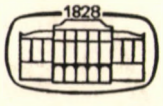
ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 81
FASCICULI 1–2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1975

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
HELLER LÁSZLÓ

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (1363 Budapest Pf. 24. Bankszámla 215 11448), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankszámla: 218 10990) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespendenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 32.00

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankkonto Nr. 218 10990) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS 81

INDEX

S. Dékány, 1904—1974 193

L. Kator, 1932—1974 195

Benedikt, O.: Der Vergleich des sich auf den Motorbetrieb der fremderregten Gleichstrommaschine beziehenden stationären, strukturellen Schemas und der entsprechenden mechanischen Kennlinien — Comparison of the Stationary Structural Schema of the Separately Excited D. C. Machine in Motor Operation with the Corresponding Mechanical Characteristics — *Бенедикт О:* Сравнение стационарны структурных схем, действительных для машин постояного тока с независимым возбуждлением в случае двигательного режима, и соответствуюших механических карактеристик 197

Barta, J.: Sätze über den Membranzustand von Schalen — Theorems on the Membrane State of Shells — *Барша, Й.:* Теоремы по мембранному состоянию оболчек 17

Balogh, E.: Model Investigations Concerning Some Problems of Gas Flow and Heat Transfer in the Furnace of the Type DHV, 670 t/h Boilers — Modellversuche betreffend einige strömungstechnische und Wärmeübertragungsprobleme des Feuerraums der 670 t/h Kessel — *Балог, Л.:* Некоторые проблемы движения потоков и телопередачи в топке котла типа DHV мощностью 670 т/час на основе модельных исследований 117

Beck, T.: Influence of Fiber Geometry on the Punching Force Characteristics of Webs During Needle Felting — Der Einfluß der Fasergeometrie auf die Kenngrößen der Nadelkraft der Vliese im Verlauf der Nadelverfilzung — *Бек Т.:* Применение нитевой геометрии — в процессе сбивания иглой — для характеристики усилия стегания ватки 313

Bölcskei, E.: Deformation of Membrane Shells of Revolution — Formänderungen der Membranschalen von Rotationsflächenform — *Белчики Э.:* Деформирование мембранных оболочек в форме поверхности вращения 3

Csonka, P.: Axisymmetrically Loaded Paraboloid Shells of Revolution on Star-Polygon Base — Achsensymmetrisch belastete Rotationsparaboloidschalen mit sternförmigem Grundriß — *Чонка П.:* Центрально симметрично нагруженные оболочки в виде параболоида вращения с планом в виде звездчатого многоугольника 341

Gádor, L.: Thermal Non-Linearity — Thermische Nichtlinearität — *Гадор Л.:* Термическая нелинейность 299

Horváth, F.: Induced Thermal Emission — Induzierte thermische Emission — *Хорват, Ф.:* Индуктированная термическая эмиссия 127

Janositz, J.: Die Schätzung von Einfachen- und Doppelintegralen aufgrund geschichteter Probeentnahme — Estimation of Simple and Double Integrals by Stratified Sampling — Оценка однократного и двойного интегралов на основе послойного отбора проб. 249

Kabai, I.: Measurement of the Radial Deformation of a Clyindrical Soil Sample Subjected to Triaxial Stress State and the Evaluation of its Failure Condition — Radiale Verformung von zylindrischen Bodenprobekörpern in dreiachsigen Zellen — *Кабаи, И.:* Измерение деформации по радиусу цилиндрического образца почвы, подвергнутого действию трехосевого напряженного состояния и оценка условий его излома 181

Kisbán, S.: Practical Analysis of Elliptic Paraboloid Membrane Shells over Rectangular Ground Plan — Praktische Berechnung elliptischer Paraboloidschalen auf rechteckigem Grund — *Кишбан, Ш.:* Практический расчет эллиптических параболидных оболочек, лежащих на поямоугольных четырехугольных основаниях 91

Kozák, M.: An Approximate Method to Calculate the Effect of Levee Breaches upon Flooding of Rivers Having a Compound Section — Näherungsrechnung von Dammbrüchen zusammengesetzter Flußbetten — *Козак М.:* Приближенный расчет прорыва противопаводковых дамб в случае сложных русел. 235

Kolonits, F.: Compensation of Flash Temperature on Spur Gears — Blitztemperaturausgleich bei geradverzahnten Evolventenrädern — Уравнивание температуры молнии в случае прямозубых эвольвентных зубчатых колес 279

Lipka, I.—Szőke, B.: Abwälzverfahren zur Herstellung eines Fingerfräsers für zylindrische Schrägzahnräder — Generation of the End Milling Cutters for Helical Gears. I. The Surface of the End Mill — *Липка И., Секе Б.:* Изготовление обкаткой концевой фрезы косозубых цилиндрических колес, I. Повверхность концевой фрезы. 411

Kazinczy, L.: Die theoretische Bestimmung der Schnittkraft beim Drehen — Theoretical Determination of the Cutting Force at Turning — *Казинци, Л.:* Теоретическое определение усилия резания при токарной обработке 161

Mátyus, S.: Die Hohlraumbildung als Folge des plötzlichen Abstellen von Pumpen — Formation of Cavities due to the Sudden Stopping of Pumping Plants — *Матьюш М.:* Образование пустого пространства от внезапного останова насоса. 361

Paláncz, B.—Parti, M.: Digital Simulation of Multi-Component Drying — Digitale Simulation der mehrkomponentigen Trocknung — *Паланц, Б. Парши, М.:* Цифровая симуляция многокомпонентной сушки 65

Pethő, Sz.: Kennzeichnung von Trennvorgängen mittels Funktionen des Ausbringens und des Wirkungsgrades — Evaluation of Separating Operations by Yield and Efficiency — *Петэ С.:* Оценка операций разделения с помощью функций выхода и коэффициента полезного действия 265

Reményi, K.—Vörös, L.: Kohlenstaubfeuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren — Pulverized Coal Firing with Fluidization — *Ремени К., Вереш Л.:* Пылеугольное отопление флюидизационным методом 439

Roy, P.: Radial Elastic Disturbance and Stress-Distribution in a Rotating Non-Homogeneous Thin Circular Plate with a Central Hole — Radiale elastische Störung und Spannungsverteilung in einer sich drehenden, inhomogenen, in der Mitte durchgelochten dünnen Kreisplatte — *Приятош, Р.:* Действующий по радиусу упругий возмущающий эффект и распределение напряжений в вращающейся, негомогенной тонкой круглой пластине, прошитой в центре 57

Rosman, R.: Statik freistehender proportionierter räumlicher Stochwekrahmen — Statics of Free Proportional Space Frame-Works — *Росмак, Р.:* Динамический анализ свободностоящих пространственных пропорциональных рам 41

Selvam, M. S.—Radhakrishnan, V.: Study of Side Flow in Simple Vee Groove Cutting and its Influence on Surface Finish — Untersuchung des seitlichen Fließens beim einfachen Spanen von N-Nuten — *Сельман, М. С., Радхакришная, В.:* Исследование бокового истечения при резании простых V-образных пазов и его воздействие на частоту поверхности 75

Singer, D.: An Efficient Computer Method for Optimal Control of Gas Networks — Eine leistungsfähige Methode zur Bestimmung der optimalen Arbeitsverhältnisse von Gasnetzen — Эффективный метод оптимизации эксплуатационных условий газовых сетей с помощью ЭВМ. 449

Szabolcs, G.: Investigation of the Flow in Parallel Boiler Water Tubes — Untersuchung der Strömungsverhältnisse in den parallel geschalteten Siederohren von Dampfkesseln — *Сабольч, Г.:* Исследование условий движения потока в параллельно соединенных кипятильных трубах паровых котлов 135

Terplán, Z.: Vergleich der Zahnrad-Planetengetriebe — Comparison of Planetary Gear Drives — *Терплан З.:* Сравнение зубчатых планетарных механизмов. 225

Terplán, Z.: Wirkungsgrad der Zahnrad-Planetengetriebe — On the Efficiency of Planetary Gear Drives — *Терплан З.:* Кид зубчатых планетарных механизмов 331

Virágh, E.—Serege, S.: Determination of the Atmospheric Radioactivity by Measuring the Radioactivity of Aerosol Specimens — Bestimmung der atmosphärischen Radioaktivität durch Messung der Radioaktivität von Aerosolmustern — *Вираг, Э., Шерге, Ш.:* Определение радиоактивности воздуха на основе измерения радиоактивности аэрозольных проб 155

BOOK REVIEWS

Betontechnische Berichte 1973 (Palotás, L.) 465
Franz, G.: Betonkalender 1975 (Csonka, P.) 466
Kubinszky, M.: Ungarische Lokomotiven und Triebwagen (Terplán, Z.) 467
Varga, L.—Kaliszky, S.: Gründung turmartiger Bauwerke (Palotás, L.) 468

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 81

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1975

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 81

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1975

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 3—15 (1975)

DEFORMATION OF MEMBRANE SHELLS OF REVOLUTION

E. BÖLCSKEI*
CORR. MEMBER OF THE HUNG. AC. SCI.

[Manuscript received May 22, 1974]

Differential equations describing the deformation of arbitrary shaped membrane shells were developed by the author at about 1950. Now, these differential equations of deformation expressed in orthogonal co-ordinates will be applied for surfaces of revolution re-written in a cylindrical co-ordinate system. The problem will be illustrated on a paraboloid shell of revolution subjected to uniform vertical loads.

1. Introduction

Pucher's differential equation describing forces in membrane shells has been known as early as about 1930 and extensively applied for the determination of internal forces in a wide range of membrane shells.

The differential equation for membrane shell deformations established in the '50-s, was of rather theoretical significance, applied for the analysis of boundary conditions and related compatibility conditions at membrane shell edges. Recently, however, with the advent of suspended membrane roofs and pneumatic membrane shells, membrane shell deformations have become rather interesting.

In view of the above, the differential equation for deformations of membrane shells of revolution will be derived.

2. Differential equations for membrane forces

For the sake of simplicity, shell structures subjected to external, distributed loads $p(x, y)$ acting in direction z, will be considered.

Forces in a membrane shell of arbitrary shape $z(x, y)$ and thickness h in an orthogonal co-ordinate system are described by Pucher's second-order partial differential equation

$$z_{xx}F_{yy} - 2z_{xy}F_{xy} + z_{yy}F_{xx} = \frac{1}{h}\, p(x, y)$$

* Prof. Dr. E. Bölcskei, Muskotály u. 37, H—1118 Budapest, Hungary

where $F(x, y)$ is the stress function. Note that in this and in the subsequent equations, the subscript denotes partial differention with respect to the indicated variable.

For shells of revolution it is expedient to use a cylindrical co-ordinate system. The shell equation is

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)\,,$$

and the differential equation of the stress function can be written as:

$$\frac{1}{r} f_r F_{rr} + \left(\frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}\right) f_{rr} = \frac{1}{h} p(r, \varphi)\,.$$

Stress components reduced to the base plane are described by:

$$n^{(r)} = \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}\,,$$

$$n^{(\varphi)} = F_{rr}\,,$$

$$n^{(r\varphi)} = n^{(\varphi r)} = \frac{1}{r^2} F_\varphi - \frac{1}{r} F_{r\varphi} = -\left(\frac{1}{r} F_\varphi\right)_r\,.$$

3. Differential equations for membrane shell deformations

Differential equations describing membrane shell deformations in orthogonal co-ordinate systems were established by the author in the '50-s [1], [2]. Let us denote the projections in the co-ordinate directions of the relative shell displacement by

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \zeta = \zeta(x, y).$$

In this case the differential equations of deformation are:

$$r\zeta_{yy} - 2s\zeta_{xy} + t\zeta_{xx} = -(A_{yy} - C_{xy} + B_{xx})\,,$$

$$\xi_x = A - p\zeta_x\,,$$

$$\eta_y = B - q\zeta_y\,.$$

In these expressions the first and second derivatives of the surface function have been lettered as p, q, and r, s, t respectively, and magnitudes A, B, C denote:

$$A = \frac{1}{E} \frac{1 + p^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left[(1 + q^2)F_{xx} - 2pqF_{xy} + (1 + p^2)F_{yy}\right] -$$

$$- \frac{1 + \mu}{E} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, F_{xx}\,,$$

$$B = \frac{1}{E}\frac{1+q^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[(1+q^2)F_{xx} - 2pqF_{xy} + (1+p^2)F_{yy}\right] - \\ - \frac{1+\mu}{E}\sqrt{1+p^2+q^2}\,F_{yy},$$

$$C = \frac{2}{E}\frac{pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[(1+q^2)F_{xx} - 2pqF_{xy} + (1+p^2)F_{yy}\right] - \\ - 2\frac{1+\mu}{E}\sqrt{1+p^2+q^2}F_{xy},$$

where $F(x, y)$ the stress function;

E the modulus of elasticity of the material.

Now an attempt has been made to apply the differential equations of membrane shell deformation written in orthogonal co-ordinates in cylindrical ones more apt for shells of revolution.

4. Description of the shell of revolution

Let the shell equation be:

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}) = \mathrm{f}(r).$$

Its first derivatives are

$$p = f'\frac{x}{r} = f_x,$$

$$q = f'\frac{y}{r} = f_y,$$

and its second ones

$$r = f_{xx} = f''\frac{x^2}{r^2} + f'\frac{y^2}{r^3},$$

$$t = f_{yy} = f''\frac{y^2}{r^2} + f'\frac{x^2}{r^3},$$

$$s = f_{xy} = f''\frac{xy}{r^2} - f'\frac{xy}{r^3}.$$

Also terms

$$1 + p^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2}f'^2,$$

$$1 + q^2 = 1 + \frac{y^2}{r^2}f'^2,$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = T = \sqrt{1+f'^2}$$

and their transformed shapes will be needed.

5. Determination of magnitudes A, B, and C

Multiplying the required magnitudes A, B, C by E, we obtain:

$$EA = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left[F_{xx}\left(\frac{x^2y^2}{r^4}f'^4 - \mu(1+f'^2)\right) + \right.$$
$$\left. + F_{yy}\left(1+\frac{x^2}{r^2}f'^2\right)^2 - 2F_{xy}\frac{xy}{r^2}f'^2\left(1+\frac{x^2}{r^2}f'^2\right)\right].$$

$$EB = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left[F_{xx}\left(1+\frac{y^2}{r^2}f'^2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + F_{yy}\left(\frac{x^2y^2}{r^4}f'^4 - \mu(1+f'^2)\right) - 2F_{xy}\frac{xy}{r^2}f'^2\left(1+\frac{y^2}{r^2}f'^2\right)\right],$$

$$EC = \frac{2}{\sqrt{1+f'^2}}\left[F_{xx}\frac{xy}{r^2}f'^2\left(1+\frac{y^2}{r^2}f'^2\right) + \right.$$
$$\left. + F_{yy}\frac{xy}{r^2}f'^2\left(1+\frac{x^2}{r^2}f'^2\right) - F_{xy}\left(2\frac{x^2y^2}{r^4}f'^4 + (1+\mu)(1+f'^2)\right)\right].$$

6. Transformation of the stress function

Let us re-write second derivatives

$$F_{xx},\ F_{yy} \text{ and } F_{xy}$$

of the stress function in cyclindrical co-ordinates.

Indirectly deriving the function $F(r, \varphi)$ determined in cylindrical co-ordinates, after proper reductions we obtain:

$$F_{xx} = \frac{x^2}{r^2}F_{rr} + \frac{y^2}{r^3}\left(F_r + \frac{1}{r}F_{\varphi\varphi}\right) + 2\frac{xy}{r^3}\left(\frac{1}{r}F_\varphi - F_{r\varphi}\right),$$

$$F_{yy} = \frac{y^2}{r^2}F_{rr} + \frac{x^2}{r^3}\left(F_r + \frac{1}{r}F_{\varphi\varphi}\right) - 2\frac{xy}{r^3}\left(\frac{1}{r}F_\varphi - F_{r\varphi}\right),$$

$$F_{xy} = \frac{xy}{r^2}F_{rr} - \frac{xy}{r^3}\left(F_r + \frac{1}{r}F_{\varphi\varphi}\right) - \frac{x^2-y^2}{r^3}\left(\frac{1}{r}F_\varphi - F_{r\varphi}\right).$$

7. Transformation of magnitudes A, B and C into cylindrical co-ordinates

$$EA = \frac{F_{rr}}{r^2\sqrt{1+f'^2}}\left(y^2 - \mu x^2(1+f'^2)\right) +$$
$$+ \frac{F_{\varphi\varphi} + rF_r}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left(x^2(1+f'^2) - \mu y^2\right) +$$
$$+ \frac{F_\varphi - rF_{\varphi r}}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left(-2xy(1+\mu)\right),$$

$$EB = \frac{F_{rr}}{r^2\sqrt{1+f'^2}}\left((x^2 - \mu y^2(1+f'^2)\right) +$$

$$+ \frac{F_{\varphi\varphi} + rF_r}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left((1+f'^2)\,y^2 - \mu x^2\right) +$$

$$+ \frac{F_\varphi - rF_{r\varphi}}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left((1+\mu)2xy\right),$$

$$EC = \frac{F_{rr}}{r^2\sqrt{1+f'^2}}\left(-2xy[1+\mu(1+f'^2)]\right) +$$

$$+ \frac{F_{\varphi\varphi} + rF_r}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left(2xy[(1-f'^2)+\mu]\right) +$$

$$+ \frac{F_\varphi - rF_{r\varphi}}{r^4}\sqrt{1+f'^2}\left(2(1+\mu)(x^2-y^2)\right).$$

where

$$T^{(1)} = \frac{F_{rr}}{r^2\sqrt{1+f'^2}},$$

$$T^{(2)} = \frac{F_{\varphi\varphi} + rF_r}{r^4}\sqrt{1+f'^2},$$

$$T^{(3)} = \frac{F_\varphi - rF_{r\varphi}}{r^4}\sqrt{1+f'^2}.$$

In the following, terms in brackets figuring in the above formulae will be lettered as

$$A^{(1)},\quad A^{(2)},\quad A^{(3)},$$
$$B^{(1)},\quad B^{(2)},\quad B^{(3)},$$
$$C^{(1)},\quad C^{(2)},\quad C^{(3)}.$$

8. Determination of the magnitude $E(A_{yy}—C_{xy} + B_{xx})$

Knowing the rules of partial derivation, we may write,

$$E(A_{yy} - C_{xy} + B_{xx}) = \left[T^{(1)}A^{(1)} + T^{(2)}A^{(2)} + T^{(3)}A^{(3)}\right]_{yy} -$$
$$- \left[T^{(1)}C^{(1)} + T'^{(2)}C^{(2)} + T^{(3)}C^{(3)}\right]_{xy} +$$
$$+ \left[T^{(1)}B^{(1)} + T^{(2)}B^{(2)} + T^{(3)}B^{(3)}\right]_{xx},$$

and after arranging, the right side of the above equation can be read as:

$$
\begin{array}{lll}
+ T^{(1)}_{yy}A^{(1)} & + T^{(2)}_{yy}A^{(2)} & + T^{(3)}_{yy}A^{(3)} \\
+ 2T^{(1)}_{y}A^{(1)}_{y} & + 2T^{(2)}_{y}A^{(2)}_{x} & + 2T^{(3)}_{y}A^{(3)}_{y} \\
+ T^{(1)}A^{(1)}_{yy} & + T^{(2)}A^{(2)}_{yy} & + T^{(3)}A^{(3)}_{yy} \\
+ T^{(1)}_{xx}B^{(1)} & + T^{(2)}_{xx}B^{(2)} & + T^{(3)}_{xx}B^{(3)} \\
+ 2T^{(1)}_{x}B^{(1)}_{x} & + 2T^{(2)}_{x}B^{(2)}_{x} & + 2T^{(3)}_{x}B^{(3)}_{x} \\
+ T^{(1)}B^{(1)}_{xx} & + T^{(2)}B^{(2)}_{xx} & + T^{(3)}B^{(3)}_{xx} \\
- T^{(1)}_{xy}C^{(1)} & - T^{(2)}_{xy}C^{(2)} & - T^{(3)}_{xy}C^{(3)} \\
- T^{(1)}_{y}C^{(1)}_{x} & - T^{(2)}_{y}C^{(2)}_{x} & - T^{(3)}_{y}C^{(2)}_{x} \\
- T^{(1)}_{x}C^{(1)}_{y} & - T^{(2)}_{x}C^{(2)}_{y} & - T^{(3)}_{x}C^{(3)}_{y} \\
- T^{(1)}C^{(1)}_{xy} & - T^{(2)}C^{(2)}_{xy} & - T^{(3)}C^{(3)}_{xy}
\end{array}
$$

The operations will be greatly simplified by reducing the parts of identical coefficient.

Summing up we obtain the following expressions:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\textcircled{1} = {} & T^{(1)}_{rr}[r^2] + T^{(2)}_{rr}[-\mu r^2] + \\
& + T^{(1)}_{r}[-\mu r(1+f'^2)] + T^{(2)}_{r}[r(1+f'^2)] + \\
& + T^{(1)}_{\varphi\varphi}[-\mu(1+f'^2)] + T^{(2)}_{\varphi_r}[1+f'^2] + T^{(3)}_{\varphi}[2(1+\mu)] + \\
& + T^{(3)}_{\varphi r}[-2r(1+\mu)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma\textcircled{2} = {} & T^{(1)}_{r}\left[\frac{2y^2}{r}\left(3+\mu(1+f'^2)\right)\right] + T^{(2)}_{r}\left[-\frac{2y^2}{r}\left(3\mu+(1+f'^2)\right)\right] + \\
& + T^{(1)}_{\varphi}\left[\frac{2yx}{r^2}\left(3+\mu(1+f'^2)\right)\right] + T^{(2)}_{\varphi}\left[-\frac{2xy}{r^2}\left(3\mu+(1+f'^2)\right)\right] + \\
& + T^{(3)}_{r}\left[-\frac{8xy}{r}(1+\mu)\right] + \\
& + T^{(3)}_{\varphi}\left[-\frac{8x^2}{r^2}(1+\mu)\right],
\end{aligned}
$$

$$\Sigma\textcircled{3} = T_r^{(1)}\left[\frac{2x^2}{r}\left(3+\mu(1+f'^2)\right)\right] + T_r^{(2)}\left[-\frac{2x^2}{r}\left(3\mu+(1+f'^2)\right)\right] +$$

$$+ T_\varphi^{(1)}\left[-\frac{2xy}{r^2}\left(3+\mu(1+f'^2)\right)\right] + T_r^{(2)}\left[\frac{2xy}{r^2}\left(3\mu+(1+f'^2)\right)\right] +$$

$$+ T_r^{(3)}\left[\frac{8xy}{r}(1+\mu)\right] +$$

$$+ T_\varphi^{(3)}\left[-\frac{8y^2}{r^2}(1+\mu)\right],$$

$$\Sigma\textcircled{4} = T^{(1)}2[3+\mu(1+f'^2)+\mu r f' f''] +$$

$$T^{(2)}\{-2[3\mu+(1+f'^2)+r f' f'']\}.$$

Performing the operations for all four columns and summing up, this will finally result in:

$$E[A_{yy} - C_{xy} + B_{xx}] = E \cdot D =$$

$$= (1+f'^2)(\mu T^{(1)} - T^{(2)}) + \{6r(T^{(1)} - \mu T^{(2)})\}_r +$$

$$+ \{r(1+f'^2)(\mu T^{(1)} - T^{(2)})\} + r^2(T^{1)} - \mu T^{(2)})_{rr} -$$

$$- (1+f'^2)(\mu T^{(1)} - T^{(2)})_{\varphi\varphi} -$$

$$- 6(1+\mu)T_\varphi^{(3)} - 2r(1+\mu)T_{r\varphi}^{(3)}.$$

9. Differential equation of deformations of rotational membrane shells written in cylindrical co-ordinates

Deformation components written in cyclindrical co-ordinates are:

$$\xi = \xi(x,y) = \bar{\xi}(r,\varphi),$$
$$\eta = \eta(x,y) = \bar{\eta}(r,\varphi),$$
$$\zeta = \zeta(x,y) = \bar{\zeta}(r,\varphi).$$

$$x = r \cdot \cos\varphi,$$
$$y = r \cdot \sin\varphi,$$

Let us transform the displacement function from system "ξ, η, ζ" into "ϱ, ν, ζ".

Here are

ϱ — radial displacement normal to the rotation axis;
ν — tangential displacement normal to the rotation axis;
ζ = displacement parallel to the rotation axis, the same as the "ζ" before.

Transformation will be realized according to equations:

$$\xi = \varrho\cos\varphi - \nu\sin\varphi,$$
$$\eta = \varrho\sin\varphi + \nu\cos\varphi.$$
$$\zeta = \zeta.$$

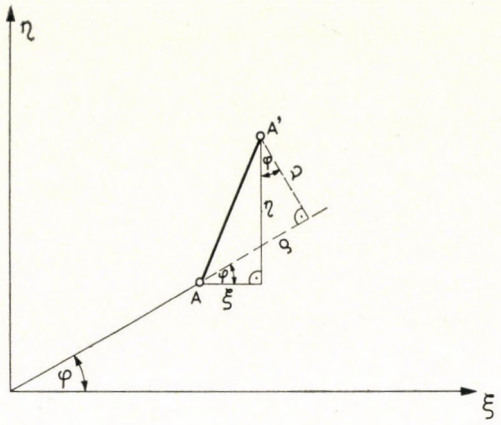


Fig. 1

The following magnitudes will be needed:

$$\xi_x = \left(\varrho_r \frac{x}{r} - \varrho_\varphi \frac{y}{r^2}\right) \cos\varphi - \left(v_r \frac{x}{r} - v_\varphi \frac{y}{r^2}\right) \sin\varphi +$$

$$+ \varrho \sin\varphi \frac{y}{r^2} + v \cos\varphi \frac{y}{r^2},$$

$$\eta_y = \left(\varrho_r \frac{y}{r} + \varrho_\varphi \frac{x}{r^2}\right) \sin\varphi + \left(v_r \frac{y}{r} + v_\varphi \frac{x}{r^2}\right) \cos\varphi +$$

$$+ \varrho \cos\varphi \frac{x}{r^2} - v \sin\varphi \frac{x}{r^2},$$

$$\zeta_x = \left(\zeta_r \frac{x}{r} - \zeta_\varphi \frac{y}{r^2}\right),$$

$$\zeta_y = \left(\zeta_r \frac{y}{r} + \zeta_\varphi \frac{x}{r^2}\right).$$

Substituting the above, the differential equations of deformation will become, after having arranged them, the following:

$$\frac{1}{r}(\zeta_{rr} f' + \zeta_r f'') + \zeta_{\varphi\varphi} \frac{f''}{r^2} = -D(r,\varphi),$$

$$\frac{\varrho}{r} + \varrho_r + \frac{v_\varphi}{r} + f'\zeta_r = A(r,\varphi) + B(r,\varphi),$$

$$\left(-\frac{\varrho}{r} + \varrho_r - \frac{v_\varphi}{r} + f'\zeta_r\right)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) +$$

$$\left(+\frac{v}{r} - v_r - \frac{\varrho_\varphi}{r} - \frac{f'\zeta_\varphi}{r}\right) 2 \sin\varphi \cos\varphi = A(r,\varphi) - B(r,\varphi).$$

10. Case of loading and support of circular symmetry

Obviously, a shell of revolution with a circular symmetric load and support undergoes a circular symmetric deformation, hence:

$$v(r,\varphi)=0\,,\quad \varrho(r,\varphi)=\varrho(r)\,,\quad \zeta(r,\varphi)=\zeta(r)\,,$$

Thus, the differential equations will be:

$$\frac{1}{r}(f'\zeta_r)_r=-\frac{1}{E}\Big[T^{(1)}\mu(1+f'^2)+(rT^{(1)}\{6+\mu(1+f'^2\})_r+T^{(1)}_{rr}r^2-$$

$$-T^{(2)}(1+f'^2)-(rT^{(2)}\{6\mu+(1+f'^2)\}_r-T^{(2)}_{rr}\mu r^2\Big]\,,$$

$$f'\zeta_r+\frac{\varrho}{r}+\varrho_r=\frac{1}{E}\Big[T^{(1)}r^2\{1-\mu(1+f'^2)\}+T^{(2)}r^2\{(1+f'^2)-\mu\}\Big]\,.$$

$$f'\zeta_r-\frac{\varrho}{r}+\varrho_r=\frac{1}{E}\Big[-T^{(1)}r^2\{1+\mu(1+f'^2)\}+T^{(2)}r^2\{(1+f'^2)+\mu\}\Big]\,.$$

Taking stresses with their real values on the very surface into consideration, the sum of the second and third equation can be demonstrated to result in Hooke's law, i.e.

$$\varepsilon^{(o)}=\frac{\varrho_r+f'\zeta_r}{1+f'^2}=\frac{1}{E}(N^{(r)}-\mu N^{(\varphi)})=\frac{1}{E}\left(\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}-\mu\,\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'^2}}\right),$$

while the difference of the two latter equations gives the relationship:

$$\varrho=\frac{r}{E}\left(\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'^2}}-\mu\,\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}\right).$$

Combining this latter to the original first differential equation, two equations with two unknown functions will result. They are

$$\frac{1}{r}(f'\zeta_r)_r=-\frac{1}{E}\Big[-\left(\frac{1+f'^2)}{r^2}\right)\left\{\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}-\mu\,\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'^2}}\right)+$$

$$+\left\{-\frac{1}{r}(1+f'^2)\left(\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}-\mu\,\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{6}{r}\left(\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'_2}}-\mu\,\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}\right)\right\}_r+$$

$$+r^2\,\frac{F_{rr}}{r^2\sqrt{1+f'^2}}-\mu\,\frac{F_r}{r^3}\sqrt{1+f'^2}\Big)_{rr}\Big]\,,$$

and

$$\varrho=\frac{r}{E}\left(\frac{F_{rr}}{\sqrt{1+f'^2}}-\mu\,\frac{F_r}{r}\sqrt{1+f'^2}\right).$$

11. Deformation of a shallow shell of revolution under circular symmetric load

The shell being a shallow one, the following can be written:

$$1 + f'^2 = 1 + \zeta_r^2 \approx 1 .$$

Thus, the differencial equations for the displacement sought for are:

$$(f'\zeta_r) = -\frac{r}{E}\left[-\frac{1}{r^2}\left(-\mu F_{rr} + \frac{F_r}{r}\right) + \right.$$

$$+ \left\{(\mu + 6)\frac{F_{rr}}{r} - (1 + 6\mu)\frac{F_r}{r^2}\right\}_r +$$

$$\left. + r^2\left(\frac{F_{rr}}{r^2} - \mu\frac{F_r}{r^3}\right)_{rr}\right],$$

$$\varrho = \frac{r}{E}\left(F_{rr} - \mu\frac{F_r}{r}\right),$$

and the differential equation describing the state of stresses can be expressed as

$$(F_r \cdot f')_r = \frac{1}{h} rg(r) .$$

Performing operations in the first differential equation results in relationship:

$$(f'\zeta_r)_r = \frac{r}{E}\left[\frac{F_r}{r^3} - \frac{\mu F_{rr}}{r^2} + (1 + 6\mu)\frac{F_{rr}r^2 - 2rF_r}{r^4} - \right.$$

$$- (6 + \mu)\frac{F_{rrr}r - F_{rr}}{r^2} -$$

$$- \frac{1}{r^2}(F_{rrrr}r^2 - 4rF_{rrr} + 6F_{rr}) +$$

$$\left. + \mu\frac{1}{r^3}(F_{rrr}r^2 - 6rF_{rr} + 12F_r)\right],$$

which can be rearranged as:

$$(f'\zeta_r)_r = \frac{1}{r^3 E}(-r^4 F_{rrrr} - 2r^3 F_{rrr} + r^2 F_{rr} - rF_r) =$$

$$= -\frac{1}{E}\left[r\left(F_{rr} + \frac{F_r}{r}\right)_r\right]_r .$$

Structure, load and support all being circular symmetric, integrating this equation with respect to r yields a zero constant, resulting in the set of differential equations:

$$f'\zeta_r = -\frac{r}{E}\left(F_{rr} + \frac{F_r}{r}\right)_r ,$$

$$(f'_r F_r)_r = \frac{1}{h} g(r) r .$$

Of course, these equations are not valid for the analysis of deformation of plane plates, to the calculation of which the formulae by FÖPPL, A. [4] are to be applied.

12. Example

Let us consider the deformation of a rotational paraboloid shell subjected to a uniform load as an example. Let the shell's middle surface be expressed by equation

$$f = \frac{c}{2} r^2 .$$

The intensity of the uniformly distributed vertical load should be

$$g(r) = g = \text{const} .$$

The second-order differential equation for the determination of the internal forces is

$$(f' F_r)_r = \frac{g}{h} r .$$

Introducing the derivative with respect to r of the equation of the surface which is

$$c(r \cdot F_r)_r = \frac{g}{h} r ,$$

and intergating, we obtain:

$$r F_r = \frac{g}{2\, c\, h} r^2 + C_1 .$$

Integration constant can be determined from the condition that also the stress function has a rotational symmetrie form, with a tangent $F_r = 0$ at point $r = 0$. Thus, $C_1 = 0$. So the reduced stresses are:

$$n^{(r)} = \frac{F_r}{r} = \frac{g}{2ch} ,$$

$$n^{(\varphi)} = F_{rr} = \frac{g}{2ch} .$$

Knowing the stress function, the differential equations of deformation are:

$$\frac{c}{r}(\zeta_r \cdot r)_r = -\frac{1}{E}\frac{g}{2ch}\left[\frac{1+c^2r^2}{r^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \sqrt{1+c^2r^2}\right) + \right.$$

$$+\left\{\frac{1+c^2r^2}{r}\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \sqrt{1+c^2r^2}\right)\right\}_r +$$

$$+\left\{\frac{6}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \mu\sqrt{1+c^2r^2}\right)\right\}_r +$$

$$\left. + r^2\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \mu\sqrt{1+c^2r^2}\right)\right\}_{rr}\right.$$

and

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{E}\frac{g}{2ch}\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \mu\sqrt{1+c^2r^2}\right).$$

Integrating the upper equation with respect to r and rearranging:

$$\zeta_r = \frac{1}{E}\frac{g}{2ch}\frac{1}{r}\left[\sqrt{1+c^2r^2}^{\,3} + \mu\sqrt{1+c^2r^2} - \frac{\mu}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \right]\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}^{\,3}} + C_2.$$

The included integration constant C_2 can be determined from the condition that also the deformed surface is rotational symmetric, hence

$$\text{at} \quad r = 0, \quad \zeta = 0.$$

Direct substitution of the included $r \to 0$ leads to an indefinite magnitude $(0.\ \infty)$, however, by the application of l'Hospital's rule, it can be proved that the initial condition is satisfied, hence $C_2 = 0$.

Surface deformation in direction z is obtained by integrating function ζ_r once, with respect to r:

$$\zeta = \frac{1}{E}\frac{g}{2c^2h}\left[\frac{\sqrt{1+c^2r^2}^{\,3}}{3} + (1+\mu)\sqrt{1+c^2r^2} - \frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}}\right] + C_3.$$

Integration constant can be determined from the condition that the shell is suspended at its edge so that it can freely move in direction r, that is

$$\text{for} \quad r = r_0, \qquad \zeta = {}_0 0,$$

hence:

$$C_3 = -\frac{1}{E}\frac{g}{2c^2h}\left[\frac{\sqrt{1+c^2r_0^2}^{\,3}}{3} + (1+\mu)\sqrt{1+c^2r_0^2} - \frac{1}{\sqrt{1+c^2r_0^2}}\right].$$

Thus:

$$\zeta = \frac{1}{E}\frac{g}{2c^2h}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+c^2r^2}^{\,3} - \sqrt{1+c^2r_0^2}^{\,3} + (1+\mu)\left(\sqrt{1+c^2r^2} - \sqrt{1+c^2r_0^2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+c^2r_0^2}}\right)\right)\right].$$

Displacement in direction r is obtained from

$$\varrho = \frac{1}{E}\frac{g}{2ch} r \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2r^2}} - \mu\sqrt{1+c^2r^2}\right).$$

The order of magnitude of displacement will be illustrated in a numerical example where

$$f_0 = 2{,}5 \text{ m}; \qquad r_0 = 10 \text{ m}; \qquad h = 0{,}001 \text{ m}; \qquad g = 300 \text{ kp/m}^2.$$

be. Substituting these values into the derived equations, we obtain:

$$\varrho_r = r_0 = 0, \qquad \zeta_{r=0} = -0{,}113 \text{ cm},$$
$$\varrho_{r=r_0} = 0{,}0951 \text{ cm}, \qquad \varrho_{r=0} = 0.$$

Thus, displacements are of mm order, in accordance with our expectations for mebrane-type shells.

REFERENCES

1. Bölcskei, E.: Membrane Shell Deformations,* *Magyar Építőipar* (1953), 93—100
2. Bölcskei, E.: Déformation des voiles minces. *Acta Techn.* Hung. 5, (1952), 489—506
3. Menyhárd, I.: Theory of Shells I—II*. MTI, Egyetemi Nyomda 1943/1944 Budapest 1—32; 197—236
4. Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, V. Band, Teubner, Leipzig 1907, pp. 130—144

Formänderungen der Membranschalen von Rotationsflächenform. Die Differentialgleichungen für die Beschreibung der Formänderungen von Membranschalen beliebiger Form wurden in den 1950er Jahren von dem Verfasser aufgestellt. Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die von ihm seinerzeit durch rechtwinklige Koordinaten ausgedrückten Formänderungs-Differentialgleichungen auf Rotationsflächen anzuwenden, und für diesen Zweck in ein zylindrisches Koordinatensystem zu transformieren. Als Beispiel wird der Fall einer durch ein gleichmäßig verteiltes, vertikales Kraftsystem belasteten Rotationsparaboloidschale erörtert.

Деформирование мембранных оболочек в форме поверхности вращения. Дифференциальные уравнения, описывающие деформирование мембранных оболочек произвольной формы, выведены автором в 1950 г. Целью данной работы является применение для поверхностей вращения дифференциальных уравнений деформирования, выраженных в то время с помощью пряфоугольных координат, и в соответствии с этим преобразование в цилиндрическую систему координат. В данной работе в качестве примера рассматривается случай оболочки в виде параболоида вращения, на которую действует нагрузка равномерно распределяющейся вертикальной силовой системы.

* In Hungarian.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 17—40 (1975)

SÄTZE ÜBER DEN MEMBRANZUSTAND VON SCHALEN

J. BARTA*
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 12. April 1974]

Es ist aus der Literatur bekannt, daß die praktischen Berechnungen, die sich an den Membranzustand einer Schale beziehen, zumeist unter der Benützung der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y, z ausgeführt werden, wobei die Schnittkräfte auf die Ebene xy projiziiert werden. Der vorliegende Aufsatz enthält theoretische Erwägungen. Dabei werden gleichfalls die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y, z benützt, aber die Schnittkräfte werden nicht nur auf die Ebene xy, sondern auch auf die Ebenen yz und zx projiziert. In dieser Weise ergibt sich ein Integralsatz, welcher zu weiteren Sätzen führt, die sich auf die virtuelle Verrückung und Puchersche Funktion beziehen.

Einleitung

Der Zweck dieses Aufsatzes ist, die Sätze III—VIII herzuleiten. Die Sätze I und II sind aus der Literatur [1] bekannt und sollen hier als Beweis für die weiteren Sätze dienen. Der Satz III ist ein Integralsatz [Gleichung (24)]. Der Satz IV drückt eine Invarianzeigenschaft aus. Die Invariante (43) erhält im Satz V eine physikalische Deutung. Die Formel (66) ergibt einen symmetrischen Ausdruck für die virtulle Formänderungsarbeit. Das Beispiel, das in diesen Aufsatz eingeflochten ist, veranschaulicht die Transformation der Koordinaten gemäß (49) und (50), die Transformation der Vektorkomponenten gemäß (54) und (55), die Transformation der Richtungskosinus gemäß (96) und (97), die Transformation der Schnittkraftprojektionen gemäß (59), und erläutert die Begriffe »Unbestimmheit« und »Invarianz«.

x, y, z sind rechtwinklige kartesische Koordinaten im Raum. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sind die zugehörigen Einheitsvektoren. Die Mittelfläche wird mit f, die Randlinie mit b bezeichnet. Die auf die Schale wirkenden äußeren Kräfte werden Flächenkräfte bzw. Randkräfte genannt, je nachdem, ob sie auf f bzw. an b wirken. Der Vektor $d\mathbf{K}$ bezeichnet das Element der äußeren Kraft (Bild 1).

Alle Erörterungen in diesem Aufsatz beziehen sich auf den Fall, in dem die Schale sich im Gleichgewicht befindet und an $f+b$ überall ein Membranzustand herrscht, so daß die Randkräfte Membrankräfte sind.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird die Differentiation mit einem im Index stehenden Strich bezeichnet, z. B. im Fall der Funktion $S_y(x, y)$ wird

* Prof. Dr. J. BARTA. József körút 35, H–1085 Budapest, Hungary

$S_{y,x}$ statt $\partial S_y/\partial x$ und im Fall der Funktion $z(x, y)$ wird $z_{,xy}$ statt $\partial^2 z/\partial x \delta y$ geschrieben.

Bei der Herleitung der Sätze werden die Eindeutigkeit, Stetigkeit und hinreichend oftmalige stetige Differenzierbarkeit der vorkommenden Funktionen in jedem Punkt von f vorausgesetzt. Mithin beziehen sich die Ergebnisse

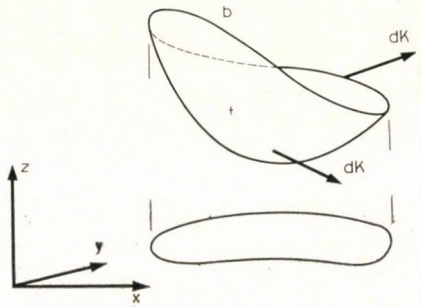


Bild 1. Die Mittelfläche der Schale

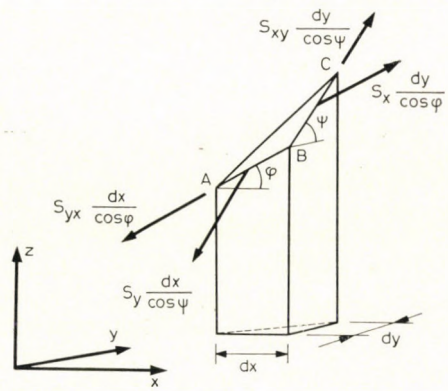


Bild 2. Das Mittelflächenelement ABC

dieser Arbeit auf solche Schalen bzw. auf solche Teile der Schale, an welchen diese Vorausetzungen erfüllt sind.

Die Richtung der Flächennormale zeigt immer nach derselben willkürlich gewählten Seite von f. Der Flächeninhalt eines Elementes von f wird mit df bezeichnet. Dieser wird immer als eine positive Größe betrachtet. Seine Projektionen sind sowohl der Größe als auch dem Vorzeichen nach gemäß den Formeln

$$df_x = df \cdot \cos \alpha, \quad df_y = df \cdot \cos \beta, \quad df_z = df \cdot \cos \gamma \tag{1}$$

zu berechnen, wobei α, β, γ die Winkel sind, die die Flächennormale mit den Richtungen x, y, z bildet. Man achte auf das Vorzeichen von df_x, df_y, df_z; siehe z. B. die Werte (41).

Wird die Ebene xy als Projektionsebene benützt, so bezeichnen wir die Schnittkraftprojektionen (skalare Werte), die den Membranzustand charakterisieren, mit

$$S_x(x, y), \quad S(x, y), \quad S_y(x, y). \tag{2}$$

Diese werden in üblicher Weise erklärt. Sie sind die Projektionen jener Schnittkräfte, welche an einem Schalenelement wirken, dessen Projektion ein Rechteck mit den Seitenlängen dx und dy ist. Die Werte (2) werden auf die Längen dx und dy bezogen. Zur Veranschaulichung dient das Bild 2, worin ABC ein Element der Mittelfläche ist. An der Seite BC wirken die Schnittkräfte

$$S_x \frac{dy}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad S_{xy} \frac{dy}{\cos \psi}.$$

An der Seite AB wirken die Schnittkräfte

$$S_{xy} \frac{dx}{\cos \gamma} \quad \text{und} \quad S_y \frac{dx}{\cos \psi}.$$

Statt der Bezeichnungen S_x, $S_{xy} = S_{yx}$, S_y sind in der Monographie [1] die Bezeichnungen n_x, $n_{xy} = n_{yx}$, n_y benützt. In diesem Aufsatz schreiben wir statt S_{xy} und S_{yx} einheitlich S.

Die Gleichung von f wird in der Form

$$z = z(x, y) \tag{3}$$

geschrieben. Die Flächenkraftkomponenten (skalare Werte) bezeichnen wir mit

$$k_{xz}(x, y), \quad k_{yz}(x, y), \quad k_{zz}(x, y). \tag{4}$$

Der zweite Index z in (4) weist darauf hin, daß die Werte (4) auf df_z bezogen sind. Statt der Bezeichnungen k_{xz}, k_{yz}, k_{zz} werden in der Monographie [1] die Bezeichnungen g_x, g_y, g_z benützt.

Die Einheiten der angeführten Größen sind: kp cm^{-1} für S_x, S, S_y, cm für x, y, z, kp cm^{-2} für k_{xz}, k_{yz}, k_{zz}. In dem Beispiel werden wir die zu den numerischen Werten gehörigen Einheiten nicht ausschreiben.

Satz I

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der durch Schnittkraftprojektionen (2) charakterisierte Membranzustand ein Gleichgewichtszustand sei, ist das Bestehen der Gleichungen

$$S_{x,x} + S_{,y} = -k_{xz}, \qquad \text{a}$$

$$S_{,x} + S_{y,y} = -k_{yz}, \qquad \text{b}$$

$$(S_x z_{,x})_{,x} + (S z_{,y})_{,x} + (S z_{,x})_{,y} + (S_y z_{,y})_{,y} = -k_{zz} \qquad \text{c} \tag{5}$$

in jedem Punkt von f.

Beispiel

Die Mittelfläche der Schale sei durch die Gleichung

$$z = x^2 y \tag{6}$$

charakterisiert (Bild 3). Die Flächenkraftkomponenten seien durch die Werte

$$k_{xz} = 3\,, \quad k_{yz} = 0\,, \quad k_{zz} = 0 \tag{7}$$

gegeben. Aus (6) folgt

$$z_{,x} = 2xy\,, \quad z_{,y} = x^2 \quad z_{,xx} = 2y\,, \quad z_{,xy} = 2x\,, \quad z_{,yy} = 0\,.$$

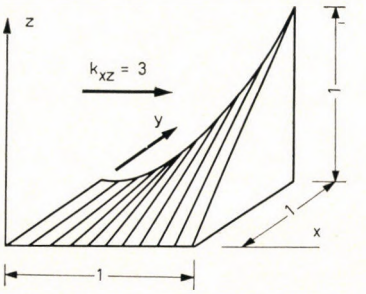


Bild 3. Die Mittelfläche der in dem Beispiel behandelten Schale

Der Membranzustand dieser Schale, der durch die Schnittkraftprojektionen

$$S_x = -9x\,, \quad S = 6y\,, \quad S_y = 0 \tag{8}$$

charakterisiert ist, ist ein Gleichgewichtszustand, denn die Werte (8) genügen den Gleichungen (5), worüber man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Dieselbe Behauptung gilt auch für jenen Membranzustand derselben Schale, welcher durch die Schnittkraftprojektionen

$$S_x = -9x + 2xy\,, \quad S = 6y - y^2\,, \quad S_y = x^2 \tag{9}$$

charakterisiert ist, und auch für jenen, welcher durch

$$S_x = -9x - x^2 y^3\,, \quad S = 6y + \frac{1}{2}xy^4\,, \quad S_y = -\frac{1}{10}y^5 \tag{10}$$

charakterisiert ist. Es lassen sich noch unendlich viele weitere Gleichgewichtszustände angeben. Denn es gilt der

Satz II

Sind (3) und (4) gegeben und soll man die Schnittkraftprojektionen (2) unter der Forderung ermitteln, daß der Membranzustand ein Gleichgewichtszustand sei, so ist diese Aufgabe unendlich vielfach unbestimmt, das heißt, sie

besitzt unendlich viele Funktionsgruppen (2) als Lösungen. — Statt »unbestimmt« findet man in der Literatur oft »statisch unbestimmt«.

Werden alle drei Ebenen yz, zx, xy als Projektionsebenen benützt, so spielen die Schnittkraftprojektionen (skalare Werte)

$$\begin{aligned} &Q_y(y,z)\,, \quad Q(y,z)\,, \quad Q_z(y,z)\,, && \text{a}\\ &R_z(z,x)\,, \quad R(z,x)\,, \quad R_x(z,x)\,, && \text{b}\\ &S_x(x,y)\,, \quad S(x,y)\,, \quad S_y(x,y) && \text{c} \quad (11 \end{aligned}$$

eine Rolle. Die Gleichung von f wird in den dreierlei Formen

$$x = x(y,z)\,, \quad y = y(z,x)\,, \quad z = z(x,y) \tag{12}$$

angeschrieben. Die Flächenkraftkomponenten (skalare Werte) werden mit

$$\begin{aligned} &k_{xx}(y,z)\,, \quad k_{yx}(y,z)\,, \quad k_{zx}(y,z)\,, && \text{a}\\ &k_{xy}(z,x)\,, \quad k_{yy}(z,x)\,, \quad k_{zy}(z,x)\,, && \text{b}\\ &k_{zx}(x,y)\,, \quad k_{yz}(x,y)\,, \quad k_{zz}(x,y) && \text{c} \quad (13) \end{aligned}$$

bezeichnet. Hier weist x bzw. y bzw. z als erster Index darauf hin, daß der Vektor $d\mathbf{K}$ auf die Achse x bzw. y bzw. z projiziert ist. Als zweiter Index x bzw. y bzw. z weist darauf hin, daß der projizierte Wert auf df_x bzw. df_y bzw. df_z bezogen ist. Also z. B.

$$k_{zy} = \frac{|\,d\mathbf{K}\,|\,\cos\,(z, d\mathbf{K})}{df_y}\,, \tag{14}$$

wobei $d\mathbf{K}$ der Vektor des an df wirkenden Flächenkraftelementes, $|\mathrm{d}\mathbf{K}|$ der absolute Wert von $d\mathbf{K}$ ist. Da (11, a), (11, b) und (11, c) denselben Membranzustand charakterisieren, sind sie nicht unabhängig voneinander, sondern durch die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} &R_x = (R+S)x_{,z}\,, \quad S_x = (R+S)x_{,y}\,, && \text{a b}\\ &S_y = (S+Q)y_{,x}\,, \quad Q_y = (S+Q)y_{,z}\,, && \text{c d}\\ &Q_z = (Q+R)z_{,y}\,, \quad R_z = (Q+R)z_{,x} && \text{e f} \quad (15) \end{aligned}$$

in jedem Punkt von f miteinander verknüpft, das heißt, die sechs Gleichungen (15) bestehen in jedem Punkt von f, also auch in jenem Punkten von f, wo Flächenkräfte wirken.

Da (13, a), (13, b) und (13, c) dieselben Flächenkräfte charakterisieren, sind sie nicht unabhängig voneinander, sondern durch die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} &k_{yx} = -\,x_{,y}k_{yy}\,, \quad k_{zx} = -\,x_{,z}k_{zz}\,,\\ &k_{zy} = -\,y_{,z}k_{zz}\,, \quad k_{xy} = -\,y_{,x}k_{xx}\,,\\ &k_{xz} = -\,z_{,x}k_{xx}\,, \quad k_{yz} = -\,z_{,y}k_{yy} \end{aligned} \tag{16}$$

in jedem Punkt von f miteinander verknüpft. Den Beweis der Formeln (15) und (16) dürfen wir hier übergehen, denn dieser kann durch eine einfache Gleichgewichtsüberlegung geliefert werden.

Selbstverständlich genügen die Schnittkraftprojektionen (11) in jedem Punkt von f nicht nur den Gleichungen (5), sondern auch den Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_{y,y} + Q_{,z} &= -k_{yx}\,, && \text{a}\\ Q_{,y} + Q_{z,z} &= -k_{zx}\,, && \text{b}\\ (Q_y x_{,y})_{,y} + (Q x_{,z})_{,y} + (Q x_{,y})_{,z} + (Q_z x_{,z})_{,z} &= -k_{xx} && \text{c} \end{aligned} \tag{17}$$

und auch den Gleichungen

$$\begin{aligned} R_{z,z} + R_{,x} &= -k_{zy}\,, && \text{a}\\ R_{,z} + R_{x,x} &= -k_{xy}\,, && \text{b}\\ (R_z y_{,z})_{,z} + (R y_{,x})_{,z} + (R y_{,z})_{,x} + (R_x y_{,x})_{,x} &= -k_{yy}\,, && \text{c} \end{aligned} \tag{18}$$

denn (17) und (18) folgen umkehrbar eindeutig aus (5) durch eine zyklische Vertauschung der Bezeichnungen. Mithin gilt der Satz I auch dann, wenn die Gleichungen (5) durch die Gleichungen (17), und auch dann, wenn die Gleichungen (5) durch die Gleichungen (18) ersetzt werden.

Aus (15) und (16) folgen die zwei Feststellungen: 1. Zur Charakterisierung des Membranzustandes der Schale sind nicht nur die Schnittkraftprojektionen (2) sondern auch die Schnittkraftprojektionen

$$Q(y, z)\,, \quad R(z, x)\,, \quad S(x, y) \tag{19}$$

geeignet. 2. Zur Charakterisierung der Flächenkräfte sind nicht nur die Flächenkraftkomponenten (4), sondern auch die Flächenkraftkomponenten

$$k_{xx}(y z)\,, \quad k_{yy}(z, x) \quad k_{zz}(x, y) \tag{20}$$

geeignet. — Von den Schnittkraftprojektionen (11) werden in den Sätzen III, IV und V nur die Schnittkraftprojektionen (19) vorkommen. Von den Flächenkraftkomponenten (13) werden beim Beweis des Satzes III nur die Flächenkraftkomponenten (20) vorkommen.

Erste Fortsetzung des Beispiels

(6) und (7) sind gegeben. Die Gleichung der Mittelfläche f (Bild 3) wird in dreierlei Formen angeschrieben. Diese und die sich daraus ergebenden Differentialquotienten lauten:

$$\begin{gathered} x = y^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\,, \quad y = z x^{-2}\,, \quad z = x^2 y\,,\\ x_{,y} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}}\,, \quad y_{,z} = x^{-2}\,, \quad z_{,x} = 2xy\,,\\ x_{,z} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\,, \quad y_{,x} = -2z x^{-3}\,, \quad z_{,y} = x^2\,. \end{gathered} \tag{21}$$

Unter der Benützung dieser Werte und der Gleichungen (16) erhält man die Flächenkraftkomponenten:

$$k_{xx} = -\frac{3}{2} y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}, \quad k_{yx} = 0, \quad k_{zx} = 0,$$

$$k_{xy} = -3x^{-2}, \quad k_{yy} = 0, \quad k_{zy} = 0,$$

$$k_{xz} = 3, \quad k_{yz} = 0, \quad k_{zz} = 0. \tag{22}$$

Im Fall des Membranzustandes (8), wenn man die Werte (8) und die Gleichungen (15) verwendet, erhält man die Schnittkraftprojektionen:

$$Q_y = 0, \quad Q = -6y, \quad Q_z = 6z, \quad \text{a}$$

$$R_z = 12z^2x^{-3}, \quad R = 12zx^{-2}, \quad R_x = 9x^{-1}, \quad \text{b}$$

$$S_x = -9x, \quad S = 6y, \quad S_y = 0. \quad \text{c} \tag{23}$$

Durch Einsetzen kann man sich davon überzeugen, daß die Werte (23) nicht nur den Gleichungen (5), sondern auch den Gleichungen (17) und (18) genügen. Die Schnittkraftprojektionen (23, a) bzw. (23, b) bzw. (23, c) charakterisieren denselben Membranzustand, denn sie genügen den sechs Gleichungen (15).

Satz III

Ist der Membranzustand der Schale ein Gleichgewichtszustand, so genügen die äußeren Kräfte $d\mathbf{K}$ (Bild 1) und die Schnittkraftprojektionen (19) der Gleichung

$$\int_{f+b} \mathbf{T}\,d\mathbf{K} = \int_f \{(V_{,z} + W_{,y})Q\,df_x + (W_{,x} + U_{,z})R\,df_y + (U_{,y} + V_{,x})S\,df_z\}, \tag{24}$$

wobei $(U(y, z), V(z, x), W(x, y)$ willkürlich wählbare Funktionen sind und der Vektor $\mathbf{T}$ durch die Formel

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}U(y, z) + \mathbf{j}V(z, x) + \mathbf{k}W(x, y) \tag{25}$$

bestimmt ist. $\mathbf{T}\,d\mathbf{K}$ bedeutet das skalare Produkt der Vektoren $\mathbf{T}$ und $d\mathbf{K}$.

Beweis des Satzes III

Der Integralsatz von Stokes besagt, daß für drei Funktionen $X(y, z)$, $Y(z, x)$, $Z(x, y)$ die Gleichung

$$\int_b (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_f \{(Z_{,y} - Y_{,y})\cos\alpha + (X_{,z} - Z_{,y})\cos\beta + (Y_{,x} - X_{,y})\cos\gamma\}df \tag{26}$$

gilt. Setzt man hier

$$X = V[R_z y_{,z} + R y_{,x}] - W[S z_{,x} + S_y z_{,y}],$$
$$Y = W[S_x z_{,x} + S z_{,y}] - U[Q x_{,y} + Q_z x_{,z}],$$
$$Z = U[Q_y x_{,y} + Q x_{,z}] - V[R y_{,z} + R_x y_{,x}] \tag{27}$$

ein, so entsteht die Gleichung

$$-\int_f \{U[(Q_y x_{,y})_{,y} + (Q x_{,z})_{,y} + (Q x_{,y})_{,z} + (Q_z x_{,z})_{,z}] \cos\alpha$$
$$+ V[\ldots] \cos\beta + W[\ldots] \cos\gamma\}\, df$$
$$+\int_b \{U[Q_y x_{,y}\, dz + Q x_{,z}\, dz - Q x_{,y}\, dy - Q_z x_{,z}\, dy]$$
$$+ V[\ldots] + W[\ldots]\} =$$
$$=\int_f \{[U_{,y}(Q_y x_{,y} + Q x_{,z}) + U_{,z}(Q x_{,y} + Q_z x_{,z})] \cos\alpha$$
$$+ [\ldots] \cos\beta + [\ldots] \cos\gamma\}\, df. \tag{28}$$

Es ist

$$d\mathbf{K} = \mathbf{i}\, dK_x + \mathbf{j}\, dK_y + \mathbf{k}\, dK_z \tag{29}$$

sowohl an f als auch an b (Bild 1). An f ist gemäß den Formeln (14) und (1)

$$dK_x = k_{xx} \cos\alpha \cdot df, \quad dK_y = k_{yy} \cos\beta \cdot df, \quad dK_z = k_{zz} \cos\gamma \cdot df, \tag{30}$$

wobei für k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} die Gleichungen (17, c), (18, c), (5, c) gelten. An b ist

$$dK_x = Q_y x_{,y}\, dz + Q x_{,z}\, dz - Q x_{,y}\, dy - Q_z x_{,z}\, dy, \qquad \text{a}$$
$$dK_y = R_z y_{,z}\, dx + R y_{,x}\, dx - R y_{,z}\, dz - R_x y_{,x}\, dz, \qquad \text{b}$$
$$dK_z = S_x z_{,x}\, dy + S z_{,y}\, dy - S z_{,x}\, dx - S_y z_{,y}\, dx. \qquad \text{c} \tag{31}$$

Die Richtigkeit der Gleichung (31, c) geht aus Bild 2 hervor. (31, a) und (31, b) folgen aus (31, c) durch eine zyklische Vertauschung der Bezeichnungen. An f gelten auch die Beziehungen

$$Q_y x_{,y} + Q x_{,z} = -S x_{,z}, \quad Q x_{,y} + Q_z x_{,z} = -R x_{,y},$$
$$R_z y_{,z} + R y_{,x} = -Q y_{,x}, \quad R y_{,z} + R_x y_{,x} = -S y_{,z},$$
$$S_x z_{,x} + S z_{,y} = -R z_{,y}, \quad S z_{,x} + S_y z_{,y} = -Q z_{,x} \tag{32}$$

und

$$x_{,y} \cos\alpha = -\cos\beta, \quad x_{,z} \cos\alpha = -\cos\gamma,$$
$$y_{,z} \cos\beta = -\cos\gamma, \quad y_{,x} \cos\beta = -\cos\alpha,$$
$$z_{,x} \cos\gamma = -\cos\alpha, \quad z_{,y} \cos\gamma = -\cos\beta. \tag{33}$$

(32) folgt aus (15) und aus den Differentiationsformeln $x_{,y}y_{,z} = -x_{,z}, y_{,z}z_{,x} = -y_{,x}, \ldots$ Die Gültigkeit von (33) ersieht man durch Anschauung. Infolge der Beziehungen (30), (31), (32), (33) nimmt die Gleichung (28) die Form

$$\int_f (U\,dK_x + V\,dK_y + W\,dK_z) + \int_b (U\,dK_x + V\,dK_y + W\,dK_z) = \int_f (U_{,y}\,S\cos\gamma + \ldots + W_{,y}\,Q\cos\alpha)df \tag{34}$$

an. Wenn noch

$$U\,dK_x + V\,dK_y + W\,dK_z = \mathbf{T}\,d\mathbf{K} \tag{35}$$

geschrieben wird, geht (34) in (24) über. Damit ist der Satz III bewiesen.

Zweite Fortsetzung des Beispiels

Jetzt sei untersucht, wie die Gleichung (24) sich in dem auf Bild 3 dargestellten Fall gestaltet. Der willkürlich wählbare Vektor sei

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}z^3 + \mathbf{j}x + \mathbf{k}xy\,, \tag{36}$$

das heißt,

$$U = z^3\,, \qquad V = x\,, \qquad W = xy\,. \tag{37}$$

In dem im Bild 3 dargestellten Fall ist $z = x^2y$. Die Grundrißfigur von f ist ein Quadrat, begrenzt durch die Geraden $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$. Man hat also die Werte

		U	V	W
an f		x^6y^3	x	xy
an der Seite	$y = 0$	0	x	0
	$x = 1$	y^3	1	y
	$y = 1$	x^6	x	x
	$x = 0$	0	0	0

Die Flächenkräfte sind durch die Werte (7) gegeben. Somit ist

$$d\mathbf{K} = \mathbf{i}k_{xz}\,df_x = \mathbf{i}3df_x \quad \text{an} \quad f.$$

Daraus und aus Bild 2 folgen die Werte

		dK_x	dK_y	dK_z
an f		$k_{xz}df_z$	0	0
an der Seite	$y = 0$	$-S dx$	$-S_y dx$	$-(Sz_{,x} + S_y z_{,y})dx$
	$x = 1$	$S_x dy$	$S dy$	$(S_x z_{,x} + S z_{,y})dy$
	$y = 1$	$S dx$	$S_y dx$	$(S z_{,x} + S_y z_{,y})dx$
	$x = 0$	$-S_x dy$	$-S dy$	$-(S_x z_{,x} + S z_{,y})dy$

Diese lauten mit Rücksicht auf (8)

		dK_x	dK_y	dK_z
an f		$3dxdy$	0	0
an der Seite	$y=0$	0	0	0
	$x=1$	$-9dy$	$6ydy$	$-12ydy$
	$y=1$	$6dx$	0	$12xdx$
	$x=0$	0	$-6ydy$	0

Die linke Seite der Gleichung (24) hat also den Wert

$$\int_0^1\int_0^1 x^6y^2\,dx\,dy+\int_0^1 y^3(-9)dy+\int_0^1 1.6\,y\,dy$$

$$+\int_0^1 y(-12y)dy+\int_0^1 x^6\,6\,dy+\int_0^1 x\,12x\,dx=$$

$$=\frac{3}{28}-\frac{9}{4}+3-4+\frac{6}{7}+4=\frac{12}{7}. \tag{38}$$

Aus (37) folgt

$$\begin{aligned} V_{,z}&=0\,, & W_{,y}&=x\,,\\ W_{,x}&=y\,, & U_{,z}&=3z^2\,,\\ U_{,y}&=0\,, & V_{,x}&=1\quad, \end{aligned} \tag{39}$$

woraus sich mit Rücksicht auf (21)

$$\begin{aligned} (V_{,z})_f&=0\,, & (W_{,y})_f&=y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\,,\\ (W_{,x})_f&=zx^{-2}\,, & (U_{,z})_f&=3z^2\,,\\ (U_{,y})_f&=0\,, & (V_{,x})_f&=1 \end{aligned}$$

ergibt. Gemäß (23) hat man die Werte

$$Q=-6y\,,\quad R=12zx^{-2}\,,\quad S=6y\,. \tag{40}$$

Nach den Formeln (1) dürfen wir schreiben

$$df_x=-dy\,dz\,,\quad df_y=-dz\,dx\,,\quad df_z=dx\,dy\,. \tag{41}$$

Die rechte Seite der Gleichung (24) hat also den Wert

$$\int_f \Big\{\Big(0 + y^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\Big)\Big(-6y\Big)\Big(-dy\,dz\Big)$$

$$+ (zx^{-2} + 3z^2)12zx^{-2}(-dz\,dx) + (0+1)6y\,dx\,dy\Big\} =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{z=0}^{z=y} 6y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\,dz\Big)\,dy - \int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{z=0}^{z=x^2}[12z^2x^{-4}+36z^3x^{-2}]dz\Big)\,dx +$$

$$+ \int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} 6y\,dy\Big)\,dx = \frac{4}{3} - \frac{55}{21} + 3 = \frac{12}{7}. \tag{42}$$

Der Wert (42) ist gleich dem Wert (38). Diese Feststellung steht in Einklang mit Satz III.

Satz IV

Der Membranzustand der Schale sei durch die Schnittkraftprojektionen $Q(y, z)$, $R(z, x)$, $S(x, y)$ charakterisiert. Die Winkel, die die Flächennormale mit den Richtungen x, y, z bildet, seien mit α, β, γ bezeichnet. $\mathbf{T}$ sei ein von den Punkten von f abhängiger Vektor. Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z gewählt. Der Vektor $\mathbf{T}$ sei in der Form (25) angeschrieben. Ein von den Punkten von f abhängiger Skalar Θ sei durch die Formel

$$\Theta = (V_{,z} + W_{,y})Q\cos\alpha + (W_{,x} + U_{,z})R\cos\beta + (U_{,y} + V_{,x})S\cos\gamma \tag{43}$$

bestimmt. Dann bleibt Θ gegenüber einer orthogonalen Koordinatentransformation invariant.

Im Satz IV wurde angenommen, daß der Vektor $\mathbf{T}$ unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, das heißt, die Funktionen $U(y, z)$, $V(z, x)$, $W(x, y)$ sich als Vektorkomponenten transformieren lassen.

Beweis des Satzes IV

Hierzu kann der Satz III wie folgt verwendet werden. Die Gleichung (24) läßt sich in der Form

$$\int_{f+b} \mathbf{T}\,d\mathbf{K} = \int_f \Theta\,df \tag{44}$$

anschreiben und ist nicht nur für die ganze Mittelfläche, sondern auch für jeden ihrer Teile gültig. Im Fall eines Teiles bleibt sowohl der Wert der linken Seite von (44), als auch der Wert df invariant. Dabei kann (44) nur dann gültig bleiben, wenn auch Θ an f invariant bleibt. Damit ist der Satz IV bewiesen. —

Dieser Beweis des Satzes IV geschah unter der Benützung des Satzes III. Ein Beweis des Satzes IV ohne Benützung des Satzes III [etwa mittels der Anwendung der Formeln der orthogonalen Koordinaten- und Schnittkrafttransformation nach Muster der Berechnung von (49) bis (63)] ist auch möglich, aber er scheint zu langwierig.

Dritte Fortsetzung des Beispiels

f ist im Bild 3 veranschaulicht. Jener Punkt von f, welcher die Koordinaten

$$x = 0{,}5\,, \quad y = 0{,}5\,, \quad z = 0{,}125 \tag{45}$$

hat, sei mit P bezeichnet. Es sind in P gemäß (39)

$$V_{,z} = 0\,, \quad W_{,y} = 0{,}5\,, \quad W_{,x} = 0{,}5\,, \quad U_{,z} = \frac{3}{64}\,, \quad U_{,y} = 0\,, \quad V_{,x} = 1\,,$$

gemäß (40)

$$Q = -3\,, \quad R = 6\,, \quad S = 3\,, \tag{46}$$

gemäß (21)

$$\cos\alpha = -(1 + x_{,y}^2 + x_{,z}^2)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 + \frac{1}{4}\,y^{-3}z + \frac{1}{4}\,y^{-1}z^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = -2/\sqrt{21}\,,$$

$$\cos\beta = -(y_{,x}^2 + 1 + y_{,z}^2)^{-\frac{1}{2}} = -(4z^2x^{-6} + 1 + x^{-4})^{-\frac{1}{2}} = -1/\sqrt{21}\,,$$

$$\cos\gamma = (z_{,x}^2 + z_{,y}^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = (4x^2y^2 + x^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} = 4/\sqrt{21}\,. \tag{47}$$

Der Wert von Θ im Punkt P sei mit Θ_p bezeichnet. Es ist gemäß (43)

$$\Theta_p = (0 + 0{,}5)(-3)\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right) + \left(0{,}5 + \frac{3}{64}\right)6\left(-\frac{1}{\sqrt{21}}\right) +$$

$$+ (0 + 1)3\,\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{125}{224}\sqrt{21}\,. \tag{48}$$

Wir haben also die Koordinaten x, y, z benützt und sind so zum Ergebnis (48) gelangt.

Eine orthogonale Koordinatentransformation sei durch die Gleichungen

$$\bar{x} = x\,, \quad \bar{y} = \frac{4}{5}\,y + \frac{3}{5}\,z\,, \quad \bar{z} = -\frac{3}{5}\,y + \frac{4}{5}\,z \tag{49}$$

das heißt durch

$$x = \bar{x}\,, \quad y = \frac{4}{5}\,\bar{y} - \frac{3}{5}\,\bar{z}\,, \quad z = \frac{3}{5}\,\bar{y} + \frac{4}{5}\,\bar{z} \tag{50}$$

vorgeschrieben und es sei jetzt die Formel

$$\bar{\Theta} = (\bar{V}_{,\bar{z}} + \bar{W}_{,\bar{y}})\bar{Q}\cos\bar{\alpha} + (\bar{W}_{,\bar{x}} + \bar{U}_{,\bar{z}})\bar{R}\cos\bar{\beta} + (\bar{U}_{,\bar{y}} + \bar{V}_{,\bar{x}})\bar{S}\cos\bar{\gamma} \quad (51)$$

verwendet.

Die Transformation der Koordinaten (45) erfolgt mit Hilfe der Formeln (49) und führt zu den Werten

$$\bar{x}_p = 0{,}5\,, \quad \bar{y}_p = 0{,}475\,, \quad \bar{z}_p = -0{,}2\,. \quad (52)$$

Wird (50) in (21) eingeführt, so nehmen die Gleichungen von f die Form

$$\bar{x} = \left(\frac{3\bar{y} + 4\bar{z}}{4\bar{y} - 3\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{y} = \frac{3\bar{x}^2\bar{z} + 4\bar{z}}{4\bar{x}^2 - 3}, \quad \bar{z} = \frac{4\bar{x}^2\bar{y} - 3\bar{y}}{3\bar{x}^2 + 4} \quad (53)$$

an.

