alpha$ -nak bizonyulnak. (I. tábla, 4. ábra.) Néha nemcsak az említett fehér foltokban, hanem alárendelten maguk közt az amfibolok közt is előfordul a zoizit. A zoizit-prizmák többnyire || elhelyezésük s ez az irány a rétegzettséggel esik egybe.

Az említett fehér foltok túlnyomó részben zoizitból állanak; ezenkívül alárendelten *plagioklász* is előfordul bennük, mely erősen muszkovitosodott (szericitesedett), valamint kevés *amfibol* és *titanit* is.

A *magnetit* apró szemekben lép fel, melyek gyakran vörösbarna máliási zónával körülvettek. Az *apatit* és a *rutil* a szokott módon kifejlődött. A *titanit* szintelen szürkés tojásdad szemekben figyelhető meg zárványként az amfibolokban s a zoizitos fehér foltokban.

A kőzet struktúrája homeoblasztos.

A kőzet fajsúlya: 3·063.

Kémiai alkotása:

	%	Mol. %
$SiO_2$ ... ..	45·40	48·12
$TiO_2$ ... ..	0·75	0·60
$Al_2O_3$ ... ..	15·57	9·73
$Fe_2O_3$ ... ..	1·90	9·00
$FeO$ ... ..	8·41	
$MnO$ ... ..	0·22	0·19
$CaO$ ... ..	12·21	13·91
$MgO$ ... ..	10·14	16·07
$K_2O$ ... ..	0·68	0·46
$Na_2O$ ... ..	1·87	1·92
$P_2O_5$ ... ..	1·01	100·00
Izz. veszt. ... ..	1·38	
Összesen ... ..	99·54	

Elemző: EMSZT KÁLMÁN dr.

A megfelelő paraméterek :

$S = 48.72$ ;  $A = 2.38$ ;  $C = 7.35$ ;  $F = 31.82$ ;  $M = 6.56$ ;  
 $T = 0$ ;  $K = 0.80$ .

$a_{1.1}$   $c_{3.7}$   $f_{15.2}$

$SAIF = 14.5, 3.0, 12.5$

$AlCAlk = 11.0, 16.5, 2.5$

$NK = 8.0$

$MC = 5.4$

Ez értékek igen közel állanak a *Pta. Delgada plagioklász-bazaltjának* megfelelő számaihoz :

$SAIF = 14.5, 3.0, 12.5$

$AlCAlk = 10.5, 16, 3.5$

$NK = 7.8$

$MC = 5.2$

*Zoizitamfibolit a Valea Ditei középső szakaszából.*

A völgynek mintegy 1100—1130 m magasságú szakaszában közel 150 m vastag amfibolittelért találunk a csillámpala-csoportban; dőlése  $15-16^h 35^\circ$ .

Az aprószemű, jól rétegzett kőzetben makroszkoposan amfibol s fehér (zoizitos) foltok ismerhetők fel.

A *plagioklász* aránylag e kőzetben is háttérbe szorul. Albit-ikrek elég gyakoriak; közel  $\perp$  a metszeten a kioltás  $+14^\circ$ , a mi oligoklász-andezinnak felel meg. Itt-ott szericzitesen bomlottak. A *zoizit a* indigokék színben polározó elég szabálytalan, néha foszlányos szélű szemekben lép fel a fehér foltokban. E fehér foltokban a zoiziton kívül kevés *plagioklász*, néhány *muszkovitlemezke* s több *kvarcz* is megfigyelhető. Az utóbbinak egyénei gyakran finom, apró pontszerű, sorokban elhelyezkedő folyadékzárványokat tartalmaznak. Az *amfibolok* aprók, csak néha érnek el 0.5—1.0 mm hosszúságot; általában xenoblasztok, néha azonban az  $\{110\}$  határozottan megfigyelhető rajtuk. Pleochroizmusuk:  $\gamma$  = halvány szürkés-zöld,  $\beta$  = zöldessárga,  $\alpha$  = világos zöldessárga.  $c:c = cca 19^\circ$ . *Magnetit*, *apatit* igen alárendelt. A *rutil* prizmásan gömbölyded szemekben, vagy ritkán térdalakú ikrekben aránylag elég gyakori az amfibolban, de

azon kívül is; pleochroizmusa:  $\epsilon$  = sötétebb gyantasárga,  $\omega$  = világos gyantasárga. A *titanit* szürkessárga, csaknem szintelen szemekben igen alárendelten fordul elő.

A kőzet struktúrája poikiloblasztos.

A kőzet fajsúlya: 3·120.

Kémiai alkotása:

	%	Mol. %
$SiO_2$ ... ..	50·30	51·02
$TiO_2$ ... ..	0·22	0·17
$Al_2O_3$ ... ..	14·02	8·38
$Fe_2O_3$ ... ..	1·18	} 8·83
$FeO$ ... ..	9·32	
$MnO$ ... ..	0·21	0·18
$CaO$ ... ..	12·75	13·90
$MgO$ ... ..	10·62	16·10
$K_2O$ ... ..	0·41	0·26
$Na_2O$ ... ..	1·18	1·16
$P_2O_5$ ... ..	0·34	100·00
Izz. veszt. ... ..	0·15	
Összesen ... ..	100·70	

Elemző: EMSZT KÁLMÁN dr.

A megfelelő paraméterek:

$$S = 51·19, \quad A = 1·42, \quad C = 6·96, \quad F = 32·05, \quad M = 6·94, \\ T = 0, \quad K = 0·99$$

$$a_{0·7} \quad c_{3·4} \quad f_{15·9} \\ SALF = 15·5, 2·5, 12·0 \\ AlCAlk = 10·5, 17·5, 2 \\ NK = 8·1 \\ MC = 5·4.$$

Ez értékek igen közel állanak a *Twins hiperstendiabázának* megfelelő számaihoz:

$$SALF = 15·5, 2·5, 12·0 \\ AlCAlk = 10·5, 17·5, 2 \\ NK = 8·7 \\ MC = 5·9.$$



- *Zoizitamfibolit a Valea Diteiből*, közel a Valea Diteinek a Tájába való torkolatához. A telér dőlése  $15^{\text{h}} 35^{\circ}$ .

Kitünően rétegzett kőzet, melyben sötétszürke, túlnyomó részben amfibolból álló rétegek jelentéktlenebb, gyakran ék-alakúan elvékonyodó fehér rétegekkel váltakoznak. Az előbbieket túlnyomó részben *amfibolból*, az utóbbiak főként *plagioklászból* állanak kevés *zoizittal*, *muszkovittal* s itt-ott rozsdavörös vas-oxidos mállási foltokkal.

A *plagioklászok* részint teljesen üdék, részint helyenként szericzitpikkelyeket tartalmaznak. Többszörösen összetett albit-ikrek, elég sűrű ikerlemezekkel; ritkán periklinikrek is. A  $\perp$  (010) metszetek kioltása alapján savanyú andezinek, anortit-tartalmuk maximálisan 45%. A *zoizit a* szintelen, vastagabb csiszolatokban kissé sárgás árnyalatú, szabálytalan körvonalú apró szemekben fordul elő. Helyenként azonban egyénei az 1 mm hosszúságot is eléri. A *zoizit* aránylag alárendelt mennyiségben lép fel. A *muszkovit* apró lemezekében, gyakran bizonyos helyeken erősebben koncentrállódva, a földpát-amfibol elegyét nemezszerűen szövöi át. Az említett fehéres színű rétegekben aránylag nagyobb mennyiségben is előfordul. A kőzet zömét *amfibol* alkotja, mely általában xenoblasztos kifejlődésű, legfeljebb itt-ott az  $\{110\}$  ismerhető fel jól. Pleochroizmusa aránylag gyenge:  $\gamma$  = halaványzöld,  $\beta$  = halavány sárgás-zöld,  $\alpha$  = halavány zöldessárga.  $c : c =$  cca  $20^{\circ}$ . Az amfibolok itt-ott kifakultak, szálasak, rostosak  $\parallel c$ -vel. Itt rendszeren a földpátok szericzitesek s néha itt lép fel a *zoizit* is nagyobb mennyiségben. A *biotit* elvértve az amfibolok között fordul elő. A *rutil* aránylag elég gyakori, néha már lupéval is felismerhető apró csomókban a kis elliptikus szemekben; pleochroizmusa elég gyenge:  $\epsilon$  = barnássárga,  $\omega$  = sárga. Néha a *rutil*szemek keskeny, vékony lencseszerűen kiékelődő rétegecskében fordulnak elő. A *titanit* apró szabálytalan, vagy gömbölyded szintelen szürkés szemekben található. Végül itt-ott, főként az említett fehér rétegekben vasoxidos vörösbarna bomlási termékek figyelhetők meg.

E kőzetben a *zoizit* már háttérbe szorul s így ez már átmenet a *plagioklász-amfibolitokhoz*.

Miként az eddigiekből kitűnt, a Surián környékének amfibolitjai az elegyrészek minősége és eloszlása szempontjából igen változatosak. Szöveti kialakulásuk is elég változatos. Ezekkel ellentétben azonban szembeszökő kémiai összetételük közeli állandósága. Az elemzések és a belőlük levezetett paraméterek értékei egymáshoz mind igen közel állanak. Egészben pedig ezek az értékek a *gabbrós magma* közeteinek megfelelő számokkal esnek egybe. Már ez a négy analízis is azt bizonyítja tehát, hogy ezek az amfibolitok *eruptív származásúak*, még pedig a *gabbrós magma közeteinek megfelelő eruptívumok származékai*.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 január 18.-án tartott üléséből.)

### Magyarázó az I. táblához.

1. Gránát-porfiroblaszt amfibolszálakkal körülvéve, a Pareul Rescoalei gránátos amfibolitjából. Nagyítás: 1×25.
  2. A Titianul tetejéről való amfibolit granoblasztos szerkezetű keresztelt nikolok között. Nagyítás: 1×25.
  3. A Salanele amfibolitjának szerkezetű. Nagyítás: 1×25.
  4. Prizmásan kifejlődött  $\alpha$ -zoizitok a Valea Dobreiben 1390 m magasan előforduló zoizitamfibolitból. Nagyítás: 1×25.
  5. A Stina Gileitől D-re az 1274 m kúp mellett fellépő amfibolit szerkezetű: az amfibolokat a földpát valóságosan rostoszerűen átlugtatva járja át. Nagyítás: 1×25.
-

## AZ ELLIPTIKUS MODULFÜGGVÉNY ÚJ, INDEPENDENS ELMÉLETE.

DÁVID LAJOS-tól.

GAUSS hagyatékában az elliptikus függvényekre vonatkozó számos följegyzés közül néhány az elliptikus modulfüggvény elméletével kapcsolatos. Majdnem mind merő formulák e följegyzések, bebizonyítások nélkül. Csak néhánynál van egy-egy szűkszavú, sőt homályos megjegyzés.<sup>1</sup> De fölfigyerve a modulfüggvény e néhány töredéktől függetlenül, más utakon és sokkal később nyert elméleteivel, észrevehető, hogy GAUSS a modulfüggvény legjellemzőbb tulajdonságait korán fölismerte.<sup>2</sup> Örök kár, hogy ő maga nem építette ki elméletét, vagy hogy csak némileg részletesebben nem hagyta hátra módszerét. Elméletének gerince mindenestre a LAGRANGE<sup>3</sup> által elliptikus integrálok kiszámítására explicite legelőször bevezetett

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots \text{in. in.}^c)$$

algorithmus, a medium arithmetico-geometricum algorithmusa, lett volna.

<sup>1</sup> A modulfüggvényre vonatkozó helyek összegyűjtve megtalálhatók a következő dolgozatban: L. SCHLESINGER: Ueber GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von GAUSS; gesammelt von F. KLEIN und M. BRENDEL; Heft III. Göttinger Nachrichten (Beiheft) 1912. p. 59—60), hol GAUSS összegyűjtött műveiben (III. [1876] és VIII-ik [1900] kötet) még nem közölt idevágó töredékek is vannak: p. 124 stb.

<sup>2</sup> V. ö. SCHLESINGER: l. c. p. 53, 59—60.

<sup>3</sup> Mémoires de Turin II (1784—85) p. 237 = Oeuvres II (1868) p. 251 etc.; különösen p. 267, 272.

De nem állapítható meg közelebbről elméletének szerkezete. Csak azt mondhatjuk, hogy GAUSS neve teljes biztosítékot nyújt arra nézve, hogy lehetséges az említett algoritmus alapján a modulfüggvény egy önálló elmélete, de hagyatéka egyáltalán nem világosít föl a véghezvitel módjáról.<sup>1</sup>

SCHLESINGER<sup>2</sup> volt az első, ki a modulfüggvény egy oly elméletének körvonalait adta, mely az említett algorithmushoz fűződik. A komplet elsőfajú elliptikus integrálnak az algorithmussal szemben való invariants viselkedéséből<sup>3</sup> kiindulva, csak a pozitív valós számok esetét tárgyalja, a mi már GAUSSnál is megtörtént és az így nyert függvénytani eredményeket viszi át, folytonossági elvvel, komplex tartományokra.<sup>4</sup> Tárgyalása, ha mindjárt csak indirekte és nem elemi úton, a LAGRANGE-GAUSS-féle alap mély és használható voltát mutatja meg.

A következőkben magából az algorithmusból indulva ki, direkt eljárással a modulfüggvény egy új, elemi és independents elméletét adom. Új ez az elmélet, mivel, mint már említettük, a GAUSS-féléről oly keveset tudunk, hogy tényleges rekonstrukcióról szó sem lehet. Az elemi jelleget azáltal sikerült elérni, hogy az algoritmus legáltalánosabb és mégis elemi elméletét előrebocsátom. Evégre azonban az alapvető kérdések egész sorozatát kellett elintézni.

Elméletem lényege, nagyon is röviden jellemezve, abban áll,

<sup>1</sup> SCHLESINGER szerint (l. c. p. 59) valószínűleg 9 sorok alkották a kiindulást.

<sup>2</sup> Über die GAUSS'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunction (Berliner Sitzungsberichte, 1898, p. 346—360) és (ugyanaz, csak részletesebben) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. II. 2. (1898) p. 1—31.

<sup>3</sup> Ugyanis (LAGRANGE l. c.)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi + b_1^2 \sin^2 \varphi}},$$

hol  $2a_1 = a + b$ ,  $b_1^2 = \sqrt{ab}$ .

<sup>4</sup> Handbuch II. 2. p. 30.

hogy algebrai függvények oly végtelen sorozatát értelmezzük, melynél:

$\alpha$ ) az egyes tagokat értelmező irreducibilis egyenletek fokszáma végnélkül nő;

$\beta$ ) van analytikus határfüggvény;

$\gamma$ ) az elágazási pontok (sokszoroságuktól eltekintve) minden tagnál ugyanazok.

Ezekhez csatlakoznak még bizonyos, inkább formális tulajdonságok, mint pl. szimmetrikusság két homogén változóra nézve. Mármost két oly  $\beta$ ) alatti határfüggvény kellően választott ágainak hányadosa, melyek változói között bizonyos (igen egyszerű) algebrai kapcsolat van, adja a modulfüggvény invers függvényét.<sup>1</sup>

Ezt az *algebrai* elméletet három részben fejtem ki. Az első rész az algoritmus minden korlátozás nélküli elmélete. A második rész elemi függvénytani következtetései alkotják az átmenetet a harmadik részre, mely a  $\lambda(\omega)$  modulfüggvény elméletét tartalmazza.<sup>2</sup>

Kedves kötelesség érzésével mondok köszönetet SCHLESINGER LAJOS úrnak mély és messzelátó kritikáiért, melyekkel e dolgot különböző stadiumaiban fáradhatatlanul kísérte.

### Foglalat:

*Első rész: A medium arithmetico-geometricum I—VII. §.*

*Második rész: Függvényelméleti alapok VIII—XIII. §.*

*Harmadik rész: A modulfüggvény XIV—XVII. §.*

---

<sup>1</sup> Elméletem lényegét azért is óhajtottam hangsúlyozni, mivel teljesen analog módon általánosabb automorph függvények ily algebrai elmélete is adható.

<sup>2</sup> Mindaddig, míg függvénytani szempontokra helyezük a súlyt, elég például  $\lambda(\omega)$ -val, a LEGENDRE-féle modulfüggvénnyel foglalkozni részletesen. Ha azonban a csoportelméleti osztályozások az elsők, akkor külön kell  $\lambda(\omega)$  algebrai függvényeit [például  $\sqrt{\lambda(\omega)-t}$ ] tárgyalni.

## ELSŐ RÉSZ.

## A medium arithmetico-geometricum.

## I. §.

## A Lagrange-Gauss-féle algorithmus alaptétele.

1. A tetszés szerint megadott  $a$ ,  $b$  komplex számok legyenek gyökei az

$$x^2 - 2a_1x + b_1^2 = 0$$

másodfokú egyenletnek. Tehát

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

A  $b_1$  két értéke közül akármelyiket véve: azt jelölje épen  $b_1$ . Legyenek  $a_1$ ,  $b_1$  a hasonló alakú

$$x^2 - 2a_2x + b_2^2 = 0$$

egyenlet gyökei. Tehát

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1b_1}.$$

Igy haladva végnélkül, minden egyes lépésnél a négyzetgyök egyik, de *tetszés szerinti* értékét véve, a következő algorithmust nyerjük:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n), \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_nb_n}, \end{aligned} \tag{L}$$

$(n=0, 1, 2, \dots \text{ in inf.}; a_0=a, b_0=b).$

Ez a LAGRANGE-GAUSS-féle medium arithmetico-geometricum algorithmusa.

Kiindulva az  $a$ ,  $b$  számpárból, az algorithmus kezdő elemeiből, az első lépés két számpárhoz, úgymint  $a_1$ ,  $b_1$  és  $a_1$ ,  $-b_1$ -hez vezet. Ezeket egyenlőségük ( $b_1 = -b_1 = 0$ ) esetére is egyelőre

külön tartjuk számon. E számpárok mindenike újra két számpárt ad, melyeket szintén sokszoroságuk szerint véve és így tovább, mondhatjuk, hogy az *algorithmus minden egyes lépésnél kétfelé ágazik, sokszoroság szerint  $2^n$  számú  $a_n, b_n$  számpár van.*

Ha valami módon egyértelműleg meghatározunk egy oly végtelen matrixot

$$\left\| \begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \\ \dots & \dots \end{array} \right\|$$

melynek elemei megfelelnek az (L) algorithmusnak, azaz

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots \text{ in inf.}),$$

akkor azt az algorithmus egy (az  $a$  és  $b$  kezdő elemekhez tartozó) matrixának nevezzük. Az esetleg identikus matrixokat is egyelőre külön-külön számítva, az *algorithmusnak sokszoroság szerint végtelen sok matrixa van.*

2. Az (L) szerint az algorithmus tetszés szerinti matrixánál

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|), \quad |b_{n+1}|^2 = |a_n| |b_n|.$$

Tehát

$$\max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \leq \max(|a_n|, |b_n|),$$

s így

$$\max(|a|, |b|) \geq \max(|a_1|, |b_1|) \geq \max(|a_2|, |b_2|) \geq \dots \quad (1)$$

Létezik tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(|a_n|, |b_n|) = M, \quad (2)$$

hol a  $M$  értéke általában<sup>1</sup> úgy az  $a, b$  kezdő elemektől, mint magától az illető matrixtól is függ.

<sup>1</sup> Ha például  $b=0$ , akkor mindenik  $M=0$ . Később megállapítjuk az összes oly eseteket, melyekben hasonló degenerálás áll elő.

Ábrázoljuk a következőkben komplex számainkat szokásos módon egy  $O$  origójú derékszögű koordináta-rendszer síkjában. Ekkor az  $a_n$ ,  $b_n$  pontokat összekötő egyenes vonaldarabot felezi az  $a_{n+1}$  pont, míg  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$  két értékének megfelelő pontok az  $O$ -tól egyenlő távol fekszenek a két, egymást  $2\pi$ -re kiegészítő,  $a_n O b_n$  szög felezőin.

Az (1) és (2) szerint tetszés szerint előírt  $\delta > 0$  számhoz tartozik oly  $N$ , hogy (mindig az algoritmus ugyanazon, különben tetszőleges matrixánál)

$$M \leq \max(|a_n|, |b_n|) < M + \delta, \quad (3)$$

mihelyt  $n > N$ .

Mármost két eset gondolható és a későbbiek szerint valóban lehetséges is:

I.  $M = 0$ . Ekkor (2) miatt egyúttal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(|a_n|, |b_n|) = 0,$$

és ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

II.  $M > 0$ . Ekkor is határérték-egyenlőséghez jutunk. Tegyük föl, hogy volna oly  $\varepsilon > 0$ , miként végtelen sok  $n$  mellett

$$\min(|a_n|, |b_n|) \leq M - \varepsilon.$$

Véve ezt az egyenlőtlenséget oly nagy  $n$  mellett, melynél (3) is áll, lesz

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{2} (|a_n| + |b_n|) = \\ &= \frac{1}{2} (\max(|a_n|, |b_n|) + \min(|a_n|, |b_n|)) < M + \frac{1}{2} (\delta - \varepsilon), \end{aligned}$$

honnan, mivel  $\delta < \varepsilon$  választható,

$$|a_{n+1}| < M$$

végtelen sok  $n$  értéknél. Ekkor azonban ugyanazon  $n$ -ek mellett  $|b_{n+1}|^2 = |a_n| |b_n| < (M + \delta)(M - \varepsilon) = M^2 + M(\delta - \varepsilon) - \delta\varepsilon < M^2$ , azaz  $|a_{n+1}|$ -gyel együtt

$$|b_{n+1}| < M.$$



De (3) szerint  $|a_{n+1}|, |b_{n+1}|$  nem lehetnek egyidejűleg kisebbek  $M$ -nél. Tehát a  $\min(|a_n|, |b_n|)$ -re föltételezett egyenlőtlenség nem állhat végtelen sok  $n$  mellett. Vagyis bármilyen kis pozitív szám is  $\varepsilon$ , mégis

$$\min(|a_n|, |b_n|) > M - \varepsilon,$$

mihelyt  $n$  elég nagy. Ezt (2)-vel egybevetve, lesz

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \lim_{n=\infty} |b_n| = M. \quad (4)$$

3. De még tovább mehetünk: az I. esetnek megfelelően itt is áll, hogy

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n.$$

Ugyanis mivel most  $M > 0$ , azért minden véges  $n$  mellett  $a_n \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$ , mert ha csak egy  $n$ -nél nem így lenne, akkor onnan kezdve

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \dots \text{in } \text{inf.} = 0$$

volna  $M$ -vel együtt.

Tehát a II. esetben például

$$0 \leq \text{arc } a_n < 2\pi, \quad 0 \leq \text{arc } b_n < 2\pi$$

az  $n$  minden véges értékenél határozottak.

A  $2a_{n+1} = a_n + b_n$  egyenletből, a valós és képzetes részeket szétválasztva, lesz

$$\begin{aligned} 2|a_{n+1}| \cos \text{arc } a_{n+1} &= |a_n| \cos \text{arc } a_n + |b_n| \cos \text{arc } b_n, \\ 2|a_{n+1}| \sin \text{arc } a_{n+1} &= |a_n| \sin \text{arc } a_n + |b_n| \sin \text{arc } b_n. \end{aligned}$$

Innen

$$4|a_{n+1}|^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 + 2|a_n b_n| \cos(\text{arc } a_n - \text{arc } b_n). \quad (5)$$

Ha itt a most zérusnál nagyobb  $M$ -vel osztunk és  $n$ -et végtelenbe növeljük, lesz

$$\lim_{n=\infty} \cos(\text{arc } a_n - \text{arc } b_n) = 0.$$

Azaz mihelyt  $n$  elég nagy

$$|\text{arc } a_n - \text{arc } b_n| < \eta,$$

hol  $\eta > 0$  tetszés szerint megadható és  $\text{arc } a_n$ ,  $\text{arc } b_n$  számára esetleg<sup>1</sup>  $\text{mod } 2\pi$  kongruens alkalmas értékeket veszünk. Tehát egyúttal

$$|\text{arc } a_{n+1} - \text{arc } b_{n+1}| < \eta.$$

Ha azonban például  $\eta < \pi/2$ , akkor  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  2-ben említett helyzete miatt  $b_{n+1}$  csak az az értéke felel meg utolsó egyenlőtlenségünknek, a melyik a két (egymást  $2\pi$ -re kiegészítő  $a_n Ob_n$  szög közül ugyanabban fekszik, a melyikben  $a_{n+1}$ . Azaz szükségkép ez a  $b_{n+1}$  tartozik az algoritmus szóban forgó (zérustól különböző  $M$ -höz vezető) matrixához. Tehát valóban léteznek és egyenlők

$$\lim_{n=\infty} \text{arc } a_n = \lim_{n=\infty} \text{arc } b_n. \quad (6)$$

Egyfelől az I. eset, másfelől a II. eset (4) és (6) eredményei adják, hogy  $\lim a_n$ ,  $\lim b_n$  minden lehető esetben léteznek és

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n.$$

Ezek szerint az algoritmus bármely matrixát alkotó két végtelen sorozatnak

$$\begin{aligned} a, a_1, a_2, \dots \\ b, b_1, b_2, \dots \end{aligned}$$

közös határértéke van. Jelöljük e közös határértékeket, az  $a$  és  $b$  számok medium arithmetico-geometricumát,  $M(a, b)$ -vel, csatlakozva GAUSS és az összes későbbi írók távolról sem ily általános jelentőségű függvény-jeléhez. Eredményünk így fogalmazható:

*Az (L) algoritmusnak tetszés szerint megadott  $a$ ,  $b$  komplex számokból kiinduló bármely matrixát alkotó két végtelen sorozatnak közös határértéke van:*

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = M(a, b). \quad (7)$$

<sup>1</sup> Ha ugyanis a pozitív valós tengely a végnélkül fogyó  $a_n Ob_n$  szögtérben van, akkor  $0 \leq \text{arc } a_n < 2\pi$  és  $0 \leq \text{arc } b_n < 2\pi$  közül pl. a nagyobbik  $2\pi$ -vel kisebbítendő.

Az  $M(a, b)$  értéke általában attól is függ, hogy az algoritmus mely matrixához tartozik.

\*

A historiatilag legelső esetben, LAGRANGE-nál, az  $a, b$  pozitív valós számok és  $b_1, b_2, b_3, \dots$  számára mindig a pozitív érték veendő.<sup>1</sup> Ekkor tehát  $a_n, b_n$  pozitív valósak és  $M(a, b)$  egyértelműleg szintén olyannak van kijelölve. Az előbbi alaptétel ekkor igen egyszerűen nyerhető. Ugyanis, ha  $a=b$ , akkor

$$a=b=a_1=b_1=\dots \text{ in inf.} = M(a, b).$$

Legyen tehát például  $a>b$ . Vethető még  $b>0$ , mivel  $b=0$  esetben

$$b_1 = b_2 = \dots \text{ in inf.} = 0; \quad a_1 = \frac{1}{2}a, \quad a_2 = \frac{1}{4}a, \dots$$

és így

$$\lim a_n = \lim b_n = 0.$$

Ha azonban  $a>b>0$ , akkor egyszerű számítás szerint

$$\begin{aligned} a > b, \quad a_1 > b_1, \quad \dots, \quad a_n > b_n, \quad \dots; \\ a > a_1 > a_2 > \dots, \quad b < b_1 < b_2 < \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Eszerint  $\lim a_n, \lim b_n$  léteznek. Mivel pedig

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{1}{4} \frac{a_n - b_n}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} < \frac{1}{2}$$

a gyökök pozitív értékét véve, azért

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n).$$

Tehát

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}(a - b) \quad (9)$$

és ezért  $\lim a_n = \lim b_n$ .

---

<sup>1</sup> Az algoritmus legáltalánosabb tárgyalásai (előbbi dolgozataimtól eltekintve) sem veszik azt a maga teljes és lényeges mivoltában. Így LOHNSTEIN (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 33 [1888]) és NICOLETTI (Memorie della Soc. ital. delle Scienze, Ser. 3. T. 14. (1896) későbbi kifejezésemmel élve (V. §. 2.) csak arra az esetre szorítkozik, mikor az index  $\nu=0$  vagy 1.

## II. §.

Az  $\{M(a, b)\}$  sokaságról.

1. A megadott  $a, b$  számpárhoz tartozó összes, egymástól különböző  $M(a, b)$  értékek által alkotott sokaságot az  $M(a, b)$ -k sokaságának nevezzük és  $\{M(a, b)\}$ -vel jelöljük. Jelentse  $\rho\{M(a, b)\}$  azt a sokaságot, mely adódik, ha  $\{M(a, b)\}$  minden elemét  $\rho$ -val megszorozva gondoljuk. Az  $=$  jel fejezze ki két sokaság identikus voltát, a  $\leq$  jel pedig azt, hogy a baloldali sokaság része a jobboldalinak.

Állanak a következő relációk:

$$\begin{aligned} \{M(a, b)\} &= \{M(b, a)\}, \\ \{M(\rho a, \rho b)\} &= \rho \{M(a, b)\}, \\ \{M(a_n, b_n)\} &\leq \{M(a, b)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Az első identitás az algorithmus szimmetrikus voltából következik. A homogenitását kifejező

$$\rho a_{n+1} = \frac{1}{2}(\rho a_n + \rho b_n), \quad \rho b_{n+1} = \sqrt{\rho a_n \cdot \rho b_n}$$

egyenletek adják a második identitást. A harmadik reláció pedig abból folyik, hogy az  $a_n, b_n$  számpárral kezdődő összes

$$\left\| \begin{array}{cc} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array} \right\|$$

matrixokat nyerjük, ha az  $a, b$  számpárral kezdődő összes matrixok első  $n$  sorát töröljük és az így nyert matrixok közül csak azokat tartjuk meg, melyek épen a kiválasztott  $a_n, b_n$ -nel kezdődnek.

A (10) alattiakból kiragadható oly egyenletek, mint például

$$M(a, b) = M(b, a), \quad M(\rho a, \rho b) = \rho M(a, b), \quad M(a_n, b_n) = M(a, b)$$

mindig a többértékű függvényeknél szokásos értelemben veendő.

Az (1) szerint az  $\{M(a, b)\}$  sokaság elemei az  $O$ -ból

$$\max(|a|, |b|)$$

sugárral leírt körben és ennek kerületén fekszenek:

$$|M(a, b)| \leq \max(|a|, |b|), \quad (11)$$

hol az  $=$  jel csakis akkor áll, ha

$$a=b \text{ és } a_1=b_1=a_2=b_2=\dots \text{ in inf.}$$

2. Nevezzük *vég nélkül oscilláló matrixoknak* azokat, melyekben végtelen sok oly  $b_{n+1}$  van, mely nem fekszik ugyanabban az  $a_n Ob_n$  szögben, a melyikben  $a_{n+1}$ . Tételünk egyszerűbb fogalmazása végett számítsuk az oly matrixokat is ezekhez, a melyekben bizonyos  $n$ -től kezdve

$$b_n = b_{n+1} = \dots \text{ in inf.} = 0.$$

Áll a következő tétel:

Az  $\{M(a, b)\}$  sokaság egyik eleme mindig a zérus.

$$M(a, b) = 0$$

*értékhez a vég nélkül oscilláló matrixok és csakis azok vezetnek. Ezekre és csakis ezekre nem érvényes a*

$$\lim \operatorname{arc} a_n = \lim \operatorname{arc} b_n$$

*egyenlet.*

Ha

$$\lim \operatorname{arc} a_n = \lim \operatorname{arc} b_n,$$

akkor az illető matrix nem lehet vég nélkül oscilláló. Fordítva, ha nem vég nélkül oscillál a matrix, akkor áll ez az egyenlet, vagyis a (6). Vég nélkül oscilláló matrixoknál tehát csak az I. §. 2. alatti I. eset jelentkezhetik, hol pedig valóban

$$\lim a_n = \lim b_n = 0.$$

Ki kell még mutatni, hogy csakis ezeknél a matrixoknál

$$M(a, b) = 0.$$

A

$$\lim \operatorname{arc} a_n = \lim \operatorname{arc} b_n$$

esetben

$$a_n, b_n \neq 0,$$

mert különben

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \dots \text{in inf.} = 0$$

volna és arcusaik határozatlanok volnának. Kiderül, hogy maguk

$$\lim a_n = \lim b_n$$

is különböznek zérustól.

Ha

$$\lim \text{arc } a_n = \lim \text{arc } b_n,$$

akkor, (11)-et is tekintve,  $a_n, b_n$  az  $O$ -ból  $\max(|a|, |b|)$  sugárral leírt kör és  $O$ -ból kiinduló tetszés szerinti  $\varepsilon > 0$  szög szárjai által alkotott körcikkben vannak, mihelyt  $n > N$ , hol  $N$  az  $\varepsilon$ -tól függ. Elég kicsinek véve  $\varepsilon$ -t, a következő esetek az összes lehetőségeket kimerítik:

I. Bizonyos  $n > N$  mellett

$$\text{arc } a_n = \text{arc } b_n.$$

Ekkor

$$\text{arc } a_n = \text{arc } b_n = \text{arc } a_{n+1} = \text{arc } b_{n+1} = \dots \text{in inf.} = \text{arc } M(a, b).$$

Továbbá

$$0 < \min(|a_n|, |b_n|) \leq \min(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \leq \dots \text{in inf.} = |M(a, b)|,$$

$$\max(|a_n|, |b_n|) \geq \max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \geq \dots \text{in inf.} = |M(a, b)|.$$

Tehát

$$M(a, b) \neq 0.$$

II. Bizonyos  $n > N$  mellett

$$\text{arc } a_n \neq \text{arc } b_n,$$

de

$$|a_n| = |b_n|.$$

Ekkor

$$0 < |a_{n+1}| < |b_{n+1}| = |a_n|$$

és

$$\text{arc } a_{n+1} = \text{arc } b_{n+1} = \dots \text{in inf.} = \text{arc } M(a, b).$$

Tehát az I. eset áll elő  $(n+1)$ -től kezdve.

III. Bizonyos  $n > N$  mellett

$$\text{arc } a_n \neq \text{arc } b_n$$

és például

$$(Az \quad |b_n| < |a_n|.$$

$$|b_n| > |a_n|$$

eset analog ezzel.)

Ekkor

$$0 < |b_n| < \min(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \leq \min(|a_{n+2}|, |b_{n+2}|) \leq \dots \text{in inf.} = \\ = |M(a, b)|,$$

$$|a_n| > \max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \geq \max(|a_{n+2}|, |b_{n+2}|) \geq \dots \text{in inf.} = \\ = |M(a, b)|.$$

Tehát ekkor is  $M(a, b) \neq 0$ .

Ezek szerint valóban csakis a végnélkül oscilláló matrixok vezetnek  $M(a, b) = 0$  értékhez. Ilyen matrix mindig van, függetlenül  $a$  és  $b$ -től. Ugyanis, ha bizonyos  $a_n$  vagy  $b_n = 0$ , akkor  $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots \text{in inf.} = 0$  megállapodásunk szerint egy oly matrix elemei. Ha pedig  $a_n, b_n$  mindig  $\neq 0$ , akkor, ha például  $b_{n+1}$  ugyanabban az  $a_n O b_n$  szögben fekszik, mint  $a_{n+1}$ , úgy  $-b_{n+1}$ -gyel folytatva az algoritmust, az előbbinél egy *tovább oscilláló* matrixot nyerünk. Ha ez nem végnélkül oscilláló, akkor hasonló módon még tovább oscillálóvá lehet tenni.

Ezzel tételünket minden részében bebizonyítottuk.

Az I., II. és III. esetekben közös, hogy a  $\lim$  arc  $a_n = \lim$  arc  $b_n$  esetben bizonyos  $n$ -től kezdve

$$0 < \min(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \leq \min(|a_{n+2}|, |b_{n+2}|) \leq \dots \text{in inf} = \\ = |M(a, b)|, \\ \max(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|) \geq \max(|a_{n+2}|, |b_{n+2}|) \geq \dots \text{in inf} = \quad (12) \\ = |M(a, b)|.$$

Azoknál a matrixoknál tehát, melyeknél  $M(a, b) \neq 0$  és csakis ezeknél (vagyis a nem végnélkül oscillálóknál), bizonyos  $n$ -től kezdve az algoritmus elemeinek abszolút értékei két oldalról, alulról és fölülről, közelednek  $|M(a, b)|$ -hez. A (12) nem más, mint a (8) megfelelője az egész általános esetben.

3. Áll a következő tétel:

*Az O-ból tetszés szerinti  $r > 0$  sugárral leírt körön kívül az  $\{M(a, b)\}$  sokaságnak legfeljebb véges számú eleme fekszik.*

Legyen ugyanis

$$|a| < R, |b| < R \quad (13)$$

és vezessenek  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, a_{n+1}, \dots$   $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $M(a, b)$ -hez. Jelölje  $a'_{n+1}$  azt az  $a_{n+1}$ -et, mely  $a_n$  és  $-b_n$ -ből keletkezik:

$$a'_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n \dots (-b_n)).$$

Az (5) alatti

$$4|a_{n+1}|^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 + 2|a_n b_n| \cos(\text{arc } a_n - \text{arc } b_n)$$

egyenletben  $b_n$  helyett  $-b_n$ -et,  $\text{arc } b_n$  helyett  $\text{arc } b_n + \pi$ -t írva, lesz

$$4|a'_{n+1}|^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 - 2|a_n b_n| \cos(\text{arc } a_n - \text{arc } b_n).$$

Tehát

$$|a_{n+1}|^2 - |a'_{n+1}|^2 = |a_n b_n| \cos(\text{arc } a_n - \text{arc } b_n).$$

E szerint  $|a_{n+1}| \geq |a'_{n+1}|$ , a mint az  $a_{n+1}$ -et tartalmazó  $a_n O b_n$  szög  $\leq \pi/2$ .

Ha e szög  $< \pi/4$ , a mi a 2. alattiak szerint csakugyan bekövetkezik bizonyos  $n$ -től kezdve, vagyis

$$|\text{arc } a_n - \text{arc } b_n| < \frac{\pi}{4}, \quad (14)$$

hol  $\text{arc } a_n, \text{arc } b_n$  számára esetleg, mint I. §. 3. alatt, mod  $2\pi$  kongruens alkalmas értékeket veszünk, akkor

$$|a_{n+1}|^2 - |a'_{n+1}|^2 > \left| \frac{a_n b_n}{\sqrt{2}} \right|.$$

Mivel pedig a szóbanforgó  $M(a, b)$  abszolút értéke nagyobb  $r$ -nél és így bizonyos  $n$ -től kezdve  $|a_n| > r, |b_n| > r$ , és mivel (13) miatt a baloldal

$$(|a_{n+1}| + |a'_{n+1}|)(|a_{n+1}| - |a'_{n+1}|) < 2R(|a_{n+1}| - |a'_{n+1}|),$$

azért:  $a$  (13) és (14) esetén, elég nagy  $n$ -től kezdve, ha



$|M(a, b)| > r$ , az  $|a_{n+1}| - |a'_{n+1}|$  számára egy  $n$ -től független alsó korlátot nyertünk:

$$|a_{n+1}| - |a'_{n+1}| > \frac{r^2}{2|\sqrt{2}|R}. \tag{15}$$

Vagyis a kiindulásul vett ( $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $M(a, b)$ -hez vezető) matrixban csak *véges számszor* lehet úgy eljárni, hogy  $b_n$  helyett  $-b_n$ -nel folytatjuk valamiképp az algoritmust és ha most is  $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $M(a, b)$ -hez érünk, akkor egy későbbi  $b_n$  helyett újra  $-b_n$ -et veszünk és így tovább: ha mégis  $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $M(a, b)$ -hez akarunk jutni. Más szóval, a kiindulásul vett matrixból csak véges számú oly tovább öscilláló matrix alkotható, melyhez szintén  $r$ -nél nagyobb abszolút értékű  $M(a, b)$ -k tartoznak. Ez pedig maga a tétel.

Ha  $r$  végig fut egy oly  $r_1 = R > r_2 > r_3 > \dots$  végtelen sorozaton, hol  $\lim r_k = 0$ , akkor egyfelől legfeljebb véges számú  $M(a, b)$  van, melyre nézve

$$r_k > |M(a, b)| \geq r_{k+1}, \quad (k=1, 2, \dots \text{ in inf.})$$

másfelől valamennyi  $M(a, b)$ , az egy zérust kivéve, belekerül rendre egy-egy körgyűrűbe. Tehát az  $\{M(a, b)\}$  sokaság megszámlálható.

### III. §.

#### A ( $G$ ) föltételek.

Ha  $a = 0$  vagy  $b = 0$ , akkor az  $\{M(a, b)\}$  sokaságnak csak egy eleme van, a zérus. Épen így áll a dolog, ha  $a + b = 0$ , azaz  $a_1 = 0$ . Ha pedig  $a - b = 0$ , akkor vehető akár

$$a = b = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \dots \text{ in inf.},$$

akár

$$a = b = a_1 = b_1 = \dots = a_{n-1} = b_{n-1}, \quad b_n = -a_n.$$

A második esetben  $a_{n+1} = 0$  és így  $b_{n+2} = b_{n+3} = \dots \text{ in inf.} = 0$ . Ekkor bár végtelen sok matrix van:  $n = 1, 2, 3, \dots$ , de mindenikhez  $M(a, b) = 0$  tartozik. Az  $a - b = 0$  esetén tehát az

$\{M(a, b)\}$  sokaság csak két, esetleg egybeeső elemet tartalmaz, az  $a$ -t és a zérust.

Az  $\{M(a, b)\}$  sokaság e degenerálódásai, mint látni fogjuk, az  $a$  és  $b$  algebrai függvényeinek  $a_n, b_n$ -nek elágazásaival állanak összefüggésben és mély jelentőségük van a modulfüggvény szempontjából. Egyelőre csakis eredményeink kényelmesebb fogalmazása végett zárjuk ki a fölsorolt eseteket. *Ezentúl legyen mindig*

$$a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0, a-b \neq 0. \quad (G)$$

A

$$2a_1 = a+b, b_1^2 = ab, 2(a_1 \pm b_1) = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$$

összefüggések szerint a (G) föltételekből

$$a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_1 + b_1 \neq 0, a_1 - b_1 \neq 0$$

következik és fordítva.

*Tehát a (G) föltétel-rendszer aequivalens a hasonló alakú következő föltétel-rendszerek bármelyikével:*

$$a_n \neq 0, b_n \neq 0, a_n + b_n \neq 0, a_n - b_n \neq 0, \quad (16)$$

hol  $n$  tetszés szerint megadott pozitív egész.

A következőkből (V. §. 3.) kitűnik a (G) föltételek kimerítő jelentősége annyiban, hogy csakis nem teljesülésük esetén degenerálódik az  $\{M(a, b)\}$  sokaság véges számú eleművé.

#### IV. §.

**Az  $|M(a, b)|$  maximumai.**

1. A (11) és a II. §. 3. első tétele szerint  $|M(a, b)|$ -nek megadott  $a$  és  $b$  mellett van maximuma. A (16) szerint  $a_n, b_n \neq 0$ , tehát vannak oly matrixok, melyeknél  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos b_n$ , azaz van zérustól különböző  $M(a, b)$  érték (II. §.) s így

$$\max |M(a, b)| > 0.$$

Nevezzük maximális  $M(a, b)$ -nek az oly  $M(a, b)$  értéket, melynek abszolút értékénél bármely más, ugyanazon  $a$  és  $b$ -hez

tartozó  $|M(a, b)|$  nem nagyobb. Megvizsgáljuk, hogy az algoritmus mely és hány matrixa vezet maximális  $M(a, b)$ -hez. Ezáltal további eredményeket nyerünk az  $\{M(a, b)\}$  sokaságra is.

Szükségünk lesz a következő segédtétele:

«Az  $y = y_1 + iy_2$  és  $-y$  számok közül az fekszik közelebb a zérustól különböző  $x = x_1 + ix_2$ -höz, a melyikhez tartozó  $y/x$ ,  $-y/x$  hányados valós része pozitív. A két távolság akkor és csakis akkor egyenlő, ha e valós részek zérusok.»

Csakugyan ama távolságok négyzetei:

$$\begin{aligned}(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2), \\ (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2); \end{aligned}$$

a megfelelő hányadosok valós részei pedig:

$$\Re\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \Re\left(\frac{-y}{x}\right) = -\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

És ez egyenletek a segédtelet adják.

2. Ha egymásután mindig azt a  $b_1, b_2, \dots$  értéket vesszük, a melyik sorban közelebb van  $a_1, a_2, \dots$ -hez, mint a többi, azaz  $-b_1, \dots$ , vagyis, ha sorban azokat a  $b_1, b_2, \dots$  értékeket vesszük, melyeknél

$$\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0, \quad \Re\left(\frac{b_2}{a_2}\right) > 0, \dots$$

akkor egymásután az abszolút érték szerint legnagyobb  $a_2, a_3, \dots$ -hez jutunk. Csak egyféleképp lehetséges e választás, ha

$$\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0,$$

de hiányzik ez az egyértelműség az

$$\operatorname{arc} a - \operatorname{arc} b = \pm \pi$$

esetben, a mi így is írható

$$\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \Re\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = 0.$$

Tehát:

Ha  $\text{arc } a - \text{arc } b \neq \pm \pi$ , akkor egyetlen egy maximális  $M(a, b)$  van. Az ehhez tartozó matrixot  $a$

$$\Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0, \Re\left(\frac{b_2}{a_2}\right) > 0, \dots \text{ in int.} \quad (17)$$

végtelen sorozat jelöli ki egyértelműleg.

Az  $\text{arc } a - \text{arc } b = \pm \pi$  esetben az algorithmust akár  $b_1$ , akár  $-b_1$ -gyel folytatva, lehető legnagyobb  $|a_2|$ -höz érünk. Ha azután mindig úgy haladunk tovább, hogy a szóban levő hányadosok valós részei nem negatívak legyenek, akkor már többé

$$\text{arc } a_n - \text{arc } b_n = \pm \pi \quad (n > 1)$$

sohasem lehetséges, mivel az úgy választott  $a_n, b_n$ -ek a most  $O$ -n átmenő  $ab$  egyenes ugyanazon oldalán fekszenek. Ha tehát akár  $a_1, b_1$ -gyel, akár  $a_1, -b_1$ -gyel folytatjuk az algorithmust, mindig csak egy-egy nem negatív, sőt pozitív valós részű hányadost kapunk, azaz csak egy-egy oly  $b_n$ -et ( $n > 1$ ), mely  $a_n$ -hez közelebb fekszik, mint  $-b_n$ . Tehát:

Ha  $\text{arc } a - \text{arc } b = \pm \pi$ , akkor két maximális (abszolút értékre nézve egyenlő)  $M(a, b)$  van. Az ezekhez tartozó matrixokat a két

$$\Re\left(\frac{b_2}{a_2}\right) > 0, \Re\left(\frac{b_3}{a_3}\right) > 0, \dots \text{ in inf.} \quad (18)$$

végtelen sorozat jelöli ki.

Ebben az esetben bármely matrixnál  $b_1$  és  $-b_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$  és  $\frac{1}{2}(a_1 - b_1), \dots$  egymás tükörképei az  $O$ -n átmenő  $ab$  egyenesre nézve. Tehát:

Az  $\text{arc } a - \text{arc } b = \pm \pi$  esetben az összes  $M(a, b)$  értékek páronként egymás tükörképei az  $O$ -n átmenő  $ab$  egyenesre nézve. A két maximális  $M(a, b)$  egy oly párt alkot.

Könnyű belátni, hogy mikor  $\Re(b_1/a_1) > 0$ , akkor és csakis akkor  $\Re(b_1/a) > 0$ . Tehát: a (17) alatti sorozat helyett vehető a vele *aequivalens*

$$\Re\left(\frac{b_1}{a}\right) > 0, \Re\left(\frac{b_2}{a_1}\right) > 0, \dots \text{ in inf.} \quad (19)$$

sorozat. Hasonló vonatkozás áll a (18) alatti sorozatokra is.

GAUSS<sup>1</sup> a (19) által értelmezi az ő «einfachstes Mittel»-jét, melynek igazi jelentőségét csak az előbbieik adják. Gauss-nál az arc  $a - \text{arc } b = \pm \pi$  esetről sincs szó, úgyszintén hagyatékában nem található az itt szükséges I. §. alatti alaptétel sem.

## V. §.

Az  $M(a, b)$  értékek indexei.

1. A II. §. 3. pontjában bebizonyítottuk, hogy az  $\{M(a, b)\}$  sokaság megszámlálható. Az előbbi §. eredményei és az index fogalma lehetővé teszik az itteni viszonyok kimerítő tanulmányozását. A 4. és 5. alatt egyúttal oly egyenlőtlenségeket nyerünk, melyek majd az  $M(a, b)$  függvény vizsgálatánál lesznek döntő fontosságúak.

Mindenekelőtt állíthatjuk, hogy az *algorithmus matrixai*-nak számo ssága egyenlő a *kontinuum* számo sságával. Ez abból következik, hogy algorithmusunk minden egyes lépésnél, in infinitum, kétfelé ágazik,<sup>2</sup> tehát  $2^{\aleph_0}$  a matrixok említett számo ssága.

Ugyanezt tárgyalásunkhoz jobban illeszkedő módon így részletezhetjük.

Véve a kontinuumot alkotó  $\overline{01}$  intervallumot és ennek tetszés szerinti értékét 2-s alapszámú végtelen törttel állítva elő

$$0 \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots, \quad (\varepsilon_n = 0, 1)$$

minden ily törthöz rendelhető az algorithmus matrixai közül legalább egy, ha például azt követeljük, hogy

$$\Re \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \geq 0 \text{ legyen ha } \varepsilon_n = 1$$

és

$$\Re \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \leq 0 \text{ legyen ha } \varepsilon_n = 0.$$

<sup>1</sup> Werke III. p. 477.

<sup>2</sup> A  $(G)$  föltételek miatt  $\sqrt{a_n b_n} \neq 0$ .

A kérdéses számosság tehát legalább is egyenlő a kontinuuméval. Fordítva, bármely matrix által szolgáltatott végtelen előjel-sorozathoz

$$\operatorname{sgn} \Re \left( \frac{b_1}{a_1} \right), \operatorname{sgn} \Re \left( \frac{b_2}{a_2} \right), \dots$$

(hol egyes tagok helyén 0 áll, mikor az illető valós rész zérus), legalább is egy 2-s alapszámú végtelen tört rendelhető a tett megállapodással. A matrixok számossága tehát a kontinuuméval legfeljebb egyenlő. A két eredmény újra állításunkat adja.

2. A  $(G)$  föltételek következtében (mint a IV. §. 1. elején részleteztük) van zérustól különböző  $M(a, b)$  érték. A II. §. 2. szerint a zérustól különböző  $M(a, b)$ -knél és csakis ezeknél

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arc} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arc} b_n.$$

Véve egy ily  $M(a, b)$ -t, bizonyára van oly  $\nu$ , hogy az illető matrixnál

$$\Re \left( \frac{b_\nu}{a_\nu} \right) > 0, \Re \left( \frac{b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} \right) > 0, \Re \left( \frac{b_{\nu+2}}{a_{\nu+2}} \right) > 0, \dots \text{in inf.} \quad (20)$$

mivel ellenkező esetben bármeddig is menve az illető matrixban, mindig lennének oly  $b_{n+1}$  elemek, melyek  $a_{n+1}$ -től távolabb lennének (IV. §. 1. segédtétele), mint  $-b_{n+1}$ , vagyis melyek nem esnének  $a_{n+1}$ -el ugyanabba az  $a_n Ob_n$  szögbe. Az illető matrix végnélkül oscillálna (II. §. 2.) és ezért  $\lim \operatorname{arc} a_n = \lim \operatorname{arc} b_n$  nem állana.

Tehát létezik a (20) alatti  $\nu$ , ha  $M(a, b) \neq 0$ . Az így jellemzett  $\nu$ -k közül a legkisebbet az illető  $M(a, b)$  indexének nevezzük.

Például ha

$$\Re \left( \frac{b}{a} \right) > 0,$$

akkor a maximális  $M(a, b)$  indexe  $\nu = 0$ . Ha pedig

$$\Re \left( \frac{b}{a} \right) < 0 \text{ vagy } = 0,$$

akkor az első eset mindkét<sup>1</sup> maximális  $M(a, b)$ -jének indexe 2,

<sup>1</sup> Azaz ha még  $\operatorname{arc} a - \operatorname{arc} b = \pm \pi$ . Ellenben a maximális  $M(a, b)$  indexe ekkor is 1,

a második esetbeli maximális  $M(a, b)$  indexe 1. Az értelmezés szerint csak zérustól különböző  $M(a, b)$ -nek van indexe. Ha  $M(a, b) = 0$ , legyen végtelen nagy az indexe.

A II. §. 2. első tételét a IV. §. 2. alapján most már így fogalmazhatjuk és bővíthetjük:

*Az  $\{M(a, b)\}$  sokaságnak mindig van egy nem véges indexű eleme, a zérus. Az összes véges indexű elemek és csakis azok zérustól különbözők. Minden egyes ily  $M(a, b)$  egyenlő a matrixához tartozó  $a, b$  számpár maximális  $M(a, b)$ -jével, ha  $\nu$  az indexe.*

Mivel sokszoroság szerint  $2^\nu$  számú  $a, b$  számpár van, azért a tétel utolsó részéből következik, mint már más úton is láttuk (II. §. 3.), hogy az  $\{M(a, b)\}$  sokaság megszámlálható. De 1. szerint az algorithmus matrixainak számossága meg nem számlálható lévén, kell legalább egy oly  $M(a, b)$ -nek lennie, melyhez meg nem számlálhatóan végtelen sok matrix vezet. A II. §. 3. alattiak szerint ez az  $M(a, b)$  abszolút értékre nézve kisebb bármely pozitív  $r$ -nél, a többi  $M(a, b)$ -hez pedig csak véges számú matrix vezet. Tehát

*az  $M(a, b) = 0$  érték az egyedüli, melyhez meg nem számlálhatóan végtelen sok matrix vezet. Minden más  $M(a, b)$  érték csak véges számú matrixhoz tartozik.*

3. Még tovább menve kimutatjuk, hogy (a  $(G)$  föltételek mellett) megadott  $a$  és  $b$ -nél az  $\{M(a, b)\}$  sokaság valóban végtelen: *megszámlálhatóan végtelen sok egymástól különböző  $M(a, b)$  érték van.*

Vegyük e végre a maximális  $M(a, b)$ -t. Ha ilyen egy van és ehhez az  $a_1, b_1$  számpáron át érünk, akkor  $M(a_1, -b_1)$  maximális értéke abszolút értéke szerint kisebb  $|M(a, b)|$  maximális értékénél, azaz

$$\max |M(a, b)| > \max |M(a_1, -b_1)|.$$

Ha pedig két maximális  $M(a, b)$  van, akkor az előbbi egyenlőtlenség helyett egyenlet áll, de már a négy  $a_2, b_2$  számpár között van (kettő) olyan, melynél

$$\max |M(a, b)| > \max |M(a_2, b_2)|.$$

A (10) harmadik relációja szerint mindezen  $M$  értékek elemei az  $\{M(a, b)\}$  sokaságnak.

Igy haladva tovább, az  $M(a, b)$  értékekből egy, abszolút értékre nézve lényegesen fogyó, végtelen sorozatot tudunk ki-  
ragadni. E sorozat minden tagja véges indexű, tehát 2. szerint zérustól különböző. Ezek már elvezettek állításunkhoz.

Ezt még a II. §. 3. első tételével kombinálva, lesz:

Az  $\{M(a, b)\}$  sokaságnak a zérus egyetlen torlódási pontja.

4. Az index fogalmának segítségével megbecsüljük az algoritmussal az  $|M(a, b)|$  és arc  $M(a, b)$ -hez való közeledés gyorsaságát. Az alábbi (21) és (22) a (4) és (6)-ot egészítik ki ebből a szempontból.

Egyszerű számítás szerint

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} (\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} (a_n - b_n) = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{b_n/a_n}}{1 + \sqrt{b_n/a_n}} (a_n - b_n). \end{aligned}$$

Innen

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{|1 - \sqrt{b_n/a_n}|}{|1 + \sqrt{b_n/a_n}|} |a_n - b_n|.$$

Legyen  $n \geq \nu$ , hol  $\nu$  azon  $M(a, b)$  indexe, melyhez az előbbi  $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$  vezetnek. Akkor az index értelmezése és a (19) sorozathoz fűzött megjegyzés szerint

$$\Re\left(\frac{b_n}{a_n}\right) > 0, \quad \Re\left(\frac{b_{n+1}}{a_n}\right) > 0. \quad (n \geq \nu).$$

Mivel pedig

$$\frac{b_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}},$$

azért egyúttal

$$\Re\left(\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right) > 0. \quad (n \geq \nu)$$

veendő. Ekkor azonban



$$\left| 1 - \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \right| < \left| 1 + \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \right|,$$

tehát

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| < \frac{1}{2} |a_n - b_n| \quad (n \geq \nu).$$

Ebből, ha  $n = \nu$ ,

$$|a_{\nu+k} - b_{\nu+k}| < \frac{1}{2^k} |a_\nu - b_\nu|, \quad (21)$$

( $k=1, 2, \dots$  in inf.)

hol  $\nu$  helyett  $\nu+1, \nu+2, \dots$  is írható. A (21) az algorithmus pozitív valós esetéhez tartozó (9) általánosítása.

5. Az  $a_n, b_n$  trigonometrikus alakjai mutatják, hogy a két (egymást  $2\pi$ -re kiegészítő)  $a_n Ob_n$  szög kisebbike  $\pi/2$ -nél kisebb, ha

$$\Re\left(\frac{b_n}{a_n}\right) > 0,$$

és fordítva. Tehát

$$|\text{arc } a_\nu - \text{arc } b_\nu| < \frac{\pi}{2},$$

ha (mint I. §. 3.-ban)  $\text{arc } a_\nu, \text{arc } b_\nu$  számára mod  $2\pi$  kongruens alkalmas értékeket veszünk.

Hasonló értelemben

$$|\text{arc } a_{\nu+1} - \text{arc } b_{\nu+1}| < \frac{\pi}{4},$$

mivel az  $Ob_{\nu+1}$  vektor felezi az  $a_n Ob_n$  szöget. És így tovább, mindig hasonló értelemben,

$$|\text{arc } a_{\nu+k} - \text{arc } b_{\nu+k}| < \frac{1}{2^k} \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

( $k=0, 1, \dots$  in inf.)

hol  $\nu$  helyett itt is írható  $\nu+1, \nu+2, \dots$

## VI. §.

### Az algorithmus negatív iránya.

Az (L) algorithmust a következő,  $x$ -re vonatkozó identitás-sorozat értelmezte:

$$x^2 - 2a_{n+1}x + b_{n+1}^2 \equiv (x - a_n)(x - b_n),$$

( $n=0, 1, \dots$  in inf.;  $a_0 = a, b_0 = b$ ).

Folytathatjuk azonban e sorozatot visszafelé is,  $n = -1, -2, -3, \dots$  véve s így egymásután értelmezve az  $a_{-1}, b_{-1}; a_{-2}, b_{-2}; \dots$  számpárokat. Ez által két irányban végnélküli algoritmust nyerünk:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n), \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{aligned} \quad (\text{L}^*)$$

$(n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots; a_0 = a, b_0 = b).$

Kiindulva az  $a, b$  kezdő elemekből, azt mondjuk, hogy  $n = 0, 1, 2, \dots$  vezet az algoritmus pozitív,  $n = 0, -1, -2, \dots$  az algoritmus negatív irányában. Az I. §. 1-ben láttuk, hogy az algoritmus pozitív irányban minden egyes lépésnél kétfelé ágazik. Hasonló szétágazás van a negatív irányban is. Ugyanis az  $x^2 - 2a_{n+1}x + b_{n+1}^2 = 0$  két gyöke  $a_n, b_n$  csak sorrendtől eltekintve vannak meghatározva, tehát  $a_{n-1}, b_{n-1}$  számpárokat az

$$x^2 - 2a_n x + b_n^2 = 0, \quad x^2 - 2b_n x + a_n^2 = 0$$

egyenlet mindenike szolgáltat. Vagyis az algoritmus negatív iránya ugyanazon sokszorosággal ágazik el, mint a pozitív:  $2^n$  számú  $a_{-n}, b_{-n}$  számpár van.

Az  $x^2 - 2a_n x + b_n^2 = 0$  gyökei

$$a_n \pm \sqrt{a_n^2 - b_n^2},$$

az  $x^2 - 2b_n x + a_n^2 = 0$  gyökei pedig

$$b_n \pm i \sqrt{a_n^2 - b_n^2}.$$

Az első két gyök különbségének és a második két gyök különbségének hányadosa  $\pm i$ . Tehát az  $a_n, b_n$  számpárból nyerhető két  $a_{n-1}, b_{n-1}$  számpár által meghatározott két  $a_{n-1}b_{n-1}$  egyenes merőleges egymásra. A két  $a_{n-1}b_{n-1}$  egyenes vonaldarab egyenlő, hosszúságuk  $2 \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ .

A (G) feltételek és a (16) æquivalens voltából folyik, hogy a (G)-vel æquivalens a hasonló alakú következő feltétel-rendszerek bármelyike:

<sup>1</sup> Az algoritmus mindkét iránya már LAGRANGE-nél (l. c.) megtalálható.

$$a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0, \quad a_n + b_n \neq 0, \quad a_n - b_n \neq 0, \quad (G^*)$$

hol  $n$  tetszés szerint megadott pozitív vagy negatív egész.

A

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

megvizsgálásához tanulmányoznunk kell az előbb jelentkezett  $a_n^2 - b_n^2$  kifejezést. Ez numerikus szorzóktól eltekintve, az

$$x^2 - 2a_n x + b_n^2 = 0$$

egyenlet diszkriminánsa.

## VII. §.

**Algorithmus a diszkriminánsok négyzetgyökére.**

1. Legyen rövidségért  $a_n^2 - b_n^2 = c_n$ , azaz

$$a_n^2 = b_n^2 + c_n^2, \quad (23)$$

$(n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots; c_0 = c).$

A VI. §-beli  $(G^*)$  miatt

$$c_n^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) \neq 0,$$

de viszont a (7) szerint mindig  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ . Tehát az algorithmus bármely matrixához tartozó bármely  $c, c_1, c_2, \dots$  sorozatban

$$c_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0. \quad (24)$$

A (23)-ban  $b_n$  és  $c_n$  szimmetrikusan szerepelvén, tanulmányozzuk  $M(a_n, b_n)$  mellett  $M(a_n, c_n)$ -et is. E végre  $a_n$  és  $c_n$ -re vonatkozó alkalmas algorithmus keresendő.

A (23)-ból az  $(L^*)$  által

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n + b_n)^2 - a_n b_n = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(a_n - (2a_{n+1} - a_n))^2 = (a_n - a_{n+1})^2. \end{aligned}$$

Innen

$$\pm c_{n+1} = a_n - a_{n+1} = (2a_{n+1} - b_n) - a_{n+1} = a_{n+1} - b_n,$$

azaz

$$a_n = a_{n+1} \pm c_{n+1}, \quad b_n = a_{n+1} \mp c_{n+1},$$

hol egyidejűleg vagy a két felső, vagy a két alsó jel veendő. De mivel  $c_{n+1}$  a (23) által csak előjeltől eltekintve van értelmezve, azért megállapodhatunk pl. a két felső jelben. Lesz tehát

$$c_n^2 = (a_{n+1} + c_{n+1})^2 - (a_{n+1} - c_{n+1})^2 = 4a_{n+1}c_{n+1}.$$

A nyert összefüggések közül vegyük a következőket:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1} + c_{n+1}, \\ c_n &= 2\sqrt{a_{n+1}c_{n+1}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Ez az algorithmus az  $(L^*)$  alattitól egyfelől numerikus szorzóban, másfelől irányban különbözik. Mindkét eltérést kompenzálják az

$$a_n = 2^{-n}\bar{a}_{-n}, \quad c_n = 2^{-n}\bar{c}_{-n}$$

helyettesítések.<sup>1</sup> Lesz

$$\bar{a}_{-n} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{-n-1} + \bar{c}_{-n-1}), \quad \bar{c}_{-n} = \sqrt{\bar{a}_{-n-1}\bar{c}_{-n-1}}.$$

Mivel  $n$  minden egész számon átfut,\* azért írható  $-n$  helyett  $n+1$ . Lesz

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n+1} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_n + \bar{c}_n), \\ \bar{c}_{n+1} &= \sqrt{\bar{a}_n\bar{c}_n}, \end{aligned} \quad (26)$$

$(n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots; \bar{a}_0 = a_0, \bar{c}_0 = c).$

Ez már maga az  $(L^*)$   $a, c$  kezdő elemekkel. Tehát az  $a_n, b_n$  és  $M(a, b)$ -re vonatkozó eredmények érvényesek  $\bar{a}_n, \bar{c}_n$  és  $M(a, c)$ -re is és így az

$$\bar{a}_n = 2^{-n}a_{-n}, \quad \bar{c}_n = 2^{-n}c_{-n} \quad (27)$$

helyettesítésekkel átvihetők  $a_n, c_n$  és  $M(a, c)$ -re.

Álljon itt ennek az elvnek néhány alkalmazása.

<sup>1</sup> Ezek már GAUSS-nál megtalálhatók: Werke III. p. 397.

2. A (7) alatti alaptételnek megfelelően

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{c}_n = M(a, c),$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} a_{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} c_{-n} = M(a, c). \quad (28)$$

E szerint zérustól különböző, azaz (V. §. 2.) véges indexű  $M(a, c)$  értéknél

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{-n} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{-n}}{c_{-n}} = 1, \quad (29)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{-n}}{a_{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{-n}}{c_{-n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} = 2. \quad (30)$$

3. A (10) harmadik relációjának megfelelően

$$\{M(\bar{a}_n, \bar{c}_n)\} \leq \{M(a, c)\}, \quad (n \geq 0)$$

azaz, (10) második relációját is alkalmazva,

$$2^{-n} \{M(a_{-n}, c_{-n})\} \leq \{M(a, c)\}.$$

Épen így

$$\{M(a, c)\} \leq 2^n \{M(a_n, c_n)\}.$$

Összefoglalva: ha  $n > 0$ , akkor

$$2^{-n} \{M(a_{-n}, c_{-n})\} \leq \{M(a, c)\} \leq 2^n \{M(a_n, c_n)\}. \quad (31)$$

A (10) harmadik relációja szerint

$$M(a_n, b_n) = M(a, b)$$

az oly  $M(a_n, b_n)$ -eknél, melyek matrixa identikus a jobboldali  $M(a, b)$  matrixával, ha ebből elhagyjuk az első  $n$  sort. Megfelelően

$$M(a, c) = M(\bar{a}_{-n}, \bar{c}_{-n}),$$

ha  $M(\bar{a}_{-n}, \bar{c}_{-n})$  matrixa olyan, hogy első  $n$  sorát törölve,  $M(a, c)$  matrixa marad vissza. A (27) alatti helyettesítések szerint *e* matrixoknál

$$M(a, c) = 2^n M(a_n, c_n), \quad (32)$$

a mi (31) szerint úgy értendő, hogy bármely  $M(a, c)$  értékhez tartozik egy oly  $M(a_n, c_n)$ , mely teljesíti a fölirt egyenletet.

4. Állanak a következő összefüggések.

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n+2}} + \sqrt{c_{n+2}}, \quad \sqrt{b_n} = \sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{c_{n+2}}. \quad (33)$$

melyek a

$$4a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2b_{n+1} = a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n} = (\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2$$

$$4c_{n+2}^2 = 4(a_{n+2}^2 - b_{n+2}^2) = (a_{n+1} - b_{n+1})^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^4,$$

egyenletekből folyó

$$a_{n+2} = \frac{1}{4}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2, \quad c_{n+2} = \frac{1}{4}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$$

összefüggések következményei.

## MÁSODIK RÉSZ.

### Függvényelméleti alapok.

#### VIII §.

#### Egy segéd-tétel.

Az  $a$ ,  $b$  számokat tekintsük már most változóknak. Legyen

$$|a| < R, \quad |b| < R, \quad (34)$$

hol  $R > 0$  tetszés szerint megadott szám. Szorítkozzunk továbbá csak oly  $M(a, b)$  értékekre, melyeknél

$$|M(a, b)| > r, \quad (35)$$

hol  $r > 0$  szintén tetszőlegesen előirt szám. Az  $a$ ,  $b$  változók is teljesítsék a (G) föltételeket. A (34) és (35) alatti korlátozások formailag ugyanazok, mint a II. §. 3. alatt az  $a$ ,  $b$  számokra kiróttak. A (35)-nek eleget tevő  $M(a, b)$  érték (1) szerint csak akkor lehet, ha  $\max(|a|, |b|) > r$ , a mihez azonban  $r < R$  szükséges. Ezt föltéve, mindenestre lehet (35)-nek eleget tevő  $M(a, b)$  érték: például ha  $a$  és  $b$  az  $O$ -ból leirt  $r$  sugarú körön

kivül és egymáshoz elég közel fekszenek, akkor a maximális  $M(a, b)$  megfelel (35)-nek.

Áll a következő segéd-tétel:

A (34) és (35) esetén az  $M(a, b)$  értékek indexeinek van egy csakis  $R$  és  $r$ -től függő felső korlátja.

Állandó  $a$  és  $b$  mellett ez a II. §. 3. alatti első tételből folyik. Változó  $a$  és  $b$  esetén számítás nélkül így látható be:

Ha a (20) alatti végtelen sorozat helyett egy hasonló, de csak véges sorozatból indulunk ki

$$\Re\left(\frac{b_n}{a_n}\right) > 0, \Re\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > 0, \dots, \Re\left(\frac{b_{n+\varrho}}{a_{n+\varrho}}\right) > 0; \Re\left(\frac{b_{n+\varrho+1}}{a_{n+\varrho+1}}\right) < 0, \quad (20')$$

akkor a (21) és (22) alatti végtelen sok egyenlőtlenség helyett is csak véges számút nyerünk:

$$|a_{n+k} - b_{n+k}| < \frac{1}{2^k} |a_n - b_n|, \quad (k=1, 2, \dots, \varrho) \quad (21')$$

$$|\operatorname{arc} a_{n+k} - \operatorname{arc} b_{n+k}| < \frac{1}{2^k} \frac{\pi}{2}, \quad (k=0, 1, \dots, \varrho). \quad (22')$$

A (34) és (1) szerint

$$|a_n - b_n| < 2R,$$

tehát (21') és (22')-ből

$$|a_{n+\varrho} - b_{n+\varrho}| < \frac{1}{2^{\varrho-1}} R, \quad (21'')$$

$$|\operatorname{arc} a_{n+\varrho} - \operatorname{arc} b_{n+\varrho}| < \frac{1}{2^{\varrho}} \frac{\pi}{2}. \quad (22'')$$

A (20') utolsó egyenlőtlenségére való tekintettel írható, mint (21'') folytatása

$$|a_{n+\varrho+1} - (-b_{n+\varrho+1})| < \frac{1}{2^{\varrho}} R,$$

s így

$$|a_{n+\varrho+2}| < \frac{1}{2^{\varrho+1}} R.$$

Ha  $\rho$  elég nagy, akkor  $a_{n+\varrho+2}$  oly közel fekszik a zérushoz, hogy az algorithmus bármely további folytatásánál, előbb vagy később,

$$|a_t| < r, \quad |b_t| < r.$$

Ez azonban (1) miatt ellenmond (35)-nek. És nyilván csak  $R$  és  $r$ -től függ, hogy ily ellenmondás eléréséhez mily nagy  $\rho$  szükséges. Tehát:

«A (34) és (35) esetén a (20')-beli  $\rho$ -nak van egy csakis  $R$  és  $r$ -től függő felső korlátja.»

Minden további nélkül hozzátehetjük, hogy

«A (20') alatti jelenség bár többször is, különböző  $n$  és  $\rho$  mellett fölléphet, de egy csakis  $R$  és  $r$ -től függő véges számnál kevesebbszer.» A két utolsó eredmény az előrebocsátott segéd-tételt adja.

### IX. §.

#### Az $M(a, b)$ függvény analitikus jellege.

1. Az előbbi §. segéd-tétele szerint van oly

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}(R, r)$$

pozitív egész szám, mely nagyobb a (34) és (35) esetén létező bármelyik indexnél. Írható tehát (21)-ben  $\nu$  helyett  $\bar{\nu}$ . Mivel az index jelentése következtében

$$|a_{\bar{\nu}+k+1} - a_{\bar{\nu}+k}| < |a_{\bar{\nu}+k} - b_{\bar{\nu}+k}|,$$

hol = jel a (G) föltételek miatt nem állhat, és (34)-ből

$$|a_{\bar{\nu}} - b_{\bar{\nu}}| < 2R,$$

azért (21)-ből

$$|a_{\bar{\nu}+k+1} - a_{\bar{\nu}+k}| < \frac{1}{2^{k-1}} R \quad (k=1, 2, \dots \text{ in. inf.})$$

E szerint, mivel

$$\begin{aligned} & |a_{\bar{\nu}+k+1} - a_{\bar{\nu}+k}| + |a_{\bar{\nu}+k+2} - a_{\bar{\nu}+k+1}| + \dots \text{ in. inf.} < \\ & < R \left( \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \dots \text{ in. inf.} \right), \end{aligned}$$

azért az  $M(a, b)$  következő végtelen sora

$$\begin{aligned} M(a, b) = \lim_{n=+\infty} a_n = & a + (a_1 - a) + (a_2 - a_1) + \dots + \\ & + (a_{\bar{\nu}+k+1} - a_{\bar{\nu}+k}) + \dots \text{ in. inf.} \end{aligned} \quad (36)$$

$a$  (34) és (35) esetén egyenletesen konvergál.



Az  $a_n, b_n$  az  $a$  és  $b$  homogén algebrai függvényei. A (36) sor tagjai tehát szintén azok. WEIERSTRASS ismert tétele szerint a (36) egyértékű analitikus függvényt értelmez az  $a, b$  változók minden oly tartományában, hol a sor egyenletesen konvergál és tagjai egyértékű analitikus függvények. Még csak az egyértékűséggel kell foglalkozni.

Végtelen sokféleképp lehet két tartományt, egyiket  $a$ , másikat  $b$  számára, a (34) körön belül, úgy kijelölni, hogy teljesüljenek a  $(G)$  föltételek. Ugyanis ne tartalmazzák e tartományok az  $O$  pontot, ne legyen közös pontjuk és ne legyen  $O$ -ra nézve diametriális pontjuk. Ekkor (16) szerint  $a_n, b_n$  is megfelelnek mindig a  $(G)$  föltételeknek. Ha a jellemzett tartományokban  $a$  és  $b$  tetszés szerinti zárt utakat írnak le, akkor  $a_n, b_n$  kezdeti értékükbe térnek vissza, mivel a  $(G)$  föltételek teljesülvén,  $a_n, b_n$ -nek, mint  $a$  és  $b$  algebrai függvényeinek nincs elágazásuk ama tartományokban.

Mivel  $r$  tetszés szerinti kicsi,  $R$  tetszés szerinti nagy lehet, azért eredményünk a következő:

*Bármely zérustól különböző  $M(a, b)$  az  $a$  és  $b$  változók egyértékű analitikus függvénye, ha  $a, b$  oly véges tartományokra vannak szorítva, melyekben mindig teljesülnek a  $(G)$  föltételek.*

Egyszerűbben fejezhetjük ki ezeket, ha az  $a, b$  homogén változók helyett a

$$\frac{b}{a} = \xi$$

inhomogén változót vezetjük be. A (10) második relációja szerint van oly  $M(1, \xi)$  érték, miként

$$aM(1, \xi) = M(a, b).$$

A  $(G)$  föltételek  $\xi$ -re átvive:

$$\xi \neq 0, \pm 1, \infty,$$

és ezek az egyedüli elágazási pontok.

*Bármely zérustól különböző  $M(1, \xi)$  a  $\xi$  egyértékű analitikus függvénye a  $\xi$  minden oly véges tartományában, mely nem tartalmazza a  $0, \pm 1$  pontokat.*

Kimutatjuk, hogy ez egyértékű analitikus függvények, melyek a különböző algoritmus matrixokhoz tartozó (36) alatti sorokkal vannak értelmezve, egy monogen függvény ágait alkotják, analitikus folytatással átmennek egymásba.

2. Egyszerűségért előbb  $M(1, \xi)$ -vel foglalkozunk; az eredmények közvetlenül átvihetők  $M(a, b)$ -re. Új jelöléseket nem akarva bevezetni, legyenek az 1 és  $\xi$  kezdő elemekből kiinduló algoritmus elemei is  $a_n, b_n$ :

$$\frac{1}{2}(1+\xi) = a_1, \quad \sqrt{\xi} = b_1, \dots$$

Az algoritmus szerkezete mutatja, hogy bizonyos  $n$ -től kezdve  $\xi = 0$  és  $-1$  valamely  $b_n$ -re nézve elágazási pontok:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(1+\xi), & a_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\xi}{2} + \sqrt{\xi}\right), & a_3 &= \frac{1}{4}(1+\sqrt{\xi})^2, \dots \\ b_1 &= \sqrt{\xi}, & b_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\xi)}\sqrt{\xi}, \\ b_3 &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{\xi})\sqrt{\frac{1}{2}\xi}\sqrt{\xi}, \dots \end{aligned}$$

de  $\xi = +1$  először csak  $b_4$ -nél és csak akkor elágazás, ha  $\sqrt{\xi} = -1$  a  $\xi = 1$  pontban

Ezek alapján már láthatók a következők:

a) »Az algoritmus bármely matrixában

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n$$

kezdeti értékükbe térnek vissza,  $b_n$  pedig jegyet változtat, ha  $\xi$  a 0 pontot  $2^{n-1}$ -szer ( $n \geq 1$ ) vagy a  $-1$  pontot  $2^{n-2}$ -szer ( $n \geq 2$ ) körüljárja, kivülhagyva a  $\pm 1$ , illetve a 0,  $+1$  pontokat.»

$\beta$ ) »Az algoritmus azon és csakis azon matrixainál, melyeknél  $\sqrt{\xi} = -1$ , ha  $\xi = 1$ , ugyanaz történik mikor  $\xi$  a  $+1$  pontot  $2^{n-4}$ -szer ( $n \geq 4$ ) körüljárja, kivülhagyva a 0,  $+1$  pontokat.»

Legyen már most két (36) alatti sor adva

$$\begin{aligned} M(1, \xi) &= 1 + (a_1 - 1) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + \dots, \\ M_1(1, \xi) &= 1 + (a_1 - 1) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + \dots \end{aligned}$$

A legelső eltérés az, hogy  $M_1(1, \xi)$ -nél  $b_n$  helyett  $-b_n$ , azaz

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ helyett } a'_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

áll.

Járja körül  $\xi$  például a zérust  $2^{n-1}$ -szer, kívülhagyva a  $\pm 1$  pontokat. Ekkor  $\alpha$  szerint  $M_1(1, \xi)$  átmegegy

$$M_2(1, \xi) = 1 + (a_1 - 1) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + \dots$$

sorba. Ez az  $M_2(1, \xi)$  sem zérus, mert ha  $m$  elég nagy, akkor az  $M_1$ -beli  $a_m, a_{m+1}, \dots$  oly közel fekszenek egymáshoz egy  $O$ -ból leírt körön kívül, hogy az  $M_2(1, \xi) = 0$  teljesüléséhez szükséges végnélküli oscillálás (II. §. 2.) nem állhat elő folytonos átmenettel.

Ha  $M_2(1, \xi)$  is különbözik még  $M(1, \xi)$ -től, akkor hasonló eljárással újra megszüntethető a mostani, már későbbi, legelső eltérés; és így tovább. Kimutatjuk, hogy ez eljárás véges számú ismétlése  $M(1, \xi)$ -hez vezet.

Gondoljuk pillanatra  $\xi$ -t állandónak,  $0, \pm 1$ -től különbözőnek. Az  $M(1, \xi)$ -ből leírható oly  $\delta > 0$  sugarú kör (V. §. 3. utolsó tétele), melyben nincs más  $M(1, \xi)$ . A  $\xi$  körül leírható továbbá oly  $\varepsilon > 0$  sugarú kör, hogy  $\xi$ -t e körben változtatva: a  $\delta$  sugarú kör még akkor sem fog más  $M(1, \xi)$ -t tartalmazni. Mivel (36) egyenletes konvergenciája miatt az előbbi eljárással átmehetünk oly  $M_2(1, \xi), M_3(1, \xi) \dots M_k(1, \xi)$  sorokra, hogy az  $\varepsilon$  sugarú körön belül végre

$$|M(1, \xi) - M_k(1, \xi)| < \delta,$$

azért  $\delta$  tetszés szerinti kis volta miatt

$$M(1, \xi) = M_k(1, \xi).$$

Ekkor azonban  $M(1, \xi)$  és  $M_k(1, \xi)$ , mint analitikus függvények, nemcsak az  $\varepsilon$  sugarú körben, hanem egész értelmezési tartományukban (lásd 1. alatt) is identikusak. És ez volt bebizonyítandó. Tehát az V. §. 3. első tételét is véve, mondhatjuk a IV. §. 2. alattiakra való tekintettel:

*Az  $M(1, \xi)$ , zérus értékétől eltekintve, egy végtelen sok*

értékű monogen analitikus függvény, ha  $\xi$  véges és  $0, \pm 1$ -től különbözik. A  $\xi = 0$  és  $-1$  pontokban valamennyi ága egybeesik. A negatív valós  $\xi$  tengelyhosszában fölmetszett  $\xi$  síkban a maximális  $M(1, \xi)$  értékek ama függvény egy ágát alkotják.

Közvetlenül átmehetünk  $M(a, b)$ -re. De csak a következőket hangsúlyozzuk külön is:

Az  $M(a, b)$ , zérus értékétől eltekintve, egy végtelen sok értékű monogen analitikus függvény, ha  $a$  ( $G$ ) föltételeket teljesítő  $a, b$  változók véges tartományokra vannak szorítva.

Ha végnélkül ismételve gondoljuk az alkalmazott eljárást, a  $0$  (vagy akár  $-1$ ) pont körüljárását, akkor és csakis akkor mindazokhoz a (36) alatti sorokhoz elérünk, melyek végnélkül oscilláló matrixhoz tartoznak, a mikor tehát  $M(1, \xi) = 0$ . Ez azonban már nem analitikus folytatás. Az  $M(1, \xi)$ , illetve  $M(a, b)$  zérus értékét tehát ki kell zárni a végre, hogy monogen függvény maradjon vissza. Ez az észrevétel azért is fontos, mivel az alkalmazott egyenletes konvergálás csak elegendő föltétel ahhoz, hogy analitikus legyen egy függvény-sor.

Érdekes jelenség, hogy bár  $M(a, b)$  összes értékei ugyanavval az algebrai algoritmussal vannak értelmezve, mégis ez értékek torlódási pontja, a zérus, mely maga is egy  $M(a, b)$  érték, kirekesztendő az értékészletből, ha monogen analitikus függvényhez akarunk jutni.

## X. §.

### Az algoritmus uniformizálása.

1. Az  $M(a, b)$  zérus értékének szükségképeni különválasztása formálisan is kifejezésre jut, ha  $M(a, b)$  reciproknak tekintjük be tárgyalásunkba.

A (10) második és első relációjával átalakított hányadosok

$$\frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, \xi)}, \quad \frac{b}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, 1/\xi)}$$

az előbbi §. szerint ugyanannak a változónak, a  $\xi$ -nek monogen analitikus függvényei, ha  $\xi$  véges és  $0, \pm 1$ -től különböző. A  $\xi$  helyett egy más  $z$  változóra menve át, ha írjuk, hogy

$$\begin{aligned} a &= M(a, b) \varphi(z), \\ b &= M(a, b) \psi(z), \end{aligned} \quad (37)$$

akkor  $\varphi, \psi$  a  $z$  monogen analtikus függvényei, ha  $z$  a  $\xi$  monogen analtikus függvénye. Foglalkozunk azzal az esettel, mikor  $z = 0$  bizonyos környezetében

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \\ \psi(z) &= 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots. \end{aligned} \quad (38)$$

Legyenek e sorok az

$$|z| < \rho$$

körben konvergensek. Mivel (37)-nél  $M(a, b)$  mintegy arányosági tényezőként szerepel, azért alkalmazzuk algoritmusunkat magukra a  $\varphi$  és  $\psi$  sorokra. Ez által két további sort kapunk:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2}(\varphi(z) + \psi(z)), \quad \psi_1(z) = \sqrt{\varphi(z)\psi(z)}.$$

Az állandó tag  $\varphi_1(z)$ -ben 1, vegyük  $\psi_1(z)$  azt az értékét, melynél  $\psi_1(0) = 1$ . Legyen általánosan

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(z) &= \frac{1}{2}(\varphi_n(z) + \psi_n(z)), \\ \psi_{n+1}(z) &= \sqrt{\varphi_n(z)\psi_n(z)}, \end{aligned} \quad (39)$$

( $n=0, 1, \dots$  in inf.;  $\varphi_0=\varphi, \psi_0=\psi$ )

és

$$\varphi_n(0) = \psi_n(0) = 1. \quad (40)$$

A (40) által az algoritmus egy matrixát egyértelműleg kijelöltük. Könnyű észrevenni, hogy csakis e matrixszal maradunk közönséges hatványsoroknál.

Legyen tehát

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= 1 + a_1^{(n)}z + a_2^{(n)}z^2 + \dots, \\ \psi_n(z) &= 1 + \beta_1^{(n)}z + \beta_2^{(n)}z^2 + \dots. \end{aligned} \quad (41)$$

Kimutatjuk a következőket:

A (40) által egyértelműleg kijelölt algoritmusnál

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \frac{1}{2}(\alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(1)})z^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha_n^{(n-1)} + \beta_n^{(n-1)})z^n + \alpha_{n+1}^{(n)}z^{n+1} + \dots, \\ \psi_n(z) &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \frac{1}{2}(\alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(1)})z^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha_n^{(n-1)} + \beta_n^{(n-1)})z^n + \beta_{n+1}^{(n)}z^{n+1} + \dots.\end{aligned}\tag{42}$$

Tehát a koefficiensek successive, a fölirt módon egyenlősödnek és a már egyenlővé vált koefficiensek változatlanok az algoritmus további lépéseinél. Ugy a  $\varphi_n(z)$  és  $\psi_n(z)$ , valamint a

$$\varphi_\infty(z) = \psi_\infty(z) = 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \frac{1}{2}(\alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(1)})z^2 + \dots\tag{43}$$

határsor konvergensek az

$$|z| < \min(\rho, \zeta)\tag{44}$$

körben, ha

$$\varphi(z), \quad \psi(z), \quad \varphi(z) + \psi(z), \quad \varphi(z) - \psi(z)$$

a

$$0 < |z| < \xi$$

tartományban zérustól különbözők. Végül: a (40) által kijelölt matrixnál, a (44) alatti körben

$$M(\varphi(z), \psi(z)) = \varphi_\infty(z) = \psi_\infty(z).\tag{45}$$

2. Először a tétel formális részét, a (42)-öt mutatjuk ki teljes indukcióval.

Ha  $n = 1$ , akkor (39) és (40)-ből egyszerű számítással

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \alpha_2^{(1)}z^2 + \dots, \\ \psi_1(z) &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \beta_2^{(1)}z^2 + \dots,\end{aligned}$$

mint a (42) állítja. Tegyük föl, hogy (42) bizonyos  $\varphi_n$  és  $\psi_n$ -ig bezárólag igaz:

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= A + \alpha_{n+1}^{(n)}z^{n+1} + \dots, \\ \psi_n(z) &= A + \beta_{n+1}^{(n)}z^{n+1} + \dots,\end{aligned}$$

hol

$$A = 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)z + \dots + \frac{1}{2}(\alpha_n^{(n-1)} + \beta_n^{(n-1)})z^n$$

Teljesen oly számítással, mint  $\varphi_1$  és  $\psi_1$ -nél, nyerjük, hogy valóban

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(z) &= A + \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}^{(n)} + \beta_{n+1}^{(n)})z^{n+1} + \alpha_{n+2}^{(n+1)}z^{n+2} + \dots, \\ \psi_{n+1}(z) &= A + \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}^{(n)} + \beta_{n+1}^{(n)})z^{n+1} + \beta_{n+2}^{(n+1)}z^{n+2} + \dots.\end{aligned}$$

3. A  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  konvergensek az  $|z| < \min(\rho, \zeta)$  körben is, mivel az  $|z| < \rho$  körben konvergálnak. A  $0 < |z| < \zeta$  tartományban a

$$\varphi(z), \psi(z), \varphi(z) + \psi(z), \varphi(z) - \psi(z)$$

sorok zérustól különbözők lévén, a (G) és (16) szerint ugyanez áll a

$$\varphi_n(z), \psi_n(z), \varphi_n(z) + \psi_n(z), \varphi_n(z) - \psi_n(z)$$

sorokra is. Ebből következik, hogy

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \quad \psi_{n+1} = \sqrt{\varphi_n \psi_n}$$

az  $|z| < \min(\rho, \zeta)$  körben konvergensek, ha ugyanott  $\varphi_n$  és  $\psi_n$  azok. De erről  $n = 1$  esetén már meggyőződünk.

4. Még a (45)-öt kell megmutatni. A (42) szerint írható

$$\alpha_k^{(k)} = \beta_k^{(k)} = \alpha_k^{(k+1)} = \beta_k^{(k+1)} = \dots \text{ in inf.} = \tau_k, \\ (k=1, 2, \dots).$$

E jelöléssel

$$\varphi_\infty(z) = \psi_\infty(z) = 1 + \tau_1 z + \tau_2 z^2 + \dots$$

Legyen  $M^{(n)}$  az  $|\varphi_n(z)|$ ,  $|\psi_n(z)|$  legnagyobb értéke az

$$|z| < r, \quad 0 < r < \min(\rho, \zeta)$$

kör kerületén. A CAUCHY-féle egyenlőtlenségek szerint

$$|\alpha_k^{(n)}|, |\beta_k^{(n)}| \leq M^{(n)} r^{-k}.$$

Mivel (1) következtében

$$M^{(0)} \geq M^{(1)} \geq M^{(2)} \geq \dots,$$

azért méginkább

$$|\alpha_k^{(n)}|, |\beta_k^{(n)}| \leq M^{(0)} r^{-k}.$$

Innen,  $n \geq k$  véve, lesz

$$|\tau_k| \leq M^{(0)} r^{-k},$$

Tehát az  $1 + \tau_1 z + \tau_2 z^2 + \dots$  határsor konvergál az

$$|z| < r < \min(\rho, \zeta)$$

körben. És mivel tetszés szerinti  $n$  mellett

$$|\varphi_n(z) - \varphi_\infty(z)|, |\psi_n(z) - \psi_\infty(z)| \leq 2M^{(0)} \left( \left| \frac{z}{r} \right|^{n+1} + \left| \frac{z}{r} \right|^{n+2} + \dots \right),$$

azért a következő kettős határértékek

$$\lim_{n=\infty} \lim_{k=\infty} (1 + \alpha_1^{(n)}z + \dots + \alpha_k^{(n)}z^k), \quad \lim_{n=\infty} \lim_{k=\infty} (1 + \beta_1^{(n)}z + \dots + \beta_k^{(n)}z^k)$$

függetlenek az egyes határátmenetek sorrendjétől. És épen ez a (45) alatti tétel.

## XI. §.

### A Legendre-féle differenciálegyenlet.

1. A (37) alatti uniformizálást a  $z$  parameter alkalmas megválasztásával a XII. §-ban kanonizálni fogjuk. Ennek lehetősége egy differenciálegyenlet segítségével kimutatható.<sup>1</sup>

A IX. §. 2-ben láttuk, hogy az  $M(1, \xi)$  függvény, ki-rekesztve értékei közül a zérust, a  $\xi$  minden  $0, \pm 1$ -től különböző értékénél monogen analytikus. Mivel azonban e pontok körül is véges, azért egy ismert RIEMANN-féle tétel szerint e pontokbeli  $\lim M(1, \xi)$  értékkel kibővítve a függvény minden egyes ágának értékkészletét: a függvény e pontokban is analytikus lesz.

---

<sup>1</sup> A GAUSS-féle differenciálegyenlet tanulmányozása révén SCHWARZ-nál föllépett háromszög-hálózat módszeres alkalmazásával KLEIN és tanítványai által kiépített modulfüggvény-elméletben is nélkülözhetlen a differenciálegyenletek FUCHS-féle elméletének néhány alaptétele. (V. ö. KLEIN-FRICKE, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen I. (1890), p. 35—64.)

De megvagyunk győződve arról, hogy elméletünk egészen nélkülözheti e segédeszközt, a mely a mi esetünkben a GAUSS-nál (Werke III. p. 377) följegyzett

$$\lim_{\varepsilon=0} M(1, \varepsilon) \log \frac{4}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$$

határértékkel szorosan kapcsolatos.



Az algorithmus szerkezete szerint, mint már a III. §-ban más szempontból részleteztük,

$$\lim_{\xi=0} M(1, \xi) = 0, \quad \lim_{\xi=-1} M(1, \xi) = 0. \quad (46)$$

A  $\xi = 1$  pontban két eset különböztetendő meg:

$$\lim_{\xi=1} \max M(1, \xi) = 1, \quad \lim_{\xi=1} M(1, \xi) = 0. \quad (47)$$

Ha írjuk, hogy  $\xi$  mintájára  $M(a, c) = aM(1, \eta)$ , azaz

$$\frac{c}{a} = \eta$$

és így  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , akkor a kellő függvényágaknál (10) harmadik relációja szerint érvényes

$$M(1, \xi) = M(1 + \sqrt{1 - \xi^2}, 1 - \sqrt{1 - \xi^2})$$

egyenlet így írható:

$$M(1, \sqrt{1 - \eta^2}) = M(1 + \eta, 1 - \eta).$$

Az utolsó egyenlet egyúttal azt is kijelöli, hogy ha az  $M(1, 1) = 1$  ágat, vagyis a maximális  $M$ -et vesszük, akkor  $\eta = 0$  esetén  $\sqrt{1 - \eta^2} = 1$  azaz  $\xi = 1$  veendő. Szegődjünk e választáshoz és legyen  $\eta$  a független változó.

A tett megállapodás mellett írva:

$$\eta = \frac{2t}{1 + t^2},$$

lesz

$$\xi = \sqrt{1 - \eta^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} M\left(1 + \frac{2t}{1 + t^2}, 1 - \frac{2t}{1 + t^2}\right) &= M\left(1, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + t^2} M(1 + t^2, 1 - t^2), \end{aligned}$$

azaz <sup>1</sup>

$$\frac{1+t^2}{M(1+t^2, 1-t^2)} = \frac{1}{M\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}, 1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)}. \quad (48)$$

2. Ezek után  $t = 0$  bizonyos környezetében

$$\frac{1}{M(1+t, 1-t)} = 1 + \gamma_2 t^2 + \gamma_4 t^4 + \gamma_6 t^6 + \dots$$

A (48)-ből tehát

$$\sum \gamma_{2m} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+1} = 2t \sum \gamma_{2m} t^{4m}, \quad (49)$$

hol az összegelés  $m = 0, 1, \dots$  in inf. történik és  $\gamma_0 = 1$ .

A X. §. 1. tétele szerint  $M(1+t, 1-t)$  kiválasztott ága az  $|t| < 1$  körben konvergens, lévén az ottani  $\rho = \infty$ ,  $\zeta = 1$ . Mivel ugyanabban a körben, sőt mindenütt, a monogen  $M$  függvény különbözik zérustól (IX. §. 2.), azért ugyanott  $M(1+t, 1-t)^{-1}$  is konvergál. Ezt (48)-nál alkalmazva, nyerjük, hogy

$$|t^2| < 1, \quad 2|t| < |1+t^2|$$

veendő. Ekkor egyúttal

$$\begin{aligned} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+1} &= (2t)^{2m+1} (1+t^2)^{-2m-1} = (2t)^{2m+1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{-2m-1}{\lambda} t^{2\lambda} = \\ &= (2t)^{2m+1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{2m+\lambda}{\lambda} t^{2\lambda} \end{aligned}$$

írható és (49)-ből lesz

$$\sum_m 2^{2m} \gamma_{2m} t^{2m} \sum_{\lambda} (-1)^\lambda \binom{2m+\lambda}{\lambda} t^{2\lambda} = \sum_m \gamma_{2m} t^{4m}.$$

---

<sup>1</sup> Ugy az (48) alatti függvényegyenlet, valamint az itt következő levezetése a jelzett differenciálegyenletnek lényegében GAUSSNÁL (l. c. p. 366—370) megtalálható a hozzátartozó szigorú függvényelméleti vizsgálatok nélkül.

Keressük föl a baloldalon  $t^{2(m+\lambda)}$  koéfficiensét, ha  $m+\lambda = 2k$ , ha  $m+\lambda = 2k+1$ . Az első esetben  $\gamma_{2k}$  a megfelelő jobboldali koéfficiens, a második esetben 0; de írjunk helyette  $\gamma_{2k+1}$ -et. Tehát  $\gamma_{2k+1} = 0$ . Lesz

$$\begin{aligned} \gamma_{2k} &= \sum_{\rho=0}^{2k} (-1)^\rho 2^{2\rho} \binom{2k+\rho}{2\rho} \gamma_{2\rho}, \\ \gamma_{2k+1} &= \sum_{\rho=0}^{2k} (-1)^\rho 2^{2\rho} \binom{2k+1+\rho}{2\rho} \gamma_{2\rho}, \end{aligned} \tag{50}$$

( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

Alkossuk meg a következő kifejezéseket:

$$(2k-1)^2 \gamma_{2k-1} - (2k-2)^2 \gamma_{2k-3}, \quad (2k)^2 \gamma_{2k} - (2k-1)^2 \gamma_{2k-2},$$

melyek közül az első zérus. Teljes indukcióval kimutatható, hogy  $k = 1, 2, \dots$  véve, e kifejezések ily alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2^2 \gamma_2, \\ 2^2 \gamma_2^2 - 1 &= 3(1 - 2^2 \gamma_2) - B_2^{(1)}(3^2 \gamma_2 - 4^2 \gamma_4); \\ 0 &= 5(1 - 2^2 \gamma_2) - A_3^{(2)}(3^2 \gamma_2 - 4^2 \gamma_4) + A_5^{(2)}(5^2 \gamma_4 - 6^2 \gamma_6), \\ 4^2 \gamma_4 - 3^2 \gamma_2 &= 7(1 - 2^2 \gamma_2) - B_2^{(2)}(3^2 \gamma_2 - 4^2 \gamma_4) + B_4^{(2)}(5^2 \gamma_4 - 6^2 \gamma_6) - \\ &\quad - B_4^{(2)}(7^2 \gamma_6 - 8^2 \gamma_8); \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned}$$

hol a  $A, B$ -k zérustól különböző számok.<sup>1</sup> Ebből az egyenletrendszerből pedig rendre

$$1 - 2^2 \gamma_2 = 0, \quad 3^2 \gamma_2 - 4^2 \gamma_4 = 0, \quad 5^2 \gamma_4 - 6^2 \gamma_6 = 0, \dots$$

következik, azaz

$$\gamma_2 = \binom{1}{2}, \quad \gamma_4 = \binom{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad \gamma_6 = \binom{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \dots$$

---

<sup>1</sup> Például (GAUSS, l. c)  $B_2^{(1)}=4; A_3^{(2)}=20, A_5^{(2)}=16; B_3^{(2)}=56, B_5^{(2)}=112, B_4^{(2)}=64$ . A számítást nem részletezzük, mivel az utolsó előtti jegyzet szerint elméletünkben differenciálegyenlet alkalmazását bár jogosult, de csak ideiglenes alkotó résznek tekintjük.

Tehát:

$$\frac{1}{M(1+t, 1-t)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 t^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots \text{in inf.} \quad (51)$$

a mely sor konvergál  $|t| < 1$  körben.

3. Differenciálegyenlethez pedig így juthatunk: Legyen rövidségért

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} = p_k.$$

Ekkor  $\eta^2 = z-t$  írva, ha

$$u = \frac{1}{M(1+\eta, 1-\eta)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 z^k,$$

akkor

$$\frac{du}{dz} = \sum k p_k^2 z^{k-1}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \sum k(k-1) p_k^2 z^{k-2}$$

kifejezései mutatják, hogy

$$z(z-1) \frac{d^2u}{dz^2} + (2z-1) \frac{du}{dz} + \frac{1}{4}u = 0. \quad (52)$$

Közvetlen számítás szerint  $z$  helyett például  $1-z$  is írható. Tehát az (52) alatti differenciálegyenletnek

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{M(1+\sqrt{z}, 1-\sqrt{z})} = \frac{a}{M(a+c, a-c)} = \\ &= \frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, \xi)}, \\ u_2 &= \frac{1}{M(1+\sqrt{1-z}, 1-\sqrt{1-z})} = \frac{a}{M(a+b, a-b)} = \\ &= \frac{a}{M(a, c)} = \frac{1}{M(1, \eta)} \end{aligned} \quad (53)$$

egyaránt integráljai.

4. Az  $u_1(z)$  konvergál a  $z=0$ , az  $u_2(z)$  a  $z=1$  körül leírt egységsugarú körben. Az (52) egyenlet elméletében kimutat-

ják,<sup>1</sup> hogy  $u_2(z)$  is előállítható, de logaritmikusan, a  $z = 0$  körül:

$$u_2(z) = \frac{1}{\pi} \left( u_1(z) \log \frac{16}{z} - G(z) \right),$$

hol

$$G(z) = 4 \sum_{v=1}^{\infty} p_v^2 \sum \frac{(-1)^{\lambda-1}}{\lambda} z^\lambda = \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots$$

a  $z = 0$  bizonyos környezetében. Csak  $G(z)$  második alakjára van szükségünk. Vegyük  $u_2(z)$  és  $u_1(z)$  hányadosát, és pedig az  $u_2(z)$  előállításában szereplő szorzótól megszabadulni akarván, vegyük a

$$\frac{-\pi u_2(z)}{u_1(z)} = -\log \frac{16}{z} + \frac{G(z)}{u_1(z)}$$

hányadost. Ha

$$\frac{-u_2(z)}{u_1(z)} = i\omega,$$

akkor

$$e^{\pi i \omega} = \frac{z}{16} e^{\delta_1 z + \dots},$$

lévén

$$\frac{G(z)}{u_1(z)} = \frac{\delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots}{1 + \frac{1}{4} z^2 + \dots} = \delta_1 z + \dots$$

a  $z = 0$  bizonyos környezetében. Tehát írva  $e^{\pi i \omega} = q$ , lesz

$$\begin{aligned} q &= \frac{z}{16} (1 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z^2 + \dots) \\ z &= \eta_1 q + \eta_2 q^2 + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

a  $z = 0$ , illetve  $q = 0$  bizonyos környezetében, hol

$$\begin{aligned} z &= \eta^2, \quad q = e^{\pi i \omega}, \\ \omega &= \frac{iM(a, b)}{M(a, c)} = \frac{iM(1, \xi)}{M(1, \eta)}. \end{aligned} \quad (55)$$

---

<sup>1</sup> V. ö. pl. SCHLESINGER, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen (1900) p. 166, vagy DURÉGE-MAURER, Theorie der elliptischen Functionen (1908) p. 381—383.

Az itt jelentkezett  $q$  lesz az a parameter, mely a már említett kanonikus uniformizálásban szerepelni fog. Az  $\eta^2$  előállítható a  $q$  közönséges hatványsoraként: ez a legfontosabb a következők szempontjából.

Az (54) és (55) alatti összefoglalásnál nem hangsúlyoztuk, hogy maximális  $M$  veendő. Ugyanis például  $\eta$ -t véve független változóul, egyfelől ismert tétel szerint eredményeink érvényesek, míg a föllépő sorok konvergensek, és másfelől az (52) differenciálegyenlet mindama  $M(1, \xi)$ ,  $M(1, \eta)$ -nál teljesül, a melyek  $z$ -nek oly útjain való analitikus folytatással érhetőek el, mely utak nem mennek át a «köefficiensek»

$$\frac{2z-1}{z(z-1)}, \quad \frac{1}{4z(z-1)}$$

polusain. Azaz  $\eta = 0, \pm 1$ -en. Ha tehát eredményeink egy bizonyos  $M(1, \xi)$  és  $M(1, \eta)$  ágánál érvényesek, akkor erről az  $M(1, \xi)$ -ről tetszés szerinti  $M(1, \xi)$  ágra átmehetünk, ha ugyanaz az analitikus folytatás oly  $M(1, \eta)$ -hoz vezet, hogy az új  $\omega$ , illetve  $q$  mellett is érvényesek soraink. Ezzel később foglalkozunk, most előbb a kanonikus uniformizálást visszük véghez.

## XII. §.

### Az algorithmus kanonikus uniformizálása.

1. Az

$$\frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-z})}, \quad \frac{b}{M(a, b)} = \frac{\sqrt{1-z}}{M(1, \sqrt{1-z})}$$

hányadosok, hol

$$1-z = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

eredményeink szerint a  $z = 0$  bizonyos környezetében analitikusak. Tehát (54) szerint az (55) alatti  $q$  hatványsoraként állíthatók elő  $q = 0$  bizonyos környezetében. Irhatjuk tehát a (37) kanonizálásaként, hogy

$$\begin{aligned} a &= M(a, b) P(q)^2, \\ b &= M(a, b) Q(q)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

hol a koefficienseket félreértés nélkül újra  $a_n$ ,  $\beta_n$ -nel jelölhetjük,

$$\begin{aligned} P(q) &= 1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots \\ Q(q) &= 1 + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

Az állandó tagok 1-gyel egyenlők, mivel  $q = 0$ , azaz  $z = 0$  esetén a kiindulásul vett hányadosaink értéke 1, ha  $(\sqrt{1-z})_{z=0} = 1$  és maximális  $M$ -eket veszünk. Tegyük ezt föl. Az előbbi §. végén mondottak majd fölszabadítanak e korlátozás alól. Az (56)-nál csakis formális kényelemből vettük a  $P$  és  $Q$  négyzetét.

A  $P$  és  $Q$  megfordítható hatványsorok, azaz  $a_1 \neq 0$ ,  $\beta_1 \neq 0$ , a tett föltevések mellett, mivel

$$\begin{aligned} \frac{a}{M(a, b)} &= \frac{1}{M(1 + \sqrt{z}, 1 - \sqrt{z})} = 1 + \frac{1}{4} z + \dots, \\ \frac{b}{M(a, b)} &= \frac{\sqrt{1-z}}{M(1 + \sqrt{z}, 1 - \sqrt{z})} = \frac{1 - \frac{1}{2} z + \dots}{1 + \frac{1}{4} z + \dots} = 1 - \frac{3}{4} z + \dots, \end{aligned}$$

mint  $z$  megfordítható sorai adódnak s így (54) szerint  $q$  is előállítható a baloldali hányadosok hatványsoraiként. Tehát valóban

$$a_1 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0.$$

Az (56)-ban gondoljuk  $a$ ,  $b$  helyett azt az  $a_n$ ,  $b_n$ -et írva, a melyek az ottani  $M(a, b)$  matrixában szerepelnek. Ekkor

$$M(a_n, b_n) = M(a, b),$$

ha a baloldali  $M$  is maximális. Természetesen van oly  $a_{-n}$ ,  $b_{-n}$  számpár is, hogy

$$M(a_{-n}, b_{-n}) = M(a, b),$$

és itt alkalmazva a VII. §. 1. és 2. alattiakat, oly  $a_n$ ,  $c_n$  számpárhoz jutunk, melyre nézve, úgy a mint (32)-nél,

$$2^n M(a_n, c_n) = M(a, c),$$

hol a jobboldalon az (55) alatti  $M$  veendő.

Az (56)-ból ekkor lesz

$$\begin{aligned} a_n &= M(a_n, b_n) P(q_n)^2 \\ b_n &= M(a_n, b_n) Q(q_n)^2, \end{aligned}$$

hol

$$q_n = e^{\pi i \omega_n}, \quad \omega_n = \frac{iM(a_n, b_n)}{M(a_n, c_n)} = 2^n \frac{iM(a, b)}{M(a, c)},$$

azaz

$$\omega_n = 2^n \omega, \quad q_n = q^{2^n}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} a_n &= M(a, b) P(q^{2^n})^2, \\ b_n &= M(a, b) Q(q^{2^n})^2. \end{aligned} \tag{58}$$

Most kiszámítjuk a  $P, Q$  sorok  $a_n, \beta_n$  koéfficienseit.

2. Az (58)-ban  $n=1$ -et véve, a  $2a_1 = a+b, b_1 = \sqrt{ab}$  szerint

$$\begin{aligned} 2P(q^2)^2 &= P(q)^2 + Q(q)^2, \\ Q(q^2)^2 &= \pm P(q) Q(q). \end{aligned}$$

Mivel azonban  $P(0) = Q(0) = 1$ , azért

$$\begin{aligned} 2P(q^2)^2 &= P(q)^2 + Q(q)^2, \\ Q(q^2)^2 &= P(q) Q(q). \end{aligned} \tag{59}$$

A baloldalak szerkezete miatt a jobboldalak nem változnak, ha  $q$  helyébe  $-q$  kerül. Tehát az

$$x^2 - 2P(q^2)^2 x + Q(q^2)^4 = 0$$

egyenlet gyökei akár

$$P(q)^2, \quad Q(q)^2,$$

akár

$$P(-q)^2, \quad Q(-q)^2.$$

Azaz vagy

$$P(q)^2 = P(-q)^2, \quad Q(q)^2 = Q(-q)^2,$$

vagy

$$P(q)^2 = Q(-q)^2, \quad Q(q)^2 = P(-q)^2.$$

Az első esetben  $a_1 = \beta_1 = 0$  volna az 1. alattiakkal ellentétben. Marad a második eset, és pedig  $P(0) = Q(0) = 1$  miatt

$$P(q) = Q(-q).$$



Az (57) tehát így alakul

$$\begin{aligned} P(q) &= 1 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots, \\ Q(q) &= 1 - a_1q + a_2q^2 - a_3q^3 + \dots. \end{aligned} \quad (60)$$

Az (59) alattiakból pedig lesz

$$\begin{aligned} 2P(q^2)^2 &= P(q)^2 + P(-q)^2, \\ P(-q^2)^2 &= P(q)P(-q). \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} 2[P(q^2)^2 + P(-q^2)^2] &= [P(q) + P(-q)]^2, \\ 2[P(q^2)^2 - P(-q^2)^2] &= [P(q) - P(-q)]^2. \end{aligned} \quad (61)$$

A  $q$  helyett  $iq$ -t írva, az első jobboldal nem változik, a második jegyet változtat. Ebből következik, hogy (60)-ban

$$a_{4k+2} = 0, \quad a_{4k+3} = 0.$$

Érvényesítve eredményeinket, lesz

$$\begin{aligned} P(q) &= \sum a_{4k}q^{4k} + \sum a_{4k+1}q^{4k+1}, \\ Q(q) &= \sum a_{4k}q^{4k} - \sum a_{4k+1}q^{4k+1}, \end{aligned} \quad (62)$$

hol az összegelés  $k = 0$ -tól  $+\infty$ -ig történik és  $a_0 = 1$ .

A (33) szerint  $2\sqrt{a_2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Tehát

$$2P(q^4) = P(q) + Q(q) = P(q) + P(-q).$$

A (61) első egyenletéből lesz

$$P(q^2)^2 + P(-q^2)^2 = 2P(q^4)^2.$$

Bevezetve ide (62)-ből a  $P$  sorát, lesz

$$(\sum a_{4k}q^{8k})^2 + (\sum a_{4k+1}q^{8k+2})^2 = (\sum a_{4k}q^{16k} + \sum a_{4k+1}q^{16k+4})^2. \quad (63)$$

Innen kiszámítjuk a következő §-ban az  $a$  együtthatókat.

### XIII. §.

#### A $P$ , $Q$ és $R$ sorok kifejtése.

1. A (63)-ban csak  $q^4$  hatványai szerepelnek. Fölkeresve mindkét oldalon  $q^4, q^8, \dots, q^{8s}$  együtthatókat, mivel  $a_0 = 1$ , a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}
 a_1^2 &= 2a_1, & 2a_1a_9 + a_5^2 &= 2a_5 + 2a_1a_4, \\
 2a_4 &= a_1^2, & 2a_{12} + 2a_4a_8 &= 2a_1a_5, \\
 2a_1a_5 &= 0, & 2a_1a_{13} + 2a_5a_9 &= 0, \\
 2a_8 + a_4^2 &= 2a_4, & 2a_{16} + 2a_4a_{12} + a_8^2 &= 2a_8 + a_4^2.
 \end{aligned}$$

Ezekből, mivel  $a_1 \neq 0$ , rendre

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_4 = a_9 = a_{16} = 2, \\
 a_5 &= a_8 = a_{12} = a_{13} = 0.
 \end{aligned}$$

Vagyis  $\lambda = 16$ -ig bezárólag  $a_\lambda = 2$  vagy  $0$  aszerint, hogy  $\lambda$  négyzet vagy nem. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ez egész általánosan is így van.

A (63)-ból  $q^{4\lambda}$  koefficiensei, ha különválasztjuk a

$$\lambda \equiv 1, 3, 0, 2 \pmod{4}$$

eseteket, a következő egyenleteket adják:

$$\lambda \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\begin{aligned}
 2a_1a_{2\lambda-1} + 2a_5a_{2\lambda-5} + 2a_9a_{2\lambda-9} + \cdots + 2a_{\lambda-4}a_{\lambda+4} + a_\lambda^2 &= \\
 = 2a_0a_\lambda + 2a_4a_{\lambda-4} + \cdots + 2a_1a_{\lambda-1} + 2a_5a_{\lambda-5} + \cdots;
 \end{aligned}$$

$$\lambda \equiv 3 \pmod{4}$$

$$2a_1a_{2\lambda-1} + 2a_5a_{2\lambda-5} + 2a_9a_{2\lambda-9} + \cdots + 2a_{\lambda-2}a_{\lambda+2} = 0;$$

$$\lambda \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\begin{aligned}
 2a_0a_{2\lambda} + 2a_4a_{2\lambda-4} + 2a_8a_{2\lambda-8} + \cdots + 2a_{\lambda-4}a_{\lambda+4} + a_\lambda^2 &= \\
 = 2a_0a_\lambda + 2a_4a_{\lambda-4} + 2a_8a_{\lambda-8} + \cdots + a_{\lambda/2}^2;
 \end{aligned}$$

$$\lambda \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\begin{aligned}
 2a_0a_{2\lambda} + 2a_4a_{2\lambda-4} + 2a_8a_{2\lambda-8} + \cdots + 2a_{\lambda-2}a_{\lambda+2} &= \\
 = 2a_1a_{\lambda-1} + 2a_5a_{\lambda-5} + 2a_9a_{\lambda-9} + \cdots + a_{\lambda/2}^2.
 \end{aligned}$$

Az első koefficiensekre talált törvényszerűséget tételezzük föl  $a_{2\lambda-1}$ -ig. Bebizonyítjuk, hogy akkor  $a_{2\lambda-1}$  és  $a_{2\lambda}$  is ugyanaz alatt a törvényszerűség alatt állanak.

I. A  $\lambda \equiv 1 \pmod{4}$  esetben föltevés szerint  $a_\lambda^2 = 2a_0a_\lambda$ . Elhagyva e tagokat, a bal-, illetve jobboldali általános tagok

$$2a_{4r+1} a_{2\lambda-4r-1}, \quad 2a_{4\varrho+1} a_{\lambda-4\varrho-1}.$$

Kimutatjuk, hogy mindkét oldalon ugyanannyi oly tag van, melyben mindkét index négyzet. Legyen ugyanis

$$4\rho+1 = (2r+1)^2, \quad \lambda-4\rho-1 = (2s)^2,$$

tehát

$$\lambda = (2r+1)^2 + (2s)^2.$$

Ekkor

$$2\lambda = (2r+1-2s)^2 + (2r+1+2s)^2.$$

Rögtön kitűnik, hogy van a baloldalon egy oly tag, melyben e két utolsó négyzet a két index. Valóban, egyfelől e négyzetek páratlanok, mint a baloldali indexek, másfelől

$$1 \leq (2r+1-2s)^2 \leq \lambda-4, \quad \lambda+4 \leq (2r+1+2s)^2 \leq 2\lambda-1,$$

s így okvetlen a baloldali index-párok közé tartoznak. És fordítva, minden oly baloldali taghoz, melyben mindkét index négyzet:  $(2r+1-2s)^2$ ,  $(2r+1+2s)^2$ , tartozik a jobboldalon egy hasonló tag:  $(2r+1)^2$ ,  $(2s)^2$  indexekkel.

Ebből föltevésünk miatt az következik, hogy a baloldali  $2a_1a_{2\lambda-1} = 2 \cdot 2 \cdot 2$  vagy  $= 0$ , a szerint, hogy  $2\lambda-1$  négyzet vagy nem. Tehát  $a_{2\lambda-1}$  is a szerint 2 vagy 0.

II. A  $\lambda \equiv 3 \pmod{4}$  esetben egy tag sincs, melyben mindkét index négyzet, mivel a  $2\lambda = x^2 + y^2$  egyenletből akár  $x = 2x' + 1$ ,  $y = 2y' + 1$ , akár  $x = 2x'$ ,  $y = 2y'$  volnának, a  $\lambda = 4\lambda' + 3$  miatt a

$$2\lambda' + 1 = x'(x'+1) + y'(y'+1) = \text{páros szám},$$

illetve a

$$4\lambda' + 3 = 2(x'^2 + y'^2)$$

ellenmondásokhoz jutnánk. Így föltevésünk következtében csak  $2a_1a_{2\lambda-1} = 0$  marad vissza, azaz  $a_{2\lambda-1} = 0$ . És  $2\lambda-1 = 8\lambda'+5$  valóban sohasem négyzet.

Az I. és II. alatti  $a_{2\lambda-1}$ ,  $\lambda \equiv 1, 3 \pmod{4}$  koëfficiensek összességé azonos az  $a_{4\lambda+1}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ ) koëfficiensekével. Tehát

$$a_{4\lambda+1} = 2 \text{ vagy } 0$$

a szerint, hogy  $4\lambda+1$  négyzet vagy nem.

III. A  $\lambda \equiv 0 \pmod{4}$  esetben egészen úgy járva el, mint az I. alatt, kitűnik, hogy a baloldali  $2a_0a_{2\lambda}$  és a jobboldali  $a_{\lambda/2}^2$  tagok-

tól eltekintve, mindkét oldalon ugyanannyi oly tag van, melyben mindkét index négyzet. Tehát

$$2a_0a_{2\lambda} = a_{\lambda/2}^2.$$

Ha azonban  $\lambda/2$  négyzet, akkor  $2\lambda$  is az. Ekkor föltevésünk következtében  $2a_0a_{2\lambda} = 4$ ,  $a_{2\lambda} = 2$ . Ha pedig  $\lambda/2$  nem négyzet, akkor  $2\lambda$  sem az; ekkor  $2a_0a_{2\lambda} = 0$ ,  $a_{2\lambda} = 0$ .

IV. A  $\lambda \equiv 2 \pmod{4}$  esetben, mint előbb, újra a

$$2a_0a_{2\lambda} = a_{\lambda/2}^2$$

egyenlethez jutunk.

A III. és IV. alatti  $a_{2\lambda}$ ,  $\lambda \equiv 0, 2 \pmod{4}$  együtthatók összessége azonos az  $a_{4\lambda}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ ) együtthatókéval. Tehát

$$a_{4\lambda} = 2 \text{ vagy } 0$$

a szerint, hogy  $4\lambda$  négyzet vagy nem.

Az (57) alatti sorok végleges alakja tehát

$$\begin{aligned} P(q) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots \text{ in inf.}, \\ Q(q) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots \text{ in inf.} \end{aligned} \quad (64)$$

2. Az (56) és (58) kiegészítéseként a  $c$  és  $c_n$ -et is hasonlóan előállítjuk.

Mivel

$$\begin{aligned} &\sqrt{M(a, b)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a} + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a}) + \dots + (\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n}) + \dots \text{ in inf.}, \end{aligned}$$

azért a (33) alatti

$$\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n} = -\sqrt{c_{n+2}}, \quad \sqrt{a} - \sqrt{c_2} = \sqrt{b} + \sqrt{c_2}$$

egyenletek által

$$\begin{aligned} \sqrt{M(a, b)} &= \sqrt{a} - \sqrt{c_2} - \sqrt{c_4} - \sqrt{c_6} - \dots \text{ in inf.}, \\ &= \sqrt{b} + \sqrt{c_2} - \sqrt{c_4} - \sqrt{c_6} - \dots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Osztva  $\sqrt{M(a, b)}$ -vel, ha írjuk (58)-nak megfelelően, hogy

$$c_n = M(a, b) R(q^{2^n}), \quad (65)$$

akkor

$$\begin{aligned} P(q) &= 1 + R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) + R(q^{2^6}) + \dots \text{ in inf.}, \\ Q(q) &= 1 - R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) - R(q^{2^6}) + \dots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Tehát

$$2R(q^4) = P(q) - Q(q), \quad (66)$$

azaz

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots + q^{k(k+1)} + \dots \text{ in inf.}) \quad (67)$$

A még hátralevő konvergencia-vizsgálatok vezetnek a modulfüggvényhez.

### HARMADIK RÉSZ.

## A modulfüggvény.

### XIV. §.

#### Egységkörbeli $q$ létezése.

1. A kanonikus uniformizálásnál nyert

$$P(q), \quad Q(q), \quad q^{-\frac{1}{4}} R(q)$$

közönséges hatványsorok, elemi tételek szerint, konvergensek az

$$|q| < 1$$

körben. Mivel azonban

$$q = e^{\pi i \omega}, \quad \omega = \frac{iM(a, b)}{M(a, c)},$$

azért kérdéses, hogy egyáltalán lehetséges-e az  $|q| < 1$  teljesülése.

Az  $|q| < 1$  azzal æquivalens, hogy  $\omega$ -ban  $i$  szorzója  $\Im(\omega) > 0$ . Ez pedig,  $\omega$  jelentése szerint, csakis akkor következik be, ha az illető  $M(a, b)$  és  $M(a, c)$  origói vektorai  $\pi/2$ -nél kisebb szöget alkotnak.

A  $\omega$ -ban  $M(a, b)$  maximális értéke volt veendő (XII. §. 1.). Jelöljük  $\bar{M}$ -sal a maximális  $M$ -eket. *Kimutatjuk, hogy*

$$\omega = \frac{i\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)}$$

véve,  $\Im(\omega) > 0$ , azaz  $|q| < 1$ , ha  $c$  azon értékét vesszük, mely  $b = 0$  mellett  $a$ -val egyenlő.

2. Az általánosság megszorítása nélkül átmehetünk, úgy mint már előbb,

$$\frac{b}{a} = \xi, \quad \frac{c}{a} = \eta$$

által az

$$\omega = \frac{i\overline{M}(1, \xi)}{M(1, \eta)}$$

függvényre. Új jelölések elkerülése végett a  $\xi$  és a  $\eta$ -hoz tartozó

$$\frac{a_n}{a}, \quad \frac{b_n}{a}, \quad \frac{c_n}{a}$$

jelei szintén csak  $a_n, b_n, c_n$  legyenek, mint a IX. §. 2-ben.

A (25)-ből, ha  $n = 0$ , lesz

$$a = 1 = a_1 + c_1, \quad c = \eta = 2\sqrt{a_1 c_1}.$$

Tehát az  $Oc_1$  vektor párhuzamos és egyenlő az  $a_1 1$  vektorral, az  $O\eta$  vektor felezi az  $a_1 Oc_1$  szöget. Ha  $|\eta|$  elég kicsi s így  $\xi$  és  $\overline{M}(1, \xi)$  elég közel fekszenek a  $+1$ -hez, akkor ezek már mutatják, hogy  $\overline{M}(1, \xi)$  és  $\overline{M}(1, \eta)$  origói vektorai  $\pi/2$ -nél kisebb szöget alkotnak.

Mármost megszabadulhatunk az  $|\eta|$  nagyságára tett korlátozástól. Az

$$1 = \overline{M}(1, \xi) P(q)^2, \\ \xi = \overline{M}(1, \xi) Q(q)^2,$$

előállítás tehát érvényes, ha  $\xi$  elég közel fekszik a  $+1$ -hez. Ekkor  $|q| < 1$ . Ha  $q$  helyett rendre  $q^2, q^{2^2}, \dots, q^{2^n}$ -t írunk, akkor  $1, \xi$  helyébe oly  $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_n, b_n$  számpárok lépnek (58) szerint, melyeknél

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \overline{M}(a_n, b_n) = \overline{M}(1, \xi).$$

A  $P$  és  $Q$  sorai is mutatják, hogy

$$\lim_{n=\infty} P(q^{2^n})^2 = \lim_{n=\infty} Q(q^{2^n})^2 = 1.$$

Másfelől azonban, tekintet nélkül  $\xi$ -re,  $b_n$  tetszés szerint keveset különbözik  $a_n$ -től, ha  $n$  elég nagy. Azaz

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{M}(1, \xi) P(q^{2^n})^2, \\ b_n &= \overline{M}(1, \xi) Q(q^{2^n})^2 \end{aligned}$$

érvényes előállítások. De akkor

$$|q^{2^n}| < 1$$

s így egyúttal  $|q| < 1$ .

Homogen változókra térve vissza, mondhatjuk:

*A (G) föltételeknek eleget tevő bármely  $a, b$  értékpár előállítható*

$$\begin{aligned} a &= \overline{M}(a, b) P(q)^2, \\ b &= \overline{M}(a, b) Q(q)^2 \end{aligned} \tag{68}$$

*alakban, hol*

$$q = e^{\pi i \omega}, \quad \omega = \frac{i \overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)}$$

*és azon  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  veendő, mely  $b = 0$  mellett  $a$ -val egyenlő.*

## XV. §.

### A modulfüggvény.

1. A (68) alatti előállítás  $\omega$ -ja nincs egyértelműleg kijelölve:  $\overline{M}(a, b)$ -nek, vagy  $\overline{M}(a, c)$ -nek két értéke is lehet (IV. §. 2.). A IX. §. 2. alatti eredmények szerint  $\overline{M}(1, \xi)$  a negatív valós  $\xi$  tengely mentén fölmetszett síkban egyértékű analitikus függvény. Ugyanez áll  $\overline{M}(1, \eta)$ -ra nézve a negatív valós tengely mentén fölmetszett  $\eta$  síkban. Ugyanabban a síkban maradhatunk, ha független változóul  $\eta^2 = \lambda$ -t vezetjük be. Áll a következő tétel:

*A pozitív valós tengely hosszában fölmetszett  $\lambda$  síkban úgy  $\overline{M}(1, \xi)$ , mint  $\overline{M}(1, \eta)$ , valamint*

$$\omega = \omega(\lambda)$$

is a  $\lambda$  egyértékű analitikus függvényei.

Valóban

$$M(1, \xi) = M(1 + \eta, 1 - \eta),$$

$$M(1, \eta) = M(1 + \xi, 1 - \xi) = M(1 + \sqrt{1 - \eta^2}, 1 - \sqrt{1 - \eta^2})$$

mutatják, hogy a tételünkbeli függvények  $\eta^2 = \lambda$  függvényei. Továbbá

$M(1, \xi) = M(1 + \eta, 1 - \eta)$ -nak csak akkor volna két maximális értéke, ha

$$\frac{1 - \eta}{1 + \eta}$$

negatív valós lenne. Egyszerű számítás szerint ekkor  $\eta$  valós, a mi azonban nem lehetséges, mivel  $\eta^2$  pozitív értékeit kizártuk. Az  $M(1, \eta)$ -nak szintén nem lehet két maximális értéke a fölmetszett  $\eta^2$  síkban. Ha még tekintetbe vesszük, hogy  $M(1, \eta)$  egyedüli singularitásai (IX. §. 2.)  $\eta = 0, \pm 1, \infty$ , akkor eljutotunk tételünknek az  $\omega$  hányadosra, az  $\omega(\lambda)$  függvényre vonatkozó részéhez is. Tételünk különben az (52) alatti LEGENDRE-féle differenciálegyenletről is foly, tekintve, hogy (55) szerint  $z = \lambda$ , és hogy a «koefficiensek» összes singularitásai  $z = 0, 1, \infty$ .

2. Mivel az  $a$  és  $b$ -vel egyidejűleg  $a$  és  $c$  is teljesítik a (G) föltételeket, azért a (68)-czal egyidejűleg

$$\begin{aligned} a &= \overline{M}(a, c) P(q')^2, \\ c &= \overline{M}(a, c) Q(q')^2, \end{aligned} \quad (69)$$

hol

$$q' = e^{\pi i \omega'}, \quad \omega' = \frac{i \overline{M}(a, c)}{\overline{M}(a, b)} = \frac{-1}{\omega}$$

és azon  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  veendő, mely  $c = 0$  mellett  $a$ -val egyenlő.

Irjuk a (68) és (69)-et inhomogén alakban:

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{M}(1, \xi) P(q)^2, & 1 &= \overline{M}(1, \eta) P(q')^2, \\ \xi &= \overline{M}(1, \xi) Q(q)^2; & \eta &= \overline{M}(1, \eta) Q(q')^2; \end{aligned}$$

hol  $\eta = 1$ , ha  $\xi = 0$  és  $\xi = 1$ , ha  $\eta = 0$ .



Mármost megállapíthatjuk az  $\omega(\lambda)$  viselkedését, ha  $\lambda$  a 0, +1 singuláris pontokat körüljárja.

Ha  $\lambda = 0$ , akkor  $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$  s így  $q = 0$ . Tehát  $q$  a 0 körül elég kis zárt utakat írva le,  $\xi$  az 1,  $\eta$  és  $\lambda$  a 0 körül írnak le zárt utakat és fordítva. Kellő számú ily út  $\overline{M}(1, \eta)$ -t tetszés szerint megadott, zérustól különböző  $M(1, \eta)$ -ba viszi át, míg  $\overline{M}(1, \xi)$  változatlan marad (IX. §. 2.).

A  $P, Q$  sorok konvergensek maradnak, mivel az  $\omega$  pozitív vagy negatív egész számmal nő,  $\Im(\omega) > 0$  lesz.

Ha pedig  $\lambda = 1$ , akkor  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$  s így  $q' = 0$ . Tehát  $q'$  a 0 körül elég kis zárt utakat írva le,  $\eta$  és  $\lambda$  az 1,  $\xi$  a 0 körül írnak le zárt utakat és fordítva. Kellő számú ily út  $\overline{M}(1, \xi)$ -t tetszés szerint megadott, zérustól különböző  $M(1, \xi)$ -be viszi át, míg  $\overline{M}(1, \eta)$  változatlan marad.

A  $P, Q$  sorok konvergensek maradnak, mivel az  $\omega'$  pozitív vagy negatív egész számmal nő,  $\Im(\omega') > 0$  lesz.

Az  $\omega, \omega'$  tehát unimoduláris lineáris transzformációt szenvednek. Tekintve, hogy  $\omega'$  az  $\omega$ -ból szintén oly transzformációval keletkezett, mondhatjuk:

*Az  $\omega(\lambda)$  unimodularis lineáris módon transzformálódik, ha  $\lambda$  a 0, +1 singularis pontok körül zárt utakat ír le s így  $\Im(\omega) > 0$  marad.*

Egyúttal azt is látjuk, hogy a (68)-ban  $\overline{M}(a, b)$  és  $\overline{M}(a, c)$  közül egyik helyett tetszés szerinti, zérustól különböző  $M(a, b)$  illetve  $M(a, c)$  vehető.

3. Az (55) és (54) szerint  $\lambda$  az  $\omega$  egyértékű analitikus függvénye. Valóban megadva  $\omega$ -t, ha  $\Im(\omega) > 0$ , akkor  $q$  egyértékűleg meg van határozva és  $|q| < 1$ . Ekkor azután

$$1 = \overline{M}(1, \xi) P(q)^2$$

adja  $\overline{M}(1, \xi)$ -t és

$$\xi = \overline{M}(1, \xi) Q(q)^2$$

adja  $\xi$ -t, s végül  $\lambda = 1 - \xi^2$ .

A  $\lambda = \lambda(\omega)$  nem folytatható analitikusan a valós  $\omega$  tengelyen át. Ugyanis, ha alsó felsíkbéli  $\omega$ -nál is létezne a  $\lambda(\omega)$  mint analitikus függvény, akkor ugyanahhoz a  $\lambda$ -hoz mindkét felsíkből

tartozna  $\omega$  érték. De a 2. szerint valamely  $\lambda$ -hoz tartozó összes  $\omega$ -k unimoduláris. lineáris módon vannak összekapcsolva s így  $\mathfrak{S}(\omega)$  jele állandó.<sup>1</sup>

Visszaemlékezve az  $M$  végtelen sok értékű voltára is, így foglalhatjuk össze főeredményeinket:

*Az  $\omega = \omega(\lambda)$  a  $\lambda$  oly végtelen sok értékű, monogen analitikus függvénye, melynek egyedüli singularitásai  $0$ ,  $+1$ ,  $\infty$  és melynek bármely ága bármelyik másiktól egész köfficiensű unimoduláris lineáris transzformációval keletkezik. Az inverz  $\lambda = \lambda(\omega)$  csak az  $\mathfrak{S}(\omega) > 0$  félsíkban létezik, hol egyértékű, reguláris függvény, a valós  $\omega$  tengelyen át analitikusan nem folytatható és nem veszi föl soha a  $0$ ,  $+1$  értékeket és csakis ezeket.*

A  $\lambda(\omega)$ -t nevezzük modulfüggvénynek.

## XVI.

### A $\lambda(\omega)$ lineáris transzformációja.

Az  $\omega$  egyik unimoduláris alaptranszformációja

$$\left(\omega, \frac{-1}{\omega}\right)$$

már az előbbi §-ban 1. alatt előfordult. Most megállapítjuk a másik ily alaptranszformáció  $(\omega, \omega+1)$  hatását is.

Irjuk  $\omega$ -t expliczite, téve szokásosan

$$P(q) = \vartheta_{00}(\omega), \quad Q(q) = \vartheta_{01}(\omega), \quad R(q) = \vartheta_{10}(\omega).$$

Ha  $\omega$  átmegegy  $(\omega+1)$ -be, akkor  $q$  jegyet változtat,  $\vartheta_{00}(\omega)$  és  $\vartheta_{01}(\omega)$  egymással fölcserélődnek. Az előbbi §. 2. alattiak egy részét ismételve, írhatjuk:

<sup>1</sup> Ez abból is következik, hogy például FABER egy elemi tétele szerint (Münch. Ber. 36 (1906) p. 581—583) az  $|q|=1$  kör a  $P$  és  $Q$  sorok természetes határa.

$$\begin{aligned}
 a &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{00}^2(\omega), & a &= \overline{M}(a, c) \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right), & b &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{00}^2(\omega+1), \\
 b &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{01}^2(\omega), & c &= \overline{M}(a, c) \vartheta_{01}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right), & a &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{01}^2(\omega+1), \\
 c &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{10}^2(\omega); & b &= \overline{M}(a, c) \vartheta_{10}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right); & \pm ic &= \overline{M}(a, b) \vartheta_{10}^2(\omega+1).
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

Innen

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{00}^2(\omega+1) &= \vartheta_{01}^2(\omega), & \vartheta_{01}^2(\omega+1) &= \vartheta_{00}^2(\omega), & \vartheta_{10}^2(\omega+1) &= \pm i \vartheta_{10}^2(\omega); \\
 \vartheta_{00}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right) &= -i \omega \vartheta_{00}^2(\omega), & \vartheta_{01}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right) &= -i \omega \vartheta_{10}^2(\omega), & \vartheta_{10}^2\left(\frac{-1}{\omega}\right) &= -i \omega \vartheta_{01}^2(\omega).
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

Ezekből, mivel (tekintettel  $a^2 = b^2 + c^2$ -ra is)

$$\lambda(\omega) = \frac{\vartheta_{10}^4(\omega)}{\vartheta_{00}^4(\omega)}, \quad \vartheta_{00}^4(\omega) = \vartheta_{01}^4(\omega) + \vartheta_{10}^4(\omega),$$

kapjuk, hogy

$$\lambda(\omega+1) = \frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega)-1}, \quad \lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1 - \lambda(\omega).
 \tag{72}$$

A találtak elegendők annak kimutatására, hogy  $\lambda = \lambda(\omega)$  az  $\omega$  összes egész *koëfficiensű unimoduláris lineáris transzformációinál csak a következő hat értéket*

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}
 \tag{73}$$

veszi föl. Az illető

$$\frac{a\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

transzformáció  $a, \beta, \gamma, \delta$  *koëfficienseinek mod 2 való viselkedése pontosan megadja, hogy  $\lambda(\omega)$  ama hat érték közül éppen melyikbe megy át.*

Mindezeket már nem szükséges részleteznünk.

## XVII. §.

A  $\lambda(\omega)$  alaptartománya.

A XVI. §. 3. szerint  $\omega(\lambda)$  az  $\Im(\lambda) > 0$  félsíkban reguláris. Fölkeressük e félsíknak az  $\omega$  síkbeli konformis képét.

Legyen  $0 < \eta < 1$ , tehát  $0 < \lambda < 1$ . Ekkor  $0 < \xi < 1$  (XV. §. 2.) és  $\bar{M}(1, \xi)$ ,  $\bar{M}(1, \eta)$  pozitív valósak. Véve az

$$\omega(\lambda) = \frac{i\bar{M}(1, \xi)}{\bar{M}(1, \eta)}$$

ágát:  $\Im(\omega) > 0$ .

Az  $\omega(\lambda)$  ez ága a  $0 < \lambda < 1$  intervallumot az  $\omega$  sík pozitív ordináta tengelyére képezi le akként, hogy

$$\begin{aligned} \lambda = 0 & \text{ és } \omega = +i\infty, \\ \lambda = 1 & \text{ és } \omega = 0 \end{aligned}$$

egymásnak megfelelő pontok. A  $\lambda$ -ról  $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ -ra menve át, a  $\overline{0,1}$  intervallum a  $\overline{-\infty, 0}$  intervallumba megy át. Újra alkalmazva az előbbi lineáris transzformációt,  $\lambda$  helyébe  $\frac{1}{1-\lambda}$  lép és a  $\overline{0,1}$  intervallumnak az  $\overline{1, +\infty}$  intervallum fog megfelelni. Állapítsuk meg az  $\omega(\lambda)$  viselkedését e transzformációknál.

Mivel

$$\frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{\eta^2-1}{\eta^2} = \left(\frac{\pm ib}{c}\right)^2,$$

azért  $M(c, \pm ib)$ -t kell segítségül venni. A (70) és (71) által ez így történhetik. Alkalmazva előbb az  $\left(\omega, \frac{-1}{\omega}\right)$ , azután az  $(\omega, \omega+1)$  transzformációt, az

$$a : b : c = \vartheta_{00}^2(\omega) : \vartheta_{01}^2 : \vartheta_{10}^2$$

arányból lesz

$$c : a : \pm ib = \vartheta_{00}^2\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right) : \vartheta_{01}^2 : \vartheta_{01}^2,$$

azaz

$$\eta : 1 : \pm i\xi = \vartheta_{00}^2 \left( \frac{\omega-1}{\omega} \right) : \vartheta_{01}^2 : \vartheta_{10}^2.$$

E szerint írható, mindig kellő ágakat véve,

$$\eta = M(\eta, 1) \vartheta_{00}^2 \left( \frac{\omega-1}{\omega} \right),$$

hol

$$\frac{\omega-1}{\omega} = \frac{iM(\eta, 1)}{M(\eta, \pm i\xi)} = \omega \left( \left( \frac{\pm i\xi}{\eta} \right)^2 \right) = \omega \left( \frac{\lambda-1}{\lambda} \right).$$

Tehát

$$\omega \left( \frac{\lambda-1}{\lambda} \right) = \frac{\omega(\lambda) - 1}{\omega(\lambda)}, \quad (74)$$

a mit újra alkalmazva

$$\omega \left( \frac{1}{1-\lambda} \right) = \frac{1}{1-\omega(\lambda)}. \quad (75)$$

Azt már láttuk, hogy a vett  $\omega(\lambda)$  ág a  $\lambda$  sík  $\overline{0,1}$  intervallumát az  $\omega$  sík  $\overline{+\infty,0}$  intervallumára képezi le. Mármost ha (74)-ben  $\omega(\lambda)$  tiszta képzetes  $= i\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega} > 0$  és  $\tilde{\omega}$  folytonosan megy 0-tól  $+\infty$ -ig, akkor

$$\omega \left( \frac{\lambda-1}{\lambda} \right) = 1 + \frac{i}{\tilde{\omega}}$$

mutatja, hogy a  $\lambda$  sík  $\overline{-\infty,0}$  intervallumának az  $\omega$  sík pozitív ordinátájával párhuzamos egyenes, az  $\overline{1,1+i\infty}$  intervallum felel meg. A (75)-ből végre nyerjük, hogy a  $\lambda$  sík  $\overline{1,+\infty}$  intervalluma az  $\omega$  sík valós tengelyének  $+\frac{1}{2}$  pontjából  $\frac{1}{2}$  sugárral leírt körnek az  $\Im(\omega) > 0$  félsíkbeli felére képeztetik le. Meggondolva még azt is, hogy egyfelől a szóban levő intervallumok kölesőnösen egyértelműleg feleltek meg egymásnak, és hogy másfelől, a XV. §. 3. szerint, az  $\omega$  síkban nyert három intervallum által határolt 0, 1,  $+\infty$  szögpontokkal bíró körívháromszögben nincs elágazási pontja  $\lambda(\omega)$ -nak, az  $\Im(\lambda) > 0$  félsíkban pedig nincs elágazása  $\omega(\lambda)$ -nak, mondhatjuk:

Az

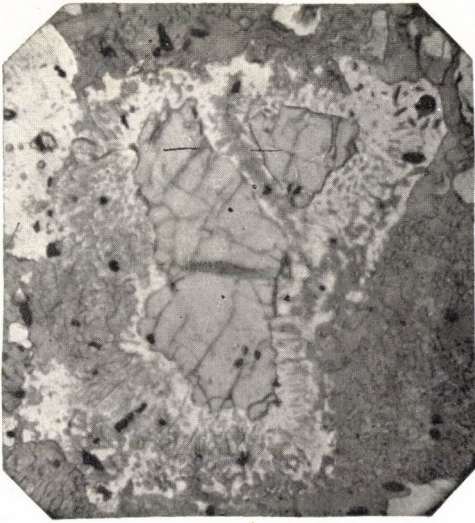
$$\omega(\lambda) = \frac{i\bar{M}(1, \xi)}{M(1, \eta)}$$

*függvényág (hol a  $0 < \xi < 1$  intervallumnak az  $1 > \eta > 0$  felel meg) az  $\Im(\lambda) > 0$  félsíkot az  $\omega$  sík  $0, 1, +i\infty$  körívháromszögére képezi le kölcsönösen egyértékű és konformis módon.*

Ezzel eljutottunk elméletünk rendjén is az  $\omega$  sík ismeretes körívháromszög hálózatához.

---

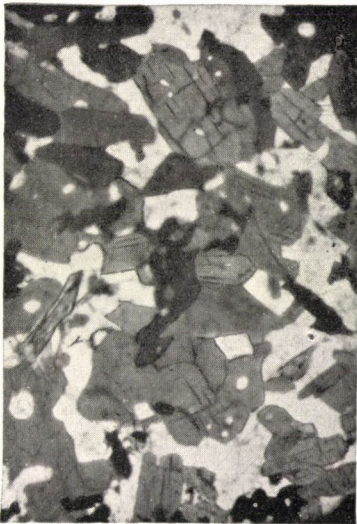
(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 január 19.-én tartott üléséből.)



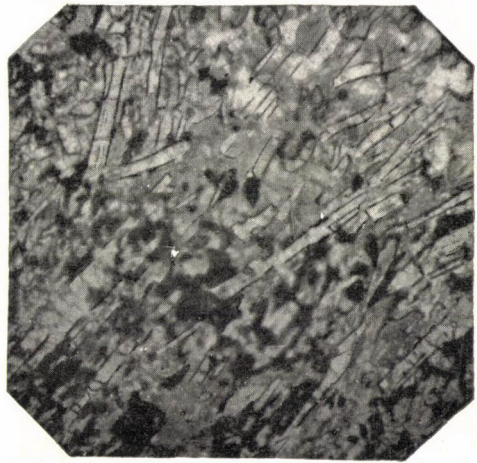
1.



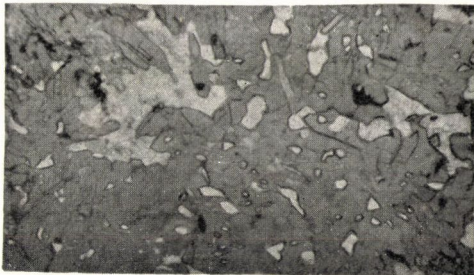
2.



3.



4.



5.





## A «CONGERIA DACTYLUS BRUS.» RENDSZERTANI HELYZETE.

VITÁLIS ISTVÁN-tól.

(II. tábla.)

BRUSINA<sup>1</sup> húsz évvel ezelőtt Keneséről *Congeria dactylus* néven érdekes fossilis kagylófajt vezetett be a pannóniai korszak palaeontologiai irodalmába a mytilus-félék családjából. Ennek a kagylófajnak a közelebbi rendszertani helyzete mind máig ismeretlen volt, minthogy ép héjat senki sem lelt eddigelé. Pedig ez a fossilia a balatonvidéki pannóniai rétegekben nem is tartozik a legnagyobb ritkaságok közé. BRUSINÁN kívül 1902-ben HALAVÁTS<sup>2</sup> is meglelte Kenesén az Itatóárok felső részének fossilis pannóniai rétegében ennek a fajnak egy fiatal példányát; 1905-ben LÖRENTHEY<sup>3</sup> a fonyódi Fonyód-hegy II. szintjének 4. sz. rétegében gyűjtött e fajtól 10 példányt, én meg a Tihanyi félszigeten két helyen is rábukkantam, és pedig a nyugati oldalon,<sup>4</sup> a Szarkád-oldal omlásfalában<sup>5</sup>, a hol 5 példányt gyűjtöttem, és a keleti oldalon, a Fehérpart IV. sz. rétegében,<sup>6</sup> a hol egy töredékes héjat leltem.

---

<sup>1</sup> BRUSINA S.: Note prélim. sur le groupe des Aphanotylus. Glasnik hrvatskoga naravoslovnoga društva. God. VI. p. 243.

<sup>2</sup> HALAVÁTS Gy.: A balatonmelléki pontusi korú rétegek faunája. A Balaton Tud. Tan. Eredményei. Füg. A Balatonmellék palaeontológiája. IV. k. 28. lap.

<sup>3</sup> LÖRENTHEY I.: Adatok a balatonmelléki pannóniai korú rétegek faunájához és stratigrafiai helyzetéhez. U. o. 25. és 52. l.

<sup>4</sup> VITÁLIS I.: A balatonmelléki bazaltos kőzetek kora. Földt. Közl. XXXVII. k. 157. l.

<sup>5</sup> VITÁLIS I.: A balatonvidéki bazaltok. A Balaton Tud. Tan. Eredményei. Geol. függ. 147—148. l.

<sup>6</sup> VITÁLIS I.: A tihanyi Fehérpart rétegsora és faunája. Földt. Közl. XXXVIII. (1908.) k. 671. l.

A fölsorolt példányok azonban többé-kevésbé mind töredékesek s így nem lehetett megállapítani, hogy a köpenybenyomat öblöt alkot-e és hogy hátul tátongnak-e a héjak?!