Die Transformation der Vektorkomponenten (37) wird, wie folgt, durchgeführt. Gemäß (37) und (50) schreibt man

$$U(y,z) = z^3 = \left(\frac{3}{5}\bar{y} + \frac{4}{5}\bar{z}\right)^3, \quad \text{a}$$

$$\frac{4}{5}V(z,x) + \frac{3}{5}W(x,y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}xy = \frac{4}{5}\bar{x} +$$

$$+ \frac{3}{5}\bar{x}\left(\frac{4}{5}\bar{y} - \frac{3}{5}\bar{z}\right) = \frac{4}{5}\bar{x} + \frac{16}{25}\overline{xy} - \frac{9}{25}\overline{xz}\,, \quad \text{b}$$

$$-\frac{3}{5}V(z,x) + \frac{4}{5}W(x,y) = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}xy$$

$$= -\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{x}\left(\frac{4}{5}\bar{y} - \frac{3}{5}\bar{z}\right) = -\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{16}{25}\overline{xy} - \frac{12}{25}\overline{xz}\,. \quad \text{c} \quad (54)$$

Um $\bar{U}(y,z)$, $\bar{V}(z,x)$, $\bar{W}(x,y)$ zu erhalten, wird (54) mit (53) verknüpft. So wird

$$\bar{U} = \left(\frac{3}{5}\bar{y} + \frac{4}{5}\bar{z}\right)^3, \quad \text{a}$$

$$\bar{V} = \frac{4}{5}\bar{x} + \frac{12}{25}\bar{x}\frac{3\bar{x}^2\bar{z} + 4\bar{z}}{4\bar{x}^2 - 3} - \frac{9}{25}\overline{zx}\,, \quad \text{b}$$

$$\bar{W} = -\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{16}{25}\overline{xy} - \frac{12}{25}\bar{x}\frac{4\bar{x}^2\bar{y} - 3\bar{y}}{3\bar{x}^2 + 4}\,. \quad \text{c} \quad (55)$$

Die Differentiation liefert dann den Ausdruck

$$\bar{U}_{,\bar{y}} = \frac{9}{25}(3\bar{y} + 4\bar{z})^2\,. \quad (56)$$

Daraus erhält man den Wert

$$(\overline{U}_{,\bar{y}})_p = \frac{9}{125}\,(3 \cdot 0{,}475 - 4 \cdot 0{,}2)^2 = \frac{9}{320}\,. \tag{57}$$

In ähnlicher Weise erhält man die Werte

$$(\overline{U}_{,\bar{z}})_p = \frac{3}{80}\,, \qquad (\overline{V}_{,\bar{z}})_p = -\frac{3}{4}\,, \qquad (\overline{V}_{,\bar{x}})_p = \frac{7}{5}\,,$$

$$(\overline{W}_{,\bar{x}})_p = -\frac{31}{95}\,, \qquad (\overline{W}_{,\bar{y}})_p = \frac{8}{19}\,. \tag{58}$$

Die Transformation der Schnittkraftprojektionen (46) erfolgt mit Hilfe der leicht verifizierbaren Formeln

$$\begin{aligned}
\bar{Q}\cos\bar{\alpha} &= Q\cos\alpha\cdot\left(b_2c_3 + c_2b_3 + b_2b_3\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} - c_2c_3\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\\
&\quad + R\cos\beta\cdot\left(c_2a_3 + a_2c_3 - c_2c_3\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} - a_2a_3\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)\\
&\quad + S\cos\gamma\cdot\left(a_2b_3 + b_2a_3 - a_2a_3\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - b_2b_3\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right),\\
\bar{R}\cos\bar{\beta} &= Q\cos\alpha\cdot\left(b_3c_1 + c_3b_1 - b_3b_1\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} - c_3c_1\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\\
&\quad + R\cos\beta\cdot\left(c_3a_1 + a_3c_1 - c_3c_1\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} - a_3a_1\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)\\
&\quad + S\cos\gamma\cdot\left(a_3b_1 + b_3a_1 - a_3a_1\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - b_3b_1\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right),\\
\bar{S}\cos\bar{\gamma} &= Q\cos\alpha\cdot\left(b_1c_2 + c_1b_2 - b_1b_2\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} - c_1c_2\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\\
&\quad + R\cos\beta\cdot\left(c_1a_2 + a_1c_2 - c_1c_2\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} - a_1a_2\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\right)\\
&\quad + S\cos\gamma\cdot\left(a_1b_2 + b_1a_2 - a_1a_2\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - b_1b_2\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right),
\end{aligned} \tag{59}$$

wobei die Konstanten a_1, b_1, ..., c_3 die Koeffizienten der orthogonalen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= a_1x + b_1y + c_1z\,,\\
\bar{y} &= a_2x + b_2y + c_2z\,,\\
\bar{z} &= a_3x + b_3y + c_3z
\end{aligned} \tag{60}$$

sind. Im vorliegenden Fall ist also

$$a_1 = 1\,, \quad b_1 = 0\,, \quad c_1 = 0\,, \quad a_2 = 0\,, \quad b_2 = \frac{4}{5}\,,$$

$$c_2 = \frac{3}{5}\,, \quad a_3 = 0\,, \quad b_3 = -\frac{3}{5}\,, \quad c_3 = \frac{4}{5}\,. \tag{61}$$

Führt man (46), (47), (61) in (59) ein, so findet man, daß im Punkt P die Werte

$$\bar{Q}\cos\bar{\alpha} = \frac{24}{25\sqrt{21}}\,, \quad \bar{R}\cos\bar{\beta} = -\frac{12}{\sqrt{21}}\,, \quad \bar{S}\cos\bar{\gamma} = \frac{6}{\sqrt{21}} \tag{62}$$

gelten. Wenn noch die Werte (57), (58), (62) benützt werden, so ergibt sich gemäß (51)

$$\bar{\Theta}_p = \left(-\frac{3}{4} + \frac{8}{19}\right)\frac{24}{25\sqrt{21}} + \left(-\frac{31}{95} + \frac{3}{80}\right)\left(-\frac{12}{\sqrt{21}}\right)$$
$$+ \left(\frac{9}{320} + \frac{7}{5}\right)\frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{125}{224}\sqrt{21}\,. \tag{63}$$

Der Wert (63) ist gleich dem Wert (48). Diese Feststellung steht in Einklang mit Satz IV.

Rückblick auf die Sätze III und IV

Sowohl im Satz III, als auch im Satz IV ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}U(y,z) + \mathbf{j}V(z,x) + \mathbf{k}W(x,y)$$

ein von den Punkten von f abhängiger Vektor, wobei die Funktionen $U(y,z)$, $V(z,x)$, $W(x,y)$ willkürlich wählbar sind. Infolge der orthogonalen Koordinatentransformation erleidet der Vektor $\mathbf{T}$ eine Transformation, so daß er in der Form

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{i}}\bar{U}(y,z) + \bar{\mathbf{j}}\bar{V}(\bar{z},\bar{x}) + \bar{\mathbf{k}}\bar{W}(\bar{x},\bar{y})$$

erscheint. Die Invarianz des Berechnungsvorganges (43) gegenüber einer orthogonalen Koordinatentransformation besteht nun darin, daß der Wert des Ausdruckes (51) gleich dem Wert des Ausdruckes (43) ist. Das Besagte wurde zahlenmäßig durch die von (45) bis zu (63) geführte Entwicklung veranschaulicht: hat man den Berechnungsvorgang (43) unmittelbar durchgeführt, so gelangt man zum Ergebnis (48). Hat man zuerst die Transformation durchgeführt und nur dann den Berechnungsvorgang (51), so gelangt man zum Ergebnis (63). Der Wert (63) ist gleich dem Wert (48); darin besteht die Invarianz des Berechnungsvorganges (43) gegenüber einer orthogonalen Koordinaten transformation.

Ausblick auf die nachstehenden Entwicklungen

Aus dem Satz III [Formel (24)] werden einige Schlüsse dadurch gezogen, daß die Funktionen $U(y, z)$, $V(z, x)$, $W(x, y)$ speziell gewählt werden, und zwar so, daß sie das erste Mal die Komponenten der virtuellen Verrückung, das zweite Mal die Pucherschen Funktionen, das dritte Mal die Komponenten des Ortsvektors bedeuten. In dieser Weise wird sich das erste Mal der Satz V, das zweite Mal der Satz VII, das dritte Mal die Gleichung (91) ergeben.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Eine Fassung dieses Prinzips lautet: Im Falle des Gleichgewichtes ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gleich der virtuellen Deformationsarbeit. Diese Aussage sei in der Form

$$A_a = A_d \tag{64}$$

angeschreiben, wobei A_a die Arbeit der äußeren Kräfte A_d die virtuelle Deformationsarbeit bezeichnet. In dieser Fassung bezieht sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen auf ein-, zwei- und dreidimensionale Körper, also auch auf Schalen. (Jene andere Fassung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, welche u. a. in »Hütte« des Ingenieurs Taschenbuch, Aufl. 27, Bd. I, S. 338 oder Aufl. 28, Bd. I, S. 666 zu finden ist, wird hier nicht verwendet.) Die Aussage (64) gilt selbstverständlich auch dann, wenn A_a die wirkliche Arbeit der äußeren Kräfte und A_d die wirkliche Deformationsarbeit ist.

Es fragt sich nun, wie gestalten sich die linke und rechte Seite von (64) im Falle einer Schale, in welcher ein Membranzustand herrscht, der ein Gleichgewichtszustand ist. Zur Beantwortung dieser Frage sei die virtuelle Verrückung von f durch den Vektor (25) charakterisiert. Dann ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte durch die Formel

$$A_a = \int_{f+b} \mathbf{T}\, d\mathbf{K}\,, \tag{65}$$

und die virtuelle Deformationsarbeit durch die Formel

$$A_d = \int_f \{(V_{,z} + W_{,y})\, Q df_x + (W_{,x} + U_{,z})\, R df_y + (U_{,y} + V_{,x})\, S df_z\} \tag{66}$$

ausgedrückt. Die Richtigkeit der Formel (65) ist offensichtlich. Die Richtigkeit der Formel (66) geht aus (24), (64), (65) hervor. Also, wenn in der Schale ein Membranzustand herrscht, der ein Gleichgewichtszustand ist, so läßt die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte sich durch (65) und die virtuelle Deformationsarbeit durch (66) ausdrücken.

In der Gleichung (66) bedeutet f die ganze Mittelfläche, (Bild 1). Die Gleichung (66) bleibt offensichtlich auch dann gültig, wenn f einen willkürlich gewählten Teil der Mittelfläche bedeutet. Daraus folgt der

Satz V

Ist der Membranzustand der Schale ein Gleichgewichtszustand, ist die virtuelle Verrückung der Mittelfläche in der Form (25) angeschreiben und ist Θ durch die Formel (43) definiert, so ist Θ gleich der auf die Flächeneinheit von f bezogenen virtuellen Deformationsarbeit. — Damit erhält die Invariante Θ eine physikalische Deutung.

Bemerkung über den Beweis des Satzes V

Wir haben den Satz V als eine Folge des Satzes III erhalten. Ein anderer Weg, welcher auch zum Satz V führt, ist der folgende. Die Schale wird als ein Teil eines dreidimensionalen Körpers betrachtet (auf den Nachweis, daß dies erlaubt ist, sei hier verzichtet). Die Benützung der Funktionen $U(y, z)$, $V(z, x)$, $W(x, y)$ und des bekannten Ausdruckes

$$\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \varepsilon_z\sigma_z + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{zx}\tau_{zx} + \gamma_{xy}\tau_{xy}$$

führt dann mit $\varepsilon_x = U_{,x} = 0 \ldots$, $\gamma_{xy} = U_{,y} + V_{,x}$ zu (43).

In einem Punkt der Mittelfläche, in welchem die Flächennormale parallel mit einer Koordinatenachse ist (sei es die Koordinatenachse z), erscheint der Wert des Ausdruckes (43) in der Gestalt $\infty . 0$ und soll daher als ein Grenzwert berechnet werden. Um dies zu tun, schreibt man statt (25)

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}A(x, y) + \mathbf{j}B(x, y) + \mathbf{k}C(x, y) . \tag{67}$$

Aus (15, b) und (15, c) entnimmt man

$$Q = S_y x_{,y} - S , \qquad R = S_x y_{,x} - S . \tag{68}$$

Dabei ist es erlaubt (infolge des Satzes IV) die Grenzwertberechnung für den Fall

$$\alpha = \beta \tag{69}$$

durchzuführen. Unter der Benützung von (67), (68), (69) kann man (43) auf eine Form bringen, die zur Durchführung der Grenzwertberechnung geeignet ist. Die Grenzwertberechnung führt zur Formel

$$\Theta = A_{,x}S_x + (A_{,y} + B_{,x})S + B_{,y}S_y . \tag{70}$$

Also, in einem Punkt der Mittelfläche, in welchem die Flächennormale parallel zur Achse z ist, kann Θ durch die Formel (70) ausgedrückt werden.

Betrachtet man den Ausdruck (70), so sieht man, daß dieser nichts anderes als die auf die Flächeneinheit bezogene virtuelle Deformationsarbeit ist. Diese Feststellung steht in Einklang mit Satz V.

Vierte Fortsetzung des Beispiels

Die Mittelfläche ist auf Bild 3 dargestellt. Die Flächenkraftkomponenten sind durch (7) gegeben. Gemäß (36) ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}z^3 + \mathbf{j}x + \mathbf{k}xy\,. \tag{71}$$

Der Punkt P von f hat die Koordinaten (45). Wie mit Hilfe der Formel (43) berechnet wurde, hat die Invariante Θ im Punkt P den Wert (48).

Jener Punkt von f, welcher die Koordinaten

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 0 \tag{72}$$

hat, sei mit D bezeichnet, und sei jetzt der Wert von Θ im Punkt D berechnet. In diesem Punkt ist die Flächennormale parallel zur Koordinatenachse z. Statt der Formel (43) wird daher die Formel (70) benützt. Statt (71) wird gemäß (67)

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}\,x^6y^3 + \mathbf{j}x + \mathbf{k}xy \tag{73}$$

geschrieben, das heißt, $A = x^6y^3$, $B = x$, $C = xy$. Im Punkt D ergibt sich damit $A_{,x} = 0$, $A_{,y} = 0$, $B_{,x} = 1$, $B_{,y} = 0$, und infolge von (23) auch $S_x = 0$, $S = 6$, $S_y = 0$. Somit liefert (70) den Wert $\Theta_D = 0+(0+1)\,6+0 = 6$.

Puchersche Funktionen

Die Konstanten x_0, y_0, z_0 seien die Koordinaten eines willkürlich gewählten Punktes von f. Die Schnittkraftprojektionen (11, a) bzw. (11, b) bzw. (11, c) charakterisieren denselben Membranzustand. Drei Funktionen

$$U(y,z)\,, \qquad V(z,x)\,, \qquad W(x,y) \tag{74}$$

werden Puchersche Funktionen des Membranzustandes genannt, wenn die Formeln

$$\begin{aligned}
&Q_y = U_{,zz} - \int_{y_0}^{y} k_{yx}dy\,, \quad Q = -\,U_{,yz}\,, \quad Q_z = U_{,yy} - \int_{z_0}^{z} k_{zx}dz\,,\\
&R_z = V_{,xx} - \int_{z_0}^{z} k_{zy}dz\,, \quad R = -\,V_{,zx}\,, \quad R_x = V_{,zz} - \int_{x_0}^{x} k_{xy}dx\,,\\
&S_x = W_{,yy} - \int_{x_0}^{x} k_{xz}dx\,, \quad S = -\,W_{,xy}\,, \quad S_y = W_{,xx} - \int_{y_0}^{y} k_{yz}dy
\end{aligned} \tag{75}$$

die Schnittkraftprojektionen (11, a) bzw. (11, b) bzw. (11, c) liefern.

Die Pucherschen Funktionen (74) werden in bezug auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) normiert genannt, wenn sie im Punkt (x_0, y_0, z_0) die Bedingung

$$V_{,z} + W_{,y} = W_{,x} + U_{,z} = U_{,y} + V_{,x} = 0 \tag{76}$$

erfüllen. Man kann die Normierung (76) immer leicht durchführen, indem man über die linearen Glieder der Funktionen (74) in geeigneter Weise verfügt, denn die Werte (75) werden durch die linearen Glieder der Funktionen (74) gar nicht beeinflußt.

Die Differentialgleichungen der Pucherschen Funktionen sind, wenn der Membranzustand ein Gleichgewichtszustand ist, aus der Literatur bekannt. Man findet die Differentialgleichung für die Puchersche Funktion $W(x, y)$ u. a. auf Seite 16 der Monographie [1] (statt der Bezeichnung W wird dort die Bezeichnung F benützt). Daraus kann man durch eine zyklische Vertauschung der Bezeichnungen die Differentialgleichungen für die Pucherschen Funktionen $U(y, z)$ und $V(z, x)$ erhalten. Die Benützung dieser Differentialgleichungen ergab in der Arbeit [2] den

Satz VI

Sind die äußeren Kräfte der Schale nur Membrankräfte, die auf b wirken, aber keine Flächenkräfte, und herrscht in der Schale ein Membranzustand, der ein Gleichgewichtszustand ist, und sind die Pucherschen Funktionen

$$U(y, z)\,, \qquad V(z, x)\,, \qquad W(x, y) \tag{77}$$

dieses Membranzustandes in bezug auf einen Punkt (x_0, y_0, z_0) von f normiert, so sind die Pucherschen Funktionen (77) in bezug auf jeden Punkt von f normiert, das heißt, es gelten die Gleichungen

$$V_{,z} + W_{,y} = 0\,, \qquad W_{,x} + U_{,z} = 0\,, \qquad U_{,y} + V_{,x} = 0 \tag{78}$$

in jedem Punkt von f.

Fünfte Fortsetzung des Beispiels

Die Schnittkraftprojektionen

$$\begin{aligned} &Q_y = y^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\,, && Q = y^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}}\,, && Q_z = y^{-\frac{5}{2}} z^{\frac{3}{2}}\,, && \text{a} \\ &R_z = 2x^2\,, && R = 0\,, && R_x = 0\,, && \text{b} \\ &S_x = 0\,, && S = 0\,, && S_y = -2 && \text{c} \end{aligned} \tag{79}$$

charakterisieren den selben Membranzustand, denn sie erfüllen die Bedingungen (15). Dieser Membranzustand ist ein Gleichgewichtszustand, denn (79,a) bzw. (79, b) bzw. (79, c) genügen den Gleichungen (17) bzw. (18) bzw. (5), falls $k_{xx} = k_{xy} = \ldots = k_{zz} = 0$ ist.

$$U = \frac{4}{3} y^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} + y - z\,, \qquad V = \frac{1}{6} x^4 - x + \frac{5}{6}\,, \qquad W = -x^2 + x \tag{80}$$

sind zu den Membranzustand (79) gehörige Puchersche Funktionen, denn sie liefern mit Hilfe der Formeln (75) die Werte (79). Durch Einsetzen findet man, daß die Pucherschen Funktionen (80) den Gleichungen (78) genügen; sie sind also in bezug auf jeden Punkt von f normiert. Dieselbe Feststellung gilt auch für die Pucherschen Funktionen

$$U = \frac{4}{3} y^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}, \qquad V = \frac{1}{6} x^4, \qquad W = -x^2, \tag{81}$$

die aus (80) durch Weglassen der linearen Glieder entstanden sind. Diese Ergebnisse stehen in Einklang mit Satz VI.

Membranrandkräfte

Herrscht in der Schale ein Membranzustand, so sind jene äußeren Kräfte der Schale, welche auf b wirken (Bild 1), gleichfalls Membrankräfte. Wir werden sie Membranrandkräfte nennen. Für die Membranrandkräfte gelten die Formeln (31), und auch die Formeln

$$\begin{aligned} dK_x &= Rx_{,y}\, dy - Sx_{,z}\, dz, \\ dK_y &= Sy_{,z}\, dz - Qy_{,x}\, dx, \\ dK_z &= Qz_{,x}\, dx - Rz_{,y}\, dy. \end{aligned} \tag{82}$$

Die Formeln (82) lassen sich ebenso herleiten, wie die Formeln (31).

Der Satz II bestätigt die Behauptung: sind (3) und (4) gegeben, so existieren im allgemeinen unendlich viele Membranzustände, deren jeder ein Gleichgewichtszustand ist, und damit existieren auch unendlich viele Systeme von Membranrandkräften, von welchen jedes zu einem solchen Membranzustand gehört, welcher ein Gleichgewichtszustand ist.

Satz VII

Die Membranzustände M', M'', M''', ... seien solche Gleichgewichtszustände der Schale, bei welchen die Flächenkräfte gleich, aber die Membranrandkräfte nicht unbedingt gleich sind. Die Funktionen

$$\begin{aligned} &U'(y,z), \quad V'(z,x), \quad W'(x,y), \\ &U''(y,z), \quad V''(z,x), \quad W''(x,y), \\ &U'''(y,z), \quad V'''(z,x), \quad W'''(x,y), \end{aligned} \tag{83}$$

seien zu M', M'', M''', ... gehörige normierte Puchersche Funktionen. Die Vektoren $\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}''$, $\mathbf{T}'''$, ... seien mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{i}U'(y,z) + \mathbf{j}V'(z,x) + W'(x,y), \\ \mathbf{T}'' &= \mathbf{i}U''(y,z) + \mathbf{j}V''(z,x) + W''(x,y), \\ \mathbf{T}''' &= \mathbf{i}U'''(y,z) + \mathbf{j}V'''(z,x) + W'''(x,y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{84}$$

bestimmt. Der Membranzustand M derselben Schale sei ein Gleichgewichtszustand, bei welchem die äußeren Kräfte nur Membranrandkräfte, aber keine Flächenkräfte sind. Es gilt dann die Beziehung

$$\int_b \mathbf{T}' \, d\mathbf{K} = \int_b \mathbf{T}'' \, d\mathbf{K} = \int_b \mathbf{T}''' \, d\mathbf{K} = \ldots , \tag{85}$$

wobei $d\mathbf{K}$ das Element der zu M gehörigen Membranrandkräfte ist.

Beweis des Satzes VII

Wird $\mathbf{T} = \mathbf{T}' - \mathbf{T}''$ gesetzt und werden die Beziehungen (78) in Betracht genommen, so erhält die Gleichung (24) die Form

$$\int_b (\mathbf{T}' - \mathbf{T}'') d\mathbf{K} = 0 .$$

Daraus folgt

$$\int_b \mathbf{T}' \, d\mathbf{K} = \int_b \mathbf{T}'' \, d\mathbf{K}$$

und ebenso folgen auch die weiteren Teile der Beziehung (85).

Bemerkung über die Invarianz

Unter »Invarianz« sei auch jetzt die Invarianz gegenüber einer orthogonalen Koordinatentransformation gemeint. Die Pucherschen Funktionen wurden durch (74), (75), (76) definiert. Es ist bekannt, daß die Puchersche Funktion im allgemeinen nicht invariant ist, (siehe z. B. die Seiten 5 und 9 des Referats [3]). Wir bemerken, daß auch der aus den normierten Pucherschen Funktionen

$$U(y, z) , \qquad V(z, x) , \qquad W(x, y) \tag{86}$$

gebildete Vektor

$$\mathbf{T} = \mathbf{i} U(y, z) + \mathbf{j} V(z, x) + \mathbf{k} W(x, y) \tag{87}$$

im allgemeinen nicht invariant ist, und sich daher der Satz IV auf diesen Vektor nicht bezieht. Es ist nämlich im Satz IV vorausgesetzt, daß der Vektor (25) invariant ist, das heißt, daß sich die Funktionen $U(y, z)$, $V(z, x)$, $W(x, y)$ als Vektorkomponenten transformieren lassen. Wenn aber $U(y, z)$, $V(z, x)$, $W(x, y)$ Puchersche Funktionen sind, so lassen sie sich nicht als Vektorkomponenten transformieren.

Benützung des Ortsvektors

Jetzt wollen wir die Gleichung (91) herleiten. Deswegen wählen wir für $\mathbf{T}$ den Ortsvektor $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$. Es sei also

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}x(y, z) + \mathbf{j}y(z, x) + \mathbf{k}z(x, y) . \tag{88}$$

Mit Rücksicht auf (43) wird die Gleichung (24) in der Form

$$\int_{f+b} \mathbf{T}\, d\mathbf{K} = \int_{f} \Theta\, df$$

das heißt in der Form

$$\begin{aligned}\int_{f+b}(x\, dK_x + y\, dK_y + z\, dK_z) = \int_f \{&(y_{,z} + z_{,y})Q \cos\alpha \\ &+ (z_{,x} + x_{,y})R \cos\beta \\ &+ (x_{,y} + y_{,x})S \cos\gamma\}\end{aligned} \tag{89}$$

geschrieben. Ebenso wie (43) auf die Form (70) gebracht wurde, ergibt sich jetzt die Gleichung

$$\{\ldots\} = S_\xi + S_\eta\,, \tag{90}$$

wobei ζ und η wie folgt zu verstehen sind: jedem Punkt von f werden eine Achse ζ und eine Achse η zugeordnet, welche in der Tangentialebene liegen und mit der Flächennormale ein rechtwinkliges Dreibein bilden; sonst haben ζ und η beleibig gewählte Richtungen. Aus (89) und (90) folgt also, daß für den Memranzustand der Schale die Gleichung

$$\int_{f+b}(x\, dK_x + y\, dK_y + z\, dK_z) = \int_f (S_\xi + S_\eta) df \tag{91}$$

gilt. Eine analoge Gleichung aus der Theorie des dreidimensionalen Körpers lautet

$$\int_{\omega+\varphi}(x\, dK_x + y\, dK_y + z\, dK_z) = \int_\omega (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) d\omega\,, \tag{92}$$

wobei ω das Volumen, φ die Oberfläche des Körpers ist. Die Herleitung der Gleichung (92) findet man u. a. in der Arbeit [4], worin sie mit (6) numeriert ist.

Ohne Beweis erwähnen wir den folgenden Satz.

Satz VIII

Die aus den Schnittkraftprojektionen (11) gebildeten Ausdrücke

$$\begin{aligned} &RS + SQ + QR\,, && \text{a} \\ &Q_yQ_z - Q^2\,, && \text{b} \\ &R_zR_x - R^2\,, && \text{c} \\ &S_xS_y - S^2 && \text{d} \end{aligned} \tag{93}$$

sind gegenüber einer orthogonalen Koordinatentransformation invariant, und es besteht die Beziehung

$$RS + SQ + QR = Q_yQ_z - Q^2 = R_zR_x - R^2 = S_xS_y - S^2\,. \tag{94}$$

Sechste Fortsetzung des Beispiels

P ist jener Punkt von f, welcher die Koordinaten (45) hat. Aus (40) folgen die Schnittkraftprojektionen

$$Q = -3\,, \qquad R = 6\,, \qquad S = 3$$

in P. Daraus folgt

$$RS + SQ + QR = 6 \cdot 3 + 3(-3) - 3 \cdot 6 = -9\,. \tag{95}$$

Die Transformation der drei Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ geschieht so, wie die Transformation der drei Koordinaten x, y, z, [vgl. die Gleichungen (60) und (61)], also

$$\begin{aligned} \cos\bar{\alpha} &= a_1 \cos\alpha + b_1 \cos\beta + c_1 \cos\gamma\,, \\ \cos\bar{\beta} &= a_2 \cos\alpha + b_2 \cos\beta + c_2 \cos\gamma\,, \\ \cos\bar{\gamma} &= a_3 \cos\alpha + b_3 \cos\beta + c_3 \cos\gamma\,. \end{aligned} \tag{96}$$

Im Falle des Beispiels ist im Punkt P mit Rücksicht auf (47) und (49)

$$\begin{aligned} \cos\bar{\alpha} &= \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}}\,, \\ \cos\bar{\beta} &= \frac{4}{5}\cos\beta + \frac{3}{5}\cos\gamma = \frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{\sqrt{21}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{8}{5\sqrt{21}}\,, \\ \cos\bar{\gamma} &= -\frac{3}{5}\cos\beta + \frac{4}{5}\cos\gamma = -\frac{3}{5}\frac{-1}{\sqrt{21}} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{19}{5\sqrt{21}}\,. \end{aligned} \tag{97}$$

Um die Schnittkraftprojektionen $\bar{Q}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$ in P zu erhalten, benützen wir die Werte (62) und (97). In dieser Weise finden wir

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{24}{25\sqrt{21}} \Big/ \frac{-2}{\sqrt{21}} = -\frac{12}{25}\,, \\ \bar{R} &= -\frac{12}{\sqrt{21}} \Big/ \frac{8}{5\sqrt{21}} = -\frac{15}{2}\,, \\ \bar{S} &= \frac{6}{\sqrt{21}} \Big/ \frac{19}{5\sqrt{21}} = \frac{30}{19}\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\bar{R}\bar{S} + \bar{S}\bar{Q} + \bar{Q}\bar{R} = -\frac{15}{2}\cdot\frac{30}{19} + \frac{30}{19}\left(-\frac{12}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right)\cdot\left(-\frac{15}{2}\right) = -9\,. \tag{98}$$

Der Wert (98) ist dem Wert (95) gleich. Diese Feststellung steht in Einklang mit Satz VIII.

SCHRIFTTUM

1. Csonka, P.: Membranschalen. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin – München, 1966. (Die Titel vieler Quellen, die sich auf den Membranzustand der Schalen beziehen, sind in diesem Buch aufgezählt.)
2. Barta, J.: Eine Analogie in der Membrantheorie der randbelasteten Schale. *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, **14** (1960), 153—158.
3. Menditto, G.: Qualche osservazione in tema di determinazione della funzione degli sforzi per gusci in regime di membrana. Pubblicazione N. 522, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni del Politecnico, Milano 1971. (In dieser Arbeit findet man Hinweise auf eine Reihe von Veröffentlichungen, die sich auf die Puchersche Funktion beziehen.)
4. Josifović, M.: Eine Invariante bei statisch unbestimmten Systemen. *Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl.*, **13**, Bucureşti 1968, 943—950.

Theorems on the Membrane State of Shells. The practical computations referring to membrane state of shells will be carried out usually by using the orthogonal spatial coordinates x, y, z, meanwhile, the stress resultants will be projected upon the plane xy. Present paper contains theoretical expositions on membrane state of shells, using also the orthogonal spatial coordinates x, y, z, however, the stress resultants will be projected not only upon the plane xy, but also upon the planes yz and zx. The expositions lead to an integral theorem from which further theorems follow, concerning the virtual displacements and the Pucher's function.

Теоремы по мембранному состоянию оболочек. При практических расчетах, касающихся мембранного состочния оболочек, как известно, в большинстве случаев используют прямоугольные координаты x, y, *з* Декарта, а секущие силы обычно проектируют на плоскость xy. В данной работе содержатся теоретические развышления в отношении мембранного состояния оболочек, также при использовании прямоугольных координат *x, y, з* Декарта, но таким образом, что секущие силы проектируются не только на плоскость *xy*, но и на плоскости *yз* и *зx*. Теоретическое рассмотрение вопроса дает в результате интегральную теорему, на основе которой вытекают дальнейшие теоремы частично о виртуальных свигах, частично о фун³ции Пухера.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 41—56 (1975)

STATIK FREISTEHENDER PROPORTIONIERTER RÄUMLICHER STOCKWERKRAHMEN

R. ROSMAN*

[Eingegangen am 14. November 1972]

Es handelt sich um eine Methode für die Berechnung von räumlichen Stockwerkrahmen, die aus zwei Systemen von sich in rechtem Winkel kreuzenden ebenen Stockwerkrahmen bestehen und durch keine Mauer versteift sind. Die Methode ist für Fälle bestimmt, wo die beiden ebenen Rahmensysteme aus proportionierten Stockwerkrahmen bestehen, d. h., wenn ihre auf gleicher Höhe befindlichen Knotenpunkte sich unter Einwirkung horizontaler Lasten in gleichem Winkel verdrehen und die Säulenfüße steif eingespannt sind. Das mit Hilfe von Matrizenalgorithmus angegebene Lösungsverfahren ist auch im Falle eines komplizierten Rahmensystems verhältnismäßig einfach.

1. Aufgabenstellung

Räumliche Stockwerkrahmen werden durch zwei sich kreuzende Scharen ebener Stockwerkrahmen gebildet (Bild 1). In der Höhe der Knoten befinden sich Deckenscheiben.

Unter *freistehenden Rahmen* versteht man jene, die nicht durch Wände, Kerne oder dgl., also durch wesentlich steifere Konstruktionsglieder, seitlich abgestützt sind.

Räumliche Rahmen werden als *proportioniert* bezeichnet, wenn die ebenen Rahmen, aus denen sie bestehen, in der von P. CSONKA [1] in die internationale Literatur eingeführten Deutung proportioniert sind. Proportionierte ebene Rahmen sind dadurch gekennzeichnet, daß — bei waagrechter Belastung — die Knotendrehwinkel geschoßweise gleich sind. Die Untersuchung ebener Rahmen ist wesentlich einfacher, wenn sie proportioniert sind [1]; außerdem sind proportionierte Rahmen auch vom wirtschaftlichen Standpunkt günstig.

Wenn man räumliche Rahmen proportioniert gestaltet, kommt die Vereinfachung der Untersuchung noch wesentlich stärker zur Geltung. Im folgenden wird ein Berechungsverfahren zur Untersuchung freistehender proportionierter räumlicher Stockwerkrahmen bei waagrechter Belastung entwickelt. Es beruht auf der Untersuchung proportionierter ebener Stockwerkrahmen. Dabei wird jeder ebene Rahmen als durch einen Kragträger ersetzt behandelt (Bild 2). Die ebenen Rahmen, bzw. die entsprechenden Kragträger seien im weiteren *Rahmenelemente* genannt.

* Prof. Dr. R. ROSMAN, Architectonsky Falcultet, Zagreb Jugoslavia

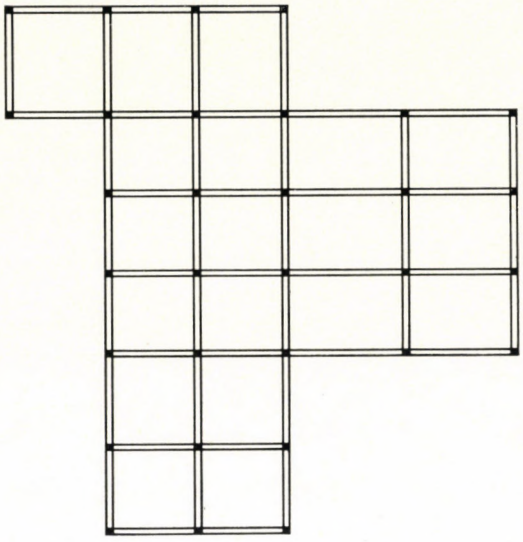


Bild. 1. Grundriß eines räumlichen Stockwerkrahmens aus 13 ebenen Rahmen

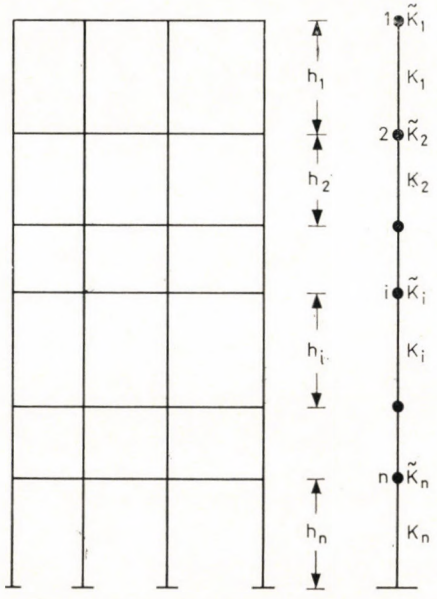


Bild. 2. Ebener Rahmen und entsprechender Ersatzkragträger

Die Deckenscheiben werden als in ihren Ebenen steif angenommen. Die Stützen seien in eine starre Gründungsplatte eingespannt. Wie üblich, wird lediglich der Beitrag der Biegung der Stäbe berücksichtigt.

Es bedeuten:

n die Zahl der Stockwerke,
i die Ordnungszahl des Stockwerkes, bzw. Knotens, von oben nach unten fortschreitend,
h_i die Höhe des i-ten Stockwerkes,
f die Anzahl der Rahmenelemente,
k die Ordnungszahl des Rahmenelementes.

Die Untersuchung wird in der Matrizenschreibweise durchgeführt [3]. Die Matrizen werden durch Klammern, wie folgt, bezeichnet:

$[\ ]_{m\times n}$ rechteckige Matrix aus m Zeilen und n Spalten
$[\ ]_s$ quadratische Matrix aus je s Zeilen und Spalten
$[\ ]^*_{n\times m}$ Transponierte der Matrix $[\ ]_{m\times n}$
$\{\ \}_m$ Spaltenvektor aus m Elementen
$(\ )_n$ Zeilenvektor aus n Elementen

Da die Anzahl der Unbekannten auch bei komplizierten räumlichen Stockwerkrahmen verhältnismäßig gering ist, kann die Berechnung auch mit kleinen Rechenanlagen vorgenommen werden.

2. Charakteristiken eines Rahmenelements

2.1. *Daten*

K_i bedeutet die Steifheit im Stockwerk i der Stütze des Rahmenelements, welche der Summe der Steifheiten sämtlicher Stützen des Stockwerks i des entsprechenden ebenen Rahmens gleich ist

$\widetilde{K}_i$ bedeutet die Steifheit des Knotens i des Rahmenelements, welche der Summe der Steifheiten sämtlicher Riegel in der Höhe des Knotens i des entsprechenden ebenen Rahmens gleich ist;

Die Steifheit eines Stabes eines ebenen Rahmens ist dabei als durch die Stablänge dividiertes doppeltes Produkt aus dem Elastizitätsmodul und dem Trägheitsmoment des Stabes definiert.

Die Lage des Rahmenelements im Grundriß (Bild 3) kann durch einen Lagevektor (t_k) beschrieben werden. Die Elemente des Vektors sind

$$t_{kx} = y_k t_{kz} - z_k t_{ky}\,,$$

$$t_{ky} = \cos \alpha_k\,, \tag{1}$$

$$t_{kz} = \sin \alpha_k\,.$$

Das Koordinatensystem y, z wird frei gewählt; die x-Achse ist vertikal und senkrecht zur yz-Ebene. Die Koordinaten y_k, z_k beziehen sich auf einen beliebigen Punkt der Ebene des betrachteten Rahmenelements k.

Das erste Element t_{kx} des Lagevektors stellt, geometrisch, die Entfernung des Rahmens von der x-Achse dar.

Der Lagevektor ist von der Höhe des Knotens, also von x, unabhängig.

2.2 *Einflußzahlenmatrix der Knotendrehwinkel*

Zur Ermittlung der Einflußzahlenmatrix der Knotendrehwinkel wird das Rahmenelement n Verschiebungszuständen unterworfen. Der Verschiebungszustand j ist durch die — dimensionslose — seitliche von links nach rechts positive Verschiebung 1 des Knotens j gekennzeichnet, wobei sämtliche übrigen Knoten seitlich festgehalten sind.

Für die Biegemomente am oberen und unteren Ende der Stütze des Stockwerks i infolge des Verschiebungszustands j findet man [2] die Ausdrücke

$$\begin{aligned} m_{ij}^{o} &= \overline{m}_{ij} + K_i(2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1,j}) , \\ m_{ij}^{u} &= \overline{m}_{ij} + K_i(\varphi_{ij} + 2\varphi_{i+1,j}) . \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist

$$\overline{m}_{ij} = \begin{cases} \mathfrak{m}_i & \text{wenn } i = j - 1 \\ -\mathfrak{m}_i & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j - 1 \text{ und } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

mit (Bild 4)

$$\mathfrak{m}_i = 3K_i/h_i \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{4}$$

Das jeweils erste Glied in den Ausdrücken (2) für die Stützenendmomente stellt den Grenzwert dieser für den Fall starrer Riegel dar. Das jeweils zweite Glied gibt den Beitrag der Verformung der Riegel wieder; φ_{ij} ist der, im Sinne des Uhrzeigers positive, Drehwinkel des Knotens i im Verschiebungszustand j.

Das — im Verschiebungszustand j — vom Riegel auf den Knoten i des Rahmenelements ausgeübte Einspannmoment beträgt

$$m_{ij}^{r} = 6\widetilde{K}_i\varphi_{ij} . \tag{5}$$

Die Biegemomente sind positiv, wenn sie auf den Stab im Sinne des Uhrzeigers, auf den Knoten gegen den Uhrzeiger wirken [2].

Es wird nun die Gleichgewichtsbedingung der, im Verschiebungszustand j, auf den Knoten i des Rahmenelements wirkenden Momente angeschrieben (Bild 5). Dabei werden die Biegemomente gemäß den Gln. (2) und (5) durch

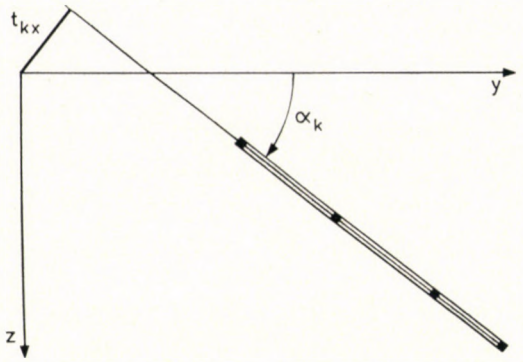


Bild. 3. Lage des Rahmenelements k im Grundriß

die Knotendrehwinkel φ und die Lastglieder $\mathfrak{m}$ ausgedrückt. Läßt man die Ordnungszahlen i von 1 bis n sämtlicher Knoten und dann die Ordnungszahlen j von 1 bis n sämtlicher Verschiebungszustände durchlaufen, erhält man ein System $n \times n$ linearer algebraischer Gleichungen. In Matrizenschreibweise hat es die Form

$$[D]_n[\varphi]_n = [L]_n \,. \tag{6}$$

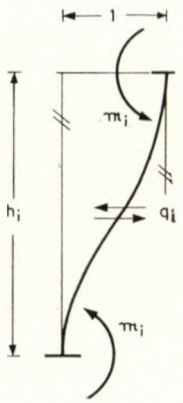


Bild. 4. Mechanische Bedeutung der Größen m und q

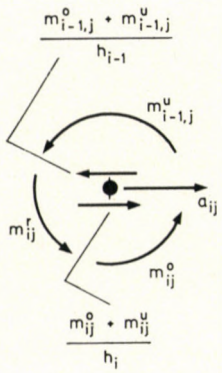


Bild. 5. Kraftwirkungen am Knoten i, Verschiebungszustand j

Es ist dies die erste Knotengleichung (Momentgleichgewicht) des betrachteten Rahmenelements.

Die Koeffizientenmatrix D und die Lastgliedermatrix L der ersten Knotengleichung (6) sind dreigliedrige Bandmatrizen. Die erste ist zur Hauptdiagonale symmetrisch, die zweite antimetrisch. Die — von Null unterschied-

lichen — Elemente an und oberhalb der Hauptdiagonale betragen

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2K_1 + 6\widetilde{K}_1\,, \\ D_{ii} &= 2K_{i-1} + 2K_i + 6\widetilde{K}_i \qquad (i = 2 \ldots n) \\ D_{i,i+1} &= K_i\,, \qquad (i = 1 \ldots n-1) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mathfrak{m}_1\,, \\ L_{ii} &= -\mathfrak{m}_{i-1} + \mathfrak{m}_i \qquad (i = 2 \ldots n)\,, \\ L_{i,i+1} &= -\mathfrak{m}_i \qquad (i = 1 \ldots n-1)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus Gl. (6) ergibt sich die Einflußzahlenmatrix der Knotendrehwinkel zu

$$[\varphi]_n = [D]_n^{-1}[L]_n\,. \tag{9}$$

Die Umkehrung der Koeffizientenmatrix $[D]$ ist, da sie eine Bandmatrix ist, sehr einfach [3].

Steifheitsmatrix

Es wird die Gleichgewichtsbedingung der, im Verschiebungszustand j, auf den Knoten i des Rahmenelements wirkenden waagrechten Kräfte, angeschrieben (Bild 5). Dabei werden die Biegemomente wieder durch die Knotendrehwinkel φ und die Lastglieder $\mathfrak{m}$ ausgedrückt. Läßt man die Ordnungszahlen i von 1 bis n sämtlicher Knoten und dann die Ordnungszahlen j von 1 bis n sämtlicher Verschiebungszustände durchlaufen, erhält man wieder ein System $n \times n$ linearer algebraischer Gleichungen. In Matrizenschreibweise hat es die Form

$$[a_k]_n = [\bar{a}]_n - [\Delta a]_n\,. \tag{10}$$

Es ist dies die zweite Knotengleichung (Gleichgewicht waagrechter Kräfte) des betrachteten Rahmenelements.

Das Element ij der Matrix $[a_k]$ stellt die, im Verschiebungszustand j, am Knoten i angreifende seitliche Last dar. Daher ist $[a_k]$ die Einflußzahlenmatrix der seitlichen Kräfte, also die Steifheitsmatrix des betrachteten Rahmenelements.

Die erste der beiden Matrizen auf der rechten Seite der Gl. (10) ist die dem Grenzfall starrer Riegel entsprechende Steifheitsmatrix. Sie ist eine symmetrische dreigliedrige Bandmatrix. Ihre — von Null unterschiedlichen — Elemente an und oberhalb der Hauptdiagonale sind

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= q_1\,, \\ \bar{a}_{ii} &= q_{i-1} + q_i\,, \qquad (i = 2 \ldots n)\,, \\ \bar{a}_{i,i+1} &= -q_i\,, \qquad (i = 1 \ldots n-1) \end{aligned} \tag{11}$$

mit (Bild 4)

$$q_i = 2\mathfrak{m}_i/h_i\,, \qquad (i = 1 \ldots n)\,, \tag{12}$$

Die zweite Matrix

$$[\Delta a]_n = [L]_n^*[D]_n^{-1}[L]_n = [L]_n^*[\varphi]_n \tag{13}$$

der rechten Seite der Gl. (10) stellt den Verformungsanteil der Riegel zur Steifheitsmatrix dar. Die Matrix $[\Delta a]$ ist symmetrisch, aber voll. Für ihre Elemente an und oberhalb der Hauptdiagonale findet man die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\Delta a_{1j} &= L_{11}\varphi_{1j} + L_{21}\varphi_{2j}\,, \qquad (j = 1 \ldots n)\,,\\
\Delta a_{ij} &= L_{i-1,i}\varphi_{i-1,j} + L_{ii}\varphi_{ij} + L_{i+1,i}\varphi_{i+1,j}\,,\\
&(i = 2 \ldots n-1)\,, \qquad (j = i \ldots n)\,,\\
\Delta a_{nn} &= L_{n-1n}\varphi_{n-1,n} + L_{nn}\varphi_{nn}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Die Steifheitsmatrix des Rahmenelements erhält man, indem man, gemäß Gl. (10), $[\Delta a]$ von $[\bar{a}]$ subtrahiert. Sie ist eine symmetrische volle Matrix.

2.4 Einflußzahlenmatrix der Stützenendmomente

Für jedes Stockwerk sind die Einflußzahlen der Biegemomente am oberen und unteren Stützenende zu ermitteln. Der Aufbau der Einflußzahlenmatrix ist

$$\begin{bmatrix}
m^o_{k11} & m^o_{k21} & \ldots & m^o_{k1n}\\
m^u_{k11} & m^u_{k12} & \ldots & m^u_{k1n}\\
m^o_{k21} & m^o_{k22} & \ldots & m^o_{k2n}\\
m^u_{k21} & m^u_{k22} & \ldots & m^u_{k2n}\\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\
m^o_{kn1} & m^o_{kn2} & \ldots & m^o_{knn}\\
m^u_{kn1} & m^u_{kn2} & \ldots & m^u_{knn}
\end{bmatrix}_{2n\times n} \tag{15}$$

Es sind m^o_{kij} und m^u_{kij} die Einflußzahlen der Biegemomente am oberen und unteren Ende der Stütze des Stockwerks i des Rahmenelements k infolge der seitlichen Verschiebung 1 des Knotens j.

Aus der Gl. (2) ergibt sich:

$$[m_k]_{2n\times n} = [\overline{m}]_{2n\times n} + [\Delta m]_{2n\times n}\,. \tag{16}$$

Die erste Matrix auf der rechten Seite der obigen Gleichung liefert die Einflußzahlenmatrix für den Grenzfall starrer Riegel, die zweite stellt den Verformungsanteil der Riegel dar.

In der Matrix $[\overline{m}]$ sind zeilenweise jeweils lediglich zwei Glieder von Null verschieden:

$$\begin{aligned} &\overline{m}_{11} = \overline{m}_{21} = -\overline{\mathfrak{m}}_1 , \\ &\overline{m}_{2j-3,j} = \overline{m}_{2j-2,j} = \mathfrak{m}_{j-1} , \qquad (j = 2 \ldots n) , \\ &\overline{m}_{2j-1,j} = \overline{m}_{2j,j} = -\mathfrak{m}_j , \qquad (j = 2 \ldots n) . \end{aligned} \tag{17}$$

Die $[\Delta m]$-Matrix ist hingegen voll:

$$\left.\begin{aligned} \Delta m_{2i-1,j} &= K_i(2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1,j}) \\ \Delta m_{2i,j} &= K_i(\varphi_{ij} + 2\varphi_{i+1,jj}) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \ldots n-1 , \quad j = 1 \ldots n) ,$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta m_{2n-1,j} &= 2K_n\varphi_{nj} \\ \Delta m_{2n,j} &= K_n\varphi_{nj} \end{aligned}\right\} (j = 1 \ldots n) . \tag{18}$$

2.5. Bemerkungen

Wenn der Elastizitätsmodul für den ganzen Rahmen gleich ist, sind die Schnittkräfte von diesem unabhängig. Zur Berechnung der Schnittkräfte müssen nicht unbedingt die tatsächlichen Werte der Steifheiten der Stäbe und der Steifheiten K_i und $\widetilde{K}_i$, $i = 1 \ldots n$, der Rahmenelemente in die Berechnung eingeführt werden. Lediglich ist das gegenseitige Verhältnis der Steifheiten maßgebend. Man kann die Steifheiten etwa mit $2E = 1$ Mp/m² ermitteln und erhält trotzdem richtige Werte für die Schnittkräfte. Die tatsächlichen Werte der Verschiebungsgrößen können, falls erforderlich, aus den verzerrten Werten durch Multiplikation mit dem Entzerrungsfaktor $2E$ erhalten werden.

Die Einflußzahlen der mechanischen Größen beziehen sich auf dimensionslose seitliche Verschiebungen 1 der Knoten. Daher haben die Einflußzahlen die durch die Länge dividierte Dimension der entsprechenden mechanischen Größe. So haben die Einflußzahlen φ der Knotendrehwinkel die Dimension 1/Länge, die Einflußzahlen m der Stützenendmomente die Dimension der Kraft. Um die Einflußzahlen nicht mit den entsprechenden mechanischen Größen zu verwechseln, sind die Einflußzahlen mit Minuskeln, die mechanischen Größen mit den entsprechenden Majuskeln bezeichnet.

Die Untersuchungen des vorangehenden Abschnitts 2 beziehen sich auf das — beliebige — Rahmenelement k. Zur Vereinfachung wurden lediglich jene Größen, die später bei der Untersuchung des Gesamtsystems gebraucht werden, mit dem — die Ordnungszahl des Rahmenelements angebenden — Index k behaftet.

3. Lastdaten. Beziehungen zwischen den Verschiebungsgrößen

Die an der Deckenscheibe i angreifende waagrechte Last wird zur Einführung in die Berechnung am einfachsten auf die x-Achse bezogen (Bild 6).

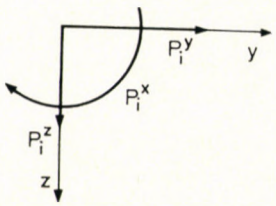


Bild. 6. Lastvektor an der Deckenscheibe i

Die Elemente des Lastvektors

$$(P_i)_3 = (P_i^x \; P_i^y \; P_i^z) \tag{19}$$

sind das auf die x-Achse bezogene, im Uhrzeigersinn positive Moment und die Kräfte in der $+y$-bzw. $+z$-Richtung.

Die Lastvektoren der n Deckenscheiben bilden den Lastvektor

$$(P)_{3n} = (P_1^x \; P_1^y \; P_1^z \quad P_2^x \; P_2^y \ldots P_n^z) \tag{20}$$

des Rahmens.

Bei der — infolge der Lasteinwirkung auftretenden — Formänderung des Rahmens erfährt die Deckenscheibe *in der Höhe des Knotens* i eine ebene Verschiebung. Der Koordinatenursprung verdreht sich — im Uhrzeigersinn — um Δ_i^x, verschiebt sich in der $+y$-Richtung um Δ_i^y und in der $+z$-Richtung um Δ_i^z(Bild 7). Diese drei Verschiebungsgrößen bilden den Verschiebungsvektor $\{\Delta_i^o\}$ des Koordinatenursprungs.

Bei der Verdrehung der Deckenscheibe erfährt der Knoten i des Rahmenelements k, in der Ebene des Rahmenelements, die seitliche Verschiebung Δ_{ki} (Bild 7).

$$\Delta_{ki} = (\boldsymbol{t}_k)_3\{\Delta_i^o\}_3 = \boldsymbol{t}_{kx}\Delta_i^x + \boldsymbol{t}_{ky}\Delta_i^y + \boldsymbol{t}_{kz}\Delta_i^z . \tag{21}$$

Die Verschiebungsvektoren (Δ_i^o) der n Deckenscheiben bilden den Verschiebungsvektor

$$(\Delta^o)_{3n} = (\Delta_1^x \; \Delta_1^y \; \Delta_1^z \; \Delta_2^x \; \Delta_2^y \ldots \Delta_n^z) \tag{22}$$

der x-Achse, die n seitlichen Verschiebungen Δ_{ki} den Verschiebungsvektor

$$(\Delta_k)_n = (\Delta_{k1}\Delta_{k2} \ldots \Delta_{kn}) \tag{23}$$

des Rahmenelements k.

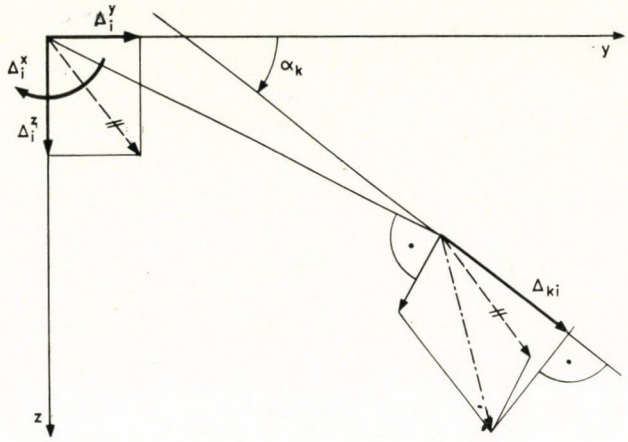


Bild. 7. Verschiebungszustand der Deckenscheibe i

4. Potential des Rahmens

Das totale Potential des Rahmens setzt sich aus seiner potentiellen Energie und dem Potential der Last zusammen.

Für die bei der Formänderung des Rahmens im Rahmenelement k aufgespeicherte potentielle Energie gilt der bekannte Ausdruck

$$U_{R,k} = \frac{1}{2}(\Delta_k)_n [a_k]_n \{\Delta_k\}_n . \tag{24}$$

Durch Erweiterung der Gl. (21) wird der Verschiebungsvektor des betrachteten Rahmenelements auf den Verschiebungsvektor der x-Achse bezogen,

$$\{\Delta_k\}_n = [t]_{n\times 3n} \{\Delta^o\}_{3n} . \tag{25}$$

Die von Null unterschiedlichen Elemente der Lagematrix $[t]$ des betrachteten Rahmenelements sind

$$\left.\begin{aligned} t_{i,3i-2} &= t_{kx} \\ t_{i,3i-1} &= t_{ky} \\ t_{i,3i} &= t_{kz} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \ldots n) . \tag{26}$$

Wenn im Ausdruck (24) für die potentielle Energie des Rahmenelements k sein Verschiebungsvektor, gemäß Gl. (25), durch den Verschiebungsvektor der x-Achse ausgedrückt wird, so ergibt sich

$$U_{R,k} = \frac{1}{2}(\Delta^o)_{3n} [s_k]_{3n} \{\Delta^o\}_{3n} . \tag{27}$$

Hier ist

$$[s_k]_{3n} = [t]^*_{3n\times n}[a_k]_n[t]_{n\times 3n} \tag{28}$$

die — natürlich symmetrische — Steifheitsmatrix des Rahmenelements k im Globalsystem. Sie kann, beispielsweise für $n = 4$, gemäß

$$[s_k]_{12} = \begin{bmatrix} [s_{k11}]_3 & [s_{k12}]_3 & [s_{k13}]_3 & [s_{k14}]_3 \\ & [s_{k22}]_3 & [s_{k23}]_3 & [s_{k24}]_3 \\ & & [s_{k33}]_3 & [s_{k34}]_3 \\ \text{symmetrisch} & & & [s_{k44}]_3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

durch Submatrizen ausgedrückt werden. Die Submatrizen haben die Form

$$[s_{kij}]_3 = a_{kij}\begin{bmatrix} t_{kx}^2 & t_{kx}\,t_{ky} & t_{kx}\,t_{kz} \\ & t_{ky^2} & t_{ky}\,t_{kz} \\ \text{symmetrisch} & & t_{kz^2} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Der reguläre Aufbau der Steifheitsmatrix $[s_k]$ ermöglicht die Angabe seiner Elemente mit einfachen Ausdrücken. Die Elemente an und oberhalb der Hauptdiagonalen der Submatrizen, die sich an und oberhalb der Hauptdiagonale der Matrix $[s_k]$ befinden, betragen

$$\left.\begin{aligned} s_{k,3i-2,3j-2} &= a_{kij}t_{kz^2} \\ s_{k,3i-1,3j-1} &= a_{kij}t_{ky^2} \\ s_{k,3i,3j} &= a_{kij}t_{kz^2} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \ldots n\,,\quad j = i \ldots n)\,, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{k,3i-2,3j-i} &= a_{kij}t_{kx}t_{ky} \\ s_{k,3i-2,3j} &= a_{kij}t_{kx}t_{kz} \\ s_{k,3i-1,3j} &= a_{kij}t_{ky}t_{kz} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \ldots n\,,\quad j = i \ldots n)\,. \tag{32}$$

Die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen dieser Submatrizen erhält man durch Spiegelung an den jeweiligen Hauptdiagonalen

$$s_{k,i+1,j-1} = s_{kij}\begin{cases} \begin{cases} i = 1\,,4\,,7\,,\ldots,3n-5 \\ j = i+4\,,i+7\,,\ldots,3n-1 \end{cases} \\ \begin{cases} i = 2\,,5\,,8\,,\ldots,3n-4 \\ j = i+4\,,i+7\,,\ldots,3n\,, \end{cases} \end{cases} \tag{33}$$

$$s_{k.i+2,j-2} = s_{kij}\begin{cases} i = 1\,,4\,,7\,,\ldots 3n-5 \\ j = i+5\,,i+8\,,\ldots,3n\,. \end{cases} \tag{34}$$

Die potentielle Energie des Rahmens erhält man durch Überlagerung der Beiträge (27) der Rahmenelemente f, mit der Bezeichnung

$$[s]_{3n} = \sum_{k=1}^{f} [s_k]_{3n} \tag{35}$$

für die Steifheitsmatrix des Rahmens im Globalsystem, zu

$$U_R = \frac{1}{2} (\Delta^o)_{3n} [s]_{3n} \{\Delta^o\}_{3n} . \tag{36}$$

Das Potential der Last ist — mit umgekehrten Vorzeichen — der Arbeit sämtlicher Komponenten der Last an den entsprechenden Verschiebungen gleich:

$$U_L = - (\Delta^o)_{3n} \{P\}_{3n} . \tag{37}$$

Das totale Potential des Rahmens erhält man schließlich durch Überlagerung der Beiträge (36) und (37) aus der Gleichung

$$U = \frac{1}{2} (\Delta^o)_{3n} [s]_{3n} \{\Delta^o\}_{3n} - (\Delta^o)_{3n} \{P\}_{3n} . \tag{38}$$

5. Verschiebungs- und Schnittkräftezustand des Rahmens

Die Aufgabe wird mit Hilfe des Minimumprinzips des totalen Potentials des Systems gelöst

Die Minimalforderung

$$\frac{dU}{d\{\Delta^o\}_{3n}} = \{0\}_{3n} \tag{39}$$

ergibt die Gleichgewichtsbedingung

$$[s]_{3n} \{\Delta^o\}_{3n} = \{P\}_{3n} . \tag{40}$$

Durch Umkehrung der Gl. (40) findet man die kinematisch überzählige Größe, den Verschiebungsvektor der x-Achse,

$$\{\Delta^o\}_{3n} = [\delta]_{3n} \{P\}_{3n} , \tag{41}$$

wo

$$[\delta]_{3n} = [s]_{3n}^{-1} \tag{42}$$

die als Flexibilitätsmatrix des Rahmens im Globalsystem bezeichnet.

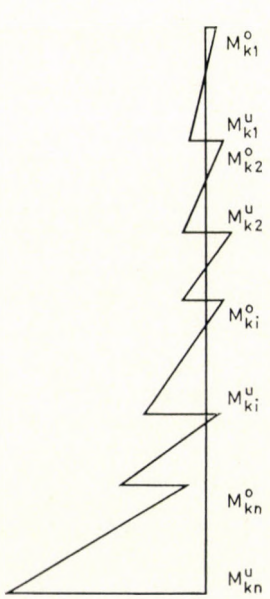
Die $f \times n$ seitlichen Verschiebungen der Rahmenknoten in den Richtungen der Rahmenelemente folgen aus Gl. (21).

Der Vektor der Stützenendmomente des Rahmenelements k (Bild 8) ist definiert gemäß

$$(M_k)_{2n} = (M^o_{k1}\, M^u_{k1}\, M^o_{k2}\, M^u_{k2} \ldots M^u_{kn}), \tag{43}$$

wo M^o_{ki} und M^u_{ki} die Biegemomente am oberen und unteren Ende des Stockwerks i bezeichnen.

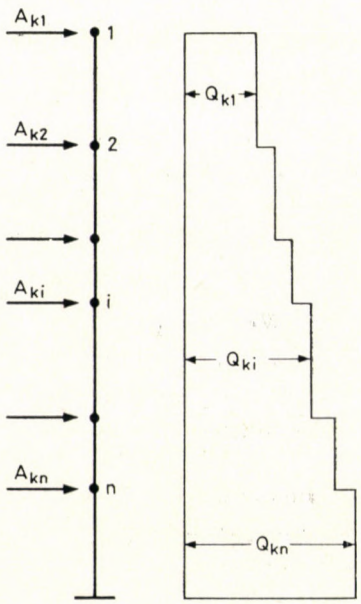
Den Stützenendmomentevektor berechnet man aus der Einflußzahlenmatrix (16) der Stützenendmomente durch Überlagerung der Verschiebungs-



8



9



10

Bild. 8. Diagramm der Stützenendmomente des Rahmenelements k

Bild. 9. Am Knoten i des Rahmenelements k angreifende Momente

Bild. 10. Seitliche Kräfte am Rahmenelement k und das entsprechende Querkraftdiagramm

beiträge der n Knoten:

$$\{M_k\}_{2n} = [m_k]_{2n\times n}\{\Delta_k\}_n\,. \tag{44}$$

Die Riegelendmomente des Rahmenelements k folgen aus der Gleichgewichtsbedingung der an den Knoten angreifenden Momente (Bild 9):

$$\begin{aligned} M^r_{k1} &= -\,M^o_{k1}\,, && (k = 1 \ldots f)\,, \\ M^r_{ki} &= -\,M^u_{k,i-1} - M^o_{ki}\,, && (i = 2 \ldots n\,,\quad k = 1 \ldots f)\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Vorzeichen. Die Stabendmomente sind positiv, wenn sie, seitens der Knoten, im Uhrzeigersinn auf den Stab wirken. Auf den Knoten entgegen dem Uhrzeigersinn wirkende Momente sind positiv [2].

Zur Ermittlung der Querkräfte der Rahmenelemente ist die Kenntnis der auf die Rahmenelemente anfallenden Kräfte erforderlich (Bild 10). Die auf den Knoten i des Rahmenelements k anfallende Kraft ermittelt man aus der Steifheitsmatrix (10) des Rahmenelements durch Überlagerung der Beiträge der Verschiebungen seiner n Knoten:

$$A_{ki} = (a_{ki})_n \{\Delta_k\}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{kij} \Delta_{kj} \,. \tag{46}$$

Die Querkraft des Stockwerks i des Rahmenelements k (Bild 10), ist der Summe der oberhalb dieses Stockwerks angreifenden, auf das Rahmenelement anfallenden Kräfte gleich,

$$Q_{ki} = \sum_{j=1}^{i} A_{kj} \,. \tag{47}$$

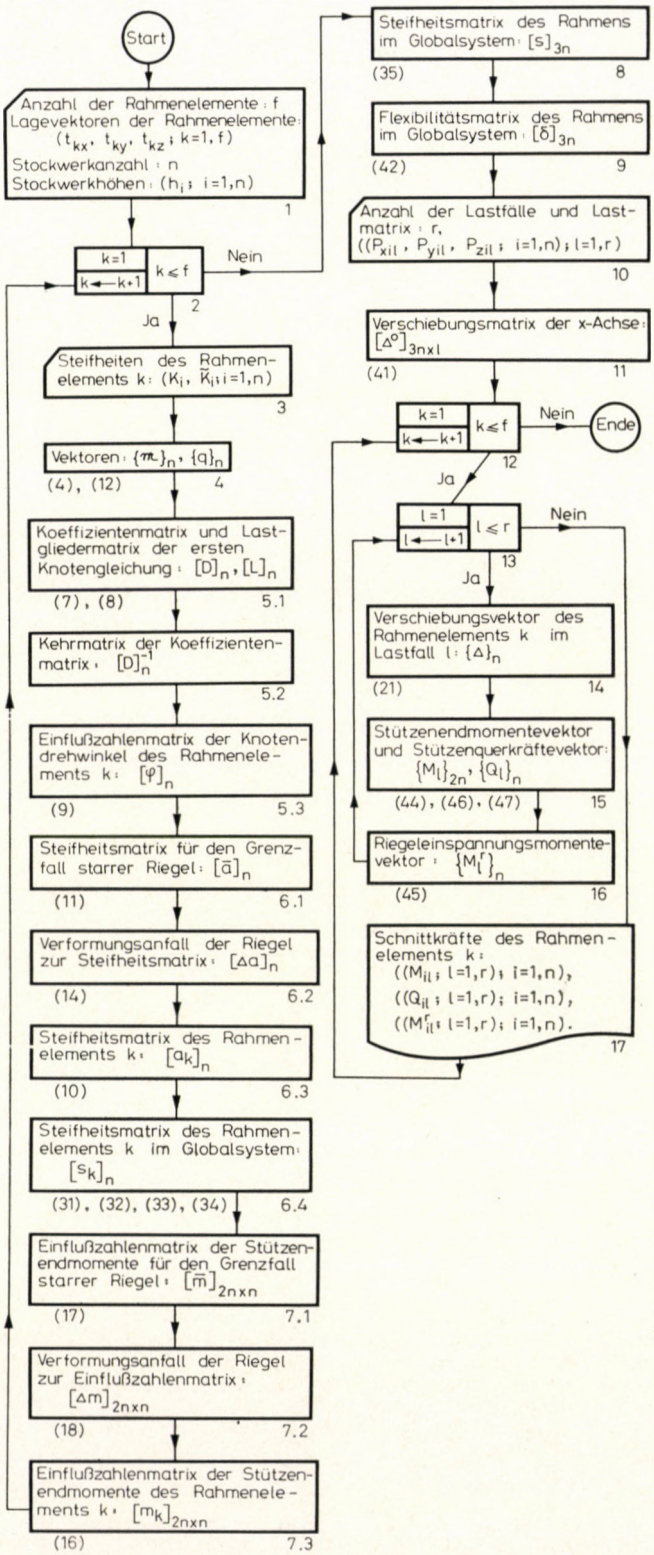
Wenn man in den Gln. (46) und (47) den Index i die Ordnungszahlen 1 bis n sämtlicher Knoten bzw. Stockwerke und den Index k die Ordnungszahlen 1 bis f sämtlicher Rahmenelemente durchlaufen läßt, so erhält man den Belastungszustand und den Verlauf der Querkräfte der Rahmenelemente.

Die Verteilung der Schnittkräfte der Rahmenelemente auf die einzelnen Stäbe der entsprechenden ebenen Rahmen erfolgt, wie üblich [2], im Verhältnis der entsprechenden Stabsteifheiten. Die Längskräfte der Stäbe können erforderlichenfalls aus Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.

6. Flußdiagramm der Berechnung

Wenn auch die geschilderte Berechnung proportionierter räumlicher Stockwerkrahmen verhältnismäßig sehr einfach ist, wird man sie heutzutage doch mit einer Rechenanlage durchführen. Der Algorithmus der Berechnung ist eingehend im — nach den üblichen Regeln konstruierten — Flußdiagramm dargestellt (Bild 11).

Bild. 11. Flußdiagramm der Berechnung links oben abgeschrägt: Eingebeboxen; rechteckig: Berechnungsboxen; unten gewellt: Ausgabeboxen; dreiteilig: Iterationsboxen
f Anzahl der Rahmenelemente; n Stockwerkanzahl; r Anzahl der Lastfälle; k Ordnungszahl des Rahmenelements; i Ordnungszahl des Stockwerks; l Ordnungszahl des Lastfalls
Rechts unterhalb der Boxen: Ordnungszahl der Box
Links unterhalb der Berechnungsboxen: entsprechende Gleichungsnummern


Start
Anzahl der Rahmenelemente: f
Lagevektoren der Rahmenelemente: $(t_{kx}, t_{ky}, t_{kz}; k=1,f)$
Stockwerkanzahl: n
Stockwerkhöhen: $(h_i; i=1,n)$
1
k=1
k←k+1
k≤f
Nein
Ja
2
Steifheiten des Rahmenelements k: $(K_i, \tilde{K}_i; i=1,n)$
3
Vektoren: $\{m\}_n$, $\{q\}_n$
(4), (12)
4
Koeffizientenmatrix und Lastgliedermatrix der ersten Knotengleichung: $[D]_n$, $[L]_n$
(7), (8)
5.1
Kehrmatrix der Koeffizientenmatrix: $[D]_n^{-1}$
5.2
Einflußzahlenmatrix der Knotendrehwinkel des Rahmenelements k: $[\varphi]_n$
(9)
5.3
Steifheitsmatrix für den Grenzfall starrer Riegel: $[\bar{a}]_n$
(11)
6.1
Verformungsanfall der Riegel zur Steifheitsmatrix: $[\Delta a]_n$
(14)
6.2
Steifheitsmatrix des Rahmenelements k: $[a_k]_n$
(10)
6.3
Steifheitsmatrix des Rahmenelements k im Globalsystem: $[s_k]_n$
(31), (32), (33), (34)
6.4
Einflußzahlenmatrix der Stützenendmomente für den Grenzfall starrer Riegel: $[\bar{m}]_{2n\times n}$
(17)
7.1
Verformungsanfall der Riegel zur Einflußzahlenmatrix: $[\Delta m]_{2n\times n}$
(18)
7.2
Einflußzahlenmatrix der Stützenendmomente des Rahmenelements k: $[m_k]_{2n\times n}$
(16)
7.3
Steifheitsmatrix des Rahmens im Globalsystem: $[s]_{3n}$
(35)
8
Flexibilitätsmatrix des Rahmens im Globalsystem: $[\delta]_{3n}$
(42)
9
Anzahl der Lastfälle und Lastmatrix: r, $((P_{xil}, P_{yil}, P_{zil}; i=1,n); l=1,r)$
10
Verschiebungsmatrix der x-Achse: $[\Delta^o]_{3n\times l}$
(41)
11
k=1
k←k+1
k≤f
Nein
Ende
Ja
12
l=1
l←l+1
l≤r
Nein
Ja
13
Verschiebungsvektor des Rahmenelements k im Lastfall l: $\{\Delta\}_n$
(21)
14
Stützenendmomentevektor und Stützenquerkräftevektor: $\{M_l\}_{2n}$, $\{Q_l\}_n$
(44), (46), (47)
15
Riegeleinspannungsmomentevektor: $\{M_l^r\}_n$
(45)
16
Schnittkräfte des Rahmenelements k:
$((M_{il}; l=1,r); i=1,n)$,
$((Q_{il}; l=1,r); i=1,n)$,
$((M_{il}^r; l=1,r); i=1,n)$.
17

In der Box 1 wird die Geometrie des Rahmennetzes eingelesen. Die Box 2 verlangt, daß die Boxen 3 bis 7.3 für jedes der f Rahmenelemente durchlaufen werden. In Box 3 werden die Steifheiten des jeweiligen Rahmenelements eingelesen, während die Boxen 4 bis 7.3 die Berechnung der Einflußzahlenmatrizen angeben. Nachdem sämtliche Rahmenelemente absolviert sind, leitet Box 2 zur Box 8 um.

In den Boxen 8 und 9 werden die Steifheits- und die Flexibilitätsmatrizen des Rahmens im Globalsystem berechnet. Anschließend werden in der Box 10 die Anzahl der Lastfälle und die entsprechenden Lastvektoren eingelesen. Hiermit werden in der Box 11 die Verschiebungsvektoren der x-Achse für sämtliche Lastfälle, also die Verschiebungsmatrix der x-Achse, berechnet.

Die Berechnungsboxen 14 bis 16 und die Ausgabebox 17 befinden sich in einer doppelten Schleife. Sie werden je einmal für jedes Rahmenelement und für jeden Lastfall durchlaufen und liefern hiermit die Verschiebungs- und Schnittkräftezustände des Rahmens für sämtliche Lastfälle.

Die ganze Berechnung enthält lediglich elementare Operationen mit Matrizen: Additionen, Multiplikationen und zwei Umkehrungen. Zur Durchführung der Umkehrungen (Boxen 5.2 und 9) kann eines der der jeweiligen Rechenanlage eigenen Unterprogramme herangezogen werden.

Wenn die Riegel der Rahmenelemente im Vergleich zu den Stützen so steif sind, daß sie als starr angesehen werden können, vereinfacht sich die Berechnung wesentlich. Da die Matrix $[\varphi]$ zu einer Nullmatrix wird, entfallen im Flußdiagramm die Boxen 5.1, 5.2, 5.3, 6.2 und 7.2.

SCHRIFTTUM

1. Csonka, P.: Über proportionierte Rahmen. *Die Bautechnik* **33** (1956), 19—20.
2. Rosman, R.: Untersuchung freistehender proportionierter Stockwerkrahmen bei waagrechter Belastung. *VDI*-Z. **108** (1966) 1077—81, 1680—1686
3. Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill Book Company, 1968.

Statics of Free Proportional Space Frameworks. A procedure is presented for the calculation of space frameworks consisting of two systems of multi-story frameworks without stiffening walls rectangularly crossing each other. The method described may be applied in cases where both multi-story frame structures consist of proportional frameworks, i.e., the joints of the same level rotate under the effect of horizontal load in the same angle, and the feet of struts are stiffly fixed. The method of solution treated with matrix algorithm, is even in case of a complex system of frames, relatively simple.

Динамический анализ свободностоящих пространственных пропорциональных рам. В работе сообщается метод расчета пространственных рам, не укрепленных стенками и состоящих из двух систем многоярусных рам, пересекающих друг друга под прямым углом. Описываемый метод можно применять в том случае, когда обе системы многоярусных рам состоят из пропорциональных рам, т. е. их узлы, находящиеся на идентичном ярусе, под воздействием прилагаемой по горизонтали нагрузки поворачиваются на идентичный угол, а подошвы их колонн являются жестко зажатыми. Способ решения с матричным алгоритмом даже в случае сложной рамной системы является относительно простым.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 57—64 (1975)

RADIAL ELASTIC DISTURBANCE AND STRESS DISTRIBUTION IN A ROTATING NON-HOMOGENEOUS THIN CIRCULAR PLATE WITH A CENTRAL HOLE

PRIYATOSH ROY*

[Manuscript received December 20, 1972]

In this paper, the radial disturbance and the stresses in a rotating non-homogeneous thin circular plate with a central hole are studied when the plate rotates with (I) time-dependent angular velocity $\Omega = \Omega_0 e \exp(ipt/2)$ and (II) a uniform angular velocity. In case (I), we have chosen $E = E_0 r^m$ and $\varrho = \varrho_0 r^{m-2}$ and in case (II), several laws of variation of density for the same variation of $E(= E_0/r^m)$ have been considered.

1. Introduction

Problems of rotating homogeneous circular discs have been extensively studied by LAMB and SOUTHWELL [1], PRESCOTT [2] and many other authors. In most of these problem, isotropic discs rotating with uniform angular velocity have been considered. In this paper, two different cases have been discussed. In the first case, the angular velocity is chosen to be variable and in the second, it is taken to be uniform.

Case I: The main aim in this case is to study the problem in which the plate rotates with a time-dependent angular velocity according to the law

$$\Omega = \Omega_0 \exp(ipt/2)$$

where Ω_0 is a constant. It is believed that this type of variation of the angular velocity has not been considered by any author. The modulus of elasticity and the density are supposed to vary according to the laws $E = E_0 r^m$ and $\varrho = \varrho_0 r^{m-2}$. This problem has been solved for two different conditions: (a) when the plate is rotating freely and (b) when there is a periodic radial stress at the outer rim, the inner rim being free.

Case II: When the plate is rotating with uniform angular velocity Ω, we choose E to vary according to the law $E = E_0/r^m$ for different laws of variation of the density, viz., (i) $\varrho =$ a constant, (ii) $\varrho = \varrho_0/r^{m+3}$, (iii) $\varrho = \varrho_0 (\log r)$ and (iv) $\varrho = \varrho_0 \sin(\log r)$.

* PRIYATOSH ROY, Department of Mathematics, City College, Calcutta-9, India.

2. Solution of the problem when the plate is rotating with a time-dependent angular velocity $\Omega = \Omega_0 \exp(ipt/2)$ Ω_0 being a constant

The axis of rotation is taken through the centre of the plate and perpendicular to the plane of the plate.

The stress components do not depend on ϑ and are functions of r and t only. Hence the equation of motion is

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varrho r \Omega^2 \tag{1}$$

where

$$\begin{aligned} E e_{rr} &= \sigma_r - \nu \sigma_\theta , \\ E e_{\theta\theta} &= \sigma_\theta - \nu \sigma_r , \\ e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} , \\ e_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} . \end{aligned} \tag{2}$$

From (2) we have

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right], \tag{3}$$

and

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right]. \tag{4}$$

With these values of σ and σ_θ, (1) reduces to

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{E} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u \\ &\quad = (1 - \nu^2) \frac{\varrho}{E} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r \Omega^2 \right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Let

$$\begin{aligned} E &= E_0 r^m , \\ \varrho &= \varrho_0 r^{m-2} , \\ \Omega &= \Omega_0 e^{ip\frac{t}{2}} , \end{aligned}$$

E_0, ϱ_0 and Ω_0 being constants.

Substituting for E, ϱ and Ω in (5), we obtain

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (m+1)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + (m\nu - 1)\frac{1}{r^2}u - \frac{\alpha^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\alpha^2 \Omega_0^2 e^{ipt}}{r} \tag{6}$$

where

$$\alpha^2 = (1-\nu^2)\frac{P}{E_0}. \tag{7}$$

Let us assume

$$u = U(r)\exp(ipt) \tag{8}$$

Substituting for u in (6), we obtain

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2} + (m+1)r\frac{dU}{dr} + (\alpha^2 p^2 + m\nu - 1)U = -\alpha^2\Omega_0^2 r\,. \tag{9}$$

The solution of this equation is

$$U = c_1 r^{\zeta_1} + c_2 r^{\zeta_2} - \frac{\alpha^2\Omega_0^2 r}{(1+\nu)m + \alpha^2 p^2} \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4 - 4(\alpha^2 p^2 + m\nu)}}{2}\,,\\ \zeta_2 &= \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4 - 4(\alpha^2 p^2 + m\nu)}}{2}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Hence

$$u = [c_1 r^{\zeta_1} + c_2 r^{\zeta_2} - K^2 r]e^{ipt}, \tag{12}$$

where

$$K^2 = \frac{\alpha^2\Omega_0^2}{(1+\nu)m + \alpha^2 p^2}\,. \tag{13}$$

Therefore, from (3) and (4) we have

$$\sigma_r = \frac{E_0 r^m}{1-\nu^2}\left[(\nu+\zeta_1)c_1 r^{\zeta_1 - 1} + (\nu+\zeta_2)c_2 r^{\zeta_2 - 1} - (1+\nu)K^2\right]e^{ipt}, \tag{14}$$

and

$$\sigma_\theta = \frac{E_0 r^m}{1-\nu^2}\left[(1+\nu\zeta_1)c_1 r^{\zeta_1 - 1} + (1+\nu\zeta_2)c_2 r^{\zeta_2 - 1} - (1+\nu)K^2\right]e^{ipt}\,. \tag{15}$$

(a) Firstly, we suppose that both the inner and outer boundaries are stress-free. Then from the boundary conditions

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \quad \text{and} \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \tag{16}$$

we have

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(a^{\zeta_2-1} - b^{\zeta_2-1})(1+\nu)K^2}{(\nu+\zeta_1)(a^{\zeta_1-1}b^{\zeta_2-1} - a^{\zeta_2-1}b^{\zeta_1-1})} \\ c_2 &= -\frac{(b^{\zeta_1-1} - a^{\zeta_1-1})(1+\nu)K^2}{(\nu+\zeta_2)(a^{\zeta_1-1}b^{\zeta_2-1} - a^{\zeta_2-1}b^{\zeta_1-1})} . \end{aligned} \tag{17}$$

The displacement is given by (12) and the stress distribution by (14) and (15) where c_1 and c_2 have the values given in (17).

(b) When there is a source of periodic radial stress at the outer rim, the inner rim being stress-free, the boundary conditions are

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= -Pe^{ipt} \\ (\sigma_r)_{r=b} &= 0 . \end{aligned} \tag{18}$$

The displacement is given by (12) and the stress distribution by (14) and (15), where

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(a^{\zeta_2-1} - b^{\zeta_2-1})(1+\nu)K^2 + b^{\zeta_2-1}\cdot\dfrac{P(1-\nu^2)}{E_0 a^m}}{(\nu+\zeta_1)(a^{\zeta_1-1}b^{\zeta_2-1} - a^{\zeta_2-1}b^{\zeta_1-1})} \\ c_2 &= -\frac{(b^{\zeta_1-1} - a^{\zeta_1-1})(1+\nu)K^2 - b^{\zeta_1-1}\cdot\dfrac{P(1-\nu^2)}{E_0 a^m}}{(\nu+\zeta_2)(a^{\zeta_1-1}b^{\zeta_2-1} - a^{\zeta_2-1}b^{\zeta_1-1})} . \end{aligned} \tag{19}$$

3. Solution of the problem when the plate rotates freely with uniform angular velocity Ω

In this case, the equation of motion is

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\varrho r\Omega^2. \tag{1'}$$

Substituting for σ_r and σ_θ in (1'), we obtain

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{1}{E}\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\left[\frac{\nu}{E}\frac{dE}{dr} - \frac{1}{r}\right]u = -(1-\nu^2)\frac{p}{E}r\Omega^2 . \tag{2'}$$

Let us assume that the modulus of elasticity varies inversely as the m-th power of the radial distance so that

$$E = E_0/r^m \,. \tag{3'}$$

Substituting for E in (2k), we obtain

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + (1 - m)r \frac{du}{dr} - (1 + m\nu)\, u = - \frac{(1 - \nu^2)\varrho}{E_0} r^{m+3} \cdot \Omega^2 \,. \tag{4'}$$

We shall determine the displacement and the stress distribution by considering different laws of variation of the density ϱ.

Case (i)

Let σ = a constant.

The solution of (4′) is

$$u = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} - A r^{m+3} \tag{5'}$$

where

$$A = \frac{(1 - \nu^2)\varrho\Omega^2}{E_0(8 + 3m - m\nu)} \,, \tag{6'}$$

and

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m + \sqrt{m^2 + 4(1 + m\nu)}}{2} \,, \\ m_2 &= \frac{m - \sqrt{m^2 + 4(1 + m\nu)}}{2} \,. \end{aligned} \tag{7'}$$

Hence from (3) and (4),

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1 - \nu^2)r^m} \left[(\nu + m_1)c_1 r^{m_1 - 1} + (\nu + m_2)c_2 r^{m_2 - 1} - A(m + \nu + 3)r^{m+2}\right] \tag{8'}$$

and

$$\sigma_\theta = \frac{E_0}{(1 - \nu^2)r^m} \left[(\nu m_1 + 1)c_1 r^{m_1 - 1} + (\nu m_2 + 1)c_2 r^{m_2 - 1} - A(m\nu + 3\nu + 1)r^{m+2}\right] . \tag{9'}$$

From the boundary conditions (16), we have

$$\begin{aligned} c_1 &= - \frac{A(m + \nu + 3)(a^{m_2} b^{m+3} - a^{m+3} b^{m_2})}{(\nu + m_1)(a^{m_1} b^{m_2} - a^{m_2} b^{m_1})} \,, \\ c_2 &= - \frac{A(m + \nu + 3)(a^{m+3} b^{m_1} - a^{m_1} b^{m+3})}{(\nu + m_2)(a^{m_1} b^{m_2} - a^{m_2} b^{m_1})} \,. \end{aligned} \tag{10'}$$

The displacement is given by (5′) and the stress components by (8′) and (9′) where c_1 and c_2 have the values given in (10′).

Case (ii)

When $\varrho = \varrho_0/r^{m+3}$, (4′) reduces to

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + (1-m)r\frac{du}{dr} - (1+m\nu)u = -\alpha^2\Omega^2\,, \tag{11′}$$

whose solution is

$$u = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} + \frac{\alpha^2\Omega^2}{1+m\nu}\,. \tag{12′}$$

Hence

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\left[(\nu+m_1)c_1 r^{m_1-1} + (\nu+m_2)c_2 r^{m_2-1} + \frac{\alpha^2\Omega^2\nu}{1+m\nu}\frac{1}{r}\right] \tag{13′}$$

and

$$\sigma_\theta = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\left[(\nu m_1+1)c_1 r^{m_1-1} + (\nu m_2+1)c_2 r^{m_2-1} + \frac{\alpha^2\Omega^2}{1+m\nu}\frac{1}{r}\right]. \tag{14′}$$

From the boundary conditions (16), we obtain

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha^2\Omega^2\nu(a^{m_2}-b^{m_2})}{(1+m\nu)(\nu+m_1)(a^{m_1}b^{m_2}-a^{m_2}b^{m_1})}\,,\\ c_2 &= \frac{\alpha^2\Omega^2\nu(b^{m_1}-a^{m_1})}{(1+m\nu)(\nu+m_2)(a^{m_1}b^{m_2}-a^{m_2}b^{m_1})}\,. \end{aligned} \tag{15′}$$

The displacement is given by (12′) and the stress components by (13′) and (14′) where c_1 and c_2 have the values given in (15′).

Case (iii)

When $\varrho = \varrho_0(\log r)$, (4′) reduces to

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + (1-m)r\frac{du}{dr} - (1+m\nu)u = -\alpha^2\Omega^2(\log r^{m+3}) \tag{16′}$$

whose solution is

$$u = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} - \frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+3}}{8-m\nu}\left\{\log r - \frac{m+6}{8-m\nu}\right\}. \tag{17′}$$

Hence

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\Bigg[&(\nu+m_1)c_1 r^{m_1-1} + (\nu+m_2)c_2 r^{m_2-1}\\ &- \frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+2}}{8-m\nu}\left\{(m+\nu+3)\left(\log r - \frac{m+6}{8-m\nu}\right)+1\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{18′}$$

and

$$\sigma_0 = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\left[(\nu m_1+1)c_1 r^{m_1-1}+(\nu m_2+1)c_2 r^{m_2-1}- \right.$$
$$\left. -\frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+2}}{8-m\nu}\left\{(m\nu+3\nu+1)\left(\log r-\frac{m+6}{8-m\nu}\right)+\nu\right\}\right]. \qquad (19')$$

Using the boundary conditions (16)

$$c_1 = -\frac{\alpha^2\Omega^2\left[a^{m_2}b^{m+3}\left\{(m+\nu+3)\left(\log b-\frac{m+6}{8-m\nu}\right)+1\right\}\right.}{(8-m\nu)(\nu+m_1)(a^{m_1}b^{m_2}-a^{m_2}b^{m_1})}$$
$$\left. -a^{m+3}b^{m_2}\left\{(m+\nu+3)\left(\log a-\frac{m+6}{8-m\nu}\right)+1\right\}\right] \qquad (20)$$

$$c_2 = -\frac{\alpha^2\Omega^2\left[a^{m+3}b^{m_1}\left\{(m+\nu+3)\left(\log a-\frac{m+6}{8-m\nu}\right)+1\right\}\right.}{(8-m\nu)(\nu+m_2)(a^{m_1}b^{m_2}-a^{m_2}b^{m_1})}$$
$$\left. -a^{m_1}b^{m+3}\left\{(m+\nu+3)\left(\log b-\frac{m+6}{8-m\nu}\right)+1\right\}\right]$$

The displacement is given by (17′) and the stress distribution by (18′) (19′) where c_1 and c_2 have the values given in (20′).

Case (iv)

When $\varrho = \varrho_0 \sin(\log r)$, (4′) reduces to

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+(1-m)r\frac{du}{dr}-(1+m\nu)u = -\alpha^2\Omega^2\sin(\log r)r^{m+3}, \qquad (21')$$

whose solution is

$$u = c_1 r^{m_1}+c_2 r^{m_2}+\frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+3}\{(m+6)\cos(\log r)-(7-m\nu)\sin(\log r)\}}{K'} \qquad (22')$$

where

$$K' = (1+\nu^2)m^2+2(6-7\nu)m+85. \qquad (23')$$

Hence

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\left[(\nu+m_1)c_1 r^{m_1-1}+(\nu+m_2)c_2 r^{m_2-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+2}}{K'}\{K_1\cos(\log r)+K_2\sin(\log r)\}\right] \qquad (24')$$

where

$$K_1 = m^2 + m(2\nu + 9) + 6\nu + 11$$
$$K_2 = m^2\nu + m(\nu^2 + 3\nu - 8) - (7\nu + 27)\,. \tag{25'}$$

Also,

$$\sigma_\vartheta = \frac{E_0}{(1-\nu^2)r^m}\left[(\nu m_1 + 1)c_1\nu^{m_1-1} + (\nu m_2 + 1)c_2 r^{m_2-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2\Omega^2 r^{m+2}}{K'}\{K_3 \cos(\log r) + K_4 \sin(\log r)\}\right] \tag{26'}$$

where

$$K_3 = \nu m^2 + (\nu^2 + 9\nu + 1)m + 11\nu + 6\,,$$
$$K_4 = m^2\nu^2 + (3\nu^2 - 7\nu)m - (27\nu + 7)\,. \tag{27'}$$

Using boundary conditions (16) we obtain

$$c_1 = \frac{\alpha^2\Omega^2\left[\begin{array}{l} a^{m_2}b^{m+3}\{K_1\cos(\log b) + K_2\sin(\log b)\} - \\ - a^{m+3}b^{m_2}\{K_1\cos(\log a) + K_2\sin(\log a)\}\end{array}\right]}{K'(\nu + m_1)(a^{m_1}b^{m_2} - a^{m_2}b^{m_1})}$$
$$c_2 = \frac{\alpha^2\Omega^2\left[\begin{array}{l} a^{m+3}b^{m_1}\{K_1\cos(\log a) + K_2\sin(\log a)\} - \\ - a^{m_1}b^{m+3}\{K_1\cos(\log b) + K_2\sin(\log b)\}\end{array}\right]}{K'(\nu + m_2)(a^{m_1}b^{m_2} - a^{m_2}b^{m_1})}\,. \tag{28'}$$

The displacement is given by (22′) and the stress components by (24′) and (26) where c_1 and c_2 have the values given in (28′).

Acknowledgements

In conclusion, the author expresses his gratitude to Dr. SUBHAS DATTA of Bangabasi College for his kind help and guidance at every stage of the work.

REFERENCES

1. LAMB and SOUTHWELL: *Proc. Roy. Soc. A* **99** (1921).
2. PRESCOTT, J.: Applied Elasticity. Dover Publication.

Radiale elastische Störung und Spannungsverteilung in einer sich drehenden, inhomogenen, in der Mitte durchgelochten dünnen Kreisplatte. Untersucht werden die radiale Störung und die Spannungsverteilung in einer sich umdrehenden, inhomogenen, dünnen, in der Mitte durchgelochten Kreisplatte, wenn die Platte sich mit einer (I) zeitabhängigen $\Omega = \Omega_0 \exp(ipt/2)$ und (II) gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeit herumdreht. Im Falle (I) wurden $E = E_0 r^m$ und $\varrho = \varrho_0 r^{m-2}$ ausgewählt, und im Falle (II) wurden zahlreiche Gesetze der Dichteänderung bei derselben Änderung von $E(= E_0/r^m)$ untersucht.

Действующий по радиусу упругий возмущающий эффект и распределение напряжений в вращающейся, негомогенной тонкой круглой пластине, прошитой в центре. Анализ распределения напряжений и упругого возмущения, возникающих в тонкой вращающейся круглой пластине, прошитой в центре, если пластина вращается с зависящей от времени $\Omega = \Omega_0 \exp(ipt/2)$(I) и равномерной (II) скоростью. Для случая (I) подобраны зависимости $E = E_0 r^m$ и $\varrho = \varrho_0 r^{m-2}$, а в случае (II) анализовано ряд законов изменения плотности при таком же изменении $E\,(= E_0/r^m)$.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 65—74 (1975)

DIGITAL SIMULATION OF MULTI-COMPONENT DRYING

B. PALÁNCZ* and M. PARTI**

[Manuscript received September 29, 1972]

The paper presents a calculation method for the removal of multi-component moisture by batch drying. The relations derived, and the mathematical model obtained resemble those adaptable for the removal of any single-component moisture, but the determination of the auxiliary conditions will raise several problems. Application of the model is illustrated by a numerical example, where the results are in good agreement with practical experiences.

Symbols

The dimensions are given in a system of mass (M), length (L) and time (θ), and temperature (T).

c = specific heat, L^2/θ^2T
C = constant
D = diffusion coefficient, L^2/θ
f = surface, L^2
G = material quantity, M
i = specific enthalpy, L^2/θ^2
k = heat-transfer coefficient, M/θ^3T
k = material-transfer coefficient, L/θ
$\overline{K}$ = equilibrium constant
$\overline{K}$ = modified equilibrium constant
M = molecular weight, M/kmole
n = number of components
N = material-transfer rate, $M/L^2\theta$, kmole/$L^2\theta$
P = total pressure, M/θ^2
q = heat flow, M/θ^3
r = latent heat, L^2/θ^2
R = universal gas constant, ML^2/θ^2T
s = dimensionless co-ordinate
t = temperature, T
T = absolute temperature, T
x = mole fraction in the liquid phase, kmole/kmole
X = mass-ratio concentration, M/M
y = mole fraction in the gas phase, kmole/kmole
z = co-ordinate normal to the surface, L
α = heat-transfer coefficient, M/θ^3T
δ = boundary-layer thickness, L
τ = time, θ
φ = function relation

* PALÁNCZ B., Salétrom u. 8, H—1085 Budapest, Hungary
** PARTI M., Kende u. 18. H—1111 Budapest, Hungary

Indices

e = contacting
G = for the gas phase
i = component index
j = component index
kd = conductive
kv = convective
L = for liquid
m = for wet material
o = for zero temperature, (or) initial value
P = for constant pressure
s = for solids
t = component index
v = final
1, 2, 3 = component indices

1. Introduction

In the case of chemical or food industry products, often multi-component moisture must be removed. A feasible form of this operation is the caloric removal of the moisture. This is called drying but, as it is commonly known, our present drying techniques are suitable only for the solution of the drying problems of single-component moistures, and the same applies to the calculation models elaborated so far, with only a few exceptions [1, 2]. The present paper describes a mathematical model for the intermittent removal of multi-component moistures but, before the elaboration of the model, we are certainly justified in raising the question: Under such conditions how is it possible to interpret the fundamental ideas learned about in the course of drying single-component moistures, like the temperature measured by the wet thermometer, the section of constant drying rate, etc. and how can we determine the in-time variation of the characteristics describing the process, and the required drying time?

The present paper offers a mathematical model answering all the questions raised which, in addition, is suitable for the examination of the dynamic properties exhibited by the process, and where the term digital simulation is used according to [3].

2. Mathematical model

Let us take the ideal mixture of an inert gas (drying medium) and the vapour of a moisture of $(n-1)$ components flowing over a wet material containing the $(n-1)$ component moisture. The concentration and temperature gradients in the drying wet material are neglected in the calculation, as the state characteristics (temperature and concentration) of the drying medium are assumed to be an in-time and in-space constant (the usual assumptions

in batch drying). The heat quantity required for the removal of the moisture and heat quantity required for the removal of the moisture and heating up of the material is provided for by convection and conduction (possibly, a heat radiation source can similarly be taken into consideration).

The material and thermal balance, respectively, will be expressed on the basis of Fig. 1. Variation per-unit time of the j-th moisture component of the

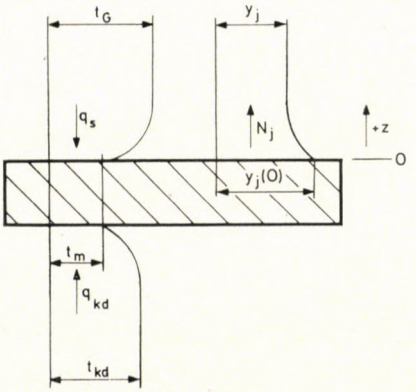


Fig. 1.

wet material can be expressed by means of the removal rate of that component (partial drying rate):

$$-d(G_s X_j) = M_j N_j f_e d\tau\,,$$

that is

$$-\frac{dX_j}{d\tau} = \frac{G_s}{f_e} N_j M_j\,, \quad j = 1\,, \ldots\,, (n-1)\,. \tag{1}$$

The heat content of the drying material will change due to the convective and conductive heat inflow, and to the convective material outflow:

$$d(G_s i_m) = \left(q_s + q_{kd} - \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j i_{Gj}\right) f_e d\tau \tag{2}$$

where i_m is the specific heat content of the wet material as related to dry solids which, if the dissolution heat and the adsorption heat are neglected, will be

$$i_m = \left(c_s + \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} X_j\right) t_m\,, \tag{3}$$

whereas the total change reads as

$$di_m = \left(c_s + \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} X_j\right) dt_m + t_m \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} dX_j\,. \tag{4}$$

Vapours of the departing components are assumed to be in a saturated state over the surface of the wet material, that is,

$$i_{Gj} = c_{pj} t_m + r_{0j}, \quad j = 1, \ldots, (n-1). \tag{5}$$

Substituting (4) and (5) into thermal balance (2), we obtain

$$q_s + q_{kd} = \left[\left(c_s + \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} X_j \right) \frac{dt_m}{d\tau} + t_m \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} \frac{dX_j}{d\tau} \right] \frac{G_s}{f_e} + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j (r_{0j} + c_{pj} t_m). \tag{6}$$

In order to determine q_s, let us express a heat balance for the thermal boundary layer:

$$q_{kv} + \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j i_{Lj} = q_s + \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j i_j \tag{7}$$

where i_j is the heat content of the j-th component in vapour state, at the bulk temperature of the drying medium, t_G. Since $t_G > t_m$, the steam will be overheated, thus

$$i_j = c_{pj} t_G + r_{0j}, \quad j = 1, \ldots, (n-1), \tag{8}$$

and thereby

$$q_s = q_{kv} - (t_G - t_m) \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j c_{pj}. \tag{9}$$

Since the convective heat flow directed from the main volume of the drying medium to the surface of the wet material can be expressed by means of the heat- transfer coefficient, that is,

$$q_{kv} = \alpha_{kv} (t_G - t_m), \tag{10}$$

we shall have

$$q_s = \left(\alpha_{kv} - \sum_{j=1}^{n-1} N_j M_j c_{pj} \right) (t_G - t_m). \tag{11}$$

Substituting the latter into (6), and taking into consideration (2) as well as the expression of the conductive heat flow

$$q_{kd} = k_{kd} (t_{kd} - t_m), \tag{12}$$

we have, after rearrangement, the following equation:

$$\left(c_s + \sum_{j=1}^{n} c_{Lj} X_j\right) \frac{dt_m}{d\tau} = \frac{f_{\dot{e}}}{G_s} (k_{kd} t_{kd} + \alpha_{kv} t_G) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (r_{0j} + c_{pj} t_G) \frac{dX_j}{d\tau} - \left[\frac{f_{\dot{e}}}{G_s} (\alpha_{kv} + k_{kd}) + \sum_{j=1}^{n-1} c_{Lj} \frac{dX_j}{d\tau}\right] t_m . \qquad (13a)$$

The next step is to determine the concentration of the individual components in that part of the drying medium which contacts the surface of the wet material. The mole fraction of the j-th component is

$$x_j = \frac{M_j}{X_j} \Big/ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_i}{M_i}, \quad j = 1, \ldots, (n-1) . \qquad (14)$$

Thus, by using the equilibrium constant, the equilibrium concentration of the j-th component can be expressed as

$$y_j|_{z=0} = K_j x_j , \quad j = 1, \ldots, (n-1) \qquad (15)$$

where K_j generally depends on the temperature and moisture content. To determine the diffusion taking place in the gaseous phase, the Maxwell—Stephan equation can best be made use of. Now, there are a total of n components present in the gas phase, thus

$$-\frac{P}{RT} \frac{dy_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_j y_i - N_i y_j}{D_{ji}} , \quad j = 1, \ldots, n . \qquad (16)$$

The above equation can be expressed for each component of the system of n components, that is, a total of n equations may be written whereof, however, only $(n-1)$ equations will be independent of each other, since the sum of any $(n-1)$ equations will give the one omitted. It follows that the solution of this equation system requires another so-called auxiliary condition. In our case, there will be $(n-1)$ components diffused through the inert drying gas and, therefore, if the inert component is indicated by index n, we may write

$$N_n \equiv 0 . \qquad (17)$$

Eq. (16) can be manipulated further, if the gas- side material- transfer coefficient related to the j-th component is defined in the following way:

$$k_{Gj} = \frac{D_{j,n}}{\delta_{Gj}} , \qquad (18)$$

whereby (16) will assume the form

$$-\frac{P}{RT}\frac{dy_j}{ds}\frac{k_{Gj}}{D_{j,n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_j y_i - N_i y_j}{D_{ji}}\,,\quad j=1,\ldots,(n-1) \tag{19}$$

where s is the dimensionless locus co-ordinate:

$$s=\frac{z}{\delta_{Gj}}\,,\quad 0\leqq s\leqq 1\,. \tag{20}$$

The sorption capacity of the wet material may be taken into account by modifying the $y_j|_{z=0}$ equilibrium constant with a moisture content dependent φ_j function, where

$$0<\varphi_j(x_j)\leqq 1\,,\quad j=1\,,\ldots,(n-1)\,. \tag{21}$$

Accordingly, in Eq. (15)

$$K_j=\overline{K}_j\varphi_j\,,\quad j=1,\ldots,(n-1) \tag{22}$$

where $\overline{K}_j$ is the equilibrium constant in the usual sense of the term.

Thereby the equations describing the phenomenon are at our disposal, thus the in-time variation of the physical characteristics can readily be determined.

3. Boundary conditions

The model must be completed with the initial and boundary conditions. The initial conditions are

$$X_j|_{\tau=0}=X_{j0}\,,\quad j=0,\ldots,(n-1)\,, \tag{23a}$$

$$t_m|_{\tau=0}=t_{m0}\,, \tag{23b}$$

while the boundary conditions:

$$y_j|_{s=1}=y_{j1}\,, \tag{24a}$$

$$X_l|_{\tau=\tau_v}=X_{lv}\,. \tag{24b}$$

In connection with Eq. (24b) it should be noted that, in general, the final concentration of all the components cannot be specified, not even in an ideal case, since the sorptional properties of the individual components are different.

4. Numerical solution

The mathematical model thus described can be solved numerically, and the calculation can be performed as indicated above, provided, that the initial values are vailable in a time moment $0>\tau_k>\tau_v$.

Concentrations of the individual components in the drying medium contacting the surface of the wet material can be determined from (14) and (15), by taking (21) into consideration. Thereafter, by using (19), the concentration profile can be determined with (24). This, however, is feasible only by iteration, since the $N_j|_{\tau=\tau_k}$ values are unknown.*

With the known value of $N_j|_{\tau=\tau_k}$, the rate of concentration change can be determined from (1), then the rate of temperature variation from (13). Thereafter, the new concentration and temperature values can be readily calculated:

$$X_j\,|_{\tau=\tau_k+\Delta\tau}\,, \quad t_m\,|_{\tau=\tau_k+\Delta\tau}\,.$$

The procedure is continued until the (24b) condition is satisfied.

5. Application with a two-component system

Now the application of the model will be illustrated by a numerical example involving a two-component system: a solid containing a moisture of alcohol–water composition will be dried [1].

With two components, the system of equations will assume the form

$$-\frac{dX_1}{d\tau}=\frac{f_{\acute{e}}}{G_s}N_1M_1\,, \quad -\frac{dX_2}{d\tau}=\frac{f_{\acute{e}}}{G_s}N_2M_2\,,$$

$$\frac{dt_m}{d\tau}=\left\{\frac{f_{\acute{e}}}{G_s}(k_{kd}t_{kd}+\alpha_{kv}t_G)+(r_{01}+c_{p1}t_G)\frac{dX_1}{d\tau}+\right.$$

$$+(r_{02}+c_{p2}t_G)\frac{dX_2}{d\tau}-\left[\frac{f_{\acute{e}}}{G_s}(\alpha_{kv}+k_{kd})+c_{L1}\frac{dX_1}{d\tau}+\right.$$

$$\left.\left.+c_{L2}\frac{dX_2}{d\tau}\right]t_m\right\}\Big/(c_s+c_{L1}X_1+c_{L2}X_2)\,, \tag{13}$$

$$x_1=\frac{X_1}{M_1}\Big/\left(\frac{X_1}{M_1}+\frac{X_2}{M_2}\right), \quad x_2=1-x_1\,. \tag{14}$$

The equilibrium constants are determined on the basis of the Raoult law:

$$\begin{aligned}\overline{K}_1&=P_1(t)/P\,,\\ \overline{K}_2&=P_2(t)/P\,,\end{aligned} \tag{25}$$

* This method is very similar to the procedure published in detail in [9].

where $P_1(t)$ and $P_2(t)$ indicate the saturation vapour pressure of the ethyl alcohol and water, respectively, in pure condition. In our actual calculation the ethyl- alcohol- tension curve has been described by the Calingaert–Davis [4] equation, and the data were taken from [5]:

$$\log P_1(t) = 0{,}0238(t + 230) - 4{,}35 .$$

The curve of water tension was approximated by using the Filonenko relation [6]:

$$\log P_2(t) = 0{,}622 + \frac{7{,}5t}{238 + t} .$$

The diffusion equations will read, if the condition $N_3 \equiv 0$ is reckoned with, as

$$-\frac{dy_1}{ds} = \left(\frac{N_1 y_2 - N_2 y_1}{D_{12}} + \frac{N_1 y_3}{D_{13}}\right)\frac{D_{13}RT}{Pk_{G1}} ,$$

$$-\frac{dy_2}{ds} = \left(\frac{N_2 y_1 - N_1 y_2}{D_{21}} + \frac{N_2 y_3}{D_{23}}\right)\frac{D_{23}RT}{Pk_{G2}} ,$$

$$y_3 = 1 - (y_1 + y_2) .$$

In the calculation, as was pointed out earlier, variation of the process characteristics will greatly depend on the sorption properties of the materials involved, which can be taken into account by means of the sorption isotherm. In the given case the sorption isotherm equation used in literature has been selected:

$$\varphi = \frac{X^3}{X^3 + c}$$

where the value of the constant c was 0,008 for alcohol, and 0,01 for water. The other data used in our calculation were

X_{10}	= 0,30 kg alcohol/kg dry matter	k_{G2}	= 113 m/h
X_{20}	= 0,25 kg water/kg dry matter	y_{11}	= 0,01315 kmol alcohol/kmol total
t_{m0}	= 20 and/or 40°C	y_{21}	= 0,0158 kmol water/kmol total
t_G	= 52°C	$f_{\acute{e}}$	= 0,24 m²
D_{13}	= 0,0476 m²/h	G_{sz}	= 8 kg
D_{12}	= 0,0575 m²/h	α_{kv}	= 30 kcal/m²h°C
D_{23}	= 0,106 m²/h	k_{kd}	= 0
P	= 1 atm	c_S	= 0,7 kcal/kg°C
k_{G1}	= 95 m/h		

The calculation results are shown in Figs 2–4. Fig. 4 illustrates the variation of the moisture composition expressed in mole fractions related to the two-component system, while Fig. 3 presents the variation of the concentration of the individual moisture components, as related to an initial temperature of 20°C. Fig. 2 shows the temperature variation for two different initial temperatures.

A study of these figures reveals that the type of the results obtained is in agreement with that of the results observed in single-component moisture removal [7].

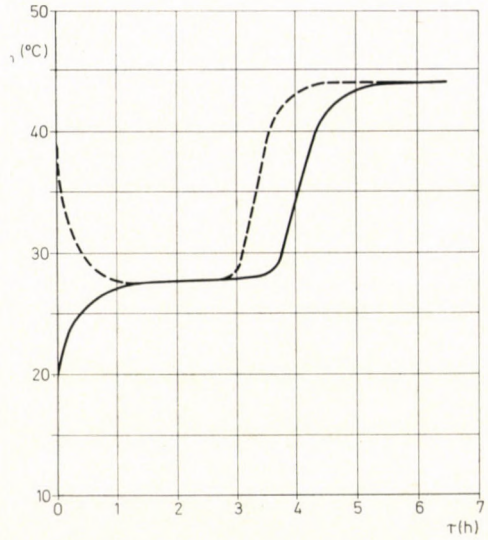


Fig. 2.

Fig. 2 illustrates the effect of the initial temperature. Fig. 3, on the other hand, clearly shows that the removal rate of two components is different: the rate of alcohol evaporation is faster at the beginning, but will later on, slow down which leads to what is experienced in Fig. 4: the moisture composition first decreases, then increases again, approximating a limit value (the same was experienced with other systems as well). This finding is in good agreement with literary results [1] which means that the mole fraction of the diffusion velocities approaches

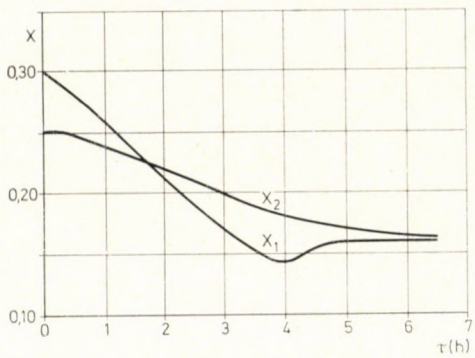


Fig. 3.

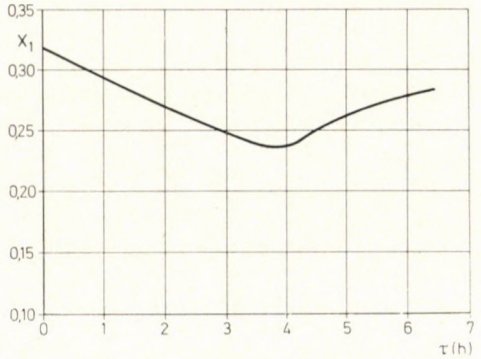


Fig. 4.

that of the moisture. The results obtained depend, of course, on the sorption properties of the wet material that have been accepted with certain assumptions. Although the physics of wet materials undergoes a rapid development, the sorption properties cannot be modelled precisely in the case of a single-component moisture either, so it represents a particular problem in the case discussed above. Thus, any further development of the model depends on research investigating on the sorption properties of the various materials [8].

REFERENCES

1. SZENTGYÖRGYI, S.—PARTI, M.: *Gép* **20** (1968), 246
2. MÜHLENBRUCH, M.—DIETZ, H.: Contribution to the Calculation of Material Transfer in the Evaporation Process — 3rd Conference on Drying, Budapest 1971 (in Hungarian)
3. Definitions — Simulation, **15,** No 2, (1970)
4. HÁLA, E.—PICK, J.—FRIED, V.—VILIM, O.: Vapor—Liquid Equilibria. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965
5. PERRY, J. H.: Chemical Engineering Manual. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969 (Hungarian translation)
6. GINZBURG, A. S.: Drying in the Food Industry. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968 (Hungarian translation)
7. PALÁNCZ, B. — PARTI, M.: *Műszaki Tudomány* **45** (1972), 197
8. ENDRÉNYI, S.: Desorption Processes of Porous-sorptive Substances of the Dispersed Phase. 3rd Conference on Drying, Budapest 1971
9. PARTI, M.—PALÁNCZ, B.: Mathematical Models for Batch Drying. *Int. J. Heat and Mass Transfer.* **17** (1974), 669

Digitale Simulation der mehrkomponentigen Trocknung. Die Arbeit befaßt sich mit einem Berechnungsverfahren für die Entfernung von mehrkomponentiger Feuchtigkeit durch Stufentrocknung. Die abgeleiteten Beziehungen und das erhaltene mathematische Modell sind ähnlich denen die für die Entfernung einer beliebigen einkomponentigen Feuchte abgeleitet wurden, jedoch wirft die Bestimmung der Nebenbedingungen einige Probleme auf. Die Anwendung des Modells wird durch ein Zahlenbeispiel illustriert, dessen Ergebnisse in guter Übereinstimmug mit der praktischen Erfahrung stehen.

Цифровая симуляция многокомпонентной сушки. Описывается методика расчета удаления многокомпонентной влаги путем ступенчатой сушки. Выведенные уравнения и математическая модель сходи тем, которые могут быть применены для удаления произвольной однокмпонентной влаги. Определение побочных условий поднимает все-таки одну проблему. Применение модели иллюстрируется числовым примером; полученный при этом результат хорошо согласуется с практическим опытом.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 75—90 (1975)

STUDY OF SIDE FLOW IN SIMPLE VEE GROOVE CUTTING AND ITS INFLUENCE ON SURFACE FINISH

M. S. SELVAM* and V. RADHAKRISHNAN*

[Manuscript received September 21, 1973]

Side flow in metal cutting is one of the factors responsible for the roughness of a machined surface. This paper deals with the experimental investigation of the factors responsible for side flow in simple Vee groove cutting. Influence of cutting speeds, rake angles, Vee angles, depths of cut and nose radii on side flow is discussed. The distribution of stresses around the Vee groove is determined experimentally.

1. Introduction

The study of surface roughness formation in machining is of great importance. Improvement of the quality of the surface finish in semifinishing and finishing will subsequently reduce the finishing cost. To understand the mechanism of roughness formation, a detailed study of various parameters responsible for it is of importance in the practice of metal cutting.

Investigations have been carried out to identify these factors. Effect of cutting speed, tool vibration, swelling and tool wear have been studied by T. SATA [1]. N. A. SHEVCHENKO and E. E. KIPPER studied the effect of depth of cut on surface finish [2]. According to LAMBERT, SHAW, PEKELHARING and GIESZEN, groove wear is responsible for considerable amount of side flow of material in finish turning operation [3, 4, 5]. BETZ studied the influence of cutting edge roughness and roundness on cut surface [6]. BUTTERY and ARCHARD observed the amount of side flow in scratching a specimen with a Vickers indenter [7]. In the present investigation an attempt is made to determine experimentally the influence of various cutting parameters on the side flow in simple Vee groove cutting.

Side flow is the displacement of work material opposite to the feed direction or movement of material in a direction perpendicular to the direction of cutting. SATA termed this factor as swelling [1]. Deviation of the actual surface profile from the ideal profile is due to built-up-edge, tool vibration, tool wear, side flow, cutting edge roughness and roundness. In order to investi-

* Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Madras. 36

gate the factors influencing the amount of side flow in metal cutting, simple Vee grooves were cut at different cutting speeds, depths of cut, rake angles, Vee angles and nose radii.

2. Experimental procedure

The work pieces for the tests were prepared from plain carbon steel (0,29% C). Twenty-five workpieces, $25 \times 25 \times 40$ mm, ground and lapped were used for tests conducted at lower cutting speeds. For cutting speeds above 80 m/min., cylindrical discs were mounted on a special mandril. The surface of the work piece was then ground and superfinished. Tests were conducted in a high-speed lathe and a feed rate of 3 mm/rev. was used to get the Vee grooves without overlapping.

High-speed steel tool with 5% cobalt was used for tests conducted at low cutting speeds, up to 40 m/min. A carbide tipped tool was used for tests conducted at speeds above 80 m/min. The high-speed steel tools and the carbide-tipped tools were ground to the following tool geometry: Vee angle 60°, rake angle 0°, clearance angle 10°, nose radius 1,0 mm, to study the effect of cutting speed and depth of cut on side flow. A high-speed steel tool with Vee angle 90° and clearance angle 10° was used to study the effect of nose radius and rake angle. Experiments were also conducted to study the effect of Vee angle on side flow.

For slow-speed tests, a shaping machine was used. The well-polished rectangular pieces were gripped in a vice and the work piece surface levelled for parallelism between the ram axis and the work surface. The depth of cut was set with the help of a dial indicator. A groove was cut and the ram was stopped at the end of the stroke, thus avoiding retracing of the tool.

The profile of the side flow was obtained from a light section microscope. The profiles were photographed in the microscope which gave a magnification of 80. This was further magnified in a profile projector and the profile was traced on a sheet which gave an overall magnification of 800. The cross sectional area of the side flow a (Fig. 1) was measured with a planimeter. The height of the side flow h was also obtained from the tracing. For each cutting condition an average of 25 values was used for the analysis.

The machined pieces were then sectioned in a direction perpendicular to the Vee groove. Three or four specimens were taken and they were moulded, polished and etched to study the microstructure and the flow of metal along the Vee groove surface. The cross sectional area and the actual depth of cut were obtained by projecting the cross section of the Vee groove in a profile projector at a magnification of 100. Microhardness values were also obtained to determine the area of deformation around the Vee groove.

To study the stress distribution across the Vee groove, grid lines were engraved at 0,1 mm intervals on the polished surface of the workpiece. The grid lines were traced with the help of a profile projector at 100 fold magnification before it was machined. This workpiece was gripped along with another well-polished piece in such a manner that the face on which the grid lines were engraved was butting against the polished face of the other piece, with the

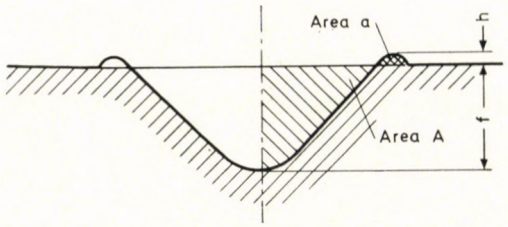


Fig. 1. Vee groove section defining h, t, a, A

engraved face facing the tool. The grid lines after machining were again traced. The tracings obtained before and after machining were superimposed and the shift in the position of the corner points were recorded both in X and Y directions. Knowing the size of the rectangle and the shift, the strain values were obtained from the formula [8].

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

where τ is the shear strain,
∂u is the displacement or shift in X direction,
∂v is the displacement in Y direction,
∂x & ∂y are the sides of the rectangle in X and Y directions.

The stress values were obtained from the true stress true strain curve for the material under test.

3. Mechanism of side flow

The side flow of metal in machining a Vee groove occurs due to the flow of a thin layer of metal which is squeezed in between the tool flank or built-up edge and the workpiece in a direction perpendicular to the Vee groove or the direction of cut. The microphotographs shown in Fig. 2 indicate that a thin layer of metal which flows in a direction perpendicular to the direction of cut, is responsible for the side flow.

From the investigations of KAMANDURI, it could be inferred that no chip is obtained at $-85°$ rake angle [9]. The tool merely rubs the work mate-

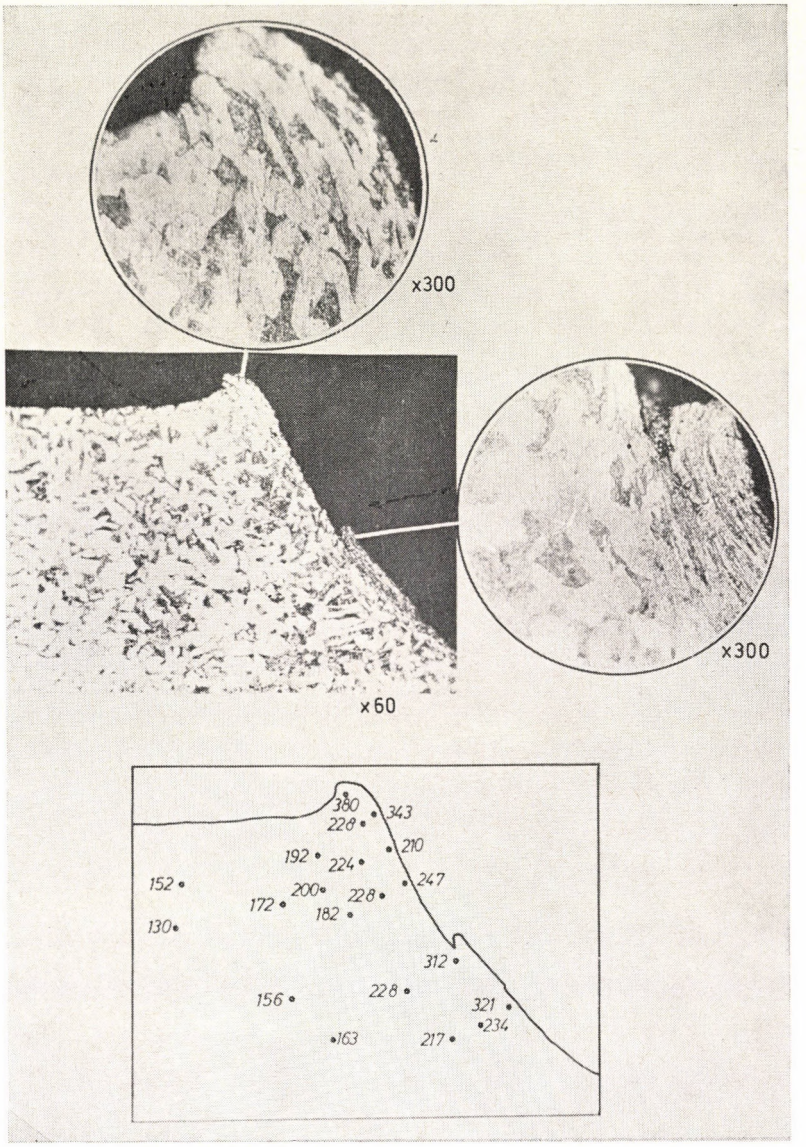
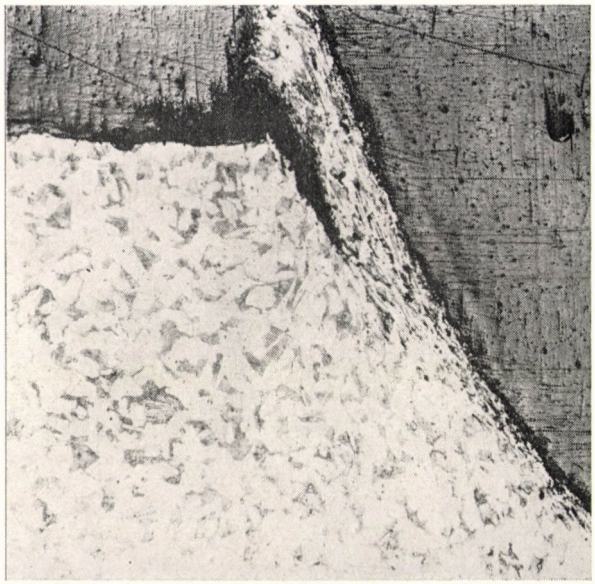


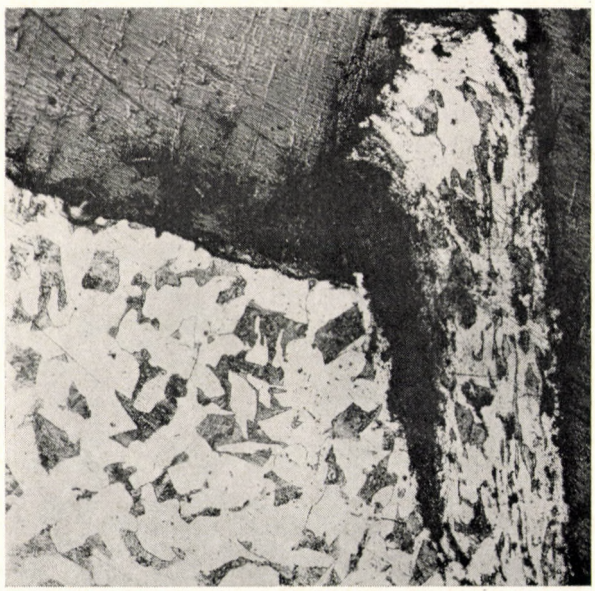
Fig. 2a. Microphotographs of the Vee grrove section. Inserts indicate the magnified views of the flow layer. Microhardness values are shown in the bottom figure

rial causing considerable side flow. ROWE and WETTON inferred that the transition from chip formation to ploughing occurs at —35° rake angle [10]. The ploughing is responsible for considerable amount of side flow.

PEKELHARING and GIESZEN suggested two hypothesis for the side flow in metal cutting [5]. The first one is that the greatest local pressure between



x60



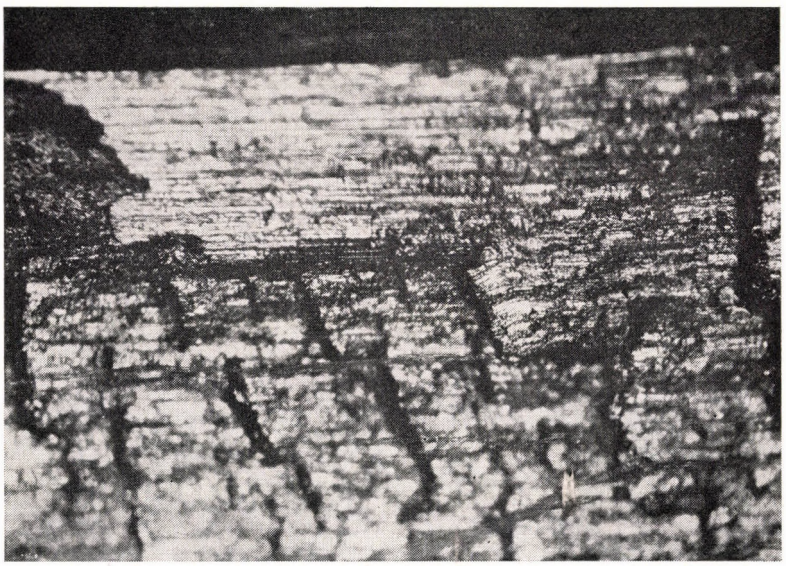
x 300

(b)

Fig. 2b. Another typical microsection of the side flow

the flank and the work surface is squeezing the metal sideways. The second hypothesis is that the squeezing occurs just above the rake face in the lower part of the shear zone. This causes the shear zone to penetrate a little into the finished workpiece material. SHAW observed the side flow in actual cutting and suggested that the metal left behind by the secondary cutting edge is subjected to sufficiently high pressure to cause the metal to flow to the side [4].

Experiments conducted with a symmetrical Vee groove tool showed a regular pattern in the occurrance of the side flow. The Vee groove surface had bright portions at regular intervals, which could be seen from the macro photographs shown in Fig. 3. This is a very heavily strained layer of metal



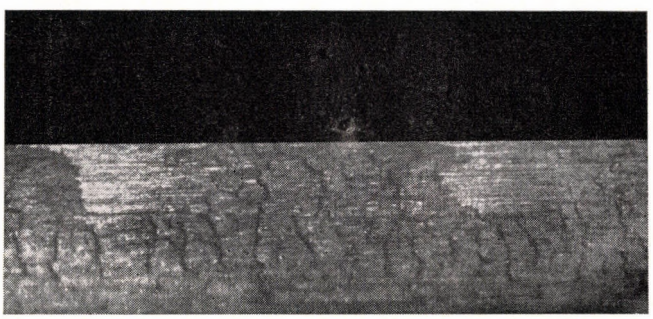


Fig. 3. Macrophotographs of the Vee groove surface

which is squezzed between the tool and the workpiece. The side flow in this portion is observed to be more. Further, at low cutting speed, up to 40 m/min the size of the bright portion is observed to be more. This could be attributed to the variation of rake angle along the built-up edge varying from positive to $-90°$. Hence there is a region between $-35°$ rake angle and $-90°$ rake angle, where the ploughing predominates the chip formation causing considerable amount of side flow.

In addition to the side flow, the tool acts as a wedge indenter causing the metal to bulge due to radial or vertical component of forces.

The inserts in Fig. 2 show the laminar structure of the flow layer. It consists of laminates of pearlite and ferrite. The direction of grain elongation shows the nature of side flow. The amount of metal flown over the surface of the workpiece is responsible for the roughness of the machined surface. Of course, the actual profile of the side flow is modified by other factors, such as groove wear, direction of chip flow and the vibration of the tool workpiece combination. Further experiments were performed to observe the effect of side flow on surface roughness. Here the discussions are limited to symmetrical Vee groove cutting only.

The hardness values indicated in Fig. 2a show the amount of strain hardening of the flow layer. It also shows the plastically deformed zone around the Vee groove surface. The hardened layer of the Vee groove is responsible for the groove wear in actual cutting which modifies the shape of the side flow.

4. Experimental results

4.1. Effect of cutting speed

A quantitative representation of the side flow is given by the terms h h/t and a/A,

where h = height of the overflowing metal or side flow (Fig. 1)
t = depth of cut or depth of the Vee groove
a = cross sectional area of the side flow
A = cross sectional area of the Vee groove

These ratios are used as the measure of surfae roughness. Variation of h/t, a/A and h with the cutting speed is shown in Fig. 4. The cutting speed was varied from 8 m/min to 200 m/min. Values between 8 m/min and 40 m/min showed a steep decrease in the side flow. Beyond 40 m/min the slope of the curve is much less. This variation is almost similar to the variation of the built-up edge size with the cutting speed as reported by other authors [1, 11, 14]. It could be inferred from this that the size and shape of the built-up-edge have considerable influence on the side flow. This indicates a possible explanation for the mechanism of side flow. The shape of the built-up edge varies from

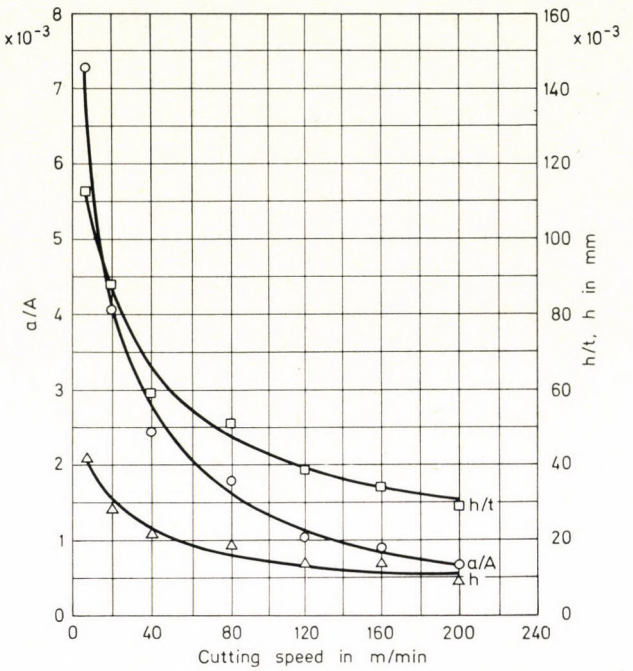


Fig. 4. Effect of cutting speed on side flow; $t = 0{,}5$ mm, $\lambda = 60°$, $r = 1{,}0$ mm and rake angle zero

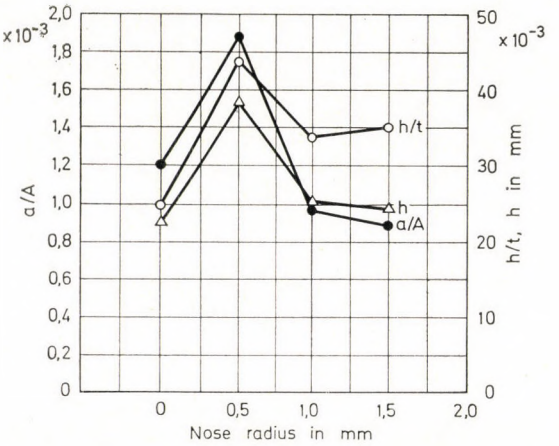


Fig. 5. Variation of side flow with nose radius; $t = 1{,}0$ mm, $v = 20$ m/min, $\lambda = 90°$, rake angle zero

positive wedge in the lower ranges of cutting speed to rectangular and negative wedge at higher cutting speeds [13]. The region of negative rake along the built-up edge surface decreases with increasing cutting speed which, in turn, is responsible for decrease in the amount of side flow.

4.2. Effect of depth of cut

In Fig. 6. the variations of h/t, a/A and h with reference to the depth of cut are shown. The ratios h/t and a/A in particular did not show any correlation with the depth of cut. The height of the side flow, of course, increases with the depth of cut. SHEVCHENKO inferred that the surface roughness increases with increasing ratio of s/t or a decrease in t [2], where s is the feed and t the depth of cut. This could be attributed to the change in the strain condition occuring due to an increase in the temperature when t is increased. The variation of h with depth of cut is almost a straight line, indicating an increase in roughness with an increase in depth of cut. The discrepancy may be attributed to the direction of chip flow which varies with the ratio s/t.

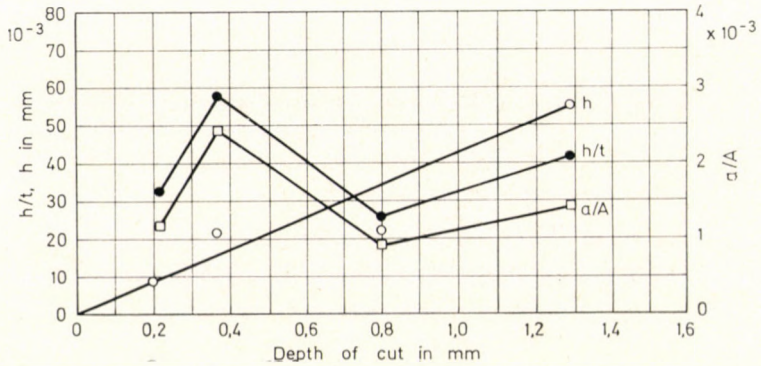


Fig. 6. Effect of depth of cut on side flow; $v = 40$ m/min, $\lambda = 60°$, $r = 1{,}0$ mm and rake angle zero

4.3. Effect of nose radius

Fig. 5 shows the effect of nose radius on h/t, a/A and h. The side flow is maximum when the nose radius is 0,5 mm. According to SHAW, the surface finish is independent of the nose radius [15]. But there is a critical value for the nose radius from the point of view of tool chatter. The sudden increase in the amount of side flow may be due to tool chatter. Omitting the values for 0,5 mm nose radius, Fig. 5 shows that h/t ratio increases with the nose radius and a/A ratio decreases with the nose radius.

4.4. Effect of Vee angle

The Vee angle was varied from 60° to 120° and the values of h/t, a/A and h were found to decrease with Vee angle as shown in Fig. 7.

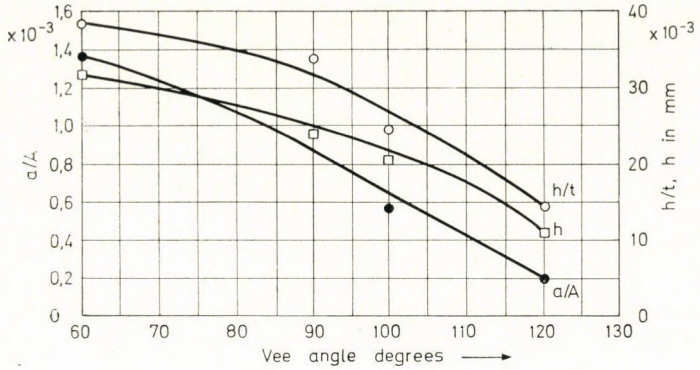


Fig. 7. Effect of Vee angle on side flow; $v = 20$ m/min, $r = 1{,}0$ mm, $t = 1{,}0$ mm and rake angle zero

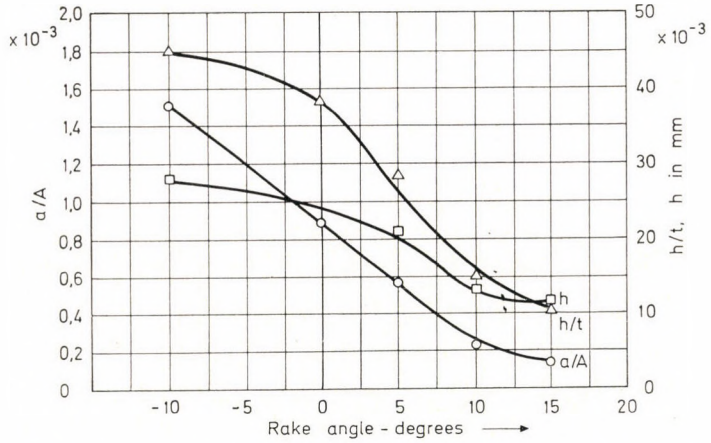


Fig. 8. Variation of side flow with rake angle; $v = 20$ m/min, $t = 1{,}0$ mm, $\lambda = 90°$, $r = 1{,}5$ mm

4.5. Effect of rake angle

The rake angle was varied from $-10°$ to $15°$. The values of h/t, a/A and h were found to decrease with increase in the rake angle as shown in Fig. 8. The variation in the amount of side flow with rake angle may be due to the decrease in magnitude of the ploughing force with increasing rake angle and decrease in the size of the built-up-edge with increase in rake angle as observed by HOSHI [10].

5. Nomograms for h/t and a/A

In order to have a comprehensive idea of the effect of various parameters on surface roughness measured as the ratio h/t and a/A, nomograms were constructed for simple Vee groove cutting.

The ratios h/t and a/A of the side flow could be expressed as a function of cutting speed v, nose radius r and Vee angle λ. Since the depth of cut, as explained earlier, does not have any correlation with the amount of side flow, it need not be included in the function

$$h/t = f(v, r, \lambda) .$$

This expression is written as

$$h/t = Kv^1 r^m \lambda^n$$

where K is a constant and 1, m and n are exponents. Three Vee grooves were cut for each cutting condition and the averages of h/t, a/A and h were calculated from 25 observations. The exponents for cutting speed, nose radius and Vee angle were obtained by plotting the average values of h/t, a/A and h against these variables, in a log-log sheet.

The final expression for h/t was found to be

$$h/t = \frac{9{,}0 \cdot 10^4 \cdot r^{0{,}28}}{v^{0{,}525} \cdot \lambda^{2{,}9}} . \tag{1}$$

Similarly, the expression for a/A was found to be:

$$a/A = \frac{90 \cdot 10^4}{v^{0{,}66} r^{0{,}04} \lambda^{4{,}2}} . \tag{2}$$

The values obtained from equations (1) and (2) are checked for 14 cutting conditions (with zero rake angle). The difference between the observed and estimated values were found to be less than 18% of the estimated values. Equations (1) and (2) were used to construct the nomograms shown in Figs 9, 10. These nomograms could be used to compute the values of h/t and a/A in machining a simple Vee groove with a zero rake tool.

6. Stress distribution

The stress distribution around the Vee groove section could be seen from Fig. 11. It shows a region of severely strained portion indicating the extent of squeezing of the bright portion of the Vee groove. The severity of deformation of the flow layer distorted the grid lines to such an extent that the grid lines were not clearly seen, when observed through the microscope or the profile projector.

The profiles obtained from the light section microscope at different cutting conditions and tool angles are shown in Figs 12—15.

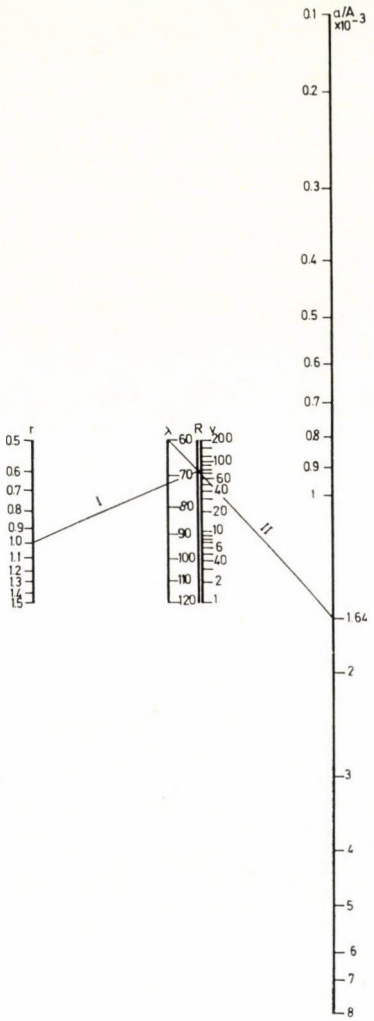


Fig. 9. Nomogram for computing h/t

7. Conclusion

The side flow, which is responsible for the roughness of the machined surface, in simple Vee groove cutting is found to vary with the shape and size of the built-up-edge. The region of negative rake angle between $-35°$ and $-90°$ in a positive wedge built-up-edge is responsible for ploughing. It squeezes the work material in between the built-up-edge and the workpiece, thereby making it to flow to the surface.

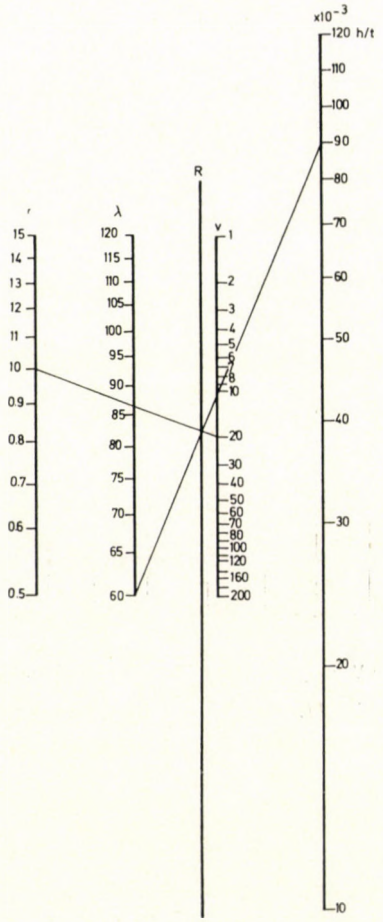


Fig. 10. Nomogram for computing a/A

Side flow is found to decrease with increasing cutting speed, rake angle and Vee angle. Side flow expressed as the ratios h/t and a/A is independent of the depth of cut, whereas the height of the side flow h increases with the depth of cut. These values of h/t or h, as the case may be, will indicate the roughness produced by the simple Vee groove cutting.

The stress values obtained from the grid lines are found to increase from the bottom of the Vee groove to the surface of the workpiece along the groove surface. The strain values which varied from 0,038 to 0,046 show that the deformation is severe near the edge of the Vee groove where the bright portion of the squeezed metal is seen.

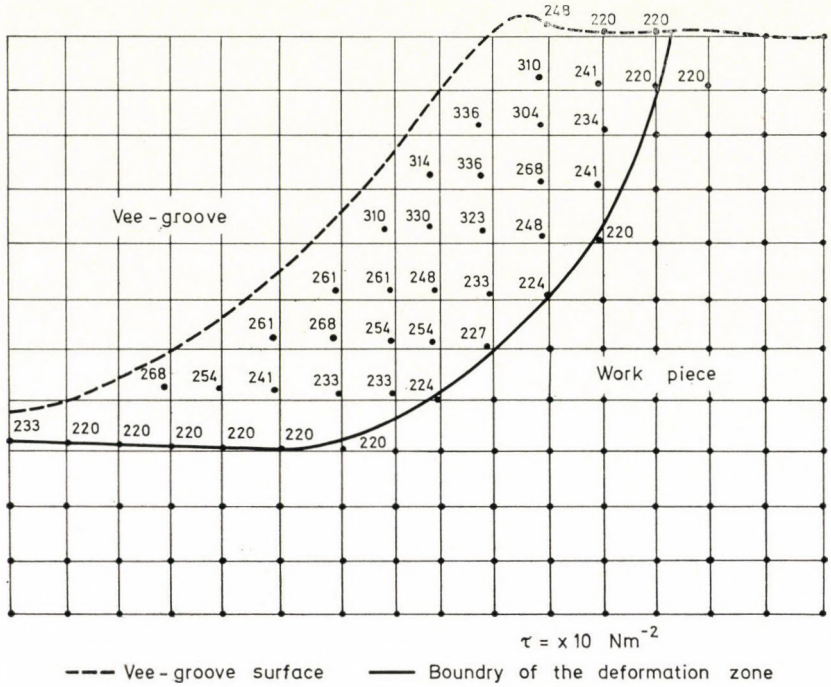


Fig. 11. **Stress distribution around the Vee groove surface**

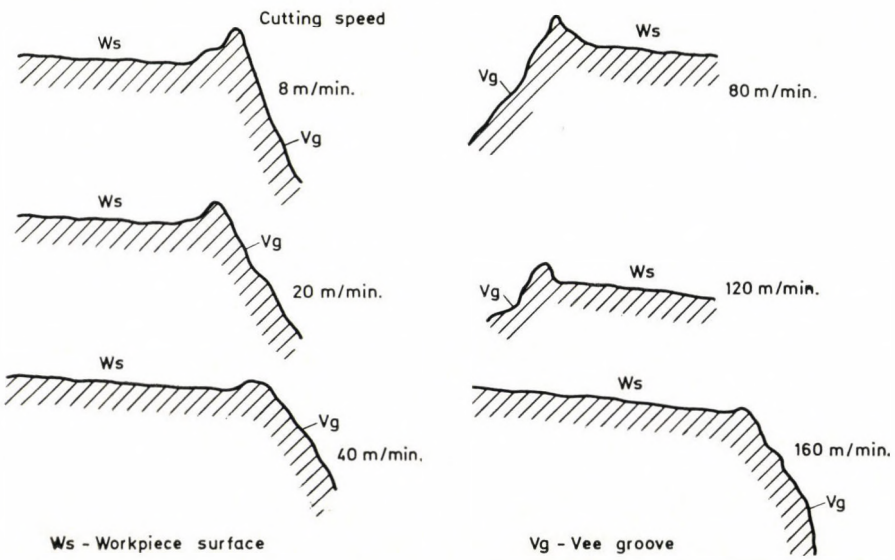


Fig. 12. **Profiles of the side flow at different cutting speeds**

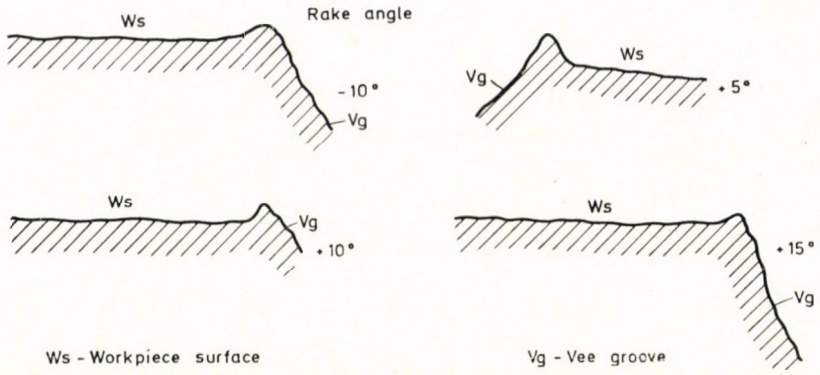


Fig. 13. Profiles of the side flow at different rake angles

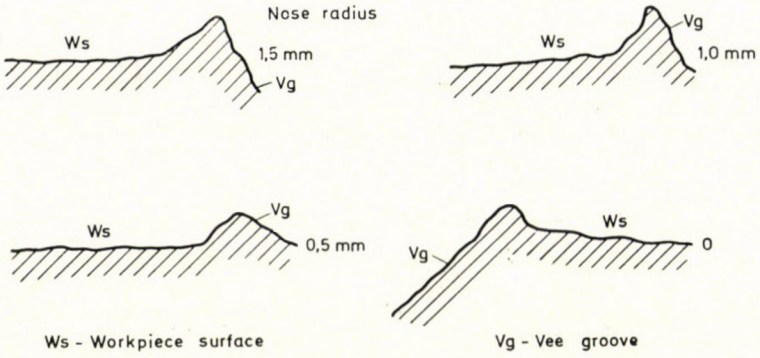


Fig. 14. Profiles of the side flow at different nose radii

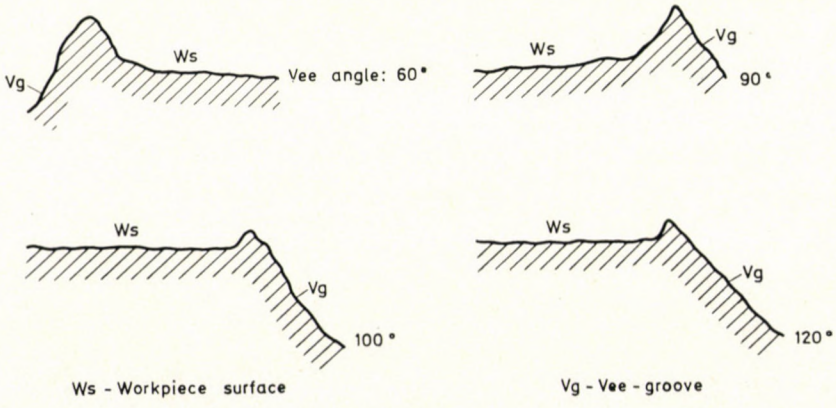


Fig. 15. Profiles of the side flow at different Vee angles

REFERENCES

1. Sata, T.: Surface Finish in Metal Cutting. *Ann. C.I.R.P.* **12** (1964), 190
2. Shevchenko, N. A.—Kipper, E. E.: Effect of Depth of Cut on Surface Finish when Turning Stainless Steel. *Russian Engg. J.* **49** (1969), 81
3. Lambert, H. J.: Two Years of Finish Turning Research at the Technical University, Delft. *Ann. C.I.R.P.* **10** (1961/62), 246
4. Shaw, M. C.—Crowel, J. A.: Fine Machining. *Ann. C.I.R.P.* **13** (1965/66), 5
5. Pekelharing, A. J.—Gieszen, C. A.: Material Side Flow in Finish Turning. *Ann. C.I.R.P.* **20/1** (1971), 21
6. Betz, F.: Die Beeinflussung der Schnittflächenrauheit durch die Mikrogestalt der Werkzeugschneide. *Ann. C.I.R.P.* **18** (1970), 625
7. Buttery, T. C.—Archard, J. F.: Grinding and Abrasive Wear. *Proc. I. Mech. E.* **185** (1970), 43/71, 537
8. Danial—Post: Moire Grid Analyser Method for Strain Analysis. *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis* **2** (1965), 368
9. Kamanduri, R.: Some Aspects of Machining with Negative Rake Tools Simulating Grinding. *Int. J.M.T.D.R.* **11** (1971), 223
10. Rowe, G. W.—Wetton, A. G.: Theoretical Consideration in the Grinding of Metals. *J. Inst. Metals* **97** (1969), 193
11. Koichi Hoshi—Tetsutaro Hoshi: On the Metal Cutting Mechanism with the Built-up Edge. *Memories of faculty of Engg. Hokkaido University* **12** (1969), No. 3
12. Hovinga, H. J.: Damage Caused by the Built-up edge. *Ann. C.I.R.P.* **19** (1971) 341
13. Heginbotham, W. B.—Gogia, S. L.: Metal Cutting and the Built-up-Nose. *Proc. I. Mech. E.* **175** (1961), 892
14. Nakayama, K.—Shaw, M. C.—Brewer, R.: Relationship between Cutting Forces, Temperature, Built-up edge and Surface Finish. *Ann. C.I.R.P.* **14** (1966), 211
15. Shaw, M. C.: Metal Cutting Principles. *M.I.T.* Cambridge, Mass. (1954)

Untersuchung des seitlichen Fließens beim einfachen Spanen von V-Nuten. Seitliches Fließen bei der spanenden Bearbeitung von Metallen ist einer der für die Rauhigkeit der bearbeiteten Oberfläche verantwortlichen Faktoren. Die vorliegende Arbeit behandelt die experimentelle Untersuchung der für das seitliche Fließen beim einfachen Schneiden von V-Nuten verantwortlichen Faktoren. Der Einfluß von Schnittgeschwindigkeiten, Spanwinkeln, V-Winkeln, Schnittiefen und Spitzenradien wird untersucht. Die Spannungsverteilung rund um die V-Nut wurde durch Versuche bestimmt.