1914 évi május 15.-én Kenese közelében a Fancsér oldal a 420—423. vasúti szelvények között «lesuvadt» s a lerogyott pannóniai üledék a vasutat is elborította 230 m hosszban.<sup>1</sup> Ezt a hatalmas suvadást 1914 június elején hallgatóimmal, a nyári tanulmányút alkalmával, én is megnéztem s a gyűjtött pannóniai kövületanyagban a *Congeria ductylus* BRUS. fajnak egy teljesen ép jobboldali teknőjét is meglettem, a melyen megállapíthattam, hogy *köpenyöble van s a héj hátul tátongó*. E főjelleget alapján FUCHS *Dreyssensiomya* genusához tartozik tehát, de olyan szoros kapcsolat fűzi a Congeriákhoz, hogy erre a fajra legtalálóbba volna a *Sinucongeria* név, a melyet LÖRENTHEY<sup>2</sup> ajánlott volt a rokon *Congeria*, illetve *Dreyssensiomya arcuata* fajra.

Mínthogy ez a faj rendszertanilag érdekes középhelyet foglal a Congeriák és a Dreyssensiomyak, a sinu- és az integripalliaták között, megérdemli, hogy kissé részletesebben foglalkozunk vele.

A Dreyssensiomya genust FUCHS<sup>3</sup> állította fel 1870-ben. FUCHS-nak ugyanis már az ő radmanesti *Congeria Schröckingeri* fajának leírásakor<sup>4</sup> feltűnt s erősen ki is emelte, «dass der Mantelrand eine tief ausgeschnittene Mantelbucht zeigte...» «in Folge dessen die Muschel von Innen ganz das Aussehen eines sinupalliaten Dimyariers darbot.» Eleinte mégis a Congeriákhoz tartozónak vette ezt a fajt is, mínthogy Árpád község-

<sup>1</sup> Lóczy L.: A kenesei partrogyás. Földt. Közl. XLIV. (1914.) k. 513. lap.

<sup>2</sup> LÖRENTHEY I.: Kurd tolnamegyei helység pontusi faunája. Földt. Közl. XXIV. k. 4. l.

<sup>3</sup> FUCHS TH.: Ueber Dreissenomya. Ein neues Bivalvengenus aus der Familie der Mytilaceen. Verhandl. d. k. k. zoolog.-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. XX. (Jg. 1870.) p. 997.

<sup>4</sup> FUCHS TH.: Beiträge zur Kenntniss fossiler Binnenfaunen. III. Die Fauna der Congerienschichten von Radmanest im Banate. Jahrb. d. k. k. Geol. R. A. XX. B. 1870, p. 343—364.

ből olyan «*Congeria*»-faj volt a bécsi múzeumban, a mely középhelyet foglalt el a *Congeria aperta* DESH. sp. és az ő *Congeria Schröckingeri* sp.-e között s a sinus ezen az árpádi «*Congerián*» is (a melyet 1873-ban *Dreysensiomya intermedia* néven írt le) megvolt.

FUCHS azonban csakhamar felismerte, hogy a *Mytilus*-félék családjának új nemével van dolga s fentebb már idézett «*Ueber Dreissenomya*» cz. kis értekezésében ennek az új genusnak a főjelleget a következő pár szóval állapította meg: «eine *Congeria* mit Mantelbucht» «der — írja tovább — für dieses neue Genus gewählte Name: *Dreissenomya* soll diesen Charakter andeuten». A «*Congeria* mit Mantelbucht» karaktert ugyan találobban fejezné ki a *Sinucongeria* név, a melyet, mint fentebb már említettem, LÖRENTHEY ajánlott volt egy, a *Congeriák*hoz közelebb álló fajra.<sup>1</sup>

A köpenyöböl, mint főjelleget, mellett még a következő saját-ságot emelte ki FUCHS: «das Vorderende der Muschel ist, wie bei einer *Modiola* verbreitert, und das sogenannte innere Schlossband hat vollständig den Charakter eines kleinen vorderen Schliessmuskels angenommen.»<sup>2</sup>

FUCHS szeme előtt e sajátosság megállapításakor két faj volt: a *Mytilus apertus* DESH. = *Dreysensiomya aperta* DESH. sp. és a *Congeria Schröckingeri* FUCHS = *Dreysensyomia Schröckingeri* FUCHS. (L. II. tábla 5. a), b) és 7. a), b) rajzait).

Ez a sajátosság a kagylóhéj mellső részének kiszélesedését és tompa lekerekítettségét hozta magával s ebből magyarázható azután, hogy a *Congeria arcuata* FUCHS fajt, mely mellfelől

<sup>1</sup> Már HÖRNES MÓR megemlíti (Die fossilen Mollusken des Tertiär-Beckens von Wien, 1870. II. B. p. 361.), hogy DREYSENS, mazeyki gyógyszerész nevét akarta VAN BENEDEN megörökíteni. Az irodalomban *Dreissena*, *Driessena*, *Driessenia* nevek szerepeltek jó ideig. OPPENHEIM (Die Gattungen van Beneden etc. című értekezésében, p. 927.) kimutatta ugyan, hogy a *Dreysensia* írásmód a helyes, de még ma is a *Dreissensia* s *Dreissen-siomya* van elterjedve. (V. ö. pl. Az állatok világa X. k. 329. l. *Dreissena polymorpha*, recte *Dreysensia polymorpha*.)

<sup>2</sup> OPPENHEIM az «inneres Schlossband»-ot valóban «vorderer Schliessmuskel»-nek nevezi.

congeriaszerűen keskeny s csak gyengén lekerekített, hátul meg félholdalakú köpenyöböllel van ellátva, LÖRENTHEY «*Sinucongeria*» néven új nembe lett volna hajlandó venni. (L. a II. tábla 4 a), b) rajzát). A mikor a kenesei anyagban megeltem a *Conger*a *dactylus* BRUS. teljes példányát, a melyen a tipusos congeria-«csőr» és a Dreysensiomya-«köpenyöböl» együttesen jelenik meg: magam is a legtalálóbbnak véltem a «*Sinucongeria*» felújításával *Sinucongeria dactylus* BRUS. sp. névvel jelölni meg ezt az érdekes fajt. Mivel azonban egyfelől a *Conger*a *arcuat*át a «köpenyöböl», mint főjelleg, alapján ANDRUSOV, a dreysensidák monografusa, a Dreysensiomyák közé vette<sup>1</sup> s ily módon a Dreysensiomya-genus fogalmát erősen kitágította, és minthogy másfelől a *Conger*a *dactylus* BRUS. az első láncszem abban a sorozatban, a mely a Congeriáktól (pl. a *Conger*a *spatulata* PARTSCH-tól) a Dreysensiomyákhoz átvezet: a *Conger*a *dactylus* BRUS.-t is a Dreysensiomya-genusba vehetjük.

Lássuk azonban kissé közelebbről először magát a fajt s azután érdekes rokonait.

### *Dreysensiomya dactylus* BRUS. sp.

II. tábla 2. a), b), c), d), e) és 3. a), b), c) ábra.

1894. *Conger*a *dactylus* n. sp. — BRUSINA: Note prélim. sur le groupe des Aphanotylus. Glasn hrv. narav. druž. God. VI. p. 243.
1897. *Conger*a *dactylus* BRUS. — ANDRUSOV: Dreissensidæ Eurasiens. p. 664.
1900. *Conger*a *dactylus* BRUS. — ANDRUSOV: Dreissensidæ Eurasiens. Erster Supplement. p. 80. Résumé. p. 125.
1902. *Conger*a *dactylus* BRUS. — BRUSINA: Iconographia. Taf. XX. Fig. 9—13. (14—17?)
1902. *Conger*a *dactylus* BRUS. — HALAVÁTS: Balatonmelléki pontusi fauna. 28. l.
1904. *Conger*a *dactylus* BRUS. — HALAVÁTS: Pontusi irodalom (A M. Kir. Földt. Int. kiadv.) 37. l.

<sup>1</sup> ANDRUSOV: Fossile und lebende Dreissensidæ Eurasiens. p. 394. Résumé p. 92.

1905. *Congerina dactylus* BRUS. — LÖRENTHEY: Adat. a balatonm. pannon. rétegekhez. 52. l.
1907. *Congerina dactylus* BRUS. — VITÁLIS: A balatonmelléki bazaltos köz. kora. 157. l.
1908. *Congerina dactylus* BRUS. — VITÁLIS: A tihanyi Fehérpart. 671. l.
1908. *Congerina dactylus* BRUS. — VITÁLIS: A balatonvidéki bazaltok. 148. l.

BRUSINA, e faj felállítója, 1894-ben csak futólag emlékszik meg erről a kenesei újfajáról. ANDRUSOV a »Dreissensidæ Eurasiens» első supplementjében a kenesei töredékes példányok fényképei alapján igen részletesen írta le ezt a fajt. Leírásának nagy része ma is helytálló s ezt az itt következő rövid jellemzésbe magam is beleveszem idézőjelek között.

E faj házának az alakja derékban átvágott *babüvelyhez* hasonlít. A mellső része hegyes, *congeria*-csörszerű, a hátsó része solenszerűen tatóngó. A héj elég vastag. «A *felső perem* egyenes és hosszú.» A *hátsó perem* — a felső peremmel csaknem derékszöget alkotva — lemetszett; a felső perem felől erősebben és laposabban, a hasi perem felé gyengén lekerekített. «Az *alsó perem*, a mely elülről ferdén indul,» (úgy, hogy mellső perem nincs is) hátrafelé (a hossz első harmadától kezdve) szintén egyenesen «a felső peremmel parallel halad». «A búb kihagyott, lefelé hajló s erősen kiemelkedő. A septum igen nagy, bemélyedt, az izomágy («vorderer Schliessmuskul» benyomása) nem foglalja el a septum egész felületét. A lábizomágy (apophysis, «vorderer Byssusmuskul» benyomata) horizontalis s a septum közvetlen folytatásában fekszik». A (mellső) izomágyon haránt ránczok láthatók. A (mellső) lábizomágy kerekded, sekély s alsó részén finoman ránczolt. A (hátsó) záróizomágy (hinterer Schliessmuskul) és a hátsó lábizomágy (hinterer Byssusmuskul benyomata) nyomtatott J betű alakban egygyé olvadt, úgy mint azt LÖRENTHEY a *Dreyszensiomya arcuatá*-ról írja,<sup>1</sup> vagy a mint

---

<sup>1</sup> LÖRENTHEY: Kurd pontusi faunája. Földt. Közl. XXI. k.

azt a *Dreysensyomia apertán* is látni, például DESHAYES<sup>1</sup> eredeti ábráján s ennek hű másolatán a mi táblánk 5. a) rajzán, vagy FUCHS tábláján (Ueber Dreissenomya. Taf. XVI. fig. 4).

A (hátsó) záró izomágy alatt van a félköralakú köpeny-öböl. Az izombenyomatok, a köpenyszegély, különösen a köpeny-öbölnél fénylők. A héj hátul egész szélességében tátong, úgy mint a *Dreysensyomia apertá-n* (l. a II. tábla 2. d) rajzát).

A héj belseje sima (itt-ott a gyöngyházfény némi megcsillanásával), egyes apró dudorokkal; a héj külsején, úgy mint FUCHS<sup>2</sup> a *Dreysensyomia Schröckingeri*-ről írja, «koncentrikus növekedési vonalak észlelhetők, periodikusan a növekedésnek nagyobb megszakításaival.»

A kenesei jobboldali ép teknő méretei:

hosszúsága	— — — — —	30 mm
szélessége	— — — — —	11·6 mm
vastagsága	— — — — —	5·9 « (a félteknőé).

Ez a faj, úgy látszik, elég erősen variál. BRUSINA Iconographiája XX. táblájának 11. ábráján igen keskeny, hosszú példányt, a 9—13. ábrán erősebben kiszélesedő példányokat mutat be. Ezekből kettőt természetes nagyságban állít elénk a II. tábla 3. a), b) és c) rajza. A tihanyi Szarkád-oldal bazalttufájából gyűjtött példányaim mind keskenyek s a kenesei példányoknál kisebb termetűek. BRUSINA Keneséről az Iconographia XX. tábla 14—17. ábráján két *fiatal* példányt rajzoltatott le. Ezekben azonban a (záros) felső perem *ívben* görbül, holott a tipusos példányokon *egyenes*, miért is nem tartom valószínűnek, hogy azok valóban a *Dreysensyomia dactylus* Brus. sp. juvenilis példányai.

Ez a faj eddigelé csak a Balaton mellékéről ismeretes. Lelőhelyei: *Kenese*, *Fonyód* és *Tihany* (Szarkádi-oldal és Fehérpárt). Eddigi lelőhelyei szerint a felső pannoniai korszak éde-sebb vizű facziésében élt.

\*

<sup>1</sup> DESHAYES: Coquilles fossiles de la Crimée. Mémoires de la société géologique de France. Paris. 1838. Tome III. Pl. 4. fig. 10.

<sup>2</sup> FUCHS: Beiträge zur Kenntniss fossiler Binnenfaunen. Jahrb. d. k. k. geol. R. A. XX. B. p. 361.

A *Dreysensiomya dactylus* BRUS. sp. kövülettársaságát elég részletesen ismertetik azok az idézett munkák, a melyek HALAVÁTS, LÖRENTHEY s a magam tollából kerültek ki. Itt hadd lássuk még ezt az érdekes kagylófajt rokonai között.

A II. táblán összeállítottam az alaki rokonság lánczolatát a *Congeria spathulata* PARTSCH-tól a *Dreysensiomya Sröckingeri* FUCHS-ig. E sorozat két szélső tagja között a *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp., a *D. arcuata* FUCHS sp., a *D. aperta* DESH. sp. és a *D. intermedia* FUCHS az átmeneti tagok, az összekötő lánczszemek. A *Congeria spathulata* PARTSCH két főjellege: a hosszú csőr és az egyenes felső perem, megvan a *Dreysensiomya dactyluson* is. A *Dreysensiomya arcuata*-n a csőr lekerekített, a *D. aperta*-tól kezdve egyben mindjobban kiszélesedő. A megnyúlt csőrrel kapcsolatosan a *Dreysensiomya dactylus* septuma és mellső izomágya is nagy megegyezést mutat a *Congeria spathulata*-val.

A *Dreysensiomyák* főjellegét: a köpenyöblöt s a vele kapcsolatos tátongást (hiatust) tartva szem előtt, a következőket vehetjük észre: A *Congeria spathulata*-n általában véve nincs köpenyöböl, de egyes példányokon mutatkozik már némi nyoma. Így HÖRNES MÓR-nak már fentebb idézett munkájában a 49. tábla 4. a) ábráján, a melyet a II. tábla 1. a) rajzán másolatban én is bemutatok, észrevehető a köpenyöböl első nyoma. Még primitivebb köpenyöböl-nyomokat észleltem a nyitavármegyei egbelli példányokon. A *Dreysensiomya dactylus*, *arcuata* és *aperta* fajokon már «félholdalakú» a sinus, még határozottabb a *D. intermedia*-n, míg a *D. Sröckingeri*-n egész mély köpenyöblöt látni már (L. a II. tábla ábráit).

Érdekes a tátongás is. Ezt DESHAYES az ő faján annyira jellemzőnek tartotta, hogy a fajt egyenesen erről jelölte meg: *apertus* = nyitott, tátongó. A *Dreysensiomya aperta* DESH. sp. hátul tátongó, s szakasztott ilyen a *Dreysensiomya dactylus* is. (L. a II. tábla 2. e) és 5. c) ábráit.) A *Dreysensiomya arcuata*-n az eddigi megfigyelők nem említik a tátongást, a LÖRENTHEY professor úr, igen tisztelt barátom birtokában levő radmanesti ép példányon valóban csak résszerű tátongás észlelhető. A *Dreysensiomya intermedia* teknői hátul erősen tátong-

nak, a mint a II. táblánk 6. b) ábráján is látszik; az ábra FUCHS eredeti rajzának hű másolata.<sup>1</sup>

Érdekes azután a *Dreysensiomya Schröckingeri*. Ez FUCHS eredeti rajza szerint *elől* tátong erősen. A radmanesti páros teknőjű ép példányokon meggyőződtem azonban arról, hogy e fajon is megvan a hátsó tátongás is, bár az csak résalakú. Különben ANDRUSOV is említi erről a fajról *Dreissensidæ Eurasiæ* monografiájában (p. 398. illetőleg *Résumé* p. 93.), hogy *elől-hátul* tátong. (XIX. táblája 11. ábráján, a mely meg van *fordítva*, a fénykép hátsó része túlsötét, úgy hogy a tátongás alig ismerhető fel).

A *Dreysensiomyák* eddig említett fajain, ugyanis a *D. dactylus*, *aperta*, *arcuata*, *intermedia* és *Schröckingeri* fajokon kívül más fajokat is leírtak. Ilyenek a *Dreysensiomya* (?) *unioides* FUCHS, *D. croatica* BRUS., *D. Fuchsi* ANDR., *D. Žujovići* BRUS., ámde mindezek egy vagy más szempontból bővebb megvilágítást igényelnek még. A *D. unioides*, *croatica* és *Žujovići* csak kívülről ismeretesek, belülről nem s így éppen a főjelleget: a köpeny-öblöt nem lehetett eddig megállapítani. A *D. Fuchsi* ANDR. meg (a mennyiben az ábráról s a leírásból megítélhető) csak *nagyságban* tér el a *D. arcuatától* (v. ö. ANDRUSOV: *Dreissensidæ Eurasiens*, XIX. tábla 3., 4. és 20—21. ábráját); a felső perem *ívszerű* görbülete, valamint ANDRUSOV-nak az a megjegyzése, hogy «jelentéktelenül tátong hátul» (i. m. *Résumé* p. 94.), a *D. arcuatá*-val közös vonás.

Ezek, valamint a csak genus-névvel felsorolt alakok bővebb vizsgálatot igényelnek még.

---

<sup>1</sup> FUCHS az *intermedia* leírásában azt mondja, hogy «das Hinterende in der Jugend schief abgestutzt und *schliessend*, im Alter abgerundet und klaffend», i. m. 1873. p. 23.



## BIZTOS EGYENSÚLY POTENCIÁL NÉLKÜL.

FARKAS GYULA r. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

Minthogy e helyen az utóbbi években a relativitás elvével foglalkoztam, előre bocsátom, hogy mostani közleményem a mechanika és thermodynamika régi tanaihoz fűződik, ugyanis azon az okon, hogy a közönségesebb alkalmazások terén, a gyakorlati szükségletekhez viszonyítva, oly csekélyek a numerikus eltérések a régi és az új tanok eredményei között, hogy a gyakorlat követelményeinek a régi elméletek teljesen megfeleljenek.

Még azt jegyzem csak meg előljáróban, hogy mint már a thermodynamikára utalásom is sejtetheti, nem külön való tömegpontok rendszereiről, hanem folytonos testekről lesz itt a szó. Mindazonáltal aránylag rövidre fogható volt a tárgy előadása, mert a reá tartozó előzményes tudnivalók általánosan ismeretek, kivált hogy ma már didaktikus módon megírt munkákból is megszerezhetők, minők pl. PLANCK, ROBIN, VAN DER WAALS, DUHEM thermodynamikai munkái.

1. §. A hőelmélet két főtételéből, egyenletes hőmérsékletű materiális rendszer számára, tetszés szerinti koordináta-rendszerben,

$$d\kappa + d\varepsilon - Td\eta - d'\mu < 0 \quad (1)$$

egyenlőtlenségünk van minden elemi folyamatban, a hol  $\kappa$  az anyagi rendszer kinetikus energiája,  $\varepsilon$  az anyagi rendszer teljes energiájának és kinetikus energiájának a különbsége,  $T$  az anyagi rendszer abszolút hőmérséklete,  $\eta$  az entrópiája,  $d'\mu$  az

anyagi rendszerrel valamely  $dt$  időelemben közölt munka,  $dx$ ,  $d\varepsilon$ ,  $d\eta$  elemi megváltozások a  $dt$  időelemben.

Egy koordinátarendszerben, valamely külső föltételek alatt, biztos nyugalom belső föltételeinek a meghatározásával GIBBS munkáinak méltatása óta szélteben foglalkozik a szakirodalom arra az esetre, hogy  $d'\mu$  megfordítható munka és hogy az adva gondolt külső föltételek alatt a nyugalomból csak potenciális kizavarás lehetséges, azaz, hogy a

$$d\varepsilon - Td\eta - d'\mu \equiv d'\psi \quad (2)$$

inkrementum vagy maga, vagy valamely állapotfüggvénynyel való szorzata csak totális differenciál (állapotfüggvény totális elemi megváltozása) lehet. Pontosan totálisnak értendő pedig ez a differenciál és egyáltalán minden, itt totálisnak mondandó elemi megváltozás, nem pedig csupán elsőrendű pontossággal, azaz legalacsonyabb rendű végtelen kis részére nézve értendő totálisnak.

ROBIN azonban gondolt már arra az eshetőségre, hogy biztos nyugalomból indult  $d'\psi$ -féle inkrementumok sem mindig totális differenciálok és nincs is integrációs szorzójuk, még pedig ő ezt a defekciót szép hőelméleti munkájában<sup>1</sup> a legmélyebb fokon,  $d'\psi$ -nek már az elsőrendű végtelen kis részén gondolta. Hanem alkalmazásokba nem bocsátkozik és tekintettel arra, hogy ezúttal megfordítható folyamatokra szorul, az alkalmazásokat azon, ma egészen elavult nézettel háritja el, hogy végtelen lassú folyamatoknak nincs gyakorlati jelentőségük. De tudtommal az elsőrendű defekciónak valóságbeli kép a megfordítható folyamatok abstrakciójában sem felel meg.

Ezzel ellentétben bőségesen felel meg valóságbeli kép az oly defekciónak, a melyek a  $d'\psi$ -féle inkrementumok másodrendű végtelen kis részein jelentkeznek. Erről szólnak az itt következők, de egyszerűség kedvéért csak oly (egyenletes hőmérsékleten tartandó) anyagi rendszeren és csupa oly külső föltéte-

---

<sup>1</sup> ROBIN: Thermodynamique général, 1901. (89—90. l. Du cas où il n'y a de potentiel externe.)

lek alatt, miszerint az  $\varepsilon$  energiát és  $\eta$  entrópiát az anyagi rendszer  $T$  hőmérséklete és véges számú más skaláris változó  $(T, u_1, u_2, \dots, u_n)$  egyértelműleg és legalább kétszeresen differenciálhatólag határozza meg valamely  $n+1$  méretű folytonos ( $\dot{E}$ ) értéktartományukban és  $u_1, u_2, \dots, u_n$  megválaszthatók úgy, hogy az anyagi rendszerrel közölt elemi munka (1)-ben a  $du_1, du_2, \dots, du_n$  elemi megváltozások vonalassal függvényeül számíthat:

$$d'\mu \equiv \sum_{i=1}^{i=n} A_i du_i \quad (3)$$

oly  $A_1, A_2, \dots, A_n$  együtthatókkal, a melyek a  $T, u_1, u_2, \dots, u_n$  állapothatározóknak legalább egyszeresen differenciálható függvényeik.

Egy inkrementumot, a mely nem totális differenciál, de a  $dT, du_1, du_2, \dots, du_n$  elemi megváltozásokkal egyszerre jött létre, megfordíthatónak mondunk, ha a  $-dT, -du_1, -du_2, \dots, -du_n$  visszaváltozásban  $(T+dT, u_1+du_1, \text{ stb. értékekről } T, u_1, \text{ stb. értékekre változásban})$  legalább elsőrendű pontossággal visszaváltozik. Ehhez képest a (3) alatt definiált  $d'\mu$  munka is megfordítható inkrementum, megfordítható inkrementuma a kezdet óta közölt munkának, mert a visszaváltozásban =

$$= \Sigma (A_i + dA_i) (-du_i).$$

Nemkülönben megfordítható inkrementum ebben az értelemben  $Td\eta$  és  $Td\eta + d'\mu$ .

2. §. Az előbbi § föltevéseiben az (1) alól:

$$dx + d\varepsilon - (Td\eta + \Sigma A_i du_i) < 0. \quad (4)$$

Tegyük föl, hogy olyanok a kikötött külső föltételek, hogy a

$$d'\psi \equiv d\varepsilon - (Td\eta + \Sigma A_i du_i)$$

inkrementum csak pozitív lehet minden elemi folyamatban az ( $\dot{E}$ ) értéktartományban:

$$d'\psi \equiv d\varepsilon - (Td\eta + \Sigma A_i du_i) > 0. \quad (5)$$

Ez esetben akármely ( $P$ ) «pont» legyen is ( $T, u_1, u_2, \dots, u_n$ ) az ( $\dot{E}$ ) értéktartomány belsejében, ha e pontban időszámításunk kezdetén nyugalomban van az anyagi rendszer koordinátarendszerünkben, akkor nyugalomban is marad, mert nyugalomból  $dx \geq 0$  volna, tehát (5) esetén a (4) nyugalomból nem teljesülhet.

Most egy későbbi elhatározásig függetleneknek tételezzük fel folyvást a  $T, u_1, u_2, \dots, u_n$  állapothatározókat az  $\dot{o}$  ( $\dot{E}$ ) értéktartományukban.

E szerint  $\delta'\psi$  elsőrendű részének el kell tűnnie az ( $\dot{E}$ ) értéktartomány belsejében, tehát, ha egyelőre a  $T$  hőmérséklet helyett az  $\eta$  entrópia szerepel egyik állapothatározó gyanánt, akkor a

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = T, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_i} = A_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

egyenleteink vannak. Ezek mindenütt érvényesek ( $\dot{E}$ ) belsejében, minélfogva

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial u_j} = \frac{\partial A_j}{\partial u_i}. \quad (7)$$

Innen első követelésül az következik, hogy a ( $T, A_1, A_2, \dots, A_n$ ) «vektornak», grádiensnek kell lennie. Ha ezt előre föltesszük, akkor  $\delta'\psi$  (5) elsőrendű pontosság szerint totális differenciál, de már másodrendű pontosság szerint nem az és nincs is integrációs szorzója, mert a ( $T, A_1, A_2, \dots, A_n$ ) vektort sőt annak mind az  $n+1$  komponensét az állapothatározókkal változó függvényül gondoljuk. Kitűnik ez az állítás abból, hogy  $\delta'\psi$  másodrendű része nem más, mint  $\varepsilon$  második differenciáljának a fele, azaz tekintettel (6)-ra,

$\delta'\psi$  másodrendű része =

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial u_1} \delta u_1^2 + \dots + \\ &+ \left( \frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial A_1}{\partial \eta} \right) \delta \eta \delta u_1 + \dots + \left( \frac{\partial A_1}{\partial u_2} = \frac{\partial A_2}{\partial u_1} \right) \delta u_1 \delta u_2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

A (3) alatt definiált munka (melynél fogva  $\delta'\psi$  nem totális differenciál, sem általában semmi szorzóval totális differen-

ciallá nem tehető) közönségesen mint nyomásoknak a munkája jelentkezik, még pedig legtöbbnyire tisztán a külső anyagi rendszerek nyomásának az anyagi rendszer deformációján végzett elemi munkája az. De elektromosságok hatásaitól egy anyagi rendszer belsejére is hármozhat ilyen munka, oda értetvén ehhez az állításhoz, hogy az elektromosságok (és mágnességek), még pedig az állandóan vagy időlegesen magában az anyagi rendszerben foglaltak is, mindig külső rendszerek gyanánt számíthatók és így a munkáik az anyagi rendszereken kívülről származóknak számíthatók.

3. §. Rójjuk ki ezentúlra, hogy olyan az anyagi rendszer az  $(\dot{E})$  értéktartományban és olyanok a külső föltételek, hogy  $\delta^2\varepsilon$  pozitív definit forma az  $(\dot{E})$ -ben az  $\eta, u_1, u_2, \dots, u_n$  állapot-határozók minden megváltozása ellen:

$$\delta^2\varepsilon = \frac{\partial T}{\partial \eta} \delta\eta^2 + \sum \frac{\partial A_i}{\partial u_i} \delta u_i^2 + 2 \sum \frac{\partial A_i}{\partial \eta} \delta\eta \delta u_i + \sum_{j \neq i} \frac{\partial A_i}{\partial u_j} \delta u_i \delta u_j > 0. \quad (9)$$

Ez az egyenlőtlenség olyszerű, mintha az  $\varepsilon$  energia minimumát követelné a  $(P)$  pontban; de csak látszólag ilyen, mert  $\varepsilon$ -nak (a  $T, A_1, A_2, \dots, A_n$ -val egyenlő) első deriváltjai nem tűnnek el  $(P)$ -ben és föltesszük, hogy nem is tűnnek el sehol sem az  $(\dot{E})$  értéktartományban. Mindazonáltal nemcsak megmarad az  $(\dot{E})$  bármely pontjában megkezdett nyugalom, de stabilis nyugalom az a teljes DIRICHLET-féle definíció értelmében, mint most majd meglátjuk.

A stabilis egyensúly DIRICHLET-féle definícióját jelenlegi föltételeink között lényegesen nem specializáljuk, ha magában egy éppen kiszemelt  $(P_0)$  egyensúlyi pontban, nem pedig szomszédos pontban tulajdonitunk kezdeti kinetikus energiát az anyagi rendszernek s akkor mondjuk biztosnak már az anyagi rendszer mechanikai és thermikus nyugalmát a  $(P_0)$  pontban, ha ebben a  $(P_0)$  pontban a néki tulajdonított kinetikus energia mindig megszabható elég kicsinynek arra, hogy az anyagi rendszer állapota tetszés szerint előre adott közelségnél örökké közelebb maradjon az ő kezdeti állapotához. Nem szükséges itt szomszédos állapotból indítani az anyagi rendszer változását azért, mert  $(\dot{E})$  belsejében akárhol lehetséges az anyagi rendszer nyugalma

és minden helyet megillet mind a (4), mind az (5) és (9) egyenlőtlenség.

Már most a nyugalom biztosságának kimutatására annak ezen definíciójánál maradva, vegyük figyelembe, hogy egyenlőtlenségeinket úgy lehet értenünk, miszerint mindig létezik akkora véges<sup>1</sup> kis  $r_0$  sugár, hogy az

$$(\eta - \eta_0)^2 + \Sigma (u_i - u_{i0})^2 = r_0^2 \quad (10)$$

gömbnek a belsejében (9)-ből

$$\frac{\partial T_0}{\partial \eta_0} (\eta - \eta_0)^2 + \dots + \sum_{j \neq i} \frac{\partial A_{i0}}{\partial u_{j0}} (u_i - u_{i0})(u_j - u_{j0}) \equiv 2\Omega > 0 \quad (11)$$

legyen mindenütt és (4)-ből tekintettel (6)-ra

$$x - x_0 + \Omega < 0 \quad (12)$$

legyen. A (11) jelölése szerint az  $\Omega = x_0$  egyenlet ( $P_0$ ) ezentrumú ellipszoid egyenlete, és  $x_0$  mindig kiróható oly kicsire, hogy ez az ellipszoid az ( $r_0$ ) gömbfelületen belül legyen, bármi kicsinyre szabtuk is ennek az  $r_0$  sugarát, már pedig (12)-ből folyólag a ( $P$ ) pontnak örökké ez ellipszoid belsejében kell tartózkodnia. Együttal  $x < x_0$  adódik (12)-ből a mozgásbeli állapot számára.

A ( $P_0$ ) pontra vonatkoztatva a (6) alatti egyenleteket, az is kiderül, hogy ha (11)-ben az együtthatókat  $\varepsilon_0$  második deriváltjaival helyettesítjük, akkor (6) és (11) úgy függenek össze, mint öltételei a (másodrendűleg  $\Omega$ -val egyenlő)

$$\theta \equiv \varepsilon - \varepsilon_0 - \{T_0 \cdot (\eta - \eta_0) + \Sigma A_{i0} (u_i - u_{i0})\}$$

függvény minimumának, minélfogva a

$$x - x_0 + \theta < 0$$

egyenlet alapján minimumra is alapítható a stabilis nyugalom kimutatása és pedig tetszés szerint választott ( $P_0$ ) belső pontra; azonban ( $P_0$ ) szabad választásánál fogva utólagosan (7) is a belső föltételekhez sorolandó.

A (7) alatt foglalt egyenleti belső föltételekhez (9) alól egyenlőtlenségi belső föltételek csatlakoznak, azok, a melyek a  $T, A_1, A_2, \dots, A_n$  együtthatók deriváltjai közt szükségesek a végből, hogy (9) baloldala definit pozitív alak legyen. Ez

egyenleti és egyenlőtlenségi feltételek összesége elégséges arra, hogy az  $(K)$  értéktartomány belsejében akárhol biztos nyugalomban lehessen az anyagi rendszer, ugyanis az éppen elfoglalt  $(P)$  helynek megfelelő  $T$  fokú hőforrás és  $A_1, A_2, \dots, A_n$  egyúttartók megváltoztatása ellen, és pedig az általános DIRICHLET-féle definíció szerint is.

(Az (5)-nek  $\eta_0, u_{10}$ , stb. és  $\eta, u_1$ , stb. közt végzett integrálása  $Q$ -val nem egyező négyzetes részhez juttat, a mi azonban nem jelent ellentmondást azért, mert csak egyenlőtlenségeket követelünk.)

4. §. Gyakorlati alkalmazásokban az entrópia helyett a hőmérsékletet használjuk állapotváltozó gyanánt. Ekkor a szabad energia nevű állapotfüggvénynek, azaz

$$\varphi \equiv \varepsilon - T\eta \quad (13)$$

függvénynek az alkalmazásával így írjuk czélszerűen az (5) alatti egyenlőtlenséget:

$$\delta\varphi + \delta\eta \cdot \delta T + (\eta\delta T - \sum A_i \delta u_i) < 0. \quad (14)$$

Most a vonalas részen a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial T} = -\eta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = A_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

egyenleteink vannak; a négyzetes részen pedig:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial T} + \eta \right) \delta T^2 + \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial T} + \eta \right) \delta u_i \delta T + \\ & + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i^2} \delta u_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j < 0, \end{aligned}$$

tehát tekintettel (15)-re:

$$\frac{\partial\eta}{\partial T} \delta T^2 + \sum \frac{\partial A_i}{\partial u_i} \delta u_i^2 + \sum_{j \neq i} \left( \frac{\partial A_i}{\partial u_j} = \frac{\partial A_j}{\partial u_i} \right) \cdot \delta u_i \delta u_j > 0. \quad (16)$$

Arra a speciális esetre, hogy  $n = 2$ , a következők a belső feltételek:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_1} = -\frac{\partial A_1}{\partial T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u_2} = -\frac{\partial A_2}{\partial T}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial u_1} = \frac{\partial A_1}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial u_1} > 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial u_2} > 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial u_1} \frac{\partial A_2}{\partial u_2} > \frac{\partial A_1}{\partial u_2} \frac{\partial A_2}{\partial u_1},$$

a melyekhez oda értendő, hogy  $\eta$ -nak a deriváltjai nem mások, mint a  $T, u_1, u_2, \dots, u_n$  állapotátározók elemi megváltozásán közölt elemi hő vonalas részének  $T$ -vel osztott együtthatói. (Általában magasabb rendű része is van néki, mert az első főtétel szerint ez a hő  $= dx + d\varepsilon - (l'\mu)$ . De első és második itteni egyenletünk voltaképpen csakis két hőegyütthatónak a meghatározására és egyúttal  $\eta$  részleges meghatározására szolgál és csak  $\eta$ -nak  $T$  szerint való deriváltját kell  $\eta$ -ra háramló föltétel gyanánt számon tartanunk, a mi nem más, mint állandó  $u_1$  és  $u_2$  határozókhoz tartozó hőkapacitás  $c$ , a melyet, mint  $T$  függvényét az elmélet elvileg sem határozhatja meg. Továbbá fölösleges volna mint föltételeket még külön a (15) alatti egyenleteket is idesorolni, a melyek csak az a priori ismeretlen  $\varphi$  állapotfüggvénynek a külső föltételekbe illő meghatározására tesznek szolgálatot. E szerint két  $u$  határozó esetében strikte a

$$\frac{\partial A_2}{\partial u_1} = \frac{\partial A_1}{\partial u_2}, \quad c > 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial u_1} > 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial u_2} > 0,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial u_1} \frac{\partial A_2}{\partial u_2} > \frac{\partial A_1}{\partial u_2} \frac{\partial A_2}{\partial u_1} \quad (17)$$

belső föltételek alatt van biztos nyugalom.

Gyakori követelés, hogy az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  mennyiségek helyett az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  együtthatók szerepeljenek  $T$  mellett független állapotátározók gyanánt. E követelés érdekében az elemi munka (3) alatt kiszabott kifejezését a

$$\delta' \mu \equiv \delta \Sigma A_i u_i - \Sigma u_i \delta A_i - \Sigma \delta u_i \delta A_i$$

alakban írjuk. Ha most  $\zeta$  jelöli a «thermodynamikai potenciált», azaz, ha

$$\varepsilon - T\eta - \Sigma A_i u_i \equiv \zeta \quad (18)$$



tesszük, akkor (14)-en a

$$\delta\zeta + \delta\eta \cdot \delta T + \Sigma \delta u_i \delta A_i + \eta \delta T + \Sigma u_i \delta A_i > 0 \quad (19)$$

egyenlőtlenség áll elő, a melyben már  $\zeta, \eta, u_1, u_2, \dots, u_n$  mint  $T, A_1, A_2, \dots, A_n$  függvényeik számítandók, még pedig  $\zeta$  másodrendű, a többi elsőrendű pontosság szerint számítható.

5. §. Tekintsük most azt az esetet, hogy a  $T, u_1, u_2, \dots, u_n$  állapothatározók nem függetlenek egymástól, hanem, hogy úgy módosítottuk a külső föltételeket, hogy holonóm vagy nem holonóm egyenletek szorítják meg a  $\delta T, \delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$  lehetséges elemi megváltozásokat. Egyformaság kedvéért használjuk most a

$$T \equiv u_0 \quad (20)$$

jelölést és már mindig csak másodrendű pontosságon tartva, írjuk így az (5) alatt kirótt föltevést:

$$\sum_0^n R_i \delta u_i + \sum_{0,0}^{n,n} R_{ij} \delta u_i \delta u_j > 0 \quad (21)$$

(a hol  $i$  és  $j$  egyenlők is lehetnek). A megszorító egyenletek a következők legyenek:

$$\begin{aligned} \sum_0^n a_i \delta u_i + \sum_{0,0}^{n,n} a_{ij} \delta u_i \delta u_j &= 0, \\ \sum_0^n b_i \delta u_i + \sum_{0,0}^{n,n} b_{ij} \delta u_i \delta u_j &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (22)$$

a melyekről föltegyük, hogy vonalas részeik függetlenek egymástól.

A (22) számbavételére közvetlenül kinálkozó eljárás itt abból áll, hogy megfelelő számú  $\delta u$  értéket (22)-ből másodrendű pontossággal kiszámítunk, aztán (21)-ben helyettesítjük azokat. Ezt a kiszámítást rövid úton iterációval végezzük: egyelőre a négyzetes összegeket ismertekül tekintjük (22)-ben, úgy hogy csupán a vonalas összegekből számítunk, a mely számításunk eredményében a négyzetes összegek alakjuk egész teljességében

előfordulnak; azután azonban az így kiszámított változók kifejezéseinek a vonalas részeit behelyettesítjük ama kifejezések négyzetes részeibe, midőn is másodrendű pontossággal be van fejezve (22)-ből a számítás és eredményeinek a négyzetes részeit (21) vonalas részébe kell csak behelyettesíteni.

Azonban rendszerint hamarább érünk czélt multiplikátorok alkalmazásával. A (22) alatti egyenleteket rendre megszorozzuk  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... multiplikátorokkal, aztán hozzáadjuk (21)-hez, mihez képest azt kapjuk, hogy

$$\sum_0^n (R_i + \alpha \alpha_i + \beta b_i + \dots) \delta u_i + \sum_{0,0}^{n,n} (R_{ij} + \alpha \alpha_{ij} + \beta b_{ij} + \dots) \delta u_i \delta u_j > 0.$$

Az imént leírt helyettesítési módszer eredményein közvetlenül fölismerhető, hogy kell létezniök olyan  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... multiplikátoroknak, hogy ez egyenlőtlenség baloldalának a vonalas része identikusan (azaz  $\delta u_0, \delta u_1, \dots, \delta u_n$  minden képzelhető értékével) eltűnjék. Ugyanis a helyettesítési eljárásban, a helyettesítések után (21) vonalas részének identikusan (azaz a megmaradt  $\delta u$  mennyiségek minden képzelhető értékével) el kell tűnnie, de a helyettesítések vonalas eredménye olyan, mintha (22) csak a vonalas részeket tartalmazná: (21) vonalas részének mindazokkal a  $\delta u$ -kkal el kell tűnnie, a melyekkel (22) vonalas részei eltűnnek. Tehát

$$R_i + \alpha \alpha_i + \beta b_i + \dots = 0, \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (23)$$

Ezután egyenlőtlenségünk a következőre redukálódik:

$$\Sigma (R_{ij} + \alpha \alpha_{ij} + \beta b_{ij} + \dots) \delta u_i \delta u_j > 0, \quad (24)$$

a melyben az  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... multiplikátoroknak (23)-ból számított értékei gondolandók; ebben az egyenlőtlenségben a (22) megszorításokat azok négyzetes részeinek a mellőzésével szükséges csak figyelembe venni.

Fölösleges annak a külön kimutatása, hogy a (23)-ból folyó határozott egyenletek és a (24)-ből folyó határozott egyenlőtlenségek elégséges föltételei a biztos nyugalomnak. A (22)-nek iterációs számbavételén egyenesen belátható ez a 3. §. alapján.

6. §. A tapasztalással való egyezést illetőleg: az itt előkerülő határozott egyenletek, mint látható, magukban tekintve épenséggel nem újak, mert már CLAUSIUS és GIBBS idejében kifejtettek azok, mint a megfordítható folyamatok kísérői. Az eddigelé kísérletileg tanulmányozott testek és külső föltételek körében, elvontan tekintve, az egyenlőtlenségek sem újak, sőt egyáltalán minden eddigi észlelésben föltünően teljesülnek, minélfogva úgy ismeretesek régóta, mint a testek általános kellékei. Hogy pedig a tapasztalás mind maig csakis ez egyenlőtlenségekkel egyező materiális tulajdonságokkal találkozhatott, ez arra látszik utalni, hogy olyan a természeti testek szerkezete, hogy ezek az egyenlőtlenségek általában szükséges föltételei az egyensúly biztosságának.

Az egyenlőtlenségek kedvéért álljon itt három igen közönséges példa független állapothatározókra és egy az állapothatározók holonom megszorítására.

a) Az anyagi rendszer egy homogén test és  $n = 1$ ,  $u_1 = a$  test fajbéli térfogata  $\equiv v$ ; a testtel fajlagosan közölhető elemi munka  $= -p\delta v$ , a hol  $p$  egyenletes nyomás. Ekkor a (17)-ből láthatóan egyenleti föltételünk nincs, egyenlőtlenségi föltételünk pedig abból áll, hogy  $c$  pozitív legyen és a  $p$  nyomás állandó hőmérséklet mellett a növe térfogat monoton fogyó függvénye legyen.

b) Az anyagi rendszer egy feszített testszál,  $n = 2$ ,  $u_1 = a$  testszál térfogata  $\equiv v$ ,  $u_2 = a$  testszál hossza  $\equiv l$ ; a testszállal közölhető elemi munka =

$$\delta' \mu = -p\delta v + q\delta l,$$

a hol  $p$  egyenletes nyomás,  $q$  a feszítő erő nagysága. Ezúttal a következő belső föltételeink vannak:

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial l}, \quad c > 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial l} > 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial q}{\partial v} > \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial l}.$$

c) Az anyagi rendszer egy GALVANI-elem, a melyben a «JOULE-féle hő» nem tesz számot. A legegyszerűbb esetben

$n = 2$ ,  $u_1 =$  a szerkezet térfogata  $\equiv v$ ,  $u_2 =$  egy keresztmetszeten kezdet óta átáramlott elektromos mennyiség  $\equiv e$ ; a közölhető elemi munka =

$$\delta' \mu = -p \delta v - k \delta e,$$

a hol  $p$  egyenletes nyomás és  $k$  az «elektromótoros erő». Itt (17) értelmében föltételeink a következők:

$$\frac{\partial k}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial e}, \quad c > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} < 0, \quad \frac{\partial k}{\partial e} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial e} \frac{\partial k}{\partial v} < \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial k}{\partial e}.$$

d) Egy homogén test két fázisának együttlétében a legegyszerűbb esetben  $n = 4$ ,  $u_1$  és  $u_2$  a fázisok tömege  $\equiv m_1$  és  $m_2$ ;  $u_3$  és  $u_4$  a fázisok fajlagos térfogata  $\equiv v_1$  és  $v_2$ . Mindig van most a

$$\delta m_1 + \delta m_2 = 0$$

megszorító egyenletünk. Ehhez most rójjuk ki még azt a megszorítást, hogy az összes térfogat,  $v$ , ne változhassék:  $\delta v = 0$  legyen, a hol

$$v = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

tehát a

$$\delta v = m_1 \delta v_1 + m_2 \delta v_2 + v_1 \delta m_1 + v_2 \delta m_2 + \delta v_1 \delta m_1 + \delta v_2 \delta m_2 = 0$$

megszorító egyenletet csatoljuk az előbbihez. Azt is tegyük fel, (mint igen pontosan rendszerint teljesülő vonatkozást), hogy a fajlagos energiák ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ) és a fajlagos entrópiák ( $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ) szerint

$$\varepsilon = m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2, \quad \eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2,$$

következőleg

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= m_1 \delta \varepsilon_1 + m_2 \delta \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \delta m_1 + \varepsilon_2 \delta m_2 + \delta m_1 \delta \varepsilon_1 + \delta m_2 \delta \varepsilon_2, \\ \delta \eta &= m_1 \delta \eta_1 + m_2 \delta \eta_2 + \eta_1 \delta m_1 + \eta_2 \delta m_2 + \delta m_1 \delta \eta_1 + \delta m_2 \delta \eta_2, \end{aligned}$$

és  $\varepsilon_1$ ,  $\eta_1$  csak  $T$ -nek és  $v_1$ -nek,  $\varepsilon_2$ ,  $\eta_2$  csak  $T$ -nek és  $v_2$ -nek a függvényei.

Az 5. §. multiplikátoros módszerével a következő multiplikátoros egyenleteket kapjuk:

$$m_1 \left( \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial T} - T \frac{\partial \gamma_1}{\partial T} \right) + m_2 \left( \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial T} - T \frac{\partial \gamma_2}{\partial T} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v_1} - T \frac{\partial \gamma_1}{\partial v_1} = \beta, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial v_2} - T \frac{\partial \gamma_2}{\partial v_2} = \beta,$$

$$\varepsilon_1 - T\gamma_1 = a + \beta v_1, \quad \varepsilon_2 - T\gamma_2 = a + \beta v_2.$$

Mint hogy azonban az egyes fázisok tulajdonságainál fogva az első egyenlet mindkét tagja eltűnik, a második és harmadik egyenlet baloldala pedig az illető fázisnak a  $-p_1$  illetőleg  $-p_2$  nyomásával egyenlő, az egyes fázisok saját egyenleti tulajdonságaihoz itt még csak a

$$p_1 = p_2 \equiv p, \quad \text{és} \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = T \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) - p \cdot (v_1 - v_2)$$

egyenletek csatlakoznak, a melyek másodika  $T$  és  $p$  GIBBS-féle összefüggését szolgáltatja.

A (24) alatti egyenlőtlenség gyanánt, már az egyes fázisok belső egyenleteinek a számbavételével,  $c_1$  és  $c_2$  fajmelegeket jelentvén:

$$\left( m_1 \frac{c_1}{T} + m_2 \frac{c_2}{T} \right) \delta T - m_1 \frac{\partial p_1}{\partial v_1} \delta v_1^2 - m_2 \frac{\partial p_2}{\partial v_2} \delta v_2^2 -$$

$$- (p_1 + \beta) \delta v_1 \delta m_1 - (p_2 + \beta) \delta v_2 \delta m_2 > 0;$$

a hová még be kellene helyettesíteni  $\delta m_1$ -nek és  $\delta m_2$ -nek mint  $\delta v_1$  és  $\delta v_2$  függvényeinek az értékét a megszorító egyenletekből, ámde ez itt fölösleges a miatt, hogy  $p_1 + \beta = p_2 + \beta = 0$ . Mint látjuk innen, a két fázis együttlétéhez tartozó egyenlőtlenségi föltételek az egyes fázisoknak  $a$ )-ból (349. l.) való egyéni tulajdonságaival ki vannak merítve a jelenlegi külső föltételek alatt.

Ha nem tesszük a  $\delta v = 0$  megszorítást, de e helyett egyenletes külső nyomás munkáját rójuk ki, akkor a fázisok átalakulása ellen nem adódik stabilisság.

7. §. Mint hogy e helyen czéлом csak a tárgy elvi oldalának a föltüntetése lehetett, ezért általánosabb, kivált pedig végtelen sok állapothatározót posztuláló külső föltételek számbavételét mellőzöm. Azonban az általánosság érdekében szükségét látom annak, hogy a CLAUSIUS-féle axiómának egy újabb keletű gyöngítését elhárítsam.

DUHEM az ő mostanság megjelent thermodynamikai munkájában a hőáramlásról szóló tárgyalások során kimutatja, hogy egy anizotróp testben, a test belsejében gondolható fölületelek egy részén köröszűl azok hidegebb oldaláról áramlik pozitív hő a melegebb oldalára, minélfogva szerinte «il ne convient pas d'user sans précaution de l'axiome de CLAUSIUS: La chaleur ne peut passer d'elle-même d'un corps froid à un corps chaud. Nous venons de signaler un cas où cette proposition ne pourrait être énoncée sans erreur.»<sup>1</sup>

Most majd kimutatom, hogy jóllehet léteznek ezek a különös viselkedésű fölületelek, azokról a CLAUSIUS axiómája felől itt idézett ítélet nem következik. Evégből előbb DUHEM analitikus levezetését geometriai szemlélődésre fordítom át, midőn aztán már könnyen fölismerhető lesz ennek az ítéletnek paradoxossága.

Egy nyugvó test belsejében jelöljünk meg  $O$ -val egy olyan pontot, a melynek a környezetében nem egyenletes a testnek a hőmérséklete. Az  $O$  ponton át fekvő izothermás fölület normálisát mint egységvektort az  $O$  pontból arra felé, a merre a hőmérséklet csökken, jelöljük meg  $n$ -nel s a pozitív hő áramlását az  $O$  pontnál jelöljük meg  $a$ -val. Ha izotróp az  $O$  pont környezete, akkor  $a$  és  $n$  egyező irányú, ellenkező esetben nem egyező irányúak ezek s általában csak annyi mondható róluk, hogy hegyes szöget alkotnak, még pedig azért hegyeset, mert az izothermás fölület azon oldalára áramlik pozitív hő a másíkról, a mely felé a hőmérséklet csökken.

Most gondoljunk egy fölületelemet az  $O$  ponton köröszűl. Akármilyen legyen ennek a fölületelelemnek a fekvése, hacsak nem merőleges az izothermás fölületre, az egyik oldalát hidegebb oldalának, a másikat melegebb oldalának mondjuk, még pedig hidegebb oldalának mondjuk azt az oldalát, a mely felé mutat az izothermás fölületnek az  $n$  normális. Természetes elnevezés ez, mert a fölületelelem bármely pontján át húzzunk végtelen rövid egyenes darabot merőlegesen a fölületelelemre, ezen elemi vonaldarabnak az a vége, a mely a melegebbnek

<sup>1</sup> DUHEM: Traité d'Énergétique II. 1911. (214—216. 1.)

mondott oldalra esik, melegebb, mint az a vége, a mely a fölületelem hidegebbnek mondott oldalára esik.

Ezek után tegyük azt az észrevételt, hogy ha úgy fekszik a fölületelem, hogy bevág az  $n$  normálisnak és az  $a$  áramlásnak a szögsíkja, akkor az  $a$  hőáramlás a fölületelem hidegebb oldala felől a melegebb felé irányul, jóllehet pozitív hőnek az áramlása. Ez a megállapítás látszik ellenkezni a CLAUSIUS-féle axiómával. Azonban eloszlik az ellentmondás, ha figyelembe vesszük, hogy az áramlás ferdén hatol át a fölületelemen, de a fölületelemen körösztüül ferdén (nem merőlegesen) húzott végtelen rövid egyenesdarabnak az a vége lehet a melegebb, a mely a fölületelem hidegebb oldalára tartozik, ugyanis a miatt, hogy nemcsak merőlegesen a fölületelemre, de ahhoz tangenciálisan sem egyenletes a hőmérséklet a fölületelem környezetében.

8. §. Végezetül a hőmérséklet egyenletességét illetőleg arra utalok, hogy a stabilis egyensúly irodalmában olyankor, a mikor nincs előre kikötve, hogy egyenletes legyen a hőmérséklet, az (1)-nél általánosabb alaptételen megfordítható folyamatokra nézve minden egyes specziális alkalmazásban külön következik, mint egy belső föltétel, a hőmérséklet egyenletessége. Ámde általános is kimutatható az, hogy mihelyt az állapotváltozás és a hőközlés megfordítható, már végtelen nagy pontosság szerint belső föltétel a hőmérséklet egyenletessége.

Jelölje  $d'Dq_k$  azt a hőt, a mely  $dt$  időelemben az anyagi rendszeren kívül létező anyagi rendszerekből jut be az anyagi rendszernek egy  $T$  hőmérsékletű  $Dm$  elemi részébe és jelölje  $d'Dq_b$  azt a hőt, a mely a  $dt$  időelemben az anyagi rendszerből magából jut be a  $Dm$  elemi részébe. A második föltétel szerint

$$d\eta - \int \frac{d'Dq_k}{T} - \int \frac{d'Dq_b}{T} > 0, \quad (25)$$

(a hol az integrálások az anyagi rendszer egész állományára terjesztendők ki), mert, ha  $D\eta$  jelöli egy elemi rész entrópiáját, akkor

$$TdD\eta > d'Dq_k + d'Dq_b$$

és azt mindig föltesszük, hogy

$$\int D\eta = \eta.$$

Az állapotváltozást és a  $d'Dq_k$  hőket megfordíthatóknak téve fel, a mi általában csak elsőrendű pontossággal lehetséges, aztán így írva a megfordításukhoz tartozó egyenlőtlenséget:

$$-d\eta + \int \frac{d'Dq_k}{T} - \int \frac{d'Dq_b}{T} > d'\omega, \quad (26)$$

a jobboldal magasb rendű végtelen kicsiny, mint egyik-másik baloldali tag, mert az első baloldali tag pontos megfordítása (25) első tagjának és a második baloldali tag elsőrendűleg pontos megfordítása (25) második tagjának, a harmadik baloldali tag pedig elsőrendű pontossággal most is az, a mi előbb volt.

A (25) és (26) összehasonlításából

$$\int \frac{d'Dq_b}{T} > \frac{1}{2} d'\omega. \quad (27)$$

Azonban a CLAUSIUS-féle axiómából folyólag

$$\int \frac{d'Dq_b}{T} = 0 \quad (28)$$

mindig<sup>1</sup> és itt az egyenlőségi jel csak akkor érvényes, ha  $T$  egyenletes. Minthogy (27)-ben a jobboldal elsőrendű pontosság szerint  $= 0$ , ennél fogva (27) és (28) csak úgy fér össze, ha (28) baloldala elsőrendű pontosság szerint eltűnik, a miből elsőrendű pontosság szerint  $T$  egyenletessége következik.

Az itt vázolt elméletben mindig a külső föltételek sorába tartozik, hogy az anyagi rendszer vagy az ő egész fölületén egyenletes hőmérsékletű hőforrással közlekedjék, vagy egy részén ilyenel közlekedjék, a többi részén thermikus izolátorral érintkezzék. Adiabaticus folyamatok kirekesztvék az itteni tárgyalásból, mert adiabaticus folyamatban állandó kinetikus energia esetén az első fötételből  $d\varepsilon - d'\mu = 0$  tehát  $d'\psi/T$  totális differenciál, tehát egy adiabaticus folyamat mindig megszabható oly lassúnak, hogy abban ez a hányados totális differenciálnak számíthasson.

<sup>1</sup> POINCARÉ, Thermodynamique, 1908 (deux. éd., 235., 236. l.)



## MICHELSON NEGATIV KISÉRLETÉNEK MAGYARÁZATAI.

FARKAS GYULA r. tagtól.

Az Akadémia III. osztályának 1913. évi október 20.-án és 1914. évi október 19.-én tartott fölolvasó ülésén MICHELSON negatív kísérletének új elméleteivel találkoztunk. Ezek egyikének ZEMPLÉN Győző fizikus tagtársunk,<sup>1</sup> másikának SUTÁK József matematikus<sup>2</sup> a szerzője. Minthogy a fizika tanainak manapi föllandulását keletkezése óta hozzá vonzó érdeklődéssel kísérem, a minnek e helyen is jeleit adtam, kötelességemnek tartom, hogy ugyanitt hozzászóljak a két hazai elmélethez is.

ZEMPLÉN Gy. új hypothesisit állít föl a LORENTZ-féle contractiós hypothesis ellenében. Röviden úgy jellemezhetem, hogy a fénysebesség dilatatiójának a hypothesis az. Ezt a hypothesisit most majd az elektromágneses tér LORENTZ-féle ( $\equiv$  MIN-KOWSKI-féle) meghatározásából és transformatiójából fogom levezetni s ez a főczélom. SUTÁK-nak s egyben két hírneves fizikusnak az elméletéről kimutatom, hogy nem eléggé egyeznek a tapasztalással.

*I. Zemplén hypothesisének alapvetése.* Ezelőtt két évvel egyetemi előadásaim során a következő tételt is megállapítottam: Ha relativ mozgásban lévő terekre kirójjuk azt, hogy bennük valamely sebesség nagysága valamely időszámítás szerint egyenlő s helytől, iránytól független legyen, akkor már a

---

<sup>1</sup> ZEMPLÉN Gy.: Matematikai és Természettudományi Értesítő. XXXII. k. 225. l. (1914).

<sup>2</sup> SUTÁK J.: Matematikai és Természettudományi Értesítő. XXXIII. k. 104. l. (1915).

konform leképezés tanán a végesség postulatuma a téridőrendszerek LORENTZ-féle transformatiójához vezet. E tétel deductiója részletesen benne van ama könyvatos füzetek egyikében, a melyeket utolsó előadásaimról kéziratom után adtak ki hallgatóim.<sup>1</sup> Azonban ugyanezt a tételt tavaly LEVI-CIVITA-tól indítatva CLARICE MUNARI k. a. is kimondta és kifejtette az Accademia dei Lincei-ben,<sup>2</sup> tehát ő reá is utalhatok. Az EINSTEIN-féle alapelméletben ilyen sebesség a fénysebesség üres térben. De ZEMPLÉN-nél is van ilyen sebesség, ugyanis hypothesisének értelmében ilyen a minimális fénysebesség a szabad ætherben. Ez a körülmény arra birt, hogy összefüggést keressek ZEMPLÉN hypothesisé meg az elektromágneses tér LORENTZ-féle meghatározása és transformatiója között. Találtam is, még pedig szoros összefüggést, a mely abból áll, hogy a fázis GALILEI-transformatióján LORENTZ régebbi időszámítása szerint az elektromágneses tér LORENTZ-féle meghatározásának és transformatiójának egyenes következménye a ZEMPLÉN-féle hypothesis.

Mozgást, nyugvást mindig az (EINSTEIN-éktől tagadott) ætherhez viszonyítva, LORENTZ alapegyenleteiből folyólag a Földdel együtt mozgó fényforrás lehet olyan, hogy a belőle származó fényvektor a Földhöz viszonyítva a szabad ætherben  $\equiv$

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}'; \mathcal{H}') &= (\mathcal{E}'_0; \mathcal{H}'_0) \sin \varphi', \\ \varphi' &\equiv \frac{2\pi}{T'} \left( t' - \frac{a'r'}{c} \right) \quad (a'\mathcal{E}'_0 \equiv 0, \mathcal{H}'_0 = a'\mathcal{E}'_0) \end{aligned} \quad (1)$$

a hol  $\mathcal{E}'_0, \mathcal{H}'_0$  konstans elektromos, illetőleg mágneses térerősség s egyszersmind elektromos és mágneses gerjesztés, minélfogva a complexumuk «hatos» vektor;  $(r', t')$  hely- és időhatározó négyes vektor;  $T'$  a hullámzás konstans időperiódusa,  $c$  a fénysebesség konstans nagysága,  $a'$  a hullámirány (a hullámsík normálisának iránya) és egyben a sugárirány is (ez irányok egységvektora);  $a'r'$  «belső» szorzat,  $[a'\mathcal{E}'_0]$  «külső» szorzat. Mindezt a

<sup>1</sup> Az energia terjedése. Előadási füzet az 1912—1913. tanév 2. feléből (74. l.).

<sup>2</sup> C. MUNARI: Rendiconti del Reale Accademia dei Lincei XXIII k. 781. l. (1914).

Földhöz rótt tér- és időhatározó rendszerben kell gondolnunk. A LORENTZ-féle transzformáció értelmében ugyanilyen fényvektorunk van az olyan téridő rendszerben, a mely (az ætherre nézve) nyugalomban van:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}; \mathfrak{H}) &= (\mathfrak{E}_0; \mathfrak{H}_0) \sin \varphi, \\ \varphi &\equiv \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{ar}{c} \right), \quad (a\mathfrak{E}_0) \equiv 0, \quad \mathfrak{H}_0 \equiv [a\mathfrak{E}_0]. \end{aligned} \quad (2)$$

Az összefüggést  $(\mathfrak{E}', \mathfrak{H}')$  és  $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$  között a hatos vektorok transzformálása,  $T'$ ,  $a'$  meg  $T$ ,  $a$  között a

$$\varphi' \equiv \varphi \quad (3)$$

azonosság a négyes vektorok  $(r', t')$ ,  $(r, t)$  transzformálásán szolgáltatja.

A sugárzás nevű vektor a két rendszerben:

$$c [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] = c\mathfrak{E}'^2a, \quad c [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = c\mathfrak{E}^2a. \quad (4)$$

Ezért egyeznek itt a sugárirányok a hullámirányokkal.

Mi azonban most a  $\varphi$  fázist az  $(r, t)$  téridőrendszer helyett oly  $(r^*, t^*)$  téridőrendszerben kívánjuk tekinteni, a mely a mozgó  $(r', t')$ -ből nem a «LORENTZ-féle» transzformációval ered, hanem a térnek GALILEI-transzformációja s az időnek régibb LORENTZ-transzformációja által származik és  $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$  beisejét azzal a szándékkal másítjuk meg így, hogy most már az új téridőrendszert tartjuk nyugalomban levőnek, illetőleg: LORENTZ régibb időszámítása szerint a GALILEI-tért tekintsük az ætherhez rögzített térnek. Ehhez képest azt írjuk a fázisban, hogy

$$r' = r^* - t^*w, \quad t' = t^* - \frac{wr^*}{c}, \quad (5)$$

a hol  $w$  jelenti a Föld sebességét.

A «specziális»<sup>1</sup> LORENTZ-féle transzformációval

<sup>1</sup> H. MINKOWSKI: Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. A különlenyomatban 10. l. (1908).

$$r = r' + \left( \frac{k}{k+1} \frac{wr'}{c^2} + t' \right) kw, \quad t = k \left( t' + \frac{wr'}{c^2} \right) \quad (6)$$

$$k \equiv \frac{c}{\sqrt{c^2 - w^2}}.$$

Beírva ezekbe az (5) alattiakat, azt találjuk, hogy

$$r = r^* - \frac{k}{k+1} \frac{(wr^*)w}{c^2}, \quad t = \frac{t^*}{k}. \quad (7)$$

(Másodrendű kicsiny a különbség az új és a régi nyugvó rendszer között.) Már most iktassuk be ezeket (2)-be. Kapjuk:

$$(\mathfrak{E}; \mathfrak{H}) = (\mathfrak{E}_0; \mathfrak{H}_0) \sin \varphi^*,$$

$$\varphi^* \equiv \frac{2\pi}{T^*} \left( t^* - \frac{a^* r^*}{c^*} \right), \quad (a\mathfrak{E}_0) \equiv 0, \quad \mathfrak{H}_0 \equiv [a\mathfrak{E}_0], \quad (8)$$

a hol is:

$$\frac{a^*}{c^*} = \frac{k}{c} \left\{ a - \frac{k}{k+1} \frac{(wa)w}{c^2} \right\}, \quad T^* = kT. \quad (9)$$

(Másodrendű kicsiny a különbség  $T^*$ ,  $c^*$ ,  $a^*$  és  $T$ ,  $c$ ,  $a$  között).

Itt  $a^*$  a hullámirány és  $c^*$  a hullámsebesség nagysága, szóval  $c^* a^*$  a hullámsebesség (a hullámsík előrehaladásának sebessége). A sugár-irány azonban most is  $a$  (és nem  $a^*$  az), mert a sugárzás vektora most is  $c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = c\mathfrak{E}^2 a$ . Ebből folyólag a sugársebesség nagysága pedig az  $(r^*, t^*)$  rendszerben  $\equiv$

$$s^* = \frac{c^*}{a^* a}. \quad (10)$$

A (9) alól négyzeteléssel kiadódik  $c^*$ , aztán már ugyanonnan egyenesen kiadódik  $a^*$ , tehát egyúttal  $s^*$  is. Még pedig

$$\frac{1}{c^*} = \frac{k}{c} \sqrt{1 - \left( \frac{wa}{c} \right)^2}, \quad a^* = \frac{a - \frac{k}{k+1} \frac{(wa)w}{c^2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{wa}{c} \right)^2}}, \quad (11)$$

tehát (10) alól:

$$s^* = \frac{c}{k} \left\{ 1 - \frac{k}{k+1} \left( \frac{wa}{c} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (12)$$

Másodrendű pontosság szerint ZEMPLÉN hypothesisével egyező kifejezés ez, mert az első factort az irány nem módosítja s a második factorban  $k$  másodrendű pontossággal az egységgel helyettesíthető. Én természetesen (12)-t tartom az igazi  $s^*$ -nek.

Minthogy a sugárirány az  $(r, t)$  és  $(r^*, t^*)$  rendszerben ugyanaz, ennél fogva az aberratio szintén ugyanaz bennök; a színmásulás pedig a  $T^* = kT$  egyenletből folyólag elsőrendű pontossággal ugyanaz.

Az előadottakban kifejtett alapvetés abba általánosítható, hogy elektromágneses tér akármiféle forrásai mozogjanak együtt a Földdel: a Földön észlelt jelenségek az ætherhez viszonyítva olyanok, a minőket a mindenféle állapotjelző vektorok és skalárisok LORENTZ-féle transformatiója azzal a módosítással határoz meg, hogy a függvények belsejét a transformálás után  $r$  és  $t$  helyett  $r^*$ -re és  $t^*$ -re kell vonatkoztatni. Az argumentumoknak ezt az átírását röviden a transformált állapotjelzők beigazításának nevezhetjük. Lényegesen beletartozik ebbe a teoriába az æther, mert csak így érthető, hogy nem a «GALILEI-LORENTZ» transformatio (5) szerint való állapotjelzők tartoznak a «GALILEI-LORENTZ»-féle téridőrendszerbe, hanem a «LORENTZ-transformatio» szerint valók (pl. a GALILEI-LORENTZ-féle téridőrendszerben az elektromos áramlás és elektromos sűrűség az, a mi a LORENTZ-féleben, már pedig a GALILEI-LORENTZ-transformatio szerint számítva, a sebességek transformatióján és az elektromos quantumok megmaradásán, olyanul adódnék, a melyenül  $r^*$  és  $t^*$  adódik  $r$  és  $t$ -ből).

A földi időszámítástól eltérő időszámítás az új elméletnek is föltétele, ámde kimarad belőle a LORENTZ-féle contractio, a melynek a helyét a ZEMPLÉN-féle dilatatio foglalja el. Úgy mondhatom ezt, hogy nincs LORENTZ-féle contractio, de van ZEMPLÉN-féle dilatatio. Hanem olyanokul is foghatók föl a jelenségek, mintha nem volna ZEMPLÉN-féle dilatatio, de volna LORENTZ-féle contractio.

*II. Védelem.* Az itt követett eljárások mentségére, illetőleg a bennük foglalt elvek védelmére: elhárítani óhajtom most azt a vádat, a melyet SUTÁK JÓZSEF elmélete támaszt a régi elmélet ellen, hogy ugyanis a régi elmélet ellenmondást tartalmaz, mert

az æthert és földünket implicite majd relativ mozgásban, majd relativ nyugvásban lévőknek tekinti.

A «régí» elméleten nyilvánvalólag a LORENTZ-féle értendő, minélfogva hús évnyi időre kell visszapillantanom, a melyben H. A. LORENTZ úttörő műve<sup>1</sup> megjelent, a mikor még minden fizikus hitt valamilyen világæthernek a létezésében. Ez a mű LORENTZ ama meggyőződéséből fakadt, hogy a fényjelenségeknek és egyáltalán az elektromágneses jelenségeknek az értésében «man mit der Auffassung FRESNEL's, also mit der Annahme eines unbeweglichen Aethers auf dem richtigen Wege ist». Ezen a föltevésen épül föl az egész mű, a melynek az eredményeiből közvetlenül ide tartozik a következő két tétel: «Überhaupt wird nach unserer Theorie die Bewegung der Erde nie einen Einfluss erster Ordnung auf Versuche mit irdischen Lichtquellen haben» (§ 64), és: «Ertheilt man einer Lichtquelle eine Translation, ohne etwas an den Schwingungen ihrer Ionen zu ändern, so bleiben die wahrnehmbaren Erscheinungen in fest mit derselben verbundenen Körpern so, wie sie waren» (§ 66). Ehhez nyomban hozzát teszi LORENTZ, hogy «Zahlreiche Versuche haben bewiesen, dass bei Benutzung irdischer Lichtquellen die Erscheinungen in der That unabhängig von der Orientirung der Apparate in Bezug auf die Bewegungsrichtung der Erde sind» (§ 67), és néhány kísérletre névszerint is hivatkozik. E kísérletek száma azóta nyomósan gyarapodott.

Korszerűen elsőrendű pontosságot kell még csak ezekben értenünk; de, ha föl is tesszük, hogy csak elsőrendű pontossággal érvényesek ezek s a sugarak irányára mégis egész pontossággal alkalmazzuk, az elemzés végső eredményében MICHELSON interferometerén mégis csak másodnál magasb rendű kicsit hibázunk, a mi meg van engedve, már pedig ilykép épen a kifogásolt skémát kell használnunk, a mely tehát teljességgel a «nyugvó æther» föltevésén alapszik, minélfogva MICHELSON negatív kísérletének «régí» elmélete belső ellenmondást nem tar-

---

<sup>1</sup> H. A. LORENTZ: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, 91. és 95. l. (Leiden, E. J. BRILL, 1895).

talmaz. De az idézett kísérletek szerint külső ellenmondást sem tartalmaz, hanem ilyent már csak maga a MICHELSON-féle kísérlet árul el, minek az eltüntetésére FITZ GERALD és LORENTZ a mozgó matéria contractiójának hypothesiséhez folyamodott.

Ebből SUTÁK elméletére és két hírneves külföldi fizikusnak az elméletére is az következik, hogy a természet oly képében igazak ezek az elméletek, a mely magától a természettől nem elég kis mértékben különbözik. A két fizikus DRUDE és WIEN,<sup>1</sup> de ők már előbb más hibát is követnek el, egyikök a ferde helyzetben gondolt tükörrel, másikuk a fényforrás ferde irányban gondolt sugarával s egyik hiba följavítja a másikat. Ha az ő képzeletük szerint igazodnék a természeti rend, akkor gondosan kutató elődök rég láthatóvá tudták volna tenni már pusztá földi fényen a Föld mozgását.

---

<sup>1</sup> WINKELMANN: Handbuch der Physik. Zweite Auflage. VI. k. Optik 1379. l. (1906).

W. WIEN: Über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. Zweite Auflage. 29. l. (TEUBNER 1909.)

# BORNEO EGY ÚJ SCHIZAEAE-JA ÉS A VELE ROKON FAJOK PHYSIOLOGIAI ANATOMIÁJA.

(III.—VII. táblával).

RICHTER ALADÁR I. tagtól.

I. Bevezetés: A <i>Pectinatae</i> -beli Schizaeák földrajzi elterjedésének sajátosságai	362—369
II. A <i>Schizaea fistulosa</i> törzsalakjának helyzete a <i>Pectinatae</i> -csoportban. — Stele és az alap-parenchyma	370—374
III. A « <i>fistulosa</i> »-beli alak-kör élet- és rendszertani alkatana. — <i>Schizaea Hallieri</i> n. sp. v. ssp.	375—392
IV. A termő lemezekről és a spórákról	393—395
V. Összefoglalás: A <i>Pectinatae</i> -beli Schizaeák xerophiliája az élettani alkatán szempontjából, vonatkozással a fajformálódás fokozataira. — Ugyane csoport származástana mai biológiai és őslénytani tudásunk szerint	395—398
VI. A) A vonatkozó irodalom összefoglalása	399—401
VI. B) A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példák tüzetes sorozata	401—403
VII. Ábra-magyarázat	404—406

## I.

### Bevezetés: A *Pectinatae*-beli Schizaeák földrajzi elterjedésének sajátosságai.

Az általános növénytan biológiai tételeinek a megállapításánál, legyenek azok szorosabb értelemben élettani (physiologiai), avagy alkatani (anatomiai) vonatkozásúak, avagy együttes kapcsolatukban a physiologiai növényföldrajz körébe vágók: a természetbúvár megkülönböztetett figyelmét a földkerekség növényzetének ama tagjai keltik fel elsősorban, amelyek elterjedése sokszor szárazulatokat (continens) köt össze, s a megélhetési körülmények változatosságánál fogva csodálatot keltő viszonyok-



kal, sőt oly «ugrásokkal» tűnnek ki, amelyek végül is csupán feltevések (hypothesisek) segítségével magyarázhatók.

Alig van növényesalád, amely e tekintetben versenyt állhatna a Pteridophyta-beli *Schizaea*-nemzetséggel; ismeretét a jelzett szempontok szerint bővitendő, egyik-másik, a vizsgálatra általában nehezen hozzáférhető tagjáról ismételtén szóltam volt a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* lapjain (1, 2).<sup>1</sup>

Miután a magyar közművelődés ama nagy, túlzás nélkül mondván: szinte világszerte kiható érdeke, hogy a «Magyar birodalmibotanikus kertet és botanikus muzeumot» nagyratörő és állami támogatás nélkül részletesen kidolgozott tervemet alapján intézményileg tető alá hozhassam Kolozsivárt, ez időszertint meghiusult, abban az országban, hol a «botanikus kert» az emberi közművelődés évszázai folyamán sem érhetett meg «traditiót» soha! — további bűvárokódásaim nélkülözhetetlen eszközeit, a magyar föld helyett, a hollandusok nagy előzékenysége biztosította számomra. Hálásan emlékezem meg dr. JANSE J. M. botanices professor barátságáról, aki palotaszerű intézetében Leidenben;<sup>2</sup> nemkülönben dr. GOETHART J. W. C. igazgató nem kevésbé nagy előzékenységéről, aki viszont a 's Rijks-Herbarium új és nagy arányú épületében ugyanott bocsájtott volt rendelkezésemre megfelelőleg felszerelt laboratoriumi asztalt és ahol JONGMANS W. J., dr. HALLIER H. 'rijks herb.-i conservatorok, valamint dr. VALETON TH. s GODDIJN W. A. barátságát is hónapokon át élvezhettem. Halogatás nélkül éltem az alkalommal, hogy a különben is világhírű 's Rijks

<sup>1</sup> A vonatkozó irodalom összefoglalását adja a VI. A) fejezet a 399. lapon. A kövérebben szedett sorszámok megfelelnek a szöveg zárjelben foglalt számainak, az utánuk következő jelzi a lap (pagina) számát.

<sup>2</sup> Itt készült kísérleti physiologiai-anatomiai tárgyú munkálatomat a M. tud. Akademia III. oszt. 1915. jan. 18.-i ülésén mutattam be. Lásd az erről szóló kivonatos jelentést a *Math. és Természettud. Értesítő* XXXIII. (1915) kötete 2. füzetében, ahol is (nem a szerző kézírata s javítása alapján történt) «alaktan» helyett «alkattan» olvasandó. Lásd 364. l.-on alul az <sup>1</sup> jegyzetet.

Herbarium *Schizaea*-anyagának különösebben ama *Pectinatae*-beli tagjairól szóljak, amelyek régi barátom, a nagy SCHLEIDEN unokája: dr. HALLIER HANS Borneo szigetén végzett 8<sup>1</sup>/<sub>2</sub> hónapos botanikai expedíciójából (3) kikerült és CHRIST-től tévesen magyarázott *Schizaeája* révén (4) Leidenben ugyancsak felkölt-hették érdeklődésemet a *Schizaeák* eme legegyszerűbb alakjai iránt; leveleiken «nyél» és «lemez» alaktanilag (morphologiai-lag<sup>1</sup>) meg sem különböztethető.

Belőlük hasad ki a *Digitatae*-csoport; másfelől — PRANTL találó megjegyzése (5. 129), — a *Pectinatae*-beli «Sch. fistu-

<sup>1</sup> «Anatomia» magyar kifejezése gyanánt «alkat-tant» (a növény alkotása, alkata=structura plantarum), «morphologia» helyett «alak-tant» irok, mit újból kell hangoztatnom.

Ezek tudvalevőleg különböző tanszakok (disciplina), amelyeknek nélkül-ülöm-rólam való feleserélését természetesen nem vállalhatom; ép úgy, miként csonkítatlanul használt egyéb mesterszói-megváltoztatását sem. «Mikroszkop» helyett, miként LINNÉ kitünő tanítványa, BECKMANN, a maga (s hozzá még németül megírott) Uti naplójában (JOH. BECKMANN: Schwedische Reise in den Jahren 1765—1766. — Upsala, 1911. p. 148), mikroszkopium-mal élek, templ(um) helyett templom-ba járok. Valaminthogy a magyar iskolás gyerek mindig «bogarászni» megy és a «rovar» néhány tudósunk befolyására s a tankönyv-engedélyezés erejével csakis a hivatalos hatalom erőlteti. Buzát stb termel a magyar és állat-tenyésztés-sel foglalkozik, mindamellett, hogy (ugyancsak hivatalosan: quia absurdum) van «növény- (sőt fa)-tenyésztési» (!) tanszékünk, ministeriumban e célra ügyosztályunk, «rovar-tani állomásunk» stb.

E helyen hangoztatnám annak a nélkülözhetetlenségét is, hogy a M. tud. Akadémia, éppen a magyar nyelv fejlődése érdekében, a mesterszók írás- és használatmódjában az írók és szakemberek kezét ne kösse meg. Ám «üdvözüljön ki-ki a maga hite szerint».

A vitát nyelvészeink, kik természettudományt amugy sem művelnek, eldönteni nem fogják, mert mesterszói-metymológiáját alaposabban mi értjük, nem ők. A mindenható kiválogatódás (selectio) elve majd érvényesül e téren is. Az utánunk jövő nemzedéké a végső döntés joga és mi néhányan-kevesen nyugodtak vagyunk affelől, hogy a magyar iskolás gyerek, aki selyem-bogarat is tenyészt, száz év múlva sem fog «rovarászni» járni, jóllehet hivatalosan (tankönyv-engedélyezési kényszerrel) «oktatólag» arra szorítják. — Bécs, 1915, VII. 2. R. A.

*Szerkesztő megjegyzése:* A M. T. Akadémia 1901. évi február 25.-én tartott ülésén elfogadta «A magyar helyesírás szabályai»-t és ezeket 1902-ben kiadta; ezek az Akadémia kiadványaira nézve kötelezők.

losa» észrevétlenül nyújt kapcsolatot a levelében már megosztott *Bifidae*-csoportozáshoz.

Physiologiai-anatómiai részben rendszertani vizsgálataimat, HALLIER föltöbb érdekes borneói Schizaeá-ja miatt, főleg a «*Sch. fistulosa*» alak-csoportja (*Sch. malaccana* BAK., *Sch. robusta* BAK., *Sch. fistulosa* LABILL. s. str., *Sch. chilensis* PHIL., *Sch. australis* GAUD.) köré csoportosítom;<sup>1</sup> — állandó figyelemmel e «fajok» rendszertani vonatkozásai iránt, mert meg kell jegyezni, hogy HALLIER borneói Schizaeá-jának tüzetes megismerését — CHRIST *Sch. fistulosa* LABILL. típusul határozta volt meg (in sched. Herb. Lugd.-Batav. et in 4. 140) — csupán a RADLKOFER kezdeményezte a n a t o m i a i - s y s t e m a t i k a i vizsgálati m ó d s z e r (6) alkalmazása tette lehetővé.

HALLIER éveket töltött el Jáván (Buitenzorg) és ma a polynésiai flora legjobb ismerője és bűvára. A vele folytatott eszmecsere révén megállapíthattam, hogy a tropusi vegetatio kutatása nyomán szerzett gazdag tapasztalatai általában fedik mindazokat a tétéleket, amelyeket összehasonlító physiologiai-anatómiai vizsgálataimból a Schizaeák xerophiliájára vonatkozólag levontam (1. 1105—6).

CHRIST azt írja, hogy a Schizaeák a tengeri part-mellék lakói: különlegesen oceáni növények (7. 156), — két *Schizaea* kivételével (melyek? nem jelzi), amelyek az Oczeán felől messze behatolnak a belföldre (Nilgherries, Himalaya lábánál). Ez utóbbiakhoz csatlakozik HALLIER Schizaeája; B. 2149. sz. a kiadott példányait Buitenzorg ('s Land's Plantentuin), Leiden ('s Rijks Herbarium) és BONAPARTE ROLAND herceg (Paris) herbariumában őrzik. 1894 évi januárius-hó 21.-én gyűjtötte Borneo belsejében, az Oczeán hatásától teljesen mentes vidéken az egyenlítő alatt; feljegyzései szerint a Sungei (= folyó) Kenepai (Kapúas vagy Kapúas jobbparti mellékfolyója) egyik oldalága: S. Ségédóuw mellékén; száraz, terméketlen talajon, alacsony és világos Myrtacea-erdőben a *Burmannia disticha*-val együtt gyakori.

<sup>1</sup> A *Sch. pusilla*, *Sch. pectinata* és *Sch. rupestris* kikapcsolásával; csupán általánosságban utalok ezekre, mint amelyek részletezése viszont 2-ben olvasható.

Növényföldrajzi tekintetben mindenesetre tekintélyes távolság választja el Közép-Borneo e jellemző *Schizaeá*ját a törzsalakot tevő *Sch. fistulosa* LABILL.-tól.<sup>1</sup>

Ez a *Schizaea* még a Schizaeák sajátos elterjedésbeli viszonyai közepette is feltűnő a maga «circumpolaris» szerepével (7. 156), mert ausztráliai eredeti s a mérsékelt klíma zónájába eső otthonából Polynesián át átsap Borneóba, sőt Malakán át állítólagosan Madagascarba is; másfelől Új-Kaledonia, Viti és Sandwich szigeteken át Chili déli részébe (Valdivia: Corral), illetőleg a hemisphaera subantarctis vidékeire: Auckland és Falkland szigeteire. Szédítően nagy perspektívák ezek «egyetlen fajbeli törzs» elterjedési vonalán, amelynek «area geographica»-ja magába foglalja Ausztráliát (9. 429 és 10. 345), szorosabban a Tasmaniával szomszédos Victoriát (11. 693; mely adat CHRISTENSEN Indexéből feltűnően kimaradt: 12. 616),<sup>2</sup> New-Zealandot (13. 1021); Új-Kaledoniát, Madagascart (14. 139—144),<sup>3</sup> sőt Chilit (15. 207). Mindezeknek mintegy kisértékül Új-Kaledoniát kell elismernünk (7. 156).

Innen ágazik el, a fajok szűkebb keretébe vont *Sch. malac-*

<sup>1</sup> Ez a kifejezetten «ausztráliai elem» (7. 219) LABILLARDIÈRE naif, ámde kora viszonyaihoz mérten (amikor sporangiumot és spórát még nem ismertek) igen jó leírása s természetbeli ábrázolata (8. Tab. 250. fig. 3) révén eredetileg Van Diemen földjéről lett ismeretessé. LABILLARDIÈRE id. képén adja 1. Seta baseos stipitis, 2. Eiusdem sectio ábrázolatát, a növény diagnózisára «stipitis baseos setis fistulosis» kiegészítése gyanánt. A név természetesen rossz, mindamellett a LABILL.-féle elnevezést a rendszertanban elfogadott elsőbbségi jog (ius prioritatis) alapján használnunk kell.

<sup>2</sup> CHRISTENSEN a *Sch. fistulosát* illető adatait, egyébként PRANTL (5. 136) nyomán haladva, nyilván CHRIST munkája révén (4. 140) csupán Borneóval gyarapította. Ez a borneói *Schizaea* azonban HALLIER új *Schizaeája* = *Sch. Hallieri* ssp. nov.

E tekintetben, az ausztráliai előfordulás elhagyása miatt, az az elterjedési körzet is hibás, amit Princee ROLAND BONAPARTE nyújt a *Sch. fistulosaról*. (Filicales de la Nouvelle-Calédonie et des Iles Loyalty, in SABASIN-ROUX Nova Caledonia. Forschungen in Neu-Caledonien und auf den Loyalty-Inseln. B. Botanik, Vol. I. (1914) p. 49.

<sup>3</sup> BAKER id. h. nem említi és a HUMBLLOT-féle madascari páfrányok során csupán a *Sch. dichotomát* olvashatjuk a Schizaeák közül. A *Sch. fistulosának* madagascari előfordulása, BARKLY lady PRANTLTól is idézett adata (5. 136; 11. 616) nyomán, nem lehetetlen, egyelőre azonban kétséges.

*cana* BAKER képében, a Philippinákra s a malayi szigeteken át<sup>1</sup> Malakára (9. 428; 11. 616); a fentivel s az alábbiakkal leg-alább is egyazon «fajbéli» fokozaton a *Sch. Hallieri* m. változatában Borneo belsejében az egyenlítő alatt talál otthonra; *Sch. robusta* BAKER fajváltozatában viszont a Society<sup>2</sup> és a Sandwich szigeteken otthonos (9. 429; 12. 617; 16. 543).

A Subantarctis egyetlen Schizaeája viszont a *Sch. australis* GAUD. (18. 89, 98; — syn. *Sch. palmata* HOMB. and Jacq. Voy. au Pôle Sud, Crypt. t. 4. f. 2), amely a tropikus és a subtropikus klíma ellentétével küzd meg Falkland (18. l. c.) és Auckland szigetvilágán (7. 156; 9. 428; 5. 136).

HILLEBRAND a Society és Sandwich-szigetek *Sch. robusta*-ját a *Sch. australis* «tropusi formájának» tartja (16. 543); felfogása ebben a formában téves, mert alig tehető fel, hogy a legmostohább viszonyok között élő *Sch. australis*-béli «törzs-alak»-ból eredt volna a jóval elterjedtebb *Sch. fistulosa*, *robusta* stb. és oly termőhelyeken, ahol is a klíma stb. hasonlíthatatlanul kedvezőbb. A *Sch. australis*, a *Sch. malarcana*-val, *Sch. Hallieri*-val és a *Sch. robusta*-val együtt inkább a «*Sch. fistulosa*» leszármazottja és én CHEESMAN nézetét helyeslem, aki a *Sch. australis*-t igen helyesen a *Sch. fistulosa* s. str. fajváltozataként fogja fel, hangoztatván, hogy az csupán a típus eltörpült (depauperated) alakja, amely átmeneti formákkal fűződik a tőalakhoz (13. 1022; 5. 136; 12. 616). Valóban a «chilei *Sch. fistulosa*» (= *Sch. chilensis* = *Sch. valdiviana* Phil. l. c.) Falkland szigetén ép úgy, miként a tasmaniai *Sch. fistulosa* LABILL. Auckland szigetén «*Sch. australis*»-szá törpül; CHEESEMAN közli, hogy a *Sch. australis* a Moehan district (Cape Colville) hegységeinek hideg és töze ges talajáról száll le a Stewart s Auckland szigeteinek tengerszintbeli tájaira. Mily meglepő analogia ez viszont az északi hemisphaera

<sup>1</sup> Borneóban valószínűleg csak az északi ú. n. Serawak (Sarawak) részében (5. 36; BURBIDGE sec. BAKER).

<sup>2</sup> Feltűnő, hogy DRAKE DEL CASTILLO a francia Polynésiaról megírt összefoglaló művében a Society szigetekről (Tahiti: collines sèches) az egyetlen (és a tropusokon át a legközönségesebb) *Sch. dichotoma* SM.-n (incl. *Sch. Forsteri*) kívül más Schizaeát nem említ (17. 322).

egyetlen *Sch. pusilla*-jával! (2. 811—13, 835). A *Sch. fistulosa* s. str. egyébként a maga szorosabb otthonában is bizonyítja az alkalmazkodás feltűnő példáját: DIELS Tasmania alpesi vegetációjában *Sphagnum*-ok közepette való előfordulását jelzi (19. 30).

A mult évszáz derekán a természetbúvár alig gondolhatott a fajok elterjedésében ily óriási területeket átfogó vonatkozásokra és PHILIPPI, a természethistoria egyetemi tanáraként Chileben, miként egykoron a *Sch. australis* auctora: GAUDICHAUD (18. 89, 98), — csupán kora felfogásának hódolt, amikor a természethistoriailag valóban terra ignota-n mindenben újat, a Valdivia-melléki s KRAUSE gyűjtötte Schizaeában meg éppen új fajt látott (*Sch. chilensis* PHIL. 15. l. c.); holott PHILIPPI *Sch. chilensis*-e, még az ú. n. kisebb fajokat honoráló angol pteridographusok egyező felfogása szerint is, a *Sch. fistulosa*-nál nem egyéb (9. 429; 5. 135; 12. 616). Alkattani fejtegetéseim alább igazolandják e felfogás helyességét.

Mindezek kétségén kívül a növényföldrajzi tagosulás nevezetes adatai, egyrészt WARBURG a Papua-föld flóráját illető és figyelmet érdemlő fejtegetéseire (20. 230—55); főleg azonban HALLIER szellemes és nagy növényismeretet feltételező (érdeme szerint kellőleg nem méltányolt) okfejtéseire (21). HALLIER felteszi, hogy Indonesia, Australia és Polynesia egykor hatalmas ausztralázsiai félszigetet alkottanak, melynek kelet-északi partvidéke a Sandwich- és Paumotu-szigetek világa. Az időszakos katasztrófák folytán — HALLIER hypothesis-e ez — keletről nyugat felé tengerbe sülyedt ez a félsziget, olyformán, hogy a fenmaradt Tasmania—New-Zealand—N. Caledonia—Luisadák—Uj-Guinea—Molukkok—Celebes—Philippinák—Formosán át lehetséges volt a növényzet kicserélődése China és Polynesia között. A geológiai korszakok még korábbi periodusában ezt az ausztralázsiai félszigetet szárazulati áthidalás (Landbrücke) kötötte volna össze Amerikával, melynek északi pereme Japán déli részén, továbbá Sandwich—Revilla—Gigedo-szigeteken át Dél-Kaliforniát; déli pereme pedig a Society, Paumotu-szigetektől délre, Tasmania—Auckland—Campbell—Antipodes—Chatham-szigeteken át egyenesen a Husvéti szigeteken, Sala y Gomez—Juan Fernandez-en keresztül Dél-Chiléig vezet.

HALLIER saját s jobbadán helyszíni tapasztalatainak gazdag tárházából vett adatokkal támogatja e nagy vonásokban vázolt feltevését, melynek további megerősítésére szolgálnának nyilván a «*Sch. fistulosa*» földrajzi elterjedéséből vont tanulságok is.

HALLIER feltevéséből kimagyarázható és érthető a *Sch. fistulosa*-nak Chile déli részén való, szinte hirtelennek tetsző feltűnése is, melynek faj, sőt változat szerinti megkülönböztetése is alak- s alkattanilag egyaránt alaptalan.

A «*Sch. dichotoma*» a maga neotropikus *Sch. Poeppigiana* STURM (= *Sch. occidentalis* GRISB.) formájában a fajfejlődés magasabb fokára jutott el Amerika (Cuba, Guyana, Venezuela, Peru) tropusi tájain (2. 1078, 1088, 1092) és az ennél nyilván ősbib «chilei *Sch. fistulosa*» vérség szerint is fentartotta egyező alak-, sőt alkattani vonásait is az «ausztráliai *Sch. fistulosá*-val».

CHRIST viszont az «ausztráliai elemek» végső nyomait látja Borneo HALLIER-gyűjtötte «*Sch. fistulosa*»-jában (= *Sch. Hallieri*) és a *Gleichenia circinnata*-ban (7. 219). Borneo a Szunda-szigetek között a legnagyobb, insularis continens 10 szélességi és ugyanannyi hosszúsági fokon át, belsejében — HALLIER közlése — az egész éven át esős és a földkerekség egyik legnagyobb őserdőjével.

Antarcticus tájak és Tasmania alpeseinek hidege, Ausztrália és Chile mérsékelt klímája, Borneo tropusi belseje és a (sovány, majd tözeges) talaj változatossága: mindmennyi biológiai tényező hatása egyazon *Schizaea*-törzsre nem mulhatott el nyom nélkül a szervezet belső kialakulására nézve sem és én örömmel ragadtam meg az alkalmat, hogy a Math. és Természettud. Értesítő id. h.-én közölt *Schizaea*-tanulmányaim (1. 2.) folytatásaként tüzetesebb származástani s physiologiai-anatómiai vizsgálataim körébe vonjam a leideni 's Rijks Herbarium Pectinatae-beli *Schizaeá*t, belevonván Kew-Garden és a bécsi Naturhistor. Hofmuseum vonatkozó s korábbi tanulmányaim adatait is, — LABILLARDIÈRE-nek a berlini botanikus muzeum «WILLDENOW-herbarium»-ában őrzött eredeti *Sch. fistulosa*-jával együtt, melynek tanulmányaim számára való hozzáférhetőségét, a Kew-herbarium néhány *Schizaeá*-jával együtt,

dr. GOETHART J. W. C. 's Rijks herb.-beli igazgató szives közbenjárása tette volt lehetővé Leidenben.<sup>1</sup>

## II.

### A *Schizaea fistulosa* törzsalakjának helyzete a *Pectinatae*-csoportban. — Stele és az alap-parenchyma.

Az ausztráliai flora ama tagjai között, amelyek elterjedésük szerint u. n. «circumpolaris kisugárzásokat» mutatnak, a legérdekesebb páfrány példák egyike a *Sch. fistulosa*. Vegetativus részében ez a teljesen redukált *Schizaea*, a földrajzi elterjedésében sokkalta korlátoltabb *Sch. pectinata* J. E. SM. (Afrika austr. és St. Helena. 12. 617)-val együtt, voltaképp a *Pectinatae*-csoport törzsfajának tekintendő, mert a termet külalaktani szabása tekintetében a *Sch. malaccana*, *Sch. Hallieri*, *Sch. robusta*, *Sch. australis*, sőt a *Sch. tenella* s talán még a *Sch. rupestris* is mindmennyi «*fistulosa*»-beli változat, rendszertanilag eléggé jól jellemezhető «fajok» a még jellegzetesebb földrajzi elterjedési körzeteken belül. Nevezetes jelenség, hogy az északi hemisphaera egyetlen *Sch. pusilla*-ja is a *Pectinatae*-csoportból való, «*fistulosa*»-beli termettel és amiként CHEESEMAN az Antarcis *Sch. australis*-át; akként az északamerikai *Sch. pusilla*-t is afféle «depauperated form»-nak tekinthetjük, — minden más fajbeli társától azonban mérhetetlen távolságra elszakadtan és teljesen eltérő spóraszerkezettel (vesd össze Tab. VI. fig. 31-et a többi spóráképpel). A *Sch. malaccana* termetére emlékeztető ez a kis *Schizaea* N. Jersey—Nova-Scotia—N. Foundland kicsi körzetében New-York közelében él és belátható időn belül eltűnik az élők világából (2. 811 stb).

A *Sch. pectinata* mellett a *Sch. tenella* Dél-Afrika jellemző *Schizaeája*; mást onnan nem ismerünk. Viszont Ausztráliára jellegző a *Sch. fistulosa* s. str. és a *Sch. rupestris*; ezek az u. n. «kisugárzási elmélet» szerint kapcsolatba hozhatók LABILLAR-

<sup>1</sup> A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példákat a szöveg végén VI. B) fejezet alatt sorolom fel:  $H_1$ ,  $H_2$ ... a szövegben foglalt hasonló jelzéseknek felelnek meg.



DIÈRE *Sch. fistulosa*-jával, melynek eredeti s jól conservált példánya (Nr. 19,486 in herb. Willd. Mus. Botan. Berlin.), a megejtett ellenőrző vizsgálatok alapján elmondhatom már most, észrevételt érdemlő eltérést nem mutat sem a Van Diemen-ről való s szintén originalénak tekinthető leideni példánnyal, sem például a SCHLECHTER-gyűjtötte új-caledoniaiakkal szemben ( $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ).

A *Sch. fistulosa*, főleg *malaccana*-beli fajváltozata (pro specie!), újabban s egyidejűleg kiváló angol-amerikai növény-anatomusok figyelmét is felkelté. Azonban úgy BOODLE (22. 373, 376, 407; 24. 511—36), valamint TANSLEY-CHICK (23. 493—510), főleg JEFFREY (Amerika: Harvard-University of Cambridge) stele-elméleteinek (25. 119—146) kapcsolatában a Schizaeák stele-rendszerével foglalkozik, az angolokra jellemző felfogással, amely viszont jelen dolgozatom irányát alkattani tekintetben annyival kevésbé érinti, mert TANSLEY-CHICK anatómiai ábrázolatai általában rosszak.<sup>1</sup>

A Pectinatae-beli csoport stele-beli szerkezetét illetőleg csupán a *Sch. fistulosa* ( $H_4$ ) Tab. III. fig. 3-ban adott ábrázolatra, az alkotó elemek részleteire vonatkozólag PRANTL kimerítő s vizsgálataimmal megegyező leírására hivatkozom (5. 23); azzal a hozzáadással, hogy a parenchyma-hüvely általában még kisebb nagyítások mellett is (a herbariumi anyagban  $\pm$  obliterálódó endodermis - sejteknek ovalisan - kerekded körvonalán belül)

<sup>1</sup> Főleg TANSLEY-CHICK 23. Pl. XXV. 8. ábrájára utalok, amely PRANTL 5. Taf. IV. fig. 57. ábrázolatával szemben haladást nem jelent s éppenséggel sem tette feleslegessé 2. Tab. VI. 12. ábrázolatom közétételét. TANSLEY-CHICK id. h. 6. és 9. ábrázolatai meg éppen rosszak, általában pedig messze mögötte maradnak BOODLE id. h. ábrázolatainak. Az angol-amerikai botanikusok buvárlata a származástani kapcsolatokat a stelebeli elméletben koncentráltan és nagy vonásokban öleli fel. Az angol anatómiai iskola fejének, Kew-Gardens Jodrell-Laboratory világhírű, néhai igazgató-professorának, SCOTT DUKINFIELD HENRY növényöslénytani kutatásokon alapuló felfogásának hódol valamennyi, élükön az amerikai JEFFREY C. EDWARD-dal, aki az u. n. protostelicus és siphonostelicus typus megállapításával (25), a részletekre vonatkozólag önmaga is BOODLE-nak valóban alapvető (22; 24; 26.) és az ő vizsgálataival egyező stelebeli vizsgálati eredményeire utal (25. 128).

szembetűnően tág üregű s felettebb vékonyfalú sejtekből alakul; ezek közül egyik-másik, főleg utólagosan megesett sejtoszlás következtében a hadroma (hydroma), valamint a mindig obliterálódó leptoma (plastoma) felettebb vékonyfalú s a növény egész életében cellulosareaktiót mutató sejtjei közé is nyomulhat (Tab. III. fig. 3  $p-p_2-p_3$ ).

A szóbakerülő Schizaeák levélnyalábjai kivétel nélkül collateralis szerkezetűek, a levél fonáka (= háti oldal =  $d$ !) felől a leptoma (= plastoma R. A.)-val, — és az alaktanilag vett levélszín, vagyis a voltaképeni assimiláló felület (= hasi oldal =  $v$ !) felől az elfásodott elemekből összetett hadromával (Tab. III. fig. 3).<sup>1</sup> Bár az edény-nyalábok képe valóban a levél u. n. nyélbeli részében jut el a fejlődés legjellegzetesebb fokára, PRANTL-lal ellentétben (5. 23) úgy tapasztaltam, hogy e tekintetben termő s meddő levelek között fejlődés- s alkatbeli különbségeket tenni nem lehet. Visszás is volna, hogy az edénynyaláb épp a meddő levelekben jusson el a fejlődés legmagasabb fokára, holott tudvalevő, hogy a termőlevél a meddőnek további fejlődésbeli állapotát jelenti, amint ezt — PETIVER igen helyes megfigyelésére és ábrázolatára hivatkozással (28. 7. Tab. 70. Fig. 12. A. B.) — korábban kimutattam (1. 1095).

PRANTL (5. Taf. IV. fig. 39) szerint az edénynyaláb szerkezete lényegesen megváltozik a *Sch. pennula* levelének alsó részében, ahol a háncrestok elmaradásával, a hadroma compactus tömegét a nyaláb-parenchyma választja el a szitás szövetől. Ily lényegbevágó átalakulást a *Sch. fistulosa* nem mutat; nyalábja a levél derekán túl a levél alapi részében is azonos szerkezetű, jellemzőleg tágnylású sejtekből alkotott nyaláb-parenchymabeli lemezzel a leptoma s az elemeiben redukált tracheidek massivuma között és mindkét oldalán a háncrestok

<sup>1</sup> PRANTL ábrázolatának téves dispositiója (pld 5. Taf. IV. fig. 38, 41—48), jóllehet e tekintetben PRANTL RUSSE-t (27) felettebb rosszja (5. 23, alul a jegyzet), szemben a helyesnek dispoziált 5. Taf. V. fig. 63-mal, megtévesztett engem is 2. *Schizaea*-dolgozatom vonatkozó ábrázolatának betűjelzéseiben, ahol is helyesbbitve  $v = d$ , —  $d = v$ ! A Math.-Naturw., Ber. XXX. (1912.) kötetében szövegileg helyreigazíthattam (id. h. 292—97. ll.).

teljesen elfásodott csoportjaival közrefogottan (Tab. III. fig. 3. *tr-np-lp*).

Jódjódalkalium hatására a hadroma élénk citromsárgára színeződik a háncsrostokkal és a kerületi stereomával együtt. A chlórzinkjóddal való reactio képe a levél alsó s fokozottabban elfásodott részében a színeződés differentiólását mutatja: mivel — a kékes leptoma kivételével — a citromsárga stele s a barnasárga kerületi stereoma között az alap-parenchyma (*mesophyllum* = *chlrenchyma*) csupán középlamelláiban sárgul, egyébként ibolyaszínűvé lesz, valamennyi példán egyszerűen gödörkés sejtfalazattal. (Tab. III. fig. 1, 2; Tab. IV. fig. 7, 8; Tab. V. fig. 14, 19; Tab. VI. fig. 22, 26; Tab. VII. fig. 32 *ch-ch*). A *chlrenchyma* sejtjei a h. m.-ben radialisan némileg nyúltak és keresztnyúlványaik egymásba fogódásával keletkeznek a viszonylagos tágas sejtközi üregek; ez által a parenchyma «szivacsossá» lesz ép úgy, amiként a *Sch. pennula*-nál PRANTL (5. Taf. IV. fig. 37 *gg*), a *Sch. malaccana*-nál TANSLEY-CHICK révén ismeretes (23. Pl. XXV. fig. 8); e tekintetben a Schizaeák között teljes az egyalakúság (2. Tab. VI. fig. 12, 14, 17, 18 *m-m*).

Az alapszövetbeli *chlrenchyma*nak élettani hivatása első-sorban az *assimilatio* munkája, főleg az alaktanilag levélszínnek vehető hasi oldalán (*v-v*), kevésbé a levélnek mindig légzőnyílásokat viselő fonáka, vagyis a háti oldala (*d-d*) felől. PRESL (29. 75) a *Sch. fistulosát* illető megjegyzése: «*Stipes teres a beato LABILLARDIÈRE dicitur et dilineatur, sed revera est stemiteres i. e. supra planus intense viridis subtus convexus pallidus*» — élettani tekintetben is találó; mindamellett, hogy a *Pectinatae*-beli Schizaeák *chlrenchyma*ját még oly csekély mértékben sem találtam differentiódottnak, mint amilyenben PRANTL megemlíti (5. 30).

Mintogy az *assimilatio* energiája egyenes arányban van a felület kiterjedésével, a *Pectinatae*-beli Schizaeák k. m.-i görbületi körvonalát tekintve voltakép a légzőnyílásokat viselő háti oldalt kellene a zavartalanabban *assimiláló* felületnek tekintenünk, mivel az egyes fajokra jellegzetes görbületi körvonalak u. n. hasi barázdája ép az *assimilációs* levélszín mentén

húzódik végig, miáltal a fényhatásnak kitett felület a barázda mélységének arányában redukálódik (Tab. III. fig. 1; Tab. IV. fig. 7—8; Tab. VI. fig. 22; Tab. VII. fig. 32, 38. *vv—dd*).

A levél «húsának» (mesophyllum) ezt a viselkedését a kerületi stereoma mechanikailag befolyásolja, illetőleg szabályozza; oly jelenség, amely a *Pectinatae*-beli *Schizaeák* alaktanilag is nyilvánvaló xerophiliájának természetszerű következése.

Az alap-parenchymának a levél «lemezre» eső és chloroplastikkal telt része «chlrenchymának» veendő; ez a szövet tömegében s assimilációs energiájában egyaránt csökken a levél «nyél»-beli alapja felé; viszont emelkedik a levél-basist alkotó szövetek passivus (mechanikai) jelentősége.

Alaktanilag kifejezést nyer ez az élettani változás annyiban, amennyiben a levél «lemezbeli» részének — miként az alábbiakból kitűnik — fajokra jellemző k. m.-i körvonalzata a levél alapi (vagyis élettani alapon: «nyélbeli») része felé jellegzetességében elmosódik és most már, «fajokra» való tekintet nélkül, egymáshoz meglehetősen hasonlónak lesz (Tab. III. fig. 2; Tab. V. fig. 16, 18; 2. Tab. VII. fig. 24). A levél alapi részében megnyilatkozó szöveti egyalakúság (conformitas) megvan a más csoportokba tartozó *Schizaeák*ban is, elannyira, hogy fajok szerinti szöveti kiválásokról a levél e részén szó sem lehet. A levél alapi részében csak egy elv érvényesül és ez a mechanikai (id. ábrákon kívül 2. Tab. V. fig. 10; Tab. IX. fig. 38), legyen az a levél osztatlanul egyszerű (folia indivisa: *Pectinatae*, *Digitatae*), akár osztott (folia semel vel repetito-dichotoma: *Bifidae*), avagy alaktanilag kifejezetten nyelezett (folia petiolata: *Dichotomae*, *Elegantess*); ennek szolgálatában elfásodott és megvastagodott falú sejtek lépnek homloktérbe, teljesen háttérbe szorítván a chlorophyllumban szegényes alap-parenchymát. A levél alapi részében, a feketésen elbarnuló kerületi stereomán belül, a sejtek tartalmaként főleg csersav-nemű anyagok dominálnak; innen van a levél feketebarna «nyélbeli» részének színbeli eltérése a levél felsőbb «lemezbeli» részétől (basis folii nigricans).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Általános tájékoztatás okából megjegyzem, hogy a metszeteket a levél «lemezre» eső részének dereka tájáról vettem. Minthogy a *Graminea-*

## III.

A «fistulosa»-beli alak-kör élet- és rendszertani alkattana.  
*Schizaea Hallieri* n. sp. v. ssp.1. *Schizaea fistulosa* LABILL.(Syn. *Sch. chilensis* et *valdiviana* Phil.)

LABILLARDIÈRE *Sch. fistulosa*-ja, a délafrikai *Sch. tenella* KAULF. és *Sch. pectinata* J. E. SM. és az ausztráliai *Sch. rupestris* R. BR. «faji» értéke szerint mérlegelve, Tasmania—New-Zealand—New-Caledonia—South-, S.-West—Australia «area geographica»-jával szorosabb körzetre szoritandó; sajátos, alig megmagyarázhatólag Chile déli partvidékével (tehát az u. n. «*Sch. chilensis*»-szel) együtt. A rendszertanilag egykor megkülönböztetett «*Sch. chilensis*» (= *Sch. valdiviana* PHIL. l. c.) u. i. még fajváltozatként sem tartható külön, az alábbiakból kitűnik, — igazolásául az e tekintetben követett újabb rendszertani felfogás helyességének, amely PHILIPPI elnevezéseit egyszerűen a *Sch. fistulosa* synonymonjai közé vonja (5. 135; 9. 429; 12. 616—7).

LABILLARDIÈRE originaléján ( $H_1$ ) és a leideni herbarium ugyancsak Van Diemen-ről (loc. class.-ról) való példáján ( $H_2$ ) kívül vizsgáltam Nyugat-Ausztrália ( $H_4$ ), Ausztrália-Victoria ( $H_5$ ), Port Phillip ( $H_6$ ), New-Zealand ( $H_7$ ,  $H_8$ ), New-Caledonia ( $H_3$ ,  $H_8$ ), továbbá Chile (eredeti Valdivia: Corral-beli) *Sch. fistulosait* ( $H_{10}$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ).

---

szere,  $\pm$  merev, sokszor túszerűen hosszú levél hosszúsága, főleg a meddőknél a termőlevelekhez való viszonyában, rendszertanilag jellemző módon lehet változó (*Sch. pusilla*, *malaccana*); mindig a termőlevelekre voltam tekintettel, tudván azt, hogy egy és ugyanazon faj meddő és termő levelei között, a sporangiophyllumokon (sorophori lacinæ: PRANTL = sporophyllumok = sorophorialis vagy termő lemezek) kívül, egyebekre nézve alkattanilag különbség nincs. Ismételten meggyőződtem arról, hogy a szövettani kép a légzőnyílások (= stoma) dispositiójában is ugyanaz, általában jeléül annak, hogy a termőlevél voltaképp a meddőnek sporangiophyllumokkal való további fejlődési fokozata.

A *Sch. fistulosának* e gazdag, mondhatnám, hogy a földrajzi elterjedés valamennyi nevezetes s az irodalomban szinte elhanyagolt pontját is felölelő anyagán könnyű volt megállapítanom, hogy a rendszerint osztatlan, átlagosan 15—20 cm h (= hosszú), de gyakran 26 cm ( $H_4$ ), sőt PRANTL (5. 137) szerint 37 cm h, sokszor hajlongó, egyébként mereven szálas levelei száraz állapotban barázdáltak (supra in sicco canaliculata).<sup>1</sup> Frissen gyűjtött, avagy alkoholban eltartott vizsgálati anyag hiányában hangoztatnom kell, hogy a levél k. m.-i körvonalának felhold (kifi)-szerű alakulása (Tab. III. fig. 1), következőképp a hasi barázda megfelel a levél természetes állapotának is, lévén kifejezetten xerophyton-növényről szó; legfeljebb esetről-esetre csökken a barázda mélysége az esős időszakok folyamán; azért PRESL egykori leírását teljesen igazoltnak tartom (29. 75). Így a n.-zealandi példák még a levél legalsó, egészen fekete-barna zónájában is a hasi barázdáknak megfelelő homorú íveltséget mutatnak; jóllehet a kerületi stereomának a csaknem körkörös stelehez való átmenete fokozatos. Az alap-parenchyma vékony falú elemeinek a háttérbe szorításával a mechanikaiak a túlnyomók, elannyira, hogy a levél ez alsó zónájában a sejtek esetleges collabescentiája számba sem vehető tényező a barázda-képzésnél.

Az uj-caledoniaiak ( $H_3$ ) is a szó való értelmében in sicco, tehát a herbariumi példákon is szemmel láthatólag barázdáltak; e barázdáltság azonban az egyedeknek melegvíz-glycerinával való, alig pár órát igénylő fellágyítása után majdnem eltűnik, sőt a vékony k. m.-ek hasonló kezelése után jóval rövidebb idő alatt is (Tab. IV. fig. 7. v). A levél színe mindamellett lapítottabb, gyakrabban — bár gyengén — homorú, szemben a mindig domború körvonalú fonákbeli (háti) oldallal; ez utóbbi rendszerint magán viseli kétoldalt az egysoros légzőnyílások stomatorius léceit, kivétel nélkül a többinél is a bőrszövet színvonala felé emelkedő záró sejtekkel (Tab. IV. fig. 11; Tab. VII. fig. 34—35) és azzal a sajátos szerkezettel, melynek részletesebb leírását a

<sup>1</sup> PR. id. h. A «supra» kifejezés alaktanilag a levél színét is illeti = v—v az ábrázolatokon = hasi oldal.

*Sch. pennula* (2. Tab. V. fig. 3), *Sch. digitata* (2. Tab. VI. fig. 12) és a *Sch. pusilla* (2. Tab. VI. fig. 16) képesán már közöltem.

Funciójukat vesztett légzőnyílások (2. Tab. IX. fig. 39 t t) a levélbasis alig 1—2 mm hosszában észlelhetők és átlag 1 cm-en alul marad az a zóna, amelyen légzőnyílások már egyáltalában nincsenek. Ez a körülmény mindenestre élénk transpiratio lehetőségére vall, egyébként teljes összhangban a kerületi stereomán belül eső szövetek életteni érdekével.

A légzőnyílásoknak ú. n. kapocs-sejtjeire (Zwischenzellen PRANTL = interstomatal cells TANSL.-CHICK, 2. 804) vonatkozólag különösebben a *Pectinatae* belüli *Sch. pusilla* (2. Tab. VI. fig. 15—16), *Sch. pectinata* (2. Tab. VII. fig. 19—20) és *Sch. rupestris* (2. Tab. VII. fig. 26—27) ismeretes példáira utalnék, hogy a *Sch. pennula*-éra emlékeztető *Sch. fistulosa*-éval (lényegében olyan, mint Tab. IV. fig. 10) együtt kitűnjék a stomatorius léczek rendszertani jelentősége a *Pectinatae*-csoporton belül is; ennek az értéke, a *Sch. pusilla* «areolatus» sporáival együtt (lásd Tab. VI. fig. 31 és a többi spóráképet), úgy vélem, alig vonható kétségbe.

A vékony falazatú chlorenchymától sárgás, sárgás-barna sejtjei, falazatának nagymértékű megvastagodása következtében élesen elüt a kerületi stereoma.

A voltaképeni bőrszövet (epidermis) önmaga, amennyiben stereomás hypodermával kapcsolatos, a hypodermával szemben nem differenciálódik, ami általános jelenség (2. Tab. VI. fig. 13).

Legyen a levél bármely oknál fogva ± hengerded (folia semiteretia: Tab. IV. fig. 7), avagy — és ez az általánosan megállapítható s fajra jellemző körvonalzati kép — k. m.-ben félholdszerűen görbült (Tab. III. fig. 1; Tab. IV. fig. 8): ez a görbület a barázda mélységével arányosan fokozódhatik a levél csúcsa (versus apicem), illetőleg csökken a levél alapi része felé.

A bőrszövet mindig stereomás hypodermával erősödik és pedig a leptoma felőli részén fokozottabb mértékben; ez utóbbi helyt a kerületi stereoma — a bőrszövettel együtt — szórványosan három sejtsornyi rétegű is lehet, amely egyébként a levél színe felől, néha kihagyásosan, két sejtsorú (Tab. IV. fig.

7—8), vagy éppen az epidermis megvastagodott falú elemeire szorítottan egyetlen sejtsorra is redukálódhatik (Tab. III. fig. 1).

Kifejezetten a lemezt illetőleg PRANTL különbséget tesz 1. az erezet, 2. a mesophyllum és 3. a levélperem (széle) epidermise között és hangoztatja e különbségek taxonomiai hasznavehetőségét a fajbéli megkülönböztetéseknel (nervorum epidermis crassa — tenuis, 5. 33). A Pectinata e bel Schizæák leveleinek epidermisében ily eltérések nem igen állapíthatók meg.

LABILLARDIÈRE Van Diemenbeli originaleja a szövetek dispositiója, az egyes szöveti rendszerek egymáshoz való aránya, továbbá a kerületi stereoma kialakulása tekintetében (Tab. VI. fig. 29), a levél csúcsi részétől alapjáig általában a Tab. III. fig. 1—3 ( $H_3$ ,  $H_4$ ) részleteit tünteti fel. Mindezeknek a Chile déli partvidékeire elszakadt (avagy HALLIER 21. elmélete szerint ugyanott megrekedt) «Sch. chilensis»-szel való egybevetése után kitünhetnek, hogy a »Sch. chilensis»-nek akárcsak a *Sch. fistulosa* fajváltozataként való megkülönböztetésére, az alaktanin kívül hiányzik az alkattani alap is, mert az a körülmény, hogy a chilei *Sch. fistulosa* levelének közepe táján a kerületi stereoma csupán helylyel-közzel erősbödik egy-egy bőr alatti stereidával (Tab. III. fig. 1 h), egyébként az epidermis egyetlen sejtsorára redukált (fig. cit. e), ellenben csaknem kettős rétegű a Van Diemen-belié (Tab. VI. fig. 29  $e_2$ ): lehet egyéni (individualis) jelenség. Rendszertani szempontból az sem lehet perdöntő a Van Diemenbeli s a chilei *Sch. fistulosa* között, hogy míg az előbbi levélalapi kerületi stereomája viszonylagosan tág üregű, az utóbbiban ugyanott szűk üregű sejtekből alakul ki, mert viszont szembezőkően jellemző, hogy a kerületi stereoma rétegsorszáma mind a két esetben a hát-hasi oldal felől ugyanaz (Tab. III. fig. 2 e—h). Az alaktani bélyegeikben teljesen megegyező ausztráliai és chilei *Sch. fistulosa* egyedeit nincs miért külön szakítanunk, jóllehet az azokat elválasztó földrajzi távolság — Van Diementől Dél-Amerikáig — rengetegül nagy.



2. *Schizaea australis* GAUD.(Syn. *Sch. palmata* Hombr. et Jacq.)

GAUDICHAUD még a múlt évszáz elején Falkland (Malouines)-szigetek flórájáról írván, hangoztatja, hogy a klíma ott rendkívül nedves, tele pedig, amikor is az alacsony hegyekkel borított szigeteket több lábnyi hó fedi, igen hosszú s igen szigorú (18. 89—90). LABILLARDIÈRE «ausztráliai» műve (8) megjelenése után 18 évvel GAUDICHAUD dehogyan is gondolhatott arra, hogy Falkland Schizæája az ausztráliai (Van Diemenbeli) *Sch. fistulosa*, vagy ha úgy tetszik, a PHILIPPITŐL 56 évvel utóbb újból leírt «*Sch. chilensis*» (15. l. c.) eltörpült változata (variatio) és hogy — HOOKER fedezte fel az «Erebus és Terror» 1839—1843. antarktisz-útja alkalmával (30) — LABILLARDIÈRE (Van Diemenbeli) «*Sch. fistulosa*»-jának is viszont megvan a maga törpült variatója Lord Auckland szigetén. Még kevésbé gondolhattak arra — lévén ama kor felfogása szerint kizárt dolog —, hogy valamiként a chilei s az austral-tasmaniai «*Sch. fistulosa*»-k fajbelileg azonosak, azonképp törpült alakjaik (= *Sch. australis*) sem különböznek egymástól, jóllehet Falkland és Lord Auckland között világóceánt jelentő az egymást elválasztó távolság.

A *Sch. australis* e meglepő előfordulási körülményei nem is ok nélkül ejtettek gondolkodóba több kiváló botanikust az iránt, hogy voltaképp hová is csatolják a földkerekség ez egyetlen «antarktis» Schizæáját? HOOKER pater a *Sch. pusilla*-hoz vonja, mely törpe *Schizaea* létére viszont az északi hemisphæra legészakabbra hatoló, egyetlen és hasonlóan rideg viszonyok között élő Schizæája.

Captain Sir JAMES CLARK ROSS «Erebus és Terror» hajóival végzett nevezetes délsarki (1839—1843) felfedező útjának növénytani eredményeit az expedíció botanikusa, HOOKER J. DALTON dolgozta föl (30); ugyanő fedezte föl és helyezte vissza «faji önállóságára» Lord Auckland's group és Campbell Island szigeteinek *Sch. australis*-át ( $H_{16}$ ), helyesen ismervén fel GAUDICHAUD falklandi Schizæájának azonosságát az aucklandiéval (30. II, 394); valamint azt is, hogy a csupán képpel illusztrált, egyébként leírás nélkül való «*Sch. palmata* HOMBR.

et JACQ.» (in Voy. au Pôle sud, Bot. Monocot. Crypt. t. 4. z) a *Sch. australis* GAUD. syn.-jánál nem egyéb (30. 111). GAUDICHAUD talaj- és klimabeli jellemzését HOOKER id. h., Auckland *Sch. australis*-át illetőleg azzal egészíti ki, hogy emelkedettebb helyeken él ez a *Schizaea*, közönségesen nehéz talajon (hard soil), ahol zuzmókon kívül más növényzet nincs.

HOOKER BAKER Synopsisától (9. 428) megerősített e felfogás után a *Sch. australis* mind máig gyakran önálló fajként szerepel a főbb enumerativus művekben (7. 156, 328, 329 etc.), hogy azután, a Schizæabeli kapcsolatok tüzetesebb ismerete nyomán kitűnjék, hogy a *Sch. australis* csupán a *Sch. fistulosa* fajváltozata (a helyi flórában qu. ssp.) és hogy az a déli hemisphæra oly antarctis-jellegű Schizæája, amely a tőalakkal nyilvánvalólag átmeneti formákkal van egybekapcsolva. Ezen az alapon áll CHEESEMAN is (13. 1022), melynek helyességét az összehasonlító alkattani vizsgálatok eredményei is igazolják.

Láttam HOOKERnek a Kew. herb.-ban őrzött egyetlen *Sch. australis*-át Lord Auckland Islands-ról (Nov. 1840), melynek termő levelei átlag 8 cm-nél, a meddők 4—5 cm-nél nem hosszabbak ( $H_{16}$ ); a leideni 's Rijks Herb. aucklandi példányai közül az egyik, a rhizomával együtt, alig 3·5 cm h. Valóban törpe alakok ( $H_{14}$ ,  $H_{15}$ ).

Fölöttébb jellemző, hogy a *Sch. australis* ridegen szálas levelei középerőről vett k. m. szöveti képe (Tab. V. fig. 19), a chilei *Sch. fistulosa* leveleinek alsó zónájából vett k. m. (Tab. III. fig. 2) képével — a háti oldal stereomájának egyetlen sejtora némi kivételével (Tab. III. fig. 2  $h_2$ ) — úgyszólván azonos.

A kerületi stereomának ez a fokozottabb megerősítése azonban, még a *Sch. australis* részéről is, mindig a levél alsó zónájának a sajátja, ahol és ép ez oknál fogva a hasi barázda, miként a Schizaeák többi fájában, szintén megszűnik; a szerfelett megvastagodott és megfásodott falú és (a hasi oldalon némi megszakítással) három rétegű kerületi stereoma vaskoshengerként övedzi a tetemesen redukált alap-parenchymabeli chlrenchymát és az alkotó elemében nem kevésbé redukált

stelét (Tab. V. fig. 18). A k. m.-i ábrák nagytíási mértékeinek egybevetésével kitűnik, hogy redukálódik az egyes szöveti rendszereket alkotó sejtek száma, — igazolást nyervén e példában PRANTL, aki a *Sch. australis*-ban csupán a *Sch. fistulosa* «di-mensiobeli» vátozatát látja (5. 134. 136).

A levél felső zónájában a k. m.-i kép annyiban változik, hogy az áthasonító energia természetszerű fokozódásával vas-kosabbá lesz a chlrenchyma, melynek határt szab a tőle élesen differenciálódó s majdnem az epidermisre redukált kerületi stereoma; a levél csúcsi részeiben ugyanis bőralatti stereida leg-följebb a háti oldalon észlelhető.

Úgy a termő, valamint a félannyira rövidebb meddő levelek felső zónájában, a mindkét oldalon egyszerű stomatorius léczek vonalán, felette sűrűn követik egymást a légzőnyílások, közöttük a kapocs-sejtek feltűnően megrövidülnek, valamint hogy a *Sch. fistulosa*-énál átlag rövidebbek a prosenchymatikus bőr-sejtek is.

Az aucklandi és a falklandi példák között egyébként alkat-tanilag sincs különbség.

### 3. *Schizaea robusta* BAKER.

A «*Sch. fistulosa*» klimatologiai szélsőségeket felölelő «area geographica»-jából önként következik, hogy változatokra való hajlandósága a *Pectinatae*-beli fajok között a legnagyobb. A jóval kedvezőbb és ösidőktől ható tényezők befolyása egyrészt a Sandwich-szigetek, másrészt a malayi vonalon Dutch-Borneo «*Sch. fistulosa*»-ját juttatta a fajformálódás viszonylagosan magasabb fokára. HOOKER—BAKER (9. 429), LUERSSSEN (31. 419) és HILLEBRAND (16. 543) a *Sch. robusta*t a «*Sch. australis tropusi* alakjának» tartja, amely ritka növény és eddigelé a Hawaiian Islands következő helyeiről ismeretes: 1. Oahu: Konahuanui, fákön (HILLEBRAND: 16. 543;  $H_{17}$ ), 2. Maui: top of Eeka in swamps (HILLEBRAND! l. c.  $H_{18}$ )<sup>1</sup> 3. Kauai: Waialeale (WAWRA:

<sup>1</sup> Meg van BONAPARTE ROLAND herczeg párisi herbariumában is, a 4000 angol láb magas Oahu *Sch. robusta*-jával együtt.

*H*<sub>19</sub>! **31.** 419; **16.** l. c.). A Tahiti: BRACK-félét azonban PRANTL sem látta (**5.** 136).

Volt alkalmam látni Kewban, utóbb Leidenben is az Oahu-példányt a Koolaupoko tengerpartmelléki hgey lánczolat 3000 angol láb magasan fekvő, «Konahuanui» nevezetű pontjáról, amely találó «faji nevének» megfelelőleg valóban természetes: meghaladja a 42 cm h.-ot (*H*<sub>17</sub>). HILLEBRAND loc. cl. (Mauai **16.** l. c. *H*<sub>18</sub>)-ról való kewi példányai 20—29 cm magasak.

A Society Isles *Sch. robusta*-járól BAKER is megemlékezik (**9.** 429). Én a Society-szigetek e Schizaeájában látnám egyfelől a Tasmania-zealandi, másfelől Dél-Chile *Sch. fistulosa*-jának a kapcsolatát és én sajnálom a legjobban, hogy a Society-szigetek e Schizaeáját közelebről meg nem vizsgálhattam. DRAKE DEL CASTILLO hallgatással mellőzi (**17.** 322); innen való példányt Wien, Bruxelles, Leiden, London, Kew, Róma és Firenze Schizaeái között sem láttam, BONAPARTE ROLAND párisi gyűjteményében sincs meg. A termőhely helyességében azonban CHRISTENSEN sem kételkedik eléggé kritikusan megírott és nagy hézagot pótló művében (**12.** 619).

A Sandwich-szigeteket rengeteg távolság választja el déli Polynesiától; Hawaiiinak az amerikai (mexikói) partoktól való távolsága pedig akkora, mint Hispániáé New-Yorktól (**7.** 239). TROPİKUS-oczeáni klímája fölöttébb kedvező a páfrányvegetáció kifejlődésére, még a 3000 m magasságot meghaladó vulkanikus hegyvidéken is, és szinte meglepő, hogy CHRIST a páfrányvilág földrajzi elterjedésének mesteri összefoglalásában a Hawaii-szigetek ez egyetlen s igen jellemző Schizaeáját meg sem említi (**7.** 239—43).

PRANTL, származástanilag is helyesen, a *Sch. robustát* a *Sch. fistulosa* alakkörébe utalja (**5.** 136). Újabban az angol fel-fogás érvényesül a faj önállósításában és mondjuk, hogy főleg az összehasonlító alkattan szempontjából nem alaptalanul, mert Hawaii *Schizaeájának* természetessége nemcsak alaktanilag (levél, sorophoria), hanem a szövetek vaskosságában is érvényesül.

Termő leveleinek k. m.-i képe (Tab. VII. fig. 32) alapján elüt a *Sch. fistulosa* k. m.-ének ismeretesen félholdszerű (sectio semilunaris) körvonalától (Tab. III. fig. 1); elannyira, hogy e te-

kintetben pld. a délafrikai *Sch. tenella* KAULF. ( $H_{20}$ ) is (plane PRANTL. 5. Taf. IV. fig. 42-ben adott vázlatos körrajza szerint) jóval közelebb áll a *Sch. fistulosához*, még kerületi stereomája szerint is, amely a chlorenchymától élesen elkülönözötten pusztán az epidermisre redukálódik (Tab. VI. fig. 22). Viszont lehetetlen fel nem ismerni ez ugyancsak délafrikai *Sch. pectinata* J. E. SM ( $H_{21}$ ) ebbeli típusának mintegy közbul állását (2. Tab. VI. fig. 17) a *Sch. tenella* (Tab. VI. fig. 22) és a *Sch. robusta* között (Tab. VII. fig. 32), — lévén ez utóbbi mintegy a *Sch. pectinata* ( $H_{22}$ ) természetesebb megnyilatkozása úgy a levél húsában, valamint az erőteljesebb kerületi stereomában (Tab. VII. fig. 32 *e—h*). A *Sch. pectinata* után fokozottabban nyilatkozik meg a *Sch. robustában* a lemezképzés tendenciája a két oldalrész megnyúlásával és lefelé való görbülésével (Tab. VII. fig. 32 *x—x*), minek következtében az ellaposodó levél stomatorius léczeket viselő fonáka hármasan tagolódik, és pedig azáltal, hogy a szegélyrészletek behajlásával a stomatorius léczek mintegy barázdába kerülnek (folia latiora, costa prominente subtus bisulcata: 5. 136); a stomatorius léczek e barázdáit pedig a levélfonák ívesen kihajló bordája (costa prominente) köti egybe (Tab. VII. fig. 32 *s—d—s*). Kisebb mértékben, de így van ez a *Sch. pectinata* ugyancsak ellaposodó leveleiben is [folia planiuscula, costa subtus prominente: 5. 134; 2. Tab. VI. fig. 17 *s—r* (recte: *d!*)—*s*].

Az epidermisszel együtt két, helylyel-közzel három rétegű kerületi stereomája viszonylagosan itt a leptoma felől erősebb; a hadroma, vagyis a levélszínnek megfelelő oldalon épp ott, ahol a hasi barázda a legmélyebben nyomul a levél húsába, az epidermisre redukáltan, viszont a legvékonyabb. Mindez a levél mechanismusával, vagyis a barázda (canalicula) képzésével függ össze, amely a háti oldal stomatorius léczei felől megszakadó kerületi stereoma révén a levélnek bizonyos határok között szabadabb «mozgást» biztosít a hőmérsék s a levegő párateltségének változásai szerint.

Hogy ez így van, meggyőződhettem a *Sch. robusta* Oahuról való példányán megejtett vizsgálataim útján ( $H_{17}$ ). Kitűnt, hogy a hasi barázda mélysége jelentékenyen csökkenhet, mely esetben velejár a háti oldal fent vázoltam hármastagozódásá-

nak megszűnése olyformán, hogy a háti oldal stereomája egyetlen ívben domborodik ki és a stomatorius léczek barázdája teljesen eltűnik (Tab. VII. fig. 38). Ez utóbbi esetben szinte magunk előtt látjuk a *Sch. pusilla* PURSH. ( $H_{23, 24}$ ) levele k. m.-i típusának a megismétlődését (2. Tab. VI. fig. 14).

Steleje s az ezt környező chlorenchymája a *Sch. fistulosa*-éval egyező, csupán quantitative fejlettebb; a stele lignifikált massivuma (hadroma + hácsrostok) — HALLIER Schizæája kivételével (Tab. V. fig. 20  $hr^1-x-x$ ) — valamennyinél a k. m.-i kép «félholdjával» ellenkező görbületet mutat (Tab. VI. fig. 29  $a-b$ ,  $hr-x-x$ ; Tab. VII. fig. 38  $hr^1-x-x$ ).

A *Sch. robusta*-nak valamennyi P e c t i n a t a e-beli *Schizæa*a között a legvaskosabb chlorenchymája igen élénk assimilatiót jelent; nyilván vele fokozódik a transpiratio is, mert gyakran észlelhetjük a légzőnyílások reduplicatióját (Tab. VII. fig. 34  $s_1-s_2$ ); a légzőnyílásoktól alkotott stomatorius léczek egyébként a *Sch. fistulosa* sajátosságait mutatják.

Érdekes jelenség, hogy a transpiratio s a chlorophyllumban dús chlorenchyma fokozott energiája az ugyancsak vaskosabb sporangiophyllumokra is kiterjed. Ezek fonákán, a levélbeli epidermisszel egyező, csak vékonyabb falú borsejtek közepette szétosztan számos a légzőnyílás, anélkül azonban, hogy a *Schizæa*-levélben kivétel nélkül oly jellemző légzőnyílásbeli sorozatok (= stomatorius léczek) a sporangiophyllumokon megállapíthatók volnának (Tab. VII. fig. 33).

A levél alsó tagozatában az eddigi esetek megismétlődését észlelhetjük; sejtjei között schizogene keletkezett hézagok gyakran láthatók, miként a termetre vele vetélkedő *Sch. Hallieri*-ében (Tab. V. fig. 16 *ch*).

#### 4. *Schizæa malaccana* BAKER.

A malayi félsziget (Malaka) és szigetek, továbbá a Philippinák egyik jellemző Schizæája BAKER *Sch. malaccanája* (9. 428), PRANTL-tól közölt növényföldrajzi adatai azonban hibásak;

<sup>1</sup> Vázlatos ábrákról lévén szó, *hr* ezúttal magába foglalja az oldalsó hácsrost-nyalábokat is, melynek fig. 20 *hr* vonala azonban (a lithographus tévedéséből) nem érinti, mint kellene, a hácsrost-nyalábokat.

különben PRANTL maga megjegyzi, hogy a növényt nem látta (5. 136 sub  $\delta$ ).<sup>1</sup>

A Kew-herbariumból vizsgáltam példák mind a malakai félszigetről valók ( $H_{25-28}$ ). A *Sch. malaccana* 3—4000 angol láb magasságú hegyeken is él és a kritikailag számba vett földrajzi elterjedésbeli adatok szerint úgy látszik, hogy Birmától Borneón át a Philippinákig való elterjedésének központja Borneo északi angol része (Serawak v. Sarawak); ugyaninnen említi BAKER (32. 44), példái meg vannak BONAPARTE ROLAND herceg világ-hírű párisi gyűjteményében.

A *Sch. malaccana* részletes alkattani vizsgálatával, főleg a stelere vonatkozottan, TANSLEY és CHICK foglalkozott (23) és azért én e Schizaeáról röviden és csakis a kitűzött feladat keretében szólok, minthogy TANSLEY—CHICK fejtegetéseimet közvetlen érintő 23. Pl. XXV. fig. 6 és 8 ábrázolata rossz.

TANSLEY—CHICK a *Sch. malaccana*-ról való és helyesen eltalált termet (habitus)-beli képe (23. Pl. XXV. fig. 1) nyomban elárulja, hogy inkább a *Sch. pusilla* és *australis* termetére emlékeztető *Sch. malaccana* a *Sch. fistulosa*-tól részleteiben is eltérő és oly alak, amely — PRANTL véleményétől eltérőleg (5. 136 sub ? $\delta$ ) — az angoloktól vett fajbeli különállást szentesíti inkább (12. 616).

Én a *Sch. malaccanát* a *Sch. robusta* eltörpült fajváltozatának tekinteném, és pedig ama, szinte meglepő analogia szerint, amelyet a *Sch. malaccana* SCORTECHINI-féle (Malacca) példáinak ( $H_{28}$ ) vizsgálatából megállapíthattam. «*Mollia flexuosa*»-nak vett levelei (5. 136. sub  $\delta$ ) középtájáról vett k. m.-ek képe (Tab. VI. fig. 26) ugyanis csalódásig a *Sch. robusta* levelének bizonyos esetekben mutatkozó szerkezetbeli képét mutatja (Tab. VII. fig. 38). Az apró levelek chlorenchymája viszonylagosan vastkos s a többiéhez hasonlóan egyöntetű (homogeneous), melylyel szemben élesen különül el az epidermis egyetlen sejtsorára redukált, különben annyival inkább megvastagodott s elfásodott sejtekből alakult kerületi stereoma. A hasi barázda homorúsága csekély.

<sup>1</sup> «Amerika australis temperata» és «Afrika orientalis» ugyanott tör-lendő.

A levélperem görbülete a háti oldal felé való hajlás tendenciáját árulja el (Tab. VI. fig. 26  $x-x$ ), mintegy átmeneti jelenségként a *Sch. Hallieri*-hez, ahol is ez teljesen érvényesül (Tab. V. fig. 14; fig. 20  $x-x$ ).

A *Sch. malaccana* elkovásodása igen csekély mértékű, nemkülönben a *Sch. robustaé*, ami meglepő. A vizsgálatra alig-alig felhasználható csekély anyag platinacsészén való elégetése után mindamellettt sikerült megállapítanom azt, hogy a Schizaeák ismert kovaszemölcesei (2. Tab. I. fig. 5), bár felettébb szórványosan, megvannak.

A növény leírásában szereplő «*mollia-flexuosa*» magyarázatát megadja, az igen csekély elkovasodáson kívül, a viszonylagosan dús chlorenchyma és a redukált kerületi stereoma, amely a hajlékonyság elvének érvényesülését nem gátolja; a levelek nem merevek, a meddők a termőknél átlag nem rövidebbek azokon a kewi példányokon, amelyek magassága mindössze 6—16 cm között váltakozik. A xerophilia jellegét mindamellettt magán viseli ez a növényke; apró sorophoriájának lemezszáma (átlag 3—6) csekély.

### 5. *Schizaea Hallieri* m.

(*Sch. fistulosa* CHRIST. p. p. — non LABILL.)

Borneo egyenlítői s a hollandusok birtokát tevő nagyobb részeinek flórája felderítését, TEYSMANN soha nem múló nagy érdemein kívül, NIEUWENHUISEN hosszabb ideig tartó gyűjtéseinek, főleg azonban HALLIER HANS bámulatosan nagy buzgalmának köszönhetjük (3).

Dutch-Borneónak az Oczeántól messze földre eső és az oczeáni határtól merőben mentes középvídekein gyűjtött Schizaeái (*Sch. dichotoma*, *Sch. digitata*) között feltűnt előttem HALLIER ama Schizaeája, amely CHRIST meghatározása szerint «a típusos *Sch. fistulosa* LABILL. volna és nem *Sch. malaccana* BAK.» (4. 140).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> «C'est le type austral à frondes élançées, raides et non le *S. Malaccana* BAK. plus petit, à frondes faibles et flexueuses; qui se trouve



HALLIER Schizaeája valóban távol esik a *Sch. malaccana*-tól, alak- és alkattanilag, de növényföldrajzilag is, mert a *Sch. Hallieri* területén, ám egész közép s dél-Borneóban nincs *Sch. malaccana*, példái onnan ismeretlenek; elterjedésében ez, úgy látszik, hogy Borneo északi (Sarawakbeli és angol) területére szorítkozik, ahol viszont a *Sch. Hallieri* aligha él.

HALLIER Schizaeájának részletes alkat- és alaktani vizsgálata ellentmond CHRIST ama véleményének, amely pusztán a növény külalaktani vizsgálatán alapul és amely szerint HALLIER Schizaeája plane az ausztráliai *Sch. fistulosa* «typusa» volna.

A leideni herbarium HALLIER gyűjtötte példányainak<sup>1</sup> magassága 20—40 cm között váltakozik; lehetően hű természetbeli képét, a tábla-nagyság korlátja miatt hosszban megrövidítve, egyébként természetes nagyságában Tab. VI. fig. 21-ben adom.

Alaktanilag megjegyzendő, hogy a hasonlóképen szálasan hosszú s PRANTL (5. 136) szerint 37 cm h.-ot is elérő *Sch. fistulosa* s. str. leveleihez képest HALLIER *Schizaeája* jóval merevebb; levéldarabkáknak platinacsészén való hosszas kiizzítása után is a mikroskopiium alatt jól vizsgálható epidermisrészletek maradnak vissza, a *Schizaea*-ra jellemző kovasavas szemölcsseikkel együtt (Tab. IV. fig. 9). A herbariumi példányokon tapasztalható nagy törékenység (fragilitas) főleg arra vezethető vissza, hogy az eddig tárgyaltam Schizaeák között a *Sch. Hallieri* a legelkovásodottabb. Termő s meddő levelei a hosszúságban vetekednek egymással, színezetük — már amennyiben ezt az egyenlítő alatt (mesterségesen) szárított példányokon megítélni lehet — a sárgásan-zöld (pallide virens) *Sch. fistulosák*-kal szemben inkább szürkés barna (griseo-bruneus).

Méréseim szerint a *Sch. fistulosa* sorophoriája elérheti a 37 mm-nek mindenesetre feltűnő hosszát ( $H_4$ ); PRANTL usque

---

assez répandu dans l'Archipel Malais et qui est trouvé à Bornéo aussi.» CHRIST l. c. — Ez utóbbi azonban Borneo északi (Sarawak) részét illeti s nem az egyenlítői tájakat!

<sup>1</sup> A többi ez idő szerint a buitenzorgi (Jáva) herbariumban van, a nálam megmaradt töredékes és a meghatározás okából CHRIST-hez jutott példány kivételével, amely utóbbi a «CHRIST-herb.» megvásárlása révén BONAPARTE ROLAND herczeghez került Párisba.

3 cm-re becsüli: (5. 136); usque 27—27 s a *Sch. Hallieri*-énél vastagabb sorophorialis lemeze egymás között egyenlő, a *Sch. Hallieri*-énál azonban átlag mindig rövidebb; ezek számát LABILLARDIÈRE (aki különben 8. Tab. 250. fig. 3-ban jó képet adott róla) 8—15-re, Baker (9. 429) 10—20-ra, PRANTL (5. 135) pedig 16—23-ra teszi; ezek az átlagos számok (Tab. III. fig. 4).

A *Sch. Hallieri* sorophoriája körvonalában deltoides alaku (sorophora oblique-erecta), minthogy a sorophoriát alkotó termő lemezek, vagyis a sporangiophyllumok a sorophoria csúcsa felé fokozatosan rövidülnek (Tab. III. fig. 5), miáltal szembeötlően különböznek a *Sch. fistulosa* mindvégig egyenlően keskeny (Tab. III. fig. 4) és rendszerint jóval hosszabb sorophoriájától (sorophora incurvo-erecta). A *Sch. Hallieri* termő lemezkéi egészen keskenyek (vékonyak), spóráikat szóró, tehát érett állapotukban oldalvást maradónan tollasodók (sorophora laciniis plumoso-secundis: Tab. VI. fig. 21 t-t), ellenben a *Sch. fistulosa*-nál, LABILLARDIÈRE id. képén is helyesen feltüntetve (8. Tab. 250. fig. 3), tenyeresesen szétálló (sorophora laciniis demum patentibus), akár a *Sch. malaccana* sorophoriájában (23. Pl. XXV. fig. 1).

Mielőtt HALLIER Schizaeája igen érdekes s jellemző alkattani differenciálódásának vázolására áttérnek, nem mellőzhetem a *Sch. fistulosa* LABILL. s. str. diagnosisának — főleg LABILLARDIÈRE origin. növénye s képe<sup>1</sup> után — tüzetes megállapítását; minthogy a PRANTL-é (5. 135—6.) már a *Sch. australis, robusta* és *malaccana* egybefoglalása miatt is nagyon általános és a szó szorosabb értelemben vett LABILLARDIÈRE-féle *Sch. fistulosa* részleteire éppenséggel sem találó.

---

<sup>1</sup> A leideni tud.-egyetemi könyvtár gazdag a régi botanikai művekben; a Clusius-Codex-et is, amely hazánk földjét érinti és amelynek drága reproductiója kiadásával dr. ISTVÁNFY GYULA professor eléggé nem méltányolható áldozatot hozott, ott őrzik. Igazgatósága a legnagyobb készséggel és — ami a laboratoriumi munkálatok közepette oly fontos! — mindig rögtönösen bocsájtotta rendelkezésre a kért, sokszor nagybecsű műveket. Nagy köszönetem kapcsán ezt külön is meg kell említenem.

## A.

*Schizaea fistulosa* LABILL.

Nov. Holland. Plant spec. 1806. T. II. p. 103. Tab. 250. fig. 3! PRANTL 5. p. 135 cum litteratura citata et synonym., quoad diagnosin ex part. tantum. exclus. varr.

Rhizoma crassiusculum caespitosum, pilis fuscis vestitum, radiculis elongatis, subnudis. Folia usque 37 cm longa, indivisa, simplicissima, filiformia, nuda, parum rigida, saepe flexuosa, pallide virescentia, versus apicem canaliculata et sparsim muriculata, versus basin semiteretia, sterilia apice acutiuscula.

Sectio transversa mediana  $\pm$  semilunaris latere ventrali concava, hinc-inde subplana; stereoma periphericum (= epidermis + hypoderma) dorso lateribusque vel etiam per totum marginem interrupte duplex, ceterum simplex.

Sorophora usque 37 mm longa, initio secunda, laciniae (= sporangiophylla) 8—16—27-jugae, angulo fere recto a rhachi divergentes, interdum aequilongae, hinc-inde per paria conniventes vel subexpansae, demum in statu maturo per totam longitudinem expansae, 3—5 mm longae, circiter 1 mm latae; in margine lacerae pilisque longis brevibusque latis obsitae, costa glabra. — Sporae laeves.

Habit. in promont. Van Diemen (LABILL. l. c. WILLD. herb. Nr. 19486! et in herb. Lugd.-Batav!  $H_{1-2}$ ). Australia occid. (PRITZEL, Nr. 251 in herb. Lugd.-Batav. =  $H_4$ )! Victoria: Gippsland (Kew-Herb. =  $H_5$ )! Port Phillip (MUELLER: Phytol. Mus. of Melb. in herb. AL. RICHT. =  $H_6$ )! — New-Zealand (HELM: Greymouth, in herb. AL. RICHT.  $H_7$ )! in herb. Princ. ROL. de BONAPARTE. — HOCHSTETER: Manukau-Waiaku (Nr. 89. in herb. Vindob! =  $H_9$ ). — New-Caledonia (SCHLECHTER: Jauhé Nr. 14753, in herb. Lugd.-Batav. =  $H_3$ . — BONATI: Mont Koghi (Nr. 474 =  $H_8$ )! — Chile (Valdivia: Corral, in herb. Kew et in herb. Lugd.-Batav. =  $H_{10-13}$ )!

## B.

*Schizaea Hallieri* n. sp. vel ssp.

Sch. fistulosa CHRIST p. p. Fil. Born. 4. p. 140 et in herb. Lugd.-Batav. — non LABILL. l. c. — Tab. VI. fig. 21.

Rhizoma caespitosum, vermiculare, pilis castaneis dense vestitum; radiculis elongatis nudis.

Folia usque 40 cm longa, simplicissima, indivisa filiformia nuda, rigida, in sicco perfragilia, haud flexuosa, griseo-brunnea, versus basin semiteretia, versus apicem parum concava, in sicco dorso magis late canaliculata, inter stomata medio subconvexa, versus apicem inprimis muriculata, sterilia apice acutiusecula.

Sectio transversa mediana in ambitu quadrangularis, angulis dorsalibus leviter prominentibus, versus apicem fere obverse semilunaris.

Stereoma periphericum in medio folii fere ad epidermidem valde incrassatum reductum, in partibus interrupte duplex.

Sorophora usque 12 mm longa, leviter recurva laciniae (sporangiophylla) usque 12-jugae per paria conniventes, demum in statu maturo plumoso-solutae subflexuosaeque postremae longiores, usque 8.5 mm longae, decrescentes, sine exceptione angustissimae, quasi filamentosae, 0.5 mm latae, margine lacerae pilisque demum brevibus vel potius papillis latis obsitae, costa glabra.

Habit. Borneo-batava occid., procul a mare, in dicione fluminis Sungei Sekedoúw, satis frequens solo arido in silvis apertis humilibus Myrtaceis, una cum *Burmannia disticha* L.

Legit detexitque Dr. HANS HALLIER d. 21. m. I. a. 1894., cuius in honorem atque memoriae amicitiae nostrae causa hanc *Schizaeam* satis libenter dicavi.

Exemplaria originalia in herb. Lugduno-Batavorum, in herb. Bogoriense, in herb. AL. RICHTER atque in herb. Principis ROLANDI de BONAPARTE Lutetiis-Parisiorum) sub. Nr. B. 2150.

Differt typus australianus foliis brevioribus minus rigidis, flexuosis, pallide virescentibus, sectione mediana semilunari

dorso convexo vel subelliptica, stereomate peripherico interrupte duplici; sorophoris longioribus æquilatis, sporangiophyllis latioribus brevioribusque, in statu maturo patentibus.

*Schizaea robusta* statura magis robusta foliis saturate virentibus latioribus, flexuosis, costa prominente, dorso in sicco bisulcatis; sectione mediana transverse oblonga, ventre medio profunde sulcata, stereomata peripherico per totum marginem æquicrassum stratis binis vel trinis compositum, sorophoris robustioribus, laciniis brevioribus latioribusque a *Sch. Hallieri*-ana bene discrepat.

Az ausztrál-tasmaniai *Sch. fistulosa*-beli typus mellett bizonyára a *Sch. robusta* az, amely számbavehetőleg közelebb áll a *Sch. Hallieri*hez. Azt mondhatnók, nem akarván megismételni a diagnosisban adott alaktani jellemzés más nyelven való újabb bonczolgatását, hogy voltaképen a mérsékelt klíma-övek alatt élő typus tropusi (= *Sch. fistulosa*) hatás alatt keletkezett fajformálódásai úgy a *Sch. robusta*, valamint a *Sch. Hallieri*.

Ez a fajformálódás különösebben megnyilatkozik a levél közepe tájáról vett metszetek alkattani viszonyaiban; példa erre az e tekintetben szinte feltűnő s fent részletezett *Sch. robusta* (Tab. VII. fig. 32, 38).

A Sandwich-szigetek *Sch. robusta*-ja fajformálódásának alapján el nem hanyagolható jelenség Borneo æquatorialis *Sch. Hallieri*-je sem. Vaskos chlorenchymájának, főleg a levél felsőbb zónáiban, csaknem az epidermisre redukálódott kerületi stereoma szab határt, körvonalában a *Sch. Hallieri*-re jellemző módon (Tab. V. fig. 14).

A *Sch. robusta* levelének k. m.-i képe ugyanis tojásdadan nyúlt (Tab. VII. fig. 32, 38), a *Sch. Hallieri*-é ellenben négyszögletű (Tab. V. fig. 14). A hasi szögletlek lekerekítettsége fokozódhatik a levél felsőbb zónáiban s ennek arányában fokozódik a háti oldal két oldalperemének kinyulása (Tab. V. fig. 20  $x-x$ ), minek következtében a metszeti kép ugyan  $\pm$  semilunaris, ámde a *fistulosa*-beli alaptypussal szemben ellentétesen (Tab. III. fig. 1; Tab. VI. fig. 29  $hr-hr$ ).

A *Sch. Hallieri* levélfonákán keletkezik, stomatorius léceivel

együtt, a mindig mélyebb háti barázda (Tab. V. fig. 14, 20 *d--d*), viszont a levélszínnek megfelelő hasi oldal az, amelynek mindig csekélyebb homorúsága utóbb el is enyészhetik (fig. cit. *v--v*). Ellenben a *Sch. robusta*-nak feltűnően a levélhúsába vágódó hasi barázdája még akkor is fenmarad (Tab. VII. fig. 32 *v*), ha a háti felület kettős barázdája (fig. cit. *s--s*) a háti oldal esetleges kidomborodásával megszűnik (Tab. VII. fig. 38 *v--d*). Viszont ez a kidomborodás, csekélyebb mértékben, a *Sch. Hallieri* leveleinek légzőnyílások nélkül való hasi oldalát illeti; soha a stomatorius léczeket viselő háti felületet (Tab. V. fig. 14, 20 *v--d*).

A helyes tájékozódást a tekintetben, hogy a *Sch. Hallieri*, a *Sch. fistulosa-robusta* levele «semilunaris» alaptypusának éppen a megfordítottja, könnyen lehetővé teszi a stele megfásodott belső (hadroma + háncsrost-) elemeinek, főleg valamely ligninára való (WIESNER-, resoreina stb.) reagens alkalmazásával feltűnő «sarlója», melynek görbülete a *Sch. Hallieri*-ben parrallel a levél k. m.-i képének a görbületével (Tab. V. fig. 20 *hr--x--x*), — ellenkezőleg forduló a *Sch. fistulosa-robusta* eseteiben (Tab. VI. fig. 29; Tab. VII. fig. 38 *hr--hr--x--x*).

A kevésbé elkovásodott *Sch. robusta* valamennyi Pectina a t a e-beli *Schizaea* között legvaskosabb chlorenchymáját viszonylagosan erősebb kerületi stereoma övedzi (Tab. V. fig. 32 *e--h*); a *Sch. Hallieri* stereomája, főleg a levél felső zónáiban, csaknem az epidermisre redukálódik, ámde erősen megvastagodott falú sejteinek a gyűrűje, alkattanilag is éles ellentétben a chlorenchymával, teljes mechanikai szilárdságot biztosít, amire a tetemes hosszúságra megnövekedő szálas levél felettébb reá van utalva (Tab. V. fig. 14 *e*).

A *Sch. Hallieri* az egész éven át állandóan esős tropusi őserdők közepette kedvezőbb életkörülmények közé jutott. Élénken transpirálhat; e functio szolgálatában a légzőnyílások egyszerű sorai szerkezetileg a *Sch. pennula*-éira (2. Tab. V. fig. 3), még inkább a *Sch. pusilla*-éira (2. Tab. VI. fig. 16) emlékeztetnek; de tojásdadon nyúltabb légzőnyílásai keskenyebb stomatorius léczekbe szorulnak össze a nyomban vastagsal elfásodott falú epidermalis sejtek prosenchymájában (Tab. IV. fig. 10).

## IV.

## A termőlemezekről (sporangiophyllumok) és a spórákról.

A sorophorialis avagy termőlemezek (sporangio-, sporophylla = laciniae sorophori PRANTL l. c. = fertile Segmente DIELS l. c.), peremük és bordájuk bőrsejtjei trichomaképzése tekintetében, PRANTL (5. 134) és PRANTL-t követően DIELS (33) szerint majdnem fajonként különbözőképp viselkednek; spóráik szerint azonban a legkevésbé.

A *Sch. pusilla* és a *Sch. pectinata* termő lemezkéi peremükön és bordájukon szörképleteket, a *Sch. tenella* ugyanott csupán papillákat viselnének, a majdnem kopasz *Sch. fistulosa*-éival szemben, mely utóbbinak «fajok» szerint is megkülönböztetett tagjai (*Sch. australis, robusta, malaccana*) PRANTL (5. 134) szerint «dimenziobeli» eltérések csupán.

A spórák alkata tekintetében, «areolatus» spóráival egyedül a *Sch. pusilla* (Tab. VI. fig. 31) áll szemben a *Pectinata* e-csoport valamennyi tagjával, hol a spórák általában sima falúak (Tab. III. fig. 6; Tab. IV. fig. 12—13; Tab. V. fig. 15, 17; Tab. VI. fig. 27—28, 30; Tab. VII. fig. 37).

A mikroszkopiumi vizsgálat czéljaira felhasználható anyag ritkasága nem engedi meg, hogy a termő lemezeket számos egyénről tanulmányozhassuk és ezáltal meg kell elégednem annak a megállapításával, hogy a *Sch. pusilla* termőlemezkéin felette vékonyfalú s gyakran egyetlen sejt értékével biró  $\pm$  hosszú szörképletek fordulnak elő, lekerekített csúcscsal s gyarapodó számmal a termőlemezkék csúcspontja felé.

Ezekhez hasonló, gyakran feltűnően hosszú s bizarran hajlongó szörképletek lépnek fel a *Sch. pectinata* termőlemezkéin, de jóval sűrűbben (Tab. VI. fig. 25).

Egyéni felfogás dolga azonban, hogy a *Sch. tenella* termőlemezkéi egész hosszában előforduló ritkás szörképleteit, amelyek sokszor a sporangiumok hosszúságát is meghaladják, PRANTL (5. 135) után «papilláknak» (Pr. óvatossága szerint: papillæ elongatæ l. c.), avagy inkább szörképleteknek mondjuk-e? (Tab. VI. fig. 23). Spóráit is inkább a gyakorlati rendszertan alapján

tekinthetjük sima falazatúnak (Tab. V. fig. 17). Következetesség okából a spórák összehasonlításakor ugyanazokat a nagytásokat alkalmazván, azt tapasztaltam, hogy ezek például a *Sch. pectinata*-éhoz képest nem éppen kifogástalan sima falazatúak; a spórák exinéin, ha ritkán is, cuticularis szemcsék észlelhetők. A szörképletek viselkedése szerint a *Sch. tenella* tényleg közbülső alak a *Sch. pectinata* és a *Sch. fistulosa* között; ez utóbbi termőlemezkéin a «szörképletek» valóban papillaszerűek (margine laceræ pilisque brevibus latis obsitæ: Pr. 5. 135. — Tab. VII. fig. 36). A sporangiumokon átlag alul maradó e papillaszerű s szórványos szörképletek a chilei *Sch. fistulosa*-n is ugyanolyanok; nemkülönb a spórák falazata sem mutat említést érdemlő eltérést (Tab. III. fig. 6 és Tab. IV. fig. 12). Sima falazatúak a *Sch. robusta* spórái (Tab. VI. fig. 28), rövid s ritkás papillákat feltüntető termőlemezkéi meztelennek tekintendők. A sporangium-sorok hosszában kopaszok a szintén sima spórájú *Sch. Hallieri* (Tab. IV. fig. 13) termőlemezkéi is, a csúcsi rész kivételével, melynek sejtjei számos papillává és papillaszerű, a sporangiumok hosszát meghaladó szörképletekké türemkednek ki (Tab. VI. fig. 24); oly alkattanai bélyeg, amely a *Sch. robusta*-tól való megkülönböztetésénél rendszertanilag is számbavehető.

A *Sch. malaccana* a tropusok alatt, a *Sch. australis* pedig az Antarktison a «*Sch. fistulosa*»-beli alakkör törpe tagja; törpeségükkel együtt jár a sorophoria kicsinysége, termőlemezkéi a szörképletek merő kizárásával kopaszak, mindössze 2—3 mm hosszúak. E tekintetben a *Sch. fistulosa*-hoz való kapcsolatuk szoros, mert sporangiophyllumaik papillákká feloldott peremén gyakran láthatunk párosával egybekapcsolt «papillákat» is, miként a *Sch. fistulosa*-nál (Tab. VII. fig. 36a); ezek azonban jóval rövidebbek. A *Sch. malaccana* tojásdad (Tab. VI. fig. 27) és a *Sch. australis* gömbded spórái (Tab. V. fig. 15) hasonló módon sima falazatúak és a többihez mérten apróbbak.

Már a «lemezkézés» tendenciája miatt is termetére a *Sch. rupestris*, amely kizárólagosan ausztráliai *Schizaea*, a dél-afrikai *Sch. pectinata*-ra emlékeztet, jóllehet alak- s részben alkattanilag még a legelütőbb valamennyi *Pectinata*-beli



*Schizaea* között; spórái (Tab. VII. fig. 37) a *Sch. malacca*-éihoz hasonlóak (Tab. VI. fig. 27), gömbdedek, sima faluak s aprók. Termő lemezkéi kopaszak, papillái is ritkák és rövidek. A sporangiumok és spórák «fajok» szerint megkülönböztethető változásairól alig lehet szó. BOWER (34) számításai szerint a sporangiumokban 128 az átlagos spóraszám (typical number); a spórák nagysága változhatik (vesd össze egymással a közölt spóráképeket), de alig hiszem, hogy taxonomiailag számbavehető módon.

## V.

**Összefoglalás:** A Pectinataebeli Schizaeák xerophiliája az élettani alkattan szempontjából, vonatkozással a fajformálódás fokozataira. Ugyane csoport származástana mai biológiai és növényöslénytani tudásunk szerint.

Az eddigi részletezések összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy a Pectinataebeli Schizaeák, már azért is, hogy leveleik alaktanilag »nyél«-re és »lemez«-re nem tagolódnak, tehát teljes hosszukban külsőleg egyalakúak;<sup>1</sup> földrajzilag párját ritkító elterjedésbeli viszonyaiknál fogva kell, hogy a megfelelő alkalmazkodásban megnyilatkozó eltérések nyomai inkább a belső szervezetben jussanak érvényre.

A minden részükben redukált e Schizaeák «ősformák», a Schizaeák között is a legegyszerűbb alakok; a velük szemben támasztott életbeli körülmények pedig — tropus, mérsékelt éghajlat, szárazság és sok eső, antarktisz és alpesi táj! — a lehető legszélsőségesebbek. Fenmaradásuk érdekében a küzdelem sikerét nyilván az életbeli követelmek és ami ezzel együtt jár, a tagoknak hasonló arányban való csökkentésével (reductiójával) biztosíthatják leginkább. Eddig ismert alakjai gyűjtőinek, megfigyelőinek és leíróinak közléseiben minduntalan olvashatjuk a nagy szárazság, majd mohában bővelkedő vizes, általában sovány, sőt sivár talaj felemlegetését, még a tropusok buja világában is,

<sup>1</sup> «... the whole length of the frond being perfectly uniform externally»: 23. 495.

hogy azután ez a *Schizaea* sokszor a legmagasabb rendű növényzet egyedüli képviselője gyanánt tengődjek (*Sch. australis*).<sup>1</sup>

Az alkalmazkodás, vagyis a minden vonalon való csökkentés teljes érvényesítése mellett a kellő védelmet első sorban a mindig jól kifejlődött kerületi stereoma nyújtja, «fajonként» különböző kerületi formákkal ugyan, de lényegileg mindig azonos szerkezettel.

KAMERLING (35), a leideni botanikus laboratóriumban igen érdemes bűvartársam, legújában veti fel a kérdést, hogy voltaképp mely növények tekintendők xerophytonok gyanánt? Mert valóban igaz, hogy a növénybiológiában és a physiologiai anatómiában a xerophytont és a xerophilus szerkezetet illetően alig van más fogalom, amit oly gyakran s minduntalan oly eltérő felfogással használnának. WIESNER meghatározása (36. 82) talán a Josténál (37. 61) megfelelőbb, mely szerint xerophyton az a növény, amely «száraz talajon él s a transpiratio korlátozására képes.»

A xerophilia kérdése valóban mindmáig a physiologiai-anatómiai és a növényföldrajzi felfogás között ingadozik és KAMERLING, a Brasília és Java trópusi vidékein sokat tapasztalt természetbűvár illetékesen fejt meg ezt a kérdést, oly meghatározással, amely a Schizaeák physiologiai-anatómiai és növényföldrajzi megfigyeléseinek összegét teljes mértékben fedi. Szerinte «xerophyton az a növény, amely rendes életkörülményeihez képest kevés vízzel beéri és amely ennek következtében a szárazsággal (vagyis a «vizinséggel») szemben nagy ellenállásra képes (35. 434). Ily formán a KAMERLING-féle meghatározás súlypontja valóban physiologiai jellegű.

Ez alapon a Schizaeák szervezetében elvégre élénk transpiratióra valló stomatorius léczek «physiologiai növényföldrajzi szempontból» való látszólagos ellenmondása (1. 1106. sub 7. pont; — 38. 7) teljesen megszűnik és a Pectinatae-beli Schizaeák önkéntelenül eszünkbe juttathatják a CAREXek életét,

---

<sup>1</sup> «Habit. Lord Auckland's group; upland places, very common on the hard soil, which is often bare of any vegetation but Lichens.» HOOKER in 30. Part I. p. 111.

amely általában vízben bár dús talajhoz köti tagjait, gyakran szorul a teljes szárazsággal, sőt hideggel járó sivársággal való megküzdésre is, minthogy hőmérsék és víz dolgában merőben ellentétes viszonyok közé kerülhet a földkerekség változó helyein.

Ilyenek a Schizaeák, fokozottan Pectinatæbeli tagjai, amelyek növényföldrajzi szélsőségeikkel még a Schizaeák körében is «vezetnek.»

A létért való küzdelem hatása megnyilatkozik a fajok és fajváltozatok kiformalódásában. A növény termőhelye az állandó, a növény maga azonban a változó tényező; ez utóbbi természetszerűleg alkalmazkodik az állandóhoz és KAMERLING arra a következtetésre jut, hogy ez a felfogás valóban érvényesül egyazon faj különböző változatainál; ezek a környezet befolyása alatt keletkezett helyszini változatok, race-ok és modificatiók (35. 453).

Ilyenekül tekintendők a Pectinatæbeli Schizaeák mind.

A «Schizaea fistulosa» alak-körén belül közvetlenül a *Sch. australis* és a *Sch. malaccanán* érzik meg a fajformálódás kezdő hatása, fokozottabb mértékben a *Sch. robustán*, majd a *Sch. Hallierin*, hogy azután Pectinatæ-beli fajformálódások jelen állapota szerint külön vált típusokká legyenek a *Sch. pusilla*, a *Sch. tenella*-éhoz mérten kiválóbban a *Sch. pectinata* és végül a *Sch. rupestris*.

Xerophilia tekintetében az összes palaeotropikus *Schizaeae* között a *Sch. rupestris* esett át a legnagyobb physiologiai változáson és úgy van, hogy lényegesen eltérő életbeli viszonyainak hatása alól a «szerkezet» (structura) sem vonhatta ki magát; elegendő e helyt, áthasonító rendszerén kívül, fajlagosan jellemző stomatorius léceinek sajátos kialakulására utalnom (2. 816—19: Tab. VII. fig. 22, 25—27; HOOKER: Gard. Ferns Tab. 42).

A zavartalan assimilatio feltételének láncz-szemeként ez a fajformálódás csúcspontjai: az Elegantes-csoport alaktanilag is legfejlettebb Schizaeái felé vezet a neotropikus tájakon (2. 825 és köv. l.).

A legegyszerűbb szervezethez származtatjuk az összetetteket. Ez alapon a Schizaeák között a Pectinatæbeliek volnának az «ős formák», mint afféle kezdetleges alakok.

Növényöslénytani tudásunk azonban e tekintetben még most nincs igen segítségünkre, mert a biologia tanulásaiból vont következtetések szerint a *Pectinatæ* beli *Schizaea* az amerikai (virginiai) alsó krétakorbeli *Schizaeopsis expansa* (FONT.) BER.-nál (39. 193—98. Pl. XII) nyilvánvalólag ősbibb.

A *Schizaeopsis expansa* helyesen restaurált képe (39. 196) ugyanis az első pillantásra elárulja az «Elegantes»-beli jelleget, következésképp azt, hogy a manapság is kizárólagosan neotropikus *Elegantes* beli Schizaeák krétakori őse is a *Schizaeopsis expansa* képeben *Elegantes* beli volt, villásan tagolt és már is feltűnően széles lemezzel, ám a *Lygodiumra* emlékeztető spórakkal (sporæ tetraëdrico globosæ)!

A Schizaeáknak a palaeozoicumból való ismerete ma még nyílt kérdés (40. 423).

A karbonból ismeretes *Senftenbergia elegans* CORDA-ban — akár ZEILER véleményéhez csatlakozunk, aki ezt a Schizaeákhoz számítja; akár a SOLMS-LAUBACHÉ-t fogadjuk el, aki *Marattiacea*-félé-t lát benne — kizárt dolog a *Pectinatæ*-beli *Schizaea* benne való megnyilatkozása, már azért is, mert ZEILER főleg a *Lygodiummal* hasonlítja össze; még kevésbé lehet szó ez esetben a jurakorbeli *Klukia*-ról (41. [164] 22), melynek a Schizaeákhoz való tartozása kétségtelen és amelynek egyik típusos és termő példáját (*Klukia exilis* PHIL.) Krakó (Kraków) vidékén a Liasban fedezték föl (42. 189).

Ezek szerint palaeontologiai tudásunk a *Schizaeabeli* «ősforma» ismeretével ma még adósunk.

A biologus egy szempillantásra látja és a kövületekről kétségtelenül leolvashatja azt, hogy az őslénytaniilag eddig ismert Schizaeák valamennyie, egy-egy *Pectinatæ* beli Schizaeához képest, már a nevezett geologiai korszakokban is jóval magasabb fokozatra jutott el a phylogeniai fejlődés létráján; jöllehet a ma élőkről viszont tudjuk, hogy a *Pectinatæ*-beli Schizaeák a Schizaeák elemi formái és hogy származásitanilag belőlük formálódott ki, a *Bifidæ*-csoporttal folytatódólag, valamennyi *Schizaea*.

Leiden ('s Rijks Herbarium), 1914. évi junius hó 2.

VI. A)

A vonatkozó irodalom összefoglalása.

1. RICHTER ALADÁR, Két új Schizæáról és a Schizæák *Lophidium-algenusa* néhány tagjának származás- és alkattani viszonyairól. — M. T. A., Mathem.-Természettud. Értesítő XXIX. 1911. köt. 4. füzet. 1074—1108. 1-in, X—XIII (az utolsó kettős) táblával.

2. RICHTER ALADÁR, Átszellőztető és a mechanikai rendszer correlatiója a Schizæák szervezetében. — M. T. A., Mathem.-Természettud. Ért. XXX. 1912. köt. 5. füz. 797—842. 1-in, V—IX. táblával. Akad. székfogl. érték.

3. HALLIER, HANS, Die botanische Erforschung Mittelborneos. — Naturwiss. Wochenschrift. Bd. XI. 1896. Nr. 7, 8, 9, 10.

4. CHRIST, H., Filices Bornenses. Fougères recueillies par les expéditions des MM Nieuwenhuis et Hallier dans la partie équatoriale de Borneo. Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Vol. XX. 2-ème Sér. Vol. V. 1906. p. 140.

5. PRANTL, K., Untersuchungen zur Morphologie der Gefässkryptogamen. II. Heft. Die Schizæaceen, morphologisch u. systematisch bearbeitet. Mit 8 Tafeln u. 1 Holzschnitt. Leipzig, 1881.

6. RADLKOFER, L., Ueber die Methoden in der botanischen Systematik, insbesondere die anatomische Methode. Festrede, gehalten in der öffentl. Sitzung der kön. Akademie der Wissensch. zu München am 25. Juli 1883. — München, 1883.

7. CHRIST, H., Die Geographie der Farne. Verl. v. Fischer, Jena, 1910.

8. LABILLARDIÈRE, J. J., *Novæ Hollandiæ Plantarum specimen*. Parisiis, Tom. II. 1806. p. 103.

9. HOOKER-BAKER, *Synopsis Filicum*, London, 1868.

10. CHRIST, *Die Farnkräuter der Erde*, Jena, 1897.

11. BENTHAM-MUELLER, *Flora Australiensis*, London, 1863—1878.

12. CHRISTENSEN, C., *Index Filicum*. Hafniæ, 1906.

13. CHEESMANN, T. F., *Manual of the New-Zealand Flora*. New-Zealand, 1906.

14. BAKER, *Ferns collected in Madagascar by M. HUMBLÖT*. — *Journ. of Botany*, Vol. XXII. 1884.

15. PHILIPPI, R. A., *Plantarum novarum Chilensium Centuriæ sextæ continuatio*. — *Linnæa* Vol. XIV. 1859—60.

**16.** HILLEBRAND, W., Flora of the Hawaiian Islands. London—New-York—Heidelberg, 1888.

**17.** DRAKE DEL CASTILLO, Flore de la Polynésie française. Paris (éd. G. Masson), 1893.

**18.** GAUDICHAUD, M., Rapport sur la Flore des îles Malouines. — Ann. Sc. Natur. Tom. 5-ème, 1825.

**19.** DIELS, L., Die Pflanzenwelt von West-Australien südlich des Wendekreises. In ENGLER-DRUDE: Die Vegetation der Erde. Bd. VII. Leipzig, 1906.

**20.** WARBURG, O., Beiträge zur Kenntnis der papuanischen Flora. — Engler's Botan. Jahrb. Bd. XIII. 1891.

**21.** HALIER, H., Über frühere Landbrücken, Pflanzen- und Völkerwanderungen zwischen Australasien und Amerika. — Mededeelingen van 's Rijks Herbarium, Leiden, 1912. Nr. 13.

**22.** BOODLE, L. A., On the Anatomy of the Schizæaceæ. — Ann. of Botany, Vol. XV. 1901.

**23.** TANSLEY, A. G. and CHICK, EDITH: On the structure of Schizæa malaccana. Ann. of Botany, Vol. XVII. 1903.

**24.** BOODLE, L. A., Further observations on Schizæa. — Ann. of Botany, Vol. XVII. 1903.

**25.** JEFFREY, E. CH. The structure of the stem in the Pteridophyta and Gymnosperms. — Philos. Transact. Ser. B. 1903. Vol. 195.

**26.** BOODLE, L. A., Comparat. Anatomy of the Hymenophyllaceæ, Schizæaceæ and Gleicheniaceæ. — Ann. of Botany, Vol. XIV. 1900. Nr. LV.

**27.** RUSSEW, ED., Vergl. Untersuch. d. Leitbündel — Kryptog. etc. Mém. de l'Acad. imp. d. Sc. St. Petersb. VII. Sér. T. XIX. 1872. Nr. 1.

**28.** PETIVER, JACOBI, Opera Hist. Natur. Spect. London, 1767. Garoph. Nat. et Artis Decas sept.

**29.** PRESL, C. B., Suppl. Tentam. Pteridogr. Pragæ, 1845.

**30.** HOOKER, J. D., The Botany of the Antarctic Voyage of H. M. Discovery Ships Erebus and Terror in the years 1839—1843 etc London, 1847. — Flora Antarctica. Part I. II.

**31.** LUERSSSEN, CHR., II. Gefässkryptogamen in WAWRA: Beitr. zur Flora der Hawai'schen Inseln. — Flora, Jahrg. 58. (1875) p. 419.

**32.** BAKER, J. G., Report on a collection of ferns made in the North of Borneo by Mr. F. W. BURBIDGE. — Journ. of Botany, New Ser. Vol. VIII. 1879.

**33.** DIELS, L., Schizæaceæ. — In ENGLER-PRANTL: Natürl. Pflanzenfamil. Teil I. (1902) Abt. 4. p. 362.

**34.** BOWER, F. O., Studies in the Morphology of Sporeproducing Members. IV. The Leptosporangiate Ferns. Philos. Transact. 1900.

**35.** KAMERLING, Z., Welche Pflanzen sollen wir «Xerophyten» nennen? — Flora od. Allgem. Botan. Zeit. Neue Folge. Bd. VI. 1914. Heft 4.



36. WIESNER, J., Biologie der Pflanzen, Wien, 1889.
37. JOST, L., Vorlesungen über Pflanzenphysiologie. Aufl. 3. Jena, 1913.
38. SCHIMPER, A. F. W., Pflanzengeographie auf physiol. Grundlage. Jena, 1898.
39. BERRY, EDW. W., A Lower Cretaceous Species of Schizæaceæ from Eastern North America. — Ann. of Botany, Vol. XXV, 1911. Nr. XCVII. Jan.
40. JONGMANS, W. J., Palæobotanik, — in HINNEBERG, P., Kultur der Gegenwart (Abstammungslehre. Systematik. Paläontologie. Biogeographie) 1914. Teil III. Abt. IV. 4.
41. RACIBORSKI MAR., Flora Kopalna Ogniotrwałych Glinek Krakowskich. II. Krakowie, I. 1894. — RACIBORSKI ma a legkiválóbb lengyel botanikus; munkálatának nemzetközi tudományosságra nézve hozzáférhetetlen nyelven való megjelentetéseu méltán sajnálkoznak Hollandiában és máshol is.
42. ZEILER, R., Les Progrès de la Paléobotanique de l'ère Gymnospermes. — Progressus Rei Botanicæ. Bd. II. 1907.

## VI. B)

## A vizsgálat tárgyát tevő herbariumi példák tüzetes sorozata.

A sorszám szerinti jelzések megfelelnek a szövegben előforduló és rendszerint zárójelben foglalt hasonló jelzéseknek.

*H*<sub>1</sub>. *Sch. fistulosa* LABILLARDIÈRE. — Spec. Orig. in Herb. Willden. sub Nr. 19486 in Herb. Mus. Botan. Berolin. ex Nova-Hollandia! (8).

*H*<sub>2</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. — Van Diemen. In Herb. Lugd. — Batav.!

*H*<sub>3</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. — SCHLECHTER: Iter Neo-Caledonicum. Nr. 14753. Auf den Bergen bei Jaouhé, 600 m. leg. SCHLECHTER, 22. IX. 1902. In herb. Lugd.-Batav.!

*H*<sub>4</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. — E. PRITZEL: Plantæ Australiæ occidentalis. Nr. 251. District South West Plantagenet. In fruticetis collium humidiorum haud procul mare. I. 1901. In herb. Lugd.-Batav.!

*H*<sub>5</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. — Gippsland! in herb. Kew. «This curious little fern is rather rare on the wet sandy plains in this neighbourhood called Heathy Plains where I collected it 10. Dec. 1836, and also again in this season. I am anxious to know the name of this ferns: R. Gum» — mscr. in herb. Kew.!

*H*<sub>6</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. Phytol. Museum of Melbourne. — Reise Sr. M. S. Saida 1891. Oakleigh, Port Phillip. 6. 90. Br. F. v. MUELLER! Herb. Prof. Dr.-is AL. RICHTER.

*H*<sub>7</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. R. HELMS: Flora Zelandica: Grey-mouth! In

herb. Prof. Dr.-is AL. RICHTER. — HELMS egy másik, 1884-ből való n.-zealandi példája (Papavon, Range, inter lapides in apertis) megvan BONAPARTE ROLAND herczeg párisi herbariumában is, a következővel együtt:

*H*<sub>8</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. — BONATI: New Caledonia. Mont Koghi, 1906. Nr. 474. — Mont Mon, 1000 m. 1908. Nouméa; ez utóbbi CHRIST egykori meghatározása szerint = *Sch. propinqua* A. CUNNINGH. Ez az elnevezés azonban a *Sch. fistulosa* synon.-ja csupán (5. 135; 9. 429 in part.); 12. 617. Láttam továbbá:

*H*<sub>9</sub>. *Sch. fistulosa* LABILL. N.-Zealand: Manukau-Waiaku, HOCHSTETTER 1859, Nr. 89 in herb. Vindob. ! PR. ! (= vidit PRANTL.!).

*H*<sub>10</sub>. *Sch. valdiviana* PH. sub Nr. 14. Corral et sub *Sch. valdiviana* HOOK. Chili (Valdivia) ex herb. R. BONDAM, in Herb. Lugd.-Batav. — sub: *Sch. fistulosa* var. *chilensis* sec. ROSENSTOCK, 1910.

*H*<sub>11</sub>. *Sch. valdiviana* PHILIPPI. — Chili, H. KRAUSE detexit anno 1857. — In herb. Kew. ! (15). Ugyancsak KRAUSE-féle példák láthatók URBAN, illet. DÖRFLER révén BONAPARTE ROLAND herczeg párisi gyűjteményében is, akinek Schizæa-collectiója a világon nyilván a leggazdagabb.

*H*<sub>12</sub>. *Sch. chilensis* PHIL. — An *Sch. palmata* HOMBR. Voy. Pôle du Sud, t. 4. f. 2. ? rhizoma in fig. dense hirsutum, Cordillera pelada. Jan. 1865. — In herb. Kew. sub *Sch. fistulosa* LAB. Herb. Chilense. Purchased of Mr. E. C. REED, Dec. 1873!

*H*<sub>13</sub>. *Sch. chilensis* PHIL. — Corral 6. 84. Nr. 808 ex herb. PEARCE in herb. Kew. !

*H*<sub>14</sub>. *Sch. australis* GAUD. — Plant. antarctic. HOOKER fil. in Herb. Lugd.-Batav. !

*H*<sub>15</sub>. *Sch. australis* GAUD. — Ins. Auckland. M. le GUILLOU in herb. Lugd.-Batav. !

*H*<sub>16</sub>. *Sch. australis* GAUD. — Lord Auckland Islands. Nov. 1840. Coll. HOOKER fil. in herb. Kew. ! (30).

*H*<sub>17</sub>. *Sch. robusta* BAKER. — Nr. 2246. Plants of the Hawaiian Islands. — Collected on the Island of Oahu, on and near the summit of Kanahuanui, by A. A. HELLER, May. 2, 1895. In herb. Kew. ! (16. 543).

*H*<sub>18</sub>. *Sch. robusta* BAKER. — Dr. HILLEBRAND, Sandwich-islands. Nr. 111. Summit of high mountain on West Maui. In herb. Kew. ! (16. 543). Loc. cl.

*H*<sub>19</sub>. *Sch. robusta* BAKER. — Erdumseglung S. M. Fregatte «Donau» 1868—71. — WAWRA: Nr. 2160. Hawaische Inseln: Kauai, Waialeale 8000 angol láb magas plateau alatt, mohák között. In herb. Vindob. ! et PRANTL !

*H*<sub>20</sub>. *Sch. tenella* KAULF. — Prom. bon. spei. GURINZIUS, 1853. in herb. Vindob. et in herb. Lugd.-Batav. ! et PR. !

*H*<sub>21</sub>. *Sch. pectinata* J. E. SM. — Exped. Nowara: Nr. 158. Cap b. spei. JELLINEK, in herb. Vindob. ! PR. !

*H*<sub>22</sub>. *Sch. pectinata* J. E. SM. — Flora Africæ australis. Hab. prom. bonæ spei. Abhang des Devilspeak. Nr. 3898. WILMS in herb. Lugd.-Bat. !



*H*<sub>23</sub>. *Sch. pusilla* PURSH. — Ex Herb. W. ALDWORTH POYSER. Egg Harbor, New-Jersey, 13. X. 1909!

*H*<sub>24</sub>. *Sch. pusilla* PURSH. — Ex Herb. D. C. EATON. New-Jersey. Dr. J. TORREY (ravissima)! PR.!

*H*<sub>25</sub>. *Sch. malaccana* BAKER. — Mount Ophér, on trees, W. S. C. PINWELL, 3. 77. In herb. Kew.!

*H*<sub>26</sub>. *Sch. malaccana* BAKER. — Herb. of the late A. C. MAINGAY, M. D. Nr. 3217. — Malacca, 1867—68. — Nr. 1819 in herb. Kew.!

*H*<sub>27</sub>. *Sch. malaccana* BAKER. — G. Bukò 5000 ft, Nov. 1877. — Nr. 44 in herb. Kew.!

*H*<sub>28</sub>. *Sch. malaccana* BAKER. — Collected by ROD. father SCORTECHINI. Nr. 750 in herb. Kew.!

*H*<sub>29</sub>. *Sch. Hallieri* AL. RICHT. — Archipel. Ind. Borneo: S. Kenepai, leg. H. HALLIER. Nr. B. 2150 sub «*Sch. fistulosa*». det. CHRIST 1905 per commun. ex herb. Hort.-Bot. Bogor. Nr. 41 et 73, in herb. Lugd.-Batav.!

*H*<sub>30</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — R. Brown: Iter Austral. 1802—5. Nr. 112 in herb. Kew.!

*H*<sub>31</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — Australia N. S. W. Botany Bay, leg. WILHELMI, in herb. Kew.!

*H*<sub>32</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — Nation. Herb. of New South Wales: Port Jackson Distr. Coll. J. H. CAMFIELD, in herb. Kew.!

*H*<sub>33</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — Australia: Hiwara, ad fluvium Paramatta, in dicione Argyle: HÜGEL, in herb. Kew.!

*H*<sub>34</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — SIEBER: Fl. Novæ Holl. Nr. 620 in herb. Kew.!

*H*<sub>35</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — New Holland: R. BROWN in herb. Vindob.!

*H*<sub>36</sub>. *Sch. rupestris* R. BR. — Nova Hollandia: CALEY, in herb. Vindob.! — Ált. felette fogyatékos példányokban. BONAPARTE ROLAND hercegé felülmulja a bécsieket, a kew-iakat mind. Leidenben hiányzik.

---

(A M. tud. Akadémia III. osztályának 1914. június 18.-án tartott üléséből.)

## VII.

### Ábra-magyarázat.

<i>v</i>	a levél fonákbeli (hasi = ventralis) oldala,	
<i>d</i>	a « színbeli (háti = dorsalis) oldala,	
<i>ks</i>	kovasavas szemölcs	} <i>sr</i> kerületi stereoma,
<i>c</i>	cuticula	
<i>e</i>	bőrszövet (epidermis)	
<i>h</i>	bőralatti stereoma	
<i>s</i>	légzőnyílások (stomata)	} átszellőztető rendszer,
<i>u</i>	légudvar	
<i>k</i>	kapocs-sejtek (Zwischen-zellen : PRANTL = intercellular cells : TANSLEY-CHICK)	
<i>ch</i>	chlrenchyma (mesophyllum = alap-parenchyma)	[áthasonító rendszer,
<i>ed</i>	endodermis	
<i>p</i>	parenchyma-hüvely	} <i>st</i> Stele = központi oszlopszövet,
<i>hr</i>	hadroma (hydroma)	
<i>tr</i>	hágcsós tracheidek	
<i>sp</i>	spiralis és hálós tracheidek	
<i>lp</i>	leptoma (plastoma)	
<i>cs</i>	szítás csövek	
<i>r</i>	háncrest-sejtek	
<i>np</i>	nyaláb-parenchyma	
<i>km</i>	keresztmetszet,	
<i>hm</i>	hosszmetszet, <i>h</i> hosszú, <i>sz</i> széles	
	nagy. = nagyítás,	
	± = többé-kevésbé.	

### III. TÁBLA.

- Fig. 1. *Schizaea fistulosa* (chilensis :  $H_{10}$ ) termő levelének közepe tájáról k. m. — Nagy. 120.
- « 2. *Sch. fistulosa* (chilensis :  $H_{10}$ ) termő levelének alsó részéből k. m. — Nagy. 80.
- « 3. *Sch. fistulosa* ( $H_4$ ) levelének alsó részéből a stele k. m.-e. — Nagy. 360.
- « 4. *Sch. fistulosa* ( $H_2$ ) sorophoriája :  $s_i$  —  $s_r$  —  $s_x$  = termőlemezekék (sorophoralis lemezek = sporangiophyllumok = sporophyllumok = sorophori laciniae PRANTL). — Nagy. 6.
- « 5. *Sch. Hallieri* ( $H_{29}$ ) sorophoriája. Betűjelzés mint fent. — Nagy. 5.
- « 6. *Sch. fistulosa* (chilensis :  $H_{10}$ ) spórája oldalvást. — Nagy. 180.

## IV. TÁBLA.

- Fig. 7. *Sch. fistulosa* ( $H_3$ ) termő levele közepe tájékáról k. m. — Nagy. 80.  
 « 8. *Sch. fistulosa* ( $H_4$ ) termő levele közepe tájékáról k. m. — Nagy. 80.  
 « 9. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) levelének bőrszövetéről, platinacsészén való izzítás után: *ks* kovasavas szemölcsök oldalvást, *ksf* ugyanazok felülről. — Nagy. 360.  
 « 10. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) stomatorius léczének felületi képe. — Nagy. 160.  
 « 11. *Sch. fistulosa* ( $H_2$ ) termő levelének közepe tájáról légző-nyílás k. m. — Nagy. 355.  
 « 12. *Sch. fistulosa* ( $H_2$ ) spórája oldalvást. — Nagy. 180.  
 « 13. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) spórája: *a*) háti oldalról, *b*) oldalvást. — Nagy. 180.

## V. TÁBLA.

- Fig. 14. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) termő levelének közepe tájáról k. m. — Nagy. 120.  
 « 15. *Sch. australis* ( $H_{16}$ ) spórája: *a*) háti oldalról, *b*) oldalvást. — Nagy. 180.  
 « 16. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) termő levelének alsó zónájából k. m. — Nagy. 80.  
 « 17. *Sch. tenella* ( $H_{20}$ ) spórája oldalvást. — Nagy. 180.  
 « 18. *Sch. australis* ( $H_{14}$ ) levele alsó zónájáról vett k. m. — Nagy. 80.  
 « 19. *Sch. australis* ( $H_{14}$ ) levele középső tájékáról vett k. m. — Nagy. 120.  
 « 20. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) levele felső zónájából vett k. m. vázlatosan.  
 [*hr* vonala a félholdszerű görbületig (= hadroma) hosszabbítandó].

## VI. TÁBLA.

- Fig. 21. *Schizaea Hallieri* m. ( $H_{20}$ ), a tábla adott méretei miatt a megszakított helyeken rövidítve, egyébként természetes nagyságban.  
 « 22. *Sch. tenella* ( $H_{20}$ ) termő levelének közepe tájékáról k. m. — Nagy. 80.  
 « 23. *Sch. tenella* ( $H_{20}$ ) termő lemezkéinek szörképletei, illet. papillái (papillæ elongatæ Pr. 5. 135). — Nagy. 80.  
 « 24. *Sch. Hallieri* ( $H_{20}$ ) termő lemezkéinek csúcsáról papillaszerű szörképletek. — Nagy. 80.  
 « 25. *Sch. pectinata* ( $H_{21}$ ) termő lemezének szörképletei. — Nagy. 80.  
 « 26. *Sch. malaccana* ( $H_{26}$ ) termő levelének közepe tájáról vett. k. m. — Nagy. 80.  
 « 27. *Sch. malaccana* ( $H_{27}$ ) spórái: *a*) háti oldalról, *b*) oldalvást. — Nagy. 180.  
 « 28. *Sch. robusta* ( $H_{18}$ ) spórái: *a*) háti oldalról, *b*) oldalvást. — Nagy. 180.

Fig. 29. *a—b*) *Sch. fistulosa* ( $H_1$ ) levele dereka tájáról vett vázlatos k. m.-i képek.

« 30. *Sch. pectinata* ( $H_{22}$ ) spórája oldalvást. — Nagy. 180.

« 31. *Sch. pusilla* ( $H_{23}$ ) spórája oldalvást (spora areolata). — Nagy. 180.

## VII. TÁBLA.

Fig. 32. *Sch. robusta* ( $H_{19}$ ) termő levelének közepe tájékáról vett k. m. — Nagy. 80.

« 33. *Sch. robusta* ( $H_{19}$ ) termő lemezének fonákáról bőrlevonat, légzőnyilásokkal. — Nagy. 80.

« 34. *Sch. robusta* ( $H_{19}$ ) levelének dereka tájáról bőrrendszer k. m.-e, a légzőnyilások ( $s_1—s_2$ ) reduplicatiojával. — Nagy. 360.

« 35. *Sch. fistulosa* ( $H_1$ ) légzőnyilásának k. m.-e a levél dereka tájáról. — Nagy. 160.

« 36. *Sch. fistulosa* ( $H_1$ ) termő lemezének papillás szegélyrészlete. — Nagy. kb 50.

« 37. *Sch. rupestris* ( $H_{32}$ ) spórái: *a*) felülről, *b*) oldalról. — Nagy. 180.

« 38. *Sch. robusta* ( $H_{17}$ ) termő levelének közepe tájáról vázlatos k. m. — Nagy. 31.

*Megjegyzés:* Ezt megelőző *Schizaea*-tanulmányaimban kifejeztem elégedetlenségemet a felett, hogy általában pontos ábrázolataim lithographiai másolatai ki nem elégítők [Math. Term.-tud. Ért. XXX. köt. 822. l.-on alul sub <sup>1</sup>]. A BANNWARTH-Wien-beliek, vagyis a jelen értekezés táblái jobbak, de még mindig nem kifogástalanul pontos sokszorosítások, aminek ez idő szerint ki nem kerülhető oka az, hogy a világszerte dúló háború a lithographiai mesteri erőket is elvonja. R. A. Bécs, 1915. VII. 15.

KISÉRLETI TANULMÁNYOK  
AZ EÖTVÖS-FÉLE GRAVITÁCIÓS CSAVARÁSI MÉRLEG  
ZAVARAIRÓL.

PEKÁR DEZSŐ-től.

Az Eötvös-féle gravitációs eszközökkel a szabadban az első rendszeres felvétel 1901-ben a Balaton jegén történt. Ez időtől kezdve a mérések tovább is rendszeresen folynak és pedig egyre szélesbedő mederben. Ezzel együttjárt az eszközök tökéletesítése egyrészt abban az irányban, hogy azok lehetőleg gyorsan és könnyen kezelhetőek legyenek, másrészt pedig különösen abból a szempontból, hogy azok ne csak a laboratóriumban, hanem a szabadban, a jóval kedvezőtlenebb viszonyok között is megbízható, kifogástalan eredményeket adjanak.

Ez utóbbi kívánság, tekintettel az eszközök nagy érzékenységre, meglehetősen kényes és nagy feladat. Mind a mellett a most használatos eszközök tényleg megfelelnek e kívánalomnak, ha gondoskodunk arról, hogy azokat a gyors hőmérsékletváltozásoktól megvédjük. Éppen ezért magát az eszközt kettős vízhatlan vászonzalú, faforgácssal bélelt sátorban állítjuk fel, a megfigyeléseket pedig éjjeli órákban végezzük. Az ilyen éjjeli megfigyelés-sorozat, ritka, kivételes esetektől eltekintve, a megkívánható pontosságot teljesen kielégíti. Derült időben azonban, a reggeli órákban a napfelkeltével járó hirtelen melegezés miatt, az adatok nem egyszer teljesen hasznavehetetlenek, amiért is a számításra kizárólag a tulajdonképeni éjjeli adatokat használhatjuk és tényleg csupán azokat használjuk fel.

Professorom báró Eötvös Loránd úr ó excellentiájának ajánlatára rendszeres kísérleteket végeztem a hőmérsékletváltozás zavaró hatásának tanulmányozására. Kedves kötelességemnek tartom, hogy hálás köszönetemet fejezzem ki nagybecsű tanácsaiért, a melyekkel vizsgálataimat támogatni kegyeskedett.

Professorom már több ízben végeztetett kísérleteket e kérdésre vonatkozólag, a melyek azonban főleg azt czélozták, hogy a zavaró hatást miként vehetnők számításba, illetve hogy a hőmérsékleti adatok alapján magukat az észlelési adatokat miként korrigálhatnók.

Saját kísérleteimmel a kérdésnek egy másik, hogy úgy mondjam gyakorlatiasabb részét kívántam megoldani. Az eszközök ugyanis, a mint azt még az alábbiakban tárgyalni fogom, a hőmérsékleti hatásokra különböző és pedig nagyon különböző mértékben érzékenyek. Kikutatni kívántam, hogy az eszközök micsoda szerkezeti különbségei okozzák ez érzékenységi eltéréseket. A mennyiben pedig ennek megállapítása sikerülne, további célom természetesen az volt, hogy az eszközökön oly változtatásokat végezzek, a melyek folytán azok a hőmérsékleti hatásokra lehetőleg érzéketlenek legyenek.

Fontosnak tartottam e kérdés illetén megoldását annyival is inkább, mert e mérési eljárás és az arra szolgáló eszközök mindinkább kilépnek a gyakorlati életbe. TELESZKY JÁNOS pénzügyminiszter úr ő excellentiájának legújabb, messzekiható intézkedései alapján az Eötvös-féle torsiós mérleggel való megfigyelés ugyanis a gyakorlati bányakutatás keretébe már költségvetésileg felvétellett. A gyakorlat céljait szolgáló eszközökön pedig a zavaró hatások kiküszöbölése mindenesetre nagy jelentőségű.

## 1. Az eszközök és azok használatának rövid ismertetése.

Mielőtt tulajdonképeni vizsgálataimra térnék, a használt eszközökre vonatkozólag kell egyetmást elmondanom. A részleteket illetőleg utalok Eötvös LORÁND báró úr eredeti értekezésére,<sup>1</sup> a melyekben úgy a módszer elméletét, valamint a fokozatosan fejlődő eszközök leírását megtaláljuk.

<sup>1</sup> *Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köreiből*; Mathematikai és Természettudományi Értesítő. 1896. XIV. kötet.

*Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus*; Annalen der Physik und Chemie. 1896. Neue Folge. Band 59.

*Étude sur les surfaces de niveau, et la variation de la pesanteur et*

Kísérleteimet a legújabb típusú «kettős nehézségi variometerrel» végeztem és pedig a II és III jelzésű eszközzel. E variometerekben a torsiós mérleg, a lengő szerkezet olyan, mint a melyet az 1. ábrán látunk feltüntetve. Maga az ábra ugyan a régebben használatos «egyszerű variometernek», a «balatoni eszköz»-nek keresztmetszete, a mely azonban a lényegében azonos belső szerkezetet áttekinthető módon ábrázolja. Vékony, 0.04 mm átmérőjű platinadróton lóg az aluminiumból készült torsiós rúd, mely egyik oldalon lapos platinasúlyban végződik, másik végéről pedig vékony drótra függesztett hengeres platinasúly lóg alá. A rúd egyensúlyi helyzetének megállapítása tükörleolvasással, az eszközzel szilárdan egybekapcsolt táveső és skála segítségével történik. A légáramlások, a sugárzások és melegegések zavaró hatásának elkerülése czéljából a lengőszerkezetet körülvevő rézburok hármasalú. Az ábrán a középben lévő szekrény csak kettősfalú ugyan, a használt eszközökön azonban ez is hármasalú. Az eszköz függélyes tengely körül forgatható, hogy azt s vele együtt a torsiós rudat a megkívánt különböző azimuthokba állíthassuk. Két ilyen, egymáshoz képest 180°-kal elforgatott eszköz egyesítése, illetve mechanikus összekonstruálása a kettős variometer. A 2. ábra az I jelzésű kettős variometer, mely a kísérleteimben használt II és III eszköztől külsőleg csak kevéssé tér el.

Az eszközökkel közvetlenül a nehézség potenciáljának következő differenciálquotienszeit határozzuk meg:

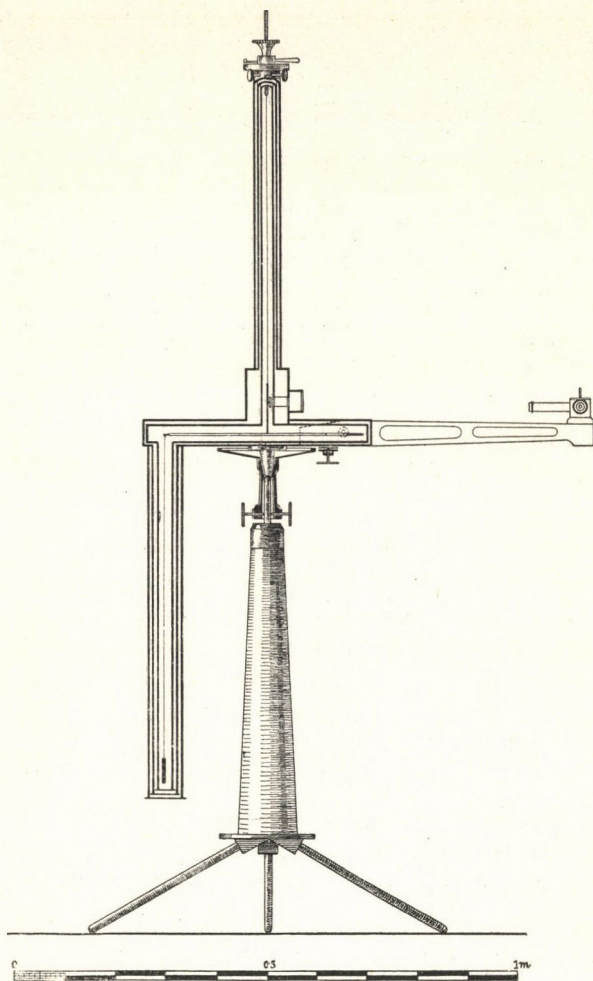
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

*de la force magnétique*; Rapports présentés au congrès international de Physique réuni à Paris en 1900. Tome III.

*Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwage*; Verhandlungen der XV. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung in Budapest 1906.

*A Balaton nivófelülete s azon a nehézség változásai*; 1908. A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei. I. kötet 1. rész. Geofizikai függelék.

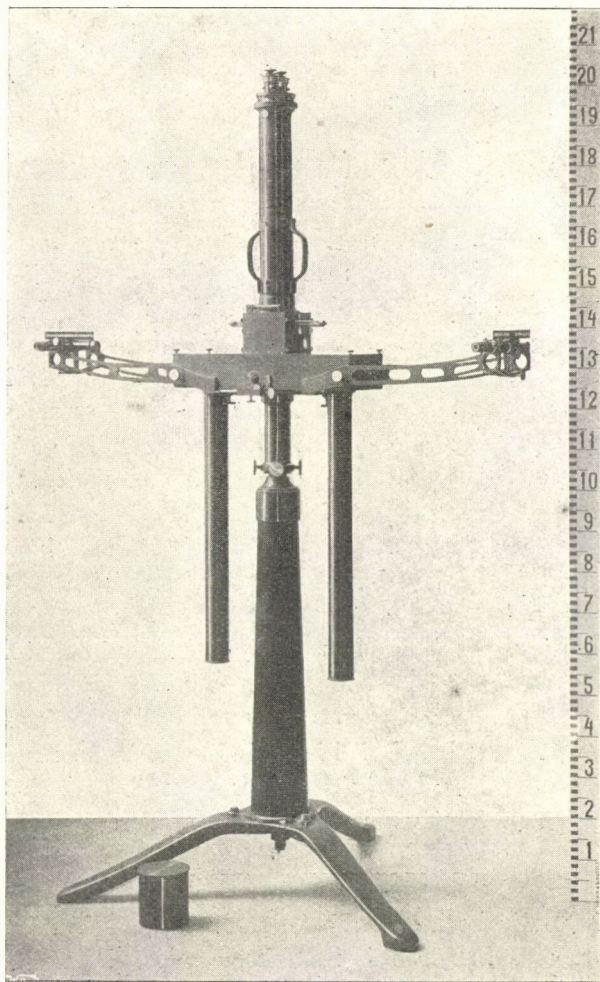
*Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn*; Verhandlungen der XVI. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung in London und Cambridge 1909.



1. ábra.

Ha három, egymással  $120-120^\circ$ -ot képező azimuthban a lengő szerkezetek egyensúlyi helyzetét leészleljük, ez adatokból az említett differenciálquotienseket kiszámíthatjuk. Természetesen szükséges, hogy az eszköz állandóit előzetesen kísérletileg meghatározzuk s azokból az eszköz formuláját megállapít-





2. ábra.

suk.<sup>1</sup> Az észleléseket a szokásos módon a mágneses meridianba állított eszköz leolvasásával, az első azimuthban, az I állásban végzett megfigyeléssel kezdjük, s innen kelet felé 120°, illetve

<sup>1</sup> Részletezve lásd az imént felsorolt értekezések közül a negyedikben.  
XXXIII

240°-ra következik a II és a III állás. Az eszközök akként vannak megszerkesztve, hogy a rudak egy óra leforgása alatt biztosan megnyugodnak, úgy hogy az észleléseket óránként végezhetjük. Az észlelési sorozatban tehát 3—3 óra múlva ugyanazok az állások ismétlődnek.

A mellékelt táblázatban a báró Eötvös LORÁND-féle expedíció észlelési naplójának két megfigyelési sorozatát közlöm. Az eddig említetteken kívül a táblázat magyarázatára még a következőket kell megjegyezni: A temperaturák rovatában a  $k$  a sátoron kívül lévő, a  $b$  a sátoron belül az eszközön lógó, az 1 és 2 pedig a megfelelő eszközök belsejébe nyúló hőmérők adatai. Az  $n$  a torsiós drót temperatura-coefficiensével a kezdeti hőmérsékletre redukált leolvasás;  $n_0$  három egymásra következő  $n$  közepe, azaz a csavaratlan drót egyensúlyi helyzete. Az 1. és 2. cső ( $n - n_0$ ) értékeiből az eszköz formulái alapján számítottuk ki a differenciálquotiensek megfelelő értékeit.

Ha az eszköz kifogástalanul működik, illetve a hőmérsékletváltozások iránt érzéketlen, akkor a visszatérő állásokban az  $n$  értékeknek, ha mindjárt nem is azonosak, de egyenletes járást kell mutatniok. Ez esetben ugyanis a kiszámított differenciálquotiensek külön-külön azonosak lesznek.

Az első borult őszi napon végzett megfigyelések még a reggeli órákban is, a kísérleti hibák határain belül, meg is felelnek e kivánalomnak. Másik példának szándékosan kiválóan derült, nyári napot választottam, a mikor a reggeli értékek és pedig különösen a  $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$  és  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  szinte szokatlanul rosszszak s így teljesen hasznavehetetlenek, a mit a külső és a sátor belsejében lévő hőmérőn is mutatkozó gyors hőmérsékletváltozás okoz. Épen ezért e reggeli értékek a középbe be nem vehetők s egyöntetűség kedvéért egyáltalán nem is vétettek számításba. Ha a választott két példától eltérőleg az éjjeli órákban is a hőmérséklet nem egyenletesen és rendszertelenül változik, akkor természetesen az éjjeli értékek sem lesznek kifogástalanok, ha mindjárt használhatóak is maradnak. Ezt tapasztaljuk különösen olyankor, a mikor a szokásos éjjeli lehülés melegedésbe megy át, vagyis a hőmérséklet járása megfordul.

Észlelés ideje	Állás	Leolvasások		Temperaturák				1. cső			2. cső			$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$	$10^9 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$
		1. cső	2. cső	k.	b.	1.	2.	n	n <sub>0</sub>	n-n <sub>0</sub>	n	n <sub>0</sub>	n-n <sub>0</sub>				
1912. nov. 9—10. <b>II. Eszköz.</b> 3148 állomás. Marosszentgyörgyi gázkút közelében.																	
9 h 0 m	III	—	—	5·9	5·9	6·7	6·7										
10 h 0 m	I	153·3	447·1	5·7	5·8	6·5	6·5	153·3			447·1						
11 h 0 m	II	158·1	443·4	5·6	5·8	6·2	6·2	158·1	153·80	+4·30	443·4	446·67	-3·27	+21·8	+2·3	+9·0	-0·1
12 h 0 m	III	150·0	449·5	5·3	5·8	6·1	6·1	150·0	153·87	-3·87	449·5	446·67	+2·83	+21·8	+2·3	+8·7	-0·3
1 h 0 m	I	153·4	447·1	5·2	5·6	6·0	6·0	153·5	153·90	-0·40	447·1	446·63	+0·47	+21·8	+2·3	+8·7	-0·3
2 h 0 m	II	158·1	443·3	5·0	5·4	6·0	6·0	158·2	153·93	+4·27	443·3	446·60	-3·30	+21·8	+2·3	+8·7	-0·3
3 h 0 m	III	150·0	449·4	5·0	5·3	6·0	6·0	150·1	153·97	-3·87	449·4	446·60	+2·80	+21·7	+2·4	+8·8	-0·4
4 h 0 m	I	153·5	447·1	4·7	5·3	5·9	5·9	153·6	153·97	-0·37	447·1	446·63	+0·47	+21·6	+2·2	+8·8	-0·4
5 h 0 m	II	158·1	443·4	4·3	5·1	5·8	5·8	158·2	154·03	+4·17	443·4	446·60	-3·20	+21·2	+2·2	+8·8	-0·4
6 h 0 m	III	150·2	449·3	4·2	5·0	5·5	5·5	150·3			449·3						
1914. aug. 1—2. <b>III. Eszköz.</b> 3637 állomás. Nagykolostól keletre.																	
9 h 0 m	III	—	—	15·5	17·0	19·2	19·2										
10 h 0 m	I	145·1	443·1	14·5	17·0	18·0	18·0	145·1			443·1						
11 h 0 m	II	146·8	443·1	12·0	15·7	17·0	17·0	146·8	145·30	+1·50	443·1	444·67	-1·57	+11·5	-4·1	-9·1	+7·0
12 h 0 m	III	143·9	447·9	10·7	14·8	16·0	16·0	144·0	145·43	-1·43	447·8	444·60	+3·20	+11·4	-4·3	-9·1	+7·0
1 h 0 m	I	145·4	443·0	10·0	14·0	15·0	15·0	145·5	145·53	-0·03	442·9	444·57	-1·67	+11·6	-4·3	-8·4	+7·0
2 h 0 m	II	147·0	443·1	7·8	13·0	14·1	14·1	147·1	145·57	+1·53	443·0	444·53	-1·53	+11·6	-4·3	-8·2	+6·8
3 h 0 m	III	144·0	447·9	7·3	11·9	13·1	13·1	144·1	145·63	-1·53	447·7	444·53	+3·17	+11·7	-4·1	-2·5	+11·7
4 h 0 m	I	145·5	443·1	6·4	11·1	12·2	12·2	145·7	146·33	-0·63	442·9	445·10	-2·20	+12·9	-4·1	-39·5	+11·7
5 h 0 m	II	149·0	444·9	9·7	11·6	11·7	11·7	149·2	148·80	+0·40	444·7	447·80	-3·10				
6 h 0 m	III	151·3	456·0	16·0	14·9	12·5	12·6	151·5			455·8						

## 2. Az eszközök összehasonlítása az expedíciós észlelések alapján.

Mindenekelőtt kritikai tanulmány tárgyává tettem az expedíciós észlelési naplóban bőven rendelkezésemre álló adatokat, és pedig különösen a derült napokon végzett megfigyeléseket. Ilyenkor általában éjjel a hőmérséklet fokozatosan csökken, reggel azonban, napfelkelte után megfordul és hirtelen emelkedik. Ezzel együtt jár az egyensúlyi helyzetek nagyfokú eltolódása, az eszköz tetemes *«járása»*. Az adatok durva egybevetéséből is láthatjuk, hogy a járáások *körülbelül* a hőmérsékletváltozás sebességével együtt mennek. Pontos megegyezést nem is várhatunk, mert hiszen már az óránként leészlelt hőmérsékletek sem adják meg a hőmérsékletváltozás sebességének igazi mértékét és magára az eszközre sem lényegtelen, hogy valjon az észlelt hőmérsékletváltozás a közbeeső órában egyenletesen történt, vagy pedig például csupán az utolsó negyedórában jött létre. Hozzávetőleges tájékozódásra az adatok mégis alkalmasak.

Kiszámítottam ugyanis, hogy az eszközön lógó belső hőmérő adatai alapján — a hőmérsékletfordulat utáni hirtelen melegedés idejében — egy óra alatti egy fok temperatura emelkedésnek megfelelőleg mekkora az eszközök járása. Az egymástól meglehetősen eltérő adatok *közéértékei* osztályrészekben kifejezve, az 1914. évre a következők:

II Eszköz		III Eszköz	
1. cső	2. cső	1. cső	2. cső
-0.5	-0.1	+1.5	+1.2.

Az előző évekre képzett közéértékek körülbelül ugyanezek. Látjuk tehát, hogy az eszközök a hőmérsékletváltozással szemben igen különbözően viselkednek és ebbeli érzékenységük szerint egymásután sorban a II2, III1, III2 és III1 következik. Legjobb a II2 és legrosszabb a III1, a hol az utóbbinak járása átlagban 15-szöröse az előbbinek. Évekre visszamenőleg áttekintve az észleléseket látjuk is, hogy a II2 ténylegesen észlelt — több foknak megfelelő — járása mindig az egységen alul marad, míg a III1 járása néha 8—9 osztályrészt is kitesz.

Feltűnő továbbá, hogy a II és III eszköz járása egymással ellentett és ez évekre visszamenőleg *mindenkor* így van! A laboratóriumban végzett első melegítési próbák is körülbelül ilyen viszonylagos értékeket adtak, ugyanezekkel az előjelekkel. Az első lehűtési próbák szerint pedig ez esetben a járások az egész vonalon megfordulnak s a két eszköz ismét egymással ellentetten viselkedik. Ezt az eltérő viselkedést az eszköz szerkezetében lévő, egyelőre ismeretlen dissymmetriának voltunk hajlandók tulajdonítani, a mi folytán ily egyoldalú hatások jöhetnek létre. Történetesen 1912-ben a III eszköz nagyobb sérülést szenvedett, mechanikushoz került, a ki azt gondosan átjavította. A lengő szerkezet is újra készült. Az eszközben semmiféle dissymmetriát nem tudtunk kimutatni. Az újonnan összeállított eszköz épen olyan «crossz» lett, már t. i. az itt tárgyalt szempontból, mint azelőtt volt, a járások középértékei körülbelül ugyanazok maradtak.

Mindezek daczára, tekintettel az eszközökben mutatkozó nagy különbségekre, hittem, hogy rendszeres és körültekintő, összehasonlító kísérletek alapján a baj forrását megállapíthatom, és az eszközöket megjavíthatom. Lépésről-lépésre kritikai és kísérleti vizsgálat tárgyává tettem mindazokat a tényezőket, melyek esetleg az említett hatásokat okozhatják.

### 3. A torsiós drót szerepe.

Az első megvizsgált kérdés, hogy a torsiós drót okozhatja-e az említett járási jelenségeket?

A torsiós drót a mérő drót, az eszköz lelke! Természetes, hogy erre nagy gondot kell fordítanunk. Professorom utasításai szerint sokat is foglalkoztunk velük. A használt drótok 0.04 mm átmérőjűek, platinából valók, 20% irridiumtartalommal. A drótok már húzásukkor bizonyos fokig megcsavarodnak, a mit még fokoz az a körülmény, hogy azokat rendszeren kis átmérőjű csévékre tekerceselik. Az ilyen drótra függesztett lengő szerkezet évekig változtatja egyensúlyi helyzetét, mert a drót lassú kicsavarodása ily sokáig eltart. Épen ezért professorom már kezdetben, W. C. HERÆUS hanau gyárában, különös gonddal, lehetőleg

csavarás nélkül húzott drótot készítettett, a melyet 20—25 cm átmérőjű csévére tekercseltek. A drótokat a szükséges hosszban elkészítve, olyan súlylyal terheltük meg, a mekkora körülbelül a lengő szerkezet súlya. Így megterhelve évekig lógtak használat előtt. Az ilyen régebben alkalmazott drótok azonban még mindig lassacskán jobban és jobban kicsavarodnak. További tökéletesítés az volt, hogy a drótokat külön e célra készült gázkályhába akasztottuk s megterhelve, több ízben 120—150°-ra melegítettük s ismét lassan lehűtöttük. Még ezek sem voltak kifogástalanok.

Az utóbbi években akként járunk el, hogy a drótokat félig megterhelve elektromos árammal gyenge vörös izzásig hevítjük s a pár perczig tartó izzítást többször ismételjük. Az ily drótnak semmiféle állandó lassú kicsavarodása nincs. Mind a mellett igen kis mértékben meg vannak csavarodva és ez okozza, hogy a változó hőmérséklettel szabályosan ki-becsavarodnak. Szóval a drótoknak bizonyos meghatározott, mondjuk «torsió temperatúra-coefficiensük» van, a mely szerint azután a lengőszerkezet egyensúlyi helyzete a hőmérsékletnek megfelelőleg kissé eltolódik. E temperatúra-coefficiens meg határozására külön kis próbaeszközöket használunk, a melybe a megvizsgálható drótot beakasztjuk és tükörrel ellátott hengeres súlylyal terheliük meg. Az egész eszközt nagyobb szekrénybe helyezvén elektromos melegítőkkal ismételtén majd felmelegítjük, majd pedig lehűtjük. A hengeres súlyra az esetleges egyoldalú melege dések természetesen forgató nyomatékot nem gyakorolhatnak s így a tükörleolvasással észlelt egyensúlyhelyzetváltozások csupán a drót csavarodásaiból származnak. A megvizsgált drótok közül eszközeinkben csak olyanokat használunk, a melyek temperatúra-coefficiense 0.1 osztályrésznél kisebb. Ezenkívül lehetőleg olyan drótokat választunk ki, a melyeknek egyensúlyi helyzete, a próbaeszközben való vizsgálat alkalmával fokozatosan és maradandóan nem tolódik el, szóval a melyek hőmérséklet szerüleg pontosan és szabályosan ki- és kicsavarodnak.

Az 1912/13-ban eszközölt javítás alkalmával a III eszközhöz új, jobb drótokat tettünk. Ez azonban nem javított az eszközhöz, járása ugyanolyan nagy maradt. A III1, szóval a «legrosszabb»

eszközbe a legjobb drótunkat akasztottuk be, a *H135* jelzésűt. E drót temperatura-coefficiense a meghatározási sorozat szerint:

$$\left. \begin{array}{l} + 0\cdot028 \\ + 0\cdot031 \\ + 0\cdot033 \end{array} \right\} + 0\cdot031 \text{ osztályrész.}$$

A próbaeszközben végzett megfigyeléskor az egyensúlyi helyzetek maradandóan úgyszólván egyáltalán nem tolódtak el. Szóval a drót elsőrangú s mindezek daczára az eszköz járása sokkal nagyobb a többinél. Kiegészítésül megjegyzem csupán, hogy a drótok temperatura-coefficiensai oly kicsinyek s így az annak megfelelő járás oly csekély, hogy ezt a reductiót<sup>1</sup> inkább a rend, mint a szükségesség szempontjából végezzük el.

Az itt elmondottakat elegendőnek tartottam a kérdés eldöntésére. Nem akartam a folytonos expeditiós használatban lévő eszközt, melynek állandói fáradságos gondossággal meg vannak határozva, megbolygatni azzal, hogy a III1 lengő szerkezetét kivéve, helyébe a benne lévő torsiós drótra hengeres súlyt akasztanak. Bizonyos ugyanis, hogy ez esetben az eszköz ugyanazt a temperatura-coefficiensnek megfelelő kis járást mutatná, mint a próbaeszköz. Szóval a gyors melegekedéskor fellépő nagy járást nem a drót, hanem a lengő szerkezetre gyakorolt hatások okozzák, a mint azt későbbi kísérleteim is minden kétséget kizárólag igazolják. Hogy a melegekedéskor ily fajta hatások lépnek fel, azt professorom már régebben kimutatta s ezekkel több ízben részletesen foglalkozott.

Megjegyzendőnek tartom, hogy a drótokat nem egyszer meggyanusítottuk s hogy még vizsgálataim kezdetén is hajlandóak voltunk e hatásokat részben a drótoknak tulajdonítani. Az előzőkben közölt megfontolások és adatok alapján azonban teljes határozottsággal kimondhatjuk, hogy *a gyors hőmérsékletváltozás okozta nagy járáásokban a torsiós drótnak semmi szerepe sincsen.*

<sup>1</sup> Lásd a 413. oldalon közölt táblázatot.

#### 4. Az eszköz részeinek elmozdulása.

Kísérletileg megvizsgáltam ezek után, hogy az eszközök valamely olyan része nem mozdul-e el a hőmérsékletváltozással, a mi azután a nagy járást okozhatja. Tekintve, hogy az eszközök masszív szerkezetűek, hogy kiváló gonddal és pontossággal készültek, továbbá, hogy különböző részei lehetőleg ugyanabból az anyagból valók, tehát kiterjedési együtthatójuk azonos, az ilyen zavaró elmozdulások nem látszóttak valószínűnek, de viszont teljesen kizártnak sem tarthattam azokat.

Így elmozdulhat a torsiós rúdra erősített tükör, a távcsövet hordó kar, a skála, a távcső valamely része. Az utóbbira nézve megjegyzendőnek tartom ugyanis, miszerint abból a célból, hogy az észleléseket lehetőleg kis sátorban és kényelmesen végezhesük, az eszközre alkalmazott távcsövek nem egyenesek, hanem meg vannak törve; a távcsövekbe alkalmazott prizmák esetleges elmozdulása pedig épen ily fajta járást okozhatna.

Az eszközök könnyebb és kényelmesebb kezelhetőség céljából kívülről arretálhatóak. Magának a torsiós rúdnak arretálása a következő módon történik: A legbelsőbb szekrény kettős fenekű; a belső feneket alkalmas szerkezettel felemeljük, a mikor ez a lapos rudat is felemeli és a szekrény fedeléhez szorítja, még pedig oly erősen, hogy a rúd a kocsiban, avagy a vasúton való szállítás rázkódásaitól sem mozdul el.

Arretáltam tehát az eszközöket és a laboratoriumi helyiségben erős fűtéssel, majd ablaknyitással, váltakozva, nagyfokú és gyors hőmérsékletváltozásokat létesítettem. A leolvasások egyáltalán nem változtak. Az eredmény negatív lévén, ezzel a kérdést egy csapásra elintéztem, szóval sem a tükör, sem a távcsőkar, sem a skála, avagy a távcső valamely része nem mozdul el.

Egy másik, bár szintén kevésbé valószínű lehetőség, hogy a torsiós cső, avagy csupán maga a torsiós fej, valamiképen elcsavarodik, a mi természetesen ugyancsak a lengő szerkezet egyensúlyi helyzetének megfelelő eltolódását okozná. E kérdés megvizsgálása céljából a torsiós fej legfelső részére tükröt erősítettem s annak esetleges elcsavarodását két méter távolságba helyezett távcső és skalával megfigyeltem. A leolvasások a leg-



jelentékenyebb hőmérsékletváltozások esetén is ugyanazok maradtak, szóval sem a torsiós cső, sem a torsiós fej nem csavarodik el.

E kísérletekkel megállapítottam tehát, hogy a gyors hőmérsékletváltozások hatására az eszközök semmi olyan részre nem mozdul el, ami a lengő szerkezet egyensúlyi helyzetének eltolódását okozhatná.

Ezek után nem marad más lehetőség hátra, mint az, hogy a kérdéses nagy járásokat, magára a lengő szerkezetre, a torsiós rúdra és lelógó súlyra gyakorolt hatások okozzák. Miként történnek e hatások s hogy jönnek azok létre, ez képezte természetesen további kísérleteim feladatát.

## 5. Az eszközök részleges melegítése.

Mindenekelőtt bizonyos tájékoztató kísérleteket végeztem. Rövidség kedvéért e nagyszámban végzett kísérletek közül csak a tanulságosakat fogom tárgyalni és a közvetlen megfigyelési adatok felsorolásától tartózkodva, inkább csak az eredményeket és azokat is jórészt grafikusán feltüntetve közlöm. A tájékoztató kísérletek két csoportját végeztem. Az egyik arra vonatkozott, hogy miként viselkednek az eszközök, ha azok egyes, körülírt részeit melegítjük; a másik csoport pedig arra, hogy mit mutatnak az eszközök egészükben való melegedéskor, illetve lehüléskor, úgy a mint az körülbelül a szabadban is történik.

Lássuk az első csoportot! A mint azt már az előzőekben részleteztem, az eszközök egymástól igen eltérően viselkednek, járásuk nagyon különböző. E lényeges különbségek okát már kezdetben az eszközök valamely egyelőre ismeretlen részének szerkezeti eltérésében véltem megtalálni. Szóval úgy gondoltam, hogy lesz az eszközöknek valamely érzékeny, kényes részük s így első sorban a felől óhajtottam tájékozódni, hogy hol keressem ezt.

A könnyű kezelhetőségre való tekintettel a helyi melegítéseket akként végeztem, hogy az eszköz közelébe váltakozó árammal táplált 100 Voltos 50 gyertyás Tungstram-lámpát helyeztem. A melegítésnek ilyfajta adagolása ugyan nem kifogástalan, de tájékoztató kísérletek végzésére mindenesetre alkalmas.

A lelógó súly környékén végzett melegítési kísérletek közül álljanak itt a következők:

A lelógó súly közepének magasságában az eszköz csövétől egyenlő távolságba helyeztem a lámpát és pedig a torsiós rúdra merőleges irányban elől, az eszköz csövének elülső, majd hátul, a hátulsó oldalán. Tévedések elkerülése végett megjegyzem, hogy az eszköz elülső oldala alatt azon oldalt értem, a honnan a törött távcsöveken a leolvasások történnek, a merrefelé a hőmérők is néznek, szóval a melyik oldalon az észleléskor a megfigyelő áll.

A melegedéskor létrejövő egyensúlyhelyzeteltolódások, illetve azok görbéje körülbelül olyanféle, mint a milyeneket a később következő 3. ábrán is látunk. A melegedéskor eleintén az eltérés rohamosan nő, 1—2 óra alatt maximumot ér el és azután lassan csökken. Azonos viszonyok között ugyanazokat a görbéket kapjuk. A maximális eltérések osztályrészekben kifejezve a következők voltak:

Lámpa közepe a cső falától 7 cm-re	III.	III1.
Lámpa elől	—3·1	+2·8
Lámpa hátul	—3·9	+3·2
Egy lámpa elől és egy hátul		+6·0

Minthogy a lámpa a hátsó helyzetben a szekrény alá kerül, a melegítés ez esetben azonos viszonyok között is kissé nagyobb, ezért nagyobbak valamivel a hátsó értékek. Az eszközöket külön-külön véve tekintetbe látjuk, hogy akár elől, akár hátul van a lámpa, ugyanolyan irányú és nagyságú a maximális járás; két lámpa esetén pedig a járások összegeződnek. Ha egyoldali hatás érvényesülne, akkor az elülső és hátulsó eltérésnek egymással ellentettnek kellene lennie. Szóval függetlenül attól, hogy mely oldalról történik a melegedés, a hatás ugyanaz. A lelógó súlyt védő hármas fémcső tehát oly jó védelmet nyújt s a hőmérsékleti különbségeket oly tökéletesen kiegyenlíti, hogy *a cső egyoldali külső melegedései az eszköz belsejében már nem egyoldali melegedést okoznak*, hanem a hatás a melegedés irányától függetlenül ugyanaz. E fontos tapasztalatra még a későbbiekben is visszatérünk.

A két eszközre vonatkozó adatokat összehasonlítva, min-

denekelőtt azt látjuk, hogy a két eszköz egymással ellentétten viselkedik és a járások oly irányúak, mint a milyeneket az expedícióban a reggeli gyors melegedésekkor tapasztalunk. Fel-tűnő azonban, hogy a járások körülbelül egyformák, sőt a IIII-é valamivel kisebb, holott künn a szabadban ez eszköz járása valamennyi között a legnagyobb volt.

Hasonlót tapasztalunk, ha a lámpát a cső alá helyezzük, a mikor is a maximális eltérések:

II.1. III.1.

Lámpa közepe a cső alatt az alsó laptól 5 cm-re. — 20·5 + 20·3

A nagy különbségek tehát itt sem mutatkoznak, a mi való-színűvé teszi, hogy az eszköz kényes részét nem a lelógó súly körül kell keresnünk.

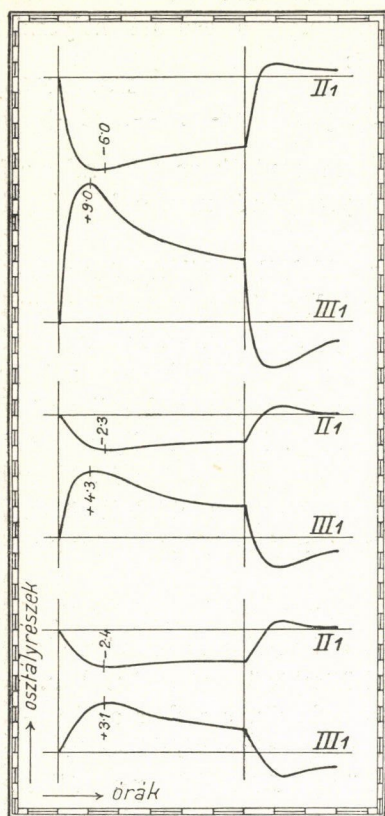
A cső alatti melegítések az oldalról valókkal össze nem hasonlíthatóak. Az oldalt elhelyezett lámpák ugyanis főleg sugár-zás útján, az alul elhelyezettek pedig vezetés útján is lényegesen melegítenek. Igaz, hogy e nagyobb melegedést bizonyos mérték-ben ellensúlyozzák a súlyt arretáló szerkezet nagyobb fém töme-gei és a lógó súly tetemesebb távolsága. Mind a mellett az ada-tokból úgy látszik, hogy azonos melegedések esetén is, ha az a súlyt alulról éri, a járás nagyobb, mintha az oldalról történik. E körülmény a mellett szól, hogy a jelenséget légáramlások okozzák.

Egy másik felemlítendő kísérletsorozat eredményét a 3. ábra görbéi grafikusán adják. A lelógó cső mellett 5 cm távolságban helyeztem el a lámpát és pedig különböző magasságokban. Az első görbepár arra az esetre vonatkozik, a mikor a lámpa a cső felső részén, a középső szekrény aljától 7 cm-re volt el-helyezve, úgy hogy a lógó súly közepe felett 53 cm-re állott, a második görbepár észlelésekor a lámpa 20 cm-rel lejjebb, a lógó súly közepe felett 33 cm-re volt, a harmadik görbe pár esetén pedig a lámpa ismét 20 cm-rel lejjebb, a lógó súly felett csu-pán 13 cm-re volt elhelyezve. Az abszcissák az órákat, az ordi-náták az osztályrészekben kifejezett eltéréseket különböző méret-ben adják. A maximális eltérések értékeit külön feltüntettem. A két párhuzamos függélyes vonal közé eső időben a lámpa égett.

Látjuk tehát, hogy ha a csövet különböző magasságokban melegítjük, egy-egy eszköznél mindig ugyanolyan irányú eltéréseket kapunk, továbbá, hogy az eltérések a cső mentén felfelé haladva nőnek. A két eszközre vonatkozó adatokat összehasonlítva tapasztaljuk, hogy azok egymással ellentettek és az expedícióban észlelt reggeli járásoknak megfelelő irányúak.

A III1 járása már jelentősen nagyobb a II1-nél, ha nem is olyan nagy mértékben, mint azt kint tapasztaltuk.

A nélkül, hogy a számbeli adatokat közölném, még a következő kísérleti eredményeket emelem ki. A torsiós rúd lapos platinasúlyban végződő szabad vége körül melegítve az eszközt, aránylag kis eltéréseket kapunk. Ha az eszköz felső részét, a torsiós drótokat befoglaló csövet melegítjük, akkor a két eszköz közötti különbség ismét mutatkozik, de a járáások megfordulnak, ellentett irányúak lesznek, azaz olyanok, mint a milyeneket az eszköz egészében való lehűlésekor tapasztalunk.



3. ábra.

lógó csövek relatív hűlését jelenti. Az előzők alapján kimondhatjuk tehát, hogy az eszköz egészében való melegedésekor, illetve lehűlésekor mindig oly irányú járáások lépnek fel, amelyek a lelógó csövek melegítésének, illetve lehűtésének felelnek meg. Más szóval a lelógó csövek az eszközök exponált részei, melyek

leggyorsabban melegednek fel, illetve hűlnek le. Ez a kísérleti-  
leg igazolt tény egyébként is valószínű, mert a lelógó cső, a  
torsiócsöveket befogadó közös csőhöz képest jóval kisebb  
átmérőjű, s így relative nagyobb felületű és ezenkívül a benne  
foglalt, illetve vele kapcsolatos fémtömeg is kevesebbre becsülhető.

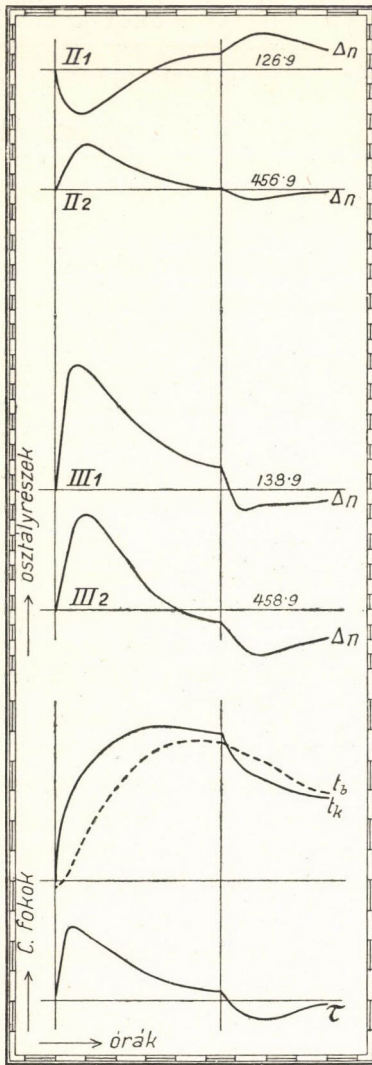
Megfontolva végezetül a 3. ábrában közölt kísérleteket,  
valószínű, hogy az eszköz kényes helyét a lelógó csőnek a  
középső szekrénybe való torkolata körül találhatjuk meg.

## 6. Az eszközök egészükben való melegítése és lehűtése.

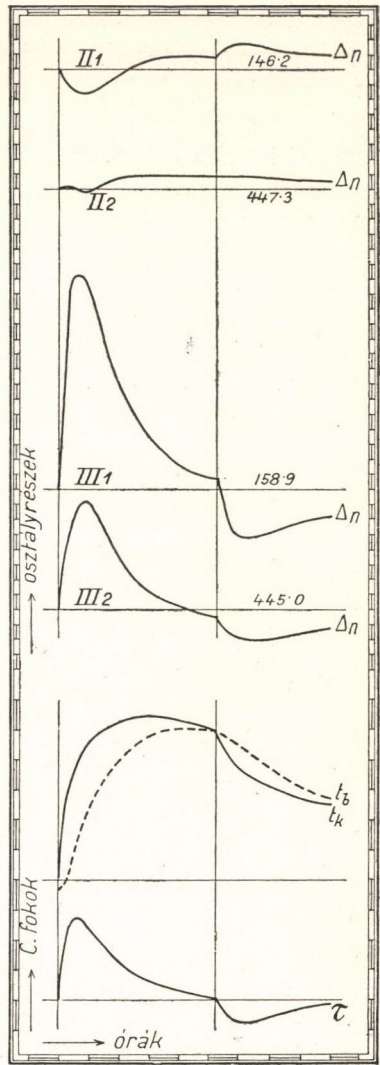
További tájékoztató kísérleteimet az irányban végeztem,  
hogy az eszközök miként viselkednek oly fajta melegedésekkor,  
illetve lehülésekkor, mint a milyenek a szabadban, az expedi-  
cióban létesülnek. Hogy aránylag gyors és határozott legyen a  
melegítés, következőképen jártam el: Az észlelő helyiséget szel-  
lőztetéssel lehűtöttem, az ablakokat bezárván, csak tíz óra  
mulva kezdtem el az észleléseket, a mikor is az eszköz már  
körülbelül felvette az állandó hőmérsékletnek megfelelő értéke-  
ket. E közben a mellette lévő, majdnem háromszor akkora tér-  
fogató helyiséget felfűtettem. A melegítések alkalmával a nagy  
összekötő ajtót kitarva, a 10—15 fokkal melegebb levegőt az  
eszközökre bocsátottam. Hasonló módon végeztem a lehűtési  
kísérleteket is.

Készakarva létesítettem ilyen szinte túlságosan nagy és  
gyors hőmérsékletváltozásokat, és pedig két okból. Egyrészt azért,  
mert így az eszköz hibája és a változtatáskor létrejövő eset-  
leges javulása biztosabban megállapítható, másrészt, mert így  
az észlelések pontosabbakká váltak, a mi különös tekintettel az  
eszközökbe alkalmazott nem valami biztosan leolvasható hőmé-  
rőkre czélszerűnek mutatkozott. Eleintén az eszközökön semmit  
sem változtattam, és minden különösebb laboratoriumi berende-  
zés alkalmazása nélkül, a szokásos módon leolvasható adatok-  
ból igyekeztem a nagy járási különbségek okait kifürkészni.

A 4., 5. és 6. ábrában három ilyen észlelési sorozat ered-  
ményét grafikusán közlöm. Az abszcissák órákat, az ordináták  
a felső részben osztályrészeket, az alsó részben pedig két akkora

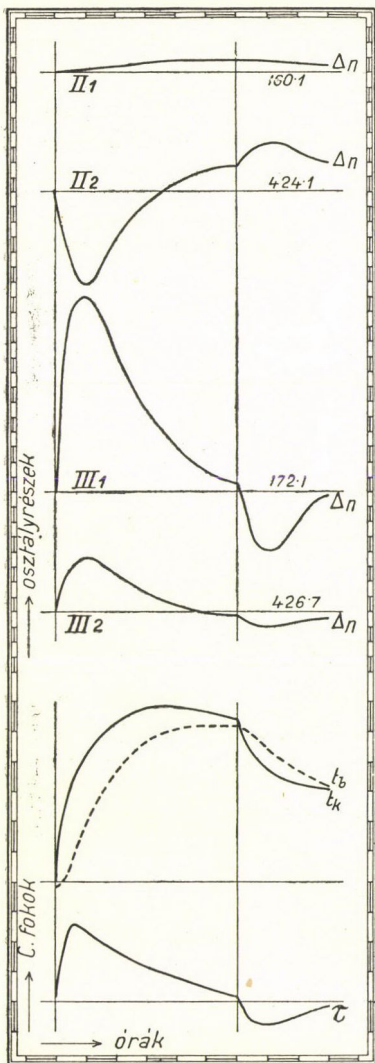


4. ábra.



5. ábra.

méretben Celsius fokokat jelentenek. A görbéknek a két párhuzamos függélyes vonal közé eső része a melegítés idő tartamába esik, a mikor ugyanis a két különböző hőmérsékletű helyiséget elválasztó ajtó tárva volt. A felső négy  $\Delta n$ -nel jelölt



6. ábra.

görbe sorban a megfigyelt II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>, III<sub>1</sub> és III<sub>2</sub> eszközökre a kezdeti leolvasásoktól való eltéréseket adja; az abszcissák mellé írott számok maguk a kezdeti leolvasások. Az ábrák a különböző azimuthokban végzett megfigyeléseket és pedig — az egymással 45°-ot képező nyolcz azimuth közül — a VI, VIII és II állásban eszközölt leolvasásokat adják. Úgy választottam ki az azimuthokat, hogy a kezdeti leolvasások egymástól lehetőleg eltérjenek, a mi tekintettel az észlelő helyiség környezetének egyenetlen tömegeloszlására és az ezzel kapcsolatos nagy gravitációs variációkra, lehetséges is volt.

Egybevetve e három ábrában az ugyanarra az eszközre vonatkozó adatokat, látjuk, hogy más-más kezdeti értéknek megfelelőleg a járások nagysága és nem egyszer iránya is különböző.

Professorom már régebben bővebb szekrényű, de egyébként hasonló eszközről kísérletileg kimutatta, hogy a járások nagysága a torsiós rúdnak a szekrényhez képest való el-

helyezkedésétől függ. Ha a rúd a szekrényvel párhuzamosan a középén van, akkor a járás 0; innen akár jobbra, akár balra tér ki a rúd, akkor a járások nőnek, de egymással ellentettek; egy bizonyos kitérésen túl azután ismét kissé csökkennek. Tapasz-

talatai szerint a 0 helyzet körülbelül a szekrény geometriai középvonalával esik össze.

Az eszközöket mindenkor akként állítottuk egybe, hogy a rudak a geometriai középső állásban lehetőleg a középső osztályzatokra 150-re, illetve 450-re mutassanak. A skála ugyanis az 1. eszközön 0—300-ig, a 2. eszközön pedig 300—600-ig megy, hogy a leolvasások összeecserélését kizárjuk.

Az expedíciós tapasztalatok szerint legjobbnak bizonyuló II2 eszköz meg is felel az említett kívánalomnak. Itt a középső 5. ábrán a *melegedés okozta* járás körülbelül 0, a 4.-en pozitív, a 6.-on negatív. A III1 eszköznél már a 0 helyzet oldalosan esik, mert a 6. ábrán a járás igen csekély, míg mindkét másik ábrán a járás negatív. Úgy a III1, valamint a III2 eszköz járása mindig pozitív és aránytalanul nagy. Az itt közölt adatok teljesen összhangban vannak a 2. pontban részletezett expedíciós tapasztalatokkal, szem előtt tartva azt, hogy a leolvasások többnyire az 5. ábra közelébe estek. Megjegyzem ugyanis, hogy a szabadban előforduló már tetemes variációk esetén is az  $(n-n_0)$  értékek<sup>1</sup> még mindig 5—10 egységnél nem nagyobbak.

Pontosabb összehasonlíthatóság czéljából természetesen a kísérletekben szereplő, körülbelül ugyanazon rendű, de nem azonos hőmérsékleti viszonyokat is tekintetbe kell vennünk. Ezért alul az utolsóelőtti együttesen rajzolt két görbével az észlelt hőmérsékleteket tüntettem fel, és pedig a kihúzott  $t_k$  vonallal az eszközök felső csövén lógó külső és a szakadozott  $t_b$  vonallal az eszközökbe benyúló hőmérők adatait középértékben kifejezve.

A járásokra vonatkozó régi tapasztalatok és az itt közöltekhöz hasonlóan végzett többi kísérleteim alapján szembeötlő, hogy a járások a temperaturaváltozások nagyságával és gyorsaságával, szóval a hőmérsékletváltozás sebességével nőnek. Egyszerű arányosságról azonban nem lehet szó, a mint azt a hőmérsékleti görbék és az ezekből közvetlenül felrajzolható, de az ábrában fel nem tüntetett sebességgörbék is elárulják. Jelen értekezésemben foglalt további kísérleteimmal sikerült a járást

<sup>1</sup> Lásd a 412. oldalon.



okozó jelenségeket főbb vonásokban tisztáznom. Ezek alapján, a mint azt később érinteni fogom, a tényleges viszonyok megfontolásából ugyanerre az eredményre jutunk.

A legalsó  $\tau$  görbével az észlelt külső és belső hőmérsékletek különbségeit tüntettem fel szóval:  $\tau = t_k - t_b$ . Szembeötlőleg látjuk, hogy a járási  $\Delta n$  görbék mind ugyanilyen típusúak, mondhatnók hogy közelítőleg a  $\tau$  görbével arányosak. Pontosabban szemügyre véve azonban a görbékét, azt tapasztaljuk, hogy a járási görbe maximuma avagy minimuma a temperatúrakülönbség-görbe maximumához képest különböző mértékben késik, továbbá hogy a görbék hol lassabban, hol gyorsabban szállnak alá, szóval az egyszerű arányosságtól eltérő szabálytalanságok mutatkoznak. A rendelkezésemre álló 52 görbe alapján igyekeztem a járás és a temperatúrakülönbség görbéje között a pontos összefüggést meghatározni. Az említett szabálytalanságok azonban annyira szeszélyesek, hogy általános érvényű kifogástalan összefüggést nem állapíthattam meg. Későbbi vizsgálataim során kiderült, hogy egyrészt az észlelés tökéletlensége, másrészt a kísérleti berendezés előnytelenége jórészt érthetővé teszi a mutatkozó eltéréseket, úgy hogy megfelelő módosítások után tökéletesebb megegyezést várhatunk.

A hasonló módon végzett lehütési kísérletek eredményeit külön nem közlöm; csupán felemlítem, hogy ez esetben a görbék a közöltekhez teljesen hasonlóak; azonban úgy a temperatúrakülönbségek görbéje, valamint vele együtt az összes járási görbék megfordulnak, ellentett irányúak lesznek. Különösen kiemelendő továbbá, hogy a lehüléskor a  $\tau$  görbéhez viszonyítva, a  $\Delta n$  görbék körülbelül ugyanolyan méretűek, mint a melegedéskor.

Az eddig említett kísérleteimben az egész idő alatt az eszköz mozdulatlanul, ugyanabban az azimutthban állott. Megfigyeltem azonban azt is, hogy a járási görbék nem módosulnak-e az esetben, ha az egyes leolvasások között a torsiós rudak egy ideig lengenek, úgy a mint az a szokásos észleléseknél történik. Az egyes leolvasások után mindenkor az eszközt  $360^\circ$ -kal körülforgattam; természetesen ez esetben a leolvasásokat óránként kellett végezmem, a mikor is a lengő szerkezet már végleg meg-

nyugodott. *A járási görbék teljesen ugyanazok a forgatott, mint a mozdulatlan eszköznél.* A mint az a későbbiekből kiviláglik, a járásokat az eszköz belsejében nagy szabályossággal végbemenő lassú légáramlatok okozzák. A leolvasások megbízhatósága szempontjából fontos e talán kissé meglepő tapasztalati ténynek kiemelése, hogy bár az eszköz elforgatásakor a lengőszerkezet heves mozgása felkavarja az eszköz belső levegőjét, a lengőszerkezet teljes megállapodása után a légáramlások quantitative ugyanavval a szabályossággal történnek, mint a teljes nyugalom esetén.

A további megvizsgált kérdés az 5. pontban már érintett egyoldalú melegedésekre vonatkozott. E célból az eszközt a leolvasások után mindenkor  $180^\circ$ -kal forgattam tovább. Két napon keresztül folytatott észlelés alapján a mindkét azimuthnak megfelelő járási görbéket felrajzolhattam. A járási görbék ismét ugyanazok, mint a mozdulatlan eszközöknél. Az azimuthot készakarva akként választottam meg, hogy az egyik állásban az eszközök elülső, a másik,  $180^\circ$ -os állásban pedig a hátsó része nézzen a beáramló meleg levegő felé. Kiegészítve e megfigyelést a további kísérleti eredményekkel, teljes általánosságban megállapíthatjuk, hogy ugy a melegedésekkor, valamint a lehülésekkor *egyoldalú hatások nincsenek.* Az eszközök függetlenül azimuthális állasuktól és az oldalról jövő melegedés, vagy lehülés irányától ugyanazon járást mutatják, feltéve, hogy a kezdeti leolvasás, azaz a lengő szerkezetnek az eszköz belső terében való elhelyezkedése ugyanaz.

Régebbi tökéletlenebb tapasztalataink alapján ugyanis a járások látszólagos szabálytalanságait részben ilyen egyoldalú hatásoknak tulajdonítottuk. Tévedések elkerülése végett meg kell azonban jegyezmem, hogy az eszközök a különböző magasságokban való eltérő melegedésre természetesen érzékenyek, s hogy néha bizonyos látszólag egyoldalú hatások a magasságbeli melegedések eltérő voltára vezetendők vissza. A járás ilyfajta szabálytalanságát tapasztaltam például abban az esetben, ha az oldalról jövő melegedés irányát tekintve, a lelógó cső az eszköz oszlopa mögé került, a mikor is ez a csőnek melegedését akadályozván, az eszköz felső és alsó része közötti hőmérsékletkülönbséget megváltoztatta.

## 7. A járási állandók.

A mint ezt az előző pontban kifejtettem, a járások és a temperaturakülönbségek görbéje közötti arányosság csak közelítő, mind a mellett a két görbe szélső értéke közötti viszony egy oly jellemző adat, a mi az eszközöknek a hőmérsékleti hatásokkal szemben való érzékenységének mértékeül szolgálhat. E jellemző adatot *járási állandónak* neveztem és  $J$ -vel jelöltem. Értjük alatta tehát a gyors melegedések, avagy lehülések kor észlelt *járási görbe maximumának, avagy minimumának viszonyát, a hőmérsékletkülönbség-görbe szélső értékéhez*, a mely utóbbi  $\tau$ -val jelölt görbe adatait az eszköz külső felületén és az eszköz belsejében észlelt hőmérsékletek különbségei adják. Szóval:

$$J = \frac{(\Delta n) \text{ szélső é.}}{(\tau) \text{ szélső é.}}, \text{ hol } \tau = t_k - t_b.$$

A járási állandó értéke a lengő szerkezetnek ugyanarra a helyzetre vonatkozólag változatlan, akár különböző gyors melegedésekből, akár lehülésekből határozzuk meg. Kis eltérések mutatkoznak ugyan, a mi egyrészt az észlelés elkerülhetetlen tökéletlenségére és a nem egészen czélszerű kísérleti berendezésre vezethető vissza, másrészt azonban lehetséges, sőt valószínű, hogy a járási állandó némileg az egymástól lényegesebben eltérő hőmérsékleti hatások mikéntjétől is függ. E kérdést ugyan a következőkben érinteni fogom, de annak végleges eldöntése csak erre vonatkozó további részletes kísérletek alapján lesz lehetséges.

Egynémely tökéletesítést már jelen kísérleteim folyamán is bevezettem. Így pl. csakhamar tapasztaltam, hogy a külső hőmérsékletek meglehetősen bizonytalanok, mert a hőmérők a szokásos módon az eszköz felső csövén lévő horgokon lógtak és pedig hol közelebb, hol távolabb annak falától. A hőmérőket tehát szilárdan odaerősítettem és bizonyos fokú fémes összeköttetésbe hoztam az eszköz felületével, úgy, hogy azok a külső felülettel közvetlenül érintkező levegőréteg hőmérsékletét adják. E módosítás tényleg használt is!

A járási állandó meghatározásakor a melegítést akként

végeztem, a mint azt az előző pontban részleteztem. Az ideális kísérleti berendezés az volna, hogy ha úgy a járást, valamint a hőmérsékleteket regisztrálnók és a tényleges szélső értékekkel számolnánk tovább. Ez azonban annyira körülményes, hogy erre természetesen gondolnom sem lehetett; de felesleges is! A járási görbék tanulmányozása biztosít arról, hogy a járási állandót elegendő pontossággal közvetlen leolvasással is meghatározhatjuk. A kezdeti leolvasáson kívül félórás időközökben még csupán két leolvasást végeztem. Félóránál rövidebb időközöt azért nem választottam, mert a leolvasással az eszközöket mindenkor megzavarjuk, s ez esetben a következő leolvasás biztosságát veszélyeztetnők. A járási görbe szélső értéke tapasztalatszerűleg mindenkor vagy az első, vagy a második félórára esik, vagy legalább is nagyon közel az akkori leolvasásokhoz. Önkényesség elkerülése végett, a célunknak teljesen elegendő pontosság szem előtt tartásával, mindenkor magát a leolvasott legnagyobb, avagy legkisebb értéket vettem szélső értéknek. A hőmérsékletkülönbség-görbe maximuma, avagy minimuma pedig a kísérletezésnél alkalmazott hőmérsékleti határok között tapasztalatszerűleg mindenkor az első félórára esik, illetve az attól való eltérés eszközeinken nem is észlelhető.

Ilyetén módon az eszközök és a hőmérők három, egymást félórás időközökben követő leolvasásából a járási állandót meghatározhatjuk. Természetesen szükséges azonban, hogy az eszköz az észlelések megkezdésekor már az állandó értékeket felvette legyen, a miért is az észlelő helyiség felmelegítését, avagy lehűtését már tíz órával előbb be kell szüntetnünk.

Sikerült tehát egy oly kényelmes és aránylag gyors eljárást megállapítanom, a melylyel az eszközöknek a hőmérsékleti hatásokkal szemben való viselkedését quantitative meghatározhatjuk. Az eszköz e szempontból való jóságának megítélésére elegendő ugyanis, ha a megcsavaratlan egyensúlyi helyzettől jobbra és balra 10—15 osztályrészszel egy-egy leolvasásnak megfelelő járási állandót ismerjük. Tekintve, hogy egyoldalú hatások nincsenek, a különböző kezdeti leolvasásokba való állítást nem csupán a torsiós fej elforgatásával eszközölhetjük, hanem

ugyanazt a czélt a különböző azimuthokban való észleléssel is elérhetjük. Ez utóbbi eljárás ugyanis sok esetben kényelmesebb, mert eszközeinken a torsiós fej osztályzatán csupán fél fokot olvashatunk le biztosan, a mi pedig magában 22 osztályrésznek felel meg, s így a beállításnak kiscokú változtatása a különböző azimuthokban való észleléssel biztosabban végezhető. Kiegészítésül még megjegyzem, hogy további kísérleteimben is még bőven volt alkalmam meggyőződni arról, hogy a járási állandó értéke csupán a kezdeti leolvasástól függ, az eszköz azimuthális állásától azonban független. Az erre vonatkozó kísérleti adatok egy részét később, a 11. pont végén közlöm.

A jövőben az eszközök végső egybeállításánál a járási állandók értékeit szem előtt tartva, nem lehetünk kitéve olyan meglepetéseknek, a milyenek eddig megtörténtek, hogy a laboratoriumi megfigyelések szerint kifogástalannak látszó eszközök a szabadban rosszul viselkedtek. Így van ez például a III eszközzel is, mely egyáltalán nem váltotta be a laboratoriumban hozzáfűzött reményeket. Az eszköz ugyanis kettős variometereink között a legújabb. Szerkesztésénél természetesen értékesítettük mindazokat a tapasztalatokat, a melyeket az előző eszközök expedíciós használata alkalmával gyűjtöttünk. Kiváló pontossággal készült és nagy gonddal állítottuk egybe. Elsőrangú jó torsiós drótokat tettünk bele. Járása, mely a laboratorium kedvező hőmérsékletű helyiségében tényleg alig volt észrevehető, künn a szabadban aránytalanul nagy lett.

A 4., 5. és 6. ábrában foglalt megfigyelések még a régi módon elhelyezett külső hőmérőkkel történtek, a miért is az ezekből meghatározott járási állandók értékeit nem közlöm. Az alábbi táblázatban foglalt adatokat ugyanis már a javított hőmérő leolvasással határozta meg, s így ezek a későbbiekkel minden további nélkül összehasonlíthatóak. A táblázatban a különböző eszközökre vonatkozólag az  $n$  oszlopban a kezdeti leolvasások, a mellette lévő  $J$  oszlopban pedig a megfelelő járási állandók foglaltatnak. A táblázat felső részében közölt adatok az eszközök eredeti állapotára vonatkoznak, úgy a mint azokat az expedícióban használtuk, s a mint azok onnan a laboratoriumba visszakérültek.

	II 1		II 2		III 1		III 2	
	$n$	$J$	$n$	$J$	$n$	$J$	$n$	$J$
Eredeti állapot	125·9	-1·9	456·7	+2·0	139·8	+5·3	460·2	+3·8
	145·5	-1·2	446·0	+0·1	158·1	+7·3	445·3	+3·3
	159·2	0	423·1	-4·3	171·2	+6·8	425·0	+2·4
Javított állapot	123·2	-1·7	456·7	+2·0	127·7	+3·7	462·3	+2·6
	142·9	-0·2	446·0	+0·1	147·8	+6·1	447·9	+2·1
	156·3	+1·0	423·1	-4·3	160·9	+5·6	429·9	+0·5

A 7. ábra a táblázat adatait grafikusan tünteti fel. Az abszcissák a kezdeti leolvasások az  $n$ -ek, az ordináták a járási állandók a  $J$ -k. A megrajzolt ordináták a kísérletileg meghatározott értékek. Az eszközök eredeti állapotának megfelelő görbék a kihúzott vonalak. A járási állandók e görbéi közvetlenebb módon mutatják mindazt, a mit az előző pontban a 4., 5. és 6. ábra kapcsán az eszközökre vonatkozólag elmondottunk. A II2 eszköz éppen azért jobb a többinél, mert a leolvasások helyén 440 és 450 között metszi a  $J$  görbe az abszcissák tengelyét, s így itt a járáások legkisebbek. A III1 eszköznél a metszéspont oldalosan fekszik; ha azonban a leolvasások történetesen 160 körül estek volna, akkor ez az eszköz jobb lett volna a II2-nél, mert a görbe kevésbé meredek. A III1 és III2 eszköznél pedig a metszéspont szinte érthetetlen módon egészen messze kiesik a használatos észlelési közből, s ezért aránytalanul rosszabbak ezek az eszközök.

Megkíséréltem az eszközöket torsiós fej elcsavarásával, illetve eltolásával megjavítani. A torsiós fej elcsavarásával a rúd egyensúlyi helyzetét tetszésszerűnti osztályzatra hozhatjuk ugyan, de ez eljárást csak nagyon mérsékelten szabad alkalmaznunk. Az eszközökkel való tényleges észlelésekkor ugyanis szükséges, hogy a különböző azimuthokba való állításkor, azokban a rudak is közelítőleg benne legyenek. Ezért a megcsavaratlan egyensúlyi helyzetben a rúdnak a szekrény geometriai közép-

vonalával lehetőleg kis szöget kell bezárnia, s így eszközeinknél 140—150, illetve 440—450-re kell mutatnia.

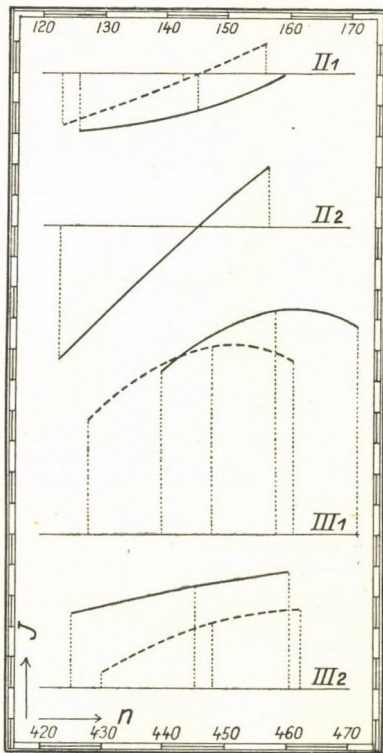
A mint azt a következő pontban részletezni fogjuk, a  $J$  görbéket a torsiós fej, szóval a rúd parallel eltolásával is megváltoztathatjuk. A II<sup>2</sup> eszközt változatlanul hagytam, a többin eloltam a torsiós fejeket. Az ily módon javított eszközökre vonatkozó adatok foglaltatnak a közölt táblázat alsó részében, és a 7. ábra szaggatott vonalú görbéiben, a melyekből az eltolás hatását közvetlenül láthatjuk.

A III<sup>1</sup> eszközt ez eljárással megjavítottam, azonban a III<sup>1</sup> és III<sup>2</sup> eszköznél, és különösen a III<sup>1</sup>-nél a javulás csekély és nem elegendő. A két utóbbi eszköz torsiós fejét pedig már annyira eloltam, mint a mennyire az egyáltalán lehetséges, úgy hogy a torsiós drót és vele együtt a lengő szerkezet szemmel láthatólag excentrumosan lógott.

További vizsgálataim feladata volt kikutatni azokat a körülményeket, a melyek a III eszköz  $J$  görbéinek e meglepő szabálytalanságát okozzák.

### 8. A torsiós fej eltolása.

A torsiós fejek eltolásakor a járási állandók megváltoznak. E változás mikéntjéből hasznos következtetést vonhatunk arra vonatkozólag, hogy a járáások okát hol keressük. A járáások, a mint azt már említettük, a lengő szerkezetre gyakorolt hatá-



7. ábra.

sokra vezetendők vissza, előző kísérleteimmel ugyanis a más-fajta lehetőségeket már kizártam.

A nélkül, hogy e hatások mivoltára vonatkozólag egyelőre közelebbit felvennénk, mindenesetre bizonyos, hogy azok a lengő szerkezet végei körül lesznek leghatásosabbak, hiszen itt vannak a nagyobb tömegek, a nagyobb felületek, s itt legnagyobb a kar, s vele együtt a létrejövő forgató nyomaték. Egyszerűség kedvéért a torsiós rúdnak lapos platinasúlyban végződő részét nevezzük «szabad végnek», másik vége pedig, a hol a felfüggesztett hengeres platinasúly lóg, legyen a «lógós vég».

Tekintve, hogy a torsiós rúd hossza (40 cm) a végeknek a szokásos kitérésekkor való elmozdulásához képest nagy, tehát megengedhető elhanyagolással bizonyos, hogy egy-egy végre külön-külön gyakorolt hatás azonos lesz, ha az a vég akár szögkitérés, akár parallel eltolással foglalja el ugyanazt a habár nem teljesen azonos helyet az eszköz belsejében. Mindjárt fel is említjük, hogy eszközeinknél a végek 1 mm-es szögelfmozdulásának a leolvasásban 12·5 osztályrész felel meg.

A kérdés eldöntésére következően járunk el. Határozzuk meg a  $J$  görbe egy darabját, úgy mint azt az előzőekben tettük. Toljuk el a torsiós fejet a rúd irányára merőlegesen, a mikor is a rúd önmagával párhuzamosan oldalt tolódik. Ismerve az eltolás nagyságát milliméterekben, a közölt számadat segítségével közvetlenül tudjuk, hogy az mekkora szögkitérésnek, illetve hány osztályrésznek felel meg. Határozzuk meg ismét az új  $J$  görbe megfelelő darabját. Ha a végeket az eredeti helyzetből kiindulólág szögkitérés útján hoznók a parallel eltolásnak megfelelő helyzetbe, akkor világos, hogy a szabad vég összehozása esetén a szögelfmozdulás ellentett azzal, a mely a lógós vég összehozására szükséges. Ha tehát az új görbét, mint a régi görbe folytatólágos darabját akarjuk felrajzolni, akkor azt az eltolásnak megfelelő osztályrészkülönbséggel kell tennünk, és pedig a szabad vég tekintetbevételekor a körülmények által egyértelműen és pontosan meghatározva egyik irányban, a lógós vég tekintetbevétele esetén pedig a másik irányban. A két feltevés közül természetesen az lesz a helyes, illetve ama vég körüli hatások okozzák a járást, a melynek megfelelően felraj-



zolt görbe tényleg összeesik az eredeti  $J$  görbével, illetve megfigyelt darabjának folytatását képezi.

Ez irányú kísérleteim közül csak az első kettőt közlöm, a melyet még a tökéletlenebb hőmérőolvasásokkal végeztem, a melyek azonban már oly feltűnő és határozott módon eldöntik a kérdést, hogy minden további bizonyítás felesleges. Későbbi vizsgálataim során, a mikor már a  $J$  görbéket egész terjedelmükben meghatároztam, ismételten alkalmam volt meggyőződni az első kísérletekből levont következtetésem helyességéről.

A két kísérletet a III1 és III2 eszközön végeztem. A torsiós fejeket ellentett irányban toltam el, és pedig a III1 torsiós fejét 2·1 mm-rel, a mi a közölt kulcs szerint 26·3 osztályrésznek felel meg, a III2-ét pedig 1·7 mm-rel, a mi pedig szögkitérésben 21·3 osztályrészt jelent. A kísérleti eredmények a következők:

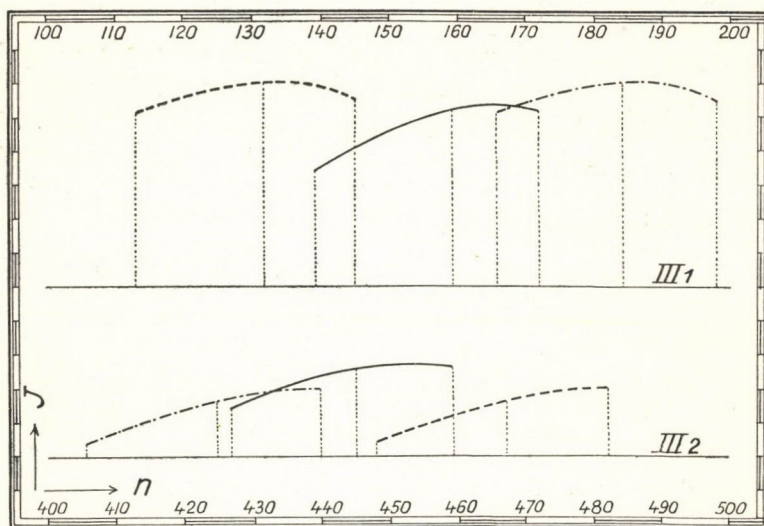
	Eredeti értékek		Eltolt torsiós fejek			
	$n$	$J$	$n$	$J$	$n_{sz}$	$n_l$
III 1	138·9	+ 3·4	139·4	+ 5·1	113·1	165·7
	158·9	+ 5·2	157·8	+ 6·0	131·5	184·1
	172·1	+ 5·2	171·4	+ 5·5	145·1	197·7
III 2	426·7	+ 1·4	426·7	+ 0·4	448·0	405·4
	445·0	+ 2·6	445·9	+ 1·6	467·2	424·6
	458·9	+ 2·6	460·8	+ 2·0	482·1	439·5

Az utolsó két oszlopban feltüntetett  $n$  értékek azokat az osztályzatokat jelentik, a melyekhez az előző  $J$  értékek tartoznak a szerint, a mint a szabad, avagy a lógós véget vesszük tekintetbe.

Az eredményeket grafikusán a 8. ábrában tüntettem fel. A kihúzott vonal az eredeti  $J$  görbe, a szaggatott vonal a szabad végnek, a pontvonásos vonal pedig a lógós végnek megfelelően felrajzolt új  $J$  görbe. Szembeötlőleg látjuk, hogy a

lógós vég görbéje mindkét esetben az eredeti görbe folytatásába esik, míg a szabad vég görbéje teljesen oldalt rossz helyre kerül. Ezek alapján kétségtelen, hogy a járást okozó hatások a lengő szerkezet ama végén jönnek létre, a hol a hengeres platinasúly lóg le.

Ez eredményünk teljes összhangban van az 5. pontban tárgyalt tájékoztató kísérletek idevágó következtetéseivel. Lehet-



8. ábra.

séges, sőt valószínű ugyan, hogy kisérték hatások a szabad végre is gyakoroltatnak, ezek azonban a lógós végre gyakorolt nagy hatások mellett, mindenesetre oly elenyészően kicsinyek, hogy megfigyelésünk jelenlegi pontossága mellett egyáltalán észre sem vehetjük azokat.

### 9. Az eszközök megdűtése.

Az előzők alapján bizonyos, hogy a járást a lengő szerkezet lógós végére gyakorolt hatások okozzák. Hol jönnek ezek létre? Valjon lent a lógó súly környezetében, avagy fent a

lelógó cső torkolata felett lebegő rúdrészen, szóval röviden a lógós vég alsó, avagy felső részén?

E kérdést tisztázzák azon kísérleteim, a melyeket akként végeztem, hogy a járási állandókat az eszközök különböző fokú megdütésekor, vagyis a függélyestől eltérő ferde felállításukkor meghatároztam. A II és III újabb típusú eszközök függélyezése eltérően a 2. ábrán feltüntetett I eszköztől az erős háromlábú talp végein lévő állító csavarokkal történik. Az eszközt az egyik láb irányára merőlegesen állítva, a ferdítést a megfelelő állító csavarral pontosan végezhettem. A függélyes helyzetből kiindulva félfordulatokkal emeltem, majd pedig sülyesztettem az eszköz lábát. A II eszköznél, a melylyel végzett kísérleteimet az alábbiakban közlöm, a megmért adatok alapján:

1 fordulatnak megfelelőleg,

a felső vég eltolódása 1·60 mm, azaz szögkitérésben 20·0 o.-r.  
 az alsó súly        "        3·16       "        "        "        39·5       "

Látjuk tehát, hogy a dütéskor az alsó súly körülbelül kétszer annyival tolódik el, mint a felső.

Hasonló gondolatmenettel, mint a melyet az előző pontban alkalmaztunk, a meghatározott járási állandókat kétféleképen rajzolhatjuk fel, ugyanis a felső rész, avagy a lelógó súly eltolódásának megfelelő nagyságú szögkitérések tekintetbevételével. A két feltevés közül ismét természetesen az lesz a helyes, a melynek görbéje az eredeti  $J$  görbével összeesik.

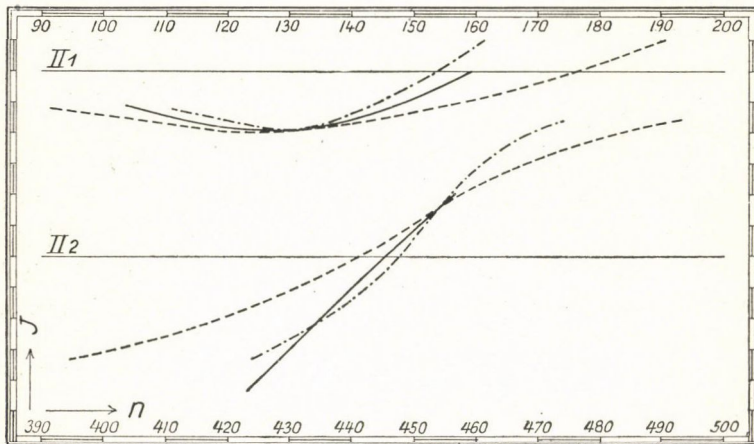
Az eredeti  $J$  görbék adatai a 432. oldalon közölt táblázat felső részletében foglaltatnak, melyek kiegészítéseül álljanak itt még a következők:

	II 1		II 2	
	$n$	$J$	$n$	$J$
Eredeti állapot	103·7	— 1·1	456·7	+ 2·1
	130·9	— 1·9	453·9	+ 1·6

Az eszköz megdütésekor nyert eredményeket pedig az alábbi táblázatban állítottam egybe:

Emelés fordula- tokban	II 1 Eszköz				II 2 Eszköz			
	$n$	$J$	$n_f$	$n_a$	$n$	$J$	$n_f$	$n_a$
- 1.0	130.7	- 1.2	110.7	91.2	453.9	+ 4.4	473.9	493.4
- 0.5	130.7	- 1.7	120.7	111.0	454.2	+ 3.5	464.2	474.0
0	130.9	- 1.9	130.9	130.9	453.9	+ 1.6	453.9	453.9
+ 0.5	131.0	- 1.3	141.0	150.8	453.9	- 0.7	443.9	434.2
+ 1.0	131.1	- 0.3	151.1	170.6	453.5	- 2.2	433.5	414.0
+ 1.5	131.7	+ 1.0	161.7	191.0	453.7	- 3.3	423.7	394.5

hol az  $n_f$  illetve  $n_a$  a felső vég, illetve az alsó súly eltolódásának megfelelően számított  $n$  értékeket jelenti.



9. ábra.

A 9. ábrában a kihúzott vonal az eredeti  $J$  görbe, a szaggatott vonal az alsó súly eltolódásának megfelelő, a pontvonal pedig a felső vég eltolódásának megfelelő görbe. Mindkét eszköznél a pontvonalos vonal közel összeesik az eredeti  $J$  görbével. Lehet, hogy a teljes egyezéstől való eltérés a megdöntés és a szögkitérés létesítette helyzetek különbségében kere-

sendő. Mindentől eltekintve azonban, a felső vég görbéje sokkal jobban összeesik az eredeti  $J$  görbével, mint az alsó vége, a miért is mindenesetre bizonyos, *hogy a járás főoka a lógós vég felső részére való hatásban keresendő.* Szóval a torsiós rúdnek a csőtorkolat felett lebegő végére gyakorolt hatások idézik elő a járást. Hasonló eredményre vezetnek a III eszközzel végezt kísérletek is.

E rendszeres kísérletsorozattal tehát ugyanarra az eredményre jutottam, mint a melyet az 5. pontban tárgyalt tájékoztató kísérleteim már sejtettek. *Az eszköz kényes helye tehát ott van, a hol a lelógó cső a felső szekrénybe torkollik. Itt kell keresnünk azokat a szerkezeti eltéréseket, a melyek az eszközök közötti nagy járási különbségeket okozzák.*

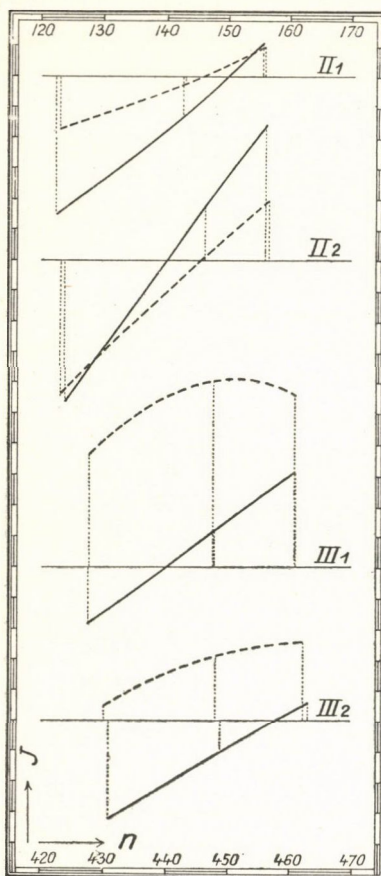
A mint azt a későbbiekben még részletezni fogjuk, a járássokat az eszköz belsejében végbemenő légáramlások okozzák. Tekintve, hogy az áramlásokat a velük érintkező felületek alakja lényegesen befolyásolja, előre várhattam, hogy aránylag kis szerkezeti eltérések nagy járási különbségeket idézhetnek elő.

## 10. Az ütközők.

Eddigi vizsgálataim folyamán magukon az eszközökön semmi lényegeset nem változtattam, sőt készakarva *egyáltalán ki sem nyitottam azokat.* Tisztán a különböző viszonyok közötti viselkedésből állapítottam meg, hogy az eszköz kényes helye a lelógó csőnek a szekrénybe való torkolata körül van. Épen e kényes helyen vannak az ütközők s így előre várhattam, hogy ezek a járást nagy mértékben befolyásolják.

Az ütközők a tapadás megakadályozására valók. Ugyanis a szabadban, az expeditióban való észleléskor gyakran előfordult, hogy a lógó súly a cső falához hozzásimulva odatapadt. E jelenség természetesen akkor jön létre, a mikor a lengő szerkezet már lassú mozgásokat végez. Tapasztalatszerűleg, ha egyszer beállt a tapadás, akkor ez a következő észlelésnél is előszeretettel ismétlődik, s az egész éjjeli megfigyeléssorozatot hasznavehetetlenné teszi. Ilyenkor az észleléseket csak úgy lehetett megmenteni, hogy az észlelőnek minden leolvasás után meg

kellett várnia, a míg a lengő szerkezet annyira megnyugszik, hogy egy határozott fordulópontot figyelhetett meg, a mely után a lógó súly a cső falát már többé nem éri el. Az ily módon való észlelés, ha az gyakran ismétlődik, az amúgy is terhes



10. ábra.

és a cső fala közötti vékony vízréteg meniskusa fogva tartja a súlyt. Ezen igyekeztünk segíteni az ütközőkkel, a melyekbe a súlyt hordozó vékony drót ütközik bele, még mielőtt maga a súly a cső falát elérné. Kisebbség lévén az érintkező felületek, várható volt, hogy a tapadás megszűnik. A tapadás azonban

éjszakai óránkénti megfigyelést szinte elviselhetetlenné teszi. Nem túlzok tehát, a mikor azt mondom, hogy a tapadás jelenségének megakadályozása gyakorlatilag majdnem az eszköz használhatóságának kérdése. Hozzá tehetem még, hogy az észlelőnek a sátorban való huzamos tartózkodása, az okozott hőmérsékleti zavarok miatt még a leolvasásokat s így az észlelés pontosságát is előnytelenül befolyásolja.

Indokolt tehát ama törekvésünk, hogy a tapadás jelenségét megakadályozzuk. A tapadás az éjszakai nagyobb lehülések alkalmával fordul elő és nedves időben gyakori. Az intézet nedves pinczéjében is sok bajunk volt a tapadással. Oka minden valószínűség szerint kapilláris jelenség; a lehüléskor ugyanis az eszköz belső falára kisfokú nedvesség csapódik le, s a lógó súly

nem szűnt meg. Az ütközőket különböző módon változtattam: vékony fémlap élébe, kifeszített vékony drótbá ütközött a lelógó drót, a mikor is a rugalmas visszalökésre számíthattam; de mindez nem vált be! Ezután más anyagokkal próbálkoztam. Így jutottam végre a nem szívesen alkalmazott papirosra, a mi azonban a tapadást tényleg megszüntette, még pedig valószínűleg azért, mert a papir hygroszkopikus voltánál fogva a kifestő nedvességet magába szívja.

Az ütközők helyes kiképzésénél természetesen szem előtt kellett tartani azt is, hogy azok biztosan álljanak, el ne mozduljanak. Az eszközeinkben immáron egy évtizede használatos ütközők végleges alakja a következő: A cső torkolatánál a szekrény fenekéhez csavarokkal vékony fémlap van erősítve, a melyről a cső szélén két fémmyelv nyúlik be a csőbe. A fémmyelvek 10—15 mm hosszúak és végükön 1—2 mm széles papirlemezekben folytatódnak. E papirlemezke élébe ütközik a lelógó súlyt hordó drót. A fémmyelvek a cső szélétől kissé ferdén nyúlnak lefelé s hajlítással úgy vannak beállítva, hogy — a lógó súly ütközését megakadályozandó — a kellő távolságban álljanak el a cső belső falától.

Kivettem tehát az összes eszközökből az ütközőket és a járási állandókat meghatároztam. Az eredmények a következők:

	II 1		II 2		III 1		III 2	
	<i>n</i>	<i>J</i>	<i>n</i>	<i>J</i>	<i>n</i>	<i>J</i>	<i>n</i>	<i>J</i>
Ütközők nélkül	122·4	— 4·5	456·2	+ 4·4	127·3	— 1·8	462·9	+ 0·6
	142·7	— 1·3	446·3	+ 1·8	147·7	+ 1·2	448·8	— 1·0
	156·0	+ 1·1	423·7	— 4·6	161·1	+ 3·1	430·8	— 3·2

Ezen adatoknak megfelelő *J* görbéket a 10. ábrában kihúzott vonallal tüntettük fel. Az ábrába összehasonlítás kedvéért szakadozott vonallal a 7. ábrában már közölt görbéket is berajzoltuk, a melyek az ütközőkkel még ellátott eszközre vonatkoznak. Szóval avval a változtatással, hogy az eszközökből az ütközőket kivettem, a szaggatott vonalú görbék a kihúzott vonalúakba mentek

át. A létrejött nagy változások újolag igazolják mindama következtetéseknek helyességét, a melyeket előző kísérleteimből levontam. Tényleg itt a csőtorkolat körül van az eszközényes helye, s az itten körül eszközölt kis változások a járásokat lényegesen befolyásolják.

A görbék összehasonlításából a következőket látjuk: A II1 és II2 eszközöknél az ütközők javítanak, mert a  $J$  görbét kevésbé meredekké teszik. A  $J$  értéke 10 osztályrésznek megfelelőleg a következő módon változik:

	Ütközős eszköz.	Ütköző nélküli eszköz.
III.	0·9	1·7
II2.	1·8	2·6

Egyébként azonos viszonyok között tehát a II eszköz ütközőkkel felszerelve kisebb járású, tehát jobb értékeket ad, mint azok nélkül.

Homlokegyenest ellenkezőt tapasztalunk a III eszközöknél. Itt az ütközők rontják el annyira az eszközt, hogy a  $J$  görbék 0 pontjai egész oldalosan messze valahová kiesnek a használatos észlelési közből. Ez eszközök ütközős  $J$  görbéi annyira rosszak, hogy azokat, a mint azt a 7. pontban részleteztük, a torsiós fejek maximális eltolásával sem javíthattuk meg jobban, mint a milyenek a szaggatott vonallal ábrázolt görbék. Az ütközők kivétele ez esetben a görbéket lényegesen megjavította s mindkét eszközöknél a 0 pont az észlelési közbe került.

## 11. A járást befolyásoló körülmények megállapítása és a járás csökkentése.

Tekintve, hogy az ütközők egyik esetben rontanak, másikkban javítanak, valószínű, hogy a kellő alak megválasztása esetén mindenkor javulást várhatunk. Ez a legkedvezőbb, esetleg a mostanitól teljesen eltérő alak megválasztása azonban bonyolult és nehéz feladat. Sajnos, oly problémával állunk itt szemben, a hol a theoria cserben hagy. Már magánál az ütköző nélküli eszközöknél a tényleges légáramlás a csőtorkolat körül annyira bonyolult, hogy a sebességek térbeli eloszlásának



pontos megállapítása elméletileg csak közelítéssel lehetséges. Az áramlás útjába helyezett ütközők hatása pedig az elmélettel még kevésbé követhető. Tehát ismét a kísérletre lettem utalva! Részletes vizsgálatot kezdtem az irányban, hogy a csőtorkolat környezetében tervszerűen végzett szabályos változtatások, miként befolyásolják a járási állandó görbéjét.

Nem akarván az expedíciós használatban lévő II és III eszközön lényegesebb változtatásokat tenni, a régebben használatos I jelzésű eszközt is bevontam a vizsgálat körébe. Itt is azt tapasztaltam, hogy az ütközők, szóval a csőtorkolat körüli változtatások, lényegesen megváltoztatják magukat a  $J$  görbékét. E régebbi eszköz sokkal rosszabb, mint az újabb típusú eszközök. Különösen az I2, a melynél ütközők nélkül az észlelési közbeeső  $J$  értékek abnormálisan nagyok,  $-8.3$  és  $-8.8$  körül vannak; az ütközők eredeti alakjukban javítottak ugyan és az értékeket  $-4.4$  és  $-6.9$ -re vitték le. Feltűnő, hogy a másik két eszközön tett tapasztalattól eltérőleg maga az ütköző nélküli  $J$  görbe nagyon el van tolva, a minek okát az eszköz felépítésében mutatkozó dissymetriákban találhatjuk meg.

A vizsgálatot kibővítettem az irányban is, hogy az egész megfigyelhető  $J$  görbét meghatároztam s nem csupán annak középső darabját, mint azt eddig tettem. Melegedésekkor és különböző fokú lehülésekkor végeztem megfigyeléseket, hogy a csőtorkolat körüli áramlás természetét kitanulmányozzam. E vizsgálatok oly rendszeres szabálytalanságokra mutattak rá, a melyeknek megismerése különbözően változtatott viszonyok közötti újabb nagyszámú megfigyelést tesz szükségessé. Az eddigi vizsgálati anyag korántsem elegendő, hogy azokból ez irányban biztos következtetéseket vonhassak, a miért is ezt későbbre kell fenntartanom.

Magát a járás okát és a jelenség létrejövésének mikéntjét azonban főbb vonásokban már az eddigiekből megállapíthatjuk. A járást a lelógó eső torkolata körüli légáramlások okozzák, a melyek a torsiós rúdnak a torkolat felett lengő végére hatnak. A hatás nagyságát természetesen elsősorban az áramlás sebessége és annak térbeli eloszlása határozza meg. Tapasztalat szerűleg ez áramlások oly nagy szabályossággal és határozottsággal

mennek végbe, hogy azokat a lengő szerkezet egy ideig való mozgása nem módosítja. Egyébként változatlan eszköznél a járást jellemző adat, a járási állandó értéke tehát úgyszólván kizárólag attól függ, hogy a torsiós rúd vége a csőnyílás felett mily helyzetet foglal el. A csőtorkolat körüli áramlás sebességét természetesen első sorban az határozza meg, hogy az eszköz belsejében, annak felső és alsó része között milyen hőmérsékletkülönbségek jönnek létre. A kísérletek tanúsága szerint a lelógó cső mindenkor hamarabb változtatja hőmérsékletét, mint az eszköz többi része. Ha tehát az eszközt környező levegőt mindenütt ugyanazon hőmérsékletűnek vesszük és ha e levegő hőmérsékletét egészében egyformán változtatja, még ez esetben is az eszköz részeinek különböző gyors melegedése folytán a belső térben, nevezetesen annak felső és alsó része között hőmérsékletkülönbségek jönnek létre.

A jelenség közelebbi ismerete alapján érthető, hogy a járási görbék a  $\Delta n$ -nek, a külső és belső hőmérsékletek különbségével a  $\tau$ -val közelítőleg arányosak, a mint azt a 6. pontban részleteztük. A csőtorkolat körüli áramlás sebessége és vele együtt a járás foka ugyanis az eszköz belső terében a felső és az alsó hőmérséklet közötti különbséggel lesz arányos. Az észlelt belső hőmérsékletek e két adat egyikét, a felsőt közvetlenül megadják, mert történetesen az 1 és 2-vel jelzett belső hőmérők itt vannak elhelyezve, ha mindjárt nem is a legkedvezőbb helyen. A külső hőmérséklet változásával együtt változik a lelógó cső belső terének hőmérséklete. A változás mikéntje általánosságban és szigorúan véve meglehetősen bonyolult, mert hiszen a belső hőmérséklet változása a lelógó cső hármass fémhártyán és a közbülső levegőrétegeken keresztül részben sugárzás, részben vezetés útján történik. Hasonló fajú és rendű melegedéseknél azonban a belső hőmérséklet változása, a külső hőmérsékletváltozással arányosnak vehető s az arányossági tényezőt a cső szerkezete és annak, ha szabad ezt az összefoglaló kifejezést használnom, hőmérséklettovábbító képessége határozza meg. E megszorítás szem előtt tartásával tehát az észlelt külső hőmérsékletek arányosak a belső tér alsó hőmérsékletével. Ezek alapján érthetővé válik a  $\Delta n$  és  $\tau$  görbék között kísérletileg

megállapított összefüggés s egyszersmind a szigorú megegyezéstől való eltérések, mint a milyenek pl. a maximumok késése stb. Csupán felemlítem, hogy az eltérések egy része az előnytelen kísérleti berendezésben találja magyarázatát. Így például a külső hőmérőt mindenesetre célszerűbb az alsó csőre helyezni s azal teljesen fémes összeköttetésbe hozni, stb. Ezek további részletezésébe egyelőre nem bocsátkozhatunk. Mind e tökéletlenségek mellett azonban, a mint azt már az előzőkből és még a jelen pontban közlendő adatokból látjuk, e módszer már így is teljesen alkalmas és elegendő pontosságú arra, hogy segítségével a járási jelenségeket quantitative megvizsgálhassuk.

Ha közvetlenül a belső hőmérsékletek különbségét határozni meg kísérletileg és pedig két, a csőtorkolattól nem messze fekvő, kedvezően kiválasztott ponton, alul és felül, ugyanis a torkolat előtt és után, akkor már eleve teljesen bizonyos, hogy ez esetben a temperatura-különbségek és a járás közötti arányosság teljes szigorúsággal fenn fog állani. A jövőben ezt tényleg kísérletileg ellenőrizni szándékozom. Tekintve a várható kis hőmérséklet-különbségeket és a hőmérők esetleges elhelyezésének nehézségeit, ezt csak elektromos hőmérés útján eszközölhetjük. Épen ezért e kísérletnek inkább csak laboratoriumi, theoretikus fontosságot tulajdonítok, mert a szabadban való mérések körül immáron másfél évtized alatt szerzett tapasztalataim szerint az amúgy is kényes elektromos hőmérést, a mulhatlanul szükséges biztossággal künn csak nagy nehézségekkel végezhetnők. Igaz ugyan, hogy ez adatokkal a járás okozta zavarokat minden valószínűség szerint teljes pontossággal korrigálhatnók.

Épen ezért, a mint azt a bevezetésben már említettem, egyelőre az a gyakorlatiasabb cél lebegett előttem, hogy a járásokat lehetőleg csökkentsem, a mi az imént elmondott kísérleti eredmények alapján két uton lehetséges.

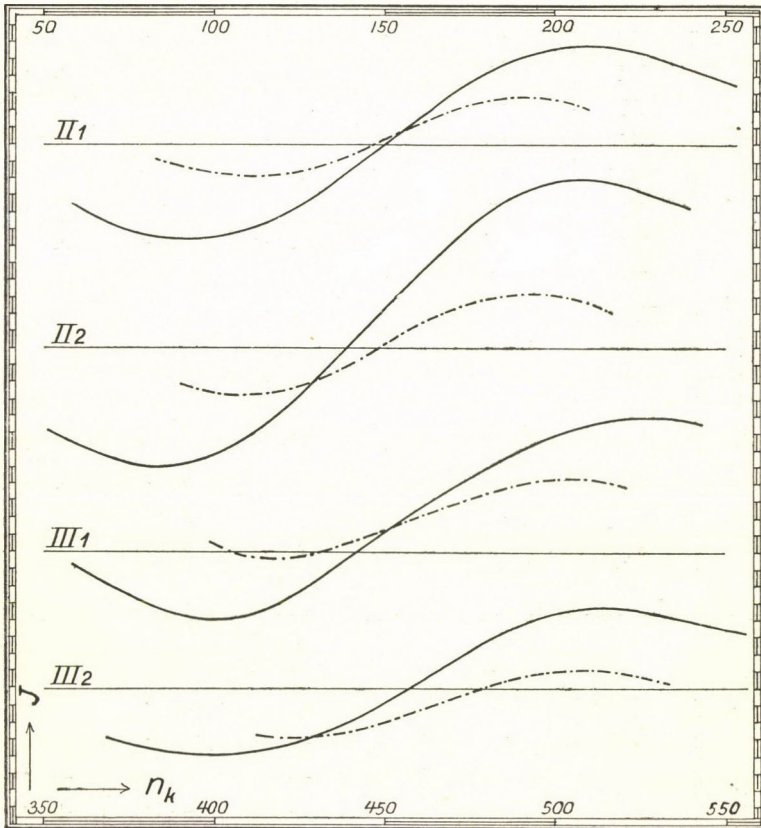
Az egyik módra az a tapasztalat vezet rá, hogy a lelógó cső gyorsabban változtatja hőmérsékletét, mint az eszköz többi része. Ha tehát a csövet a mostaninál jobban, esetleg hőszigetelő anyagok okkal-móddal való alkalmazásával kellően megvédjük, mindenesetre elérhetjük azt, hogy a cső belső hőmérsék-

lete az eszköz többi részével együtt változzék, legalább is oly ideális esetben, a mikor a környezet hőmérséklete az egész eszköz körül ugyanaz, és egyformán változik. E szempontból a jelenlegi viszonyok nagyon előnytelenek. Kísérleteim tanulsága szerint például, a mikor a szomszédos helyiségből a meleg levegő az eszközre áramlik, a lelógó cső belső hőmérséklete gyorsabban emelkedik, mint a felső részé, dacára annak, hogy a külső hőmérséklet alul mindig alacsonyabb marad, mint felül, ha mindjárt az egész térben emelkedik is. Az ily módon való javításra eddig csupán durva próbakísérletet végeztem, s így határozott véleményt csak később, a további kísérletek alapján mondhatok.

A járás csökkentésének másik módja, hogy a légáramlást a csőtorkolat felett lebegő rúd-rész körül megfelelő alakú ütközőkkel mérsékeljük, illetve eltereljük. A mint azt a jelen pont tárgyalása elején már érintettem, számos kísérletre van szükségünk, hogy e feladatot a legelőnyösebb módon oldjuk meg. Épen ezért egyelőre csupán azokat az eredményeket közölhetem, a melyeket az eredeti ütköző alak megtartása mellett, az azon végzett kis változtatások útján értem el. Az így elérhető javulás máris lényeges és még lényegesebbet várhatunk akkor, ha a legkedvezőbb alakot sikerül kikutatnunk. Az egész változtatás abban állott, hogy a fémmelvényeknek ivelt alakot adtam, hogy azok a cső falától egészükben messzebb kerüljenek, úgy gondolván, hogy ez esetben nem terelik el a fal közeléből a légáramlást előnytelen módon a cső közepe felé.

A megfigyelésekből számított adatokat az alább következő táblázatokban állítottam egybe. A táblázatok felső része mindenkor az ütközők nélküli eszközre, alsó része pedig a javított ütközőkkel felszerelt eszközre vonatkozik. Az eddigi közlésektől eltérőleg az  $n$  kezdeti leolvasásokon kívül a táblázatba az  $n_k$  értékeket is felvettem, a melyek mindenkor a kezdeti állás és a maximális eltérés leolvasásainak középértékei. Nagyobb  $J$  értékek esetén ugyanis a szerint, a mint az egyes kísérletekben szereplő hőmérsékleti különbségek mások és mások, egymástól lényegesen eltérő maximális járásokat kapunk. Indokolt tehát az az eljárásunk, hogy a  $J$  értéket, különösen a grafikus ábrázolásakor,

nem a kezdeti  $n$ , hanem az  $n_k$  középértékhez tartozónak vesszük. A többi oszlopban közölt adatok jelentőségére és rendeltetésére a későbbiekben még visszatérek. A táblázatokat a növekedő  $n_k$  értékeknek megfelelően állítottam egybe.



11. ábra.