Исследование бокового итсчения при резании простых V-образных пазов и его воздействие на чистоту поверхности. При резании металлов истечение в боковом направлении является одним из факторов, ответственных за шероховатость поверхности. Работа занимается исследованием факторов, ответственных за истечение в боковом направлении при резании простых V-образных пазов. Исследуется воздействие скорости резания, лобового угла, углов V-образного паза, глубины захвата и радиусов в вершине на истечение в боковом направлении. Распределение напряжений возле V-образного паза определяется экспериментальным образом.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 91—115 (1975)

PRACTICAL ANALYSIS OF ELLIPTIC PARABOLOID MEMBRANE SHELLS OVER RECTANGULAR GROUND PLAN

DESCRIPTION OF THE MENYHÁRD—SZMODITS METHOD*

S. KISBÁN**

[Manuscript received October 18, 1973]

The extended use of shell structures made it necessary to simplify their design. This can be done either by neglecting part of the structural data and introducing approximate theories, or by finding analytic functions fairly approximating the exact solution of the differential equation of the structure meeting the boundary conditions. The described design method is based on this latter concept of simplification.

1. Basic equations

Let the elliptic paraboloid surface have the rises f_a and f_b over a rectangular base of sides $2a$ and $2b$ (Fig. 1). The equation of this surface in an orthogonal co-ordinate system with the origin at the top will be of the form

$$z = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2 \tag{1}$$

where

$$c_1 = \frac{2f_a}{a^2}, \quad c_2 = \frac{2f_b}{b^2}.$$

The x axis of the co-ordinate system of Fig. 1 is always paralell to the longer side of the rectangle, i. e. we always have $a \geq b$.

Let the intensity of the vertical load acting on the shell surface be given by the load function $Z(x, y)$. According to (1), the differential equation of the stress function is

$$c_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + c_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Z(x, y). \tag{2}$$

Projections of the internal forces on the ground plan, (the so-called 'reduced internal forces') are related by the stress function [2]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = n_y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = n_x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -n_{xy}. \tag{3}$$

* The basic idea of this method is due to I. MENYHÁRD [3], subsequently developed together with K. SZMODITS [4].

** S. KISBÁN, 5, 1111 Budapest, Zenta u. Hungary

Thus, the vertical equilibrium equation (2) of the membrane shell becomes:

$$c_1 n_x + c_2 n_y = -Z(x, y) \,. \tag{4}$$

Let us determine reduced internal forces n_x, n_y, n_{xy} for vertical load, assuming 'half-rigid' supports, i. e. diaphragms that can take forces only in their own plan. These requirements are described by following boundary conditions:

$$x = \pm a: \qquad n_x = 0\,, \quad n_y = -\frac{Z(a, y)}{c_2}\,; \tag{5a}$$

$$y = \pm b: \qquad n = -\frac{Z(x, b)}{c_1}\,, \quad n_y = 0\,. \tag{5b}$$

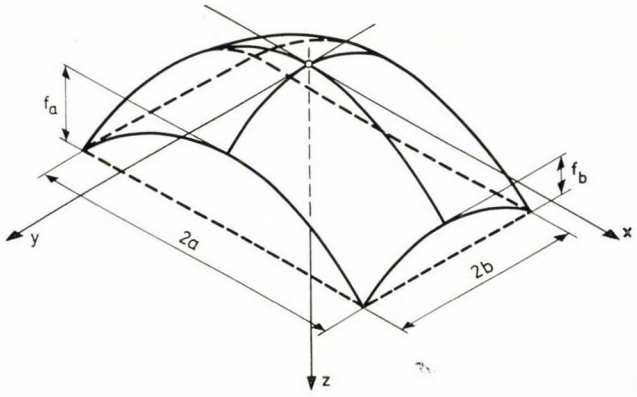


Fig. 1.

2. Solution for symmetric loads

2.1. Determination of internal force n_y

Rather than to solve reduced internal forces by means of the stress function, one internal force n_y is selected, the other eliminated, and an analytic function likely to fairly approximate the boundary conditions is sought for.

The stress function is applied to eliminate the other internal force n_x. Differentiating (2) twice with respect to x:

$$c_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial x^2}\,. \tag{6}$$

Making use of (3), this yields the following partial differential equation for n_y:

$$c_1 \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} + c_2 \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 Z(x, y)}{\partial x^2}\,. \tag{7}$$

Be the load function $Z(x, y)$ of the form

$$Z(x, y) = Z_0 + Z_1 x^2 + Z_2 y^2 . \tag{8}$$

In general, this assumption fairly approximates dead and snow loads, and also the differential equation is simple to integrate, since (7) for n_y it will be of the form:

$$c_1 \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} + c_2 \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} = -2Z_1 . \tag{9}$$

For general formulae, dimensionless reduced co-ordinates

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}\omega , \quad (-\omega \leqq \xi \leqq \omega) , \\ \eta &= \frac{y}{b} , \quad (-1 \leqq \eta \leqq 1) \end{aligned} \tag{10}$$

are advisably introduced, with

$$\omega = \sqrt{\frac{f_a}{f_b}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} . \tag{11}$$

With these co-ordinates, (9) is transformed to

$$\frac{c_1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 n_y}{\partial \eta^2} + \frac{c_2}{a^2}\omega^2 \frac{\partial^2 n_y}{\partial \xi^2} = -2Z_1 . \tag{12}$$

Taking (11) into consideration

$$\frac{c_1}{b^2} = \frac{c_2}{a^2}\omega^2 ,$$

and arranging, differential equation

$$\frac{\partial^2 n_y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial \xi^2} = -2Z_1 \frac{a^2}{c_2 \omega^2} , \tag{13}$$

transformed to normal form is obtained for n_y.

Boundary conditions of the above inhomogeneous elliptic differential equation will be expressed according to (5a) and (5b) by the load function, converted to co-ordinates ξ and η and reduced by c_2:

$$g(\xi, \eta) = \frac{Z(\xi, \eta)}{c_2} .$$

This will be transformed, in case of load function (8) to

$$g(\xi, \eta) = g_0 + g_1 \xi^2 + g_2 \eta^2 \tag{14}$$

where

$$g_0 = \frac{Z_0}{c_2} , \quad g_1 = \frac{a^2 Z_1}{\omega^2 c_2} , \quad g_2 = \frac{b^2 Z_2}{c_2} , \tag{14a}$$

boundary conditions being:

$$\text{at } x = \pm a \text{ or } \xi = \pm \omega\text{: } n_y = -(g_0 + g_1\omega^2 + g_2\eta^2)\,,$$
$$\text{at } y = \pm b \text{ or } \eta = \pm 1\text{: } n_y = 0\,. \tag{15}$$

At the corners of the rectangular ground plan the boundary conditions define two values, thus, they are discontinuous. This discontinuity will be called 'corner jump', and amounts to

$$g_s = -(g_0 + g_1\omega^2 + g_2)\,. \tag{16}$$

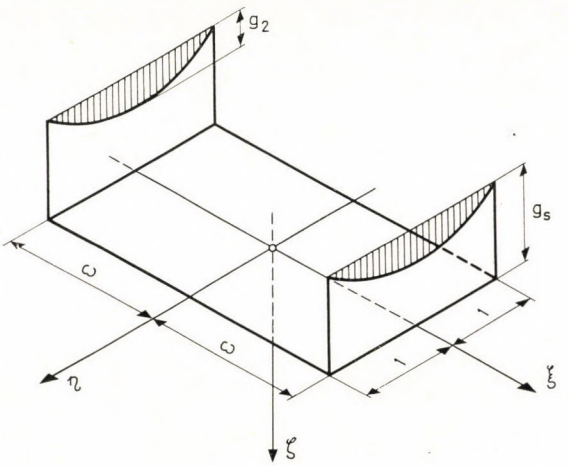


Fig. 2

Fig. 2 shows boundary values of n_y. Area of the shaded parabola is

$$t_0 = \frac{4}{3} g_2\,. \tag{17}$$

The complete solution of differential equation (13) for boundary conditions (15) is known to consist of a particular solution of the inhomogeneous differential equation, and the general solution of the homogeneous one. Subtracting boundary values of the particular solution from the given boundary values, modified boundary values to be met by the solution of the homogeneous differential equation are obtained.

In our case, the particular solution is expediently given by

$$n_{yp} = g_1(1 - \eta^2) \tag{18}$$

meeting differential equation (13). It meets boundary conditions at the boundary $\eta = \pm 1$, and at the boundary $\xi = \pm\omega$ it yields boundary values varying according to a second-degree parabola of rise g_1 and area

$$t_p = \frac{4}{3} g_1 \,. \tag{19}$$

(Fig. 3). This particular solution can be applied to produce boundary values of the homogeneous harmonic differential equation

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_y}{\partial \xi^2} = 0 \tag{20}$$

as the difference of boundary values of the exact solution in Fig. 2, and of the particular solution in Fig. 3. This difference is shown in Fig. 4.

From the theory of partial differential equations, the differential equation of elliptic type (20) is known to have a single solution in case of boundary conditions (5a, b) This is called the Dirichlet's boundary value problem. Thus, if a solution function is found, this is at the same time the correct solution.

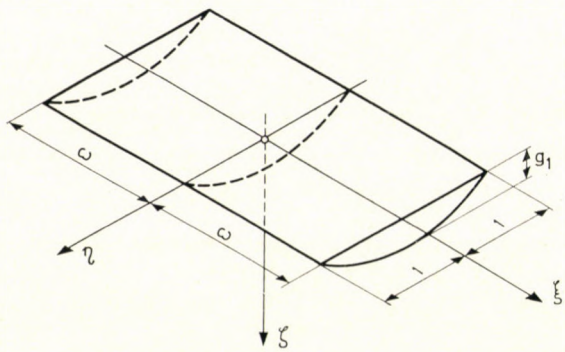


Fig. 3.

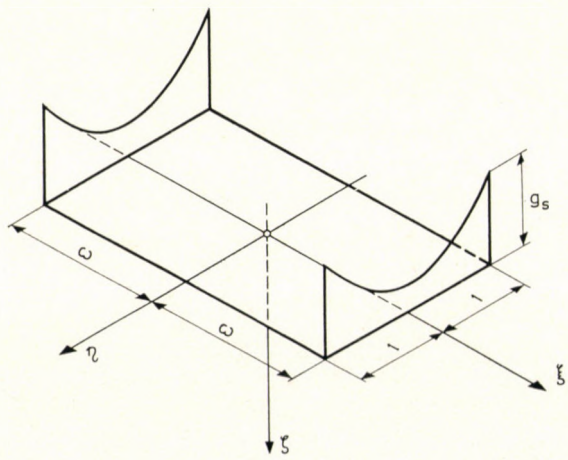


Fig. 4.

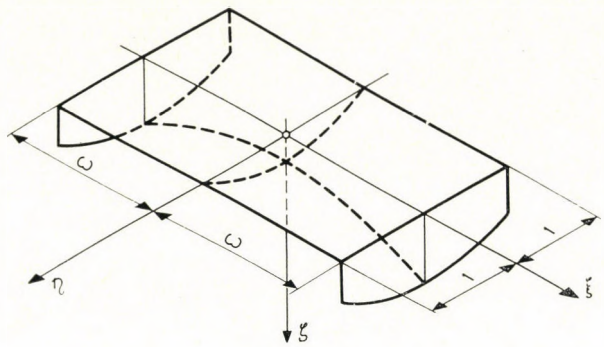


Fig. 5.

A harmonic function that meets boundary conditions at $\eta = \pm 1$ and that may assume any value from 0 to 1 in the corners, thus meeting the corner jump requirement (Fig. 5), may be written as:

$$H = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tan}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\eta}{\sinh\frac{\pi}{2}(\omega+\xi)} + \operatorname{arc\,tan}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\eta}{\sinh\frac{\pi}{2}(\omega-\xi)}\right] =$$

$$= H_0(\omega+\xi,\eta) + H_0(\omega-\xi,\eta)\,. \tag{21}$$

By means of function H, the exact solution of the homogeneous differential equation (20) meeting boundary conditions in Fig. 4 can be established in the form

$$n_{yh} = g_s H + \sum_1^n a_n \cos\frac{n\pi}{2}\eta \cdot \cosh\frac{n\pi}{2}\xi\,, \tag{22}$$

provided coefficients a_n are properly chosen. For practical purposes a sufficient accuracy is obtained by omitting any but the first term of the series ($n = 1$). Hence, at a fair approximation

$$n_{yh} \approx g_s H + a_1 H_1 \tag{23}$$

where

$$H_1 = \cos\frac{\pi}{2}\eta \cdot \cosh\frac{\pi}{2}\xi\,, \tag{24}$$

a_1 being so chosen as to have equal areas at boundary $\xi = \pm\omega$ under boundary values in Fig. 4, and under those of solution (23), expresses as

$$\frac{4}{3}(g_2 - g_1) = g_s t + a_1 t_1\,. \tag{25}$$

Parameters t and t_1 in (25) mean areas under functions H and H_1, respectively, at $\xi = \pm\omega$. Hence

$$t = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tan} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\eta}{\sinh \omega\pi}\, d\eta\,. \tag{26}$$

Introducing notation $c = \sinh \omega\pi$ and the new variable $u = \frac{\pi}{2}\eta$ transform (26) into:

$$t = \frac{4}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tan} \frac{\cos u}{c}\, du\,. \tag{27}$$

Expanding the intergrand into series:

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{\cos u}{c} = \frac{\cos u}{c} - \frac{\cos^3 u}{3c^3} + \frac{\cos^5 u}{5c^5} - + \ldots,$$

and integrating term by term:

$$\int \operatorname{arc\,tan} \frac{\cos u}{c}\, du = \frac{\sin u}{c} - \frac{1}{c^3}\left[\frac{\cos^2 u \cdot \sin u}{3\cdot 3} + \frac{2\sin u}{3\cdot 3}\right] +$$

$$+ \frac{1}{c^5}\left[\frac{\cos^4 u \cdot \sin u}{5\cdot 15} + \frac{4\cos^2 u \cdot \sin u}{5\cdot 15} + \frac{8\sin u}{5\cdot 15}\right] - + \ldots\,.$$

Finally, taking the limits and the meaning of c into consideration,

$$t = \frac{8}{\pi^2 c}\left[1 - \frac{2}{9c^2} + \frac{8}{75c^4} - \ldots\right]. \tag{28}$$

In view of $\omega > 1$ and $c > 11,6$, ommiting c-dependent terms in brackets, causes an error of max. 1,6 ‰.
Thus, at a fair approximation:

$$t \approx \frac{8}{\pi^2 c} = \frac{8}{\pi^2 \cdot \sinh \omega\pi}\,. \tag{29}$$

Similarly to the former deduction, the value t_1 can be written as:

$$t_1 = \frac{4}{\pi}\cosh\frac{\pi\omega}{2}\,. \tag{30}$$

Thus, a_1 can be determined from (25) as

$$a_1 = \frac{-g_s t + \frac{4}{3}(g_2 - g_1)}{t_1}\,. \tag{31}$$

Accordingly, the boundary values of n_{yh} have been met exactly along the edge $\eta = \pm 1$ and at the corners (the 'corner jump' is produced too), while along the side $\xi = \pm\omega$ only the area of the boundary values are equalized. The total internal force n_y is produced as the sum of the particular and the homogeneous solution:

$$n_y = n_{yh} + n_{yp} \approx g_s H + a_1 H_1 + g_1(1 - \eta^2) . \tag{32}$$

Accuracy of the presented calculation method is chracterized — besides of inaccuracies in the load function — by an error due to the deficient satisfaction of boundary values at $\xi = \pm\omega$ where only corner jump and areas have been equalized. Because of the known properties of the harmonic functions, the error is, however, less inside the domain than at the boundaries where the error can be calculated as the difference of the original boundary values (15) and those given by (32) .

2.2. Determination of internal force n_x

Internal force n_x can directly be determined from n_y, making use of (4), (8) and (14):

$$n_x = -\frac{c_2}{c_1}(g_0 + g_1\xi^2 + g_2\eta^2 + n_y) . \tag{33}$$

2.3. Determination of internal force n_{xy}

Internal force n_{xy} can be expressed by n_y from relationship

$$n_{xy} = -\int_0^x \frac{\partial n_y}{\partial y}\, dx = -\frac{a}{\omega b}\int_0^\xi \frac{\partial n_y}{\partial \eta}\, d\xi \tag{34}$$

written according to (3). Performing the operation on each term of (32) leads to

$$n_{xy} = -\frac{a}{\omega b}(g_s H_T + a_1 H_{1T} + g_1 n_{ypT}) \tag{35}$$

where

$$H_T = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{ar\,tanh}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\eta}{\cosh\frac{\pi}{2}(\omega + \xi)} - \operatorname{ar\,tanh}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\eta}{\cosh\frac{\pi}{2}(\omega - \xi)}\right] = \tag{36a}$$

$$H_{0T}(\omega + \xi, \eta) - H_{0T}(\omega - \xi, \eta) ,$$

$$H_{1T} = -\sin\frac{\pi}{2}\xi \cdot \sin\frac{\pi}{2}\eta , \tag{36b}$$

$$n_{ypT} = -2\xi\eta . \tag{36c}$$

2.4. Determination of auxiliary function and parameter values

Auxiliary function H presented in (21) is simply obtained by summation using Table I, containing the values of function

$$H_0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tan} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \eta}{\sinh \frac{\pi}{2} (\omega \pm \xi)} \tag{37}$$

between the limits $0 \leq \eta \leq 1$ and $0 \leq (\omega \pm \xi) \leq 5$ at intervals 0,1 and 0,2, respectively. If we have $1 \leq \omega \leq 2{,}5$, then the $H_0(\omega + \xi, \eta)$ and $H_0(\omega - \xi, \eta)$ values can be taken from this table, their sum being the value of auxiliary function H.

Values of auxiliary function H_1 (24) are compiled in Table II.

Values of paramters t and t_1 in (29) and (30) vs. have been tabulated in Table VI.

Auxiliary function H_T (26a) is obtained by simple summation from Table III containing values of function

$$H_{0T} = \frac{2}{\pi} \operatorname{ar\,tanh} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \eta}{\cosh \frac{\pi}{2} (\omega \pm \xi)} . \tag{38}$$

Limits and intervals equal to those of function (37) compiled in Table I. Values of auxiliary function H_T are given by differences of function values $H_{0T}(\omega + \xi, \eta)$ and $H_{0T}(\omega - \xi, \eta)$. Values of auxiliary function H_{1T} in (36b) are compiled in Table IV.

3. Solution for antimetric loads

3.1. Determination of internal forces

The presented method lends itself to determine internal forces of elliptic paraboloid shaped shells under antimetric loads. Such load patterns are shown in Fig. 6. Among the described varieties, solution for Fig. 6a will be presented below. That of Fig. 6b can be solved similarly, and that of Fig. 6c can be obtained by superposing Figs. 6a and 6b.

Wind pressure and non-uniform snow load can be approximated by a linearly varying vertical load function (Fig. 7), since this load diagram essentially represents the vertical component of wind load, the horizontal component may be assumed to be supported directly by the edges, while the anti-

Table I

Values of $H_0 = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{2} \eta}{\sinh \frac{\pi}{2} (\omega \pm \xi)}$

$\omega \pm \xi$ \ η	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,2	0,8032	0,8009	0,7938	0,7809	0,7607	0,7299	0,6832	0,6097	0,4895	0,2900	0,0000
0,4	0,6240	0,6203	0,6091	0,5893	0,5594	0,5169	0,4582	0,3789	0,2749	0,1459	0,0000
0,6	0,4731	0,4692	0,4572	0,4367	0,4069	0,3668	0,3152	0,2516	0,1761	0,0909	0,0000
0,8	0,3530	0,3495	0,3389	0,3210	0,2957	0,2628	0,2223	0,1745	0,1204	0,0615	0,0000
1,0	0,2610	0,2581	0,2495	0,2352	0,2152	0,1898	0,1592	0,1240	0,0850	0,0432	0,0000
1,2	0,1919	0,1896	0,1830	0,1720	0,1568	0,1377	0,1150	0,0892	0,0610	0,0309	0,0000
1,4	0,1406	0,1390	0,1340	0,1257	0,1144	0,1003	0,0835	0,0647	0,0441	0,0224	0,0000
1,6	0,1029	0,1017	0,0980	0,0919	0,0835	0,0731	0,0608	0,0470	0,0321	0,0162	0,0000
1,8	0,0752	0,0743	0,0716	0,0671	0,0610	0,0533	0,0444	0,0343	0,0233	0,0118	0,0000
2,0	0,0550	0,0543	0,0523	0,0490	0,0445	0,0389	0,0324	0,0250	0,0170	0,0086	0,0000
2,2	0,0402	0,0397	0,0382	0,0358	0,0325	0,0284	0,0236	0,0183	0,0124	0,0063	0,0000
2,4	0,0293	0,0290	0,0279	0,0262	0,0237	0,0208	0,0173	0,0133	0,0091	0,0046	0,0000
2,6	0,0214	0,0212	0,0204	0,0191	0,0173	0,0152	0,0126	0,0097	0,0066	0,0034	0,0000
2,8	0,0157	0,0155	0,0149	0,0140	0,0127	0,0111	0,0092	0,0071	0,0048	0,0025	0,0000
3.0	0,0114	0,0113	0,0109	0,0102	0,0093	0,0081	0,0067	0,0052	0,0035	0,0018	0,0000
3,2	0,0084	0,0083	0,0079	0,0074	0,0068	0,0059	0,0049	0,0038	0,0026	0,0013	0,0000
3,4	0,0061	0,0060	0,0058	0,0054	0,0049	0,0043	0,0036	0,0028	0,0019	0,0010	0,0000
3,6	0,0045	0,0044	0,0042	0,0040	0,0036	0,0032	0,0026	0,0020	0,0014	0,0007	0,0000
3,8	0,0033	0,0032	0,0031	0,0029	0,0026	0,0023	0,0019	0,0015	0,0010	0,0005	0,0000
4,0	0,0024	0,0023	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0014	0,0011	0,0007	0,0004	0,0000
4,2	0,0017	0,0017	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0010	0,0008	0,0005	0,0003	0,0000
4,4	0,0013	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009	0,0007	0,0006	0,0004	0,0002	0,0000
4,6	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0005	0,0004	0,0003	0,0001	0,0000
4,8	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000
5,0	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0000

Table II

Values of $H_1 = \cos \frac{\pi}{2} \eta \cosh \frac{\pi}{2} \xi$

ξ \ η	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	0,9877	0,9511	0,8910	0,8090	0,7071	0,5878	0,4540	0,3090	0,1564	0,0000
0,1	1,0124	0,9999	0,9628	0,9020	0,8190	0,7158	0,5951	0,4596	0,3128	0,1584	0,0000
0,2	1,0498	1,0368	0,9984	0,9353	0,8493	0,7423	0,6170	0,4766	0,3244	0,1642	0,0000
0,3	1,1131	1,0994	1,0586	0,9918	0,9005	0,7871	0,6543	0,5053	0,3440	0,1741	0,0000
0,4	1,2040	1,1892	1,1450	1,0727	0,9740	0,8513	0,7077	0,5466	0,3720	0,1883	0,0000
0,5	1,3246	1,3083	1,2598	1,1802	1,0716	0,9366	0,7786	0,6014	0,4093	0,2072	0,0000
0,6	1,4780	1,4598	1,4057	1,3169	1,1957	1,0451	0,8687	0,6710	0,4567	0,2312	0,0000
0,7	1,6679	1,6474	1,5863	1,4861	1,3494	1,1794	0,9804	0,7572	0,5154	0,2609	0,0000
0,8	1,8991	1,8757	1,8061	1,6921	1,5364	1,3429	1,1163	0,8622	0,5869	0,2971	0,0000
0,9	2,1772	2,1504	2,0707	1,9399	1,7614	1,5395	1,2797	0,9884	0,6728	0,3406	0,0000
1,0	2,5092	2,4783	2,3864	2,2357	2,0300	1,7743	1,4749	1,1391	0,7754	0,3925	0,0000
1,1	2,9032	2,8674	2,7611	2,5867	2,3487	2,0529	1,7064	1,3180	0,8971	0,4542	0,0000
1,2	3,3689	3,3275	3,2041	3,0018	2,7255	2,3822	1,9802	1,5295	1,0411	0,5270	0,0000
1,3	3,9180	3,8698	3,7263	3,4910	3,1697	2,7705	2,3030	1,7787	1,2107	0,6129	0,0000
1,4	4,5640	4,5078	4.3406	4,0665	3,6923	3,2272	2,6826	2,0720	1,4103	0,7140	0,0000
1,5	5,3227	5,2572	5,0622	4,7426	4,3062	3,7638	3,1286	2,4165	1,6448	0,8327	0,0000
1,6	6,2131	6,1366	5.9090	5,5359	5,0265	4,3934	3,6520	2,8207	1,9200	0,9720	0,0000
1,7	7,2571	7.1678	6.9020	6,4662	5,8712	5,1316	4,2656	3,2947	2,2426	1,1353	0,0000
1,8	8,4806	8,3762	8,0655	7,5562	6,8609	5,9967	4,9848	3,8501	2,6206	1,3267	0,0000
1,9	9,9137	9,7916	9,4285	8,8332	8,0203	7,0100	5,8271	4,5007	3,0635	1,5509	0,0000
2,0	11,5919	11,4492	11,0246	10,3285	9,3781	8,1967	6,8136	5,2626	3,5821	1,8134	0,0000
2,1	13,5568	13,3899	12,8933	12,0792	10,9677	9,5861	7,9685	6,1547	4,1893	2,1208	0,0000
2,2	15,8568	15,6616	15,0807	14,1285	12,8284	11,2125	9,3204	7,1988	4,9000	2,4806	0,0000
2,3	18,5489	18,3205	17,6410	16,5272	15,0064	13,1160	10,9028	8,4210	5,7319	2,9017	0,0000
2,4	21,6996	21,4324	20,6375	19,3345	17,5553	15,3439	12,7547	9,8514	6,7056	3,3946	0,0000
2,5	25,3868	25,0742	24,1443	22,6198	20,5384	17,9512	14,9220	11,5254	7,8450	3,9714	0,0000

Table III

Values of $H_{0T} = \frac{2}{\pi} \operatorname{ar\,tanh} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \eta}{\cosh \frac{\pi}{2} (\omega \pm \xi)}$

$\omega \pm \xi$ \ η	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,0000	0,1004	0,2034	0,3118	0,4293	0,5611	0,7157	0,9083	1,1731	1,6184	∞
0,2	0,0000	0,0956	0,1931	0,2947	0,4028	0,5203	0,6506	0,7969	0,9579	1,1113	1,1836
0,4	0,0000	0,0832	0,1671	0,2525	0,3398	0,4288	0,5184	0,6052	0,6820	0,7371	0,7576
0,6	0,0000	0,0676	0,1351	0,2021	0,2680	0,3316	0,3913	0,4441	0,4864	0,5141	0,5238
0,8	0,0000	0,0526	0,1045	0,1552	0,2037	0,2490	0,2897	0,3240	0,3504	0,3670	0,3727
1,0	0,0000	0,0397	0,0788	0,1165	0,1520	0,1844	0,2129	0,2364	0,2540	0,2649	0,2686
1,2	0,0000	0,0296	0,0586	0,0863	0,1122	0,1356	0,1559	0,1725	0,1847	0,1923	0,1948
1,4	0,0000	0,0218	0,0432	0,0635	0,0824	0,0994	0,1141	0,1259	0,1346	0,1400	0,1418
1,6	0,0000	0,0160	0,0317	0,0466	0,0604	0,0728	0,0834	0,0919	0,0982	0,1021	0,1034
1,8	0,0000	0,0117	0,0232	0,0341	0,0442	0,0532	0,0609	0,0671	0,0717	0,0745	0,0754
2,0	0,0000	0,0086	0,0170	0,0249	0,0323	0,0389	0,0445	0,0490	0,0523	0,0544	0,0551
2,2	0,0000	0,0063	0,0124	0,0182	0,0236	0,0284	0,0325	0,0358	0,0382	0,0397	0,0402
2,4	0,0000	0,0046	0,0091	0,0133	0,0172	0,0208	0,0237	0,0262	0,0279	0,0290	0,0294
2,6	0,0000	0,0034	0,0066	0,0097	0,0126	0,0152	0,0173	0,0191	0,0204	0,0212	0,0214
2,8	0,0000	0,0024	0,0048	0,0071	0,0092	0,0111	0,0127	0,0140	0,0149	0,0155	0,0157
3,0	0,0000	0,0018	0,0035	0,0052	0,0067	0,0081	0,0093	0,0102	0,0109	0,0113	0,0114
3,2	0,0000	0,0013	0,0026	0,0038	0,0049	0,0059	0,0068	0,0074	0,0079	0,0083	0,0084
3,4	0,0000	0,0010	0,0019	0,0028	0,0036	0,0043	0,0049	0,0054	0,0058	0,0060	0,0061
3,6	0,0000	0,0007	0,0014	0,0020	0,0026	0,0032	0,0036	0,0040	0,0042	0,0044	0,0045
3,8	0,0000	0,0005	0,0010	0,0015	0,0019	0,0023	0,0026	0,0029	0,0031	0,0032	0,0033
4,0	0,0000	0,0004	0,0007	0,0011	0,0014	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0023	0,0024
4,2	0,0000	0,0003	0,0005	0,0008	0,0010	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0017	0,0017
4,4	0,0000	0,0002	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0013	0,0013
4,6	0,0000	0,0001	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0007	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009
4,8	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007
5,0	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005

Table IV

Values of $H_{1T} = \sin\frac{\pi}{2}\eta \sinh\frac{\pi}{2}\xi$

ξ \ η	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0000	0,0247	0,0487	0,0716	0,0927	0,1115	0,1276	0,1405	0,1500	0,1558	0,1577
0,2	0,0000	0,0500	0,0987	0,1450	0,1877	0,2258	0,2584	0,2845	0,3037	0,3154	0,3194
0,3	0,0000	0,0765	0,1511	0,2219	0,2874	0,3457	0,3955	0,4356	0,4649	0,4829	0,4889
0,4	0,0000	0,1049	0,2072	0,3044	0,3941	0,4741	0,5424	0,5974	0,6377	0,6622	0,6705
0,5	0,0000	0,1359	0,2684	0,3944	0,5106	0,6142	0,7028	0,7740	0,8262	0,8586	0,8687
0,6	0,0000	0,1703	0,3363	0,4941	0,6397	0,7696	0,8805	0,9697	1,0351	1,0749	1,0883
0,7	0,0000	0,2088	0,4125	0,6060	0,7846	0,9439	1,0800	1,1894	1,2696	1,3185	1,3349
0,8	0,0000	0,2526	0,4989	0,7330	0,9490	1,1416	1,3061	1,4385	1,5355	1,5946	1,6145
0,9	0,0000	0,3025	0,5976	0,8780	1,1368	1,3675	1,5646	1,7232	1,8393	1,9102	1,9340
1,0	0,0000	0,3600	0,7111	1,0448	1,3527	1,6273	1,8618	2,0505	2,1887	2,2730	2,3013
1,1	0,0000	0,4264	0,8422	1,2374	1,6020	1,9272	2,2050	2,4284	2,5921	2,6920	2,7255
1,2	0,0000	0,5033	0,9941	1,4605	1,8910	2,2748	2,6027	2,8665	3,0597	3,1775	3,2171
1,3	0,0000	0,5926	1,1706	1,7198	2,2267	2,6787	3,0648	3,3754	3,6028	3,7416	3,7883
1,4	0,0000	0,6966	1,3761	2,0216	2,6174	3,1488	3,6026	3,9677	4,2351	4,3982	4,4531
1,5	0,0000	0,8178	1,6155	2,3734	3,0729	3,6967	4,2295	4,6581	4,9721	5,1636	5,2280
1,6	0,0000	0,9593	1,8949	2,7839	3,6044	4,3361	4,9610	5,4638	5,8320	6,0566	6,1321
1,7	0,0000	1,1244	2,2212	3,2632	4,2249	5,0826	5,8151	6,4045	6,8361	7,0994	7,1879
1,8	0,0000	1,3174	2,6024	3,8232	4,9500	5,9548	6,8131	7,5035	8,0092	8,3177	8,4214
1,9	0,0000	1,5429	3,0479	4,4778	5,7974	6,9743	7,9794	8,7881	9,3804	9,7471	9,8631
2,0	0,0000	1,8066	3,5687	5,2430	6,7882	8,1662	9,3431	10,2900	10,9835	11,4065	11,5487
2,1	0,0000	2,1150	4,1779	6,1379	7,9468	9,5600	10,9378	12,0463	12,8581	13,3534	13,5198
2,2	0,0000	2,4756	4,8903	7,1845	9,3018	11,1901	12,8029	14,1004	15,0507	15,6304	15,8252
2,3	0,0000	2,8975	5,7236	8,4088	10,8869	13,0969	14,9845	16,5031	17,6154	18,2939	18,5219
2,4	0,0000	3,3910	6,6984	9,8409	12,7411	15,3276	17,5367	19,3139	20,6156	21,4096	21,6765
2,5	0,0000	3,9683	7,8389	11,5164	14,9104	17,9372	20,5224	22,6022	24,1255	25,0548	25,3671

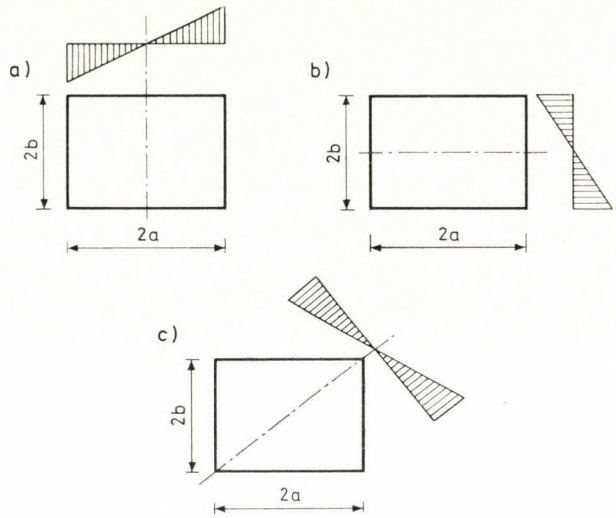


Fig. 6

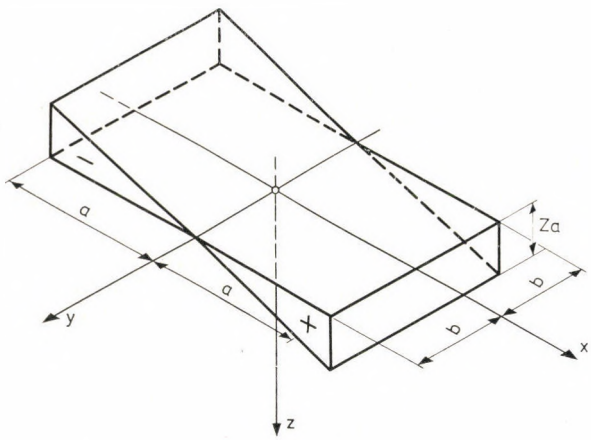


Fig. 7

metric diagram together with a uniformly distributed load yields a load distribution typical of the one-sided snow load.

Internal forces due to linearily varying load can be determined in a simple way similarly to those due to the symmetric load. Be the load function

$$Z(x, y) = Zx \tag{39}$$

and introducing the co-ordinate transformation

$$\xi = \frac{x}{a}\omega \qquad \text{and} \qquad \eta = \frac{y}{b}$$

applied for the symmetric load, the reduced and transformed load function will be of the form:

$$g(\xi, \eta) = \frac{Z(\xi, \eta)}{c_2} = g\xi \tag{40}$$

where

$$g = Z \frac{a}{\omega c_2} .$$

Since

$$\frac{\partial^2(g\xi)}{\partial \xi^2} = 0 ,$$

the differential equation to be solved will be, in conformity with (7) and (13), of simple homogeneous harmonic type:

$$\frac{\partial^2 n_y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial \xi^2} = 0 . \tag{41}$$

In conformity with the reasoning applied for the symmetric load, boundary values of the internal force n_y are:

$$\begin{aligned} &\text{at } x = \pm a \quad \text{or} \quad \xi = \pm \omega : \qquad n_y = \pm g\omega , \\ &\text{at } y = \pm b \quad \text{or} \quad \eta = \pm 1 : \qquad n_y = 0 . \end{aligned} \tag{42}$$

At the corners, the boundary values are discontiniuous, having the 'corner jump':

$$g_s = \pm g\omega . \tag{43}$$

Boundary values of n_y are shown in Fig. 8. The harmonic function satisfying them along $\eta = \pm 1$ and at the corners is similar to (21):

$$H = \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arc\ tan} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \eta}{\sinh \frac{\pi}{2} (\omega + \xi)} - \operatorname{arc\ tan} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \eta}{\sinh \frac{\pi}{2} (\omega - \xi)} \right] =$$

$$= H_0(\omega + \xi, \eta) - H_0(\omega - \xi, \eta) . \tag{44}$$

Exact solution of differential equation (41) meeting all boudary conditions, is produced by means of function H and of a series with appropriately chosen coefficients a_n in the form:

$$n_y = g_s H + \sum_1^n a_n \cos \frac{n\pi}{2} \eta \cdot \sinh \frac{n\pi}{2} \xi . \tag{45}$$

For practical purposes, sufficient accuracy is provided by taking only the first term of the series:

$$n_y \approx g_s H + a_2 H_2 \tag{46}$$

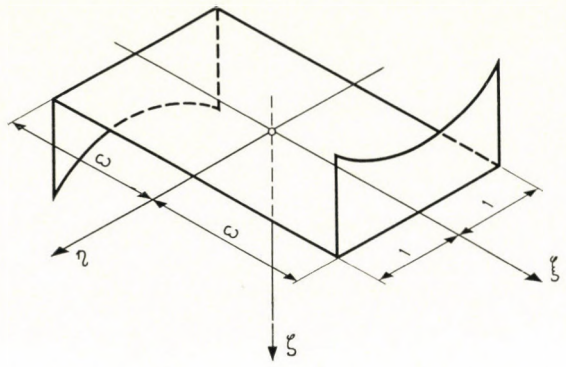


Fig. 8

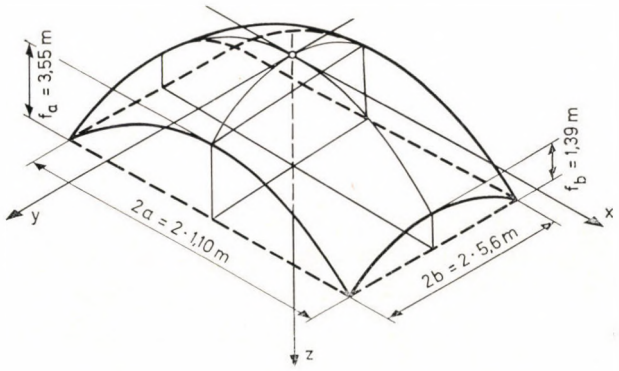


Fig. 9.

with the auxiliary function of the form:

$$H_2 = \cos\frac{\pi}{2}\eta \cdot \sinh\frac{\pi}{2}\xi\,, \tag{47}$$

a_2 being obtained, like a_1 in (31), as:

$$a_2 = \frac{g_s t}{t_2}\,, \tag{48}$$

t being delivered by (29), and t_2 by considerations similar to (30):

$$t_2 = \frac{4}{\pi}\sinh\frac{\pi\omega}{2}\,. \tag{49}$$

Hence, the left-hand side of (46) is known and internal force n_y can be determined.

In conformity with relationship (33) for symmetric loads, internal force n_x is obtained in the form:

$$n_x = -\frac{c_2}{c_1}(g\xi + n_y) \tag{50}$$

and finally, similarly to (34) and (35), internal force n_{xy} is obtained from:

$$n_{xy} = -\frac{a}{\omega b}(g_s H_T - a_2 H_{2T}), \tag{51}$$

where

$$H_T = H_{0T}(\omega + \xi, \eta) + H_{0T}(\omega - \xi, \eta), \tag{52}$$

auxiliary function H_{2T} being defined as:

$$H_{2T} = \sin\frac{\pi}{2}\eta \cdot \cosh\frac{\pi}{2}\xi, \tag{53}$$

and function H_{0T} applied in (52) being defined by (38).

3.2. Determination of auxiliary function and parameter values

Auxiliary function determinded by (44) is produced by means of relationship (37), as difference of values compiled in Table I. Auxiliary function values H_2 defined in (47) are compiled in Table V.

Values of parameter t_2 defined in (49) are compiled in Table VI as a function of ω.

Relationship (52) defines auxiliary function H_T by means of function values H_{0T} determined by (38). Sums of values compiled in Table III deliver the H_T values sought for.

Auxiliary function values H_{2T} defined in (53) are compiled in Table VII.

4. Numerical example

4.1. *General data*

Let us determine internal forces of an elliptic paraboloid shell shown in Fig. 9, to dead load (r.c. shell + insulation) uniformly distributed on the shell surface, to snow load (uniformly distributed on the horizontal plan according to Fig. 7). Stresses will be determined for a quarter of the shell corresponding to positive ξ and η values.

$$g_{\text{dead}} = 160 \text{ kp/m}^2, \qquad g_{\text{live}} = 112 \text{ kp/m}^2.$$

Geometrical data:

$$c_1 = \frac{2fa}{a^2} = 0{,}0586 \text{ m}^{-1},$$

$$c_2 = \frac{2fb}{b^2} = 0{,}0886 \text{ m}^{-1},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{fa}{fb}} = \sqrt{\frac{3{,}55}{1{,}39}} = 1{,}6.$$

Table V

Values of $H_2 = \cos \frac{\pi}{2} \eta \sinh \frac{\pi}{2} \xi$

ξ \ η	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0000	0,0247	0,0487	0,0716	0,0927	0,1115	0,1276	0,1405	0,1500	0,1558	0,1577
0,2	0,0000	0,0500	0,0987	0,1450	0,1877	0,2258	0,2584	0,2845	0,3037	0,3154	0,3194
0,3	0,0000	0,0765	0,1511	0,2219	0,2874	0,3457	0,3955	0,4356	0,4649	0,4829	0,4889
0,4	0,0000	0,1049	0,2072	0,3044	0,3941	0,4741	0,5424	0,5974	0,6377	0,6622	0,6705
0,5	0,0000	0,1359	0,2684	0,3944	0,5106	0,6142	0,7028	0,7740	0,8262	0,8580	0,8687
0,6	0,0000	0,1703	0,3363	0,4941	0,6397	0,7696	0,8805	0,9697	1,0351	1,0749	1,0883
0,7	0,0000	0,2088	0,4125	0,6060	0,7846	0,9439	1,0800	1,1894	1,2696	1,3185	1,3349
0,8	0,0000	0,2526	0,4989	0,7330	0,9490	1,1416	1,3061	1,4385	1,5355	1,5946	1,6145
0,9	0,0000	0,3025	0,5976	0,8780	1,1368	1,3675	1,5646	1,7232	1,8393	1,9102	1,9340
1,0	0,0000	0,3600	0,7111	1,0448	1,3527	1,6273	1,8618	2,0505	2,1887	2,2730	2,3013
1,1	0,0000	0,4264	0,8422	1,2374	1,6020	1,9272	2,2050	2,4284	2,5921	2,6920	2,7255
1,2	0,0000	0,5033	0,9941	1,4605	1,8910	2,2748	2,6027	2,8665	3,0597	3,1775	3,2171
1,3	0,0000	0,5926	1,1706	1,7198	2,2267	2,6787	3,0648	3,3754	3,6028	3,7416	3,7883
1,4	0,0000	0,6966	1,3761	2,0216	2,6174	3,1488	3,6026	3,9677	4,2351	4,3982	4,4531
1,5	0,0000	0,8178	1,6155	2,3734	3,0729	3,6967	4,2295	4,6582	4,9721	5,1636	5,2280
1,6	0,0000	0,9593	1,8949	2,7839	3,6044	4,3361	4,9610	5,4638	5,8320	6,0566	6,1321
1,7	0,0000	1,1244	2,2212	3,2632	4,2250	5,0826	5,8151	6,4045	6,8361	7,0994	7,1879
1,8	0,0000	1,3174	2,6024	3,8232	4,9500	5,9548	6,8131	7,5035	8,0092	8,3177	8,4214
1,9	0,0000	1,5429	3,0479	4,4778	5,7974	6,9743	7,9794	8,7881	9,3804	9,7417	9,8631
2,0	0,0000	1,8066	3,5688	5,2430	6,7882	8,1662	9,3431	10,2900	10,9835	11,4065	11,5487
2,1	0,0000	2,1150	4,1779	6,1379	7,9568	9,5600	10,9378	12,0463	12,8581	13,3534	13,5198
2,2	0,0000	2,4756	4,8903	7,1845	9,3018	11,1901	12,8029	14,1004	15,0507	15,6304	15,8252
2,3	0,0000	2,8975	5,7236	8,4088	10,8869	13,0970	14,9845	16,5031	17,6154	18,2939	18,5219
2,4	0,0000	3,3910	6,6984	9,8409	12,7411	15,3276	17,5367	19,3139	20,6156	21,4097	21,6765
2,5	0,0000	3,9683	7,8389	11,5164	14,9104	17,9372	20,5224	22,6022	24,1255	25,0548	25,3671

Table VI

Values of t, t_1 and t_2

$$t \cong \frac{8}{\pi^2 \sinh \pi\omega} \; ; \quad t_1 = \frac{4}{\pi} \cosh \frac{\pi\omega}{2} \; ; \quad t_2 = \frac{4}{\pi} \sinh \frac{\pi\omega}{2}$$

ω	t	t_1	t_2
1,0	0,0702	3.1948	2.9301
1,1	0,0512	3.6964	3.4702
1,2	0,0374	4,2895	4,0962
1,3	0,0273	4,9886	4,8234
1,4	0,0199	5,8110	5,6698
1,5	0,0146	6,7771	6,6565
1,6	0,0106	7,9108	7,8077
1,7	0,0078	9,2401	9,1519
1,8	0,0057	10,7978	10,7225
1,9	0,0041	12,6225	12,5581
2,0	0,0030	14,7593	14,7043
2,1	0,0022	17,2610	17,2140
2,2	0,0016	20,1895	20,1493
2,3	0,0012	23,6172	23,5828
2,4	0,0009	27,6288	27,5994
2,5	0,0006	32,3235	32,2984
2,6	0,0005	37,8174	37,7959
2,7	0,0003	44,2462	44,2279
2,8	0,0002	51,7692	51,7535
2,9	0,0002	60,5720	60,5586
3,0	0,0001	70,8726	70,8612
3,1	0,0001	82,9254	82,9156
3,2	0,0001	97,0284	97,0201
3,3	0,0001	113,5310	113,5230
3,4	0,0000	132,8400	132,8340
3,5	0,0000	155,4330	155,4280
3,6	0,0000	181,8700	181,8650
3,7	0,0000	212,8030	212,7990
3,8	0,0000	248,9980	248,9950
3,9	0,0000	291,3490	291,3460
4,0	0,0000	340,9040	340,9010
4,1	0,0000	398,8870	398,8850
4,2	0,0000	466,7330	466,7310
4,3	0,0000	546,1180	546,1160
4,4	0,0000	639,0060	639,0050
4,5	0,0000	747,6920	747,6910
4,6	0,0000	874,8660	874,8650
4,7	0,0000	1023,6700	1023,6700
4,8	0,0000	1197,7800	1197,7800
4,9	0,0000	1401,5100	1401,5100
5,0	0,0000	1639,8900	1639,8900

Table VII

Values of $H_{2T} = \sin\frac{\pi}{2}\eta \cosh\frac{\pi}{2}\xi$

ξ \ η	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
0,0	1,0000	0,9877	0,9511	0,8910	0,8090	0,7071	0,5878	0,4540	0,3090	0,1564	0,0000
0,1	1,0124	0,9999	0,9628	0,9020	0,8190	0,7158	0,5951	0,4596	0,3128	0,1584	0,0000
0,2	1,0498	1,0368	0,9984	0,9353	0,8493	0,7423	0,6170	0,4766	0,3244	0,1642	0,0000
0,3	1,1131	1,0994	1,0586	0,9918	0,9005	0,7871	0,6543	0,5053	0,3440	0,1741	0,0000
0,4	1,2040	1,1892	1,1450	1,0727	0,9740	0,8513	0,7077	0,5466	0,3720	0,1883	0,0000
0,5	1,3246	1,3083	1,2598	1,1802	1,0716	0,9366	0,7786	0,6014	0,4093	0,2072	0,0000
0,6	1,4780	1,4598	1,4057	1,3169	1,1957	1,0451	0,8687	0,6710	0,4567	0,2312	0,0000
0,7	1,6679	1,6474	1,5863	1,4861	1,3494	1,1794	0,9804	0,7572	0,5154	0,2609	0,0000
0,8	1,8991	1,8757	1,8061	1,6921	1,5364	1,3429	1,1163	0,8622	0,5869	0,2971	0,0000
0,9	2,1772	2,1504	2,0707	1,9399	1,7614	1,5395	1,2797	0,9884	0,6728	0,3406	0,0000
1,0	2,5092	2,4783	2,3864	2,2357	2,0300	1,7743	1,4749	1,1391	0,7754	0,3925	0,0000
1,1	2,9032	2,8674	2,7611	2,5867	2.3487	2,0290	1,7064	1,3180	0,8971	0,4542	0,0000
1,2	3,3689	3,3275	3,2041	3,0018	2,7255	2,3822	1,9802	1,5295	1,0411	0,5270	0,0000
1,3	3,9180	3,8698	3,7263	3,4910	3,1697	2,7705	2,3030	1,7787	1,2107	0,6129	0,0000
1,4	4,5640	4,5078	4,3406	4,0665	3,6923	3,2272	2,6826	2,0720	1,4103	0,7140	0,0000
1,5	5,3227	5,2572	5,0622	4,7426	4,3062	3,7638	3,1286	2,4165	1,6448	0,8327	0,0000
1,6	6,2131	6,1366	5,9090	5,5359	5,0265	4,3934	3,6520	2,8207	1,9200	0,9720	0,0000
1,7	7,2571	7,1678	6,9020	6,4662	5,8712	5,1316	4,2656	3,2947	2,2426	1,1353	0,0000
1,8	8,4806	8,3762	8,0655	7,5562	6,8609	5,9967	4,9848	3,8501	2,6206	1,3267	0,0000
1,9	9,9137	9,7916	9,4285	8,8332	8,0203	7,0100	5,8271	4,5007	3,0635	1,5509	0,0000
2,0	11,5919	11,4492	11,0246	10,3285	9,3781	8,1967	6,8136	5,2626	3,5821	1,8134	0,0000
2,1	13,5568	13,3899	12,8933	12,0792	10,9677	9,5861	7,9685	6,1547	4,1893	2,1208	0,0000
2,2	15,8568	15,6616	15,0807	14,1285	12,8284	11,2125	9,3204	7,1988	4,9000	1,4806	0,0000
2,3	18,5489	18,3205	17,6410	16,5272	15,0064	13,1160	10,9028	8,4210	5,7319	2,9017	0,0000
2,4	21,6996	21,4324	20,6375	19,3345	17,5553	15,3439	12,7547	9,8514	6,7056	3,3946	0,0000
2.5	25,3868	25,0742	24,1443	22,6198	20,5384	17,9512	14,9220	11,5254	7,8450	3,9714	0.0000

Shell surface equation:

$$z = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2 = 0{,}0293x^2 + 0{,}044y^2 .$$

4.2. *Case of a symmetric load*

Combined effect of snow and dead load is considered according to Eq. (8):

$$Z(x, y) = Z_0 + Z_1 x^2 + Z_2 y^2 .$$

To determine constants Z_0, Z_1, Z_2, let us calculate the exact value of load intensities at three points according to the exact formula:

$$Z(x, y) = g_{\text{live}} + g_{\text{dead}}(1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

where

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{and} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} .$$

Be these three points:

$$P_0(0;0),\ P_1(11{,}0;\ 0),\ P_2(0;\ 5{,}60) ,$$

$$Z(0;0) = 272{,}0\ \text{kp/m}^2 = Z_0 ,$$

$$Z(11{,}0;\ 0;0) = 302{,}6\ \text{kp/m}^2 = Z_0 + Z_1 \cdot 11{,}0^2 ,$$

$$Z(0;\ 5{,}60) = 290{,}6\ \text{kp/m}^2 = Z_0 + Z_1 \cdot 5{,}6^2 .$$

Thus, constants of the approximate load function are:

$$Z_0 = 272{,}0\ \text{kp/m}^2 ,$$

$$Z_1 = \frac{302{,}6 - 272{,}0}{121} = 0{,}253\ \text{kp/m}^4 ,$$

$$Z_2 = \frac{290{,}6 - 272{,}0}{31{,}36} = 0{,}592\ \text{kp/m}^4 .$$

Reduced load constants according to (14a):

$$g_0 = \frac{1}{c_2} Z_0 = \frac{1}{0{,}0886} \cdot 272{,}0 = 3070{,}0\ \text{kp/m} ,$$

$$g_1 = \frac{a^2}{\omega^2 c_2} Z_1 = \frac{121}{2{,}56 \cdot 0{,}0886} \cdot 0{,}253 = 135{,}0\ \text{kp/m} ,$$

$$g_2 = \frac{b^2}{c_2} Z_2 = \frac{31{,}36}{0{,}0886} \cdot 0{,}592 = 209{,}5\ \text{kp/m}.$$

Corner jump according to (16):

$$g_S = -(3070{,}0 + 135{,}0 \cdot 2{,}56 + 209{,}5) = -3625{,}0\ \text{kp/m} .$$

Internal force n_y is calculated from (32). Coefficient a_1 of the auxiliary function H_1 is determined by (31), Table VI showing at $\omega = 1{,}6$, $t = 0{,}0106$ and $t_1 = 7{,}9108$, hence:

$$a_1 = \frac{3625{,}0 \cdot 0{,}0106 + \frac{4}{3} \cdot (209{,}5 - 135{,}0)}{7{,}9108} = 17{,}40\ \text{kp/m}.$$

(32) assumes the form:

$$n_y = 3625{,}0\ H + 17{,}40 \cdot H_1 + 135{,}0 \cdot (1 - \eta^2) .$$

Internal forces n_x and n_{xy} are calculated by Eqs (33) and (35), resp.:

$$n_x = -1{,}512(3070{,}0 + 135{,}0 \cdot \xi^2 + 209{,}5 \cdot \eta^2 + n_y),$$

$$n_{xy} = -1{,}2277 \cdot (-3625{,}0\, H_T + 17{,}40 \cdot H_{1T} - 135 \cdot 2\xi\eta).$$

Numerical values of the internal forces at $6 \cdot 7 = 42$ points of the quarter shell are compiled in Tables VIII, IX and X.

Table VIII

Internal forces n_y (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	—594	—629	—740	—1218	—2126	—2739	—3412
0,2	—565	—599	—704	—1169	—2077	—2712	—3422
0,4	—478	—508	—600	—1018	—1914	—2614	—3450
0,6	—345	—367	—436	— 764	—1574	—2368	—3494
0,8	—180	—190	—228	— 411	— 948	—1714	—3352
1,0	0	0	0	0	0	0	—3625
							0

Table IX

Internal forces n_x (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	—3755	—3698	—3554	—2930	—1721	— 900	5
0,2	—3837	—3756	—3621	—3016	—1807	— 952	2
0,4	—4032	—3931	—3818	—3282	—2091	—1140	0
0,6	—4323	—4208	—4129	—3730	—2669	—1575	—5
0,8	—4572	—4564	—4531	—4353	—3704	—2652	—5
1,0	—4958	—4965	—4991	—5088	—5251	—5358	0
							—5481

Table X

Internal forces n_{xy} (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	— 78	—163	— 382	— 664	— 780	— 828
0,4	0	—147	—311	— 744	—1352	—1633	—1753
0,6	0	—203	—428	—1052	—2067	—2653	—2943
0,8	0	—233	—492	—1256	—2716	—3934	—4886
1,0	0	—236	—503	—1297	—2972	—4848	$-\infty$

Internal forces n_y and n_x assume two values at the corner ($\xi = 1{,}6$; $\eta = 1{,}0$), in conformity with boundary conditions. Internal forces n_x must be zero at the boundary $\xi = 1{,}6$; the slight deviations in Table IX are inherent errors of the method and of the slide rule calculation. Internal force n_{xy} is infinite at the corner according to the membrane theory; practically it takes a finite value because of edge disturbances, and also of the fact that here is no freedom from lateral pressure ary more.

4.3. *Case of antrimetric loads*

Load distribution is assumed according to Fig. 7, and the maximum load intensity as:

$$p_{\text{wind}} = 60 \text{ kp/m}^2$$

(referred to the horizontal ground plan).

Load function (39)

$$Z(x, y) = Zx$$

becomes in our case:

$$Z(x, y) = \frac{60}{11} x = 5{,}46 \cdot x ,$$

$$Z = 5{,}46 \text{ kp/m}^2 .$$

The reduced load constant (40):

$$g = Z \frac{a}{\omega c_2} = 5{,}46 \frac{11{,}0}{1{,}6 \cdot 0{,}0886} = 423{,}0 \text{ kp/m} .$$

Corner jump:

$$g_S = \pm g\omega = -423 \cdot 1{,}6 = \pm 667{,}88 \text{ kp/m} .$$

Coefficient a_2 is calculated according to (48) to yield $t = 0{,}0106$ and $t_2 = 7{,}8087$. Hence:

$$a_2 = \frac{\pm 677{,}88 \cdot 0{,}0106}{7{,}8077} = \mp 0{,}919 \text{ kp/m} .$$

Accordingly, internal forces due to antimetric load are, in conformity with (46), (50) and (51):

$$n_y = 677{,}88 \cdot H - 0{,}919 \cdot H_2 ,$$

$$n_x = -1{,}515 \cdot (423{,}0 \cdot \xi + n_y) ,$$

$$n_{xy} = -1{,}228 \cdot (677{,}88 H_T - 0{,}919 H_{2T}) .$$

Numerical values of internal forces at $6 \cdot 7 = 42$ points of the quarter shell are compiled in Tables XI, XII and XIII.

Internal forces n_y and n_x assume two values at the corner ($\xi = 1{,}6$; $\eta = 1{,}0$) in conformity with boundary conditions. Internal forces n_y, n_x and n_{xy} are zeroed along the antimetry and symmetry axes ($\xi = 0$; $\eta = 0$), respectively, of the load. For the infinite internal force n_{xy} at the corner the same is true as stated for the case of symmetric loads.

Table XI

Internal forces n_y (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	0	−44,62	−93,42	−220,91	−415,31	−540,84	−677,83
0,2	0	−42,58	−89,19	−212,23	−405,61	−534,60	−677,88
0,4	0	−36,44	−76,63	−185,58	−372,99	−512,67	−677,83
0,6	0	−26,68	−56,35	−139,84	−306,11	−461,00	−677,87
0,8	0	−14,19	−30,02	− 75,91	−184,01	−330,72	−677,86
1,0	0	0	0	0	0	0	−677,88
							0

Table XII

Internal forces n_x (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	0	− 60,64	−114,98	−178,45	−140,74	− 79,07	−0,06
0,2	0	− 63,73	−121,38	−191,57	−155,41	− 88,51	+0,02
0,4	0	− 73,01	−140,36	−231,86	−204,73	−121,66	−0,06
0,6	0	− 87,77	−171,03	−301,02	−305,84	−199,78	0,00
0,8	0	−106,65	−210,83	−397,68	−490,45	−396,75	−0,02
1,0	0	−128,10	−256,22	−512,44	−786,65	−896,77	0,00
							−1024,87

Table XIII

Internal forces n_{xy} (kp/m)

η \ ξ	0	0,2	0,4	0,8	1,2	1,4	1,6
0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	− 53,11	− 55,63	− 63,34	− 95,21	−144,24	−165,21	−173,60
0,4	−101,20	−106,06	−121,05	−185,10	−292,68	−343,83	−365,49
0,6	−139,72	−146,60	−167,89	−262,56	−445,07	−553,35	−606,96
0,8	−164,52	−172,82	−198,53	−325,19	−583,59	−811,17	−989,54
1,0	−173,24	−181,95	−209,34	−336,79	−730,59	−999,67	$-\infty$

REFERENCES

1. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Aufl. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1962
2. MENYHÁRD, I.: Shell Structures. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966 (In Hungarian)
3. MENYHÁRD, I.: Theory of Shells. Part II. Publications of the Institute of Post-graduate Engineering Education Vol. XIX. No. 48, Budapest 1943 (In Hungarian)
4. MENYHÁRD, I.—SZMODITS, K.: Der Membranspannungszustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung-Bautechnik* **16** (1962)
5. SZMODITS, K.: Statik der Schalenkonstruktionen. Teubner-Verlag, Leipzig 1965

Praktische Berechnung elliptischer Paraboloidschalen auf rechteckigem Grundriß. Infolge der weltverbreiteten Anwendung der Schalenkonstruktion erwies sich als notwendig, deren Bemessung zu vereinfachen. Dies kann durch Vernachlässigung eines Teiles der strukturellen Parameter und Einführung von theoretischen Näherungsmethoden oder durch Erarbeitung von analytischen Funktionen erzielt werden, welche die die exakte Lösung der Randbedingungen befriedigenden Differentialgleichungen der Konstruktion ziemlich gut annähern. Die behandelte Methode beruht auf diesem letzteren Prinzip der Vereinfachung. Das Grundprinzip dieses Verfahrens stammt von I. MENYHÁRD und wurde später von ihm in Zusammenarbeit mit K. SZMODITS weiterentwickelt.

Пратический красчет эллиптических параболоидных оболочек, лежащих на прямоугольных четырехугольных основаниях. Вследствие все более широкого применения оболочечных конструкций стало необходимым упростить их расчет. Сказанное выше можно осуществить так, что прибегают к упущению части характреистик конструкции, и вводят приближенные теоретические методы, или же путем подбора таких аналитических функций, которые с достаточной точностью приближают точное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих краевым условиям конструкции. Описанндй в работе метод расчета основывается на на последнем принципе упрощения. Основной принцип этого метода разработан Иштваном МЕНЬХАРД; в дальнейшем этот принцип был усовершенствован совместно с Казмером СМОДИЧ.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 117—125 (1975)

MODEL INVESTIGATIONS CONCERNING SOME PROBLEMS OF GAS FLOW AND HEAT TRANSFER IN THE FURNACE OF THE TYPE DHV, 670 t/h BOILERS

Mrs. E. BALOGH*

[Manuscript received February 15, 1974]

In the furnace of boilers with a large unit performance the liberation and the transfer of heat are due — depending on design — to the operation of burners of different basic types and to the interaction of the burning jets. The conditions in the furnace of the new-type boilers for the extension of the Danubian Thermal Power Station (Dunamenti Hőerőmű) have been analyzed, using the model technique. On an anisothermal model the characteristics of the velocity and temperature distributions of one burner were investigated, as well as the flow characteristics of the burner group in the boiler furnace.

Symbols

v = fluid velocity
x = co-ordinate
p = static pressure
ν = dynamic viscosity
ϱ = fluid density
g = acceleration of gravity
G_Φ = angular momentum flux
G = linear momentum flux
D = burner exit diameter
S = swirl number

Indexes

o = referring to jet exit
t = tangential
x = in direction of the jet axis
k = ambient

1. Introduction

In the near future in the Danubian Thermal Power Station a 200 MW block will be set into operation as the first step of its extension.

Steam will be produced by boilers with membrane wall panels, alternative oil/gas bottom firing and 670 t/h steam output.

A semi-empirical dimensioning method is availbale to the boiler designer. The calculations provide mean values of the firing parameters and of the steam characteristics (e.g. exit temperature of the furnace, thermal load per unit surface and unit volume, etc.).

The real parameters, the various variables (e.g. flue gas temperature, flow velocity, tube wall temperature etc.) cannot be considered as uniformly distributed, even for one section of the furnace.

Suitable arrangement of the flow in the furnace is the only factor through which — given the furnace and the fuel — the combustion process and thus

* E. Balogh, Szakasits Á. u. 60/a, H-1115 Budapest, Hungary

the distribution of its parameters can be influenced. For this reason the aerodynamics of the DHV boiler were investigated.

Because of mathematical difficulties, the model technique was used which is extensively applied in similar fields.

2. Characteristics of the boiler

Steam output (constant maximum)	670	t/h,
Steam pressure	171	at,
Steam temperature	545	°C,
Number of burners	8	
Nominal oil consumption of the burner	6,5	t/h,
Nominal natural gas consumption of the burner	8200	Nm^3/h.

3. Conditions of flow similarity for the furnace

The processes in the furnace, as a physical system, are described by the balance equations for the permanent characteristics [1]:

mass, momentum, energy.

If the solution of the system of equations is sought for by modelling, the conditions prescribed by the similarity transformation can be satisfied only by the trivial model (the original installation) [2].

The similarity conditions for the flow can be obtained from the aerodynamical basic equation, the Navier—Stokes equation, taking the conditions of uniqueness into consideration.

The flow in the furnace is a stochastic process. The instantaneous value of the velocity can be divided into an expected value (time mean value) and fluctuations (arbitrary deviation from the expected value). The Navier—Stokes equation refers to the mean value in time of the velocity. (The similarity of the turbulent characteristics in the model and in the original can only be assumed.)

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\left[v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j^2}\right] + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_j} = q_j, \quad (j = 1, 2, 3).$$

With suitable transformations the solution of the equation for the stationary case, neglecting the external field of forces, can be assumed to have the form

$$V = \Phi[X, N, Re]$$

where:

$$V = \frac{v_i}{v_0}, \quad X = \frac{x_i}{x_0},$$

$$N = \frac{\nu}{\nu_0}, \quad Re = \frac{x_0 v_0}{\nu_0}.$$

The Reynolds' number for the burner is, in the present case, in the self-modelling domain, therefore it is not necessary to adhere to it, the task is to guarantee the similarity of the boundary conditions.

4. Investigation of the jet emerging from one burner

A 1 : 15 scale model of the burner is shown in Fig. 1. From the burner preheated air flows out. In conformity with the design of the burner the flow conditions of the emerging jet are complicated, and no means for their mathematical description [3] exist.

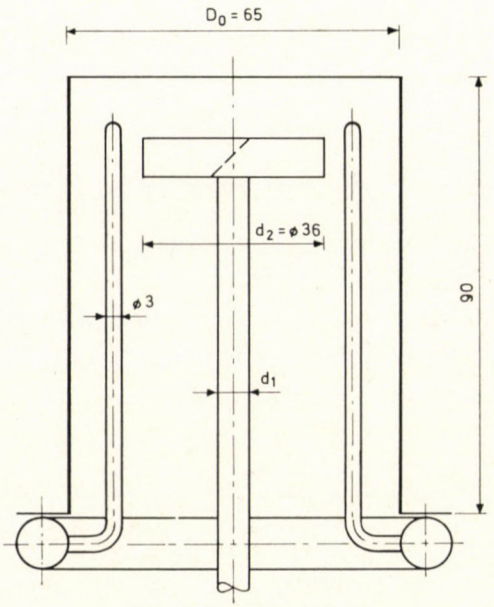


Fig. 1. Burner model

After the vortex impeller a spiral jet develops, which is surrounded by an air ring with a purely axial velocity. The 12 gas lances, symmetrically arranged in a circle, also influence the flow pattern in the burner exit.

The aerodynamical modelling of the spiral jet is based — according to generally accepted use — on the equality of the swirl ratios S [4],

$$S = \frac{G_\Phi}{G_x \frac{D_0}{2}}.$$

Hence the similarity criterion for the burner is the ratio of the angular momentum to the axial momentum flux in direction x, multiplied by the

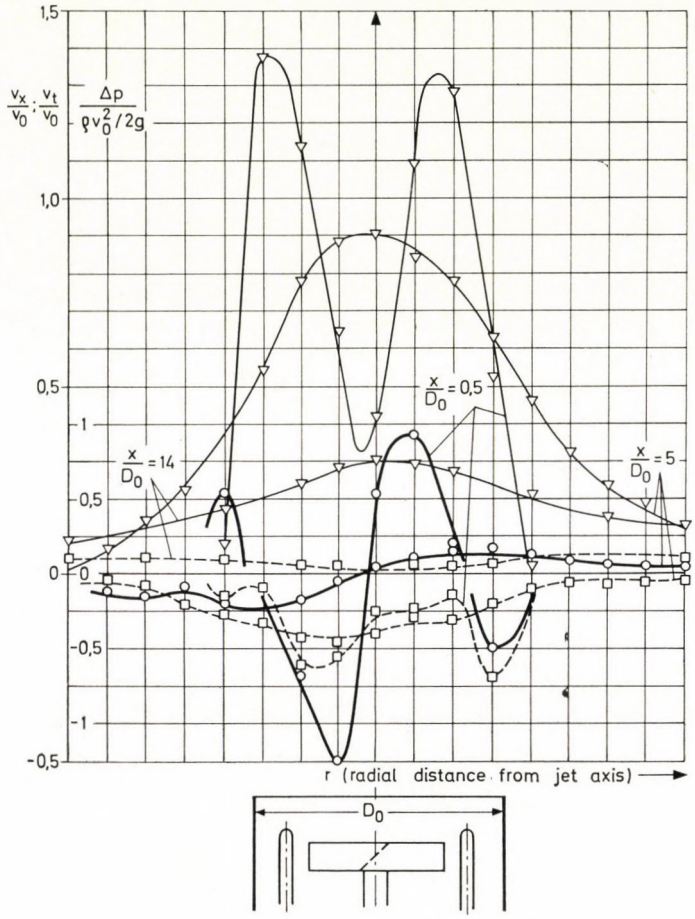


Fig. 2. Axial (———), tangential (▬▬) velocity and static pressure (- - - - -) distributions for the operation of one burner, at $x/D_0 = 0{,}5$, 5 and 14 axial cross sections

burner exit radius. The single burner was analyzed in a space where the influence of the wall was negligible.