Magukat a  $J$  görbékét a 11. ábrában tüntettem fel; a kihúzott görbe mindenütt a felső, a pontvonalos pedig az alsó táblázat adatainak felel meg. Látjuk tehát, hogy helyesen alkalmazott ütközőkkel a járási állandókat valamennyi eszköznél csökkentettük. A tényleges méréskor, a kellően egybeállított eszköznél csak a görbe középső része szerepel, a melyet mindenkor a

		II 1 Eszköz					
		Állás	$n$	$n_k$	$J$	$J_k$	$J-J_k$
		<b>Ütközők nélkül</b>					
Ütközési köz: 55—263.	III	62·0	57·9	—3·9	—3·6	—0·3	
	III	62·4	59·1	—3·2	—3·6	+0·4	
	II	65·2	60·7	—4·4	—3·9	—0·5	
	VI	71·4	67·0	—4·3	—4·5	+0·2	
	VIII	92·6	86·1	—5·8	—5·5	—0·3	
	II	106·5	101·8	—4·7	—5·3	+0·6	
	VI	123·1	119·1	—4·1	—4·3	+0·2	
	VI	122·4	119·4	—4·5	—4·3	—0·2	
	VIII	142·7	141·4	—1·3	—1·3	0	
	II	156·0	157·0	+1·1	+1·1	0	
	VI	173·3	177·3	+4·0	+4·0	0	
	VIII	192·2	198·7	+5·9	+5·6	+0·3	
	II	206·0	212·5	+5·0	+5·6	—0·6	
	VI	216·7	222·5	+5·6	+5·4	+0·2	
VIII	234·9	239·0	+4·7	+4·6	+0·1		
II	249·2	253·1	+3·5	+3·5	0		
		<b>Javitott ütközőkkel</b>					
Ütközési köz: 82—214.	VI	83·8	82·9	—0·9	—0·9	0	
	VIII	103·9	102·4	—1·6	—1·6	0	
	II	117·6	116·4	—1·8	—1·7	—0·1	
	II	117·9	116·5	—1·6	—1·7	+0·1	
	VI	130·1	128·9	—1·4	—1·4	0	
	VIII	149·8	150·0	+0·2	+0·2	0	
	II	163·3	164·4	+1·7	+1·7	0	
	VI	174·3	176·3	+2·4	+2·4	0	
	VIII	193·6	196·1	+2·9	+2·8	+0·1	
	II	204·9	206·8	+2·5	+2·4	+0·1	
II	207·9	210·0	+2·0	+2·1	—0·1		

II2 Eszköz						
Állás	$n$	$n_k$	$J$	$J_k$	$J-J_k$	
<b>Ütközők nélkül</b>						
Ütközési köz: 339—548.	III	355·4	350·2	—4·9	—4·9	0
	III	356·0	350·9	—4·9	—4·9	0
	VIII	374·1	367·9	—5·8	—6·3	+0·5
	II	380·6	373·7	—6·9	—6·7	—0·2
	VIII	403·3	395·8	—6·7	—6·6	—0·1
	VI	414·0	409·4	—4·5	—5·3	+0·8
	II	423·7	419·8	—4·6	—3·8	—0·8
	VIII	446·3	448·1	+1·8	+1·8	0
	VI	456·2	459·1	+4·4	+4·2	+0·2
	VI	456·3	460·6	+4·4	+4·5	—0·1
	II	478·3	490·6	+9·5	+9·3	+0·2
	VIII	500·2	511·3	+10·1	+9·8	+0·3
	VI	508·9	518·2	+9·2	+9·5	—0·3
	II	510·7	521·3	+9·5	+9·4	+0·1
VIII	532·6	539·8	+8·4	+8·2	+0·2	
<b>Javitott ütközőkkel</b>						
Ütközési köz: 387—521.	II	392·1	390·5	—2·1	—2·1	0
	VIII	412·2	409·9	—2·7	—2·7	0
	VI	422·8	421·0	—2·2	—2·4	+0·2
	II	425·7	424·2	—2·5	—2·3	—0·2
	VIII	449·2	449·4	+0·3	+0·3	0
	VI	458·9	460·0	+1·3	+1·3	0
	II	475·6	477·5	+2·8	+2·8	0
	VIII	499·1	501·7	+2·9	+3·0	—0·1
	VI	508·7	511·3	+2·7	+2·6	+0·1
	II	514·9	516·8	+2·1	+2·1	0

		III1 Eszköz					
		Állás	$n$	$n_k$	$J$	$J_k$	$J-J_k$
		<b>Ütközők nélkül</b>					
Ütközési köz: 51—259.	III	59.1	58.5	— 0.6	— 0.7	+ 0.1	
	III	59.7	58.9	— 0.9	— 0.8	— 0.1	
	II	64.7	63.4	— 1.2	— 1.3	+ 0.1	
	VI	85.3	82.4	— 3.0	— 3.0	0	
	VIII	106.0	101.1	— 4.1	— 3.8	— 0.3	
	II	119.8	116.8	— 2.9	— 3.1	+ 0.2	
	VI	127.3	125.9	— 1.8	— 2.0	+ 0.2	
	VI	128.8	126.5	— 2.3	— 2.0	— 0.3	
	VIII	147.7	148.9	+ 1.2	+ 1.2	0	
	II	161.1	164.1	+ 3.1	+ 3.1	0	
	VI	182.8	188.6	+ 5.2	+ 5.8	— 0.6	
	VIII	201.3	210.2	+ 7.1	+ 7.4	— 0.3	
	VI	217.2	225.2	+ 7.8	+ 7.9	— 0.1	
	II	216.1	226.1	+ 8.2	+ 7.9	+ 0.3	
VIII	236.0	242.5	+ 8.0	+ 7.6	+ 0.4		
		<b>Javított ütközőkkel</b>					
Ütközési köz: 94—225.	VIII	97.1	97.8	+ 0.7	+ 0.7	0	
	II	111.1	111.0	— 0.2	— 0.2	0	
	II	111.7	111.4	— 0.3	— 0.3	0	
	VI	120.7	120.4	— 0.3	— 0.3	0	
	VIII	141.0	141.5	+ 0.7	+ 0.7	0	
	II	155.2	156.4	+ 1.7	+ 1.7	0	
	VI	162.8	165.3	+ 2.6	+ 2.5	+ 0.1	
	VIII	181.9	185.9	+ 4.2	+ 4.0	+ 0.2	
	II	196.9	201.2	+ 4.0	+ 4.2	— 0.2	
	II	218.2	221.5	+ 3.8	+ 3.8	0	



III2 Eszköz						
Állás	$n$	$n_k$	$J$	$J_k$	$J-J_k$	
<b>Ütközők nélkül</b>						
Ütközési köz: 362—569.	II	371·7	368·7	— 2·9	— 2·9	0
	II	377·2	374·0	— 3·0	— 3·1	+ 0·1
	III	378·0	374·4	— 3·3	— 3·2	— 0·1
	III	378·0	374·6	— 3·5	— 3·2	— 0·3
	VIII	390·1	386·4	— 3·7	— 3·6	— 0·1
	VIII	395·1	390·9	— 3·4	— 3·7	+ 0·3
	VI	409·3	405·7	— 3·7	— 3·8	+ 0·1
	II	430·8	427·7	— 3·2	— 3·0	— 0·2
	VIII	448·8	447·8	— 1·0	— 1·0	0
	VI	462·9	463·3	+ 0·6	+ 0·7	— 0·1
	VI	462·7	463·4	+ 0·7	+ 0·7	0
	II	477·2	481·5	+ 3·5	+ 2·9	+ 0·6
	VIII	495·5	500·3	+ 3·9	+ 4·3	— 0·4
	VI	508·7	513·2	+ 4·0	+ 4·7	— 0·7
	II	520·9	526·3	+ 5·0	+ 4·7	+ 0·3
VIII	539·3	542·6	+ 4·0	+ 4·1	— 0·1	
VI	552·7	556·0	+ 3·2	+ 3·2	0	
<b>Javított ütközőkkel</b>						
Ütközési köz: 409—538.	VIII	414·9	412·3	— 2·7	— 2·7	0
	II	424·0	421·5	— 2·9	— 2·9	0
	VI	429·6	427·2	— 2·6	— 2·9	+ 0·3
	II	441·7	439·9	— 2·6	— 2·5	— 0·1
	VIII	460·0	459·1	— 1·2	— 1·2	0
	VI	474·3	474·0	— 0·3	— 0·3	0
	II	484·8	485·1	+ 0·4	+ 0·4	0
	VIII	503·3	504·2	+ 1·0	+ 1·0	0
	VI	517·3	518·2	+ 0·8	+ 0·9	— 0·1
	II	532·7	533·0	+ 0·3	+ 0·3	0

kellő helyre hozhatunk. A javulás fokát e középső egyenes darab meredekségének csökkenése mutatja. Ezt mutatják az alábbi adatok is, melyek szerint — az  $n_k$  értékeket véve tekintetbe — a  $J$  értéke 10 osztályrésznek megfelelőleg a következő módon változik:

	Ütköző nélkül.	Javitott ütközővel.
II1	1·6	0·9
II2	2·2	1·0
III1	1·4	0·7
III2	1·1	0·6

Összehasonlítás kedvéért felemlítjük, hogy ugyancsak az  $n_k$  értékekkel számítva a legjobb II2 eszközünk eredeti expedíciós állapotában a 10 osztályrésznek megfelelő  $J$  változás 1·7. Egybevetve ezt a javított ütközőkkel nyert adatokkal látjuk *hogy valamennyi eszközt sikerült megjavítanunk és pedig oly fokban, hogy azok jobbak lettek eddigi legjobb eszközünkénél.*

Az eddig rosszabbnak bizonyuló III eszköz e változtatás után a jövőben jobb lesz a II-nél, a mi újabb keletű voltának és tökéletesebb készítésének meg is felel. A III1 eszköz az expedíciós tapasztalatok szerint körülbelül 15-ször rosszabb volt a II2-nél, s így már az eddigiek szerint sikerült a III1 eszközt körülbelül 30—35-szörösen megjavítani, illetve a temperatura hatásokkal szemben érzéketlenebbé tenni. Ha eszközeinkkel már eddig is a szabadban való felvételek céljait kielégítő pontosságú adatokat nyerhettünk, méginkább ki fogják elégíteni igényeinket a jövőben a tökéletesített eszközök adatai. Az eddig elért javítást korántsem tekintem véglegesnek; folyamatban lévő kísérleteim, a melyek részleteibe egyelőre nem bocsátkozhatom, biztosítanak arról, hogy a javítás még fokozható. Hiszem, hogy sikerül eszközeinket a temperaturaváltozásokkal szemben annyira érzéketlenné tenni, hogy azok a szabadban előforduló legelőnytelenebb hőmérsékleti viszonyok között is használható adatokat nyújtsanak.

A táblázatokban közölt adatokból egyszersmind újabb bizonyítékot nyerünk arra a már előbb igazolt kísérleti tényre, hogy egyoldalú hatások nincsenek, vagyis hogy az ugyanannak az  $n$

értéknek megfelelő járás egyoldalú melegedések esetén is független az eszköz azimuthális helyzetétől. Az  $n$  értékét ugyanis részben a torsiós fej elforgatásával, részben a különböző azimuthokban való észleléssel változtattam. A táblázatokban épen ezért az eszköz azimuthális helyzeteit, az «állásokat» is feltüntettem. A I—VIII állások ugyanis az egymással  $45^\circ$ -ot képező 8 azimuthot jelentik. A  $J_k$  oszlopban a grafikus kiegyenlítés útján nyert, a  $J$  görbékből kivett adatok foglalhatók; az utolsó oszlopban feltüntetett  $J - J_k$  értékek pedig a megfigyelt és a kiegyenlített járási állandók különbségei. E különbségek annyira csekélyek, hogy a megfigyelések pontosságát és az észlelés körülményeit tekintetbe véve, a várható hibákon általában jóval alul maradnak. Csupán felemlítem például, hogy a belső és külső hőmérő leolvasásában elkövetett  $0.1^\circ$  hiba, a mi az eszköz tökéletlen hőmérőin könnyen megtörténhet, ha az összegeződik, a nagyobb  $J$  értékeket egy egységgel megváltoztathatja. Az, hogy a különböző állásokban észlelt adatok ily pontosan megadják a folytonos és szabályos  $J$  görbét, szembeötlő módon igazolja, hogy daczára az egyoldalú melegedésnek, a járási állandók értékei függetlenek attól, hogy az észleléskor az eszköz mely azimuthban állott.

## 12. Összefoglalás.

Kiindulva az expedícióban szerzett ama tapasztalatból, hogy eszközeink a temperatura-hatásokkal szemben különböző fokban érzékenyek, az előzőekben részletezett rendszeres kísérleteimmel *sikerült ez eltérések okát kikutatnom*, és ez alapon a kísérleteim kezdetén még igazi *pium desiderium*-nek látszó czélt elérnem: *az eszközöket megjavítanom*.

Kizárva az egyéb összes lehetőségeket, kimutattam, hogy *a kérdéses járásokat csupán a lengő szerkezetre gyakorolt hatások okozzák*. Lépésről-lépésre haladva megállapítottam, hogy *a hatások főleg ott jönnek létre, a hol a lelógó cső a középső szekrénybe torkollik*. Ily módon kipuhatolva az eszköz kényes helyét, az ott elhelyezett *ülközők kifsokú változtatásával* az eszközöket megjavítottam.

Tanulmányozva az eszközök egészükben való melegedésekor

és lehülésekor fellépő járásokat, kimutattam, hogy a járási görbe és a külső és belső temperaturakülönbség-görbe közelítőleg arányos egymással.

Bevezettem a járási állandó fogalmát, értve alatta a gyors temperaturaváltozásokkor észlelt járási görbe és a temperatura-különbség-görbe szélső értékének viszonyát, a mely adat az eszközöknek hőmérsékleti hatásokkal szemben való érzékenysége mértékeül szolgálhat.

A járási állandók kísérleti meghatározásával egy oly módszert állapítottam meg, a melylyel kényelmesen és aránylag gyorsan eldönthetjük, hogy az eszközök a szabadban, a gyors temperaturaváltozások esetén mily fokban nyújtanak biztos adatokat. Eddig eszközeinket a laboratóriumban e szempontból nem vizsgáltuk meg; s nem egyszer ki voltunk téve oly kellemtelen meglepetéseknek, hogy a laboratóriumban kitűnőnek ígérkező eszköz, a szabadban nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket. Mindezeket a jövőben az eszközöknek ilyen módon való megvizsgálásával és azok kellő egybeállítással elkerülhetjük.

Tűzetes tanulmány tárgyává tettem, hogy a külső hőmérséklet változása miként hat eszközeinkre. Megállapítottam első sorban, hogy az eszközök hármassal fémburka oly kitűnő védelmet nyújt és a hőmérsékleti különbségeket annyira kiegyenlíti, hogy egyébként azonos körülmények között az oldalról jövő melegedések függetlenül a melegedés irányától mindig ugyanazt a járást okozzák. Kimutattam továbbá, hogy az eszköz különböző részei a hőmérsékletváltozásokkal szemben nem egyformán viselkednek. A lelógó cső gyorsabban változtatja belső hőmérsékletét, mint az eszköz többi része. Az eszköz belsejében ilyen módon jönnek létre a hőmérsékletkülönbségek s az ezzel kapcsolatos áramlások.

Tisztáztam bizonyos fokig az eszköz belsejében végbemenő folyamatokat, megállapítván, hogy a járásokat nagy szabályossággal lejátszódó légáramlások okozzák, melyek a csőtorkolat felett lebegő rúdvegre hatnak. Ez áramlások annyira határozottak, hogy a lengő szerkezet egyideig tartó mozgása azokat nem módosítja.

Mindezek az ismeretek lehetővé tették, hogy az eszközöket máris lényegesen megjavíthattam, s egyszersmind kijelölték azt az utat, a melyen haladva további kísérleteimmel valószínűleg még jobb eredményt érhetek el. Ha ez egyhamar nem is sikerülne, akkor is bizalommal és érdeklődéssel nézek a legközelebbi expeditiós mérések elé, a melyek eddig elért eredményeim gyakorlati értékét fogják igazolni.

Végeredményben igen kis változtatás az, a mivel eszközeinket megjavíthattam. Bármennyire különösnek tetszhet ez utólag, éveken keresztül hasztalan próbálkoztunk vele, és csakis e rendszeres vizsgálatokkal, e hosszadalmas kísérletekkel sikerült azt a helyet megtalálnom, a hol e nagyhatású kis változtatást tenünk kell.

A mint azt már a bevezetésben említettem a báró Eötvös LORÁND-féle gravitációs mérési eljárás és maguk a használatos eszközök mindinkább kilépnek a gyakorlati életbe. Egyre többen, és közöttük nem fizikusok is, mérnek vele. Épen ezért kettőzöttén czélszerűnek véltem minden oly módosítást, mely az észlelést zavaró hatásokat csökkenti.

Érthetőség kedvéért itt-ott kiterjeszkedtem oly részletekre is, a melyek végzett kísérleteimhez szigorúan nem tartoznak. E részletek közlése azonban azért sem tárgyaltan, mert bepillantást engednek az eszközök gyakorlati kezelésébe, a mi talán mindazokat érdekli, a kik az eszközökkel tényleges méréseket óhajtanak végezni.

## ELŐMUNKÁLATOK

### 27 HOLDRÉSZLET [MÁRE-KRÁTER] ÉS 30 KÖZET ALBÉDÓJÁNAK SPEKTRÁLFOTOMÉTRIAI ÚTON MEGHATÁROZÁSÁHOZ.

KONKOLY THEGE MIKLÓS tisztt. tagtól és TERKÁN LAJOS-tól.

WILSING J. és SCHEINER J. a porosz kir. asztrofizikai obszervatórium obszervátorai Potsdamban néhány közetnek az albédóját, nemkülönben néhány Hold-részlet albédóját figyelték meg egy e célra készült spektrálfotométerrel avégből, hogy a közetek albédóját összehasonlítva a Hold-részletek albédójával, esetleg következtetni lehessen arra, hogy miféle közetek lehetnek a hold felületén.<sup>1</sup> A korán elhalt SCHEINER csillagjai főobszervátor szemei azonban oly rohamosan megromlottak, hogy ezt a munkát oly módon befejezni, mint ahogyan ő szerette volna azt a tudományos világnak bemutatni, a sors nem engedte meg neki, mert bár 32 közet albédóját határozta meg spektrálfotométerével, de ehhez képest csak kevés Hold-tájkép lett aránylag megfigyelve.

Hogy ezt a munkát Ó-Gyallán folytathassuk, építettem egy a SCHEINER spektrálfotométeréhez igen hasonló műszert, azonban ennek használatbavétele előtt a terv megváltozott, s a tervnek a megváltoztatása oda konkludált, hogy a fotográfia itt is kiszorította a vizuális megfigyelést.

Dr. TERKÁN LAJOS budapesti egyetemi magántanár, az ó-gyallai asztrofizikai obszervatórium obszervátora 1912-ben azt az óhajátását fejezte ki előttem, hogy szeretné egy sorozat

---

<sup>1</sup> Beobachtung am Astrophysicalischen Observatorium in Potsdam. Bd. 20. 4-tes Stück.

kőzetnek a reflektált fényből nyert spektrumát s ebből az albedóját megfotografálni, ha a kellő kőzetek rendelkezésünkre állának és egy SCHEINER-féle lámpás volna a csillagda műszertárában.

A kőzetek igen hamar elő lettek teremtve, mert én azonnal leutaztam Budapestre, felkerestem a műegyetemen dr. SCHAFARZIK FERENC tanár tisztelt barátomat, előadtam neki a kérésemet és annak célját, s a tisztelt barátom 8 nap alatt kiküldte a kőzeteket Ó-Gyallára; én pedig bevásároltam Budapesten a SCHEINER-lámpáshoz való elektromos körtéket, a lámpás szekrényét gyorsan elkészítettem egy ó-gyallai asztalossal, azután, abból az elvből kiindulva, «magad uram, ha szolgád nincs» (mert még mechanikusunk nincs), nekifogtam a szerelésnek és a legrövidebb idő alatt készen volt a SCHEINER-lámpás is, úgy hogy dr. Terkán fotografálhatott.

Minthogy a SCHEINER-lámpás nem mindennapi eszköz, nem tartom feleslegesnek megismertetni.

A lámpás nagy faszekrényből áll, mely 400 mm négyzetben és 600 mm magas; felül toronytető alakú bádogfedővel van oly módon ellátva, hogy a megfelelő nyílásokon a meleg levegő a szekrényből felfelé kimehessen. Természetes, hogy a szekrényen alul is vannak lyukak, avégből, hogy a szekrényben a kellő levegőcirkuláció akadály nélkül történhessen. A lámpás belseje fehérre van mázolva, a sodronyvezetések pedig aszbesztpapírral befedve.

A lámpás egyik oldalán kis asztalka van elhelyezve, a mely fel s alá tolható, s a kívánt helyen rögzíthető; a kis asztal lapján vertikális állású deszka van felerősítve, a melyre a fotografálandó kőzet nekitámaszkodik oly módon, hogy a kőzet első oldala mindig egyenlő távolban álljon a spektrograf részéhez.

Hogy ez pontosan megtörténhessen, az asztalka talapzata pontos vezetésben előre-hátra tolható és a kívánt helyen rögzíthető. Az eltolás nagysága miliméterskálán a kellő index segítségével leolvasható.

Az asztalkával szembe eső oldalán a szekrénynek 10 konnektor van körben felerősítve, melybe 10 Ozrám-lámpa van belesavarva, amelyeknek fényessége darabonként 50 gyertya, tehát összesen 500 gyertya. Itt nem lesz felesleges megem-

líteni, hogy az említett égők olyannyira felmelegítik a lámpást, hogy hosszabb munkánál rövid szünetet kell tartani, hogy az némileg lehűljön, és ha az ozrám-égők helyett a régi szénszálás égőkkel kellene dolgoznunk, akkor a lámpás-szekrény  $\frac{1}{2}$  óra alatt okvetlen lánggal égne.

Az égők azért vannak köralakban elhelyezve, hogy a kissé egyenetlenebb felületű kőzetdarabnak minden legkisebb része egyenetlenül legyen megvilágítva.

Az égők által alkotott kör középpontjában egy eltolható sárgarézeső van kívülről a lámpásszekrényre felerősítve, melynek átmérője 25 mm. Ezen lehet kívülről a kőzetre reánézni. A cső és a lámpák közötti helyzet úgy van kontemplálva, hogy a cső egyik lámpától se vetítsen árnyékot a megfigyelendő kőzetre, de viszont egyik égő se vethessen direkt fényt a csőbe, illetve a spektrograf részére.

A nagy szekrénynek azon a falán, ahol az égők vannak, kívül látjuk a sarkcsipeszeket, és a kikapcsolók is ott vannak alkalmazva. Ezt az elvet azért követtem, hogy ha ugyanis bármelyik égő vezetésén, mely viszont belül van elhelyezve, valami baj történne, minden egyes égő külön legyen kezelhető. Azonfelül a két kikapcsoló úgy van berendezve, hogy tetszés szerint csak a fele számú égő világítson (minden második), vagy valamennyi.

A spektrograf úgy van a cső külső vége elé állítva, hogy rése a csőnek végét majdnem érintse, hogy ugyanis a résbe semmiféle idegen világosság ne jusson. Az általam szerkesztett ógyallai kabinet-spektrográfnak a rése különben úgy van készítve, hogy előtte még egy tágabb henger van a kollimátor-csőre felerősítve, amely már magában véve minden oldalfényt elfog a réstől.

A lámpás-szekrény egyik oldalán nyitható ajtót látunk, a melyen akár két kézzel is bele lehet nyúlni a szekrénybe, avégből, hogy a kőzetet az égőkkel és a csővel szemben a kellő helyzetbe tudjuk hozni, illetve azt szükség esetén kicserélhessük. Az ajtó egy spektroskóppal megvizsgált rubin-üveggel van ellátva.

A spektrográf egy «a vision directe» öttagú prizmából áll, melyet SCHMIDT & HAENSCH készített Berlinben. A prizma szórási képessége D től H-ig  $5^\circ$ , úgy hogy a spektrum hossza 63 mm.



A kollimátorlencse gyújtótávolsága 160 mm és a kameralencse gyújtótávolsága 200 mm; M. HENSOLDT & SÖHNE készítette Wetzlárban. A kamara az ismert Gothard—Konkoly-alakkal bír és úgy van szerkesztve, hogy a lemezt bizonyos fokig a spektrograf optikai tengelyéhez hajlítani lehessen avégből, hogy a spektrum minden része egyformán élesen legyen kirajzolva. A kamarához való két kaszettát pedig GOLDMANN csinálta Wienben, a finom rést pedig SCHMIDT & HAENSCH Berlinben. A műszernek összes további részeit KLASSOHN JÁNOS készítette, a m. kir. országos Meteorologiai-intézet műszaki tisztje, abban az időben, midőn még én az intézet igazgatója voltam. Az összes szerkesztési rajzokat a műszer összeállításához én készítettem.

A műszernek úgy a kollimátor lencséje, mint a kameralencséje kívülről állítható, de az állásuk egy skálán leolvasható, úgy hogy ha a fókusból kimozdulnának, azokat bármely pillanatban helyre lehet állítani. Természetesen a lemez hajlását is egy osztás segítségével lehet mindenkor beállítani.

A prizma és a kameralencse között a műszer középső részén, azaz a prizmaházon oldalt nyílás van kivágva, melybe egy 160 mm hosszú és 20 mm széles lemez tolható a sugárkúpon keresztül. Ebbe a lemezbe háromszögletes lukak vannak vágva, még pedig meghatározott különböző nagyságban, s ennek a lemeznek a segítségével a műszert egyenesen spektrálfotométernek is lehet használni. A prizmaház belsejében rugószerkezet van oly módon alkalmazva, hogy akkor, midőn a háromszögletes luk közepe egybeesik a sugárkúp tengelyével, egy alkalmas rugós fogódarab beleesik a lemez felső élén kivágott háromszögletes nyílásba, s ennek megtörténte után a lemez a kívánt helyen rögzítve van.

A rés, mint már említve volt, nagyobb hengerrel van körülvéve, mely elől be van fedve, s a fedőn csak 20 mm átmérőjű luk van kihagyva, amelyen a vizsgálandó fény reáeshet a részre; a nyílás mögött pedig egyszerű pillanatjár van elhelyezve, mely saját súlya folytán leesik, ha egy rugót kiváltunk helyéből, és a felvétel megtörténik.

A rés mikrométercsavarral mozdítható el, amelynek emelkedése 0.5 mm. A csavarnak a külső végen, mely a hengeren

kívül fekszik, kis dob van alkalmazva, amely 100 részre van osztva. Az említett résszabályozó mikrométercsavaron kívül még kilátszik a hengerből egy kis csavarfej, amellyel egy kis összehasonlító prizmat lehet tetszés szerint a prizma eleibe tolni, s ezáltal a rés magasságát kétfelé osztani és egymásmellé két különböző színeképet fotografálni. Az összehasonlító prizmába a fény felülről hatol be a hengerbe, s a prizmának megfelelő nyílás felett egy minden irányban állítható 30 mm átmérőjű tükör van a hengerre szerelve, nemkülönben két elszigetelt rézlemezre két GEISSLER-csőtartó csavarható fel, melyek tetszés szerinti hosszúságú GEISSLER-csővet vehetnek fel, mely az utóbb említett lukon az izzított gázok fényét az összehasonlító prizmára vetíti.

Megemlítendő még, hogy a kamera a spektrum hossz-irányával merőlegesen eltolható, úgy hogy a lemezre, mely  $60 \times 90$  mm., egymásután több spektrumot lehessen fotografálni. A kamara-függelék a kaszettával egy pár fogasrúd és hajtó által tolható el, még pedig oly módon, hogy a spektrumokat szépen egymás mellé lehessen fotografálni. Minden felvétel után a hajtó gombja mellett elhelyezett korongon lévő bevágásokba egy rugó becsappan, amely a kamerát a felvétel idejére rögzíti.

A kamera előtt még két gombot találunk, melyek közül az egyik arra szolgál, hogy egy fekete bársonnyal behúzott kis lapot a sugárkúp eleibe helyezhessünk, vagy onnan azt az exponálásakor eltávolítsuk. A másik pedig egy siktükörnek a tengelyére van erősítve. A kamaracsőre felül hosszú gyújtótávolságú okulár van erősítve és az említett plántükör ez előtt van elhelyezve, még pedig oly módon, hogy az az egyik állásában odafekszik a kamaracső belső falához, s akkor a sugárkúp szabadon átmehet a lemezre, ha az exponáló csappantyú nyitva van; vagy pedig a sugárkúpra  $45^\circ$  alatti állásba lehet azt helyezni az említett gombbal, s akkor a spektrum az okulárban megfigyelhető lesz.

A fotografálásra dr. TERKÁN MATTER-féle momentlemezeket használt Mannheimból, melyeket nekünk WOLF MAXIMILIÁN, a heidelbergi csillagda igazgatója, ajánlott.

A spektrograf középső része, azaz a vastag prizmaház,

öntött sárgaréz bölcstartóba van beillesztve, amely pedig egy vastag sárgarézcsőbe van beforrasztva. Ez a cső egyúttal azimutális tengely gyanánt szolgál, mivelhogy bele van csiszolva egy másik rézcsőbe, amelyben forgatható, és szorítógyűrűvel bárhol is rögzíthető, sőt a magasságban is bizonyos határok között állítható. Ez a külső cső pedig alul nehéz öntöttvas háromlábba végződik, mely a műszer teljes szilárdságáért kezeskedik.

A fotografálásakor a terem teljesen el volt sötétítve, és csakis annyi világosság jött ki a lámpás ajtaján lévő vörös ablakon, hogy a megfigyelő mégis biztosan tudott járni a teremben.

Dr. TERKÁN a kőzetek reflektált fényének a spektrumát többször megfotografálta és azokat 10 perctől 30 percig exponálta.

Megfotografálva a következő kőzeteknek a reflektált spektruma lett:

Sorszám	Kőzetek minősége:	Sorszám	Kőzetek minősége:
1	Kréta	16	Bazalt
2	Nummulit	17	Gránátos-amfibol-andezit
3	Mészkö (Cirkvenica)	18	Granit II.
4	Porphir	19	Kősó
5	Lősz	20	Agyag (Kis Czell)
6	Alabastrom	21	Barnaszén (Bosznia)
7	Hólyagos láva	22	Csillámpala-gránáttal
8	Andezit-tufa	23	Márga (Buda)
9	Gabbro	24	Kőszén (Krassó)
10	Homokkő (Keszthely)	25	Gránátos-biotit-andezit
11	Homokos agyag (Budafok)	26	Diabáz
12	Kristályos mészkő (Polgárdi)	27	Trachit
13	Eleotitruenit-sodalittal (Ditroit)	28	Obsidián
14	Granit I.	29	Szurokköves porphirit
15	Mészkö szarukővel	30	Láva (Vezuv)

A Holdrészletek fölvételét többnyire holdtöltekor, vagy annak lehető közelében eszközöltük, még pedig a téli hónapokban, amidőn a Hold lehető legmagasabban delel a horizont felett, mert itt az atmosférai zavarok okvetlen a legcsekélyebbek, úgy

hogy az utolsó felvételeket 1914 évi január hó 11.-én esteli 9<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> -től éjfélig csináltuk, amidőn a kupolában — 11° Reaumur mellett szenvedtünk.

A felvételek az úgynevezett «Aluminium spektrograffal» történtek, amely a 254 mm refractorra volt alkalmazva.

A spektrograf egy RUTHERFURTH-féle nagyobb törőképességű prizmával ( $D-H=7.5^\circ$ ) van felszerelve, s hogy nagyobb fényteljesség legyen az erős dispersio mellett elérve, azért rövid gyújtótávolságú kollimátorlencse lett a műszerhez választva, s még rövidebb kamaralencse. A műszer gyönyörűen rajzol, s a látható spektrum hossza 58 mm.

A műszeren eredetileg egy igen szép SCHMIDT & HAENSCH-féle rés volt alkalmazva, de midőn 1900-ban dr. báró HARKÁNYI BÉLA volt a csillagdei obszervátor, azt levette róla s készítettett helyette a Budapesti órásiskolában egy gyönyörű szép rést a potsdami mintára, ahol is a spektrum szélességét változtatni lehet, nemkülönben egymásmellé szükség esetében 3 spektrumot fotografálni. PALASOVSKY ÖDÖN igazgató báró HARKÁNYI intencióját teljesen felfogta, s a rést igen szépen megcsinálta. A műszer ugyan pihent azóta a szép részével, míg most nekünk a legjobb szolgálatot tette úgy a HARKÁNYI-PALASOVSKY-rés, mint a régi eredeti SCHMIDT & HAENSCH-rés, mert hiszen az még némi csekély változtatással az előbb ismertetett kabinetspektrografba van beépítve, mellyel dr. TERKÁN a kőzetekről igen szép spektrumokat fotografált.

A spektrograf a «KONKOLY-féle fazék»<sup>1</sup> segítségével volt a refraktor okulárkihúzójára felszerelve, még pedig azért, mert ily módon mindig látható a Hold képe a résen, és azonfelül ezzel a segédeszközzel sokkal könnyebb is a rést pozitív-szögben oly módon beállítani, hogy annak a «pofái» párhuzamosan álljanak a napi mozgással. Természetesen úgy a «KONKOLY-féle fazék» mindkét elmozdítható körén fokoztatás van, mint a refraktor-okulár kihúzóján is, nemkülönben a kollimátor- és

<sup>1</sup> Ezt az eszközt, melynek segítségével a spektroskopot vagy spektrografot a távcsőre lehet alkalmazni, Dr. HANS REPSOLD, a világhírű hamburgi mechanikus nevezte el «der Konkoly'sche Topf»-nak.

kamaralencsék kihúzóján, továbbá a kamarafüggelék elhajlási ívén. Ilyformán ha a spektrograf a KONKOLY-féle fazékon egyszer be van igazítva, s az illető index adatai feljegyezve, minden pillanatban 10 perc alatt szolgálatkész állapotba lehet helyezni a műszert.

A műszer elvben hasonló a GOTHARD-KONKOLY rendszerhez, aholis a prizmaház dobból áll, s annak egyik fenekéből kiáll egy tengely, mely belül kis asztalkát tart, s erre van a prizma felszerelve. Kívül a tengelyen gombos csavar van, amelynek segítségével a tengelyt forgatni és rögzíteni lehet. A forgatással a prizmát beállíthatjuk az eltérítés minimumába, s ha ez megvan, még ha a dobon osztás sem volna, akkor is azonnal szolgálatkész állapotba lehetne hozni a műszert, hogyha a prizma a helyéből elmozdult volna.

Az említett dobból három cső áll ki. Az egyik a kollimátorcső, amelyen egyuttal az egész spektrográf lóg, a másik a kameracső, a harmadik pedig egy kis megfigyelő távcső, mely arra szolgál, hogy annak segítségével állandóan reá lehet látni a résre, melynek képét a prizma első lapja ebbe beleretlektálja, és látni lehet, hogy a megfigyelendő, illetve fotografálandó tárgy rajta van-e a résen.

A beállítást következőképen eszközöltem. A spektrograf kollimátorlencséje és a kamera lencséje már előzetesen más alkalommal a legpontosabban fókuszozva voltak, azokon tehát semmi igazítani való sem volt. Megközelítőleg a résnek a refraktor objektívjének a fókuszba állítása is ismeretes volt, de ezt azért mindig jó ellenőrizni, nemkülönb az a körülményt is, hogy a rés párhuzamosan áll-e a napi mozgással.

Ha az előbb említett kis távcsövet, mely a prizmaházon van alkalmazva, élesen beállítjuk a résre, akkor nincsen másra szükség, mint hogy egy csillagot reáállítsunk a résre (ez lehet 1—1.5 mm.-re kinyitva), s akkor megnézzük, hogy a csillag a kis távcsőben feltétlen élesen tűnik-e fel. Ha ez az eset nem forog fenn, akkor a refraktor okulárkihúzóját addig csavargatjuk előre-hátra, míg a csillag képe feltétlenül éles lesz, és akkor az okulárkihúzón levő osztást leolvassuk és feljegyezzük, esetleg ellenőrizzük egy régi feljegyzéssel. Ezután a rést a szükség-

hez mértén megszükitjük. A mi fotografálásunknál ugyanis a rés nyílása 0.3 mm volt. Megjegyzendő, hogy itt nem arról van szó, hogy a FRAUNHOFER-vonalakat a gondolható legélesebben kapjuk a lemezre, hanem hogy állandóan a rés nyílása egyforma maradjon, amit természetesen a rés mikrométer-csavarján lévő dobon mindig a legpontosabban ellenőrizhetünk.

A rés párhuzamos állítása a napmozgással ép oly egyszerűen és gyorsan történhetik egy jól átgondolt szerkezetű műszeren, mint a fókuszba helyezése a résnek.

Amint említettem, a spektrograf a «KONKOLY-féle fazékra» van alkalmazva, amelynek pozíciószögben kétféle mozgása van; mindegyik körön egy  $360^\circ$  fokosztás van feltéve, s az a kör, mely az okulárkihúzó karikájába van illesztve (nálunk egy nagy Zeiss-féle váltó-szerkezetbe), az áttört fazékkal 4 csavarral, a felső kör pedig, amely a spektrográffal van egyesítve ugyancsak a fazékhoz, két erős gombos csavarral van egyesítve. Midőn a spektrograf rajta van a refraktoron, s a csillag be van állítva a résre, azt ezen keresztül hagyjuk vonulni: ha nem megy a csillag állandóan a rés pofái között, hanem kitér jobbra vagy balra, akkor a két gombos csavart kissé meglazítjuk, s a részt, illetve az egész spektrográfot pozíciószögben kissé elmozdítjuk, és amennyiben a csillag a rés pofái közül kissé kiment volna, a deklináció-finommozgással visszahozzuk a rés pofái közé, és újból keresztül hagyjuk vonulni a csillagot. Midőn a csillag szépen megmarad a rés pofái között, akkor minden csavart megrögzítünk, a fokosztás adatait az illető indexeken leolvassuk s feljegyezzük.

A Hold fotografálásakor azonban az óragépen mindig bizonyos kalamitással találkozunk. A refraktor-óragépek mindig csillagidőre vannak szabályozva. Még ha a Napot figyeljük meg velük, az a  $3^m 56.6^s$  különbözet a csillagidő és közép-idő között csak  $9.8^s$  tesz ki egy óra alatt, ami csak a legminuciózusabb mikrométermérésekkor lenne tekintetbe veendő; azonban más a Holdnak a mozgása, amely 24 óra alatt közel egy órát halad kelet felé az állatövön. Itt már az óragép mozgását okvetlen javítani kell, különben a fotografálandó kráter igen hamar kimenne a résből; de eltekintve ettől, a lemezre nem

csupán a kívánt kráter spektrumát, hanem, ha a Hold deklináció-változását is tekintetbe vesszük, amit kell is hogy tekintetbe vegyünk, mert különben az egész tájának a spektrumát szuperponálva kapnánk a lemezre.

Az angolok drágább távcsöveikre három különböző számú fogakkal ellátott kereket alkalmaznak az óragép és a távcső közé, amint ők nevezik: csillag-kerék, Hold-kerék és Nap-kerék, s ezeket egy emeltyűnyomással át lehet kapcsolni. Mindez bármily szép játékszer is amatőrök számára, ép oly czéltalan komoly munkára, s így nem marad más hátra, mint a fotografálandó Hold-részletet a spektrograf prizmaházán alkalmazott kis távcsőbe a refraktor finom mozgásával beállítani, azután a pointeren lévő pozíciókör kettős szánjára szerelt okulár szálkeresztjét az említett kettősszánú mikrométer csavarjaival a Holdrészletre reá vezetni és a pointerbe a fotografálás tartama alatt belenézni és a finommozgásokkal a holdrészletet, amelyet fotografálunk, a szálkeresztben, illetve a résen tartani.<sup>1</sup>

Minden este az első felvételkor az exponálás 9<sup>m</sup> ig tartott, amely felvétel azután a kiméréseknél mindig alapul szolgáló. A többi felvétel exponálása azután mind 3—3 percig tartott.<sup>2</sup>

A felvételek kivétel nélkül SCHLEUSSNER-féle (Frankfurt a. Main) «Viridin» színérzékeny lemezekre történtek, s a pointercsövön a megfigyelést dr. TERKÁN tanár eszközölte, míg a fotografálást én végeztem, a kis távcsővel való ellenőrzéssel együtt.

#### A felvételek a következő napokon történtek:

1913	Október	14	8. felvétel	10 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> —11 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup>	felhők zavarták a felvételt
«	«	17	10. «	10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup> —11 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>	
«	«	18	11. «	11 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> —13 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup>	
«	Deczember	7	9. «	9 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> —10 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	
«	«	10	5. «	9 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> —10 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup>	
1914	Január	11	12. felvétel	9 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> —11 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	

<sup>1</sup> Mindehez persze nagyobb kereső szükséges, a milyen például a a 254 mm-es refractoron kettő van, a melyek egyike 80, a másika pedig 100 mm nyílással bír.

<sup>2</sup> Még mindig igen messze van a 9<sup>m</sup> is WOLF MAXIMILIÁN 28 és 34 órás exponálásához!

Mostanáig a következő holdrészleteknek a spektrumát fotografáltuk, de nincsen kizárva, hogy 1915 őszén még folytatni fogjuk a felvételeket.<sup>1</sup>

Sorszám	Holdrészletek	Sorszám	Holdrészletek
1	Mare Crisium	17	Mare Crisiumtól délre fekvő fényes mező
2	« Faecunditatis	18	Platától délre fekvő fényes hegy-lánczolat
3	« Serenitatis	19	Kepler és Kopernikus közötti ür
4	Az Appeninek	20	Kepler
5	Mare Imbrium	21	Herodotestől délre fekvő hegy-láncz
6	Tycho	22	Mare Humorum nyugati oldalán kimagasló csúcs környéke
7	Mare Humorum	23	Mare Humorum legmélyebb sötét része
8	« Tranquillitatis (közepe)	24	Mare Humorumtól kelet felé, a Hold szélén fekvő kis Mare
9	« « nyugati szélén húzódo hegylánczolat	25	Utóbbtól északra fekvő magasabb részlet
10	Kopernikus környéke	26	D'Alembert környéke
11	Herodotus «		
12	Kaukázus		
13	Mare Humorum nyugati szélén húzódo hegyláncz		
14	Aristoteles		
15	Plato környéke		
16	Theophilos		

A közetspektrumok kimérése a HARTMANN-féle felületi fotométeren történt, s valamennyit dr. TERKÁN tanár-observátor eszközölte, míg a Holdkráterek spektrumai még nincsenek kimérve, mert dr. TERKÁN idejét teljesen lefoglalta a nagy fotometriai katalógusunk csillagainak kimérései, hogy azt nyomdába készenre csinálhassuk, amit azonban szintén megszakított a kitört háború, mert dr. TERKÁN observátornak is be kellett vonulni mint népfelkelő századparancsnoknak a harcztérre, s minthogy a munkát együtt kezdeményeztük, nem akarom azt nélküle befejezni, annál kevésbé, mert az ő fiatal szemei alkalmasabbak a spektrumok kimérésére, mint az enyimek.

<sup>1</sup> Ha dr. TERKÁN akkorra a harcztérről hazakerül.



Az értekezést azért osztottam két részre, hogy ennek a munkának fotografiai módon végzése tárgyában, SCHEINER és WILSING vizuális megfigyeléseivel szemben, dr. TERKÁN observátorral megóvhassuk a prioritásunkat.

Ha TERKÁN tanár szerencsésen hazakerül a harcmezőről, nem soká fogunk késni azzal, hogy a számokban kimutatott eredményeket, mint ennek az értekezésnek második részét, is bemutatthassam az Akadémiának.

Ha a sors is úgy engedi, mint ahogyan én óhajtanám, szándékunk még egy sorozat Holdkráter-spektrumot megfotografálni, esetleg a megfotografáltakat újból megfotografálni, de még TERKÁN observátornak is szándéka a közetek reflektált spektrumát még egyszer megfotografálni, ami a nagyobb pontosság elérésére csakis kívánatos.

Nem tartom feleslegesnek megemlíteni, hogy dr. MIETHE tanár, a kiváló, fotochemikus szintén kísérletezett a Berlin—Charlottenburgi Technische Hochschule csillagdján egy 30 cm-es tükörteleskóppal különféle fényelnyelő folyadékokon keresztül a holdat megfotografálni, amit is ő az Astronomische Nachrichten 188. kötete 4489., 4502. és 4510. számában, végre a 198. kötete 4736. számában közölt.

MIETHE munkaterve teljesen eltér úgy a SCHEINER és WILSING-étől, mint a mienktől, s inkább hasonlít Wood vizsgálataihoz, mindazonáltal — minekutánna a végcél mégis csak egy és ugyanaz — nem tartottam feleslegesnek MIETHE vizsgálatairól megemlékezni.

Nagy sajnálattal kell azonban megemlékezni arról, hogy épen MIETHE-nek az 1914. évi januári megfigyelései nem sikerültek, daczára, hogy ő egy kolosszális apparatussal kezdett bele munkájába. Ő először is egy 500 mm átmérőjű tükörteleskópot építtetett a 300 mm nyílású tükör mellé, azt megkísérelte a szokásos ezüstréteg helyett aranyréteggel áthúzni, amely a politurát azonban nem állotta ki, mivel az aranyfelület az üvegről lefoszlott. Chemiai úton platinával áthúzni az üveg felületét szintén nem sikerült, úgy hogy MIETHE elhatározta, katódszétporlasztással végezni az áthúzást, ami sikerült is neki látszólag. De képzeljük azt, hogy MIETHE-nek mily komplikált műszert

kellett e czélra összeállítani, amely nem kevesebb mint 6—700 kilogramm súllyal bírt, mert a tükröt (500 mm átmérő) vaslapra kellett helyezni, amely óriási öntöttvas haranggal van lefedve, illetve a vaslapra légmentesen felcsiszolva, ezen a harangon nézőablakok voltak, s belül hőmérő, melyet kívülről kis távcsővel lehetett leolvasni, s vigyázni arra, hogy a hőmérséklet  $40^{\circ}$ -nál ne emelkedjen magasabbra, s a harangban kettős működésű olajlégszivattyúval a nyomást állandóan 0·15—0·20 mm-re kellett tartani. Az elektromos áramot egy SIEMENS-SCHUCKERT dynamogép fejlesztette, melynek feszültsége 1100 Volt és az áram erőssége 0·15—0·20 Ampère volt átlagosan.

Ekkora apparatussal kellett a tükör platinafelületének létrejönni, s sajnos a legrövidebb idő elmúltával MIETHE arra az eredményre jött, hogy a platinatükör épen nem felelt meg a várakozásnak, mert kitünt, hogy már néhány nap mulva lényeges rosszabbodás volt a tükrön észlelhető, amely kezdetben kifogástalannak mutatkozott, s ebből csak az látszik, hogy a platina mégsem oly ellenállóképességű, mint azt mindannyian hittük volna; 8 hét mulva a platinatükör reflexióképessége igen szerény fokra devalválódott, hantszerű képződmények támadtak a felületén s a platina az üvegről levált. MIETHE azt képzei, hogy erős felületi feszültségnek kell a fémréteg felületén támadni, együttesen a hajlammal, gázokat és gőzöket okkludálni, ami azután a réteg tarthatatlanságát idézi elő.

A mondottakból azonban minden fizikus nagyon tanulságos következtetést vonhat le, ha még hozzá azt a kérdést veti fel, hogy Charlottenburgon kívül hol volna még egy második laboratorium Európában, a hol ilyen kísérleteket lehetne csinálni? És ha valahol az eféle kísérletezésre pénzt kérne az államtól valaki, vajjon milyen szemmel néznének az illető fizikusra?! Önkéntelen eszembe jut DEVILLE kísérlete, midőn 120 kilogramm platinból 12 gramm osmiumot választott ki, s MIETHE kísérlete, midőn 2500 tonna urán-maradékból pár gramm radiumbromidot állított elő. (Potentes potenter agunt!)

# A KETTŐS INTEGRÁLOK VARIÁLÁSÁNÁL FELLEPŐ FŐEGYENLETEK AZONOS ELTÜNÉSÉRŐL.

Székfoglaló értekezés.

KÜRSCHÁK JÓZSEF r. tagtól.

Már EULER felismerte, hogy az

$$\int_a^b f(x, y, y') dx$$

egyszerű integrál variálásánál fellépő

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

differenciálegyenlet bal oldala akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha  $f$  mint valamely  $\varphi(x, y)$  függvény teljes differenciálhányadosa állítható elő.

Ugyancsak teljesen elintézettnek tekinthető ennek a tételnek általánosítása arra az esetre, ha  $f$ -ben több függő változó fordul elő és  $f$  esetleg magasabb differenciálhányadosokat is tartalmaz.

Ellenben többszörös integrálok esetében sajátságos nehézséggel találkozunk. Minthogy az elhárítandó akadály már kettős integráloknál is fölmerül, azért ezekre szorítkozom.

Legyenek  $w_1$  és  $w_2$  az  $x, y$  független változóknak, bizonyos számú függő változónak és ezek differenciálhányadosainak függvényei. Továbbá jelentsenek

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}$$

teljes (totális) differenciálást abban az értelemben, hogy a függő változókat és ezek differenciálhányadosait nem szabad állandóknak tekintenünk, hanem tekintetbe kell vennünk az  $x$ -től, illetőleg az  $y$ -től való függésüket.

Régóta ismeretes a következő tétel:

*Minden*

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

*alakú  $f$  esetében az*

$$\int \int_{(\Omega)} f dx dy$$

*variálásánál föllépő parciális differenciálegyenleteknek (röviden mondva a főegyenleteknek) bal oldalai azonosan eltűnnek.*

E tétel megfordítható. Azaz: *Valahányszor az*

$$\int \int_{(\Omega)} f dx dy$$

*variálásánál föllépő főegyenletek bal oldalai azonosan eltűnnek, az  $f$  mindig az*

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

*alakban állítható elő.*

Eddig EULER tételének általánosítása nem okoz nehézséget. Mélyebb vizsgálat azonban azt mutatja, hogy ez az általánosítás nagyon felületes. Mihelyt az  $w$ -k természetére is tekintünk, az EULER tételével való analógia megszűnik. Az egyszerű integrálokra vonatkozó eredmények után ugyanis azt várjuk, hogy ha az  $f$ -ben előforduló legmagasabb differenciálhányadosok  $r$ -edrendűek és a főegyenletek azonosan eltűnnek, akkor az

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

képletben  $w_1$  és  $w_2$  a függő változók  $r$ -edrendű differenciálhányadosaitól menteknek választhatók. Ámde ez csak akkor lehetséges, ha  $f$  a függő változók  $r$ -edrendű differenciálhányadosainak *lineáris* függvénye.

Hogy ez a föltétel nem teljesül mindig, azt legegyszerűbben az

$$f = u_x v_y - u_y v_x$$

példából láthatjuk, hol  $u_x, u_y, v_x, v_y$  az  $u$  és  $v$  függő változóknak elsőrendű differenciálhányadosai. A főegyenletek ebben az esetben azonosan eltűnnek; de ha  $f$ -t a

$$\frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

alakban akarjuk előállítani, az  $w$ -ket nem választhatjuk az  $u_x, u_y, v_x, v_y$  mennyiségektől menteknek.

De éppen ez a példa világosan megmutatta nekem azt is, hogy EULER tételének természetes általánosítását milyen irányban keressem. Ugyanis ebben az esetben  $f$  az  $u$ -nak és a  $v$ -nek mint  $x$  és  $y$  függvényeinek függvénydeterminánsa. Ezt tekintetbe véve, nem volt nehéz eljutnom a következő tételhez:

*Legyen adva két független változónak,  $n$  számú függő változónak és ezek legfeljebb  $r$ -ed rendű differenciálhányadosainak valamely  $f$  függvénye. Az*

$$\int_{(x)} f dx dy$$

*variálásánál föllépő parciális differenciálegyenleteknek (röviden mondva a főegyenleteknek) bal oldalai akkor és csak akkor tűnnek el azonosan, ha  $f$  mint oly*

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix}$$

*alakú függvénydeterminánsok összege állítható elő, melyekben  $\varphi$  és  $\psi$  a két független változónak, a függő változóknak és ezek legfeljebb  $(r - 1)$ -ed rendű differenciálhányadosainak függvényei.*

Ezt a tételt fogom a következőkben bebizonyítani, még pedig egyszerűség kedvéért csak az

$$n = 1, r = 1; \quad n = 2, r = 1; \quad n = 1, r = 2$$

esetekben.

Az olvasó érdekében mindazt, a mit az EULER tételének általánosítására vonatkozó régiebb kísérletekből fölhasználók, szintén részletesen kifejtem. E kísérletek közül különösen ki kell emelnem KOENIGSBERGER terjedelmes értekezését,<sup>1</sup> melyben a bebizonyítandó tétel tulajdonképen már szintén megvan, de csak bonyodalmas formulákba burkolva, melyeknek egyszerű jelentését a szerző nem ismerte föl.

## I.

1. §. Legyenek  $u_1, u_2, \dots, u_n$  az  $x, y$  független változóknak határozatlan függvényei. Ha  $u_k$ -t az  $x$  szerint  $i$ -szer, az  $y$  szerint  $j$ -szer differenciáljuk, az így nyert differenciálhányadosot  $u_k^{(i,j)}$ -vel jelöljük.

A következőkben az

$$x, y, u_1, \dots, u_n, \dots, u_k^{(i,j)}, \dots$$

mennyiségek függvényein kétféle differenciálásokat kell végeznünk. Lesznek tárgyalásainkban parciális differenciálhányadosok  $x, y$ , az  $u$ -k és ezek differenciálhányadosai szerint. Továbbá lesznek totális differenciálhányadosok. Valamely  $w$  függvény  $x$  szerinti totális differenciálásánál  $\frac{dw}{dx}$  részletes alakja:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + u_1^{(1,0)} \frac{\partial w}{\partial u_1} + \dots + u_n^{(1,0)} \frac{\partial w}{\partial u_n} + \dots + u_k^{(i+1,j)} \frac{\partial w}{\partial u_k^{(i,j)}} + \dots$$

A parciális differenciálások egymással sorrendre nézve fölcserélhetők. A totális differenciálások is egymással fölcserélhetők. Ha ellenben  $\frac{dw}{dx}$  az  $u_s^{(\lambda+1, \mu)}$  szerint differenciálandó, akkor nyilván

$$\frac{\partial}{\partial u_s^{(\lambda+1, \mu)}} \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial w}{\partial u_s^{(\lambda+1, \mu)}} + \frac{\partial w}{\partial u_s^{(\lambda, \mu)}}.$$

<sup>1</sup> Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale, Math. Annalen 62. köt. (1906), 118—147. lap.

2. §. Az

$$\iint_{(\mathcal{Q})} f(x, y; u_1, \dots, u_n; \dots, u_h^{(i, j)}, \dots) dx dy$$

variálásánál föllépő főegyenleteket így jelöljük:

$$V_1(f) = 0, \dots, V_h(f) = 0, \dots, V_n(f) = 0.$$

Itt

$$\begin{aligned} V_h(f) = & \frac{\partial f}{\partial u_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(1, 0)}} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(0, 1)}} \\ & + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(2, 0)}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(1, 1)}} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(0, 2)}} \\ & - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(3, 0)}} - \frac{d^3}{dx^2 dy} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(2, 1)}} - \dots \end{aligned}$$

Legyen most már  $f = \frac{dw}{dx}$ . Akkor

$$\frac{\partial f}{\partial u_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial w}{\partial u_h},$$

továbbá az előbbi §-ban mondottak értelmében a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(1, 0)}} + \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(0, 1)}}, \\ & \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(2, 0)}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(1, 1)}} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(0, 2)}}, \\ & \dots \end{aligned}$$

kifejezések részletes alakjai a következők:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(1, 0)}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(0, 1)}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial w}{\partial u_h}, \\ & \frac{d^3}{dx^3} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(3, 0)}} + \frac{d^3}{dx^2 dy} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(2, 1)}} + \frac{d^3}{dx dy^2} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(1, 2)}} + \\ & + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(2, 0)}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial w}{\partial u_h^{(1, 1)}}, \\ & \dots \end{aligned}$$

Ha  $V_h(f)$  képezésénél mindezt tekintetbe vesszük, akkor nyilván  $V_h(f)$  a szóban forgó esetben azonosan eltűnik.

Hasonló eredményre jutunk az  $f = \frac{dw}{dy}$  esetben is. Ha továbbá tekintetbe vesszük, hogy

$$V_h\left(\frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}\right) = V_h\left(\frac{dw_1}{dx}\right) + V_h\left(\frac{dw_2}{dy}\right),$$

akkor azt találjuk, hogy bármely

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

függvényre nézve  $V_h(f)$  azonosan eltűnik.

3. §. Ha  $f$  mint

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}$$

alakú függvénydeterminánsok összege állítható elő, akkor az

$$\int \int_{(\Omega)} f dx dy$$

variálásánál föllépő főegyenletek bal oldalai azonosan eltűnnek.

Itt  $\varphi$  és  $\psi$  az

$$x, y; u_1, \dots, u_n, \dots, u_n^{(i,j)}, \dots$$

mennyiségek tetszés szerinti függvényei lehetnek.

A kimondott tétel bebizonyításánál egy függvénydeterminánsra szorítkozhatunk. Ekkor

$$f = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}$$

nyilván így is írható:<sup>1</sup>

$$f = \frac{d}{dx} \left( \varphi \frac{d\psi}{dy} \right) - \frac{d}{dy} \left( \varphi \frac{d\psi}{dx} \right).$$

<sup>1</sup> Többszörös integrálok esetében az analog átalakításhoz JACOBI-nak az a tétele kell, melyen az utolsó multiplikátor elmélete alapszik.



Itt az egyes tagokra nézve (az előbbi §-ban mondottak értelmében) a megfelelő  $V_h$ -k zérusok. Tehát egyszersmind  $V_h(f)$  is azonosan eltűnik.

II.

4. §. Az I. alatt mondottak megfordítása előtt még a következő kérdést kell megoldanunk:

*Ha az  $f$ -ben előforduló legmagasabb rendű differenciálhányadosok  $r$ -ed rendűek, akkor a megfelelő főegyenletek általában  $2r$ -ed rendű parciális differenciálegyenletek. Vajjon mikor esnek ki a főegyenletekből a  $2r$ -ed rendű differenciálhányadosok?*

$V_h(f)$ -ben csak a

$$\sum_{j=0}^r \frac{d^r}{dx^{r-j} dy^j} \frac{\partial f}{\partial u_h^{(r-j, j)}}$$

összeg tartalmazhat  $2r$ -ed rendű differenciálhányadosokat. Ez az összeg a  $2r$ -ed rendű differenciálhányadosokban lineáris. Benne  $u_s^{(2r-\varrho, \varrho)}$  együtthatója

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(r-j, j)} \partial u_s^{(r-\lambda, \lambda)}}$$

Itt az összegezés  $j$  és  $\lambda$ -nak azokra az értékeire terjed ki, melyekre nézve

$$j + \lambda = \varrho.$$

A  $V_h(f)$ -ek tehát akkor és csak akkor mentek a  $2r$ -ed rendű differenciálhányadosoktól, ha  $f$  kielégíti a

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(r-j, j)} \partial u_s^{(r-\lambda, \lambda)}} = 0$$

alakú egyenletekből álló egyenletrendszert.

Ezt az egyenletrendszert a következőkben röviden az (S) rendszernek nevezem. Benne

$$h, s = 1, 2, \dots, n.$$

A  $j$  és a  $\lambda$  zérustól  $r$ -ig minden értéket felvehetnek, de az egyes egyenletekben a  $j + \lambda$  összeg állandó.

Vajjon  $f$  az (S) rendszernek eleget tesz-e vagy sem, az tisztán azon múlik, hogy  $f$  miként függ az  $u$ -knak  $2r$ -ed rendű differenciálhányadosaitól. A többi változó a kérdés eldöntésénél csak mint paraméter szerepel.

5. §. Az  $n = 2$ ,  $r = 1$  esetben (S) egyenletei:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(1,0)} \partial u_s^{(1,0)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(1,0)} \partial u_s^{(0,1)}} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(0,1)} \partial u_s^{(1,0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_h^{(0,1)} \partial u_s^{(0,1)}} = 0,$$

$$(h, s = 1, 2).$$

Ha még

$$u_1, u_2, u_1^{(1,0)}, u_1^{(0,1)}, u_2^{(1,0)}, u_2^{(0,1)}$$

helyett az egyszerűbb

$$u, v, u_x, u_y, v_x, v_y$$

jeleket használjuk, akkor (S) részletes alakja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_x \partial u_y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_x \partial v_x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_x \partial v_y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_y \partial v_x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_y \partial v_y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2} = 0.$$

Az első három egyenlet értelmében  $f$  az  $u_x$  és  $u_y$  mennyiségeknek lineáris függvénye. Az utolsó három egyenlet értelmében  $f$  a  $v_x$  és  $v_y$  mennyiségeknek lineáris függvénye. Tehát  $f$  az

$$u_x v_x, u_x v_y, u_y v_x, u_y v_y,$$

$$u_x, u_y, v_x, v_y$$

mennyiségeknek lineáris függvénye. Az (S) második sorában álló egyenletek értelmében  $u_x v_x$  és  $u_y v_y$  együtthatói zérusok,  $u_x v_y$  és  $u_y v_x$  együtthatói pedig egymástól csak előjelben különböznek.

Szóval: Az

$$\int\int_{(\Omega)} f(x, y; u, v; u_x, u_y, v_x, v_y) dx dy$$

kettős integrál variálásánál föllépő főegyenletekből  $u$  és  $v$  másodrendű differenciálhányadosai akkor és csak akkor esnek ki, ha  $f$  az

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

determinánsnak és elemeinek lineáris függvénye. Képletben:

$$f = A(u_x v_y - u_y v_x) + B_1 u_x + B_2 u_y + C_1 v_x + C_2 v_y + D.$$

Itt az  $A, B, C, D$  együtthatók  $x, y, u, v$ -nek bármily függvényei lehetnek.

6. §. Ha  $f$ -ben csak egy  $z$  függő változó fordul elő, de  $f$  ennek  $p, q$  elsőrendű differenciálhányadosain kívül az  $r, s, t$  másodrendű differenciálhányadosokat is tartalmazza, akkor (S) részletes alakja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Az első és utolsó egyenlet értelmében  $f$  az  $r$ -ben is, meg a  $t$ -ben is lineáris. Vagyis

$$f = Art + Br + Dt + M,$$

hol  $A, B, D, M$  az  $r$ -től és a  $t$ -től ment együtthatók. Az (S) második és negyedik egyenleténél fogva:

$$\frac{\partial A}{\partial s} t + \frac{\partial B}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial s} r + \frac{\partial D}{\partial s} = 0.$$

Innen

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{\partial D}{\partial s},$$

vagyis  $A, B, D$  az  $s$ -től is ment. Vége (S)-nek középső egyenletéből

$$2A + \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = 0,$$

vagyis

$$M = -As^2 + 2Cs + E,$$

hol  $C$  és  $E$  az  $r$ ,  $s$  és  $t$ -től ment.

Szóval: Az

$$\int \int_{(\Omega)} f(x, y, z, p, q, r, s, t) dx dy$$

kettős integrál variálásánál föllépő főegyenletből a negyedrendű differenciálhányadosai akkor és csak akkor esnek ki, ha

$$f = A(rt - s^2) + Br + 2Cs + Dt + E.$$

Itt  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  pusztán  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $q$  függvényei.

Ez az eredmény már a múlt század közepén ismeretes volt.<sup>1</sup>

### III.

7. §. Az

$$\int \int_{(\Omega)} f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

variálásánál

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y}$$

akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha  $f$  az

$$f = \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

alakban állítható elő, hol  $\varphi$  és  $\psi$  pusztán

$$x, y, u$$

függvényei.

---

<sup>1</sup> L. pl. J. H. JELLETT: An elementary treatise on the calculus of variations, Dublin (1852). (Nekem csak SCHNUSE német! átdolgozása: Die Grundlehren der Variationsrechnung. Braunschweig, 1860, állott rendelkezésemre. Ez a szóbanforgó tételt a 114. §-ban, a 273—278. lapon tárgyalja.)

Hogy a mondott alakú  $f$ -re nézve  $V_h(f)$  azonosan eltűnik, azt már tudjuk. Csak avval kell foglalkoznunk, hogy fordítva azonosan eltűnő  $V_h(f)$  esetében  $f$ -et a mondott alakban előállítsuk.

Ha  $V_h(f)$  azonosan eltűnik, akkor az 5. §-ban mondottak értelmében  $f$  így írható:

$$f = -(Au_x + Bu_y - C).$$

Itt  $A, B, C$  pusztán  $x, y, u$  függvényei. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{\partial A}{\partial u} u_x - \frac{\partial B}{\partial u} u_y + \frac{\partial C}{\partial u}, \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} &= -\frac{dA}{dx} = -\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial u} u_x, \\ \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y} &= -\frac{dB}{dy} = -\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial u} u_y \end{aligned}$$

és innen

$$V(f) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial u}.$$

JACOBI-nak az utolsó multiplikátorra vonatkozó vizsgálataiból tudjuk, hogy ekkor  $A, B, C$  a következő alakban állíthatók elő:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ennélfogva

$$f = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ -u_x & -u_y & 1 \end{vmatrix}.$$

Egyszerű átalakítás után innen valóban azt kapjuk, hogy

$$f = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u_x & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u_y \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} u_x & \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u} u_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix}.$$

8. §. Legyen

$$f = B_1 u_x + B_2 u_y + C_1 v_x + C_2 v_y + D,$$

hol  $B_1, B_2, C_1, C_2, D$  az  $x, y, u, v$  függvényei.

Az

$$\iint_{(\Omega)} f dx dy$$

variálásánál föllépő

$$V_1(f) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y}$$

$$V_2(f) = \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial v_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial v_y}$$

kifejezések akkor és csak akkor tűnnek el azonosan, ha  $f$  az

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

alakban állítható elő, hol  $w_1$  és  $w_2$  pusztán

$$x, y, u, v$$

függvényei.

Ez az ismeretes tétel a következő módon bizonyítható be.

Hogy minden

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

összegre nézve a  $V_1(f)$  és  $V_2(f)$  kifejezések azonosan eltűnnek, azt már tudjuk. Csak azt kell kimutatnunk, hogy azonosan eltűnő  $V_1(f)$  és  $V_2(f)$  esetében  $f$ -et mint

$$\frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

alakú összeget állíthatjuk elő.

A vizsgálandó esetben

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial u} u_x + \frac{\partial B_2}{\partial u} u_y + \frac{\partial C_1}{\partial u} v_x + \frac{\partial C_2}{\partial u} v_y + \frac{\partial D}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} = \frac{dB_1}{dx} = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial u} u_x + \frac{\partial B_1}{\partial v} v_x,$$

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y} = \frac{dB_2}{dy} = \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial u} u_y + \frac{\partial B_2}{\partial v} v_y$$

és innen  $V_1(f)$  részletes alakja

$$\left( \frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial B_2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial C_1}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v} \right) v_x + \left( \frac{\partial C_2}{\partial u} - \frac{\partial B_2}{\partial v} \right) v_y.$$

Föltevésünk szerint a szóban forgó  $f$ -re nézve  $V_1(f)$  azonosan eltűnik. Tehát

$$\frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial u} = \frac{\partial B_2}{\partial v}.$$

Az utóbbi két képlet értelmében  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  a következő alakban írhatók:

$$B_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad C_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad B_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad C_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

hol  $\varphi$  és  $\psi$  pusztán  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  függvénye.

Ha  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  ez alakjait fölhasználjuk,  $f$  így írható:

$$f = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} + \bar{D}.$$

Itt  $\bar{D}$  pusztán  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  függvénye. Továbbá erre a függvényre nézve

$$V_1(\bar{D}) \quad \text{és} \quad V_2(\bar{D})$$

azonosan eltűnik. Ugyanis  $f$ -re nézve, valamint  $\frac{d\varphi}{dx}$  és  $\frac{d\psi}{dy}$ -ra nézve is  $V_1$  és  $V_2$  azonosan zérusok; tehát a

$$\bar{D} = f - \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}$$

kifejezésre nézve is azonosan el kell tűnniök. Ámde  $\bar{D}$ -re nézve  $V_1$  és  $V_2$  nem más, mint

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial u} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \bar{D}}{\partial v}.$$

E differenciálhányadosok csak úgy tűnnek el, ha  $\bar{D}$  pusztán  $x$  és  $y$  függvénye. Mint ilyen függvény a  $\bar{D}$  mindenesetre a

$$\bar{D} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

alakban írható, hol  $\alpha$  és  $\beta$  pusztán  $x$  és  $y$  függvénye.

A mondottakat összefoglalva:

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy},$$

hol  $w_1 = \varphi + \alpha$  és  $w_2 = \psi + \beta$ .

9. §. Az

$$\iint_{(\Omega)} f(x, y; u, v; u_x, u_y, v_x, v_y) \, dx dy$$

variálásánál föllépő főegyenletek bal oldalai akkor és csak akkor tűnnek el azonosan, ha  $f$  mint oly

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

függvénydeterminánsok összege állítható elő, melyekben  $\varphi$  és  $\psi$  pusztán

$$x, y, u, v$$

függvényei.

Hogy függvénydeterminánsok összegére nézve a főegyenlet bal oldala azonosan eltűnik, azt már tudjuk.

Hogy fordítva minden oly  $f$ , melyre nézve a főegyenlet bal oldala azonos eltűnik, valóban a kívánt alakra hozható, azt a következő módon láthatjuk be.



Az 5. §-ban mondottak értelmében

$$f = A (u_x v_y - u_y v_x) + B_1 u_x + B_2 u_y + C_1 v_x + C_2 v_y + D.$$

Határozzuk meg  $\varphi$ -t és  $\psi$ -t úgy, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} & \frac{\partial \varphi}{\partial u_y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_x} & \frac{\partial \psi}{\partial u_y} \end{vmatrix} = A.$$

Akkor a

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u_x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v_x & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u_y + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v_y \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u} u_x + \frac{\partial \psi}{\partial v} v_x & \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial u} u_y + \frac{\partial \psi}{\partial v} v_y \end{vmatrix}$$

függvénytetermináns az

$$A (u_x v_y - u_y v_x)$$

kifejezésnek és oly tagoknak összege, melyek az  $u_x, u_y, v_x, v_y$  mennyiségekben lineárisok. Tehát a

$$F = f - \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

különbség az  $u_x, u_y, v_x, v_y$  mennyiségekben lineáris; a neki megfelelő főegyenlet bal oldalai szintén azonosan eltűnnek. De akkor az előbbi § értelmében

$$F = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy},$$

hol  $w_1$  és  $w_2$  pusztán  $x, y, u, v$  függvényei.

A mondottakat összefoglalva :

$$\begin{aligned} f &= \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} + \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy} \\ &= \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} + \frac{d(w_1, y)}{d(x, y)} + \frac{d(x, w_2)}{d(x, y)}. \end{aligned}$$

10. §. Legyen

$$f = Br + 2Cs + Dt + E$$

az  $r, s, t$ -nek oly lineáris függvénye, melyben az együtthatók már csak  $x, y, z, p, q$ -tól függenek.

Az

$$\int_{(\Omega)} \int f dx dy$$

variálásánál föllépő főegyenlet akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha  $f$  az

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

alakban állítható elő, hol  $w_1$  és  $w_2$  pusztán  $x, y, z, p, q$  függvényei.

A 2. §-ban mondottak után csak azt kell kimutatnunk, hogy azonosan eltűnő főegyenlet esetében  $f$  mindig az

$$f = \frac{dw_1}{dx} + \frac{\partial w_2}{dy}$$

alakban állítható elő. Ezt a szintén régóta ismeretes tényt a következő módon bizonyíthatjuk be.

Szorítkozzunk először az

$$f = 2Cs + E$$

esetre. Ekkor

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial q} + 2 \frac{d^2 C}{dx dy} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{dC}{dy} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{dC}{dx} \right) \end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{dC}{dy} &= \frac{\partial C}{\partial p} s + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{dC}{dx} &= \frac{\partial C}{\partial q} s + \dots \end{aligned}$$

Az elhagyott tagok  $s$ -től mentesek.

A számítást folytatva:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{dC}{dy} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q} s^2 + \dots$$

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q} s^2 + \dots$$

és

$$V(f) = -2 \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q} s^2 + \dots$$

Az elhagyott részek  $s$ -ben elsőfokúak.

A  $V(f)$  csak úgy tűnhetik el azonosan, ha  $\frac{\partial^2 C}{\partial p \partial q}$  a zérussal egyenlő, vagyis  $C$  a

$$C = \varphi(p) + \psi(q)$$

alakban állítható elő. Itt  $\varphi$  és  $\psi$  természetesen az  $x, y, z$  mennyiségeket is tartalmazhatják.

Határozzuk meg a  $q$ -tól mentes  $w_1$  függvényt és a  $p$ -tól mentes  $w_2$  függvényt úgy, hogy

$$\frac{\partial w_1}{\partial p} = \varphi(p) \quad \frac{\partial w_2}{\partial q} = \psi(q).$$

Akkor

$$F = f - \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dy}$$

már csak  $x, y, z, p, q$  függvénye; továbbá a megfelelő főegyenlet bal oldala azonosan eltűnik. Tehát

$$F = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy},$$

hol  $\alpha$  és  $\beta$  már csak  $x, y, z$  függvényei. A vizsgált esetben tehát valóban

$$f = \frac{d(w_1 + \alpha)}{dx} + \frac{d(w_2 + \beta)}{dy}.$$

Legyen most már

$$f = Br + 2Cs + Dt + E.$$

Határozzuk meg  $w_1$ -et és  $w_2$ -t úgy, hogy

$$\frac{\partial w_1}{\partial p} = B \quad \frac{\partial w_2}{\partial q} = C.$$

Akkor

$$F = f - \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dy}$$

már

$$2Cs + E$$

alakú; továbbá erre a függvényre nézve is a megfelelő főegyenlet azonosan eltűnik. Tehát  $F$  a kívánt alakra hozható és vele együtt nyilván  $f$  is.

11. §.  $Az$

$$\int_{(\Omega)} f(x, y, z, p, q, r, s, t) dx dy$$

variálásánál föllépő főegyenlet akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha  $f$  mint oly

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

alakú függvénydeterminánsok összege állítható elő, melyekben  $\varphi$  és  $\psi$  pusztán

$$x, y, z, p, q$$

függvényei.

A 3. §-ban foglaltakat tudva, csak azt kell bebizonyítanunk, hogy azonosan eltűnő főegyenlet esetében  $f$  valóban mindig a mondott alakban előállítható.

A 6. §-ból tudjuk, hogy a szóban forgó esetben

$$f = A(rt - s^2) + Br + 2Cs + Dt + E.$$

Határozzuk meg  $\varphi$ -t és  $\psi$ -t úgy, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} & \frac{\partial \psi}{\partial q} \end{vmatrix} = A.$$

Akkor

$$F = f - \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)}$$

oly függvény, melyre az előbbi §-ban mondottakat alkalmazhatjuk. Tehát

$$F = \frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dy}$$

és

$$f = \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} + \frac{d(w_1, y)}{d(x, y)} + \frac{d(x, w_2)}{d(x, y)}.$$

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1914 decz. 14.-én tartott üléséből.)

## BAKTERIUM-ELLENES SPECZIFIKUS FERMENTUMOK.

HUTYRA FERENCZ I. tagtól és MANNINGER REZSŐ-től.

Annak a lehetőségét, hogy az állati szervezetbe kerülő mikroorganizmusok fajlagos proteolytikus fermentumok (Abwehrfermente) keletkezését válthatják ki, ABDERHALDEN már elméleti megfontolások alapján valószínűnek tartotta, utóbb pedig ANDREYEWSKY-vel együtt végzett kísérleteivel a gümőkórbacillusra és a takonykórbacillusra nézve kísérletileg is igazolta. Nézetük szerint e fermentumok hatása nemcsak az egész bakteriumsejt ellen, hanem annak egyes alkotórészei ellen is irányulhat.

Más kutatók hasonló kísérletei részben ellenmondó eredményekre vezettek. Így például MELIKJANZ azt észlelte, hogy gümőkóros nyulak vérsavója gümöbacillusokat bont, FEKETE és GÁL pedig tiszta tenyészetekkel kezelt nyulak vérsavójában coli- és typhusbacillusokat, továbbá staphylococcusokat bontó, bár nem mindig szigorúan fajlagos fermentumok jelenlétét állapította meg; szintúgy VÖLKEKEL is arra az eredményre jutott, hogy a dialyzáló eljárás alkalmas bakteriumoknak és bakteriumos fertőző betegségeknek felismerésére. Ezekkel a pozitív vizsgálati eredményekkel szemben SCHENK-nek bakteriumokkal kezelt nyulak vérében nem sikerült ABDERHALDEN-féle fermentumokat kimutatnia és hasonlóan kedvezőtlen eredményekről számol be KIRSCHBAUM és KÖHLER is.

Saját vizsgálatainkban antigenül a következő bakteriumokat használtuk: *a lépfenebacillus csikolt* valamint *nyálkás variétását*, *burokanyagot* magában és *anthracoides-bacillusokat*. A kitűzött kérdés egyrészt az volt, hogy vajjon az első helyen

említett három antigen valamelyikével kezelt állatok vérsavója különbözőképen emésztí-e a lépfenebacillus testét és a burokanyagot, másrészt az, hogy e különbség lépfenebacillusokkal, illetőleg anthracoidesbacillusokkal kezelt kísérleti állatokon, tekintettel e bakteriumfajok valószínű phylogenetikai rokonságára, kevésbé élesen jelentkeznek-e.

E czélból nyulaknak és kutyáknak előtt és élő bakteriumokat fecskendeztünk bőrük alá, és pedig, eltekintve azoktól a kísérletektől, melyekben az állatok fermentumok jelentkezése előtt pusztultak el, egy-egy házinyulat mindkét varietásu előtt lépfenebacillusokkal, illetőleg előtt anthracoidesbacillusokkal, két nyulat és egy kutyát élő buroktalan, egy-egy nyulat és egy-egy kutyát burkos lépfenebacillusokkal, illetőleg előtt anthracoidesbacillusokkal fertőztünk. Egy nyúl és egy kutya burokanyagot kapott a bőre alá.

Az összes kísérleti állatok vérsavóját a kezelés előtt megvizsgáltuk fermentumok jelenlétére; az eredmény következetesen negatív volt, amennyiben az állatok vérsavója sem lépfenebacillusokat, sem anthracoidesbacillusokat, sem burokanyagot nem emésztett. A kezelés után időnként részint a fülvénából, részint a torkolati gyűjtőérből aseptikusan vért vettünk. Magától értetődik, hogy a vizsgálatokat csak vérfestéktől mentes savókkal végeztük.

A vizsgálat technikája a következő volt:

Az antigenek előállítására a lépfenebacillus csikolt és nyálkás varietásának és az anthracoidesbacillusnak agartenyészetei szolgáltak. A 2—3 napos tenyészeteket kb. 10—10 cm. párolt vízzel lemostuk és az így nyert emulsiót 10 perczig erőlyesen főztük, majd centrifugáltuk, a leülepedett bakteriumtömegeket friss vízzel újból főztük és így tovább. Ezt a műveletet mindaddig ismételtük, míg a főzővíz a szigorított ninhydrinpróbát (5 cm. szűrt főzővíz + 1 cm. 1%-os ninhydrinoldat) sem adta, a mi többnyire az 5—6. felfőzésre következett be. A most már peptontól mentes bakteriumokat 9-szeres mennyiségű sterilis párolt vízzel elegyítve, toluolban és chloroformban tartottuk el.

A burokanyagantigen következő módon készült: A lépfenebacillus nyálkás varietásának 2—3 napos agartenyészeteit 3%-os káliclórval mostuk le; miután a káliclór az anthracoides

mucint feloldotta, a folyadékot sűrű asbestfilteren átszűrtük. A szűrletből ecetsav hozzáadására a burokanyag finom pelyhek alakjában kivált, melyet azután hasonló módon kezeltünk, mint a bakteriumokat.

A dialyzáló hüvelyeket (579 A. sz. Schleicher és Schüll düreni gyárából) előzetesen megvizsgáltuk arra nézve, hogy peptonokat átbocsátanak, fehérjéket ellenben nem, és egyébként is betartottuk a dolgozás közben mindazokat a szabályokat, melyeket a chemiai és bakteriologiai tisztaság szempontjából ABDERHALDEN megkövetelt.

Egy-egy dialyzáló hüvelybe 1—1 kcm vérsavó került egymagában vagy az antigenek egyikével. E szerint tehát minden vérsavóval 5 kísérletet végeztünk: egy ellenőrző kísérletet és egy-egy próbát a használt négy antigen mindegyikével. Az antigen mennyisége az összes kísérletekben 0·5 kcm volt. A megtöltött hüvelyeket 20—20 kcm. sterilis lepárolt vizet tartalmazó kis Erlenmeyer-féle lombikokba helyeztük. A hüvelyek tartalma és a külső folyadék fölé toluolt rétegeztünk. A dialyzálás időtartama az összes kísérletekben 16 óra volt. A fehérjebomlás termékeinek kimutatására a ninhydrin-reactió szolgált (10 kcm. dialysatum + 0·2 kcm. 1%-os ninhydrinoldat).

Kísérleteink eredményeit az I.—XII. táblázatok tüntetik fel.

#### A) Kísérletek előlt bakteriumokkal és burokanyaggal.

Ebben a kísérleti sorozatban az állatokat mindkét varietású előlt lépfenebacillusokkal, illetőleg előlt anthracoidesbacillusokkal, továbbá a lépfenebacillus burokanyagával kezeltük. Minthogy a bakteriumok az állati testben nem szaporodhattak el, fermentumok termelődését kizárólag csak a bevitt fehérjék indíthatták meg.

Minthogy a lépfenebacillus burka a bacillus testének anyagától mindenekszerint különböző anyag, amire metachromás festődésén kívül a chemiai vizsgálatok eredményei is utalnak, már eleve várható volt, hogy pozitív eredmény esetén a bakterium e két alkotó részének mindegyike más-más fermentum keletkezését váltja ki.



E kísérletek eredményei az I—V. táblázatban vannak összefoglalva.

**I. táblázat.**<sup>1</sup>

*A lépfenebacillus csíktolt varietása.*

1. sz. nyúl, súlya 2000 g; 1913. XII. 1.-én egy óra alatt 60°-on előlt, 6 órás, spórátlan agartenyészet felét fecskendeztük a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata .....	—	+
B. anthracis var. mucosa .....	—	+
B. anthracoides .....	—	(+)
Burokanyag .....	—	—
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—

**II. táblázat.**

*A lépfenebacillus nyálkás varietása.*

3. sz. nyúl, súlya 2500 g; XII. 6.-án egy óra alatt 60°-on előlt, 8 órás agartenyészetet fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata .....	+	+
B. anthracis var. mucosa .....	+	+
B. anthracoides .....	(+)	(+)
Burokanyag .....	+	+
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—

<sup>1</sup> A táblázatokban + a ninhydrinreacziónál jelentkező határozottan kék szineződést, (+) halványkék szineződést jelent, — a kék szineződés elmaradásának jele.

## III. táblázat.

*Bacillus anthracoides.*

2. sz. nyúl, súlya 1900 g; XII. 1.-én egy óra alatt 60°-on elölt, 6 órás agartenyészetet kapott a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata .....	—	(+)
B. anthracis var. mucosa .....	—	(+)
B. anthracoides .....	—	+
Burokanyag .....	—	—
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—

## IV. táblázat.

*A lépfenebacillus burokanyaga.*

4. sz. nyúl, súlya 1800 g; XII. 7.-én 10%-os burokanyag-emulsióból 1 cm-t fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata .....	—	—
B. anthracis var. mucosa .....	+	+
B. anthracoides .....	—	—
Burokanyag .....	+	+
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—

## V. táblázat.

A lépfenebacillus burokanyaga.

3. sz. kutya, súlya 9·5 kg; 1914. V. 5.-én 10%-os burokanyagemulsióból 10 kcm-t fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata	—	—
B. anthracis var. mucosa	*)	+
B. anthracoides	—	—
Burokanyag	+	+
(Ellenőrző kísérlet)	—	—

\* A próba elromlott.

E kísérletek eredményei azt mutatják, hogy a lépfenebacillus esikolt változata a lépfenebacillus mindkét varietását bontó fermentumok termelődését váltotta ki, míg ama házinyúl vérsavója, melyet előlt nyálkás varietású lépfenebacillusokkal kezeltünk, a lépfenebacillusokon kívül burokanyagot is bontott. A vérsavó mindkét esetben, bár jóval kisebb mértékben, anthracoidesbacillusokat is bontott; kitűnik ez abból, hogy a ninhydrinreactio ezzel az antigennel igen gyengén positiv eredményt adott.

Az anthracoidesbacillusokkal kezelt nyúl vére hasonlóképen erélyesen emésztette az anthracoidesbacillusokat, a lépfenebacillus mindkét varietását azonban csak kevésbé, a burokanyagot pedig egyáltalában nem. A burokanyaggal kezelt 4. sz. nyúl vérsavója burokanyagot és nyálkás varietású lépfenebacillusokat bontott, ellenben hatástalannak bizonyult a többi antigennel szemben. Ugyanerre az eredményre vezettek azok a kísérletek is, melyeket a burokanyaggal kezelt kutya vérsavójával végeztünk (V. táblázat).

Az a körülmény, hogy az I. sz. kísérletben a vérsavó burokanyagot nem emésztett, abban leli magyarázatát, hogy a

csikolt varietásu elölt lépfenebacillusok a vérben nem szaporodhattak el s így nem fejlődhettek belőlük burkos bakteriumok.

### B) Kísérletek élő bakteriumokkal.

Ebben a kísérleti sorozatban az állatokat ugyanazokkal a bakteriumokkal fertőztük, mint az előzőben, minthogy azonban élő, vagyis szaporodásra képes bakteriumok kerültek az állatok testébe, már előre fel volt tehető, hogy a lépfenebacillus csikolt varietása más hatással lesz, mint ugyanez a varietás élő állapotban. Az agaron burok nélkül fejlődő csikolt varietás ugyanis az állati testben tudvalevően burkot termel, mely PREISZ vizsgálatai szerint a lépfeneellenes anyagokat hatástalanná teszi. Számolni lehetett tehát azzal a lehetőséggel, hogy ez a varietás az állati testben burokanyagot emésztő védőfermentum keletkezését váltja ki.

E kísérletsorozat eredményeit a VI—XII. táblázat tartalmazza.

### VI. táblázat.

*A lépfenebacillus csikolt varietása.*

10. sz. nyúl, súlya 1750 gr; 1914. V. 17.-én 24 óras agartenyészetből  $\frac{1}{20}$  kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	6.
	napon	
B. anthracis var. striata	+	+
B. anthracis var. mucosa	+	+
B. anthracoides	—	(+)
Burokanyag	+	+
(Ellenőrző kísérlet)	—	—

VII. táblázat.

*A lépfenebacillus csikolt varietása.*

11. sz. nyúl, súlya 1900 gr; 1914. V. 17.-én 24 órás agartenyészetből  $\frac{1}{50}$  kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő		
	3.	4.	6.
	napon		
B. anthracis var. striata	—	+	+
B. anthracis var. mucosa	—	+	+
B. anthracoides	—	—	—
Burokanyag	—	—	+
(Ellenőrző kísérlet)	—	—	—

VIII. táblázat.

*A lépfenebacillus nyálkás varietása.*

8. sz. nyúl, súlya 1700 gr; 1914. II. 28.-án 24 órás agartenyészetből egy kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	5.
	napon	
B. anthracis var. striata	+	+
B. anthracis var. mucosa	+	+
B. anthracoides	—	(+)
Burokanyag	+	+
(Ellenőrző kísérlet)	—	—

## IX. táblázat.

*Bacillus anthracoides.*

7. sz. nyúl, súlya 1800 gr; 1914. II. 23.-án 24 órás agartenyészetből  $\frac{1}{20}$  kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	5.
	napon	
B. anthracis var. striata .....	(+)	(+)
B. anthracis var. mucosa .....	(+)	(+)
B. anthracoides .....	+	+
Burokanyag .....	—	—
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—

## X. táblázat.

*A lépfenebacillus csikolt variétása.*

4. sz. kutya, súlya 12 kg; 1914. V. 23.-án 24 órás agartenyészetből egy kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő		
	6.	8.	10.
	napon		
B. anthracis var. striata .....	(+)	+	+
B. anthracis var. mucosa .....	—	+	+
B. anthracoides .....	—	—	—
Burokanyag .....	—	—	+
(Ellenőrző kísérlet) .....	—	—	—

**XI. táblázat.**

*A lépfenebacillus nyálkás variétása.*

2. sz. kutya, súlya 7 kg; 1914. III. 23.-án 24 órás agartenyészetből két kacsnyit fecskendeztünk a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	3.	4.
	napon	
B. anthracis var. striata	—	+
B. anthracis var. mucosa	—	+
B. anthracoides	—	—
Burokanyag	—	+
(Ellenőrző kísérlet)	—	—

**XII. táblázat.**

*Bacillus anthracoides.*

1. sz. kutya, súlya 5 kg; 1914. IV. 23.-án 24 órás agartenyészet felét fecskendeztük a bőre alá.

Antigen	Ninhydrinreactio az ojtást követő	
	6.	7.
	napon	
B. anthracis var. striata	—	—
B. anthracis var. mucosa	—	—
B. anthracoides	—	+
Burokanyag	—	—
(Ellenőrző kísérlet)	—	—

Nyulakon az élő lépfenebacillus csíkkolt variétásával két kísérletet végeztünk (VI. és VII. tábl.). Az egyik (10. sz.) nyúl vérsavója már a fertőzés utáni harmadik napon bontott mindkét variétású lépfenebacillusokat és burokanyagot, a negyedik napon pedig részben anthracoidesbacillusokat is; a másik (11. sz.) nyúl

vérsavója a fertőzést követő negyedik napon csak lépfenebacillusokat, két nappal utóbb burokanyagot is emésztett, anthracoides-bacillusokkal szemben azonban hatástalan volt.

Az élő lépfenebacillus *nyálkás varietásával*, illetőleg az *anthracoides-bacillusokkal* végzett vizsgálatok (VIII. és IX. tábl.) hasonló eredményeket szolgáltatottak, mint azok, melyeket ugyanilyen előlt anyagokkal végeztünk. Fermentumokat már a fertőzés utáni harmadik napon sikerült kimutatni.

Az élő bakteriumokkal fertőzött *kutyákon* végzett kísérletek a következő eredményekre vezettek: A *csikolt* és a *nyálkás varietású lépfenebacillusok* (X. és XI. tábl.) oly fermentumok termelődését váltották ki, melyek a lépfenebacillus mindkét varietását és a burokanyagot emésztették. Az *anthracoidesbacillusokkal* fertőzött kutya vérsavója (XII. tábl.) csak anthracoidesbacillusokat bontott. A fermentumok legkorábban a fertőzést követő 3—6. napon jelentek meg a kutyák vérében. Feltűnő az, hogy a lépfenebacillusokkal fertőzött kutya vérében anthracoidesbacillusokat bontó fermentum, az anthracoidesbacillusokkal fertőzött kutya vérében pedig lépfenebacillusokat emésztő fermentum nem volt kimutatható, jöllehet nyulakon — bár csak nyomokban — majd minden esetben észleltük a jelenséget.

\*

A felsorolt kísérletek feljogosítanak arra a következtetésre, hogy a *lépfenebacillus nyálkás varietása két összetevőjének, a bacillustestnek és a buroknak megfelelően kétféle fermentum termelődését indítja meg*, mert a nyálkás varietásból készült antigént mind az előlt buroktalan lépfenebacillusokkal, mind a burokanyaggal kezelt állatok vérsavója bontotta. Ebben a tekintetben a csikolt varietású élő lépfenebacillusokkal fertőzött nyulak savója úgy viselkedett, mint a burkos bakteriumokkal kezeltéké. Hogy az agartenyészetekben burok nélkül fejlődő lépfenebacillusok az állati testben burokanyagot bontó fermentumok keletkezését is okozták, az, mint már említettük, abból magyarázható, hogy a csikolt varietású élő lépfenebacillusokból az állati szervezetben burkos bakteriumok fejlődnek.

Az a jelenség, hogy némely kísérletben lépfenebacilluso-



kat bontó vérsavók kislekban anthracoidesbacillusokat is emész-  
tettek, talán újabb bizonyítékul szolgálhat e két bakteriumfaj  
phylogenetikai rokonsága mellett.

### Irodalom.

ABDERHALDEN: Abwehrfermente des tierischen Organismus. 3. kiadás.  
Berlin, 1913.

ABDERHALDEN és ANDREJEWSKY: Münchener medizinische Wochen-  
schrift. 1913, 1641. l.

MELIKJANZ: Deutsche medizinische Wochenschrift. 1914, 1369. l.

FEKETE és GÁL: Magyar Orvosi Archivum. 1913, XIV. kötet, 365. l.

VÖLKEL: Münchener medizinische Wochenschrift. 1914, 349. l.

SCHENK: Wiener klinische Wochenschrift. 1914, 25. szám.

KIRSCHENBAUM és KÖHLER: Wiener klinische Wochenschrift. 1914,  
24. szám.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 február 15.-én tartott üléséből.)

# HURKOLT ÉS LÁNCZOLT ALGEBRAI TÉRGÖRBÉK ALGEBRAI ELŐÁLLÍTÁSÁRÓL.

SZ. NAGY GYULÁ-tól.

1. A hurkolás és lánczolás fogalmait az izotopiában megállapított értelemben fogjuk használni.<sup>1</sup>

Igy hurkolt görbének nevezünk bármely tetszésszerű zárt görbét, a mely általában nem határa a tér egy szinguláritásnélküli felületdarabjának. Két zárt görbét lánczoltnak nevezünk, ha nem lehet az egyik görbét oly egyszeresen összefüggő felületbe befoglalni, a melyen belül a másik görbének egy pontja sincs. Hasonlóképen lehet a lánczolást értelmezni három vagy több zárt görbe esetére is.

Egy irreducibilis algebrai térgörbe, miként ismeretes,<sup>2</sup> több különálló menetből is állhat, és pedig egy  $p$ -ed fajú irreducibilis algebrai térgörbe menetei számának maximuma  $p+1$ . Ennek alapján lehetségesnek látszik és valóban lehetséges is, hogy egy irreducibilis algebrai térgörbe menetei közül 1, 2, ... vagy az összes hurkolt, vagy menetei közül 2, 3, ... vagy az összes lánczolt, vagy pedig hurkolás és lánczolás együttesen is előfordul.

Minthogy a lánczoláshoz legalább is két görbemenet szükséges, azért a lánczolt irreducibilis algebrai térgörbe fajszáma legalább is 1, de null nem lehet, míg hurkolt algebrai tér-

---

<sup>1</sup> Lásd: M. DEHN és P. HEEGAARD: Analysis situs. Encyklopädie der math. Wiss., Bd. III, Heft. 1., p. 207—215, vagy M. DEHN, Topologie, PASCAL: Repertorium der höheren Math. Bd. II. 1. (1910) p. 189—190.

<sup>2</sup> A. HARNACK: Über die Vielteiligkeit der ebenen algebraischen Kurven, Math. Ann. Bd. 10, p. 189—198; D. HILBERT: Über die reellen Züge algebraischer Kurven, Math. Ann. Bd. 38. p. 115—138.

görbék fajszáma nulla is lehet, mert a hurkoláshoz elég egyetlen menet.

És valóban A. BRILL<sup>1</sup> néhány példán kimutatta, hogy hurkolt térgörbéket lehet unikurzális térgörbék által előállítani. Az előállításra ő az unikurzális görbék parameteres alakját használta.

Jelen dolgozatban oly általános eljárást fogunk adni tetszőszerint hurkolt és lánczolt irreducibilis algebrai térgörbék előállítására, melyet bármely fajú algebrai görbe esetében is használhatunk.

2. Kiindulunk a hurkolt és lánczolt görbéknek közönséges ábrázolásából, a melynél a térbeli görbét egy síkbeli projekciójával ábrázoljuk, a hol a kereszteződési pontokban megadjuk, hogy melyik ág megy át a másik fölött.

Egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a projekció síkbeli algebrai görbe kettőspontnál magasabb szinguláris pontjainak a térbeli görbének is ugyanolyan szinguláris pontja felel meg és csakis egyszerű kettőspontok származnak a projicziálással, mint a térbeli görbe látszólagos kettőspontjai, vagyis más szóval a kereszteződési pontok a síkgörbe közönséges kettőspontjai.

Hogy ez a föltevés nem foglal magában semmiféle lényeges megszorítást, következik abból a tételből, hogy egy algebrai térbeli görbét végtelen sokféleképen lehet úgy projicziálni egy síkra, hogy a projicziálás által más szinguláris pontok mint egyszerű kettőspontok ne keletkezzenek, úgy hogy a síkgörbe magasabb szinguláris pontjai a térgörbe ugyanolyan szinguláris pontjainak felelnek meg.<sup>2</sup>

Legyen

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

egy feltételünknek megfelelő tetszőszerinti irreducibilis algebrai síkgörbe egyenlete, melynél tehát egyszerű kettőspontok a kereszteződési pontok, vagyis csak egyszerű kettőspontokon megy át

<sup>1</sup> A BRILL: Über algebraische Raumkurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben. Math. Ann. Bd. 18. p. 95—98.

<sup>2</sup> I. például F. SEVERI: Lezioni di geometria algebraica, Padova 1908, p. 174.

oly két görbeág, a mely a térgörbe két nem metsző ágának felel meg.

Kimondott tételünket igazoltuk, ha kimutatjuk, hogy meg lehet határozni a

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

kétváltozós függvényt, a hol  $\varphi(x, y)$  és  $\psi(x, y)$   $x$ - és  $y$ -nak racionális egész függvényei, oly módon, hogy a  $z$  függvény csak az (1) görbe kereszteződési pontjaiban vegyen fel két különböző értéket, és pedig a kettőspontnak abban a pontjában vegyen fel nagyobb értéket, a mely az ábrázolás szerint a felső ágon fekszik, az (1) görbe többi pontjában pedig csak egy értéket vegyen fel.

Legyen egy ilyen kereszteződési pont  $K_i$ , koordinátái legyenek  $x_i, y_i$ , a két ág érintőinek iránytangensei  $\alpha_i, \beta_i$  és adjunk meg az  $\alpha_i$  ághoz egy  $a_i$ , a  $\beta_i$  ághoz egy  $b_i$  számot tetszőszerint, de oly módon, hogy ahhoz az ághoz tartozó szám legyen nagyobb, mely az ábrázolás szerint a másik fölött vonul el.

Vezessünk az összes  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) kereszteződési pontokon keresztül két elegendő magas ugyanolyan rendű, különben tetszőszerinti algebrai görbét; egyenleteik legyenek

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Ha már most a  $\varphi(x, y)$  és  $\psi(x, y)$ -ban előforduló tetszőszerinti konstansok meghatározására felhasználjuk az

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left[ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \alpha_i}{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \alpha_i} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \\ b_i &= \left[ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta_i}{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta_i} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (2)$$

egyenleteket és a még fenmaradó konstansok meghatározása végett a

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{és} \quad \psi(x, y) = 0$$

görbék az (1) görbe elegendő számú közöséges pontján és azokon kívül a sík megfelelő számú tetszésszerinti pontján keresztül vezetjük, akkor a

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad (3)$$

egyenlet az (1) egyenlettel kapcsolatban előállítja a kívánt algebrai térgörbét, a mely irreducibilis és fajszáma ugyanaz, mint az (1) görbének, mivel az (1) görbe irreducibilis és véges számú pontot leszámítva, kölcsönösen egyértékűleg vannak egymásra vonatkoztatva.

Az (1) és (3) egyenletek által előállított térgörbe rendszáma azoknak a metszéspontoknak száma, a melyben a térgörbét egy tetszésszerinti

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sík metszi. Ez a szám ugyanaz, mint az (1) görbének az

$$A x \varphi(x, y) + B y \varphi(x, y) + C \varphi(x, y) + D \varphi(x, y) = 0 \quad (4)$$

görberendszerrel való változó metszéspontjainak száma.

Térgörbénk rendszámát tehát megkapjuk, ha az (1) görbének egy (4) görbével való összes metszéspontjainak számából levonjuk a  $K_i$  kereszteződési pontok számát kétszeresen számítva és az (1) görbe ama közöséges pontjainak számát, a melyeken úgy a  $\varphi(x, y) = 0$ , mint a  $\psi(x, y) = 0$  görbe keresztül megy.

Az (1) görbének minél több fixpontján vezetjük keresztül a  $\varphi$  és  $\psi$  görbékét, annál alacsonyabbrendű lesz a térgörbe rendszáma.

Minthogy sem a hurkolás, sem pedig a lánczolás nem függ a  $K_i$  kereszteződési pontokban megadott  $a_i$  és  $b_i$  számoktól közvetlenül, hanem csakis a

$$\mu_i = a_i - b_i$$

különbség előjelétől, azért a  $2m$  egyenletből álló (2) egyenlet-

rendszer, a mely a  $\varphi$  és  $\psi$  koéfficienseire nézve lineáris, helyettesíteni lehet az

$$\begin{aligned} \mu_i &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_i & \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta_i \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} a_i & \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta_i \end{array} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = \\ &= \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (\beta_i - a_i) \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} a_i \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta_i \right) \end{array} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (5)$$

$m$  egyenletből álló egyenletrendszerrel, a mely már nem első-, hanem másodfokú  $\varphi$  és  $\psi$  koéfficienseire nézve.

Ezt az egyenletrendszert használva a (2) helyett,  $\varphi$  és  $\psi$  koéfficienseire nézve kevesebb megszorítást kapunk, tehát  $\varphi=0$  és  $\psi=0$  görbéket az (1) görbének több közönséges pontján vezethetjük keresztül és így az (1) és (3) egyenletekkel előállított térgörbe rendszáma alacsonyabb lesz.

Az (1) görbének  $K_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) kereszteződési pontjai a hurkolást, illetőleg lánczolást tekintve különböző szerepet játszanak. Azok a kereszteződési pontok, a melyekben egy görbemenet önmagát metszi, a lánczolásra nincsenek befolyással, és azok a kereszteződési pontok, a melyekben két különböző görbemenet metszi egymást, a hurkolásra nézve nem bírnak jelentőséggel.

3. A legegyszerűbb hurkolt görbét, az úgynevezett lóherehurkot (Kleeblattschlinge) A. BRILL állította elő algebrailag. Mi most a legegyszerűbb lánczolt görbét fogjuk algebrailag előállítani.

A legegyszerűbb lánczolt görbe két zárt görbéből áll, a melyek egymást egyszer lánczolják körül. Egy ilyen görbének a sikra való projekciója legalább két oly kettősponttal bír, a melyekben a projekció két menete metszi egymást.

Könnyen tudunk előállítani oly negyedrendű elsőfajú görbét, melynek csak az a két kettőspontja van, a melyben két menet metszi egymást.

Tudvalevőleg az

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

egyenlet, a hol az  $a$ -k reálisak és egymástól különbözők, egy oly harmadrendű elsőfajú görbét állít elő, a mely egy oválisból és egy szerpentinből áll.

Alkalmazzunk erre a görbére egy oly quadratikuss transzformációt, melynek két alappontja az oválison, a harmadik pedig a görbén kívül fekszen, akkor ez a transzformáció harmadrendű görbénket a kívánt negyedrendű görbébe viszi át, a mint azt könnyű belátni.

Legyen ennek a negyedrendű görbének egyenlete

$$f(x, y) = 0 \quad (6)$$

és legyen  $\varphi(x, y) = 0$  és  $\psi(x, y) = 0$  két olyan másodrendű görbe egyenlete, a mely a két kettősponton keresztülmegy és azonkívül eleget tesz az

$$a_i = \left[ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_i}{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} a_i} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (7)$$

$$b_i = \left[ \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta_i}{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta_i} \right]_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \quad (i=1, 2)$$

egyenletrendszernek, a hol  $x_1, y_1$  és  $x_2, y_2$  a két kettőspont koordinátái,  $a_1, a_2$  és  $\beta_1, \beta_2$  egy-egy görbemenethez a két kettőspontban tartozó iránytangens és az  $a_1 - b_1, a_2 - b_2$  különbségek ellenkező előjelűek.

Ilyen feltételek mellett a (6) egyenlet és a

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \quad (8)$$

egy kivánt tulajdonságú algebrai térgörbét állít elő, melynek rendszáma 8.

A (4) alatti görberendszer ugyanis harmadrendű, a mely a negyedrendű (6) görbét a két kettősponton kívül még nyolcz változó pontban metszi.

A  $\varphi$  és  $\psi$  koéfficienseire nézve még felhasználhatunk egy-egy feltételt. Ha mindkettőt a (6) görbe egy közönséges pontján keresztül vezetjük, akkor a (6) és (8) egyenlet 7-edrendű térgörbét állít elő.

A rendszámot kisebbíthetjük, ha a (7) helyett az (5) alatti egyenleteket használjuk ( $i = 2$ ).

Ekkor a  $\varphi$  és  $\psi$  görbéket a két kettősponton kívül a (6) görbének még két közönséges pontján keresztül vezethetjük; még így is marad koéfficienseikben lineárisan egy-egy tetszésszerinti konstans, melyeket úgy határozunk meg, hogy  $\mu_1$  és  $\mu_2$  különböző előjelű számok legyenek.

A két tetszésszerinti konstansra  $\mu_1$  és  $\mu_2$  bármily számértéke mellett kapunk reális értéket, noha az (5) alatti egyenletrendszer nem elsőfokú.

Ha ugyanis az (5) alatti egyenletrendszerből ( $i = 2$ ) a  $\varphi$  görbében előforduló ismeretlen együtthatót kiküszöböljük, a  $\psi$  görbében előforduló ismeretlen együtthatóra egy harmadfokú egyenletet kapunk, a melynek pedig mindig van legalább egy reális gyöke.

A  $\varphi$ -t és  $\psi$ -t ilyen módon meghatározva, a (6) és (8) egyenletek egy 6-odrendű irreducibilis elliptikus térgörbét állítanak elő, a melynek két menete egymásba van lánczolva.

A (6) és (8) egyenletek által előállított térgörbe rendszámát tovább nem lehet redukálni, mivel abban az esetben, ha  $\varphi$  és  $\psi$  görbék a két kettősponton kívül a (6) görbének még három fixpontján mennének keresztül, egymástól nem különböznenek.



# AZ ELEKTROMOSSÁG VEZETÉSÉNEK SEBESSÉGÉRŐL FOLYADÉKOKBAN.

HEVESY GYÖRGY-től.

## ELSŐ RÉSZ.

Az ionok és az elektromosságot vízben át vezető  
egyéb részecskék nagysága.

### 1. Bevezetés.

Majd minden ion megközelítőleg ugyanavval a sebességgel mozog az elektromos mezőnyben; e sebesség  $6 \times 10^{-4}$  cm/sec körül van, ha a feszültség esése a vízben centiméterenként 1 Volt.

Az ionokat többnyire atómoknak képzelik, melyek pozitív vagy negatív töltést hordanak. Az összes atóмок kiterjedése ugyanakkora nagyságrendű és így a surlódási ellenállás, melyre az elektromos mezőnyben mozgó ionok találnak, sem fog nagy eltéréseket mutatni. Az ionok megközelítőleg azonos mozgékony-sága nem igényel tehát magyarázatot.

Ha most figyelmünket más, az elektromosságot vízben át vezető részecskék felé fordítjuk, mint például kolloid-részecskék, vagy vízben szuszpendált gázbuborékok felé, azt találjuk, hogy ezek ugyancsak megközelítőleg a fenti sebességgel,  $4-5 \times 10^{-4}$  cm/sec-val vezeték az elektromosságot.

A kolloidrészecskék átmérője meghaladja az ion-átmérő százszorosát,<sup>1</sup> a  $\frac{2}{10}$  mm átmérőjű levegőbuborékok, melyeket PUTNOKY LÁSZLÓ<sup>2</sup> és Mc. TAGGART<sup>3</sup> vizsgált tüzetesen, ennek a  $2 \times 10^6$  szorosát; ily részecskék mozgásuk közben hasonlíthatatlanul nagyobb surlódási ellenállásra találnak, mint a kis ionok, s ha ennek daczára ugyanakkora sebességgel mozognak a mezőny-

<sup>1</sup> ZSIGMONDY: Kolloidchemie. Leipzig, 1912. 46. old.

<sup>2</sup> Z. Elektrochem. 19, 22 (1913).

<sup>3</sup> Phil. Mag. 28, 147 (1914).

ben, mint az utóbbiak, kell, hogy valamely más tényező kompenzálja a surlódási ellenállás megnövekedését. Ez a tényező a töltésnek a nagysága lehet, melyet a részecske hordoz és melylyel a mozgékonyasága arányosan növekszik.

Az elektromosságot vezető nagyobb részecskék kell, hogy sok töltést hordozzanak és hogy a töltés nagysága ugyanaz a függvénye legyen a részecske nagyságának, mint a surlódási ellenállás, melybe mozgása közben ütközik.

Ha egy részecske oly folyadékban mozog, melynek molekulái jóval kisebbek a részecskénél, akkor a surlódási ellenállás csupán a részecske sugarától függ és azzal egyenesen arányos (STOKES törvénye). A vezető részecskék mozgékonyaságának megközelítő egyenlőségéből azt a következtetést vonjuk, hogy *minden vezető részecske töltésének és átmérőjének a viszonya,  $E/R$  megközelítőleg állandó.*

Noha  $E/R$ , illetve a vezető részecskék mozgékonyasága csupán megközelítőleg állandó, e tétel segítségével mégis sikerül egységesen átpillantani az elektromosság vezetésének amaz összes eseteit, melyek anyagkítétellel vannak összekötve (elektrolitikus vezetés, kolloid-vezetés stb.); az ionok hidratációját új oldalról sikerült megvilágítani; az olvasztott sók diszocziájának még megoldatlan problémája egyszerű megoldást talál; a vezető részecskék töltésének a nagyságából következtethetünk azoknak a sugarára és így tovább.

$E/R$  konstans levén, kell hogy minden elemi töltés, melyet vízben létesítünk, megfelelő felületről gondoskodjék, illetve minden részecske, melyet létrehozunk, megfelelő töltésről. Az első csoportba sorolhatjuk az egy és több értékű ionokat, az utóbbiba a kolloidális részecskéket, szuszpenziókat stb.

## 2. A töltés elemi egységét hordozó részecske sugara.

Milyen nagy a töltés elemi egységét hordozó részecske, az egyértékű ion sugara? A fenti tételből, mely szerint  $E/R$  megközelítőleg állandó, kiindulva, következőképen számíthatjuk ki  $r$  keresett értékét: Megmérjük egy nagy részecske, például egy a mikroszkop alatt látható aranyrészecske átmérőjét, valamint e

részecskék diffúziós állandóját és mozgékonyágát elektromos mezőnyben. Ez utóbbiakból egyszerű számítás révén, mely az elektrolytek diffúziójának elméletén nyugszik (lásd az 513. oldalt), kiszámíthatjuk  $K = ne$  értékét, hol  $e = 4.8 \times 10^{-10}$  E. S. E. az elektromosság elemi egységét jelenti és  $n$  ez egységek számát.  $E$  és  $r$  értéke ismeretes lévén, ismerjük egyúttal  $E = 1$ , az elemi töltést hordozó részecske ( $n = 1$ ) sugarának,  $r$ -nek az értékét is.

$13.3 \times 10^{-8}$  cm sugarú aranyrészecskék SVEDBERG<sup>1</sup> mérései szerint  $18^\circ$ -nál  $0,727$  cm<sup>2</sup>/nap sebességgel diffundálnak. E részecskék mozgékonyága GALECKI<sup>2</sup> mérései szerint 45. Ezekből az adatokból az egyértékű ion sugarának értékeül  $1.7 \times 10^{-8}$  cm adódik és  $E/r$  értékeül  $2.04 \times 10^{-2}$  E. S. E.

Számításunk feltételezi, hogy a diffúziós állandó fordítva arányos a részecske sugarával, vagyis hogy STOKES törvénye még érvényben van az ily kis részecskék mozgására is. E feltételestől, melyről különben a következőkben látni fogjuk, hogy nagyjában helyes, független második módszerünk. Ez azon alapszik, hogy a *Cl Ion* diffúziós sebességét összehasonlítjuk egy nemesgáz-atóm diffúziós sebességével, melynek átmérője gázállapotban ismeretes és mely aligha hidratizált és így vízben csak olyan nagy, mint gázállapotban.<sup>3</sup> Egyéb adatok híján a nitrogén-molekulát tekinthetjük nemesgáz-atóm helyett, mely ugyancsak aligha hidratizált. A *N* molekula diffúziós állandója vízben  $1.56$ , a *Cl* ioné  $1.45$ , az előbbi sugara  $1.5 \cdot 10^{-8}$  lévén, az utóbbié  $1.7 \cdot 10^{-8}$  cm.

Noha e kísérleti adatok revíziója kívánatosnak látszik, a fenti érték nem különbözhetik lényegesen a *Cl* ion tényleges sugarától, ez utóbbi tehát annak dacára, hogy hidratizált (lásd az 518. oldalt), mégis alig nagyobb a *N* molekulánál, vagy nemesgázok atómjainál.

<sup>1</sup> The SVEDBERG: Die Existenz der Moleküle. Leipzig, 1912. 68. old.

<sup>2</sup> Z. Anorg. Chem. 74, 74 (1912).

<sup>3</sup> Ha nemes gázok atómjai is vízburokkal körülvéve diffundálnának, akkor a *Cl* ion átmérőjének abszolút értéke nagyobb lenne a fenti adatok alapján kiszámított értékénél; a többi következtetésünk azonban nem szenvedne változást.

### 3. Stokes törvényének érvényességéről.

STOKES törvénye, mely szerint gömb alakú részecske surlódási ellenállása ugyanabban a közegben csak a részecske sugarától függ és azzal egyenesen arányos, csupán határeseteké annak az általános törvénynek,<sup>1</sup> mely szerint a részecske ellenállása

$$W = \frac{6\pi\eta r}{1 + A \frac{L}{r}};$$

hol  $\eta$  a közeg belső surlódása,  $r$  a részecske sugara,  $L$  a közeg molekuláinak szabad közepes útja,  $A$  egy faktor, melynek értéke 1 és 0.82 között variál és attól függ, hogy az összeütközés a részecske és a közeg molekulái között mily mértékben rugalmas.

A képlet abban az esetben, mikor  $\frac{L}{r}$  igen kicsiny lesz, STOKES egyenletét szolgáltatja.

Atmoszferikus nyomás mellett a levegőmolekulák közepes szabad útja körülbelül  $10^{-5}$  cm, egy atom nagyságrendje  $10^{-8}$  cm lévén,  $\frac{L}{r} = 1000$ ; és így STOKES törvénye teljesen érvénytelen. Vajjon vízben mozgó ion esetében érvényes-e, az attól függ, milyen nagy a molekulák közepes szabad útja vízben.

Ezt az utóbbi értéket RIECKE<sup>2</sup> molekulaelméleti alapon kísérte meg kiszámítani; szerinte a szabad közepes út arányos az illető molekulák diffúziós állandójával ( $D$ -vel) és molekuláris sebességével ( $u$ -val),

$$L = \frac{3uD}{8.64 \cdot 10^4},$$

illetve

$$L = 0.01332 \cdot 10^{-8} \sqrt{1 + 0.00367 t. D. \sqrt{M}},$$

hol  $M$  = molekulasúly.

<sup>1</sup> CUNNINGHAM: Proc. Roy. Soc. 83, 357 (1910).

<sup>2</sup> Z. phys. Chem. 6, 565 (1890).

A nitrogén molekula esetében ( $D = 1.5$ ;  $m = 28$ )

$$L = 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ cm,}$$

vagyis csak  $\frac{1}{12}$  része a molekula sugarának.

A fenténél megbízhatóbbnak látszik a következő módszer, mely LINDEMANN<sup>1</sup> olvadáspont-elméletén alapszik: LINDEMANN szerint egy szilárd test akkor olvad meg, ha molekuláinak kinetikai energiája elérte azt az értéket, mely elégséges arra, hogy ezek nyugalmi helyzetükből eltávolodhassanak.

Az olvadáspont

$$T_s = \frac{\nu^2 m r^2}{7.85 \times 10^{24}};$$

ha már most ismerjük az olvadáspontot és az illető molekulák rezgési számát ( $\nu$ ), akkor kiszámíthatjuk a molekulák sugarát és egyúttal a molekulák közötti szabad tér nagyságát, mely a szabad közepes utvonálnak felel meg.

Ez a számítás a vízmolekulák szabad közepes útjának értékéül a sugár értékének körülbelül 15%-át szolgáltatja. A CUNNINGHAM-féle korrekció e szerint kisebb 15%-nál és így a hiba, melyet elkövetünk, ha STOKES-képletet alkalmazunk egyértékű ionok mozgására vízben, kisebb 15%-nál, többértékű ionok esetében, mint látni fogjuk, még jóval kisebb.

Ha RIECKE fenti értékét vesszük helyesnek, a hiba még kisebb.

#### 4. A töltés nagysága adott. — Az egy- és többértékű ionok esete.

Az elektrolytikus diszszocziáció folytán a feloldott sók egy- vagy többértékű ionokat alkotnak; e jelenségesoportot úgy is tekinthetjük, mintha az elemi töltések száma lenne itt adva és e töltések gondoskodnának megfelelő felületről. Ha ez valóban így van, akkor azt kellene várnunk, hogy egy kétértékű ionnak az átmérője körülbelül kétszer olyan nagy lesz, mint az egyértékűé, a háromértékűé háromszor olyan nagy és így tovább.

<sup>1</sup> Phys. Z. 11. 609 (1910).

Az ionok átmérőjének mértékét — a STOKES-törvény érvényességének a határán belül — a diffúziós állandó szolgáltatja és így a fentiek szerint a kétértékű ion diffúziós állandójának kétszer olyan nagyának kell lennie, mint a milyen az egyértékűé és így tovább. A normális egyértékű ion, például a *Cl* ion diffúziós állandója 1·4 lévén, a kétértékűé 0·7, a háromértékűé 0·47 lesz és az ion diffúziós állandója töltésszámának, illetve vegyértékének egyszerű mértéke lesz.

A STOKES-féle törvénytől való eltérés folytán az egyértékű ion diffúziós állandója valamivel nagyobb lesz, mint a milyen ez eltérés nélkül lenne; így a diffúziós állandók nagyságából viszont a CUNNINGHAM-féle korrekció nagyságára, illetve a közepes szabad út értékére lehet következtetni.

A fenti gondolatmenetet használta fel szerző<sup>1</sup> a radioelemek vegyértékének meghatározására. Ez elemek legnagyobb része elenyésző kis mennyiségben áll csupán rendelkezésünkre és így a szokásos módszerek felmondják a szolgálatot; a fenti módszer segítségével azonban egyszerű módon sikerült 15 radioelem vegyértékét meghatározni, mivel a diffúziós folyamat az abszolút töménységtől független, sőt minél hígítottabb az oldat, annál kevésbé várhatók zavaró folyamatok, mint parciális diszszociáció és így tovább.

## 5. A kétértékű elektrolitok diffúziójáról.

Az egyértékű elektrolitok diffúzióját teljesen áttekinthetjük a NERNST-féle diffúziós elmélet segítségével. Ha az egyértékű elektrolyt ionjainak mozgékonyasága ismeretes, akkor kiszámíthatjuk ennek a *D*-jét; ez utóbbi

$$D_{18^\circ} = 0\cdot0448 \frac{uv}{u+v},$$

hol *u* és *v* a két ion mozgékonyaságát jelenti.

A NERNST-féle elméletet többértékű elektrolitokra még nem alkalmazták; ezt akarjuk a következőkben megkísérelni az

<sup>1</sup> Phys. Z. 14, 49 és 1202 (1913).

által, hogy az  $ne/r = \text{konst.}$  tételt bevezetjük a fenti képletbe, mely ekkor a következő *bármely értékű részecske*, ion, kolloid, vagy egyéb részecske diffúziós állandóját szolgáltatja:

$$D_{18^\circ} = \frac{0.0048}{mn} \cdot \frac{uv}{\frac{u}{m} + \frac{v}{n}},$$

hol  $m$  és  $n$  a kation, illetve anion töltésszámát jelenti. E képlet  $n = 1$  esetében az ismeretes NERNST-féle egyenletet szolgáltatja

$$D = 0.048 \frac{uv}{u + v},$$

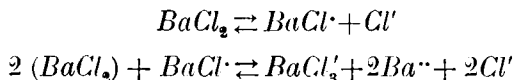
melyet a kísérleti eredmények fényesen igazoltak.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mennyire egyezik meg a fenti általános képlet a kísérleti eredményekkel. Így például ismerjük a  $BaCl_2$  és  $CaCl_2$  diffúziós állandóját és ionjainak mozgékonyágát; az első táblázaton láthatók a kísérletileg meghatározott<sup>1</sup> és az ionmozgékonyáságból kiszámított  $D$  értékek.

#### I. táblázat.

	$D$ kísérlet.	$D$ elmélet.
$BaCl_2$ — — — — — — — —	0.86	0.87
0.028 molar oldatban		
$CaCl$ — — — — — — — —	0.82	0.83
0.060 molár oldatban.		

A számítás elvégzésénél feltételeztük, hogy a  $BaCl_2$  teljesen diszszocziált a fenti hígított oldatban  $Ba^{++}$  és  $Cl'$  ionokká, de ez valóban csak részben történik meg. DRUCKER<sup>2</sup> szerint a  $BaCl_2$  következőképen diszszocziál:



<sup>1</sup> Landolt-Börnstein-Meyerhoffer-féle táblák.

<sup>2</sup> Z. f. Elektrochem. 19, 608 (1913).





2. táblázat.

	$D_{18^\circ}$ elmélet.	$D_{18^\circ}$ kísérlet.
$K_2SO_4$		
0·02 molár oldatban	0·99	0·96
$ZnSO_4$		
0·025 molár	0·61	0·48
$H_2SO_4$		
0·005 molár.	1·36	1·31.

Az elmélet a  $K_2SO_4$  és  $ZnSO_4$   $D$ -jával nagyobb értéket szolgáltat a kísérletnél, igen valószínű azonban, hogy még hígítottabb oldatban az elméleti értékkel megegyezőt szolgáltatna a kísérlet, mint azt a 3. táblázat számai mutatják.

3. táblázat.

A $K_2SO_4$ oldat töménysége molokban kifejezve.	$D$
1·5	0·73
0·95	0·76
0·28	0·82
0·05	0·93
0·02	0·96
0 (?)	0·99 (?)

Hasonlóképp láthatók a  $CuSO_4$  diffúziós adatai a 4. táblázaton.

4. táblázat.

Mol. $CuSO_4$	$D$
1·95	0·24
1·25	0·25
0·50	0·30
0·10	0·40

az elmélet 0·61-t követel végtelenül hígított oldatban.

A kénsav diszszocziációs képletét ismerjük,<sup>1</sup> valamint az

<sup>1</sup> JELLINEK: Das Hydrosulfit. 1910, 52. old.

egyed diszszocziációs termékek mozgékonyágát is. GOEBEL<sup>1</sup> szerint 0·00418 molar  $H_2SO_4$  oldat a következö molnyi ionokat tartalmaz :

$H^+$	$HSO_4^-$	$SO_4^{2-}$	$H_2SO_4$
0·007241	0·00107	0·00308	0·000018

Ezeket az adatokat a

$$D = 0\cdot0448 \frac{\frac{u}{m} \frac{v}{n}}{\frac{u}{m} + \frac{v}{n}}$$

képletbe beléhelyezve nyerjük :

$$D = 0\cdot74 \cdot 0\cdot0448 \frac{u_H v_{SO_4}}{u_H + \frac{v_{SO_4}}{2}} + 0\cdot13 \cdot 0\cdot0448 \frac{u_H v_{HSO_4}}{u_H + v_{HSO_4}} = 1\cdot32.$$

THOVERT<sup>2</sup> kísérlete 1·30-t szolgáltatott.

Kettőnél magasabb értékű sók diffúziós állandóit mindeddig nem határozták meg. BICSKER JÓZSEF végzett a III. számú kémiai intézetben erre vonatkozó kísérleteket, melyek a többértékű ionok diffúziójának e közleményben vázolt elméletét igazolják.

## 6. A nem diszszocziált sómolekulák diffúziós állandója és nagysága.

Milyen nagy például a nem diszszocziált  $KCl$  molekulák diffúziós állandója? Ismerjük, hogy az  $1/10$  n. oldatnak hány %-a diszszociált, viszont a  $K$  és  $Cl$  ion mozgékonyágát, illetve diffúziós állandóit, ezek az adatok lehetővé teszik a nem diszszocziált rész diffúziós állandójának a kiszámítását.

<sup>1</sup> Lásd DRUCKER: Z. f. Elektrochem. 13. 81.

<sup>2</sup> Ann. Chim. Phys. 26, 366 (1902).

5. táblázat.

A nem diszszocziált só.	$D$ 1/10 n. oldatból számítva.	$D$ 1 n. oldatból számítva.
<i>KCl</i> _ _ _ _ _	0.93	0.90
<i>KI</i> _ _ _ _ _	0.92	0.96
<i>LiCl</i> _ _ _ _ _	0.71	0.78
<i>CH<sub>3</sub>COOH</i> [1/1000 n. oldatból 0.87]	0.88	0.83

Az 1 n. oldattól a só nem diszszocziált része ugyan jóval nagyobb, mint az 1/10 n. oldatban, az utóbbiból számított adatok mégis a megbízhatóbbak, mivel az 1 n. oldat belső surlódása már lényegesen különbözik a víztől; a megfelelő korrekció alkalmazása viszont azon feneklik meg, hogy az oldat különböző rétegeinek más lévén a töménysége, más egyúttal a belső surlódása és függ a kísérlet időtartamától is.

A fenti adatok szerint a *CH<sub>3</sub>COOH* molekula mozgékony-sága 39, a *KCl*, illetve *KI*-é 42, ez utóbbi molekulák tehát 1.5-szer nagyobbak a *Cl* ionnál és így sugaruk  $2.6 \cdot 10^{-8}$  cm.

A 6. táblázaton látható néhány molekula sugarának egy-részt a diffúziós állandóból vizes oldatban kiszámított értéke, másrészt a belső surlódásból a kinetikai elmélet segítségével gőz állapotban kiszámított sugara.

6. táblázat.

	$r$ vizes oldatban	$r$ gőzállapotban
Aethylalkohol _ _	$1.97 \cdot 10^{-8}$ cm	$2.2 \cdot 10^{-8}$ cm
Amylalkohol _ _ _	$2.39 \cdot 10^{-8}$ "	-- "
<i>H<sub>2</sub>O<sub>2</sub></i> _ _ _ _	$1.8 \cdot 10^{-8}$ "	-- "
<i>Cl<sub>2</sub></i> _ _ _ _	$1.49 \cdot 10^{-8}$ "	$1.10 \cdot 10^{-8}$ " <sup>1</sup>
<i>Br<sub>2</sub></i> _ _ _ _	$2.28 \cdot 10^{-8}$ "	$1.60 \cdot 10^{-8}$ "
<i>I<sub>2</sub></i> _ _ _ _	$3.60 \cdot 10^{-8}$ "	$2.6 \cdot 10^{-8}$ "

<sup>1</sup> RANKINE újabb mérései szerint (Phil. Mag. 29, 552 [1914]) a három halogén molekula sugarának az értéke rendre  $1.60 \cdot 10^{-8}$ ,  $1.71 \cdot 10^{-8}$ ,  $1.88 \cdot 10^{-8}$  cm.

### 7. A hidratációs folyamat.

Mi a magyarázata annak, hogy a többértékű ionok átmérője annnyival nagyobb az egyértékűek átmérőjénél, hogy például a  $Fe^{+++}$  ion átmérője  $^3_2$ -szerese a  $Fe^{++}$  ion átmérőjének? Az ion átmérője különbözik az atomok átmérőjétől, egyszerű atom esetében e különbséget BOHR'-nak <sup>1</sup> sikerült kiszámítania, így pl. az utóbbi szerint a  $H^-$  ion átmérője  $1.33$ -szorosa a  $H$  atom átmérőjének, a  $He^-$  ioné  $0.87$ -szerese a  $He$  atoménak. Az az eset azonban, hogy úgy a pozitív, mint a negatív ionizáció az atom erős kitágulásával járna, felette valószínűtlen, így a többértékű ionizációval járó erős kitágulás egy külső tényező segítségével jöhet csak létre, mely tényező az oldószer. A többértékű ionizációval járó kitágulás csak a hidratációs folyamattal magyarázható.

Mint ismeretes, teljesen más érvek, sőt a fizikális kémia egész újabb fejlődése az ionok hidratációja mellett szólnak, sőt megbízható adatokkal rendelkezünk az egyes ionok relatív hidratációjáról. Így BUCHBÖCK <sup>2</sup> és WASHBURN <sup>3</sup> szerint, ha a  $H$  ion hidratációja  $1$ , vagyis ha a  $H^+$  egy vízmolekulát köt le, akkor úgy a többi ion hidratációja a következő:

$K$	...	...	...	5
$Na$	...	...	...	8
$Li$	...	...	...	14
$Cl$	...	...	...	4.

### 8. Anomális mozgékonyaság.

Az anomális mozgékonyaság, melyet néhány egyértékű ion mutat, ugyancsak szorosan összefügg a hidratációs folyamattal, így például a vízben lassan mozgó lithium ion folyékony ammoniában majdnem normális sebességgel mozog, a vízben rendesen viselkedő  $Ag^+$  az előbb említett oldószerben ellenben lassan.

Az anomálisan mozgó ionok közül a hidrogén-ion esete

<sup>1</sup> Phil. Mag. 26, 1 és 476 (1913).

<sup>2</sup> Z. phys. Chem. 55, 563 (1906).

<sup>3</sup> Z. phys. Chem. 66, 513 (1909).

igényel a legtöbb figyelmet, mozgékonyasága ugyanis ötszöröse a  $Cl'$  mozgékonyaságának. Aligha lehetséges, hogy a hidrogénion oly értelemben hidratizált, hogy minden  $H$  atom egy vagy több vízmolekulával van egyesülve, mert az ilyen rendszer nem mozdíthatna négyszer olyan gyorsan, mint egy vízmolekula, melynek a mozgékonyasága csak kevéssé különbözik a  $Cl$  ion mozgékonyaságától. Ha azonban a hidrogénion a fenti értelemben nem hidratizált, akkor az elektromosságot vezető részecskék egészen újszerű csoportját képezik a  $H^+$  ionok, melyet az jellemez, hogy az elektromos töltés hordozója nem egy vagy több atom, hanem csupán egy «atómmag».

RUTHERFORD<sup>1</sup> elmélete szerint az atom áll egy pozitív töltésű, elenyésző térfogatú atómmagból, mely az atom anyagi részét tartalmazza, továbbá egy vagy több negatív elektrontól, melyeknek a száma az atom nagy pozitív töltését kompenzálja és melyek az atom térfogatát majdnem kizárólag igénybe veszik. RUTHERFORD és BOHR<sup>2</sup> szerint a hidrogénatom van legegyszerűbben felépítve, magjának csak egy pozitív töltése van és ennek megfelelőleg csak egy negatív elektron kering a felületén. Ha az atom elveszti ez elektront, egyedül a csupasz mag marad meg. *Ilyen csupasz atómmag a  $H^+$  ion, mely kiterjedés nélküli pontnak tekinthető és így gyorsabban mozog a mezőnyben atómkiterjedésű részecskénél.*<sup>3</sup>

Egy vízbe beágyazott elektromos töltésű pont környezetére hatást fog gyakorolni, mely többek között abban nyilvánul, hogy a mozgó részecske magával fogja vonszolni az őt környékező vízmolekulák részét. BUCHBÖCK<sup>4</sup> kísérletei szerint a mezőnyben mozgó  $H^+$  csakugyan visz magával vizet, de csak a negyedrészt annak a vízmennyiségnek, mely egy klóronnal vándorol. A fenti okoskodásból következik, hogy egy  $H^+$ -nál okvetetlenül kevesebb vándorol egy vízmolekulánál.

<sup>1</sup> Phil. Mag. 27, 489 (1914).

<sup>2</sup> Phil. Mag. 25, 30 (1913).

<sup>3</sup> A különbség azért nem olyan nagy, mint első pillanatra látszanék, mert a szintén pontoknak tekinthető elektronok szabad közepes útja gázokban csak  $4\sqrt{2}$ -szerese a gázmolekula közepes útjának.

<sup>4</sup> l. c.

A  $H^+$  nagy mozgékonyágát úgy igyekeztek magyarázni,<sup>1</sup> hogy  $H^+$  a víznek, mint oldószernek, «saját» ionja lévén, más-képen kell, hogy viselkedjék, mint más, a vízben feloldott ionok. KRAUS és BRAY<sup>2</sup> kísérletei szerint azonban igen valószínűtlen, hogy a «GROTTHUS-féle vezetésnek» nevezett folyamat létezik. *A részecskék mozgékonyága vízben kizárólag a surlódási ellenállástól függ, melybe a mozgó részecskék ütköznek. Ez utóbbi elsősorban a részecske sugarától függ és csak abban az esetben, ha a részecske nem «nehéz» az oldószer molekuláihoz hasonlítva, kisebb-nagyobb mértékben a részecske tömegétől is.*

### 9. A részecske nagysága adott. — A kolloidok esete.

Az elektrolytikus diszszocziáció révén létrejövő ionok esetét mint olyat tekintettük, mikor a töltésegységek száma adott és e töltések gondoskodnak a megfelelő anyagi felületről. A kolloidok és szuszpendált részecskék viszont azt az esetet képviselik, mikor a részecske nagysága adott és a részecske gondoskodik annyi töltésegységről, melyet az  $e/r =$  megközelítőleg állandó tétel megkövetel.

A részecske csak akkor stabilis, ha a fenti tétel megkövetelte töltésszámot hordozza; kolloidális részecskék csak úgy jöhetnek létre, ha megvan a lehetősége annak, hogy a részecske a szükséges töltésegységeket felvegye, viszont a kolloidok kiesése a töltések előzetes, részletes, vagy teljes leadásával jár.

Mig egy egyértékű iontöltéssel vagy teljesen, vagy egyáltalán nem rendelkezik többé, addig egy sokértékű kolloid egy töltésegység leadása után ebben a szigorúan véve labilis, de gyakorlatilag stabilis helyzetében még sokáig tarthatja magát. Ennek megfelelőleg a kolloidok mozgékonyága (töltése) annak előállítási módja szerint különbségeket mutat és  $2 \cdot 10^{-4}$  és  $6 \cdot 10^{-7}$  cm között variál.

Miképen szerzi meg a kolloid töltését? Lehetséges, hogy egyes esetekben például az elektromos szétporlás útján képződő

<sup>1</sup> R. LORENZ: Z. phys. Chem., 82, 615 (1913).

<sup>2</sup> J. Americ. Chem. Soc. 56, 321 (1913).

aranyrészecskék töltéseiket szétporlás közben szerzik, a legtöbb esetben <sup>1</sup> azonban a részecske a környezetből, az oldatból ionok alakjában veszi fel a töltéseket. Nem  $e/r^2$  (a töltés és a felület viszonya), de  $e/r$  lévén állandó, ez aránylag könnyen történik; a kis kiterjedésű *OH* és *H* ionok különösen alkalmasak lesznek arra, hogy a részecske őket a környezetből adsorbeálja és így az  $e/r =$  konstans követelte töltésre tegyen szert. Mint ismeretes, a kolloid-kémiában a *H* és *OH* ionok nagy szerepet játszanak, mely szerepet új oldalról világítják meg a fenti fejtegetések. A töltés-felvétel mechanizmusának különböző eseteit ZSIGMONDY «Kolloidchemie» című könyvében tüzetesen tárgyalja. Nem kevésbé érdekes a fordított folyamat, a töltések leadása, az utóbbinak legegyszerűbb esete egyetlen egy nagy részecske, például egy vízben szuszpendált gázbuborék kisülése, melyet nem régen Mc TAGGART <sup>2</sup> figyelt meg. Az utóbbi  $\frac{1}{10}$  mm átmérőjű levegőbuborék a mi számításunk szerint 42000 E. S. E. elemi töltést hordoz; e töltések eltávolítása, sőt a buborék pozitív feltöltése sikerül ellenkező előjelű részecskék által, így például  $10^{-11}$  g æquivalens *Th* ( $NO_3$ )<sub>4</sub> által. Ez utóbbi ionjai  $10^{13}$  töltést hordoznak összesen és így csak minden  $10^7$ -ik ion hat neutralizálólá az ellenkező töltésű gázbuborékra. Még jóval kisebb az alacsonyabb töltésszámú ionok neutralizáló hatása, mely több faktortól látszik függeni, elsősorban azonban a neutralizáló részecske felületétől; a *Th*<sup>++++</sup> 4 töltésegysége 16-szor oly nagy felületet foglal el, mint a  $K^+$  ion egy elemi töltése, ennek megfelelőleg a *Th* ion neutralizáló hatása jóval többször mint négyszer nagyobb a  $K^+$  ion neutralizáló hatásánál. Noha a neutralizáló képesség más tényezőktől (affinitás?) is függ, elsősorban a részecske sugarának a függvénye és így ceteris paribus a részecskék neutralizáló hatása fordítva arányos diffúziós sebességgel.

Vajjon lehet-e éles határt vonni az elektrolytok és kolloidok között?

A kolloidok és ionok közötti megkülönböztetés a legtöbb

<sup>1</sup> Lásd ZSIGMONDY: Kolloidchemie. Leipzig, 1912, 50. o.

<sup>2</sup> l. c.

esetben sikerül, ha a részecske nagysága ismeretes: ha ez utóbbi sugara nagyobb  $7 \cdot 10^{-8}$  cm-nél, vagyis diffúziós állandója kisebb  $0.3 \text{ cm}^2 \cdot \text{nap}^{-1}$ -nél, akkor a részecske kétségtelenül kolloid, mivel nem létezik ion, mely több, mint négy töltést hordozna, mely töltésszámnak a fenti sugár, illetve diffúziós állandó felel meg; viszont ha a részecske diffúziós állandója nagyobb  $0.3$ -nál, akkor ebből nem következik szükségképpen iontermészete. Imerünk radioelemeket, melyek  $0.37 \text{ cm}^2 \cdot \text{nap}^{-1}$  állandónak megfelelő sebességgel diffundálnak, mégis kolloidtermészetűek, mivel több értékű ionok hozzáadása által e részecskéknél nemcsak a töltését sikerül neutralizálni, de ezeknek ellenkező előjelű töltést is lehet juttatni. Ez utóbbi a kolloidok legjellegzetesebb tulajdonsága. Egy ion töltését részben vagy teljesen elveszitheti, a négyértékű *Th* ion például elveszitheti mind a négy pozitív töltését, vagyis felvehet négy elektront, de nem vehet fel annál többet, például ötöt; a *Th* atom csak úgy vehet fel negatív töltést, ha azt negatív *ion* alakjában veszi fel, az így létrejött részecske már kolloid.

### Összefoglalás.

1. Mindazokban az esetekben, mikor elektromosság anyaghoz kötve halad vizen keresztül, az elektromos töltés és az anyagi részecske sugarának a viszonya  $E/R$ , megközelítőleg állandó. Az egyértékű ion sugara kb.  $1.7 \times 10^{-8}$  cm, az  $n$  értékű részecske, (ion, kolloid, gázbuborékok és így tovább)  $n \times 1.7 \times 10^{-8}$  cm.

2. A töltés nagyságából, melyet a részecske hordoz, kiszámítható az utóbbi sugara. A kétértékű ion átmérője körülbelül kétszerese, a háromértékű háromszorosa az egyértékű ion átmérőjének, szóval az átmérő az értékűség számával közelítőlegesen arányos.

3. A chlórion átmérője csak kevéssel nagyobb a nitrogénmolekula átmérőjénél, a *KCl*, *KI* molekuláé  $5/3$ -szorosa az utóbbiának.

4. A STOKES-féle törvény vízben mozgó ionokra nézve még megközelítőleg érvényes. A vízmolekulák közepes szabad útja sugaruk 15%-a lévén, a CUNNINGHAM-féle korrekció egyértékű ion esetében kisebb 15%-nál, kétértékűben 8%-nál stb.



5. NERNST-nek az egyértékű elektrolytok diffúziójára vonatkozó elmélete kibővíthető tetszés szerinti vegyértékű ionok és egyéb vezetőrészekké esetére az 1. pont alatt említett tétel segítségével. Ezt az általánosítást a kísérleti eredmények igazolják.

6. A hidrogénionok elvileg különböznek az összes többi iontól és az elektromosság vezetésének azt az esetét képviselik, mikor az elektromos töltéssel nem maga az atom, de csupán az elenyésző kiterjedésű *atómmag* vándorol.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 január 18.-án tartott üléséből.)

# NÉGYZETES KONGRUENCIÁK ALGEBRAI TESTEKBEN.

GROSSCHMID LAJOS-tól.

Egy régebben megjelent kis cikkünkben<sup>1</sup> az

$$x^2 \equiv r \pmod{2^k \cdot m}$$

kongruencia — a hol  $k, r, m$  racionális egész számok,  $k \geq 0$ ,  $m > 0$  és páratlan,  $r$  az  $m$ -hez relativ-prím és  $2^k \cdot m$ -nek négyzetes maradéka — teljes megoldásának oly általános kifejezését ismertettük, a mely kifejezés az  $m$ -nek, a  $k(\sqrt{r})$  másodfokú algebrai testben fellépő, ideál-tényezőiből tevődik össze. Jelenleg célunk az említett formuláknak kiterjesztése *tetszés szerinti algebrai testek* esetére.

\*

Mindenekelőtt idézzük a következő tényt, mint a mely kiinduló pontul szolgált a racionális számok körében vett kérdés tárgyalásában.

*I. tétel.* A

$$\xi^2 \equiv 1 \pmod{m} \quad (1)$$

kongruenciának — a melyben  $m$  racionális pozitív páratlan egész szám — teljes megoldását a

$$\Phi(a, b) \equiv a^{\varphi(b)} - b^{\varphi(a)} \pmod{m} \quad (2)$$

kifejezés szolgáltatja, hacsak ebben a racionális pozitív egész és egymáshoz prim  $a, b$  számok az  $m = a \cdot b$  feltételnek eleget

<sup>1</sup> Ueber die explizite Darstellung etc., Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 139., 101—105. oldal.

tevő összes értékeket átfutják, míg  $\varphi$  az úgynevezett EULER-féle függvény jele.

Valóban, (1) kongruencia mod.  $m$  inkongruens megoldásainak a száma  $2^m$ , tehát ugyanannyi, mint a (2) felbontásoké; továbbá a  $\Phi(a, b)$  eleget tesz (1)-nek, mert a FERMAT-féle tétel szerint: <sup>1</sup>

$$(a^{2\varphi(b)} - 1)(b^{2\varphi(a)} - 1) \equiv -a^{2\varphi(b)} - b^{2\varphi(a)} + 1 \equiv 0 \pmod{m},$$

azaz

$$\Phi(a, b)^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

Végül, ha  $a \neq a'$ ,  $b \neq b'$ , akkor:

$$\Phi(a, b) \not\equiv \Phi(a', b') \pmod{m};$$

amennyiben, ha

$$\Phi(a, b) \equiv \Phi(a', b') \pmod{m},$$

akkor  $a \cdot b = a' \cdot b' = m$  miatt  $m$ -nek volna oly páratlan  $p > 1$  prim tényezője, a mely osztja, mondjuk,  $a$ -t, de nem osztja  $a'$ -t, és tehát a mely foglaltatnék  $b'$ -ben, a honnan kapnók:

$$\Phi(a, b) \equiv -1 \equiv -\Phi(a', b') \pmod{p},$$

azaz

$$2 \equiv 0 \pmod{p},$$

a mely kongruencia,  $p$  páratlan volta miatt, lehetetlen.

Ha a részletezett tételnek és következményeinek általánosítását keressük, egészen természetesen merül fel a következő kérdés:

Adva lévén egy tetszőszerinti  $k$  algebrai test, kerestetnek e testnek mindazok a  $\xi$  egész számai, a melyek a

$$\xi^2 \equiv \varrho \pmod{m} \quad (3)$$

kongruenciának eleget tesznek, a melyben  $\varrho$  a  $k$ -nak oly egész száma, a mely e test valamely más egész számának nem négyzete;  $m$  a  $k$  testnek 2-höz és  $\varrho$ -hoz relatív-prim ideálja s végül a (3) megoldhatóságához szükséges és elegendő feltételek, vagyis a

<sup>1</sup> Ez a kongruencia nyilván érvényes marad, ha abban a 2 expo-  
nens helyett bárminő pozitív racionális egész számot írunk.

$$\varrho^{\frac{1}{2}(N(\gamma)-1)} \equiv 1 \pmod{\gamma} \quad (4)$$

kongruenciák<sup>1</sup> — a melyek a  $\left(\frac{\varrho}{\gamma}\right) = 1$  alakban is írhatók —  $m$ -nek minden  $k$ -beli  $\gamma$  primideál tényezőjére teljesítvék.  $N(\gamma)$  jelenti  $\gamma$ -nak a  $k$  testben vett normáját.

Ennek a kérdésnek e helyütt adandó megoldása abban áll, hogy a (3)-nak eleget tevő  $\xi$  értékeket kifejezzük a  $\gamma$ -knak ama primideál-faktoraival, a melyek a  $\sqrt{\varrho}$ -nak a  $k$  test számaihoz való hozzátételével keletkező  $K(\sqrt{\varrho}, k)$  relativ négyzetes testben fellépnek.

Jelentsék a továbbiakban a kis német  $a, b, c, \dots$  betűk a  $k$  test ideáljait.

Mindenekelőtt érvényes a következő tétel:

*II. tétel.* Legyen  $m = a \cdot b$  és  $a$  relativ-prim  $b$ -hez; továbbá  $\alpha, \beta$   $k$ -nak oly egész számai, hogy  $a$  osztja  $\alpha$ -t,  $b$  osztja  $\beta$ -t, míg  $a$   $b$ -hez,  $\beta$  pedig  $a$ -hoz relativ-prim. Tudjuk, hogy ezek a feltételek mindenkor megvalósíthatók.<sup>2</sup> Vegyük most szemügyre a következő kifejezést:

$$\Phi(a, \beta) = \alpha^{\varphi(b)} - \beta^{\varphi(a)}, \quad (5)$$

a melyben  $\varphi(n)$  jelenti a  $k$  testnek az  $n$  ideálhoz relativ-prim egész számaikat tartalmazó és modulo  $n$  inkongruens számosztályok számát. Azt állítjuk, hogy:

$$[\Phi(a, \beta)]^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

E kongruencia helyessége közvetlenül igazolható a tett feltételek és az általánosított FERMAT-féle tétel segítségével, ha csak az *I. tétel* alkalmával végzett megfontolásokat ezúttal is érvényesítjük.

<sup>1</sup> L. D. HILBERT: Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers, §. 1.; Math. Annalen, Bd. 51. — Minden nehézség nélkül lehet győződni, hogy az áttérés a  $\xi^2 \equiv \varrho \pmod{\gamma}$  kongruenciáról a  $\xi^2 \equiv \varrho \pmod{\gamma^n}$ -re, a hol  $n > 1$  racionális egész szám, teljesen úgy történik, mint a racionális számkörben (v. ö. DIRICHLET-DEDEKIND: Vorl. ü. Zahlentheorie, IV. Aufl. (1894), 35. §.).

<sup>2</sup> I. DIRICHLET-DEDEKIND l. c. 559. old.

III. tétel. A megelőző tétel hypothesisineinek fenntartása mellett, legyen  $m$  a  $2$ -höz relativ-prim, és bontsuk fel  $m$ -et minden lehetséges módon két, egymáshoz relativ-prim,  $a, b$  ideál szorzatára. Az ilyként jelentkező különböző felbontások száma — különbözőknek számítván a csupán a tényezők sorrendjében eltérő  $a \cdot b$  és  $b \cdot a$  felbontásokat is — nyilvánvalóan  $2^m$ , hacsak  $m$  az  $m$ -et osztó különböző,  $k$ -ből vett primideálok számát jelenti. Ha már most ezek a felbontások:

$$a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a^{2^m} \cdot b^{2^m},$$

és a nekik rendre megfelelő  $\alpha, \beta$  számok:

$$\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha^{2^m}, \beta^{2^m};$$

akkor a mod.  $m$  tekintett<sup>1</sup>

$$\Phi(\alpha_1, \beta_1), \Phi(\alpha_2, \beta_2), \dots, \Phi(\alpha^{2^m}, \beta^{2^m})$$

értékek a

$$\xi^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } m) \quad (6)$$

kongruenciának összes inkongruens gyökeit adják, és mindegyiket csakis egyszer.

Ezt a tételt a következő tények bizonyítják:

- a) (6)-nak nincsen  $2^m$ -nél több inkongruens gyöke  $k$ -ből;
- b) a  $\Phi(\alpha, \beta)$  értékek (6)-nak megoldásai;
- c) a  $\Phi(\alpha, \beta)$  értékek mod.  $m$  különbözők.

Az a) állítás igazsága kézen fekvő; mert minden  $\xi$  számhoz, a mely (6)-nak eleget tesz, vagyis tehát, a melyre nézve

$$(\xi - 1)(\xi + 1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } m).$$

tartozik egy  $m = a \cdot b$  felbontás úgy, hogy

$$\begin{aligned} \xi &\equiv 1 && (\text{mod. } a), \\ \xi &\equiv -1 && (\text{mod. } b), \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Ha az  $\alpha, \beta$  számok az  $m = a \cdot b$  felbontásnak felelnek meg, akkor az  $m = b \cdot a$  felbontáshoz tartozókul választhatjuk a  $\beta, \alpha$  számokat; úgy hogy  $\Phi(\alpha, \beta) = -\Phi(\beta, \alpha)$  alapján ez a választási mód a csupán előjelökben különböző kongruencia-megoldásokat párokba sorakoztatja.

a honnan világos, hogy a relativ-prim  $b$ -hez, mert  $m$  prim  $2$ -höz. Tehát, minthogy két mod.  $m$  különböző  $\xi_1, \xi_2$  megoldáshoz nem tartozhatnak ugyanazok az  $a$ -k és ugyanazok a  $b$ -k, mert a (7) kongruencia-rendszernek mod.  $m$  csakis egyetlen megoldása van,<sup>1</sup> az  $a$ ) állítás verifikálva van.

A  $b$ ) állítást II. tételünk igazolja.

Térjünk át  $c$ -re.

Tegyük fel egy pillanatra, hogy

$$\Phi(a_i, \beta_i) \equiv \Phi(a_h, \beta_h) \pmod{m}, \quad (8)$$

ahol  $i \neq h$  és mindkettő az  $1$  és  $2^m$  határok között van, ezek beleértésével. Könnyű meggyőződni, hogy biztosan lesz vagy  $a_i$ -nek, vagy  $a_h$ -nak legalább egy olyan primideál-tényezője, a mely nem osztja  $a_h$ -t, illetőleg  $a_i$ -t; következésképp osztója  $b_h$ -nak, illetőleg  $b_i$ -nek. Legyen  $\gamma$  egy ilyen primideál-faktora például  $a_i$ -nek és

$$a_i = \gamma^n \cdot a, \quad b_h = \gamma^n \cdot b,$$

$\gamma$  nem lévén osztója sem  $a$ -nak, sem  $b$ -nek. Már most, tekintve hogy<sup>2</sup>

$$\varphi(a_i) = \varphi(a) \cdot \varphi(\gamma^n),$$

kapjuk:

$$\Phi(a_i, \beta_i) = \alpha_i^{\varphi(\beta_i)} - \beta_i^{\varphi(a_i)} \equiv -1 \pmod{\gamma^n},$$

és

$$\Phi(a_h, \beta_h) = \alpha_h^{\varphi(\beta_h)} - \beta_h^{\varphi(a_h)} \equiv +1 \pmod{\gamma^n};$$

szóval (8) alapján előáll a

$$2 \equiv 0 \pmod{\gamma^n}$$

kongruencia, a mely pedig nem lehet igaz; q. e. d.

Tekintsük már most a (3) kongruenciát, azaz:

$$\xi^2 \equiv \varrho \pmod{m},$$

a hol  $m$  prim a  $2$ -höz és a  $\varrho$ -hoz, míg a (4) kongruenciák ki vannak elégítve. Legyen  $m$ -nek primideál-tényezői előállításai a  $k$  testben:

<sup>1</sup> DIRICHLET-DEDEKIND, l. c., 568—569. old.

<sup>2</sup> DIRICHLET-DEDEKIND, l. c. 569. old.

$$m = \prod_{i=1}^m \gamma_i^{r_i}, \quad (r_i > 0; i=1, \dots, m).$$

A (4) által kifejezett feltételek alapján kapjuk a relativ négyzetes testek elméletének ismert eredményei<sup>1</sup> szerint, hogy a  $K(\sqrt{\varrho}, k)$  testben:

$$\gamma_i = \mathfrak{P}_i \cdot \mathfrak{P}'_i \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

a honnan következik, hogy

$$m = \prod_{i=1}^m \mathfrak{P}_i^{r_i} \cdot \mathfrak{P}'_i^{r_i},$$

a hol  $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}'_i$  egymástól különböző — tehát nem *ambig* — prim-ideáljai a  $K(\sqrt{\varrho}, k)$  testnek, míg a  $k$  testre nézve relativ-conjugáltak.

Ezek után bontsuk fel az  $m$  ideált a  $K$  testben két  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  faktorra a következő módon:<sup>2</sup>

$$\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^m \mathfrak{P}_i^{r_i}, \quad \mathfrak{B} = \prod_{i=1}^m \mathfrak{P}'_i^{r_i},$$

$\mathfrak{P}_i$ -t irván a  $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}'_i$  ideálok egyike *avagy* másika helyett, tetzésünk szerint, az  $i$  indextől függetlenül. Tegyük ezt minden lehetséges módon; az ekként származó felbontások száma lesz  $2^m$ , tehát ugyanannyi, mint a (3) kongruenzia  $k$ -ból vett megoldásainak a száma.<sup>3</sup> Ha már  $\mathfrak{A}$ -t megválasztottuk, akkor  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'$ ;  $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$  egymáshoz relativ-primek.

Minden ilyen  $m = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'$  felbontáshoz feleltessünk meg két egész számot  $K(\sqrt{\varrho}, k)$ -ból,  $A$ -t és  $A'$ -t, a melyek egymás között relativ-conjugáltak, és legyen:  $A$  osztható  $\mathfrak{A}$ -val s prim  $\mathfrak{A}'$ -höz,

<sup>1</sup> L. HILBERT, l. c. 5. §.

<sup>2</sup> Az alábbiakban vesszövel jelzett betűkkel fogjuk jelölni a  $K$  test számainak és ideáljainak *relativ-conjugáltjait*, azaz azokat a számokat és ideálokat, a melyek az eredetiekből — HILBERT (l. c. 2. §.) jelölése szerint — az  $S = (\sqrt{\varrho} : -\sqrt{\varrho})$  substitúcióval keletkeznek.

<sup>3</sup> Ezt a tényt könnyen beláthatjuk a racionális számkörben érvényes megfelelő tétel bizonyításának per analogiam történő alkalmazásával (v. ö. DIRICHLET-DEDEKIND, l. c., 37. §.).

míg  $A'$  osztható  $\mathfrak{A}'$ -sel  $s$  prim  $\mathfrak{A}$ -hoz.<sup>1</sup> Így kapjuk a felbontások következő sorozatát:

$$\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}'_1; \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{A}'_2; \dots; \mathfrak{A}_{2^m} \cdot \mathfrak{A}'_{2^m},$$

és az ezekhez rendre tartozó

$$A_1, A'_1; A_2, A'_2; \dots; A_{2^m}, A'_{2^m}$$

számokat.

Mindezek után az előkészületek után kijelenthetjük a következő tényt, a mely egyben feleletet ad főkérdésünkre is:

*IV. tétel.* A (3) kongruenzia teljes feloldását megadja a

$$\xi_s \equiv \sqrt[\rho]{\bar{\rho}} \cdot \Phi(A_s, A'_s) \pmod{m} \quad (s = 1, 2, \dots, 2^m)$$

értéksorozat, a hol a  $\Phi(A, A')$  függvények a fentebb bevezetett  $\Phi(\alpha, \beta)$  függvényekkel analog jelentéssel bírnak, vagyis a

$$\Phi(A, A') = A^{\varphi(\mathfrak{A})} - A'^{\varphi(\mathfrak{A})}$$

egyenlettel vannak értelmezve, míg  $\varphi(\mathfrak{A})$  a  $K$ -ra nézve ugyanazt a számosságot jelzi, mint  $\varphi(\alpha)$  a  $k$  testre nézve.

Valóban:  $\sqrt[\rho]{\bar{\rho}} \cdot \Phi(A_s, A'_s)$  a  $k$  testnek egész száma, mert tehetjük:

$$\begin{aligned} A_s &= \alpha_s + \beta_s \sqrt[\rho]{\bar{\rho}}, \\ A'_s &= \alpha_s - \beta_s \sqrt[\rho]{\bar{\rho}}, \end{aligned}$$

a hol  $\alpha_s, \beta_s$  a  $k$ -nak (nem szükségképen egész) számai;  $s$  mint-hogy a  $\rho$  függvény ismert kifejezése szerint:

$$\varphi(\mathfrak{A}_s) = \varphi(\mathfrak{A}'_s),$$

a binominális tétel adja:

$$\begin{aligned} \sqrt[\rho]{\bar{\rho}} \cdot \Phi(A_s, A'_s) &= \sqrt[\rho]{\bar{\rho}} \cdot \{(\alpha_s + \beta_s \sqrt[\rho]{\bar{\rho}})^{\varphi(\mathfrak{A}_s)} - (\alpha_s - \beta_s \sqrt[\rho]{\bar{\rho}})^{\varphi(\mathfrak{A}_s)}\} = \\ &= 2\rho \cdot R(\alpha_s, \beta_s), \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $A$ -nak vehetjük például  $K$ -nak azt az egész számát, a mely megfelel az  $\mathfrak{A}^H = (A)$  főideálnak, míg  $A'$ -nek  $A$  relativ-conjugáltját, a hol  $H$  a  $K$  testben foglalt *ideál-osztályok* száma (v. ö. DIRICHLET-DEDEKIND, l. c. 576. old.).



a mely egyenletben  $R$  az  $a_s, \beta_s$  argumentumoknak racionális egész kifejezése, racionális egész számú együtthatókkal. Másoldalról  $\sqrt{\varrho} \cdot \mathcal{O}(A_s, A_s)$  a  $K(\sqrt{\varrho}, k)$  testnek algebrai egész száma, és egyben a  $k$  testnek is száma, következésképp egész szám a  $k$  testben; q. e. d.

A  $\xi_s$  értékek (3)-at kielégítik; ezt a tényt egy minden részletében analog meggondolás mutatja, mint a minővel éltünk a II. tétel tárgyalásakor.

A  $\xi_s$ -ek mod.  $m$  egymásközt különbözők; mert, ha  $s \neq t$  mellett lehetne:

$$\xi_s \equiv \xi_t \pmod{m}$$

akkor —  $\mathfrak{P}$ -vel jelölven például az  $\mathfrak{A}_s$ -nek egy oly prim-ideál-faktorát, a mely  $\mathfrak{A}_t$ -ben nem lép fel, tehát a mely osztója  $\mathfrak{A}'_t$ -nek — az általános FERMAT-féle tétel adná, hogy

$$\xi_s \equiv \sqrt{\varrho} \cdot \{A_s^{\varrho}(\mathfrak{A}'_s) - A_s'^{\varrho}(\mathfrak{A}_s)\} \equiv -\sqrt{\varrho} \pmod{\mathfrak{P}}$$

$$\xi_t \equiv \sqrt{\varrho} \cdot \{A_t^{\varrho}(\mathfrak{A}'_t) - A_t'^{\varrho}(\mathfrak{A}_t)\} \equiv \sqrt{\varrho} \pmod{\mathfrak{P}}$$

azaz

$$2\sqrt{\varrho} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

avagy

$$4 \cdot \varrho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}'}$$

ellentétben feltevésünkkel, hogy t. i.  $m$  relativ-prim  $2$ -höz és  $\varrho$ -hoz.

Végül megjegyezvén, hogy a  $\xi_s$ -ek száma  $2^m$ , a IV. tétel teljességében be van bizonyítva.

\*

A megelőző kifejtésekhez még a következő megjegyzéseket szándékunk hozzáfűzni.

Miként ismeretes, a  $\mathfrak{P}$  ideálok ilyen alakra hozhatók:<sup>1</sup>

$$\mathfrak{P} = (\gamma, \xi + \sqrt{\varrho}) \tag{9}$$

ahol

$$\gamma = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}'$$

és

$$\xi^2 \equiv \varrho \pmod{\gamma} \tag{10}$$

---

<sup>1</sup> V. ö. HILBERT. I. c., 5. §.

a honnan világos, hogy a  $\mathfrak{P}$  ideál *explicit* előállításához vezető legdirektebb mód abban áll, hogy a (10) kongruencia egyik gyökével megalkotjuk a (9) kifejezést. Ebből a nézőpontból tekintve a kérdést — miután az  $m$ -nek minden egyes  $\mathfrak{P}$  faktórára felírtuk a (9) összefüggést, és pedig *ugyanavval* a közös  $\xi$  értékkel, a mely egyszersmind a (3) *kongruenciának is valamelyik megoldása* —, megelőző eredményeinket, mint e (9) relációknak az épen leírt módon választott  $\xi$  argumentumokra való feloldását, *inverzóját* foghatjuk fel. Viszont tisztán elméleti szempontból egészen természetes, ha egy algebrai test prim-ideáljait mint e test legegyszerűbb elemeit tekintjük, a melyek már a testtel magával *a priori* adva vannak. Sőt ez a felfogás teljesen megfelel annak az alapnak, a melyre a racionális számok elmélete helyezkedik akkor, a midőn az egész számokat a prímszámok multiplikatív képződményeként reprezentálja. Ilyen értelemben mondhatjuk tehát, hogy formuláink a kérdés *adatai* által kifejezett, *valóságos* megoldásokat adnak.

A mi végezetre a 2-höz nem prim modulusokat illeti, ez az eset kivonja magát amaz elvek alól, a melyek föntebbi fejtegetéseink alapját alkották s így különleges vizsgálatot igényel; egyrészt azért, mert a  $\xi - 1$ ,  $\xi + 1$  tényezőknek lehet a 2-t osztó közös faktoruk; másrészt pedig, mivel azok a meg gondolások, a melyekkel a megelőzőkben éltünk, érvényüket veszítik, mihelyest a  $\varphi$ -függvény argumentumai egymáshoz nem relatív-primek. Úgy látszik, hogy a szóbanforgó esetben már az inkongruens megoldások *számának általános megállapítása* sem történhetik hosszadalmas megkülönböztetések nélkül.

# A GENTISINSAV DEPSIDJEINEK SYNTHESISISE.<sup>1</sup>

MAUTHNER NÁNDOR-tól.

Előző vizsgálataimban a gallussav, protocatechusav, vanillinsav, paraoxybenzoesav és pyrogallolcarbonsav depsidjeivel foglalkoztam<sup>2</sup> és ezzel kapcsolatban érdekléltem a gentisinsav depsidjeinek synthesisét is megkísérelni. E célból kiindulási test gyanánt az általam feltalált<sup>3</sup> dimethylgentisinsavchloridot választottam és ennek segélyével a legfontosabb phenolcarbonsavakból azok didepsidjeit állítottam elő a fentebbi eljárások szerint. Míg a dimethylgentisinsavchlorid kondenzációját paraoxybenzoesavval, metaoxybenzoesavval, vanillinsavval és syringasavval vizes, lugos közegben eszközölhetjük, addig a monomethylgentisinsav és 2, 3- oxynaphthoesav kondenzációját egy tertiar bazis segélyével indifferens oldószerben végezzük. A 3, 6-dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoesavból phosphorpentachloriddal a megfelelő savchloridot nyerjük és ezt glükózzal kondenzálva a penta- (3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoyl-) glükóz képződik. Az így előálló termék amorph és acetylentetrachloridos oldatban jobbra csavaró

$$[\alpha]_D^{19} = +24.09^\circ.$$

Annál az érdeknél fogva, a mellyel újabban a phenolcarbonsavaknak glükózzal képezett esterszerű kondenzációs termékei bírnak,

---

<sup>1</sup> A budapesti kir. m. tud. egyetem II. chemiai intézetében készült dolgozat.

<sup>2</sup> Mathem. és Természettudományi Értesítő 29. köt. (1911), ugyanott 30. köt. (1912), ugyanott 31. köt. (1913), ugyanott 32. köt. (1914), Journ. p. chem. (2) 84,140 (1910), ugyanott (2) 85,308 (1912), 87,409 (1913) 89,302 (1914).

<sup>3</sup> Ber. 42,193 (1909).

fontos a fentebbi vegyülettypus új képviselőinek synthetikus előállítása, hogy tulajdonságaikat felismerjük és hasonló természetes anyagokéval összehasonlitsuk.

### KISÉRLETI RÉSZ.

#### 3, 6- dimethoxybenzamid.

Az alábbi vegyületek előállítására szükséges dimethylgentisinsavat legelőször TIEMANN és MÜLLER<sup>1</sup> a gentisinaldehydnek oxydációja útján nyerte. Később GRAEBE és MARTZ<sup>2</sup> egy kényelmesebb előállítási módszert dolgoztak ki a carbonsavnak dimethylsulfattal való alkylációja által. Nagyobb mennyiségű æthersav előállítását hasonlóképen végezhetjük, mint azt a pyrogallolcarbonsavnál előzőleg<sup>3</sup> ismertettem. Egy literes jenai lombikban 50 g. gentisinsavat 60 g. natriumhydroxydból és 300 cm<sup>3</sup> vízből készített oldatban feloldunk, szobahőmérsékletre lehütjük és külső hűtés közben 50 cm<sup>3</sup> dimethylsulfattal össze-rázzuk. A reakciókeveréket 15 perczig rázzuk, miközben a dugót többször kinyitjuk. Ezután újból 50 cm<sup>3</sup> dimethylsulfatot adunk hozzá és a fentebbi módon 5 perczig rázzuk. A reakció befejezésére 2 óra hosszat visszafolyó hűtőcsővel forraljuk, aztán 10 g. szilárd natriumhydroxydot adunk hozzá és újból 2 óra hosszat hevítjük. A lehülés után a reakciókeveréket hig sósavba öntjük, a kiváló savat leszűrjük és vízzel jól kimossuk. Az így nyert terméket 36 g. natriumhydroxydban és 250 cm<sup>3</sup> vízben feloldjuk, ezután pedig a fentebbi módon dimethylsulfattal kezeljük. A sósavval kicsapott terméket 50 g. calciumoxydból és 500 cm<sup>3</sup> vízből készített mésztejjel egy óra hosszat vízfürdön hevítjük, miközben többször összerázzuk. Kihülés után szűrünk és a szüredékben a dimethylgentisinsavat sósavval kicsapjuk. A vegyületet leszűrjük, vízzel kimossuk és agyagtányéron kiszáritjuk. Hozadék 28.3 g.

E savnak chloridjává való átalakítását már előzőleg<sup>4</sup> ismer-

<sup>1</sup> Ber. 14, 1993 (1881).

<sup>2</sup> Ann. chem. 340, 219.

<sup>3</sup> Loc. cit.

<sup>4</sup> Ber. 42, 193 (1909).

tettem. Ily módon, kétszeri vacuumdesztilláció után 30·3 g. savból középső frakció gyanánt 28·4 g. chloridot nyerünk, a mely 15 mm. nyomás alatt 162 C°-on forr. A savchlorid már az első desztillációnál fehér kristályokká dermedt meg, míg előzőleg e chloridot csak olaj alakjában nyertem. Akkori kísérleteimet egy igen meleg nyár alkalmával végeztem és daczára annak, hogy hűtőkeverék segítségével a terméket lehűtöttem, az mégis csak olajszerű maradt. A most szilárd állapotban nyert chloridot gyorsan petroleumætherből átkristályosítva, az 53—54 C°-on olvadó tütkben válik ki. Ez a meghatározás csak megközelíthető, mert a chlorid a levegőn megváltozik. Közelebbi jellemzése czéljából még az amidet és az anilidet is előállítottam. 0·8 g. savchloridot fölös tömény ammoniával öntünk le és félóra hosszat állni hagyjuk. A terméket leszűrjük, vízzel jól kimossuk és vízfürdön szárítjuk. Benzol és petroleumæther keverékéből átkristályosítva, szintelen tüket képez, a melyek 141—142 C°-on olvadnak. Hozadék 0·5 g.

0·1386 g. anyag adott: 0·3024 g. CO<sub>2</sub>-t, 0·0768 g. H<sub>2</sub>O-t.

0·0999 g. anyag adott: 6·6 cm<sup>3</sup> nitrogént (20°, 75·7 mm.).

C<sub>9</sub>H<sub>11</sub>O<sub>3</sub>N képlet alapján a számított értékek: C=59·63%, H=6·12%, N=7·74%.

Kísérletileg talált értékek: C=59·51%, H=6·20%, N=7·67%.

Az amid könnyen oldódik alkoholban, acetonban, benzolban, ligroinban és meleg ætherben. Petroleum-ætherben a vegyület nehezen oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzanilid.

2 g. savchloridot 20 cm<sup>3</sup> ætherben oldunk és 1 g. anilin ætheres (20 cm<sup>3</sup>) oldatával elegyítjük, miközben az anilid kiválik. Két órai állás után az æther elpárolgott, ekkor a visszamaradó anyagot leszűrjük, vízzel kimossuk és agyagtányéron szárítjuk ki. Ligroinból átkristályosítva, szintelen tüket képez, a melyek 98—99 C°-on olvadnak. Hozadék 1·8 g.

0·1328 g. anyag adott: 0·3402 g. CO<sub>2</sub>-t és 0·0728 g. H<sub>2</sub>O-t.

0·1164 g. anyag adott: 5·4 cm<sup>3</sup> nitrogént (19°, 752 mm.).

$C_{15}H_{15}O_3N$  képlet alapján a számított értékek:  $C=70.00\%$ ,  $H=5.88$ ,  $N=5.45\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=69.87\%$ ,  $H=6.10\%$ ,  $N=5.37\%$ . Az anilid könnyen oldódik alkoholban, acetonban, benzolban, ligroinban és meleg ætherben. Petroleumætherben a vegyület nehezen oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoésav.

2.2 g. paraoxybenzoésavat feloldunk 1.8 g. natriumhydroxydból, 20 cm<sup>3</sup> vízből és 10 cm<sup>3</sup> acetonból készített oldatban és —10 C°-ra hűtjük le. Ezután 3.5 g. savchlorid acetonos (20 cm<sup>3</sup>) oldatát 5 percz alatt erős rázás közben lassan hozzáadagoljuk. A reakcióelegyet 15 perczig állni hagyjuk, majd 10 cm<sup>3</sup> tömény sósav és 250 cm<sup>3</sup> víz keverékébe öntjük, miközben a depsid kiválik. Az oldatot félóra hosszat jeges vízben állni hagyjuk, a kivált terméket megsűrjük, vízzel jól kimossuk és agyagtányéron szárítjuk. Hozadék 3.5 g. A nyers terméket 100 cm<sup>3</sup> híg natriumcarbonatoldatban feloldjuk, az oldatot szűrjük és sósavval újból kicsapjuk. Rövid állás után a terméket leszűrjük, vízzel kimossuk és híg acetonból kristályosítjuk át.

0.1387 g. anyag adott: 0.3692 g. CO<sub>2</sub>-t, 0.0681 g. H<sub>2</sub>O-t.

$C_{16}H_{14}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=63.53\%$ ,  $H=4.70\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=63.45\%$ ,  $H=4.80\%$ . A didepsid szintelen tüket képez, a melyek 161—162 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, acetonban, benzolban és meleg ætherben. Ligroinban és petroleumætherben a termék oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoésavmethylester.

2.9 g. paraoxybenzoésavmethylestert 1 g. natriumhydroxyd, 20 cm<sup>3</sup> víz és 10 cm<sup>3</sup> aceton keverékében feloldunk és —10 C°-ra lehűtjük. Ezután 3.5 g. savchloridot 20 cm<sup>3</sup> acetonban oldunk és rázás közben 5 percz alatt hozzáadagoljuk. A reakcióelegyet 15 perczig állni hagyjuk és 300 cm<sup>3</sup> vízbe öntjük, miközben az

ester kiválik. Az oldathoz egynéhány csepp hig kalilugot adunk és 1—2 óra hosszat jeges vízben állni hagyjuk. Az estert le-szűrjük, vízzel kimossuk és agyagtanyéron szárítjuk. Hozadék 3·9 g. A nyersterméket hig methyllalkoholból kristályosítjuk át és csontszénnel szintelenítünk. A vegyület szintelen tükben kristályosodik, a melyek 72—73 C-on olvadnak.

0·1424 g. anyag adott: 0·3375 g.  $CO_2$ -t és 0·0641 g.  $H_2O$ -t.

$C_{17}H_{16}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=64\cdot53\%$ ,  
 $H=5\cdot10\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=64\cdot63\%$ ,  $H=5\cdot04\%$ .

Az ester könnyen oldódik alkoholban, acetonban, benzolban és ligroinban. Petroleumætherben a vegyület nehezen oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-vanillinsav.

A kondenzáció eszközlésére 2·9 g. vanillinsavat feloldunk 1·8 g. natriumhydroxydból, 20 cm<sup>3</sup> vízből és 5 cm<sup>3</sup> acetontól készített oldatban. Az oldatot 10 C°-ra lehütjük és 5 perc alatt 3·5 g. savchlorid acetonos (20 cm<sup>3</sup>) oldatát erős rázás közben hozzáadagoljuk. Negyedórai állás után az oldatot 10 cm<sup>3</sup> tömény sósav és 250 cm<sup>3</sup> víz keverékébe öntjük, miközben a depsid kiválik. Az oldatot egy óra hosszat jeges vízben állni hagyjuk, megszűrjük, a csapadékot vízzel kimossuk és agyagtanyéron szárítjuk ki. A nyers depsidet 10 g. natriumcarbonat és 100 cm<sup>3</sup> víz keverékében feloldjuk, megszűrjük és a szüredékhez óvatosan hig sósavat adunk. Hozadék 3·8 g. Hig acetontól átkristályosítva a depsid szintelen tüket képez, a melyek 176—177 C°-on olvadnak.

0·1274 g. anyag adott: 0·2864 g.  $CO_2$ -t és 0·0541 g.  $H_2O$ -t.

$C_{17}H_{16}O_7$  képlet alapján a számított értékek:  $C=61\cdot42\%$ ,  
 $H=4\cdot86\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=61\cdot31\%$ ,  $H=4\cdot75\%$ . A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben, acetonban és benzolban. Petroleumætherben a termék oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-vanillinsavmethylester.

Feloldunk 3·2 g. vanillinsavmethylestert, 1·1 g. natriumhydroxyd, 20 cm<sup>3</sup> víz és 5 cm<sup>3</sup> aceton keverékében. Az oldatot —10 C°-ra lehütjük és 3·5 g. savchlorid ætheres oldatát (20 cm<sup>3</sup>) lassacsán 5 perc alatt hozzáadagoljuk. Negyedórai állás után a reakciókeveréket 300 cm<sup>3</sup> vízbe öntjük, miközben az ester kiválik. Egynéhány csepp hig natronlúgot adunk hozzá és 2 óra hosszat jeges vízben állni hagyjuk. Ezután a kivált terméket leszűrjük, vízzel jól kimossuk és agyagtányéron kiszárítjuk. Hozadék 3·5 g. A nyersterméket hig methylalkoholból átkristályosítjuk és csontszénnel szintelenítjük.

0·1284 g. anyag adott: 0·2931 g. CO<sub>2</sub>-t és 0·0610 g. H<sub>2</sub>O-t.

C<sub>18</sub>H<sub>18</sub>O<sub>7</sub> képlet alapján a számított értékek: C=62·40%, H=5·24%.

Kísérletileg talált értékek: C=62·26%, H=5·32%. Az ester szintelen tükben kristályosodik, a melyek 113—114 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, acetonban, benzolban és ligroinban. Aetherben a termék csak nehezen oldódik. Meleg petroleumætherben a vegyület oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-metaoxybenzoosav.

1·8 g. natriumhydroxyd és 20 cm<sup>3</sup> víz keverékében feloldunk 2·2 g. metaoxybenzoosavat és az oldatot —10 C°-ra hütjük le. Ezután 3·5 savchloridot 20 cm<sup>3</sup> acetonban feloldunk és 5 perc alatt kis adagokban, rázás közben hozzácepegtetjük. Az oldatot 15 percig állni hagyjuk, majd 10 cm<sup>3</sup> tömény sósav és 250 cm<sup>3</sup> víz keverékébe öntjük. Félóra hosszat az oldatot jeges vízben állni hagyjuk, megsűrjük, a csapadékot vízzel kimossuk és agyagtányéron kiszárítjuk. Hozadék 3 g. A nyersterméket 100 cm<sup>3</sup> 10%-os natriumbicarbonatoldatban feloldjuk, megsűrjük és hig sósavval újból kicsapjuk. A depsidet hig acetonból átkristályosítjuk, miközben a termék szintelen, 140 - 141 C°-on olvadó tükben válik ki.

0·1453 g. anyag adott: 0·3379 g. CO<sub>2</sub>-t és 0·0623 g. H<sub>2</sub>O-t.



$C_{16}H_{14}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=63\cdot53\%$ ,  
 $H=4\cdot70\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=63\cdot43\%$ ,  $H=4\cdot79\%$ . A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben, acetonban, ligroinban és benzolban. Petroleumætherben a termék majdnem oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-metaoxybenzoesavmethylester.

A kondenzációt következőképen eszközöljük: 1 g. natriumhydroxydot feloldunk 20 cm<sup>3</sup> vízben és 10 cm<sup>3</sup> acetont adunk hozzá. A keverékben feloldunk 2·6 g. metaoxybenzoesavmethylestert, lehütjük  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra és 3·5 g. savchloridnak acetonos (20 cm<sup>3</sup>) oldatát 5 perc alatt lassacskán hozzáadagoljuk. Negyed-órai állás után az oldatot vízbe öntjük és jeges vízbe állítjuk, miközben az ester kiválik. Az oldathoz egynéhány csepp hig natronlúgot adunk és egynéhány órai állás után leszűrjük, vízzel kimossuk, majd agyagtányéron kiszárítjuk. Hozadék 2 g. Hig methylalkoholból átkristályosítva, szintelen tükben válik ki, a melyek 81—82  $^{\circ}\text{C}$ -on olvadnak.

0·1455 g. anyag adott: 0·3434 g.  $\text{CO}_2$ -t és 0·0678 g.  $\text{H}_2\text{O}$ -t.

$C_{17}H_{16}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=64\cdot53\%$ ,  
 $H=5\cdot10\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=64\cdot37\%$ ,  $H=5\cdot27\%$ . A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben, benzolban, ligroinban és acetonban. Petroleumætherben a termék nehezen oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl, 2, 3- oxynaphtoesav.

3·3 g. oxynaphtoesavat 70 cm<sup>3</sup> benzolban és 22 g. dimethylanilinben vízfürdön feloldunk. A szobahőmérsékletre lehűtött oldathoz 3·5 g. savchloridnak benzolos (25 cm<sup>3</sup>) oldatát öntjük és 3 óra hosszat állni hagyjuk. Az oldatot ezután többször hig kénsavval átrázzuk, majd egyszer vízzel és választótölcsériben a vizes oldattól elkülönítjük. Már az összerázás közben a kondenzációs termék egy része kiválik, míg legnagyobb része a benzolos oldat további állásakor kristályosodik ki. A további tisztítás céljából a savat kaliumhydrocarbonatban feloldjuk, megsűrjük

és sósavval újra kicsapjuk. A terméket ezután hig acetontól kristályosítjuk át. A kirázás közben kivált anyag súlya a tisztítás után 1·5 g. volt és a benzolos oldatból 1·6 g. tiszta terméket nyerünk.

0·1527 g. anyag adott: 0·3810 g.  $CO_2$ -t és 0·0637 g.  $H_2O$ -t.

$C_{20}H_{16}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=68\cdot16\%$ ,  $H=4\cdot58\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=68\cdot05\%$ ,  $H=4\cdot66\%$ . A depsid szintelen tűkben kristályosodik, a melyek előzőleg  $175\ C^\circ$ -on összezsugorodnak és ezután  $185\text{—}186\ C^\circ$ -on olvadnak. A termék könnyen oldódik alkoholban és acetontól. Benzolban a vegyület nehezen oldódik, ligroinban és petroleumætherben pedig majdnem oldhatatlan. Aetherben a vegyület csak igen nehezen oldódik.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-, 2, 3- oxynaphtoesavmethylester.

Az előbb ismertetett kondenzációs termék 1·7 g.-ját finomra porítjuk és 5 g. nitrosomethylurethanból előállított ætheres ( $50\text{ cm}^3$ ) diazomethanoldatot adunk hozzá, miközben egy hűtőkeverék segítségével erősen lehűtjük. Miután a kezdetben heves nitrogénfejlődés alább hagyott, a reakciókeveréket kiveszszük a hűtőkeverékből és egy napig állni hagyjuk. Az oldatlanul maradt estert leszűrjük és kaliumhydrocarbonatoldattal kezeljük. A terméket ezután agyagtányéron szárítjuk, majd benzol- és ligroin keverékéből kristályosítjuk át. Hozadék 0·8 g.

0·1320 g. anyag adott: 0·3331 g.  $CO_2$ -t és 0·0604 g.  $H_2O$ -t.

$C_{21}H_{18}O_6$  képlet alapján a számított értékek:  $C=68\cdot83\%$ ,  $H=4\cdot96\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=68\cdot82\%$ ,  $H=5\cdot12\%$ . Az ester szintelen tűket képez, a melyek  $150\text{—}151\ C^\circ$ -on olvadnak. A vegyület nehezen oldódik alkoholban és ætherben. A termék könnyen oldódik benzolban, ellenben nehezen ætherben. Ligroinban és petroleumætherben a termék majdnem oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-monomethylgentisinsav.

A fentebbi vegyület előállításához szükséges monomethylgentisinsavat gentisinsavból állítjuk elő GRAEBE és MARTZ<sup>1</sup> eljárása szerint.

3 g. monomethylgentisinsavat 50 cm<sup>3</sup> benzolban és 20 g. dimethylanilinben a vízfürdőn való hevítés közben feloldunk. Miután a keveréket közönséges hőmérsékletre újból lehűtöttük, 3·5 g. savchloridnak benzolos (25 cm<sup>3</sup>) oldatát adjuk hozzá és 3 óra hosszat állni hagyjuk. Ezután egynéhányszor a benzolos oldatot hig kénsavval átrázzuk, majd egyszer vízzel. A kondenzációs termék a benzolos oldatból rövid állás után kiválik. Leszűrjük, hig kaliumcarbonatoldattal kezeljük és agyagtányéron kiszáritjuk. Hozadék 1·8 g.

0·1074 g. anyag adott: 0·2414 g. CO<sub>2</sub>-t és 0·0463 g. H<sub>2</sub>O-t.

C<sub>17</sub>H<sub>16</sub>O<sub>7</sub> képlet alapján a számított értékek: C=61·42%, H=4·86%.

Kísérletileg talált értékek: C=61·31%, H=4·82%. Hig acetontól a depsid szintelen tűkben kristályosodik, a melyek 131—132 C°-on olvadnak. A vegyület könnyen oldódik alkoholban, ætherben, acetonban és benzolban. Ligroinban és petroleumætherben majdnem oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-syringasav.

3·5 g. syringasavat feloldunk 1·4 g. natriumhydroxyd, 20 cm<sup>3</sup> víz és 10 cm<sup>3</sup> aceton keverékében. A —10 C°-ra lehűtött oldathoz erős rázás közben 3·5 g. savchloridnak acetonos (20 cm<sup>3</sup>) oldatát adagoljuk. Negyedórai állás után az oldatot 10 cm<sup>3</sup> tömény sósav és 100 cm<sup>3</sup> víz keverékébe öntjük. Ezután félórát jeges vízben állni hagyjuk, megsűrjük és agyagtányéron kiszáritjuk. További tisztítás céljából hig natriumcarbonatoldatban feloldjuk, megsűrjük, sósavval újra kicsapjuk és hig acetontól átkristályosítjuk. Hozadék 3·8 g. Olvadás hőmérséklete 173—174 C°.

<sup>1</sup> GRAEBE u. MARTZ, Ann. Chem. 340, 219.

0·1689 g. anyag adott: 0·3684 g.  $CO_2$ -t és 0·0773 g.  $H_2O$ -t.

$C_{18}H_{18}O_8$  képlet alapján a számított értékek:  $C=59\cdot64\%$ ,  
 $H=5\cdot01\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=59\cdot49\%$ ,  $H=5\cdot12\%$ . A vegyület könnyen oldódik alkoholban, acetonban és benzolban. Aetherben és ligroinban a termék nehezen oldódik. Petroleumætherben a depsid majdnem oldhatatlan.

### 3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoesavchlorid.

22 g. 3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoesavat finomra poritunk és egy frakcionáló lombikban 50 cm<sup>3</sup> vízmentes chloroformmal leöntjük, majd 16 g. phosphorpentachloridot adunk hozzá. Többszöri átrázás közben a reakciókeveréket 20 perczig állni hagyjuk, miközben a phosphorpentachlorid legnagyobb része oldatba megy. A reakció bevégzésére a keveréket egy negyedórára még 70—80 C°-os vízbe helyezzük. Ezután az oldószert és a phosphorpentachloridot vacuumban előbb közönséges hőmérsékleten, majd 80—85 C°-on leszívadjuk. A visszamaradó anyagot kevés meleg tetrachlormethanban feloldjuk, megszűrjük és ligroinnal kicsapjuk. A kiváló kristályokat gyorsan leszűrjük és vacuumexsiccatorban phosphorpentoxyd felett kiszáritjuk. Az analysishez szolgáló anyagot még egyszer átkristályosítjuk. Olvadás hőmérséklete 107—108 C°. Hozadék 22 g.

0·1626 g. anyag adott: 0·3571 g.  $CO_2$ -t és 0·0600 g.  $H_2O$ -t.

0·2592 g. anyag adott: 0·1134 g.  $AgCl$ -t.

$C_{16}H_{13}O_5Cl$  képlet alapján a számított értékek:  $C=60\cdot00\%$ ,  
 $H=4\cdot06\%$ ,  $Cl=10\cdot93\%$ .

Kísérletileg talált értékek:  $C=59\cdot89\%$ ,  $H=4\cdot12\%$ ,  $Cl=10\cdot80\%$ . A chlorid igen nehezen oldódik aetherben. A vegyület tetrachlormethanban és benzolban igen könnyen oldódik, ellenben nehezebben petroleumætherben. Methylalkohollal hevítve az előbb ismertetett 3, 6- dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoesav-methylesterré alakul át, mely átalakulásból fentebbi szerkezete következik.

## Penta (3, 6. dimethoxybenzoyl-paraoxybenzoyl)-glükóz.

21 g. savchloridot<sup>1</sup> 25 cm<sup>3</sup> vízmentes chloroformban feloldunk, s 2·1 g. szárított és finomra megrostált  $\alpha$ -glükózt adunk hozzá. Ezután 8·1 g. gondosan kiszárított chinolinnal elegyítjük és 50 óra hosszat a rázógépen összerázzuk. A szőlőcukor eközben feloldódik és a reakció bevégezte után az oldatot 700 cm<sup>3</sup> metylalkoholba öntve, jeges vízbe állítjuk. Több órai állás után az oldatot megsűrjük és a terméket még egyszer meleg metylalkoholból átkristályosítjuk. Hozadék 6 g. Az analysishez szolgáló terméket alkohollal még egyszer tisztítjuk. Olvadás kömérséklete 92–93 C°.

0·1474 g. anyag adott: 0·3480 g. CO<sub>2</sub>-t és 0·0589 g. H<sub>2</sub>O-t.

C<sub>86</sub>H<sub>72</sub>O<sub>31</sub> képlet alapján a számított értékek: C=64·50%, H=4·50%.

Kísérletileg talált értékek: C=64·38%, H=4·43%. Az optikai analysist a vegyület acetylentetrachloridos oldatával végezzük. Az acetylentetrachloridot előzőleg higanynyal jól át-rázzuk.

A lemért anyag súlya=0·1798 g. Az oldat súlya=17·2356 g; sűrűségét  $d^{19}=1·5914$ -nek találtam. Egy decziméter hosszúságú csőben az oldat  $D$  fényben 19 C°-on  $a=+0·40^\circ$  csavaróképes-séget mutatott. Ennélfogva:

$$[\alpha]_D^{19} = +24·09^\circ.$$

A vegyület nehezen oldódik metylalkoholban. A termék igen könnyen oldódik chloroformban és benzolban. Ligroinban és petroleumætherben a termék igen nehezen oldódik.

E vizsgálat kísérleti részét MILDSCHÜTZ OTTO úr eszközölte.

A vizsgálatot különben folytatom.

<sup>1</sup> FISCHER u. FREUDENBERG, Ber. 452,718 (1912).

## SÍK ÉS TÉRBELI ALGEBRAI GÖRBÉK REÁLIS MENETEIRŐL.

Sz. NAGY GYULÁ-tól.

Egy síkbeli görbe indexének CH. A. SCOTT<sup>1</sup> után nevezzük a reális metszéspontok számának minimumát, melyekben a görbét egy tetszésszerű reális egyenes metszi. Ennek megfelelőleg egy térbeli görbe indexének nevezzük a reális metszéspontok számának minimumát, melyekben a görbét egy tetszésszerű reális sík metszi.

Egy algebrai görbe rendszáma, indexe és fajszáma között lehetséges kapcsolatot eddig két szerző vizsgálta az irodalomban: CH. A. SCOTT<sup>2</sup> és P. FIELD,<sup>3</sup> mindkettő csak síkbeli algebrai görbék esetén.

CH. A. SCOTT kimutatta, hogy minden egész  $n$  rendszámra nézve léteznek olyan nullad- vagy elsőfajú görbék, melyeknek van egy  $n-2$  indexű menetjük. Elsőfajú görbéknél azonkívül fölléphet még egy ovalis (null-indexű menet).

Ch. A. SCOTT ennek a tételnek általánosítását is kimutatta, amelyet következőképp fogalmazhatunk meg: minden egész  $n$  rendszámra nézve léteznek olyan  $p$ -ed fajú algebrai görbék, melyeknek van egy  $n-2 \left[ \frac{p+6}{4} \right]$  indexű menetjük, a hol a szögletes zárójel a közte foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

---

<sup>1</sup> On the Circuits of plane Curves. (Transactions of the Amer. Math. Society, Vol. 3., 1902, p. 388—398.)

<sup>2</sup> Idézett helyen.

<sup>3</sup> On the Circuits of a plane Curve (I. közlemény: Math. Ann. Bd. 67, p. 126—129., II. közlemény. Math. Ann. Bd. 69, p. 218—222.)

SCOTT tételeit a sík CREMONA-féle transformatióinak segítségével igazolja. Azok a görbék, melyekkel a kívánt típusokat előállítja, trigonalis görbék, vagyis olyan görbék, melyeken van egy lineáris  $g_3^1$  pontsorozat.

P. FIELD dolgozatának mindkét közleményében a görbék konstansainak kis variációját alkalmazza. Az első közleményben kimutatta, hogy *minden egész  $n$  rendszámra nézve léteznek olyan singularitás nélküli görbék, melyek egy  $n-4$  indexű menetből állanak*. P. FIELD dolgozatának második közleményében a következő tételt mondotta ki: *minden egész  $n$  rendszámra nézve léteznek oly  $p$ -ed fajú ( $1 \leq p \leq n-2$ ) görbék, melyeknek oly  $p$  görbemenetjük van, hogy az azokra vonatkozó indexek összege  $n-2$ . Azokon kívül lehet még egy ovalisuk*.

P. FIELD tételét a maga általánosságában nem mutatta ki, hanem csak speciális esetekre nézve, az általános esetre a bizonyítás menetét csak jelezte. Azok a görbék, melyekkel a kívánt típusokat előállítja, hyperelliptikusok.

Ebben a dolgozatban egy  $(m-2)$ -szeres ponttal bíró  $m$ -ed rendű (hyperelliptikus) oly görbék reális meneteiről és azok algebrai előállításáról mutatunk ki tételeket, melyeknek az  $(m-2)$ -szeres ponton kívül legfeljebb egyszerű kettőspontjaik vannak.

A kapott tételek alapján CREMONA-féle transformatiók segítségével mutatjuk ki sík és térbeli görbék indexeire a következő tételeket:

*Minden egész  $n$  rendszámra nézve léteznek oly  $p$ -ed fajú [ $0 \leq p \leq n-2$ ] síkgörbék, melyek  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$  indexű  $p+1$  görbemenetből állanak, bármily az*

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_p + i_{p+1} = n-2$$

*egyenletnek eleget tevő pozitív egészszámokat jelentsenek is az  $i$ -k, melyek közül egy zérus is lehet vagy egy görbemenet teljesen hiányozhatik.*

Térbeli görbékre nézve tételünk a következő:

*Minden  $n$  egészszámra nézve léteznek oly  $n$ -ed rendű  $p$ -ed fajú ( $0 \leq p \leq n-3$ ) algebrai térgörbék, melyek  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$  indexű  $p+1$  menetből állanak, a hol az  $i$ -k az*

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_p + i_{p+1} = n-2$$

*egyeneseknek elegettevő bármilyen pozitív egészszámokat jelenthetnek.*

Nevezzük egy síkbeli, illetőleg térbeli görbe egy menete *rendszerének* a reális metszéspontok számának maximumát, melyekben a görbemenetet egy tetszőszerinti reális egyenes, illetőleg sík metszi, akkor mindkét tételünkhöz még a következőket állíthatjuk: *az  $n-2$  indexű görbe összes görbemeneteinek rendszáma indexüknél kettővel nagyobb.*

## 1.

Legyen  $C_m$  egy oly  $m$ -ed rendű valós görbe, melynek egy  $m-2$  különböző érintővel bíró  $(m-2)$ -szeres pontja van és azonkívül legfeljebb egyszerű kettőspontjai vannak.

Az  $(m-2)$ -szeres pontot a következőkben  $O$ -val fogjuk jelölni, az  $O$ -ból a  $C_m$  görbéhez húzható érintőket pedig  $o$  érintőknek fogjuk nevezni. A  $o$  érintők a  $C_m$  görbét  $O$ -n és az érintésponton kívül nem metszik, az  $(m-2)$ -szeres pont érintőivel csak akkor eshetnek össze, ha azok inflexiós érintők. Minthogy föltételünk szerint a  $C_m$  görbének  $O$ -n kívül egyszerű kettőspontjai vannak, azért a  $o$  érintők különböznek a  $O$  pontból a kettőspontokhoz húzható egyenesektől.

Legyen a  $C_m$  görbe kettőspontjainak száma  $d$ , akkor fajtszáma  $p = m - 2 - d$  és a  $o$  érintők száma  $2p + 2 = 2(m - 1 - d)$ .

Minthogy egy  $O$ -n keresztülmenő egyenes a  $C_m$  görbét ( $O$ -n kívül) legfeljebb két pontban metszi, azért ha egy  $O$ -n keresztülmenő valós pontokban metsző egyenest egy  $o$  érintőn kevéssel átfogatunk, az az  $O$ -n kívül a görbét nem fogja valós pontokban metszeni. Ebből következik, hogy két szomszédos  $o$  érintő szögterén belül a  $C_m$  görbének csak egy görbemenete fekehetik, a melynek a szög szárjai érintői. A görbemenet a csúcpszögterbe csak akkor nyúlhatik át, ha az  $O$  pont a görbemeneten fekszik.

Az  $O$  pontból egy görbemenethez húzható reális  $o$  érintők száma csak páros lehet. Forgassunk meg ugyanis  $O$  körül egy metsző egyenest bizonyos helyzetéből kiindulólág  $\pi$  szöggel. Ez alatt az egyenes leírja az egész  $O$  sugársort. Az  $O$ -n keresztülmenő egyenesnek a fölvett görbemenettel való reális metszéspontjainak száma akkor és csakis akkor változik meg, ha az



egyenes a görbemenet egy reális  $o$  érintőjén keresztülfordul (a változás ekkor 2 valós metszéspont eltűnése vagy föllépése). Minthogy egy félfordulat megtétele után a görbemenettel való reális metszéspontok száma ugyanaz marad, ennél fogva az egyenesnek páros számszor kellett reális  $o$  érintőn keresztül fordulnia, vagyis az  $O$ -ból a görbemenethez húzható reális  $o$  érintők száma páros.<sup>1</sup>

Ezek alapján tehát áll a következő tétel: egy  $C_m$  görbe egy görbemenetjéhez  $O$ -ból null vagy két reális  $o$  érintő húzható. A görbemenethez nem megy reális  $o$  érintő, ha minden  $O$ -n keresztülmennő egyenes a görbemenetet ( $O$ -n kívül) reális pontban vagy pontokban metszi; két reális  $o$  érintő megy a görbemenethez, ha  $O$ -n keresztül megy oly egyenes, mely a görbemenetet nem metszi reális pontokban.

Az előzőkből következik, hogy, ha mind a  $2(m-1-d)$   $o$  érintő reális, akkor a  $C_m$  görbének  $m-1-d = p+1$  különböző menetje van, tehát valamennyi menetje valós. A tétel megfordítása is igaz, vagyis akkor, a mikor egy  $C_m$  ( $p > 1$ ) görbe összes menetjei valósak, az összes  $o$  érintők valósak. Egy  $O$ -n keresztülmennő egyenes u. i. a  $C_m$  görbét  $O$ -n kívül két pontban metszi, tehát legfeljebb két menetet metszhet  $O$ -n kívül, a többit nem metszheti, ennél fogva azokhoz reális  $o$  érintők húzhatók. Egy ilyen reális  $o$  érintő nem metszheti a többi menetet, tehát az először tekintetbe vett egy vagy két menethez szintén reális  $o$  érintők húzhatók.

Általánosabban: ha egy  $C_m$  görbe  $2(m-1-d)$  számú  $o$  érintője közül  $2h$  ( $h > 0$ ) valós, akkor a görbemenetek száma  $h$ , és megfordítva, ha a görbemenetek száma  $h$  ( $h > 2$ ), akkor a reális  $o$  érintők száma  $2h$ .

Az  $O$  pont a  $C_m$  görbemenetjéhez viszonyítva háromféle helyzetet foglalhat el:  $O$  a görbemeneten nem fekszik rajta, a görbemenetnek egyszerű pontja, vagy végül kettőspontja. Az első és a harmadik esetben a görbemenet páros, a második esetben páratlan.

<sup>1</sup> A bizonyításnál alkalmazott gondolatmenet általánosabb tétel levezetésére szolgálhat. L. «Negyedrendű másodfajú görbéről» cz. dolgozatomat. Math. és Phys. Lapok, 1915. évf. (sajtó alatt).

Ezek után reátérünk  $C_m$  görbék algebrai előállítására, a mivel kimutatjuk, hogy a vizsgált  $C_m$  görbék léteznek. Először oly  $C_m$  görbéket fogunk vizsgálni, a melyekre nézve  $d = 0$ , s azután szólunk olyanokról, melyeknek kettőspontjaik vannak.

Az

$$U_{m-2}(x, y) \cdot z^2 + U_m(x, y) = 0 \quad (1)$$

egyenlet, a melyben  $U_{m-2}$  és  $U_m$  az  $x$  és  $y$ -nak közös osztó nélküli homogén  $(m-2)$ -ed, illetőleg  $m$ -ed fokú formái, egy  $C_m$  görbét állít elő.

Abban az esetben, ha  $C_m$ -nek nincsenek kettőspontjai, az  $U_{m-2}$  és az  $U_m$  lineáris tényezői, mind különböznek egymástól.

Az  $O = (0, 0, 1)$  pontból kiinduló  $o$  érintőket a

$$U_{m-2}(x, y) \cdot U_m(x, y) = 0 \quad (2)$$

egyenlet állítja elő.

Az  $O$  pont érintői az (1) egyenlet miatt mind inflexiós érintők, melyeket az

$$U_{m-2}(x, y) = 0$$

egyenlet állít elő, ennél fogva valamennyi  $o$  érintő. A többi  $m$  számú  $o$  érintő érintéspontjai a  $z = 0$  egyenesen fekszenek.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Imént említett dolgozatomban geometriai módszerrel kimutattam, hogy kettős ponttal bíró valamely negyedrendű görbének akkor és csakis akkor van oly involutorius, centrális collineatiója, a mely önmagába viszi át, ha a kettőspont két érintője inflexiós érintő.

Ennek általánosításaképpen a következő tételt lehet kimutatni: egy  $C_m$  görbének akkor és csakis akkor van önmagába átvivő involutorius centrális collineatiója, ha az  $O$  pont  $m-2$  érintője inflexiós érintő. Az involutorius centrális collineatio centruma az  $O$  pont, a centrumból a görbéhez húzható  $O$ -n kívül érintők érintéspontja ia collineatio tengelyén fekszenek.

Egy  $C_m$  görbe egyenlete ugyanis

$$U_{m-2}(x, y) \cdot z^2 + U_{m-1}(x, y) \cdot z + U_m(x, y) = 0$$

alakban írható, a hol  $U_k(x, y)$   $x$  és  $y$ -nak  $k$ -ad fokú homogén függvénye. Hogy ezt a görbét a

$$\varrho x' = x, \varrho y' = y, \varrho z' = -z$$

involutorius centrális collineatio önmagába vigye át, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$U_{m-1}(x, y) \equiv 0$$

legyen. Ezzel kimondott tételünk igazolva van. (V. ö. CLEBSCH-LINDEMANN: Vorlesungen über Geometrie Bd. I. (1876) p. 720.)

Ha a (2) egyenlet  $2h$  számú lineáris tényezője valós koeficienssekkel bir, akkor a  $C_m$  görbének  $h$  görbemenetje van; ha valamennyi tényező valós, akkor a  $C_m$  görbének  $p + 1 = m - 1$  görbemenetje van.

Hogy a görbemenetek párosak-e vagy páratlanok, az az  $U_{m-2} = 0$  egyenletek által előállított  $o$  érintők kölesönös helyzetéből dönthető el. Olyan görbemenet, melynek mindkét érintője a  $U_{m-2} = 0$  vagy pedig mindkét érintője a  $U_m = 0$  egyenesei közé tartozik, páros. Az első esetben  $O$  a görbemenet kettőspontja, a második esetben pedig a görbemenetnek nem pontja, tehát minden  $O$ -n keresztülmenő egyenes és így minden egyenes a görbemenetet páros számú pontban metszi, azaz a görbemenetnek páros. Ha egy görbemenetnek csak egyik érintője tartozik az  $U_{m-2} = 0$  egyeneseihez, a másik az  $U_m = 0$  egyenesei közé tartozik, akkor  $O$  a görbemenetre nézve egyszerű pont, ennél fogva az  $O$ -n keresztülmenő egyenesek a görbemenetet 1 vagy 3 pontban metszik ( $O$ -t is beszámítva), a görbemenet tehát páratlan.

Ha tehát az  $U_m = 0$  két szomszédos reális  $o_1$  és  $o_3$  egyenesé közé az  $U_{m-2} = 0$  egyetlen  $o_2$  reális egyenesé esik, akkor vagy az  $o_1, o_2$ , vagy pedig az  $o_2, o_3$  egy páratlan menetnek két  $o$  érintője.

Ily módon, ha az  $U_m = 0$ -nak  $m - 2$  egymásra következő reális egyenesé elválasztja az  $U_{m-2} = 0$ -nak  $m - 2$  reális egyenesét, akkor a  $C_m$  görbének  $m - 2$  páratlan menetje van. Ezenkívül még egy  $O$ -n kívül fekvő páratlan menetje van, ha az  $U_m = 0$  két utolsó egyenesé is valós, ellenben más menet nem létezik, ha az a két egyenes képzetes.

Míthogy minden páratlan menetet minden egyenes metsz legalább egy pontban, azért az így előállított  $m$ -ed rendű,  $p = m - 2$ -ed fajú görbét minden egyenes legalább  $m - 2$  reális pontban metszi. Ennél fogva az így előállított  $C_m$  görbe  $m - 2$  egy-indexű görbemenetből áll, a melyhez még egy null-indexű menet csatlakozhatik. Következik ez abból, hogy egy algebrai görbe indexé legalább is 2-vel kisebb rendszámánál.

Könnyen előállíthatjuk az olyan kettőspontnélküli  $C_m$  görbe egyenletét is, melynek valamennyi görbemenete páros. Ekkor

$m$ -et párosnak kell föltételeznünk s az  $U_{m-2}$ -t és  $U_m$ -et úgy kell megválasztanunk, hogy az  $U_{m-2} = 0$  egymásra következő reális egyenesekből álló  $\frac{m-2}{2}$  egyenespárja elválaszsa az  $U_m = 0$ -nak hasonlóképen egymásra következő  $\frac{m-2}{2}$  reális egyenespárját. Hogy  $C_m$  a kívánt tulajdonságú legyen, ahhoz még csak az szükséges, hogy az  $U_{m-2} = 0$  két egymástól el nem választott egyenes egy görbemenetnek legyen két  $o$  érintője, vagyis más szóval hogy e két egyenes közé eső egyenesek egy görbemenetet valós pontokban messenek. Ennek a követelésnek meg tudunk felelni. Ha  $U_m$  és  $U_{m-2}$ -t úgy választjuk meg, hogy az általuk előállított egyenesek a kívánt helyzettel birjanak, akkor az

$$U_{m-2}(x, y) \cdot z^2 + U_m(x, y) = 0$$

és

$$U_{m-2}(x, y) \cdot z^2 - U_m(x, y) = 0$$

egyenletek közül az egyik oly  $C_m$  görbét állít elő, melynek  $p = m - 2$  páros menetje van, míg a másik  $p$  páratlan menettel bíró  $C_m$  görbe egyenlete. Ezeken kívül még egy páros menet lép föl, ha az  $U_m = 0$  két utolsó egyenes is valós; ellenben hiányzik, ha az a két egyenes képzetes.

Hasonló gondolatmenettel igen változatos  $C_m$  görbéket állíthatunk elő, melyeknél a görbemenetek száma, azok páros és páratlan volta különböző.

Olyan  $C_m$  görbéket is tudunk előállítani az (1) alatti egyenlet alakjában, melyeknél az  $O$  pont érintői között páronként egyező is vannak s azonkívül a  $C_m$  görbének  $O$ -n kívül fekvő kettőspontjai vannak. Az

$$U_{m-2-2d_1}(x, y) \cdot V_{d_1}^2(x, y) z^2 + U_{m-2d_2}(x, y) \cdot V_{d_2}^2(x, y) = 0$$

egyenlet, a hol az  $U$  és  $V$  függvények  $x, y$ -nak annyiadfokú homogén függvényei, mint indexük mutatja és a hol az

$$U_{m-2-2d_1} \cdot V_{d_1} \cdot U_{m-2d_2} \cdot V_{d_2}$$

függvény lineáris tényezői mind egymástól különbözők, oly  $C_m$  görbét állít elő, melynek fajszáma  $p = m - 2 - (d_1 + d_2) = m - 2 - d$ .

A (3) egyenletben  $U_{m-2-2d_1}$  ill.  $U_{m-2d_2}$  veszik föl azt a

szerepet, a melyet  $d=d_1+d_2=0$  esetben az  $U_{m-2}$  illetőleg  $U_m$  játszottak. A

$$U_{m-2-2d_1} \cdot U_{m-2d_2} = 0 \quad (4)$$

egyenlet lineáris tényezői állítják elő a  $o$  érintők egyenletét. Ezek közül az  $U_{m-2-2d_1}=0$  egyenlet azokat az  $o$  érintőket állítja elő, a melyek  $O$  pontban érintenek, az  $U_{m-2d_2}=0$  pedig oly  $o$  érintőket állít elő, melyeknek érintéspontjai a  $z=0$  egyenesen fekszenek.

Ha  $V_{d_1}(x, y)$  nem konstans, akkor az  $O$ -n keresztülmenő páratlan illetőleg páros menetek között van olyan, melynek  $O$ -ban nem egyszerű kettőspontja, illetőleg egyszerű pontja van, hanem magasabb singularitása. Keletkezésükről fogalmat szerezhetünk, ha a  $V_{d_1}^2$  egy lineáris tényezőjének négyzetét, mint két igen közeli  $o$  érintő egyenlete határértékének tekintjük.  $O$ -ban tehát a magasabb singularitás úgy keletkezik, hogy egy menet egyik  $o$  érintőjével a szomszédos menet szomszédos  $o$  érintőjét összeejtjük, föltéve, hogy mindkettő  $O$ -ban érint. A második menet második  $o$  érintőjével a harmadik menet szomszédos  $o$  érintőjét összeejtjük, föltéve, hogy ez a két  $o$  érintő is  $O$ -n átmenő inflexiós érintő, és így tovább. Ily módon 2, 3... menet helyett egyetlen menet lép föl, a melynek  $O$ -ban fellépő singularitását úgy akarjuk a következőkben fölfogni, hogy egy  $O$ -n keresztülmenő menet  $O$ -ban levő kettőspontjához, illetőleg egyszerű pontjához még 1, 2, ... kettőspont járul. A  $V_{d_1}=0$  egyenlettel előállított egyeneseket úgy foghatjuk föl, mint az  $O$  pontból azokhoz a kettőspontokhoz induló egyeneseket, melyek az egyes görbemeneteken fekvő  $O$  (egyszerű vagy kettős) ponthoz hozzájárulnak.

A  $V_{d_2}=0$  pedig azoknak az  $O$ -n keresztülmenő egyeneseknek az egyenlete, melyek  $O$ -ból kivülről fekvő kettőspontokhoz mennek. Ezek a kettőspontok a  $z=0$  egyenesen fekszenek. Ezek szerint tehát a

$$V_{d_1} \cdot V_{d_2} = 0 \quad (5)$$

egyenlet állítja elő azokat az egyeneseket, a melyek  $O$ -ból az  $O$ -ra eső  $d_1$  és az azon kívül fekvő  $d_2$ , összesen  $d=d_1+d_2$  kettőspontokhoz mennek.

Ugyanazok a megfontolások, melyeket az (1) egyenlettel előállított  $C_m$  görbéhez fűztünk, változtatás nélkül vagy nagyon csekély változtatással a (3) alatti egyenlettel előállított  $C_m$  görbére is állanak. Így például a (4) alatti egyenlet egyeneseseinek helyes megválasztásával a (3) egyenlettel is elő lehet oly  $C_m$  görbét állítani, a melynek  $p$  páros menete van, a melyekhez még hozzájárul egy páratlan menet, ha  $m$  páratlan, vagy hozzájárulhat még egy páros menet, ha  $m$  páros stb.

A  $d$  számú kettőspont a  $C_m$  görbemenetjein különbözőképen helyezkedhetik el. Előállíthatunk oly görbemenetet, a melyen  $d' \leq d$  valós kettőspont helyezkedik el ( $O$ -hoz hozzájárulván, vagy  $O$ -n kívül); csak úgy kell az (5) egyenlettel előállított  $d$  egyenest megválasztanunk, hogy azok közül  $d'$  reális egyenes essék a görbemenet két  $o$  érintőjén belül.

Hasonlóképen előállíthatunk olyan  $C_m$  görbéket, melyek egyik menetjén  $d_1$ , a másikon  $d_2$ , a harmadikon  $d_3$  stb. valós kettőspont fekszik ( $d_1 + d_2 + d_3 + \dots \leq d$ ).

Egyszerűség és egyöntetűség szempontjából a következőkben csak az oly  $C_m$  görbékkel fogunk foglalkozni, a melyeknek összes menetei párosak.

Könnyebb kifejezhetőség szempontjából nevezzük egy ilyen  $C_m$  görbén egy görbemenet oly legkisebb páros, illetőleg páratlan részét, melyet minden  $O$ -n keresztülmenő egyenes null vagy két reális pontban metsz, a páros menet *zárt*, illetőleg *nyílt* görbéjének. Ezekről világos fogalmat szerezhethetünk magunknak, ha a  $V_{a_1} \cdot V_{a_2}^2 = 0$  összeeső egyenespárjait egymástól igen kevésbé különböző egyenespároknak tekintjük. Ily módon a *zárt*, illetőleg *nyílt* görbe a kettőspontokkal nem bíró  $C_m$  görbe páros, illetőleg páratlan menetének felel meg.

Ha egy páros menet  $o$  érintői  $o_1$  és  $o_2$  (melyek tehát mindkettőn az  $U_{m-2-2a_1} = 0$  vagy az  $U_{m-2a_2} = 0$  egyeneseseihez tartoznak), és azon a páros meneten fekvő kettőspontokhoz  $O$ -ból kiinduló egyenesek  $o_1$ -től  $o_2$ -ig rendre  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{d'}$  ( $d' \leq d$ ) jelzésűek, akkor a páros görbemenet annyi *zárt* görbéből áll, a hányszor az

$$o_1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{d'}, o_2$$

egyenesek sorjában két oly egyenes következik egymásután, me-

lyek mindketteje az  $U_{m-2-2d_1} \cdot V_{d_1} = 0$  vagy az  $U_{m-2d_2} \cdot V_{d_2} = 0$  egyeneseihez tartozik és annyi nyílt görbéből áll, a hányszor az nem következik be. A nyílt görbék száma nyilvánképen páros.

A föntiek alapján bebizonyítottunk tekinthetjük a következő tételt: *minden  $m$ -re nézve léteznek oly reális  $p=m-2-d$  fajú (egy  $(m-2)$ -szeres ponttal bíró)  $C_m$  algebrai síkgörbék, melyeknek első menete  $d_1+1$ , második menete  $d_2+1$ , a harmadik  $d_3+1$  stb. zárt görbéből áll, melyek közül az egyikben esetleg 2 zárt görbe helyett 2 nyílt görbe léphet föl, bármilyen a*

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots = d$$

*egyenletnek eleget tevő nem negatív egész számokat jelentsenek is a  $d-k$ .*

A tétel igaz marad akkor is, ha  $d$  számú kettőspont közül  $2h$  képzetes, a mikor az előbbi egyenlet jobboldalán  $d$  helyett  $d-2h$  teendő.

## 2.

Ebben a pontban az előbbi fejtegetések alapján egy reális algebrai görbe rendszáma, fajszáma és meneteinek indexe között mutatunk ki lehetséges összefüggéseket.

Ezeket az összefüggéseket azáltal mutatjuk ki, hogy  $C_m$  görbét JONQUIÈRES-féle transformatio által oly görbébe viszzük át, melynél az összefüggések kimutatása könnyű.

A JONQUIÈRES-féle transformatio, miként ismeretes,<sup>1</sup> oly CREMONA-féle  $q$ -ad rendű transformatio, melynek egy  $(q-1)$ -szeres és 2  $(q-1)$  egyszeres alappontja van.

A következőkben  $q = (m-1)$ -edrendű JONQUIÈRES-féle transformatiót alkalmazunk, e pont végén azonban kimutatjuk, hogy ezt alacsonyabb rendűvel is helyettesíthetjük.

Legyen  $C_m$  egy  $p+1$  páros menetből (páros rendű) oly  $C_m$  görbe, melynek görbemenetei — legfeljebb egyet kivéve, a mely két nyílt görbét tartalmazhat, — csupa zárt görbéből állanak. Az ily  $C_m$  görbére áll az előbbi pont utolsó tétele. Legyen az

<sup>1</sup> L. például K. DOEHLEMANN: Geometrische Transformationen II. Teil. (Samml. Schubert), p. 150 (1908).

első meneten  $d_1$ , a második meneten  $d_2$ , az utolsó meneten, melyről föltételezzük, hogy csupa zárt görbéből áll,  $d_{p+1}$  reális kettőspont oly módon, hogy

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{p+1} = d$$

legyen. Ekkor az első menet  $d_1 + 1$ , a második  $d_2 + 1$ , az utolsó  $d_{p+1} + 1$  zárt görbéből áll. Az egyik menet két zárt görbéje helyett esetleg két nyílt görbe léphet föl.

Legyenek  $e_k$  és  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p+1$ ) oly nem negatív egészs számok, melyek eleget tesznek a

$$\begin{aligned} d_1 + 1 &= e_1 + f_1, & d_2 + 1 &= e_2 + f_2, \dots, \\ d_p + 1 &= e_p + f_p, & d_{p+1} &= e_{p+1} + f_{p+1} \end{aligned} \quad (6)$$

egyenleteknek, melyekre csak azt a föltételt rójuk ki, hogy arra a görbemenetre, a mely két nyílt görbét tartalmaz, a megfelelő  $f \geq 2$  legyen.

$(m-1)$ -ed rendű JONQUIÈRES-féle görbehálózatunk  $(m-2)$ -szeres alappontját  $C_m$  görbénk  $(m-2)$ -szeres pontjába helyezzük, a  $2(m-2)$  egyszerű alappont közül (melyek közül  $(m-1)$ -nél több ne essék egy egyenesbe)  $e_k$  számút helyezzük a  $k$ -adik görbemenet  $e_k$  számú zárt görbéjének belsejébe,  $f_k$  alappontot pedig ugyanannak a görbemenetnek még tekintetbe nem vett egy zárt görbéjére; az esetleg előforduló két nyílt görbe egyikére  $2$  alappontot helyezzünk ( $k = 1, 2, \dots, p+1$ ). A még hiányzó

$$\begin{aligned} 2(m-2) - (e_1 + f_1 + e_2 + f_2 + \dots + e_{p+1} + f_{p+1}) &= \\ &= 2m - 4 - (d + p) = m - 2 \end{aligned}$$

alappontot tetszésünk szerint helyezhetjük az utolsó menet még tekintetbe nem vett utolsó zárt görbéjére, vagy egy olyan zárt görbére, melyre egy alappontot elhelyeztünk, vagy végül az esetleg föllépő két nyílt görbe bármelyikére. Az egyszerű alappontok elhelyezésénél az utóbbi két mód valamelyikét kell követnünk, ha a  $C_m$  görbének csak  $p$  valós görbemenete van. Hogy az utolsóknak nem kell okvetlenül léteznie, következik abból hogy  $e_{p+1} + f_{p+1} = d_{p+1}$  zérus is lehet.

Az alappontoknak a mondott módon való elhelyezése után a JONQUIÈRES-féle transformatio  $C_m$  görbénket átviszi egy olyan görbébe, melynek  $n$  rendszáma egyenlő azoknak a változó



metszéspontoknak számával, melyben a transformáló görbehálózat görbéi a  $C_m$  görbét metszik; ennél fogva

$$n = m(m-1) - (m-2)^2 - (f_1 + f_2 + \dots + f_{p+1}) - (m-2) = 2m - 2 - f,$$

a hol, miként a következőkben mindig,

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_p + f_{p+1}.$$

$n$ -ed rendű görbénket egy tetszőszerinti reális egyenes annyi reális pontban metszi, mint a  $C_m$  görbét a JONQUIÈRES-féle hálózat megfelelő tagja az alappontokon kívül. A görbehálózat egy reális görbéje, mint unikurzális görbe, minden oly zárt görbét, melyben egy alappont fekszik (minthogy az unikurzális görbének a zárt görbén kívül is vannak pontjai), legalább két pontban, oly zárt görbét, melyen páratlan számú alappont van, vagy oly nyílt görbét, melyen páros számú alappont van, legalább még egy pontban metsz, oly zárt görbét pedig, melyen páros számú alappont fekszik, nem metsz szükségképen valós pontokban. Következnek ezek ama tétel alapján, hogy egy páratlan görbe  $((m-1)$ -ed rendű unikurzális görbe) egy páros (zárt), illetve páratlan (nyílt) görbét páros, illetve páratlan számú pontban metsz.

Ha tehát az egyes görbemenetek indexeit  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$ -gyel, a görbe indexét pedig  $i$ -vel jelöljük, akkor

$$i_1 \geq 2e_1 + f_1, \quad i_2 \geq 2e_2 + f_2, \quad \dots, \quad i_{p+1} \geq 2e_{p+1} + f_{p+1}$$

és

$$\begin{aligned} i \geq i_1 + i_2 + \dots + i_{p+1} &\geq (2e_1 + f_1) + (2e_2 + f_2) + \dots + (2e_{p+1} + f_{p+1}) \\ &\geq 2(e_1 + f_1 + e_2 + f_2 + \dots + e_{p+1} + f_{p+1}) - f \\ &\geq 2(m-2) - f = n - 2. \end{aligned}$$

Minthogy pedig

$$i \leq n - 2,$$

azért

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_{p+1} = n - 2 \tag{7}$$

és

$$i_1 = 2e_1 + f_1, \quad i_2 = 2e_2 + f_2, \quad \dots, \quad i_{p+1} = 2e_{p+1} + f_{p+1}.$$

A (7) egyenletből az első görbemenet indexe

$$i_1 = n - 2 - (i_2 + i_3 + \dots + i_{p+1}),$$

ez akkor veszi föl legnagyobb értékét, ha jobboldalon a levonandó rész a legkisebb, vagyis, ha az általunk vizsgált görbénél  $i_2 = i_3 = \dots = i_p = 1$  és  $i_{p+1} = 0$ , a mikor is

$$i_1 = n - 2 - (p - 1) = n - 1 - p,$$

föltéve, hogy  $p > 0$ .

Nevezzük egy görbemenet rendszámának a reális pontok számának maximumát, melyekben a görbemenetet egy reális egyenes metszi és jelöljük  $n$ -nel és megfelelő indexekkel, akkor reális görbemenetre vonatkozólag nyilvánképen

$$n_k \geq i_k + 2 \quad (k = 1, 2, \dots, p+1).$$

Ebben az egyenlőtlenségi jel nem állhat fönn, mert ha fönnállana legalább egy görbemenetre, akkor volna olyan reális egyenes, a mely

$$i_1 + i_2 + \dots + i_{k-1} + n_k + i_{k+1} + \dots + i_{p+1} > n$$

számú reális pontban metszené  $n$ -ed rendű görbénket, a mi pedig irreducibilis görbe esetén képtelenség.

Az előbbi pont utolsó tételének tekintetbe vételével ebben a pontban talált eredményeinket következőképen foglalhatjuk egybe :

*Minden  $n$  egészszámmra nézve léteznek oly  $n$ -ed rendű  $p$ -ed fajú ( $0 \leq p \leq n-2$ ) algebrai síkgörbék, melyek  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$  indexű  $p+1$  görbemenetből állanak, bármily az*

$$i_1 + i_2 + \dots + i_p + i_{p+1} = n - 2$$

*egyenletnek eleget tevő pozitív egészszámokat jelentsenek is az  $i$ -k, melyek közül egy zérus is lehet, vagy egy görbemenet teljesen hiányozhatik.*

*Az egyes görbemenetek rendszáma 2-vel nagyobb indexük-nél. Egy görbemenet indexe  $n-p-1$  is lehet, a mikor a többi menet egy-indexű eggynek kivételével, a mely vagy null-indexű vagy nem is valós.*

Nem nehéz kimutatott tételünket általánosítani arra az esetre nézve, mikor a görbe indexe  $n-2$  helyett  $n-4$ ,  $n-6$ , vagy általánosan  $n-2h \geq 0$ .

Tételünk  $p = 1$  esetben azt fejezi ki, hogy bármily  $n (\geq 3)$

rendsámra nézve léteznek olyan elsőfajú görbék, a melyek két  $i_1$  és  $i_2$  indexű gőrbemenetből állanak, bármily az

$$i_1 + i_2 = n - 2$$

egyenletnek elegettevő nem negatív egész számokat jelentsenek is az  $i$ -k. Egy gőrbemenet hiányozhatik is, a mikor a megfelelő index állandóan nulla.

Ez a tétel magában foglalja CH. A. SCOTT tételét, sőt annál többet mond.

Tételünknek  $p = 2$  esetre való alkalmazásával a következő tételt kapjuk: bármily  $n (\geq 4)$  rendszámra nézve léteznek oly másodfajú görbék, a melyek az

$$i_1 + i_2 + i_3 = n - 2$$

egyenletnek eleget tevő  $i_1, i_2, i_3$  indexű gőrbemenetekből állanak, bármily nem negatív egész számokat jelentsenek is az  $i$ -k, ha csak közülök egynél több nem nulla. Tételünk akkor is áll, ha egy index azért nulla, mert a megfelelő gőrbemenet hiányzik.

Speciálisan: minden  $n (\geq 4)$  rendszámra nézve léteznek oly másodfajú görbék, a melyek egy  $n-3$  és egy egyindexű gőrbemenetből állanak, a melyekhez még egy null-indexű gőrbemenet, vagyis egy ovalis járulhat.

Ez a tétel többet mond, mint CH. A. SCOTT megfelelő tétele, a ki  $p = 2$ -re nézve csak egy  $n-4$  indexű gőrbemenet létezését mutatta ki.

Tételeink kimutatásánál alkalmazott  $(m-1)$ -ed rendű JONQUIÈRES-féle transformatiót helyettesíthetjük alacsonyabb  $(m-h)$ -ad rendű transformatióval, a melynek  $(m-h-1)$ -szeres alappontja a  $C_m$  görbe  $O$  pontjában van, s azonkívül  $2(m-h-1)$  egyszerű alappontja van; csak úgy kell megválasztanunk  $h$ -t, hogy az utolsó gőrbemenet utolsó zárt gőrbéjére helyezendő alappontok száma

$$m - 2h \geq 0 \quad \text{illetőleg} \quad h \leq \frac{m}{2}$$

legyen. Az egyszerű alappontok elhelyezését zárt gőrbékre nézve épen úgy végezzük, mint  $(m-1)$ -ed rendű transformatió esetén,

csak hogy nyílt görbékre páros számú alappontot helyezünk, ha  $m-h$  páratlan; és páratlan számút, ha  $m-h$  páros.

## 3.

Az előző pontban síkbeli algebrai görbék indexére talált tételeket ebben a pontban térbeli algebrai görbékre fogjuk ki-terjeszteni.

Legyen  $C_m$  egy páros rendű, legfeljebb két nyílt görbe kivételével csupa zárt görbékéből álló oly  $C_m$  görbe, melynek  $l$  számú egymástól különböző kettőspontja van, melyek mind valóságosak és a melynek  $p+1$  görbemenete van. Az első görbemeneten feküdjék  $d_1$ , a másodikon  $d_2$ , az utolsón  $d_{p+1}$  kettőspont ép úgy, mint az előző pontban. Értelmezzük az  $e_k$  és  $f_k$  nem negatív egész számokat ép úgy, mint az előző pont (6) egyenletében tettük.

Egy háromdimenziós lineáris  $(m-1)$ -ed rendű görberendszer  $(m-2)$ -szeres alappontját helyezzük az így értelmezett  $C_m$  görbe  $O$  pontjába, a  $2(m-2) - 1$  egyszerű alappont közül  $e_k$  számút helyezzük a  $k$ -edik görbemenet  $e_k$  számú zárt görbékének belsejébe,  $f_k$  számút ugyane görbemenet még tekintetbe nem vett  $f_k$  számú zárt görbékére (az esetleg fellépő két nyílt görbe egyikére két alappontot helyezünk el, a másikra egyet sem) ( $k = 1, 2, \dots, p+1$ ). A hiányzó  $m-3$  alappontot helyezzük az utolsó görbemenet még tekintetbe nem vett utolsó zárt görbékére, melynek reális voltát most megköveteljük.

A görberendszer egyenlete ily alakban írható:

$$\lambda_0 \varphi_0(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z) + \lambda_3 \varphi_3(x, y, z) = 0, \quad (8)$$

a hol  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  egymástól lineárisan független valós koeficiensű unikurzális görbéket,  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  változó paramétereket jelentenek.

A

$$\frac{\xi_0}{\varphi_0(x, y, z)} = \frac{\xi_1}{\varphi_1(x, y, z)} = \frac{\xi_2}{\varphi_2(x, y, z)} = \frac{\xi_3}{\varphi_3(x, y, z)}$$

birationalis transformatio  $C_m$  görbénket egy térbeli görbébe viszi át, melynek  $n$  rendszáma egyenlő a  $C_m$  görbének a (8) görbe-

rendszerrel való változó metszéspontjainak számával. Ennél-fogva

$$n = m(m-1) - (m-2)^2 - (f_1 + f_2 + \dots + f_{p+1}) - (m-3) = 2m-1-f.$$

Egy reális sík térbeli görbénk egy menetét annyi reális pontban metszi, mint a hányban a  $C_m$  görbe megfelelő menetét a (8) görberendszer megfelelő tagja.

Minthogy pedig a (8) görberendszer egy reális unikurzális görbéje a  $C_m$  egy oly zárt görbéjét, melyben egy alappontja van, legalább két reális pontban, oly zárt görbéjét pedig, melyen páratlan számú alappontja van, vagy oly nyílt görbéjét, melyen páros számú alappontja van, legalább még egy reális pontban metszi, azért az egyes görbemenetek indexeit  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$ -gyel, a görbe indexét  $i$ -vel jelölvé, áll:

$$\begin{aligned} i_1 \geq 2e_1 + f_1, \quad i_2 \geq 2e_2 + f_2, \dots, \quad i_p \geq 2e_p + f_p, \quad i_{p+1} \geq 2e_{p+1} + f_{p+1} + 1 \\ i \geq i_1 + i_2 + \dots + i_{p+1} \geq \\ (2e_1 + f_1) + (2e_2 + f_2) + \dots + (2e_p + f_p) + (2e_{p+1} + f_{p+1} + 1) \\ \geq 2m-3-f = n-2. \end{aligned}$$

Minthogy pedig

$$i \leq n-2,$$

azért

$$\begin{aligned} i = n-2, \quad i_1 = 2e_1 + f_1, \quad i_2 = 2e_2 + f_2, \dots, \quad i_p = 2e_p + f_p, \\ i_{p+1} = 2e_{p+1} + f_{p+1} + 1. \end{aligned}$$

Az előbbi pontban követett gondolatmenet értelmében egy reális menet rendszáma 2-vel nagyobb indexénél.

Az

$$i_1 = n-2 - (i_2 + i_3 + \dots + i_{p+1})$$

egyenletből  $i_2 = i_3 = \dots = i_{p+1} = 1$ -et tévén,

$$i_1 = n-2-p$$

indexű görbemenetet nyerünk.

Ezek alapján a következő tételt mondhatjuk ki:

*Minden  $n$  egészszámra nézve léteznek oly  $n$ -ed rendű,  $p$ -ed fajú ( $0 \leq p \leq n-3$ ) algebrai térgörbék, melyek  $p+1$  számú  $i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$  indexű görbemenetből állanak, bármily az*

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_{p+1} = n - 2$$

*egyenletnek eleget tevő pozitív egészs számokat jelentsenek is az  $i$ -k.*

*A görbemenetek rendszáma kettővel nagyobb indexüknel; egy görbemenet indexe  $n - p - 2$  is lehet, a mikor a többi menet egyindexű.*

A (8) alatti transformáló görbehálózatnak alacsonyabb rendűvel való helyettesítése az előbbi pontban mondottak értelmében történhetik.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 február 15.-én tartott üléséből)

## ADATOK A CSERHÁT KELETI RÉSZÉNEK GEOLOGIAI VISZONYAIHOZ.

VITÁLIS ISTVÁN-tól.

Szorosabban véve a nógrádvármegyei Szöllös község határára vonatkoznak az itt közlendő geológiai megfigyelések, ámde e község új közigazgatási neve: *Mátraszöllös*, nem tünteti fel helyesen földrajzi fekvését. A Mátra ugyanis geográfusaink topográfiai beosztása szerint a Zagyva völgyétől *keletre* emelkedik, míg a Zagyva völgyétől *nyugatra* eső dombok a Cserhát-hoz tartoznak: Szöllös község pedig a Zagyva völgyétől nyugatra, vagyis a Cserhátban fekszik már.

A Cserhát kulmináló hegygerincze az 567 m. magas Tepke, a Macskás, a Kerekbükk és a Sátoroshegy nyugat, északnyugat és északkelet felől félkörben hegykerettel környezik Szöllöst s az oldalairól lefutó viz a Függekő-Mészáros-völgyben, a Számárpatakban és a Rendnek-völgyben gyülekezve s délkeleti irányban lefolyva, épen Szöllös vasúti megállója mellett szakad a Zagyvába 162 m. tengerszint feletti magasságban.

A szöllösi vasúti megálló vagy Pásztó felől tekintve Szöllös felé, három fő térszíni forma bontakozik ki szemünk előtt: a Zagyva-patak viszonylag széles árterületéből lapos, széles padmaly emelkedik ki legelőbb, a melynek a felszínét eke szántja, majd távolabb s magasabban keskeny padka következik szőlővel és gyümölcsösökkel, s egészen hátul a szemhatáron a Cserhát említett kulmináló gerinczháta alkot domború keretet.

Már ez a térszín is jelzi, hogy Pásztó és Szöllös között, a Cserhát keleti részén, három fő kőzetsoport vesz részt a geológiai felépítésben: a gerinczhát főleg vulkáni lávaárakból: piroxénus

andezitekből, a keskeny padka részint vulkáni törmelékes kőzetekből: hamuból, lapilliből, részint a mediterrán-korszak üledékeiből: agyagmárgákból, lajtameszekből áll, míg a széles, alacsony padmalyt főleg a szarmata-korszak üledékei: meszes agyagjai építik fel. A Zagyva-patak völgye pannóniai üledékbe mélyed, minthogy Szöllös vasúti megállójánál e korszak kővületeit sikerült felfedeznem.

Szöllös környékének geológiai viszonyaihoz BÖCKH JÁNOS,<sup>1</sup> RACZKIEWICZ,<sup>2</sup> dr. SCHAFARZIK FERENCZ<sup>3</sup> és NOSZKY JENŐ<sup>4</sup> közleményei szolgáltatnak több-kevesebb adatot.

A vulkáni erupciók terményeit, főleg a lávaárakból keletkezett kőzeteket részletesen megvizsgálta s leírta már dr. SCHAFARZIK FERENCZ a Cserhátról közzétett s idézett monografiájában, a melyben mikroszkópiumi vizsgálatokkal mutatta ki, hogy e kőzetek nem *bazaltok*, mint ESMARK s követői: BEUDANT, SZABÓ, BÖCKH, FÖFTTERLE, STACHE vélték, hanem — a mint azt már, kőzetanalógia alapján, PAUL és RACZKIEWICZ is jelezte — *piroxénés andezitek*.

Az üledékes kőzetek ismeretéhez az imént felsorolt szerzők közül főleg NOSZKY JENŐ szolgáltatott újabb adatokat, a ki több éven át végzett itt, a Földtani Intézet megbízásából, részletes geológiai fölvételt.

A pannóniai és a szarmata-korszakok üledékeinek a faunáját elég részletesen tüntetik föl NOSZKY gyűjtései, a melyeket

<sup>1</sup> BÖCKH JÁNOS: Geologische Verhältnisse der Umgebung von Buják, Ecseg und Herencsény. Jahrbuch d. k. k. Geol. R. A. XVI. B. Wien, 1866. p. 203.

<sup>2</sup> RACZKIEWICZ megfigyelései ANDRIAN «Vorlage der Karte des Matragebirges und seiner Umgebung» című cikkében. Verhandlungen d. k. k. Geol. R. A. 1867. p. 79.

<sup>3</sup> Dr. SCHAFARZIK FERENCZ: A Cserhát piroxénandezitjei. A M. Kir. Földtani Intézet Évkönyve. IX. k. 7. f. Budapest, 1892.

<sup>4</sup> NOSZKY JENŐ: Adatok a Cserhát geológiájához. Földtani Közlöny. XXXVI. k. 411 l. Budapest, 1906.

*Ugyanaz*: Adatok a Mátra geológiájához. A M. Kir. Földt. Int. Évi Jelentése 1910-ről, 7 l.

*Ugyanaz*: Adatok a nyugati Mátra geológiájához. A M. Kir. Földt. Int. Évi Jelentése 1911-ről, 46 l.



SCHRETER ZOLTÁN dolgozott fel; a szöllösi felső mediterrán-közetekről szerzett megfigyeléseit azonban mindössze a következő néhány sorban közli NOSZKY: «Mátraszöllőstől északra levő Szamár-patak völgyében több nagy kőbányában fejtik a lajta-mezet cementgyártáshoz. Különösen az alsó bánya gazdag kövületekben, illetőleg annak alsó, laza lithothamniumokat és egyéb mészalgákat tartalmazó rétege. A felső kemény rétegben vastaghéjú kagylók és halmaradványok találhatók.»

E gazdagnak jelzett kövületekből VADÁSZ M. ELEMÉR<sup>1</sup> most megjelent echinodermata-monografiájában a következő öt tuskébőrűt sorolta fel: *Arbacina* sp., *Scutella* sp., *Pliolampus* sp., *Schizobrissus cruciatus* Ag. sp. és *Prospatampus delphinus* Ag. sp. (i. m. p. 155).

A szép megtartású tuskébőrűek hívták fel az én figyelmet is a szöllösi kőfejtőkre. Egyik kiváló tanítványom: PALÁGYI ÁRPÁD bányamérnök-hallgató ugyanis még 1913 őszén néhány nagy *Glypeaster*-s egy csomó remek megtartású *czápa-fogat* hozott szöllösi otthonának kőfejtőiből. A múlt év nyarán hallgatóimmal a két hétre terjedő geológiai tanulmányúton Salgótarjánban is töltöttem néhány napot s így alkalom nyílt a szöllösi kőfejtőket is megnézni. Az a néhány óra, a mit e kirándulásra szánhattunk, elég volt ahhoz, hogy e vidék geológiai érdekességét felismerjem s így az ősz folyamán ismételten kirándultam Pásztó-Szöllös környékére és különösen a szöllösi kőfejtőkbe.

A szöllösi kőfejtők jó feltárasai segítségével sikerült egyrészt az erupciót közvetlen adatokkal közelebbről megvilágítani, másrészt az üledékeknek, különösen a felső mediterrán-korszakiaknak meglepő palaeontologiai gazdagságát s változatos stratigrafiai tagoltságát kimutatni, valamint tektonikai folyamatokat: árkos vetődéseket, sashérczeket, és eróziós tüneményeket: kitöltött régibb vízvázásokat észlelni.

Jelen értekezésemben főleg a szöllösi kőfejtőkben észlelt geológiai megfigyeléseimet közlöm, de nyomban fogják ezt

---

<sup>1</sup> VADÁSZ M. ELEMÉR: Magyarország mediterrán tuskébőrűi. *Geologica Hungarica*. I. k. 2. füzet. Budapest, 1914.

követni a gyűjtött változatos és gazdag palæontologiai anyag földolgozásának eredményei is, és pedig elsősorban a rendkívül érdekes gerinczes maradványok.

\*

A mátraszöllösi mészkőbányák, a melyekben a Beocsini Czemmentgyár Unió Részvénytársaság fejti a czemmentgyártáshoz szükséges nyersanyagot, a községtől északnyugatra fekszenek a Szamár-patak két forrás-csermelyének szögletében. Az iparvágány a Zagyva völgyéből a Szamár-patak völgyét követve éri el az alsó kőfejtőt. Valamivel rövidebb, de hepe-hupásabb úton juthatunk el a kőfejtőkhöz Mátraszöllös községen át. Az említett Részvénytársaság a völgy talpában több feltárást nyitott részint a lajtamészben, részint a piroxénes andezittufában, alkalmas anyagot kutatva gyártmányához s minthogy erre a célra az alsó kőfejtő márgás lajtamesze megfelelőnek bizonyult, itt egyre nagyobbodó kőfejtő keletkezett, mely igen imponáló látványt nyújt.

Az alsó kőfejtő középső részletét a mellékelt geologiai szelvény állítja elénk.

A kőzetösszlet mintegy 23 méter vastagságban van itt feltárva. A kőfal nyugati részét vetőlap szeli át oly élesen s a vetődés következményeit valóban ad oculos demonstrálva, hogy iskolai példája lehet az ilyen tektonikai elmozdulásoknak. A vetőlap észak-déli irányba csap, a kőbánya falát tehát harántul metszi s nyugat felé dől  $70^\circ$  alatt.

A vetőlap fekvője felől, vagyis a kőbánya keleti részében a következő fő kőzetesoportok különíthetők el.

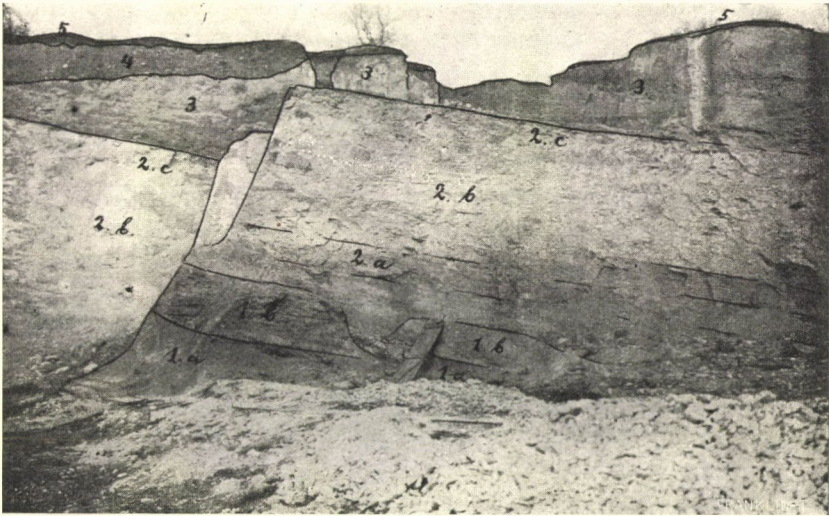
1. *Alul* hamuszürke agyagmárga, kékes és sárgás márgás agyag van feltárva mintegy négy méter vastagságban ;
2. *középen* a rétegösszlet főtagja, a lajtamészke foglal helyet 9—10 méter vastagságban, a melyben megint alul vastagpados, középen tömött, fent lemezes-lazább részeket lehet megkülönböztetni ;
3. *felül* mintegy négy méter vastagságban világos kékes színű vulkáni tufa fejezi be a mediterrán-korszak kőzeit, a melyek felett még
4. a vízvájta medrekben kisebb-nagyobb andezitikavics és görgeteg s e felett
5. humuszréteg következik.

A mediterrán-korszak rétegei kelet felé dőlnek  $61,3^\circ$  irányban

18—20° alatt, ezt a dőlést különösen a lajtamészkö vastagabb padjain s lemezes részein mérhetjük jól.

Vegyük szemügyre e kőzetsoportokat kissé részletesebben.

1. Az alsó kőzetsoportban tulajdonképen háromféle kőzetet lehet megkülönböztetni, ugyanis hamuszürke agyagos márgát, kékes márgás agyagot és sárgás márgás agyagot. A hamuszürke agyagmárga tele van *Tellina* sp. kőmagvaival, de van benne *Lucina*,



A mátraszöllösi alsó köfejtő középső része.

1. A felsőmediterrán korszak márgás agyagja: 1a kékes, 1b sárgás agyag.
2. Lajtamészkö: 2a pados, 2b tömött, 2c lemezes.
3. Riolittufa, alsó részén lithothamniumos lajtamésszel váltakozva.
4. Piroxénés andezitkavics és görgeteg.
5. Humusz.

*Cardium*, *Pecten*, *Pinna tetragona*, *ostracoda* s *foraminifera* is; ez a Noszky által említett schlierszerű kőzet foszlánya lehet. A jól föltárt kőzetsort a kékes színű márgás agyag kezdi meg. Nagy termetökkel ugyan a *Clypeasterek*, a *Pecten* (*Macrochlamys*) *latissimusok* vonják magukra először a figyelmet, de ha a laza kőzetet közelebről vizsgáljuk meg, nyomban észrevesszük, hogy az apróbb *Chlamys*, *Aequiptecten* sp.-ek s kisebb *Ostrea*-héjak lépnek fel benne oly tömegesen, hogy helyenként valóságos

lumachellákat alkotnak. A kagylóhéj-cserepeket ellepték aztán a *Balanusok*, a *bryozóumok* s a *férgék*. Ugyancsak tömegesen lépnek fel a *Heterostegina costata* és a *Lithothamniumok* gumói s ágai.

Erre a kékes márgás agyagra települt sárgás márgás agyagból külön gyűjtöttem ugyan a fossiliákat, de csakhamar meggyőződtem, hogy a kövülettartalomban nincs lényeges eltérés. A foraminiferák közül a *Heterostegina costata*, a magasabb rendű állatok közül a *Balanusok* tömeges fellépése jellemzi mind a két réteget, a miért is *heterosteginás* és *balanusos* rétegek néven foglalhatjuk őket össze.

A *heterosteginás* és *balanusos* rétegekből eddigelé a következő kövületeket sikerült meghatároznom:

#### Kőalgák:

*Lithothamnium ramosissimum* REUSS.

#### Foraminiferák:

*Amphistegina Haueriana* D'ORB.

*Heterostegina costata* D'ORB.

*Globigerina* sp.

#### Cœlenterata:

*Millepora* sp.

#### Vermes:

*Serpula flagelliformis* Sow. sp.

*Spirorbis* sp.

#### Echinodermata:

*Antedon* sp.

*Cidaris militensis* FORB.

“ *zemays* SISM.

“ cf. *zemays* SISM.

“ sp. ind.

- Centrostephanus Airaghii* LAUB.  
*Prionechinus Lóczyi* LAMB et THIERY?  
*Prionechinus* sp.  
*Arbacina* sp.  
*Tripneustes* sp.  
*Clypeaster Scillae* DESM. var. *taurinensis* LAMB.  
*Clypeaster Seguenzai* VDSZ.  
 " *magnus* VDSZ.  
 " *Agassizii* SISM.  
 " *subconoideus* VDSZ.  
 " *angulatus* VDSZ.

**Bryozoa :**

- Cellepora globularis* REUSS.  
*Actinopora (Defrancia)* sp.  
*Retepora* sp.  
*Mucronella (Lepralia)* sp.  
*Membranipora* sp.

**Brachiopoda :**

- Cistella Neapolitana* SCACC.  
 " *interponens* DREGER.  
 " *squamata* EICHN.  
*Terebratulina parva* MATYASOV.  
*Terebratula macrescens* DREGER.

**Lamellibranchiata :**

- Ostrea lamellosa* BROCC.  
*Ostrea digitalina* DUB.  
*Anomia ephippium* L. var. *pergibbosa* SACCO.  
*Chlamys gloriamaris* DUB. var.  
 " *tauoperstriata* SACCO var. *perlongata* SACCO.  
*Aequipecten scabrellus* LAM. var. *taurolaevis* SACCO.  
*F'labelliptecten Besseri* Andr. (non Hörn.)

*Macrochlamys latissima* BR.  
*Spondylus crassicostatus* LAM.  
*Cardita* sp.

**Scaphopoda :**

*Ditrupa strangulata* DESH. sp.

**Gasteropoda :**

*Conus* sp.

**Crustacea :**

*Balanus pictus* MÜNST.  
*Balanus* cfr. HOLGERI GEIN.  
*Ostracoda* (*Cypridina punctata* REUSS.)  
*Decapoda*-ollótöredékek.

A *Heterostegina costata* D'ORB. példányai között, melyek átlag 4—5 mm. átmérőjűek, leltem egy 15 mm. átmérőjű példányt is. Palæontologiailag az apró *brachiopodák* és a változatos *tüskésbőrűek* e rétegcsoport főérdekességei. Az apró brachiopodákat REUSS<sup>1</sup> és DREGER<sup>2</sup> Lapugy és Kostej felső mediterrán-üledékeiből, MATYASOVSKY<sup>3</sup> pedig Baranyavár kőzetéből említi ugyancsak felső mediterrán-üledékből. A tüskésbőrűek közül NOSZKY gyűjtése révén csak öt fajt sorolhatott fel VADÁSZ az egész kőzetösszletből, s abból is csak kettő tartozik ebbe az alsó márgás agyagba; az én gyűjtésem s meghatározásom alapján erősen megsokszorozódott ez a szám már ebben az alsó rétegcsoportban, pedig — mint látni fogjuk — a feltárás fő zömében még más fajok is fellépnek. Különösen ki kell emelnünk a

<sup>1</sup> REUSS: Die marinen Tertiärschichten Böhmens und ihre Versteinerungen, Sitzungsberichte d. math.-naturwiss. Classe d. k. Akad. d. Wiss. XXXIX. B. Wien, 1860. p. 207.

<sup>2</sup> DREGER: Die tertiären Brachiopoden des Wiener Beckens. Beiträge zur Palæont. Österr.-Ung. u. d. Orients. VII. Bd. Wien, 1889. p. 179.

<sup>3</sup> MATYASOVSKY: Palæontologiai adalékok a baranyamegyei felső mediterránrétegek ismeretéhez. Természetrizji Füzetek. IV. k. Budapest, 1880. p. 226.

*Clypeaster Agassizii* SISM. szép példányát, a mely eddigelé csak Felsőorbórol és Délfranciaországból volt ismeretes. A *Clypeaster scillae* DESM. var. *taurinensis* LAMB., a *Clypeaster Seguenzai* VDSZ., a *Clypeaster magnus* VDSZ, a *Clypeaster subconoideus* VDSZ, és a *Clypeaster angulatus* VDSZ specieseiből is teljesen ép példányaim vannak. A *cidaris*, *centrostephanus*, *arbacina* specieseiket többnyire csak tük képviselik, de héjtöredékek is vannak, a *Prionechinus* cfr. *Lóczyinek* két ép példányát leltem. Ez a faj azonban csak papirforma, minthogy — mint VADÁSZ írja — az eredeti példány elveszett s nagyon lehet, hogy a *Prionechinus Lóczyi* nem más, mint az «*Arbacina tenera* Lor. fiatal példánya.»

2. A föltárás főzömét alkotó rétegesoport típusos lajtamészkö az ismeretes tömöttebb és lazább-féleségekkel. Ebben a 9—10 méter vastag mészősszletben is észrevehető némi tagoltság. Alul vastagpados mészkő van, közepén tömöttebb, felül pedig lemezes. Az alsó vastagpados lajtamészben, az alsó köfejtő keleti oldalán, nagyon sok *Panopaea (Glycimeris)*-kőmagot gyűjtöttem, s ezekkel együtt a hatalmas *Pholadomya H. Böckhi* is megeltem. A középső tömött mészkőben gyéribben akad kövület: nagy *Pecten*-ek, *Conus*-kőmagvak etc. Legérdekesebb a mész felső része. Itt a *Lithothamnium ramosissimum* ágai kőzetalkotó mennyiségben lépnek fel s megint tömegesebben láthatók a tüskésbőrűek, főleg az *Echinolampas*-félék. Echinoderma különben az egész felső mediterrán-üledékben lelhető, de tömegesebben az alsó kékes márgás agyagban és a mész felsőbb övében. A lithothamniumos lajtamészkö főnevezetőségei azonban a remekszépen megtartott *czápa fogak*, *rájafoglemezek* s *úszó tövis*ek, s a csontos halakhoz tartozó *ajakos halak* (labridæ) és *tengeri keszegek* (sparidæ) félgömbalakú vagy babformájú fogai, a melyekkel a kagylók, a rákok héjait tördelték fel.

A kövületek egészben véve épen nem gyakoriak a meszes faciesben és csakis kedves tanítványom, PALÁGYI ÁRPÁD bányamérnök-hallgató szorgalmas gyűjtése révén sikerült annyi anyagot összehordani, hogy abból a következő fajokat határozhattam meg. közbeiktatva még azt a két tüskésbőrűt: *Schizobrissus cruciatus* és *Prospatungus delphinus*, a melyet VADÁSZ a mátraszöllősi lajtamészből sorol fel Noszky gyűjtéséből (i. m. p. 137. és 143.)

**Kőalgák :***Lithothamnium ramosissimum* REUSS sp.**Foraminifera :***Heterostegina costata* D'ORB.**Coralla :***Heliastraea Reussana* M. EDW. et H.**Echinodermata :***Scutella* sp.*Clypeaster altus* KLEIN." *Sequenzai* VDSZ." *angulatus* VDSZ." cf. *subangulatus* POMEL.*Echinolampas elegans* AIR." *Nemani* AIR." *Hungaricus* VDSZ." *hemisphaericus* LAM. var. *maxima* LOR." *dacicus* VDSZ.*Pliolampas* sp.*Schizobrissus cruciatus* AG.*Prospatungus delphinus* AG. sp.**Vermes :***Serpula* sp.**Bryozoa :***Membraniopora* sp.**Lamellibranchiata :***Pinna* sp.*Macrochlamys latissima* BR.*Aequipecten Malvinae* DUB.*Flabelliptecten Besseri* ANDRZ.*Pecten medius* LK., var. *plioparva* SACC.*Spondylus crassicostatus* LAM.



- Ostrea digitalina* DUB.  
 „ *lamellosa* BROCC, var. *Boblayi* DESH.  
*Mytilus* sp.  
*Arca turonica* DUJ.  
*Pectunculus* sp.  
*Cardita* cfr. *Partschii* GOLDF.  
*Lucina columbella* LAM.  
*Cardium discrepans* BAST.  
*Venus* sp.  
*Lutraria* sp.  
*Panopaea (Glycimeris) Menardi* DESH.  
*Pholadomya H. Böckhi* PÁV.  
 „ cfr. *Weissi* PHIL.

**Scaphopoda :**

- Detrupa stringulata* DESH.  
*Tenagodus anquinis* L.  
*Gadila gadus* MONTG.

**Gastropoda :**

- Trochus patulus* BROCC.  
*Natica millepunctata* LAM.  
*Cerithium* cf. *scabrum* OLIVI.  
*Voluta* cf. *taurina* BONELLI.  
*Conus* sp.

**Pisces :**

- Notidanus primigenius* AG.  
*Hemipristis serra* AG.  
*Galeocerdo aduncus* AG.  
*Prionodon tumidus* PROBST.  
 „ *angustidens* PROBST.  
*Scolionodon Kraussi* PROBST.  
*Aprionodon stellatus* PROBST.  
*Carcharodon megalodon Gibbes* (non AG.)  
*Sphirna prisca* AG.  
*Lamna (Odontaspis) reticulata mihi* (non PROBST.)

*Lamna (Odontaspis) cuspidata* Ag.

« *denticulata* Ag.

*Oxyrrhina hastalis* EASTM. (Non Ag.)

*Oxyrrhina Desorii* EASTM. (Non Ag.)

*Oxyrrhina Sillimanni* GIBBES.

*Myliobatis toliapicus* Ag.

« cfr. *acutus* Ag.

« *tubulatus* n. f.

« *Kochii* n. f.

*Aëtobatis* cf. *irregularis* Ag.

*Chrysophrys cinctus* Ag. sp.

*Sargus* sp.

*Scarus baltringensis* PROBST.

#### Crocodilia :

*Gavialis* sp.

*Crocodylus* sp.

#### Cetacea :

*Delphinus* sp.

A lajtamész felső részének az érdekes *Echinolampas* sp.-ek mellett kétségtelenül a *vízi gerinczesek* a legfőbb palæontologiai nevezetességei. A hazánkból eddigelé megismertetett mediterrán czápa fogas lelőhelyekkel, ú. m. Dévényújfaluval (Münsternél Neudörf), Szentmargitbányával, Tarnócczal és Felsőesztergálylyal bátran felveheti a versenyt Mátraszöllös nemcsak a fogak ritka szép megtartásával, hanem főleg meglepő változatosságával: a Dévényújfalut jellemző labrida- és sparida-fogak, a szentmargitbányai lajtamész és a felsőesztergályi kavicspad nagy Carcharodon-fogai egyaránt megvannak itt krokodilus- és gavialis-fogakkal meg delphin-csigolyákkal együtt.

3. A köfejtő fő zömét alkotó lajtamész és a fölötte levő riolittufa között érdekes és vulkanologiai szempontból igen fontos megfigyelést tettem.

A lithothamniumos laza mészkő felső részében feltűnő sok vulkáni hamu vehető észre. Az Echinolampasok nagy része már ebből a vulkáni anyaggal kevert mészből került ki.

A feltárás felső részében azután a lithothamniumos és scaphopodás laza lajtamészkö vulkáni lapillival és hamuval váltakozik a következő sorrendben: Hamuval kevert lithothamniumos meszen 25 cm. vastag riolitos horzsaköves lapilli és hamuréteg települt, erre 90 cm. vastag lithothamniumos mész, majd ismét 48 cm. vastag vulkáni (riolitos) tufa: alul lapilli, fent hamu; újra 50 cm. vastag lithothamniumos és scaphopodás mész s végül 2 m. vastag riolitos lapilli és hamu.

Kétségtelen e szerint, hogy a *riolit erupciója a lajtamész képződésének a végén is tevékeny volt, rövid időközökben megismétlődött, még pedig egyre intenzívebben: 0·25, 0·48, 2·00 m. vastag rétegeket halmozva fel.*

Ez a megfigyelésem arra készítetett, hogy részletesen megvizsgáltam vulkanologiai szempontból az összes kőfejtőket. Ily módon megállapíthattam, hogy a legnyugatibb (felső) kőfejtő lajtamészében, a mészkő *alsóbb* részében is van ujjnyi vastag riolittufa, a legkeletibb (alsó) kőfejtő bejáratánál pedig ugyancsak megvan a lajtamészkö felsőbb részében lithothamniumos mészrétegek között a riolittufa 20—25 cm. vastag rétege. Különösen fontos az erupció szempontjából, hogy ezen felsőbb riolittufa alatt a kövületes lithothamniumos lajtamészköben *piroxénés andezites lapilliket* és burgonya- vagy ökölnagyságú *piroxénés andezites bombákat* leltem.

E megfigyeléseim közvetlenül bizonyítják, 1. hogy a *Cserhát vulkáni erupciója idejében váltakozva kerültek ki bázikus és savanyú vulkáni termények* és 2. hogy az egész felső mediterránkorszak idejében voltak *piroxénés andezites és riolitos erupciók.*

A szőlősi kőfejtők ezen közvetlen adatai következtében módosítani kell tehát a Cserhát kiváló monografusának *azt a két fő vulkanologiai tételét, mintha a Cserhát miocénkorszaki erupciói egy időben «az alsó és felső mediterrán határán» és «gyorsan játszódtak volna le», minthogy a szőlősi kőfejtők tanúsága szerint azok hosszú ideig tartottak.* Ezt bizonyítják más megfigyelések is.

A szomszédos és geologiai tekintetben a Cserhátal összehatózó Mátrában MAURITZ<sup>1</sup> már 1909-ben kimutatta, hogy

<sup>1</sup> MAURITZ: A Mátrahegység eruptív kőzetei. Math. és Természettud. Közlemények. A Tud. Akad. kiadv. XXX. k. 4. sz. Budapest, 1909.

«a riolitok általában idősebbek a piroxénandeziteknel; a piroxénandezitek teléreket alkotnak a riolittufában. De a rioliterupeziók még a piroxénandezitek erupeziója közben vagy után is következtek».

MAURITZnak azt a tételét, hogy «a rioliterupeziók még a piroxénandezitek erupeziója közben vagy után is következtek», a szőlősi kőfejtők közvetlen adatai beigazolták. Azt, hogy a Mátrában s a vele szomszédos Bükkben és Cserhátban eltérő korú riolittufák vannak, régóta tudjuk már. Salgótarjánban tudvalevőleg a széntelepek fekvőjében van a riolittufa, tehát az alsó miocén bázisán, minthogy a szénvezető rétegek felett *Pecten praescabriusculus* homokpadok és kőületes schlier települtek. LÖRENTHEY<sup>1</sup> megfigyelése szerint Czinkotán már a *Pecten (Aequipecten) praescabriusculus* homokban fordul elő egy hatalmas riolittömb.

NOSZKY a Mátrában az alsó és felső mediterrán határáról emlit egy «piroxénandezitet tartalmazó riolittufát», de azt *secundaertufának* véli és — saját szerű módon — úgy származtatja, hogy a schlier és a lajtamész között kitört piroxénandeziterupezió a régibb (ugyanis a salgótarjánvidéki) riolittufát «explózió szerűen szétszórta és összekeverte». NOSZKY szerint ezek a keverék-tufák a Cserhátban is észlelhetők «Tar és Mátraverebély» környékén. A szőlősi kőfejtők is ide esnének tehát, Szőlőson azonban magában a *lajtamészben* (nem a schlier és lajtamész határán) vannak, mint láttuk, a riolittufák s azok elsődlegesek, nem keverték NOSZKY felfogása értelmében.

Hogy a lajtamésznél is vannak fiatalabb, t. i. *szarmata* riolittufák, azt a Bükkhegységben BÖCKH JÁNOS<sup>2</sup> még 1867-ben kimutatta. Vajjon a rioliterupeziók átnyúlnak-e Felsőmagyarországon még a pannóniai korszakba is, a mint azt RICHTHOFEN az Erdélyrészi Medenczére nézve rég kimutatta, s a mit a leg-

<sup>1</sup> LÖRENTHEY: Neuere Beiträge zur Stratigraphie der Tertiärbildungen in der Umgebung von Budapest. Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn. XXVII. Bd. Leipzig, 1913. p. 315.

<sup>2</sup> BÖCKH, JOHANN: Die geologischen Verhältnisse des Bück-Gebirges und der angrenzenden Vorberge. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. XVII. Bd. Wien, 1867. p. 225.

újabb gázkutató geológiai fölvételek is igazolták, azt a további vizsgálatok vannak hivatva véglegesen eldönteni.

*Annyi immár kétségtelenül megállapítható, hogy hazánk északi részein a rioliterupciók az egész miocénkorszakban meg-megisméltődtek és hogy a rioliterupciókkal andeziterupciók váltakoztak. Kétségtelen továbbá az is, hogy az andeziterupciók sem folytak le oly gyorsan s oly rövid idő alatt, mint a Cserhát, a Börzsönyi hegység és a Magyar Érc-hegység kiváló monografusai hitték.*

Az andezitek alsó miocénerupciójára nincsen ugyan olyan közvetlen bizonyítékunk, mint a riolitokéra, de dr. SCHAFARZIK-nak két megfigyelése is erre látszik utalni: az egyik megfigyelése szerint a verőcei Katalin-völgyben az alsó mediterránhoz vett homokkőben fordul elő andezites anyag,<sup>1</sup> a másik megfigyelése szerint pedig Sámsonházán, Szöllös közelében, a piroxénes andezit a kövületes középső miocén, vagyis a felső mediterrán fekvőjét alkotja.<sup>2</sup> Ez utóbbi megfigyelés ellen azonban azt a kérdést lehetne felvetni, vajjon nincs-e ez a sámsonházai andezit a felső mediterrán-korszak üledékei közé iktatva? Szöllösön is fel van tárva a keleti és a nyugati lajtamészko kőfejtő között az andezittufa, ámde ez árkos vetődés útján került a lajtamészkoval egy szintbe s így nem alkalmas a közvetlen település megállapítására. Azt azonban újabb megfigyelők egyre erősebben és szélesebb körben hangoztatják, hogy a középső miocénben, vagyis a felső mediterrán-korszakban hatalmas erupeziók voltak, sőt egyesek egyenesen ezt a korszakot, *a felső mediterránt tekintik az andezitek főkitörési idejének.* A Börzsönyi hegység északi részére nézve pl. MAYER<sup>3</sup> bebizonyította, hogy az andezit főkitörésének ideje az alsó mediterrán határáról határozottan a felső mediterránba teendő.

A szöllösi kőfejtőkben úgy a piroxénes andezittufából, valamint a riolittufából emlősök csontmaradványai kerültek ki.

<sup>1</sup> Dr. SCHAFARZIK FERENCZ: Budapest és Szent-Endre vidéke. Térkép-magyarázat. Kiadja a M. kir. Földtani Intézet. Budapest, 1902. p. 50.

<sup>2</sup> Dr. SCHAFARZIK FERENCZ: A Cserhát piroxéandezitjei.

<sup>3</sup> MAYER ISTVÁN: A Börzsönyi hegység északi részének üledékes képződményei. Budapest, 1914. Különlenyomat, p. 22.

A piroxénes andezittufából még közelebbi meghatározást igénylő bordák és tarsus, a riolittufából pedig háti csigolya s egy

*Aceratherium* sp.

alsó félállkapcsa, három ép és négy töredékes foga.

A riolithamueső elől futva, a szó szoros értelmében itt hagyta a fogát egy

*Palaeomeryx* sp.

is; mindezek még részletesebb feldolgozást igényelnek.

4. A feltárás felső részében, főleg a vulkáni tufában vízmosságokat látni, a melyek 1—1.5 m. vastag (a szélek felé elvékonyodó) kavicsokkal és görgetegekkel vannak kitöltve. A kavics és a görgeteg (a melyek között vedernagyságú is akad) főleg piroxénes andezitből áll s a Tepke gerinczéről származik. A korára nézve nincs közvetlen palæontologiai bizonyítékom.

5. A feltárást mintegy 80 cm. vastag televény fejezi be.

★

Kis közleményemet a köszönet szavaival zárom be. Nyilvánosan is hálás köszönetemet fejezem ki KOCH ANTAL nyug. ny. r. egyetemi tanár úrnak, a miért kegyes volt megengedni, hogy a csontos halfogakat az általa meghatározott dévényújfalui halfogakkal összehasonlíthassam és igen tisztelt barátomnak, LÖRENTHEY IMRE ny. r. egyetemi tanár úrnak, a ki nemcsak a vezetése alatt álló föld- és őslénytani intézet gyűjteményét nyitotta meg részemre, hanem mindenben a legszívesebben és legkészségesebben támogatott.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 márczius 15.-én tartott üléséből.)

## AZ 1913 *f.* ÜSTÖKÖS (DELAVAN) ÉS AZ 1914 *b.* ÜSTÖKÖS (ZLATINSKI) SPEKTRUMA.

KONKOLY THEGE MIKLÓS tiszteleti tagtól.

Az utolsó üstökös, mely a csillagos égen akkora fényben mutatkozott, hogy annak színképét lehetett volna vizsgálni a GUENISSET-féle üstökös volt, melyet a francia tudós FLAMMARION magáncsillagdáján fedezett fel Juvissyben, Páris mellett. Azóta csak félig-meddig fényes üstökös sem mutatkozott, csakis ez év május havában, melyet ZLATINSKI fedezett fel Bergedorfban<sup>1</sup> és később szeptemberben volt egy másik látható, melyet ugyan DELAVAN már 1913-ban fedezett fel La Platában,<sup>2</sup> de csak szeptemberben lett olyan fényes, hogy azt már okkal-móddal szabad szemmel is lehetett látni, míg október második felében, midőn elérte legnagyobb fényét, már szabad szemmel is egy feltűnő objektum lett, melynek csóvája legalább is 5—6 fok hosszúnak tűnt fel.

Miután az üstökösök természetszerűen akkor legfényesebbek, mikor a napközelen vannak, de éppen ezt a helyzetüket vagy akkor érik el, midőn már a Naphoz látszólag is igen közel vannak, vagy legalább is a horizonthoz oly közel vannak, hogy az alkony fénye még nagyon zavarja a megfigyelést, a fotografálást meg a legtöbb esetben lehetetlenné teszi. Így például közep-nagyságú távcsövekkel egy üstökös rendes körülmények között

---

<sup>1</sup> ZLATINSKI ezt az üstököst a hamburgi csillagdán fedezte fel Bergedorfban, 1914 május 15-én 12 h-kor  $\eta$  Persei mellett.

<sup>2</sup> DELAVAN az 1913 *f.* üstököst a La Platai csillagdán (Dél-Amerika) fedezte fel 1913 december 17-én este 10<sup>h</sup> 34<sup>m</sup> 8, La Platai középídőben

megkívánja, hogy legkevesebb  $1^h - 1^m 30^s$ -ig exponáljuk. Igen ám, de az alkony fénye nem  $90^m$  alatt, hanem már  $20^m$  alatt teljesen elfátyolozza a lemezt. Így például 1914. évi október 15-én Tass aligazgató úrral kísérletet tettünk a DELAVAN-üstökösöt megfotografálni. Egyszerre exponáltuk a 162 mm ZEISS-féle photorefractoron és egy SUTTER-féle rövid gyutávú 64 mm átmérőjű applanáton (a 162 mm objectivnek gyutávja 2000 mm, a SUTTER-applanátnak a gyutávja pedig 450 mm), mindkettővel 33 percig; bár az üstökös feje a ZEISS-photorefractoron szépen előjött, de a csóvájának nyoma sincs, a comából sem sok látható, de annál jobban a fátyol! A SUTTER-applanáton történt felvétel természetesen kevesebbet fátyolosodott, de a mag természetesen sokkal kisebb, mint a hosszú gyutávú lencse lemezén, bár a csóva és coma sokkal szebben előjön, a miből csak azt a következtetést lehet levonni, hogy egy üstökös mindig két különböző objectivvel kell megfotografálni, egy rövid és egy hosszú gyutávúval, az elsővel az összenyomás végett, a másodikkal pedig az üstökös fejének tanulmányozhatása kedvéért. Ha még hozzáteszem, hogy az üstökös, a midőn bezártuk az objectiveket, 12 fok magasságban volt a láthatár felett, igen könnyen be lehet látni, hogy ily körülmények között nem igen lehet kiállításba való képeket fotografálni.

Kezdjük a megfigyeléseket a májusi 1914*b*. üstököséről ismertetni. A fotografálásnál mindenesetre könnyebb a spectroscopizálás, mert ennél a műtétnél egy kis alkonyfény nem sokat zavar, sőt ha az oly erős, hogy a FRAUNHOFER-vonalak láthatók rajta, akkor még a megfigyelőnek kitünő támpontja van arra nézve, hogy a FRAUNHOFER-vonalakkal a skálának vagy mikrométernek értékét a spectroscopban ellenőrizhesse, s azonfelül a megfigyelést már a legelső esti órákban meg lehet kezdeni, bár a spectroscopizálás alkalmával, midőn a méréseket abbahagytam, szintén többnyire  $13^\circ$  magasságot mutatott a távcsövön alkalmazott WINECKE-féle «parallaktometer». (Ilyen műszer, bár igen hasznos kis jószág, mindössze négy van a világon. Az első készült a strassburgi 480 mm refractorra, a második és harmadik az ógyallai 254 mm és 162 mm nyílású refractorokra, s a negyediket boldogult GOTHARD JENŐ készítette az ő kedves 254 mm



nyílású tükröteleszkopjára, mely ma használhatatlan állapotban van,

Mindkét üstökös, melyekről beszélni fogok, igen szép spectrumot mutatott, különösen a DELAVAN-féle.

Az 1914*b*. üstökös magja igen fényes, úgyannyira, hogy a megfigyelő szeretne a spectrumában FRAUNHOFER-vonalakat látni, mert a mag egy nagyon intenzív folytonos spectrumot tüntet fel a látmezőben. A folytonos spectrum messze lenyúlik a spectrum kevésbé törékeny végébe, egészen  $606\cdot0\lambda$ -ig, az ibolya felé pedig  $460\cdot0\lambda$ -ig jól látható. A folytonos spectrumot öt szénhidrogén-sáv keresztezi, melyek közül a legfényesebb az, a melyik a spectrum zöld részében van  $516\lambda$  körül. Ha ezt a sávot intenzitás tekintetében egységnek veszem fel, akkor a többi sávnak az intenzitását a következő számokkal vélném kifejezni: 0·5, 0·2, 1·0, 0·4, 0·3. A leggyengébb a 0·5 a vörösben.

A spectrumban látható sávok helyzetét 5-ször mértem s azok helyzetei a következők, hullámhosszaságban kifejezve középértékben:

I.	II.	III.	IV.	V.	1)
$559\cdot98\lambda$	$543\cdot60\lambda$	$516\cdot40\lambda$	$488\cdot40\lambda$	$472\cdot40\lambda$	

A megfigyelés előtt beállítottam a refractort a szintén az esti égen álló Vénusra, a végből, hogy a spectroscop skáláját ellenőrizsem, s a mért hat FRAUNHOFER-vonal helyzetét a következőképen olvastam le a skálán:

$$\begin{aligned}
 C &= 656\cdot0\lambda \\
 D &= 589\cdot0\lambda \\
 E &= 527\cdot0\lambda \\
 b &= 517\cdot0\lambda \\
 F &= 486\cdot0\lambda \\
 G &= 433\cdot0\lambda
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Miután a kis üstökös spectroscop (VOGEL—HEUSTREU 40) inkább szélesebb sávok mérésére van berendezve, úgy én a tizedest teljesen mellőztem a Venus-spectrum leolvasásával, bár ha ezt az adatot összehasonlítom ÅNGSTRÖM Nap-spectrumával, tekintve a csekély szórási képességet, azt elég tűrhetőnek fogjuk

találni. A következő táblácska mutatja ÅNGSTRÖM által spectro-  
méterén mért adatait az előbbi FRAUNHOFER-vonalaknak a Nap  
spectrumában :

$$\begin{aligned} C &= 656\cdot20, \lambda \\ D &= 589\cdot20, \lambda \\ E &= 526\cdot90, \lambda \\ b &= 516\cdot90, \lambda \\ F &= 486\cdot06, \lambda \\ G &= 432\cdot52, \lambda \end{aligned} \quad 3)$$

A rés állása a megfigyelésnél: 0·4 mm volt.

A megfigyelés kezdődött 9<sup>h</sup> 10<sup>m</sup> középidőben és végződött  
9<sup>h</sup> 55<sup>m</sup> középidőben. Az üstökös magassága a horizont felett volt  
kezdetben 20°, végül 17°.

A sávok színe, daczára az égitest alacsony állásának, igen  
jól kivehető volt.

A megfigyelést május 22-én megismételtem ugyanavval a  
műszerrel, mint május 20-án, bár az idő ma egyáltalában nem  
volt annyira kielégítő, mint 20-án, úgy hogy a folytonos spectrum  
feltűnően gyenge volt, annak a 20-iki kinézésével szemben, úgy-  
annyira, hogy annak végeit csak igen nehezen lehet a megvilá-  
gított skálával megállapítani, sőt a skálának a fényét nagyon  
le kellett tompítani (rheostáttal); a színek mindamellett gyakorlott  
szemnek eléggé jól kivehetőek. A sávok között a legintenzívebb  
(mint rendszeren) az 516  $\lambda$  körül lévő sárgás-zöld sáv, úgy hogy  
ha ezt egységnek veszem, akkor a többinek az intenzitása a  
követzőképen alakul: 0·5, 0·2, 1·0, 0·4, 0·3. A folytonos spec-  
trum kiterjedése megközelítőleg 578  $\lambda$ -tól 462  $\lambda$ -ig.

A sávokon, melyek a folytonos spectrumon jól ki voltak  
dudorodva, ma is öt beállítást eszközöltem, s ezek középértéké-  
nek eredményét a következő táblácska tünteti fel :

I.	II.	III.	IV.	V.	
559·80 $\lambda$	543·40 $\lambda$	516·40 $\lambda$	488·20 $\lambda$	472·20 $\lambda$	4)

Ha a május 20-iki megfigyelés eredményét ezzel összevonom,  
akkor a következő eredményt nyertem a 10 egyes beállításból  
középértékben :

I.	II.	III.	IV.	V.	5)
559·89 λ	543·50 λ	516·40 λ	488·30 λ	472·30 λ	

A mint a két esteli megfigyelések középértéke mutatja, úgy azok elég jól egyeznek, de mindazonáltal mindig szeretem a skálámat a Nap spectrumával összehasonlítani, mert bár azt igen állandónak ismerem 40 év óta, s ez a 28-ik üstökös, a melyet vele megfigyelek. A Nap-spectrumon megfigyelt FRAUNHOFER-vonalak helyzete a skálán a következő:

Spectroscop HEUSTREU 40 adatai szerint:					
<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>b</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
656·0 λ	589·0 λ	527·0 λ	517·0 λ	486·0 λ	432·0 λ
ÅNGSTRÖM adatai szerint:					
<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>b</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
656·20 λ	589·20 λ	526·90 λ	516·90 λ	486·06 λ	432·52 λ

A táblácska azt bizonyítja, hogy a spectroscop skálájának az állása semmit sem változott, s az megbízható.

\*

Az 1913*f*. DELAVAN-üstökös La Platában lett felfedezve 1913 december 17-én, azonban ez annyira gyengefényű volt, hogy azt spectroscopizálni nem lehetett, s csakis erősebb távcsövekben volt látható. Fénye azonban mindinkább növekedett, úgyannyira, hogy szeptember első felében már a Belgrádot ostromló egyik monitoron, a «Kőrösön» állomásozó dr. GOTHARD ISTVÁN fregatt-orvos (boldogult GOTHARD JENŐ tagtársunk testvéröccse) írta nekem, hogy az üstökös a Gönczöl csillagképben szabad szemmel látható.

Az első spectroscopikus megfigyelést azonban csak szeptember 25-én kezdettem meg este 9<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>-kor, azaz jobban mondva, csak akkor láttam először egy 10-szer nagyító ZEISS-triéderrel fák között, s a tulajdonképeni spectroscopizálást csakis szeptember 16-án kezdtem meg.

A megfigyelés mint rendesen a 254 mm nyílású refractoron történt, mint ez idő szerint a csillagda leghatalmasabb műszerén, melyre már előzetesen pontosan be volt állítva a «HEUSTREU

Nr. 40» spectroscop, melyet 1874-ben boldogult VOGEL HERMANN felejthetetlen barátomtól kaptam ajándékként, s azzal figyeltem meg az első üstökösömet az 1874 III Coggia üstököst, mert bár későbben több üstököst figyeltem meg egy szép optikával ellátott Browning két prizmával felszerelt spectroscoppal, s későbben egy sajátkészítményű óriási fényerejű Steinheil «à vision directe» nagy prizmával ellátott mikrométeres spectroscoppal, de a megfigyelés kezdete mégis csak mindig a «HEUSTREU 40»-nel történt, a mely azonban már SCHMIEDT és HAENSCH kipróbált keze által egy érdemleges átépítésben részesült.

Az augusztus 21-én történt Napfogyatkozásra, mechanikusunk nem lévén (bár a meteorologiai intézet mechanikai műhelye miniszteri rendelet alapján a csillagda rendelkezésére kellene hogy álljon, azonban az mireánk nézve mégis annyi, mintha nem létezne, mert míg az intézet igazgatója voltam, akkor is háromannyi ideig birtam valamit onnan megkapni, mintha a kérdéses tárgyat Amerikából hozattam volna, kivéve, ha azután egyszer-máskor igenis a sarkamra állottam), sajátkezűleg csináltam némi átalakítást egy VOGEL--GLAN-féle spectrálfotométeren, s annak főcsövének végét levettem, miután az cabinet-megfigyeléseknél útban volt, a műszer pedig távcsőre nem volt hasznavehető, a mi kiténik abból is, hogy SCHMIEDT és HAENSCH ilyen hármat készített, de soha többet, az egyiket VOGEL számára Potsdamba, a másikat PICKERINGnek Cambridgebe (Amerika), a harmadikat az én számomra, s tulajdonképen távcsövön soha sem használta nagyobb eredménnyel egyikünk sem. Ennek a műszernek a végén volt egy igen szép orthoscop oculár egy 90° prizmával kitolhatóan felszerelve, úgy hogyha az oculár be van tolvá a csőbe, akkor oldalt látjuk benne a csillagot, s ha az oculárt visszahúzó, a csillag a spectroscop résén van. Ez egy felette nehéz tömb volt, a minek felét esztergáló-padon leesztergályoztam, s az egyik végére reáalkalmaztam egy kör-lappal a HEUSTREU Nr. 40 spectroscopot, a másik végére pedig egy ZEISS-dugót, s miután a refractor oculárkihúzója osztással van ellátva, így csak reá kell tenni a ZEISS-váltószerkezetre az új készüléket, vagy mint a híres hamburgi dr. HANS REPSOLD elnevezte a «Konkoly'scher Topf»-ot, az oculárkihúzót reáállítani

a 20-ik skálárészre és a műszer be van állítva, ugyanis a rés párhuzamosan áll a napimozgással és az objectiv gyupontjában van pontosan.

Ép oly kényelemmel van a nagy kereső ellátva (100 mm nyílás), amelynek oculárkihúzóján egy kettős szánnal ellátott pozíciókör van felszerelve, s ezzel gyorsan be lehet állítani a szátkeresztet a napi mozgásba, s a két szán segítségével pedig a szátkeresztet (platindrót)  $30^\circ$  alatt hozzá állítom a réshez.

Ezzel a kedves kis műszerrel, mely nekem még hozzá oly kedves emlék,<sup>1</sup> kezdetem meg az üstökös megfigyelését (mely ezúttal nálam a 29-ik).

1914 szeptember 26-án 7<sup>h</sup> 3<sup>m</sup> K. E. I.-ben beállítottam az üstököszt a 100 mm-es keresőbe, s annak fényétől meg voltam lepve a nem épen finom minőségű levegőviszonyok mellett (becsülés 2, későbbben 3).

Az első munka volt a sávok beállítása a spectroscop skálájára. Öt elég fényes sáv mutatkozott a spectrumban, amelyeknél az első pillanatban egy gyakorlott megfigyelő felismerte a szénhidrogén charecteristiconját. A sávok intenzitását a következőképen becsültem, kezdve a sorozatot a spectrum kevésbé törékeny végétől: 0.4, 0.4, 1.0, 0.4, 0.3. A zöldessárga részében a spectrumnak levő, az  $516 \lambda$  körül látható sáv fényessége szolgál mindig egység gyanánt. Az öt sávot keresztülmetszi egy igen fényes folytonos spectrum, a melynél a sávok mind kissé fel voltak duzzadva. A folytonos spectrum  $598 \lambda$ -nál kezdődött a vörösben és  $448 \lambda$ -nál végződött az ibolyaszín felé, tehát a folytonos spectrum még jól túlhaladta a *D* vonalat és jól túlment a spectrum törékeny vége felé a  $472 \lambda$  körül lévő ötödik sávon.

A folytonos spectrum oly fényes volt, hogy a megfigyelésnél az I., II. és IV. számú sávoknál szintén zavarólag hatott, miután azok elég gyengék voltak. A skálát bármily fényesen világítottam is meg a rheostáttal, azt nem voltam képes letom-pítani. A folytonos spectrum természetesen olyan széles volt,

<sup>1</sup> Eredetileg Gothard Jenő készítette.

mint az üstökös magjának az átmérője, de okvetlen volt olyan fényes, mint egy másodrangú csillagé.

A nagyon fényes folytonos spectrum mellett még egy második ködszerű folytonos spectrum is mutatkozott, melynek színeit azonban csak egészen nyitott rés mellett lehetett kivenni: ez okvetlen a comától származhatott.

A folytonos spectrumon a  $D$  helyén egy kis fényes csomót vettem észre, melyet azonban csakis szerettem volna gyanítani, de létezését biztosra nem merném venni.

A  $C_m H_n$  sávok mindkét oldalon elég élesek voltak, s végeik egy tompa csúcsba végződtek. Olyformán néztek ki, mintha valamely rossz GEISSLER-csőben egy szénhydrogégáz spectrumát szemléljük kissé nyitott rés mellett. Legfeljebb is azt lehetne mondani, hogy a sávok a spectrum törékenyebb vége felé kissé gyengébben voltak leárnyalva.

Az üstökös kinézése igen érdekes. A magja legalább is egy 2—2.5 nagyságú ködcsillaghoz lenne hasonlítható, melyet legalább is 10"-ra lehetne becsülni, s igen fényes (mutatja a folytonos spectrum is), s belőle egy körülbelül 4—5° hosszú csóva sugárzik ki, a mely kissé legyezőszerű, vagyis úgy jelenik meg, mintha két csóva divergálna egymástól, s annak déli része mintha kevésbé lenne fényes, mint az északi. A két csóva divergálását 30°-ra becsülném.

Az üstökös fejének színe feltűnően sárgászöld, de jobban hajlik a zöldbe, mint a sárgába, a mi arra utal, hogy a zöldes-sárga sáv a legfényesebb a spectrumában.

A spectrumban mutatkozó öt sávot a spectroscop skáláján csekély szünet közben ötször mértem le, s az öt mérés középértékét a következő táblácska mutatja:

I.	II.	III.	IV.	V.	7)
559.80 $\lambda$	543.40 $\lambda$	516.40 $\lambda$	488.40 $\lambda$	472.20 $\lambda$	

1914 szeptember 30-án történt a DELAVAN-üstökös második spectroscopikus megfigyelése.

A megfigyelés az első esti órákban történt olyannyira, hogy a spectroscop látmezejében még gyengén az atmosférai spectrum is látható volt, melyhez még későbbben hozzájárult a hold

fénye is. Mindez bár kissé zavarólag hatott, de azért a sávokat igen jól ki lehetett venni s a skálával összehasonlítani. A leolvasások 6<sup>h</sup> 50<sup>m</sup>-tól 7<sup>h</sup> 45<sup>m</sup> K. E. I. tartottak. A megfigyelés végén az üstökös már csak 16° magasságban állott a láthatár felett. Bár a levegő a mai estén ritka szép volt, de azért a 16° magasság mégis csak kellemetlenül érvényesült.

Az öt sáv fényességének aránya kissé különbözött a mult becsüléstől, mert azt ma 0·4, 0·3, 1·0, 0·4, 0·3 számokkal óhajtanám kifejezni. A különbséget talán a légköri helyzetnek lehetne betudni, de különben is a sávok fényének becsülésére épenséggel nem fektetek ez esetben nagy súlyt, mert a kiválóan fényes folytonos spectrum a sávok intenzitásának a becsülését teljesen illuzóriussá teszi.

A rés nyílása a mérésnél állandóan megmaradt a normális 0·4 mm-es, de ha azt kinyitottam csak 0·8 mm-re, az elég volt arra, hogy már az I. és IV. sávot alig lehessen látni. A folytonos spectrum szélessége szokatlanul erős volt, s kiterjedt 668  $\lambda$ -tól 428  $\lambda$ -ig, a mi az üstökösöknél nem gyakori eset. A folytonos spectrum mellett a látmező egy ködszerű, állandóan látható folytonos spectrummal volt megtelve, melyet eleinte az atmosférai spectrumnak tartottam kizárólag, de későbbben reájöttem, hogy bár eleivel ez a kérdéses ködszerű spectrum ugyan összevegyülhetett az atmosférai spectrummal, de valóban bizony az a comától származott. Ma azonban, szemben az előbbi megfigyeléssel, a színeket ennél a második folytonos spectrumnál még 0·4 mm-es normál résállásnál is jól ki lehetett venni.

A mai megfigyelésnél azonban a nátriumsávot határozottan ki lehetett venni, mert a magnak a spectuma még a normálállásnál keskenyebb rés mellett is (0·2 mm) igen fényes volt, s ily módon mégis sikerült a nátriumsávnak vélt tüneményen öt beállítás eszköznöm, melynek középérteke:

$$D = 589\cdot6,$$

a mely mérés, tekintve a kis műszert, ÅNGSTRÖM normálspektrumával = 589·2 elég jól egyezik, s alig lehetne az izzó nátriumgőz jelenlétét a DELAVAN-üstökös magjában kétségbe vonni.

A sávokon ismét öt beállítást eszközöltem, s az öt beállításból a következő eredményt nyertem :

I.	II.	III.	IV.	V.	8)
559·88 $\lambda$	543·40 $\lambda$	516·60 $\lambda$	488·60 $\lambda$	472·00 $\lambda$	

A legközelebbi megfigyelés 1914 október 17-én történt 6<sup>h</sup> 33<sup>m</sup>-tól 7<sup>h</sup> 12<sup>m</sup> K. E. I.-ben.

A megfigyelés ugyancsak az első esti órákban történt, s bár az üstökös fénye még mindig növekedőben van, a megfigyelést mégis igen megnehezítette a rossz levegő s csakis az könnyítette meg a megfigyelést némileg, hogy a spectroscop igen jól összeillik a refractorral (refractor objectívjének a gyutáva a spectroscop collimátor lencséjének a gyutávjával), s ez a körülmény mégis lehetővé tette, hogy minden sávról nyolcz beállítást és a nátriumsávról öt beállítást eszközölhessek.

A következő kis táblácska a nyolcz egyenkénti beállításának középértékét tünteti fel:

I.	II.	III.	IV.	V.	9)
559·54 $\lambda$	543·50 $\lambda$	516·63 $\lambda$	488·38 $\lambda$	472·38 $\lambda$	

A *D* sávjának helyzete : 589·6  $\lambda$  (öt megfigyelésből levezetett középérték).

A sávok intenzitása eltér a szeptember 30-iki becsléstől, bár ismétlem, hogy a sávok intenzitásának becslésére nem nagy súlyt fektetek, mert az igen befolyásolva van a légköri viszonyoktól máról holnapra.

A becsült intenzitások a következők lennének, hogy ha a zöldessárga sávot egységnek vesszük : 0·3, 0·2, 1·0, 0·2 és 0·3.

Az üstökös magvát TASS aligazgató úrral egy 2 nagyságú csillaghoz hasonlónak becsültük, bár részemről azt inkább szeretném egy első nagyságú csillaghoz hasonlítani.

A mag folytonos spectruma, daczára a nem épen elsőrangú atmosférai helyzetnek nagyon élénk volt, s az a spectrum vörös végénél 668  $\lambda$ -nál kezdődött és még 422  $\lambda$ -nál gyengén látható volt.

A rés a megfigyeléseknél 0·4 mm-ig volt nyitva, mint rendszeren, de ha azt 1 mm-re kinyitottam, akkor a folytonos spec-



trum túlvilágította még a skálát is, a *D* sávot kitünően lehetett látni a folytonos spectrumon projiciálva, s ha a rést összecsuhtam 0.2 mm-re, akkor az a folytonos spectrumon mint egy csillogó sárga gyöngy tűnt fel. Ez volt a második eset, hogy a nátriumsávot egy üstökös magjának a spectrumában alkalmam volt láthatni.

Az üstökös a megfigyelés végén már csak 12° magasságban állott a horizont felett, s a ki ilyen megfigyeléseket már próbált, könnyen belátja, hogy ilyen helyzet mennyi nehézséget gördít a megfigyelő munkája elé.

Ha a két üstökösnek, ugyanis az 1913*f*. és az 1914*b*-nek a spectrumát összehasonlítjuk, hát első pillanatra egy nagy hasonlatosságot fogunk a kettő között találni, s talán ezekre is el lehetne mondani, hogy alighanem egy- és ugyanabból a hazából származtak.

Kíséreljük meg a két üstökös spectrumának sávjait, illetve azok értékét  $\lambda$ -ben kifejezve egymás mellé állítani, akkor a mondotakat a következő táblácska azonnal bizonyítani fogja:

	1914 <i>b</i> Zlatinszky üstökös	1913 <i>f</i> Delavane üstökös	1913 <i>f</i> +1914 <i>b</i> üstökösök Spectral-sávjainak középértéke <sup>1</sup>	
I.	559.890 $\lambda$	559.740 $\lambda$	559.815 $\lambda$	10)
II.	543.500 $\lambda$	543.433 $\lambda$	543.467 $\lambda$	
III.	516.400 $\lambda$	516.543 $\lambda$	516.472 $\lambda$	
IV.	488.300 $\lambda$	488.460 $\lambda$	488.380 $\lambda$	
V.	472.300 $\lambda$	472.300 $\lambda$	472.247 $\lambda$	

Nem épen érdektelen megsejmlélni azt, hogy az adatok mi módon egyeznek, ha egy táblázatba összevonjuk az 1914*b*. üstökös spectrumát, az 1913*f*. spectrumát (egyszerű középértékben) a kettő közötti különbséget és a két üstökös spectrumának egyszerű középértékét, összehasonlítva a középértékkel, melyek súlyok szerint vannak számítva, végre a kettő közötti különbséget.

Az 1. sorozat az 1914*b*. üstökös spectrumát tünteti fel, a 2-ik sorozat az 1913*f*. üstökös spectrumát (mindkettő egyszerű középértékben), a 3-ik sorozat a kettő közötti különbséget, a 4-ik sorozat a két üstökös spectrumának egyszerű középértékét, az

<sup>1</sup> Egyszerű számtani középértékek.

5-ik sorozat a két üstökös spectrumának középértékét súlyok szerint számítva, míg a 6-ik pedig a különbséget a 4-ik és 5-ik sorozat között:

	1914 $b_{\odot}$	1913 $f_{\odot}$	$\Delta_{1-2}$	1914 $b_{\odot}$ } 1913 $f_{\odot}$ } közép	1914 $b_{\odot}$ } 1913 $f_{\odot}$ } közép súlyok szerint	$\Delta_{4-5}$
	1	2	3	4	5	6
I.	559·890 $\lambda$	559·740 $\lambda$	+150	559·815 $\lambda$	559·830 $\lambda$	-015
II.	543·500 $\lambda$	543·433 $\lambda$	+067	543·467 $\lambda$	543·460 $\lambda$	+007
III.	516·400 $\lambda$	516·543 $\lambda$	-143	516·472 $\lambda$	516·490 $\lambda$	-018
IV.	488·300 $\lambda$	488·460 $\lambda$	-160	488·380 $\lambda$	488·340 $\lambda$	+040
V.	472·300 $\lambda$	472·300 $\lambda$	000	472·247 $\lambda$	472·357 $\lambda$	-110

Az előttünk levő tábla első pillanatra azt bizonyítja, hogy úgy a ZLATINSZKY-, mint a DELAVAN-üstökösök spectuma a  $C_m H_n$ -typusához tartoznak, habár némi csekély eltérést mutatnak is fel, de azért valószínű, hogy mint előbb már említettem, a kettő -- legyen azok pályája bármilyen is -- egy hazából származnak.

Az 1911 november 13-án az Akadémiának bemutatott «Négy új üstökös» czimű, ez Értesítő XXX. kötetében megjelent értekezésemnek 117., 118. és 119. lapján bemutattam egy számított normál-üstökös spectrumot, melyet összehasonlítottam az 1911*b*. (KIESS), az 1911*c*. (BROOKES), az 1911*g*. (BELJAWSKY) és az 1911*f*. (GUENISSET) üstökösök spectrumait, s a mely normál-üstökös spectrumot itt összehasonlítás végett újból bemutatom, bár ebből a IV. sáv (488) hiányzik.

I.	560·14 $\lambda$ .	$\Delta$	normál	—	1914 <i>b</i> .	és	1913 <i>f</i> .	közép	= + 001610;
II.	545·39 $\lambda$ .	$\Delta$	"	"	"	"	"	"	= + 001930;
III.	516·02 $\lambda$ .	$\Delta$	"	"	"	"	"	"	= - 000470;
IV.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
V.	472·07 $\lambda$ .	$\Delta$	"	"	"	"	"	"	= - 000287.

Ha mindezeket a csekély eltéréseket összehasonlítjuk, úgy egész biztossággal állíthatjuk, hogy az üstökösök egyáltalában (mindeddig) kivétel nélkül szénhydrogén gázokból vannak alkotva, s ha végignézzük az üstökös spectrumok megfigyeléseit, fel fog

tünni, hogy akadnak olyan üstökösök, melyeknek spectrumai egymáshoz igen hasonlítanak. Így például az 1913*f*. és az 1914*b*. üstökösök spectruma feltűnően hasonlít az 1881 IV., 1886 (BARNARD), 1903 (BORELLI), 1911*c*. (BROOKES), 1911*g*. (BELJAWSKY), valamint további ily üstökösök spektrumához.

Az 1913*f*. (DELANVAN) üstökösnek a megfigyelése nem kevés gondot okozott a villanyáram hiánya miatt. A csillagda miniszteri rendelet folytán az elektromos áramot a m. kir. Országos Meteorológiai Intézet observatoriumának a telepétől kapja, melynek fenntartásához a csillagda dotációjából bizonyos összeggel hozzájárul. A telep ma már nagyon használhatatlan állapotban van, úgy hogy már többször volt vele hetekszámra fennakadás, hol a benzinmotor, hol az akkumulátorok miatt, a midőn a csillagdán a fotometriai és fotografiai-fotométriái megfigyelések hetekig szüneteltek, s hogy a nagy fotométriái katalógust be tudjuk mutatni a tudományos külföldnek, vissza letünk egy évre is vetve, mert a csillagok, melyek a zónába ép belekerültek, a meridián közeli állásukból eltávoztak és nem lehetett őket a «Schraffier-Camerá»-val fotografálni, s ilyen módon már sok hátramaradásunk volt a ma már elégtelen telep miatt. A benzinmotorra nézve beismerem, hogy azt még én vettem meteorológiai igazgató koromban, de kényszerűségből, mivel eleivel a motor az observatorium főépületében volt elhelyezve, mert egy 6 HP gőzgép kéményét lehetetlen lett volna ott beépíteni; későbbben, midőn a meteorológiai observatorium mellett már megépült a gépház és a gazdasági épület, lehetett volna bármit is oda felállítani, de hát meg volt a szerencsétlen benzinmotor, tehát kinlódtunk vele tovább.

Későbbben, midőn a nagyméltóságú vallás- és közoktatásügyi miniszter úr engedélyezte a csillagda könyvtárának és irodahelyiségeinek felépítését, melyet nagyméltóságú JESZENICZEI JANKOVICH BÉLA m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter, úr tisztelt tagtársunk 1912 június 30-án ünnepélyesen felavatott, az építésre előirányzott összegből annyit megtakarítottunk, hogy abból a gépházat is felépítettük. Azonban a motorra, a dynamogépre és a berendezésre egyelőre már nem jutott pénz, így azt kénytelenek voltunk egy jobb időre halasztani, s addig a szom-

széd intézet kimerült telepeivel kinlódni, mert hát bizony az, mint már említettem volt, a fotométriái zóna-catalógus befejezésével legalább is egy évvel visszavetette.