Experimentally the distribution of velocity components, static pressure and temperature were determined by a spherical probe, a fan wheel velocity meter and a miniature coaxial thermoelement (Fig. 2).

The most important characteristic of the jet can be summarized as follows: in the initial section $x/D > 3{,}5$ the influence of the swirling is not negligible, in the later sections it is insignificant.

From the distribution curves determined for the different axial sections Fig. 3 was determined, which gives information on the *degree of equalization* of the distribution of the axial distance. For the basic velocity v_{eq} 10% of the

mean outler velocity was chosen. The velocity curve shows how the maximum of the axial velocity approaches the 10% of the outlet velocity.

The mixing with the ambient medium is characterized by the relative temperature distribution t_r.

The equalization speed of the temperature is *greater* than that of the velocity.

Another essential feature of the jet is its *spreading*, which is indicated — as usual in literature — by the dependence of the radial distance of half the

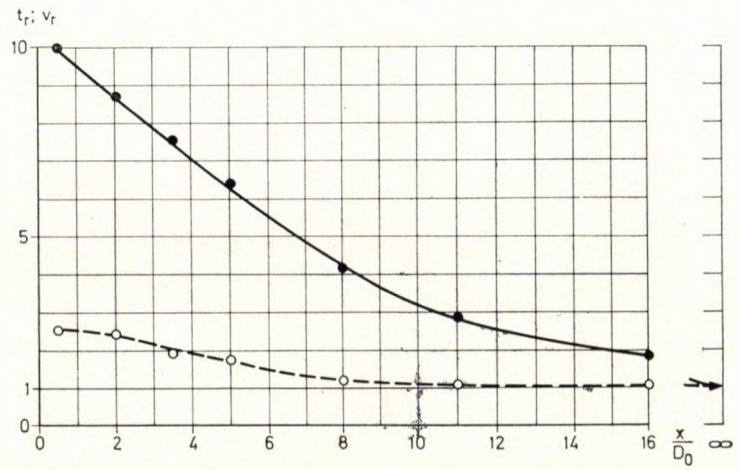


Fig. 3. Running-out of relative velocity (as compared to the completed equalized state (——) and temperature (- - - -) distributions for one burner

axial maximum of the distributions from the axial distance ($y_{1/2v}$, $y_{1/2\Delta T}$).

A linear approximation for the axial velocity distribution is

$$\frac{y_{1/2V}}{D_0} = 0{,}1455 + 0{,}2045\,\frac{x}{D_0}, \quad \text{if } \frac{x}{D_0} > 3{,}5\,.$$

For the temperature distribution a second-degree approximation has been obtained:

$$\frac{y_{1/2\Delta T}}{D_0} = 0{,}962 + 0{,}0868\,\frac{x}{D_0} + 0{,}02035\left(\frac{x}{D_0}\right)^2.$$

5. Interaction of the burners

After analyzing the flow field of the individual burner, the condtions in a group of eight burners in the furnace were investigated. Fig. 4 shows the model of the furnace.

Comparing the measuring results for one burner and for the burner group, the reductions of velocity maxima when progressing along the axis are with *good approximation equal in both cases.*

Interaction was experienced from $x/D_0 = 3$ axial section onwards. Beginning from the point of interaction, the amount of velocity fluctuation

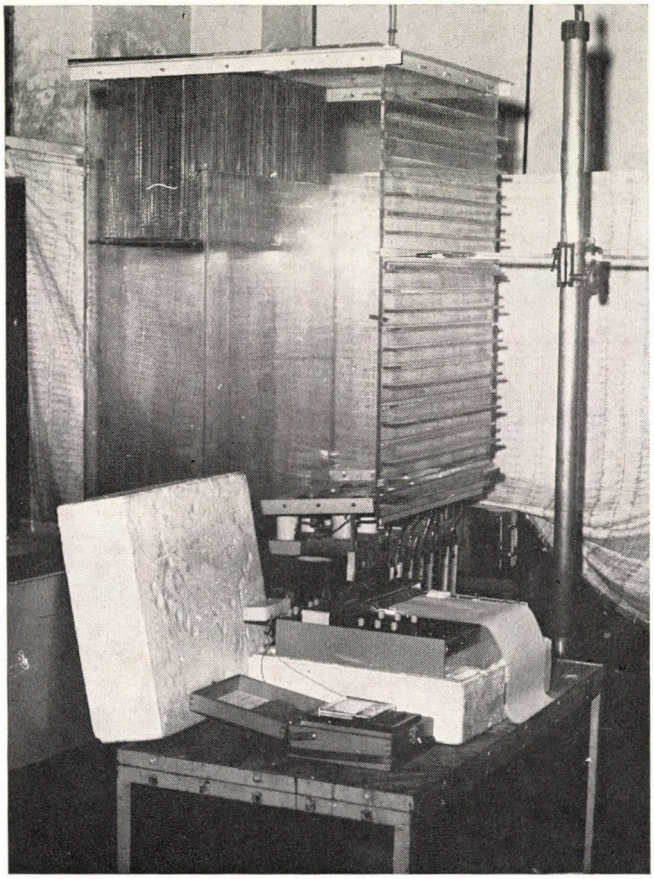


Fig. 4. Photo of the furnace model

considerably increased. The difference between the velocity maxima of the burners was below 3% in the exit cross section and amounted already to 20% at $x/D_0 = 3$. The reason for this is also the interaction of the jets, and the influence of the walls.

In the strength calculations of the furnace system, uniform surface thermal load is considered. The two components of the thermal load per unit surface are the radiant and the convective heat fluxes. Their order of magni-

tude are the same, their percentual distribution depends on many factors, e.g. fuel, furnace space design, firing method, etc.

The convective thermal load is an univocal function of the velocity distribution, thus uniformity of velocity distribution along the walls is not an indifferent feature. Moreover, the interaction of the jets or in some cases the prolongation of the flame, due to impingement on the wall, also influences the distribution of the radiation intensity along the wall.

In order to determine the inequality of the velocity distribution along the walls, the velocity was recorded at 25, 40, 60 and 80% of the furnace height. The distribution curves were evaluated on the basis of the *relative distribution of the velocities.*

The reference velocity w_0 is the mean velocity for the whole furnace cross section, in the present case it was 0,64 m/s.

Table I

Velocities measured along the furnace circumference at various cross-sections

Velocity range m/sec	$\frac{v}{w_0}$	Location of the measured section in % of furnace height				
		25	40	60	80	
3	4,6	28	8	8	8	10,3
2,5 — 3	4,2	20	9	4	8	15,2
2 — 2,5	3,5	17	22	13	18	15,0
1,5 — 2	2,4	8	30	22	25	21,3
1 — 1,5	1,9	10	11	28	29	19,4
1,5	1,5	17	20	25	13	18,8
		Furnace circumference = 100 %				

Table I shows that higher velocity along the walls is more evident in the lower zone of the furnace where a higher thermal load is provided by the radiation energy, too.

Photographs were made from the isotherms of the model walls with the AGA thermovisual apparatus of the research Film Studio, Hungarian Academy of Sciences. The burners were modelled by a preheated air jet. The velocity distributions and the isotherms are in good agreement.

Fig. 5 was taken from a side wall of the model and shows different temperature of the surface parts by enhancing two isotherms.

By switching off the burners one by one, the various seven-burner-states were compared. From the relative velocity distributions and the thermovisual records the favourable and unfavourable cases were selected.

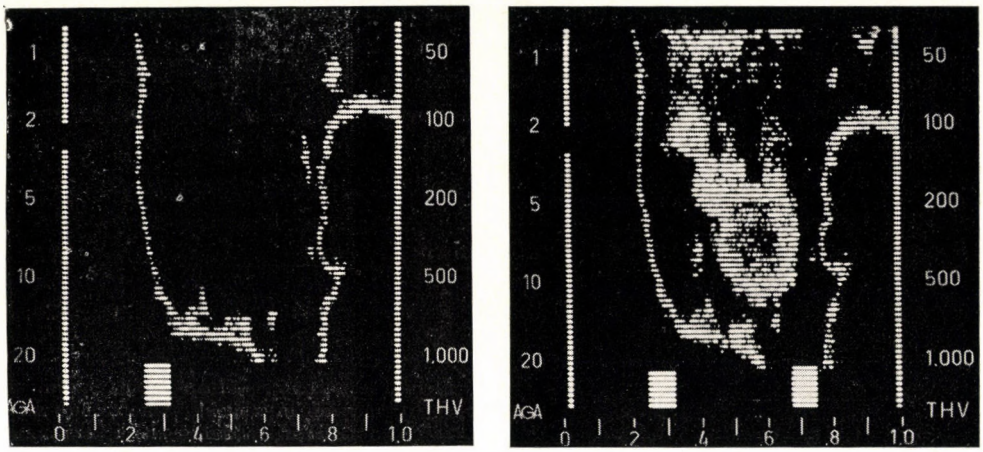


Fig. 5. Temperature distribution on the right wall of the furnace model. a) 28,5°C isotherms, b) 28,5 and 29,4°C isotherms

6. Velocity distributions in the exit cross section of the furnace

In the second pass of the boiler the heat transfer is determined by convection. For more exact calculations or for a model investigation of the second pass the real velocity distribution in the outlet cross-section of the furnace must be known. The velocity component normal to the cross-section also provides the distribution of the outgoing quantity of gas.

By measurements — dividing the outlet cross-section into five parts — the average air quantity belonging to the 20% cross section parts was determined.

In the five 20% parts of the *cross-section area* the *relative air quantities* were

31%, 25%, 19,9%, 14,7%, 8,7%

of the total air quantity (with the ideal uniform distribution of 20% flowing everywhere). In the present case, there are outstanding inequalities.

This method of evaluation is suitable for comparing the different methods of operation of a given boiler. The measurements discussed here show, e.g., that the flow pattern and the temperature distribution are more favourable when switching off the burners in the central area, then when switching off those near the wall.

Modelling of the furnace provides a quick and inexpensive method for investigating the flow conditions and the possibilities to influence them for a given furnace. It is suitable for comparing the different modes of operation, selecting the most favourable partial loads, revealing the dangerous jet impingements on the wall.

After a suitable placing of the measuring points on the real boiler in the furnace (e.g. where minimum/maximum values are expected), measurements during operation may reveal the exact connection between isothermal aerodynamics and the real flow.

Taking into consideration the character of the distributions helps in making furncace calculations which approach the real conditions better.

REFERENCES

1. Szücs, E.: A hasonlóság és modell (Similarity and Model). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972
2. Gurvitch, A. M.: Teplobmen v topkakh parovikh kotlov. Teoriya i rastchot. Gosenergoizdat, Leningrad—Moscow 1950
3. Eickhoff, H.: Ähnlichkeit und einfache Modellgesetze freibrennender und eingeschlossener Strahlflammen. *Verfahrenstechnik* **5** (1971), 118—122
4. Sired, N.—Beér, J. M.: Dämpfung der Präzession des Wirbelkernes bei der Verbrennung in einer Wirbelkammer. *Gas, Wärme Int.* **20** (1971), 434—444

Modellversuche betreffend einige strömungstechnische und Wärmeübertragungsprobleme des Feuerraums der 670 t/h Kessel. Im Feurraum von Großkesseln wird — abhängig von den konstruktiven Lösungen — im Verlauf des Betriebes verschiedener Grundtypen von Brennern und der Wechselwirkung zwischen den brennenden Strahlen Wärme frei und übertragen. Die Analyse der Feuerraumverhältnisse der im Verlauf der Erweiterung des Wärmekraftwerkes Donau in Betrieb gelangenden neuen Kesseltype wurde durch Modellversuche geklärt. An einem anisothermischen Modell wurden die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen eines Brenners und die strömungstechnischen Eigenschaften der Brennergruppe im Feuerraum analysiert.

Некоторые проблемы движения потоков и теплопередачи в топке котла типа DH можностью 670 т/час на основе модельных исследований. В топке мощных котлов (в еависимости от конструкционных решений) вследствие взаимодействий между работой горелок различных типов и радиусами горелок возникают процессы высвобождения тепла и теплообмена. Анализ условий топки котлов нового типа, вводимых в эксплуатацию в процессе расширения Придунайской электростанции, проводился путем применения метода моделирования. На анизотермической модели исследовались характеристики распределения скорости и распределения температуры горелки, а в топке котла аэродинамические свойства группы горелок.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 127—133 (1975)

INDUCED THERMAL EMISSION

F. HORVÁTH*

[Manuscript received February 15, 1974]

The combination of a special method for measuring the intensity of thermal radiation with a background of varying radiation intensity has brought forward new discoveries. The author has proved that the energy radiation of a luminous hydrocarbon flame changes very strongly depending on the background radiation. The convective energy exchange namely between the very small soot particles and the gas molecules surrounding them is moderate. Hence, the temperature of the soot particle is determined by the equilibrium between the absorption of radiant energy and its emission. Under the action of background radiation the energy absorption of soot particles increases and a new temperature of soot, higher than the original, may develop. The higher soot temperature causes an increase of the energy emission.

1. Experimental arrangement

The experiments were carried out in the Murányi Street Laboratory of the Institute for Electric Power Research ("VEIKI") in a waterjacket-cooled furnace of 2000 mm length and 600 mm dia. In the furnace the luminous flame was provided at maximum load by a Hungarian made oil block-burner of 8÷ 28 kp/h power, type PG 2 N–28 G of the Pestvidéki Gépgyár.

At one cross-section of the furnace, at 500 mm from the block-head, two opposite holes were cut along a horizontal diameter for examining the radiation of the flame.

The cross-section was near to the root of the flame, approximately at the point of the maximum flame radiation intensity. During the examination of flame radiation the excess air factor could be varied from 1,24 to 1,52.

Fig. 1 shows the cross section of the furnace and the measuring arrangement. For varying background radiation an OSRAM made tungsten-ribbon lamp (WI 17/19 211/0400—114) was used. Heating of the lamp filament could be varied as required. The emitted energy passes through the quartz glass cap of the bulb, the opening cut into the furnace wall, and traverses the flame while being partially absorbed.

* F. Horváth., Dohány u. 84, 1074 Budapest, Hungary

The radiant energy flow arriving at the other side of the furnace was measured by an UHER made partial radiation measuring pyrometer. The sensing element of this instrument measures the radiant energy flow up till 1,5 μm wavelength, with $\approx 0{,}6^{\circ}$ visual angle.

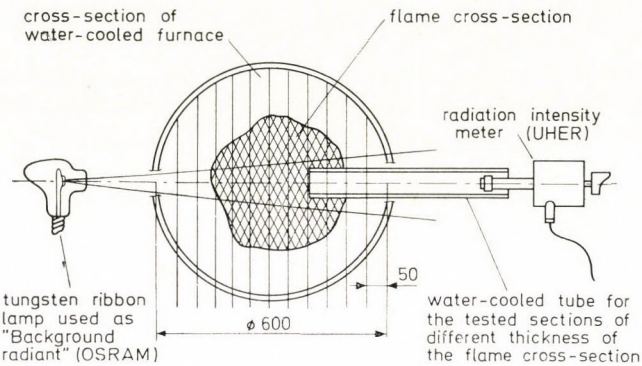


Fig. 1. Arrangement for measuring the intensity of traversing radiation

2. Experimental analysis of the absorption of background radiation

When varying the heating current of the ribbon lamp, the temperature of the incandescent ribbon changes. Hence, the light of the lamp and the part of it traversing the flame will vary with the heating current.

The measured energy flow concerns only a waelength interval of $0 \div 1{,}5\ \mu$, as the upper sensitivity limit of the instrument is $1{,}5\mu$. Fig. 2 shows the measured energy flow plotted against the heating current of the lamp.

3. Determination of the emission factor of flames by Schmidt's method

From the radiation intensities, according to Fig. 2, the emission factor of the flame section within the examined small cone-angle was determined by Schmidt's method.

Let dE_0 be the energy flow radiated by the background in the investigated wavelength range, dE_l the energy flow of the flame radiation in case of a cold background, and dE the sum of the hot background radiation obtained through the flame and the energy flow emitted by the flame.

According to these notations, Fig. 2 shows the energy flows dE and dE_0 as functions of the heating current, while the values dE_l referring to the cold background are obtained at abscissa $5A$.

If $\alpha_{1,5}$ denotes the mean absorption factor of the examined flame cone, then the part of the background radiation traversing the flame is given by

$$(1 - \alpha_{1,5})dE_0 ,$$

and hence

$$dE = dE_l + (1 - \alpha_{1,5})dE_0 .$$

Expressing the absorption factor from the equation, we obtain

$$\alpha_{1,5} = 1 - \frac{dE - dE_l}{dE_0} . \tag{1}$$

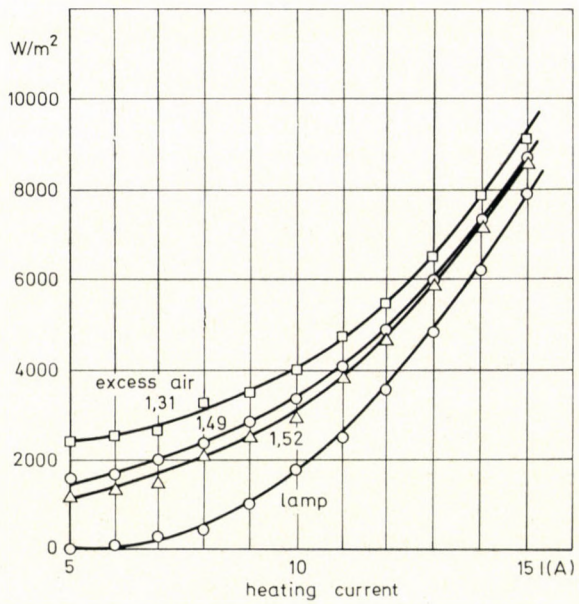


Fig. 2. Combined radiation of lamp and flame in the $0 \div 1{,}5$ μm band, as a function of lamp-heating current

According to Schmidt's method, $\alpha_{1,5}$ agrees with the emission factor $\varepsilon_{1,5}$ if the radiation temperature of the background and the flame agrees. At present this agreement was deliberately not adjusted. Thus, one may speak only about the absorption factor instead of the emission.

Using formula (1) and the data of Fig. 2, the absorption factors of Fig. 3 are obtained. The absorption factor of the flame becomes *negative* if the radiation temperature of the background (heating current) is reduced. The light of the lamp representing background radiation is not absorbed by soot particles in the flame but intensifies it. The experimental result presented in Fig. 3 seems inexplicable (negative absorption factor: a paradoxon!). The negative

absorption factor cannot be explained as a measuring error. It is true that with low heating currents the error is greater, but not to such an extent that the tendency of the curve could be doubted.

Naturally, to talk about negative absorption, is nonsense. Obviously, some faulty mistake was made during the deduction of Eq. (1). It is necessary to think it over again. The paradoxon, the negative absorption factor, can be eliminated or explained only by proving that the three measured data of Schmidt's method (dE_0, dE_l, dE) cannot be used simultaneously in formula (1).

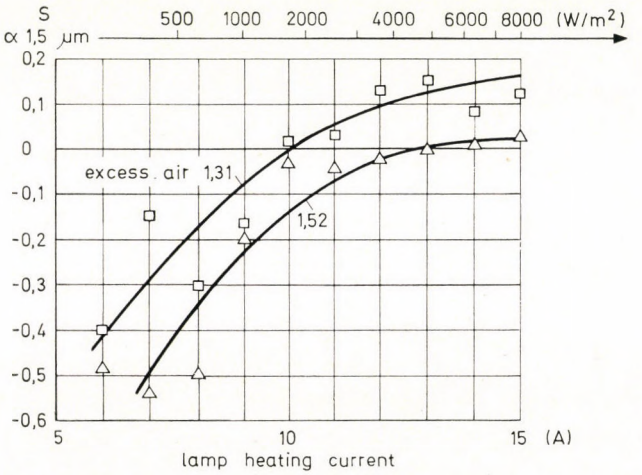


Fig. 3. Mean absorption factor of the flame in the $0 \div 1{,}5$ μm band as a function of background radiation (values calculated according to SCHMIDT)

The hypothesis explaining the phenomenon is that the emission of flame depends on absorption. In other words, under the *action of the energy absorbed from background radiation the energy radiated by the flame increases, induced thermal emission* occurs. (The terminology is not fortunate because physicists understand something different under induced emission, but it is retained because of its expressiveness.)

Now let us see whether the hypothesis of induced thermal emission explaines the negative absorption factor according to SCHMIDT. In order to distinguish it from the real absorption factor, let the factor in Eq. (1) be denoted by $\alpha^{s}_{1,5}$.

According to the hypothesis, the energy flow (dE'_l) emitted by the flame at non-zero background radiation (dE_0) is *higher* than the energy flow (dE_l) measured with cold background, namely:

$$dE'_l > dE_l \,. \tag{2}$$

If $\alpha_{1,5}$ denotes the real absorption factor, the measurable sum of the flame radiation and of background radiation traversing the flame is

$$dE = dE_l' + (1 - \alpha_{1,5})dE_0 .$$

Substituting this expression into the absorption factor formula according to Schmidt's method (1)

$$\alpha_{1,5}^s = 1 - \frac{dE_l' + (1 - \alpha_{1,5})dE_0 - dE_l}{dE_0} ,$$

i. e.:

$$\alpha_{1,5}^s = \alpha_{1,5} - \frac{dE_l' - dE_l}{dE_0} \tag{3}$$

Considering the inequality (2) the second term of the right side of (3) is positive, i.e.:

$$\alpha_{1,5}^s < \alpha_{1,5} . \tag{4}$$

Thus, the absorption factor according to Schmidt's method is *smaller* than the real absorption factor. From expressions (3) and (4) theoretically a negative Schmidt absorption factor can be obtained, too.

4. The mechanism of induced thermal emission

Using statistical thermodynamical relations, the heat transfer coefficient of a soot particle was determined. The result was that the heat transfer coefficient of soot can be smaller by orders than the value extrapolated from experimental results of larger spheres. Owing to small heat transfer coefficient there may exist a large temperature difference between the particle and its surroundings. It may also be assumed that soot is adiabatically insulated from the surrounding gas molecules.

Due to the low convective energy transport, the temperature of soot takes such a value by which the soot will be in state of equilibrium with the radiation field, namely, the absorbed and emitted energy flows are equal. If the wavelength distribution of radiation reaching the soot particle can be characterized by only a single factor viz. the temperature of radiation field (black radiation) then the soot assumes the temperature of the radiation field. Due to the fact that the radiation field in luminous hydrocarbon flames basically consists of the radiation field of soot particles, the ideas above mean that individual soot particles tend to take a common temperature in consequence of the mutual radiation quite independently of the local gas temperature. Consequently, any disturbance of the radiation field (background radiation) leads to a change of temperature of soot particles and thus to their emission, too ((2) hypothesis).

If the temperature of radiation field (inasmuch as it exists) is higher than the ignition temperature of soot particles, then the temperature of a soot particle generated at gas temperature quickly attains — in consequence of the mutual radiation effect — the ignition temperature. After that, the energy chemically bound raises the energy of the soot mass that hasn't burnt out yet, and then it is emitted. The soot temperature can be very high while burning. (This is the reason why the temperature of radiation field may exceed gas temperature in case of cold background, too.

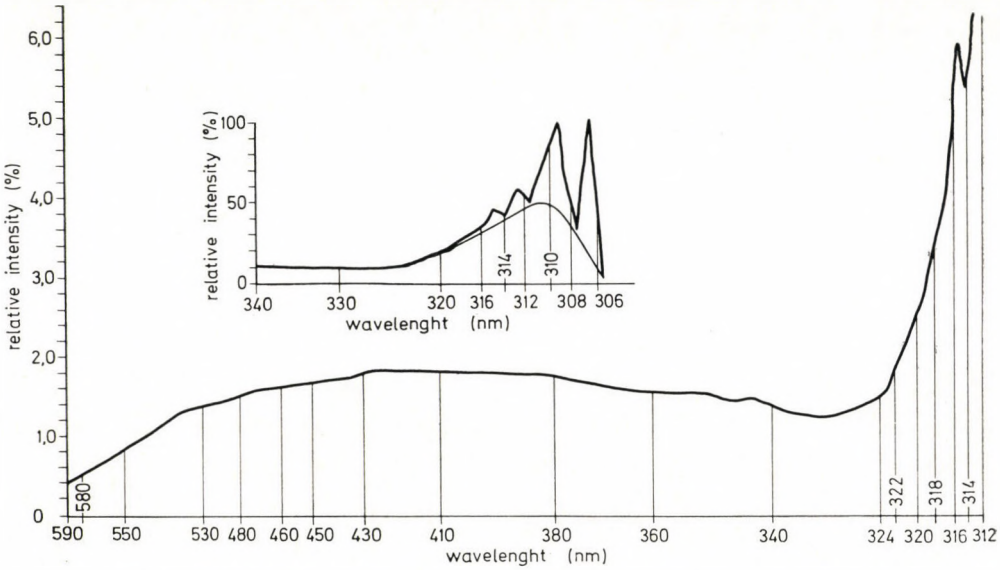


Fig. 4. Emission spectrum of a high-temperature acetylene—oxigen flame

Therefore, the mechanism of induced thermal emission is the following: due to the increased energy absorption the energy and temperature of soot particles rises and thus the energy radiation also increases. Furthermore, it is also possible for the soot temperature attaining the ignition temperature, that the energy chemically bound is emitted, too. Hence, the increase of the radiant energy exceeds the increase of absorption.

Fig. 4 shows the emission spectrum of an acetylene–oxigen flame. The flame temperature is very high, thus a considerable proportion of energy emission lies in a wavelength band where the gas components of the flame have no absorption bands. The figure shows that almost in the whole analysed spectrum only one component of continuous radiation is present. (In the 307 ÷ 315 nm interval there are some emission bands.) Continuous radiation obviously originates from soot particles in the flame. The continuous spectrum

has two maxima. It shows that practically two different types of soot particles are present in the flame. Making use of Wien's law and the dependence of monochromatic absorption factor of soot on wavelength, the estimated values of the two temperatures are 5400 and 7400 *K*.

The author believes that by determining the heat transfer coefficient and by presenting the spectrum in Fig. 4, the hypothesis according to which it is necessary to reckon with induced thermal emission has been sufficiently supported.

Induzierte thermische Emission. Die Kombination einer speziellen Methode für die Messung der thermischen Strahlungsintensität und der Variierung der Hintergrundstrahlungsintensität führte zu neuen Erkenntnissen. Der Verfasser stellte fest, daß die Energieausstrahlung einer leuchtenden Kohlenwasserstoff-Flamme auf die Einwirkung der Hintergrundemission sehr empfindlich reagiert. Der konvektive Energieaustausch zwischen den sehr kleinen Rußpartikeln und den sie umgebenden Gasmolekülen ist nämlich mäßig. Die Temperatur des Rußteilchens wird daher durch das Gleichgewicht zwischen der Absorption der Strahlungsenergie und ihrer Ausstrahlung bestimmt. Unter der Einwirkung der Hintergrundbestrahlungwächst die Energieabsorption der Rußteilchen und eine neue Rußtemperatur, höher als die ursprüngliche, kann sich einstellen. Die ansteigende Rußtemperatur verursacht das Ansteigen der Energieausstrahlung.

Индуктивная термическая эмиссия. Комбинирование ;специального метода измерения интенсивности термического излучения и изменения интенсивности излурения фона позволило установить новые факты. Установлено, что излучение энергии светящегося углеводородного факела пламени изменяется очень чувствительно под воздействием облучения фона. Этот факт можно объяснить следующим обраеом: — Между частицами копоти очень малого размера и окружающими их газовыми молекулами конвективный энергообмен является умеренным. Вследствие сказанного выше температура частицы копоти определяется равновесием поглощения и излучения лучистой энергии. — Под воздействием облучения фона абсорбция энергии отдельными частицами копоти возрастает и таким образом могут возникат температуры, которые являются более высокими, чем превоначальные. В результате роста температуры копоти происходит рост излучения энергии.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 135—153 (1975)

INVESTIGATION OF THE FLOW IN PARALLEL BOILER WATER TUBES

G. SZABOLCS*

[Manuscript received February 15, 1974]

Investigation of factors influencing single loops are not competent for loops connected in parallel. The method developed for computerized calculation permits — with certain simplifying assumptions — to examine any number of parallel loops. Comparing the results of calculation and measurement show those factors which have a decisive influence on stability.

1. Introduction

In the natural-circulation boilers the calculation of circulation has a past of nearly 50 years. But the development of large boilers with natural circulation required a more precise knowledge of the hydrodynamical and thermal behaviour of the two-phase (steam-water) mixture. During the last two decades — due to the appearance of the nuclear reactors — intensive development has taken place in this field. The results of these investigations can be put to good use when investigating the flow in natural-circulation boilers. The basic aim of the calculation is to determine the working point in the system consisting of downcomer tubes and evaporative ones. Fig. 1/b shows the scheme of a simplified loop system. In equilibrium the following condition must be fulfilled:

$$H \cdot \gamma_{dc} - \Delta p_{dc} = H \cdot \gamma_{tp} + \Delta p_{pt} + \Delta p_{HD} . \tag{1}$$

The pressure drop Δp contains the frictional losses as well as flow-geometry losses. Since these losses depend on flow velocity, the equilibrium state determines the flow velocity, too. By definition, the inlet velocity of the (still one-phase) fluid entering from the lower header into the evaporative tube is the characteristic circulation velocity of the loop system.

Although Eq. (1) looks extraordinarily simple, it conceals complicated problems. Solution of the equation requires knowledge of the specific weight γ_{tp} of the water-steam mixture and of its hydrodynamic pressure drop Δp_{tp} at the right side. The specific weight of the mixture depends not only on the

* Dr. G. Szabolcs, Zrínyi-u. 1, H-1051 Budapest Hungary

percentage of the formed steam which is a function of the heat absorbed by the evaporative tube, but also on the advancing velocity of the steam, on the circulating velocity, on the tube diameter and on the tube inclination angle. Hence, $H\gamma_{tp}$ covers a simplified notation. For a better approximation to reality, the heated section should be divided into ΔH sections and for each

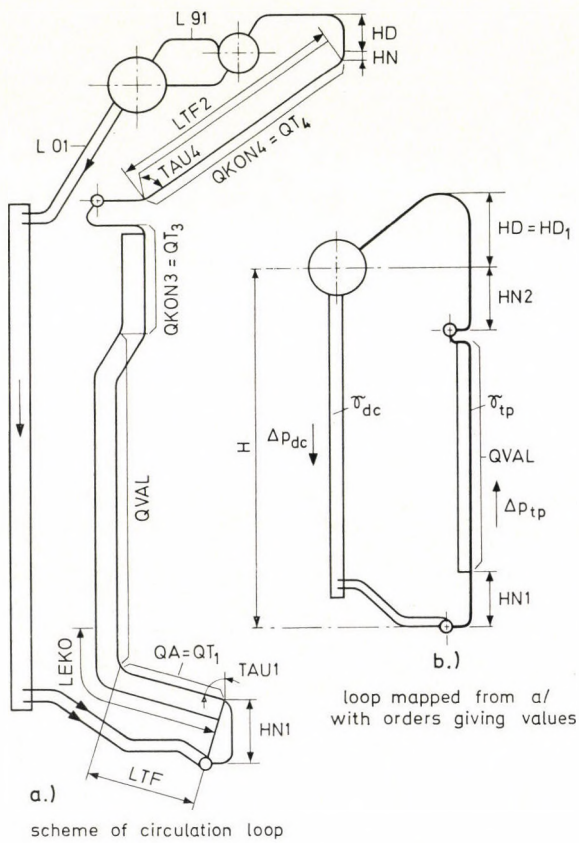


Fig. 1

section the specific weight of the mixture γ_{tp} should be determined. The calculation methods avoid this problem by assuming uniform thermal load along the tube section and calculating with the specific weight of the mixture which develops at half the tube length. But calculations are nevertheles tedious and are restricted to one or two loops at the most.

Calculation of the frictional and flow geometry loss is also a complicated task in the case of a two-phase mixture. Several other parameters of the pressure drop are a function of the steam percentage as well. Division into sections

would be justified in this case, too. For calculating the flow-geometry resistances, knowledge is required of the steam content at the places where the structural elements (bend, header, inlet and outlet chamber etc.) are fitted.

But even when using average values, the calculations are very cumbersome and, therefore, they are usually restricted to the calculation of one or two loops (generally, the most unfavourable from the point of view of resistance). So, finally no information is obtained on the velocity distribution in the numerous parallel loops having different heat absorption connected to one header, and on the influence of the variation of heat admission in each tube and the thermal load distribution along the tube.

The checking of the stability of flow is restricted to checking the very doubtful criterion whether in the presumably less heated corner tubes the flow does not stop or is even reversed because of the smaller buoyancy.

But with the widespread use of large boilers abroad and in Hungary, often tube failures occured in the furnace which could be traced to circulation troubles, although the usual circulation calculations and the correctness of the stability criterion as defined above did not support that conclusion.

In order to carry out a more extensive investigation into these problems, the authors endeavoured to elaborate a computer program for a more detailed investigation, embracing more parameters then hitherto. But they emphasize that during the work several such problems arised which require even further experiments.

2. Outlines of the circulation program

Only the principal steps of the very extensive program will be discussed. For the sake of clearness some terminological definitions are listed in advance:

Downcomer connecting tube:	the tube between the downcomer tube and the lower header
Evaporative tube:	tube between the lower and the upper header
Riser tube:	tube between the upper header and the drum
Header:	structural element uniting a certain number of evaporative tubes, rising tubes and downcomer connecting tubes, separated from an other header so that no communication is possible between the two loops connected to the two different headers. In the case of divided headers each header section is considered as an independent header
Steam percentage, steam content:	$\frac{\text{steam kg/h}}{\text{mixture kg/h}}$
Circulation velocity:	inlet velocity of the water into the evaporative tubes
Economizer section:	section of evaporative tubes required for heating to saturation temperature

The loop consists of the elements shown in Fig. 1. The unheated downcomer tubes are connected by an arbitrary number of connecting tubes to the

lower headers or header sections. From the point of view of heat flux the evaporative tubes leaving the lower headers are divided into three sections:

A) Lower inclined section (furnace funnel) with QA = const heat flux,
B) Vertical furnace section with heat flux QVAL varying along its length,
C) Section between the upper end of section B) and the upper header with heat flux QKON3 = = const.

The rising tubes consist of three sections:

D) With constant heat flux, QKON4 = const,
E) Unheated section, HN
F) Elevation above drum water level, HD.

There may be one more section:

G) Tube section connecting the upper drums (L91).

The program permits the mapping of the concrete design by suitable instructions. E.g. the instruction

TAU 1 = TAU 4 = LTF = L91 = LO 1 = QA = QKON3 = QKON4 = 0;
HN = HN 2; HD = HD1

results in the loop shown on Fig. 1/b.

Notations:

d inner tube dia., m
E pressure gradient ratio
F tube cross section, m^2
F_s cross section filled with steam, m^2
H hydrostatic height
i_{feed} heat content of water entering the drum, kcal/kg
i_{sat} heat content of saturated water, kcal/kg
Δp pressure drop, kp/m^2
R filling coefficient
QE heat absorbed in the economizer section, kcal/h
QF total heat absorbed by the investigated tube, kcal/h
QR evaporation heat, kcal/kg
v circulation velocity, m/s
x specific steam content, kg/h steam//kg/h mixture
x_k specific heat content at the end of the k-th section
w ratio of steam velocity and circulation velocity
γ specific weight, kg/m^3
γ_{tp} specific weight of steam—water mixture, kg/m^3
Θ γ_s/γ_w ratio of the specific weight of saturated steam and water
ζ resistance coefficient

Subscripts:

f friction
dc downcomer tube
ex exit
in inlet
s steam
w water
tp two-phase
HD overlift height

2.1. Heat quantity absorbed in the economizer section

The heat quantity needed for heating the water of heat content i_k to saturation temperature is — omitting the demonstration —

$$QE = \frac{QF(i_{sat} - i_{feed})}{QR + (i_{sat} - i_{feed})} . \tag{2}$$

This does not depend on circulation velocity.

The latent heat and the saturation enthalpy are functions of only the pressure (thus constant for a given design), the enthalpy of the feed water is also a constant value for a given load. Hence, the heat absorbed in the economizer section is only a function of the heat quatity transferring to the investigated, parallel-connected loop group, and this depends on load.

For calculating the length of the economizer section the program contains instructions corresponding to the possible variations of design.

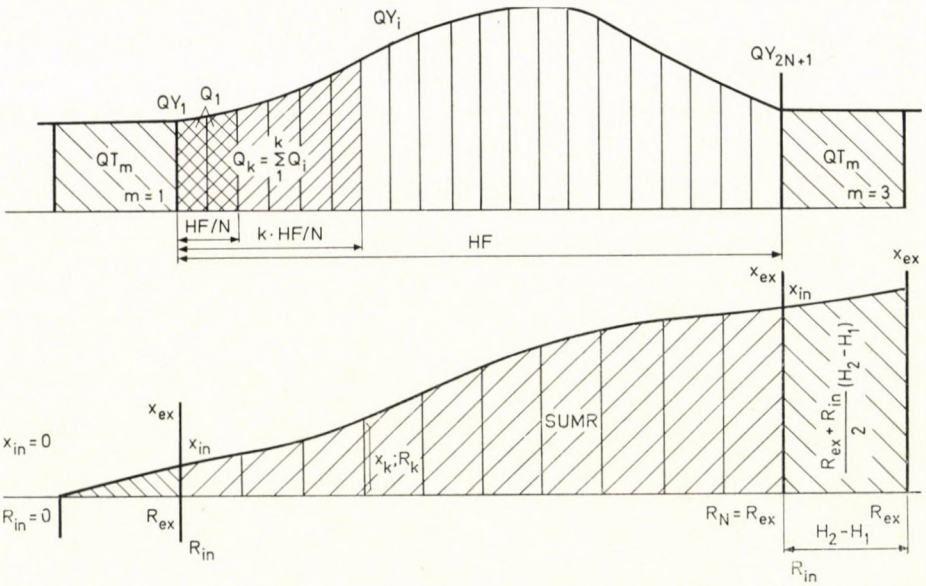


Fig. 2.

2.2. Calculation of steam content

The steam content is calculated by dividing the tube length into sections. In case of heat flux varying along the length, the heat absorbtion is characterized by $(2 \times N + i)$ data QY_i (kcal/m/h). This may be a basic design datum or a value determined by measuring, Fig. 2. At the end of the k-th section the steam content is

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} Q_i - QE}{F \cdot v \cdot \gamma_w \cdot QR \cdot 3600} + x_{in} \tag{3}$$

where $\sum_{i=1}^{k} Q_i$ is the total heat absorbed until the end of the *k-th* section and x_{in} the steam percentage generated in the section preceding the examined section.

2.3. Calculation of buoyancy force

For the calculation of the buoyancy the specific weight of the steam–water mixture is required. Instead of determining the specific weight of the mixture the so-called filling factor is used, which is the ratio F_s of the cross section with steam to the total cross section,

$$R = \frac{F_s}{F} .$$

For the filling factor R there exist nomograms [1]. From these and from the steam velocity v_s, the tube diameter d, the pressure p and the angle τ included by the investigated tube and the vertical direction, R_0 can be determined by

$$w = \frac{x}{\gamma_s/\gamma_w} = \frac{x}{\Theta} . \tag{4}$$

Finally,

$$R = R_0 K_p K_\tau \tag{5}$$

where K_p is the pressure correction, K_τ the angular correction. For determining R_0, K_p, K_τ the nomograms of [1] are replaced in the ALGOL program by approximate functions [2]. In the general case the buoyancy is

$$\Delta p_H = (\gamma_w - \gamma_s) \int_{H_1}^{H_2} R \cdot dH . \tag{6}$$

Calculating w by sections, $(N+1)$ values of R are at our disposal from (5). Using the array "R",

$$\text{SUM } R = \int_{H_1}^{H_2} R \cdot dH \tag{7}$$

is calculated.

Elevation above the drum water level is to the expense of buoyancy. The loss caused by superelevation is

$$\Delta p_{HD} = (\gamma - \gamma_s)(1 - R_{ex}) \cdot HD \tag{8}$$

where R_{ex} is the value of "R" at the end of the last heated section.

2.4. Calculation of pressure drop

The pressure drops (friction resistance and flow-geometry losses) are calculated according to the method of R. C. MARTINELLI and D. B. NELSON [3]. The method has been elaborated in connection with the thermohydraulic problems of nuclear reactors and according to present knowledge this is

considered as the best method — supported by experimental results — for calculating the hydraulic losses of two-phase mediums.

The method relates the hydraulic resistance of the two-phase medium to the ratio of the pressure gradients along the tube of the two-phase and single-phase mediums. In the point characterized by x_k steam content of the tube section L this ratio is

$$E = \frac{\left(\frac{dp}{dL}\right)_{tp}}{\left(\frac{dp}{dL}\right)_0} = (1 - x)^{1,75} \cdot \Phi^2 . \tag{9}$$

Index *tp* relates to the two-phase, index 0 to the liquid phase if only liquid flows in the whole cross section. The factor Φ is a function of the ratio of the specific volumes of the saturated liquid and the saturated steam, the ratio of the dynamic viscosities, the ratio of the weights of liquid and steam flowing per unit time, and of the pressure.

As the steam content changes from point to point, so the pressure drop also changes from section to section. Hence, the friction loss of the two-phase medium in a heated section of length $L = L_2 - L_1$ is from (9)

$$\Delta p_{tp,f} = \Delta p_0 \frac{1}{L} \int_{L_1}^{L_2} E_L \, dL \tag{10}$$

where Δp_0 is the pressure drop of the section of length L for pure liquid flow.

If there are local resistances in the heated section, the pressure drop of the two-phase medium is

$$\Delta p_{tp} = \left(\xi \frac{v^2}{2g} \gamma_w\right) E_L . \tag{11}$$

The product in the brackets is the flow-geometry resistance for the single-phase medium, E_L is the pressure gradient ratio calculated from (9) which depends on the steam content at the place of the element causing geometrical resistance.

The diagrams published in [3] for the determination of the pressure gradient ratio are substituted in the ALGOL program by approximate functions [2].

The calculation of the array E is analogical to the method used for the calculation of the array R. Designating by SUME the value of the integral in (10), the friction loss of the section is

$$\Delta p_{tp,f} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g} \gamma_w \cdot \text{SUME} . \tag{12}$$

Besides the frictional and geometrical losses the acceleration pressure drop is calculated according to [3].

3. Parallel loops

3.1. Criticism of the flow stability condition

In order to elucidate the problem of loops connected in parallel, some ideas will be discussed which point out the contradictions in the method of stability calculation.

The conventional formulation of this stability criterion is the following: given is a parallel-connected furnace tube system, where a certain number of

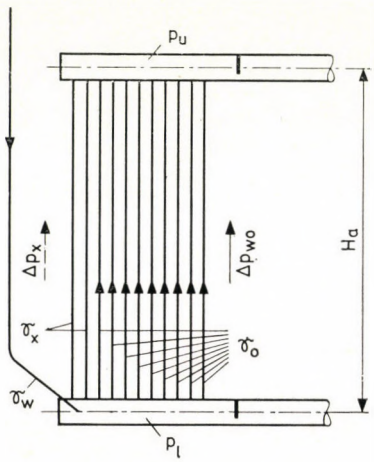


Fig. 3.

tubes are connected to the same header or header section. With the notations of Fig. 3 — assuming constant pressures p_l and p_u along the lower and the upper header section — the relation

$$H_a\gamma_0 + \Delta p_{w0} = H_a\gamma_x + \Delta p_x \tag{13}$$

must hold. In the corner tubes there is presumably a lower steam precentage since due to inequal heat flux distribution in the furnace, these tubes absorb less heat. Hence, in these tubes the specific weight of the steam–water mixture is higher, $\gamma_x > \gamma_0$. According to Eq. (13) for equilibrium Δp_x and thus the quantity of flowing medium must decrease. At the limit $\Delta p_x = 0$, the flow in the tube stops. The stability criterion is that even in the coldest tube

$$H_a\gamma_x < H_a\gamma_0 + \Delta p_{w0} \tag{14}$$

must be satisfied. This concept is subject to criticism from several points of view:

a) The circulation velocity is generally calculated only for several loops which are to be considered as characteristic. This is represented by the right

side of the inequality (14). On its left side there is the hydrostatic head of the less heated corner tube. But it is improbable that the working point of the tubes system consisting of numerous parallel tubes with different resistances and heat flux could be determined by examining several loops chosen at random.

b) The tube failures due to overheating do not occur in the corner tubes which are less heated and are considered as decisive from the point of view of stability.

According to the calculations carried out with the program, a heat flux far below the average would be needed to arrest the flow in the corner tubes or to reverse it. Moreover, the stopping or the reversal in itself is not a sufficient condition for a tube failure to be caused by overheating.

c) Experience shows that the tube ruptures occur in the regions of greater local heat flux, thus in those tubes where the buoyancy represents a higher flow velocity, so in these places (according to the conventional interpretation) a failure should be less probable.

d) The local overheating leading to tube failure is considered as being related to the critical heat flux and to mass flux. But in the surroundings of the corner tubes considered as less stabile the overheating is the least probable.

To establish a connection between the critical heat flux and the failures is, in the case of natural circulation, an idea open to criticism. The investigations on the thermohydraulics of nuclear reactors [4] provide information on the connections between critical heat flux and mass flux. But the investigated range is rather far from the parameters characterizing natural circulation. It must be assumed that with natural circulation it is rather the steam percentage which is the characteristic parameter. If it attains an upper limit, local overheatings occur because the cooling of the tubes deteriorates.

At the investigations carried out so far by VEIKI already at 250 000 kcal/m^2/h local heat flux on the evaporator tubes and even at 100 000 kcal/m^2/h, 200 $\div$ 250°C superheating of the steam was found [5].

e) The disorderly state of the circulating velocities goes with local overheating even in the case of low local heat flux and consecutive failures, and so this phenomenon is not necessarily limited to the region of the corner tubes. An example is the series of failures which occurred in the Gagarin Power Station [6].

Summarizing the above, it can be stated that the usual stability criterion is not confirmed by experience and the "theoretically" stabile boiler can in practice get into a very labile state. Also the failures occur in the better heated tubes, which theoretically are more favourable from the point of view of circulation.

For these reasons too the elaboration of a computer program is justified which already permits in the design or reconstruction stage the determination

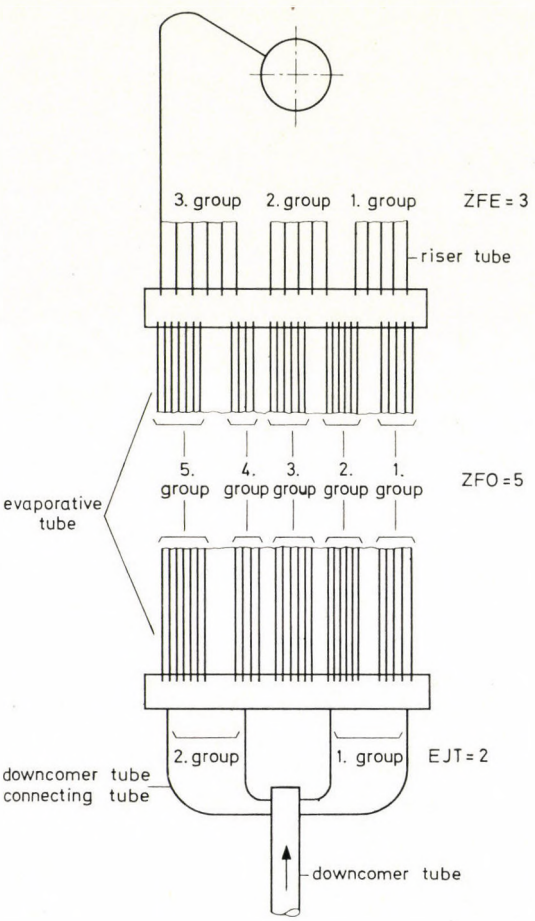


Fig. 4.

of the circulating velocity in the individual tubes or tube groups, since it appears that the uniform velocity distribution is the most obvious mean for maintaining stability.

On the other hand, should circulation disturbances occur, complex evaluation of measurements and calculations and the examination of several variants permit the selection of the optimum solution.

3.2. Basic conditions for the elaboration of the program for parallel loops

The system consists of series- and parallel-connected tubes. This is shown by the plane schematic view of Fig. 4. From the central downcomer tube or tubes a certain number — varying with the design — of parallel

connecting tubes leads to the lower header, distributed along its axis. From there, parallel evaporative tubes also distributed along the axis of the header, lead to the upper header, and from there riser tubes lead to the drum. The downcomer tube, the downcomer connecting tube, the evaporative tube, the riser tube groups are the series-connected system, the identical type tube groups form the parallel-connected tube system. The diameter of the tubes belonging to the different groups and their number differ from each other.

For the calculation of the pressure loss in an independent loop as well as in the parallel loops the incertitude of the friction factors and of the flow-geometry loss coefficients, i. e. of the basic data, bring out great difficulties. The friction factor depends on the quality (roughness) of the tube surface. The roughness is a function of production methods when the tube is new and without a protective layer. The protective layer developing during operation, or other deposits, change the roughness and thus change the frictional coefficients, too.

For the flow-geometry loss factors (bend, junction, inlet, outlet etc.) different data have been published, varying between an upper and a lower limit.

The real loss factor may differ from the assumed value.This is true especially for the pressure loss in the headers, where the various arrangements (repartition of the inlets and outlets along the longitudinal axis) may have different loss factors.

In the simulation of the parallel loops the problem is that for the inlet tubes connected radially to the headers and distributed along their axes no experimental data for determining the pressure distribution are available. The data for the pressure drop or rise due to the velocity change are known only for bottom inlet or outlet.

Another problem appears at the upper header, where steam—water mixture arrives and leaves. It is not known with what steam content the mixture arriving with different steam content through the numerous evapotor tubes enters into the various riser tubes, i. e. the amount of mixing is not known.

The resistance of each tube connected to the system is different, and the heat absorption of the various tube groups is also different.

The change of the pressure distribution in the headers can react on the quantities flowing through the different tubes, and in consequence the steam content in the tube changes. The change of the steam content goes together with a change of the buoyancy and of the resistance and reacts on the pressure distribution and consequently on the quantitative distribution.

Last not least, the heat flux distribution per tube cannot be determined even by extensive measurements. The value of the heat absorption reacts on the distribution conditons.

The above problems can be overcome only with certain neglections and assumptions. When elaborating the program for the parallel circuits, the following conditions and assumptions were used:

a) From the tubes serving identical purposes groups can be formed with approximately equal characteristics. This is to be understood as follows:

In a header section consisting of a given number of evaporator tubes, groups consisting of an arbitrary number of tubes can be selected, the heat flux and resistance of which are approximately equal. It is not necessary that these groups should contain an equal numbers of tubes. The same relates to the downcomer tubes too, to the lower header connecting tubes and to the riser tubes.

It is not a condition to divide the connecting tubes, the evaporator tubes and the riser tubes into the same number of groups (e. g., it is possible to form 2 connecting tube groups, 5 evaporator tube and 3 riser tube groups).

Moreover, the division into groups is not a limitation as to the exhaustiveness of the calculation. It is possible to run the program for each tube connected to the header. In such a case each tube forms a separate "group".

b) In the upper header the mixtures with different steam content arriving from the evaporator tubes become mixed so that in the riser tubes the steam content of the entering steam—water mixture is equal.

c) Pressure is constant along the length of the headers. The quantities delivered by each evaporator tube (evaporator tube group) differ from each other only because of different heat absorption and different resistances.

d) For the friction and resistance coefficients, which are basic data, the values given in [1] are valid.

By running the program, the characteristics of the downcomer tube system and the evaporator/riser tube system are calculated for the loops given by their data and heat flux, and that for various velocities; then by addition of their characteristics and by transforming Eq. (1)

$$\Delta p_{dc} = H(\gamma_{dc} - \gamma_{tp}) - \Delta p_{tp} - \Delta p_{HD} \tag{15}$$

the working point is determined, which is the point of intersection of the curves determined by the right and left sides. The point of intersection represents the pressure differential between the lower and the upper header as function of the total water quantity circulating in the parallel tubes. Knowing this, the circulation velocities in the individual tubes are calculated.

4. Examples

4. 1. Effect of separating loop groups

One side wall of a 110/120 t/h, 80 atm oil-fired boiler has been investigated. Owing to their design, the heat absorption, heated length and resist-

ance of the tubes connected to the same heater section were rather different. The characteristics of the 5 groups embracing 39 evaporator tubes calculated with the program presented in the foregoing and the circulation velocities in the groups are shown in Fig. 5. Because of the different heat absorptions and resistances the inequality of the velocities attained was $(0{,}80 - 0{,}45) \cdot 100/0{,}80 = 43{,}5\%$.

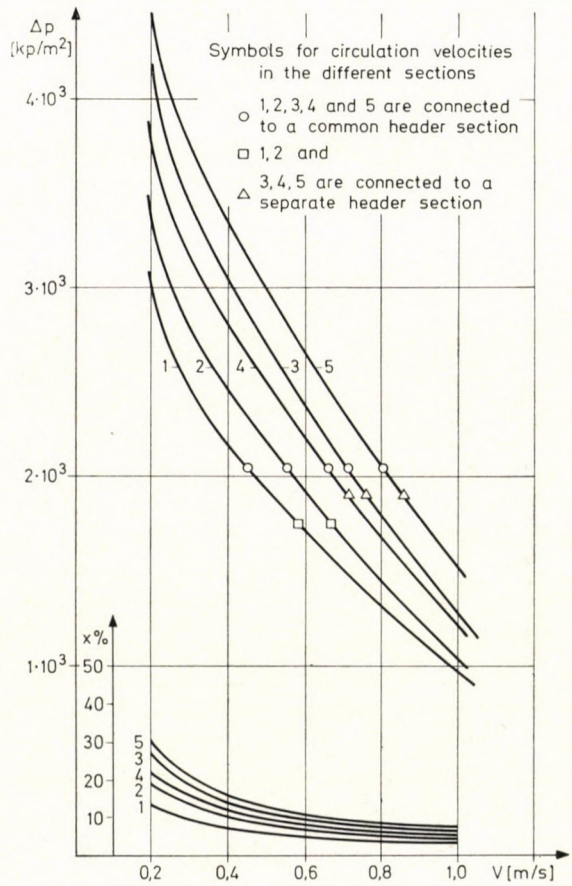


Fig. 5.

Between the tubes connected to the same header there may be large differences of velocities and low absolute values of circulation velocity. Experience proves that this leads to an unstable operating state, a question which will be dealt with in para. 5. By separeting from each other groups 1 and 2 which absorb less heat and groups 3, 4, 5 of higher heat absorption, the circulation velocities become those shown in Fig. 5. In the separate groups 1 and 2 the velocity inequality was 12%, in the groups $3 \div 5$ it was 17%. In

addition to the greatly reduced inequality the advantage is the increase of the circulation velocity.

Separation of the headers has previously been used, but explanation of the favourable effect of this measure is lacking, investigation of the possible variants was impossible because of the long time required for the calculation.

4.2. Comparison of measuring results with the calculated values

In the following the results of measurements on a natural gas-fired boiler of 125 t/h and 125 kg/cm² abs. will be compared to the results of calculations carried out with the known program. The measurements were made by the firm of Biró—Wagner, and checked and evaluated by the Chair of Thermal Power Stations, Budapest Technical University [7].

Circulation measuring points were placed at two of the 24 evaporator tubes connected to the investigated right central header (26r, 36r).

Total circulation was measured on 9 evaporator tubes. Besides the mentioned two measuring points, two were placed on the tube bundle connected to the investigated right extreme header (16r, 22r); on the tube bundle connected to the left centre and extreme headers were also two each (26 l, 36 l; 16 l, 22 l), and finally one measuring point was situated at the bundle connected to the rear header (25r).

Velocity was measured with a Venturi flow-meter. For measuring the heat flux a water-cooled cylindrical probe was used. As the probe senses only the flux at its point of mounting, there are no data available either for the heat flux of the individual tubes, or for its longitudinal distribution. The measured heat flux can be introduced into the calculations as an average characterizing the tubes connected to the headers. Therefore, the heat absorptions of the measured tubes not being known separately, all tubes belonging to one header were included in one group. This was also justified by the location of the examined tubes, they being connected to the right centre header and because of the design no significant differences were probable.

From amongst the measurements made under different operating conditions, sets of data belonging to three loads were chosen for computing:

Load, t/h	59,5	46	30
Pressure, kg/cm² abs.	119,8	100,5	115,6

Fig. 6 shows the calculated characteristics and the working points. The circulation velocities at the three loads are

$$v = 0{,}94,\ 0{,}80,\ 0{,}80 \text{ m/s}.$$

Fig. 7 shows the measured and calculated values. Because of the symmetry of the loops as well as of the heat flux, the calculated values refer to the left

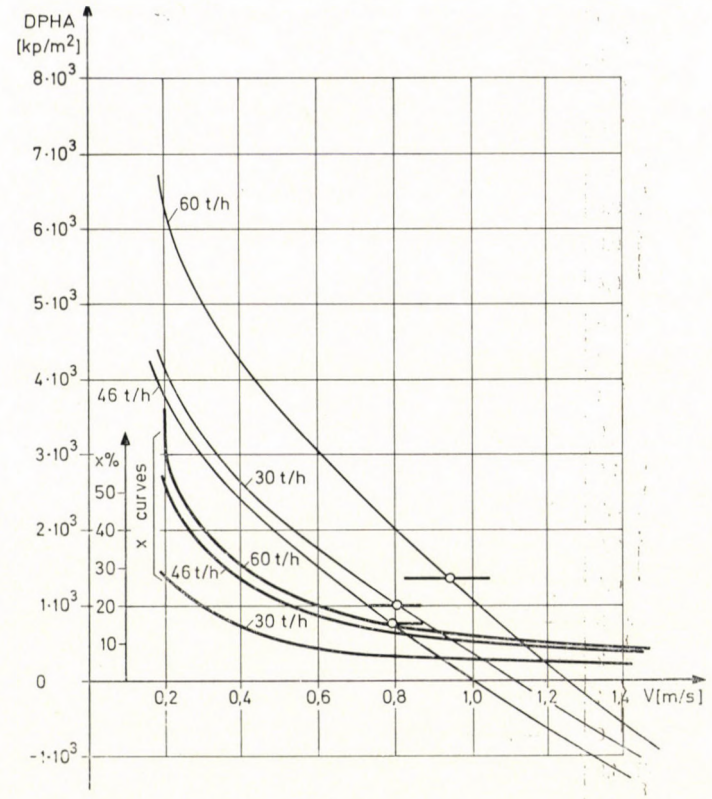


Fig. 6.

as well as to the right side (points 26 l, 36 l, 26r, 36r), but do not refer to the points 16 l, 22 l, 16r, 22r, and 25h. For a full load (59,9 t/h) the velocities at the right points 26r and 36r could not be evaluated because of the unsuitable measuring limit of the signal transformer.

Notwithstanding the errors due to the uncertainties in the assumed values of the loss factors, the calculated and the measured values agree well.

If the heat absorptions of the measured tubes had been available separately, the calculations would have shown the velocity differences between individual tubes.

5. Considerations on the conditions for stable circulation

In addition to the above two examples many other variants were run during the elaboration of the program, in order to obtain information on the influence of the various parameteres. The detailed discussion of these informa-

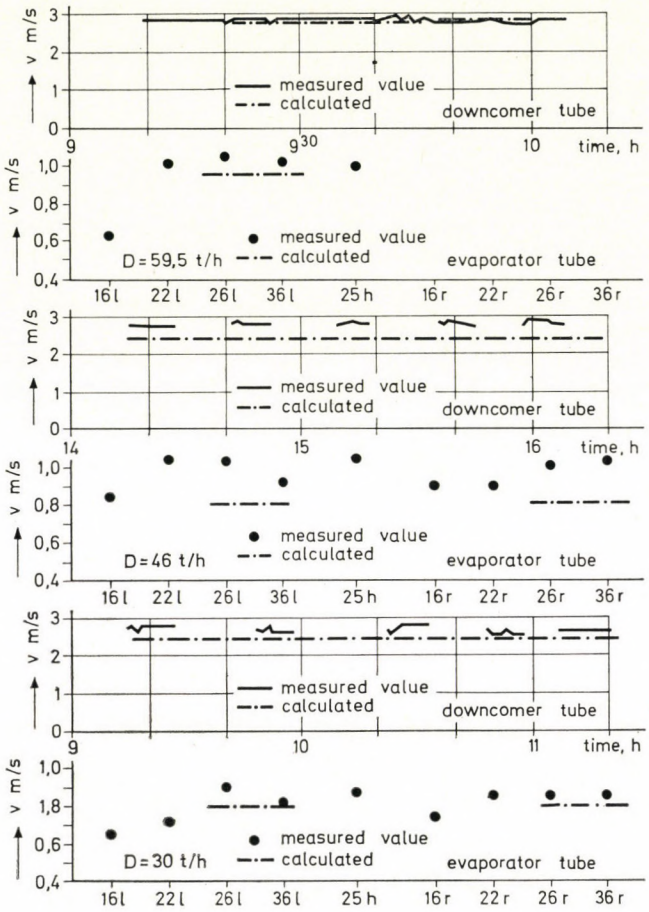


Fig. 7.

tions is omitted, but some consequences based on experince so far obtained and on publications will be drawn. The conclusions can be summarized as follows:

5.1. Practically no difference should exist between the circulation velocities of tubes belonging to the same circulation group.

If this condition is satisfied, the boiler shows a stable behaviour along the whole load range. Variation of load only slightly influences the circulation velocity and the uniformity of velocity distribution almost not at all.

In the instationary state, as long as the buoyancy and the flow losses are not in equilibrium oscillations of the water column, liquid movements due to the volume change are experienced. The movement appears as positive or negative, upwards or downwards apparent movement, but this must not

be mistaken for the real circulation in the equilibrium state. After reaching the equilibrium state, the direction of the flow becomes well-defined, the velocity pattern rapidly settles down. When the load changes the system arrives again at a stable state after a short oscillation and the velocities settle to the values corresponding to the new working point.

5.2. To ensure stable circulation, the circulation velocity should be as high as possible (0,8 ÷ 1,2 m/s at full load). The condition for this is a downcomer tube system of low resistance.

The advantages of high circulation velocity are:

— low specific steam content and therefore a better cooling of the tubes,

— even in case of any disturbance in the system or in individual tubes, the new circulation velocity will probably be higher than with a low basic value. Therefore, development of high steam content detrimental to heat transfer or sudden formation of steam plugs is less probable,

— velocities below the average are still sufficient for adequate cooling,

— also for partial loads a sufficient circulation can be maintained.

5.3. The lower headers should be divided in such a way into sections that the sections unite tube groups working under the same conditions (heat absorption, resistance). By this, great velocity differences between the tubes can be avoided. Each independent loop group has an independent working point. By uniting the loop groups the circulation velocity of the low-velocity loop groups can be increased and the inequality of the veolcities can be considerably reduced.

5.4. Inequality of the velocity distribution and low circulation velocity make uncertain the working of the system. In the low-velocity tubes a high steam content can form locally, which tends to accelerate the outgoing flow. After a certain time the increasing buoyancy due to the increasing steam percentage equilibrates the pressure drop and pushes out the remaining water contents of the tube. But until this occurs the flow may stagnate, a steam plug may develop, local overheating may occur. After pushing out the plug, suddenly cold water flows into the tubes. As a consequence, the velocity in the possibly better heated tubes which have not taken part in the "play" so far, decreases, which leads at the locally better heated places to an intense steam development which does not provide adequate cooling.

The connected loops are subject to complicated, unknown interaction and this interaction is moderated by uniting the loop groups of the same type (cf. 5.3). A good example for this is No. 3 boiler of the Gagarin Power Station [6] where the use of divided headers eliminated the velocity inequalities.

5.5. The criterion of film evaporation does not explain the local overheating, because the decisive parameters do not reach the critical values.

The critical parameters were determined with forced circulation tubes of small diameter, ∅ 10 ÷ 15 mm. It is possible that with the larger diameters

used in boilers only the consequences of the phenomena are the same (overheating) but not their essence. With large diameters, the separation of the steam might be due to the formation of a steam cushion on the heated side of the tube at the maximum heat flux section and behind it on the unheated side water is flowing.

It must be pointed out that for ring-shaped liquid flow with high steam content (outside liquid, inside steam) the sudden deterioration of the heat transfer can arrive at a much lower heat flux than the critical one [4]. But it is not possible to indicate a numerical value, the experimental results being valid only for the investigated geometrical arrangement and the investigated operating conditions.

The investigations on single tubes cannot be considered as being characteristic for a natural-circulation parallel loop system, where the development of the equilibrium state is a complicated function of the steam generation and the interaction of the loops, by intermediary of the buoyancy and the pressure drop.

The phenomena can be elucidated only by an experimental model which simulates the conditions in the parallel loops (inequality of heat flux, different resistances, etc.). To the knowledge of the author, no such investigations have been carried out, yet.

5.6. For the reasons discussed in para. *3.1.* the conventional stability criterion cannot be considered as being authoritative.

On the other hand, an essential condition for securing stability is the fulfilment of the requirements of points *5.1.*, *5.2.* and *5.3.*

5.7. The MULTI-H4 program reflects the flow conditions of the two-phase mixture in good agreement with the measuring results, in spite of the simplifying conditions and the uncertainty of some basic data. With an adequate quantity of heat flux data the circulation velocity could be determined for tube groups or even for each individual tube, and the velocities and the inequality of their distribution could be checked.

*

The method of investigation discussed in the present paper has been elaborated within the frame of the "Project" Digital Model of Energy Producing Units ordered by the Hungarian Electricity Works. Team leader of the project covering several tasks and worked out by teams was Dr. T. ZETTNER, Production manager of the HEW.

REFERENCES

1. CKTI Publication: Directives for the Calculation of the Water Circulation of Steam Boilers. Moscow, 1950 (In Russian)
2. TAUBNER—CZOCH: Checking of the Circulation Circuits in Boilers. Draft rules AEF, Department of Technical Development, Budapest 1971 (In Hungarian)
3. MARTINELLI, C.—NELSON, D. B.: Prediction of Pressure Drop During Forced Circulation Boiling of Water. *Transactions ASME* **79,** Aug. 1948

4. Tong, L. S.: Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow. J. Wiley and Sons, New York 1967
5. Taubner—Szauter: Final Report on the Heat Flux and Tube Wall Temperature Measurements on the Steam Boilers of the Szolnok Sugar Factory. Report No. KA 72, 1968 (In Hungarian)
6. Taubner—Szauter: Final Report on the Measurement of Evaporator Tube Wall Temperature, Circulation Velocity and Local Heat Flux on the Boiler of No. 3 Block in the Gagarin Thermal Power Station. VEIKI, Budapest, Report No. HTF 60 (In Hungarian)
7. Rádonyi, L.: Circulation and Heat Flux Investigations on the Boiler No. 2 of the Csepel Paper Works. Chair of Thermal Power Stations, Budapest Technical University, 1970, October

Untersuchung der Strömungsverhältnisse in den parallel geschalteten Siederohren von Dampfkesseln. Die Ergebnisse der Untersuchung der Faktoren, welche die Strömungsverhältnisse in einzelnen Schleifen beeinflussen, sind für parallel geschaltete Schleifen nicht maßgebend. Die für Digitalrechner ausgearbeitete Methode gestattet — unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen — die Untersuchung einer beliebigen Zahl von parallelen Schleifen. Der Vergleich der rechnerischen und der Meßergebnisse weist auf die Faktoren hin, welche die Stabilität entscheidend beeinflussen.

Исследование условий движения потока в параллельно соединенных кипятильных трубас паровых котлов. Результаты исследования факторов, воздействующих на условия движения потока индивидуальных петел, не являются действительными для соединенных параллельно петел. Разработанная для вычислительной шамины методика позволяет производит анализ произвольного числа соединенных параллельно петел при использовании определенных упрощающих условий. Сравнение результатов расчетов и измерений показывает факторы, реш2ющим образом воздействующие на стабильность.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 155—160 (1975)

DETERMINATION OF THE ATMOSPHERIC RADIOACTIVITY BY MEASURING THE RADIOACTIVITY OF AEROSOL SPECIMENS

E. VIRÁGH,* and S. SEREGE**

[Manuscript received February 15, 1975]

On the site of the Budapest Technical University a 10 kW experimental reactor was put into operation in May, 1971. Although the location and the destination of the reactor (instruction), and the safety of the surroundings lead to the adoption of stringent technical specifications, a regular survey was also carried out in the surroundings of the reactor. In the present paper the methods for checking the radioactivity of the air are discussed and the results of measurements obtained so far will be summarized.

1. Origin of the atmospheric radioactivity

In the air occur both natural and artificial radioactive substances and their major part adhers to the airborne aerosols. The natural radioactive pollution of the atmosphere nearly exclusively derives from the decay products of radon and of toron. The specific activity of the radon concentration in free air is of the order of 0,1 pCi lit., and that of the toron is smaller by about one and a half orders of magnitude.

Since the discovery of nuclear fission, artificial radioactive matter has polluted the atmosphere mainly as a consequence of atmospheric nuclear experiments. To a limited extent, reactor accidents, nuclear disasters, have caused this effect as well, but their extent was limited to small areas and they are negligible from the point of view of radioactive atmospheric pollution.

As a consequence of the physical process of nuclear fission, e. g. in case of explosion, even of a medium-size atomic bomb in the atmosphere, a large quantity of dust containing numerous radioactive isotopes gets into the air and spreads throughout the atmosphere of the globe. Amongst these radioactive isotopes first of all ^{90}Sr and ^{137}Cs are the most dangerous because of their malignant biological effects and their half-period of decadic order of magnitude.

When siting reactors, measuring the radioactivity of the surroundings must start at least one year before the beginning of the operation, in order to

* E. VIRÁGH, Radna u. 5., 1026 Budapest, Hungary
** S. SEREGE, Család u. 45., 1039 Budapest, Hungary

obtain the "zero level". Knowing this, it can be decided later what is the origin of the specific radioactivities measured during the operation of the reactor.

In the surroundings of the Budapest Technical University's reactor, measurements are taken regularly since October, 1969. Until April, 1971 this work had been done in collaboration with the Research Institute for Electrical Energy (VEIKI) and since that time the Atomic Reactor Radiation Protection Group of BTU pursues the necessary activities. An organic part of the measurements program is the regular checking of the atmospheric radioactivity.

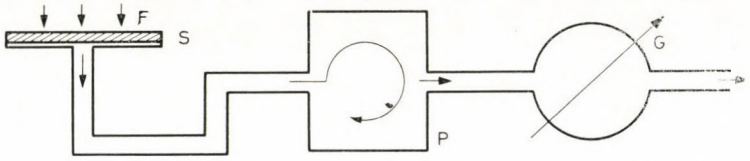


Fig. 1. Sketch of intermittent aerosol sampling device

2. Measuring method

The measuring methods used for environmental checking, thus also the determination of atmospheric radioactivity, involve 3 principal steps:

1. sampling,
2. preparation of the samples,
3. measuring the activity of the prepared sample, and evaluation.

In the following the authors will describe the simple method which is used for determining the specific total beta-activity of the isotopes with long half-period present in the air.

3. Sampling

For measuring the radioactivity of the surroundings, a small measuring station was built at about 150÷ 200 m from the reactor building. Here the aerosol sampling device (Fig. 1) is placed. The aerosol filter F is placed in the sampling head S, for filtering the Soviet-made, type FPP-15 filter material is being used. At the beginning, the type AUFS membrane filter was being used, but because of its large air resistance the sampling pump P was subject to frequent defects, also for equal sampling times a lesser volume of air could be siphoned out. FPP-15 is a cotton wool-like matter placed between two thin gauzes, which not only provides nearly 100% filtering, but also has a smaller air resistance. This permitted 4 ÷ 5 times more air to pass during the same time through the filter.

After the sampling pump P the volume of the siphoned-out air was measured with the gas volume meter G.

The filter was changed three times a week (Monday, Wednesday, Friday), thus, during the first half of the week samples were taken every two days, during the second half every three days.

4. Preparation of the sample

The FPP-15 filter material has the agreeable property of being excellently soluble in acetone. After removing the covering layers (gauze), the exposed filter was carefully folded, placed in a 20 mm dia. aluminium cup and uniformly distributed within the cup with the aid of acetone. After a few hours (after the evaporation of the acetone) a homogeneous and durable sample was obtained. The aerosols remaining in the covering layers were losses, but they remained within 5%, so they had no influence on the measuring result.

5. Activity measurement

The radioactivity of the sample was measured 4 days after the preparation of the sample had been completed. During this time the radioactivity due to the radon and toron decay products in the air becomes negligible, hence, knowing the measured total beta activity and the siphoned-out air volume, the specific beta activity for the sampling time was determined.

For measuring the activity a GM-tube with window thickness of 1,5 mg/cm^2 was used, placed in a 5 cm thick lead shield. The counting tube was connected to a NK-108 type decadic pulse counter.

The instruments were calibrated with a natural potassium compound KCl. It is known that every gram of natural potassium contains 0,000118 g of ^{40}K isotope, which emits 1680 beta particles of 1,35 MeV end-point-energy per minute. It is to be noted that 1,91 KCl contains 1 g of K.