A DELAVAN-üstökös megfigyelését is csak úgy tudtam meg-ejteni, hogy a nagytagyosi pusztámon volt az ottani kis refraktoromhoz két ládika, amelyek tetejére két sarkcsipesz van alkalmazva, a fődő (sarnirokon nyílik) belsejében pedig négy rúgó oly módon van beszerelve, hogy ha a ládikába két zseblámpapatront tesztek, azok azonnal egymás után vannak kapcsolva. ha a fedőt lezárom s a sarkcsipeszekből ki lehet venni az áramot. Azonban a kis ozrám-lámpámat a spectroscopban féltettem, s kipróbáltam az áramot egy más lámpával, de kiderült, hogy bizony annak két elem sok, egy pedig kevés. Így tehát ismét a lomtárhoz kellett folyamodni, a honnan is előkerítettem egy sereg régi gyenge áramra való körtekeres rheostátot és azt felszereltem a ládika hátulsó oldalára, a melyen ugyanis a legvékonyabb sodrony volt, de ez sem volt elég, úgy hogy hamarjában készítettem Kruppin-sodronyból, melynek tudvalevőleg minden más ércz felett a legnagyobb ellenállása van, egy új tekercset s így a kis telep készen volt. Azonban még a csipeszek mellé egy dugótokot is szereltem, hogy a spectroscop kábeljét, egy kettős dugó segítségével abba beledugva sötétben is össze lehessen kapcsolni. Kikapcsoló nem kellett reá, mert az a spectroscop mikrométerjének a lámpására van már reászerve.

Ezzel a kis segédeszközzel teljesen nélkülözhettem az elektromos telepet, mert az áram mindig csak meg-meg szakítva, rövid időre kellett, ugyanis addig, míg a skálát leolvastam, úgy hogy a két telep szeptember 25-től október 17-ig jól kiállotta, sőt még ma is lehetne vele dolgozni.

A kis készüléket nagy tisztelettel elteszszük, mert míg a csillagdának nem lesz saját villamos telepe, a mely egy HOFMEISTER-féle gőzmotorral lesz hajtva, addig az ilyen kalamitásoknak mindig ki lehetünk téve, azzal a rozoga benzinmotorral hajtott dynamoval és a sajnos, még rosszabb állapotban lévő akkumulátorokkal, a melyekkel a meteorologiai intézet jelenlegi telepe fel van szerelve.

## A ZIMÁZ ÉS KARBOXILÁZ ENZÍMEK A BURGONYA ÉS A CZUKORRÉPA RAKTÁROZÓ SZERVÉBEN.<sup>1</sup>

BODNÁR JÁNOS-tól.

A magasabb rendű növények anaërob lélegzése — vagy helyesebben a czukornak a növény szervezetében végbemenő anaërob elbomlása — és az alkoholos erjedés közötti azonosságból következik, hogy mindazoknak a vizsgálatoknak az eredményei, a melyek egyfelől közelebb vezettek bennünket az alkoholos erjedés biochémiájának a megismeréséhez, másfelől lényegesen előbbre vitték a glükóznak a magasabb rendű növények szervezetében végbemenő elégéséről alkotott ismereteinket is. Így például az alkoholos erjedés biochémiájának a fejlődésére nézve korszakotalkotó volt, midőn E. BUCHNER<sup>2</sup> a zimáz előállításával az alkoholos erjedést az élesztőgombák életműködésétől függetlenül is előidézte. BUCHNER felfedezésének fontosságát a magasabb rendű növényeket illetőleg csakhamar igazolták J. STOKLASA-nak<sup>3</sup> és tanítványainak nagyszámú vizsgálatai. STOKLASA a BUCHNER-ALBERT-féle eljárással magasabb rendű

---

<sup>1</sup> Közlemény a m. kir. növényélet- és kórtani állomás kémiai laboratóriumából.

<sup>2</sup> E. BUCHNER—H. BUCHNER—M. HAHN, Die Zymasegärung, 1903. München-Berlin.

<sup>3</sup> J. STOKLASA, J. JELINEK és E. VITEK, Hofmeisters Beitr. 3. (1903.) 460. Különlenyomat. *Ugyanezek*, Zeitschr. f. Zuckerindustr. Böhmen, 27. (1903.) 633. — J. STOKLASA, F. ČERNÝ, J. JELINEK és E. VITEK, Centralbl. f. Bakter. Abt. II. 13. (1904.) 86. — J. STOKLASA, Ber. d. Deutsch. botan. Ges. 22. (1904.) 460. Különlenyomat. — J. STOKLASA, A. ERNST és K. CHOCENSKY, Zeitschr. f. physiol. Chem. 50. (1907.) 303. és 51. (1907.) 156. Különlenyomatok.

növényekből (cukorrépa, burgonya, borsó és más növények különböző szerveiből) szilárd állapotban oly enzimet tartalmazó præparatumokat állított elő, a melyek a glükózoldatra többek között alkohol és széndioxid keletkezése közben hatottak, s e vegyületek az alkoholos erjedést jellemző — avagy ahhoz igen közeleső — mennyiségi viszonyban keletkeztek.

Az alkoholos erjedés közbeeső termékeinek az ismerete terén lényeges előrehaladásnak tekinthető C. NEUBERG<sup>1</sup> legutóbbi időben tett felfedezése. NEUBERG a piroszőlősavban (Brenztraubensäure) oly vegyületet talált, a mely az élesztőgombák kipréselt nedvének a hatására éppoly könnyen és simán indul erjedésnek, mint maga a glükóz. A piroszőlősav erjedésekor — e nem cukortermesztető vegyületből — széndioxid és acetaldehid keletkezik, ez utóbbi vegyület pedig, hogy NEUBERG szavaival éljek, «zum Alkohol in näherer Beziehung steht, als irgend eine andere Substanz, die jemals mit dem Gärungsproblem in Zusammenhang gebracht worden ist.» A glükóz strukturájából a széndioxidnak direkt lehasadása nem magyarázható, a piroszőlősavból, mint az erjedés egyik közbeeső termékéből — és pedig e sav karboxil csoportjából — egészen könnyen érthető s így megoldottnak tekinthető az a már régen megfejtésre váró probléma, hogy mily módon keletkezik a széndioxid az alkoholos erjedéskor. A piroszőlősavnak ezt az elbomlását a *karboxiláz* enzim végzi, a mely enzim egyik tagja a zimáz-szisztémának. A karboxiláznak a zimáz-rendszerben való önállóságát bizonyítják NEUBERG és P. ROSENTHAL<sup>2</sup> vizsgálatai. Nevezetteknek sikerült a zimázból oly præparatumot előállítani, a mely a glükózoldatot változatlanul hagyta, ellenben a piroszőlősavat széndioxid és acetaldehid keletkezése közben elbontotta.

NEUBERG felfedezése alapján W. ZALESKI és E. MARX<sup>3</sup> a

<sup>1</sup> C. NEUBERG, Die Gärungsvorgänge und der Zuckerumsatz der Zelle. Monographie, 1913. Jena.—Biochem. Zeitschr. 71. (1915.) 1. Különlenyomat.

<sup>2</sup> C. NEUBERG és P. ROSENTHAL, Biochem. Zeitschr. 61. (1914.) 171. Különlenyomat.

<sup>3</sup> W. ZALESKI és E. MARX, Biochem. Zeitschr. 47. (1912.) 185., 48. (1912.) 175. — W. ZALESKI, Ber. d. Deutsch. botan. Ges. 31. (1913.) 349., 32. (1914.) 457. Különlenyomatok.

pyroszólósavat s annak *Na*-sóját elbontó enzim — a NEUBERG-féle karboxiláz — jelenlétét néhány magasabb rendű növényben (borsó, *Lupinus*, *Vicia Faba*, búza, tengeri) is kimutatta.

STOKLASA nemcsak magasabb rendű növényekből, hanem állati szervezetből, így a vérből és különböző szervek kipréselt nedvéből is állított elő zimázt tartalmazó készítményeket. STOKLASA vizsgálatai, a melyek az állati eredetű zimázra vonatkoznak, több kétkedőre találtak (BLUMENTHAL, FREINDSCHMIDT, ARNHEIM és RÖSENBAUM, BENDIX, BATELLI [P. MAZÉ],<sup>1</sup> PORTIER, HARDEN és MACLEAN),<sup>2</sup> a kik tagadják az élesztőgombák zimázához hasonló enzimnek az állati szövetekben való jelenlétét és STOKLASA észleleteit baktériumok hatására igyekeznek visszavezetni. Hogy a nevezett bűvároknak ez az állítása mennyiben felel meg a valóságnak, ma még egyáltalában nincs eldöntve s nem is lesz addig, a míg a vizsgálati anyagban nem találnak alkoholt produkáló baktériumokat oly nagy számban, hogy az azok termelte alkohol mennyisége legalább is közel álljon a STOKLASA kísérleteiben talált alkohol mennyiségéhez.

A mi a zimáznak a magasabb rendű növényekből való előállítását illeti, a STOKLASA vizsgálatain kívül az irodalomban a következő adatokkal, illetve nézetekkel találkozunk, a melyek e kérdést közelebbről érintik.

P. MAZÉ,<sup>3</sup> ki borsómagvakból és a borsó 5—10 cm. hosszú csiranövényeiből igyekezett a zimázt izolálni, a következő végeredményre jutott: «les cellules végétales (et animales) renferment de la zymase puisqu'elles produisent de l'alcool; mais les méthodes d'isolement employées jusqu'ici ne permettent pas de l'extraire.» Ugyancsak P. MAZÉ<sup>4</sup> egy másik értekezésében pedig a következőket mondja: «...les fermentations qui se déclarent dans les milieux qu'ils réalisent sont dues, d'après mes résultats, à des microbes et non à la zymase isolée des cellules végétales (ou animales). Mais je frai remarquer ici une

<sup>1</sup> P. MAZÉ, *Ann. Inst. Pasteur* 18. (1904.) 535.

<sup>2</sup> C. OPPENHEIMER, *Die Fermente und ihre Wirkungen*, II. Band. (1913.) 739. Leipzig.

<sup>3</sup> P. MAZÉ, *Ann. Inst. Pasteur* 18. (1904.) 378.

<sup>4</sup> P. MAZÉ, *Ann. Inst. Pasteur* 18. (1904.) 535.

fois de plus qu'il ne résulte pas des faits qui précèdent, que les cellules animales et végétales ne renferment pas de zymase. Elles produisent de l'alcool lorsqu'on les prive d'air; et l'on ne peut attribuer sa production qu'à la zymase.»

W. PALLADIN és S. KOSTYTSCHEW<sup>1</sup> «*Anaerobe Atmung, Alkoholgärung und Acetonbildung bei den Samenpflanzen*» című dolgozatában a zimázra vonatkozólag a következőket olvashatjuk: «Nach den Untersuchungen STOKLASA's ist auch die anaerobe Atmung der Zuckerrübe mit der Alkoholgärung identisch. Dieser Forscher hat ausserdem die wichtige Tatsache hervorgehoben, dass ihm die Darstellung der Zymase aus verschiedenen pflanzlichen und tierischen Objekten gelungen sei. Da aber eine ganze Reihe von Beobachtungen verschiedener Forscher den Angaben STOKLASA's widerspricht und schlagende Einwände gegen die Methodik des böhmischen Forschers seitens MAZÉ und PORTIER geltend gemacht worden sind, so können wir die Frage von der Darstellung der Zymase aus Samenpflanzen und Tiergeweben noch nicht für abgeschlossen halten.» — «Die Meinung MAZÉ's, GODLEWSKI's und STOKLASA's bezüglich der Anwesenheit der Zymase bei Samenpflanzen wird durch unsere Versuche bestätigt. Es bleibt noch freilich dahingestellt, ob die Zymase der Samenpflanzen mit der Hefezymase identisch ist.»

H. M. VERNON<sup>2</sup> a növényi zimázzról a következőket mondja: «...bis aber bestätigende Beweise von anderen Forschern erhalten werden, ist es besser diese scheinbare Isolierung der Pflanzenzymase nicht als bewiesen anzunehmen.»

S. KOSTYTSCHEW,<sup>3</sup> ki a burgonyagumó anaerob lélegzésének tanulmányozásakor a  $C_2H_5OH:CO_2$  arányt — daczára az elegendő mennyiségben jelenlevő czukornak — minden esetben jóval kisebbnek találta,<sup>4</sup> mint az alkoholos erjedésnél, azt a

<sup>1</sup> W. PALLADIN és S. KOSTYTSCHEW, Zeitschr. f. physiol. Chem. 48. (1906.) 215.

<sup>2</sup> L. ASHER u. K. SPIRO, Ergebnisse der Physiologie 9. (1910.) 210.

<sup>3</sup> S. KOSTYTSCHEW, Ber. d. Deutsch. botan. Ges. 31. (1913.) 125. Különlenyomat.

<sup>4</sup> STOKLASA a burgonyagumó anaerob lélegzési folyamatának a vizsgálatakor azt találta, hogy a  $C_2H_6O:CO_2$  arány ( $CO_2=100$ ) 81·9, 109·7,



valószínű következtetést vont le, hogy e jelenség a zimáznak a burgonyagumóban való hiányára vezethető vissza.

A gyakorlatra nézve rendkívül fontos a földből kiszedett burgonyának és cukorrépának hosszabb időre nyuló oly módon való eltartása, hogy a keményítő-, illetve a cukortartalom csökkenése a lehető legkevesebb legyen. Tudjuk, hogy a tartalék-táplálék csökkenésének oka főrészből az illető szerveknek a lélegzési folyamatára vezethető vissza s így nemcsak tudományos, hanem gyakorlati szempontból is nagy fontossággal bír, hogy a növények lélegzési folyamatában oly jelentős szerepet játszó zimáz előállításának lehetősége a burgonya és cukorrépa raktározó szervéből — hivatkozással a fentebb említett nézetekre, valamint az állati eredetű zimázzal elmondottakra — véglegesen tisztázódjék.

Máglyákba rakott burgonyánál és cukorrépánál a máglya belsejében a lélegzés anaërob módon történik, tehát az ekkor keletkező széndioxid az alkoholos erjedés analogiájára csakis a karboxiláz hatására keletkeznék a piroszőlősavból, mint a növényi lélegzés egyik — nagyon valószínű — közbeeső termékéből.

Ha a burgonya és cukorrépa raktározó szervéből izolált s zimázt tartalmazó nyers enzim — minthogy a karboxiláz egyik tagja a zimáz-szisztémának — a piroszőlősavra a karboxilázt jellemző módon hat, akkor a karboxiláz előállításának kérdése az említett növényi szervekből megoldottnak tekinthető, ez pedig többek között újabb bizonyíték volna a mellett, hogy a burgonya és a cukorrépa zimáza azonos az élesztőgombák zimázával.

A zimáz előállításakor s a glükózoldatra való hatásának a vizsgálatokor lényegében STOKLASA szerint jártam el s ezért a következőkben az egész vizsgálat menetének a részletes ismertetése helyett csupán csak azokról a műveletekről fogok be-

---

114·8. Ezzel szemben KOSTYTSCHEW I. II. III. IV. V. VI. adatokat kapta, a melyek közül csak az V. vonatkozik rendes nyugvó gumóra, mert a III. traumatikus inger hatásának volt kitéve, az I., II., IV. gumókban lehülés útján növelte a cukortartalmat (a II. gumónál ezenkívül még traumatikus inger is szerepelt), végül a VI. csirázó gumó volt.

hatóbban szólani, a melyeket STOKLASA eljárásában a közölt eredeti módszertől eltérően végeztem. Ezeket a módosításokat részben technikai okokból, főleg azonban a kitűzött feladat legexaktabb (minden kétséget vagy ellenvetést kizáró) megoldásának biztosítása céljából alkalmaztam.

Már itt előrebocsátom, hogy különös gondot fordítottam a vizsgálataimhoz használt burgonya és cukorrépa egészségi állapotára, mert e körülmény figyelembevételére (I. a II. és III. táblázat adatait) éppen a baktériumok állítólagos szereplését illetőleg bír nagy fontossággal.

A 0·5%-os szublimátoldattal 30 percig sterilizált és csiramentes desztillált vízzel lemosott növényi szerveket a Suckow-féle répaórlóval finom péppé őröltem s a nyert pépet a Buchner-sajtóval 300—400 atmoszféra-nyomáson kipréseltem. A kipréselt léből alkohol-éter keverékével nyert csapadékot steril fehér vásznon keresztül gyorsan leszűrtem s a kapott nyers enzim szárítását gondosan sterilizált vákuumban végeztem.

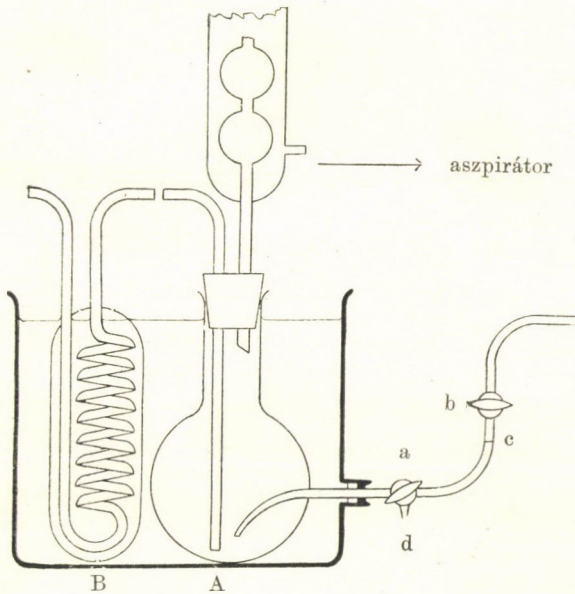
Vákuum-edénynek Scheibler-féle üvegesapos exsikkátort használtam, a melynek az aljára 30—40 cm<sup>3</sup> toluolt öntöttem. Arról, hogy a vákuum belseje az enzim kiszáritási ideje alatt csakugyan csirától mentes volt, egy alkalommal a következő módon győződtem meg. Mikor a nyers enzimet az exsikkátorba tettem, egyidejűleg lapos porcelláncsészékbe öntött 20—20 cm<sup>3</sup> körülbelül 20%-os sterilizált nádcukor- és glükózoldatot is elhelyeztem abban s a szárítás befejezése után meghatároztam az oldatok cukortartalmát és megvizsgáltam, hogy az oldatok, valamint a nyers enzim is nem tartalmaznak-e baktériumokat.

I. táblázat.

Nádcukor %		Glükóz %		Vizsgálat baktériumra
szárítás		szárítás		
előtt	után	előtt	után	
19·81	19·75	19·60	19·64	negatív

E táblázat adatai bizonyítják, hogy a kiszáritás ideje alatt a nyers enzimnek baktériumokkal való esetleges megfertőzése teljesen kizártnak tekinthető.

A. HARDEN<sup>1</sup> szerint STOKLASA a vizsgálatainak alkalmával azért nem talált baktériumokat, mert későn — a meghatározás befejez-



1. ábra.

tével — kereste azokat az erjedő czukoroldatban, a mikor is a baktériumok már mind elpusztultak volna.

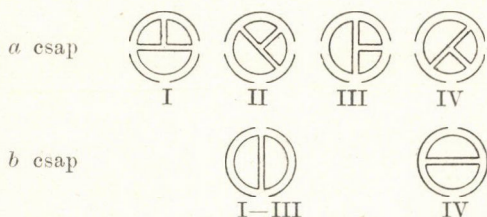
A. HARDENnek ezt a megjegyzését figyelembe véve, a nyers enzimben foglalt zimáznak a glükózoldatra való hatását az alábbi szerkezettel bíró lombikban vizsgáltam.

500 cm<sup>3</sup>-es kerekaljú lombik (A) oldalába az 1. ábrán feltüntetett módon egy hármás- (a) s egy kettős-fúratú (b) csappal ellátott üvegesövet forrasztottam, a mely üvegeső segítségével a lombik tartalmát baktériumok jelenlétére már a meg-

<sup>1</sup> C. OPPENHEIMER, Die Fermente und ihre Wirkungen, Band II. (1913.) 739. Leipzig.

határozás kezdetétől fogva s annak egész tartama alatt — a kísérlet menetének lényegesebb megzavarása nélkül — vizsgálhattam.

A baktériológiai vizsgálatához szükséges folyadékpróbának a lombikból való kivételét a következő módon végezzük. Az *a* és *b* csapok megfelelő állítása után (2. ábra I.) a toldalékeső végéhez kapcsolt mosópalaczkon (koncentrált lúgoldattal volt megtöltve) és szárítótornyon (Bruns-gyapotot és közte elszórva nátronmeszet és  $Cu SO_4$ -os habkődarabkákat, az aljában pedig koncentrált szublimát-oldatot tartalmazott) keresztül gummicső segítségével a lombik tartalmából annyit szívunk fel a toldalékesőbe, hogy az körülbelül a *c* jelig érjen, ezután az *a* csapot elzárjuk (2. ábra II.) s az *a* csap



2. ábra.

felett álló folyadékból (miután a *d* csövecskét gázlánggal sterilizáltuk) az *a* csapnak a 2. ábra III-ban feltüntetett helyzetbe való lassú elcsavarásával a baktériológiai vizsgálatához szükséges bizonyos számú cseppet a *d* csövecskén leengedjük. Mintavétel után a felszívott folyadékot visszabocsátjuk a lombikba, a toldalékesővön 1—2 percig steril és  $CO_2$ -tól mentes levegőt hajtunk át (csapok helyzete 2. ábra I.) s aztán mindkét csapot elzárjuk (2. ábra IV.)

A lombikon átszívott levegő, mielőtt a lombikba jutott volna, két mosópalaczkon, és három szárítótornyon áramlott át, a melyek balról jobbra haladva, a következő anyagokkal voltak megtöltve. I. Bruns-gyapot; II. koncentrált szublimátoldat; III. koncentrált káliúgoldat; IV. darabos nátronmész; V. toluollal megnedvesített Bruns-gyapot.

Az utolsó szárítótornyon gondosan sterilizált s üvegköpenyvel

védett spirálcsővel (*B*) volt összekötve, mely spirálcső a lombikkal együtt a kísérlet tartama alatt  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os vízfürdőben állott.<sup>1</sup>

A lombik kivezető csövet jeges vízzel hűtött 30 cm hosszú ALLIHN-féle hűtő alkotta, melynek felső vége  $\Gamma$  alakú csőben folytatódott s ez utóbbinak alsó vége  $\text{Cu SO}_4$ -os habkódarabakkal töltött U csővel, majd négy nagyobb fajta  $\text{Ca Cl}_2$ -os U csővel s végül 15 literes aszpirátorral állott összeköttetésben. A második és harmadik  $\text{Ca Cl}_2$ -os cső közé volt iktatva a lombikból eltávozó  $\text{CO}_2$  elnyelésére szolgáló GEISSLER-WETZEL-féle kálikészülék.

A kísérlet végrehajtására vonatkozólag STOKLASA eredeti közleményeire utalok, a keletkezett vegyületek kimutatását és meghatározását illetve pedig a következőket kívánom megemlíteni.

Az *alkohol* kvalitatív kimutatására az A. MÜNTZ<sup>2</sup> és M. BERTHELOT-féle<sup>3</sup> reakciókat használtam, az utóbbi reakció a MÜNTZ-féle reakciónak az ellenőrzésére szolgált. Az alkohol mennyiségi meghatározását a REISCHAUER-AUBRY-féle piknométerrel W. PALLADIN<sup>4</sup> előírása szerint végeztem.

A  $\text{CO}_2$ -nak az I. táblázatban feltüntetett mennyisége a kálikészülék súlyszaporulatából s a kísérleti oldatban elnyelt szénsav mennyiségéből adódott ki. A  $\text{Cu SO}_4$ -os s az utána következő két  $\text{Ca Cl}_2$ -os csőben a kísérlet befejezése után visszamaradt kevés szénsavat is áthajtottam a kálikészülékbe. A kísérleti oldatban elnyelt szénsav meghatározására a FRESSENIUS-CLASSEN-féle<sup>5</sup> eljárást használtam.<sup>6</sup>

<sup>1</sup> E spirális cső azt a célt szolgálta, hogy a lombikba bejutó levegő már  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ú legyen.

<sup>2</sup> A. MÜNTZ, Comptes rendus. 73. (1871.) 496.

<sup>3</sup> M. BERTHELOT, Ann. de chim. et de phys. 13. (1878.) 543.

<sup>4</sup> E. ABDERHALDEN, Handbuch d. biochem. Arbeitsmeth. III. 1. (1910.) 509. Berlin-Wien.

<sup>5</sup> A. CLASSEN, Ausgewählte Methoden der analytischen Chemie, II. Band (1903.) 653. Braunschweig.

<sup>6</sup> A kálikészülék lemerése után minden esetben meghatároztam az abban levő lúg által elnyelt eczetsavat is s azt levontam a  $\text{CO}_2$  mennyiségéből s hozzáadtam az eczetsavnak a talált mennyiségéhez.

A tejsav jelenlétét az alkohol ledesztillálása után visszamaradt folyadékban az UFFELMANN-féle<sup>1</sup> reagenssel s a tejsavas kalciumból oxidáció ( $KMnO_4$ ) útján nyert acetaldehid, illetve jodoform kimutatásával állapítottam meg. A tejsav mennyiségi meghatározását a foszforsavval erősen megsavanyított oldatból éterrel kioldott, majd lúggal közönbösített készítményben A. PARTHEIL<sup>2</sup> eljárása szerint végeztem.

Az eczetsavat a kénsavval megsavanyított oldatból vízgőzzel desztilláltam le s a nyert párlatban  $Fe_3Cl_8$ -dal s a kakodilreakcióval<sup>3</sup> mutattam ki, mennyiségi meghatározását pedig térfogatosságon (használt indikátor fenoltalein volt) végeztem. Az eczetsav mellett nyomokban bizonyára jelenlevő homologsavakat, mint eczetsavat vettem számításba.

II. táblázat.

Sorszám	Az enzim előállításához használt növényi szerv	A növényi szén egészségi állapota	A meghatározás időtartama	$CO_2$ g	Alkohol g	Tejsav g	Ecetsav g	$C_2H_6O : CO_2$
1	Burgonyagumó	egészséges	60óra	0·426	0·449	0·181	0·042	105·4
2	„	„	60 „	0·293	0·306	0·106	0·061	104·4
3	„	beteg	60 „	0·315	—	—	0·292	—
4	Czukorrépagyökér	egészséges	60 „	0·576	0·581	0·198	0·098	100·8
5	„	„	60 „	0·612	0·619	—	—	101·1
6	Burgonyagumó	egészséges	60 „	0·381	0·351	0·092	—	92·1
7	„	beteg	60 „	0·406	jól kimutatható	—	0·207	—
8	„	egészséges	64 „	0·182	0·189	0·058	0·021	103·8
9	Czukorrépagyökér	beteg	60 „	0·197	0·058	0·042	0·042	29·4
10	„	egészséges	60 „	0·220	0·261	—	0·057	118·6
11	„	„	60 „	0·518	0·548	0·123	—	105·7

<sup>1</sup> E. SCHMIDT, Ausführliches Lehrbuch der pharmazeutischen Chemie, V. Aufl. II. Band (1910.) 549. Braunschweig.

<sup>2</sup> A. PARTHEIL, Arch. d. Pharm. (1903.) 432.

<sup>3</sup> E. SCHMIDT, Ausführliches Lehrbuch der pharmazeutischen Chemie, V. Aufl. II. Band (1910.) 395. Braunschweig.



Mindenik meghatározáshoz a poralakú nyers enzimből 10 g-ot, a 15%-os glükózoldatból 100 cm<sup>3</sup>-t használtam, mely utóbbi 1%  $K_3PO_4$ -ot is tartalmazott. A II. táblázaton feltüntetett adatok 10—10 g. nyers enzimre vonatkoznak. A glükózoldat készítéséhez vett desztillált vizet először sterilizáltam s aztán toluollal telítettem, a használt antiszeptikum ugyancsak toluol volt, minden esetben 2%-os mennyiségben. A mi az erjedési folyamat megindulását illeti, azt az oldat habzásából mindjárt a kísérlet kezdetén meg lehetett állapítani.

Megemlítem még, hogy e vizsgálatokhoz használt burgonyagumók teljesen nyugalmi állapotban voltak s az egyes minták több fajtának a keverékéből állottak. A cukorrépa őszszel a földből kiszedett, tehát egészen kifejlett példányok voltak.

III. táblázat.

Sorszám	Vizsgálat baktériumokra								Megjegyzés
	A meghatározás kezdetétől a mintavételig eltelt idő órákban								
	0·5	2	5	10	20	30	50	60	
1	negatív								—
2	negatív								—
3	—	pozitív							penészgombák is jelen voltak
4	—	—	+	+	+	—	—	—	—
5	negatív								—
6	—	+	+	+	+	—?	+	+	—
7	pozitív								—
8	negatív								60 óra helyett 64 óra veendő
9	—	pozitív							—
10	negatív								—
11	negatív								—

E két táblázat adataiból legelső sorban is az *egészséges* növényi szerveket illetőleg a következők olvashatók ki.

A burgonya és cukorrépa raktározó szervéből izolált nyers enzim a glükózoldatra oly módon hatott, hogy tejsav és kevés

ecetsav mellett keletkező alkohol és szénsav viszonylagos mennyisége minden esetben igen közel esett az alkoholos erjedést jellemző 104·5 ( $CO_2=100$ ) arányhoz. Baktériumok jelenlétét az erjedő folyadékban, daczára a jelenlevő 2% toluolnak, két esetben (4 és 6) lehetett kimutatni, a többi esetben (1, 2, 5, 8, 10, 11) a vizsgálati folyadék mentes volt baktériumoktól. A baktériumok jelenléte a kérdés lényegét illetve csakis abból a szempontból bír fontossággal, hogy milyen mértékben, vagy pedig egyáltalában képesek-e azok a glükózoldatra az alkoholos erjedést jellemző módon hatni.

E kérdés eldöntésére a vizsgálati folyadékban talált baktériumokat bouillonban tenyésztettem s miután abban a kellő mennyiségben elszaporodtak (1 cm<sup>3</sup> 12.600 baktériumot tartalmazott), forralással inaktivált nyers enzim (10 g) s glükózoldat (100 cm<sup>3</sup>) elegyéhez 10 cm<sup>3</sup>-t adtam a bouillontenyészetből s a vizsgálatot a már ismert módon végeztem. A 60 óráig tartó kísérlet eredményeként 95 mg. szénsav keletkezett s alkoholnak nyomait sem találtam a vizsgálati folyadékban.

*Ezek alapján végérvényesen kimondhatjuk, hogy a burgonya és cukorrépa raktározó szervéből a zimáz szilárd aktiv állapotban izolálható s így STOKLASA ide vonatkozó észleletei saját vizsgálataim alapján is megerősítést nyertek.*

Lássuk ezután, hogy a beteg növényi szervekből előállított enzimek mi módon hatottak a glükózoldatra.

A 3. számú, gyűrűsbetegségben<sup>1</sup> szenvedő burgonyagumó

---

<sup>1</sup> A burgonyának ez a betegsége (O. APPEL foglalkozott vele legelőször szakszerűen [Kaiserliche Biologische Anstalt für Land- und Forstwirtschaft, Flugblatt Nr. 36.] a gumón, ha azt (mint jelen esetben is) erősebb fokban támadta meg, abban mutatkozik, hogy a kétfelé vágott gumón a héjtól befelé, a héj körvonalával párhuzamosan haladó barnás-fekete gyűrűs színeződés észlelhető, a mely színeződés az edénynyalábokat kitöltő baktériumoktól származik. A gyűrűsbetegséget okozó baktériumok korhadási baktériumok, de másodlagosan társulhatnak hozzájuk rothadást előidéző baktériumok is s ez esetben aztán a gyűrűsbeteg gumó belülről kifelé haladó elrothadását észlelhetjük. A gyűrűsbeteg burgonyában található baktériumok a talajból kerülnek a gumóba s a talaj változó baktériumflorája szerint különbözők lehetnek; és így ha egy baktériumfaj megtalálható



esetében alkohol jelenlétét egyáltalában nem sikerült a vizsgálati folyadékban kimutatni, azonban eczetsav jóval nagyobb mennyiségben keletkezett, mint az egészséges gumókból előállított nyers enzimeknél és baktériumokat nagy számban lehetett találni az erjedő folyadékban. Jelen esetben előbb anaërob (*N* légkörben), majd aërob viszonyok között eltartott eredeti gyűrűsbeteg gumóban is jelentékenyebb mennyiségű eczetsavat lehetett kimutatni s így nagyon valószínű (minthogy az alkohol-oxidáz BUCHNER és GAUNT<sup>1</sup> vizsgálatai alapján a sejtekből nem izolálható), hogy a baktériumok — tekintettel az enzim kiválasztására használt eljárásra — spóráik alakjában a gyűrűsbeteg gumóból (s nem a környezetből) kerültek a kiválasztott enzimbe, majd pedig ebből a glükózoldatba, a hol aztán — dacára a jelenlevő antiszeptikumnak<sup>2</sup> — elszaporodtak s a talajbaktériumok körében is elterjedt alkoholoxidázzal a glükózoldatból a zimáz hatására keletkezett alkoholt mindjárt eczetsavvá oxidálták.

Az erjedő folyadékban talált baktériumoknak az alkoholt eczetsavvá oxidáló képességüket BELJERINCK<sup>3</sup> eljárása szerint a kalciumkarbonátot s etilalkoholt tartalmazó sörzselatinon való tenyésztéssel is ki lehetett mutatni, s hasonló sajátsággal bíró baktériumok jelenlétét magából az eredeti gyűrűsbeteg gumóból közvetlenül nyert tenyészetekben is sikerült megállapítani.

Hasonló az eset a 7. sz. gyűrűsbeteg burgonyánál is, azzal a különbséggel, hogy itt alkohol jelenlétét is sikerült kimutatni, tehát nem az összes alkohol oxidálódott eczetsavvá.

---

valamely gyűrűsbeteg gumóban, nem következik, hogy például más vidékről származó beteg gumóban szintén megtalálható.

E betegségről részletesen olvashatni a m. kir. növényélet- és kórtani állomás kiadásában dr. BUDAHÁZY IMRE tollából megjelenő «Burgonya-betegségek» czímű munkában, a mely mű a szerző saját megfigyelésein kívül az irodalmi adatok igen gondos felhasználásával készült.

<sup>1</sup> L. ASHER u. K. SPIRO, Ergebnisse d. Physiologie, 12. (1912.) 191. Wiesbaden.

<sup>2</sup> «In Gegenwart von Toluol oxydieren die Essigbakterien Alkohol viel energischer als die Acetonpräparate.» *l. c.*

<sup>3</sup> E. ABDERHALDEN, Handbuch d. biochem. Arbeitsmeth. III. 2. (1910.) 1265. Berlin-Wien.

A 9. sz. cukorrépa a gyökérfarkrothadás<sup>1</sup> nevű betegségben szenvedett. E répából előállított nyers enzim hatására a glükózoldatból a várt mennyiségnél jóval kevesebb alkohol keletkezett. A hiányzó alkohol nem alakulhatott át eczetsavvá, mert annak mennyisége e gyökérfarkrothadásos cukorrépánál nem haladja túl az egészséges cukorrépánál talált legnagyobb eczetsav mennyiséget; baktériumok jelenlétét az erjedő folyadékban ki lehetett mutatni. További vizsgálatoknak a feladata eldönteni, hogy vajjon a keletkezett alkohol átalakulása, vagy pedig valamilyen az alkoholos erjedéssel párhuzamosan lefolyó s  $CO_2$ -ot termelő folyamat okozta-e ezt a fentebbi jelenséget.

\*

A burgonya és a cukorrépa raktározó szervéből előállított nyers enzimben a karboxiláz kimutatására ugyanazt a kísérleti berendezést használtam, mint a zimáz vizsgálatokor, azzal a különbséggel, hogy glükózoldat helyett a nyers enzimnek 1%-os piroszőlősavoldatra gyakorolt hatását vizsgáltam s nem 37 C°-on, hanem szobahőmérséken végeztem a kísérletet.

Hogy a burgonya és a cukorrépa nyers enzime a piroszőlősavra elbontólag hatott, azt mindjárt a kísérlet kezdetén meginduló gázfejlődés mutatta, a mely gáz  $CO_2$ -nak bizonyult, továbbá az A lombik tartalmából ledesztillált folyadékban a RIMINI-féle<sup>2</sup> reakcióval (nitroprusszidnátrium + piperidin) az acetaldehid jelenlétét jól ki lehetett mutatni.

*Ezek alapján az élesztőgombák zimázához hasonlóan a burgonya és a cukorrépa zimáz-rendszerében is jelen van a NEUBERG-féle karboxiláz.*

Az alábbi táblázat 10—10 g. nyers enzimben foglalt karboxiláz hatására 100—100 cm<sup>3</sup> 1%-os piroszőlősavoldatból keletkező termékek mennyiségét tünteti fel. Az acetaldehid meg-

<sup>1</sup> E betegségről I. szerzőnek «A cukorrépa gyökérfarkrothadásának biokémiai tanulmányozása» című dolgozatát. Kisérl. Közl. 18. (1915.) 73. és Biochem. Zeitschr. 69. (1915.) 245.

<sup>2</sup> J. WOHLGEMUTH, Grundriss der Fermentmethoden (1913.) 96. Berlin.

határozása végett a párlathoz ecetsavas *p*-nitrophenilhidrazin-oldatot adtam, a kiváló kristályos csapadékot egy órai állás után Gooch-tégelyen leszűrtem és 90 C°-on kiszáritva mértem.

IV. táblázat.

Sorszám	Az enzim előállításához használt növényi szerv	A meghatározás időtartama	CO <sub>2</sub> g	Acet- aldehid g
1	Burgonyagumó	48 óra	0·208	0·185
2	" "	60 "	0·242	0·198
3	Czukorrépagyökér	48 "	0·181	0·169
4	" "	60 "	0·214	0·199

NEUBERG és munkatársai a karboxiláznak, mint a zimáz-enzimrendszer egyik tagjának, több olyan sajátosságát állapították meg, a melyek megkülönböztetik a karboxilázt a zimáz többi enziméitől. Bizonyos külső behatások a zimáz amaz enzimeinek a működését befolyásolják károsan, a melyek a három szénatomú vegyületeket készítik a czukorból; ellenben a C<sub>3</sub>-mal bíró piro-szőlősavnak az elbomlása a külső behatásra kevésbé reagáló karboxiláz hatására zavartalanul történik.

A zimáz és karboxiláz között külső behatásokra létrejövő különbségek közül itt csak azokkal foglalkozom, a melyek saját kutatásaim alapján a burgonya és czukorrépa zimázában levő karboxilázra is érvényesek.

## I.

Az élesztőgombákból BUCHNER vagy LEBEDEV eljárása szerint készült lében (Press-Saft, Macerationssaft) a zimázhatás a lé eltartásakor 1—2 nap alatt eltűnik, az ilyen lé a glükózoldatot már nem tudja többé elerjeszteni. Ha a glükózoldattal már nem reagáló lével C. NEUBERG piro-szőlősavra hatott, csaknem oly erős CO<sub>2</sub>-fejlődést észlelt, mintha friss állapotban levő — tehát még aktiv zimázt tartalmazó — lével végezte volna a kísérletet. Ez a különbség a zimáz és karboxiláz között

NEUBERG<sup>1</sup> szerint a koenzimnek a léből az eltartás ideje alatt végbemenő eltűnésére volna visszavezethető, a mely koenzim csakis a zimáz (vagy helyesebben [zimáz—karboxiláz] enzimek) működéséhez szükséges, a karboxiláz koenzim segítsége nélkül is tudja a hatását kifejteni.

STOKLASA a magasabb rendű növényekből előállított szilárd nyers enzimeken is azt észlelte, hogy azok 14 napi eltartás után már nem hatottak a glükózoldatra; kérdés már most, vajjon tudják-e még az ilyen — hosszabb ideig eltartott — burgonya és cukorrépa nyers enzimek a piroszőlősavat elbontani.

E kérdés eldöntésére a burgonya és cukorrépa nyers enzimeit két hétig tartottam steril exszikkátorban, a mely idő eltelte után a glükóz- és piroszőlősavoldatokra való hatásuknak a vizsgálatok az alábbi táblázaton feltüntetett 10-10 g. nyers enzimre vonatkozó adatokat nyertem.

V. táblázat.

Sorszám	Az enzim előállításához használt növényi szerv	A meghatározás időtartama	100 cm <sup>3</sup> 10%-os glükózoldatból CO <sub>2</sub> g	100 cm <sup>3</sup> 10%-os piroszőlősavoldatból CO <sub>2</sub> g
1	Cukorrépagyökér	48 óra	0·006	0·140
2	Burgonyagumó	51 "	0·011	0·105
3	" "	48 "	0·003	0·208
4	" "	48 "	0·004	0·082

E táblázat adataiból láthatjuk, hogy a burgonya és cukorrépa zimázának és karboxilázának az érzékenysége az eltartási idő iránt az élesztőgombák zimázához, illetve karboxilázához hasonló viszonyokat tüntet fel.

<sup>1</sup> C. NEUBERG és P. ROSENTHAL, Biochem. Zeitschr. 51. (1913.) 137.; 61. (1914.) 172. Különlenyomatok.

## II.

C. NEUBERG és N. IVANOFF<sup>1</sup> azt találta, hogy a LEBEDEW-féle maczeráczíós-lé bizonyos anorganikus és organikus anti-szeptikumok (nátriumfluorid, merkuriklorid, formaldehid, fenol, timol) hozzáadása után a nádcukor- vagy glükózoldatot már nem erjesztette el, ellenben a piroszőlősavat a karboxilázt jellemző módon még elbontotta, a miből az következik, hogy a karboxiláz bizonyos mérgek iránt jóval kevésbé érzékeny, mint a zimáznak a többi enzime. Ezzel az eljárással NEUBERG szerint igen egyszerű módon demonstrálható a karboxiláz működése cukor jelenlétében is, a mint azt saját észleleteim is bizonyítják, a melyeknek eredményeit — bár ha azok szorosan véve nem tartoznak ide — érdemesnek tartom az alábbiakban egészen röviden felemlíteni.

<i>a</i>	<i>b</i>
10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé	10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé
5 « 2.5% os glükózoldat	5 « 2.5%-os piroszőlősavoldat
10 « dest. víz	10 « dest. víz
<i>c</i>	<i>d</i>
10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé	10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé
5 « 2.5%-os piroszőlősavoldat	5 « 2.5%-os glükózoldat
5 « 2.5%-os glükózoldat	1 « 1 %-os HgCl <sub>2</sub> oldat
5 « dest. víz	9 « dest. víz
<i>e</i>	<i>f</i>
10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé	10 cm <sup>3</sup> Lebedew-f. lé
5 « 2.5%-os piroszőlősavoldat	5 « 2.5%-os glükózoldat
1 « 1 %-os HgCl <sub>2</sub> oldat	5 « 2.5%-os piroszőlősavoldat
9 « dest. víz	1 « 1 %-os HgCl <sub>2</sub> oldat
	4 « dest. víz
	24 óra után keletkezett
	CO <sub>2</sub> cm <sup>3</sup>
<i>a</i> .....	4.8
<i>b</i> .....	5.3
<i>c</i> .....	14.8
<i>d</i> .....	0.3 ?
<i>e</i> .....	3.2
<i>f</i> .....	3.6

<sup>1</sup> C. NEUBERG és N. IVANOFF, Biochem. Zeitschr. 67. (1914.) 1. Különlenyomat.

A *c* alatti adatok megerősítik M. OPPENHEIMER<sup>1</sup> ama észleletét, hogy a piroszőlősav jelenléte aktiválólag hat az alkoholos erjedésre; a piroszőlősav és glükóz együttes erjedésekor 4·7 cm<sup>3</sup>-rel több CO<sub>2</sub> keletkezett, mint a mikor azok külön-külön (*a* és *b*) erjedtek. A *d* kísérletben a glükóz erjedése a HgCl<sub>2</sub> erős mérgező hatása folytán nem indulhatott meg (0·3 cm<sup>3</sup> egyáltalában nem jöhet tekintetbe). Végül az *f* alatti adatokból látható, hogy a karboxiláznak a piroszőlősavra való hatása glükóz jelenlétében is vizsgálható, feltéve, hogy egyidejűleg HgCl<sub>2</sub>-ot is tartalmaz az oldat; a HgCl<sub>2</sub> meggátolta a glükóznak az erjedését s így a piroszőlősavnak az alkoholos erjedést aktiváló tulajdonsága sem érvényesülhetett.

A burgonya és cukorrépa karboxiláznak a viselkedését nátriumfluorid, merkuriklorid és formaldehid antiszeptikumokkal szemben az alábbi táblázat adatai tüntetik fel.

VI. táblázat.

Sorszám	Az enzim előállításához használt növényi szerv <sup>2</sup>	A meghatározás időtartama	100 cm <sup>3</sup> 10%-os glükózoldatból CO <sub>2</sub> g	100 cm <sup>3</sup> 1%-os piroszőlősavold.-ból CO <sub>2</sub> g	Az antiszeptikum koncentrációja
1	Burgonyagyumó	60 óra	0·623	0·211	—
2	„	60 „	0·006	0·109	0·05% HgCl <sub>2</sub>
3	„	60 „	0·002	0·128	1·00% NaF
4	„	60 „	0·004	0·096	0·50% HCOH
5	Cukorrépagyökér	60 „	0·318	0·177	—
6	„	60 „	0·002	0·091	0·05% HgCl <sub>2</sub>
7	„	60 „	0·028 ?	0·140	1·00% NaF
8	„	60 „	0·003	0·102	0·50% HCOH

<sup>1</sup> M. OPPENHEIMER, Zeitschr. f. physiol. Chem. 93. (1914.) 235. Különlenyomat.

<sup>2</sup> Az enzim mennyisége minden esetben — valamint a VII. táblázatban is — 10 g volt.

## III.

Ha a LEBEDFW-féle maczerációs-levet vízfürdőn 10–15 perczig 50–51 C°-on melegítjük és a zavaros oldatot megsűrjük, a szűrlet — a mint azt C. NEUBERG és P. ROSENTHAL megfigyelte — a glükózoldatra hatástalan, ellenben a piroszőlősavat még egészen erélyesen elbontja. Ez az észlelet bizonyítja a karboxiláznak jóval kevésbé érzékeny természetét — jelen esetben a magasabb hőmérséklet iránt —, szemben a zimáznak a többi enzimével.

Annak megvizsgálására, hogy a burgonya és cukorrépa karboxiláza mennyiben bír hasonló természettel, a burgonyagumó és cukorrépagyökér kipréselt nedvét vízfürdőn 51 C°-on 15–20 perczig melegítettem s a leszűrt folyadékból a már ismertett eljárással választottam le a nyers enzimet s vizsgáltam a glüköz- és piroszőlősavoldatokra kifejtett hatását.

VII. táblázat.

Sorszám	Az enzim előállításához használt növényi szerv	A meghátározás időtartama	100 cm <sup>3</sup> 10%-os glükózoldatból CO <sub>2</sub> g	100 cm <sup>3</sup> 1%-os piroszőlősavoldatból CO <sub>2</sub> g
1	Cukorrépagyökér	48 óra	0.008	0.242
2	Burgonyagumó	48 "	0.007	0.196
3	"	48 "	0.004	0.198

A nyert eredmények bizonyítják, hogy a burgonya és cukorrépa karboxiláza is jóval kevésbé érzékeny a magasabb hőmérséklettel szemben, mint e növények zimázanak többi enzime.

## Összefoglalás.

1. A burgonya és a cukorrépa raktározó szervéből a zimáz szilárd aktív állapotban izolálható s így J. STOKLASA ide vonatkozó észleletei saját vizsgálataim alapján is megerősítést nyertek.

2. Az erjedő folyadékban, ha előfordultak is némely esetben baktériumok, azok nem bírtak azzal a tulajdonsággal, hogy 2% toluol jelenlétében a glükózt az alkoholos erjedést jellemző módon bontsák el.

3. Gyűrűsbeteg burgonyagumókból előállított nyers enzim oly módon hatott a glükózoldatra, hogy alkoholt egyáltalában nem, vagy csak nyomokban sikerült az erjedő folyadékban kimutatni, helyette nagyobb mennyiségű eczetsav megjelenését lehetett észlelni; ezt az eczetsav-többletet alkohoxidázt termelő talajbaktériumok készítették a zimáz hatására keletkező alkoholtól. A talajbaktériumok a gyűrűsbeteg gumókból spóráik alakjában kerültek a nyers enzimbe.

4. A gyökérfarkrothadásos cukorrépa-kból kapott nyers enzim hatására keletkező alkohol és szénsav viszonylagos mennyisége jóval kisebb volt, mint az alkoholos erjedésnél; e jelenség megfejtése eldöntetlen maradt.

5. Az élesztőgombák zimázához hasonlóan a burgonya és cukorrépa zimáz-rendszerében is jelen van a NEUBERG-féle karboxiláz.

6. A karboxiláz a burgonya és cukorrépa zimázából is kiválasztható, mert sikerült oly készítményt előállítani, a mely csakis a piroszőlősavra hatott, a cukoroldatot változatlanul hagyta.

7. Az eltartási idő, valamint a különböző antiszeptikumok iránt a burgonya és cukorrépa karboxiláza — hasonlóan az élesztőgombák karboxilázához — jóval kevésbé érzékeny, mint a zimáz-rendszer többi enzime.

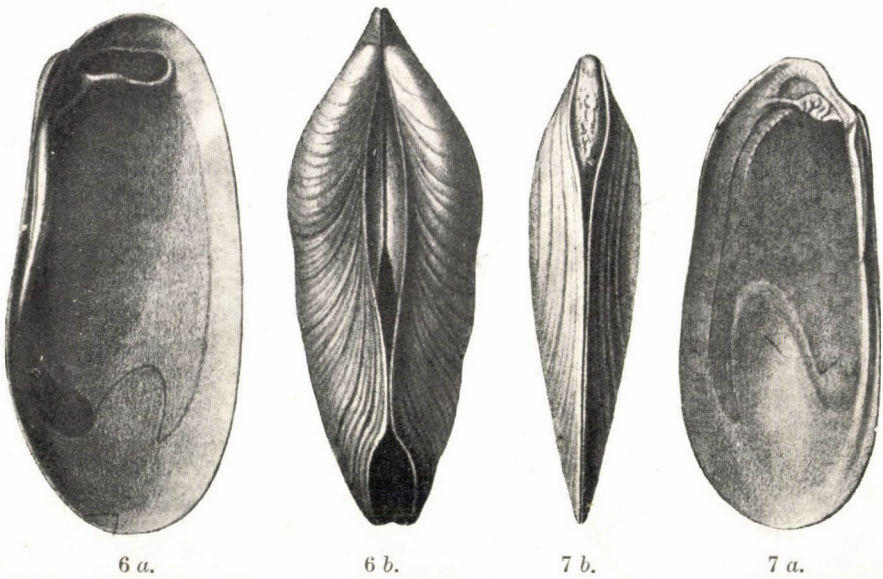
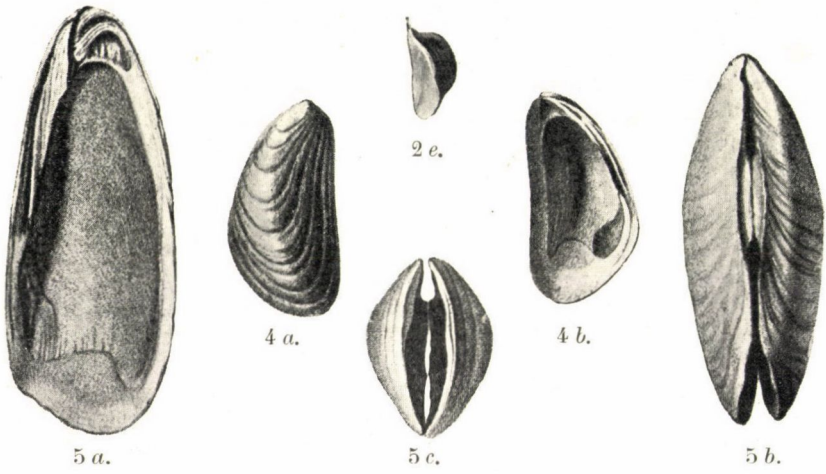
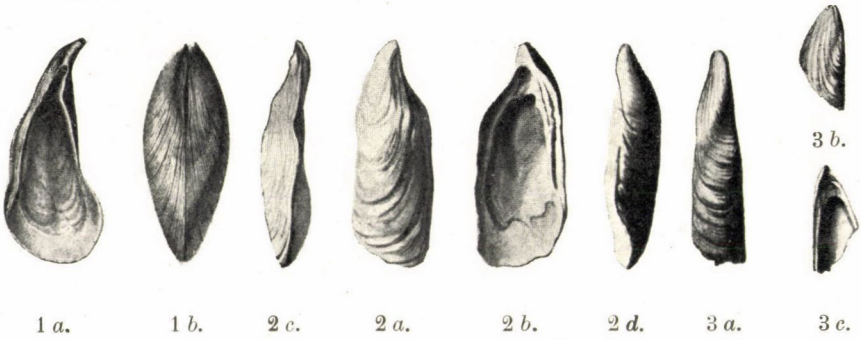




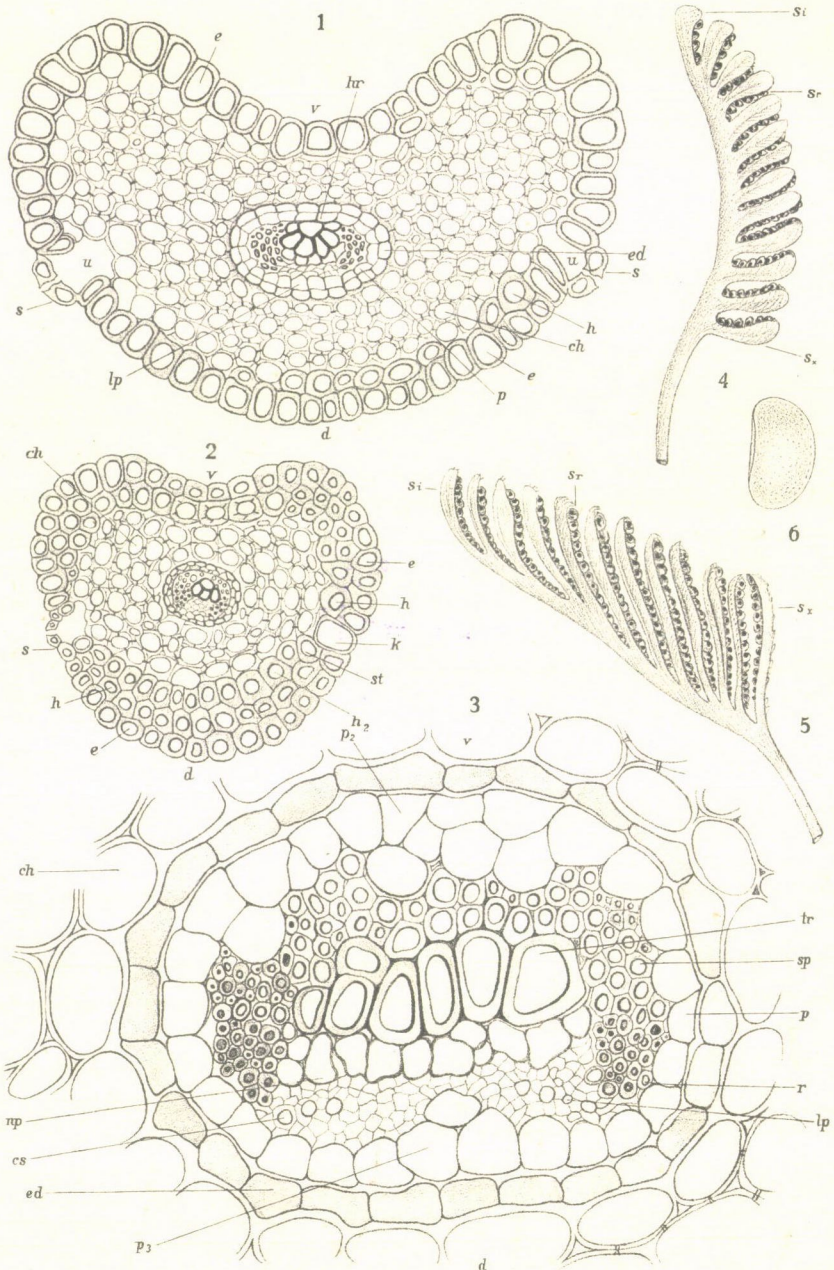
## II. tábla.

- 1 a. *Congerina spathulata* PARTSCH belső oldala.
- 1 b. *Congerina spathulata* PARTSCH a hasi táj felől.
- 2 a. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. külső oldala.
- 2 b. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. belső oldala.
- 2 c. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. a hasi táj felől.
- 2 d. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. a háti táj felől.
- 2 e. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. hátulról.
- 3 a. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. külső oldala.
- 3 b. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. csőrének külső oldala.
- 3 c. *Dreysensiomya dactylus* BRUS sp. csőrének belső oldala.
- 4 a. *Dreysensiomya arcuata* FUCHS sp. külső oldala.
- 4 b. *Dreysensiomya arcuata* FUCHS sp. belső oldala.
- 5 a. *Dreysensiomya aperta* DESH sp. külső oldala.
- 5 b. *Dreysensiomya aperta* DESH sp. a háti táj felől.
- 5 c. *Dreysensiomya aperta* DESH sp. hátulról.
- 6 a. *Dreysensiomya intermedia* FUCHS belső oldala.
- 6 b. *Dreysensiomya intermedia* FUCHS háti tája.
- 7 a. *Dreysensiomya Schröckingeri* FUCHS belső oldala.
- 7 b. *Dreysensiomya Schröckingeri* FUCHS hasi tája.

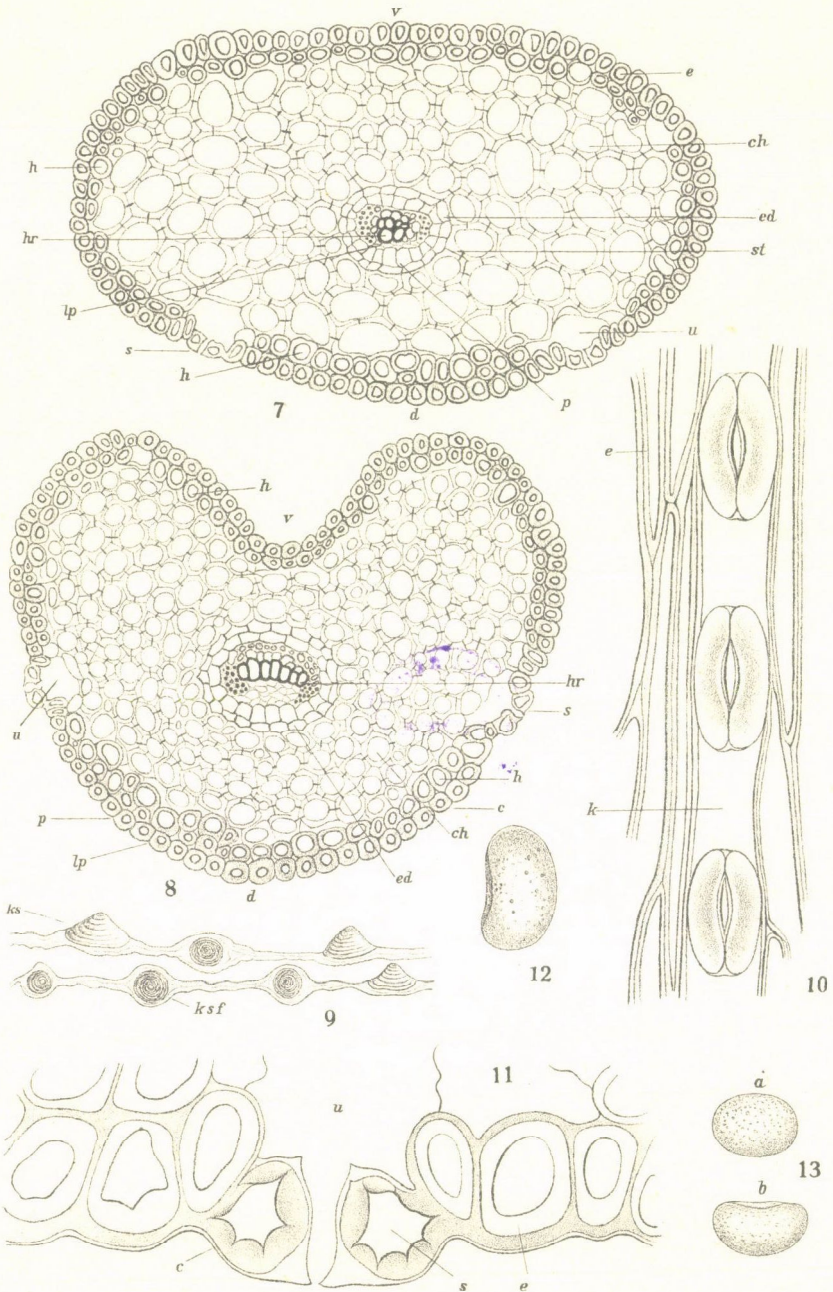
Az 1a. és 1b.  $\frac{1}{2}$ -szeres nagyságban, a többi természetes nagyságban.





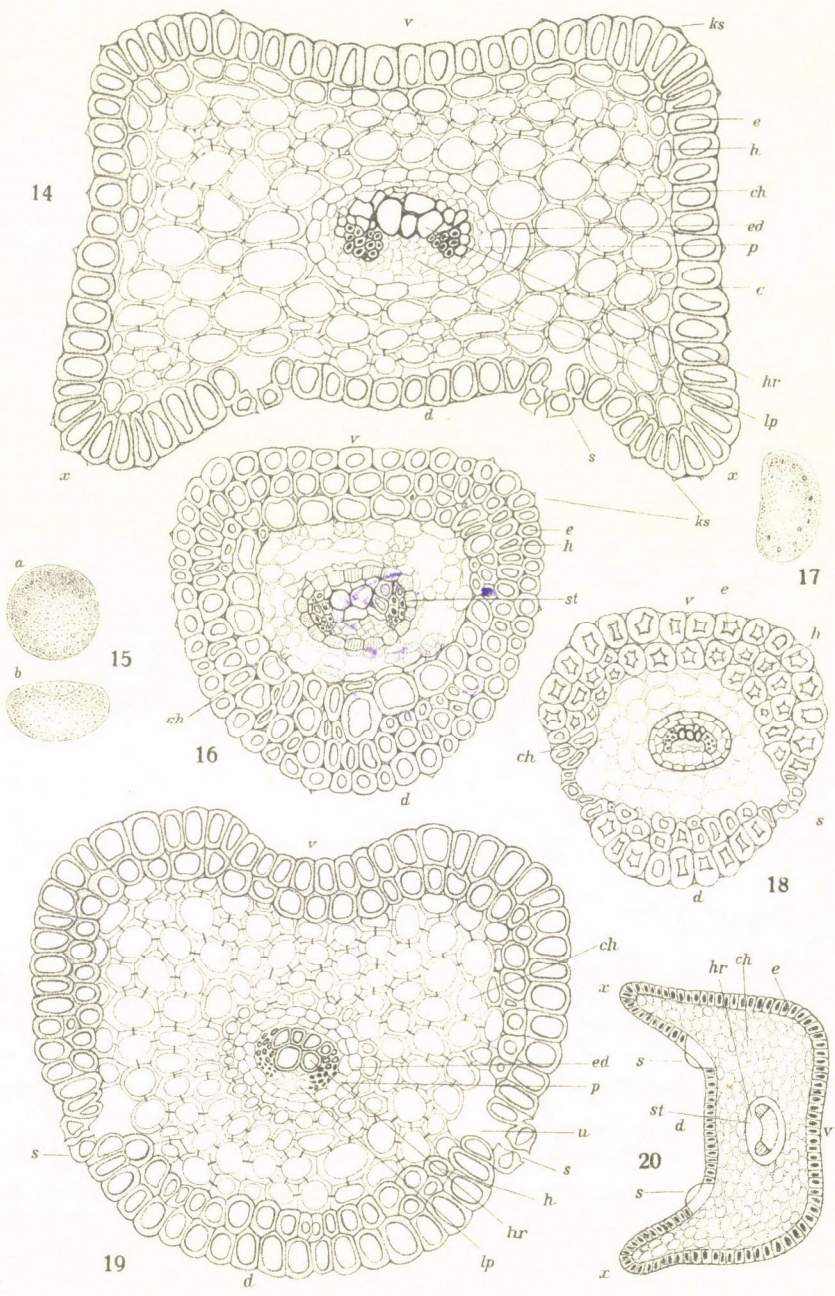




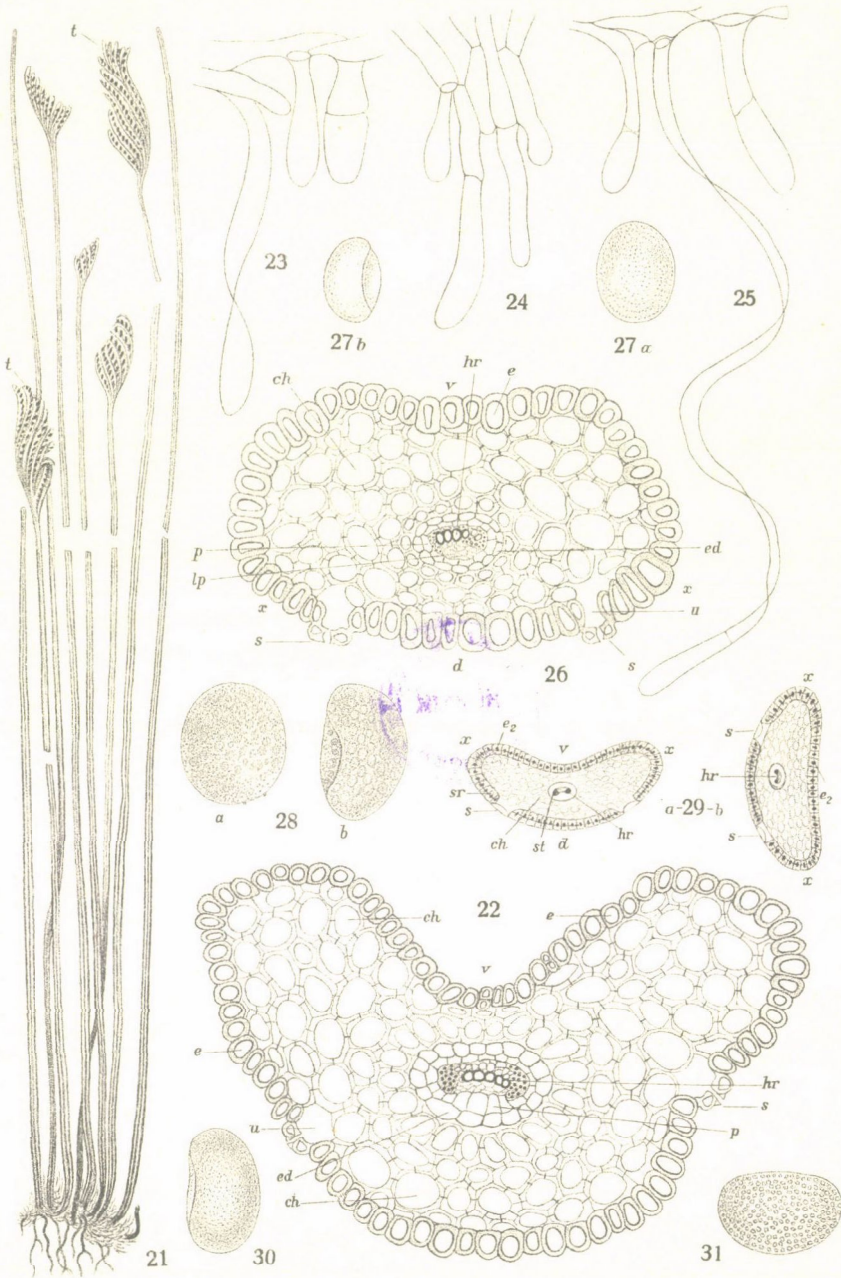








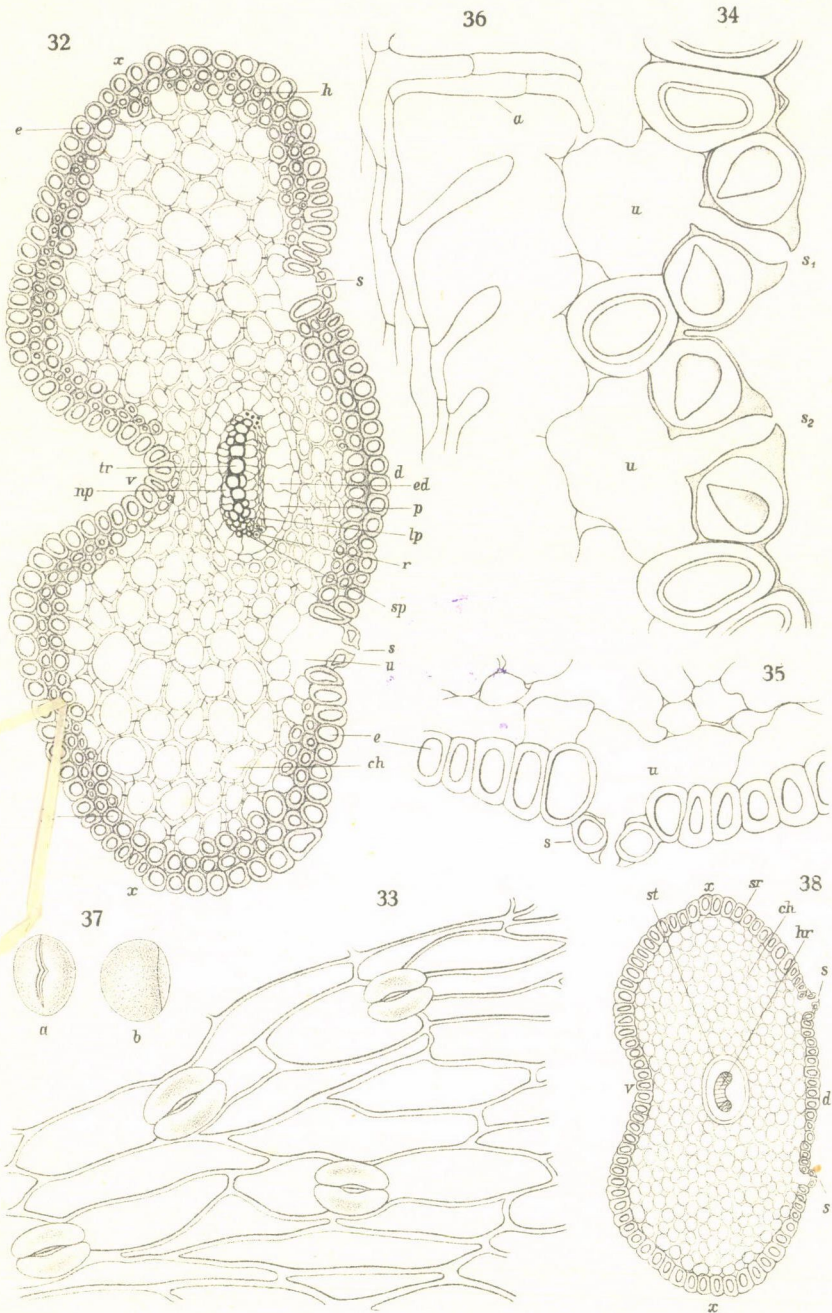




del. A. Richter: Lugduno-Batavorum.

Th. Bannwarth, Wien VIII. lith. nyomása.







## A POLYTOMA UVELLA CYTOLOGIAI VISZONYAIRÓL ÉS MITOTICUS OSZTÓDÁSÁRÓL.

Ifj. ENTZ GÉZA I. tagtól.

(Két táblával.)

A *Volvocaceák* között a *Chlamydomonadidák* és speciálisan a *Polytoma uvela* cytologiai viszonyaival már ismételtelen foglalkoztak. A régebbi búvárok idevágó tanulmányait összefoglalta FRANCÉ R.: «Die *Polytomeen*, eine morphologisch-entwicklungsgeschichtliche Studie» című tanulmányában, mely 1894-ben jelent meg (23). Ugyanez évben ismertette BLOCHMANN (2) a *Polytoma* osztódását és felismerte, hogy ez mitoticus. 1901-ben DANGEARD, mint számos más véglénynek, úgy a *Polytoma uvela*-nak osztódásával is foglalkozott (7) és kimutatta, hogy osztódása mitoticus; chromosomák jelennek meg, melyeknek számát azonban nem tudta pontosan megállapítani, mert majd 4-et, majd 6-ot talált; úgy véli, hogy typicus számuk 6. Osztódása alkalmával centriolumot nem figyelt meg és azt hiszi, hogy az nincsen is.

1901-ben, majd 1903-ban PROWAZEK tanulmányozta (42, 43) a nyugvó és osztódó szervezetet. Tanulmánya az ez ideig megjelentek között a legbehatóbb és legfontosabb is. Szerinte osztódás alkalmával kitűnik, hogy a magtesttel egy kis rög függ össze nyél közvetítésével, ez a kis rög később a magból a plasmába nyomul, s ott udvartól körülvéve, két részre osztódik; ez a két testecske utóbb talán az osztódási orsó végére vándorolva, centriolummá válik, de ezt — PROWAZEK maga is hangsúlyozza — kétségkívüli bizonyossággal megállapítani nem tudta. A chromosomák számáról korábbi dolgozatában azt írja, hogy

10-nél sokkal több nem lehet (42 p. 55), későbbi dolgozatában pedig (42 p. 400) azt írja, hogy számuk 8 lehet. Az ostor megerősítéséről azt jegyzi fel, hogy plasmaticus gömbből ered; ez a gömb fonalas elkülönüléssel függ össze, a mely a mag felé tekintő gömbsüvegszerű (calottenartig) plasma-elkülönülésben végződik, vagy pedig sugárkúpot alkot. A gömböt a basalis testekkel hasonlítja össze. Dolgozatának többi adatára a megfelelő tények ismertetése alkalmával kell rátérnem.

1904-ben HARTMANN M. a *Volvox*-szal foglalkozott (26) és feljegyezte, hogy kevés számú szalagszerű chromosomája van, az osztódáskor pedig centriolium szerepel. Sajnos azonban ezen rövid feljegyzésen kívül semmi egyéb e tényre vonatkozó adatot, rajzot sem közölt. MERTON 1908-ban a *Pleodorina illinoisensis* mitoticus osztódását írta le (36) és kimutatta, hogy mintegy 12 chromosomája van, de centrioluma nincsen. Ugyanebben az évben WOLLENWEBER (55) a *Haematococcus*-fajok egész fejlődéskörével foglalkozott, de tanulmányában minket érdeklő cytologiai részlet nincsen. Igen behatóan foglalkozott REICHENOW a *Chlamydomonadidák* közül a *Haematococcus pluviialis* mitoticus osztódásával (45); kimutatta, hogy 32 chromosomája van, centrioluma nincsen. 1913-ban magam (20) publikáltam előzetes jelentését jelen tanulmányomnak, a melyben a *Polytoma uwelli* mitoticus osztódásáról, chromosomáiról, a kimutatható centriolumról és centrodesmosisról referáltam egy bemutatás kapcsán, melyet a német zoológusok 1913. évi brémai vándorgyűlése alkalmával tartottam. 1914-ben A. P. JAMESON az Archiv für Protistenkunde 33. kötetében közölt «A new Phytoflagellate (*Parapolytoma satura* n. g., n. sp.) and its method of nuclear division» czímen egy értekezést (28), a melyben a *Polytoma uwelli*ával igen sokban megegyező, saprophyticusan élő, ostoros véglény osztódását ismertette. Dolgozatának több feljegyzése megegyezik a *Polytomán* megfigyeltekkel, e szerint megerősíti a tőlem előzetes jelentésben közölt e rokon szervezeten tett megfigyeléseket, nem egy feljegyzése azonban eltér tőlük, így az, hogy ő sem centriolumot nem talált, sem centrodesmosist nem figyelt meg. Minthogy e szervezet külső megjelenésében annyira megegyezik a *Polytomá*val, hogy JAMESON véleménye szerint bizonyára sokan összetévesz-



tették már vele, méltán föltűnhet az osztódásban jelentkező nagy különbség. Ha azonban meggondoljuk, hogy az *Amoebák* között a nyugalomban lévők alig megkülönböztethető alaki eltérése mellett magosztódásukban mily nagyfokú eltérés észlelhető, nyugodtan fogjuk e jelenséget regisztrálni.

Mint a *Volvocaceák* és *Chlamydomonadidák* osztódására vonatkozó tanulmányok összegezéséből kitűnik, a dolgozatokban az egymásnak ellentmondó adatok és feljegyzések egész tömege foglaltatik, melyeknek tisztázása céljából nagyon is helyénvalónak látszik tanulmányomnak egész terjedelmében való közlése.

\*

Az ezerkilencszáztizenharmadik év február hó közepétől két heti megszakítással június végéig Berlinben az «Institut für Infektionskrankheiten ROBERT KOCH»-ban protistologiai tanulmányokat végeztem, mit annak köszönhetek, hogy a nagyméltóságú vallás- és közoktatásügyi miniszter úr az 1912—13-ik iskolaévre külföldi tanulmányútra küldött ki. Noha tanulmányútam egész lefolyásáról a nagyméltóságú miniszter úrnak jelentést tettem, még sem mulaszthatom el ezt az alkalmat, hogy e helyen is kifejezzem őszinte hálámat e reám nézve éppoly tanulságos, mint megtisztelő kiküldetésért. A megnevezett intézetben HARTMANN M. tanár — akkor az illető osztály vezetője — ajánlatára a *Polytoma uvella*-val kezdtem foglalkozni, mely véglényt trágyaönteléken tenyésztettem. Ezt az érdekes, saprophyticus *Chlamydomonadidát* először elevenen tanulmányoztam, majd pedig festett, állandósított készítményeken. Tanulmányozás közben beigazolódott, hogy ezzel a kis ostoros szervezettel cytologiai szempontból ma is érdemes foglalkozni. Hogy eme érdekes vizsgálatokat elvégezhettem, HARTMANN M. tanár úrnak kell őszinte köszönetet mondanom úgy szíves útbaigazításaiért, valamint ama baráti jóindulatért, a melylyel egész berlini tartózkodásom alatt kitünttetett.

Vizsgálataim eredményének egy részét — mint már említém — a német zoologusok brémai vándorgyűlésén mutattam be, melyről az előzetes jelentés e társulatnak kiadványaiban meg is jelent (20). Az elmúlt évben hivatalos tanári tevékenységem

annyira lekötött, hogy noha tanulmányom úgyszólván sajtókészen volt, annak technikai részét — az ábrák csoportosítását — csak most végezhettem be.

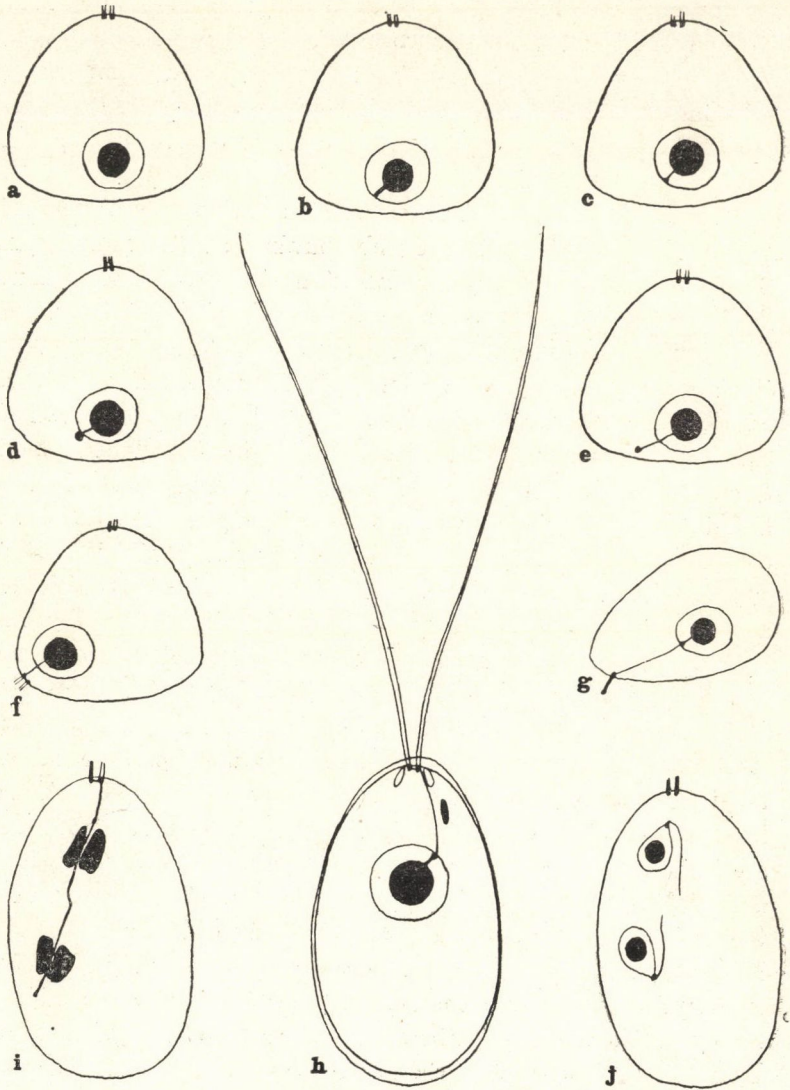
Mielőtt vizsgálataim eredményeinek ismertetésére reátérnék, pár szóval meg kell emlékezni arról, hogy mily módon végeztem azokat. Mint említém, *Polytomát* trágya-, és pedig tehéntrágya-önteléken tenyésztettem. A tenyészet megindítása czéljából körülbelül 1 kg. friss tehéntrágyát helyeztem el mintegy másfél literes üveghengerbe és a trágyára annyi vizet töltöttem, hogy a szilárd részek fölött egy centiméter magas réteget alkosson. Az így elkészített öntelékre, ha a víz kezdett elpárologni, vezetéki vizet utánatöltöttem. Az önteléken a *Polytomák* egynéhány nap, esetleg egy hét múlva jelentek meg, illetőleg szaporodtak el annyira, hogy belőlük preparatumokat lehetett készíteni. Megkísértettem a *Polytomákat* tiszta kulturában bouillonban, valamint agar-agar fölött összegyűlt condens vízben is tenyésztetni; mindkét tenyésztési módszer bevált ugyan, de, minthogy nem állott annyi idő rendelkezésemre, a mennyi szükséges lett volna, a mely alatt kellő nagyságú tiszta kulturát kaphattam volna, az eredeti gyorsabb tenyésztés mellett kellett maradnom. A készítményeket a trágyalé felületén lebegő bacterium-hártyából a következő módon állítottam elő. A szapannal jól megmosott és abszolút alkohollal kezelt száraz fedőlemezt a bacterium-hártyára ejtettem és rajta hagytam öt perctől egynegyed óráig, sőt óráig. A *Polytomák* a fedőlemeznek a trágyalével érintkező, tehát alsó felületére igen nagy számban telepednek és olyan szorosan reátapadnak, mintegy reáragadnak, hogy a fedőlemezt levéve, vele együtt rögzíthetők és megfesthetők. Rögzítésre rendszeren desztillált vízben oldott, koncentrált, 50—60° C-ra fölmelegített szublimátot, az erős FLEMMING- és a SCHAUDINN-féle oldatot használtam; szublimátban mintegy  $\frac{1}{4}$  perczig, azaz csak addig hagytam a készítményt, a míg 16-ot számláltam, ekkor kivéve, lemostam vezetéki vízzel, azután pedig 70%-os alkoholban oldott, világos borsárga jóddoldatba helyeztem és benne hagytam mindaddig, a míg az a jódd sárga színét felvette. Ezután ROSENBUSCH-féle vashæmatoxylinnel, az eredeti HEIDENHAIN-féle vashæmatoxylinnel, methylzöld-savanyú

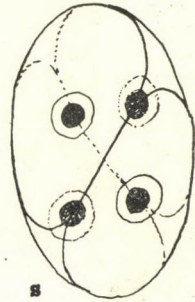
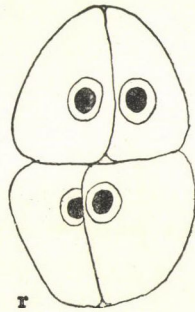
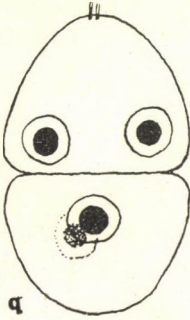
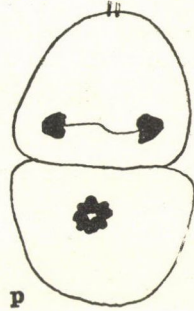
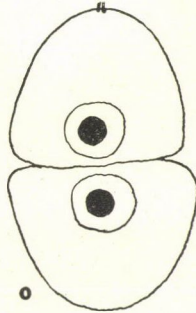
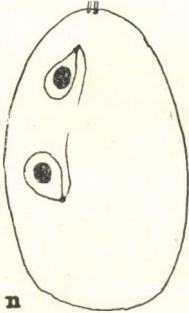
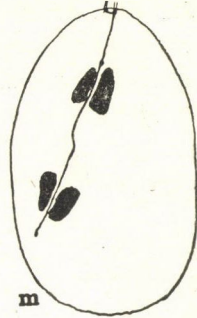
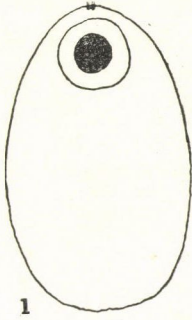
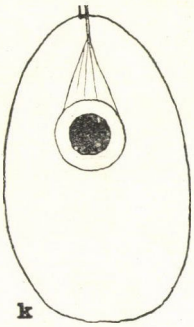
fuchsinnal és a nedves eljárás szerinti GIEMSA-oldattal festettem készítményeimet, majd pedig kanadabalzsamban tettem el. A készítményekről ZEISS-féle mikroszkopi rajzolókészülékkel készítettem el a rajzokat. A nagyítás: ZEISS APOCHR. 2 mm., n. a. 1:3, comp. Ocular 12, a nagyítás tehát mintegy 1500—2000-szeres.

Tanulmányomat részben az élő szervezeten végeztem, részben az említett készítményeken.

Az eleven szervezeteken végzett tanulmányom csak megerősíti mindazt, a mit már a régebbi bűvárok: EHRENBERG, STEIN, BLOCHMANN és mások leirtak, FRANCÉ pedig monograficus munkájában összefoglalt (23). Ismeretes, hogy a *Polytoma*-nem a BÜTSCHLI féle *Chlamydomonadidae* családba tartozó, egyenként élő *Volvocacea*, melynek chromatophorja nincsen s ezért szintelen és saprophytically táplálkozik. Alakja ellipticus körvonalú, egészben forgási ellipsoid. Testének elülső végéből ered a két egyenlő hosszú ostor (VIII. tábla, 6. ábra). A plasmatestben jól látható a gömbölyű, hólyagocska-typusú mag, a két ostor tövén egy-egy lüktető üregecske, a test elején van továbbá a vörös szemfolt is. A test hátulsó végén erősen fénylő rögök láthatók, a melyekről ismeretes, hogy keményítóből állanak. Meg kell azonban jegyezni, hogy ez a keményítő a tölem megfigyelt esetekben jódreactiont csak akkor adott, ha a készítményt beszárítottam s csak ekkor tettem hozzá jódkalkoholt, ismét beszárítani hagytam, ezután pedig vizet juttattam hozzá. A reactio így is igen gyenge, jelélül annak, hogy nem tömör keményítő, hanem — talán vízfölvétel következtében — módosult. SASSI szerint (47) a *Polytoma welli*-ben volutin is van, talán ezzel azonosak a számos példány pelliculája alatt látható, erősen festődő pálczika- vagy lemezkeszerű testecskék (IX. tábla, 49. rajz). Még meg akarom jegyezni, hogy a *Polytoma*-test végében levő keményítő körül a plasmatis rész egészen úgy festődik — methylenzöld savanyú fuchsinnal —, mint a *Chlamydomonas*ok pyrenoidja, ugyanis sötétvörös (atropurpur) színt vesz fel.

A *Polytoma* testfelületét borító burok, a periplast, az eleven szervezeten jól kivehető, már a régebbi bűvárok is jól ismerték. A periplast nem mindenütt borítja a testet egyenlően; ugyanis az ostorok tövénél körülbelül mégegyszer olyan távol





van a plasmatest felületétől, mint máshol és az ostorok mintegy átfúrják. A *Chlamydomonadidák* rajzóinak periplastja az újabb vizsgálatok szerint nem cellulose (OLTMANN (38) Algen I. p. 141); WOLLENWEBER szerint (55) a *Haematococcus*-fajok pelli-  
culája nem áll celluloseból (55. p. 292); DOFLEIN (14. p. 514) pedig csak azt írja, hogy a *Polytoma* burka rendkívül vékony, de a *Chlamydomonadidák* burkának chemiai természete sincsen biztosan meghatározva, mert idősebb sejteken cellulosereactio nem végezhető sikerrel, azonban cysták és sok esetben mozgó egyének burkáról is kimutatták, hogy celluloseból áll. A *Polytoma* periplastja GIEMSA-oldattal élénk kékre színeződő, nyálkás-kocsosnyás állományú burok (VIII. tábla 3. ábra), melybe sok esetben pálczikaalakú testecskék vannak belerakódva. Én e testecskéket *Bacteriumok*nak tartom, megjegyzem azonban, hogy nem mindig fordulnak elő és számuk is több vagy kevesebb lehet; egyes esetekben úgy látszik, mintha a *Bacteriumok* nem a nyálkás burokba, hanem a legkülső plasmaretegbe volnának beágyazva. Már SCHNEIDER (49) is említést tesz olyan *Polytoma*-példányokról, melyeknek «gyöngyfüzérszerű burka» van és azt tartja, hogy ez beteges jelenség, mert a *Polytomák* ezt a burkot levetik és újat termelnek (FRANCÉ 23. p. 308). PASCHER (39) legújabbban *Flagelláták*, *Algák* és *Bacteriumok* ilyenféle együttélését ismertette és azt a symbiosis egy nemének tartja (Berichte d. deutschen botan. Gesellschaft 1914 p. 339—352); együttélési viszony lehet a mi esetünkben is a *Bacteriumok* és a *Polytoma* között, csakhogy, mivel mind a két szervezet saprophyta, inkább csak térbitorlásról, vagy egyoldalú hasznot h  
sitismusról, mint symbiosisról lehet szó.

A burok ismertetése után az egyes sejtalkatrészekére térek át; de mielőtt ezt tenném, előbb még az általános alakról és nagyságról kell megemlékezni, és pedig első sorban azért, hogy a *Polytomá*nak a hozzá olyan hasonló *Parapolytomá*tól való elkülöníthetését már ebben is feltüntessem. Az alakra nézve meg kell említenem, hogy a *Polytomára* jellemző, hogy teste elülső végén soha sincsen meg az a ferde bemélyedés, a melyet JAMESON a *Parapolytomára* annyira jellemzőnek tart. A periplast sem áll el annyira a testtől, mint a *Parapolytomán*, neve-

zetesen a test oldalán szorosan hozzásimul a testhez, holott a *Parapolytomán* mindenütt egyenlő távolságban eláll tőle.

Nagysága igen különböző a szerint, a mint kifejlett azaz osztatlan, vagy fiatal azaz többszöri osztódásból származó egyénnel van dolgunk. A fiatal egyének hossza  $9.6-11.2 \mu$ , a kifejletteké  $12.8-14.4 \mu$ , a fiatalok szélessége  $4.8 \mu$ , a kifejletteké pedig  $9.6 \mu$ . Méreteire nézve a *Polytoma uvela* kisebb, mint a *Parapolytoma satura*, melynek nagy példányai JAMESON szerint  $15 \mu \times 10 \mu$ , a fiatalok pedig  $8 \mu \times 6 \mu$  nagyságúak. FRANCÉ szerint (23) a *Polytoma uvela* kifejlett példányainak nagysága  $12-18 \mu$  hosszúság mellett  $3-9 \mu$  szélességű, a fiataloké pedig  $9-10.5 \mu$  hossz mellett  $4.5-7 \mu$  szélességű. A két adat egybevetése azt bizonyítja, hogy a tölem tanulmányozott *Polytoma uvela* a FRANCÉ-tól tanulmányozotthoz képest kicsiny termetű. A mag átmérője FRANCÉ szerint  $2-7 \mu$  között változik. A tölem megmért nagy példányok magjának átmérője  $3.9-4.8 \mu$ , a kis példányoké  $2-4 \mu$  szokott lenni. A magtest átmérője a nagy példányokban  $1.6 \mu$ , a kicsinyekben pedig  $0.8 \mu$ . Az ostor hossza, mint FRANCÉ írja, általában véve jóval meghaladja a testét; méréseim szerint a test hossza körülbelül úgy aránylik az ostor hosszához, mint  $7:10$ -hez. Egy  $14.4 \mu$  hosszúságú példány ostorának hossza  $28.2 \mu$ , egy  $9.6 \mu$  hosszú példányé  $16.0 \mu$ . Az ostor nem egész hosszában egyenlő vastagságú, hanem tövétől kiindulva egész hosszának  $1\frac{1}{12}$  része körülbelül egyenlő vastagságú, hosszának  $\frac{1}{12}$  része pedig elvékonyodó, s míg az előbbi rész némileg merev, az utóbbi hajlékonyabb. Egy  $11.2 \mu$  hosszúságú példányon ugyanis, a melyen az ostor egyenesen előre nyujtva conserválódott és így jól meg lehetett a hosszát mérni, az egész ostor hossza  $22.4 \mu$  volt, az ostor vastag részének hossza  $20.8 \mu$ , az elvékonyodóé  $1.6 \mu$ ; az egész ostor vastagságára nézve azt mondhatom, hogy becslésem szerint a vastag rész  $0.2-0.3 \mu$  körüli lehet, a vékony rész az elvékonyodástól kis távolságra már ennek is talán csak a fele ( $0.1 \mu$ ) vagy ennél is kevesebb.

Elég érdekes eredményre vezet, ha a test méreteiből köb-tartalmára és ebből a plasma, mag és magtest nagyságának viszonyára vonatkoztatva teszünk összehasonlítást. Minthogy ese-

tünkben nem abszolút értékekről, hanem arány megállapításáról van csupán szó, nem az ellipticus (forgási ellipsoid) (ugyanis a *Polytoma*-sejt alakja) illetőleg gömbölyded (a mag és magtest) testek köbtartalmával teszünk összehasonlítást, hanem úgy, mintha tárgyaink hasáb-, illetőleg kockaalakú testek volnának. A nagy és kis alak méreteinek arányai hosszban 8 : 6, szélességben 5 : 2. A nagyinak hasábszerű köbtartalma  $8 \times 25 = 200$ , a kicsié  $6 \times 4 = 24$ , a mit ha kiegészítünk 25-re, a két köbtartalom aránya  $200 : 25 = 8$ . A magot a nagyban 4-nek, a kicsiben 2-nek véve, köbtartalmuk  $4 \times 4 \times 4 = 64$  és  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ,  $64 : 8 = 8$ . A magtest a nagyban 1·4, a kicsiben 0·7, a mi arányban 2 : 1, a köbtartalmuk aránya  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ,  $1 \times 1 \times 1 = 1$ , 8 : 1. Eme arányok azért érdekesek, mert azt mutatják, hogy a kis példányok épen  $\frac{1}{8}$ -át teszik a nagyoknak, a miből az következik, hogy a nagyoknak 3-szoros osztódása útján létrejött olyan egyének, a melyekben úgy a plasma, mint a mag és a magtest csak  $\frac{1}{8}$ -a az osztatlan kifejlett egyének.

A *Polytoma* hossz-, harántméreteinek és ostorhosszának a nagy, középnagy és kis példányokon mérhető változásaiból következtetés vonható növekedésük lefolyására is. Ez pedig azt mondja, hogy legelőször az ostor látszik megnövekedni és már a kis példányokon is aránylag kevéssel rövidebb, mint a kifejletteken. Ezután megnövekedik a plasmatest, és pedig először csakis hosszirányban nyúlik meg, azután harántirányban és csak a midőn harántirányban is eléri a kifejlettekre jellemző nagyságot, akkor növekedik meg a mag is. A növekedés lefolyásának sorrendje tehát: ostor, test hossza, test szélessége, mag átmérője.

A *Polytoma uwella* plasmája a mag körül s az ostorok tövén igen apró lépes (wabig) szerkezetű, a mit PROWAZEK is feljegyez (42 p. 53), a test végén többnyire röögök, kisebb nagyobb keményítőszemcskék láthatók. A FLEMMING-féle folyadékmal rögzített készítményekben vashæmatoxylin festéssel erősen festődő röögök tűnnek fel, de hogy ezeknek milyen az összetétele és szerepe, ismeretlen. Talán azonosak a SASSI-tól (47) említett volutinszemcskéekkel (VIII. tábla 11., 29. rajz, IX. tábla 48., 49., 54. rajz),



A GIEMSA-festékekkel festett készítményeken a test oldalán sokszor látható egy vörösre festődő folt (VIII. tábla, 5. ábra), a melynek helyzete, alakja és nagysága annyira megegyezik a szemfoltéval, hogy talán valóban ennek a szervecskének felel meg.

Chromatophorokat, illetőleg leukoplastokat festéssel sem tudtam kimutatni.

A rögzített és festett készítményeken is jól felismerhető a két összehúzódó vacuolum (VIII. tábla, 1., 2., 5., 6., 8. ábra), másféle vacuolumot nem találtam.

Az ostorokról már említettem, hogy a test hosszát jóval felülmúló olyan fonalak, a melyek alapjuktól hosszuknak  $\frac{13}{14}$  részéig egyenlő vastagok, aztán hirtelen elvékonyodva, finom hegybe kihúzva végződnek. Az ostorok alapjukon — a mi eleveneken figyelhető meg — összetapadnak és a testtől meghatározott távolságra válnak ismét szét, a mi arra mutat, hogy felületükön valamiféle nyálkaszerű, ragadós anyag válhat ki, a mely összetapasztja őket, belsejüket, mintegy vázukat pedig szilárdabb tengelyfonal teszi, a mely HARTMANN szerint (27 p. 1186) mindig megvan a *Flagellaták* ostorában.

Mindegyik ostor, mint már FRANCÉ (23 p. 310), PROWAZEK (42 p. 52) tudta és H. N. MAIER (34 p. 145) festéssel kimutatta, egy-egy basálistestből indul ki. Ezek gömbölyűek, átmérőjük alig nagyobb, mint az ostor vastagabb részeé, tehát  $0.2 - 0.3 \mu$  lehet (VIII. tábla, 6., 10., 12., 22. ábra). Sok készítményen úgy tűnnek fel a basálistestek, mintha nem gömbölyűek, hanem pálcikaalakúak volnának (VIII. tábla, 1. és 8. ábra és IX. tábla, 56. ábra). Ez a tény, nézetem szerint, abban leli magyarázatát, hogy az ostornak az a része, a mely a nyálkás burokba van foglalva, differentiálás alkalmával olyan sötét marad, mint a basálistestek (VIII. tábla, 1., 8. ábra). Mind a két basálistest elég közel van egymáshoz és úgy látszik, hogy egymással oldalt fibrillum köti össze őket (VIII. tábla, 6. ábra). Sok esetben úgy tűnik fel, mintha csak egyetlen basálistestből eredne a két ostor; ez a látszat nyilván onnan keletkezik, hogy az illető példányt mintegy az egyik oldaláról szemléljük, a mikor is az egyik basálistest a másikat elfödi (VIII. tábla, 2., 14., 20. ábra).

Az ostornak vázolt megerősítése a leggyakoribb, azaz a

rendes. Eltérések azonban előfordulnak, a melyek, úgy látszik, az illető példány életkorával, máskor talán a mag cyclicus változásaiával függenek össze. A legtöbb esetben, a midón a mag a test közepe<sup>1</sup> táján van, a mag és a basálistestek között összeköttetés nincsen (VIII. tábla, 5. és 8. ábra). Kifejlett és úgy látszik osztódásra készülő egyénekben sokszor azt lehet megfigyelni, hogy a basálistestekből finom fonalkák kúpja indul ki, melyek vagy kezdettől, eredetüktől kezdve alkotnak kúpot (VIII. tábla, 7., 9. ábra), vagy pedig kezdetben egy összetapadó erősebb zsineget alkotnak (VIII. tábla, 1. ábra), s csak a basálistestektől bizonyos távolságra válnak szét és alkotnak fibrillum-kúpot. Az ostor megerősítésének ezt a módját PROWAZEK is megfigyelte (42. p. 400 és 54).<sup>2</sup> Osztódásra készülő olyan egyéneken, amelyeken a mag a basálistestekhez vándorolt, a mag és egyik basális test között — ha nem is mindig — de sok esetben kimutatható a fibrilláris összeköttetés. A fibrillumokon sok esetben megvastagodás látható és a fibrillum sokszor nem egyenes, hanem hajlított lefutású (VIII. tábla, 6. ábra). Előfordul az is, hogy a mag közvetlenül a két basálistest alatt helyezkedik el anélkül, hogy közöttük fibrillumokat lehetne kimutatni (VIII. tábla, 10., 11. ábra).

A kis — fiatal — példányokban a mag és a basálistestek között vagy semmiféle összeköttetés sincsen, vagy pedig egy fibrillum található, a mely a mag peripheriáján elhelyezkedő kis rögöt (alább látni fogjuk, hogy ez a centriolum) összeköti az egyik basálistesttel, ezt pedig egy másik fibrillum szomszédjával (VIII. tábla, 6. ábra).

Ez az ostornak az a megerősítési módja, a melyet már

<sup>1</sup> Helyesebben nem a magnak közepe foglalja el a test közepe táját, hanem a mag alsó széle esik körülbelül oda, vagyis a test hosszának  $\frac{1}{2}$ -ébe,  $\frac{7}{18}$ -ába,  $\frac{4}{7}$ -ébe vagy  $\frac{5}{9}$ -ébe.

<sup>2</sup> Miként megfigyeltem a *Chlamydomonas Ehrenbergii*-n, a plasmatestnek szintén változó helyén lehet a mag, ugyanis vagy egészen szorosán csatlakozik a két basálistesthez, vagy fibrillum köti össze a basálistestet a maggal és a benne levő centriolummal. A *Chlamydomonas pulvisculus*-on H. N. MAIER szerint a basálistestből rhizoplast indul ki, a mely a maghártya külső oldalán levő gömbben végződik (34). A *Chlamydomonas obtusus* A. BR. basálistestét pedig megfigyelésem szerint meglehetősen vastag plasmazsineg köti össze a maggal.

DANGEARD is leírt (8. p. 2—3), H. N. MATER pedig megerősített. (34. p. 145). E fibrillum lefutásába sokszor apró rögöcske van beágyazva.

Mint a felsoroltakból látható, a *Polytoma uvela* magja és basalistestei között igen különböző viszony lehet, a mennyiben előfordul az a megerősítési mód, a melyet HARTMANN 1b típusnak, és az, a melyet 2 típusnak ír le (27). Az ostornak ilyen eltérő megerősítési módja már magában érdekes, és pedig azért, mert hozzá vagyunk szokva, hogy ilyen nagy különbségek eltérő fajokban, sokszor csak más csoportokba tartozó ostorosvég-lényekben szoktak előfordulni. Mint alább látni fogjuk, az ostor és mag közötti említett eltérő összeköttetésimód az ostor ki-fejlődésével, illetőleg a mag osztódásával függ össze.

A *mag* maghártáival határolt, hólyagöcska-typusú, nucleolusos mag, a melyben centriolum van és ez többnyire a magburok belső oldalán helyezkedik el (VIII. t., 6. és 28. ábra); a centriolumot a nucleolussal finom fonal köti össze, melyet PROWAZEK nyélnek nevez. (42. p. 53). A maghártáán belül chromatikus granulatio látható, írja PROWAZEK (42. p. 53), a mit azonban én csak kevés példányon észleltem. (I. T. 1., 4., 6., 7.. 9. ábra.)

Nyugalomban a mag valamivel a sejt közepe fölött helyezkedik el úgy, hogy a magnak alsó széle jut éppen a középre. (VIII. t., 1. és 6. ábra.)

A nyugvó mag tehát nucleolusos mag, melyben oldalt, a maghártáán belül, centriolum van. Az osztódásra készülő magon észlelhető első változás az, hogy a mag megduzzad, a magtest nincsen többé a mag közepén (VIII. t., 4. ábra), a mag e közben többnyire az ostorok basalistestéhez jutott, talán azon fibrillumok összehúzódása következtében, melyekről már megemlékeztem. A mag az osztódás e kezdődő stadiumában olyan, mint a Metazoaák érő petesejtjének magja. Az ez után következő első változás PROWAZEK szerint a «centrosoma» kivándorlása a maghártáán át (42., 43). Én azonban azt tapasztaltam, hogy a centriolum nem vándorol ki ekkor a maghártáán, hanem leválva a nucleolussal összekötő sugaras részről, a maghártáán belül osztódik, s a megosztódott két centriolum egymással desmo-

sissal összeköttetésben marad. (VIII. t., 14. IX. t., 35—37. ábra.) A magtestből az osztódásra készülő magban most sugaras nyujtványok indulnak ki, a melyek a maghártya belső oldaláig haladnak és ott többnyire egy-egy gömbben végződnek, hasonlóan ahhoz a gömböcskéhez, a mely az extranucleolaris centriolumot alkotja. (VIII. t., 10. ábra. IX. t., 34. ábra.) Ezeket a maghártya belső oldalán elhelyezkedő gömböket FRANCÉ is megfigyelte, leírta, ábrázolta, és azt állítja róluk, hogy a magtestecskén fordulnak elő és spirális vonalban helyezkednek el (23. p. 323). FRANCÉ e megfigyeléséből azt, hogy e rögök spirálisan helyezkednének el, magam ugyan nem erősíthetem meg, azt azonban tapasztaltam, hogy ezek a peripherikus chromatin-rögöcskék utóbb hosszabb vagy rövidebb hajlitott chromatin-szalagrészekké válnak és spirémaként rendezkednek el (VIII. t., 11. ábra); összefüggő, egységes spiréma-fonalat azonban, úgy látszik, sohasem alkotnak. E szalagrészek eleinte vékonyabbak, talán számuk is nagyobb s azután pedig megrövidülnek és vastagabbá is válnak. Ez az állapot nyilván spiréma, noha a szokott spirémától eltér annyiban, hogy nem egységes a chromatikus szalag, de igen hasonló a *Nitophyllum* nevű *Floridea* tetrasporaképzésénél jelentkező spirémához (v. ö. SVEDELUS N. (52) Taf. I. Fig. 6 és 8). E spirémaszerű állapot után a chromatin-szalagok utóbb kisebb, egymás között egyenlő nagy darabokká, valódi chromosomákká válnak. A chromosomák kialakulása közben a maghártya még megvan, sőt a nucleolus is, ezeknek kialakulása után, illetőleg nyilván e közben eltűnik a maghártya és a nucleolus is. (IX. t. 35. ábra.) A maghártya elenyésztevel párhuzamosan a magban, úgy látszik, sok nedv gyűl meg, úgy, hogy a mag megduzzad, a chromosomák pedig hosszukban kettéhasadnak. (VIII. t., 13. ábra.)

PROWAZEK szerint, mint már említettem, a «centrosoma» osztódás alkalmával kivándorol a magból és megosztódva a magorsó két végén helyezkedik el. PROWAZEK e feljegyzésével ellentétben én azt figyeltem meg, hogy mialatt a chromosomák kialakultak és hosszirányban hasadtak, a mag burkán belül osztódott a centriolum, s a kettőt egymással kissé ívelten hajlitott centrosomosis köti össze. (VIII. t., 14. IX. t., 35—37. ábra.)

A centriolum osztódása után az egyik az ostorok tövéhez nyomul, a másik a szervezet hossz tengelyéhez képest ferdén helyezkedik el úgy, hogy a magorsó és a centrodemesmosis tengelye a szervezet hossz tengelyéhez képest szöveget zár be; ez a szög azonban korántsem olyan nagy, hogy ennek következtében a magvak harántul helyezkednének el úgy, mint JAMESON szerint a *Parapolytomán*. (VIII. t., 16., 17. ábra.)

A magorsó kialakulásával egy időben a chromosomák az orsó tengelyére merőlegesen, tehát az æquator síkjában, æquatori lemezt alkotva helyezkednek el. (VIII. t., 15. ábra. IX. t., 40—44. ábra.)

A mi a chromosomák számát illeti, arra nézve meg kell jegyezni, hogy számláltam nyolczat, tizenhatot (VIII. t., 13. ábra. IX. tábla, 40. és 41. ábra) is és a későbbi stadiumokban is 8, 16, sőt 4 chromosomát találtam. Mint e megfigyelésből látható, a chromosomák normális számának megállapítása nehézségbe ütközik, nem azért, mintha megszámlálásuk volna nehéz, hanem mert annyira eltérő számokat találunk. DANGEARD, a ki először iparkodott a *Polytoma wella* chromosomáinak számát megállapítani, azt írja (7), hogy majd 4-et, majd 6-ot számlált és azt hiszi, hogy normális számukat 6-ban állapíthatja meg; PROWAZEK pedig erre vonatkozó két megjegyzésében eltérő számokat közöl, egyik munkájában ugyanis az áll (42. p. 55), hogy számuk 10-nél nem lehet több, a másokban pedig számukat 8-ra teszi. (42. p. 400). A *Parapolytomának* JAMESON szerint 8 chromosomája van. A felsoroltakból látható, hogy a *Polytoma* chromosomáinak száma, noha többen iparkodtak azt megállapítani, nem mondható egyöntetűen eldöntöttnek. Hogy vajjon ez a különböző szám a számolási hibákon kívüli okon, és pedig a mag szerkezetbeli különbségen, tehát raszkülönbségen alapszik-e, és hogy, mint nem egy Metazoának, a *Polytomának* is vannak dupla chromosomaszámú (diploid) és fél chromosomaszámú (haploid) raszai, vagy pedig reductióval függ-e össze az eltérő, de egymás kétszeresét tevő chromosomaszám minden kétséget kizárólag eldönteni nem tudtam. Igaz ugyan, hogy a DANGEARDTÓL említett szám 6 és 4, valamint a tőlem talált 4, 8 és 16 lehet raszkülönbség is, de lehet, hogy rasz-

különbségen kívüli okkal, és pedig reductió's jelenséggel is összefügghet. E kérdés mérlegelésére alább még vissza kell térnem.

De nemcsak a chromosomák száma, hanem azok alakja is olyan eltérőnek tűnik fel, hogy ezzel is behatóbban kell foglalkoznom. Az æquatorialis lemezben elhelyezkedő chromosomák oldalnézetben a legtöbb esetben babalakúak (VIII. t., 17. és IX. t., 45. ábra), poláris nézetben kör- (IX. t., 41. ábra), máskor szív alakúak. (IX. t., 46. ábra.) Ennek az okát abban keresem, hogy a chromosomák egészben zömök *u*- és *v*-, azaz szembe nézve szív alakúak, oldalnézetök babalakú, ha pedig csak csúcsukat látjuk, az körként tűnik elő. Egy-két esetben azt találtam, hogy oldalnézetben vékony fonalakként tűnnek elő és ekkor *u*- vagy *v*-alakúak. Az annyire eltérő chromosoma-alakoknak oka talán abban keresendő, hogy a chromosomák egyes esetekben kissé meg lehetnek nyúlva, máskor pedig összehúzódnak és ekkor gömb- vagy szivalakúaknak látszanak.

Az æquatorialis lemez kialakulása alkalmával jól láthatók — oldalnézetben — az orsó csúcsától a chromosomáig nyúló orsófonalak, valamint — de csakis egyes készítményeken — az orsófonalak csúcspontjában, azoknak találkozási helyén a centriolumok (IX. t., 42—44. ábra), a melyeket gyakran jól látható desmosis (IX. t., 41. ábra) köt össze egymással.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A desmosisra nézve meg kell jegyezmem, hogy noha az az elfogadott nézet, hogy a desmosis a centriolum osztódásából keletkezik, mégis a desmosist nem akkor figyelhettem meg legjobban kifejlődve, a mikor a centriolumokat jól lehetett látni. A desmosisok legjobban olyan készítményeken láthatók, a melyeknek lininfonalai összetapadva tűnnek fel, azt a képet tüntetve fel, mintha a lininfonalak és a chromosomák is összezsapzottak volna. (VIII. t., 22—24. és IX. t., 39., 47., 48. ábra.) A látszat a mellett szól, hogy a desmosis sok esetben orsófonalak összetapadásából ered; ezt az állapotot PROWAZEK (42. p. 55) orsólemeznek (Spindelplatte) nevezi, s határozottan állítja róla, hogy semmi köze sincsen a centro-desmosishoz; máskor azonban a desmosis csakugyan a centriolumok osztódásából jó létre. Azt is meg kell jegyezmem, hogy úgy a desmosis, mint a centriolumok csak a valódi HEIDENHAIN-féle vashæmatoxylin-festéssel látszanak élesen, a ROSENBUSCH-féle módosított eljárás sem ad éles képet és a HEIDENHAIN-féle készítményeken sem mindig látható jól a centriolum és a desmosis sem. Hogy milyen sok körülmény összejártsága szükséges

Az æquatorialis lemez állapota után következik a chromosomák vándorlása a sarkok felé. A sarki lemezekben a chromosomák kezdetben jól elkülönülten láthatók, majd pedig kezdenek egymással összeolvadni, a miközben oldali (orsó-) nézetben sok esetben kitűnően látható az egész orsón végig és a sarki lemezekben is át folytatódó desmosis, mely a két centriolumot egymással összeköti. Igen jellemző a centrodесmosisra, hogy a két saroktól egyenlő, azaz középtávolságban sajátos hajlás látható rajta; ez NÄGLER szóbeli közlése szerint annak a jele, hogy az erő, a mely itt hat, nem összehúzó, hanem szétaszító. (VIII. t., 16., 17., 22—24., IX. t., 39., 41., 47., 48. ábra.) Én úgy hiszem, másban keresendő e tény magyarázata. Azt gondolom ugyanis, hogy itt olyanféle tüneményrel van dolgunk — si licet parva componere magnis —, mint a mit a növényeknél a kacsokon észlelhetünk akkor, ha azok valamibe megkapaszkodva, rajtuk az úgynevezett váltópont látható. Mert miként a kacs végpontja és a hozzátartozó ágrészlet két fixpontot szolgáltat az őket összekötő fonalrészlet a kacs részére, úgy a két centriolum is két fixpontja a desmosist alkotó fonalnak, a melyekből talán egyaránt fonal és azon végig terjedő valamely erő indul ki s ez az ellenkező irányban haladó két erő a desmosis mentén haladva s középen találkozva hozza létre a sajátos fonalelgömbülést, a mit váltópontnak nevezhetünk.

ahhoz, hogy például a centriolumok jól látszszanak, saját tapasztalatomból tudom egy példával igazolni. Egyik készítményemen megjelöltem körrel két osztódó *Polytoma*-párt, a melyen a centriolum az egyik sejtpárban kitűnően látszott. A megjelölt készítményt a brémai zoologusok gyűlésén beállítottam, hogy bemutassam. Azonban szerencsétlen véletlen következtében a gyűlés folyama alatt a készítmény a mikroszkop csöve reászoritása következtében összelapított és ennek folytán el is mozdult úgy, hogy nem tudtam bemutatni, mert csupa buborék jelent meg a fedőlemez alatt. Berlinbe visszaérkeztemkor ismét elővettem a készítményt, felkerestem a megjelölt *Polytomát* és nagy meglepetésemre meg is találtam a keresett példányt, azonban a tubus reászoritása következtében megfordult tengelye körül az osztódó sejtpár és most a másik egyénben látszott a két centriolum, az eredetiben pedig nem, mint a rajzok pontos összehasonlításából kitűnt. Ez a tény is azt bizonyítja, hogy a centriolumok megláthatása mily sok szerencsés körülmény egybejárásától függ. (IX. t., 42—44. ábra. V. ö. az ábramagyarázattal!)

A poláris lemezekből az új magvak oly módon alakulnak ki, hogy a chromosomák egy, kezdetben szabálytalanul karélyos, majd meggömbölyödő testben egyesülnek. (VIII. t., 25., 27. ábra. IX. t., 48. ábra.) Ennek megtörténte után a centriolum eltűnik. Kezdetben látható ugyan kis gömböcske alakjában és azt a leendő nucleolussal a desmosis utolsó maradványa — sugárirányban haladó fonaldarabka — köti össze (VIII. t., 26—27. ábra), majd pedig egészen eltűnik, miközben a nucleolust világos udvar, ezt, illetőleg az egész magot pedig maghártya veszi körül.

Az éppen ismertetett a *Polytoma uvella* magvának leggyakoribb osztódási módja, de ettől eltérők is megfigyelhetők. Így PROWAZEK a mag osztódásának kezdő fazisait másként írja le. Szerinte az osztódásra készülő magban a nucleolus megnyúlik s két csücsökbe kihúzódva sötétre festődő orsóvá válik; ez az orsó utóbb ismét megrövidül, benne a chromatin szabálytalan rögökben helyezkedik el az achromatikus reticulumon, majd kialakul ebből a tipikus orsó. Az orsó után az æquatoriális, poláris lemez, majd a chromatin összeolvadása következik, de az egész osztódás a maghártyán belül játszódik le (42. p. 55). Minthogy én majdnem egészen tipikus spirémaképzést, chromosomák kialakulását, centriolumot, orsófonalak kialakulását, centredesmosist figyeltem meg, megfigyeltem tehát, mondhatnám, az osztódás minden jellemző állapotát, a mely mindezeknél az ismert mitoticus osztódás schemájával megegyezik, így határozottan megfigyeltem a maghártya elenyészését is, azért úgy vélem, nem tévedek, ha azt állítom, hogy a PROWAZEKTÓL leírt, az enyémtől eltérő osztódási módokra vonatkozó megfigyelések nem eltérően lefolyó osztódási módra, hanem csak arra utalnak, hogy PROWAZEK ábrái valószínűleg az enyémhez képest kevésbé jól conservált példányok képét adják vissza. Noha tehát azt hiszem, hogy a PROWAZEKTÓL leírt osztódási mód nem fedí mindenben a valóságot, mégis el kell ismernem, hogy gyakran olyan osztódási képek figyelhetők meg, a melyek arra engednek következtetni, hogy a tőlem ismertetett osztódási módtól eltérően lefolyó osztódás is előfordul, a mely a *Parapolytoma*-nak a JAMESONTÓL ismertetett osztódásához hasonló. A megnevezett bűvartól ismeretett *Parapolytoma satura* magvának osztódása első sorban



abban tér el a *Polytoma uvela* osztódásától, hogy: 1. osztódása közben centriolum nem szerepel, ezért centrodemesmosis sincsen; 2. a mag osztódási tengelye a test hossz tengelyéhez képest éppen harántul áll; 3. a mag oszlása a maghártyán belül folyik le.

A *Parapolytoma* és *Polytoma* osztódásában csupán az egyezik meg, hogy mind a két véglény magva chromatinjából osztódáskor chromosomák alakulnak ki. De csakis az egyezik meg, hogy chromosomák alakulnak ki, nem pedig a chromosomák kialakulásának módja, a mit JAMESON a *Polytoma* chromosomáinak tölem megfigyelt és a rendes chromosomakialakulástól el nem térő módtól eltérően ismertet. JAMESON szerint az osztódásra készülő mag elveszti szép gömbölyű körvonalát, szabálytalanná válik, a maghártyán csücskök jelennek meg. Ennek megtörténével a nucleolus rögökre hull szét, a rögöket pedig egymással achromatikus szálak kötik össze. Az említett rögök utóbb szabálytalan, némileg spirémára emlékeztető csavart fonalba egyesülnek és a fonál az e közben kialakult orsófonalak közepe táján helyezkedik el. A csavart, kanyargós fonál utóbb *u*- és *v*-alakú részekre, chromosomákra tagolódik. JAMESON szerint a *Parapolytomán* ez a rendes osztódási módja; meg kell jegyeznem, hogy kivételesen a *Polytomán* is találunk ilyen módon osztódó magvakat, a mint azt a IX. táblának 57—63. rajza tünteti fel.

A *Parapolytoma* chromosomáinak kialakulása után az osztódás további lefolyása a tölem a *Polytomáról* ismertetett normális typus szerint megy végbe, e tekintetben eltérést nem tapasztaltam. Abból a körülményből, hogy a *Polytomán* az osztódás kezdő állapotait ilyen különböző kifejlődésben találtam, talán van valószínűsége annak a föltevésemnek, hogy a PROWAZEKTŐL leírt osztódás sem egyéb, mint ilyen (abnormis?) kezdőállapotok összekapcsolása egy osztódási folyamattá.

Azonban az osztódás különböző állapotai között gyakran még más eltéréseket is lehet találni. Így egy eltérés az lehet, hogy a chromosomák sokszor nem jelentkeznek typicus chromosomákként, hanem helyettük sok apró, gömbölyű testet találunk, a melyek a poláris lemezben szétszórtan elhelyezett apró

rögökként láthatók s az egyes rögök között sokszor összeköttetések, desmosisok tűnnek elő, mintha a chromosomák osztódásban volnának, mint az IX. t., 63—66. ábráján jól látható. Ez esetben a poláris lemezben láthatók tehát desmosisok, a melyeknek azonban semmi közük sincsen a centrodemosishoz, hiszen ez a desmosisnál chromosomát, nem centriolumot köt össze.

Érdekes, hogy az osztódásnak ez az eltérő formája — melyről azonban nem tudhatom, hogy nem műtermék-e, vagy pedig pathologicus folyamat eredménye — úgy látszik normális osztódási formája a DOBELLTől leirt *Amoeba lacertae* megosztódásának, melynek megfelelő állapotaihoz valóban meglepő a tőlem talált osztódási állapotok hasonlatossága (v. ö. DOBELL 13. Taf. 7. Fig. 9-t és IX. t. 63—66. ábrát); chromosomák közötti desmosis-szerű összeköttetéseket más osztódási állapotokon is megfigyeltem. Ilyen például az IX. t., 65. ábráján feltüntetett; eme rajzon az látható, hogy a két sarki lemez egy-egy chromosomáját, valamint a rajzban alsó sarki lemez egyik chromosomáját egy az orsó csúcsához közelfekvő chromosomával köti össze desmosis. A felsorolt esetekből látható, hogy a *Polytoma uvela* osztódása nem folyik le mindig megegyező módon. Hogy a vázolt osztódási módok különféleségét pathologicus folyamatok, esetleg conserválási eltérések mennyire befolyásolhatják, nem tudom, az azonban kétségtelen, hogy az osztódások alkalmával megfigyelhető desmosisok igen különböző értékűek és korántsem mondható két HEIDENHAIN-féle vashæmatoxylinnel erősebben festődött rög között látható fonalszerű összeköttetésről, desmosisról, hogy az centrodemosis.

A mag osztódása a *Polytomán* a 2, 4, illetőleg 8 egyénre való osztódás alkalmával is az éppen ismertett módon játszódik le, úgy, hogy fölösleges külön a két, négy és nyolcz sejtre való osztódást ismertetnem, mert csak ismételnem kellene az elmondottakat. Meg kell azonban jegyeznem, hogy a chromosomák hosszirányú hasadását csak a két részre való osztódás állapotán figyeltem meg. (VIII. tábla, 13. rajz.) Ezt azért kell hangsúlyoznom, mert e tény azt a gondolatot veti fel, hogy talán csak a két sejtre való osztódás nem reductiós osztódás, a kettőnél több sejtre való osztódás pedig mindig az.

*Osztódás* alkalmával a kétmagú állapotban, mint ismeretes, a két mag eredeti helyzetéből elmozdul, a sejtnék mintegy oldalára húzódik és közöttük jelenik meg az a barázda, illetőleg befűződés, mely a plasmatestet két részre osztja, tehát az osztódás síkja; a plasmatest-osztódás további részleteinek ismeretése alól azonban felment az a körülmény, hogy mindez már a régebbi búvárok tanulmányaiból annyira ismeretes, hogy régen a szakirodalom köztudatába ment át.

A két félre osztódott *Polytoma* további osztódása alkalmával a két mag rendesen úgy helyezkedik el, hogy osztódási síkjuk egymásra merőleges, ezért egy ilyen osztódási párban, ha azok orsó állapotán vannak, a magvak az egyik sejtben az orsó pólusáról, a másikban pedig hosszában láthatók (IX. t., 40—47. ábra). A másodszori osztódást is a centriolum osztódása vezeti be (IX. t., 41—45. ábra) s a centriolumok ezen az állapoton is desmosissal vannak vagy lehetnek összekötve (IX. t., 35—37. ábra). A centriolumok (IX. t., 42—45. ábra), valamint a chromosomák is (IX. t., 40—47. ábra) egyes esetekben igen jól láthatók.

A nyolcz sejtre való osztódásra nézve csak azt jegyezhetem meg, hogy az osztódás ez állapota minden egyes osztódási orsójának megfigyelhettem a centriolumát, mint azt a IX. t. 52. rajzon ábrázoltam is. Azt is megjegyezhetem, hogy eme állapoton a centriolumok jóval kisebbnek tunk fel, mint a két és négy sejtre való osztódásnál, mint az a 24., 42—44. és 52. ábrák összehasonlításából kitűnik. Ilyen nyolcz részre osztódó példányt azonban mindössze két esetben figyelhettem meg és rajzolhattam le (52., 53. ábra). Annak okát, hogy nyolcz sejtre való osztódást csak két esetben találtam, abban keresem, hogy összes készítményeimet aránylag idős kultúrákból vettem, már pedig PROWAZEK szerint (42) a *Polytoma* nyolcz részre csak akkor osztódik, a mikor «osztódási energiája legmagasabb fokát érte el», ezután pedig (42 p. 54) négy vagy csak két részre osztódik.

Az osztódás és a magreconstructio után a *Polytoma* sejtkialakulása következik, a mi a sejt plasmaticus részének megnövekedésében és az új ostorok kifejlődésében áll. Az új osto-

rok fejlődése, mint SCHAUDINN, PROWAZEK, HARTMANN és más bűvárok megfigyeléséből tudjuk, számos Flagellátán a magból indul ki. A mi esetünkben is így történik, tehát HARTMANN felfogása értelmében a *Polytoma* ostorai is intranucleolaris eredetűek. Hogy az ostor kifejlődését vázolhassuk, először azt kell ismertetnünk, hogyan keletkezik a centriolum, minthogy az új ostor kialakulása a centriolumból veszi kezdetét. (V. ö. az *a—h* szövegrajzzal.)

A centriolum keletkezésére nézve azt tapasztaltam, hogy a *Polytoma* magtestén dudor jelenik meg, ez lassanként hosszú pálczikává nő meg s eléri a maghártya (2. ábra) belső oldalát. Ez a dudor — mely tehát mintegy a magtest bimbózása útján keletkezett — utóbb csak a periphericus, a maghártyával érintkező részén marad meg mint vastag, tömeges test, a többi része elvékonyodik úgy, hogy a magtesttel a most már gömbölyded testecskét csak finom, sugárirányban haladó fonal köti össze (6. ábra, 28. ábra, 33. ábra). Ez a kis gömböcske pedig, melyet a magtesttel fonal köt össze, az új centriolum, illetőleg helyesebben az új centriolum és az új ostorok leendő basalis teste. Nevezzük ezt a testet praecentriolumnak. A praecentriolum megosztódva, belőle két kis gömböcske keletkezik, melyek közül az egyik a maghártyán belül marad s ez válik centriolummá, a másik pedig a maghártyán át kinyomul.

A praecentriolum osztódásából létrejött s a maghártyán át kinyomult e rész lassanként fonallá, fibrillummá, a rhizoplasttá nő ki, a mely fonal fokozatosan megnyúlik, distalis végén pedig kis gömb látható. Ez a kis gömb a fibrillum meghosszabbodása következtében egészen a pelliculáig jut, a hol ismét megosztódik. Egyik osztódási fele átnyomul a pelliculán és tova nő, mint a végén kis gömbbel végződő fonal; ez a leendő ostor, mely lassanként hosszú fonallá nő ki. A kis gömb egy ideig még megfigyelhető az ostor végén, később azonban eltűnik.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Azt, hogy a centriolum megosztódott fele a maghártyán át kinyomul és ott osztódik, PROWAZEK is feljegyezte (42 p. 54), ő azonban ezt a «centrosomaszerű testek» kialakulásával hozza kapcsolatba, bár ő is hajlandó volna, miként DANGEARD (7 p. 400), a rhizoplasttal hozni kapcsolatba.

Ha a közölt megfigyelések helyesek, a miben kételkedni okunk nincsen, mert hiszen számos *Flagellátáról* ismeretes az ostornak ilyen fejlődése, akkor az ostor létrejöttéig összesen négy osztódás játszódik le. Az első a nucleolusnak két egyenlőtlen részre való, tehát heteropol osztódás alkalmával keletkezik nucleolussal a centriolonucleolarisdesmosissal összekötött praecentriolum; ebből a második osztódással a centriolum, az elsődleges basalistest (praebasalistest) és elsődleges rhizoplast (praerhizoplast), a harmadik osztódással a két végleges basalistest és a közöttük lévő másodlagos rhizoplast, s végre a negyedik osztódás alkalmával az ostor a két véggömbbel (telosoma) keletkezik. Azt, hogy az elsődleges basalistest (praebasalistest) hogyan hatol keresztül a maghátyán, nem tudjuk, de lehet, hogy akkor kerül a plasmába, a mikor osztódás alkalmával a maghátya még nincsen egészen kifejlődve, a mire közölt rajzaim közül nem egy (25—27. ábra) utal. Érdekes, hogy az ostorok végén lévő kis véggömböt (telosoma) már 1854-ben megfigyelte SCHNEIDER s úgy magyarázta, hogy az ostorok a rajzokon utóbb «visszahúzatnak» a plasmába és e közben keletkezik végükön az összeolvadó ostor anyagából a véggömb. (SCHNEIDER p. 197 FRANCÉ után idézem 23 p. 311).

Mint már PROWAZEK feljegyezte (42 p. 58) és én is megérősíthetem, a *Polytoma* régi ostorai osztódás alkalmával a burokkal (periplast) együtt elpusztulnak és mindenik fiatal egyénnek új ostora fejlődik. Minthogy az ostorok a centriolum osztódása és fonallá növekedése útján keletkeztek a fiatal *Polytomákon*, hosszú ideig látható még a basalistest aljáról kiinduló és azt a centriolummal összekötő fibrillum (rhizoplast), mely azonban a kifejtetteken nem igen figyelhető meg, a miből arra kell következtetnem, hogy később elenyészik, vagy rendkívül vékonyná válik, olyanná, mely a megfigyelhetést annyira megnehezíti, hogy majdnem kizárja.

---

Meg kell jegyezmem, hogy e SCHAUDINN-HARTMANN-féle ostorkeletkezési magyarázattal szemben sokáig nagyon is kételkedő álláspontot foglaltam el, azonban ismételt megfigyeléseim alapján kénytelen vagyok annak helyességét elismerni.

Az utóbbi feltevés valószínűsége mellett, azaz a mellett, hogy a basalistestek és a mag között a kifejtetteken is van valamely összeköttetés, szól az, hogy sok esetben tényleg finom fonalakat lehet látni, a melyek a basalistestekből mint fibrillumkévék indulnak ki és a magig követhetők. (VIII. t., 1. 7. és 9. ábra). Abban az esetben, a mikor a basalistestek és a mag között fibrillumokat nem láthatunk, úgy látszik szintén van összeköttetés a mag és a basalistestek között, a mit az árul el, hogy az osztódás megindulása alkalmával a mag mindig a basalistestek szomszédságába jut, holott a nyugvó mag tőlük távol a plasmatest közepe táján látható;<sup>1</sup> a magnak a basalistestekhez közel eső része gyakran csücsökbe húzódik ki és ilyenkor a mag és basalistestek közötti finom fonalas összeköttetés is megfigyelhető. (IX. t., 55—59. á.) *Jameson* szerint a *Parapolytomán* mind a két ostor részére külön basalistest nyomul ki a magból; a *Polytomán* én csak egyet találtam és minthogy a jobb és bal basalistest egymással sokszor fibrillummal van összekötve (VIII. t., 6. á.), azt tartom, hogy ezek az eredeti praebasalistest osztódásából jöttek létre.

A sejtmag az osztódás egész lefolyása alatt, mialatt a nagy egyénből 8 kis sejt jó létre, folytonosan változtatja helyét a sejtben, a miről a magnak a sejtben való helyzetét feltüntető vázlatos rajzok (szövegrajz *k—s*) sokkal világosabb képet nyújtanak, mint a hosszadalmas leírás. E sajátos tény megemlékezésével kapcsolatban emlékezetünkbe idéződik az, hogy e sejtmagvándorlás mennyire hasonló ahhoz a vándorláshoz, a melyet a petesejt érési osztódása alkalmával tapasztalhatunk. Erre az érdekes jelenségre különben már szervezetünk osztódásának első beható ismertetője, *BLOCHMANN* (2. p. 88) is felhívta a figyelmet; már *BLOCHMANN* hangsúlyozza, hogy a *Polytoma* sejtosztódása nagymértékben emlékeztet bizonyos peték inaequalis barázdlódására, szerintem még inkább a peték iránytestképzésére. A hasonlóan lefolyó osztódási folyamat hasonlatosságának oka

<sup>1</sup> A látszat a mellett szól, hogy a mag a basalistestekkel összefügg, s fibrillumoknak összehúzódása következtében jut az osztódásnak induló sejtekben a basalistestek közvetlen közelébe.

valószínűleg abban rejlik, hogy az osztódásban lévő sejtek protoplasmájában a tartaléktáplálék (a lecitus a pete-, illetőleg a keményítő a *Polytoma*-sejtben) félre szorítja a magot a sejt közepéből annak egyik vége felé, a minek következtében azután a sejtmag helyváltoztatása az osztódás alkalmával rendkívül feltűnővé válik.

A sejt osztódása alkalmával nem csak a mag vándorlása észlelhető, hanem az is, hogy a sejt alakja is változik e közben.

A forgási-ellipsoid-alakú osztatlan *Polytoma*-sejt az első osztódás után köralapon nyugvó, majdnem kúpalakú, lekerekített szélű és csúcsú, elmetszett félforgási ellipsoid; a második osztódás után a négy osztódási fél ferde kúpszerű test, helyesebben félkör alakú, egyik oldalán félellipsissel határolt csúcsain lekerekített negyed forgási-ellipsoid. Ez az osztódási alak megnövekedik és e közben lassanként veszi fel ismét a forgási ellipsoid alakját, a mint az a szövegközötti rajzokról ( $k-s$ ) leolvasható.

KRASSILTSCHIK J. szerint (32) a *Polytoma uvella* többnyire négy részre osztódott alakjai copulálnak, de kifejlett, nagy egyének és kicsinyek (azaz nyolc részre osztódottak) is copulálhatnak egymás között.

A populatiót, a melyet KRASSILTSCHIK és FRANCÉ megfigyelt, PROWAZEK ellenben nem, én magam szintén nem figyeltem meg, bár több kísérletet végeztem erre nézve. Ezért saját tapasztalatomból a gamétákról sem szólhatok, csak KRASSILTSCHIK vizsgálatai alapján említhetem azt, hogy a gaméták és a vegetatív egyének egymástól semmiben sem térnek el és hogy kicsinyek és nagyok egyaránt copulálhatnak. PROWAZEK erre nézve úgy vélekedik, hogy az utolsó osztódásokat a Spermatocyták reductiójához hasonló osztódásként foghatjuk fel (42. p. 54), bár ő a chromosomák számának megcsökkenését nem állapíthatta meg. E megjegyzések feljogosítanak talán arra, hogy a gaméták és normalis egyének (agamontok) közötti különbséget abban keressük, a miben az a soksejtű szervezetek szövet-elemei és ivarsejtjei között nyilvánul — s a mi már nem egy véglényről is ismeretes, ugyanis a gaméták és az agamont egyének magvának chromatinmennyiségének, a chromosomák számának különbségében.

Ha ezt fontolóra vesszük, akkor talán a *Polytoma uvella* két eltérő chromosoma-számú típusú osztódásának okát is megmagyarázhatjuk, s föltehetjük, hogy az osztódásnál a normális (azaz a chromosomák hosszirányú feleződésével kapcsolatos) osztódással megegyező egyének nyilván vegetatív egyének, a normálistól eltérően, azaz a chromosomák hosszirányú feleződése nélkül osztódók pedig redukált osztódásúak, tehát gameták.

Fentebb ismertettem, hogy a *Polytoma uvella* különböző példányainak osztódásában abban van eltérés, hogy a chromosomák száma egyes példányok æquatorialis lemezében 6, 8, 16, a sarki lemezekben pedig 8, másokban pedig négy. Említettem továbbá azt is, hogy ennek oka lehet egyrészt raszbeli különbség, de lehet reductiós osztódási is. Raszbeli különbség lehet az, hogy vannak 4, 6, 8 és 16 chromosomás egyének, reductiós osztódási ok pedig a 4 és 8 és a 8 és 16 chromosomás egyének között tételezhető fel. Ha az eltérő chromosoma-számnak reductio az oka, akkor két módjának kell lennie a *Polytoma uvella* osztódásának; ezek egyike a normális osztódás típusát tünteti fel, az osztódás alkalmával tehát a chromosomák hosszirányú hasadását figyelhetjük meg az æquatorialis lemezállapotán, a másik osztódási módnál pedig a chromatin reductiója megy végbe és pedig olyan módon, hogy a chromosomák az æquatorialis lemezállapotán hosszukban nem hasadnak, hanem azoknak fele — a 8-ból 4, a 16-ból 8 — e nélkül vándorol a sarkok felé. A *Polytomán* e kétféle osztódási módot véleményem szerint tényleg megfigyeltem.

Az osztódás egyik módja az, a melynél a magtest elenyészte után keletkezett chromosomák hosszirányban hasadnak (VIII. t., 13. ábra). A chromosomák hosszirányú hasadása következtében az æquatorialis lemezben a chromosomák száma nagy, 16, melyek közül 8 az egyik, 8 pedig a másik sarok felé vándorol. Ilyen a VIII. t., 13, 18, 20, IX. t., 40, 42, 44, 46. ábrán feltüntetett osztódás. Ezt a normális, nem reductiós osztódásnak tartom.

Az ismertetett osztódással szemben a reductiós osztódásnál a chromosomák hosszirányban nem hasadnak, az æquatori lemezben ennek következtében 8 chromosoma látható, a melyek közül négy osztatlanul vándorol az egyik, négy pedig a másik sarok



felé. Ezt az osztódási módot reductiós osztódásnak kell tartanom, a melyet, mint a VIII. t., 16, 17, 19, IX. t., 41, 47, 50. ábrák mutatják, több esetben figyelhettem meg. Hogy azonban ez a kétféle osztódási mód tényleg a normális és reductiós osztódásnak felel-e meg, egészen kétségenkívüli határozottsággal nem állíthatom, mert az első osztódásnál tapasztalható chromosoma-szám is lehet a redukáltnak megfelelő négy, és viszont nyolcz chromosomát számlálhattam a négy sejtre való osztódás alkalmával is; ez a tény gondolkodóba ejt és kétséget támaszt az iránt, hogy vajjon az ismertetett chromosoma szám-különbség tényleg reductio-e, mert tudjuk, hogy nem egy szervezet chromosomáinak számában előfordulhat olyan különbség, hogy az egyik egyén chromosomáinak száma éppen a kétszerese a másiké-  
nak, a mint e tekintetben a legismertebb az *Ascaris megalocephala uni- és bivalens classicus* példája. A *Polytoma uvella* chromosomái szám-különbségének kétségekívül lehet ilyen uni- és bivalens-szerű raszkülönbség is az oka. Ha azonban tekintetbe vesszük KRASSILTSCHIK ama már említett megfigyelését, hogy gametákként kifejlett (azaz nagy) és fiatal (azaz kicsiny) egyének is szerepelhetnek, valószínűségében nyer az a feltevés, hogy a négy chromosomás egyének felére csökkent chromosoma-száma reductio útján jött létre. E feltevés mellett szól továbbá az a megfigyelés is, hogy az osztódásra készülő egyének magja sok esetben a chromatinnak olyan elrendeződését tünteti föl, a mely nagyon emlékeztet a reductiós osztódásnál tapasztalható tetradképzés formáira, a mennyiben a sejtmagban a nucleoluson kívül a chromatin sajátságos, villásan elágazó szalagokat alkot (IX. t., 58, 59. á.), hasonlókat azokhoz, a milyeneket GELEI JÓZSEF a *Dendrocoelum lacteum* petesejtjei érése alkalmával végbemenő és a reductióval összefüggő változásokként ismertet. Hogy vajjon ez tényleg a reductiós osztódással és copulatióval kapcsolatos jelenség-e, csak a *Polytoma uvella* copulatiójára vonatkozó további vizsgálatok fogják eldönthetni.

\*

Dolgozatom végére érve, összefoglalni akarom annak eredményeit.

I. A *Polytoma uwella* ostorai általában véve hosszabbak, mint a milyeneknek rendszeren rajzolják; hosszúságok a testéhez úgy aránylik, mint 10:7-hez. (VIII. t., 6. á.) Az ostor hosszának  $\frac{13}{14}$  részében egyenlő vastagságú, az utolsó  $\frac{1}{14}$ -e azonban jóval vékonyabb, illetőleg elvékonyodó úgy, hogy tûhegyesen végződik; ez a végrész az ostor többi részéhez képest igen hajlékony. Mindenik ostor gömbalakú basalistestből ered, a két ostor basalisteste egymással harántirányban fibrillummal lehet összekötve, a maggal pedig különböző vonatkozásban állhat úgymint:

1. A mag és a basalistestek között semmiféle kapcsolat sem látható, ez a leggyakoribb eset.
2. A basalistestek egyikétől fibrillum indul ki, a mely a magig követhető, ott összeköttetésbe jut a maghártya belső oldalához tapadó centriolummal, ez utóbbi pedig fibrillummal a nucleolussal; ez a megerősítési mód megfigyeléseim szerint nem gyakori és csakis a fiatal, azaz háromszoros osztódás útján létrejött egyéneken található meg.
3. A basalistestektől egész fibrillumköteg, azaz több fibrillum indul ki, melyek a basalistestekhez közel egy valóságos zsinagba egyesültek és csak ezektől bizonyos távolságra válnak szét egyes fibrillumokká, máskor azonban mindjárt a basalistestektől egyes fibrillumok pamataként erednek és divergálva fibrillumkúpként tapadnak a maghoz. Ez az ostormegerősítési mód nem ritka, és kifejlett, azaz nem osztódott nagy példányokon figyelhető meg.
4. Lehetséges, hogy a mag közvetlenül a basalistestek alatt helyezkedik el és ezekkel igen rövid fibrillum köti össze. Ez az osztódásra készülő magvakon figyelhető meg.

II. Az ostorok fejlődésére nézve azt jegyezhetem meg, hogy az általában megegyezik azzal a móddal, a hogyan azt A. P. JAMESON a *Parapolytoma* ostorfejlődéséről leírta. Ugyanis a *Polytomán* is a nucleolusból bimbózik ki az a kis test (HARTMANN felfogása szerint a centriolum), a præcentriolum, a mely azután a maghártján keresztül jutva (hogyan? nem ismeretes előttem) fonallá nő ki; eme fonalka végén van az a kis gömb, a melyből ismételt osztódással egyrészt a két basalistest, ezekből pedig az ostor jó létre az által, hogy egy részük a pelliculán át a plasmatest felületére nyomul, fonallá nő ki, melynek végén kezdetben még jól megfigyelhető egy kis gömb (telo-

soma). JAMESON szerint a *Parapolytomán* a nucleolusból két gömböcske nyomul ki, azokból a két basalistest külön-külön alakul ki.

III. A hólyagocska típusú magban a nucleolusonkívüli chromatin igen különböző módon lehet elhelyezkedve, a mi a magnak osztódási, illetőleg nyugalmi állapotával függ össze. Maghártya van, ennek belső oldalán látható a centriolum, melyet sugárirányban haladó fonal köt össze a nucleolussal. A plasmában — mint ismeretes — keményítő mutatható ki, ezenkívül SASSI szerint volutin-szemecskék is vannak benne.

IV. A mag osztódását valószínűleg a centriolum osztódása indítja meg, a melynek két része egymástól eltávolodva a későbbi magorsó két végén helyezkedik el. Az osztódás alkalmával a nucleolus vagy — mint a *Parapolytomán* — szabálytalan rögökre esik szét, melyek azután chromosomákká alakulnak, vagy pedig a nucleolusból periphericus chromatin-rögök jönnek létre, a melyekből tagolt fonalrészekből álló spiréma keletkezik és azután chromosomákká tagolóódik. A spiréma-állapotban a nucleolus megvan és a chromatinrészek sokszor a tetradképzéshez hasonló képeket adnak. A spirémaállapot és a chromosomákra való szétesés alkalmával a maghártya megvan és, ellentétben a *Parapolytomá*-val, a mely véglényen — JAMESON szerint — az osztódás egész lefolyása alatt megmarad, csak azután enyészik el. Meg kell azonban jegyezni, hogy PROWAZEK leírása szerint a *Polytoma uvela* osztódása alkalmával is az egész osztódás lefolyása alatt megmarad a maghártya; e megfigyelés azonban nézetem szerint nem jól rögzített példányokon tétetett. A chromosomák kialakulásuk után az æquatorban rendezkednek el és ilyenkor egyes esetekben jól látható a magorsó mindkét végén lévő centriolum és a közöttük lévő összeköttetés, a centrodesmosis.

V. A chromosomák száma az æquatori lemezben 16, más-  
kor 8, a sarki lemezekben 8, illetőleg 4; e két eltérő chromosoma-szám lehet, hogy raszkülönbség, de lehet az is, hogy reductióra vezethető vissza. E kérdés eldöntve nincsen.

A chromosomák részint gömb-, bab-, részint pedig szív-, illetőleg zömök U-, V-alakúak, a minek oka, attól eltekintve,

hogy melyik oldalukról szemléljük őket, talán különböző fokú összehúzódottságukban is keresendő.

Az æquatori lemezben a chromosomák részint harántül hasadnak, részint pedig előzetes hosszirányú hasadás után (?) fele részük, ugyanis egyik felük az egyik, másik felük a másik sarok felé vándorol, hogy ott 8, illetőleg 4 chromosomából álló sarki lemezt alkosson. A sarki lemez állapotában gyakran látható a végigvonuló desmosis, mely a két centriolumban végződik.

A sarki lemezek chromosomái új nucleolussá olvadnak egybe, melyet magedv és ezt maghártya veszi körül; ennek az új nyugvó magnak további osztódása nem tér el az ismeretettől.

Vizsgálataimnak érdekesebb eredménye az ostorok rögzítésének az a változatos módja, a mely egy és ugyanazon fajon figyelhető meg, holott rendszeren az ostor rögzítése csak más fajokon, vagy más csoportokba tartozó *Flagellátákon* szokott eltérő lenni. Érdekes és további vizsgálatokra ösztönző az is, hogy egy és ugyanazon fajon különböző magosztódási mód, eltérő chromosoma-formák és chromosoma-szám figyelhető meg, a mi akár raszkülönbség, akár reductió jelenséggel kapcsolatos, figyelmet érdemel; de talán általánosabb érdekű az, hogy e fajon centriolumot és centrosomosist mutathattam ki. és pedig a magosztódás összes fontosabb, jellemző stádiumain, a mi annál érdekesebb, mert noha már PROWAZEK vélt a *Polytomán* centrosomaszerű testet megfigyelhetni, még is utóbb sem REICHENOW a *Haematococcus pluvialis*on, sem MERTON a *Pleodorinán*, sem legújabbán A. P. JAMESON a *Parapolytomán* sem centriolumot, sem centrosomosist nem talált. Minthogy azonban HARTMANN osztódó *Volvox*-sejteken 1901-ben analog centriolumokat talált, lehet, hogy centriolumokat alkalmas technikával még más *Volvocineákon* is ki fognak mutathatni.

### Táblamagyarázat.

Valamennyi rajz ZEISS-féle rajzkészülékkel készült és ZEISS-féle mikroskoppal, még pedig ZEISS Apochr. 2 mm. n. A. 1·3 comp. oc. 12, a mivel azonban csak a fővonalak készülhettek, a rész-

leteket külön kellett azután rajzkészülék nélkül utána rajzolnom. A rajzok vashæmatoxylin-készítmények után készültek, kivéve néhányat, a melyeknél külön megemlítem, hogyan festettek.

A rajzokon az ostor majdnem mindenütt csak tövén van feltüntetve; a plasma szerkezetét, mint ez esetben lényegtelen, a rajzok csak hatásában adják vissza. A sejteknek az ostortól távolabb lévő végében ábrázolt világosabb terek a keményítő helyét jelzik mindenik rajzban.

### VIII. tábla.

#### 1—33. ábra.

1. Nagy, kifejtett példány; a mag a basalistesttel rhizoplasttal függ össze, a rhizoplast a sejt mélyebb részében egyes fibrillumokra elágazva fibrillumkúpként csatlakozik a maghoz. A magban nucleolus látható, valamint hálózatos chromatin-elrendeződés. A mag külső oldalán chromaticusrög látható. A mag a sejt tengelyének közepe felett van.

2. Középnagy példány (az első osztódás után?); a magtestből pálczikaalakú nyújtvány ered, ez a maghártyaig követhető, a centriolum fejlődésének kezdete.

3. GIEMSA-oldattal festett olyan példány, a melynek halványkékre festődött, szétfolyt nyálkaburkába sötétkékre festett *Bacteriumok* rakódtak bele; háromszori osztódásból létrejött fiatal egyén.

4. Az érő petesejt magjához hasonló magú példány. A nucleolus oldalt van, a maghártya alatt periphericus chromatin-hálózat.

5. GIEMSA-oldattal festett kis példány. A plasma kék, a mag nucleolusa sötét ibolya, a peripherián több chromatin-rög, melyek közül az egyik vörösre, a másik sötét ibolyára festődött. Fiatal, kis példány. A mag a sejt közepe felett van.

6. Háromszori osztódásból létrejött, fiatal, kis példány. Az ostornak csak vastag része van feltüntetve, mindenik ostor tövén látható a basalistest és mellette contractilis vacuolum. A két basalistestet egymással másodlagos rhizoplast köti össze, a jobboldali basalistestből rhizoplast ered, a mely a maghár-

tyáig követhető, a melylyel a maghártya belső oldalán elhelyezett centriolum függ össze, ez pedig a nucleolussal van sugárirányú fibrillummal összekötve. A rhizoplastban megvastagodás látható. A mag a közép felett van.

7. Idősebb példány, melynek magjához a két basalistesttől kiinduló több igen finom fibrillum halad. A magban — mely osztódni készül — nucleolus, periphericus chromatin-szemecskék láthatók, a melyeket sugaras fonalak erősítenek a nucleolushoz. Csak az egyik ostor látszik. A mag a test közepe tája felett.

8. FLEMMING-féle erős oldatban rögzített és HEIDENHAIN-féle vashæmatoxylinnal festett példány. A plasmában, főleg a mag körül, erősen festődött, ismeretlen természetű rögök láthatók. Kis példány. A mag a közép felett.

9. Az érő petesejt magvának szerkezetével megegyező képet feltüntető mag, melyet a basalistestekhez fibrillum-kúp erősít.

10. Osztódásra készülő nagy egyén. A mag a basalistestek közelében, mind a két basalistest jól látható. A mag kissé szögletes körvonalú, benne magtest, periphericus chromatin-rögök, melyeket a nucleolussal sugaras fonalak kötnek össze. A két ostornak csak alsó része van feltüntetve.

11. Osztódásra készülő nagy egyén, magja spiréma-állapotban. A mag a basalistestek alatt, a periphericus plasmában sötét testecskék (volutin?). A magtestecske megvan, a mag megduzzadt, maghártya nem figyelhető meg, a chromatin hosszabb, rövidebb kanyargós szalagdarabokra tagolódott.

12. Osztódásra készülő nagy egyén. A mag a basalistestek alatt van, nagy, duzzadt; maghártya nincsen, a nucleolus még megvan, a periphericus chromatin egyenes és körülbelül egyenlő nagy pálczikákra tagolódott.

13. Osztódó magú, nagy egyén. A maghártya és a nucleolus eltűnt, a chromatinból chromosomák alakultak ki, a melyek párosával helyezkednek el egymás mellett, a mi nyilván hosszirányú hasadásukból magyarázandó. A chromosomák száma 16, azaz 8 pár. Bivalens egyén (?), vagy normális, nem reductióos osztódás (?).

14. Első osztódásban lévő nagy példány. A magtestecske majdnem egészen elenyészett, úgy mint a maghártya is; a kis

magtestecskéből sugárfonalak indulnak ki, melyeknek végén chromaticus gömb látható. Az egész magon — a nucleolus fölött — desmosis vonul végig, melynek két végén gömbölyű centriolum látható. Hogy a desmosis valóban centrodemosis, azt az iránya árulja el, mert úgy helyezkedik el, mint a hogyan az osztódó magban, ugyanis ferde hossz tengelyként.

15. Nagy osztódó egyén, a mag az æquatori lemez állapotán. A pálczika-alakú chromosomák közül 11 látható. Centriolumok nem láthatók, a két basalistest közül az egyik a centriolum helyét foglalja el, innét desmosis halad a magorsón végig az orsó másik végéhez. A két ostornak csak alapi része van ábrázolva.

16. Osztódó nagy egyén, a magorsó-állapotban, a chromosomák a sarkok felé vándorolnak, számuk négy-négy, az orsó alsó sarkában centriolum, a melyet a felső sarokkal desmosis köt össze, a desmosis közepén váltó. Maghártya nincsen.

17. Nagy sejt első osztódása. A chromosomák éppen osztódtak és vándorolnak a két sarok felé. A chromosomák osztódása harántirányú, egy chromosoma-párnak a felsők, egynek pedig az alsók között az összeköttetése még megvan. Az orsófonalak jól láthatók úgy, mint a két igen apró centriolumot összekötő desmosis is. A chromosomák pálczika-alakúak, számuk mind a két lemezben 4—4. (Univalens rász? Reductió osztódás?)

18. Nyolez, illetőleg tizenhat chromosomás egyén (bivalens? normális osztódás?), babalakú chromosomákkal. A centriolumok közül a felső egyszersmind basalistest, az alsó, úgy mint a desmosis sem látszik. A chromosomák a sarkok felé vándorolnak.

19. Osztódó magú, orsó állapotán lévő egyén; a 8 babalakú chromosoma közül kettő egymással fonalkával van összekötve, jeléül annak, hogy harántosztódásból jött létre. Az orsó mindkét végén centriolum, a felső fibrillummal van összekötve a basalistesttel. Desmosis nem látható. (Univalens rász? Reductió osztódás?) Nagy példány.

20. A mag sarkilemez állapoton 8—8 chromosomával. Centriolum nem látszik. (Bivalens rász? Normális osztódás?) Nagy példány.

21. Nagy példány. Mag osztódásban, a 8—8 chromosoma

pálczika-alakú és a sarkok felé vándorol. A felső sarkon jól látható a centriolum, melyet a basalistestek egyikéhez fibrillum erősít — oldalnézetben csak egy látható. Az alsó centriolum nem látható. Lininfonalak jól láthatók, desmosis nem látható. (Bivalens rasz? Normális osztódás?)

22. Az első osztódás magorsó, sarkilemez állapota desmosissal, melyen a «váltópont»; a desmosis tényleg a két centriolumot köti össze egymással. A felső centriolum oldali fibrillaris összeköttetésben áll az egyik basalistesttel; a chromosomák kezdenek összeolvadni, számuk ezért nem állapítható meg.

23. A 22. rajzon feltüntetett azonos példány rajza, a mely azután készült, miután a példány az objectiv reászorítása következtében összezúzatott; ezért van baloldalán a hasíték rajta. Összezúzás után különösen jól előtűnt a desmosis egész terjedelemben, a mely centriolumtól centriolumig követhető, áthalad a chromosomák összeolvadni kezdő tömegén. A desmosis közepén jól látható a «váltópont» és a desmosis a valóságban is kevésbé sötétre festődött, mint a chromosomák tömege. A desmosis alsó vége a centriolummal együtt kissé kiemelkedik és kemény, rugalmas zsinégként jelentkezik.

24. A 22. és 23. ábrán feltüntetethez igen hasonló sarkilemezes állapotú sejt, a desmosis mindkét végén igen élesen tűnik elő a centriolum.

25. A chromosomák a sarkilemezekben kezdenek egybeolvadni, mind a kettő mellett centriolum, a felső centriolumot az ostorok egyik basalistestével fibrillum köti össze. Maghártya még nincsen.

26. A chromosomák egy tömeggé, még egyenlőtlen felszínű nucleolussá olvadtak össze, mindenik nucleolus mellett centriolum, a két centriolummal fonál függ össze, az elszakadt desmosis utolsó nyoma. A nucleolust szintelen udvar (magnedv-udvar) és ezt maghártya kezdi körülvenni, a mely a centriolumot is bezárja; ott a hol a centriolum van, a maghártya csücsökbe húzódott ki. Az eredeti *Polytoma*-sejt oldalnézetben látszik, ezért csak egy basalistest látható a két ostor tövén.

27. A chromatin gömbölyded nucleolussá olvadt össze, a két centriolum mindegyikét a nucleolussal sugárirányú fonalka



köti össze, az egyik centriolummal oldali desmosissal gömb (præ-basalistest) függ össze.

28. Megoszlott egyén felső végén a két régi ostor, a két magban a nucleolust a centriolummal vékony fonalka köti össze, az ostor fejlődésének első állapota.

29. Az első osztódás befejeződött. A két mag a választóal mellett van. A mag olyan, mint a nyugvó. Maghártya, magtest jól látható. A periphericus plasmában a periplast alatt erősen festődött lemezek — volutin? — láthatók.

30. Megoszlott egyén a felső végén a régi ostor töve. A magból chromatin nyomul ki és a maghártya felületén kis rögzöt alkot, mely sugaras fonalkával összefügg a nucleolussal. A 28. ábrán feltüntetethez képest az ostor fejlődésének második állapota.

31. Megoszlott egyén. A felső végén a régi ostorok töve. Mindkét maggal fonal — rhizoplast — függ össze, amely gömbben végződik, a rhizoplast a maghártyán át folytatódik a centriolumig, ez pedig sugaras részszel, a nucleolussal függ össze.

32. Megoszlott egyén. A felső részen a két régi ostor töve. A magból rhizoplast, az egyik — felső — sejt két basalistestéből egy-egy rövid ostor ered.

33. Az első osztódás után ostorát fejlesztő két egyén. Mind a kettőnek magjában nucleolus, ezzel sugaras összeköttetésben levő centriolum, továbbá periphericus chromatinszemcsék láthatók. A centriolumból rhizoplast ered, a mely a plasmán végig haladva, a pellicula alatti basalistestig követhető. A basalistesttel fejlődésben levő rövid ostor függ össze, a melynek végén mind a két példányon jól látható a véggömb, a telosoma.

## IX. tábla.

### 34—67. rajz

34. A második, a négy sejtre való osztódásra készülő egyének. A magtest megvan, belőle sugaras fonalak indulnak, melyeknek vége a chromatingömbben végződik.

35. Második osztódás. A mag mind a két egyénben spiréma

állapoton, mind a két magban a centriolum megosztódott és egymással ívben meghajlított desmosissal függ össze.

36. Második osztódás. Mind a két magban a chromosomák kialakultak már, az æquatori lemezt alkotják, azonban a chromosomák olyan közel fekszenek egymáshoz, hogy számukat nem tudtam megállapítani és az egyes chromosomákat külön-külön fel sem tudtam tüntetni. Mind a két magban az æquatori lemez felett arra ferdén és egymás irányára merőlegesen haladó centredesmosis látható. A desmosisok iránya azt a helyet foglalja el, a melyet később és az osztódó magvakban foglal el.

37. Megoszlott egyén a második osztódásra készül, a magvak közül, az ábrán az alsóban, a centriolum megoszlott, centredesmosist alkot.

38. Második osztódásra előkészülő egyének. A magtestecske eltűnt, a chromatin elrendeződése spirémaszerű.

39. Második osztódás, æquatoriális lemez desmosissal, a centriolumok környéke is megfestődött.

40. Második osztódás, æquatoriális lemez, a felső sejt oldalról nézve, ebben jól látható a chromosomák babalakja; desmosis, centriolum nem látható. Az alsó sejt æquatoriális lemezére a sarokról ránézve jól megszámlálható a 16 chromosoma, (Bivalens rasz? Normális osztódás?)

41. Második osztódás, æquatoriális lemez állapota, a felső sejt az orsóoldalról nézve, benne a desmosis és az egyik centriolum jól látható. Az alsó sejtben az æquatori lemezre nézve jól látható a 8 chromosoma. (Univalens rasz? Reductiós osztódás?)

42, 43, 44. Ugyanannak az osztódó sejtpárnak három különböző nézete. A 42. rajz a 43.-hoz képest 90, a 44. rajz a 43.-hoz képest 90, a 44. rajz a 42.-hez képest 180°-kal el van fordítva. Második osztódás. Mind a két sejtben az æquatori lemezről a sarki lemezbe való áttérés állapota, mind a két sejtben 16 chromosoma van, melyekből 8 nyilván az egyik, 8 pedig a másik sarokhoz vándoroland. Mind a két sejtben kitűnően látszott a centriolum, de csak akkor tűnt fel, a mikor a készítményt még tengelye körül forgatni lehetett. A balzsam megmerevedése után egyik sejtben sem látható a centriolum. Desmosis nem látható, a chromosomák babalakúak, ezért egy látó-

mezőben kisebb és nagyobb chromosomák látszanak, a minék azonban csak az az oka, hogy az egyik chromosoma oldaláról, a másik pedig csúcsáról szemléltetik.

43. Második osztódás, az előbbivel azonos sejtpár.

44. Második osztódás, az előbbivel azonos sejtpár.

45. Másodszeri osztódás. A chromosomák a sarkok felé vándorolnak. A felső sejtben 4—4 babalakú chromosoma látható, az alsó az orsóoldalról nézve 4--4 babalakú chromosomával, jól látható centriolummal és sugárfonalakkal. Desmosis nem látható. (Univalens rasz? Reductiós osztódás?)

46. Második osztódása egy 8 chromosomás egyének, a chromosomák a felső sejtben az orsóoldalról nézve babalakúak, az alsóban a saroklemezről nézve szivalakúak. Maghártya, centriolum, desmosis nincsen. (Bivalens rasz? Normális osztódás?)

47. Másodszeri osztódásban levő egyén sarki lemez állapotain, 4 chromosomával, a melyek babalakúak. A felső sejtben az orsóoldalról nézve desmosissal, ebben váltóponttal, de centriolum nélkül, az alsó sejtben a sarokról nézve szabályosan elrendezkedett 4 chromosomával. (Univalens rasz? Reductiós osztódás?).

48. Másodszeri osztódás, mind a két sejt az orsóoldalról nézett maggal, mind a kettőben a chromosomák a sarki lemezben már összeolvadnak, jól látható, erősen festett desmosissal. Centriolum nem látható, noha az alsó sejtben a desmosis a sarokik követhető. A periphericus plasmában festődött lemezkék. (volutin?)

49. Második osztódás utáni egyének; a sejtek meggömbölyödtek, rövidek, a magvak a négy sejtből álló sejtcsoport minden egyes sejtjének közepére húzódtak. A periphericus plasmában volutin-szemecskék?

50. Második osztódás azon állapoton, a midőn megvan a 4 sejt, mindenkinek magjában 4 chromosoma, azok aránylag nagyok, babalakúak. (Univalens rasz? Reductiós osztódás?)

51. Másodszeri osztódás utáni egyének. A sejtek a megnyugvás állapotain, a magvak a középről eltávoztak, a sejtek párosával helyezkednek el.

52. Harmadik, azaz a nyolc sejtire való osztódás egyik álla-

pota; mind a négy sejtben a chromatin körülbelül az æquatorialis lemez állapotán van, mindegyikben jól látható 2—2 centriolum, az egyik felső részében desmosisdarabka is.

53. A harmadik, azaz a nyolcz sejtre való osztódás egyik állapota, egy halmazba elhelyezkedett nyolcz sejttel.

54. Abnormis osztódású egyén, a két mag szabálytalan alakú nucleolusa egymással chromatinrészszel van összekapcsolva. A peripherikus plasmában volutin?

55. Abnormisan osztódott nagy egyén. A mag chromatinja rögöket alkot, ezt a centriolummal fibrillumok kötik össze. A basalistestek mellett van centriolum, mely vele fonállal van összekötve.

56. A normálistól eltérő fölépítésű, osztódni készülő mag. Alakja megnyúlt, benne elliptikus nucleolus és sajátos hálózatban elhelyezkedett chromatin-gömböcskék. A mag közvetlenül a két pálczikaszerűnek feltűnő basalistest közelében van.

57. Abnormisan osztódó egyén. A mag, melyet a basalistestekkel finom fonalkák kötnek össze, szabálytalan alakú, a magtestben chromatinhálózat és ebben chromatinrögök figyelhetők meg.

58. Abnormis osztódásnak indult egyén, a mag a basalistestek alatt van, a melyekkel két fibrillum köti össze az egyik chromatinszalag végét. A mag szabálytalan alakú, a magtesttel elágazóvégű chromatinszalagok függenek össze, ezek tetrádokra emlékeztetnek. Megjegyezhetem, hogy ezt az állapotot nem ritkán figyelhettem meg.

59. Abnormis osztódásra készülő egyén, a mag távol van basalistestektől, a magtest kicsiny, vele elágazóvégű chromatinszalagok függenek össze tetrádokra emlékeztetve.

60. Abnormisan osztódó egyén, orsóállapot, a melyben még megvan a nucleolus, a chromatin szalagokat és rögöket alkot. Az orsó vége basalistesttel függ össze. Nemcsak egy, hanem több ilyen osztódási formát találtam.

61. Abnormisan osztódó egyén, magorsó-állapotán. A basalistestekhez húzódtott orsó végéből finom fonalak indulnak ki, középen æquatorialislemezféle chromatinelrendeződés, pálczika- és V alakú, de szabálytalanul összefüggő tömeget alkotó chromosomákkal.

62. Szabálytalan osztódás. Az æquatori lemeznek megfelelő chromatinelrendeződés. Az egyik basalistestet az æquatoriális lemezben elhelyezkedő centriolumhoz desmosis köti.

63. Abnormisan osztódó egyén magorsója. Az orsó egyik vége a basalistesttől indul ki, innen lininfonakal követhetők a másik orsó végéig. Az æquatori lemezként elhelyezkedő chromatin összefüggő zezugos fonalat alkot: e fonalnak átmetszete kör, a miért is e fonalra ránézve, az sötét körként tűnik fel.

64. Szabálytalanul osztódó egyén magorsó-állapoton. Az orsó felső végén centriolum, a mely a két basalistesttel nem függ össze. Az orsóban lininfonakal, az æquatori lemezben nagyszámú, apró, 3—4 gömböcskéből álló chromatinrészeske van.

65. Szabálytalan osztódás, a chromosomák között desmosis-szerű összeköttetés, úgy a sarkilemez közt, mint az alsó részen is.

66. Szabálytalanul osztódó egyén, a mag sarkilemez állapotán számos apró gömbből áll, e gömbök chromosomák, a melyeket egymással összekötő fonalak tartanak össze, különösen jól látható az egyikén, a baloldalon, egészen desmosis-szerű kép. Olyan mint DOBEL rajzán (13) a 9. ábrán.

67. Abnormis osztódás sarkilemezállapota desmosissal, centriolumok nem látszanak. A chromatintömeget egymással számos finom fonalka köti össze. ROSENBUSCH-féle vashæmatoxylinfestés.

### Szövegrajzok.

*a—j.* Vázlatos rajzok a centriolum, a rhizoplast, a basalistest és az ostoroknak osztódásközben való viselkedésére.

*a* nyugvó mag, nucleolussal; *b* a nucleolusból chromatikus pálczika nő ki; *c* a pálczika vége kiegyenesül és centriolummá válik; *d* a centriolum a maghártyán kinyomult præbasalistestté alakul; *e* a præbasalistest növekedve és osztódva rhizoplastot hoz létre; *f* a rhizoplast a felületig nő, ott basalistestet alkot és belőle osztódás útján kinő a két ostor; *g* a fejlődő ostor vég-gömbbel (telosoma); *h* kifejlett *Polytoma*-példány két, a nagytás arányának megfelelően arányosan rajzolt hosszúságú ostorral, melyek mindegyike külön basalistestből indul ki, melyeket oldali rhizoplast egymással, az egyiket pedig a maghártyán belüli

centriolummal is rhizoplast köt össze; az ostorok mellett lüktető üregek, oldalt szemfolt; a testet bevonó buroknak a test körül való elhelyezkedése a valósághoz híven van feltüntetve; *i* a rhizoplast és centrodesmosis viselkedése osztódáskor és összefüggése a basalistestekkel; *j* a rhizoplast és desmosis elszakadása a mag osztódásának befejeződése után.

*k*—*s*. Vázlatos rajzok a magnak osztódásközben való helyzetvándorlásának és a sejt alakjának osztódásközben való alakváltoztatásának feltüntetésére.

*k* a mag helyzete a nyugvó sejtben; *l* a mag osztódásra készülve a basalistestek közelében; *m* az első osztódás kezdete; *n* a rhizoplast elszakadása; *o* az első osztódás befejezte, a sejt fél ellipsoid, a mag az új sejthatár mentén; *p* a második osztódás kezdete, a két magorsó egymásra merőleges; *q* a második magosztódás befejezte; *r* a második sejtosztódás befejezte, az új sejtek negyed-forgási-ellipsoidok; *s* az osztódásifelek meg-növekedése.

### Irodalom.

\* 1. BAKER, H. A.: Das zum Gebrauch leicht gemachte Mikroskop. Zürich. 1753.

2. BLOCHMANN, F.: Kleine Mitteilungen über Protozoen. Biologisches Centralblatt. Bd. 14. 1894. p. 82—88. Fig. 2. a—g.

\* 3. BORY DE ST.-VINCENT: Classification des Animaux Microscopiques. «Encyclopédie méthodique.» Paris, 1824. Tom 11.

4. BÜTSCHLI, O.: Protozoa II. Mastigophoren. BRONN's Klassen und Ordnungen des Tierreiches. 1883—1884. p. 835—836,

\* 5. COHN, F.: Entwicklungsgeschichte mikr. Algen und Pilze etc. Nova Acta Acad. Caes. Leopold. Carol. 1854. Vol. 24. P. I. p. 101—256. Taf. 15—20.

6. DANGEARD, P. A.: Recherches sur les Alges inférieures. Ann. de se. natur. VII. Sér. Tom. 7. 1888. p. 112.

7. DANGEARD, P. A.: Étude comparative de la Zoospore et du spermatozoïde. Le Botanist, 7e Serie, 6e fascicule, 1901. Extrait p. 1—4; 3 szövegrajz.

8. DANGEARD, P. A.: Étude sur la structure de la cellule et ses fonctions. Le *Polytoma wella*. Le Botanist. Bd. 8. 1901. p. 2—3.

---

\* A csillaggal jelölt műveket eredetiben nem kaptam kézhez.

\* 9. DALLINGER, W. H. and DRYSDALE, J.: Researches on the life-history etc. Monthly micr. jour. 1874.

10. DE TONI, J.: Sylloge Algarum. Vol. I. Patavii 1889. p. 556—557.

\* 11. DIESING, C. M.: Revision der *Prothelminthen*. Sitzber. d. math. naturw. Klasse d. Akad. z. Wien. Bd. 52. 1865. p. 287—402.

12. DIESING, C. M.: Systema *Helminthum*. Vol. 1. 1881.

13. DOBEL, C.: Cytological studies of the species *Amoeba. Amoeba lacertae* HARTMANN, A. *glebae* n. sp., A. *fluvialis* n. sp. (With Plates 7—11). Archiv für Protistenkunde Bd. 34. 1914. p. 139—197.

14. DOFLEIN, F.: Lehrbuch der Protozoenkunde. 3. Auflage, Jena. 1911. p. 516.

15. DUJARDIN, F.: Histoire naturelle des Zoophytes. Infusoires, Paris. 1841. p. 302.

\* 16. EHRENBERG, Ch. G.: Beiträge zur Kenntniss der Organisation der Infusorien etc. Abhandl. der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1830. p. 84.

\* 17. EHRENBERG, Ch. G.: Über die Entwicklung und Lebensdauer der Infusorien. Abh. d. Akad. d. Wiss. 2. Berlin, 1831. p. 62.

18. EHRENBERG, Ch. G.: Die Infusionsthierchen als vollkommene Organismen. Leipzig. 1838. p. 24—25. Taf. I. Fig. 32. a—c.

\* 19. EICHWALD: Zur Infusorienkunde Russlands. Bulletin des Nat. de Moscou. B. 17. 1844. p. 480—635. és 702—706.

20. ENTZ, G. jun.: Cytologische Beobachtungen an *Polytoma uvela*. Vorläufige Mitteilung. Verhandlungen der Deutschen Zoologischen Gesellschaft, 23. Jahresversammlung, 1913. p. 249—252, mit einer Tafel.

21. FRANCÉ, R. H.: Zur Systematik einiger *Chlamydomonaden*. Természetráji füzetek. 15. kötet, 1892. p. 273—285. Tafel IV.

22. FRANCÉ, R. H.: Zur Morphologie und Physiologie der Stigmata der Mastigophoren. Zeitschrift für Wissenschaftliche Zoologie, Bd. 56. 1893. p. 138—164. Tafel VIII.

23. FRANCÉ, R. H.: Die *Polytomeen*, eine morphologisch-entwicklungsgeschichtliche Studie. PRINGSHEIM's Jahrbücher für Wissenschaftliche Botanik. Bd. 26. Heft 2. p. 295—378. mit Tafel 15—18 und 11 Textfiguren, 1894.

\* 24. FRESSENIUS, G.: Beiträge zur Kenntniss mikr. Organismen. Abhandlungen der Senckenberg. Naturforsch. Gesellschaft, Bd. II. 1858. p. 235. Tab. X. Fig. 36—38.

25. GELEI, J.: Über die Ovogenese von *Dendrocoelum lacteum*. Archiv für Zellforschung. Bd. 11. 1913.

26. HARTMANN, M.: Die Fortpflanzungsweise der Organismen, Neubennung und Einteilung derselben erläutert an Protozoen, *Volvocineen* und *Dicyemiden*. Biologisches Zentralblatt Bd. 24. 1904. p. 18—32, 33—61.

27. HARTMANN, M.: *Flagellata*, Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Bd. 3. 1913.

28. JAMESON, A. P.: A new Phytoflagellate (*Parapolytoma saturo* n. g., n. sp.) and its method of nuclear division. Archiv für Protistenkunde. Bd. 33. 1914. p. 21—45. Taf. 3. m. 1. Text. fig.

29. KENT, SAVILLE: A Manual of the Infusoria. London 1880—1882. p. 301—304. Taf. 15. Fig. 67—78.

\* 30. KIRCHNER, O.: Algen, in: Kryptogamenflora von Schlesien von Ferd. Cohn. 1878.

31. KLEBS, G.: Die Organisation einiger Flagellatengruppen und ihre Beziehungen zu Algen und Infusorien. Untersuchungen aus dem botanischen Institut zu Tübingen. I. Bd. 1881—1885. p. 233—361. Mit Tafel II. u. III.

32. KRASSILSTSCHIK, J.: Zur Entwicklungsgeschichte und Systematik der Gattung *Polytoma* EHR. Zoologischer Anzeiger Jahrg. 5. 1882. p. 426—429.

\* 33. LEEUWENHOECK, A.: Opera omnia. Epistolæ physiologicae. 1719, p. 284—285.

34. MAIER, H. N.: Über den feineren Bau der Wimperapparate der Infusorien. Archiv für Protistenkunde Bd. 2. 1903. p. 73—179. Taf. III. u. IV.

35. MERESCHKOWSKY, C.: Studien über Protozoen des nördlichen Russlands. Archiv für mikroskopische Anatomie. Bd. 16. 1879. p. 153—284. 2. Tafel.

36. MERTON, H.: Über den Bau und die Fortpflanzungsweise von *Pleodorina illinoisensis* KOFOID. Zeitschrift für Wissenschaftliche Zoologie. Bd. 90. 1908. p. 445—478. Tab. 27, 28. Textfigur. 2.

\* 37. MÜLLER, O. Fr.: Animalcula infusoria fluviatilia et marina. Havniæ, 1776. pl. 1. Fig. 12, 13.

38. OLTMANN, F.: Morphologie und Biologie der Algen. Jena. Fischer. 1904. I. Bd. p. 138—147.

39. PASCHER, A.: Über Symbiose von Spaltpilzen und Flagellaten mit Blaualgen. Mit Tafel 7. Berichte der deutschen Botanischen Gesellschaft. Bd. 32. 1914. Heft. 5. p. 339—352.

\* 40. PERTY, M.: Zur Kenntniss kleinster Lebensformen nach Bau, Function, Systematik, mit Spezialverzeichnis der in der Schweiz beobachteten. Bern, 1852. p. 175. Tafel 12. Fig. 3—5.

\* 41. POULSEN, A.: Om nogle mikroskopiske Planteorganismer etc. Videnskabelige Meddeleser f. Naturhist. Foren. i Kjöbenhavn. 1879, 1880. p. 231.—254.

42. PROWAZEK, S.: Kernteilung und Vermehrung der *Polytoma*. Österr. bot. Zeitschrift, No. 2. 1901. p. 51—70. Nachträgliche Bemerkungen zu dem Aufsatz. Ebenda No. 10. p. 400.

43. PROWAZEK, S.: Flagellatenstudien. Archiv für Protistenkunde. Bd. 2. 1903. p. 195—213. Mit Tafel V. u. VI.

44. RABENHORST, L.: Flora Europæa Algarum aquæ dulcis et submarinæ, Leipzig, 1865—1868.



45. REICHENOW, E.: Untersuchungen an *Hematococcus pluvialis* nebst Bemerkungen über andere Flagellaten. Arbeiten aus dem kaiserlichen Gesundheitsamt. Bd. 33. 1910.

\* 46. RIES, F.: Beiträge zur Fauna der Infusorien mit dem beige-fügten Ehrenberg'schen System. Wien, 1840.

\* 47. SASSI, M.: Einiges über Flagellaten. Mitteilungen a. d. Naturwiss. Verein a. d. Universität Wien. Jahrg. 5. 1907.

\* 48. SCHMARDA, L. K.: Kleine Beiträge zur Naturgeschichte der Infusorien. Wien, 1846. 2. Tafel.

\* 49. SCHNEIDER, A.: Zur Naturgeschichte der Infusorien. MÜLLER's Archiv für Anat. Physiol. etc. 1854. p. 191—207. Tafel I.

\* 50. SPALLANZANI, L.: Opuscules physiologiques anim. et végét. d. l'ital. p. J. SONEBIER, 1776. p. 209. Pl. II. Fig. 15. B. C. D.

51. STEIN, F.: Der Organismus der Infusionsthier. Leipzig, III. Flagellaten. 1878. P. 110—111. Tafel 14. Fig. V. 1—28.

52. SVEDELIUS, N.: Über die Tetradenteilung in den vielkernigen Tetrasporangiumanlagen bei *Nitophyllum punctatum*. Berichte d. deutsch. Botanischen Gesellschaft. 32. Jahrgang. 1914. p. 48—57. mit Taf. I. und 1 Textfigur.

\* 53. TIEGHEM, van: *Scyanima nigrescens*, eine *Volocineæ* ohne Chlorophyll. Bullet. soc. bot. de France. T. 27. 1880. p. 200—204.

\* 54. WEISSE, J. Fr.: Nachlese S. Petersburgischer Infusorien. Bulletin physiol. mathem. de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. Vol. VI. 1858—59. p. 106.

55. WOLLENWEBER, W.: Untersuchungen über die Algengattung *Hematococcus*. Berichte der deutschen Botanischen Gesellschaft Bd. 21. 1908. p. 238—298. Mit Tafel 12—16 und 12 Abbildungen im Text.

\* 56. WRIESBERG, H. A.: Observationum de Animalculis Infusoriis Natura. Göttingæ. 1764. p. 24. Taf. I. 4.

---

(A. M. T. Akadémia III. osztályának 1915. január 18.-án tartott üléséből.)

# VALÓS ELEMEBŐL ÁLLÓ VÉGTELEN LÁNCZTÖRTEK ÖSSZETARTÁSÁRÓL.<sup>1</sup>

SZÁSZ OTTÓ-tól.

Komplex tagokkal bíró valamely végtelen sor

$$\sum_1^{\infty} a_v = \sum_1^{\infty} (a_v + i\beta_v)$$

összetartása, illetőleg széttartása igen egyszerű módon függ a valós tagú  $\sum_1^{\infty} a_v$  és  $\sum_1^{\infty} \beta_v$  sorok viselkedésétől. Nem így a láncztörtek esetében; nem ismerünk oly összefüggést, mely egy komplex elemű láncztört viselkedésére bizonyos valós elemű láncztörtek viselkedéséből engedne következtetést. Ha ily összefüggés egyáltalában fennáll, úgy igen bonyolult jelleggel kell bírnia. Tehát joggal feltehető, hogy az a lényeges megszorítás, mely az elemek valós voltában jut kifejezésre, mélyebb betekintést enged a láncztört szerkezetébe. Ily láncztörtek különleges osztályait, nevezetesen a pozitív elemekből álló és az alternáló láncztörteket, már behatóbban vizsgálták;<sup>2</sup> újabban pedig TIETZE geometriai úton általánosabb alakú láncztörtekre vezetett le néhány érdekes összetartási és irracionálitási tételt.<sup>3</sup> PERRON (Lehrbuch, §§. 51—52) aztán e tételeket arithmetikai úton bizonyította be, a láncztörtek extensiójának (Perron, Lehrbuch, §. 44) segítségével.

<sup>1</sup> E dolgozat — lényegtelen változtatásokat leszámítva — a szerző frankfurti magántanári képesítő kézirati értekezésének egy része.

<sup>2</sup> Ez irányú tájékoztatás czéljából utalok O. PERRON tartalmas művére: Die Lehre von den Kettenbrüchen (50. és 51. §§.), Leipzig, 1913. E könyvet a következőkben röviden «Perron, Lehrbuch» alatt idézem.

<sup>3</sup> H. TIETZE: a) Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 21, S. 344—360); b) Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche (Mathem. Annalen, Bd. 71, 1911, S. 236—265).

A PERRON-tól kezdeményezett úton, ennek jelentékeny továbbfejlesztésével, általánosabb tételeket állítok fel. Az én tételeimből aztán, a bennök szereplő végtelen sok parameter speczializálása által, további új összetartási tételeket vezetek le. Többek között egy régebbi tétel<sup>1</sup> általánosítását nyerem, ha e tételnek — a mely általában véve komplex elemű láncztörtekre vonatkozik és a melyet végtelen láncztört-determinánsok segítségével bizonyítottam be — csak valós elemekből álló láncztörtekre vonatkozó részét veszem figyelembe; ugyanis a következőről van szó:

Ismeretes H. von KOCH-nak<sup>2</sup> következő tétele:

A tetszésszerű (valós vagy komplex) elemekkel biró  $\left[ \begin{array}{c} a_\nu \\ | \\ 1 \end{array} \right]_1^\infty$  láncztört<sup>3</sup> biztosan összetartó, ha  $\sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| < 1$ . PRINGSHEIM<sup>4</sup> e tételt egy általános kriteriumából vezette le és a  $\sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| = 1$  határesetre is kiterjesztette. Én végül (1 alatt i. h.) a  $\sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| \leq 1$  feltételt az általánosabb

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} |a_\nu| - \sum_{\nu=2}^{\infty} \Re(a_\nu) \leq 2$$

<sup>1</sup> O. SZÁSZ: Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen [Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (München), Math.-phys. Klasse, Jahrg. 1912, S. 323—361], S. 341.

<sup>2</sup> H. von KOCH: Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues (Bull. Soc. Math. de France. t. 23, 1895, p. 33—40).

<sup>3</sup> Az  $\left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$  és a  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$  jelölések a régebben használt

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

jelölést pótolják és PRINGSHEIM-től erednek. Az  $a_1, a_2, a_3, \dots$  elemeket részlet-számlálóknak, a  $b_1, b_2, b_3, \dots$  elemeket pedig részletnevezőknek nevezik. A fenti esetben  $b_\nu = 1$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ).

<sup>4</sup> A. PRINGSHEIM: Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern (Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften, München, Math.-phys. Klasse, Bd. 35, 1905, S. 359—380).

feltétellel helyettesítettem (a  $\sum_r |a_r|$  sor összetartásának feltételét megtartván); itt  $\Re(a_r)$  jelenti  $a_r$  valós részét.

Az a feltétel, hogy a  $\sum_r |a_r|$  sor összetartó, nyilván erős megszorítást jelent. Csupa *valós*  $a_r$  elem esetére sikerült már most e feltételt, a mennyire csak lehetséges, kiküszöbölnöm. Ebben az esetben  $\Re(a_r) = a_r$ ; bevezetek továbbá bizonyos  $\sigma_r$  mennyiségeket a következő módon: ha  $a_{r+1} > 0$ , akkor legyen  $\sigma_r = 0$ , ha pedig  $a_{r+1} < 0$ , akkor jelentse  $\sigma_r$  az  $a_{r+1}$ -t követő és a *legközelebbi* pozitív részletszámlálót megelőző (az előbbit beleértve, az utóbbit kizárva) *negatív* részletszámlálók összegének abszolút értékét. Ha még definiálunk egy  $\vartheta_r$  mennyiséget oly módon, hogy

$$\vartheta_r = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_r > 0 \\ 1, & \text{ha } a_r < 0, \end{cases}$$

akkor  $\sigma_r$  nyilván ily alakban írható:

$$\sigma_r = \sum_1^{\infty} |a_{r+k}| \vartheta_{r+1} \vartheta_{r+2} \dots \vartheta_{r+k},$$

és ez az összeg általában véges számú tagból áll, kivéve, ha valamely  $k$  indextől kezdve mindegyik  $a_r$  ( $r \geq k$ ) negatív; tehát csak ez utóbbi esetben kell a  $\sum_r |a_r|$  sor összetartását feltételeznünk. A tétel, melyet e dolgozat végén levezetek, most már így hangzik:

A valós elemekből álló  $\left[ \frac{a_r}{1} \right]_1^{\infty}$  ( $a_r \neq 0$ ) láncztört össze-tartó, ha

$$\sigma_r \leq 1 \quad (r = 2, 3, \dots) \quad \text{és} \quad \overline{\lim}_{r=\infty} \sigma_r < 1.$$

Csak ha valamely  $\nu$ -tól kezdve valamennyi  $a_r$  pozitív, akkor a láncztört összetartásához ezenfelül a

$$\sum_1^{\infty} \nu \left( \frac{r_1 r_3 \dots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \dots r_{2\nu+1}} \right) \quad (r = |a_r|)$$

sor széttartása szükséges. (Ez utóbbi mindenkor szükséges feltétele az összetartásnak, de végtelen sok negatív  $a_r$  esetben eo ipso teljesül, miként a tétel bebizonyításából kitűnik.)

E tétel, valamint jelen dolgozatom néhány más tétele első lépést jelent amaz eredmények általánosítására, a melyeket egy előbbi cikkemben (a 655. oldalon 1 alatt i. h.) levezettem, oly értelemben, a hogy azt idézett cikkem 361. oldalán jeleztem; erre nézve utalok még egy a «Journal für die reine und angewandte Mathematik»-ban megjelenendő dolgozatom 4 alatti tételére.

Jelen értekezésem tartalmából még egy tételt legyen szabad idéznem, mely a fentivel rokon, és egyszerű fogalmazása mellett szintén általános jellegű. Legyen rövideg kedvéért

$$b_0 = 1, \delta_0 = 1, \delta_1 = 1, \delta_\nu = \frac{b_{\nu-1}b_\nu}{|b_{\nu-1}b_\nu|} \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

$$(\text{ha } b_{\nu-1}b_\nu = 0, \text{ akkor legyen } \delta_\nu = 1),$$

akkor érvényes e tétel:

A valós elemekből álló  $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$  láncztört összetartó, ha

$$|b_\nu| \geq 1 - \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1}) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

és ha  $\nu$ -nek legalább egy értéke mellett ( $\nu \geq 0$ )

$$[|b_\nu| - 1 + \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1})][|b_{\nu+1}| + \frac{1}{2}(1 - \delta_\nu - \delta_{\nu+1} + \delta_{\nu+2})] > 0.$$

Csak ha a  $\nu$  index valamely értékétől kezdve mindvégig  $b_{\nu-1}b_\nu \geq 0$ , kell még azonfelül a  $\sum_1^\infty \nu |b_\nu|$  sor széttartását feltételeznünk. (V. ö. a III. tételt.)

Komplex elemű láncztörtekre e tételnek még nincs analogonja; némiképpen rokontételeket a «Journal für d. r. u. a. Mathematik»-ban megjelenendő dolgozatom 6. §-ában vezettem le.

Fenti tételelem egy PRINGSHEIM-tól eredő tételnek általánosítása (a 655. oldalon 4. alatt i. h. 363. oldal), ha valós elemekre szorítkozunk. E tétel általánosságban így szól:

A komplex elemű  $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$  láncztört összetartó, ha

$$|b_1| \geq 1, |b_\nu| \geq 2 \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

és legalább egy ízben beáll az egyenlőtlenség.

Csupa valós negatív  $b_{\nu-1}b_{\nu}$  esetén a két tétel egymással megegyezik (ez esetben  $\delta_{\nu} = -1$ ).

E dolgozat több helyen megrövidíthető, ha a részletszámlálók értékészletéből a zérust kizárjuk. Ez azonban az általánosság számottevő megszorítását jelentené. Ez világos, ha a részletszámlálók egy változó függvényei, a melyek bizonyos helyeken el is tűnhetnek. Ezenkívül a zérus értékű részletszámlálókkal bíró láncztörtek összetartása összefügg ama kérdéssel, hogy egy véges láncztörtnek van-e meghatározott értéke (v. ö. PERRON, Lehrbuch, § 42, Satz 1. S. 193).

### 1. §. Segédtelemek.

PERRON az ő többször idézett művében (44. §.) a következő tételt vezette le:

A) Legyenek az

$$\left[ \frac{a_{\nu}}{b_{\nu}} \right]_1^{k+1} = \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \quad (k \geq 1)$$

láncztört részletszámlálói a zérustól különbözők és az ő közelítő törtjei:<sup>1</sup>  $\frac{A_{\nu}}{B_{\nu}}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k+1$ ); legyen továbbá  $\varrho$  egy tetszőszerinti, a zérustól különböző szám. Ahhoz, hogy az

$$\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{\alpha''}{\beta''} \quad (1)$$

$k+2$ -tagú láncztört közelítő törtjei ezek legyenek:

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \dots, \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}, \frac{A_{k-\varrho}A_{k-1}}{B_{k-\varrho}B_{k-1}}, \frac{A_k}{B_k}, \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}},$$

elegendő és — egy æquivalens transformatiót leszámítva — szükséges is, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_k, \quad \beta = b_k - \varrho, \quad \alpha' = \varrho, \quad \beta' = 1, \quad \alpha'' = -\frac{a_{k+1}}{\varrho}, \\ \beta'' &= b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}. \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Azaz  $\frac{A_0}{B_0} = 0$ ,  $\frac{A_{\nu}}{B_{\nu}} = \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{\nu}}{b_{\nu}}$  ( $\nu \geq 1$ );  $\frac{a_{\nu}}{b_{\nu}}$ -t a láncztört  $\nu$ -dik tagjának nevezik.

Ebben az esetben PERRON után azt mondjuk, hogy az (a) alatti láncztört az eredetiből *extenzióval* keletkezett.

Tekintettel a következő fejtegetésekre, megjegyzem, hogy e tétel — csekély változtatással — akkor is érvényes, ha az  $a_v$ -k a zérus értéket is felvehetik. Ez esetben ugyanis — miként PERRON bizonyításából rögtön kitűnik — az (1) feltételek még elegendők, de nem szükségesek.

A keresett láncztört tehát ily alakú:

$$\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{a_k}{b_k - \rho} + \frac{\rho}{1} - \frac{\frac{a_{k+1}}{\rho}}{b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\rho}}.$$

Vizsgálataimban még a következő két ismeretes tételt<sup>1</sup> fogom felhasználni:

B) Ha a  $\left[\frac{p_v}{q_v}\right]_1^\infty$  láncztört elemei mind pozitívek, a hol azonban a  $q_v$ -k a zérus értéket is felvehetik, de úgy, hogy ne tűnjön el valamennyi páratlan indexű  $q_v$ , akkor a láncztört összetartásának szükséges és elegendő feltétele, hogy e két sor

$$\sum_1^\infty \nu \frac{p_1 p_3 \dots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \dots p_{2\nu}} q_{2\nu},$$

$$\sum_1^\infty \nu \frac{p_2 p_4 \dots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \dots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

közül legalább az egyik széttartson.

C) A pozitív elemekből álló  $\left[\frac{p_v}{q_v}\right]_1^\infty$  láncztört, a hol azonban a  $q_v$ -k a zérus értéket is felvehetik, összetartó, ha a  $\sum_1^\infty \nu \left(\frac{q_\nu / \nu + 1}{p_\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$  sor széttartó. Az összetartás nyilván *feltétlen*.

(Azaz a  $\left[\frac{p_v}{q_v}\right]_k^\infty$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) láncztörtek mind összetartók.)

Későbbi alkalmazás céljából (VI. és X. tétel) bebizonyítom még a következő egyszerű tételt:

D) A *nem-negatív elemekből* (azaz  $p_v \geq 0, q_v \geq 0$ ) álló

<sup>1</sup> Bővebb tájékoztatásul v. ö. PERRON: Lehrbuch, §. 50.

$\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$  lánctört biztosan összetartó, ha  $\nu$ -nek legalább egy értéke mellett  $p_\nu = 0$  és ha valamely  $k$  értékre<sup>1</sup> ( $k \geq 1$ ):

$$q_\nu + p_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, k-1) \quad (2)$$

$$q_\nu > 0 \quad (\nu = k, k+1, \dots). \quad (3)$$

*Bebizonyítás.* Legyenek a lánctört közelítő törtjei:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

akkor, miként ismeretes (v. ö. pl. PERRON, Lehrbuch, § 2):

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1, \quad Q_1 = q_1, \quad Q_2 = q_2q_1 + p_2 \\ Q_\nu &= q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Innen közvetlenül kiviláglik, hogy

$$Q_\nu \geq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots);$$

bebizonyítom most a következő egyenlőtlenséget:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Mindenekelőtt megjegyzem, hogy e rekurziós képletekből:

$$\left. \begin{aligned} Q_\nu &= q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \\ Q_{\nu+1} &= q_{\nu+1} Q_\nu + p_{\nu+1} Q_{\nu-1} \end{aligned} \right\} (\nu = 2, 3, \dots),$$

összeadás útján rögtön következik ez egyenlet:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} = q_{\nu+1} Q_\nu + (q_\nu + p_{\nu+1}) Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Már most  $\nu = 0, 1$  értékre az (5) egyenlőtlenség nyilván igaz; általános érvényét teljes inductióval bizonyítom be. Legyen tehát valamely  $\lambda$  értékre ( $\lambda \geq 2$ )

$$Q_{\lambda-1} + Q_\lambda > 0,$$

---

<sup>1</sup> Lehetne e feltételek helyett valamivel általánosabbakat bevezetni, ez azonban a bebizonyítást bonyolítaná; mivel pedig jelen cikkemben csak a fenti tételt használom fel, ezért az itt adott fogalmazásra szorítkozom. Ha  $k = 1$ , akkor a (2) feltétel elesik.



akkor vagy lesz  $Q_\lambda > 0$ , és ez esetben a

$$Q_\lambda + Q_{\lambda+1} > 0 \quad (7)$$

egyenlőtlenség szintén fennáll, vagy pedig  $Q_{\lambda-1} > 0$ , és ez esetben a (7) egyenlőtlenség rögtön következik (2)- és (6)-ból ( $\nu$  helyébe  $\lambda$ -t téve). Ezzel (5) be van bizonyítva.

Végül még a következő egyenlőtlenséget vezetem le:

$$Q_\nu > 0 \quad (\nu = k, k+1, \dots); \quad (8)$$

ugyanis (5) szerint a  $Q_{k-1}$ ,  $Q_k$  mennyiségek legalább egyike zérustól különböző, s most (8)-at teljes inductióval nyerjük: legyen egy  $\lambda$  értékre ( $\lambda \geq k-1 \geq 0$ )  $Q_\lambda > 0$ , akkor (3)- és (4)-ből,  $\nu$  helyébe  $\lambda+1$ -t téve, következik, hogy  $Q_{\lambda+1} > 0$  s ezzel (8) be van bizonyítva.

Most már tudvalevőleg (v. ö. PERRON, Lehrbuch, S. 234):

$$\left[ \frac{p_\nu}{q_\nu} \right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{P_k}{Q_k} + \sum_{k+1}^\infty (-1)^{\nu-1} \frac{p_1 p_2 \cdots p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

és e sor véges számú el nem tűnő tagból áll, tehát véges és meghatározott értékű; ezzel a *D*) tétel be van bizonyítva.

Pótlék. Ha valamely  $k \geq 2$  értékre

$$q_k = 0, \quad p_{k+1} \geq 0, \quad \text{de} \quad p_k q_{k-2} > 0, \quad (9)$$

és egyébként a *D*) alatt szereplő feltételek teljesülnek, akkor is összetartó a láncztört. Itt  $q_0 = 1$ .

Ugyanis most (9) figyelembevételével:

$$Q_k = p_k Q_{k-2}; \quad (10)$$

mindenekelőtt kimutatom, hogy  $Q_{k-2} > 0$ . Ha  $k = 2$ , akkor ez nyilván igaz; legyen tehát  $k > 2$ . (2)-ből  $\nu = 1, 2, \dots, k-1$ -re, éppen úgy, mint föntebb, következik, hogy

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, k-1); \quad (11)$$

ha már most  $Q_{k-3} = 0$ , akkor (11)-ből  $-\nu$  helyébe  $k-3$ -t téve — következik, hogy  $Q_{k-2} > 0$ ; ha ellenben  $Q_{k-3} > 0$ , akkor (9)- és (4)-ből,  $\nu$  helyébe  $k-2$ -t téve, következik szintén, hogy

$Q_{k-2} > 0$ . Most még (9) és (10) tekintetbe vételével  $Q_k > 0$ , és (3)-ból, ha  $\nu > k$ , éppen úgy, mint előbb, ered:

$$Q_\nu > 0 \quad (\nu = k, k + 1, \dots).$$

És innen közvetlenül ered, mint a  $D$ ) tételnél, a láncztört össze-tartása. Érvényes tehát e

*pótlék a D) tételhez. (2)- és (3)-ban  $\nu = k$ -ra az egyenlőség is megengedhető, hacsak  $p_k > 0$ ,  $q_{k-2} > 0$  és  $k \geq 2$ .*

Végül még e tételt idézem:

*E) Positiv elemekből álló valamely láncztörtnél, a hol azonban  $q_\nu = 0$  is megengedhető, hacsak nem tűnik el valamennyi páratlan indexű  $q_\nu$ , a páros rendű közelítő törtek sohasem fogy-nak s van egy határértékük  $k$ , a páratlan rendűek sohasem nő-nek s van egy határértékük  $K$  és  $0 < k \leq K$ ; de fölléphet véges számú értelmetlen (azaz zérus nevezőjű) közelítő tört. (V. ö. PER-ROK, Lehrbuch, S. 239—240.)*

## 2. §. Egy általános összetartási kriterium és néhány folyománya.

Legyen általában adva e láncztört:

$$\left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty = \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots, \quad (12)$$

melynek elemei tetszésszerinti *valós* számok (a zérust is bele-értve); legyen továbbá

$$a_\nu = \alpha_\nu |a_\nu|, \quad b_\nu = \beta_\nu |b_\nu|,$$

a hol

$$\alpha_\nu = \begin{cases} +1, & \text{ha } a_\nu \geq 0 \\ -1, & \text{ha } a_\nu < 0 \end{cases}, \quad \beta_\nu = \begin{cases} +1, & \text{ha } b_\nu \geq 0 \\ -1, & \text{ha } b_\nu < 0 \end{cases}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \equiv \left[ \frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} |a_1|}{|b_1|}, \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1} \beta_\nu} |a_\nu|}{|b_\nu|} \right]_2^\infty = K,$$

(azaz a két láncztört *aequivalens*, közelítő törtjei egymással rendre

megegyeznek); a következőkben mindvégig a (12) alatti láncz-  
tört e transformált alakját fogom használni és rövidség ked-  
véért bevezetem e jelöléseket:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 2, 3, \dots) \\ \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \quad (\nu = 2, 3, \dots); \quad |a_\nu| = p_\nu, \quad |b_\nu| = q_\nu \end{aligned} \right\} (13)$$

Először is bebizonyítom a következő tételt:

I. *Ha a (12) alatti láncztört elemei mind valósak<sup>1</sup> és létezik a pozitív számok egy sorozata:  $\varrho_0=1, \varrho_\nu>0$  ( $\nu=1, 2, 3, \dots$ ), úgy hogy teljesülnek ezek az egyenlőtlenségek:*

$$q_\nu \geq \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad (14)$$

akkor mindama helyeken, a hol  $\vartheta_{k+1} = 1$  ( $k \geq 1$ ), helyettesít-  
sük a transformált láncztört

$$\frac{\varepsilon_k p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

részt

$$\frac{\varepsilon_k p_k}{q_k - \varrho_k} + \frac{\varrho_k}{1} + \frac{\frac{p_{k+1}}{\varrho_k}}{q_{k+1} - \frac{p_{k+1}}{\varrho_k}}$$

által.

Ez eljárás alkalmazásával egy nem-negatív elemekből álló láncztört keletkezik ( $\varepsilon_1 p_1$  előjelét a következőkben nem vesszük figyelembe). Az ő összetartása, mely a B), C) és D) tételek útján eldönthető, elegendő a (12) láncztört összetartásához. Itt  $\varepsilon_\nu, p_\nu, q_\nu, \vartheta_\nu$  jelentése (13)-ból tűnik ki, a hol  $a_\nu$  és  $\beta_\nu, a_\nu$  és  $b_\nu$  karakteristikái.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ezt a következőkben is hallgatagon mindig feltételezem.

<sup>2</sup> PRINGSHEIM után  $\alpha = \frac{a}{|a|}$ -t az  $a$  karakteristikájának nevezik; ha  $a = 0$ , akkor legyen  $\alpha = +1$ .

E tétel bebizonyítása igen egyszerű és hasonlít PERRON-nak egy speciálisabb rokontételre<sup>1</sup> adott bebizonyításához.

Jelöljük az eredeti láncztörtet röviden  $K$ -val, a megváltoztatottat  $K'$ -vel, akkor (14)-ből közvetlenül kitűnik, hogy  $K'$  egy eleme sem negatív. Legyenek most  $A_v$ ,  $B_v$ , a  $K$  láncztört részlet-számlálói, illetőleg nevezői;  $K$ -ból  $K'$  az  $A$ ) tétel szerint extenzióval keletkezett és az újonnan hozzálépő közelítőtrtek ily alakúak:

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}},$$

ha

$$\varepsilon_{k+1} = -1.$$

Tehát  $K'$  összetartása elegendő a  $K$  láncztört összetartásához; ezzel tételünk be van bizonyítva.

Megjegyzendő, hogy ha valamely  $\vartheta_{v+1} = 0$  (azaz  $\varepsilon_{v+1} = 1$ ), akkor a hozzátartozó  $\varrho_v$  az extendált láncztörtben elő sem fordul, tehát az összetartásra semminemű befolyást sem gyakorol és ezért bármely a zérustól különböző érték, például az 1 érték írható elő számára.

Éppen úgy, mint PERRON tette, ki lehet mutatni, hogy itt is bizonyos esetekben  $K'$  összetartása szükséges is  $K$  összetar-

<sup>1</sup> PERRON: Lehrbuch, S. 242–244. Az ottani feltételek a mi jelölésünkkel:

$$p_v \neq 0, \quad q_v \geq p_v + \vartheta_{v+1} \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Ugyane feltevés mellett némileg más módon fogalmazta TIERZE (a 654. oldalon 3a) alatt i. h., 2. tétel) az összetartás feltételét. Világos, hogy az én feltevés — és ez az I. tételben a lényeges újítás — még akkor is általánosabb, ha mindvégig  $\varrho_v = 1$  és  $p_v \neq 0$ . Természetesen még a (14) alatti feltevés sem szükséges a (12) láncztört összetartásához; például a következő alternáló (azaz váltakozó előjelű tagokból álló), kéttagú periodussal bíró láncztört

$$q - \frac{1}{|q} + \frac{1}{|q} - \frac{1}{|q} + \frac{1}{|q} - + \dots$$

biztosan összetartó, ha  $0 < q < 1$ , a miről legkönnyebben egy PERRON-féle tétel (Lehrbuch, § 51, Satz 17), avagy a periodikus láncztörtek összetartási kriteriuma segítségével győződhetünk meg. Hogy azonban oly  $\varrho_v$ -k létezzenek, a melyek mellett (14) teljesül, mindenesetre teljesülnie kellene a  $q_{v-1} q_v \geq p_v \vartheta_v^2$  relációnak, ez azonban a jelen esetben egyetlen páratlan  $v$ -re sem áll fenn.

tásához. Így például akkor, ha  $\varrho_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ ,  $q_{k+1} \neq 0$ , valahány-szor  $p_{k+1} \neq 0$ , mert most

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}},$$

ha

$$\varepsilon_{k+1} = -1.$$

E specializálás már PERRON-nál (Lehrbuch, S. 245—246, Satz 16) előfordul.

Megvizsgálom most közelebbről  $K'$  szerkezetét. E láncztörtben mindenesetre fellépnek a következő részletnevezők:

$$q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots);$$

ugyanis a fentiekből világos, hogy ha  $\vartheta_{k+2} = 1$ , akkor a  $q_{k+1} - \frac{p_{k+1} \vartheta_{k+1}}{\varrho_k}$  részletnevező extensio után átmegy

$$q_{k+1} - \frac{p_{k+1} \vartheta_{k+1}}{\varrho_k} - \varrho_{k+1} \text{ be,}$$

ellenben a  $\vartheta_{k+2} = 0$  esetben változatlan marad.

A  $\vartheta_{\nu-1} = 0$  ( $\nu \geq 1$ ) esetben most már  $K'$ -ben előfordul e csoport:

$$\dots + \frac{\dots |}{|q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}|} + \frac{p_{\nu+1} |}{|q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+1}|} + \dots;$$

ha ellenben  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ , akkor  $K'$  e tagsorozattal bir:

$$\dots + \frac{\dots |}{|q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu+1}} - \varrho_\nu|} + \frac{\varrho_\nu |}{|1|} + \frac{\frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} |}{|q_{\nu+1} - \frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+1}|} + \dots$$

Ha már most a  $C$ ) tételt alkalmazzuk (ama feltevés mellett, hogy valamennyi  $a_\nu$  a zérustól különböző), akkor világos, hogy  $K'$  összetartó, ha e sorok

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\vartheta_{v+1}=0}^{\nu} \left[ \frac{\left( q_v - \frac{p_v \vartheta_v}{\varrho_{v-1}} \right) (q_{v+1} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2})}{p_{v+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \sum_{\vartheta_{v+1}=1}^{\nu} \left[ \frac{q_v - \frac{p_v \vartheta_v}{\varrho_{v+1}} - \varrho_v}{\varrho_v} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \sum_{\vartheta_{v+1}=1}^{\nu} \left[ \frac{\left( q_{v+1} - \frac{p_{v+1}}{\varrho_v} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2} \right) \varrho_v}{p_{v+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (\nu \geq 0)$$

legalább egyike széttartó. Itt  $q_0 = 1$ ,  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\varrho_{-1} = 1$  irandó és figyelembe veendő, hogy  $\vartheta_1 = 0$ .

Továbbá egy speciális eset egyszerűen elintézhető. Ha ugyanis valamely helytől kezdve mindegyik  $\varepsilon_\nu p_\nu$  negatív, akkor az extensio által  $K$ -nak két-két egymásra következő közelítő törtje közé mindenkor egy új közelítő törtet kapcsolunk; ennél fogva  $K$  közelítő törtjei  $K'$ -ben bizonyos helytől kezdve mind páros, illetőleg páratlan rendűek. Hogy tehát  $K$  összetartását állíthassuk, elegendő az  $E$ ) tétel szerint arról gondoskodnunk, hogy ne tűnjön el  $K'$ -nek valamennyi páratlan rendű részletnevezője. Ehhez pedig elegendő, ha  $q_1 = \varrho_1 \vartheta_2 > 0$ , avagy ha ama szorzatok közül, melyeket  $K'$  két-két egymásra következő részletnevezőjével képezhetünk, legalább egy a zérustól különböző; e kijelentésekkel pedig egyértelmű, hogy a fenti három sor ne tűnjön el mind identikusan.

Végül  $K'$  értéke is megbecsülhető; nyilván

$$0 \leq \varepsilon_1 K' \leq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1 \vartheta_2}.$$

Ez eredmények összefoglalásával a következő tételt nyerjük:

II. Ha a (12) alatti láncztört elemei és bizonyos pozitív  $\varrho_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ) számok elegendő tesznek az egyenlőtlenségeknek:

$$p_\nu > 0 \quad (15)$$

$$q_\nu \geq \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

akkor az ő összetartására a következő két feltétel bármelyike elegendő:

1. E három sor közül:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\vartheta_{v+1}=0} \left[ \frac{(\varrho_{v-1}q_v - p_v \vartheta_v) (q_{v+1} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2})}{\varrho_{v-1} p_{v+1}} \right]^{\frac{1}{2}} & (a_1) \\ & \sum_{\vartheta_{v+1}=1} \left[ \frac{\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v}{\varrho_{v-1} \varrho_v} \right]^{\frac{1}{2}} & (\beta_1) \\ & \sum_{\vartheta_v=1} \left[ \frac{\varrho_{v-1} q_v - p_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1}}{p_v} \right]^{\frac{1}{2}} & (\gamma_1) \end{aligned} \right\} (\nu \geq 0)$$

legalább egy széltartó.

2. Valamely helytől kezdve mindvégig  $\vartheta_v = 1$  és az  $(a_1)$ ,  $(\beta_1)$ ,  $(\gamma_1)$  sorok nem tűnnek el mind identikusan.

Ekkor egyúttal

$$0 \geq \varepsilon_1 K \leq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1 \vartheta_2}$$

Itt  $p_v$ ,  $q_v$ ,  $\vartheta_v$  a (13) alatti értelemmel bírnak és

$$\varrho_{-1} = 1, \varrho_0 = 1, \vartheta_0 = 0.$$

*Első megjegyzés.* Ama kijelentés, hogy a (nem-negatív tagú)  $(a_1)$ ,  $(\beta_1)$  és  $(\gamma_1)$  sorok nem mind tűnnek el, nyilván a következővel is pótolható. E számok:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v) (q_{v+1} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2}) \text{ valahányszor } \vartheta_{v+1} = 0 \\ & \varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vartheta_{v+1} = 1 \\ & \varrho_{v-1} q_v - p_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vartheta_v = 1 \end{aligned}$$

nem mind tűnnek el. Avagy e számok:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v) (q_{v+1} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2}) (1 - \vartheta_{v+1}) + \\ & + (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v) \vartheta_{v+1} + \\ & + (\varrho_{v-1} q_v - p_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1}) \vartheta_v \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

nem mind tűnnek el. Mivel  $\vartheta_{v+1} (1 - \vartheta_{v+1}) = 0$ , ezért még

$$\begin{aligned} Z_\nu &= (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1}) (q_{v+1} - \varrho_{v+1} \vartheta_{v+2}) (1 - \vartheta_{v+1}) + \\ & + (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1}) \vartheta_{v+1} + \\ & + (\varrho_{v-1} q_v - p_v \vartheta_v - \varrho_{v-1} \varrho_v \vartheta_{v+1}) \vartheta_v, \end{aligned}$$

azaz

$$Z_\nu = (\varrho_{\nu-1}q_\nu - p_\nu\vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\varrho_\nu\vartheta_{\nu+1}) [(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2}) (1 - \vartheta_{\nu+1}) + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}];$$

végül világos, hogy e kifejezés akkor és csak akkor tűnik el, ha

$$(\varrho_{\nu-1}q_\nu - p_\nu\vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\varrho_\nu\vartheta_{\nu+1}) (q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) \quad (17)$$

is eltűnik. E szerint a 2) feltétel a következővel helyettesíthető:

2') *Valamely helytől kezdve mindegyik  $\vartheta_\nu = 1$  és  $\nu$  legfeljebb egy értéke mellett ( $\nu \geq 0$ ) a (17) kifejezés a zérustól különböző.*

*Második megjegyzés.* A (15) és (16) feltételek általában nem elégségesek a láncztört összetartásához, még akkor sem, ha benők mindvégig az egyenlőtlenség áll be és ha végtelen sokszor lesz  $\vartheta_\nu = 1$ .<sup>1</sup> Pl. az alternáló láncztört, a mely ez egyenletek által van definiálva:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{2\nu-1} &= -1, \quad \varepsilon_{2\nu} = 1 \\ q_{2\nu-1} &= q^\nu, \quad q_{2\nu} = 1 + \frac{1}{q^{2\nu}}, \quad q > 1 \\ p_{2\nu-1} &= q^\nu - \frac{1}{q^\nu}, \quad p_{2\nu} = \frac{1}{p_{2\nu-1}} = \frac{q^\nu}{q^{2\nu}-1} \end{aligned} \right\} (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

mindig széttartó. Erről könnyen meggyőződhetünk egy PERRON-féle tétel segítségével (v. ö. PERRON, Lehrbuch, S. 247, Satz 17).

E szerint ugyanis a  $\left[ \frac{(-1)^\nu p_\nu}{q_\nu} \right]_1^\infty$  láncztört széttartó, ha e feltételek teljesülnek:

$$f_1) \quad (q_{2\nu-1}q_{2\nu} + p_{2\nu}) q_{2\nu-1} \geq q_{2\nu-1}p_{2\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f_2) \quad \sum \nu \left( \frac{c_3c_5 \dots c_{2\nu-1}}{c_4c_6 \dots c_{2\nu}} d_{2\nu} + \frac{c_2c_4 \dots c_{2\nu}}{c_3c_5 \dots c_{2\nu+1}} d_{2\nu+1} \right)$$

összetartó, a hol

$$c_\nu = p_{2\nu-1}p_{2\nu}q_{2\nu-3}/q_{2\nu+1}, \quad d_\nu = (q_{2\nu-1}q_{2\nu} + p_{2\nu}) q_{2\nu+1} - q_{2\nu-1}p_{2\nu-1}.$$

<sup>1</sup> Ama speciális esetben, a midőn  $p_\nu = 1$ ,  $\varrho_\nu = 1$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ), mindenesetre elégségesek; v. ö. a III. tételt.



Az  $f_1$ ) feltétel a jelen esetben :

$$\left[ q^v \left( 1 + \frac{1}{q^{2v}} \right) + \frac{q^v}{q^{2v}-1} \right] q^{v+1} \geq q^v \left( q^{v+1} - \frac{1}{q^{v+1}} \right),$$

és ez nyilván teljesítve van. Továbbá

$$c_v = q^{v-1} q^{v+1} = q^{2v},$$

tehát

$$\frac{c_v}{c_{v+1}} = \frac{1}{q^2} < 1,$$

$$d_v = \left[ q^v \left( 1 + \frac{1}{q^{2v}} \right) + \frac{q^v}{q^{2v}-1} \right] q^{v+1} - q^{2v+1} + \frac{1}{q} = q + \frac{q^{2v+1}}{q^{2v}-1} + \frac{1}{q},$$

tehát

$$d_v < q + 1 + \frac{q^2}{q-1};$$

innen kiviláglik, hogy az  $f_2$ ) feltétel is teljesül. Végül a (15) és (16) feltételek is ki vannak elégítve, ha  $q_v = 1$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ); mert e feltételek most ily alakúak :

$$q^{2v} > 1, \quad q^v \geq q - \frac{1}{q^v}, \quad 1 + \frac{1}{q^{2v}} \geq 1,$$

és itt az egyenlőtlenség is fennáll.

Hogy tetszésszerűen  $q_v$  sorozathoz mindig található-e ily példa, az nyílt kérdés; v. ö. még a VIII., IX. és X. tételekkel.

Ha  $q_v$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) helyébe 1-et írunk, akkor a II. tételből egy TIERZE-féle tétel (a 654. oldalon i. h., 3a), Satz 3; 3b), Satz 6; v. ö. még PERRON, Lehrbuch, S. 244—245) általánosítását nyerjük. még akkor is, ha a  $(\gamma_v)$  sort figyelmen kívül hagyjuk.

Ha  $\nu$  valamely értékétől kezdve mindvégig  $\varepsilon_v = +1$ , akkor a II. tétel még szigorítható, ez esetben ugyanis valamely tagtól kezdve a  $K'$  és  $K$  láncztörtek megegyeznek és könnyen alkalmazhatjuk a (.) tétel helyett a nála általánosabb B) tételt. Ily módon a következőt nyerjük:

*Pótlék a II. tételhez. Ha valamely tagtól kezdve mindvégig  $\varepsilon_v = 0$ , akkor az 1) feltétel helyébe a következőt írhatjuk: e két sor*

$$\sum_1^{\infty} \nu \frac{p_1 p_3 \dots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \dots p_{2\nu}} q_{2\nu}, \quad \sum_1^{\infty} \nu \frac{p_2 p_4 \dots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \dots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

közül legalább az egyik széttartó és az  $(a_1)$ ,  $(\beta_1)$ ,  $(\gamma_1)$  sorok nem mind tűnnek el.<sup>1</sup>

Megjegyzem, hogy a  $q_\nu$ -k ugyanolyan jellegűek, mint a PRINGSHELM által az ő főtételében  $p_\nu$ -vel jelölt végtelen sok parameter.<sup>2</sup>

### 3. §. Egy összetartási tétel a $\left[\frac{\pm 1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ alakú láncztörtekre nézve és általánosítása.

Ha  $p_\nu$  és  $q_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ) helyébe 1-et írunk, akkor a II. tételből a következőt nyerjük:

II'. Ha a (12) láncztört elemei kielégítik e feltételeket:

$$\left. \begin{array}{l} p_\nu = 1 \\ q_\nu \geq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1} \end{array} \right\} (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

akkor az ő összetartásához elegendő, ha a következő két feltétel bármelyike teljesül:

1. E három sor közül:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\vartheta_{\nu+1}=0} [(q_\nu - \vartheta_\nu) (q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2})]^{\frac{1}{2}} \\ \sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} [q_\nu - \vartheta_\nu - 1]^{\frac{1}{2}} \\ \sum_{\vartheta_\nu=1} [q_\nu - \vartheta_{\nu+1} - 1]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} (\nu \geq 0) \quad \begin{array}{l} (a_2) \\ (\beta_2) \\ (\gamma_2) \end{array}$$

legalább egy széttartó.

2. Valamely tagtól kezdve mindvégig  $\vartheta_\nu = 1$  és az  $(a_2)$ ,  $(\beta_2)$ ,  $(\gamma_2)$  sor nem tűnik el mind.

<sup>1</sup> Ez utóbbi biztosan teljesül, ha valamely tagtól kezdve mindvégig  $q_\nu \neq 0$ ; a példékban adott feltétel ebben az esetben nemcsak elegendő, hanem szükséges is a láncztört összetartásához.

<sup>2</sup> A 655. oldalon. i. h., 4, különösen a 2. §; az itt szereplő  $p_\nu$ -kről a  $q_\nu$ -kre a  $p_\nu = \frac{|b_\nu|}{q_\nu}$  helyettesítés vezet.

Együttal

$$0 \leq \varepsilon_1 \left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \leq \frac{1}{|b_1| - \vartheta_2}.$$

E tételben egy TIETZE-féle kriterium (a 654. oldalon i. h., 3b), Satz 1) mint specziális eset bennfoglaltatik.

Függetlenül a II. tételtől a II'. tételt jelentékeny mértékben általánosíthatom. Az előbbi tétel levezetésére ugyanis a  $K'$  extendált láncztörré a C) tételt alkalmaztuk; de ha minden  $\nu$  érték mellett  $p_\nu = 1$  és  $q_\nu = 1$ , akkor  $K'$  minden részletszám-lálója és ilyenek szorzata is 1 értékű, tehát  $K'$ -re könnyen alkalmazható az általános B) tétel is. Ha továbbá  $\nu$  végtelen sok értékére  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor végtelen sok részletnevező is 1 értékű; ha pedig csak véges számú  $\vartheta_\nu$  bír az 1 értékkel, akkor  $K'$  valamely tagtól kezdődőleg ily alakú:

$$\frac{1}{|q_\nu|} + \frac{1}{|q_{\nu+1}|} + \frac{1}{|q_{\nu+2}|} + \dots$$

A 667. oldalon tett első megjegyzés figyelembe vételével így a következő tételhez jutunk:

III. A (12) láncztört összetartó, ha teljesülnek e feltételek:

1.  $p_\nu = 1$
  2.  $q_\nu \geq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}$
- } ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ )
3.  $\nu$ -nek legalább egy értéke ( $\nu \geq 0$ ) mellett:

$$(q_\nu - \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1})(q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) > 0.$$

Csak ha valamelyiktől kezdve mindegyik  $\vartheta_\nu$  eltűnik, kell ezenkívül a  $\sum_1^\infty q_\nu$  sor széttartását követelnünk. (Ez ugyan mindig szükséges feltétele a láncztört összetartásának, de végtelen sok negatív  $\varepsilon_\nu$  esetén eo ipso teljesítve van.)

Ha  $a_\nu$  helyébe 1-et írunk, akkor a bevezetésben idézett tételhez jutunk.

E tételt általánosítom a következő æquivalencia segítségével:

$$\left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \equiv \varrho \cdot \frac{a_1}{|q b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|q b_3|} + \frac{a_4}{|b_4|} + \dots \quad (\varrho \neq 0)$$

Legyen  $\rho > 0$ ; ha az így átalakított láncztöltre a III. tételt alkalmazom, a következő általánosabbat nyerem:

IV. A (12) láncztört összetartó, ha valamely pozitív  $\rho$  szám mellett a következő feltételek teljesülnek:

1.  $p_\nu = 1$
2.  $\rho q_{2\nu-1} \geq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}, \quad \frac{q_{2\nu}}{\rho} \geq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}$
3. Van egy  $\nu$ -érték, a mely mellett vagy

$$\left( \frac{q_{2\nu}}{\rho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1} \right) (\rho q_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) > 0 \quad (\nu \geq 1);$$

vagy

$$(\rho q_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu}) \left( \frac{q_{2\nu}}{\rho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu} \right) > 0 \quad (\nu \geq 1).$$

Csak ha valamelyiktől kezdve mindegyik  $\vartheta_\nu$  eltűnik, kell ezen felül a  $\sum_1^\infty q_\nu$  sor széttartását követelnünk.

E tétel könnyen kiterjeszthető oly láncztöltre, a melyek részletszámllálói tetszésszerűen, a zérustól különböző értékekkel bírnak. Ugyanis

$$\left[ \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty \equiv p_1 \left[ \frac{\varepsilon_1}{q_1}, \frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu} \right]_2^\infty \equiv p_1 \left[ \frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu} \right]_1^\infty,$$

a hol

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= q_1, \quad h_{2\nu} = \frac{p_3 p_5 \cdots p_{2\nu+1}}{p_2 p_4 p_6 \cdots p_{2\nu}} \cdot \frac{q_{2\nu}}{p_{2\nu+1}} \\ h_{2\nu+1} &= \frac{p_2 p_4 \cdots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \cdots p_{2\nu+1}} \cdot q_{2\nu+1} \end{aligned} \right\} (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

Ha az így átalakított láncztöltre a IV. tételt alkalmazom, a következőt nyerem:

V. A (12) láncztört összetartó, ha valamely pozitív  $\rho$  mellett e feltételek teljesülnek:

1.  $p_\nu \neq 0$
2.  $\rho h_{2\nu-1} \geq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}, \quad \frac{h_{2\nu}}{\rho} \geq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}$
3. Van egy  $\nu$ -érték, a mely mellett e két kifejezés

$$\left(\frac{h_{2\nu}}{\rho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1}\right) (\rho h_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) \quad (\nu \geq 0)$$

$$(\rho h_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu}) \left(\frac{h_{2\nu}}{\rho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu-1}\right) \quad (\nu \geq 1)$$

legalább egyike a zérustól különböző.

Csak ha a  $\nu$  index valamely értékétől kezdve mindvégig  $\vartheta_\nu = 0$ , kell ezeken felül a  $\sum_{\nu} h_\nu$  sor széttartását követelnünk.

A  $h_\nu, p_\nu, q_\nu, \vartheta_\nu, \varepsilon_\nu$  mennyiségek (13) és (18) alatt vannak definiálva és  $h_0 = 1$ .

Ha végül a  $K'$  láncztörtre a  $D$ ) tételt alkalmazzuk, a következőt nyerjük:

VI. A (12) láncztört összetartó, ha  $\nu$  legalább egy értéke mellett  $a_\nu = 0$  és ha valamely  $k$  ( $k \geq 1$ ) érték mellett teljesülnek ez egyenlőtlenségek:

$$\left. \begin{aligned} q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\rho_{\nu-1}} + p_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, k-1) \\ q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\rho_{\nu-1}} - \rho_\nu \vartheta_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = k, k+1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A  $D$ ) tétel pótlékát csak arra az esetre alkalmazom, a midőn

$$\vartheta_k = 1, \vartheta_{k+1} = 0.$$

Ekkor a  $K'$  láncztört nyilván a következő tagsorozattal bír:

$$\dots + \frac{\dots}{\left| q_{k-1} - \frac{p_{k-1} \vartheta_{k-1}}{\rho_{k-2}} - \rho_{k-1} \right|} + \frac{\rho_{k-1}}{|1|} + \frac{\frac{p_k}{\rho_{k-1}}}{\left| q_k - \frac{p_k}{\rho_{k-1}} \right|} +$$

$$+ \frac{\frac{p_{k+1}}{\rho_{k+1}}}{\left| q_{k+1} - \frac{p_{k+1}}{\rho_{k+1}} \right|} + \dots,$$

és nyerjük e tételt:

Pótlék a VI. tételhez. Ha valamely  $k$  értékre ( $k \geq 2$ )

$$\vartheta_k = 1, \vartheta_{k+1} = 0, p_k > 0, q_{k-1} - \frac{p_{k-1} \vartheta_{k-1}}{\rho_{k-2}} - \rho_{k-1} > 0,$$

akkor (19)-ben  $\nu = k$ -ra az egyenlőség is megengedhető.

A VI. tételt és pótlékát az 5. §-ban fogjuk felhasználni.

#### 4. §. Új összetartási tételek levezetése az általánosakból végtelen sok parameter specializálása által.

A  $q_\nu$ -k kedvező specializálásával a fenti tételekből egyszerűbb összetartási feltételeket nyerünk, hasonlóan ahhoz az eljáráshoz, a mellyel PRINGSHEIM<sup>1</sup> az ő főtételeiből új tételeket vezetett le.

Hosszadalmas képletek elkerülése végett csak néhány egyszerű figyelemreméltó esetre szorítkozom.

A következőkben mindvégig felteszem, hogy

$$q_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Legyen

$$q_\nu = \frac{q_\nu}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

és rövidség kedvéért

$$\frac{p_1}{q_1} = r_1, \quad \frac{p_\nu}{q_{\nu-1}q_\nu} = r_\nu \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

akkor a (16) egyenlőtlenség ily alakba megy át:

$$1 \geq u_{\nu-1}r_\nu \vartheta_\nu + \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Az általánosság megszorítása nélkül írhatjuk, hogy

$$q_\nu = 1, \quad p_\nu = r_\nu$$

s most az  $(\alpha_1)$ ,  $(\beta_1)$  és  $(\gamma_1)$  sorok ily alakot nyernek:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[ \frac{(1 - u_{\nu-1}r_\nu \vartheta_\nu) \left(1 - \frac{\vartheta_{\nu+2}}{u_{\nu+1}}\right)}{r_{\nu+1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \quad (\alpha_3) \\ \sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} [u_\nu - u_{\nu-1}u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1]^{\frac{1}{2}} & \quad (\beta_3) \\ \sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[ \frac{1 - u_{\nu-1}r_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu}}{u_{\nu-1}r_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} & \quad (\gamma_3) \end{aligned} \right\} (\nu \geq 0),$$

a hol  $u_{-1} = 1$ ,  $u_0 = 1$ ,  $r_0 = 1$ .

<sup>1</sup> A 655. oldalon i. h. 4., és egy előbbi dolgozatában: Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche [Sitzungsber. der K. Bayer. Akad. der Wiss. (München) Math.-phys. Klasse, Bd. 28, 1898, S. 295—324].

1. Legyen először is

$$u_\nu = 1 + \vartheta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots);$$

most a (20) egyenlőtlenség helyébe a következő lép:

$$r_\nu \vartheta_\nu \leq \frac{1 + \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1}}{(1 + \vartheta_{\nu-1})(1 + \vartheta_\nu)} \quad (\nu = 2, 3, \dots), \quad (21)$$

s nyerjük e tételt:

VII. Az  $\left[ \frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1} \right]_1^\infty$  ( $r_\nu > 0$ ,  $\varepsilon_\nu = \pm 1$ ) láncztört összetartó, ha a (21) egyenlőtlenség fennáll és ha ezenkívül e sorok

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\vartheta_{\nu+1} = \vartheta_{\nu+2} = 0} \left[ \frac{1 - r_\nu \vartheta_\nu (1 + \vartheta_{\nu-1})}{r_{\nu+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\nu \geq 0) \\ & \sum_{\vartheta_\nu = \vartheta_{\nu+1} = 1} [1 - 2r_\nu (1 + \vartheta_{\nu-1})]^{\frac{1}{2}} \\ & \sum_{\vartheta_\nu = 1} \left[ \frac{1 - r_\nu (1 + \vartheta_{\nu-1}) - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{2}}{r_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (\nu \geq 2)$$

legalább egyike szétartó, vagy valamely  $\nu$  értéktől kezdve mindvégig  $\vartheta_\nu = 1$  és a fenti sorok nem mind tűnnek el.

Igy például e láncztört

$$\frac{r_1}{|1} - \frac{r_2}{|1} - \frac{r_3}{|1} + \frac{r_4}{|1} - \frac{r_5}{|1} - \frac{r_6}{|1} + \dots, \quad \varepsilon \quad (22)$$

a hol általában

$$\vartheta_{3\nu-2} = 0, \quad \vartheta_{3\nu-1} = 1, \quad \vartheta_{3\nu} = 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

összetartó, ha valamely pozitív  $\varepsilon$  mellett

$$r_{3\nu-1} \leq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\nu^2}, \quad r_{3\nu} \leq \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Az  $r_{3\nu-2}$ -k itt tetszésszerinti pozitív számok (melyek az összetartásra nincsenek befolyással).

2. Legyen

$$u_1 = 1, \quad u_\nu = 1 + u, \quad (\nu = 2, 3, \dots),$$

a hol

$$u > 0;$$

a  $(\beta_3)$  sor most biztosan széttartó, ha csak  $\nu$  végtelen sok értékre  $\vartheta_\nu = 0$  és  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ . Ha azonban ez az eset nem áll fenn, akkor  $\nu$  valamely értékétől kezdve vagy mindig  $\vartheta_\nu = 0$ , vagy mindig  $\vartheta_\nu = 1$ . A II. tételből és az ő pótlékából tehát tekintettel az első megjegyzésre (667. old.) a következő tételt nyerjük:

VIII. Az  $\left[ \frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1} \right]_1^\infty$  ( $r_\nu > 0$ ) láncztört összetartó, ha  $u > 0$  és

$$r_2 \vartheta_2 \leq 1 - \frac{\vartheta_3}{1+u}, \quad r_\nu \vartheta_\nu \leq \frac{1+u-\vartheta_{\nu+1}}{(1+u)^2} \quad (\nu = 3, 4, \dots). \quad (23)$$

Ha azonban 1)  $\nu$  valamely értékétől kezdve mindvégig  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor (23)-ban legalább egy ízben az egyenlőtlenségnek kell fellépnie; ha pedig 2)  $\nu$  valamely értékétől kezdve végig  $\vartheta_\nu = 0$ , akkor még e feltételt:

$$\sum_1^\infty \nu \left( \frac{r_1 r_3 \dots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \dots r_{2\nu+1}} \right) \text{ széttartó} \quad (24)$$

kell hozzáfűznünk.

A (22) alatti láncztöltre ebből a következő összetartási feltételeket nyerjük:

$$r_2 \leq \frac{u}{1+u}, \quad r_3 \leq \frac{1}{1+u}, \quad r_{3\nu-1} \leq \frac{u}{(1+u)^2}, \quad r_{3\nu} \leq \frac{1}{1+u} \quad (\nu = 2, 3, \dots);$$

$r_{3\nu-2}$  tetszésszerű, csak pozitív legyen.

Ha  $u$  helyébe 1-et írunk, a (23) feltételek ily alakot vesznek fel:

$$r_2 \vartheta_2 \leq 1 - \frac{\vartheta_3}{2}, \quad r_\nu \vartheta_\nu \leq \frac{1}{2} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{4} \quad (\nu = 3, 4, \dots).$$

3. Legyen

$$u_\nu = \frac{2\nu-1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

akkor hasonló úton e tételt nyerjük:



IX. Az  $\left[ \frac{\varepsilon_1 r_\nu}{1} \right]_1^\infty$  ( $r_\nu > 0$ ) láncztört összetartó, ha

$$r_\nu \vartheta_\nu \leq \left( 1 - \frac{\nu \vartheta_{\nu+1}}{2\nu-1} \right) \cdot \frac{\nu-1}{2\nu-3}; \quad (\nu = 2, 3, \dots). \quad (25)$$

Ha azonban 1) valamely  $\nu$ -tól kezdve állandóan  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor (25) alatt legalább egyszer az egyenlőtlenségnek kell fennállnia, ha pedig 2) valamely  $\nu$ -tól kezdve mindig  $\vartheta_\nu = 0$ , akkor a (24) feltételt kell hozzákapcsolnunk.

4. Az  $r_\nu$ -k számára most a zérus értéket is megengedem. Felteszem, hogy a  $\sum_{\nu=1}^\infty r_\nu \vartheta_\nu$  sor összetartó és legfeljebb 1 értékű. Legyen továbbá  $u_1 \geq 1$  és az  $u_1, u_2, u_3, \dots$  sorozat sohasem fogyó. Ekkor  $\vartheta_{\nu+1} \leq u_{\nu-1}$  és így a (20) alatti egyenlőtlenség fennáll, ha csak

$$r_\nu \vartheta_\nu \leq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \dots). \quad (26)$$

Legyen most

$$\frac{1}{u_\nu} = \sum_{n=1}^\infty r_n \vartheta_n, \quad (d)$$

ha e sor nem tűnik el; de csak úgy tűnhet el, ha

$$\vartheta_n = 0 \quad (n = \nu + 1, \nu + 2, \dots),$$

és ebben az esetben  $u_\nu, u_{\nu+1}, \dots$  tetszésszerűen értékekkel bírhatnak, a melyek csak a bevezetett  $u_n \geq u_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) feltételnek tesznek eleget, írható például  $u_n = u_{\nu-1}$  ( $n = \nu, \nu + 1, \dots$ ).

Világos, hogy a (26) alatti feltétel most teljesítve van.

Legyen mindenekelőtt  $r_\nu \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ); a  $(\beta_2)$  sor általános tagja most:

$$(u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ha } \vartheta_{\nu+1} = 1),$$

továbbá (26)-ból következik, hogy

$$u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu \leq u_\nu - u_{\nu-1},$$

azaz

$$u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1 \geq u_{\nu-1} - 1.$$

Ha már most végtelen sokszor lesz  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ , akkor nyilván

((d) szerint)  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \infty$ , és a  $(\beta_3)$  sornak végtelen sok minden határon túl növekvő tagja van, tehát széttartó.

Ha pedig valamely  $\nu$ -től kezdve végig  $\vartheta_\nu = 0$ , akkor a II. tétel pótlékát alkalmazhatjuk. Az  $(\alpha_3)$  sornak biztosan van (sőt végtelen sok) el nem tűnő tagja, ezért a láncztört összetartásának ama szükséges feltétele, hogy e két sor közül

$$\sum_1^{\infty} \nu \frac{r_1 r_3 \cdots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \cdots r_{2\nu}},$$

$$\sum_1^{\infty} \nu \frac{r_2 r_4 \cdots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \cdots r_{2\nu+1}}$$

legalább az egyik széttartó legyen, most elegendő is.

Amaz eset elintézésére, a midőn az  $r_\nu$ -k legalább egyike el-tűnik, a VI. tételt kell alkalmaznunk. Az ott szereplő feltételek most ily alakot nyernek:

$$1 - u_{\nu+1} r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} (1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0; \quad (\nu = 2, 3, \dots, k-1) \quad (27)$$

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} > 0; \quad (\nu = k, k+1, \dots) \quad (28)$$

(egy bizonyos  $k$  mellett).

Legyen először is végtelen sok  $\nu$ -re nézve  $\vartheta_\nu = 1$ ; ekkor a (27) egyenlőtlenség teljesítve van, mert valamely  $\nu = \lambda$  érték mellett az ott szereplő kifejezés csak úgy tűnhetik el, ha

$$\vartheta_\lambda = 1, \quad u_{\lambda-1} r_\lambda = 1, \quad r_{\lambda+1} (1 - \vartheta_{\lambda+1}) = 0;$$

$u_{\lambda-1} r_\lambda = 1$ -ből pedig következik, hogy

$$\vartheta_\nu = 0 \quad (\nu = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots),$$

a mi ellenkezik feltevésünkkel. A (28) alatti feltétel is teljesítve van ( $k$  alkalmas választása mellett), mert

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \geq \frac{1}{u_\nu} (u_\nu - u_{\nu-1} u_{\nu'} \vartheta_{\nu'} - 1) \geq \frac{u_{\nu-1} - 1}{u_\nu},$$

és ez alsó határ valamely  $\nu$ -től kezdve a zérusnál nagyobb, mivel  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_{\nu-1} = \infty$ . Tehát a láncztört összetartó.

Legyen másodszer  $\vartheta_\nu = 0$  ( $\nu = 2, 3, \dots$ ); ekkor a (27) és

(28) feltételek nyilván már  $k = 2$ -re teljesülnek; a láncztört most is összetartó.

Legyen végül harmadszor  $\nu$  véges számú értéke mellett  $\vartheta_\nu = 1$ , tehát

$$\vartheta_{k_1} = 1, \vartheta_{k_2} = 1, \dots, \vartheta_{k_\mu} = 1, (\mu \geq 1) \\ \vartheta_\nu = 0 \quad (\nu \neq k_1, k_2, \dots, k_\mu).$$

A (28) alatti feltétel most is teljesül, például  $k = k_\mu + 1$  mellett. A (27) egyenlőtlenség bal oldalának értéke  $\nu = k_\mu$ -re  $1 - 1 + r_{k_\mu + 1}$ ; ez nagyobb mint zérus, ha  $r_{k_\mu + 1} > 0$ . Továbbá a  $\nu < k_\mu$  esetben

$$u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu = \frac{r_\nu \vartheta_\nu}{r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} \vartheta_{\nu+1} + \dots + r_{k_\mu}} < 1,$$

tehát most a (27) feltétel is ki van elégítve és a láncztört összetartó.

Hátra van *annak az alesetnek az elintézése, a midőn  $r_{k_\mu + 1} = 0$* . A (27) egyenlőtlenség most csak a  $\nu = k_\mu$  eset kivételével áll fenn, tehát (a VI. tétel pótléka szerint) meg kell vizsgálnunk, hogy e kifejezés

$$1 - u_{k_\mu-2} r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} - \frac{1}{u_{k_\mu-1}} = 1 - \frac{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1}}{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} = \\ = \frac{r_{k_\mu}}{r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} - r_{k_\mu}$$

eltűnik-e vagy sem. Ez utóbbi esetben a láncztört biztosan összetartó. De a fenti kifejezés akkor és csakis akkor tűnik el, ha

$$r_{k_\mu-1} \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu} = 1. \tag{29}$$

Ha először is  $\mu = 1$ , akkor  $k_1$  helyett egyszerűen  $k$ -t írhatunk és mivel  $\vartheta_{k-1} = 0$ , ezért a (29) egyenlet a következőre redukálódik:  $r_k = 1$ . Meg kell tehát vizsgálnunk e láncztörtet ( $r_{k_\mu+1} = r_{k+1} = 0$ ):

$$\frac{r_1}{|1} + \dots - \frac{1}{|1} + \frac{0}{|1} + \frac{r_{k+2}}{|1} + \dots$$

Most

$$Q_k = Q_{k-1} - Q_{k-2} = r_{k-1} Q_{k-3}, \quad Q_{k+1} = Q_k, \quad Q_{k+2} = (1 + r_{k+2}) Q_k, \dots; \\ P_k = P_{k-1} - P_{k-2} = r_{k-1} P_{k-3}, \quad P_{k+1} = P_k, \quad P_{k+2} = (1 + r_{k+2}) P_k, \dots;$$

tehát a láncztört széttartó vagy összetartó, a szerint, a mint  $r_{k-1}Q_{k-3}$  eltűnik, vagy nem. Már most  $Q_{-1} = 0$  és  $Q_{k-3} > 0$ , ha a fix  $k$  szám  $\geq 3$ , mert  $\varepsilon_r r_v \geq 0$ , ha  $v \leq k-1$ ; ha tehát  $r_{k-1} = 0$ , akkor a láncztört *lényegesen széttartó* (a közelítő törtek a  $k$ -adiktól kezdve  $\frac{0}{0}$  alakúak), ha  $k=2$  és  $r_1 \neq 0$ , akkor *lényegtelenül széttartó* (a közelítő törtek recziprok értékei zérus felé tartanak), egyébként pedig összetartó.

Ha  $\mu \geq 2$ , akkor  $r_{k\mu} < 1$ , tehát a (29) egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$k_\mu - 1 = l_{\mu-1}, \quad \delta_{k\mu-1} = \vartheta_{k\mu-1} = 1, \quad r_{k\mu-1} + r_{k\mu} = 1.$$

Ez nyilván csak úgy lehetséges, ha  $\mu = 2$ . Irjunk  $k_1$  helyett egyszerűen  $k$ -t, akkor tehát  $r_{k_2} = r_{k+1} = 1 - r_k$  és a következő láncztörtet nyerjük ( $r_{k\mu+1} = r_{k+2} = 0$ ):

$$\frac{r_1}{1} + \dots + \frac{r_{k-1}}{1} - \frac{r_k}{1} - \frac{1-r_k}{1} + \frac{0}{1} + \frac{r_{k+3}}{1} + \dots$$

Most

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_{k-1} - r_k Q_{k-2}, \\ Q_{k+1} &= Q_k - (1-r_k) Q_{k-1} = r_k (Q_{k-1} - Q_{k-2}) = r_k r_{k-1} Q_{k-3}, \\ Q_{k+2} &= Q_{k+1} = r_k r_{k-1} Q_{k-3}, \\ Q_{k+3} &= (1+r_{k+3}) r_k r_{k-1} Q_{k-3}, \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ P_k &= P_{k-1} - r_k P_{k-2} \\ P_{k+1} &= P_k - (1-r_k) P_{k-1} = r_k r_{k-1} P_{k-3} \\ P_{k+2} &= P_{k+1} = r_k r_{k-1} P_{k-3} \\ P_{k+3} &= (1+r_{k+3}) r_k r_{k-1} P_{k-3} \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

Mivel itt  $r_k \neq 0$ , azért a láncztört ismét (lényegesen) széttartó vagy összetartó, a szerint, a mint  $r_{k+1}Q_{k-3}$  eltűnik vagy sem. Ezeket az eredményeket a következő tételben foglalhatjuk össze:

X. Az  $\left[ \frac{\varepsilon_r r_v}{1} \right]_1^\infty$  ( $r_v \geq 0$ ) láncztört összetartó, ha

$$s = \sum_{\nu=2}^{\infty} r_\nu \vartheta_\nu \leq 1. \quad (30)$$

Csak ha mindegyik  $r_\nu$  a zérustól különböző és csak véges számú  $\varepsilon_\nu$  negatív, kell még e feltételt hozzáfűznünk:

$$\sum_1^\infty \nu \left( \frac{r_1 r_3 \dots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \dots r_{2\nu+1}} \right) \text{ széttartó.}$$

Továbbá e négy kivételes esetben:

1.  $\vartheta_2 = 1, \vartheta_\nu = 0 (\nu \geq 3), r_2 = 1, r_3 = 0$
2.  $\vartheta_k = 1, \vartheta_\nu = 0 (\nu \neq k), r_{k-1} = 0, r_k = 1, r_{k+1} = 0, (k \geq 3)$
3.  $\vartheta_2 = 1, \vartheta_3 = 1, \vartheta_\nu = 0 (\nu \geq 4), r_2 + r_3 = 1, r_4 = 0$
4.  $\vartheta_k = 1, \vartheta_{k+1} = 1, \vartheta_\nu = 0 (\nu \neq k, k+1), r_{k-1} = r_{k+2} = 0,$   
 $r_k + r_{k+1} = 1, (k \geq 2),$

a láncztört lényegesen széttartó; csak ha az 1. vagy 3. esetben  $r_1 \neq 0$ , akkor lényegtelenül széttartó.

Végül még:

$$0 \leq \varepsilon_1 \left[ \frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1} \right]_1^\infty \leq \frac{r_1}{1 - s\vartheta_2}.$$

5. §. Folytatás; egy újabb összetartási tétel az  $\left[ \frac{a_\nu}{1} \right]_1^\infty$  alakú láncztörtekre vonatkozólag.

5. A (30) alatti feltétel egy általánosabbikkal pótolható, ha ismét feltesszük, hogy  $r_\nu \neq 0 (\nu = 1, 2, 3, \dots)$ .

Vizsgáljuk e sort:

$$\begin{aligned} r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} + r_{\nu+2} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2} + \dots = \\ = \sum_0^\infty r_{\nu+k} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \dots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1}; \end{aligned} \tag{31}$$

e sor csak akkor tartalmaz végtelen sok el nem tűnő tagot, ha valamely  $\nu$ -tól kezdve végig  $\vartheta_\nu = 1$ . Erre az esetre feltesszük, hogy a sor összetartó. Legyen most

$$\left. \begin{aligned} u_0 = 1, u_{\nu-1} = u_{\nu-2}, \text{ ha } \vartheta_\nu = 0 \\ u_{\nu-1} = \frac{1}{\sigma_{\nu-1}}, \text{ ha } \vartheta_\nu = 1 \end{aligned} \right\}; \tag{32}$$

ha  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor a (31) sor első tagja  $r_\nu$  és a sor annyi tagból áll, mint a hány negatív részletszámoló követi  $\varepsilon_\nu r_\nu$ -t (ezt bele-

értve) a *legközelebbi* pozitív részletszámlálóig (ennek kizárásával). Felteszem, hogy ez az összeg 1-nél nem nagyobb; akkor

$$u_\nu \geq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

tehát a  $\vartheta_\nu = 0$  esetben a (20) feltétel nyilván ki van elégítve. Ha pedig  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor még e szigorúbb egyenlőtlenség

$$r_\nu \leq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad (\vartheta_\nu = 1) \quad (33)$$

is fennáll, mert ha  $\vartheta_{\nu+1} = 0$ , akkor nyilván igaz, ha pedig  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ , akkor (32)-ből (mivel  $\vartheta_\nu$  is = 1)

$$\frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} = \sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu = r_\nu.$$

Qu. e. d.

Ha most már  $\nu$  valamely értékétől kezdve végig  $\vartheta_\nu = 0$ , akkor a II. tétel pótlékát alkalmazhatom; ha ellenben  $\nu$  végtelen sok értéke mellett  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ , akkor a láncztört összetartásához elegendő, hogy az  $(\alpha_\nu)$ ,  $(\beta_\nu)$  és  $(\gamma_\nu)$  sorok legalább egyike széttartó legyen.

Különösen azt az esetet vizsgálom meg, hogy valamely pozitív  $\delta < 1$  és valamely pozitív egész  $N$  szám mellett a következő további feltételek teljesülnek:

$$\sigma_{\nu-1} \leq \delta, \quad \text{ha} \quad \nu \geq N, \quad (34)$$

azaz

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \sigma_\nu < 1,$$

és kimutatom, hogy ez esetben a  $(\beta_\nu)$  sor mindig széttartó.

Legyen ugyanis  $\vartheta_{\nu+1} = 1$ ; ha még  $\vartheta_\nu = 1$ , akkor (33)-ból:

$$u_{\nu-1}u_\nu r_\nu \leq u_\nu - u_{\nu-1},$$

ehát

$$u_\nu - u_{\nu-1}u_\nu r_\nu - 1 \geq u_{\nu-1} - 1,$$

és tekintettel (32)-re és (34)-re:

$$u_\nu - u_{\nu-1}u_\nu r_\nu - 1 \geq \frac{1}{\sigma_{\nu-1}} - 1 \geq \frac{1}{\delta} - 1,$$

ha

$$\nu \geq N.$$

Ha pedig  $\vartheta_\nu = 0$ , akkor

$$u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1 = u_\nu - 1 \geq \frac{1}{\delta} - 1 \quad (\nu \geq N);$$

tehát a  $(\beta_3)$  sor széttartó.

Nyerjük tehát e tételt:

XI. Az  $\left[ \frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1} \right]_1^\infty$  ( $r_\nu \neq 0$ ) láncztört összetartó, ha

$$\sum_0^\infty r_{\nu+k} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \dots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1} \leq 1 \quad (\nu = 2, 3, \dots) \quad (35)$$

és

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu < 1. \quad (36)$$

Csak ha valamelyiktől kezdve mindegyik további  $\vartheta$ , eltűnik, kell még a következő feltételt

$$\sum_1^\infty \nu \left( \frac{r_1 r_3 \dots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \dots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \dots r_{2\nu+1}} \right) \text{ széttartó} \quad (24)$$

külön hangsúlyoznunk.

E tételnek más tételekkel való összefüggésére a bevezetésben utaltam.

A (24) feltétel nyilván biztosan teljesül, ha  $\sum_1^\infty \nu \sqrt{\frac{1}{r_\nu}}$  széttartó.

A (24) feltétel a láncztört összetartásához mindig szükséges, de végtelen sok negatív előjelű részletszámláló esetén a (35) és (36) feltételekben bennfoglaltatik. Ellenben a (35) feltétel az összetartásnak nem mindig szükséges feltétele; v. ö. ehhez például a VIII. tételt.

*Befejező megjegyzés.* Ha a láncztört elemei valós változók valós függvényei, akkor hasonló feltételek mellett a láncztört egyenletes összetartása bizonyítható be.

# NÖVÉNYI ENZYMEKRŐL.

DOBY GÉZÁ-tól.

## 3. A burgonya levelének invertáza.

Az invertáz a legjobban ismert enzymbek közé tartozik és mégsem tudjuk, vajjon a különböző származású invertázok azonosak-e.<sup>1</sup> Ez, valamint a burgonya más enzimeinek kórtani elváltozásai<sup>2</sup> indítottak arra, hogy e növény levézetét megvizsgáljam, van-e benne invertáz és mik ennek fontosabb tulajdonságai. Noha e vizsgálatokat még távolról sem fejeztem be, közölni kívánom őket, mert különböző okokból egyelőre nem folytathatom.

Kísérleteimhez a burgonyanövény leveleinek nedvét használtam, mi által — úgy mint más enzymbekkel végzett, eddigi kísérleteimben — az illető enzim változatlan, természetes enzymbrendszerét vizsgálhattam. A növények a kísérletek idején (augusztus vége felé) még teljes fejlődésben voltak.

Munkámban oly kísérleti módot sikerült megállapítanom, melylyel a levelekben nagy mennyiségben jelenlevő színesítő anyagokat gyorsan és könnyen eltávolíthatjuk s így az oldatokat jól polározhatjuk.

A levelekben mindenekelőtt megállapíthatam az invertáz jelenlétét; ezt az is megerősítette, hogy a reactio az invertázra jellemzően a monomolekulás reactiók logaritmikus görbéjét követte. Az enzim concentrációjának változtatásakor kitűnt, hogy a reactiosebességi állandó értéke egyenesen arányos az enzim viszonylagos mennyiségével.

---

<sup>1</sup> OPPENHEIMER «Die Fermente und ihre Wirkungen» 3. kiadásának (1909.) II. kötete 35. oldalán ezt mondja: «Wahrscheinlich gibt es mehrere Invertasen, die sich durch geringe Differenzen unterscheiden.»

<sup>2</sup> Doby, Kísérleti közlemények 14. (1911) 5. füzet és 15. (1912) 2. füz.



Azok közül az enzymes folyadékok közül, melyeket különböző nyomású sajtolással készítettem, a legnagyobb activitást a leggyengébb nyomással kapott folyadék mutatta. Noha erre ma még aligha találunk kielégítő magyarázatot, azt hiszem, hogy e jelenségben mindenesetre az enzym nagy érzékenységének van része.<sup>1</sup> Erre vall az is, hogy az egy napig antisepticusan eltartott enzymes oldat már veszített eredeti activitásából.

Kísérleteim tehát azt mutatják, hogy a burgonya leveleinek invertáza a növényi invertázok általános tulajdonságaival bir. Esetleges finomabb eltérésekről csak további vizsgálatok adhatnak felvilágosítást.

#### KISÉRLETI RÉSZ.

Az enzymtartalmú folyadékot következőképen készítettem: A szárakról leszedett leveleket húsvágó gépen megdarálva, a pépet kézzel vagy hydraulikus sajtóval kisajtoltam, az aromás szagú, eleinte zöld, utóbb csaknem fekete folyadékot öt perczig centrifugáltam s végül asbesthen át leszivattam.

Substratumul 5—6%-os saccharoz-oldat szolgált; a reactio tovahaladását az első kísérletekben a BERTRAND-féle<sup>2</sup> czukortitrálási módszerrel határoztam meg, minthogy a sötét oldatokat még nem bírtam kellően deríteni. A BERTRAND-féle eljárás, mely MOHRnak egy eszméjén alapul, tudvalevően abból áll, hogy a FEHLING-féle oldat redukálásakor kiváló, cuprooxydból álló csapadékot tiszta ferrisulfát oldatában feloldjuk s az ekkor keletkező ferrosulfátot kaliumpermanganattal titráljuk.

Ily módon állapítottam meg az *enzym concentratiójának és a reactio sebességének összefüggését*. Az enzymes folyadékot 300 légköri nyomású sajtolással készítettem. A reactió folyadék 100 cm<sup>3</sup>-ében 50 cm<sup>3</sup> körülbelül 12.5%-os saccharoz-oldat és 1, 2 és 4 cm<sup>3</sup> enzymes folyadék volt, 3 térfogat-% tuluollal. Ellenőrző elegyeknek ugyanily folyadékokat czukor nélkül tettem

<sup>1</sup> BUCHBÖCK budapest egyetemi tanár úr felhívta figyelmemet arra, hogy az enzym activitásának e csökkenése attól is lehet, hogy a sejteknek az erősebb sajtolás okozta elroncsolása valamely, a reactiót gátló testet juttatott az oldatba.

<sup>2</sup> BERTRAND, Bull. Soc. chim. 35. (1906.) 1285.

fel. Az így megtöltött, jól záró üvegeket 38°-os thermostatban tartottam és időnként megfelelő mennyiséget kivéve, ólomacetattal és natriumsulfattal deritettem és redukáló tehetségüket meghatároztam. Az ólomacetat egyúttal a reactiót is megszakította.

Az eredmények ezek:

*1 cm<sup>3</sup> enzyμες oldattal:*

$t'$ (idő percekben) ... ..	48	1368	2880	4253	5635	7102	8528	$\infty$
Invertcukor 100 cm <sup>3</sup> -ben (gr.) ... ..	0.061	0.496	0.904	1.156	1.416	1.732	2.236	6.42
0.4343 k · 10 <sup>7</sup> ... ..	(865)	255	229	293	192	192	218	—

*2 cm<sup>3</sup> enzyμες oldattal:*

$t'$ ... ..	68	1368	2938	4253	5635	$\infty$
Invertcukor 100 cm <sup>3</sup> -ben	0.049	0.860	1.650	2.248	2.884	6.42
0.4343 k · 10 <sup>7</sup> ... ..	490	456	439	440	460	—

*4 cm<sup>3</sup> enzyμες oldattal:*

$t'$ ... ..	116	1366	2936	$\infty$
Invertcukor 100 cm <sup>3</sup> -ben	0.06	1.548	2.832	6.42
0.4343 k · 10 <sup>7</sup> ... ..	(352)	877	861	—

$k$  értékeit a  $0.4343 k = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a-x}$  egyenlet szerint számítottam ki és, a mint látjuk, ezek igen jól mutatják az állandót. Az első sorozat legelső adatának (48' múlva) eltérését a csekély fokú redukáló tehetség okozta kísérleti hibának kell tulajdonítani; ugyanily beszámítás alá esik a 4 cm<sup>3</sup> enzymet tartalmazó elegy első adata. Ha az egyes reactiók elegyek reactiosebességi állandóinak középértékeit egymással összehasonlítjuk, kitűnik, hogy pontosan egyenes arányban vannak egymással, vagyis hogy  $\frac{k}{E}$  állandó, a mint a következő összeállítás mutatja:

$E$	$0.4343 k \cdot 10^7$	$\frac{k}{E}$
1	215	215
2	437	228
4	869	217

Az enzyμες sajtolási nedv előállításá azonban meglehetősen hosszadalmas volt s ezért mindenekelőtt megállapítani igyekeztem, hogy a különböző nyomással nyert folyadékok aktivitása mennyiben különbözik egymástól. A kísérletek arra a meglepő eredményre vezettek, hogy a sajtoló ruha között kézzel kisajtott lé legactívabb, a mi az eljárást fölötte egyszerűsíti.

Mint hogy azonban a reactio előhaladásának a redukáló tehetséggel való megállapítása nagyon hosszadalmas, mégis a poláros módszert igyekeztem kellően kidolgozni, a mi több kísérlet után sikerült. Az eljárás ez: A reactió elegy 5 cm<sup>3</sup>-ét előbb 0.4 cm<sup>3</sup> ólomacetattal, azután 0.6 cm<sup>3</sup> 20%-os natriumsulfatoldattal kicsapjuk, lecentrifugáljuk és az elegy 4 cm<sup>3</sup>-éhez a mutarotatio megszüntetése végett 1 cm<sup>3</sup> 20%-os natriumcarbonatoldatot adunk, újból lecentrifugáljuk és az oldat tisztáját polározzuk. Így csupa könnyen ülepedő csapadékot és viztisztá oldatot kapunk, míg ha pl. a Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> helyett csak Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>-ot használunk, a folyadékot lehetetlen tisztán megkapni. Az ólom oldott részét kicsapó más vegyületek, például kénsav vagy sóska-sav is mindig annyit oldottak a színesítő anyagokból, hogy sárga, polározásra teljesen alkalmatlan oldatok keletkeztek.

Az ólomacetat, natriumsulfat és a natriumcarbonat a fenn említett arányban sem a saccharóz, sem az invertcukor forgatását nem zavarja, a mint ezt külön kísérletek szerint a következő összeállítás mutatja:

	cm <sup>3</sup> cukor- oldat	Pb- ac.	Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	Az eddigi elegyből cm <sup>3</sup>	Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	Forgatás α
Körülbelül 63%-os	5.0	—	—	—	—	2.5	+5.37°
saccharózoldat	5.0	0.4	0.6	4.0	1.0	—	+5.38°
1 gr fruktóz és	5.0	—	—	—	—	2.5	-1.29°
1 gr glukóz	5.0	0.4	0.6	4.0	—	1.0	-1.28°
40 cm <sup>3</sup> -ben	5.0	0.4	0.6	4.0	1.0	—	-1.28°

Annak tanulmányozására tehát, hogy a levélpép kisajtolásakor használt nyomás mennyire változtatja meg a nedv aktivitását, a megdarált leveleket először ruha között kézzel

sajtoltam ki (A), azután a megmaradt pépet előbb 100 légköri nyomásnál (B), utóbb 300 légköri nyomásnál (C). Ezekből az oldatokból 2 cm<sup>3</sup>-t 50 cm<sup>3</sup> 10%-os saccharózoldattal kevertem, 100 cm<sup>3</sup>-re feltöltöttem és toluallal elegyítettem. Az ellenőrző sorozatban az előbb felforralt enzimes oldatot használtam (Af, Bf és Cf jellel). Végül, hogy az invertázoldat tartósságáról fogalmat alkothassak, a kézzel sajtolt (A) enzimes oldatból egy kísérletet 24 órai eltartás után tettem fel (A 24).

Az eredmények ezek:

A,<sup>1</sup>

$t'$	Forgatás $\alpha$	Forgatási változás	$x$ (gr elbont. nádezzukor 100 cm <sup>3</sup> -ben)	0.4343 $k \cdot 10^7$
15	+4.47°	0	0	—
278	+4.27°	0.20°	0.17	(462)
1354	+3.37°	1.10°	0.95	664
2746	+2.55°	1.92°	1.66	630
4207	+1.79°	2.68°	2.32	636
5685	+1.18°	3.29°	2.84	633
5848	+1.11°	3.36°	2.90	638
7075	+0.58°	3.89°	3.36	673
$\infty$	-1.36°	5.83°	5.04	—
				Közép 644

## A 24.

$t'$	Forgatás $\alpha$	Forgatási változás	$x$ (gr elbont. nádezzukor 100 cm <sup>3</sup> -ben)	0.4343 $k \cdot 10^7$
6	+4.43°	0	—	—
1495	+3.27°	1.16°	1.00	648
2917	+2.53°	1.90°	1.64	594
4383	+1.80°	2.63°	2.27	598
6333	+1.23°	3.20°	2.79	560
$\infty$	-1.35°	5.78°	5.00	—
				Közép 600

<sup>1</sup> Hasonló eredményt adott még két kísérlet.

## B.

$t'$	Forgatás $\alpha$	Forgatási változás	$x$ (gr elbont. nádezzukor 100 cm <sup>3</sup> -ben)	0.4343 k.10 <sup>7</sup>
4	+4.39°	0	—	—
277	+4.33°	0.06°	0.05	(156)
1314	+3.90°	0.49°	0.42	285
2795	+3.32°	1.07°	0.92	322
4217	+2.84°	1.55°	1.34	324
5646	+2.50°	1.89°	1.63	307
$\infty$	-1.34°	5.73°	4.95	—
Közép 310				

## C.

$t'$	Forgatás $\alpha$	Forgatási változás	$x$ (gr elbont. nádezzukor 100 cm <sup>3</sup> -ben)	0.4343 k.10 <sup>7</sup>
2	+4.44°	0	—	—
277	+4.32°	0.12°	0.10	311
1339	+3.90°	0.54°	0.47	309
2743	+3.46°	0.98°	0.85	289
4165	+3.06°	1.38°	1.19	281
5631	+2.75°	1.69°	1.46	266
$\infty$	-1.35°	5.79°	5.01	—
Közép 291				

*Af*, *Bf* és *Cf* forgatása mindvégig +4.45° és +4.39° között ingadozott és középértéke +4.41° volt.

0.4343 k. 10<sup>7</sup> középértékei ezek:

Kézzel kisajtott enzymes folyadékkal frissen	644
"    "    "    "    1 napi állás után	600
100 légk. nyomáson kisajtott enzymes folyadékkal	310
200 légk. nyomáson kisajtott enzymes folyadékkal	291

Látjuk, hogy egy napi állás az enzim aktivitását már kissé csökkentette; sokkal gyengébb hatású azonban a nagyobb nyomáson kisajtolt enzimes nedv. E sajátságos jelenségre igen nehéz magyarázatot találni. A sajtolás igen lassan történt s így nem hihető, hogy felmelegedés okozta az enzim pusztulását. Egyébként úgy látszik, hogy nemcsak az enzim koncentrációja csökken a nagyobb nyomás által, hanem ellenálló tehetsége is kisebb, mert  $C$ -nél  $k$  értéke lassan alászáll, jelölül annak, hogy az enzim a kísérlet alatt is lassanként elroncsolódott. Hasonlóképpen csökken a reactiosebességi állandó a 24 óráig eltartott enzimes folyadékánál (*A 24*).

Ez invertáz tanulmányozását folytatom.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 április 19.-én tartott üléséből.)

## ADATOK AZ ADRIA HYDROGRAPHIAI VIZSGÁLATÁHOZ.

MAUCHA REZSŐ-től.

(Kivonat.)

A tengervíz legrégebbi analizisei LAVOISIER<sup>1</sup> (1772) és BERGMANN<sup>2</sup> (1774) nevéhez fűződnek. Az ő vizsgálataik azonban még nagyon kezdetlegesek voltak, s így A. VOGEL<sup>3</sup> 1813-ban közzétett analiziseit tekinthetjük az első tudományos értékű tengervízvizsgálatoknak. Föl kell még említeni MARCET<sup>4</sup> (1819—22), PFAFF<sup>5</sup> (1823), CALAMAI<sup>6</sup> (1847—48), USIGLIO<sup>7</sup> (1849), STRUVE<sup>8</sup> (1861) és GÖBEL<sup>9</sup> (1862) vizsgálatait is. Különösen kiemelendők FORCHHAMMER<sup>10</sup> (1865) úttörő munkái, mert azok vetették meg a hydrographia alapját. Ő ismerte föl a tengervíz alkatrészei viszonylagos mennyiségének állandóságát is. Később SASS<sup>11</sup> (1866), DITTMAR<sup>12</sup> és BUCHANAN<sup>13</sup> (1873—76), SCHMIDT<sup>14</sup> (1877), BERGLUND<sup>15</sup> (1885), WOLF és LUKSCH<sup>16</sup> (1875—1903), NATTERER<sup>17</sup> (1890—96), SCHMELCK<sup>18</sup> (1883), BIBRA<sup>19</sup> (1851) és még mások is közöltek adatokat. A most felsoroltak közül DITTMAR, BUCHANAN, SCHMIDT és NATTERER munkái a legjelentősebbek.

A legújabb vizsgálatok már nem elszórtan jelentek meg az irodalomban, hanem részint a kopenhágai nemzetközi állandó tengerkutató tanács, részint pedig a monacoi oceanographiai muzeum kiadványaiban. Ezekre való utalással a legújabb irodalmat e helyütt nem részletezzük.<sup>20</sup>

Ki kell azonban terjeszkednünk az *Adria* vizsgálatára vonatkozó irodalom ismertetésére. Első sorban említjük SPETZ<sup>21</sup> (1827), majd CALAMAI<sup>22</sup> (1847) vizsgálatait. Utánuk LORENTZ<sup>23</sup> (1863) közölt adatokat a *Quarnero* vizének sótartalmáról és sűrűségé-

ról. 1869 és 1873 között a bécsi cs. akadémia Adria-bizottsága az *Adria* partjain állandó megfigyelő állomásokat létesített, s az azokról eredő vizmintákat VIERTHALER<sup>24</sup> és OSNAGHI<sup>25</sup> elemezte. 1875 és 1877 között STAHLBERGER kezdeményezésére a fiumei m. kir. tengerészeti hatóság a «*Deli*» és «*Nautilus*» hajókat engedte át a tengerkutatás céljaira. Ez expedíciókat WOLF és LUKSCH<sup>26</sup> vezette, a chemiai munkálatokat pedig KÖRTSTORFER<sup>27</sup> végezte. Ezután még a triesti cs. és kir. tengerészeti hatóság «*Pelagosa*» hajójának és LIECHTENSTEIN JÁNOS herczeg «*Hertha*» jachtjának (1880) kutató útja következett, s ezzel az Adria tudományos buvárlatában nagyobb szünet állott be. Csak újabban, 1903-ban vették föl ismét a kutatások fonalát, midőn az osztrák Adria-egyesület szervezett expedíciókat.<sup>28</sup> Végül az 1910. évben *Velenczében* tartott nemzetközi konferencián az osztrák és olasz kormányok kiküldöttei megállapodtak az *Adria* oceanographiai tanulmányozásának tervezetében. Ehhez a megállapodáshoz csatlakozott 1913-ban a *Magyar Adria-Egyesület* és a horvát tengerkutató bizottság is.<sup>29</sup>

A tengervíz chemiai alkatrészei viszonylagos mennyisége állandóságának tételén alapszik a mai hydrographiai vizsgálatok egyik legfontosabb módszere. E módszert az 1899. évi stockholmi nemzetközi tengerkutató kongresszus határozatából KNUDSEN<sup>30</sup> dolgozta ki. Munkálatait, SÖRENSEN és FORCH közreműködésével, egy kiváló szakférfiakból álló bizottság ellenőrzése mellett végezte. Munkálatai célja az volt, hogy a tengervíz chlor- és összes só-tartalma, továbbá fajsúlya közti összefüggést megállapítsa. Itt meg kell említeni, hogy KNUDSEN a tengervíz chlortartalma alatt az összes halogénnel egyenértékű chlort és az összes sótartalom alatt a sósavval lepárolt és ezredrészekben kifejezett szárazanyag-tartalmat érti. Ily módon szerinte az összes sótartalom  $S = 0.030 + 1.8050Cl$  formulával fejezhető ki. A tengervíz  $17.5^{\circ} C$  hőmérséken mért és ugyanolyan hőmérsékű destillált vízre vonatkoztatott sűrűségét kifejező számot KNUDSEN  $\rho_{17.5}$ -del, a  $0^{\circ} C$  hőmérsékleten mért és  $4^{\circ} C$  hőmérsékű destillált vízre vonatkoztatott fajsúlyt pedig  $\sigma_0$ -val fejezi ki. Ezek az értékek tulajdonképpen nem a fajsúlyt, illetve a sűrűséget jelentik, hanem azoknak függvényei, mert azok a



$$\rho_{17.5} = (S_{17.5}^{17.5} - 1) 1000 \quad \text{és} \quad \sigma_0 = (S_{\frac{1}{4}}^0 - 1) 1000$$

egyenlőségekből számíthatók ki.

A  $\sigma_0$  és chlortartalom közti összefüggést a

$$\sigma_0 = -0.069 + 1.4708 Cl - 0.001570 Cl^2 + 0.0000398 Cl^3,$$

a  $\rho_{17.5}$  és  $\sigma_0$  közti összefüggést pedig a

$$\rho_{17.5} = (0.1245 + \sigma_0 - 0.0595\sigma_0 + 0.000155\sigma_0^2) \times 1.00129$$

empirikus formulákkal találta kifejezhetőnek.

Végül FORCH dilatációs kísérletei alapján a  $\sigma_0$  és  $\sigma_t$  közötti összefüggést

$$\sigma_t = \Sigma_t + (\sigma_0 + 0.1324) [1 - A_t + B_t(\sigma_0 - 0.1324)]$$

egyenlőséggel állította elő, ahol  $\sigma_t$  a tengervíz  $t^\circ$  C-on mért fajsúlya,  $\Sigma_t$  a destillált víz ugyanezen fokon mért fajsúlya, továbbá

$$A_t = t(4.7867 - 0.098185t + 0.0010843t^2)10^{-3}$$

és

$$B_t = t(18.030 - 0.8164t + 0.01667t^2)10^{-6}.$$

Ez egyenlőségek felhasználásával készítette el *«Hydrographische Tabellen»*<sup>31</sup> című munkáját, melyben az egymásnak megfelelő chlor- és sótartalmakat, továbbá fajsúlyértékeket táblázatosan állította össze. Ily módon a chlortartalom meghatározása után a megfelelő sótartalmat és fajsúlyt a táblázatokból közvetlenül kivehetjük.

A chlortartalom meghatározására a MOHR-féle eljárást használja, de azt bizonyos szellemes fogások alkalmazásával oda módosította, hogy az analitikai mérleg mellözése daczára, a chlortartalmat súlyezredrészekben szolgáltatja.

Hogy a második magyar Adria-expeditio alkalmával merített és KNUDSEN módszerével megelemzett vízminták eredményeit a rendes chemiai módszerekkel elért adatokkal összehasonlíthassuk, az I—III. sz. táblázatokban közelebbről megjelölt helyeken, az Adria három pontján vízmintákat merítettünk, teljes physikai és chemiai vizsgálatok czéljára.

## I. sz. táblázat.

A mérítés körülményei :	I. Merítettett Pomó szigeténél a felszínen	II. Merítettett az 1019 m mélység fölött a felsz.	III. Merítettett a «Najade» mélység fölött a felsz.
Felszín állomás száma	f 37	f 68	—
A mérítés helyének geogr. szélessége	$\varphi=43^{\circ} 5' 0''$	$\varphi=42^{\circ} 18' 0''$	$\varphi=42^{\circ} 2' 7''$
A mérítés helyének geogr. hosszúsága	$\lambda=15^{\circ} 29' 0''$	$\lambda=17^{\circ} 17' 1''$	$\lambda=18^{\circ} 5' 4''$
A mérítés napja	1914 április 22	1914 április 25	1914 április 28
A mérítés órája	12 <sup>h</sup> m	11 <sup>h</sup> p. m.	4 <sup>h</sup> p. m.
A levegő hőmérséke	16.4° C	16.6° C	16.5° C
A víz hőmérséke	15.5° C	16.20° C	16.73° C
Barometer állás	768.2 $\frac{m}{m}$	762.1 $\frac{m}{m}$	766.8 $\frac{m}{m}$
Szélirány és szélereő	W2	NW 2-3	NNW2
Felhőzet	1	1	1
Az alkatrész megnevezése	1000 gramm vízben van :		
K	0.5278 gr	0.5369 gr	0.5353 gr
Na <sup>1</sup>	11.5824 «	11.5989 «	11.6067 «
Ca	0.4334 «	0.4824 «	0.4645 «
Mg	1.4776 «	1.5173 «	1.5054 «
Cl	21.0775 «	21.2931 «	21.2460 «
Br	0.0795 «	0.0840 «	0.0810 «
J	0.0002 «	0.0001 «	0.0001 «
SO <sub>4</sub>	2.9887 «	3.0029 «	2.9976 «
HCO <sub>3</sub>	0.1646 «	0.1725 «	0.1668 «
SiO <sub>2</sub>	0.0062 «	0.0066 «	0.0046 «
Összes sótartalom	38.3379 «	38.6947 «	38.6080 «
Oxygéntartalom <sup>2</sup>	5.86 cm <sup>3</sup> 1000 cm <sup>3</sup> vízben	5.82 cm <sup>3</sup> 1000 cm <sup>3</sup> vízben	5.74 cm <sup>3</sup> 1000 cm <sup>3</sup> vízben
Oxygénfogyasztás	0.0299 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre	0.0277 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre	0.0302 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre
Lúgosság	2.8 cm <sup>3</sup> n. lúg 1000 cm <sup>3</sup> vízre	2.9 cm <sup>3</sup> n. lúg 1000 cm <sup>3</sup> vízre	2.8 cm <sup>3</sup> n. lúg 1000 cm <sup>3</sup> vízre
Összes nitrogén	0.0028 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre	0.0031 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre	0.0057 gr 1000 cm <sup>3</sup> vízre
Meghatározott Na tartalom	11.4503 gr 1000 gr vízben	11.5580 gr 1000 gr vízben	11.4508 gr 1000 gr vízben
A vizek physikai vizsgálata :			
$\rho_{17.5}$	29.56	29.77	29.66
$\sigma_0$	31.11	31.28	31.23
$n_{D18}$	1.34001	1.34010	1.34007
$\tau_{18}$	0.05011 <sup>1</sup> /ohm	0.05044 <sup>1</sup> /ohm	0.05036 <sup>1</sup> /ohm
$\Delta$	2.175° C	2.177° C	2.193° C
$\pi$	26.22 atm	26.27 atm	6 11 1 m

<sup>1</sup> Az alkatrészek második sorában feltüntetett Na tartalom a sókká való csoportosításkor a hiányból számított. Az alkatrészek utolsó sorában feltüntetett Na tartalom kísérletileg van meghatározva. — <sup>2</sup> Az abszorbeált oxygéntartalmat dr. Koch Nándor helyszínen végzett vizsgálata alapján közlöm.

## II. sz. táblázat.

Az alkatrészek egyenérték-százalékokban kifejezve :

Alkatrész megnevezése	I. sz. víz	II. sz. víz	III. sz. víz	Középérték
Positiv alkatrészek :				
<i>K</i>	2·04 ‰	2·06 ‰	2·06 ‰	2·05 ‰
<i>Na</i>	76·27 ‰	75·61 ‰	75·84 ‰	75·91 ‰
$\frac{1}{2}$ <i>Ca</i>	3·27 ‰	3·61 ‰	3·49 ‰	3·46 ‰
$\frac{1}{2}$ <i>Mg</i>	18·42 ‰	18·72 ‰	18·61 ‰	18·58 ‰
Összeg	100·00 ‰	100·00 ‰	100·00 ‰	100·00 ‰
Negativ alkatrészek és gyökök :				
<i>Cl</i>	90·02 ‰	90·04 ‰	90·06 ‰	90·04 ‰
<i>Br</i>	0·15 ‰	0·15 ‰	0·15 ‰	0·15 ‰
<i>J</i>	0·00024 ‰	0·00017 ‰	0·00022 ‰	0·00021 ‰
$\frac{1}{2}$ <i>SO<sub>4</sub></i>	0·42 ‰	9·39 ‰	9·38 ‰	9·40 ‰
<i>HCO<sub>3</sub></i>	0·41 ‰	0·42 ‰	0·41 ‰	0·41 ‰
Összeg	100·00 ‰	100·00 ‰	100·00 ‰	100·00 ‰

## III. sz. táblázat.

Az alkatrészek sókká csoportosítva :

	1000 gramm vízben van		
	I.	II.	III.
<i>NaCl</i>	29·2818 gr	29·3160 gr	29·3414 gr
<i>KCl</i>	1·0063 ‰	1·0240 ‰	1·0208 ‰
<i>MgCl<sub>2</sub></i>	3·8101 ‰	4·0611 ‰	3·9788 ‰
<i>MgBr<sub>2</sub></i>	9·0914 ‰	0·0968 ‰	0·0933 ‰
<i>MgJ<sub>2</sub></i>	0·0002 ‰	0·0001 ‰	0·0002 ‰
<i>MgSO<sub>4</sub></i>	2·4434 ‰	2·3141 ‰	2·3613 ‰
<i>CaSO<sub>4</sub></i>	1·4718 ‰	1·6384 ‰	1·5778 ‰
<i>NaHCO<sub>3</sub></i>	0·2267 ‰	0·2376 ‰	0·2298 ‰
<i>SiO<sub>2</sub></i>	0·0062 ‰	0·0066 ‰	0·0046 ‰
Összes sótartalom	38·3379 ‰	38·6947 ‰	38·6080 ‰

A következőkben vizsgálati eredményeimet a szakirodalomban található adatokkal párhuzamosan fogom közölni, hogy ezáltal a mások vizsgálataival való összehasonlítást megkönnyítsem.

A sókká csoportosított alkatrészek mennyiségét az összes sótartalom százalékáiban fejezve ki, a tengervíz összetétele

	szerintem:	DITTMAR szerint:	FORCHHAMMER szerint:
<i>NaCl</i> _ _ _ _ _	76·03 %	77·758 %	78·32 %
<i>KCl</i> _ _ _ _ _	2·64 «	—	1·69 «
<i>MgCl<sub>2</sub></i> _ _ _ _ _	10·27 «	10·878 «	9·44 «
<i>MgSO<sub>4</sub></i> _ _ _ _ _	6·16 «	4·737 «	6·40 «
<i>CaSO<sub>4</sub></i> _ _ _ _ _	4·05 «	3·600 «	3·94 «
<i>K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub></i> _ _ _ _ _	—	2·465 «	—
<i>CaCO<sub>3</sub></i> _ _ _ _ _	0·60 «	0·345 «	0·21 «
<i>MgBr<sub>2</sub></i> _ _ _ _ _	0·24 «	0·217 «	—

1000 chlor-iónra jut

szerintem:	DITTMAR szerint:	NATTERER szerint:
22·7	18·2	20·4 kálium ion
843·0	853·3	855·2 nátrium ion
19·2	19·2	19·9 calcium ion
104·6	99·3	102·9 magnésium ion
1·6	1·5	1·5 bróm ion
52·2	51·3	52·0 sulphat ion
2·2	2·3	2·1 carbonat ion

Az összes sótartalom és chlortartalom viszonya  $\frac{S}{Cl}$ ; ez

szerintem:	FORCHHAMMER szerint:	DITTMAR szerint:
1·8093	1·811	1·8058

A sulphat- és chlor-iónok viszonyát kifejező  $\frac{SO_4 \times 100}{Cl}$  hányados

szerintem:	RUPPIN szerint:	FORCHHAMMER szerint:	DITTMAR szerint:
14·094	13·916	13·5	14·23

A mi a brómtartalmat illeti, CHELLE<sup>32</sup> eredményeihez igen közelálló értékeket kaptam. CHELLE az *Adriára* az  $\frac{1000 Br}{Cl}$  hányadost 3·6-nak, én pedig 3·8-nak találtam.

Az összes halogénnel egyenértékű chlort

	gravimetriásan :	KNUDSEN módszerével meghatározva :
az I. sz. vízre	21·11 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek	21·13 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek
a II. sz. vízre	21·33 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek	21·35 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek
a III. sz. vízre	21·28 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek	21·20 <sup>0</sup> / <sub>00</sub> -nek

találtam.

KNUDSEN szerint az összes sótartalom:  $S = 0\cdot030 + 1\cdot8050 Cl$ ,  
szerintem:  $S = 0\cdot030 + 1\cdot8078 Cl$ .

Ha a KNUDSEN-féle módszerrel meghatározott chlortartalom-  
ból és az egyes alkatrészek egyenérték-százalékaiból az általam  
levezetett  $A = K \cdot 10^{-3} \cdot 0\cdot31268 a \cdot p$  formula alapján kiszámít-  
juk az I. sz. víz ezredrészek szerinti összetételét, az analysis-  
sel nyert értékekkel, mint a következő táblázatból látjuk, kitünő  
megegyezést tapasztalunk:

*I. sz. vízminta összetétele.*

	Meghatározva :	Számítva :
<i>K</i>	0·53 gr	0·53 gr
<i>Na</i>	11·58 "	11·54 "
<i>Ca</i>	0·43 "	0·46 "
<i>Mg</i>	1·48 "	1·49 "
<i>Cl</i>	21·08 "	21·09 "
<i>Br</i>	0·0795 "	0·0792 "
<i>SO<sub>4</sub></i>	2·99 "	2·98 "
<i>HCO<sub>3</sub></i>	0·16 "	0·16 "
Összes só	<u>38·33 gr</u>	<u>38·33 gr</u>

Mint az elmondottakból is megítélhető, KNUDSEN módszerét  
chemiai vizsgálataink a legteljesebb mértékben igazolják.

Most még a physikai tulajdonságok meghatározásánál elért  
eredményeink rövid ismertetésére kell rátérnünk.

A régebbi vizsgálók a sótartalmat a  $\rho_{17\cdot5}$  lineáris függ-  
vényeként fejezték ki. Ily módon az  $\frac{\rho \cdot 1000}{\rho_{17\cdot5}}$  hányadost állandó-  
nak tüntették föl. Ezt az állandót NATTERER 1288 és 1326 között

ingadozónak találta és 45 analízis középértékéből 1308-nak vette. KRÜMMEL 1318-nak találta, az én vizsgálataim szerint pedig 1300-nak adódott ki. Tudjuk azonban, hogy KNUDSEN a  $\rho_{17.5}$  értékét a sótartalom harmadfokú függvényeként fejezte ki, s így ma már ismeretes, hogy e faktor nem tekinthető konstansnak.

Ha a KNUDSEN-féle definíciónak megfelelő sótartalmakat vesszük alapul, majd kiszámítjuk az azoknak megfelelő  $\sigma_0$  és  $\rho_{17.5}$  értékeket, s összehasonlítjuk  $\sigma_0$  és  $\rho_{17.5}$  kísérletileg talált értékeivel, azt látjuk, hogy a kísérletileg nyert mennyiségek valamivel magasabbak.

Összes sótartalom.	$\sigma_0$		$\rho_{17.5}$	
	számítva :	meghatározva :	számítva :	meghatározva :
I. sz. víz 38.22	30.73	31.11	29.21	29.56
II. „ „ 38.57	31.00	31.28	29.47	29.77
III. „ „ 38.49	30.95	31.23	29.42	29.66

Ha a meghatározott  $\sigma_0$  értékének megfelelő  $\rho_{17.5}$ -eket összehasonlítjuk a KNUDSEN-féle egyenlettel számított  $\rho_{17.5}$  értékeivel, akkor az alábbi összeállítás tanúsága szerint nagyon jó meg egyezést találunk.

	$\sigma_0$	$\rho_{17.5}$	$\rho_{17.5}$
	meghatározva :	meghatározva :	KNUDSEN szerint számítva :
az I. sz. víznél	31.11	29.56	29.57
a II. „ „	31.28	29.77	29.77
a III. „ „	31.23	29.66	29.69

Ez a tény azt mutatja, hogy a KNUDSEN-féle adatoktól való lényegtelen eltérés oka a kísérleti berendezések különbözőségére vezethető vissza.

A KNUDSEN-féle módszer pontosságát és megbízhatóságát tehát physikai vizsgálataink eredményei is bizonyítják.

A 18° C hőmérsékleten mért és a nátrium D-vonalára vonatkozó fénytörésmutató meghatározásánál kapott adatokat a KRÜMMEL<sup>33</sup> szerint számított törésmutatók mellé állítva, a következő táblázatot nyerjük :

	meghatározva :	számítva :
az I. sz. víznél ... ..	1·34001	1·34044
a II. sz. víznél ... ..	1·34010	1·34051
a III. sz. víznél ... ..	1·34007	1·34050

A 18° C hőmérsékleten mért elektromos vezetőképesség

	meghatározva :	RUPPIN <sup>34</sup> szerint számítva :
az I. sz. vízre ... ..	0·05011 1/ohm	0·05007 1/ohm
a II. sz. vízre ... ..	0·05044 1/ohm	0·05043 1/ohm
a III. sz. vízre ... ..	0·05036 1 ohm	0·05039 1/ohm

Végül a fagyáspontcsökkenést

	meghatározva :	HANSEN <sup>35</sup> szerint számítva :
az I. sz. víznél ... ..	2·175°C-nak	2·120°C-nak
a II. sz. víznél ... ..	2·177°C-nak	2·133°C-nak
a III. sz. víznél ... ..	2·193°C-nak	2·130°C-nak

találtam.

Úgy physikai, mint chemiai vizsgálataim tehát azt mutatják, hogy az alkatrészek állandóságának tétele az *Adria* vizére is érvényes, továbbá, hogy KNUDSEN módszere a szokásos laboratóriumi eljárásokkal teljesen megegyező eredményeket szolgáltat.

★

Vizsgálataimat a m. kir. halélettani és szennyvztisztító kísérleti állomás laboratóriumaiban végeztem, s e helyütt sem mulaszthatom el, hogy dr. KORBULY MIHÁLY állomásvezető úrnak szives engedelméért és hasznos tanácsaiért köszönetet mondjak.

### Irodalom.

1. és 2. O. KRÜMMEL : Handbuch d. Ozeanographie. II. Aufl. B. I. S. 218. Stuttgart, 1907.
3. A. VOGEL : Schweiggers Journal. VIII. 344., 1813.
4. MARCEP : Philosophical Transactions of the Royal Society. London. 1819. és 1822.

5. PFAFF: Schweiggers Journal. XXII. 271. 1823.
6. CALAMAI: Journal f. praktische Chemie. 45., 235., 1848.
7. USIGLIO: Annalen d. Chemie u. Physik. XXVII., 92., 172. (1849.)
8. SRUVE: Bull. Acad. St. Petersbourg. IV., 130., 1861.
9. GÖBEL: Bull. Acad. St. Petersbourg. IV. 131., 1862.
10. FÖRCHHAMMER: Philosophical Transactions of the Royal Society London. 155., IV., 203., 1865. On the Composition of Sea water in the different parts of the Ocean.
11. SASS: Pogg. Ann. 129., 412. 1866.
12. DITTMAR: Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. «Challenger» during years 1873—76. Vol. 1. Physics and Chemistry. 25.
13. BUCHANAN: Challenger Reports. Vol. 1. Physics and Chemistry.
14. C. SCHMIDT: Bull. Acad. St. Petersbourg. 24., 232. 1877.
15. BERGLUND: Berichte d. Deutschen Chemischen Gesellschaft. 18., 2888. 1885.
16. WOLF és LUKSCH: Bericht an die Kgl. Ungar. Seebehörde in Fiume über die am Bord der Dampfyacht «Deli» und des Dampfbootes «Nautilus» im Zeitraume 1875 bis 1877 durchgeführten physikalischen Untersuchungen im Quarnero. Fiume, 1875—1878. — Denkschriften d. Kais. Akad. d. Wissenschaften. Wien. Math.-Nat. Klasse 59. I. u. II. Reise. 60. III. Reise. 61. IV. Reise. 65. — Sitzungsbericht d. Kais. Akad. d. Wissenschaften. Wien. Math.-Nat. Klasse 112. II. Abt. a. 297. 1903.
17. K. NATTERER: Denkschriften d. Kais. Akad. d. Wissenschaften. Wien. Math.-Nat. Klasse 59. I. Reise. II. Reise. 60. III. Reise. 61. IV. Reise 65.
18. L. SCHMELCK: Norske Nordhavs Exped. Chemi. III. 12. 1882.
19. BIBRA: Annal. d. Chem. u. Pharm. LXXVII., 98. 1851.
20. A «Conseil permanent international pour l'exploration de la mer» kiadványai:
  - Publications de circonstance.
  - Rapports et procès-verbaux des réunions.
  - Bulletin (trimestriel) des résultats acquis pendant les croisières périodiques.
  - Bulletin statistique.
  - A monacoi oceanoographiai intézet kiadványai:
    - Bulletin de l'institut Oceanographique de Monaco.
    - Resultats des campagnes scientifiques, accomplies sur son yacht par Albert I-er, prince souverain de Monaco, publiés sous sa direction avec le concours de M. Jules Richard.
21. SPETZ: Pogg. Ann. 10., 510.
22. CALAMAI: l. c.
23. LORENTZ: Physicalische Verhältnisse und Vertheilung der Organismen im Quarnerischen Golfe. Wien, 1863.



24—25. I—V. Bericht der ständigen Commission für die Adria an die Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien.

26. WOLF és LUKSCH: Bericht an die Königl. Ungar. Seebehörde etc. Physikalische Untersuchungen im Adriatischen und Sicilisch-Jonischen Meere während des Sommers 1880 am Bord des Dampfers «Hertha». Wien, 1881.

27. KÖTTSTORFER: Bericht an die Königl. Ungar. Seebehörde in Fiume etc. Fiume, 1878.

28. G. GÖTZINGER: Bericht über die im Jahre 1909 ausgeführten oceanographischen Untersuchungen entlang der Westküste Istriens und über die oceanographische Ausrüstung des Forschungsschiffes «Adria». Wien, 1910.

29. Die I—IX. Terminfahrt S. M. S. Najade in der Hochsee der Adria. — Mitt. d. k. k. geogr. Gesellsch. in Wien. 1911., 4., 9. füzet; 1912., 1—2., 4., 9—10., 11—12. füzet; 1913., 3., 9—10., 11—12. füzet. — Risoltati fisico-chimici delle prime cinque crociere Adriatiche (1909. aug. — 1911. febr.) — R. Comitato Talassografico Italiano. Memoria III., 1911., Venezia. — A horvát tengerkutatások eredményei a délszláv akadémia kiadásában jelentek meg. Jsvještaji o 1, 2, 3 i 4 naučnom istraživanju Jadranskoga mora godine 1913 i 1914. — Prirodoslovna istraživanja Hrvatske i Slavonje. Svezak 2 i 5 Zagreb 1914.

30. M. KNUDSEN, SÖRENSEN, FORCH: Berichte über die Konstantenbestimmung zur Aufstellung der «Hydrographischen Tabellen». Königl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 12. 1902. No. 1.

31. M. KNUDSEN: «Hydrographische Tabellen» 1901. Kopenhagen, Hamburg.

32. L. CHELLE: Bulletin de l'institut Oceanographique de Monaco. No. 260. 30. Mars 1813.

33. O. KRÜMMEL: Handbuch d. Oceanographie. II. Aufl. Bd. I. 251. (1907.)

34. O. KRÜMMEL: Die Beteiligung Deutschlands an der Internationalen Meeresforschung. Jahresbericht IV/V. 8. Berlin, 1908.

35. O. KRÜMMEL: Handbuch d. Oceanographie. II. Aufl. Bd. I. 240. 1907.

# A MAGASABBFOKÚ KONGRUENCIÁK ELMÉLETÉNEK EGYIK KÉRDÉSÉRŐL.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

## I.

Egész együtthatós algebrai egyenlet racionális gyökeinek meghatározására mindig véges számú kísérlet elegendő és így véges számú kísérlet elegendő annak az algebrai egyenletnek a képezésére is, melynek összes gyökei adott egész együtthatós algebrai egyenlet racionális gyökeivel megegyeznek. De nem ismeretes — és a legnagyobb valószínűség szerint nem is létezik — oly módszer, mely az utóbb említett egyenlet képezésére szolgáló folyamatból a kísérleti elemet teljesen kiküszöbölve, ennek az egyenletnek többtagúját kész képlet alapján szolgáltatná. A figyelemre annál inkább méltó most már az a tény, melyre a jelen dolgozatomban rámutatok, hogy a kongruenciák elméletében a megfelelő probléma minden elvi nehézség nélkül — bár nem egészen egyszerű úton — mindenkor megoldható. Ez annyival csodálatosabb, mert tudjuk, hogy a kísérleti elem a legtöbb számelméleti problémából teljességgel ki nem irtható.

Ha adva van az

$$f(x) \equiv a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \dots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

kongruencia, a melyben  $p$  törzsszám és  $a_{p-2}$  a  $p$ -vel nem osztható (ilyen alakra vezethető vissza minden a  $p$  törzsszám-modulusra vonatkozó magasabb fokú kongruencia), akkor ismeretes, hogy e kongruenciának (mod.  $p$ .) egymástól és a zérustól különböző gyökeinek száma <sup>1</sup> a

---

<sup>1</sup> L. Journal für die reine u. angewandte Mathematik 99. k. 258 l. 1884. «Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades» című értekezésem.

$$C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} & a_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-4} & a_{p-3} \end{vmatrix}$$

determinánsnak a  $p$  modulusra vonatkozóan meghatározott rangszámát  $(p-1)$ -re egészíti ki. Ha tehát  $C$  rangszáma  $(\text{mod. } p)$   $p-1-r$ , akkor kongruenciánk egymástól és a zérustól különböző gyökeinek száma pontosan  $r$ . Legyenek e gyökök

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r,$$

akkor a feladat, melyről szó van, abban áll, hogy kiindulva az (1) kongruenciából. a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\equiv (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_r) \equiv \\ &\equiv x^r + \varphi_1 x^{r-1} + \dots + \varphi_{r-1} x + \varphi_r \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

kongruenciát képezzük, még pedig kísérletezések nélkül.