The efficiency of the detection is basically determined by four factors: the detection probability of the detector, the geometrical factor, the absorption factor and the back-scattering factor. For calibration, KCl standars of various thicknesses were made in the aluminium cups used for preparing the samples. Due to the constant geometrical configuration, the geometrical coefficient was constant, and because of always using identical cups, the back-scattering factor was also constant, and so was the operating probability of the detection, hence the efficiency of the detection was influenced only by the self-absorption of the KCl in the cups. Considering these circumstances, the efficiency of the detection was determined as a function of the layer thickness of the KCl.

When using this calibrating method, the results of activity measurement refer to the beta radiation of ^{40}K with 1,35 MeV end-point-energy, such a

method of definition being frequently used in environmental measurements. In another paper the authors have dealt in detail with the problem of calibration [1].

6. The limits of detection

When measuring samples of small specific activity, the quality of the measuring apparatus is of decisive importance: with a high background it is impossible to measure small activities.

The lowest counting speed which could be realized, i.e. the value which was provided by the sample with a certain probability, could be calculated from the following relation [2]:

$$n_{\min} = \frac{K^2}{T}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4n_H}{K^2}T}\right). \tag{23}$$

The value of K depends on the chosen confidence interval, its value appears in Table I. If e.g. 99% confidence limit is considered ($K = 2{,}576$), then from (23)

$$n_{\min} = \frac{6{,}635}{T}(1 + \sqrt{1 + 0{,}603 n_H T}) \tag{24}$$

is obtained in both equations that the notations signify:

$n_{\min}$ the smallest counting speed which can be indicated (imp/min).
T sum of the measuring times of the sample and of the background (min).
n_H counting speed of the background (imp/min).

In the present case the measuring times of the sample and of the background are 50 min each, hence $T = 100$ min, the average background counting speed is $n_H = 6$ imp/min. Considering a confidence limit of 99%, from Eq. (24) $n_{\min} = 1{,}32$ imp/min. Taking into consideration the efficiency of the activity-detecting apparatus, the average thickness of the sample after dissolution in acetone and the mean volume of the inhausted air, with the given measuring method the smallest traceable specific activity is 0,02 pCi/m^3 = $= 2 \cdot 10^{-14}$ μCi/ml.

7. Measurement results, discussion

The monthly average of the atmospheric aerosol activity measured with the above method from 1969, October, until 1971, December, is summarized in Table I. For the sake of clarity this is shown in Fig. 2 too.

Fig. 2 shows that, in general, the specific activities are higher during the summer months than in late autumn and in winter. This can be explained by the mechanism of the generation of the radioactive aerosols in military nuclear experiments and the laws of their spreading in the atmosphere [3].

Table I

Time	Specific activity $\frac{pCi}{m_3}$ Monthly average	Monthly max.	Monthly min.
1969 October	0,22		
November	0,09		
December	0,13		
1970 Januar	N.T.		
Februar	N.T.		
March	0,20		
April	N.T.		
May	0,24		
June	N.T.		
July	N.T.		
August	N.T.		
September	0,24		
October	0,34		
November	0,13		
December	0,09		
1971 Januar	0,24		
Februar	0,03		
March	0,25		
April	0,23	0,58	0,05
May	0,40	0,59	0,14
June	0,26	0,38	0,15
July	0,27	0,57	0,12
August	0,27	0,52	0,06
September	0,09	0,12	0,02
October	0,08	0,18	0,03
November	0,10	0,19	N.T.
December	0,03	0,10	0,05
1972 Januar	0,04	0,09	0,02
Februar	0,05	0,12	0,02
March	0,06	0,14	0,02
April	0,05	0,11	0,02
May	0,05	0,16	N.T.
June	0,07	0,14	N.T.
July	0,18	0,45	0,04
August	0,05	0,14	N.T.
September	0,06	0,26	N.T.
October	0,02	0,08	N.T.
November	N.T.	0,04	N.T.
December	0,05	0,10	N.T.
1973 Januar	0,07	0,20	N.T.
Februar	0,03	0,08	N.T.
March	0,04	0,14	N.T.
April	0.03	0,13	N.T.
May	0,04	0,08	N.T.
June			

N.T. — Not traceable

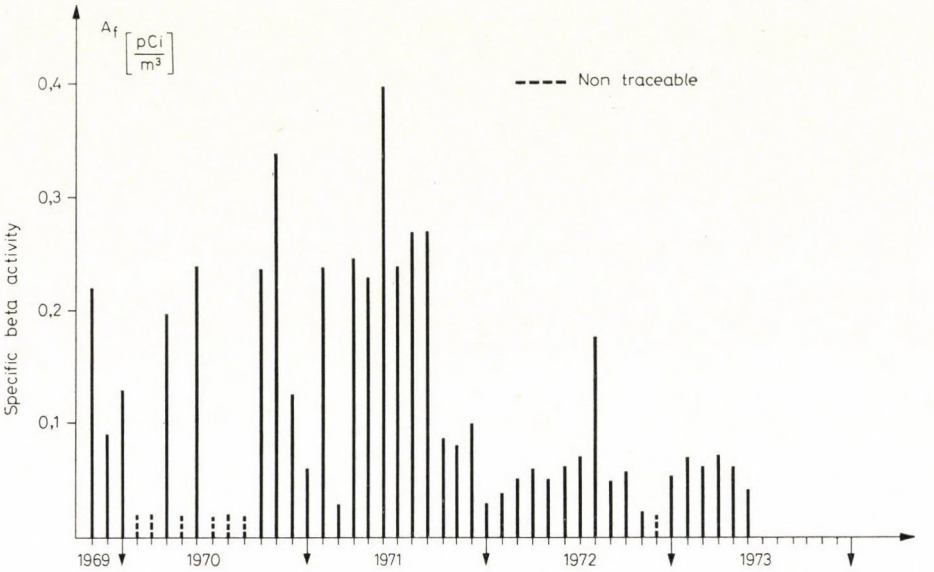


Fig. 2.

It has already been mentioned that the atomic reactor of the Technical University became critical in May, 1971. Until the end of that year it was used for experimental measures (Measuring flux distribution, irradiation, etc.). From October, 1971 it operates with a higher power (10 kW). It must be mentioned that within the reactor building a separate air control system prevents radioactive matter from reaching the enviroment. So obviously no radioactive matter whatsoever can escape into the environment. The investigations carried out so far have confirmed this to the utmost. But the reactor being situated in inhabited surroundings, in the center of the town, the radioactivity of the surroundings is kept under observation, notwithstanding that maximum safety measures have been taken.

Bestimmung der atmosphärischen Radioaktivität durch Messung der Radioaktivität von Aerosolmustern. Auf dem Gelände der Technischen Universität Budapest wurde im Mai 1971 ein Experimental-Reaktor mit 10 kW Leistung in Betrieb gesetzt. Obwohl die Lage und die Bestimmung des Reaktors (Unterricht) zur Anwendung von strengen technischen Vorschriften führten, wurde auch in der Umgebung des Reaktors eine regelmäßige Überwachung durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden die Methoden für die Kontrolle der atmosphärischen Radioaktivität vorgestellt und die bisher erhaltenen Meßergebnisse zusammengefaßt.

Определение радиоактивности воздуха на основе измерения радиоактивности аэрозольных проб. Как известно, на территории Будапештского политехнического института в мае месяце 1971 г. пущен экспериментальный атомный реактор мощностью 10 кВт. Несмотря на то, что место установки, назначение (обучение) реактора, безопасность окружения требования вдовлетворения строгим техническим нормам, производится систематический контроль также в окружении реактора. В дальнейшем излагается метод, используемый для контроля радиоактивности воздуха, а атюже дается обобщение достигнутых до сих пор результатов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 161—179 (1975)

DIE THEORETISCHE BESTIMMUNG DER SCHNITTKRAFT BEIM DREHEN

L. KAZINCZY*
KAND. DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 2. Mai 1974]

Dieser Beitrag befaßt sich mit den Grundlagen der Berechnung der Schnittkraft und deren Komponenten beim Drehen von Stahl mit Hartmetallwerkzeugen. Die theoretisch ermittelten Werte der Hauptschnittkraft stimmen mit den mit Schnittkraftmesser gemessenen Ergebnissen praktisch gut überein.

1. Einleitung

Zur Bestimmung der Abmessungen der Werkzeugmaschinen, der Werkzeuge und Vorrichtungen benötigt man auch die Schnittkraft, die durch Meßergebnisse oder durch empirische und theoretische Formeln bestimmt werden kann.

Die Schnittkraft beeinflüssen in erster Linie die physikalischen und mechanischen Eigenschaften des Werkstoffes, die Schneidkeilgeometrie des Werkzeuges, die Reibung zwischen Span und Werkzeug, die Formänderungen vor der Schneide und die Wärmeverhältnisse in der Spanwurzel. Die erwähnten Einflüsse wirken auf die Größe der Schnittkraft verschiedentlich und verursachen dadurch eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung.

Die Zerspanungstheorie arbeitet mit zwei Modellen:

1. die Spanbildung im *freien Schnitt* und
2. die Spanbildung im *gebundenen Schnitt.*

Im ersten Fall ist die Hauptschneide des Werkzeuges in beiden Richtungen länger als die Spanbreite und die Schnittgeschwindigkeit längst der Schneide konstant (Bild 1). In der Praxis ist das zweite Modell, der gebundene Schnitt, üblich, bei welchem die Hauptschneide nur in einer Richtung frei ist (Bild 2). Den gebundenen Schnitt kennzeichnet ein dreiachsiger Spannungszustand, der nur näherungsweise durch den ebenen Deformationszustand des freien Schnittes ersetzt werden kann.

Bei der Zerspanung wirkt die Schnittkraft F auf das Werkzeug. In gegengesetzter Richtung wirkt die Reaktionskraft F_r der Schnittkraft F auf das Werkstück (Bild 3a, Bild 3b).

* Prof. Dr.-Ing. L. KAZINCZY, Mányoki ut 24, 1118 Budapest, Ungarn

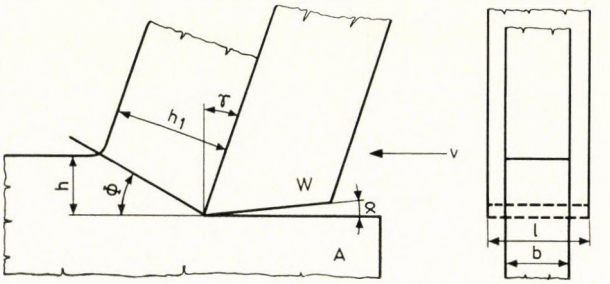


Bild 1. Freier Schnitt. A — Werkstück, W — Werkzeug, α — Freiwinkel, γ — Spanwinkel, beide in Grad, v — Schnittgeschwindigkeit in m/min, b — Breite des Werkstückes in mm, h — Spanungsdicke in mm, h_1 — Spandicke in mm, l — Länge der Schneide in mm, Φ — Scherwinkel in Grad

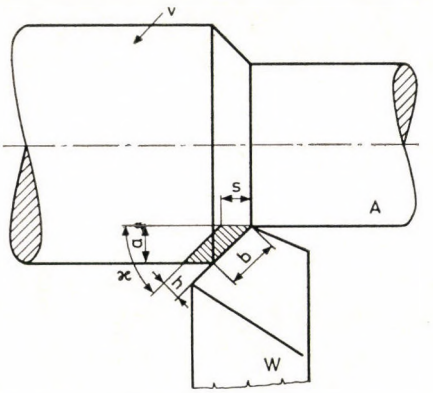


Bild 2. Gebundener Schnitt. A — Werkstück, W — Werkzeug, $\varkappa$ — Einstellwinkel in Grad, v — Schnittgeschwindigkeit in m/min, s — Vorschub in mm/U, a — Schnittiefe in mm, h — Spanungsdicke in mm, b — Spanungsbreite in mm

Beim freien Schnitt ist die Bestimmung der Schnittkraft ein ebenes Problem. In diesem Fall rechnet man nur mit zwei Komponenten, u.zw. mit der Hauptschnittkraft F_H und mit der Vorschubkraft F_V. Beim gebundenen Schnitt, wie zum Beispiel beim Drehen, hat man es mit einen dreiachsigen Spannungszustand zu tun (Bild 4). Infolgedessen gilt für den freien Schnitt

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad \text{bzw.} \quad F_r = \sqrt{F_{rH}^2 + F_{rV}^2},$$

und den gebundenen Schnitt

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2 + F_R^2} \quad \text{bzw.} \quad F_r = \sqrt{F_{rH}^2 + F_{rV}^2 + F_{rR}^2}.$$

Im zweitem Fall wird neben der Hauptschnittkraft F_H und der Vorschubkraft F_V auch die Rückkraft F_R in Betracht gezogen.

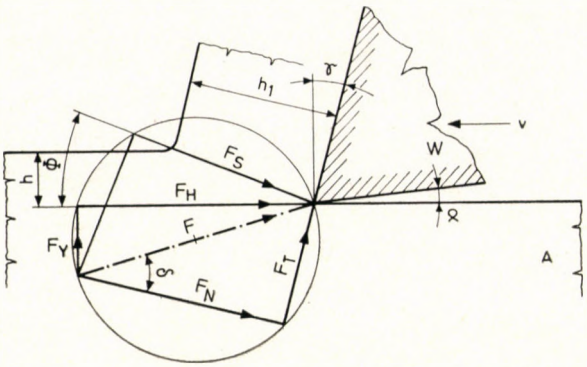


Bild 3/a. Die resultierende Schnittkraft F und deren Komponenten beim freien Schnitt. A — Werkstück, W — Werkzeug, F — resultierende Schnittkraft in kp, F_H — Hauptschnittkraft in kp, F_V — Vorschubkraft in kp, F_S — Scherkraft in kp, F_N — Normalkraft auf der Spanfläche in kp, F_T — Tangentialkraft in der Spanfläche in kp, v — Schnittgeschwindigkeit in m/min, h — Spanungsdicke in mm, h_1 — Spandicke in mm, α — Freiwinkel, γ — Spanwinkel, beide in Grad, Φ — Scherwinkel in Grad

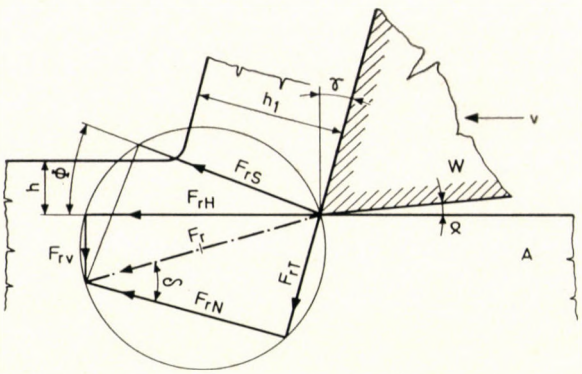


Bild 3/b. Reaktion der resultierenden Schnittkraft F beim freien Schnitt. F_r — Reaktion der resultierenden Schnittkraft F. Sonstige Bezeichnungen und Benennungen wie im Bilde 3/a

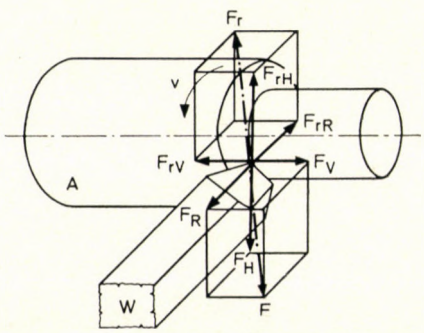


Bild 4. Darstellung der resultierenden Schnittkraft F und deren Reaktionskraft F_r samt Komponenten beim gebundenen Schnitt. A — Werkstück, W — Werkzeug. Die Komponenten der Schnittkraft F sind: F_H — Hauptschnittkraft, F_V — Vorschubkraft, F_R — Rückkraft. F_{rH}, F_{rV} und F_{rR} sind die entsprechenden Komponenten der Reaktionskraft F_r. Sämtliche Kräfte in kp gemessen

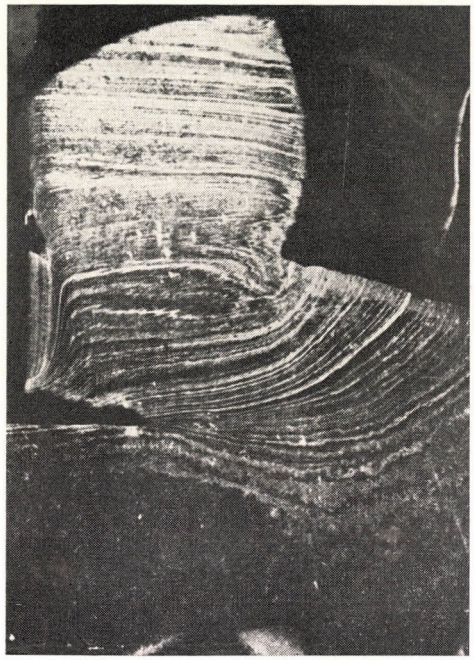


Bild 5. Die Formänderungen der Spanwurzel in der Anwesenheit der Aufbauschneide

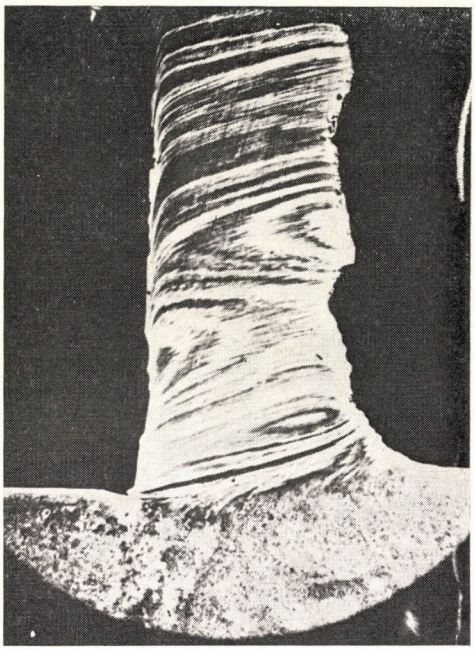


Bild 6. Die Formänderungen beim Fließspan in der Spanwurzel

Zur Bestimmung der Schnittkraft benützt man empirische und theoretische Formeln. In beiden Fällen werden — zwecks Kontrolle — die errechneten Werte mit den mit Schnittkraftmesser ermittelten Kräften verglichen.

Seit TAYLOR wurden mehrere empirische und theoretische Schnittkraftberechnungsformeln aufgestellt. Dieser Aufsatz befaßt sich nur mit der theoretischen Berechnungsmethode des Verfassers.

2. Grundlagen der theoretischen Berechnung der Schnittkraft

2.1. Formänderungen in der Spanwurzel

Bei der Zerspanung eines Stahles von gegebener Zusammensetzung und bestimmten Gefüge können die Formänderungen der Spanwurzel nur im Fließspanbereich ohne Aufbauschneide als stabile Erscheinungen betrachtet werden [1]. Bei kleinen Schnittgeschwindigkeiten ändert sich die Schnittkraft wegen der Aufbauschneide ständig. Daher ist die genaueste theoretische Berechnung der Schnittkraft nur im Fließspanbereich möglich (Bild 5, Bild 6).

Zur Bestimmung der Formänderungen der Spanwurzel werden folgende Begriffe eingeführt. Jene Ebene, die die Hauptschneide des Werkzeuges enthält und auf welcher die Spanelemente sich vom Werkstück entfernen, ist die *Scherebene* (*Se*). Die in der Mitte der Spanbreite auf die Hauptschneide des Werkzeuges senkrecht gestellte Ebene, die gleichzeitig auch auf die Scherebene senkrecht ist, bildet mit der Scherebene die *Scherlinie* (*Sl*), die mit der Schnittfläche des Werkstückes *den Scherwinkel* Φ bildet (Bild 7).

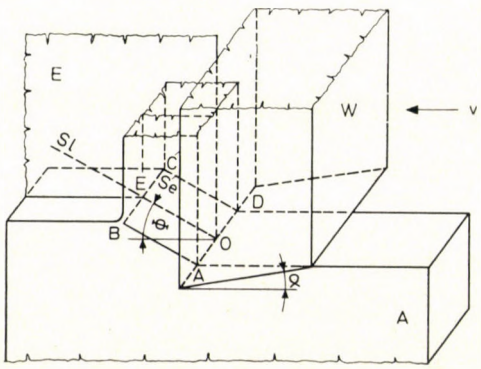


Bild 7. Die geometrischen Kennzeichen der Formänderung der Spanwurzel. *Se* — Scherebene, *Sl* — Scherlinie, Φ — Scherwinkel, *E* — auf die Hauptschneide und gleichzeitig auf die Scherebene senkrechte Ebene, *A* — Werkstück, *W* — Werkzeug

Der abgenommene Span weist in der Mitte der Spanbreite die größte Dicke auf. Daraus folgt, daß an dieser Stelle:

1. die spezifische Schnittkraft am größten ist und, daß,
2. in der Mitte der Spanbreite der Scherwinkel den kleinsten Wert aufweist. Demnach hat man also eigentlich nicht mit einer Scherebene, sondern mit einer Scherfläche zu tun.

2.2. Die Ermittlung der beim Zerspanen auftretenden Spannungen

Nach der Spannungstheorie von MOHR [2, 3] wird in einem durch Druck- oder Zugkraft belasteten prismenförmigen Stab die Schubspannung τ in jener Schnittfläche am größten sein, deren Senkrechte n mit der Richtung der Kraft F einen Winkel von $\varphi = \pi/4$ bildet. In diesem Fall ist $\tau = 0{,}50\sigma$. Hier ist $\sigma = F/A$ [kp/mm²] die Normalspannung und A [mm²] die durch Zug oder Druckkraft F belastate Fläche (Bild 8). Nach dieser Theorie bildet also bei der Zerspanung die Senkrechte der Scherlinie mit der resultierenden Schnittkraft einen Winkel von 45°, da die Schubspannung in der Scherebene den maximalen Wert aufweist. Infolgedessen neigt sich die resultierende Schnittkraft ebenfalls unter einem Winkel von 45° zur Scherlinie.

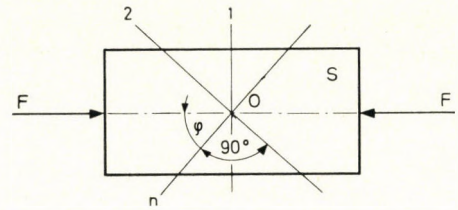


Bild 8. Die Wirkung der Normalkraft F auf den prismenförmigen Stab S. 1 und 2 sind Schnittflächen, n ist die Normale der Schnittfläche 2, φ ist der Winkel zwischen der Kraft F und der Normale n

Die Werte der Schubspannungen des durch Druck- oder Zugkraft belasteten prismenförmigen Stabes enthält Tafel I.

Wenn die Normalspannung den Wert $\sigma_B = F/A$ erreicht, wird $\tau = 0{,}50\,\sigma_B$. Es ist aber fraglich, ob in diesem Fall die Schubspannung zur Abtrennung der Spanelemente entlang der Scherebene genügt, das heißt, ob $\tau = 0{,}50\,\sigma_B$ den Wert der Schubfestigkeit τ_B erreicht. Nach H. HUCKS [4] ist bei der Zerspanung die Schubfestigkeit $\tau_B = \sigma_B$.

Tafel I

Normal- und Schubspannungen in den Schnittflächen des prismenförmigen Stabes

φ	$\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi$	$\tau\varphi = 0{,}5\ \sigma \sin 2\ \varphi$	Bemerkung
$\varphi = 0°$	$\sigma_\varphi = \dfrac{F}{A} = \sigma$	$\tau_\varphi = 0$	—
$0° < \varphi < \pi/4$	σ_φ	τ_φ	Die Werte von σ_φ und τ_φ können mit den oben angegebenen Formeln berechnet werden.
$\varphi = \pi/4 = 45°$	$\sigma_\varphi = \sigma/2$	$\tau_\varphi = \sigma/2$	Die Schub- und Normalspannungen sind gleich.
$\pi/2 > \varphi > \pi/4$	σ_φ	τ_φ	Die Werte von σ_φ und τ_φ können mit den oben angegebenen Formeln berechnet werden.
$\varphi = \pi/2$	$\sigma_\varphi = 0$	$\tau_\varphi = 0$	Im Längsschnitt ist die Schub- und Normalspannung gleich Null.

φ — der Winkel zwischen der Normale des Schnittes und der Richtung der Beanspruchung F in Grad.

$\sigma = F/A$ ist die auf die Endflächen des prismenförmigen Stabes wirkende Normalspannung, in kp/mm².

σ_φ — die Normalspannung in der Schnittfläche des prismenförmigen Stabes in der Richtung φ, in kp/mm².

τ_φ — die Schubspannung in der Schnittfläche in der Richtung φ, in kp/mm².

Der Wert der Schubfestigkeit τ_E wird auf Grund der durchgeführten Zerspanungsversuche im Abschnitt 4 noch näher untersucht.

Aus den vorangehenden Erwägungen — in bezug auf die Berechnung der Schnittkraft — ist jene Feststellung wichtig, daß die resultierende Schnittkraft mit der Scherlinie einen Winkel von 45° bildet. Die Lage der resultierenden Schnittkraft kann also — wenn vorher die Lage der Scherlinie schon bekannt war — bestimmt werden.

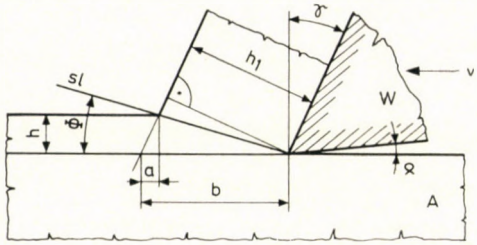


Bild 9. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$ ist. A — Werkstück, W — Werkzeug

2.3. Die Bestimmung der Scherlinie

Die Lage der Scherlinie wird mit dem Scherwinkel Φ bestimmt, der mit Hilfe der Spanungsdicke h, der Spandicke h_1, des Spanwinkels γ, und des Einstellwinkels $\varkappa$ der Hauptschneide — auf Grund der geometrischen Beziehungen – berechnet werden kann, vorausgesetzt, daß die Zerspanung im Fließspanbereich ohne Aufbauschneide stattfindet.

2.3.1. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$. Auf Grund des Bildes 9 ist:

$$\tan \Phi = \frac{h}{b - a}, \quad a = h \tan \gamma, \quad b = \frac{h_1}{\cos \gamma},$$

daher ist

$$\tan \Phi = \frac{h \cos \gamma}{h_1 - h \sin \gamma},$$

und damit

$$\Phi = \arctan \frac{h \cos \gamma}{h_1 - h \sin \gamma}.$$

2.3.2. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma = 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$ Gemäß Bild 10 ist

$$\tan \Phi = \frac{h}{h_1}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{h}{h_1}.$$

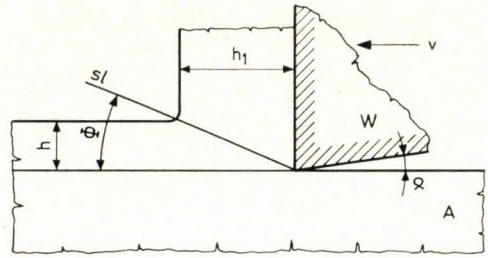


Bild 10. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma = 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$. A — Werkstück, W — Werkzeug

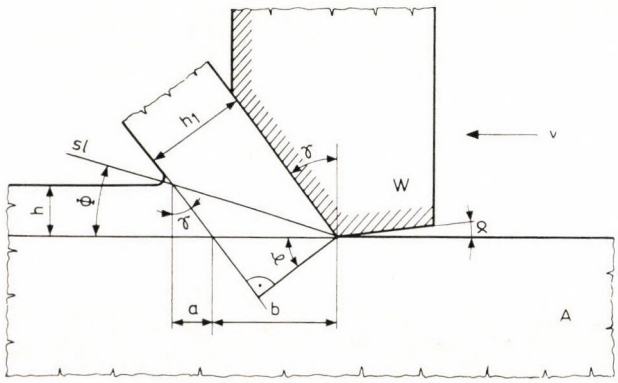


Bild 11. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma < 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$. A — Werkstück, W — Werkzeug

2.3.3. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma < 0°$, $\varkappa = 90°$ und $\lambda = 0°$. Laut Bild 11 ist

$$\tan \Phi = \frac{h}{b + a} = \frac{h \cos \gamma}{h_1 + h \sin \gamma}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{h \cos \gamma}{h_1 + h \sin \gamma}.$$

2.3.4. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$ *und* $\lambda = 0°$. Auf Grund des Bildes 12 ist:

$$\tan \Phi = \frac{h}{b - a},$$

$$a = h \tan \gamma, \quad b = \frac{h_1}{\cos \gamma}$$

und daher ist

$$\tan \Phi = \frac{h \cos \gamma}{h_1 - h \sin \gamma},$$

$$\Phi = \arctan \frac{h \cos \gamma}{h_1 - h \sin \gamma}.$$

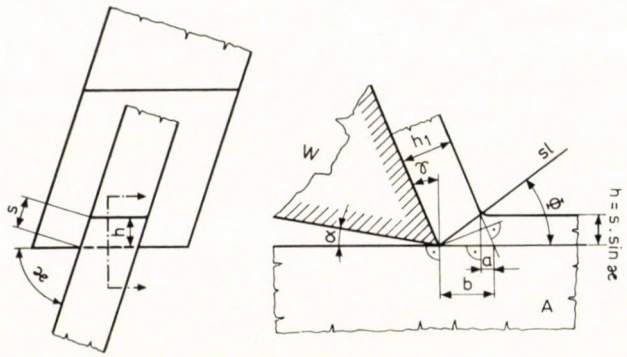


Bild 12. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$ und $\lambda = 0°$. A — Werkstück, W — Werkzeug

2.3.5. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma = 0°$, $\varkappa < 90°$ und $\lambda = 0°$. Aufgrund der Berechnung unter Punkt 2.3.4. ist in diesem Falle:

$$\tan \Phi = \frac{h}{h_1}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{h}{h_1}.$$

2.3.6. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im freien Schnitt, wenn $\gamma < 0°$ $\varkappa < 90°$ und $\lambda = 0°$. Unter Berücksichtigung der Berechnungen unter den Punkten 2.3.3. und 2.3.4. ist in diesem Fall:

$$\tan \Phi = \frac{h \cos \gamma}{h_1 + h \sin \gamma}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{h \cos \gamma}{h_1 + h \sin \gamma}.$$

Im Falle 2.3.4., 2.3.5. und 2.3.6. ist $h = s \sin \varkappa$, wo s der Vorschub ist [mm/DH oder mm/U].

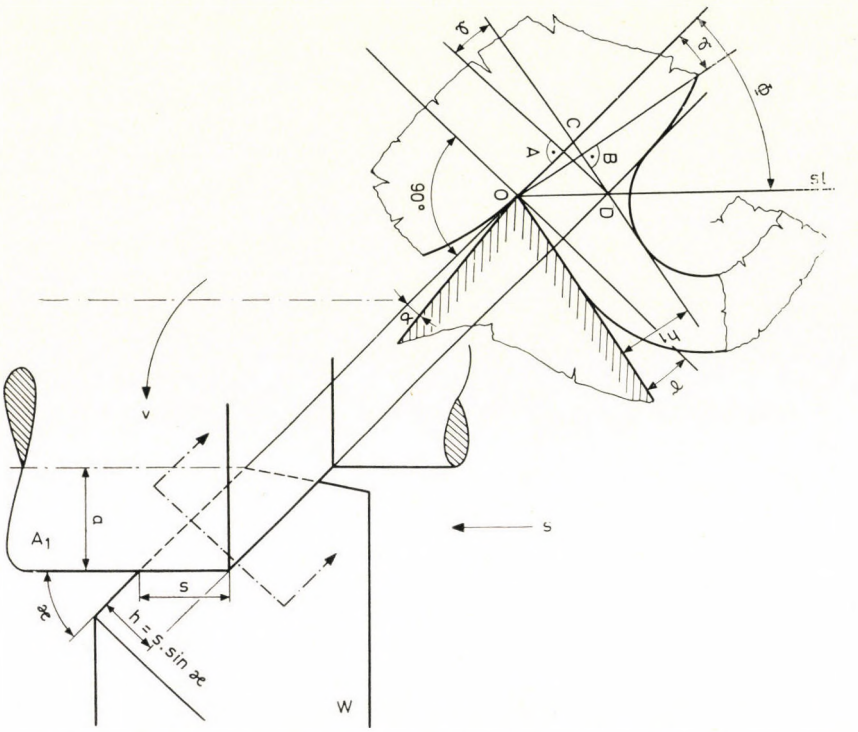


Bild 13. Die Bestimmung des Scherwinkels Φ im gebundenen Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$ und $\lambda = 0°$ ist. A — Werkstück, W — Werkzeug

2.3.7. Die Berechnung des Scherwinkels Φ im gebundenen Schnitt, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$, $\lambda = 0°$. Gemäß Bild 13 ist:

$$\tan \Phi = \frac{AD}{AO} = \frac{AD}{CO - AC} = \frac{s \sin \varkappa \cos \gamma}{h_1 - s \sin \varkappa \sin \gamma}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{s \sin \varkappa \cos \gamma}{h_1 - s \sin \varkappa \sin \gamma}.$$

2.3.8. Die Berechnung des Scherwinkels Φ im gebundenen Schnitt, wenn $\gamma = 0°$, $\varkappa < 90°$ *und* $\lambda = 0°$. In diesem Fall ist gemäß der Berechnung unter Punkt 2.3.7.

$$\tan \Phi = \frac{s \cdot \sin \varkappa}{h_1}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{s \cdot \sin \varkappa}{h_1}.$$

2.3.9. Die Berechnung des Scherwinkels Φ im gebundenen Schnitt, wenn $\gamma < 0°$, $\varkappa < 90°$ *und* $\lambda = 0°$. Unter Berüchsicktigung der Berechnung unter Punkt 2.3.6. ist in diesem Fall:

$$\tan \Phi = \frac{s \sin \varkappa \cdot \cos \gamma}{h_1 + s \sin \varkappa \sin \gamma}$$

und

$$\Phi = \arctan \frac{s \sin \varkappa \cos \gamma}{h_1 + s \sin \varkappa \sin \gamma} .$$

Im Fall von *2.3.7.*, *2.3.8.* und *2.3.9.* ist s der Vorschub [mm/U].

Gemäß der vorherigen Berechnungen gilt für die Bestimmung des Scherwinkels Φ die allgemeine Formel

$$\Phi = \arctan \frac{s \sin \varkappa \cdot \cos \gamma}{h_1 \pm s \sin \varkappa \cdot \sin \gamma} .$$

Diese Gleichung kann sinngemäß sowohl für den freien, als auch für den gebundenen Schnitt verwendet werden. Im Nenner gilt das negative Vorzeichen für den poisitiven Wert von γ, und das positive Vorzeichen für den negativen Wert von γ. Der Neigungswinkel λ hat infolge seines kleinen Wertes auf den Scherwinkel keinen besonderen Einfluß. Die Wirkung des Freiwinkels α kann praktisch ebenfalls vernachlässigt werden.

3. Die theoretische Berechnung der resultierenden Schnittkraft und deren Komponenten

Das folgende Rechnungsverfahren kann sowohl für den freien als auch für den gebundenen Schnitt verwendet werden, wenn für den zerspanten Stahl folgende Daten bekannt sind:

1. die Zugfestigkeit σ_B [kp/mm^2] des zerspanten Stahls;
2. der Spanwinkel γ und der Einstellwinkel $\varkappa$ des Werkzeuges, in Grad gemessen;
3. die Schnittgeschwindigkeit v [m/min], der Vorschub s [mm/U], die Schnittiefe a [mm]; und
4. die größte Dicke des Spanes h_1 [mm].

Das Rechnungsverfahren kann zur Bestimmung der Schnittkraft — wie schon erwähnt — nur im Fall des Fließspanes ohne Aufbauschneide mit praktisch gutem Erfolg angewendet werden. Die Schnittgeschwindigkeit v [m/min] wird nur zur Kontrolle des Schneidenansatzes benötigt und kommt in der Berechnung der Schnittkraft nicht zum Ausdruck.

Wenn die Angaben unter den Punkten 1 bis 4 bekannt sind, dann berechnet man zuerst mit Hilfe der Formel

$$\Phi = \arctan \frac{s \sin \varkappa \cdot \cos \gamma}{h_1 \pm s \sin \varkappa \cdot \sin \gamma}$$

den Scherwinkel. Nachher folgt das Aufzeichnen des Bildes 14, das den Fall $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$ darstellt. Diese Darstellungsweise und das Berechnungsverfahren beziehen sich auf jene Ebene, die an der dicksten Stelle des Spanes auf die Hauptschneide des Werkzeuges und gleichzeitig auch auf die Scherebene senkrecht steht.

Das Aufzeichnen des Bildes 14 und die Berechnung der Schnittkraft F wird in folgender Weise durchgeführt. Nach der Berechnung des Scherwinkels Φ erhält man im Bild 14 die Scherlinie OC, deren Senkrechte n gemäß Abschnitt 2.2.

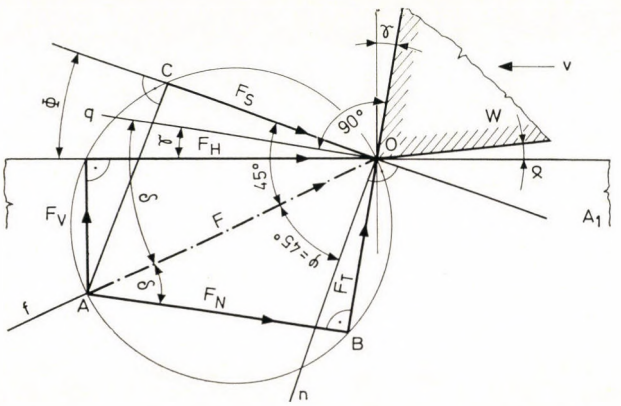


Bild 14. Die Bestimmung der resultierenden Schnittkraft F und deren Komponenten, wenn $\gamma > 0°$, $\varkappa < 90°$ und $\lambda = 0°$ ist. W — Werkzeug, A_1 — Werkstück

mit der resultierenden Schnittkraft F den Winkel $\varphi = 45°$ bildet. Die Lage der Schnittkraft F kommt durch Linie f zum Ausdruck. Da die größte Schubspannung in der Scherebene liegt, ist die Normale n senkrecht auf die Scherlinie. Daher kommt es, daß die Schnittkraft F mit der Scherlinie ebenfalls einen Winkel von 45° bildet. Die im Punkte O des Bildes 14 gezeichnete Linie q — die auf die Spanfläche des Werkzeuges senkrecht ist — bildet mit der Richtung der Hauptschnittkraft F_H den Spanwinkel γ und mit der Richtung der resultierenden Schnittkraft F den Reibungswinkel ϱ der Reibung zwischen den Span und Spanfläche des Werkzeuges. Daher kommt es, daß, wenn $\gamma > 0°$, so ist $\Phi = 45° + \gamma - \varrho$ und wenn $\gamma < 0°$, dann ist $\Phi = 45° - \gamma + \varrho$.

Es ist klar, daß die resultierende Schnittkraft F so groß sein muß, daß die Scherkraft F_S — als Komponente in der Scherebene — das Abtrennen und Verschieben der Spanelemente bewirken kann. Das heißt, daß in der Scherebene die Schubspannung τ die Schubfestigkeit τ_B erreichen muß.

Aufgrund der vorangehenden Erwägungen ist

$$F_S = A_\Phi \tau_B \,.$$

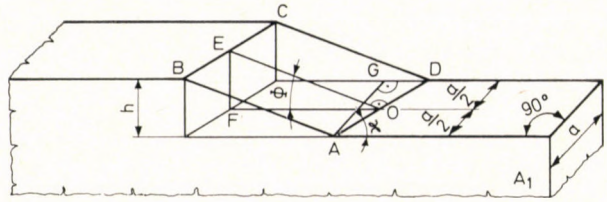


Bild 15. Darstellung der Scherebene zur Bestimmung der Scherkraft F_S. A_1 — Werkstück

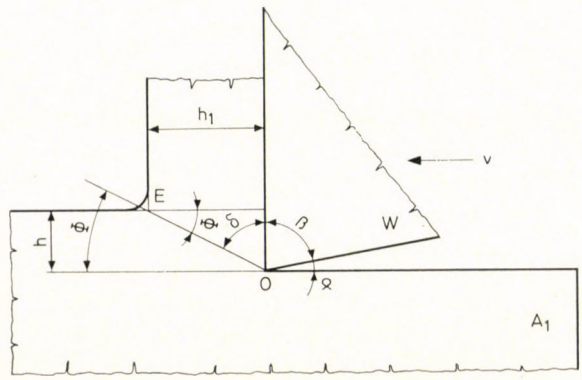


Bild 16. Geometrische Beziehungen zur Berechnung der Oberfläche der Scherebene A_Φ, wenn $\gamma = 0°$, $\varkappa = 90°$. A_1 — Werkstück, W — Werkzeug

Hier ist A_Φ die Oberfläche der Scherebene [mm²] und τ_B die Schubfestigkeit des zerspanten Stahles [kp/mm²].

Sind die Winkel am Schneidkeil des Werkzeuges (α, β, γ, $\varkappa$), der Neigungswinkel der Scherlinie (Φ), die Schnittiefe (a) und die Spanstärke (h_1) bekannt, so kann die Oberfläche der Scherebene A_Φ praktisch genau berechnet werden. Gemäß Bild 15 ist beim freien Schnitt und sinngemäß auch beim gebundenen Schnitt die Oberfläche der Scherebene $A_\Phi = \mathrm{ABCD}\square$. Je nach dem Wert des Spanwinkels γ und des Einstellwinkels $\varkappa$ des Werkzeuges ergeben sich bei der Berechnung folgende Fälle:

$$1.\ \gamma = 0°, \quad \varkappa = 90°$$

In diesem Fall ist nach Bildern 15 und 16:

$$A_\Phi = AD \cdot OE = a \frac{h_1}{\sin(\alpha + \beta - \Phi)} = a \frac{h_1}{\sin(90° - \Phi)},$$

da nach Bild 15

$$AD = a$$

und nach Bild 16

$$OE = \frac{h_1}{\sin(\alpha + \beta - \Phi)}.$$

$$2.\ \gamma > 0°, \quad \varkappa = 90°$$

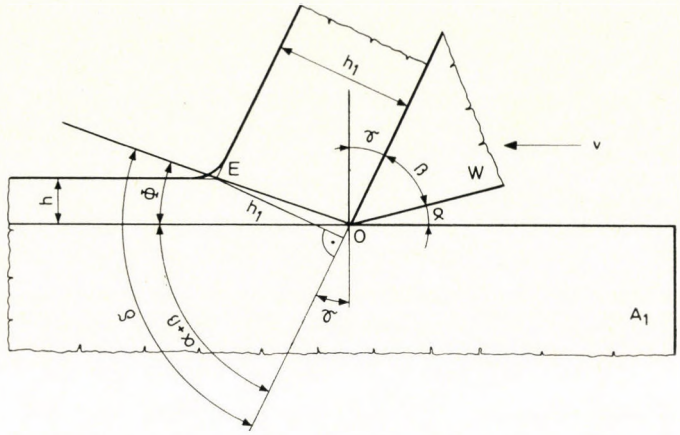


Bild 17. Geometrische Beziehungen zur Berechnung der Oberfläche der Scherebene A_Φ, wenn $\gamma > 0°$ und $\varkappa = 90°$. A_1 — Werkstück, W — Werkzeug

Nach Bildern 15 und 17 ist:

$$A_\Phi = AD \cdot OE = a \frac{h_1}{\sin(\alpha + \beta + \Phi)},$$

da gemäß Bild 15

$$AD = a$$

und nach Bild 17

$$OE = \frac{h_1}{\sin(\alpha + \beta + \Phi)},$$

3. $\gamma < 0°, \quad \varkappa = 90°$

Gemäß Bildern 15 und 18 ist:

$$A_\Phi = AD \cdot OE = a \frac{h_1}{\sin(\alpha + \beta - \gamma - \Phi)} = \frac{a \cdot h_1}{\sin[90° - (\gamma + \Phi)]},$$

da nach Bild 15

$$AD = a$$

und nach Bild 18

$$OE = \frac{h_1}{\sin[\alpha + \beta - (\gamma + \Phi)]}.$$

In den weiteren Fällen ist $\varkappa < 90°$ und daher ist gemäß Bild 15:

$$AD = \frac{a}{\sin \varkappa}.$$

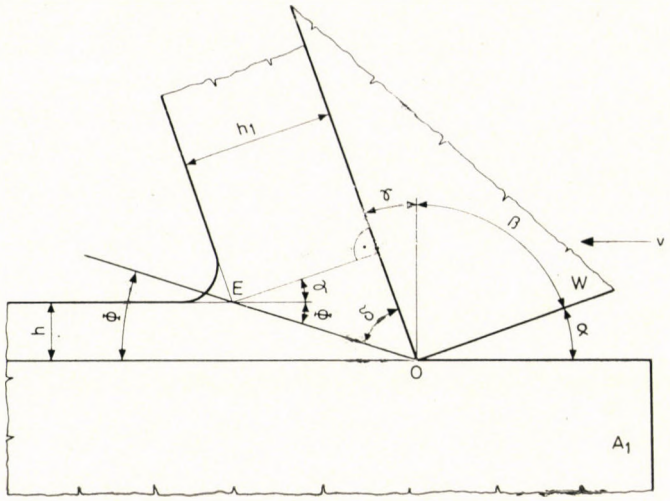


Bild 18. Geometrische Beziehungen zur Berechnung der Oberfläche der Scherebene A_Φ, wenn $\gamma < 0°$ und $\varkappa = 90°$. A_1 — Werkstück, W — Werkzeug

Sonst gelten dieselben Verhältnisse wie in den vorigen Fällen 1,2 und 3. Die Höhe der Scherebene OE behält denselben Wert wie zuvor.

$$4.\ \gamma = 0°, \quad \varkappa < 90°$$

Es ist

$$A_\Phi = AD \cdot OE = \frac{a}{\sin \varkappa} \cdot \frac{h_1}{\sin (\alpha + \beta - \Phi)} = \frac{a \cdot h_1}{\sin \varkappa \cdot \sin (90° - \Phi)}.$$

$$5.\ \gamma > 0°, \quad \varkappa < 90°$$

In diesem Fall ist

$$A_\Phi = AD \cdot OE = \frac{a}{\sin \varkappa} \cdot \frac{h_1}{\sin (\alpha + \beta + \Phi}.$$

$$6.\ \gamma < 0°, \quad \varkappa < 90°$$

Jetzt ist

$$A_\Phi = AD \cdot OE = \frac{a}{\sin \varkappa} \cdot \frac{h_1}{\sin (\alpha + \beta - \gamma - \Phi)} =$$

$$= \frac{a}{\sin \varkappa} \cdot \frac{h_1}{\sin [90° - (\gamma + \Phi)]}.$$

Die Formeln der Fälle 1—6 sind sowohl für den freien Schnitt, wie auch für den gebundenen Schnitt gültig und anwendbar.

Das vorherige Berechnungsverfahren zur Bestimmung der Oberfläche der Scherebene ABCD$\square = A_\Phi$ (Bild 15) kann wie folgt auch einfacher durchgeführt werden.

Da laut Bild 15

AD = die Spanungsbreite (b),
AG = die Schnittiefe (a),
EF = die Spanungsdicke (h), und
s = der Vorschub,
$\varkappa$ = der Einstellwinkel der Hauptschneide bedeuten, erhält man:

$$AD = \frac{AG}{\sin \varkappa} = \frac{a}{\sin \varkappa},$$

$$OE = \frac{h}{\sin \Phi} = \frac{s \sin \varkappa}{\sin \Phi}$$

und daher die Oberfläche der Scherebene:

$$A_\Phi = AD \cdot OE = \frac{a \cdot s \cdot \sin \varkappa}{\sin \varkappa \sin \Phi} = \frac{a \cdot s}{\sin \Phi}.$$

Mit Hilfe der vorherigen Erwägungen kann die Scherkraft F_S berechnet werden. Nach Bild 14 ist:

$$F_S = A_\Phi \tau_B = F \cos 45°.$$

Daher die resultierende Schnittkraft:

$$F = \frac{A_\Phi \tau_B}{\cos 45°} = \frac{F_S}{\cos 45°}.$$

Die Komponenten der resultierenden Schnittkraft können, wie folgt, berechnet werden:

1. die Hauptschnittkraft

$$F_H = F \cos (45° - \Phi);$$

2. die Vorschubkraft

$$F_V = F \sin (45° - \Phi);$$

3. die Normalkraft, d.h. die auf die Spanfläche des Werkzeuges senkrechte Schnittkraftkomponente

$$F_N = F \cos \varrho;$$

4. der tangentiale Reibungswiderstand auf der Spanfläche

$$F_T = F_N \tan \varrho = F \sin \varrho.$$

ϱ ist in Grad der Reibungswinkel. Daher die Reibungszahl:

$$\mu = \tan \varrho = \frac{F_T}{F_N}.$$

4. Vergleich der gemessenen und der theoretisch errechneten Werte

In der Tafel II wurden die Versuchsdaten, sowie die gemessenen und errechneten Resultate von 18 Zerspanungsversuchen zusammengefaßt.

Wie bekannt, ergibt sich bei gleicher Schnittiefe und gleichem Vorschub bei zunehmender Schnittgeschwindigkeit ein immer dünnerer Span und damit ein größerer Scherwinkel Φ. Die abweichenden Werte stammen entweder von der Ungleichmäßigkeit des zerspanten Stahls, oder von der ungenauen Messung der Spandicke.

Nach der Spannungstheorie von Mohr erreicht die Schubspannung bei einer Beanspruchung $\sigma_B = F/A$ in der Scherebene den Wert $\tau = 0{,}50\ \sigma_B$. Wenn man mit den gemessenen Hauptschnittkraftwerten F_H die Schubfestigkeitswerte τ_B berechnet, so erhält man, daß bei den Zerspanungsversuchen in den meisten Fällen τ_B ungefähr $0{,}80\ \sigma_B$ ist. Daher wurde bei den 18 Zerspanungsversuchen der Tafel II die Scherkraft F_S mit $\tau_B = 0{,}80\ \sigma_B = 0{,}80 \cdot 62 = 49{,}6$ kp/mm² berechnet. Die einzelnen errechneten Werte der Schubfestigkeit τ_B befinden sich ebenfalls in Tafel II.

Die Berechnung der Schubfestigkeit wurde mit den gemessenen Werten der Hauptschnittkraft F_H in folgender Weise durchgeführt:
die Scherkraft

$$F_S = A_\Phi \tau_B$$

und die resultierende Schnittkraft

$$F = \frac{F_S}{\cos 45^\circ} = \frac{A_\Phi \tau_B}{\cos 45^\circ},$$

die Hauptschnittkraft

$$F_H = F \cos (45^\circ - \Phi),$$

daher ist

$$F = \frac{F_H}{\cos (45^\circ - \Phi)} = \frac{A_\Phi \tau_B}{\cos 45^\circ},$$

und die Schubfestigkeit

$$\tau_B = \frac{F_H \cos 45^\circ}{A_\Phi \cos (45^\circ - \Phi)}.$$

In dieser Gleichung ist F_H die gemessene Hauptschnittkraft in kp, A_Φ die errechnete Scherebene in mm², Φ der errechnete Scherwinkel und τ_B die errechnete tatsächliche Schubfestigkeit (s. Tafel II).

Aus dem Vergleich der gemessenen und der theoretisch errechneten Werte der Hauptschnittkraft F_H in Tafel II, geht — infolge der praktisch kleinen Differenzen — die Verwendbarkeit des dargestellten Berechnungsverfahrens hervor.

Tafel II

Nr	Daten der Zerspannungsversuche Technologische Daten					Gemessene und berechnete Werte					
						gemessen		errechnet			
	v	s	a	γ	$\varkappa$	h_1	F'_H	Φ	τ_B	F''_H	A_Φ
1	80	0,3	1,5	+5°	45°	0,32	63,46	35°00′	60,00	51,00	0,77
2	65	0,3	1,5	+5°	45°	0,43	65,73	27°20′	50,00	65,00	0,98
3	50	0,3	1,5	+5°	45°	0,45	68,75	25°20′	50,00	67,00	1,02
4	80	0,3	1,5	0°	45°	0,44	65,25	26°00′	47,00	68,00	1,03
5	65	0,3	1,5	0°	45°	0,43	66,40	26°20′	48,50	67,50	1,02
6	50	0,3	1,5	0°	45°	0,52	69,55	22°20′	57,00	78,00	1,20
7	80	0,3	1,5	−5°	45°	0,35	67,90	29°50′	55,00	62,00	0,90
8	65	0,3	1,5	−5°	45°	0,41	69,28	26°10′	51,00	68,00	1,02
9	50	0,3	1,5	−5°	45°	0,45	70,70	24°10′	49,00	70,50	1,08
10	80	0,3	2,25	+5°	45°	0,40	96,70	28°30′	51,00	93,00	1,38
11	65	0,3	2,25	+5°	45°	0,42	98,97	28°00′	49,60	98,00	1,46
12	50	0,3	2,25	+5°	45°	0,49	100,98	24°20′	58,00	108,00	1,64
13	80	0,3	2,25	0°	45°	0,33	91,06	32°50′	53,00	85,00	1,24
14	65	0,3	2,25	0°	45°	0,38	93,93	29°10′	50,00	93,00	1,38
15	50	0,3	2,25	0°	45°	0,44	103,20	25°50′	50,00	103,00	1,56
16	80	0,3	2,25	−5°	45°	0,35	102,20	30°10′	55,00	94,00	1,36
17	65	0,3	2,25	−5°	45°	0,35	100,40	30°10′	54,00	94,00	1,36
18	50	0,3	2,25	−5°	45°	0,34	103,20	30°30′	56,00	91,00	1,34

Werkstoff: C 60 N, $\sigma_B = 62$ kp/mm²,
Schneidstoff: Hartmetall, P 10,
Werkstückdurchmesser: $D = 137 - 129$ mm,
Die Hauptschnittkraft F''_H wurde mit der Schubfestigkeit $\tau_B = 0{,}80\sigma_B = 0{,}80 \cdot 62 = 49{,}6$ kp/mm² berechnet.

v — Schnittgeschwindigkeit, in m/min,
s — Vorschub, in mm/U,
a — Schnittiefe, in mm,
γ — Spanwinkel, in Grad,
$\varkappa$ — Einstellwinkel, in Grad,
h_1 — größte Spandicke, in mm,
F'_H — gemessene Hauptschnittkraft, in kp,
Φ — errechneter Scherwinkel, in Grad,
τ_B — errechnete Schubfestigkeit des Werkstoffes C 60 N, in kp/mm²,
F''_H — errechnete Hauptschnittkraft, in kp.

5. Zusammenfassung

Es wurden vor allem die bei der theoretischen Berechnung der Schnittkraft benützten geometrischen, mechanischen und mathematischen Beziehungen zusammengefaßt.

Die dargestellte Berechnung der Schnittkraft gilt für jene Ebene, die in der halben Breite des Spanes auf die Hauptschneide senkrecht steht. Das Rechnungsverfahren ist sowohl für den freien, als auch für den gebundenen Schnitt geeignet. Es wurde festgestellt, daß der Wert der theoretisch berechneten Hauptschnittkraft F_H von den gemessenen Werten F_H nur um wenige Prozente abweicht und daß zur Kontrolle die Messung einer einzigen Schnittkraftkomponente genügt.

Mit der dargelegten theoretischen Rechnungsmethode kann die Beanspruchung und Leistung der meisten Werkzeugmaschinen brauchbar bestimmt werden.

SCHRIFTTUM

1. KAZINCZY, L.: Az acél forgácsolása közben a forgácstőben létesülő alakváltozások vizsgálata (Die Untersuchung der in der Spanwurzel zustandekommenden Formänderungen während der Zerspannung des Stahles). Dissertation, Budapest, 1939
2. KAZINCZY, L.: A vasipari gyártás technikájának újabb fejlődése (Die neuere technologische Entwicklung der Fertigung). Ausgabe des Ingenieur-Fortbildungsinstitutes, Budapest, 1942
3. HÜTTE, des Ingenieurs Taschenbuch I. 5. Abschnitt, Festigkeitslehre, 27. Auflage, Berlin
4. HUCKS, H.: Plastizitätsmechanische Theorie der Spanbildung. *Werkstatt und Betrieb* (1952), Nr. 1.

Theoretical Determination of the Cutting Force at Turning. The author first resumes those geometrical, mechanical and mathematical relations which were used for theoretical calculation of the cutting force. The calculation of the cutting force as presented in this paper is valid for the plane which is normal to the main cutting edge at halfs the chip width. The method is valid for usual as well as for orthogonal cutting. It has been ascertained that the theoretically calculated main cutting force differs from the measured value only by a few percents and that for checking purposes the measuring of only one cutting force component is sufficient. With the described method the stresses on most machine tools and their performances can be calculated with sufficient accuracy.

Теоретическое определение усилия резания при токарной обработке. В данной работе прежде всего обобщены все те геометрические, механические и математические отношения, которые были использованы при теоретическом расчете усилия резания. Представленный расчет усилия резания действителен для той плоскости, которое является перпендикулярным к главному усилию резания на отрезке, равном половине ширины стружки. Методика расчета действительна как для свободного, так ;и связанного метода резания. Установлено, что величина главного услия резания, вычисленного теоретическим путем, отклоняется от измеренного значения только на незначительный процент, и для целей контроля достаточно измерить только одну единсю ского расчета можилия реточной точностью определить нагрузку и мощность большинства станков.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (1—2), pp. 181—192 (1975)

MEASUREMENT OF THE RADIAL DEFORMATION OF A CYLINDRICAL SOIL SAMPLE SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESS STATE, AND THE EVALUATION OF ITS FAILURE CONDITION

I. KABAI*

[Manuscript received June 26, 1973]

The deformation measuring instrument described here, supplies, in spite of its simplicity, well adaptable results for the evaluation of triaxial tests. By using electric strain providing more accurate measurements, the volume change of the soil sample can be followed much more precisely than by the volume change meters. The accuracy and reliability of the instrument are all the better, the more the soil sample will maintain its axially symmetrical shape during the test. This requirement, however, should be met with any other known measuring instrument, otherwise, due to the buckling and deflection of the sample, the reliability of the test will be jeopardized. The use of the described instrument has led to favourable experiences even in the determination of the Young modulus of rigid materials, when the compression test is impracticable.

1. Introduction

The radial deformation of cylindrical soil samples subjected to triaxial stress conditions in small-size triaxial cells cannot be measured by dial gauges. Although many methods are known for deformation measurement, they cannot be used reliably for mass examinations.

This has necessitated the development of a simple tool for this purpose. The present paper aims at the evaluation and description of both the instrument and the conclusions drawn from the results.

2. The measuring instrument

Means adaptable for the measuring of radial deformation of cylindrical soil samples subjected to axially-symmetrical stress conditions can be divided in two categories: those supplying *(a)* direct and *(b)* indirect measurement data, respectively.

There are many different instruments in group *(a)*, all having the common feature of being mounted on the soil sample itself. Here, owing to the principle followed, the location of the cross section thus measured is not precisely known and, therefore, the evaluation of the results is rather uncertain.

* Dr. I. KABAI, Ungvár u. 56/c H-1142 Budapest, Hungary

Methods in group *(b)* generally require sophisticated, and expensive apparatus (photographic or X-ray exposures etc.) and elaborate procedure and some are suitable only for the examination of disturbed samples.

The measuring instrument described here was devised to eliminate these deficiencies, and is suitable also for mass examinations.

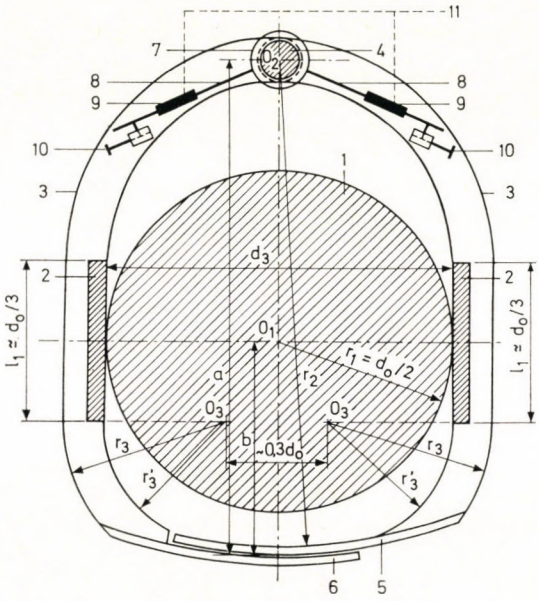


Fig. 1. Deformation measuring instrument: (1) soil sample, (2) sensor, (3) pivot arm, (4) fixed vertical shaft, (5) scale, (6) vernier index, (7) spring leaf ring, (8) spring leaf, (9) electric strain gauges, (10) set screw, (11) connection to the electric strain gauge

The fundamental principle is illustrated in Fig. 1. The soil sample (1) is contacted by two sensors (2) along the generatrices. The sensores are mounted on to pivot arms (3) rotating in a horizontal plane about the fixed shaft (4). The height of the sensors (2) is $m \simeq 2/3\ h_0$, where h_0 is the sample height. The pivot arms rotate in the plane corresponding to the mid-height of the sample, although this plane may be raised or lowered if necessary. The sensors have vertical plane surfaces that remain vertical during motion and are thus capable of measuring the maximum radial deformation of the soil sample during loading. This design makes the joint application of two such tools, whereby the measurement can be performed along four generatrices in two perpendicular vertical planes, possible.

The relative displacement of the scale (5) mounted onto the pivot arms (3), and of the vernier index (6) made of a transparent material, is $a/b \geq 2$-times more than the actual radial displacement. Taking into account the magni-

fying effect of the cell filled with water, the accuracy of the direct reading will be $\sim$ 0,05 mm which is sufficient enough for routine examinations.

The sensitivity of the gauge can be increased by the application of an electric strain gauge (9) that has to be fastened to the spring leaf (8) connected to the fixed shaft (4). The leaf spring may be slightly stressed or adjusted, by the set of screws (10) mounted to the pivot arms (3) in order to ensure the precise measurement of deformation, which is then displayed or, if required, recorded by an electric instrument outside the cell.

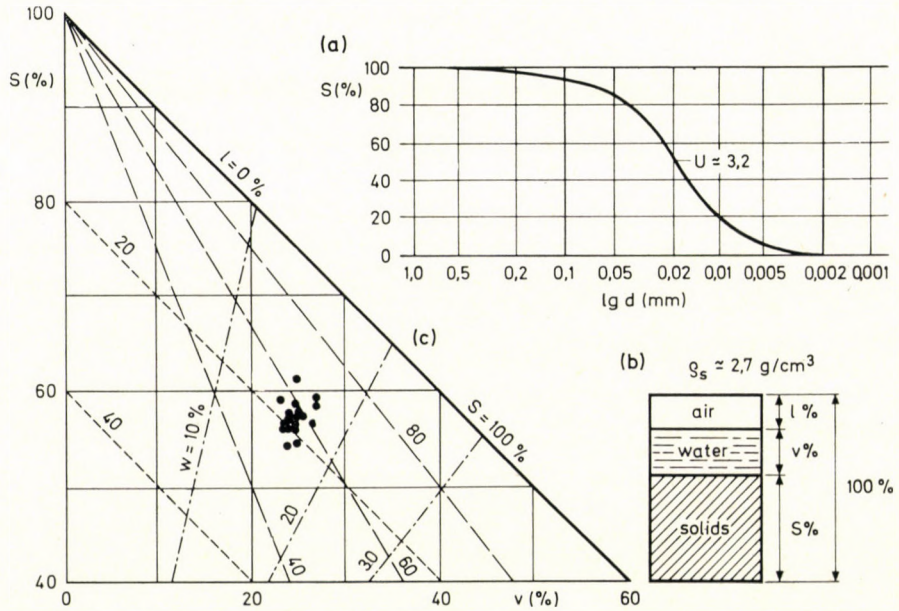


Fig. 2. (a) Grain distribution of the soil tested, (b) compacted sample model, (c) solids, moisture and air distribution of the samples tested

The measuring device should be designed, on the basis of the above principle, so as to match the available triaxial cells and soil sample dimensions, and after construction it should be precisely calibrated.

3. The method of measurement

A simple version of the instrument illustrated in Fig. 1 has been used in the laboratory of the Department of Geotechniques for a number of years. The characteristic features of the results will be presented by series of measurements below.

The examinations involved compacted non-saturated soil. The grain distribution curve of the material tested, and the solids to moisture to air content ratio of the disturbed samples are shown in Fig. 2.

The triaxial tests were performed in the following sequence:

(a) exposing the soil sample to hydrostatic stress conditions ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), and waiting for consolidation ($\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$, $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2$, $\sigma_3 = \bar{\sigma}_3$);

(b) failure test in a drained system, with volume change $\beta \neq 0$ and a loading rate of $v = 0{,}5$ mm/min.

In this test method the total principal stress ($\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma_1$) and the effective principal stress ($\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3 + \Delta\bar{\sigma}_1$) proved to be equal ($\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$, $\Delta\sigma_1 = \Delta\bar{\sigma}_1$), since the consolidation was allowed to take place during the test period (in the formula σ_1 indicates the major, σ_3 the minor principal stress, while $\Delta\sigma_1$ is the deviator stress).

4. Evaluation of the test results

On the basis of the above examinations the following problems have been analyzed:

(a) Role of the radial deformation;

(b) Correlation between volume change and radial deformation;

(c) Correlation between the shear strength parameters and failure criteria.

Ad (a) — Fig. 3 illustrates the result of one of the test performed under the conditions described above. The Coulomb lines of failure (A), (B) were

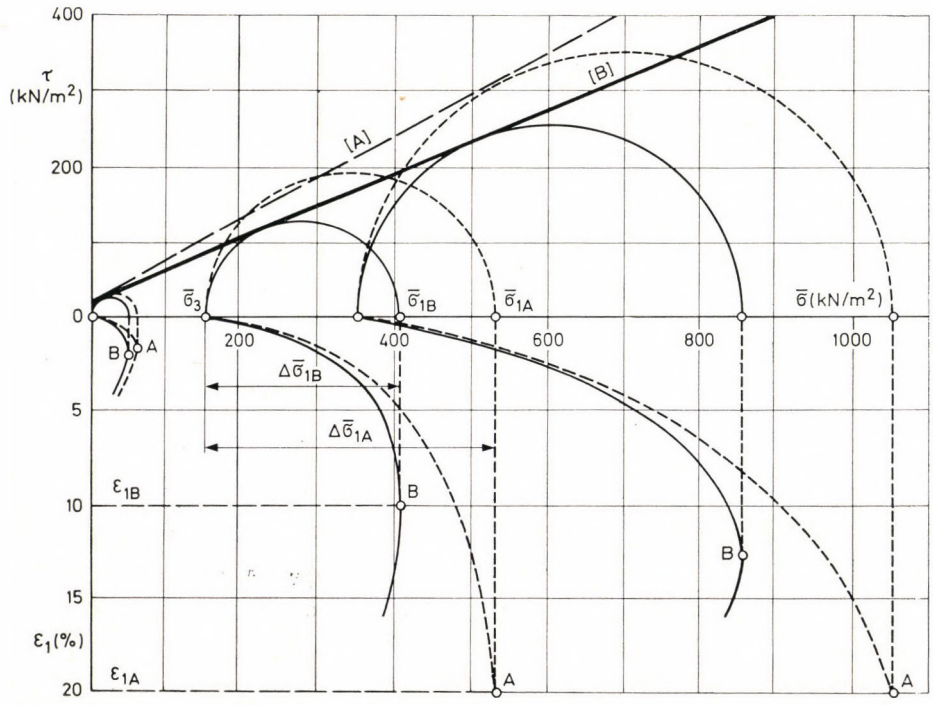


Fig. 3. Shear strength (Coulomb) lines representing two different interpretations of "failure strength value"

obtained by two different methods of evaluating test data. All the performed tests furnished similar results.

Shear strength line (A) was plotted on the basis of the principal stress ($\bar{\sigma}_{1A} = \bar{\sigma}_3 + \Delta\bar{\sigma}_{1A}$) pertaining to a radial deformation of $\varepsilon_1 = 20\%$ [8]). In the relevant formula $\Delta\bar{\sigma}_{1A} = F/A_0$, where F is the axial force, and A_0 indicates the initial cross sectional area of the sample.

The shear strength line (B) was based on the principal stress ($\bar{\sigma}_{1B} = \bar{\sigma}_3 + \Delta\bar{\sigma}_{1B}$), calculated with respect to the radial deformation measurement (in the formula $\Delta\bar{\sigma}_{1B} = F/A$, where A is the momentary maximum cross sectional area determined on the basis of the diameter measurement).

Fig. 3 reveals that the two different methods of evaluation lead to a considerable shear strength difference, which is manifested in the internal friction angle, while the cohesion remains practically unchanged.

The reduced deviator stress may be determined by the formula known from the literature [8]:

$$\Delta\bar{\sigma}_{1r} = \Delta\bar{\sigma}_{1A}(1 - k\varepsilon_1)\,. \tag{1}$$

The symbol k in Eq. (1) means a constant depending on the deformation shape of the soil sample, and may vary between $k \cong 0{,}6 \div 1{,}0$. Results obtained by Eq. (1) are scattered widely as compared to the actual measurement results. After introducing

$$\delta = 100\,\frac{\Delta\bar{\sigma}_{1r} - \Delta\bar{\sigma}_{1B}}{\Delta\bar{\sigma}_{1B}} \tag{2}$$

for a relative comparison, δ would vary between $\delta = -2 \div +8\%$. Thus Eq. (1) could lead to a result of only approximate accuracy.

The results obtained proved the measurement of the radial deformation to be at least as important as that of the axial deformation.

Ad (b) — Theoretically, changes in the diameter may be calculated on the basis of volume changes. Practical experiences, however, prove that measurements of the latter suffer from a great number of errors and, therefore, they are not accurate enough for the determination of radial deformations. The accuracy of diameter calculation based on volume change measurements is not comparable to the accuracy of the simples instruments, which directly measure diameter changes.

Radial and axial deformation measurements make it possible to describe with sufficient accuracy the processes taking place in the course of volume change c.e. compaction and dilation.

In order to confirm the above statements, the changes in volume and diameter have to be studied in detail. Let us consider the soil sample illustrated in Fig. 4.

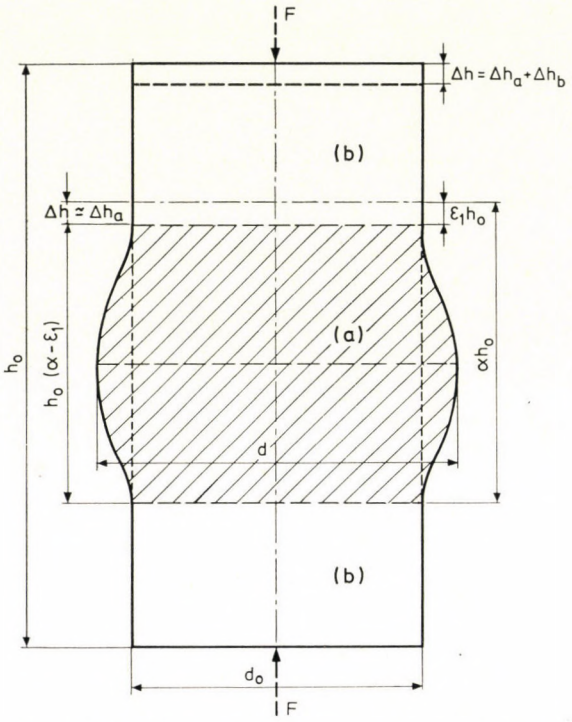


Fig. 4. Model for the analysis of the deformation variations

The analysis is based on the following assumptions.

(a) The whole soil sample h_0 or a part of it (αh_0) fails through plastic yield.

(b) Total compression of the soil sample under load is

$$\Delta h = \Delta h_a + \Delta h_b \,.$$

But since

$$\Delta h_b \ll \Delta h_a \,,$$

hence

$$\Delta h \cong \Delta h_a \,. \tag{3}$$

(c) The soil sample maintains its axially symmetrical shape under load.

(d) Plastic yield occurs with no volume change, thus

$$\beta = \frac{V_0 - V}{V_0} = 0 \,, \tag{4}$$

where V_0 is the volume pertaining to the initial, and V to aa arbitrary load

(e) There is no relative radial displacement between the soil sample and the loading plate, or along the boundary between materials (a) and (b).

Using the symbols of Fig. 4, the conditions of Eqs (3) and (4), and the Simpson rule, the V_0 and V values can be expressed in a sample way. Omitting the details, we have

$$V_0 = h_0 d_0 \frac{\pi}{4},$$

$$V = V_0(1-\alpha) + \frac{1}{3}(\alpha - \varepsilon_1)\left(V_0 + h_0 d^2 \frac{\pi}{2}\right),$$

$$V = h_0(1-\alpha)d_0^2 \frac{\pi}{4} + h_0(\alpha - \varepsilon_1)\frac{\pi}{12}(d_0^2 + 2d^2).$$

Making use of (5), and substituting it into (4), then rearranging the latter, the following equation may be written:

$$d = d_0 \sqrt{\frac{\alpha + 0{,}5\varepsilon_1}{\alpha - \varepsilon_1}}. \tag{6}$$

Applying (6) to the case of $\beta = 0$, $d_0 = 38$ mm, $\alpha = 1{,}0$, $\alpha = 0{,}75$ and $\alpha = 0{,}5$, then completing the calculation, we can plot the continuous lines of Fig. 5.

Now using the test results of Fig. 3, and adding the relation $d = f(\varepsilon_{1B})$ to Fig. 5, the dash lines will be obtained. Since the test illustrated in Fig. 5 is applied to a homogeneous sample, comparison is to the continuous lines of a parameter of $\alpha = 1$. On the basis of the calculation results (full lines), and the actual measurement figures (dash lines), the phases of the volume change compaction and dilation may be obtained. Compaction has an extreme value where the line parallel to line $\alpha = 1$ touches the dash line, that is, at point D. Fig. 5 reveals that $\beta = 0$ is valid only at this point. An important result is that the axial deformations corresponding to points B and D are not equal, but

$$\varepsilon_{1B} > \varepsilon_{1D}, \tag{7}$$

(Figs 3 and 5). Inequality (7) means that the "progressive yield" would start at the value of ε_{1D}, and that the work of deformation has practically been exhausted by that time. These statements can be verified experimentally on the basis of the test results obtained by CHEN [5] and BALLA [1, 2].

CHEN [5] gives the value proportional to the work of deformation by the following equation:

$$E_D = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 = c \cot \Phi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \tag{8}$$

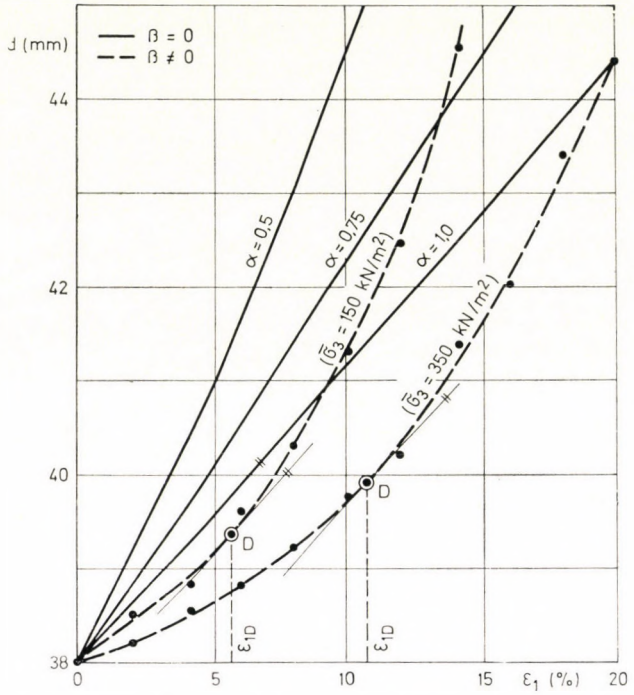


Fig. 5. Correlation between axial and radial deformations and volume changes, respectively

Further evaluation of the experimental results requires the following assumptions:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3\,, \quad \mu = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\,. \tag{9}$$

Taking into consideration the assumptions under (9), and using as well as rearranging (8), the following formula is obtained for $\cot \Phi$:

$$y = \cot \Phi = \frac{1}{c}\,\frac{\sigma_1 + 2\mu\sigma_3}{1 + 2\mu}\,. \tag{10}$$

From Eq. (10), the extreme value of the Poisson coefficient (μ) can be calculated by the determination of the differential quotient

$$\frac{dy}{d\mu} = 0\,. \tag{11}$$

After completion of the differential calculation, naturally the value $\mu = 0{,}5$ will be obtained. Hence, making use of the test results by BALLA [1, 2] we can determine from the measurements the correlation of the Poisson coefficient

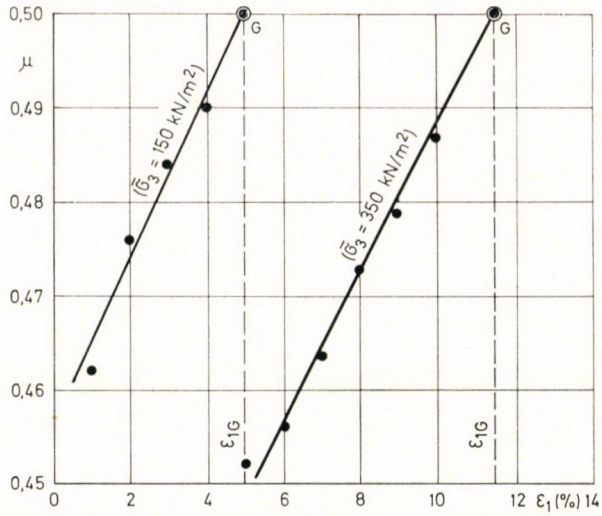


Fig. 6. Correlation among the Poisson coefficient (μ), axial deformation (ε_1), and the principal stresses ($\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_3$)

(μ) and the axial deformation (ε_1), as shown in Fig. 6. A comparison of Figs 5 and 6 reveals that the eaxial deformations associated with points D and G are practically identical ($\varepsilon_{1D} \simeq \varepsilon_{1G}$).

The extreme value demonstrated above can be verified also by measurements on the basis of Eq. (8) and the assumption $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Solving Eq. (8) for cot Φ, the following equation is obtained:

$$\cot \Phi = \frac{1}{c} \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + 2\sigma_3 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3} . \tag{12}$$

In (12) the cohesion c was found to be constant, thus it was sufficient to study the variation of the value

$$E'_D = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1 + 2\sigma_3 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3} . \tag{13}$$

The calculation results are shown in Fig. 7.

From Figs 3, 5, 6 and 7 we get

$$\varepsilon_{1A} > \varepsilon_{1B} > (\varepsilon_{1D} \cong \varepsilon_{1G} \cong \varepsilon_{1H}) . \tag{14}$$

The measurements and calculations thus performed reveal that, in the co-ordinate system $\bar{p} = 0{,}5\ (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)$ and $\bar{q} = 0{,}5\ (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$, the points B and D on the stress path [corresponding to the values $(\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3)_{max}$ and $0{,}5(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)_{max}$] do not mean two separate failure conditions but indicate the "progressive yield section". The experimental result illustrated in Fig. 3 is shown, in the $\bar{p}$ and $\bar{q}$ co-ordinate system, in Fig. 8.

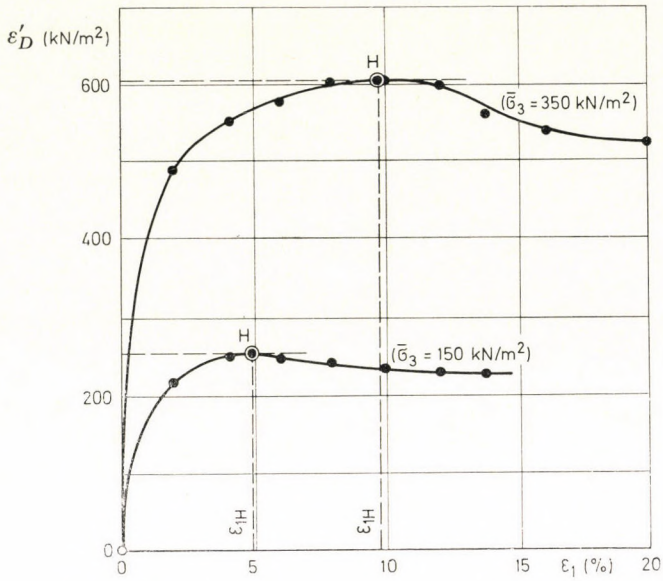


Fig. 7. Correlation between the axial deformation and ε'_D

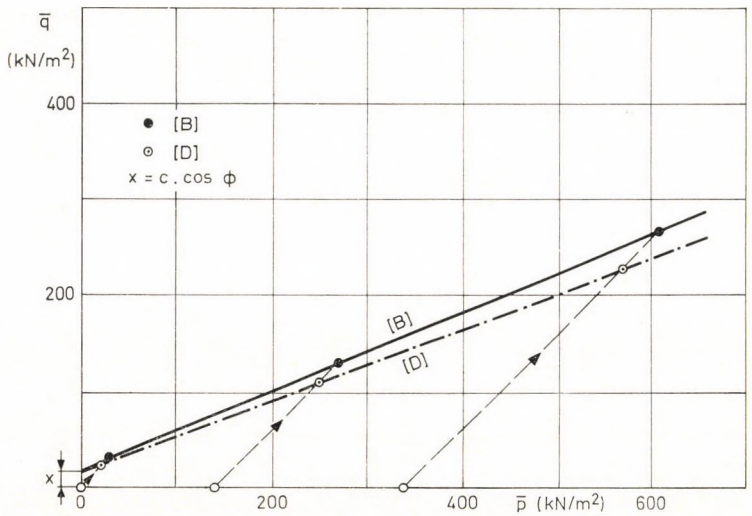


Fig. 8. Variation of the shear strength parameters; the part between the shear strength lines (B) and (D) indicates the range of "progressive yield"

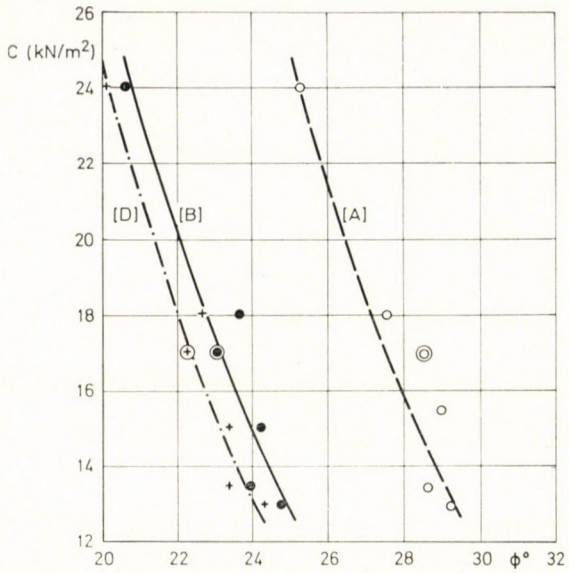


Fig. 9. The role of phase composition, radial deformation, and failure limit in the shear strength value

Here the shear strength line (B) represents the extreme value of the principal stress $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_3 + \Delta\bar{\sigma}_{1B}$, while shear strength line (D) has been determined on the basis of the principal stress value pertaining to the axial deformation $\varepsilon_{1D} \simeq \varepsilon_{1G} \simeq \varepsilon_{1H}$. The validity of the latter can be simply verified since, in the experiment performed with pore water pressure measurement, $\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3$ will have a maximum where the compaction phase has just been completed, that is, where dilation has started, as at this moment the neutral pressure would suddenly start to decrease.

The shear strength of the compacted samples has of course changed, depending on the phase composition presented in Fig. 2. Evaluation on the basis of the conditions described above is summed up in Fig. 9, where the variation of the shear strength parameters can be readily followed.

REFERENCES

1. Balla, Á.: A New Solution of the Stress Conditions in Triaxial Compression. *Acta Techn. Hung.* **28** (1960)
2. Balla, Á.: Determination of the Young Modulus of Soils. *ÉKME Tudományos Közleményei* **13** (1967) (in Hungarian)
3. Bishop, A. W.—Donald, B.: Experimental Study of Partly Saturated Soil in Triaxial Apparatus. *Proc. 5th Int. Conf. Soil. Mech. and Found. Eng.*, Vol. 1, Paris 1961
4. Bishop, A. W.—Henkel, D. J.: Measurement of Soil Properties in Triaxial Tests. Edward Arnold Ltd, London 1957
5. Chen, W. F.: On the Rate of Dissipation of Energy in Soils. *Soils and Foundations* **8** (1968)

6. KAWAKAMI, F.: Properties of Compacted Soils under Transient Loads. *Soils and Foundations* **1** (1960)
7. KÉZDI, Á.: Soil Mechanics I—II. Tankönyvkiadó, Budapest 1969, 1970 (in Hungarian)
8. KÉZDI, Á.: Handbuch der Bodenmechanik, Band III. Akadémiai Kiadó, Budapest 1973
9. PARRY, R. H. G.: The Triaxial Test — Lecture notes for the course on "Research Techniques and Equipment in Soil Mechanics" held at Cambridge, CUED/C-SOILS/LN3, Cambridge 1973
10. SZÉCHY, K.—VARGA, L.: Foundations I. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971 (in Hungarian)

Radiale Verformung von zylindrischen Bodenkörpern in dreiachsigen Zellen. — Beschrieben wird ein Gerät zur massenweisen Untersuchung der im Titel erwähnten Erscheinungen und die aus den durchgeführten Untersuchungen gezogenen Schlußfolgerungen werden ausgewertet.

Измерение деформации по радиусу силиндрического образца почвы, подвергнутого действию трехосевого напряженного состояния, и оценка условий его излома. Подведя итог полученным результатам, можно установить, что несмотря на простоту прибора для измерения деформации его можно удовлетворительно использовать для оценки трехосевых экспериментальных опытов.

INDEX

Bölcskei, E.: Deformation of Membrane Shells of Revolution — Formänderungen der Membranschalen von Rotationsflächenform — *Белчики Э.:* Деформирование мембранных оболочек в форме поверхности вращения 3

Barta, J.: Sätze über den Membranzustand von Schalen — Theorems on the Membrane State of Shells — *Барта, Й.:* Теоремы по мембранному состоянию оболочек 17

Rosman, R.: Statik freistehender proportionierter räumlicher Stockwekrahmen — Statics of Free Proportional Space Frame-works — *Росмак, Р.:* Динамический анализ свободностоящих пространственных пропорциональных рам 41

Roy, P.: Radial Elastic Disturbance and Stress-distribution in a Rotating Non-homogeneous Thin Circular Plate with a Central Hole — Radiale elastische Störung und Spannungsverteilung in einer sich drehenden, inhomogenen, in der Mitte durchgelochten dünnen Kreisplatte — *Приятош, Р.:* Действующий по радиусу упругий возмущающий эффект и распределение напряжений в вращающейся, негомогенной тонкой круглой пластине, прошитой в центре 57

Palánez, B.—Parti, M.: Digital Simulation of Multi-component Drying — Digitale Simulation der mehrkomponentigen Trocknung — *Паланц, Б., Парти, М.:* Цифровая симуляция многокомпонентной сушки 65

Selvam, M. S.—Radhakrishnan, V.: Study of Side Flow in Simple Vee Groove Cutting and its Influence on Surface Finish — Untersuchung des seitlichen Fließens beim einfachen Spanen von N-Nuten — *Сельман, М. С., Радхакришная, В.:* Исследование бокового истечения при резании простых V-образных пазов и его воздействие на чистоту поверхности 75

Kisbán, S.: Practical-Analysis of Elliptic Paraboloid Membrane Shells over Rectangular Ground Plan — Praktische Berechnung elliptischer Parabelschalen auf rechteckigem Grundriß — *Кишбан, =.:* Практический расчет эллиптических параболидных оболочек, лежащих на поямоугольных четырехугольных основаниях 91

Balogh, E.: Model Investigations Concerning Some Problems of Gas Flow and Heat Transfer in the Furnace of the Type DHV, 670 t/h Boilers — Modellversuche betreffend einige strömungstechnische und Wärmeübertragungsprobleme des Feuerraums der 670 t/h-Kessel — *Балог, Л.:* Некоторые проблемы движения потоков и телопередачи в топке котла типа DHV мощностью 670 т/час на основе модельных исследований 117

Horváth, F.: Induced Thermal Emission — Induzierte thermische Emission — *Хорват, Ф.:* Индуктированная термическая эмиссия 127

Szabolcs, G.: Investigation of the Flow in Parallel Boiler Water Tubes — Untersuchung der Strömungsverhältnisse in den parallel geschalteten Siederohren von Dampfkesseln — *Сабольч, Г.:* Исследование условий движения потока в параллельно соединенных кипятильных трубах паровых котлов 135

Virágh, E.—Serege, S.: Determination of the Atmospheric Radioactivity by Measuring the Radioactivity of Aerosol Specimens — Bestimmung der atmosphärischen Radioaktivität durch Messung der Radioaktivität von Aerosolmustern — *Вираг, Э., =ерегэ, =.:* Определение радиоактивности воздуха на основе измерения радиоактивности аэрозольных проб 155

Kazinczy, L.: Die theoretische Bestimmung der Schnittkraft beim Drehen — Theoretical Determination of the Cutting Force at Turning — *Казинци, Л.:* Теоретическое определение усилия резания при токарной обработке 161

Kabai, I.: Measurement of the Radial Deformation of a Clyindrical Soil Sample Subjected to Triaxial Stress State and the Evaluation of its Failure Condition — Radiale Verformung von zylindrischen Bodenprobekörpern in dreiachsigen Zellen — *Кабаи, И.:* Измерение деформации по радиусу цилиндрического образца почвы, подвергнутого действию трехосевого напряженного состояния и оценка условий его излома 181

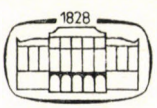
Proceedings of the Fifth Conference on

FLUID MACHINERY

Edited by *L. Kisbocskói* and *Á. Szabó*

These volumes contain the whole material of lectures to be delivered at the international conference which will be held in Budapest in autumn of 1975. The authors of the studies, who are due from 20 countries, are the foremost scientists in the field. Naturally, the results that have been achieved in our domestic research institutes also appear in the volumes. The themes of the studies are related to the results obtained in the field of fluid machinery as for example pumps, water turbines, hydrodynamic power transmission, ventilators, compressors and special purpose appliances. The range of subjects contained: 1) Flow of ideal and real fluids in machine and in systems connected with them (the two- and three-dimension theory of cascades, theoretical characteristics, cavitation, noise, boundary-layer, problems of flow mechanism in hydrodynamics, transient phenomena, etc. 2) Problems of design, specific production and operation of fluid machinery. The studies of the volumes point out the trends in development of this special field.

In English · Approx · 1300 pages · in two volumes · Cloth ISBN 963 05 0725 0



Akadémiai Kiadó

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences

Budapest

Á. KÉZDI

FRAGEN DER BODENPHYSIK

Die theoretische Bodenmechanik hat in den letzten Jahren außergewöhnliche Fortschritte erzielt. Die Erforschung der physikalischen Eigenschaften des Bodens hat aber mit dieser Entwicklung leider nicht Schritt gehalten. Diesen Rückstand sucht dieses Buch aufzuholen, indem es die jüngsten Forschungsergebnisse des Verfassers über die sich im Boden abspielenden Phasenbewegungen publiziert. Diese Erkenntnisse ermöglichten bereits die Lösung mehrerer praktischer Probleme, wie z. B. Erosions- und Filterungsaufgaben, Versandung von Brunnen, Bodenstabilisierungs- und Verdichtungsfragen usw. Angesichts der den Boden aufbauenden drei Phasen verschiedenen Aggregatzustandes werden die Änderungen der Volumenverteilung in der Regel mittels Dreieckdiagramme dargestellt. Überall wird auch auf Möglichkeiten der praktischen Anwendung hingewiesen, einige sogar anhand von Beispielen demonstriert. Das reiche und ausführliche Illustrationsmaterial läßt die Zusammenhänge gut erkennen.

In deutscher Sprache · Etwa 150 Seiten · 200 Abbildungen · 17 × 25 cm
Ganzleinen

Eine Gemeinschaftsausgabe — vertrieben in den sozialistischen Ländern von KULTURA, Budapest, ISBN 963 05 0655 6, in allen anderen Ländern von VDI VERLAG, Düsseldorf

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

VDI VERLAG
DÜSSELDORF

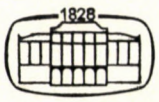
SEDIMENT TRANSPORT IN ALLUVIAL STREAMS

by *J. Bogárdi*

The author summarizes in a most concise method modern knowledge related to dynamics of sediment motion, sediment transportation in streams, regulation of rivers, and in general knowledge concerning natural streams. The book discusses the theoretical questions of sediment motion and for the first time in world literature, the problem of suspended sediment motion by means of balance equations is discussed. Consideration is given to the relationship between sedimentation and streams. The author summarizes the studies on sediment and measurements, together with their practical application. The chapter on the elaboration of measurement data, their evaluation and publication is of special interest, since it offers immense help not only to researchers dealing with sediment motion, but also to engineers in the practice of examining the questions of natural streams.

In English · Approx. 860 pages · Cloth

— ISBN 963 05 0278 X



AKADÉMIAI KIADÓ

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences

BUDAPEST

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária

A kézirat nyomdába érkezett: 1975. VI. 5. — Terjedelem: 17,5 (A/5) ív, 76 ábra

75.1896 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. 3—15

BÖLCSKEI, E.: *Deformation of Membrane Shells of Revolution*

Differential equations describing the deformation of arbitrary shaped membrane shells were developed by the author at about 1950. Now, these differential equations of deformation expressed in orthogonal co-ordinates will be applied for surfaces of revolution re-written in a cylindrical co-ordinate systems. The problem will be illustrated on a paraboloid shell of revolution subjected to uniform vertical loads.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. 17—40

BARTA, J.: *Theorems on the Membrane State of Shells*

The practical computations referring to membrane state of shells will be carried out us rally by using the orthogonal spatial coordinates x, y, z, meanwhile, the stress resultants will be projected upon the plane xy. Present paper contains theoretical expositions on membrane state of shells, using also the orthogonal spatial coordinates x, y, z, however, the stress resultants will be projected not only upon the plane xy, but also upon the planes yz and zx. The expositions lead to an integral theorem from which further theorems follow, concerning the virtual displacements and the Pucher's function.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. 41—56

ROSMAN, R.: *Statics of Free Proportional Space Frameworks*

A procedure is presented for the calculation of space frameworks consisting of two systems of multi-story frameworks without stiffening walls rectangularly crossing each other. The method described may be applied in cases where both multi-story frame structures consist of proportional frameworks, i.e., the joints of the same level rotate under the effect of horizontal load in the same angle, and the feet of struts are stiffly fixed. The method of solution treated with matrix algorithm, is even in case of a complex system of frames, relatively simple.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *57—64*

ROY PRIYATOSH: *Radial Elastic Disturbance and Stress Distribution in a Rotating Non-Homogeneous Thin Circular Plate with a Central Hole*

In this paper, the radial disturbance and the stresses in a rotating non-homogeneous thin circular plate with a central hole are studied when the plate rotates with (I) time-dependent angular velocity $\Omega = \Omega_0 e$ exp (ipt/2) and (II) a uniform angular velocity. In case (I), we have chosen $E = E_0 r^m$ and $\varrho = \varrho_0 r^{m-2}$ and in case (II), several laws of variation of density for the same variation of ($E = E_0/r^m$) have been considered.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *65—74*

PALÁNCZ, B.—PARTI, M.: *Digital Simulation of Multi-Component Drying*

The paper presents a calculation method for the removal of multi-component moisture by batch drying. The relations derived, and the mathematical model obtained resemble those adaptable for the removal of any single-component moisture, but the determination of the auxiliary conditions will raise several problems. Application of the model is illustrated by a numerical example, where the results are in good agreement with practical experiences.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *75—90*

SELVAM, M. S.—RADHAKRISHNAN, V.: *Study of Side Flow in Simple Vee Groove Cutting and its Influence on Surface Finish*

Side flow in metal cutting is one of the factors responsible for the roughness of a machined surface. This paper deals with the experimental investigation of the factors responsible for side flow in simple Vee groove cutting. Influence of cutting speeds, rake angles, Vee angles, depths of cut and nose radii on side flow is discussed. The distribution of stresses around the Vee groove is determined experimentally.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *91—115*

KISBÁN, S.: *Practical Analysis of Elliptic Paraboloid Membrane Shells over Rectangular Ground Plan*

The extended use of shell structures made it necessary to simplify their design. This can be done either by neglecting part of the structural data and introducing approximate theories, or by finding analytic functions fairly approximating the exact solution of the differential equation of the structure meeting the boundary conditions. The described design method is based on this latter concept of simplification.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *117—125*

Mrs. BALOGH, E.: *Model Investigations Concerning Some Problems of Gas Flow and Heat Transfer in the Furnace of the Type DHV, 670 t/h Boilers*

In the furnace of boilers with a large unit performance the liberation and the transfer of heat are due — depending on design — to the operation of burners of different basic types and to the interaction of the burning jets. The conditions in the furnace of the new type boilers for the extension of the Danubian Thermal Power Station (Dunamenti Hőerőmű) have been analyzed using the model technique. On an anisothermal model the characteristics of the velocity and temperature distributions of one burner were investigated, as well as the flow characteristics of the burner group in the boiler furnace.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *127—133*

HORVÁTH, F.: *Induced Thermal Emission*

The combination of a special method for measuring the intensity of thermal radiation with a background of varying radiation intensity has brought forward new discoveries. The author has proved that the energy radiation of a luminous hydrocarbon flame changes very strongly depending on the background radiation. The convective energy exchange namely between the very small soot particles and the gas molecules surrounding them is moderate. Hence the temperature of the soot particle is determined by the equilibrium between the absorption of radiant energy and its emission. Under the action of background radiation the energy absorption of soot particles increases and a new temperature of soot, higher than the original, may develop. The higher soot temperature causes an increase of the energy emission.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *135—153*

SZABOLCS, G.: *Investigation of the Flow in Parallel Boiler Water Tubes*

Investigation of factors influencing single loops are not competent for loops connected in parallel. The method developed for computerized calculation permits — with certain simplifying assumptions — to examine any number of parallel loops. Comparing the results of calculation and measurement show those factors which have a decisive influence on stability.

Acta Techn Hung. 81 (1975), pp. *155—160*

VIRÁGH, E.—SEREGE, S.: *Determination of the Atmospheric Radioactivity by Measuring the Radioactivity of Aerosol Specimens*

On the site of the Budapest Technical University a 10 kW experimental reactor was put into operation in May, 1971. Although the location and the destination of the reactor (instruction), and the safety of the surroundings lead to the adoption of stringent technical specifications, a regular survey was also carried out in the surroundings of the reactor. In the present paper the method for checking the radioactivity of the air are discussed and the results of measurements obtained so far will be summarized.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *161—179*

KAZINCZY, L.: *Theoretical Determination of the Cutting Force at Turning*

The author first resumes those geometrical, mechanical and mathematical relations which were used for theoretical calculation of the cutting force. The calculation of the cutting force as presented in this paper is valid for the plane which is normal to the main cutting edge at half the chip width. The method is valid for usual as well as for orthogonal cutting. It has been ascertained that the theoretically calculated main cutting force differs from the measured value only by a few percents and that for checking purposes the measuring of only one cutting force component is sufficient. With the method of calculation the stresses on most machine tools and their performances can be calculated with sufficient accuracy.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), pp. *181—192*

KABAI, I.: *Measurement of the Radial Deformation of a Cylindrical Soil Sample Subjected to Triaxial Stress State and the Evaluation of its Failure Condition*

The deformation measuring instrument described here, supplies, in spite of its simplicity, well adaptable results for the evaluation of triaxial tests. By using electric strain providing more accurate measurements, the volume change of the soil sample can be followed much more precisely than by the volume change meters. The accuracy and reliability of the instrument are all the better, the more the soil sample will maintain its axially symmetrical shape during the test. This requirement, however, should be met with any other known measuring instrument, otherwise, due to the buckling and deflection of the sample, the reliability of the test will be jeopardized. The use of the described instrument has led to favourable experiences even in the determination of the Young modulus of rigid materials, when the compression test is impracticable.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 32.00 a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Account No. 218 10990) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 32.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 compte courant No. 218 10990) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 32.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Текущий счет № 218 10990) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

AUSTRALIA

C. B. D. Library and Subscription Service
Box 4886, G. P. O.
Sydney N. S. W. 2001

Cosmos Bookshop
145 Acland St.
St. Kilda 3182

AUSTRIA

Globus
Höchstädtplatz 3
A–1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30 Avenue Marnix
1050–Bruxelles

Du Monde Entier
162 Rue du Midi
1000–Bruxelles

BULGARIA

Hemus
Bulvar Ruszki 6
Sofia

CANADA

Pannonia Books
P. O. Box 1017
Postal Station "B"
Toronto, Ont. M5T 2T8

CHINA

C N P I C O R
Periodical Department
P. O. Box 50
Peking

CZECHOSLOVAKIA

Mad'arská Kultura
Národní třida 22
115 66 Praha

PNS Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2

PNS Dovoz tlače
Bratislava 2

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
DK–1165 Copenhagen K

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
P. O. Box 128
SF–00101 Helsinki 10

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48 Rue Gay Lussac
Paris 5

Librairie Lavoisier
11 Rue Lavoisier
Paris 8

Europeriodiques S. A.
31 Avenue de Versailles
78170 La Celle St. Cloud

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Haus der Ungarischen Kultur
Karl-Liebknecht-Strasse 9
DDR–102 Berlin

Deutsche Post
Zeitungsvertriebsamt
Strasse der Pariser Kommüne 3–4
DDR–104 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
P. O. Box 40
Hythe Bridge Street
Oxford OX1 2EU

Collet's Holdings Ltd.
Denington Estate
London Road
Wellingborough Northants NN8 2QT

Bumpus Haldane and Maxwell Ltd.
5 Fitzroy Square
London W1P 5AH

Dawson and Sons Ltd.
Cannon House
Park Farm Road
Folkestone, Kent

HOLLAND

Swets and Zeitlinger
Heereweg 347b
Lisse

Martinus Nijhoff
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

India Book House
Subscription Agency
249 Dr. D. N. Road
Bombay 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
20124 Milano

Libreria Commissionaria Sansoni
Via Lamarmora 45
50121 Firenze

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo 160–91

Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 5050
Tokyo International 100–31

Nauka Ltd.–Export Department
2–2 Kanda
Jinbocho
Chiyoda-ku
Tokyo 101

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgatan 41–43
Oslo 1

POLAND

Węgierski Instytut Kultury
Marszalkowska 80
Warszawa

BKWZ Ruch
ul. Wronia 23
00–840 Warszawa

ROUMANIA

D. E. P.
Bucureşti

Romlibri
Str. Biserica Amzei 7
Bucureşti

SOVIET UNION

Sojuzpechatj — Import
Moscow
and the post offices in each town

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G–200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S–101 20 Stockholm

A. B. Nordiska Bokhandeln
Kunstgatan 4
101 10 Stockholm 1 Fack

SWITZERLAND

Karger Libri AG.
Arnold-Böcklin-Str. 25
4000 Basel 11

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood, Mass. 02090

Stechert-Hafner Inc.
Serials Fulfillment
P. O. Box 900
Riverside N. J. 08750

Fam Book Service
69 Fifth Avenue
New York N. Y. 10003

Maxwell Scientific International Inc.
Fairview Park
Elmsford N. Y. 10523

Read More Publications Inc.
140 Cedar Street
New York N. Y. 10006

VIETNAM

Xunhasaba
32, Hai Ba Trung
Hanoi

YUGOSLAVIA

Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

Forum
Vojvode Mišića 1
21000 Novi Sad

27. IX. 1975

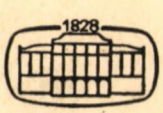
Index: 26.025

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 81
FASCICULI 3–4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1975

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
HELLER LÁSZLÓ

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (1363 Budapest Pf. 24. Bankszámla 215 11448), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankszámla: 218 10990) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
1051 Budapest,
Münnich Ferenc u. 7.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 32.00

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Bankkonto Nr. 218 10990) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 193—194 (1975)

SÁNDOR DÉKÁNY

1904—1974

Sándor DÉKÁNY, Doctor of Techn. Sc., retired Professor of Budapest Technical University, research worker at the Instruments Service of the Hung. Acad. of Sci., was equally connected to technical optics, to film technique and to geodesy. The death of this amiable, informal personality has aroused true sympathy from his colleagues, his friends and his pupils alike.

S. DÉKÁNY was born at Hódmezővásárhely; after secondary school he continued his education at a Military Academy, Artillery branch and graduated afterwards as a mechanical engineer at Budapest Technical University. In accordance with his qualifications he worked at the MilitaryEngineering Institute until 1941, at the Ministry of Industry until 1944. After a short military service and being a prisoner of war, we find him after 1948 at the Military Engineering Institute again where he is concerned with the production of Soviet instruments in Hungary and with questions of designing new instruments. After the organization of the Faculty of Military Engineering at Budapest Technical University he takes part in the education of engineers. To him is due the organization of the first Chair of optical and precision instruments engineering, the head of which he became from 1951 an, and as a professor since 1954. After reaching the military age limit he retired at his own request in 1957 with the rank of colonel of engineers. At the same time the Faculty of Military Engineering was wound up, but he kept his assignment as a civilian university professor. After 1956 he resigned from the university chair and as a professional expert on optical and precision instruments, then as a contractual scientific expert of the National Technical Development Commission, finally as the chief of the Research Film Department of the Instruments Service of the Hung. Acad. of Sci., he continued to work and to study his favourite professional field. Since 1968, he continued these activities as a retired member of that institute.

The research carried out by S. DÉKÁNY during the first phase of his technical and scientific activities at the Military Engineering Institute can not to be exposed to the public. At most, the appreciation of his work can be characterized by the technical missions during which he visited the most

famous factories of optical and precision instruments, such as the Zeiss, Goerz, Galileo, Skoda works etc. His first publications were connected with geodesy, and dealt with the optical power and performance of telescopes, as also his dissertation, for which he was granted the degree of Doctor of Techn. Sci.

His other field of interest were stereoscopic and later on high-speed stereoscopic X-ray cinematography and projection. In this domain he obtained, alone or with co-owners, several patents. He elaborated an ingenious method for making stereoscopic exposures with one single camera; he dealt with the physiology and the psychology of colour vision and with the technique of quickly recording changing phenomena. Being an university teacher he wrote, alone and with co-authors, several university lecture notes and several books on filming and photography.

Besides his teaching, research and literary work he continuously participated in the work of the professional organizations. He was first the deputy president and then the president of the Optics, Acoustics and Film Association, member of the Scientific Council of the Scientific Association for Measurement and Automation, of the Editorial Board of the Review "Mérés és Automatika" (Measurement and Automation) and of the Optics Section of the Hungarian Secretariate of IMEKO.

It is a sad fact that the Hungarian science has lost in Sándor DÉKÁNY a very active, successful worker with a large field of interest.

Lajos Homoródi

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3–4), pp. 195–196 (1975)

LAJOS KATOR

1932–1974

Few people have a destiny compared to that of dr. Lajos KATOR, who owing to his assiduous scientific and pedagogic work was appointed university professor as he was still quite young, but passed away after a long and serious illness before he could continue his successful research and teaching work in his new capacity.

He started work at the Chair of Mechanical Technology of Budapest Technical University first as an assistant, then as a senior assistant. Meanwhile, he worked three years as a regular aspirant for the Candidate's degree. He performed his studies and research with exemplary application and so he obtained his Candidate's degree in 1963 within the prescribed three years. His thesis was closely related to the research work of the Chair of Mechanical Technology; he showed that the specific fracture work of pure metals is largely independent of the dimensions of the crystallites.

After obtaining the "Candidate of Sci." degree, he published numerous papers, also at home in Hungarian, English and Russian, and several of his papers dealing with problems of heat treatment and brittle fracture were published in the Soviet Union.

During his research work he successfully applied the results of modern solid state physics to the production processes of metals and to the investigation of the mechanical properties of metals. He obtained his Doctor of Sci. degree also for work done in this field. In his thesis: Energetical Investigation of the Fracture of Plastic Metals and of its Antecendents, he investigated the changes of internal energy due to the plastic deformations in the course of tensile and compression tests. For the experimental investigation of this very difficult field he developed, together with Pál NYULÁSZ, a new measuring method.

During his relatively short but very active and effective scientific research work he always successfully connected the results of basic sciences with technological practice.

After becoming Cand. of Sci., he was also promoted Second Professor. From that time on he lectured on numerous subjects within the frame of regular

and evening education; for years he lectured on "Technology of Metals". In the course of the University reform he wrote, together with dr. Pál ROMVÁRI, and dr. István ARTINGER, at that time research workers of the Chair, the new lecture notes "Technology of Metals" (1965). After several revisions this book was published as an engineers' handbook under the direction of dr. László GILLEMOT, and its success is proved by the fact that the publishing prize for outstanding level was awarded to it and that now its third edition is in print.

After being promoted a second professor, dr. Lajos KATOR worked for years as the educational secretary of the Chair and he obtained important results in the organization of practical instruction at the Chair of Mechanical Technology.

Besides his important teaching and scientific activities he always found time to take his part in social work. For years he was the secretary of the Party Organization of the Faculty of Mechanical Engineering. After the expiration of this assignment the Board of the Faculty, recognizing the excellent organizing ability of dr. KATOR, appointed to him the post of scientific deputy of the Dean and later on the post of general deputy of the Dean, which duties he attended to with extraordinary diligence and knowledge as long as his illness permitted it.

Although the first symptoms of his incurable illness appeared already about one year before his death, he worked with unfaltering zeal as long as possible in teaching, scientific research and equally as a deputy Dean.

With his quiet, polite but firm attitude he gained the estimation and sympathy of his superiors, his colleagues and his students as well. It is a sad fact that he survived only by one year and a half his degree of D. of Sci., the recognition of his merits, and only by several weeks his promotion to university professor.

Dr. László Gillemot

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 197—224 (1975)

DER VERGLEICH DES SICH AUF DEN MOTORBETRIEB DER FREMDERREGTEN GLEICHSTROMMASCHINE BEZIEHENDEN STATIONÄREN, STRUKTURELLEN SCHEMAS UND DER ENTSPRECHENDEN MECHANISCHEN KENNLINIEN

O. BENEDIKT

ORD. MITGLIED DER UNG. AK. DER WISS.

[Eingegangen am 12. August 1975]

Der Verfasser beschreibt die sich auf den stationären Motorbetrieb der fremderregten Gleichstrommaschine beziehenden Erscheinungen einerseits mit Hilfe der gebräuchlichen mechanischen Kennlinien, und andererseits auf Grund der von ihm ausgearbeiteten Methode der Verwendung des »stationären strukturellen Schemas«. Er kommt zum Ergebnis, daß zum Auffinden sämtlicher Zusammenhänge, zu deren Darstellung die Konstruktion von fünf verschiedenen Kennlinienscharen notwendig ist, ein einziges stationäres strukturelles Schema genügt. Hiebei deckt dieses auch klar und anschaulich all jene physikalischen Zustände und Erscheinungen auf, die sich hinter den Kennlinien verbergen. In vielen Fällen zeigt es auch solche vom Standpunkt des praktischen Betriebes wichtige Tatsachen auf, die aus den Kennlinien überhaupt nicht hervorgehen oder auf Grund der Kennlinien geeignet sind, gewisse Mißverständnisse hervorzurufen.

Im Band 2 einer vor kurzem erschienenen Monographie [1] schlägt Verfasser ein neues Mittel zur Untersuchung der stationären Vorgänge in Gleichstrommaschinen vor, das er »stationäres strukturelles Schema« (im Weiteren: st. str. Schema) nennt. Es besitzt den großen Vorteil, das es die gegenseitige Wechselwirkung der komplizierte stationäre Betriebszustände kennzeichnenden sehr zahlreichen und verschiedenartigen Parameter allseitig gleichzeitig aufzeigt im Gegensatz zu den gebräuchlichen Kennlinienscharen, die immer nur die gegenseitigen Beziehungen von höchstens 3 Parametern darstellen können.

Aufgabe dieses Artikels ist der Vergleich der Verwendung des st. str. Schemas mit der der gebräuchlichen mechanischen Kennlinien in dem Falle, wenn die fremderregte Gleichstrommaschine im Motorbetrieb arbeitet.

Bild 1. zeigt das Schaltungschema des Motors, wobei die Klemmenspannung U über den Ohmschen Widerstand R von regulierbarer Größe den Anker speist. Durch die Erregerspannung U_e wird im Stromkreis der N_e Windungen besitzenden, auf den Polen angeordneten Erregerspule der Erregerstrom I_e erzeugt. Die Durchflutung $I_e N_e$ erzeugt in der den magnetischen Widerstand R_m besitzenden Maschine den magnetischen Fluß Φ. Im Erregerstromkreis befindet sich ein regelbarer Ohmscher Widerstand R_e, in dem auch der Widerstand der N_e Windungen eingerechnet sei. Den inneren Widerstand

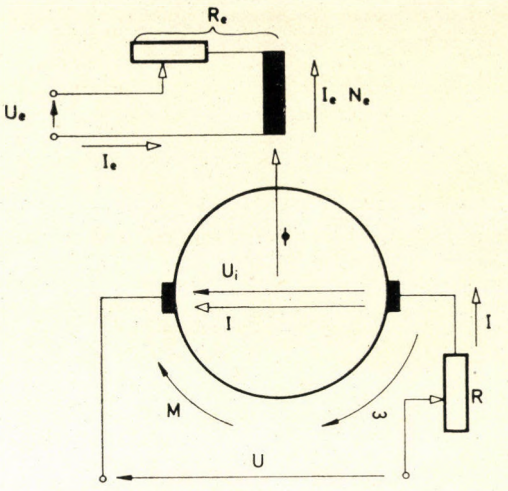


Bild 1

des Ankers werden wir mit R_i bezeichnen. Wir wollen annehmen, daß auf Grund bekannter Konstruktionsprinzipien die Ankerrückwirkung in solch hohem Maße verringert wurde, daß wir sie im Weiteren ruhig vernachlässigen können.

Der von der Spannung U erzeugte Strom I bringt gemeinsam mit dem Fluß Φ ein Moment M hervor, von dem wir annehmen wollen, daß seine Richtung dem Uhrzeigersinn entspricht. Unter seiner Wirkung wird der Motor in derselben Richtung mit einer Kreisfrequenz von ω pro Sekunde sich drehen, was zur Folge hat, daß der Fluß Φ in der Ankerwicklung eine innere Spannung U_i erzeugt, die der Spannung U entgegengerichtet und zu ω proportional ist. Deswegen nimmt zusammen mit der Differenz $U - U_i$ der Strom I und mit ihm das Moment M ab. Dieser Übergangszustand ist zu Ende, wenn

$$M = M_B + M_i = M_B' \tag{1}$$

wobei M_B das äußere Belastungsmoment ist und M_i das auf den Motor reduzierte innere Moment, welches (z. B. infolge der Reibung) innerhalb des Motors und des von letzterem angetriebenen Mechanismus entsteht. Der Einfachheit halber wollen wir im Weiteren die Summe dieser beiden Momente mit M_B' bezeichnen.

Die Kreisfrequenz ω kann nur solange zunehmen, als $M > M_B'$ ist, da nur in diesem Falle gemäß der Gleichung

$$M - M_B' = \frac{d\omega}{dt} \Theta_T \tag{2}$$

der Ausdruck $d\omega/dt$ positives Vorzeichen besitzt. In dieser Gleichung bedeutet Θ_T die Summe des Trägheitsmomentes des Motors sowie des auf den Motor reduzierten Trägheitsmomentes des angetriebenen Mechanismus. Ferner gilt:

$$U_i = C\Phi\omega\,, \tag{3}$$

wobei die Konstante

$$C = \frac{pz}{2\pi a}\,, \tag{4}$$

z die Leiterzahl der Ankerwicklung, $2p$ die Zahl der Pole und $2a$ die der parallel geschalteten Zweige der Ankerwicklung ist. Ferner besteht die Gleichung

$$M = CI\Phi\,. \tag{5}$$

Da $U = U_i = I(R_i + R)$, ergibt sich der Zusammenhang zwischen ω und M auf Grund der Gleichung

$$\omega = \frac{U}{C\Phi} - \frac{M(R_i + R)}{C^2\Phi^2}\,. \tag{6}$$

Sie zeigt, daß die Änderung der Funktion $\omega(M)$ mit Hilfe der Änderung der Parameter R, Φ und U erfolgen kann.

Untersuchen wir die Gleichung (6) für den Fall, daß $U = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ ist, und zwar zuerst mit Hilfe der gebräuchlichen mechanischen Kennlinien. Wenn wir mit ω_0 den Ausdruck

$$\frac{U}{C\varphi} = \omega_0 \tag{7}$$

bezeichnen, dann entspricht die im Bild 2 gezeigte, durch den Punkt a hindurchgehenden gestrichelt gezeichnete Parallele zur Abszissenachse dem idealen Fall, in dem nicht nur $R = 0$ sondern auch $R_i = 0$ und daher unabhängig von der Belastung $\omega = \omega_0$ ist. Bei Belastung ergeben sich bekanntlich folgende Verhältnisse:

Die durch den Punkt a hindurchgehenden geneigten Geraden entsprechen der Gleichung (6), im Falle der Einschaltung verschiedener Widerstände R. Die Werte $M_{a,\,\max}$ und $M_{a,\,\min}$ sind jene zwei Grenzen, innerhalb dessen sich der Anlauf abspielt. Letzterer beginnt mit der Einschaltung des Motors an die speisende Spannung U über einen großen Widerstand R_1. Es ergibt sich hiebei das Moment $M_{a,\,\max}$, welches weit größer ist als der Nennwert M_n des Momentes. Unter der Wirkung der Momentendifferenz $M_{a,\,\max} - M_n$ beginnt ω von 0 an zu wachsen. Deshalb wächst U_i und nimmt I ab und mit ihm, wie die Strecke $1 - 1'$ zeigt, das Moment M. Damit das mittlere Anlaufmoment nicht zu gering wird, wird im Augenblicke, in dem der Arbeitspunkt den Punkt $1'$ erreicht, der dem angenommenen Wert $M_{a,\,\min}$ entspricht, der Widerstand

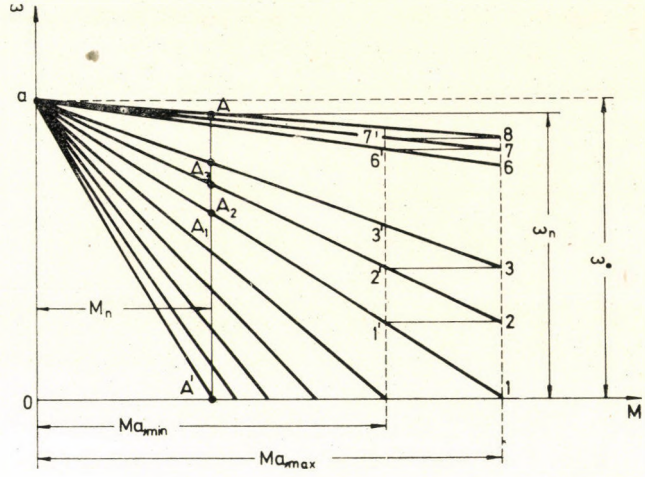


Bild 2

R_1 bis zu einem Wert R_2 verringert und zwar so rasch, daß infolge der mechanischen Trägheit angenommen werden kann, daß sich das Moment bei praktisch unverändertem Wert ω gemäß der Geraden $1' - 2$ vergrößert. Hiebei ist R_2 derart berechnet, daß sich im Punkte *2* abermals das $\text{Moment}_{a,\,\max}$ ergebe. Nachher wächst ω gemäß der Geraden $2 - 2'$ weiter an. Im Falle des Bildes 2 sind 7 verschiedene Werte von R vorgesehen, mit deren Hilfe in analoger Weise der Arbeitspunkt bis zum Punkte $7'$ der Geraden $7 - a$ gelangt. Nunmehr wird auch der kleinste Wert von R abgeschaltet, sodaß der Arbeitspunkt sich bis zu dem Punkt *8* verschiebt, der auf der dem Fall $R = 0$ entsprechenden obersten Kennlinie liegt, die oft auch als die »natürliche« bezeichnet wird. Längs dieser wächst ω weiter, wobei M abnimmt. Sobald M bis zum Wert $M_n = M'_B$ abgenommen hat, verschwindet die antreibende Momentendifferenz und ω erhält den entsprechenden stationären Nennwert ω_n.

Wie bekannt, dienen die Widerstände R nicht nur dazu, um den Anlauf bei dem mittleren Anlaufmoment $(M_{a,\,\max} + M_{a,\,\min})/2$ durchzuführen, sondern auch dazu, um die Änderung von ω bei beliebigen kleineren Momenten zu erzielen. Wenn z. B. bei dem dem Punkte A entsprechenden Nennmoment M_n stufenweise R immer mehr vergrößert wird, nimmt dementsprechend die Steilheit der Kennlinie zu und der Arbeitspunkt senkt sich daher z. B. in die durch die Punkte A_3, A_2 oder A_1 gekennzeichnete Lage und mit seiner Ordinate verringert sich ω. Wenn wir R verkleinern, wächst ω dementsprechend. Wenn wir aber bei dem zum Punkte A_1 gehörigen Zustand den Wert R weiter vergrößern, wächst die Steilheit der Kennlinie weiter und der Arbeitspunkt kann längs der Geraden $A - A'$ bis A' verschoben werden, d. h. ω kann bei beliebigem Moment bis auf 0 verkleinert werden.

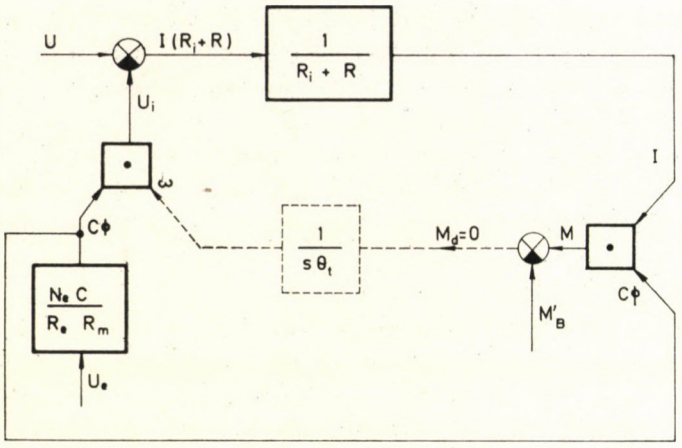


Bild 3

Nachdem wir also die Veränderung der stationären Betriebszustände der Funktion $\omega(M)$ bei veränderlichen Werten R auf Grund der gebräuchlichen Kennlinienschar betrachtet haben, wollen wir nunmehr diese Fragen mit Hilfe des st. str. Schemas gemäß Bild 3 untersuchen. Die algebraischen Ausdrücke enthaltenden Vierecke zeigen einen eintretenden und einen austretenden, mit Pfeilen bezeichneten Parameter, wobei der Wert des eintretenden, wenn er mit dem erwähnten Ausdruck multipliziert wird, den Wert des austretenden ergibt. Die Vierecke, innerhalb deren nur ein als Multiplikationszeichen dienender Punkt liegt, zeigen auf, daß die Werte zweier in benachbarte Ecken des Vierecks eintretender Parameter, miteinander multipliziert, den Wert des aus der Mitte der gegenüberliegenden Seite austretenden Parameters ergeben (z. B. $M = C\Phi I$). In einen hellen Sektor eines mit drei hellen und einem dunklen Sektor versehenen Kreises tritt die Klemmenspannung U ein, während die innere Spannung U_i in den benachbarten dunkeln Sektor eintritt. Dies bedeutet, daß aus dem zweiten hellen Sektor, der dem dunkeln ebenfalls benachbart ist, die Differenz $U - U_i$ austritt, die auch gleich ist dem Spannungsabfall $I(R_i + R)$. Letzterer ergibt, mit dem Ausdruck $1/(R_i + R)$ multipliziert, den Strom I. Wie bereits erwähnt, ergibt dieser mit $C\Phi$ multipliziert, den Parameter M. Wird schließlich aus diesem — analog wie es mit den Parametern U und U_i geschah — das resultierende Belastungsmoment abgezogen, so ergibt sich als Differenz das dynamische Moment M_d, welches wir deshalb so bezeichnen werden, weil unter der Wirkung des positiven bzw. negativen Wertes dieses Momentes ω wächst bzw. abnimmt. Da das Schema der Untersuchung von stationären Zuständen dient — eben deswegen fehlen die die Induktivität bezw. Kapazität anzeigenden Parameter — müssen wir annehmen, daß ω einen stationären Wert besitzt, was zur Vorbedingung hat, daß $M_d = 0$.

Das st. str. Schema zeigt äußerst anschaulich jene inneren Zusammenhänge, auf denen die in dem Bild 2, sowie die in den weiteren Bildern gezeigten mechanischen Kennlinien beruhen, und es wird sich zeigen, daß wir diese sämtlichen unmittelbar aus dem st. str. Schema des Bildes 3 erhalten können.

Woferne nämlich, wie wir bisher angenommen haben, vorläufig die Werte Φ und U unveränderlich sind, so gibt sich zum Beispiel die Gerade $a - A - 8$ des Bildes 2 einfach aus der Tatsache, daß im st. str. Schema gemäß Bild 3, wenn ω und daher auch U_i abnimmt, die Differenz $U - U_i$ und daher auch IR_i und M linear wachsen müssen. Ferner ergeben sich die für den Fall $R > 0$ im Bild 2 gezeichneten übrigen Geraden ebenfalls einfach aus der Tatsache, daß im st. str. Schema wachsenden Werten M und $I(R_i + R) = U - U_i$, linear abnehmende Werte U_i und ω entsprechen. Daraus wird auch sofort klar, daß, je größer die Werte $R_i + R$ sind, das Maß der Verringerung der Werte U_i und ω bei einer bestimmten Zunahme von M desto größer sein muß, d. h., wenn wir die Zustandsänderungen mit Kennlinien darstellen, deren Steilheit mit $R_i + R$ wachsen muß. Ferner ergibt sich die Möglichkeit, bei gegebenem Moment eine der Geraden $A - A'$ des Bildes 2 entsprechende Veränderung von ω zu erzielen, sehr einfach aus der im st. str. Schema leicht erkennbaren Tatsache, daß bei gegebenen Werten von M und I die Vergrößerung des Wertes R zur Vergrößerung der Differenz $U - U_i$ führt, d. h. zur Verringerung von U_i und ω. Das st. str. Schema zeigt auch augenblicklich, daß U_i und daher auch ω bis 0 abnehmen, wenn R jenen Wert erreicht, bei dem der Spannungsabfall $I(R_i + R)$ allein imstande ist, der Spannung U das Gleichgewicht zu halten.

Wie ersichtlich, gibt das st. str. Schema, für das die Tatsache kennzeichnend ist, daß es die Zusammenhänge und gegenseitigen Wechselwirkungen sämtlicher uns interessierenden, die verschiedenen Betriebszustände determinierenden zahlreichen Parameter gleichzeitig in einem einzigen Gesamtbild vereinigt, nicht nur die Möglichkeit, die Rolle der einen bestimmten stationären Zustand bestimmenden Parameter zu beleuchten, sondern auch unmittelbar die Frage zu beantworten, wie sich bestimmte Parameter ändern, wenn sich andere Parameter ändern.

Natürlich ist in dem letzteren Falle die Rede nicht von den sich infolge der Parameteränderungen ergebenden Übergangserscheinungen, da ja die diese determinierenden Parameter im st. str. Schema gar nicht vorkommen und zwar gerade deswegen, weil wir es nur zur Untersuchung stationärer Zustände benützen wollen. Wenn daher die Rede von jener Wirkung ist, die die Änderung eines Parameters auf die eines andern ausübt, so denken wir nur an den Übergang aus einem stationären Zustand in einen andern stationären Zustand, wobei wir von dem zwischen diesen Grenzen sich abspielenden transienten Prozeß absehn, z. B. deswegen weil wir annehmen, daß der Übergang genügend langsam stattfindet, oder weil einfach nur davon die Rede ist, daß die statio-

nären Zustände vor und nach dem transienten Prozeß miteinander verglichen werden.

Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß es sich ja ganz genauso auch im Falle der Kennlinien verhält.

Wenn z. B. gemäß Bild 2. der Arbeitspunkt aus der Lage a in die Lage A übergeht, d. h. wenn wir untersuchen, wie die dem Wert ω entsprechende Ordinate abnimmt, woferne die dem Wert M entsprechende Abszisse zunimmt, so sehr wir ja ebenfalls gänzlich von der Frage ab, welcher Übergangsprozeß sich abspielt von dem Augenblick an, in dem M vom Werte 0 an zu wachsen beginnt bis zu jenem, in dem der Wert M_n erreicht wird. Im abschließenden Teil dieses Artikels werden wir übrigens auf diesen Fragenkomplex noch ausführlicher zurückkommen.

Wie sich aber im Weiteren zeigen wird, gestattet das st. str. Schema — woferne es noch weiterentwickelt wird — auch das Erkennen solcher Zusammenhänge, die die gebräuchlichen Kennlinien nicht darstellen. Ein solcher ist der Zusammenhang zwischen dem dynamischen Moment M_d und der Größe der Änderung von ω. So zeigt z. B. das Bild 2, daß ω kleiner wird, wenn der Arbeitspunkt sich von A bis A_3 verschiebt, sie sagt aber nichts darüber aus, die Folge welcher physikalischen Erscheinungen dies ist. Damit dies mehr oder weniger klar werde, müssen wir uns zu den Kennlinien erstens die Gleichung (2) hinzudenken, demgemäß ω sich nur dann verkleinern kann, wenn $M < M'_B$ ist, zweitens müssen wir uns hinzudenken, daß die Verringerung von M nur möglich ist, wenn sich auch I verkleinert und drittens müssen wir uns klarmachen, daß diese Verkleinerung von I bei gleichbleibender Größe $I(R_i + R) = = U - U_i$ (da ja infolge der mechanischen Trägheit im ersten Augenblick ω und U_i sich praktisch nicht ändern) eben nur durch die Vergrößerung von R möglich ist. Über all diese physikalischen Erscheinungen sagt die Kennlinienschar unmittelbar nichts aus, wobei noch hinzugefügt werden muß, daß häufig jene Erscheinungen, aufgrund deren wir erkennen können, warum in irgendeiner Kennlinienschar ein stationärer Zustand in einen andern übergeht, noch weit komplizierter sind, worauf wir später ebenfalls auf Grund von Beispielen noch zurückkommen werden.

Im Gegensatz hinzu ist die die Hauptrolle spielende positive oder negative Größe M_d im st. str. Schema unmittelbar zu sehen und ebenfalls jene Parameter, deren Veränderung zu ihrer Entstehung führt. Aber auch die Folge des Auftretens von $\pm M_d$ können wir äußerst einfach erkennen, wenn wir im st. str. Schema, die im Folgenden zu erläuternde Ergänzung vornehmen.

Nehmen wir an, daß aus irgendeinem Grund $M'_B < M$, d. h. $M_d > 0$. Bekanntlich können wir die Gleichung (2) auch in folgender Weise aufschreiben:

$$M - M'_B = M_d = s\omega\Theta_T\,, \tag{8}$$

wobei s der Laplace'sche Operator ist. Daher ist

$$\omega = \frac{M_d}{s\Theta_T} . \tag{9}$$

Offenbar können wir die Tatsache, daß auf diese Weise ω als Produkt des Parameters M_d und des Ausdruckes $1/(s\Theta_T)$ auftritt, dazu verwenden, den Zusammenhang zwischen ω und M_d im st. str. Schema derart darzustellen, daß der Parameter M_d in ein Rechteck eintritt, in dem dieser Ausdruck vorkommt und aus dem der Parameter ω austritt. Auf diese Weise ergibt sich eine Methode, die uns anschaulich darauf aufmerksam macht, daß ω zunimmt bezw. abnimmt, wenn M_d positiven bezw. negativen Wert besitzt. Auf diese Weise ergibt sich im st. str. Schema zwischen den Parametern M_d und ω in gewissem Sinne eine Art von Rückkoppelung.

Allerdings würden wir einen Fehler begehen, wenn wir nunmehr diese beiden Parameter auf die erwähnte Weise ebenso miteinander Verbinden würden, wie es z. B. mit den Parametern U_e und $C\Phi$ der Fall ist. Denn der Laplace'sche Operator weist ja darauf hin, daß es sich beim Zusammenhang zwischen M_d und ω eigentlich um einen transienten Prozeß handelt. Andererseits wäre — worauf bereits hingewiesen wurde — dazu, daß damit das st. str. Schema gemäß Bild 3 auch transienten Vorgängen entsprechen möge, nötig, daß im Schema auch die Induktivität und die Kapazität die ihnen zukommende Rolle spielen. Letzteres wurde aber von uns bewußt unterlassen u. zw. eben deshalb, weil wir die Aufgabe des st. str. Schemas in der Darstellung von stationären Zusammenhängen sehen.

Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich aber überbrücken, wenn wir feststellen, daß uns nicht der genaue Verlauf des Übergangsprozesses interessiert, den das Erscheinen des Parameters $\pm M_d$ auslöst, sondern nur seine Hauptrichtung, das heißt der Unterschied zwischen den stationären Zuständen am Beginn und am Ende des transienten Vorganges. An diese Tatsache wird uns der Umstand erinnern, daß sowohl das den Ausdruck $1/(s\Theta_T)$ enthaltende Rechteck als auch die letzteres mit den Parametern M_d und ω verbindenden Linien strichliert gezeichnet sind.

Aus dem auf diese Weise ergänzten st. str. Schema können wir also jene außerordentlich wichtige, aber aus den mechanischen Kennlinien nicht unmittelbar hervorgehende Tatsache direkt ablesen, daß sich M_d als Differenz $M - M'_B$ ergibt, die mit Hilfe eines durch die Parameter M_d, ω, U_i, $I(R_i + R)$ und M gebildeten Regelkreises trachtet, sich automatisch bis 0 zu verringern. Tatsächlich, wenn M aus irgend einem Grunde größer wird als M'_B (z. B. weil die Belastung abgenommen hat), d. h. wenn ein Moment $+M_d$ auftritt, wird ω anwachsen und gleichzeitig auch U_i, was zur Folge hat, daß der Wert des Parameters $I(R_i + R)$ entsprechend abnimmt. Es werden also auch die Werte

I und M solange abnehmen, bis M_d verschwindet, d. h. das Gleichgewicht der durch die Maschine miteinander verglichenen Parameter M und M'_B wiederhergestellt ist. Das st. str. Schema widerspiegelt also klar, in welcher Weise sich das Motormoment den Änderungen des Belastungsmomentes anpasst.

Das st. str. Schema gemäß Bild 3 zeigt aber nicht nur, das im Falle $M_d = 0$ ein stationärer Zustand besteht, sondern auch, daß sich letzterer im stabilen Gleichgewicht befindet. Denn wenn wir z. B. annehmen, daß bei gegebener Größe M'_B sich ω aus irgend einem Grunde verringert, dann werden unter der Wirkung der erwähnten Tatsachen offenbar die Werte $I(R_i + R)$ und M anwachsen, wodurch sich bei Moment $+M_d$ ergibt, welches den Wert ω wieder so weit vergrößert, als bis $M_d = 0$ wird. Analoge Erscheinungen spielen sich ab, wenn ω größer wird, als dies dem stationären Zustand entsprechen würde. Im abschließenden Teil dieses Artikels wollen wir auch auf diese Frage noch ausführlicher zurückkommen.

Das st. str. Schema erlaubt auch in einfacher Weise die im Zusammenhang mit Bild 2 erläuterte Frage zu beantworten, wie der Motor mit Hilfe der entsprechenden Verringerung der R Werte bei einem mittleren Moment $(M_{a,\max} + M_{a,\min})/2$ anläuft. Tatsächlich, wenn wir wünschen, daß sich am Beginn des Anlaufes eine Momentendifferenz $M_{a,\max} - M_n$ ergebe, die ω von 0 an vergrößert, so ist dazu notwendig, den ruhenden Anker bei einem solchen Wert R an die Netzspannung U zu schalten, bei dem sich der dem Moment $M_{a.\max}$ entsprechende Strom I ergibt. Das derart entsprechende Moment $+M_d = M_{a,\max} - M_n$ erhöht den Wert von ω soweit, bis die mit ω wachsende Spannung U_i den Wert $I(R_i + R)$ in einem derartigen Maße verringert, daß M sich bis $M_{a,\min}$ verkleinert. Wenn wir in diesem Augenblick sprungartig R verkleinern, wächst I wieder auf den ursprünglichen Wert an, bei dem $M = M_{a,\max}$, wobei aber ω wegen der mechanischen Trägheit praktisch den erreichten Wert behält. Das st. str. Schema zeigt auch klar, daß, wenn die Größe $R_i + R$ nicht weiter abnimmt (z. B. weil $R = 0$ ist), ω unter dem Einfluß von $+M_d$ weiter anwächst, aber bei der Erreichung des Nennwertes ω_n, bei dem $M = M_n = M'_B$ und daher $M_d = 0$ wird, sich auf diesem Wert stabilisiert.

Das st. str. Schema zeigt aber auch folgende wichtige Tatsache auf, die aus den Kennlinien des Bildes 2 keineswegs sichtbar ist: Die letzteren zeigen zwar mit Hilfe der dieselbe Abszisse M_n besitzenden Punkte A_1, A_2, A_3 usw. an, daß es möglich ist, durch Veränderung der Größe R den Parameter ω bei gegebenem Wert M_n zu regeln, verraten aber nicht, was eigentlich die unmittelbare Ursache für die Änderung von ω ist. Demgegenüber zeigt das st. str. Schema klar auf, daß diese Ursache das Erscheinen eines dynamischen Momentes $\pm M_d$ sein muß, und daher die Änderung von ω gar nicht beim Moment $M = M_n = M'_B$ erfolgen kann, wie dies bei der Betrachtung der durch die Punkte A_1, A_2, A_3 hindurchgehenden Geraden der Fall zu sein scheint, sondern nur bei irgendeinem größeren oder kleineren Wert M, da sich ja sonst nicht das

Moment $\pm M_d = \pm(M - M'_B)$ bilden kann, welches bei positivem Vorzeichen ω vergrößert und bei negativem Vorzeichen verringert.

In diesem Zusammenhang ist es, um Mißverständnissen vorzubeugen, notwendig, noch auf das Folgende hinzuweisen: Die Pfeile, die längs der die Parameter M_d und ω miteinander verbindenden strichlierten Kontur gezeichnet sind, weisen nur auf die Tatsache hin, daß die Änderung von ω die unmittelbare Folge des Auftretens von M_d ist, sagen aber nichts aus über das Vorzeichen von M_d und über die Richtung der Änderung von ω. Dies bedeutet also, daß, wenn (z. B. infolge der Vergrößerung von R) $M < M'_B$ und daher $M_d < 0$ ist, der in der Richtung der erwähnten Pfeile wirkende Einfluß des dynamischen Momentes mit negativem Vorzeichen, ω nicht vergrößert, sondern verringert.

Wenn wir berücksichtigen, daß im allgemeinen der Motor bei $R = 0$ arbeitet, dann können wir auf Grund des st. str. Schemas noch eine weitere sich auf den inneren Automatismus der Maschine beziehende interessante Tatsache erkennen: Gleichzeitig damit, daß die Maschine auf die Gesetzmäßigkeit $M = M'_B$ regelt, kann sie auch als eine solche Kontur aufgefaßt werden, die automatisch die innere Spannung U_i auf den Wert U einzustellen sucht und zwar mit großer Genauigkeit, da ja der Fehlerbetrag $U - U_i = IR_i$, im Falle wenn die Spannung U normale Größe besitzt, nur wenige Prozente der letzteren ausmacht.

Das st. str. Schema zeigt aber auch klar auf, auf welchen physikalischen Erscheinungen die Gesetzmäßigkeit $U_i \cong U$ beruht. Wenn nämlich U_i aus irgendeinem Grund wächst, verringert sich um denselben Betrag IR_i und daher auch I und M, und es erscheint ein Moment $-M_d$, was zur Folge hat, daß sich ω und daher auch U_i verringert, wobei auf Grund des soeben erwähnten Zusammenhanges M wieder auf jenen Wert anwächst, bei dem $-M_d = 0$ ist.

Bisher haben wir jene Fragen untersucht, die sich im Zusammenhang mit Änderungen der Werte R ergeben, während U und Φ konstant sind. Nunmehr gehen wir zu jenem Fall über, wenn R und U konstant sind, aber Φ mit Hilfe der Regelung des Wertes R_e geändert werden kann. Wie Gleichung (6) zeigt, ändert sich $\omega_0 = U/(C\Phi)$ verkehrt proportional zu Φ. Wenn wir z. B. annehmen, daß Φ auf den Wert $\Phi/2$ verringert wird, erhöht sich ω_0 auf $2\omega_0$, d. h. der Punkt a der im Bild 4 dargestellten Kennlinie verschiebt sich in die Lage a'. Gleichzeitig wächst der negative Teil des Ausdruckes auf der rechten Seite der Gleichung (6) im Verhältnis 1 : 4, d. h. die Steilheit der die Funktion $\omega(M, \Phi)$ darstellenden Geraden $a - c$, wächst, wie die der Funktion $\omega(M, \Phi/2)$ entsprechende Gerade $a' - c'$ zeigt, so, daß z. B. die Strecke $b' - c'$ viermal größer ist als die Strecke $b - c$. Da diese Art der Drehzahlregelung, im Vergleich zu der mit Hilfe der Änderung von R erfolgenden, den Vorteil besitzt, daß im Falle $R = 0$ die entsprechenden Kupferverluste wegfallen, wurde das Bild 4 unter der Voraussetzung gezeichnet, daß $R = 0$ ist, und daher die Ge-

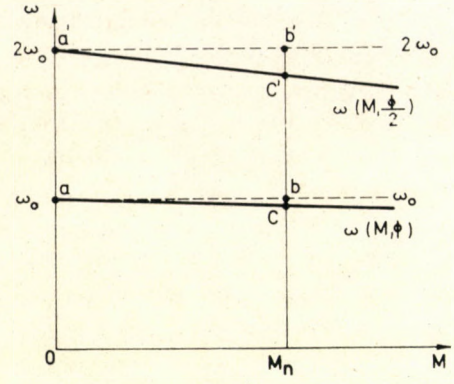


Bild 4

rade $a-c$ des Bildes 4. identisch ist mit der Geraden $a-A-8$ im Bild 2. Wäre $R > 0$, würde offenbar die Steilheit der Kennlinien im Bild 4 dementsprechend wachsen.

Die sich bei Änderung von Φ ergebenden physikalischen Erscheinungen aufgrund des st. str. Schemas des Bildes 3

Das st. str. Schema zeigt klar jene Erscheinungen auf, die sich sozusagen hinter den Kennlinien des Bildes 4 verbergen. Wenn nämlich $M = 0$ und $I = 0$ ist, erreicht U_i seinen maximalen Wert U und daher erreicht bei konstanten Φ die Größe ω den maximalen Wert ω_0. Wird $M'_B > 0$, so verringert das derart entstehende negative dynamische Moment $-M_d = 0 - M'_B$ die Werte ω und U_i, was zur Folge hat, daß sich IR_i und M solange linear erhöhen, bis M wieder gleich wird M'_B und $-M_d = 0$. Untersuchen wir dieselbe Frage für den Fall, daß der Fluß auf den Wert $\Phi/2$ verringert wurde, so stellt sich bei Leerlauf die Größe U_i so wie beim Fluß Φ wieder auf den Wert U ein, da aber $U = C\Phi\omega_0$ ist, bedeutet dies für den Fall $\Phi/2$, daß ω bis zum Wert $2\omega_0$ anwächst, wie dies der Verschiebung des Punktes a des Bildes 4 in die Lage des Punktes a' entspricht. Wenn $M'_B > 0$ wird, verringert das entstehende Moment $-M_d$ wieder ω und U_i, wodurch sich entsprechend die Größen IR_i und M vergrößern. Da aber M proportional ist zu Φ, muß beim Fluß $\Phi/2$ sich IR_i bei einer bestimmten Vergrößerung von M um den doppelten Betrag erhöhen. Andererseits ist auch U_i proportional zu Φ, so daß bei einer bestimmten Veränderung von IR_i sich im Falle $\Phi/2$ der Wert ω um den doppelten Betrag verringern muß. Daraus folgt, daß einer bestimmten Änderung von M im Falle, wenn der Fluß auf die Hälfte verringert wurde, eine vierfache Änderung von ω entspricht. Das st. str. Schema zeigt also anschaulich auf, warum die Steilheit der Geraden $a'-c'$ im Bild 4 viermal so groß sein muß, als die der Geraden $a-c$.

Wie ersichtlich, können aus dem st. str. Schema nicht nur dieselben funktionellen Zusammenhänge zwischen ω, Φ und M entnommen werden, die die Kennlinien des Bildes 4 zeigen, sondern auch die physikalischen Erscheinungen, die sich im Hintergrund dieser Kennlinien verbergen. Wie groß die praktische Bedeutung der letzteren Tatsache ist, zeigt das folgende interessante Problem, im Zusammenhange mit welchem das st. str. Schema imstande ist, äußerst klar auf solche für den Betrieb wichtige Tatsachen hinzuweisen, die aus den Kennlinien überhaupt nicht hervorgehen.

Wenn wir nämlich die physikalischen Erscheinungen, die sich im Zusammenhange mit der Änderung von Φ aus dem st. str. Schema ablesen lassen, genauer durchdenken, können wir die interessante Tatsache erkennen, daß die Vergrößerung von ω als Folge der Verkleinerung von Φ keineswegs einen solch eindeutigen Prozeß darstellt, als dies auf Grund der Kennlinien der Fall zu sein scheint.

Als wir nämlich aufgrund des st. str. Schemas davon ausgingen, daß bei Verringerung von Φ und U_i und der sich hiedurch ergebenden Vergrößerung von IR_i und I sich auch M vergrößert und daher ein den Wert ω erhöhendes Moment $+M_d$ entsteht, erscheint diese Überlegung zwar im ersten Augenblick selbstverständlich zu sein, in Wirklichkeit ist sie dies aber keineswegs. Die Vergrößerung von M bei der Zunahme von I besteht nämlich nur dann, wenn im Ausdruck $M = C\Phi I$ der Strom I in stärkerem Maße zunimmt als Φ abnimmt. Daß man nicht sofort an diese Frage denkt, ist nur natürlich, weil ja im allgemeinen $I(R_i + R)$ sehr klein ist im Verhältnis zu U_i, weil $R = 0$ ist, und daher eine starke prozentuelle Erhöhung von IR_i und I nur mit einer geringen prozentuellen Verringerung von U_i und Φ verbunden ist. Dies bedeutet aber, daß im Ausdruck $M = C\Phi I$ der Strom weit rascher wächst als Φ abnimmt, das heißt also, daß letztere Erscheinung bei der Frage der Vergrößerung des Momentes kaum eine Rolle spielt.