E probléma megoldására a következő tétel vezet:

**Tétel:** *Ha az*

$$f(x) \equiv a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-2} + \dots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

$[a_{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p}, p \text{ törzsszám}]$

*kongruenciának pontosan  $r$  különböző gyöke van, akkor azt a kongruenciát, melynek ez az  $r$  szám és csak ez tesz eleget, a következő képlet szolgáltatja:*

$$\varphi(x) \equiv (r!)^{p-2} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & s_{r-4} & \dots & r-1 & 0 \\ s^r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & s_1 & r \\ x^r & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \dots & x & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p},$$

*a hol  $s_i$  helyébe*

$$s_i \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^i [1 - [f(k)]^{r-1}] \pmod{p}.$$

*teendő.*

E tétel bebizonyítása igen egyszerűen alakul, ha HURWITZ-nak egy tőle más czélokra alkalmazott észrevételét<sup>1</sup> fölhasználjuk.

Ha a

$$G_k = 1 - [f(k)]^{p-1}$$

számot (mod.  $p$ ) tekintjük, akkor ez FERMAT tétele értelmében mindig zérussal kongruens, valahányszor  $f(k)$  a  $p$ -hez relativ prím, vagy mivel  $p$  törzsszám  $f(k)$  a  $p$ -vel nem osztható, azaz  $k$  nem gyöke az

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenciának; de

$$G_k \equiv 1 \pmod{p}$$

valahányszor

$$f(k) \equiv 0 \pmod{p}$$

azaz  $x \equiv k \pmod{p}$  az

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenciának gyöke.

Ha ezt figyelembe vesszük és az (1) kongruencia különböző gyökei

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r,$$

akkor a következő kongruenciák írhatók föl:

$$s_1 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k [1 - f(k)^{p-1}] \equiv \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r$$

$$s_2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^2 [1 - f(k)^{p-1}] \equiv \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_r^2 \pmod{p}$$

$$\dots$$

$$s_r \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^r [1 - f(k)^{p-1}] \equiv \beta_1^r + \beta_2^r + \dots + \beta_r^r.$$

Ily módon a

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$$

gyökök összes hatványösszegei kiszámíthatók. Ha most

<sup>1</sup> L. HURWITZ: «Über höhere Kongruenzen» Archiv der Mathematik und Physik III. Reihe V. Bd. pag. 17. 1902.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\equiv (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_r) \equiv \pmod{p}, \\ &\equiv x^r + \varphi_1 x^{r-1} + \dots + \varphi_r \end{aligned}$$

a hol

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\Sigma\beta_1, \quad \varphi_2 = \Sigma\beta_1\beta_2, \dots, \quad \varphi_k = (-1)^k \Sigma\beta_1\beta_2\dots\beta_k, \dots, \\ \varphi_r &= (-1)^r \beta_1\beta_2\dots\beta_r \end{aligned}$$

a

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$$

gyökök elemi szimmetrikus függvényei, akkor ezek és az

$$s_1, s_2, \dots, s_r$$

hatványösszegek között fennállanak NEWTON ismeretes identitásai. Ezek a következők:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} s_1 + \varphi_1 &\equiv 0 \\ s_2 + s_1\varphi_1 + 2\varphi_2 &\equiv 0 \\ s_3 + s_2\varphi_1 + s_1\varphi_2 + 3\varphi_3 &\equiv 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ s_r + s_{r-1}\varphi_1 + s_{r-2}\varphi_2 + \dots + \varphi_r &\dots 0; \end{aligned} \quad (\text{mod. } p)$$

ha ezekhez még hozzácsatoljuk az

$$x^r - \varphi(x) + x^{r-1}\varphi_1 + x^{r-2}\varphi_2 + \dots + \varphi_r \equiv 0 \pmod{p}$$

identitást, akkor a fölirt  $r + 1$  számú kongruenzia simultan fennállása maga után vonja, hogy

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & \dots & \dots & r \\ x^r - \varphi(x) & x^{r-1} & x^{r-2} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p},$$

a honnan

<sup>1</sup> Fokszámukkal megegyező számú gyököket tartalmazó kongruenciákra ezek épűgy alkalmazhatók, mint algebrai egyenletekre.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{r-2} & s_{r-3} & \cdot & \dots & r \end{vmatrix} \varphi(x) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} s_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & r \\ x^r & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{p}.$$

De mivel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & r \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r$$

$p$ -vel nem osztható, mert

$$r < p,$$

azért végül

$$\varphi(x) \equiv (r!)^{p-2} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \dots & r \\ x^r & x^{r-1} & x^{r-2} & x^{r-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p},$$

azaz  $r$ -edfokú kongruencia, melynek gyökei az

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruencia összes valós gyökeit és csak azokat szolgáltatják, a mivel a tételünk be van bizonyítva.

Legyen szabad e tételt példával is illusztrálni. Ha adva van az

$$f(x) \equiv x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$$

kongruencia, akkor egyszerű számítás mutatja, hogy a többtagújának együtthatóiból alakított 6-odfokú ciklikus determináns

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(mod. 7) zérussal kongruens; zérussal kongruensek továbbá e determináns összes 5-ödfokú aldeterminánsai; de az

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

4-edfokú aldeterminánsa 7-tel nem osztható. Ennek következtében  $C$  rangszáma 4 és így az adott kongruenciáknak két különböző és a zérustól is különböző gyöke van. Kiszámítván  $s_1$ -et és  $s_2$ -t, azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv \sum_{k=1}^6 k [1 - f(k)^6] \equiv 3 \\ s_2 &\equiv \sum_{k=1}^6 k^2 [1 - f(k)^6] \equiv 5 \end{aligned} \quad (\text{mod. } 7);$$

tehát az előbb bebizonyított tételünk szerint az a másodfokú kongruencia, melynek gyökei az

$$f(x) \equiv 6 \pmod{7}$$

összes különböző valós gyökei, a következő lesz:

$$\varphi(x) \equiv (2!)^5 \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{7}$$

vagy kifejtett alakban

$$\varphi(x) \equiv 8x^2 - 24x + 16 \equiv x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{7}.$$





$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-3} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p-3} & a_{p-2} & \dots & a_{p-5} \end{vmatrix}$$

főminorra  $p$ -vel nem osztható, tehát  $p$ -hez képest relatív prím-szám; de akkor a megelőző kongruenciából  $\xi$  meghatározására végül a következő képlet adódik:

$$\xi \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-3} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p-3} & a_{p-2} & \dots & a_{p-5} \end{vmatrix}^{p-2} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-4} & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-3} & a_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{p-3} & a_{p-2} & \dots & a_{p-6} & a_{p-4} \end{vmatrix} \pmod{\quad}.$$

Az  $(R)$  rendszerből még következik, hogy  $(p-1)$ -edfokú és a  $p$  modulusra  $(p-2)$ -edrangu ciklikus determináns egy sorá-nak elemeihez tartozó aldeterminánsok geometriai progressiót alkotnak.

Legyen például adva az

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 - x - 2 \equiv 0 \pmod{5}$$

kongruencia, akkor az együtthatókból alakított ciklikus deter-mináns

$$C \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{7};$$

e determináns 4. sorában a 4. elem aldeterminánása

$$C_1 \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod{5},$$

tehát rangszáma 3 és így az adott kongruenciának egy és csak egy gyöke van. Az  $(R)$  rendszer a jelen esetben

$$\begin{aligned} \xi^3 - \xi^2 - \xi - 2 &\equiv 0 \\ -\xi^3 - \xi^2 - 2\xi + 1 &\equiv 0 \pmod{5} \\ -\xi^3 - 2\xi^2 + \xi - 1 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ha ezt

$$\xi, \xi^2, \xi^3$$

mennyiségekre nézve lineáris kongruencia-rendszernek tekintjük és figyelemmel vagyunk arra, hogy determinánsa  $C_1$  és hogy

$$C_1 \equiv 1 \pmod{5},$$

akkor a megoldás rendes módja szerint adódik, hogy

$$\xi \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\xi^2 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 9 \equiv 2^2 \pmod{5}$$

$$\xi^3 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv -12 \equiv 8 \equiv 2^3 \pmod{5}.$$

Végül még megjegyezzük, hogy a  $\xi$  értékét (mod.  $p$ ) az I. cikk tárgyalásaiból kifolyóan még a következő, az előzőnél egyszerűbb képlettel is előállíthatjuk:

$$\xi \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k [1 - f(k)^{p-1}] \pmod{p}.$$

## VIZSGÁLATOK AZ ANTIPNEUMOCOCCUS-SERUM HATÁSA MÓDJÁRÓL.

PREISZ HUGÓ lev. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

A fajlagos védő serumok hatásmódja az idevágó nagyszámú vizsgálatok ellenére is az immunitástannak még mindig homályos és vonzó kérdései közé tartozik.

A midőn R. PFEIFFER kimutatta, hogy a cholera-ellenes immunsavó az által fejt ki védő hatását, hogy befolyása alatt a cholera-vibriók az élő állati szervezetben megduzzadnak, majd pedig rövidesen feloldódnak és eltűnnek, azt lehetett volna gondolni, hogy a bakterium-ellenes immun-anyagoknak általában abban áll a hatásuk módja, hogy a megfelelő bakteriumok testéhez tapadván, azokat az élő szervezet nedvei által oldható állapotba hozzák, hogy tehát az ilyen immunsavókban foglalt fajlagos immunanyagok bakterium-oldó, bakteriolyzáló hatásúak. De csakhamar kitűnt, hogy az antibakteriumos immunanyagoknak védő hatása távolról sem nyilvánul meg mindig bakteriolysisben, sőt ellenkezőleg, hogy a lysis oly feltűnő módon, mint a cholera-vibriónál a megfelelő immunsavóban, más bakteriumnál vagy egyáltalában nem, vagy csak kevésbé kifejezetten észlelhető.

METSCHNIKOFF és iskolája kezdettől fogva azt a felfogást védte, hogy az immunanyagok általában a leukocytákat élénkebb tevékenységre stimulálják, minek következtében az ilyen immunis szervezetben a bakteriumok csakhamar elpusztulnak, és pedig phagocytosis, sejtek emésztőképessége útján. Nyilvánvaló, hogy

ez a METSCHNIKOFF-féle értelmezés figyelmen kívül hagyta az immunitástannak azt a sarkalatos tételét, mely szerint valamely immunanyag mindig arra az anyagra, illetve sejtre fejt ki fajlagos hatását, a mely anyagnak vagy sejtnak (mint antigennek) a befolyása alatt az állati testben keletkezett. Ezzel pedig ellenkezik az a feltevés, hogy valamely bakteriummal termelt antianyag nem arra a bakteriumra, hanem leukocytákra fejtse ki hatását, a mely föltevessel különben az immunanyagok fajlagos hatását is alig lehetne értelmezni.

Active vagy passive pathogen bakteriumok ellen immunizált állatban a megfelelő (homolog) bakteriumokkal szemben sok esetben valóban fokozott phagocytosis mutatkozik. De, hogy ennek a fokozott phagocytosisnak nem az az oka, hogy az immunizált állat leukocytáinak bakteriumfaló képessége a rendesnél nagyobb, azt már mintegy 20 év előtt DENYS és LECLEF mutatta ki először és pedig a streptococcus elleni immunitásra vonatkozólag; kimutatták ugyanis, hogy in vitro az immunizált állat leukocytái nem vesznek magukba több streptococust, mint a nem immunisált állatéi; nem fokozódott a phagocytosis normális serumnak, de fokozódott immunsavónak hozzáadására a leukocyta és streptococcus keverékéhez in vitro. Ebből nyilvánvaló volt, hogy az erősebb phagocytosis okát nem a leukocytákban, azaz ezek megváltozott voltában, hanem az immunsavóban kell keresni. Jóval később (1904) NEUFELD és RIMPAU elemezvén közelebbről az immunsavónak a phagocytosist előmozdító eme hatásának mechanizmusát, úgy találták, hogy az immunsavó a streptococcusra hat és ezt teszi alkalmasabbá phagocytosisra, a leukocytákra ellenben láthatólag nem hat. Ugyanis az immunserummal bizonyos ideig érintkezésben állott, de azután e savótól tisztára mosott streptococust in vitro a leukocyták szembe-tűnően mohóbban szedték magukba, mint a hasonló módon előre nem kezelt streptococust; ellenben a leukocyták tevékenységére semmi befolyással sem volt, hogy vajjon előzőleg immunsavóval érintkeztek-e vagy nem. Hasonló viszonyok fenforgását tapasztalták a nevezett szerzők a pneumococcusellenes savóra vonatkozólag is.

A pneumococcusellenes immunsavó hatékonyságának lényege

ezek szerint abban áll, hogy a fajlagos immunanyag a pneumococushoz tapadván, ezt a phagocytosira alkalmasabbá teszi. Az ilyen természetű immunanyagokat NEUFELD és RIMPAU nyomán bakteriotropinoknak nevezzük és megkülönböztetjük a normális savókban is előforduló hasonló hatású, de némely tekintetben mégis eltérő tulajdonságú opsoninoktól.

A pneumococcusellenes serum hatásának módja és mechanizmusa e szerint tisztázottnak látszhatott. Bár ezzel szemben állott a nagyérdemű belga buvárnak, BORDET-nak eltérő észlelete, a ki a phagocytosira vonatkozólag a normális és immunsavó között DENYS és LECLEF által talált különbséget nem tudta megállapítani. A NEUFELD és RIMPAU észleleteinek helyessége iránt azonban különösen PAUL RÖMER-nek 1909-ben megjelent könyve volt alkalmas kételyeket támasztani, a mennyiben ő nagy apparatussal végzett nagyszámú kísérlete alapján arra az eredményre jutott, hogy a pneumococcusellenes serum nem hat bacteriotrop módon, mert bármint immunizált is állatokat (nyulakat, tengeri malaczkokat), ezek serumában nem tudott több bacteriotrop anyagot kimutatni, mint normális savókban. RÖMER szerint az immunserumos állatban a beléoltott pneumococcusok elszaporodása meg van gátolva, s ha kezdetben el is szaporodnak, csakhamar elfajulnak, elpusztulnak, de nem phagocytosis által, hanem sejteken kívül feloldódnak. Ebből RÖMER arra a végkövetkeztetésre jut, hogy a pneumococcusellenes serum hatása «antiinfectiosus». Engem különösen RÖMER vizsgálatainak ez az eredménye indított már hosszabb idő előtt arra, hogy saját észlelések és vizsgálatok alapján nyerjek betekintést e bonyolult kérdésbe annál is inkább, mert első tájékoztató kísérleteim alkalmával úgy találtam, hogy nem immunizált, a hasürbe fertőzött és elpusztuló állatokban is nagyobb mérvű phagocytosis szokott mutatkozni, holott az észlelők idevágó közlései szerint phagocytosis ilyenkor nem, vagy csak csekély mértékben szokott észlelhető lenni. Továbbá pedig még bizonyítandónak véltem azt is, hogy — a mennyiben az immunsavó valóban fokozza a phagocytosist — a pneumococcusok ez elnyeletése az oka-e a fertőzés elmaradásának, azaz elhárításának az immunizált szervezetben is. Mert bár NEUFELD hangsúlyozza,

hogy az immunsavó bacteriotrop hatása *in vitro* és védő hatása az állatkísérletben egymással párhuzamosan jár, ez még nem zárja ki a lehetőséget, hogy a savó az élő szervezetben védő hatását lényegileg mégsem bacteriotrop, vagyis a phagocytosist előmozdító hatása által, hanem egyébként fejtí ki. Hiszen tudjuk, hogy bőséges phagocytosis még nem jelenti a szervezet megmenekülését a fertőző csiráktól, a mire nézve például szolgálhat a sertésorbáncz bacillusával való fertőzés, a melyben nagyfokú phagocytosis ellenére is a fogékony állatok el szoktak pusztulni. Hogy pedig éppen a pneumococcus a nem immunizált és fogékony állatban is a folyamat vége felé bőségesen, olykor a leukocyták fele, sőt nagyobb része által el lehet nyelve, azt sokszor észleltem. A kérdés felderítése végett tehát még két körülmény kísérleti tisztázását láttam szükségesnek.

a) Ha a pneumococcusellenes immunsavó lényege a bacteriotrop hatás, akkor mindenekelőtt el kell várnunk, hogy a savóval *in vitro* érintkezésben tartott, majd a serumtól megtisztított, tehát a phagocytosissra előkészített, mondjuk sensibilizált coccusok fertőző képességüket elveszítsék, minthogy az élő szervezetben csakhamar élő sejtek által felvételnek és megemésztetnek.

b) Továbbá pedig, ha ez immunsavó hatásának lényege a coccusnak sensibilizálás folytán sejtek által való elnyeletése, akkor a coccusoknak az esetben is el kell veszteniök ölképességüket, ha nem fajlagos immunanyagok (tropinok) hatása következtében, hanem bármely más okból kerültek leukocytákba.

Saját vizsgálataim első céljául annak megállapítását tűztem ki, vajjon az immunsavó behatása alatt a fogékony állatba bevitt pneumococcusok körül mutatkozik-e erősebb phagocytosis. Kísérleteimre leginkább szürke és fehér egereket használtam; az immunsavó a «Sächsisches Serumwerk»-ből (Dresden) származott. A kísérlet legtöbbszörre akként történt, hogy a kísérleti állat délután vagy este bőr alá kapta a serumot, a következő reggel pedig coccusemulsióval a hasürbe lett fertőzve. Ezután a bizonyos időközökben finom üveg-kapillárisal a hasürből kiszívott nedvet vizsgáltam.

Összes felsorolandó vizsgálataimban a serumos és a kontrollkísérletből származó anyagot ugyanegy fedőlemezen egymás

mellett vizsgáltam, nehogy a külön-külön fixálás és festés miatt különbségek álljanak elő. A fixálás methyl-alkohollal vagy gázlángban történt; festésre kezdetben carbol-vizes thionint és GIEMSA-féle festéket is alkalmaztam, később azonban kizárólag carbolvizes toluidinkéket, miután meggyőződtem, hogy ez adja a legtisztább és legszebb képeket.

Nagyobbszámú kísérletemnek már az elsőkben meggyőződtem, hogy az immunizált és a kontroll állat között csak oly kísérleti berendezés mellett mutatkozik kétségtelen különbség, ha a serumos állat életben marad, a kontroll ellenben elpusztul. Ha azonban a serumos állat is elpusztul (mert kevés volt a serum, vagy nagyon sok a coccus), vagy ha ellenkezőleg a kontroll állat is életben marad (mert kevés vagy gyöngye volt a virus), akkor szembetűnő és következetes különbség a serumos és a kontroll állat között nem mutatkozik.

Talán nem tévedek, ha RÖMER-nek már említett, a phagocytosis szempontjából negatív vizsgálati eredményeit ez utóbbi körülmények figyelmen kívül hagyásával értelmezem. Magam ugyanis minden esetben, a midőn a serumos állat szemben a kontroll állattal életben maradt, határozott különbségeket észleltem, a mire nézve álljon itt néhány kísérleti eredmény.

### 1. kísérlet: Serumos és kontroll állat fertőzése.

Tengeri malacz kapott 1913 VI. 27.-én és 28.-án 3—3 ccm serumot bőre alá. VI. 30.-án hasba fertőzve lett egy kontroll állattal együtt:

#### *Serumos állat:*

3 óra múlva: elég sok leukocyta, 70 közül 16-ban van coccus (=23%), szabadon csak igen elvétve látható coccus.

7 óra múlva: elég sok leukocyta, 66 közül 6-ban felismerhető coccus (=9%), szabad coccus nem látszik.

1 nap múlva: sok sejt, sem sejtben, sem szabadon határozott coccus nem ismerhető fel.

Élve maradt.

#### *Kontroll állat:*

Elég sok leukocyta, 67 közül 1-ben van coccus (=1.3%), szabadon jóval több coccus.

Elég sok leukocyta, 85 közül 4-ben coccus (=4%), szabadon is látótereken kívül több coccus.

Sok sejt, majdnem mindenikben coccusok, tömérdek coccus szabadon is.

† VII. 2.-án.

## 2. kísérlet: azonos az 1. kísérlettel.

Szürke egér kapott 1913 VII. 27.-én és 28.-án 0.2—0.2 cem serumot a bőre alá, VI. 30.-án pedig egyidejűleg egy kontroll egérrel a hasürbe fertőztem.

### *Serumos :*

*1 1/4 óra múlva :* sok leukocyta, 44 közül 9-ben van coccus (=20%), elvértve szabadon (néhol sejtek körül) coccusok.

*3 óra múlva :* nem sok sejt, 64 közül 7-ben coccusok (11%), szabadon csak elvértve coccusok.

*7 óra múlva :* sok sejt, sem bennök, sem szabadon diplococcus nem látszik.

*1 nap múlva :* kevés sűrű nedv, sok sejt, kétségtelen diplococcus sem sejtben, sem szabadon nem látszik.

Élve maradt.

### *Kontroll :*

Sok leukocyta, 76 megszámlált sejt egyikében sincs coccus (=0%), szabadon nem kevés tokos diplococcus.

Kevesebb sejt, egyben sem látni coccust (=0%), több a szabad coccus.

Még több sejt (mint a serumosban), de nem látszik bennök coccus. Szabadon elég sok coccus.

Több és higabb nedv, sok sejt, valamennyiben coccusok, szabadon is tömérdek coccus burokkal.

† VII. 1-én.

## 3. kísérlet: az előbbivel hasonlóan és egy időben végzett kísérlet, csak hogy a fertőzés körülbelül ötször kisebb adaggal történt.

### *Serumos :*

*1 1/4 óra múlva :* kevés sejt, 90 közül 15-ben coccus (=17%), szabadon nem látszik coccus.

*7 óra múlva :* sok sejt, diplococcus sem sejtben, sem szabadon.

*1 nap múlva :* kevés sűrű nedv, nem sok sejt, diplococcus sem sejtben, sem szabadon.

Élve maradt.

### *Kontroll :*

Keves sejt, 55 megszámláltban nincs coccus (=0%), szabadon itt-ott coccusok.

Kevesebb sejt, egyben sincs coccus, szabadon látóterenkint néhány coccus.

Több nedv, nem sok sejt, kis részében coccus, nem kevés burkos diplococcus szabadon.

† VII. 1-én.

Ezekből és hasonló kísérletekből, a midőn a serumos állat — szemben a kontroll állattal — elpusztult, következetesen tapasztaltam, hogy a serumos állat fertőzött hasüréből kiemelt nedv több phagocytát és kevesebb szabad diplococust tartalmazott, mint a kontroll állat hasüri nedve. Ezt a különbséget elég gyakran



akkor is észleltem, a midőn a serumos állat nem volt eléggé immunizálva, hanem néhány nappal a kontroll állat után szintén elpusztult, a mikor is a serumos állatban a kezdetben tapasztalt coccusfogyás után szaporodás mutatkozik.

A serummal eléggé immunizált és inficziált állat sorsa rendszerint már az első órákban el van döntve, mert a közölt kísérletekből láthatólag ennyi idő alatt benne a diplococcusok többnyire már elpusztultak, holott a kontroll állatban elszaporodtak.

Hogy a védett serumos állatban a coccusok megfogyása és eltünése nem csupán a phagocytosisnak volna tulajdonítandó, hanem hogy utóbbin kívül a serum a szabad coccusok szaporodását is gátolná, vagy talán azoknak részben pusztulását is okozná sejteken kívül, azt számos vizsgálatom közben nem észleltem.

A serumos és a kontroll állatok hasüri nedvéből vizsgált szabad coccusok állapota között különbséget nem észleltem; ellenben a phagocytált coccusokon gyakran látszottak elfajulási jelenségek.

A következőkben ismertetek néhányat azokból a kísérleteimből, a melyeket végeztem annak megállapítására, hogy az immunizált és normális állat leukocytainak phagocytosisa között van-e eltérés és hogy az immunserum mily módon befolyásolja a phagocytosist különböző kísérleti berendezés mellett.

#### 4. kísérlet: immunis és normális állat sejtjeivel in vitro.

1913 VII. 8.-án és 10.-én reggel egy tengeri malacz 2—2 kem immunserumot, 10.-én délután pedig ez az állat egy friss tengeri malaczczal együtt 10—10 kem 1%-os aleuronátos húslevest kapott a hasürbe.

Másnap mindkét állat hasüri izzadmányából ismételt mosással leukocyta-emulsió készült, a melyet diplococcus-tenyésztéssel kevervén, a bekövetkező phagocytosist figyelemmel kísértem.

Az eredmény — coccustartalmú sejteknek az összes számlált sejtekhez való arányát %-ban kifejezve — a következő volt:

	a serumos állatban:	a normális állatban:
5/4 óra múlva	23%	0%*
1 nap múlva	14%	15%

\* Ezt a számlálási eredményt, tekintettel az egy nap múlva, valamint az 5. kísérletben talált egyértelmű számokra, figyelmen kívül szabad hagynunk.

### 5. kísérlet: az előbbihez hasonlóan végezve.

	a serumos állatban:	a normális állatban:
35 perc múlva ... ..	16%	26%
4 óra múlva ... ..	28%	36%

### 6. kísérlet: normális tengerimalacz leukocytáival,

hozzáadva diplococcut és egyrészt 10-szeresen hígított immunsavót, másrészt éppannyira hígított normális lóserumot:

	az immun- serumos próbában:	a norm. serumos próbában:
1 óra múlva ... ..	0%	0%
4 óra múlva ... ..	2%	6%
1 nap múlva ... ..	18%	20%

### 7. kísérlet: az előbbihez egészen hasonlóan végezve.

	az immun- serumos próbában:	a norm. serumos próbában:
$\frac{5}{4}$ óra múlva ... ..	47%	12%
1 nap múlva ... ..	37%	17%

### 8. kísérlet: sensibilizált coccusok phagocytosisa in vitro.

100-szorosan hígított immunsavóban és kontrollképen épp úgy hígított normális lósavóban 1 óráig időzött, majd kicentrifugált és egyszer 0.80%-os NaCl-oldattal mosott diplococcusok normális tengerimalacz leukocytáival keverve:

	az immun- savós próbában:	a norm. savós próbában:
$\frac{5}{4}$ óra múlva ... ..	6%	3%
1 nap múlva ... ..	44%	7%

### 9. kísérlet: sensibilizált coccusok állatban.

10-szeresen hígított immunsavóban és kontrollképen hasonlóan hígított normálsavóban 40 perczig időzött, majd a savótól mosással megszabadított diplococcusok által friss tengeri malacok hasürében elidézett phagocytosis:

	immun- serumos kísérlet :	norm. serumos kísérlet :
50 perc mulva — — — —	68%	20%
4 2 óra mulva — — — —	12%	9%
19 óra mulva — — — —	52%	58%
† 19 óra mulva.		† 22 óra mulva.

### 10. kísérlet: fertőzés aleuronátos hasürbe.

Két napon át egy tengerimalacz kapott 2—2 kem immunsavót, egy kontrolállat pedig ugyanannyi normális lóserumot a bőre alá; harmadnap aleuronátos húslevest, a 4. nap reggelén pedig diplococcusokat kapott mindkettő a hasürbe. A hasüri nedvben a phagocytosis következőkép mutatkozott:

	az immun- savóban :	a kontrol- ban :
1 óra mulva — — — —	6%	5%
6 óra mulva — — — —	20%	2%

Összegezve ezen kísérletek eredményeit, a 4. és 5. kísérletből azt látjuk, hogy a savóval immunizált állat leukocytái nem veszik jobban magukba a diplococust, mint a nem kezelt állat sejtjei, a mi megfelel DENYS és LECLEF észleleteinek a streptococcus-immunitásra nézve. A 6. és 7. hasonló berendezésű kísérlet eredménye ugyan nem egyező, de a 7.-ben az immunsavós próba phagocytosisa annyival fokozottabb, mint a normálsavóé, hogy azt csak az immunsavós hatásnak lehet tulajdonítani; a 6. kísérlet ebből a szempontból negatív eredményű, de azért nem ellenkezik a 7.-kel.

A 8. kísérlet feltünően mutatja az immunsavónak a diplococcusra kifejtett sensibilizáló, azaz bacteriotrop hatását; hasonló hatása a serumnak nyilvánult meg a 9. számú kísérlet alkalmával a kísérleti állat hasürében is, de csak az első órákban, a mi abból értelmezhető, hogy túlnagy volt a coccusdag s ennek megfelelőleg mindkét állat még 24 órán belül el is pusztult. Végül az aleuronát-injectio folytán leukocytákban bővelkedő hasüregben a 10. kísérlet tanúsága szerint erősebb volt a phagocytosis, ha az állat előzőleg serummal immunizálva lett. Hogy ez esetben a kontroll állat is élve maradt, az abból értelmezhető, hogy a hasürbe fecskendett coccusokat ott már nagyszámú leukocytá

és más természetű exsudatum készen várta és velök megbirkózott.

E kísérleteim megerősítik tehát mások ama leleteit, hogy a pneumococcusellenes savó a phagocytosist úgy in vivo, mint in vitro elősegíteni tudja és hogy ezt nem a leukocytákra, hanem a coccusokra kifejtett fajlagos hatása által teszi.

Már a bevezetésben érintettem, hogy ha ez a bacteriotrop hatás a pneumococcus-serum védő hatásának lényeges és döntő része, az esetben elvárhatjuk, hogy az immunsavóban időzött (sensibilizált) coccusok ölnéptességüket elveszítsék.

Ennek kimutatása céljából végeztem a következő kísérleteket:

### 11. kísérlet: fertőzés sensibilizált coccusokkal.

Alvadtt vérsavón nőtt kétnapos tenyészetet a condensatiós vízzel leöblítvén, belőle 0·3 cem-t elegyítettem 0·6 cem 0·8%-os konyhasóoldattal és 0·2 cem immunsavóval. Kontrollkép hasonló keverék készült a karbontartalmú pneumococcus-savó helyett ugyanannyi és hasonlóan karbontartalmú (0·5%) diphtheriaellenes serummal.

Mindkét keverék 1 óráig 37°-on állott, majd a coccusokat kiecentrifugáltam és 1—1 cem húslevessel felhígítottam. E hígításból egy-egy egér kapott 0·4—0·4 cem-t a hasürébe. Az időnkint kiszívott hasüri nedv vizsgálata:

#### *Immunsavós kísérlet:*

*1 óra múlva:* sok sejt, 9%-ában coccus, szabadon látóterenként néhány coccus.

*4 óra múlva:* sok sejt, 15%-ában coccus, szabadon csak igen elvétve coccus.

*23 óra múlva:* igen kevés sűrű nedv, sok széteső lenkocya, egy részében még felismerhető coccus; szabadon coccus nem látszik.

*3. nap vége felé az egér elhalt:* hasürben sok sejtmagtörmelék, kevés ép sejt, de coccusok nélkül, szabadon elvétve coccusok. — Vérben coccusok, vérben és savós üregek nedvében mucin.

#### *Kontroll:*

— sok sejt, 0·6%-ában coccus, szabadon talán több coccus.

— sok sejt, 8%-ában coccus, szabadon sok coccus, látóterenkint sok száz is.

— *egér már elpusztult:* igen sok a leukocya, alig van coccusmentes; szabadon tömérdek coccus; pericardium és pleura nedvében mucin.

**12. kísérlet: azonos az előző kísérlettel, csak hogy az egerek infectiója háromszorta kisebb adaggal történt.**

*Immunsavós kísérlet:*

*1 óra múlva:* elég sok sejt, coccus szabadon nem látszik, sejtekben sem kétségtelenül.

*4 óra múlva:* diplococcus sem szabadon, sem sejtkben nem látszik.

*23 óra múlva:* elég sok sejt, coccus sem szabadon, sem sejtkben nem látszik.

*5. nap vége felé az egér elpusztult,* hasürében sok sejtmagtörmelék, csak kevés sejt, némelyikben coccusok. Vérben sok coccus. Savós ürgek nedvében sok mucin.

*Kontroll:*

— elég sok sejt, bennök coccus nem látszik, szabadon látóterenkint 50—200 diplococcus.

— elég sok sejt, 2%-ában coccus, szabadon látóterenkint néhány száz coccus.

— *egér már elhullott:* hasüri nedv mikroskopi képe olyan, mint a 11. kísérlet elhullott kontroll egereé.

Bár ez utóbbi két kísérletben a sensibilizált cocccussal fertőzött állatok is elpusztultak, mégis kétségtelen, hogy a sensibilizálás által a coccusok ölnkéességükből lényegesen veszítettek; ez nemcsak abban nyilvánult meg, hogy az utóbbiakkal fertőzött egér két, illetve négy nappal később pusztult csak el, mint a kontroll állatok, hanem abban is, hogy a sensibilizált coccusok az első napon belül majdnem teljesen kipusztultak a hasüregből, míg a kontroll állatokban töménytelen mennyiségre elszaporodtak és már egy napon belül megölték azokat. Ezek után talán valószínűnek lehet tartani, hogy kisebb coccus-dosisokkal végzett kísérletekben a sensibilizált coccus — szemben a kontrollal — már nem ölt volna.

Azt kell kérdezni, hogyan értelmezhető, hogy különösen a 12. kísérletben a sensibilizált coccusokkal oltott állat mégis elpusztult, holott hasüregben 4 és 23 óra múlva coccus kimutatható már nem volt és holott serummal immunizált állatok ilyen lelet esetén életben szoktak maradni?

Úgy hiszem, hogy erre nem nehéz megfelelni. A sensibilizált coccus ugyanis még szaporodásra képes és így, ha a hasürben valamennyi beléoltott coccus az első órákban nem pusztul el,

hanem egyes ellentállóbb individuukai életben maradván, elszaporodnak, az így támadt új generatio már nincsen sensibilizálva, minélfogva ölképessége is nagyobb, mint sensibilizált őseié volt. Ily új generatiók okozták a 11. és 12. kísérletben az egerek napok mulva bekövetkezett halálát annak ellenére, hogy az első napon belül a coccusok már teljesen, vagy majdnem teljesen eltűntnek látszottak. Ezzel szemben a serummal immunizált állatban a sensibilizáló (bacteriotrop) anyagok hosszabb ideig megmaradván, nemcsak a fertőzés végett bevitt coccusokat, hanem ezeknek generatióit is folyton sensibilizálni és így a halálos kimenetelt elhárítani képesek.

Valószínűnek tartom azonban, hogy protrahált fertőzésekben még más körülmények is szerepelnek, a melyekre később még visszatérek.

A két utóbbi kísérlet mindenesetre eléggé szembetűnően mutatja, hogy az antipneumococcus-serum az által fejt ki immunizáló hatását, hogy éppen a coccusokat változtatja meg, s hogy e változás folytán a coccusok a szervezet sejtjeiben könnyen pusztulnak. Valamely más hatásmódja a serumnak, a mely például abban állhatna, hogy a speczifikus immunanyag coccusölő anyaggá változnék át, vagy coccusölő anyagok termelésére ingerelné az élő szöveteket, vagy más hasonló mód, e kísérletek alapján kizártnak tekinthető, minthogy e kísérletekben a fajlagos immunanyag csakis a coccusokra hathatott. Fokozott phagocytosis a 11. kísérletben — legalább kezdetben — kétségtelenül volt, épp úgy, mint a sensibilizált coccusokkal végzett 9. kísérletben is; a 12. kísérletben ellenben már 1 óra mulva sem sejtben, sem szabadon coccus látható nem volt, nyilván azért, mert aránylag kevés volt a beoltott coccus. Ez azonban nem zárja ki, hogy a coccusok itt is phagocytákban pusztultak.

Ezek után fennmarad még a kérdés, hogy vajjon az antipneumococcus-savó azzal, hogy a coccusokat a leukocytákba juttatta, befejezte-e feladatát, vagy pedig még ott is elősegíti-e a coccusok feloldódását, megemésztését olykép, mint pl. hæmolizáló immunanyag (amboceptor) előkészíti a vérsejtet a hæmolysisre?

Erre akként törekedtem feleletet kapni, hogy spontán, vagyis

bakteriotrop anyagok befolyása nélkül phagocytált coccusoknak öléképességét vizsgáltam. Idevágó kísérleteim a következők voltak.

### 13. kísérlet: fertőzés spontán phagocytált coccusokkal.

Egerek aleuronátos hasúri exsudatumából eredő, ismételten mosott leukocyták coccus-emulsióval keverten 3 óráig 37°-on állván, physiologiás konyhasós vízzel 3-szor megmosattak a szabad coccusok eltávolítása végett. A leukocyták nagy része ekkor coccustartalmú volt; sósvizes keverékéből egy-egy egér 0·3 cm-t kapott, és pedig az első egér a mosás után azonnal, a 2. 4 óra, a 3. 16 óra múlva. A sejt-emulsió időközben 37°-os thermostatban állott.

Az első egér az oltást követő 24 óra, a második 38 óra múlva hullott el pneumococcus-infectióban; a harmadik egér élve maradt.

### 14. kísérlet: az előzővel azonos kísérlet.

Tengerimalac a hasürbe kapott 5 cm peptonos húslevessel felhígított 16 órás cocculturát (Löffler-serumról); 6 óra múlva a hasürt 10 cm 1%-os langyos natr. citrattal kiöblítettem, tartalmának egy részét 1-szer citrattal, 4-szer physiologiás sósvízzel ezentrifugálva mostam (mindig langyosan tartva a keveréket). Az így mosott leukocyták sósvizes emulsiójában a sejtek 28%-a bizonyult coccultartalmúnak, szabadon ellenben coccus alig volt látható.

Ez emulsióból a tengerimalac hasüréből történt vételtől számított 2 óra, majd 3½ óra múlva 0·5 cm-t oltottam egy-egy egernek hasürébe; mindkét egér a 30.—36. óra körül elpusztult coccusseptikæmiában. 18 óra múlva az emulsiót egyszer újból mostam sósvízzel a sejteken kívül levő és időközben esetleg elszaporodott coccusok eltávolítása végett; mikroskop alatt ekkor a leukocyták már erősen elváltozottak mutatkoztak, kifelé foszladozóknak, a mag körvonalai is elmosódottak voltak, diplococcus kevesebb sejtben látszott, mint tegnap. Most (= 18 órás emulsió) is az eredeti emulsió 0·5 cm-ének megfelelő mennyiséget oltottam egerbe; az egér életben maradt. 26 óra múlva ismét oltottam egeret, a mely öt nap múlva ugyan elpusztult, de vérében diplococcus kimutatható nem volt. Végre 43 óra múlva újra mostam az emulsiót és a megfelelő mennyiséggel hasba fertőztem egy egeret. Ekkor a sejtekben diplococust alig lehetett már látni, csakis GRAM-féle festéssel mutatkozott itt-ott egy-egy. Az egér élve maradt.

E kísérletekből kitünik, hogy a fajlagos immunanyagok közreműködése nélkül phagocytált pneumococcus is elpusztul a sejtekben és esetleg már rövid idő múlva, így a 13. kísérletben

már 16 óra múlva veszélytelenné válhatik a különben fogékony szervezetre. A miből következik, hogy az antipneumococcus-serum bakteriotrop hatása önmagában véve is teljesen elegendő ama védelem értelmezésére, a melyet ez a serum kifejteni tud. A phagocytált coccusok pusztulását nemcsak az állatkísérlet igazolta, hanem a mikroszkopi vizsgálat is.

Vizsgálataim ez eredménye szerint nem lehet kétséges, hogy az antipneumococcus-serum akként fejt ki védő hatását, hogy a benne foglalt fajlagos immunanyagok a pneumococcust a phagocytosisra előkészítik, megegyezőleg azzal, a mit az anti-streptococcus-serumra nézve először NEUFELD és RIMPAU mutatott ki. Hogy az antipneumococcus-serum immunizáló képességének ez az egyedüli vagy legalább is a legfőbb és döntő tényezője, azt nemcsak az állatkísérletben és az in vitro az immunserum befolyása alatt fokozottabban mutatkozó phagocytosis, hanem a sensibilizált, továbbá a spontán phagocytált coccusok ölképességének tetemes csökkenése, illetve teljes megszűnése is igazolta.

Ezek szerint az antipneumococcus-serum azzal, hogy a coccusokat bejuttatta a leukocytákba, befejezte szerepét, mert a coccusok a sejtekben elpusztulhatnak fajlagos immunanyagok közreműködése nélkül is. Az antipneumococcus-serumban foglalt fajlagos antianyag (tropin) tehát a pneumococcusnak olyan képességét paralyzálja, a melylyel rendesen távortartja magától a phagocytákat és a mely virulentiájának az alapját teszi. Elméletileg ugyan nem lenne szükséges a coccus virulentiájának viselőjéül bizonyos fajlagos anyagot (virulint) feltételezni, mert el lehetne képzelni, hogy a pneumococcusok testét alkotó proteinek mint olyanok nem alkalmasak a phagocytosisra, míg a fajlagos serum befolyása alatt arra alkalmassá válnak. Ha azonban azt látjuk, hogy van könnyen és nehezen phagocytálható pneumococcus; hogy annál hatásosabb az antiserum, minél virulensebb pneumococussal termeltetett; és végre, hogy van olyan pneumococcus-fajta, a melyre különben védőserum nem tud hatni: akkor mégis valószínűnek kell tartani, hogy a virulencia viselője a pneumococcusnak csak egy bizonyos része vagy anyagcsereterméke, s hogy immunizáláskor ez termeli az



antianyagot és az immunserum ezt köti meg és bénítja a phagocytákat távoltartó hatásában.

Esetleg támadható félreértések megelőzése végett fel kell itt említenem a következőket. RÖMER hangsúlyozza, hogy ilyen antiserum-vizsgálatokra nem szabad olyan coccustörzseket alkalmazni, a melyek már spontane (sós vízben) is erősen phagocytáltatnak; másrészt már NEUFELD és HAENDEL, továbbá UNGERMANN észlelt oly pneumococcus-törzseket, a melyeknek phagocytosisát az immunserum sem állatkísérletben, sem in vitro befolyásolni nem tudta.

Én ezekre a körülményekre természetesen figyelmet nem fordítottam, lévén kitűzött célom kikutatni azt, hogy mi különbség mutatkozik a coccusok viselkedésében az immunizált állatokban, szemben a nem immunisokkal. Ez okból a kísérleteimhez kiszemelt pneumococcus-törzsekre nézve csakis az volt mértékadó, vajjon ölik-e a kísérleti állatokat s a savóm biztosan védett-e ellenök. Csakis ezeknek a követelményeknek megfelelő törzseket használtam in vitro kísérleteimben is.

Itt közölt állatkísérleteim alkalmával a coccusoknak csak a hasürben észlelhető sorsát kísértem figyelemmel; nem szenved azonban kétséget, hogy a vérbe és ennek útján a különböző szervekbe jutott coccusok sorsa hasonló a hasürbeliékhöz, vagyis, hogy az immunizált állat testében a coccusok egyebütt is így phagocytáltatnak és elpusztulnak, mint a hasürben. Mert csak úgy érthető az immunizált állatok életben maradása annak ellenére, hogy a hasba történt oltás után már néhány óra múlva a vér elég sok coccust tartalmazhat. Ez kitűnik a következő vizsgálataimból. Immunsavós és kontroll egereket hasba fertőzvé, időnkint leöltem belőlök egyet-egyet és vérökből agar táptalajra oltottam. A serumos egerek vére 2 és 4 órával a fertőzés után sterilisnek bizonyult, míg a kontroll egerek véréből ugyancsak 2 és 4 óra múlva már sok pneumococcus-telep nőtt.

Állatkísérleteim alkalmával ismételten megtörtént, hogy az immunsavós állatok (úgy egerek, mint tengerimalacok) napokkal előbb pusztultak el, mint a kontroll állatok, sőt, hogy csakis a serumos állat pusztult el. Minthogy ezek az eredmények egészen hasonló kísérleti berendezés mellett, ugyanolyan serum és

coccus alkalmazása mellett adódtak, mint egyéb kísérleteimben, ennél fogva az ilyen paradox kísérleti eredményeket nehéz értelmezni. RÖMER említi, hogy nagy serumadagok után pusztulni látta néha kísérleti állatait, a midőn kisebb serumadag védett.

Arra lehetne itt gondolni, hogy bizonyos esetekben, nevezetesen nagy serumadagok után, az immunanyagok a coccusokat rohamosan elbontják és mérgező anyagcseretermékeket produkálnak, mint például a cholera elleni immunsavó. Ez a feltevés azonban nem találó, mert az antipneumococcus-serum nem bakteriumoldó természetű, továbbá a pneumococcus nem toxikus bakterium, a mi kitűnik LINDEMANN vizsgálataiból, a ki úgy találta, hogy az 50—100 kem serumos levesben tenyésztett pneumococcusok elölt tömege 15 grammos egeret sem tudott biztosan ölni, holott a coccusok az állatban gyorsan feloldódtak. De különben is a szóbanforgó paradox kísérleti eredménynél a serumos állatok nem intoxicatióban, hanem a coccus által való infectio miatt pusztultak el.

In vitro végzett phagocytosis-kísérleteim közben azonban ismételtén láttam oly jelenséget, a mely a serumos állatok gyorsabb, illetve kizárólagos elhullásával talán oki összefüggésbe hozható. Ez abban állott, hogy a pneumococcusok az immunserumos próbában, szemben a kontrollokkal, nemcsak napokon át erősen agglutinálva maradtak, hanem határozottan vastagabb tokkal is voltak ellátva. Már pedig agglutinált csoportok belsejében a coccusok védve vannak úgy ártalmas nedvek, mint phagocyták elől, másrészt pedig a bő tok, a mint pl. a lépfenebacillusra nézve tapasztalható, a sejtektől való elnyeletésnek is nem csekély akadályát alkotja. Talán ez alapon kell értelmezni, hogy például egyik kísérletemben az immunsavós tengerimalac még a fertőzést követő 15. napon hullott el pneumococcusok miatt, holott a kontroll állat életben maradt. Ily értelmezés mellett is fel kell azonban tételezni bizonyos kivételes, talán a kísérleti állat individualitásában rejlő okokat, hogy megértsük az ilyen paradox kísérleti eredmény kivételes voltát.

Végül még néhány észleletemről kívánok beszámolni, a mely talán nem érdekesség nélkül való. Annak idején az anti-anthraxserum hatásmódjának tanulmányozása alkalmával azt

a meglepő, de következetes tapasztalást tettem, hogy az immun-savós egér bőre alatt időzött selyemfonáldarabka, ha spóramentes lépfenebaczillussal itattam és friss egér bőre alá helyeztem, az állatot nem ölte, holott előre nem kezelt egér bőre alatt időzött fonal hasonló föltételek mellett mindig ölt. Idevonatkozó közleményemben törekedtem ennek a különös leletnek értelmezését adni. Most pedig az antipneumococcus-serumra nézve egészen hasonló kísérleteket végeztem, de mindig negatív eredménnyel; az immun-savós egérben egy napig időzött, majd pneumococcus-sal fertőzött fonal a kísérleti egereket mindig megölte.

Ebben is megnyilvánul egyebek között a különbség, a mely a különböző immun-savók hatásmódja között van.

Vizsgálataim közben igen gyakran észleltem föltűnő különbséget az immunserumos és a kontroll állatok exsudatumának polynuclearis sejtjei között; a serumos állatokból véve ezek ugyanis jóval nagyobbak, gyengébben festődők voltak, protoplasmájuk fellazultnak, vacuolizáltnak mutatkozott. Nem kísérlem meg e leletnek értelmezését, csak emlékeztetek arra, hogy lépfene-ellenes serummal végzett vizsgálataim alkalmával sokszor hasonlótl észleltem a serumos egerek sejtjein.

Végül még néhány szóval visszatérni szeretnék az elhúzódo fertőzésekre, a midőn az immun-savós állat túléli ugyan a kontroll állatot, de végre mégis elpusztul.

A serummal befecskendett immunanyagok a szervezetben csakhamar elterjednek, de aztán napról-napra fogynak, miáltal az általuk nyújtott védelem is csökken. Ez a körülmény lehet bizonyára a halálos kimenetel oka akkor, ha egyes pneumococcusok a serumos állatban valamely oknál fogva sokáig (1—2 hétig) élve maradnak és ekkor, minthogy az immunanyagok már végkép elfogytak a szervezetből, elszaporodnak és az állat halálát okozzák. Így értelmezhető a fentebb ismertetett kísérlet is, melyben a serumos tengerimalacz csak 15 nappal a fertőzés után pusztult el. Vannak azonban más körülmények is, melyek véleményem szerint a protrahált infectiókban szerepelnek, vagyis olyankor, a midőn a coccusok és a fertőzött szervezet közötti harc nem dől el rövidesen, hanem a coccusok egy része hosszabb ideig életben marad. Ily körülménynek tekintem a sejt-

kivándorlásnak és ezzel kapcsolatban legalább a localis phagocytosisnak kimerülését, továbbá pedig a coccusok tokanyagának lassankint való felgyülemlését a szervezetben.

A phagocytosis kimerülésére látszanak utalni az olyan esetek, mint a 11. és 12. kísérletben a sensibilizált coccusokkal oltott egerek, a melyek a fertőzés után csak a 3., illetve az 5. napon haltak el és a melyek hasürében ekkor sok sejtmag és sejttörmelék, de már csak igen kevés ép sejt volt észlelhető.

Föltehető, hogy az ilyen túlnyomólag szétesett sejtelemekből álló exsudatum már nem fejt ki a coccusok ellen azt a hatást, mint a friss exsudatum sejtjei.

A mi a pneumococcus burkát (tokját) alkotó mucinszerű anyagot illeti, arra nézve azt tapasztaltam, hogy az a pneumococcus-fertőzésben elpusztult állatok mindenikének vérében és egyéb nedveiben jelen van. Legegyszerűbben úgy győződhetünk meg a jelenlétéről, ha a savós üregek nedvét óraüvegben, fekete alapon eczetsavval összevegyítjük, a midőn fehéres, felhős csapadék támad.

Mint hogy lépfenetanulmányaim alkalmával kimutattam, hogy a lépfenecillus burkának hasonlóan mucinszerű anyaga lépfenés állatok nedveiben szintén megtalálható, továbbá hogy a házinylul vérsavója a lépfenés fertőzés alatt abban a mértékben veszti el bakteriumölő képességét, a mely mértékben az állat vérében a mucinosus anyag felhalmozódik, ennél fogva megengedettnek vélem a következtetést, hogy ez a mucinosus anyag a pneumococcus-fertőzésben is, úgy a gyorsan lefolyóban, mint a protraháltban, szerepet játszik, és pedig olyképen, hogy halálos általános fertőzés csak úgy következhetik be, ha előzőleg a mucinosus anyag a szervezetben már bizonyos mértékben felhalmozódott.

Nem akarok azonban ennek a feltevésnek nagyobb jelentőséget vindikálni; jövő kísérletek lesznek hivatva bebizonyítani, hogy mennyire felel meg az igazságnak. Idevágó kísérleteknek mindenestre meg kell küzdeniök azzal a nehézséggel, a melylyel a mucinosus burokanyagnak változatlan (nativ) állapotban való különválasztása a pneumococcusoktól jár olyan mennyiségben, amely a kísérletezésre szükséges.

### Irodalom.

- KOLLE und WASSERMANN: Handbuch der pathogenen Mikroorganismen 1913. II. Band. Kapitel: IV, V, VII (bactericide Sera, Tropine, Phagocytose).  
Ibidem: IV. Band; Kapitel: Pneumokokken, von Neufeld u. Händel.  
DENYS et LECLEF: La Cellule, 1895.  
BORDET: Annales de l'Institut Pasteur 1897.  
NEUFELD und RIMPAU: Über die Antikörper des Streptokokken- und Pneumokokkenserums. (Deutsche medic. Wochenschrift 1904.)  
P. RÖMNER: Experimentelle und klinische Grundlagen für die Serumtherapie der Pneumokokkeninfection der menschlichen Cornea. Wiesbaden, 1909.  
NEUFELD und RIMPAU: Weitere Mittheilungen über die Immunität gegen Strepto- und Pneumokokken. (Zeitschr. für Hygiene, 51. B. 1905.)  
UNGERMANN: Beiträge zur Kenntnis der Pneumokokkenimmunität etc. (Zeitschr. für Immunitätsforschung. Orig. V. Bd. 1910.)  
LINDEMANN: Beiträge zur Kenntnis der Pneumokokkeninfection. (Arbeiten aus dem kaiserl. Gesundheitsamte, 38. Bd. 1912.)  
NEUFELD u. HÄNDEL: Zeitschr. für Immunitätsforschung u. experim. Therapie, Teil I. Bd. 3.  
PREISZ: Kísérletes tanulmányok a lépfene-bacillus virulentiájáról etc. Budapest, 1908. (Németül: Centralbl. für Bakteriologie, Originale. Bd. 49. 1909.)
- 

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 május 17.-én tartott üléséből.)

## A ZÉRUS TERÜLETŰ FELÜLETRŐL.

GEÖCZE ZOÁRD-tól.

Ismeretes, hogy egy görbe hossza akkor és csak akkor zérus, ha a görbe minden pontja egyetlen egy pontba esik, míg egy felület területe zérus lehet még akkor is, ha a felület egy kocskát tölt ki. Érdeemes tehát ama szükséges és elégséges feltételt megállapítani, a mely mellett a felület területe zérus.

Ezt a feltételt «*Contribution à la quadrature des surfaces courbes*» czimű, a *Comptes Rendus*-ben az 1911. év első felében megjelent munkámban közöltem.

A feltétel szükségességének igazolása részletesen megjelent «*Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes*» a *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Un-hrn*) czimű olytatólagos közlemények elsejében. E helyütt ki-emeltem, hogy az elégségség bizonyítása útmutatást ad az általános véges területű felület quadraturájára.

Ebből a szempontból az elégségség bebizonyítása, ami jelen értekezés tárgya, fontosabb mint önmagában véve.

Jelzések megállapítása és ismert eredmények felsorolása után közlöm a feltételt és kimutatom, hogy elégségség.

*Jelzések.* Legyenek  $a$  és  $b$  véges pozitív állandók,  $u$  és  $v$  derékszögű pontkoordinátákat jelentvén, jelentse  $P$  az  $u$   $v$  sík

$$u = 0, u = a, v = 0, v = b$$

egyenesei által határolt négyszögét a kerület  $K(P)$  hozzá-értésével.

Legyen  $B(P) = P - K(P)$ . Az  $M$  pont a  $P$ -ben változván, legyenek  $\varphi(M)$ ,  $\psi(M)$ ,  $\chi(M)$  az  $M$  pont helyzetének egyértékű,

határolt és folytonos függvényei.  $x, y, z$  derékszögű pontkoordinátákat jelentvén, az

$$x = \varphi(M), \quad y = \psi(M), \quad z = \chi(M)$$

idom neve felület. Ama pontot, amelynek  $x, y, z$  koordinátái rendre  $\varphi(M), \psi(M), \chi(M)$   $M^\circ$ -al jelöljük.

*Ismeretes eredmények felsorolása.*

*Terület.* Jelölje  $T$  a felület területét, a terület definíciójául a LEBESGUE-félét választva.

*Homlokzat.* Ha  $F$  egy idom és  $G$  mindazokból a pontokból álló idom, amelyek  $F$ -hez nem tartoznak, akkor mindama pontokból álló idom, amelyek akármily kis közelében is van úgy az  $F$ -nek mint a  $G$ -nek pontja — e közeli pont maga a pont is lehetvén —, neve az  $F$ , illetve a  $G$  homlokzata. Jele  $(H)F$  legyen. Nyilván  $H(F) \equiv H(G)$ . A homlokzat zárt és sehol sem sűrű idom.

*Láncz.* Mint ismeretes, láncznak nevezünk egy véges számú egyenes távolságból álló vonalat.

*Tartomány.* Egy sík idomról akkor mondjuk, hogy tartomány, ha határolt, ha bármely pontja egy (elég kis) környezetének minden pontja hozzávaló és ha még bármely két pontja egy beléeső lánczczal köthető össze.

*Egyszerűen összefüggő tartomány.* A tartományt egyszerűen összefüggőnek nevezzük, ha bármely beléeső zárt lánc által bezárt pontok mind a tartomány pontjai.

*Egyszerű tartomány.* Nevezzük a tartományt egyszerűnek, ha homlokzata bármely pontjának bármely közelében is van oly pont, amelyből a sík végtelen távoli pontjához <sup>1</sup> oly láncz vonható, amely sem a tartományt, sem homlokzatát nem találja. Az egyszerű tartomány egyszerűen összefüggő is.

*Az  $I$  idom.* Legyen  $E$  egy egyszerű tartomány, legyen  $O$  egy pontja. Haladjunk az  $O$ -ból kiindulva egy lánczon a sík végtelen távoli pontjáig. Legyen  $C$  az így először talált pontja a  $H(E)$ -nek. Legyen  $I$  az összes  $C$ -féle pontok idoma.  $I$  nyil-

<sup>1</sup> Azaz egy oly ponthoz, a mely kívül van egy, az összes addig tekintetbe vett pontokat bezáró körön.

ván független az 0-tól. Vegyük fel az  $I$ -nek három  $C_1, C_2, C_3$  pontját. Vonjunk az 0-ból a  $C_1, C_2, C_3$ -ig oly egyszerű lánczokat, a melyek ( $C_1, C_2, C_3$  végeik kivételével) az  $E$ -be esnek, s a melyeknek csak az 0 pont a közös pontjuk. Legyen  $k$  egy 0 közepű  $E$ -be eső körkerület. A lánczokon  $M_1, M_2, M_3$  legyenek a  $k$  először talált pontjai.

Minden képzelhető  $k$ -t egyértelembe futva be, az  $M_1, M_2, M_3$  pontok cirkuláris sorrendje csakis  $C_1, C_2, C_3$ -tól függ.

Így az  $I$  pontjai cirkulárisan rendezhetők.

*Négyoldalú tartomány.* Az  $I$  pontjait osszszuk négy  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  csoportba úgy, hogy ha  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -nak sorban  $A, B, C, D$  akármely pontjai, ezek sorrendje  $A, C, B, D$  legyen.

Ha  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  úgy vehető fel, hogy  $\alpha$  és  $\beta, \gamma$  és  $\delta$  közös határponttal nem bírnak, akkor az  $E$  neve négyoldalú tartomány legyen.  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  az oldalak; —  $\alpha$  és  $\beta, \gamma$  és  $\delta$  «átellenesek».

$A T=0$  egy szükséges feltétele.

Jelentsen  $\Phi$  a  $\varphi, \psi, \chi$  egyikét,  $\Psi$  egy másikat. Jelentsenek  $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$  oly állandókat, hogy

$$|(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\nu_2 - \nu_1)| > 0$$

legyen.

Ha létezik a  $P$ -ben egy oly  $(\Phi, \Psi, \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2)$ -vel jelölendő négyoldalú tartomány, a melynek egyik  $-\alpha-$  oldalára  $\Phi = \lambda_1$ , másik  $-\beta-$  oldalára  $\Phi = \lambda_2$ , harmadik  $-\gamma-$  oldalára  $\Psi = u_1$ , negyedik  $-\delta-$  oldalára  $\Psi = u_2$ , úgy:

$$T \geq |(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\nu_2 - \nu_1)|.$$

*Nyilvánvaló, hogy a  $T$  zérus voltára szükséges az, hogy semmiféle  $(\Phi, \Psi, \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2)$  ne létezzék.*

*E feltétel elégséges is.*

A bebizonyítás így fog történni. Vegyünk fel a  $P$ -ben véges számú lánczot, amelyek bármelyike vagy egyszerűen zárt, vagy egyszerű. Az egyszerűen zártak a  $B(P)$ -be essenek, míg az egyszerűeknek a két-két vége, de csakis e pontjaik essenek a  $K(P)$ -re. Továbbá a lánczok közül bármely kettőnek se legyen közös pontja.

Legyen  $L$  egy ilyen láncz, legyen  $\Sigma L$  az összességük. Ha



$N$  a  $B(P)$ -nek egy pontja, a mely nem  $\Sigma L$ -hez való, a  $B(P)$  mindama pontjai, amelyek  $N$ -nel a  $B(P)$ -ben  $\Sigma L$  metszése nélkül (lánczczal) összeköthetők, egy tartományt alkotnak, a melynek homlokzata  $K(P) + \Sigma L$  pontjaiból áll. És nyilván, ha egy ilyen tartomány homlokzata az  $L$  egy pontját tartalmazza, akkor az  $L$  minden pontját tartalmazza.

Így az összes ily egymástól különböző tartományok száma véges. Legyen  $\delta$  egy tetszés szerinti pozitív szám.

*A  $T = 0$  állított elégséges feltételének megvalósulása esetén  $\nu$   $\Sigma L$  vehető úgy fel, hogy e tartományok mindegyikében  $\varphi, \psi, \chi$  mindegyikének az ingadozása kisebb  $\delta$ -nál.*

Jelentse  $\tau$  azt az idomot, amely keletkezik egy fenti tartományból, ha e tartományhoz homlokzatának ama (nem szükségkép létező) pontjait csatoljuk, a melyek nem fekszenek a  $\Sigma L$ -en, — e pontok a  $K(P)$  pontjai.

Mivel  $\varphi, \psi, \chi$  folytonosak és mivel bármely tartomány homlokzata a tartomány deriváltjában van,  $\varphi, \psi, \chi$  ingadozásai a  $\tau$ -ban kisebbek  $\delta$ -nál és egy-egy  $L$ -en is a  $\varphi, \psi, \chi$  ingadozásai kisebbek  $\delta$ -nál.

Definiáljuk a  $P$  pontjaira nézve a  $\varphi', \psi', \chi'$  függvényeket a következőkép. Minden  $\tau$ -ban a  $\varphi', \psi', \chi'$  állandók legyenek, értékük a  $\varphi, \psi, \chi$  valamely az illető  $\tau$ -ban felvett értékével legyen egyenlő. Minden  $L$ -en  $\varphi', \psi', \chi'$  állandók legyenek, értékük a  $\varphi, \psi, \chi$  valamely az illető  $L$ -en felvett értékével legyen egyenlő. Így tehát  $\varphi', \psi', \chi'$ , a  $P$ -ben definiált egyértékű és határolt függvények. És:

$$|\varphi' - \varphi| < \delta, \quad |\psi' - \psi| < \delta, \quad |\chi' - \chi| < \delta.$$

Bontsuk fel a  $P$ -t végezzámú háromszögre, úgy hogy e háromszögek közül bármely kettőnek vagy csak egy csúcsa, vagy csak egy oldala lehessen közös. Továbbá e háromszögek mindegyikének minden oldala kisebb legyen  $\delta$ -nál. És még: e háromszögek bármelyikének egy és csak egy  $L$ -vel lehessen közös része s e közös rész vagy egy vagy két csúcs, vagy egy vagy két oldal legyen. Mindez nyilván elérhető.

Legyen  $M$  e háromszöges hálózat egy szögpontja, azaz egy

vagy több háromszögének a csúcsa. Legyen  $M'$  (az  $x, y, z$  tér)  $\varphi'(M)$ ,  $\psi'(M)$ ,  $\chi'(M)$  pontja. Nyilván  $\overline{M^0 M'} < 3\delta$ .

Ha  $A, B, C$  a hálózat egy háromszögének a három csúcsa, akkor a fentiek szerint ezeknek legalább ketteje egy  $\tau$ -ba esik, vagy közülük legalább kettő egy  $L$ -en van. Így  $A', B', C'$  legalább ketteje egybeeső. Tehát az  $A' B' C'$  háromszög területe zérus. Az összes  $A' B' C'$  háromszögek területeinek az összege, azaz ama  $\Delta$  polyeder  $\Delta t$  területe, a mely polyeder az összes  $A' B' C'$ -féle háromszögekből áll, zérus. Ámde a LEBESGUE-féle definitio szerint

$$0 \leq T \leq \lim_{\delta=0} \Delta t = 0.$$

Most áttérünk a  $\Sigma L$  szerkesztésére. Feltesszük, hogy  $\varphi, \psi, \chi$  egyike sem állandó az egész  $P$ -ben.

$\varphi$  a  $P$ -ben variabilis lévén, értékei egy bizonyos ( $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}$ ) számköz összes értékeivel azonosak. Legyen  $\xi$  e számköz egy értéke. Jelölje  $\xi'$  a  $P$  mindama pontjait, a melyekre  $\varphi = \xi$ ,  $\xi'$  nyilván nem az egész  $P$ , továbbá  $\varphi$  folytonossága miatt  $\xi'$  zárt s így  $\xi'$  nem az egész  $B(P)$ . Legyen  $M$  a  $B(P)$ -nek egy nem a  $\xi'$ -hez való pontja. Legyen  $D$  az az idom, a mely a  $B(P)$  mindama pontjaiból áll, a melyek a  $B(P)$ -ben az  $M$ -mel a  $\xi'$  metszése nélkül összeköthetők.  $D$  nyilván egy tartomány is  $H(D)$  a  $\xi' + K(P)$  pontjaiból áll. A  $H(D)$ ,  $B(P)$ -be eső pontjaira  $\varphi = \xi$ , a  $D$  pontjaira  $\varphi - \xi$  állandó előjelű, a  $H(D)$ ,  $K(P)$ -re eső pontjaira  $\varphi - \xi$  vagy ugyanily jelű vagy zérus.

Mint ismeretes, egy idomot akkor nevezünk *kontinuumnak*, ha zárt, és ha bármely két  $A$  és  $B$  pontjához és bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz is vannak oly  $C_1 \dots C_n$  pontjai, hogy  $\overline{AC_1}, \dots, \overline{C_i C_{i+1}}, \dots, \overline{C_n B}$  mind kisebbek  $\varepsilon$ -nál.

*Fősegéd-tétel a  $\Sigma L$ -re vonatkozó állítás bebizonyításához.* Tartalmazzon a fenti  $H(D)$  egy oly  $k$  kontinuumot, a melyen  $\varphi$  értéke  $\xi$ . Ha a  $T = 0$  állított elégséges feltétele megvalósul, akkor e  $k$  kontinuumon  $\psi$  és  $\chi$  is állandó.

*Analóg tétel áll, ha az eddigiekben  $\varphi$  helyébe  $\psi$  vagy  $\chi$  vétetik.*

E tétel bizonyítását későbbre halasztva, segélyével kimutat-

juk a  $\Sigma L$ -re vonatkozó állítás helyességét. E végből még néhány segédítétel felsorolása szükséges.

1. Az egyszerűen összefüggő tartomány homlokzata egy kontinuum.

2. Legyen  $D$  egy akármilyen tartomány,  $H(D)$ -nek szükségkép léteznek oly pontjai, hogy bármely kis közelükben is van oly pont, a melyből a sík végtelen távoli pontjához a  $D + H(D)$  metszése nélkül láncz vonható. Legyen  $K(D)$  az ezekből a pontokból álló idom.

Vegyünk fel a  $D$ -ben egy  $O$  pontot, legyen  $D'$  az az idom, a mely áll mindama pontokból, a melyek  $O$ -val a  $K(D)$  metszése nélkül összeköthetők.  $D'$  független az  $O$ -tól.  $D'$  egy egyszerű tartomány és  $H(D') \equiv K(D)$ .

Lehetséges, bár nem szükséges, hogy a  $D'$ -nek vannak  $D + H(D)$ -hez nem való pontjai is. Legyenek  $L, M, N \dots$  véges számú ily pontok. Mindama pontokból álló  $[L], [M], [N], \dots$  idomok, a melyek  $L, M, N, \dots$ -nel a  $H(D)$  metszése nélkül összeköthetők, nyilván egyszerű tartományok. Legyen  $D''$  az az idom, a mely áll a  $D'$  mindama pontjaiból, a melyek  $O$ -val a

$$K(D) + H([L]) + H([M]) + H([N]) + \dots,$$

metszése nélkül összeköthetők.  $D''$  nyilván egy az  $O$ -tól független tartomány.

Nyilván

$$H(D'') = K(D) + H([L]) + H([M]) + H([N]) + \dots,$$

és a  $H(D'')$  véges számú egymástól elválasztott (azaz közös ponttal nem bíró) kontinuumból áll.

Ezek egyike a  $K(D)$  minden pontját tartalmazza. Jele  $K_1(D'')$  legyen. A többiek, a melyek nem léteznek, szükségkép, a  $D'$ -be esnek. Számuk legfeljebb annyi, mint az  $L, M, N, \dots$  pontok száma.

$K_1(D'')$ -öt a  $D''$ -öt ( $D''$  egy speciális tartomány) határoló főkontinuumnak nevezzük, a fent említett kontinuumokat a  $D''$ -et belülről határoló kontinuumoknak nevezzük.

Jegyzet.  $D'$  neve a  $D$ -hez való egyszerű tartomány legyen.

Csatoljuk a  $D$ -hez mindama pontokat, a melyek a  $D$ -be eső egyszerűen zárt lánczok által bezáratnak. Az így nyert idom egy egyszerűen összefüggő tartomány, neve a  $D$ -hez való egyszerűen összefüggő tartomány legyen.

3. a) Legyen  $E$  egy oly egyszerűen összefüggő tartomány, a melynek homlokzata egy egyszerű  $M$  lánczon kívül még egyéb pontokból is áll úgy, hogy emez utóbbi pontok  $Q$  idomának és az  $M$ -nek csakis az  $M$  két vége a közös pontja. Mellesleg megjegyezve  $Q$  egy kontinuum.

Legyen  $L$  egy oly egyszerű láncz, a melynek csak két vége, a melyek az  $M$ -re esnek, nem esik az  $E$ -be. Az  $L$ , s az  $M$ -nek az  $L$  két vége közt levő darabja egy egyszerűen zárt lánczot alkot. Vegyük el az  $e$  zárt láncz által bezárt pontokat az  $E$ -ből. Legyen  $G$  az  $E$  megmaradt része.  $G$  egy egyszerűen összefüggő tartomány, homlokzata  $Q+L$ -et tartalmazza. Legyen  $\nu > 0$ .

Az  $L$  kellő választásával  $G+H(G)$  bármely pontja az  $L$ -hez és a  $Q$ -hez is  $\nu$ -nél közelébb van.

$\beta$ ) Legyen  $E$  egy egyszerűen összefüggő tartomány. Legyen  $L$  egy egyszerűen zárt, az  $E$ -be eső láncz. Vegyük el az  $L$ -et és az  $L$  által bezárt pontokat az  $E$ -ből. A megmaradó idom egy tartomány, a melynek homlokzata  $L+H(E)$ . Legyen  $G$  e tartomány. Az  $L$  kellő felvételével  $G+H(G)$  minden pontja az  $L$ -hez is,  $H(E)$ -hez is  $\nu$ -nél közelébb van.

$\gamma$ ) Legyen  $k$  egy határolt kontinuum. Legyen  $L$  egy oly egyszerűen zárt láncz, hogy az általa bezárt ( $L$ ) idom a  $k$ -t tartalmazza. Legyen  $G$  az az idom, a mely áll mindama pontokból, a melyek az  $L$ -ből kiinduló, egyébként az ( $L$ )-be eső, a  $k$ -t nem metsző lánczokon vannak.  $G$  egy tartomány. Homlokzata  $L+k$  pontjaiból áll és az  $L$ -et tartalmazza. Az  $L$  kellő választásával  $G+H(G)$  minden pontja úgy az  $L$ , mint a  $k$ -hoz  $\nu$ -nél közelébb esik.

4. Legyenek  $k_1, \dots, k_m$  véges számú, a  $P$ -be eső, egymástól kettenként elválasztott kontinuumok. Így a

$$V = k_1 + \dots + k_m$$

idom nem tölti ki a  $B(P)$ -t. Legyen  $A$  a  $B(P)$ -nek egy nem a  $V$ -hez való pontja. Az az idom, a mely áll mindama pon-

tokból, a melyek az  $A$ -val  $V + K(P)$  metszése nélkül összeköthetők, nyilván egy tartomány. Homlokzata  $V + K(P)$  pontjaiból áll.

E tartományok sokasága legfeljebb megszámlálható, e tartományokat a  $V$  által  $B(P)$ -ben meghatározott tartományoknak nevezzük.

Ha csak egy ily kontinuum van, minden, általa a  $B(P)$ -ben meghatározott tartomány egyszerűen összefüggő, kivéve azt az esetet, midőn e kontinuum a  $B(P)$ -be esik. Ekkor ama tartomány, a mely homlokzatának  $K(P)$  része, nem egyszerűen összefüggő.

Ha csak egy kontinuum van, a mely a  $K(P)$ -től nincs elválasztva, az általa a  $B(P)$ -ben meghatározott tartományok közt legalább egy olyan van, a melynek homlokzata a  $K(P)$ -vel közös pontot bír. Bármely ily tartomány homlokzatának ama a  $K(P)$ -re eső pontjai, a melyek a kontinuumnak nem pontjai, a  $K(P)$  egyetlen egy darabját teszik. A  $K(P)$  egy darabja alatt egy egyszerű, a  $K(P)$ -re eső lánczot értve, a két vég elhagyásával, vagy az egész  $K(P)$ -et egy pont elhagyásával.

5. A  $\varphi$  egy kontinuumon vagy állandó, vagy pedig a  $\varphi$ -nek a kontinuumon felvett értékei egy számköz összes értékeivel egyenlők. Ha tehát a  $\varphi$  értékei egy kontinuumon véges számúak, akkor ezek az értékek egymás közt mind egyenlők és  $\varphi$  a kontinuumon csak evvel az értékkel bír.

6. Legyenek  $D_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , oly, a  $B(P)$ -be eső tartományok, a melyek közül bármely kettőnek sincs közös pontja és ha  $A_n$  a  $H(D_n)$  bármely pontja

$$\lim \varphi(A_n) \quad (n = \infty)$$

meghatározott legyen.

Legyen  $\varepsilon > 0$ . Csak véges számú  $D_n$ -ben lehet a  $\varphi$  ingadozása  $> \varepsilon$ . —

Vegyünk fel egy  $p > 2$  egész számot úgy, hogy a  $(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$  számköz  $p$ -ed része  $\delta$  felénél kisebb legyen. Legyen

$$\varphi^{(1)} - \varphi^{(0)} = [\varphi].$$

Bontsuk a  $(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$  számközt a

$$\varphi^{(0)} = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_h < \varphi_{h+1} < \dots < \varphi_p = \varphi^{(1)}$$

pontok által  $p$  egyenlő részre.

A  $B(P)$ -nek  $A$  egy oly pontja legyen, a melyre nézve

$$\varphi_h < \varphi(A) < \varphi_{h+1}$$

áll.  $\varphi'_h$  és  $\varphi'_{h+1}$  azok lévén a  $\varphi_h$  és  $\varphi_{h+1}$ -hez, a mi  $\xi'$  a fősegéd-tételben a  $\xi$ -hez, tekintsük amaz idomot, a mely áll mindama pontokból, a melyek a  $B(P)$ -ben  $A$ -val a  $\varphi'_h + \varphi'_{h+1}$  metszése nélkül összeköthetők. Ez az idom nyilván egy tartomány, homlokzata nyilván a  $\varphi'_h + \varphi'_{h+1} + K(P)$  pontjaiból áll.

Tekintsük az összes ily egymástól különböző tartományok összességét. Ezek közül azoknak, a melyekben a  $\varphi$ -nek van a

$$\varphi_h + \frac{[\varphi]}{4p}, \quad \varphi_{h+1} - \frac{[\varphi]}{4p}$$

értékek közzé eső értéke, a száma véges.

Ugyanis minden ily tartományban van egy  $B$  pont, a melyben  $\varphi$  értéke a fenti két határ közé esik és a  $\varphi$  folytonossága miatt van egy pozitív  $\lambda$  úgy, hogy ha  $C$  és  $D$  a  $P$  két pontja, a melyekre nézve csak  $\overline{CD} < \lambda$ , áll

$$|\varphi(C) - \varphi(D)| < \frac{[\varphi]}{4p}.$$

$K(P)$  alakját tekintetbe véve, tehát a tartományok mindegyikében (egy  $B$  közepű)  $\lambda$  sugarú negyedkörzikk volna; és két különböző tartomány ily körzikkjeinek közös pontja nincs. A  $B(P)$ -ben tehát (ha a tartományok száma nem volna véges) végtelen sok  $\lambda$  sugarú, kettenként közös ponttal nem bíró negyedkörzikk volna, a mi lehetetlen.

Legyen  $D_{h,k}$  egy ily tartomány. Itt  $h = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $k$  pedig minden oly pozitív egész szám lehet, a mely kisebb egy bizonyos a  $h$ -tól függő pozitív egésznél.

Alkalmazzuk a  $D_{h,k}$ -ra a 2. segéd-tétel alatti eljárást, úgy, hogy  $L, M, N, \dots$  oly pontok legyenek, a melyekre nézve  $\varphi$  értéke

$\varphi_h, \varphi_{h+1}$  egyikéhez sincs  $\frac{[\varphi]}{4p}$ -nél közelébb.

Az előbbieket (l. 6.) szerint az egymástól különböző  $[L]$ ,  $[M]$ ,  $[N]$ , . . . , féle tartományok száma véges.

Így a  $D_{h,k}$ -ből egy a 2. alatti  $D''$ -nek megfelelő  $D''_{h,k}$  tartományt nyertünk és világos, hogy két oly  $D''_{h,k}$ -nak, a melyek két különböző  $D_{h,k}$ -ből származtak, közös pontjuk nincs.

A  $D_{h,k}$ -ban a  $\varphi$  ingadozása nyilván  $< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4}$ .<sup>1</sup> A  $D''_{h,k}$ -t belülről határoló kontinuumokon (ha ilyenek vannak)  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ .

A  $D''_{h,k}$ -t határoló főkontinuumon  $K_1(D''_{h,k})$ -án  $\varphi$  értéke más is lehet, mint  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ .

Ha  $K_1(D''_{h,k})$ -án a  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ , tartsuk meg a  $D''_{h,k}$ -át és nevezzük  $D''_{h,k}$ -nak.

Ha a  $K_1(D''_{h,k})$  pontjain  $\varphi$  értéke nemcsak  $\varphi_h$  és  $\varphi_{h+1}$ , akkor a  $K_1(D''_{h,k})$  ama pontjai, a melyeken  $\varphi$  értéke sem  $\varphi_h$ , sem  $\varphi_{h+1}$ , nyilván a  $K(P)$  pontjai.

A  $K(P)$  e pontjainak egy elég kis közelébe  $K_1(D''_{h,k})$ -nak a  $B(P)$ -be pontjai nem eshetnek, mert különben e pontokra nézve  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$  volna. Így tehát a  $K_1(D''_{h,k})$  említett pontjaiból álló idom a  $K(P)$  bizonyos darabjaiból áll; e darabok végein  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ .

Vonjunk egy ily darab egy pontjából egy más vagy ugyanazon ily darab egy pontjáig egy egyszerű lánczot, a mely végeitől eltekintve a  $D''_{h,k}$ -ba esik. E láncz s a  $K(P)$  ama két darabjának bármelyike, a melyekre a  $K(P)$  a láncz két vége által bomlik, egy egyszerűen zárt lánczot alkot. A láncz úgy is vehető fel, hogy az egyik egyszerűen zárt láncz által bezárt sokszögbe egy a  $D''_{h,k}$ -t belülről határoló kontinuum se essék.

Lehetséges, hogy e sokszögben a  $\varphi$  ingadozása  $< \frac{[\varphi]}{4p}$ . Csatoljuk ekkor a sokszög belső pontjait a  $D''_{h,k}$ -hoz. Minden

<sup>1</sup> Ugyanis ez az ingadozás legfeljebb  $\frac{[\varphi]}{p} + \frac{[\varphi]}{2p}$ , mert  $\varphi$  minimuma a  $D''_{h,k}$ -n és homlokzatán  $\varphi_h - \frac{[\varphi]}{4p}$ -nél nem kisebb, maximuma pedig  $\varphi_{h+1} + \frac{[\varphi]}{4p}$ -nél nem nagyobb és

$$\frac{[\varphi]}{p} < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{[\varphi]}{p} = \varphi_{h+1} - \varphi_h.$$

ilyen sokszöggel így járva el, egy a  $D''_{h,k}$ -t tartalmazó  $D'''_{h,k}$  tartományt nyerünk, a mely nyilván olyasféle, mint a 2. alatti  $D''$ . Belső kontinuumai a  $D''_{h,k}$  kontinuumai.

A  $D'''_{h,k}$  főkontinuum a legyen  $K_1(D'''_{h,k})$ .  $K_1(D'''_{h,k})$  a  $K(P)$ -nek csak véges számú oly darabját tartalmazza, hogy a darabok akármely pontja elég kis közelébe a  $K_1(D'''_{h,k})$ -nak csak a  $K(P)$ -re esnek pontjai.

Ugyanis, ha végtelen sok ily darab lenne, kiválasztható volna e daraboknak egy  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , sora, úgy, hogy a  $K(P)$  egy bizonyos irányú befutásánál a darabok cirkuláris sorrendje a felirt. A darabok hossza és a szomszédosok egymástól való távolsága az  $n$ -nőttével nyilván határtalanul fogy s e darabok végre mind a  $K(P)$ -t tevő négy távolság egyikén vannak. Legyen az  $a_n$  két vége a  $K(P)$  befutásának sorrendjében  $A'_n, A''_n$ . Az  $a_n$  végein  $\varphi$  értéke vagy  $\varphi_n$  vagy  $\varphi_{n+1}$ , elég nagy  $n$ -től kezdve tehát az érték mindig  $\varphi_n$  vagy  $\varphi_{n+1}$ . Legyen  $\varphi_n$ .

Legyen  $A_n$  az  $a_n$  egy pontja.  $A_n$  és  $A_{n+1}$  egy különben a  $D'''_{h,k}$ -ba eső oly egyszerű  $L_n$  lánczszal köthető össze, hogy a láncz és az  $\overline{A_n A_{n+1}}$  által alkotott egyszerűen zárt láncz által képzett  $a_n$  idomba a  $D'''_{h,k}$ -nak egy belső kontinuum a se essék. Az  $L_n$ -ek még nyilván úgy is vehetők fel, hogy az  $a_n$ -eknek kettenként közös pontjuk nincs.

Legyen  $a'_n$  az az idom, a mely áll mindama pontjaiból az  $a_n$ -nek, a melyek az  $L_n$ -ből kiindul, egyébként  $a_n$ -be eső  $K_1(D'''_{h,k})$ -t nem metsző lánczokon vannak.  $a'_n$  nyilván egyszerűen összefüggő. Homlokzata

$$L_n + \overline{A_n A''_n} + \overline{A'_{n+1} A_{n+1}}$$

minden pontjából és a  $K_1(D'''_{h,k})$  bizonyos pontjaiból áll.

Legyen  $\theta_n$  egy oly pozitív szám, hogy ha  $\overline{AB} < \theta_n$ ,

$$|\varphi(A) - \varphi(B)| < \frac{1}{n}.$$

A 3. a) szerint szerkeszthető egy  $L'_n$  egyszerű láncz, a mely  $\overline{A_n A''_n}$  egy  $B''_n$  pontjától  $\overline{A'_{n+1} A_{n+1}}$  egy  $B'_{n+1}$  pontjáig megy, úgy, hogy csak végei nem esnek az  $a'_n$ -be és hogy az  $L_n, \overline{A_n B''_n}, L'_n, \overline{B'_{n+1} A'_{n+1}}$  egyszerű láncz által határolt sokszöget és kerü-



letét az  $\alpha'_n$ -ből elvéve, a maradék s e maradék homlokozata olyan, hogy bármely pontja az  $L'_n$  és a  $K_1(D''_{h,k})$ -nak  $\alpha'_n$ -be eső részétől  $\theta_n$ -nél nincs messzebb.

A  $K_1(D''_{h,k})$   $\alpha'_n$ -be eső pontjairaz néve  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ . Az  $L'_n$  lánczon  $\varphi$  értéke tehát a

$$\left(\varphi_h - \frac{1}{n}, \varphi_h + \frac{1}{n}\right), \left(\varphi_{h+1} - \frac{1}{n}, \varphi_{h+1} + \frac{1}{n}\right)$$

intervallumok egyikébe esik. Ámde  $L'_n$ -en  $\varphi$  folytonos és  $L'_n$  végein a  $\varphi$  értéke az első intervallumba esik. Azaz  $L'_n$  bármely  $C_n$  pontjára nézve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(C_n) = \varphi_h;$$

s ez áll a  $\overline{B'_n B'_{n+1}}$  pontjaira is. Azaz áll az  $L'_n + \overline{B'_n B'_{n+1}}$  egyszerűen zárt láncra is.

E zárt lánc által bezárt tartománynak  $\varphi$  ingadozása  $\geq \frac{[\varphi]}{4p}$  volna, de ez a 6. szerint lehetetlen.

Így tehát a  $K_1(D''_{h,k})$  csakugyan csak véges számú említett sajátságú darabját tartalmazhatja a  $K(P)$ -nek.

A  $K_1(D''_{h,k})$ -nak e darabokon kívüli pontjaiból álló idom nyilván deriváltja a  $K_1(D''_{h,k})$ ,  $B(P)$ -be eső pontjainak. Ez az idom nyilván véges számú egymástól elválasztott kontinuumból áll, a melyeken  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ .<sup>1</sup>

Jelölje  $(h, k)$  a mindakétféleségű  $D''_{h,k}$  homlokozata  $B(P)$ -be eső pontjainak a deriváltját,  $(h, k)$  tehát véges számú egymástól elválasztott kontinuumból áll. E kontinuumok mindegyikén  $\varphi$  értéke  $\varphi_h$  vagy  $\varphi_{h+1}$ . Továbbá egy-egy ily kontinuumon a fősegédétel szerint nyilván  $\phi$  és  $\chi$  értékei (az illető kontinuumtól függő) állandók.

$(h, k)$  továbbá, mint homlokozat pontjaiból álló idom sehol sem sűrű a  $P$ -ben.  $h$  és  $k$ -nak minden lehetséges értéket adva, jelölje  $(\varphi)$  az összes  $(h, k)$  idomok egyesítését.

<sup>1</sup> Előfordulhat, hogy az összes ily kontinuumoknak a  $K(P)$ -vel csak egy-egy pontjuk közös. Külömben  $K(P)$  és egy ily kontinuum közös része egy akármilyen a  $K(P)$ -t nem kimerítő zárt idom lehet.

( $\varphi$ ) tehát véges számú egymástól elválasztott kontinuumból áll. Minden ily kontinuumon  $\varphi$  értéke valamely  $\varphi_n$ , míg  $\psi$  és  $\chi$  állandók.<sup>1</sup> ( $\varphi$ ) továbbá sehol sem sűrű a  $P$ -ben.

$\varphi$ -ből kiindulva  $[\varphi]$  és  $p$  segítségével ( $\varphi$ ) nyeretett.  $\psi$  és  $\chi$  is variabilisnak tételeztetvén fel, legyenek  $[\psi]$  és  $[\chi]$ ,  $q$  és  $r$ , ( $\psi$ ) és ( $\chi$ ) rendre a  $[\varphi]$ ,  $p$ , ( $\varphi$ ) analogonjai.

( $\varphi$ ) + ( $\psi$ ) + ( $\chi$ ) tehát véges számú egymástól elválasztott kontinuumból áll. Egy-egy ily kontinuumon a  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  állandók<sup>2</sup> és ( $\varphi$ ) + ( $\psi$ ) + ( $\chi$ ) sehol sem sűrű a  $P$ -ben.

Álljon a ( $\varphi$ ) + ( $\psi$ ) + ( $\chi$ ) a  $k_1, \dots, k_j, \dots, k_s$  egymástól elválasztott kontinuumokból. A  $k_j$  a  $B(P)$ -t véges számú vagy megszámlálható sok tartományra bontja. Mivel  $k_j$ -n  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  állandók, e tartományok között csak véges számú olyan lehet, a melyeken  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  ingadozása  $\frac{[\varphi]}{4ps}$ ,  $\frac{[\psi]}{4qs}$ ,  $\frac{[\chi]}{4rs}$ -nél rendre nagyobb.<sup>3</sup>

Csatoljuk a többi tartományt és homlokzataikat a  $k_j$ -hez. Legyen  $k'_j$  az így nyert idom.  $k'_j$  nyilván egy kontinuum és a  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  ingadozása rajta  $\leq \frac{[\varphi]}{2ps}$ ,  $\frac{[\psi]}{2qs}$ ,  $\frac{[\chi]}{2rs}$ .

<sup>1</sup> Egy a  $(h, k)$  idomhoz való kontinuum egyesülhet például egy a  $(h+1, k)$  idomhoz való kontinuummal. Mindkét kontinuumon  $\varphi$  értéke nyilván  $\varphi_{h+1}$  s egyesítésükön  $\psi$  és  $\chi$  csak két-két értékkel bírhat, így az 5. szerint  $\psi$  és  $\chi$  állandók az egyesítésükön.

<sup>2</sup> ( $\varphi$ ) néhány kontinuum a ( $\psi$ ) néhány kontinuumával egyesülhet, s ez az új kontinuum a ( $\chi$ ) néhány kontinuumával egyesülhet. Az 5. szerint  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  konstansok ezen az egyesülésen.

<sup>3</sup> Legyen  $\xi$  a  $\varphi$ -nek a  $k_j$  pontjaira felvett állandó értéke. Legyenek  $D_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  a  $k_j$  által  $B(P)$ -ben meghatározott tartományok. Ha  $A_n$  a  $H(D_n)$  egy tetszés szerinti pontja, akkor

$$\lim \varphi(A_n) = \xi, (n = \infty).$$

Állításunk nyilvánvaló, ha a  $D_n$ -ek közt csak véges számú az olyan, a melyre  $H(D_n)$  nem áll kizárólag a  $k_j$  pontjaiból. Ellenkező esetben a  $H(D_n)$   $k_j$ -hez való pontjai a  $K(P)$  egyetlen egy darabjának a pontjai. E darab végein  $\varphi$  értéke  $\xi$  lévén s a darabok hossza az  $n$  nöttével zérus felé konvergálván, állításunk helyessége ez esetben is nyilvánvaló. A 6. segéd-tétel tehát alkalmazható.

A  $k'_1 + \dots + k'_j + \dots + k'_s$  idom a következő sajátságokkal bír.

Először is ez az idom a  $k'_j$  idomok néhányából áll, a melyek egymástól el vannak választva.

Ugyanis nyilvánvaló, hogy  $k'_j, j \geq 2$  egy a  $k_1$  által a  $B(P)$ -ben meghatározott tartományba (s e tartomány homlokzatára) esik. Hagyjuk el a  $k'_2, \dots, k'_s$  sorból azokat, a mely olyan a  $k_1$  által meghatározott tartományban van, a melyet és homlokzatát a  $k'_j$  képezése végett  $k_1$ -hez csatoltunk.

Legyenek  $k'_{i_1}, \dots, k'_{i_r}$ , a  $k'_2 \dots k'_s$ -ből így az eredeti sorrendben megmaradók. Ugyanigy járva el a  $k'_{i_2} \dots k'_{i_r}$   $k_1$  sorral, véges számú lépés után egy oly  $k'_{i_1}, \dots, k'_{i_v}$  sorhoz jutunk, hogy az  $i_1, \dots, i_v$  számok egy fogyó értéksort alkotnak.  $k'_{i_1}, \dots, k'_{i_v}$  az állított sajátságú  $k'_j$  idomok. Legyenek jelzést változtatva  $k^{(1)}, \dots, k^{(j)}, \dots, k^{(v)}$ .

Másodszor  $k^{(1)} + \dots + k^{(j)} + \dots + k^{(v)}$  nem tölti ki a  $P$ -t. Ugyanis  $k^{(j)}$  legfeljebb  $s$  számú  $k'_j$  egyesülése és így rajta a  $\varphi$  ingadozása  $\leq \frac{[\varphi]}{p}$  azaz  $< \frac{\delta}{2}$ . Ha  $P$  ki lenne töltve, csak egyetlen egy  $k^{(s)}$  volna, tehát a  $\varphi$  ingadozása  $P$ -ben  $< \frac{\delta}{2}$  lenne, a mi, ha  $\delta$  elég kicsi ( $< 2[\varphi]$ ), ellenmondás.

Harmadszor világos, hogy a  $B(P)$  e kontinuumok által véges számú tartományra bomlik.

Negyedszer e tartományok mindegyikében  $\varphi, \psi, \chi$  ingadozásai mind kisebbek  $\delta$ -nál.

Mert már a  $(\varphi)$ , illetve a  $(\psi), (\chi)$  bontja a  $B(P)$ -t oly véges vagy megszámlálható sokaságot alkotó tartományra, a melyeken  $\varphi$ , illetve  $\psi, \chi$  ingadozása  $< \delta$ .  $(\varphi) + (\psi) + (\chi)$  pedig a  $k^{(1)} + \dots + k^{(j)} + \dots + k^{(v)}$  pontjaiból áll, úgy, hogy a kérdéses tartományok bármelyike benn van egy a  $(\varphi)$ , egy a  $(\psi)$ , egy a  $(\chi)$  által meghatározott tartományban s így benne az ingadozás annál inkább kisebb  $\delta$ -nál.

A  $k$  által meghatározott tartományok háromfélék.

Először a tartomány homlokzatához a  $K(P)$ -nek egy és csak egy nem a  $k$  -hez való darabja tartozik (a két vég, a melyek egybeesők is lehetnek, nem való a darabhoz).

Másodszor a tartomány olyan, hogy homlokzatának minden pontja a  $k$  pontja.

Harmadszor  $k$  a  $B(P)$ -be esik és a tartomány homlokzatának  $K(P)$  része. Ezek után szerkeszthetjük a  $\Sigma L$ -et alkotó  $L$  lánczokat.

Legyen  $\nu$  egy olyan pozitív szám, a mely kisebb, mint bármely két  $k$  egymástól való távolának a negyede és  $\nu$  még olyan is legyen, hogy ha csak  $\overline{AB} < \nu$ ,

$$|\varphi(A) - \varphi(B)|, |\psi(A) - \psi(B)|, |\chi(A) - \chi(B)|$$

mind kisebbek legyenek  $\frac{\delta}{2}$ -nél.

Minden elsőfajta tartományban az  $L$  az legyen a  $K(P)$  említett darabjához, a tartományhoz és a fenti  $\nu$ -hez, a mi a 3.  $\alpha$ -ban  $L$  az  $M$  és az  $E$ -hez és a  $\nu$ -hez.

Minden második féleségű tartományban az legyen az  $L$  a tartományhoz és a  $\nu$ -hez, a mi a 3.  $\beta$ -ban  $L$  az  $E$ -hez és a  $\nu$ -hez.

A harmadik féleségű tartományban az legyen  $L$  a  $k^{(j)}$  és  $\nu$ -hez, a mi a 3.  $\gamma$ -ban  $L$  a  $k$  és  $\nu$ -hez.

*Az összes  $k$  idomokhoz való összes tartományokban szerkesztett  $L$  lánczok  $\Sigma L$  összessége a jelzett sajátágú  $\Sigma L$ .*

Ugyanis nyilván véges számú tartomány és így véges számú  $L$  van, az  $L$ -ek közül bármely kettőnek a  $\nu$ -re vonatkozó sajátág miatt közös pontja nem lehet. Továbbá egy-egy ily láncz vagy egyszerűen zárt és a  $B(P)$ -be esik, vagy egyszerű, a melynek végei a  $K(P)$ -n vannak, míg egyéb pontjai a  $B(P)$ -be esnek.

Továbbá: a  $\Sigma L$  által a  $B(P)$ -ben meghatározott tartományok nyilván kétfélék. Először olyanok, hogy egy  $k^{(j)}$  sem esik beléjük, másodszor olyanok, hogy egy-egy ily tartományba egy és csak egy  $k$  pontjai esnek.

Az első esetben a tartomány egy a  $k^{(1)} + \dots + k^{(s)}$  által meghatározott tartományba esik s így a  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  ingadozása benne  $< \delta$ . A második esetben a tartomány a  $k$   $BP$ -be eső részének és néhány más idomnak az egyesítéséből áll. Ezek a  $G$  idomok a  $k^{(j)}$  által  $B(P)$ -ben meghatározott tartományokhoz olyasfélék, mint a 3.  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ )-ban a  $G$ -félék. Mivel  $k^{(j)}$ -n az

ingadozás  $< \frac{\delta}{2}$  és a  $G$ -ben az ingadozás  $< \frac{\delta}{4}$ , és még mivel a  $G$  homlokzata a  $k^{(j)}$  pontjait is tartalmazza, a tartományban  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  ingadozása  $< \delta$ .

*Most áttérünk a fősegédtétel bizonyítására.*

Jelöljük  $F$ -fel a fősegédtétel  $D$  tartományához való egyszerűen összefüggő tartományt.

A  $k$  háromféle lehet. Először is a  $H(D) - H(F)$  pontjaiból állhat. Másodszor a  $k$  olyan  $H(F)$  pontjaiból állhat, a mely  $H(F)$  nem minden pontjára bir a  $\varphi$   $\xi$  értékkel. Harmadszor a  $k$  oly  $H(F)$  pontjaiból állhat, a mely  $H(F)$  minden pontjára nézve  $\varphi = \xi$ .

Legyen az első esetben  $k_1$  a  $H(D) - H(F)$  ama pontjainak az összességéből álló idom, a mely összesség a  $k$ -val egy kontinuumot alkot. A második esetben legyen  $k_1$  a  $H(F)$  mindama pontjaiból álló idom, a melyekre nézve  $\varphi = \xi$  és a melyek  $k$ -val egy kontinuumot alkotnak. A harmadik esetben legyen  $k_1 \equiv H(F)$ .

Kimutatjuk, hogy a  $T = 0$  szükséges feltétele megvalósulván, a  $k_1$  pontjaira nézve  $\psi$  (és épp úgy  $\chi$ ) konstans. Feltesszük, hogy a  $D$  pontjaira nézve  $\varphi > \xi$ , — a bizonyítás hasonló volna a  $\varphi < \xi$  esetben.

*I. segédtétel.* «A felszínmérés elméletéhez» című a Matematikai és Természettudományi Értesítő 1913. évfolyama (XXXI. kötete) 306—318. lapján megjelent munkámban kimutattam a következőket.

Legyen  $G$  egy oly egyszerűen összefüggő tartomány, a melynek homlokzata két részre bontható úgy, hogy e részek egyike egy egyszerű  $L$  láncz a két vége elhagytaival, a másik rész  $Q$  pedig olyan, hogy  $L$  és  $Q$ -nak csak az  $L$  két  $A$  és  $B$  vége a közös határpontja.

A  $G$  még olyan is legyen, hogy a  $G$ -hez való egyszerű tartomány homlokzata az  $L$ -et tartalmazza.

Egy ily  $G$  a  $F$ -be esvén, legyen a  $Q$  pontjaira nézve  $\varphi = \xi$ .  $\psi(A) < \psi(B)$  legyen. Továbbá, ha az  $L$  két végső oldalai  $AA_1$ ,  $B_1B$ , az  $AA_1$  minden pontjára nézve  $\psi$  értéke kisebb legyen, mint a  $\psi$  értéke  $B_1B$  bármely pontjára. Továbbá az  $L$ -nek  $A_1$  és  $B_1$  közé eső része pontjaira nézve a  $\varphi$  értéke  $> \xi$  legyen.

Ekkor létezik egy  $(\varphi, \psi, \xi, \xi_1, \eta_1, \eta_2)$ .<sup>1</sup>

II. *segéd-tétel.* Legyen  $(k)$  egy határolt kontinuum. Legyen  $((k), \infty)$  mindama pontokból álló idom jele, a melyek a sík végtelen távoli pontjával a  $(k)$  metszése nélkül összeköthetők. Legyen  $L$  egy oly egyszerű láncz, a melynek  $A$  és  $B$  végei a  $(k)$  pontjai, míg az  $L$  egyéb pontjai a  $((k), \infty)$  pontjai.

$(k) + L$  nyilván egy határolt kontinuum. A sík mindama pontjaiból álló idom, a melyek nem valók a  $(k) + (l) + ((k), \infty)$ -hez, nyilván oly egyszerűen összefüggő tartományokból áll, a melyeknek homlokzatai  $(k) + l$  pontjaiból állanak. Ezek között egy és csak egy van, a melynek homlokzata az  $L$  minden pontját tartalmazza.

A hozzávaló egyszerű tartomány homlokzatának  $L$  nyilván a része.

Tegyük fel, hogy  $(k)$  a  $H(D)$  pontjaiból áll. Ha  $A', B'$  a  $(k)$  két pontja, felvehető a  $D$  két oly  $A'', B''$  pontja, hogy  $\overline{A'A''}$ ,  $\overline{B''B'}$  egymást nem metszi. Vonjunk az  $A''$ -tól a  $B''$ -ig egy a  $D$ -be eső egyszerű lánczot. Legyen  $A_1$  az utolsó pontja az  $\overline{A'A''}$ -en,  $B_1$  az első pontja a  $\overline{B''B'}$ -en. Legyen  $L'$  az  $A_1$  és  $B_1$  közé eső darabja. Fussuk be  $\overline{A'A''}$ -et  $A'$ -től  $A''$  felé, legyen  $A$  a  $(k)$  utolsó pontja az  $\overline{A'A''}$ -on, fussuk be  $\overline{B''B'}$ -et  $B_1$ -től  $B'$  felé, legyen  $B$  a  $(k)$  első pontja a  $\overline{B''B'}$ -en,  $\overline{AA_1}$  az  $L'$  és a  $\overline{B_1B}$  egy egyszerű  $L$  lánczot alkotnak. *Álljon fenn a  $T = 0$  szükséges feltétele.*

*Ha bármi is az  $A', B'$  és ha elég kis  $A'A'', B'B''$ -hez, az  $L$  a  $((k), \infty)$ -be esik, akkor a  $(k)$  pontjaira nézve  $\phi$  állandó.*

Ugyanis, ha a  $(k)$   $A', B'$  pontjaira nézve  $\phi(A') < \phi(B')$  volna, az  $A'', B''$  kellő felvételével  $\phi$  értéke az  $\overline{AA_1}$  pontjaira nézve kisebb lenne, mint a  $\overline{B_1B}$  pontjaira s így az  $L$  az I. segéd-tételnek eleget téve  $T > 0$  volna.

Az elsőfajú  $k_1$  eleget tesz a II.-nek. Ugyanis nyilván fel-

<sup>1</sup> Itt  $\xi_1$  oly érték, a mely a  $\xi$  és a  $\varphi$ -nek az  $L$   $A_1B_1$  közé eső részén felvett minimuma (e minimum  $> \xi$ ) közé esik. Továbbá

$$f < \eta_1 < \eta_2 < g;$$

itt  $f$  a  $\psi$  értékeinek  $\overline{AA_1}$ -en felvett maximuma,  $g$  a  $\psi$  értékeinek  $\overline{B_1B}$ -n felvett minimuma.

vehető egy a  $D$ -be eső egyszerűen zárt  $N$  láncz, úgy, hogy  $k_1$  az  $N$  által bezárt ( $N$ ) idomba esik. Az  $L'$  bármely pontja pedig az  $N$  bármely pontjával a  $D$ -ben összeköthető, azaz összeköthetők a  $H(D)$  s annál inkább a  $k_1$  metszése nélkül. Az  $L'$  s így  $L$  is a  $(k_1, \infty)$ -be esik.

A  $k_1$  második faja is eleget tesz a II.-nek. Ugyanis ekkor felvehető egy egyszerűen zárt láncz  $N$ , a melynek a  $P$ -be eső pontjai vagy a  $D$  pontjai, vagy a  $K(P)$  oly pontjai, a melyekre nézve  $\varphi \neq \xi$ , úgy, hogy az  $e$  láncz által bezárt idomba a  $k_1$  beléessék. Itt is összeköthető  $L'$  akármely pontja és az  $N$  egy  $D$ -be eső pontja a  $D$ -be eső lánczsal.

Legyen ezután  $k_1$  a harmadik féleségű. Jelölje  $E$  a  $D$ -hez való egyszerű tartományt. Kimutatjuk, hogy a  $H(E)$  pontjaira nézve  $\phi$  állandó (a  $T=0$  szükséges feltételének megvalósulta esetén.)

Legyen ugyanis  $U$  és  $V$  a  $H(E)$  két oly pontja, hogy  $\phi(U) \neq \phi(V)$ . Zárjuk be az  $U$  és  $V$ -t egy-egy körbe, úgy, hogy  $e$  két körnek közös pontja ne legyen és ha  $U'$  az  $U$ ,  $V'$  a  $V$  körének bármely pontja  $\phi(U') - \phi(V')$  ugyanoly jelű legyen, mint  $\phi(U) - \phi(V)$ , (a  $P$ -be eső  $U'$ ,  $V'$ -re).

Vegyük fel a  $U$  körének egy  $D$ -hez való  $U_1$  és egy a  $(H(E), \infty)$ -hez való  $U_2$  pontját. Analog jelentésűek legyenek  $V_1$  és  $V_2$  a  $V$ -hez.

Kössük össze  $U_1$  és  $V_1$ -et a  $D$ -be eső egyszerű lánczsal, legyen  $U'$  e láncz utolsó pontja az  $\overline{U_1 U_2}$ -n,  $V'$  az első pontja a  $\overline{V_1 V_2}$ -n. Legyen  $S$  a láncznak  $U'$  és  $V'$  közé eső része. Kössük össze  $U_2$ ,  $V_2$ -t a  $(H(E), \infty)$ -be eső egyszerű lánczsal e lánczot  $V_2$ -től  $U_2$  felé befutva, legyen  $V''$  az utolsó pontja a  $\overline{V_1 V_2}$ -n,  $U''$  az első pontja az  $\overline{U_1 U_2}$ -n. Legyen  $R$  a láncznak  $V''$ ,  $U''$  közé eső része.

Az  $\overline{U'' U'}$ ,  $S$ ,  $V' V''$ ,  $R$  nyilván egy egyszerűen zárt  $W$  lánczot alkot. Legyen  $(W)$  az általa bezárt idom. Nyilván minden oly láncz, a mely az  $S$  egy pontját az  $R$  egy pontjával összeköti s e végei kivételével a  $(W)$ -ba esik, metszi a  $H(E)$ -t.

Így tehát nyilván van egy az  $(W) + W$ -ba eső  $(k)$ , a  $H(E)$  pontjaiból álló kontinuum.  $(k)$ -nak  $W$ -ra esnek pontjai, de e pontok nyilván csak  $\overline{U' U''}$ -en és  $\overline{V' V''}$ -en lehetnek és  $(k)$ -nak

nyilván e távolságok mindegyikén van is egy  $U^{(1)}$ , illetve  $V^{(1)}$  pontja.

( $k$ )-ra nézve nyilván áll a II., mert az  $L'$  bármely pontja az  $R$  bármely pontjával a  $D$ -ben, tehát a ( $k$ ) metszése nélkül összeköthető.

Így tehát  $\phi(U^{(1)}) = \phi(V^{(1)})$ . A fenti két kör sugarait elég kicsinyre véve

$$|\phi(U) - \phi(U^{(1)})|, \quad |\phi(V) - \phi(V^{(1)})|$$

pedig tetszés szerinti kicsinyek lehetnek. Azaz  $\phi(U) = \phi(V)$ .

Legyen  $Z$  a harmadik féleségű  $k_1 \equiv H(F)$ -nek egy nem  $H(E)$ -hez való pontja, a melyre  $U$  a  $H(F)$  pontja lévén,  $\phi(Z) \neq \phi(U)$  volna.

Vegyünk fel egy az  $E$ -be eső egyszerűen zárt  $N$  lánczot, úgy, hogy az általa bezárt ( $N$ )-be  $Z$  beléessék. Nyilván van legalább egy a  $H(F)$  pontjaiból álló ( $k$ ) kontinuum, a melynek  $Z$  a pontja, a mely az ( $N$ ) +  $N$ -be esik, és a melynek az  $N$ -en van legalább egy  $Y$  pontja. ( $k$ )-ra is alkalmazható a II., mert a  $D$ -nek egy ( $N$ )-en kívüli pontját véve fel, e pont s a  $L'$  bármely pontja a  $D$ -ben összeköthető. Tehát

$$\phi(Z) = \phi(Y),$$

ámde az  $N$  kellő felvételével a 3.  $\beta$ ) szerint

$$|\phi(Y) - \phi(U)|$$

tetszés szerinti kicsiny lehet, azaz

$$\phi(Z) = \phi(U).$$

Így a fősegéd-tétel mindahárom esetben ki van mutatva.

Végül még kiemelhető, hogy a fősegéd-tételben a  $k$ -ra vonatkozó állításnak minden  $k$ -ra való megvalósulása a  $T=0$  szükséges és elégséges feltétele.



## A MAGYAR ADRIA EGYESÜLET TENGERKUTATÓ BIZOTTSÁGÁNAK I. ÉS II. ADRIA-TENGERI EXPEDICZIÓJÁN VÉGZETT HYDROGRAPHIAI MEGFIGYELÉSEK ÉS AZOKNAK EREDMÉNYE.

KOCH NÁNDOR-tól.

Az 1910-ben Budapesten megalakult Magyar Adria Egyesület az Adria tudományos kutatását is fölvette programjába. Az egyesületnek az a törekvése, hogy az Adria rendszeres kutatásában az olasz, osztrák és horvát tengerkutatók mellett a magyar oceanografusoknak is helyet biztosítson, 1913 őszén valósult meg, a mikor két hónapi gondos előkészítés után október 10.-én útrakelt Fiuméből az első magyar Adria-expediczió.

Az Adria modern szellemben való rendszeres kutatása 1911 óta folyik, a mikor az 1910 pünkösdjén Velenczében tartott konferencián megalakult olasz-osztrák nemzetközi bizottság megállapodásához híven olasz részről a *Comitato talassografico*, osztrák részről pedig a *Verein zur Förderung der naturwissenschaftlichen Erforschung der Adria* megbízottjai megkezdték a nyílt Adria oceanografiai kutatását. Az olasz és az osztrák expedíciók munkaterve csak a nyílt Adria medencéjének átkutatását ölelte föl, de nem érintette a magyar-horvát tengermellék és a dalmát partvidék szigetvilágának tengerrészeit. Ezeknek a tengerrészeknek az átvizsgálására vállalkozott a Magyar Adria Egyesület és vele egyidőben a zágrábi délszláv Akadémia. A horvát expedíció munkaterületül a «Quarnero-medencze» néven összefoglalt tengerrészeket választotta, míg a magyar expedíció a Quarnero-medenczén kívül a dalmát szigetek közötti csatornák átvizsgálását is fölvette munkaprogramjába és néhány, a nyílt Adriát érintő megfigyelést is iktatott a tervezetbe.

A Magyar Adria Egyesület Tengerkutató Bizottsága, a mely a munkatervet kidolgozta, az olasz-osztrák nemzetközi bizottság megállapodásaihoz alkalmazkodva, a munkaterületül választott tengerrészeknek keresztszelvények mentén való átkutatását határozta el és megállapodott abban is, hogy a kutatásokat a kijelölt szelvények mentén — a mennyire a körülmények megengedik — évszakonként megismétli, hogy így a klimatikus tényezőknek a tenger fizikai, vegytani és biológiai viszonyaira való hatását figyelemmel kísérhesse. A Magyar Adria Egyesület Tengerkutató Bizottsága eddig két ilyen «időszakos út» tett meg, mind a két alkalommal az osztrák bizottság által már tíz úton igénybevett és a tengerkutatás céljaira átalakított 560 tonnás hadihajón, a «Najade»-n. Az első időszakos út 1913 október 10-től 31-ig, a második 1914 április 13-tól május 9-ig tartott.

A magyar expedíció mind a két időszakos útján egységes terv szerint a következő tengerrészekben végzett kutatásokat: Fiumei öböl, Canale di Farasina, Canale di Mezzo (Corsia), Canale Maltempo, Can. di Morlacca (Montagna), Novigradi öböl, Quarnerolo, Quarnero, Canale di Mezzo, Canale di Zara, Can. di Spalato, Can. della Brazza, Can. di Lesina, Can. di Lissa, Can. di Curzola, Can. di Narenta, Can. di Lagosta és Can. di Meleda. Ezen kívül a Pomo, Busi, Pelagosa szigeteket és az Adria déli medencéjének legmélyebb pontját érintő útvonal mentén a nyílt Adrián is történtek megfigyelések, éppen úgy, mint a Gravosatól Teodóig terjedő útvonal mentén. Az első időszakos úton a magyar bizottság az osztrák bizottság fölkérésére az olasz és az osztrák szelvények között három nyílt adriai keresztszelvényt is programjába iktatott, de ezeknek az átkutatását a kedvezőtlen időjárás meggátolta, úgy hogy a bizottság ezeket, az olasz-osztrák megfigyeléseket kiegészítő nyílt adriai kutatásokat a tulajdonképeni munkaterület általános átvizsgálásának befejezését követő időre halasztotta.

A két időszakos út munkaprogramja meteorológiai, biológiai és hydrográfiai megfigyeléseket ölelt föl. A három irányban történő vizsgálatok egymással szoros kapcsolatban, egymást kiegészítve folytak le.

A *hydrografiai megfigyelések* egyrészt a tenger felszíni vizének vizsgálatát, másrészt a tenger vizének függőleges irányban, a felszíntől a fenékgig való átkutatását czélozták. A Fiuméból való elindulástól a visszaérkezésig terjedő időnek minden órájában menetközben az úgynevezett *felszíni állomásokon* történtek megfigyelések, a melyek a felszínről merített víz hőmérsékletének méréséből és sótartalmának megállapításából állottak. Az előre megállapított szelvényeknek kijelölt pontjain, az úgynevezett *szelvényállomásokon* a hajó megállott és megtörtént a tengervíz függőleges irányban való átvizsgálása. A megfigyelések a szelvényállomásokon *mélységmérésből, fényhatármérésből, fenékiszapgyűjtésből* és végül a felszíntől a fenékgig az egymás alatt megszabott távolságban kijelölt vízrétegek *hőmérsékletének, sótartalmának és oldott oxigéntartalmának* méréséből állottak.

A *mélységmérés* egyszerű kézi mélységmérővel történt olyanformán, hogy a mérőkeréken (LJUNGMANN-féle mérőkerék) átfutó sodrony végén csüngő 2 kilogrammos ólomsúly leeresztése közben a sodronyt kézben tartva, annak meglazulása jelezte a súlynak a fenékre érkezését, a minek megtörténte után a mérőkerék számolólapján leolvastuk a mért mélységet. A mérőkerék pontossága és az a körülmény, hogy az aránylag csekély, 100 méternél kisebb mélységeknél a súlynak a fenékre érkezését biztosan meg lehetett állapítani, a számbavehető hibákat kizárta, úgy hogy a mélységmérésnek ez a módja a czélnak — a mely a vizoszlop átvizsgálásához szükséges mélységi adat megállapítása és nem a használatban levő nautikai térképek batimetrikus adatainak reambulációja volt — teljesen megfelelt.

A *fenékiszap gyűjtése* a LEGER-féle iszapkanállal történt, de a fenékkotrások alkalmával a kotróhálóval a felszínre hozott fenékiszapot is összegyűjtöttük, hogy így a tengerfenék talajának minőségét minél több iszappróba alapján állapíthassuk meg. Az alkohollal konzervált és jól záró gyűjtőüvegekbe zárt iszappróbákat a M. kir. Földtani Intézet vette át a megejtendő ásványtani és vegytani vizsgálatok czéljából.

A *fényhatármérés* (az átlátszóság mérése) a SECCHI-féle koronggal történt. Ezeket a megfigyeléseket azonban csak az első úton végeztük, akkor is korlátolt számban, a második úton

pedig teljesen mellőztük. Ezzel a primitív műszerrel való mérés ugyanis nem adhat megbízható és tudományos szempontból elfogadható adatokat, mert a megfigyelő egyéni becslésére van bízva annak a határnak a megállapítása, a mikor a tengerbe lesüllyedő korong eltűnik a szem elől.

A vízoszlop függőleges irányban való átvizsgálásakor a felszínről, továbbá az 5, 10, 20, 30, 40, 50, 75, 100 stb. méteres vízrétegből, illetőleg egy, a mért mélység fölött 1—2 méterrel fekvő legalsó vízrétegből vettünk vízpróbát. A felszínről egyszerű vízmerítő vödörrel, a felszín alatti vízrétegekből pedig a RICHARD- és az EKMAN-rendszerű vízmerítőkészülékekkel történt a víz próbamerítése, a hőmérséklet mérése pedig a RICHTER-féle átbillenő hőmérőkkel.<sup>1</sup> A sótartalom megállapítására mindegyik vízrétegből, az absorbeált oxigéntartalom megállapítására pedig a felszínről, egy-két középső vízrétegből és a legalsó vízrétegből vettünk próbát.

A sótartalom és az oldott oxigéntartalom meghatározása a hajó laboratóriumában még az expedíció tartama alatt megtörtént. Mind a két fajta vizsgálat titrimetrikus elemzési módszerrel ment végbe, mert a hajón gravimetrikus eljárások, az analitikai mérleggel való mérés nehézségeit tekintve, a megkívánt pontossággal úgyszólván kivihetetlenek.

A sótartalom meghatározására a KNUDSEN-féle módszert<sup>2</sup> használtuk, az észlelt hőmérsékletre és az O° C.-ra vonatkoztatott sűrűség kiszámítását a KNUDSEN-féle táblázatok<sup>3</sup> segítségével eszközöltük. A vízben oldott oxigénmennyiség meghatározása WINKLER LAJOS jodometrikus eljárásával<sup>4</sup> történt, azoknak

<sup>1</sup> A használt műszerek ismertetését l. LEIDENFROST GYULA: «Az első magyar Adria-expedíció» cz. közleményében (A Tenger, IV. évf. 71. l.).

<sup>2</sup> KNUDSEN, FORCH, SOERESSEN: Berichte ü. d. Konstantenbestimmungen zur Aufstellung der hydrographischen Tabellen. — Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr. 6. R. Naturvidensk.—math. Afd. Bd. 12. I. Kjöbenhavn 1902.

<sup>3</sup> KNUDSEN: Hydrographische Tabellen. Kopenhagen—Hamburg, 1901.

<sup>4</sup> WINKLER LAJOS: A vízben feloldott oxigén meghatározása. Math. és Természett. Ért. VI. kötet, 273. l. Budapest, 1888. — Ugyanez német nyelven: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. 6., p. 176—189. Budapest, 1889, és Berichte d. d. chem. Gesellsch. zu Berlin. Bd. XXI. p. 2843. (1888.)

a módosításoknak a figyelembevételével, a melyeket WINKLER a nitritek okozta zavaró befolyás csökkentésére ajánl.<sup>1</sup> Az 1000 cm<sup>3</sup> vízben 0°-nál és 760 mm. nyomásnál oldott oxigénmennyiségen kívül a Fox-féle táblázatok<sup>2</sup> segítségével kiszámítottuk azt is, hogy a mért oxigénmennyiség hány százaléka az észlelt hőmérséklet, chlortartalom és légnyoímás mellett a tengervíz telítő oxigénmennyiségnek.

A hydrográfiai megfigyelésekkel az első úton KORMOS TIVADAR kir. geologus, RÉTHLY ANTAL meteorologus, SZILBER JÓZSEF egyetemi tanársegéd és KOCH NÁNDOR főgimnáziumi tanár foglalkozott. A vegytani elemzéseket SZILBER és KOCH végezte. A második úton a hydrográfiai megfigyelők MAROS IMRE kir. geologus, MARCELL GYÖRGY kir. meteorologus, MAUCHA REZSŐ kir. asszistens és KOCH NÁNDOR voltak. Az elemzéseket MAUCHA és KOCH végezte.

A hydrográfiai megfigyelések száma az első úton 977 volt, ebből 45 mélységmérés, 18 fényhatármérés, 386 hőmérsékletmérés, 396 sótartalommeghatározás és 132 oxigéntartalommeghatározás. A második úton 1299 megfigyelés, és pedig 56 mélységmérés, 523 hőmérsékletmérés, 531 sótartalommeghatározás és 189 oxigéntartalommeghatározás történt.

\*

A vizsgált terület földrajzi alkotásának következményeképen az egymástól elkülönített tengerrészekben a víz hőmérsékletében és sótartalmában eltéréseket tapasztaltunk. Az a körülmény, hogy a parti hideg légáramlások nem egyenlő mértékben érik

---

WINKLER LAJOS: Az oxigéngáz oldhatósága vízben. Math. és Természett. Ért. VII. kötet, 323. l. Budapest, 1889. — Ugyanez német nyelven: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichté aus Ungarn, Bd. 7., p. 337—348. Budapest, 1890, és Berichte d. d. chem. Gesellsch. zu Berlin. Bd. XXII. p. 1764. (1889.)

<sup>1</sup> WINKLER: Über die Bestimmung des im Wasser gelösten Sauerstoffs. Zeitschr. f. anal. chem. LIII. Jahrgang, 11. Heft. p. 665. (1914.)

WINKLER: Über die Bestimmung des gelösten Sauerstoffs in verunreinigten Wässern. Zeitschr. für Unters. der Nahrungs- u. Genussmittel, sowie Gebrauchsgegenstände. Bd. XXIX. Heft. 3. p. 121. (1915.)

<sup>2</sup> Fox: On the coefficients of absorption of the atmospheric gases in distilled water and sea water. Part I: Nitrogen and oxigen. — Publications de circonstance No. 41. Copenhagen, 1907.

a szigetek közötti tengerrészeket, a víz hőmérsékletének ingadozásában nyert kifejezést, de nagy különbségeket okoztak hőmérsékletben és sótartalomban egyaránt a szárazföldről beömlő édesvizek és a tenger alatti források is és végül azok a lokális áramlások, a melyek a szigetek közötti csatornában észlelhetők.

A levegő hőmérsékletének megváltozása aránylag rövid idő alatt a víz hőmérsékletében tekintélyes változást okozhat, a minnek példáját a második úton láttuk, a mikor a Quarnerolo keleti felében, Veglia legdélibb csúcsánál egyik szelvényállomáson különböző időben ugyanazokat a megfigyeléseket végeztük. Az említett szelvényállomáson az első megfigyelést április 17.-én, a másodikat május 7.-én, tehát húsz nappal később végeztük. Az első alkalommal az erős bóra hatása alatt a levegő hőmérséklete  $10\cdot5^{\circ}$  volt, május 7.-én azonban már  $16\cdot3^{\circ}$ -ra emelkedett. Az  $5\cdot8^{\circ}$ -nyi különbség, a mely a levegő hőmérsékletében mutatkozott, a felszíni víz hőmérsékletében  $3\cdot07^{\circ}$  emelkedést okozott, de még az 50 méteres mélységben is közel  $1^{\circ}$  hőemelkedést idézett elő. Nagy változást jelentett a levegő hőmérsékletének emelkedése az oxigéntartalomban is, annál inkább, mert a légnyomás viszont tetemesen csökkent. Az első alkalommal a felszínen  $6\cdot12$ , az 50 méteres mélységben pedig  $6\cdot05$  cm<sup>3</sup> oxigént mértünk, míg május 7.-én a felszínen  $5\cdot99$ , az 50 méteres mélységben pedig  $6\cdot10$  cm<sup>3</sup> oxigént találtunk.

Ez a tapasztalás azt mutatja, hogy a vizsgált terület elzárt tengerrészeiben a tengervíz fizikai és vegytani viszonyaiban aránylag gyorsan áll be változás és így nagyon is megokolt az összehasonlításra alkalmas adatok nyerése szempontjából a hydrografiai megfigyelések idejének szűk határok közé szorítása. Munkatervezetünk erre a körülményre tekintettel volt és a hydrografiai megfigyelések idejét az út első felének első 7—10 napjára jelölte ki, de a kedvezőtlen időjárás ennek a kivitelét megakadályozta.

A két időszakos út megfigyelései a következő általános következtetésekre vezettek:

Az első út alkalmával a tenger vizét a lehülés stádiumában találtuk. A felszínen a víz hőmérséklete alacsonyabb volt, mint az alatta fekvő rétegekben. A lehülés azonban még nem

haladt nagyon előre, a mennyiben a Quarnero-medence tenger-részeiben a felszíni víz hőmérséklete átlagosan  $17-18^\circ$  között ingadozott, a déli tengerrészekben pedig, a hol a földrajzi szélesség és a melegebb vizü nyílt Adriával való érintkezés következtében a víz hőmérsékletét általában magasabbnak találtuk,  $19^\circ$  fölötti hőmérsékletet is mértünk és Cattaronál a felszíni víz hőmérséklete  $20.1^\circ$ -ban elérte a maximumot. Lépést tartva a hőmérséklettel, a felszíni víz sótartalma északról délnek haladva fokozatosan csökkent, a mely körülmény a sűrűség tekintetében meglehetősen egyöntetűséget teremtett. Ez a tapasztalás a mellett szól, hogy a vizsgált tengerrészekben igen élénk felszíni áramlások vannak.

A mélységi hőmérsékletben és a sótartalomban nagy ingadozásokat tapasztaltunk ugyan, de a felszín lehülésével együttjáró függőleges irányú convectionis áramlások nyomát úgyszólván mindenütt megtaláltuk. Átlag 50 méter mélységig ugyanis a vízrétegek hőmérsékletében csekély különbségeket találtunk és csak a mélyebb rétegekben mutatkozott nagyobb hőmérsékleti különbség, a legtöbb esetben tekintélyes csökkenésben. Az 50 méternél alacsonyabb mélységű pontokon a vízszlop a convectionis áramlásoknak hatása alatt a felszíntől a fenékig közel egyforma hőmérsékletet és sótartalmat mutatott. A fenékvíz hőmérséklete helyenkint, de különösen a Fiumei öbölben igen alacsony volt,  $11-13^\circ$  között ingadozott, sőt a Canale di Mezzo bejáratánál  $6.89^\circ$ -ra süllyedt le. A fenékvíznek alacsony hőmérséklete arra vall, hogy áramlások a fenéken alig vannak, vagy csak igen lassan történnek és akkor is természetesen a nyílt Adria medencéje felé, úgy hogy a partok közelében lehült és a fenékre süllyedt víz hőmérsékletében nagyobb emelkedés nem állhat be. Azokon a helyeken, a hol az átlagosnál alacsonyabb hőmérsékletűnek találtuk a fenék vizét, a magyarázatot abban az esetben, ha a hőmérséklet a sótartalom megfogyatkozásával járt együtt — tenger alatti források föltörésében kerestük. Ilyen esetekkel különösen a szigetek nyugoti partjai mellett találkoztunk, a hol a források a hosszanti törésvonalak mentén fakadnak.

Az absorbeált oxigéntartalom általában  $5-6 \text{ cm}^3$  között

ingadozott és a mért oxigénmennyiség sok esetben túlhaladta a telítés fokát. A tengervíz tehát a vizsgált tengerrészekben alaposan át volt szellőztetve, a mit érthetővé tesz az a körülmény, hogy a kisebb medenczék és csatornák víztömegéhez képest aránylag nagy felszínen történik a levegővel való érintkezés, másrészt a part felől jövő légáramlások következtében az aránylag csekély víztömegek alaposan keverednek a levegővel. Az a tapasztalat pedig, hogy a magasabb rétegekben (45—60 méterig) az oxigéntartalom közel egyforma, míg az alacsonyabb rétegekben (50—60 méter alatt) csökken, azt látszik bizonyítani, hogy az áramlások által megmozdított, fölkevert víztömeg vastagsága körülbelül 50—60 méter lehet, míg az ennél mélyebb rétegek vize kevés mozgást végez.

A Krka és a Narenta folyók medrében történt megfigyelések azt bizonyítják, hogy a tengervíz a folyók medrébe mélyen benyomul. A Narentában még Metkovicnál is, a hol a folyómeder magassága másfél méter a tenger színe fölött, a fenéken nyoma van a tengervíznek, Fortopusnál pedig  $0.20^{\circ}$  sótartalmú a folyó fenékvize. A Krka folyó lesülyedt medrébe még mélyebbre nyomul be a kevert víz, a melyet majdnem nyolcz mértföldnyire a torkolattól még ki lehetett mutatni a fenéken.

A második úton a tenger vizén a lassú fölmelegedés állapotát figyelhettük meg, de ez a fölmelegedés áprilisban még alig haladt előre és különösen nem a vizsgált terület északi részén, a hol a felszíni víz hőmérséklete  $11—13^{\circ}$  között ingadozott. A déli tengerrészekben azonban már a  $18^{\circ}$ -ot is megközelítette a felszíni víz hőmérséklete, jeléül annak, hogy a fölmelegedés itt gyorsabban halad előre, mint az északi tengerrészekben, a hol a május elején végzett megfigyelések alkalmával még mindig  $15^{\circ}$  alatti felszíni hőmérsékletet találtunk. Az őszi állapothoz viszonyítva a tengervíz mélységbeli hőmérsékletét és sótartalmát az egymás alatt következő rétegekben sokkal szűkebb határok között és szabályosabban ingadozónak találtuk. Attól a szabályosságtól, hogy a hőmérséklet rétegről-rétegre csökken, a sótartalom pedig emelkedik, csak helyenkint találtunk eltéréseket, viszont a legtöbb szelvényállomáson azt észleltük, hogy a vízoszlop egymás alatt következő rétegeinek hőmérsék-



letében és sótartalmában a különbség oly csekély, hogy annak maximalis differentiája nem haladja túl az 1 fokot, illetőleg az  $1^{\circ} 00$ -t. A tenger vize tehát még áprilisban is a téli állapotnak megfelelő függőleges irányú convectiós áramlások hatása alatt állott különösen azokban a tengerrészekben, a melyek a nyílt Adriával közvetlen érintkezésben vannak. A szigeteken belül helyenkint már határozottan mutatkoztak a vízszintes áramlások, a melyek természetesen a vízoszlopok isothermális és isohalinos voltát észrevehetően megzavarták.

Az oxigéntartalmat a tavaszi útunkon még magasabbnak,  $6 \text{ cm}^3$ -en felülinek találtuk, a mit érhetővé tesz az a körülmény, hogy expediciónk a legviharosabb időszakot követő időben folyt le és így a tengervíz a legtöbb esetben és a felszínen majdnem mindenütt túl volt telítve levegővel.

---

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915 május 17.-én tartott üléséből.)

## A MÁSODFOKÚ BINOM KONGRUENCZIÁK ELMÉLETÉHEZ.

RADOS GUSZTÁV r. tagtól.

Még 1884-ben bizonyítottam be azt a KÖNIG GRULÁ-tól elő-  
ször kimondott tételt, hogy az

$$f(x) \equiv a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \dots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

( $p$  törzsszám)

kongruenciának zérustól különböző gyöke akkor és csak akkor  
van, ha a

$$C \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-3} & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} & a_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-4} & a_{p-3} \end{vmatrix}$$

cyklikus determináns a  $p$  modulusra nézve zérussal kongruens.<sup>1</sup>  
Ez a determináns pedig kongruens az

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(p-1)$$

szorzattal, úgy hogy

$$C \equiv f(1) f(2) \cdot \dots \cdot f(p-1) \pmod{p}.$$

Miképen alkalmazható ez a tétel az

$$f(x) \equiv x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$$

---

<sup>1</sup> V. ö. «Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades» című ér-  
tekezéssel. Journal für die reine und angewandte Mathematik 99. kötet,  
258. lap. 1888.

másodfokú binom kongruencia megoldhatóságára vonatkozó, ismeretes kritériumnak levezetésére? Erre a kérdésre óhajtok válaszolni a jelen cikkben.

A jelen esetben

$$C \equiv \prod_{k=1}^{p-1} f(k) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (k^2 - D).$$

De mivel a

$$k \equiv \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p-2, p-1$$

értékek a sorrendtől eltekintve a  $p$  modulusra nézve a

$$-1, -2, \dots, -\frac{p-3}{2}, -\frac{p-1}{2}$$

értékekkel kongruensek, azért

$$C = \left[ \prod_{k=1}^{p-1} (k^2 - D) \right]^2 \equiv \left[ \prod_{k=1}^{p-1} (D - k^2) \right]^2 \pmod{p}.$$

Vizsgáljuk meg részletesebben a szegletes zárójelen belül foglalt szorzatot. Ha ezt  $D$  fogyó hatványai szerint kifejtjük, lesz:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{p-1} (D - k^2) &\equiv D^{\frac{p-1}{2}} - \Sigma(1^2) D^{\frac{p-3}{2}} + \dots + \\ &+ (-1)^l \Sigma(1^2 2^2 \dots l^2) D^{\frac{p-1}{2}-l} + \dots + \\ &+ (-1)^{\frac{p-1}{2}} 1^2 2^2 \dots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p}, \end{aligned} \tag{I}$$

a hol

$$S_p = \Sigma(1^2 2^2 \dots l^2)$$

az

$$1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

mennyiségnek  $l$ -edfokú elemi szimmetrikus formája, melyről könnyen kimutatható, hogy  $\pmod{p}$  mindig zérussal kongruens, valahányszor

$$l = 1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}.$$

Legyenek ugyanis az  $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$  számok tetszőszerinti sorrendben írva

$$a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}$$

és  $S_l$  részletesebben így jellemezve:

$$S_l = S_l(a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2);$$

akkor világos, hogy  $S_l$  az  $a$ -knak  $2l$ -edfokú homogén kifejezése. Ezért, ha  $l$  tetszőszerinti egész szám, mely  $p$ -vel nem osztható,

$$\begin{aligned} S_l [(ta_1)^2, (ta_2)^2, \dots, (ta_{\frac{p-1}{2}})^2] &\equiv \\ &\equiv t^{2l} S_l(a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2) \pmod{p}. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

De mivel a

$$ta_1, ta_2, \dots, ta_{\frac{p-1}{2}}$$

számok  $(\text{mod. } p)$  inkongruensek és továbbá lehetetlen, hogy valamely  $i, j$  indexpárra nézve a

$$\left. \begin{aligned} ta_i &\equiv a_j \\ ta_j &\equiv -a_i \end{aligned} \right\} \pmod{p}$$

kongruenciák fennálljanak, mert belőlük a

$$t(a_i + a_j) \equiv 0 \pmod{p}$$

és így az

$$a_i + a_j \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruencia következne, melynek fennállását az

$$0 < a_i \leq \frac{p-1}{2}, \quad 0 < a_j \leq \frac{p-1}{2}$$

egyenlőtlenségek kizárják, kell, hogy a

$$ta_1, ta_2, \dots, ta_{\frac{p-1}{2}}$$

számok abszolút értékre nézve legkisebb maradékai, a sorrendtől és előjeltől eltekintve, ismét az

$$a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}$$

számok legyenek, a miből következik, hogy a

$$(ta_1)^2, (ta_2)^2, \dots, (ta_k)^2$$

számok (mod.  $p$ ) az

$$a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2$$

számoktól csak sorrendben térnek el, tehát

$$\begin{aligned} S_t [(ta_1)^2, (ta_2)^2, \dots, (ta_{\frac{p-1}{2}})^2] &\equiv \\ &\equiv S_t [a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2] \pmod{p} \end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve, az (II) alatti kongruencia így írható:

$$(t^{2l} - 1) S_t (a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (\text{III})$$

Az

$$l = 1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}$$

értékek mellett  $t$  mindig úgy választható, hogy

$$t^{2l} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p},$$

legyen, mert ekkor a

$$t^{2l} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruencia nem minden a zérustól különböző  $t$  számmal elé-  
gíthető ki. Ha  $t$  számára ilyen értéket választunk, a (III) alatti  
kongruenciából tüstént következik, hogy

$$S_t (a_1^2, a_2^2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}}^2) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$t = 1, 2, 3, \dots, \binom{p-3}{2}.$$

Ha még figyelembe vesszük, hogy

$$(1 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \binom{p-1}{2})^2$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+3}{2} \dots (p-2)(p-1) \pmod{p}$$

és hogy WILSON tételének értelmében

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

a kongruencia végül így írható:

$$\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (D-k^2) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p};$$

és így

$$C \equiv (D^{\frac{p-1}{2}} - 1)^2 \pmod{p};$$

Ennek következtében az

$$f(x) \equiv x^2 - D \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruencia megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele:

$$C \equiv (D^{\frac{p-1}{2}} - 0)^2 \equiv 0 \pmod{p};$$

és mivel  $p$  törzsszám, ez az ismeretes

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

feltételbe megy át.

A bevezetésben idézett dolgozatomban érdekes determináns-elméleti következménye van, melyet még röviden főlemlitek. Az

$$x^2 - D \equiv 0 \pmod{p} \quad (K)$$

kongruencia akkor és csak akkor oldható meg, ha a

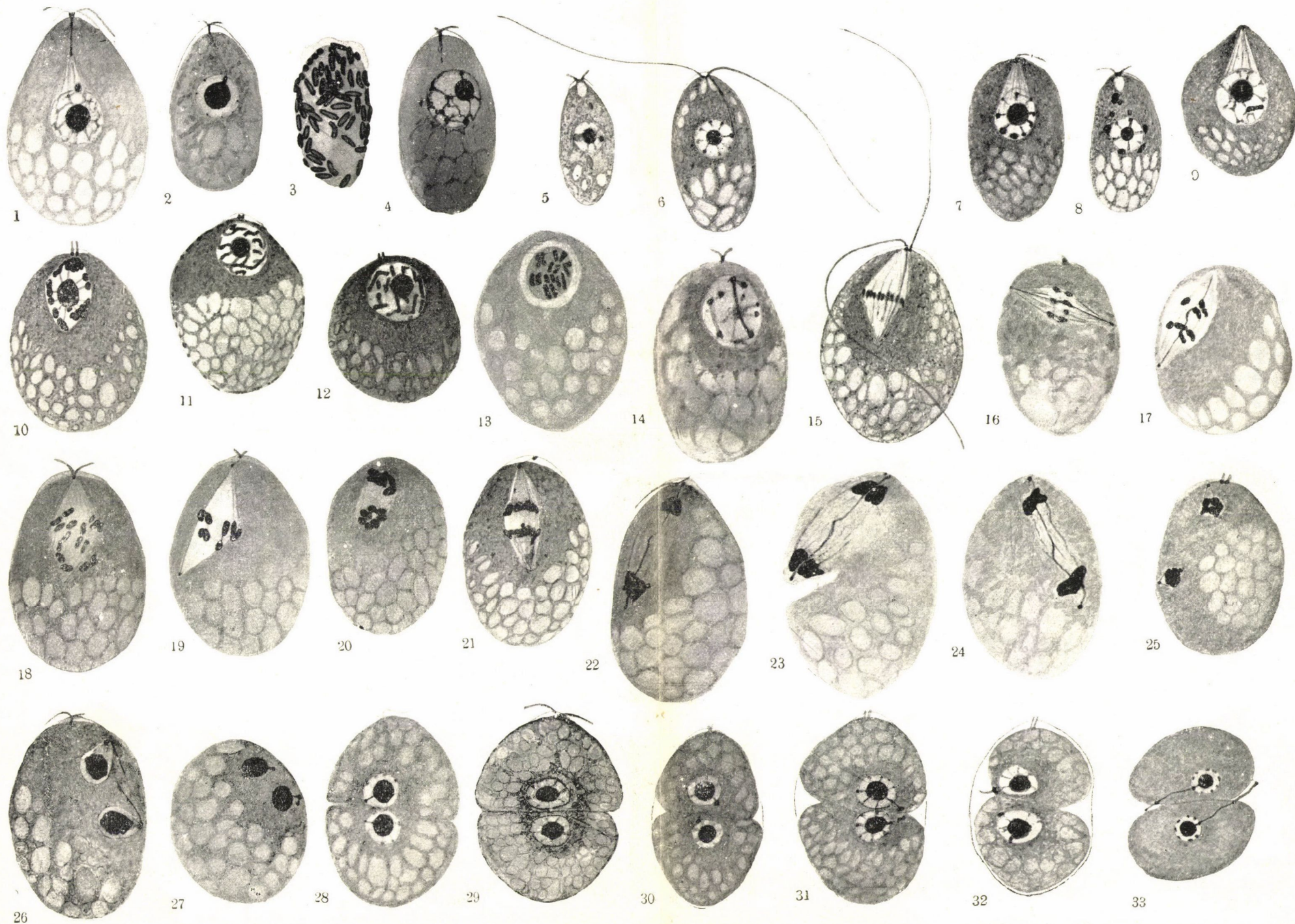
$$C \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -D \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -D & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -D & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -D & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$(p-1)$ -edfokú ciklikus determináns osztható  $p$ -vel. Mivel azonban a  $(K)$  kongruenciának vagy egyetlen gyöke sincsen, vagy pedig gyökeinek száma pontosan *kettő*, azért áll a következő tétel:

*Ha a  $C$  ciklikus determináns a  $p$  törzsszámmal osztható, akkor osztható vele minden  $(p-2)$ -edfokú alldeterminánsa is.*

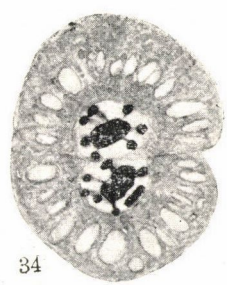
(A M. T. Akadémia III. osztályának 1915. június hó 14.-én tartott üléséből.)



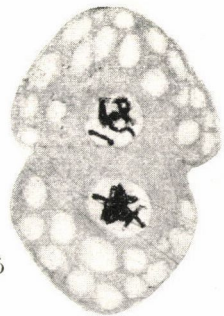




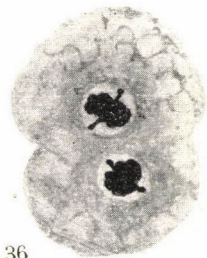




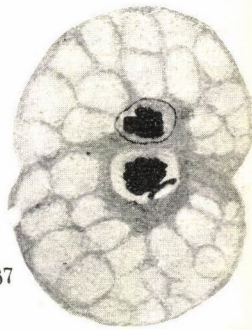
34



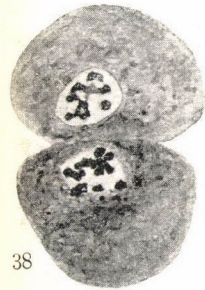
35



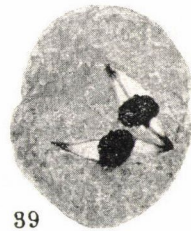
36



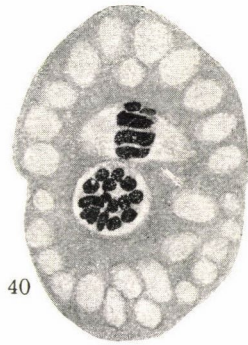
37



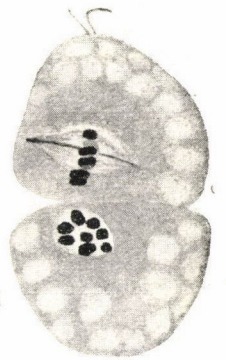
38



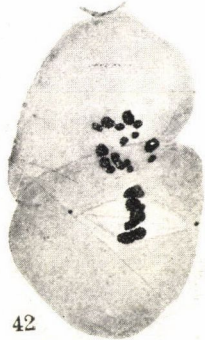
39



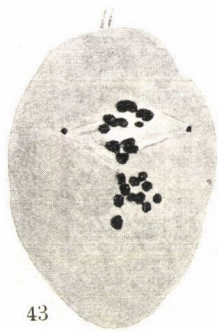
40



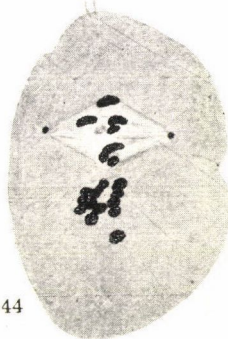
41



42



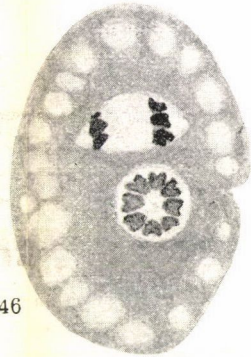
43



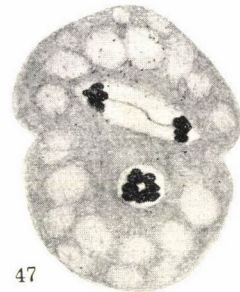
44



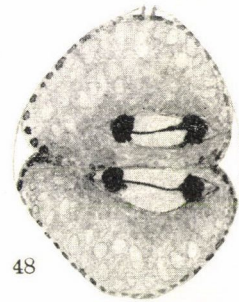
45



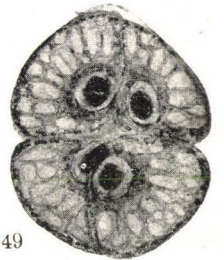
46



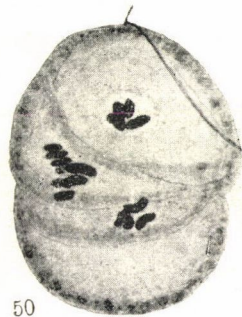
47



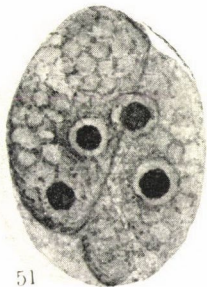
48



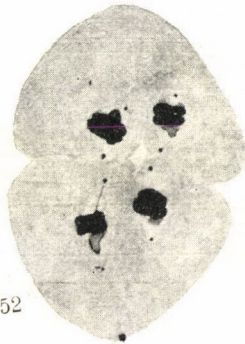
49



50



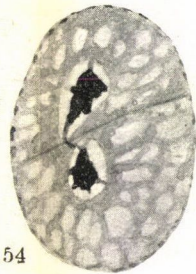
51



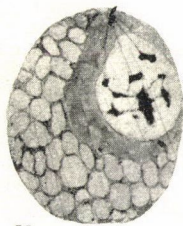
52



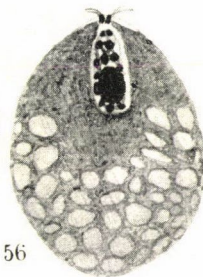
53



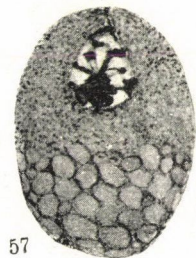
54



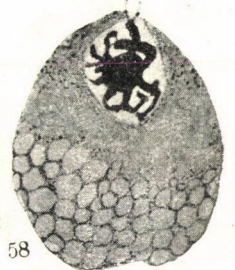
55



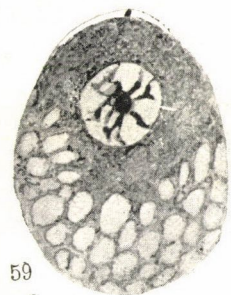
56



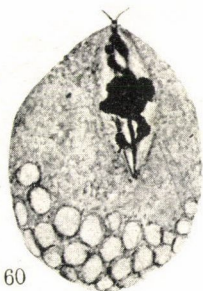
57



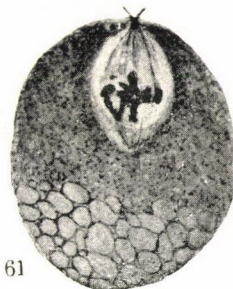
58



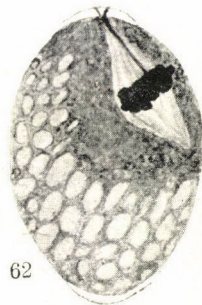
59



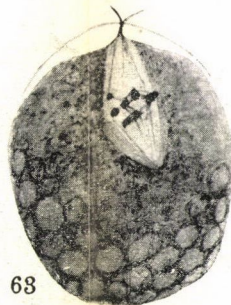
60



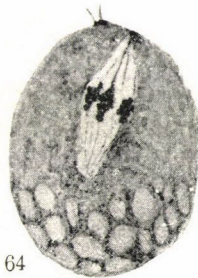
61



62



63



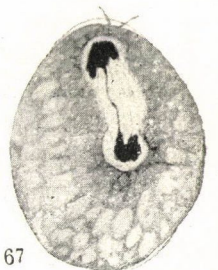
64



65



66



67