Wir müssen aber daran denken, daß ja der Wert IR_i nur bei Nennleistung so gering ist, wie wir dies oben angenommen haben. Deswegen wollen wir die sich aus dem st. str. Schema ergebende interessante Frage untersuchen, die darin besteht, daß der sich durch eine bestimmte Vergrößerung von I ergebende Zuwachs von M und daher auch die entsprechende Größe M_d desto geringer wird, je größer das Maß der Verringerung von Φ ist.

Das st. str. Schema zeigt aber nicht nur anschaulich die zur Beantwortung dieser Frage notwendigen Zusammenhänge auf, sondern zeigt auch unmittelbar jene Grenze der Verringerung von Φ auf, bis zu der überhaupt das Entstehen des dynamischen Momentes M_d möglich ist. Ein Blick auf das Schema zeigt nämlich, daß diese kritische Grenze dann besteht, wenn $I(R_i + R) = U_i$, d. h. wenn

$$I = \frac{U}{2(R_i + R)} . \tag{10}$$

Tatsächlich ist in diesem Falle, wie das st. str. Schema äußerst anschaulich zeigt, die z. B. 1%ige Vergrößerung bezw. Verkleinerung von $I(R_i + R)$ und daher auch I mit einer 1%-igen Verkleinerung bezw. Vergrößerung des Parameters U_i und daher auch des Flusses Φ verbunden, d. h. die Wirkung der Änderung von I auf die Größe $M = C\Phi I$ wird vollkommen kompensiert durch die entgegengesetzte Wirkung der entsprechenden Änderung von Φ. Das bedeutet, daß in diesem Falle $M = M'_B$ und $M_d = 0$ und daher auch $\omega = \text{const}$ bleibt, was nebenbei auch zeigt, daß wir in den soeben dargelegten Gedankengängen für diesen Fall richtig angenommen haben, daß Φ und U_i sich zu einander proportional ändern.

Wird aber der Belastungsstrom größer, als es der durch Gleichung (10) dargestellten Grenze entspricht, so sehen wir aus dem st. str. Schema sofort, daß da ja nunmehr $U_i < I(R_i + R)$ ist, eine prozentuelle Änderung des Parameters U_i mit einer prozentuell geringeren entgegengesetzt gerichteten Änderung des Stromes I verbunden ist. Deswegen ist nunmehr die unmittelbare Wirkung der Änderung des Flusses Φ auf den Wert M größer als die entgegengesetzt gerichtete Wirkung der ebenfalls durch die Änderung von Φ hervorgerufene Änderung von I. Dies bedeutet also, daß, wenn bei der Erreichung der durch die Gleichung (10) gekennzeichneten kritischen Grenze Φ weiter verkleinert wird, dies zu einer Verkleinerung des Momentes M und daher zur Entstehung eines negativen dynamischen Momentes $-M_d$ führt, welches den Wert von ω nicht mehr erhöhen sondern verringern wird. Wir sehen also, daß bei der erwähnten kritischen Grenze die Wirkung der Veränderung von Φ auf ω ihre Richtung ändert.

Allerdings könnte es im ersten Augenblick scheinen, als hätte die kritische Grenze gemäß Gleichung (10) keine praktische Bedeutung. Wenn wir nämlich, um den großen Vorteil der mit Hilfe der Flußänderung durchzuführenden Drehzahlregelung auszunützen, daß die großen Kupferverluste im Widerstand R vermeiden werden können, den letzteren ausschalten, ergibt sich die erwähnte kritische Grenze nur dann, wenn $IR_i = U/2$ ist. Wenn also z. B. beim Nennstrom I_n die Größe $I_n R_i = 0{,}05$ U ist, kann die kritische Grenze nur beim Wert $I = 10\, I_n$ eintreten, d. h. bei einer im jeder Beziehung unstatthaften Überbelastung.

Trotzdem gibt es aber zwei Fälle, in denen die Gleichung (10) nicht nur theoretische sondern auch praktische Bedeutung besitzt. Der eine — auf den wir noch später bei der Untersuchung der Drehzahlregulierung mit Hilfe der Ward-Leonard Schaltung zurückkommen wollen — ergibt sich, wenn zwar $R = 0$ ist, aber U viel kleiner als in den bisher angenommenen Fällen, was zur Folge hat, daß der sich gemäß Gleichung (10) ergebende Grenzwert von I geringer sein kann als der maximal statthafte Wert des Belastungsstromes.

Ein zweiter Fall, in dem die Gleichung (10) praktische Bedeutung gewinnen kann, besteht dann, wenn wir die mit Hilfe der Änderung von R erfolgende

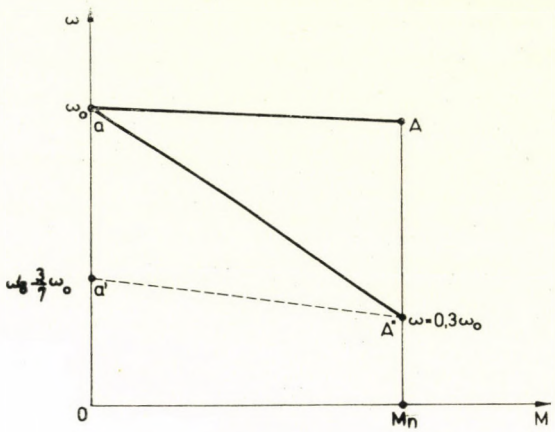


Bild 5

Drehzahlregulierung mit der mit Hilfe der Änderung von Φ erfolgenden kombinieren wollen. Die sich hiebei eventuell ergebenden Schwierigkeiten möge folgendes konkretes Beispiel anzeigen.

Nehmen wir an, daß im Bild 5 die Gerade $a-A$ die natürliche Kennlinie darstellt, die dem Falle $R = 0$ entspricht. Ferner sei der bei Nennbelastung auftretende Wert ω gleich $\omega_n = 0{,}95\omega$, was bedeutet, daß $I_n R_i = 0{,}05\ U$. Wenn unsere Aufgabe darin besteht, durch Einschaltung entsprechender Werte R bei gegebenem Moment M_n den Wert ω zu senken, wie das im Bild 2 die Arbeitspunkte A_1, A_2, A_3 usw. zeigten, können wir z. B. die im Bild 5 durch den Arbeitspunkt A'' hindurchgehende Gerade erhalten, bei der sich ω bis auf den Wert $0{,}3\ \omega_0$ verringert, wozu nur nötig ist, einen zusätzlichen Widerstand vom Werte $R = 13R_i$ einzuschalten. Da $I = M/(C\Phi)$ ist, ist die Größe der sich hiebei ergebenden zusätzlichen Kupferverluste gleich $13R_i M^2/(C^2\Phi^2)$. Wollen wir nunmehr ω weiter verringern, können wir zu diesem Zwecke den Wert R weiter erhöhen, wodurch sich diese Verluste entsprechend vergrößern. Es ergibt sich also der naheliegende Gedanke, die weitere Verringerung von ω nicht durch die Vergrößerung von R, sondern durch die von Φ zu erzielen. Dies hätte nicht nur den Vorteil, daß die zusätzlichen Kupferverluste nicht weiter ansteigen würden, sondern sogar den, daß, wenn wir z. B. Φ im Verhältnis 3 : 4 vergrößern, wodurch sich bei gegebenem Werte M_n der Strom I im Verhältnis 4 : 3 verringert, die Kupferverluste im Verhältnis 16 : 9 abnehmen würden.

Ein Blick auf das st. str. Schema zeigt aber, daß es auf diese Weise nicht möglich ist, ω unter den Wert $0{,}3\ \omega_0$ zu senken. Tatsächlich ergibt sich folgendes: Wenn Φ wächst und infolge der mechanischen Trägheit im ersten Augenblick ω sich nicht ändert, wächst U_i proportional zu Φ. Da aber vor der Flußänderung $U_i = 0{,}3\ U$ und $I(R_i + R) = 0{,}7\ U$ war und nach der Flußänderung $U_i + I(R_i + R) = U$ sein muß, sehen wir, daß eine bestimmte prozen-

tuelle Vergrößerung von Φ von einer prozentuell geringeren Verkleinerung des Stromes I begleitet ist, was zur Folge hat, daß M größer wird als $M_n = M'_B$ und sich ein Moment $+M_d$ ergibt, wodurch ω nicht verkleinert, sondern vergrößert wird. Der mit der Änderung des Flusses einsetzende Übergangszustand besitzt also nicht die gewünschte, sondern die dieser entgegengesetzte Richtung. Aus dem st. str. Schema können wir auch sehr einfach ablesen, welcher neue stationäre Zustand sich tatsächlich ergibt, wenn die Größe des Flusses im Verhältnis 3 : 4 vergrößert wird. Mit Rücksicht darauf nämlich, daß M erst dann wieder gleich sein wird $M_n = M'_B$, d. h. daß M_d erst dann verschwindet, wenn der Strom I im Verhältnis 4 : 3 abnimmt, sehen wir sofort, daß der Spannungsabfall $I(R_i + R)$ von der früheren Größe 0,7 U auf den Wert $2{,}1U/4$ abnehmen muß. Das bedeutet, daß um denselben absoluten Betrag U_i anwachsen muß, d. h. vom Wert 0,3 U bis zum Wert $1{,}9U/4$. Da aber Φ nur im Verhältnis 3 : 4 zunimmt, erfordert dieser Wert U_i, daß ω vom Wert $0{,}3\omega_0$ im Verhältnis 16 : 19 anwachse. Es ergibt sich also aus dem st. str. Schema die Tatsache, daß sich bei Vergrößerung von Φ anstatt der auf Grund der Kennlinien durchaus möglich erscheinenden weiteren Verringerung der Wert ω im gegebenen Beispiel um fast 20% zunimmt.

Wir konnten uns also tatsächlich davon überzeugen, daß das st. str. Schema in bestimmten Fällen imstande ist, in äußerst einfacher Weise auch solche Tatsachen und Zusammenhänge aufzudecken, die aus den Kennlinien keineswegs hervorgehen.

Allerdings könnte jemand einwenden, daß es doch auch auf Grund des Bildes 4 möglich ist, festzustellen, daß es einen solchen Grenzfall gibt, in dem die Änderung von Φ die Wirkung auf die Änderung von ω zu verlieren scheint und zwar dort, wo die Gerade $a-c$ von der steileren Geraden $a'-c'$ geschnitten wird, also irgendwo weit rechts von der Abbildung. Und im ersten Augenblick scheint es tatsächlich logisch zu sein, daß ein Schnittpunkt, der bei zwei verschiedenen Flußgrößen denselben Werten ω und M entspricht, jenen Grenzfall darstellt, der der Gleichung (10) entspricht.

Eine derartige Annahme wäre aber falsch und ebendeshalb ein interessantes Beispiel dafür, daß die Betrachtung von Kennlinien manchesmal zu Mißverständnissen führen kann, die sich bei der Betrachtung des betreffenden st. str. Schemas sofort als solche entpuppen.

Tatsächlich, wenn wir auf Grund des st. str. Schemas die Frage untersuchen, ob der erwähnte Schnittpunkt dem durch die Gleichung (10) gekennzeichneten Fall entspricht, können wir außerordentlich einfach feststellen, daß hievon keine Rede sein kann. Wenn wir nämlich bei den durch den Schnittpunkt gegebenen gleichbleibenden Werten ω und M den Fluß Φ auf den m-facher Wert erhöhen, wächst U_i proportional zu Φ auf den Wert $m\ U_i$, d. h. ändert sich um die Größe $(m-1)U_i$. Andererseits kann M nur dann konstant bleiben, wenn der Spannungsabfall $I(R_i + R)$ auf den Wert $I(R_i + R)\,m$

abnimmt, d. h. um den Wert $(m-1)I(R_i+R)/m$ kleiner wird. Da die Summe von U_i und $I(R_i+R)$ gleich bleiben muß U, zeigt sich, daß im Schnittpunkt

$$I = \frac{mU}{(m+1)(R_i+R)} \tag{11}$$

Wie ersichtlich, besitzt die den Schnittpunkt kennzeichnende Gleichung (11) eine vollkommen andere Struktur als die Gleichung (10), da die letztere für jeden Wert Φ gilt, während in der ersteren auch die das Wachstum des Flusses kennzeichnende Größe m vorkommt.

Das st. str. Schema ist aber nicht nur imstande, zu zeigen, daß es fehlerhaft wäre, vom erwähnten Schnittpunkt anzunehmen, daß es die kritische Grenze anzeigt, bei der die Wirkung der Änderung des Flusses auf die Drehzahl ihre Richtung wechselt. Das st. str. Schema ist auch imstande, sehr einfach die Ursache eines solchen eventuellen Mißverständnisses zu klären und jene physikalischen Erscheinungen aufzudecken, die sich hinter der Gleichung (11) verbergen. Hiebei wird sich zeigen, daß nicht nur zwischen den Gleichungen (10) und (11) in Wirklichkeit kein Widerspruch besteht, sondern auch, daß diese Formeln eigentlich nur verschiedenen Phasen desselben durch die Flußänderung ausgelösten Prozesses der Änderung des stationären Zustandes entsprechen.

Denken wir uns z. B., daß die Gerade $a-A''$ im Bild 5 einem solchen Fluß entspricht, der gleich ist $3\Phi_{\max}/7$, wobei $\Phi_{\max}$ jenen maximalen Wert des Flusses Φ darstellt, bis zu dem der letztere überhaupt vergrößert werden kann. Untersuchen wir auf Grund des st. str. Schemas die Frage, wie sich der Wert $\omega = 0{,}3\omega_0$ ändert, wenn der Wert des Flusses anwächst. In der Maschine, in der bisher $I(R_i+R) = 0{,}7\ U$ und $U_i = 0{,}3U$ war, beginnt infolge der Zunahme des Wertes Φ der Wert U_i zu wachsen, wobei dementsprechend $I(R_i+R)$ abnimmt. Wie bereits bei der Ableitung der Gleichung (10) festgestellt wurde, ist, da ja $0{,}7\ U > 0{,}5\ U$ ist, die prozentuelle Vergrößerung von Φ größer als die entsprechende prozentuelle Verkleinerung von $I(R_i+R)$ und daher wächst M und es entsteht ein dynamisches Moment $+M_d = M - M'_B$, was zur Folge hat, daß sich ω nicht verkleinert, sondern vergrößert. Diese Erscheinung bleibt bei der weiteren Vergrößerung von Φ aufrecht, d. h. das dynamische Moment $+M_d$, wenn sich auch sein Wert verkleinert, behält sein positives Vorzeichen, wodurch sich ω weiter erhöht. Das durch die weitere Zunahme des Flusses entstehende dynamische Moment $+M_d$ und sein Einfluß auf ω verschwindet erst dann, wenn der Spannungsabfall $I(R_i+R)$ die durch Gleichung (10) gekennzeichnete Grenze erreicht, d. h. wenn er von der ursprünglichen Größe $0{,}7\ U$ bis auf den Wert $0{,}5\ U$ abnimmt. Das st. str. Schema zeigt auch in einfacher Weise, wie groß bei dieser Grenze ω sein wird. Da nämlich der Strom im Verhältnis 7 : 5 kleiner geworden ist, muß, da ja $M_d = 0$, d. h. $M = M_n$ ist,

der Fluß im Verhältnis 5 : 7 zugenommen haben. Andererseits wächst U_i von seinem ursprünglichen Wert 0,3 U bis auf 0,5 U, was nur dann möglich ist, wenn ω auf den Wert 0,3 ω_0 25/21 wächst. So ergibt sich also, daß im besprochenen Falle die Ordinate des Arbeitspunktes fast um 20% größer ist als im Punkte A''. (Im Bild 5 wurde dieser Punkt, um die Verständlichkeit des Bildes nicht zu stören, nicht gezeichnet, weil er zu nahe zum Punkte A'' liegt.)

Wenn wir den Fluß Φ weiter vergrößern und daher I entsprechend weiter abnimmt, d. h. kleiner wird, als es der kritischen Grenze gemäß Gleichung (10) entspricht, wechselt die Wirkung des Anwachsens des Flusses Φ auf ω die Richtung, weil nunmehr die prozentuelle Verringerung von I stärker ist als die prozentuelle Vergrößerung von U_i. Es wird daher $M < M_n$ und es entsteht ein dynamisches Moment $-M_d$, welches ω verringert. So bewegt sich also nunmehr der Arbeitspunkt wieder zum Punkt A'' hin. Wenn Φ den maximalen Wert $\Phi_{\max} = 7\Phi/3$ erreicht, wird $I(R_i + R)$ im Verhältnis 3 : 7 kleiner als ursprünglich, d. h. der anfängliche Wert $I(R_i + R)$ nimmt von 0,7 U bis auf 0,3 U ab, während U_i vom vorherigen Wert 0,3 U bis auf 0,7 U wächst.

In diesem Falle ergibt sich bei gegebenem Wert $M = M_n$ die mit Hilfe von U_i und $I(R_i + R)$ erfolgende Balanzierung von U ebenso beim ursprünglichen Wert $\omega = 0{,}3\omega_0$, wie es vor dem Beginn des oben untersuchten Prozesses der Vergrößerung von Φ der Fall war. Hiebei wird das Moment, in dessen Ausdruck $C\Phi I$ der Wert Φ im Verhältnis 3 : 7 gewachsen ist, während I im Verhältnis 7 : 3 kleiner geworden ist, wieder gleich M_n. Dies bedeutet offenbar, daß der Arbeitspunkt, der bei Beginn des betrachteten Prozesses der Änderung des Flusses noch im Punkt A'' war, am Ende dieses Prozesses wieder in denselben Punkt zurückgekehrt ist. Da aber nunmehr der Wert des Flusses gleich ist $\Phi_{\max} = 7\Phi/3$, so ist klar, daß ihm im Bild 7 nun nicht mehr die Gerade $a-A''$ entspricht, sondern die gestrichelt gezeichnete Gerade $a'-A''$, wobei die Ordinate ω_0' des Punktes a' sich so zu der des Punktes a verhält, wie 3 : 7, d. h. also $\omega_0' = 3\omega_0/7$. Die Steilheit der Geraden $a'-A''$ verhält sich zu der der Geraden $a-A''$ wie $3^2 : 7^2$. Es zeigt sich also, daß der Punkt A'' den Schnittpunkt der zu Φ bezw. zu $\Phi_{\max}$ gehörigen Geraden darstellt, und auch der für diesen Fall gültigen Gleichung (11) entspricht, demgemäß, wenn anstatt m der Wert 7/3 eingesetzt wird, sich ergibt, daß $I(R_i + R) = 0{,}7U$ ist, was tatsächlich dem sich am Ende des oben betrachteten Prozesses einstellenden Strom I entspricht. So wird klar, woraus die erwähnte mögliche fälschliche Identifizierung der beiden durch (10) und (11) gekennzeichneten Fälle sich ergeben kann: In dem der Gleichung (10) entsprechenden Fall verliert nämlich die Änderung des Flußes ihre Wirkung auf die Änderung von M und ω, weil sich die Richtung dieser Wirkung umkehrt. In dem der Gleichung (11) entsprechenden Falle hingegen scheint es irrtümlicherweise, als ob ebenfalls die Änderung von Φ nicht auf die Werte ω und M einwirkt, wenn wir sehen, daß vor und nach der Änderung des Flusses von Φ bis $7\Phi/3$ dieselben Werte ω und M_n

gültig sind. Was die Kennlinien nicht zeigen, das st. str. Schema hingegen äußerst klar zum Ausdruck bringt, ist der Unterschied, daß in dem der Gleichung (10) entsprechenden Falle eigentlich die differentiale Wirkung des Flusses auf die Größe M, d. h. der Ausdruck $dM/d\Phi$ gleich 0 wird, weil das der Änderung von Φ entsprechende Moment in diesem Grenzfall maximal wird. In dem der Gleichung (11) entsprechenden Falle hingegen zeigt das st. str. Schema, daß vor und nach einer endlichen Flußänderung sich zwar dieselben Werte ω und M ergeben können, aber während der Änderung vorübergehend die Werte ω bezw. M sich bis zu der der Gleichung (10) entsprechenden Grenze ändern und nach deren Erreichung wieder die ursprüngliche Größe annehmen. Es gibt aber einen Fall, in dem die Gleichungen (10) und (11) tatsächlich ein und derselben Erscheinung entsprechen, wenn sich nämlich die Gleichung (11) auf eine differentiale Flußänderung bezieht. Tatsächlich fungieren in diesem Falle in dieser Gleichung anstatt der Werte m bezw. $(m + 1)$ die Werte $(1 + dm)$ bezw. $(2 + dm)$ und bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen nimmt die Gleichung (11) die Form der Gleichung (10) an.

Bisher untersuchten wir mit Hilfe des st. str. Schemas jenen Hauptfall, in dem $U = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ ist, aber R sich ändert, ferner den zweiten Hauptfall, in dem $U = \text{const}$ und $R = \text{const}$ ist, aber die Größe Φ sich ändert, und schließlich einen solchen, sich aus der Kombination dieser beiden Methoden der Drehzahlregelung ergebenden Fall, in dem $U = \text{const}$, aber sowohl R als Φ geändert werden. Nunmehr gehen wir zur Untersuchung des dritten Hauptfalles über, in dem $R = \text{const}$, $\Phi = \text{const}$, aber U sich ändert.

Die Grundlage dieser Methode bildet bekanntlich die Ward-Leonard Schaltung, bei der die den Motor speisende Spannung von veränderlicher Größe ein Generator erzeugt, dessen Erregerfluß stufenlos verändert werden kann. Da der Hauptvorteil dieser Schaltung darin besteht, daß der zusätzliche Widerstand R überflüssig ist, werden wir im Weiteren davon ausgehen, daß $R = 0$. Da aber im Stromkreis von I nunmehr zum inneren Widerstand des Motors auch noch der des speisenden Generators hinzukommt, werden wir der Einfachheit halber annehmen, daß der letztere ebenfalls den Wert R_i besitzt, so daß in Gleichung (6) anstatt der Größe $R_i + R$ die Größe $2R_i$ und anstatt U die innere Spannung des Generators zu setzen ist. Die Ankerrückwirkung im Generator vernachlässigen wir auf Grund ähnlicher Erwägungen, wie dies beim Motor geschah. Es ist also bei konstantem Moment M_n die Steilheit der die Kennlinie darstellenden Geraden konstant, unabhängig vom Wert ω, und zwar zweimal so groß als dies bei der Geraden $O-A-8$ im Bild 2 der Fall ist. Die Gleichung (6) zeigt, daß bei beständiger Verringerung von U diese Gerade sich stufenlos nach abwärts verschiebt, wobei sich die Steilheit nicht verändert, wie dies Bild 6 zeigt. Aus letzterer geht auch hervor, daß auf diese Weise z. B. bei gegebenem Moment M_n der Wert ω verändert werden kann und zwar von dem $\omega = 0$ entsprechenden Punkt A' über die Punkte A_1, A_2 u. s. w. bis zu

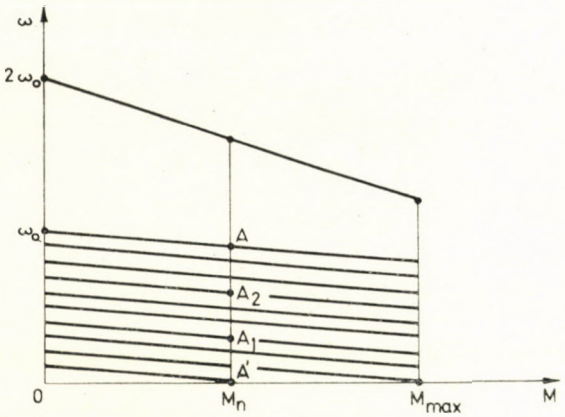


Bild 6

dem ω_n entsprechenden Punkt A, bezw. umgekehrt von A bis A', was mit Hilfe der Flußänderung nicht möglich wäre.

Die Uutersuchung des erwähnten Regulierungsvorganges aufgrund des st. str. Schemas.

Es zeigt außerordentlich anschaulich, das Wesentliche der physikalischen Erscheinungen auf, die entstehen, wenn der Wert U auf $U - \Delta U$ verringert wird. Mit Rücksicht darauf, daß im ersten Augenblick infolge der mechanischen Trägheit die Werte ω und daher bei konstanter Größe Φ auch U_i konstant bleiben, nimmt der Spannungsabfall $2IR_i = U - U_i$ um ΔU ab, und dementsprechend verkleinern sich I und M. Das sich hiedurch ergebende negative dynamische Moment $-M_d$ verringert ω. Da mit letzterem auch der Wert U_i abnimmt, wächst, — woferne die Größe $U - \Delta U$ konstant bleibt — dementsprechend I und M, wodurch der absolute Betrag von $-M_d$ abnimmt. Sobald $-M_d = 0$ wird, erreicht ω jenen neuen stationären Wert, der sich aus Gleichung (6) ergibt, wenn U durch $U - \Delta U$ ersetzt wird. Wenn dagegen die Verringerung von U nicht gleich ΔU bleibt, sondern weiter zunimmt, verschwindet $-M_d$ nicht und verringert ω solange, bis der verringerte Wert von U stationär wird. Auch ist es klar, daß die geschilderte Erscheinung entgegengesetzte Richtung erhält, wenn U um ΔU zunimmt. Das st. str. Schema widerspiegelt also klar jenen Regulierungsvorgang, der der Verschiebung des Arbeitspunktes von Punkte A der Kennlinienschar gemäß Bild 6 bis zum Punkt A' (oder umgekehrt) entspricht.

Das st. str. Schema ist aber auch in diesem Falle imstande, solch wichtige Tatsachen zu widerspiegeln, die die Kennlinienschar des Bildes 6 nicht aufzeigt.

Aus letzterer scheint nämlich hervorzugehen, als würde, wenn z. B. der Wert ω bis zum Punkt A' d. h. also bis $\omega = 0$ verringert wird, dieser Vorgang sich bei konstantem Wert M_n abspielen, d. h. gemäß einer Geraden $A - A'$. In Wirklichkeit aber, wie dies aus dem st. str. Schema sofort hervorgeht, ist bei gleichbleibendem Wert $M = M_n = M'_B$ die Veränderung von ω gar nicht möglich, weil ja in diesem Falle kein dynamisches Moment $\pm M_d$ entsteht, d. h. $\omega = \text{const}$ bleiben muß. Da die Punkte A_1, A_2, usw. der Kennlinienschar ausschließlich stationären Zuständen entsprechen, könnte der sich von A bis A' verschiebende Arbeitspunkt nur dann mit den Punkten A_2 bzw. A_1 zusammenfallen, wenn die Verringerung des Wertes U stufenförmig erfolgen und nach jeder Stufe sich ein den Punkten A_2 bezw. A_1 entsprechender stationärer Zustand einstellen würde. Wenn hingegen der Vorgang der Verringerung von U ohne Stufen erfolgt, muß ein beständig den Wert von ω weiter verringerndes Moment $-M_d$ vorhanden sein, d. h. die Regelung erfolgt nicht gemäß einer durch die Punkte A_2 bezw. A_1 hindurchgehenden Geraden, sondern gemäß einer links von diesen Punkten liegenden Linie, die dem Wert $M_n - M_d$ entspricht. Es ist ebenso klar, daß, wenn wir ω vom Werte $\omega = 0$, d. h. vom Punkte A' bis zum Punkt A regulieren wollen, dies gemäß einer rechts von den Punkten A_1, bezw. A_2 liegenden Linie erfolgen muß, die dem Ausdruck $M_n + M_d$ entspricht. Übrigens ist die Tatsache, daß in der Kennlinienschar diese Erscheinung nicht aufgezeigt ist, auch damit zu erklären, daß der zur Durchführung der stufenlosen Änderung von ω notwendige Wert $\pm M_d$ keine beständige Größe hat. Wie das st. str. Schema klar zeigt, muß der absolute Wert von $\pm M_d$ wachsen, wenn das mechanische Trägheitsmoment größer wird, bezw. wenn wir wünschen, daß die Zeit, innerhalb deren ω die Punkte A' bezw. A erreicht, kleiner werde.

Die Untersuchung eines solchen Falles bei dem außer der Änderung von U auch die von Φ verwendet wird

Es kann z. B. der Regelbereich dadurch erweitert werden, daß, nachdem wir mit Hilfe der Vergrößerung von U die Lage der durch der Punkt ω_0 hindurchgehenden Geraden erreicht haben, Φ verringert wird, wobei, wenn dies z. B. bis zum Wert $\Phi/2$ geschieht, sich diese Gerade stufenlos bis zu der Lage der durch den Punkt $2\omega_0$ hindurchgehenden Geraden im Bild 6 bewegt, bei der die Steilheit der Geraden viermal so groß wird, als die der durch den Punkt ω_0 hindurchgehenden. Verkleinern wir den Fluß in geringerem Maße, so erhalten wir zwischen den angegebenen Grenzen liegende, in den Bild 6 nicht gezeichnete Geraden, deren Steilheit verkehrt proportional ist zu Φ^2. Wie ersichtlich, ist zwar in diesem Falle eine stufenlose Drehzahlregelung von 0 bis $2\omega_0$ möglich, aber sie besitzt den Nachteil, daß bei der Erreichung des Punktes A die die Regulierung durch Spannungsänderung bei konstantem Fluß dienende Schal-

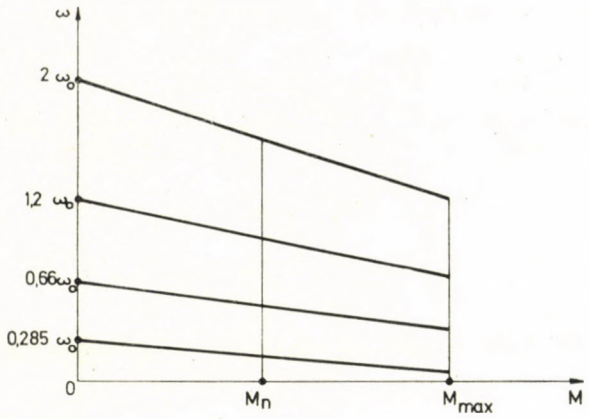


Bild 7

tung auf eine solche geändert werden muß, welche bei gegebener Spannung U die Regulierung mit Hilfe der Flußänderung gewährleistet. Dieser Nachteil wäre zu beheben, wenn die Verringerung des Wertes Φ schon bei den kleinsten U Werten einsetzen würde und im Weiteren, während U stufenlos von 0 bis zu seinem Maximalwert ansteigt, gleichzeitig die stufenlose Änderung des Flusses von seinem maximalen Wert bis zu $\Phi/2$ erfolgen würde. Damit wäre allerdings verbunden, daß die Steilheit der zu den verschiedenen Werten ω gehörigen Geraden schon von $\omega = 0$ an ständig bis zu der Größe der $2\omega_0$ entsprechenden Geraden anwachsen würde, aber praktisch braucht dieser Umstand keine Schwierigkeiten zu bereiten.

Bild 7. zeigt die sich derart ergebende, durch den Anfangspunkt $2\omega_0$ hindurchgehende, den Werten $U = U_{max}$ und $\Phi = 0{,}5\Phi_{max}$ entsprechende höchstgelegene Gerade, die identisch ist mit der höchstgelegenen im Bild 6. Außerdem sind beispielsweise die den Werten $U = 0{,}75U_{max}$ und $\Phi = 0{,}625\Phi_{max}$, ferner die den Werten $U = 0{,}5U_{max}$ und $\Phi = 0{,}75\Phi_{max}$ und schließlich die den Werten $U = 0{,}25U_{max}$ und $\Phi = 0{,}875\Phi_{max}$ entsprechenden Geraden gezeichnet, deren Anfangspunkte Ordinaten von der Größe $1{,}2\omega_0$ bezw. $0{,}66\omega_0$ bezw. $0{,}285\omega_0$ besitzen.

Ein schwieriges Problem ruft indessen eine aus den Kennlinien überhaupt nicht erkennbare Tatsache hervor, auf die das st. str. Schema bereits im Zusammenhange mit der weiter oben untersuchten, bei $U = \text{const}$ mit Hilfe der Flußänderung erfolgenden Drehzahlregulierung hingewiesen hat. Es handelt sich nämlich darum, daß der im Grenzfall gemäß Gleichung (10) sich beim Widerstand $R_i + R = 2R_i$ ergebende Strom I, der bei großen U Werten sehr groß ist, was zur Folge hat, daß die Richtung der Wirkung der Änderung von Φ auf das Moment sich nur bei praktisch überhaupt großen Belastungen ändert, im

Falle kleiner U Werte bereits innerhalb des praktischen Arbeitsbereiches auftreten kann.

So kann z. B. aus dem st. str. Schema augenblicklich festgestellt werden, daß der Motor auf Grund der im Bild 7 dargestellten Methode gar nicht angelassen werden kann. Wenn nämlich $\omega_0 = 0$ und daher auch $U_i = 0$, ist $2IR_i = I(R_i + R) = U$, d. h. der Arbeitspunkt liegt weit hinter der durch Gleichung (10) gekennzeichneten kritischen Grenze $I(R_i + R) = U/2$. Wenn wir annehmen, daß wir den Fluß verkleinern, zeigt das st. str. Schema in dem angenommenen Fall klar, daß die prozentuelle Verringerung von Φ viel stärker ist, als die entsprechende prozentuelle Vergrößerung des Spannungsabfalles $2IR_i$. Infolgedessen würde M abnehmen und ein solches negatives dynamisches Moment $-M_d$ entstehen, welches bestrebt wäre, den Rotor in der der gewünschten entgegengesetzten Richtung zu beschleunigen.

Das st. str. Schema hilft aber auch in sehr einfacher Weise festzustellen, bis zu welchem Wert die Spannung U von $U_{\max}$ an verringert werden kann, ohne daß die erwähnte kritische Grenze überschritten wird.

Hiezu ist es vorher nötig, festzustellen, wie mit der Zunahme des Flusses einerseits die Verringerung des Grenzwertes $U/2$ und andererseits die Verringerung des mit dieser Größe gemäß Gleichung (10) zu vergleichenden Wertes $2IR_i$ zusammenhängt. Dort, wo diese Größen zusammenfallen, bekommen wir jenen kritischen Wert Φ_{kr} des Flusses, bei dem sich die kritische Grenze gemäß Gleichung (10) ergibt. Wenn wir Φ_{kr} in jene Gleichung einsetzen, die die Abhängigkeit der Größe $U/2$ von Φ anzeigt, erhalten wir jenen kritischen Wert U_{kr}, bei dem die Wirkung der Flußänderung auf die Größe ω ihre Richtung wechselt.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Veränderung von Φ mit der von U so kombiniert ist, daß U linear von $U_{\max}$ bis 0 abnimmt, während Φ linear vom Wert $\Phi_{\max}/2$ bis zum Wert $\Phi_{\max}$ wächst. Auf Grund dieser Annahme ergab sich ja auch Bild 7. Dann läßt sich $U/2$ mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{U}{2} = U_{\max} - \frac{\Phi U_{\max}}{\Phi_{\max}} \tag{12}$$

ausdrücken. Andererseits gilt auch für die maximalen Werte I_n und $\Phi_{\max}$, daß $M_n = CI_{n,\max} \cdot \Phi_{\max}$ ist. Daher ist, wenn wir außerdem annehmen, daß $2I_{n,\max}R_i = 0{,}1U_{\max}$ ist,

$$2IR_i = \frac{0{,}1U_{\max} \cdot \Phi_{\max}}{\Phi} . \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (12) und (13), erhalten wir für den der Gleichung (10) entsprechenden Fall, daß $2IR_i = U/2$, auf Grund einer quadratischen Gleichung den kritischen Fluß Φ_{kr}, bei dem die Wirkung der Flußänderung auf das Moment seine Richtung wechselt. Von den sich ergebenden beiden Lösungen

bezieht sich nur eine auf den untersuchten Bereich zwischen Φ_{max} und $\Phi_{max}/2$ nämlich $\Phi_{kr} = 0{,}885\Phi_{max}$. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (12) ein, so ergibt sich mit $U = U_{kr} = 0{,}23U_{max}$ jener Wert von U, bei dem sich die Richtung der Einwirkung der Flußveränderung umkehrt. Wenn wir annehmen, daß das maximal statthafte Moment gleich ist $2M_n$, so ergibt sich, daß der Strom ebenfalls auf das Doppelte wächst, d. h., damit die kritische Grenze außerhalb des gesamten Momentenbereiches sei, dürfen wir U nur bis zum Wert $0{,}46U_{max}$ verkleinern.

Wir können also feststellen, daß das st. str. Schema nicht nur imstande ist, aus den Kennlinien des Bildes 7 überhaupt nicht erkennbare, praktisch große Bedeutung besitzende Erscheinungen in sehr einfacher Weise aufzudekken, sondern auch den Bereich, innerhalb dessen diese auftreten, zu umgrenzen.

Auch können wir die interessante Tatsache feststellen, daß in den bisher untersuchten drei Hauptfällen, so wie in den beiden sich aus ihrer Kombination ergebenden Fällen zur Darstellung der Gesetzmäßigkeiten des Regulierungsvorganges fünf von einander vollkommen verschiedene Kennlinienscharen notwendig sind, hingegen nur ein einziges st. str. Schema!

Es dürfte aber notwendig sein, zwecks Vermeidung einiger möglicher Mißverständnisse, auf die folgenden Fragen noch ausführlicher, als es bisher geschah, zurückzukommen:

Der Leser könnte nämlich eventuell die Frage stellen, ob nicht ein Widerspruch darin besteht, daß wir bei der Benützung des st. str. Schemas einerseits die längs der verschiedenen Konturen auftretenden Induktivitäten nicht berücksichtigt haben, aber andererseits trotzdem immer wieder zu der Frage zurückgekehrt sind, wie das dynamische Moment $\pm M_d$ den Rotor beschleunigt bzw. verlangsamt, und wie dies auf die Änderungen der übrigen elektrischen und magnetischen Parameter einwirkt. Dies taten wir, obwohl wir doch wissen, daß diese Änderungen gemäß solchen transienten Vorgängen stattfinden, die außer der von uns berücksichtigten mechanischen Trägheit vor allem auch noch durch die von uns nicht berücksichtigten Induktivitäten determiniert sind.

Ein derartiger Einwand wäre aber nur dann begründet, wenn der Verfasser in diesem Artikel sich zum Ziele gesetzt hätte, die erwähnten transienten Vorgänge zu beschreiben. Daß aber hievon keine Rede ist, geht einerseits daraus hervor, daß bereits oben öfter darauf hingewiesen wurde, daß er nur die verschiedenen möglichen stationären Zustände zu untersuchen und mit einander zu vergleichen wünscht (d. h. also bei den verschiedenen transienten Vorgängen nur den anfänglichen mit dem endgültigen stationären Zustand). Andererseits geht es klarerweise auch daraus hervor, daß er das von ihm eingeführte neuartige strukturelle Schema als stationäres bezeichnet und letztere Tatsache damit unterstricht, daß die Kontur, längs deren der durch das Auftreten des dynamischen Momentes ausgelöste transiente Vorgang sich anfäng-

lich weiterbewegt, mit Hilfe von strichlierten Linien gezeichnet wird, als Hinweis darauf, daß diese Kontur nur in dem obenerwähnten begrenzten Sinne verwendet werden darf, d. h. dazu, die Richtung der Wirkung von $\pm M_d$ auf ω festzustellen.

Es muß auch noch auf folgenden wichtigen Umstand hingewiesen werden: Daß die obenerwähnte Annahme, daß die Tatsache des Überganges verschiedener stationärer Zustände ineinander auch ohne Kenntniss der sich zwischen ihnen abspielenden transienten Vorgänge untersucht werden kann, berechtigt ist, dafür spricht, daß ja auch die Verwendung der gebräuchlichen mechanischen Kennlinien stillschweigend auf derselben Annahme beruht.

Da nämlich jeder Punkt der mechanischen Kennlinien irgendeinem zwischen den Parametern M und ω zustandegekommenen stationären Zustand entspricht, so folgt daraus, daß, wenn wir die Verschiebung eines Arbeitspunktes längs einer Kennlinie untersuchen, wir von einem möglichen stationären Zustand zu einem andern übergehen, ohne die Tatsache zu berücksichtigen, daß eigentlich der erstere den Beginn und der letztere das Ende eines transienten Prozesses darstellt. Es möge auch noch darauf hingewiesen werden, daß die Vernachlässigung der Frage der transienten Vorgänge bei den gebräuchlichen Kennlinien nicht nur im Falle verhältnismäßig langsamer Zustandsänderungen gebräuchlich ist. So fungiert z. B. bei der Darstellung des Anlaufvorganges gemäß Bild 2 die Verschiebung des Arbeitspunktes vom Punkt *1* zum Punkt *1'* nur als Übergang über die verschiedenen dazwischen liegenden Punkte, wobei vollkommen davon abgesehen wird, welche transienten Prozesse sich beim Übergang von einem Punkt zum andern abspielen. Auch bei der Verschiebung des Arbeitspunktes von *1'* bis *2* wird keinerlei Rücksicht genommen auf die Tatsache, daß — wenn wir auch annehmen, daß sich die Parameter ω und U_i innerhalb der in Betracht kommenden kurzen Zeit nicht ändern — auf jeden Fall die Umschaltung auf den kleineren Wert von R auch einen elektromagnetischen transienten Vorgang auslöst.

Aus dem Grunde, weil die Punkte der mechanischen Kennlinien alle nur verschiedenen Gleichgewichtszuständen entsprechen, werden sie ja oft als »statische« mechanische Kennlinien bezeichnet.

Wir sehen also, daß beim Vergleich des st. str. Schemas und der Kennlinien die Frage der Vernachlässigung der elektromagnetischen transienten Erscheinungen keinerlei Rolle spielen kann.

Jemand könnte allerdings eine andere wichtige Frage stellen: Wenn wir uns schon darauf beschränken, anstatt des transienten Prozesses nur die beiden, seinen Beginn bezw. sein Ende darstellenden, stationären Zustände zu berücksichtigen, woher wissen wir dann im Vorhinein, daß der von uns gar nicht untersuchte transiente Prozeß beginnend vom Anfangszustand tatsächlich stabil in den andern stationären Zustand übergeht und nicht z. B. einen labilen Zustand auslöst? Tatsächlich, wie sind wir in dieser Beziehung bisher vorgegangen?

Bei der Entstehung eines positiven oder negativen dynamischen Momentes haben wir immer untersucht, in welcher Richtung die durch die Zunahme bezw. Abnahme von ω bedingte Änderung der elektrischen und magnetischen Parameter auf das Moment M wirkt. Wenn wir sahen, daß M abnimmt, bezw. wächst, d. h. bestrebt ist, die absolute Größe des positiven bezw. negativen Wertes M_d zu verringern, nahmen wir an, daß dieser Zustand solange bestehen wird, bis endlich $\pm M_d$ verschwindet, d. h., mit andern Worten, daß sich ein neuer stationärer Zustand einstellt.

Für die Berechtigung einer solchen Annahme spricht, daß ja das bekannte auf die Arbeitspunkte der gebräuchlichen mechanischen Kennlinien bezügliche Stabilitätskriterium auf demselben Gedankengang beruht, wenn auch diese Tatsache aus den Kennlinien selbst nicht unmittelbar hervorgeht.

Das in Bezug auf irgend einen Punkt der Kennlinien im Allgemeinen verwendete Stabilitätskriterium ist bekanntlich die Feststellung, ob in dem betreffenden Punkt die Kennlinie nach rechts zu geneigt ist, wobei wir in diesem Falle annehmen, daß — woferne M unabhängig von ω ist — der betreffende Arbeitspunkt einem stabilen Zustand entspricht. Das diese Annahme berechtigt ist, können wir nur dann verstehen, wenn wir uns zu den mechanischen Kennlinien noch drei analytische Zusammenhänge hinzudenken. Der eine bezieht sich darauf, daß im betreffenden Punkt die Tangente an die Kennlinie nach rechts zu geneigt ist, wenn der Differentialquotient der durch die Kennlinie gegebenen Funktion $M(\omega)$ negativ ist, d. h. also gleich ist $-\mathrm{d}M/\mathrm{d}\omega$. Der zweite Zusammenhang bezieht sich darauf, daß der Zunahme von ω um $+\mathrm{d}\omega$ eine negative Momentenänderung $-\mathrm{d}M$ entspricht; d. h. das Moment M ist nicht mehr $M = M'_B$ sondern $M - \mathrm{d}M$. Der dritte Zusammenhang bezieht sich darauf, daß, wenn wir in die Gleichung (8) anstatt M den Ausdruck $M - \mathrm{d}M$ einsetzen, wir sehen, daß sich $s\omega$ mit negativem Vorzeichen ergibt, d. h. $-\mathrm{d}M$ wirkt in der Richtung der Verkleinerung von ω.

All dies zeigt vollkommen klar und unmittelbar, ohne irgendeine zusätzliche mathematische Tätigkeit zu beanspruchen das st. str. Schema längs der Kontur $M_D - \omega - U_i - I(R_i + R) - M$.

Außerdem muß noch auf folgende wichtige Tatsache hingewiesen werden. Auch beim Hinzudenken der erwähnten drei analytischen Zusammenhänge zeigen die Kennlinien nur dann unmittelbar an, ob die Bewegung des Arbeitspunktes zu einem stabilen Zustand führt, wenn sich diese Bewegung längs der Kennlinie $M(\omega)$ abspielt. Demgegenüber zeigt das st. str. Schema — wie wir gesehen haben — die Tatsache der Stabilität ebenso klar und unmittelbar auch in Bezug auf jede beliebige andere Änderung an, unabhängig davon, ob es sich um die Änderung der Parameter R, Φ oder U handelt.

Zusammenfassend kann folgender kurzer Überblick über die Vorteile gegeben werden, die sich bei der Anwendung des st. str. Schemas in Bezug auf das Erkennen der Eigenschaften der Maschine bei Motorbetrieb ergeben haben.

1. Ein st. str. Schema zeigt allein sämtliche jene Zusammenhänge auf, zu deren Darstellung die Konstruktion von 5 verschiedenen Kennlinienscharen notwendig ist.

2. Darüber hinaus gibt das st. str. Schema einen gleichzeitigen umfassenden und anschaulichen Überblick über sämtliche quantitativen stationären Zusammenhänge, die zwischen beliebigen Parametern der Maschine bestehn.

3. Es zeigt die Richtung, in die sich die Wirkung der Änderung eines beliebigen Parameters auf beliebige andere Parameter fortpflanzt.

4. Es beantwortet auf Grund der Rückwirkung der durch das dynamische Moment $\pm M_D$ entstehenden Änderung von ω auf die Richtung der Änderung von M die Frage der mechanischen Stabilität.

5. Es zeigt anschaulich, daß die Maschine als ein solcher Regelkreis funktioniert, der automatisch auf die Gleichheit der Momente M und M'_B regelt. Auf dieser Grundlage ergibt sich:

a) daß bei gegebenen Größen U, Φ und R sich das Drehmoment M automatisch jeder Änderung des Belastungsmomentes M'_B anpaßt;

b) daß diese Änderung von M dadurch hervorgerufen wird, daß das sich ergebende dynamische Moment M_D mit positivem Vorzeichen ω und daher auch U_i vergrößert, bezw. mit negativem Vorzeichen verkleinert, wobei die Veränderung von U_i eine dementsprechende Veränderung von I ergibt, die erst dann aufhört, wenn $M_D = 0$ und $\omega = \text{const}$ geworden ist;

c) daß der Zusammenhang zwischen der Verringerung des stationären Wertes ω und der Vergrößerung der stationären Werte M bezw. I linear ist, wobei die einer bestimmten Änderung von ω entsprechende Änderung von M dem Wert $R_i + R$ proportional ist.

6. Das st. str. Schema zeigt, daß bei der Größe $R = 0$ die Maschine als ein solcher Regelkreis aufgefaßt werden kann, der die Größe U_i im Falle $R_i = 0$ genau und im Falle $R_i > 0$ mit dem kleinen Fehler IR_i automatisch auf die Gleichheit mit U regelt.

7. Das st. str. Schema widerspiegelt klar, daß der Wert ω, auf den die Maschine bei gegebenem Wert des Belastungsmomentes regelt, von der gemeinsamen Wirkung der Parameter R, U und Φ abhängt.

8. Das st. str. Schema stellt anschaulich den Mechanismus der Veränderung von ω bei gegebenen Werten des Belastungsmomentes M'_B sowie des Flusses Φ und der Spannung U mit Hilfe der Veränderung des Wertes R dar. Es zeigt auch, daß diese Veränderung nicht, wie es aus den mechanischen Kennlinien hervorzugehen scheint, bei dem Moment $M = M'_B$ erfolgt, sondern bei einem Moment, das bei der Verringerung von ω um $-M_D$ kleiner und bei der Vergrößerung von ω um $+M_D$ größer sein muß als M'_B, wobei sich einerseits diese Verringerung bezw. Erhöhung von M durch die entsprechende Veränderung des Stromes I ergibt, die bei der Vergrößerung bezw. Verkleine-

rung von R eintritt, und andererseits die sich einstellende Größe $\pm M_D$ mit der Geschwindigkeit der Änderung von R anwächst.

9. Das st. str. Schema stellt den Mechanismus der Veränderung von ω bei gegebenem Belastungsmoment M'_B und gegebenem Fluß mit Hilfe der Veränderung des Wertes U anschaulich dar. Es zeigt

a) daß die Verringerung von U unmittelbar I und M verkleinert, wobei die sich hiebei ergebende Momentendifferenz $-M_D$ den Motor solange verzögert, bis die hiedurch entstehende Verringerung des Wertes U_i die Wirkung der Verringerung von U auf I und M aufhebt;

b) daß die Vergrößerung von U einen analogen Vorgang in entgegengesetzter Richtung hervorruft.

10. Das st. str. Schema zeigt anschaulich den Mechanismus der Änderung der stationären Drehzahl mit Hilfe der Änderung der Größe Φ. Das Schema widerspiegelt in klarer Weise die Tatsache, daß die Änderung des Flusses Φ auf die Größe des Momentes in zwei einander entgegengesetzten Richtungen wirkt. Hiebei ist aus dem Schema die aus den Kennlinien keineswegs hervorgehende Tatsache unmittelbar zu erkennen, daß sich bei dem kritischen Wert $I(R_i + R) = U/2$ die Richtung der Wirkung umkehrt, die die Änderung des Flusses auf die Änderung des Wertes ω ausübt. Ferner beantwortet das st. str. Schema genau die auf Grund der Kennlinien schwer zu klärende Frage, wie im Schnittpunkte zweier zu verschiedenen Φ-Werten gehörigen mechanischen Kennlinien der stationäre Übergang von einem Φ Wert zum andern erfolgt. Das st. str. Schema beleuchtet auch klar die Frage, unter welchen Verhältnissen die oben erwähnte kritische Grenze sich ergibt, wenn die Regulierung von ω mit Hilfe der Änderung des Flusses mit der Regulierung mit Hilfe der Änderung von R bzw. von U kombiniert wird.

SCHRIFTTUM

1. O. Benedikt: Beiträge zur Weiterentwicklung der Theorie der Gleichstrommaschine. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Budapest 1975.

Vergleich des stationären strukturellen Schemas für den Motorbetrieb der fremderregten Gleichstrommaschine mit den entsprechenden mechanischen Kennlinien. — Der Verfasser beschreibt die Erscheinungen im stationären Motorbetrieb der fremderregten Gleichstrommaschine einerseits mit Hilfe der herkömmlichen mechanischen Kennlinien, andererseits aufgrund des von ihm ausgearbeiteten »stationären strukturellen Schemas«. Er kommt zu dem Ergebnis, daß alle jene Zusammenhänge, zu deren Darstellung fünf Kennlinienscharen benötigt werden, aus einem einzigen stationären strukturellen Schema klar erkannt werden können. Hierbei deckt dieses Schema nicht nur die Zusammenhänge auf, sondern es veranschaulicht auch die dahinter verborgenen physikalischen Zustände und Erscheinungen; ja in vielen Fällen weist es klar auf solche auch für den praktischen Betrieb wichtige Tatsachen hin, die aus den Kennlinien überhaupt nicht hervorgehen oder aufgrund der Kennlinien gewisse Mißverständnisse hervorrufen können.

Comparision of the Stationary Structural Schema of the Separetely Excited D. C Machine in Motor Operation with the Corresponding Mechanical Characteristics. — The author describes the phenomena in the separately excited d.c. machine by traditional sets of characteristics on the one hand, and on the base of the stationary structural schema, elaborated by him, on the other hand. He concludes that all those relations, the representation of which needs five sets of characteristics, can be clearly shown on one stationary structural schema. This schema puts into evidence not only these relations, but also the underlying physical states and phenomena, and in many cases it points to facts which are important also for the operational practice and are not shown at all by the characteristics or where the characteristics may cause certain misunderstandings.

Сравнение сатционарных структурных схем, действительных для машин постоянного тока с независимым возбуждением в случае двигателного режима, и соответствующих механических характеристик. — Автор описывает явления, относящиеся к двигательному режиму машины постоянного тока с независимым возбуждением, с одной стороны, с помощью исвестных механических характеристик, а с другой стороны, на основе разработанного им метода, названного им »стационарной структурной схемой«. Сравнение между собой указанных методов показывает, что все те взаимоотношения, к иллюстрации которых необходимо построить пять семейств указанных характеристик, наглядно видны по одной единственной стационарной структурной схеме. При этом последняя наглядно указывает не только на эти взаимоотношения, но и на скрывающиеся за ними физические состояния и являения. Больше того, во многих случаях схема указывает на имеющие большое практическое значение факты, которые на основе семейств характеристик вообще не могут быть обнаружены или же могут вызвать определенные недоразумения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 225—234 (1975)

VERGLEICH DER ZAHNRAD-PLANETENGETRIEBE

Z. TERPLÁN*

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. Juni 1974]

Die Zahnrad-Planetengetriebe werden immer aus den sechs Grundtypen aufgebaut, aber die einzelnen Typen können auch selbstständig den Antrieb bilden. Der Vergleich bedeutet, die Grundtypen, die für die vorgeschriebenen kinematischen Bedingungen des gegebenen 1- bzw. 2-freicheitsgradigen Betriebszustandes verwendet werden können, oder den günstigsten Typ. Die Arbeit vereinigt die Ungleichförmigkeitsgrenze von POPPINGA mit den Optimumen von MAGIDOWITSCH. Mit Hilfe dieser kann an einer relativ einfachen Abbildung das Nomogramm der kinematischen Funktion mit den Poppingaschen Funktionen der optimalen Konstruktionen vereinigt werden. Die zulässige Ungleichförmigkeit bestimmt die Grenze der Zähnezahlverhältnisse der Grundtypen. Die Kurven geben schnell Aufschluss über die Realisierbarkeit der gleichen kinematischen Bedingungen, über die Wahl des günstigsten Grundtypes, sowie über den eventuell schlechteren Wirkungsgrad.

Die Zahnrad-Planetengetriebe — seien sie noch so kompliziert — werden immer aus den sechs Grundtypen aufgebaut, aber die Grundtypen können auch selbständig den Antrieb bilden.

Die sechs Grundtypen (Bild 1) können nach Art und eventuelle Gleichzeitigkeit der Zahnradpaar-Eingriffe mit den Abkürzungen **A**, **I**, **AI**, **A** + **I**, **A** + **A** und **I** + **I** bezeichnet werden, wobei **A** den Außen- und **I** den Inneneingriff bedeutet.

Die Grundtypen können mit 1 und 2 Freiheitsgraden funktionieren. Zwischen ihren kinematischen Übersetzung besteht folgender Zusammenhang [1]:

$$i' = 1 - u + i''u, \tag{1}$$

wobei i die kinematische Übersetzung und u das Zähnezahlverhältnis ist. Die konkrete Anwendung siehe in den Formeln (3) und (35).

Als Vergleich kann noch die dimensionslose Poppingasche Zahl [2] dienen, die die radialen Abmessungen des Planetengetriebes kennzeichnet:

$$P = \frac{D}{r_{\min}}. \tag{2}$$

D ist entweder Teilkreisdurchmesser des Hohlrades (bei **I** + **I** der größere), oder falls kein Hohlrad vorhanden ist (im Fall von **A** und **A** + **A**) Außen-

* Prof. Dr. Z. TERPLÁN, Szabadságharc u. 12. H—3529 Miskolc, Ungarn

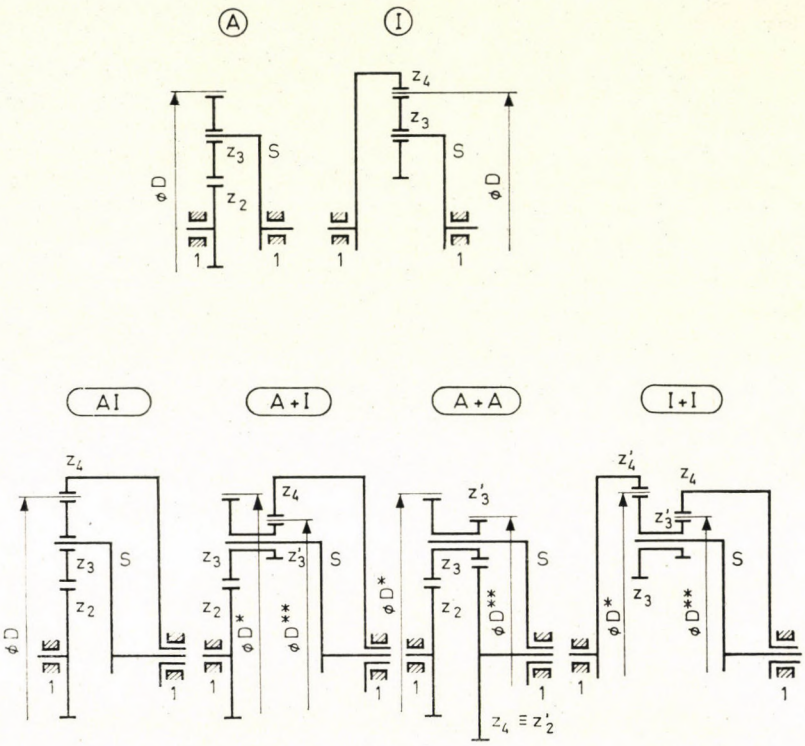


Abb. 1

durchmesser des Kreisringes, der durch den Teilkreis des Planetenrades bestimmt wird (bei **A** + **A** der größere), $r_{\min}$ ist der Teilkreisradius des kleinsten außenverzahnten Zahnrades des Planetengetriebes.

Die Poppingasche Zahl charakterisiert alle Konstruktionsabmessungen. Im Falle $P \geq 20$ bedeutet sie schon eine Ungleichförmigkeit und die Konstruktion zeigt ein »groteskes« Bild.

Das Bild 2 ist, wie folgt, aufgebaut. Oben ist das für die Grundtypen **A** und **I** aufgezeichnete, nach (1) bestimmte kinematische Feld zu sehen:

$$i_{3S} = 1 - u_{23} + i_{2S}\, u_{23} \text{ bzw. } i_{3S} = 1 - i_{43} + i_{4S} u_{43}. \tag{3}$$

Die Indizes weisen auf die entsprechenden Glieder des Planetengetriebes hin (2 ist das Sonnen-, 3 das Planeten- und 4 das Hohlrad, S ist der Steg; sie drehen sich im Vergleich zu dem mit 1 bezeichneten Gehäuse) und ω ist die Winkelgeschwindigkeit sowie z die Zähnezahl

$$i_{3S} = \frac{\omega_3}{\omega_S}; \quad i_{2S} = \frac{\omega_2}{\omega_S}; \quad i_{4S} = \frac{\omega_4}{\omega_S}, \tag{4}$$

$$u_{23} = -\frac{z_2}{z_3} \quad \text{und} \quad u_{43} = \frac{z_4}{z_3}. \tag{5}$$

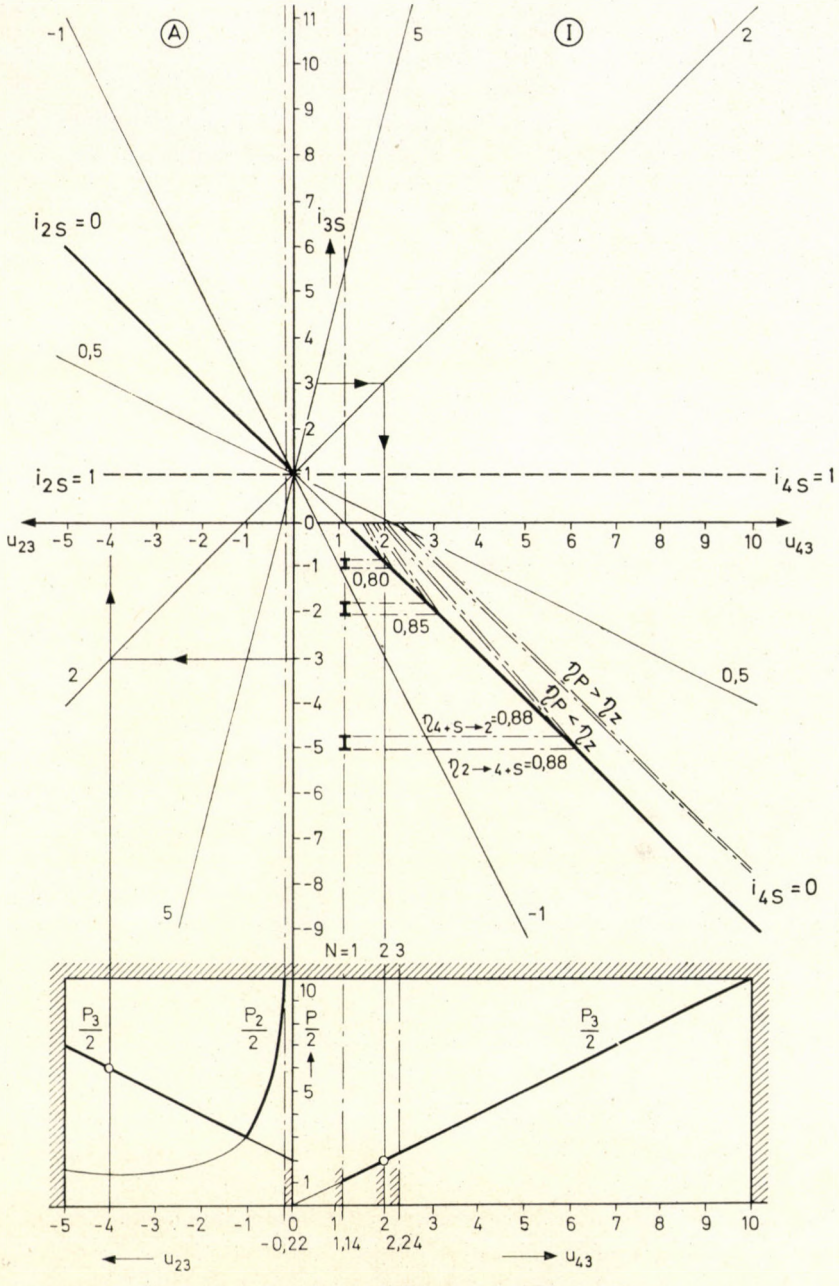

Ⓐ
Ⓘ
$i_{2S}=0$
$i_{2S}=1$
$i_{4S}=1$
$i_{4S}=0$
i_{3S}
u_{23}
u_{43}
0,5
0,80
0,85
$\eta_{4\to S\to 2}=0{,}88$
$\eta_{2\to 4\to S}=0{,}88$
$\eta_P>\eta_Z$
$\eta_P<\eta_Z$
N=1 2 3
$\frac{P_3}{2}$
$\frac{P_2}{2}$
$\frac{P}{2}$
-0,22
1,14
2,24

Abb. 2

Das negative Vorzeichen verweist darauf, daß bei stehendem Steg die Abtriebswelle sich entgegen der Antriebswelle dreht.

Die schnelle Aufzeichnung des kinematischen Feldes erleichtert das Einzeichnen der gestrichelten Linie, die eine kupplungähnliche Wirkung bedeutet, weiters die Gerade der 1-Freiheitsgrad-Wirkung (dicke Linie), die aus (3) auf Grund $i_{2S} = 0$, bzw. $i_{4S} = 0$ eine den Winkel 45° einschließende Gerade ist. Damit ist das Vorzeichen der dünnen Geraden schon gegeben.

Im unteren Teil des Bildes 2 sind die Änderungen der Poppingaschen Zahl zu sehen. Es bestehen folgende Funktionszusammenhänge:

$$\mathbf{A}: \quad \frac{P_2}{2} = \frac{z_2 + 2z_3}{z_2} = 1 - \frac{2}{u_{23}}; \tag{6}$$

$$\frac{P_3}{2} = \frac{z_2 + 2z_3}{z_3} = 2 - u_{23}; \tag{7}$$

$$\mathbf{I}: \quad \frac{P_3}{2} = \frac{z_4}{z_3} = u_{43}. \tag{8}$$

$(P/2)_{\text{zul}} = 10$ bestimmt die Bereichsgrenze:

$$\mathbf{A}: \quad -8 \leq u_{23} \leq -0{,}22; \tag{9}$$

$$\mathbf{I}: \quad u_{43} \leq 10. \tag{10}$$

Aus anderen, hier nicht detaillierten Gründen ist [1]:

$$\mathbf{A}: \quad -5 \leq u_{23} \leq -0{,}22; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}: \quad & 1{,}12 \leq u_{43} \leq 10, \text{ wenn } N = 1; \\ & 2 \leq u_{43} \leq 10, \text{ wenn } N = 2; \\ & 2{,}24 \leq u_{43} \leq 10, \text{ wenn } N = 3, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei N die Zahl der parallel eingebauten Planetenräder bedeutet.

Auf Bild 2 im als Beispiel behandelten Fall $i_{2S} = i_{4S} = 2$ und $|\, i_{3S} \,| = 3$ erhält man bei der Realisierung gleicher kinematischen Übersetzungen $u_{23} = -4$ und $u_{43} = 2$, d. h. **A** ergibt eine größere radiale Abmessung, als **I**, gleichzeitig kann **I** nur mit $N = 1$ gelöst werden. Wenn man also dimensionieren würde, könnte es vorkommen, daß im Falle $N > 1$ doch **A** die kleinere radiale Abmessung liefert.

Zum Vergleich weiterer Grundtypen müssen wir die Vorschläge von MAGIDOWITSCH [3] berücksichtigen, deren Endergäbnisse sich, wie folgt, ergeben:

$$\mathbf{AI:} \qquad |u_{42}|_{\text{opt}} = 3\,, \tag{13}$$

$$\mathbf{A+I:} \quad |u_{42}|_{\text{opt}} = \frac{2\,|u_{23}|+1}{u_{23}^2}\,, \tag{14}$$

$$\mathbf{A+A:} \quad u_{42\text{opt}} = \frac{1}{u_{23}^2}\,, \tag{15}$$

$$\mathbf{I+I:} \quad u_{42\,\text{opt}}^{-1} = 1-(u_{43}-1)^2\,. \tag{16}$$

Zum Beweis können wir die Poppingasche Zahl anwenden, weiterhin muß angenommen werden, daß die Module gleich sind.

$$\mathbf{AI:} \quad \frac{P_2}{2} = \frac{z_4}{z_2} = |u_{42}|\,; \tag{17}$$

$$\frac{P_3}{2} = \frac{z_4}{z_3} = 2\frac{z_4}{z_4-z_2} = 2\frac{|u_{42}|}{|u_{42}|-1}\,. \tag{18}$$

Falls $P_2 - P_3 = 0$ ist, ist $|u_{42}| = 3$, zugleich das Optimum.

A + I: Zuerst müssen wir auch hier die zwei Poppingaschen Zahlen aufschreiben, aber so, daß wir $z_3' = \delta z_3$ annehmen und den günstigen Wert suchen [4]:

$$\frac{P_2^*}{2} = 1+2\frac{1}{|u_{23}|}\,, \tag{19}$$

$$\frac{P_3^{*\prime}}{2} = \frac{1}{\delta}\left(1+2\frac{1}{|u_{23}|}\right), \tag{20}$$

d. h. falls $P_2^* - P_3^*, = 0$ ist, ist $\delta = 1$. Wir erhalten das gleiche Ergebnis mit den Bezeichnungen des Bildes 1 $D^{**} > D^*$ und $P_2^{**} - P_{3'}^{**} = 0$.

Unter Annahme eines gleichen Achsabstandes zwischen den beiden Zahnradpaaren kann folgendes abgeleitet werden (r_0 ist der Teilkreisradius):

$$r_{02} + r_{03} = r_{04} - r_{03}'\,, \tag{21}$$

$$r_{03}\left(\frac{r_{02}}{r_{03}}+1\right) = r_{03}'\left(\frac{r_{04}}{r_{03}'}-1\right), \tag{22}$$

daraus ist

$$r_{03} = \frac{\dfrac{r_{02}}{r_{03}}u_{42}^* - 1}{\dfrac{r_{02}}{r_{03}'}+1}\,r_{03}'\,, \tag{23}$$

weil

$$u_{42}^{*} = \frac{r_{03}}{r_{02}} \frac{r_{04}}{r'_{03}} = -\frac{z_3}{z_2} \frac{z_4}{z'_3} = \frac{u'_{43}}{u_{23}} \tag{24}$$

ist.

Aus (23) erhalten wir eine quadratische Gleichung:

$$r_{03}^2 + (r_{02} + r'_{03}) r_{03} + r_{02} r'_{03} u_{42}^{*} = 0 . \tag{25}$$

Setzen wir die für das Planetengetriebe nützliche Lösung $r'_{03} = \delta r_{03}$ und $\delta = 1$ ein, erhalten wir:

$$\frac{r_{03}}{r_{02}} = \frac{1}{2}\left[-(1+\delta) + \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\delta u_{42}^{*}}\right] = -1 + \sqrt{1 + |u_{42}^{*}|}, \tag{26}$$

daraus kann abgeleitet werden, daß

$$|u_{42}^{*}|_{\text{opt}} = \frac{2|u_{23}| + 1}{u_{23}^2} \tag{14}$$

ist.

A + A: ist viel einfacher, als **A + I**, aber wir müssen genauso aus den gleichen Achsabstand der Zahnradpaare ausgehen:

$$r_{02} + r_{03} = r'_{02} + r'_{03} , \tag{27}$$

daraus ist:

$$r_{03} = \frac{1 + \dfrac{r'_{02}}{r'_{03}}}{1 + \dfrac{r_{02}}{r_{03}}} r'_{03} = \frac{1 + |u'_{23}|}{1 + |u_{23}|} r'_{03} , \tag{28}$$

d. h.

$$\frac{r_{03}}{\delta r_{02}} = \frac{1 + |u_{23}| u_{42}^{*}}{1 + |u_{23}|} = \frac{1}{\delta |u_{23}|} . \tag{29}$$

Mit $\delta = 1$ kann abgeleitet werden, daß

$$u_{42\,\text{opt}}^{*} = \frac{1}{u_{23}^2} . \tag{15}$$

I + I: auch hier gehen wir aus dem gleichen Achsabstand aus:

$$r'_{04} - r_{03} = r_{04} - r'_{03} , \tag{30}$$

die Gleichung kann umgeformt werden, zuerst auf:

$$\frac{r'_{04}}{r_{03}} \left(\frac{r_{03}}{r'_{03}} - u_{42}^{*} \right) = \frac{r_{03}}{r'_{03}} - 1 , \tag{31}$$

danach kann die Poppingasche Zahl bestimmt werden:

$$\frac{P_3^{*\prime}}{2} = \frac{r'_{04}}{r'_{03}} = \frac{\frac{r_{03}}{r'_{03}}\left(\frac{r_{03}}{r'_{03}} - 1\right)}{\frac{r_{03}}{r'_{03}} u_{42}^*}. \tag{32}$$

Aus ihren Differentialquotient kann das Minimum abgeleitet werden. Nur das positive Vorzeichen bringt eine praktisch nützliche Lösung und gleichzeitig ist $u_{42}^* > 1$:

$$\frac{r_{03}}{r'_{03}} = u_{42}^* \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{u_{42}^*}}\right). \tag{33}$$

Durch Substitution in die Gleichung (31) ist:

$$u_{43} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{u_{42}^*}}, \tag{34}$$

daraus kann bestimmt werden, daß

$$u_{42}^{*-1}{}_{\text{opt}} = 1 - (u_{43} - 1)^2 \tag{16}$$

ist.

Aus (34) geht hervor, daß das Optimum nur im Falle $u_{43} \leq 2$ einen Sinn hat, was bedeutet, daß nur $N = 1$ Planetenrad eingebaut werden kann.

Der Aufbau des Bildes 3 ist ähnlich wie der in Bild 2, nur es werden die Grundtype **AI**, **A** + **I** bzw. **A** + **A** und **I** + **I** behandelt. Oben ist das nach (1) bestimmte kinematische Feld ersichtlich:

$$i_{2S} = 1 - u_{42} + i_{4S} u_{42} \text{ bzw. } i_{2S} = 1 - u_{42}^* + i_{4S} u_{42}^*, \tag{35}$$

wobei

$$u_{43} = -\frac{z_4}{z_2}; \qquad u_{42}^* = -\frac{z_4}{z_2}\frac{z_3}{z'_3}, \qquad \mathbf{A} + \mathbf{I};$$

$$u_{42}^* = +\frac{z'_2}{z_2}\frac{z_3}{z'_3}, \qquad \mathbf{A} + \mathbf{A}; \tag{36}$$

$$u_{42}^* = +\frac{z_4}{z'_4}\frac{z_3}{z'_3}, \qquad \mathbf{I} + \mathbf{I}$$

ist.

Das kinematische Feld kann auch hier, durch die gestrichelten Linien der kupplungähnlichen Wirkung ($i_{4S} = 1$) bzw. der kupplungähnlichen Gestaltung ($u_{42}^* = 1$), weiters durch die Gerade der 1-Freiheitsgrad-Wirkung $i_{4S} = 0$, die den Winkel 45° bildet und dick gezeichnet wird, schnell aufgezeichnet werden.

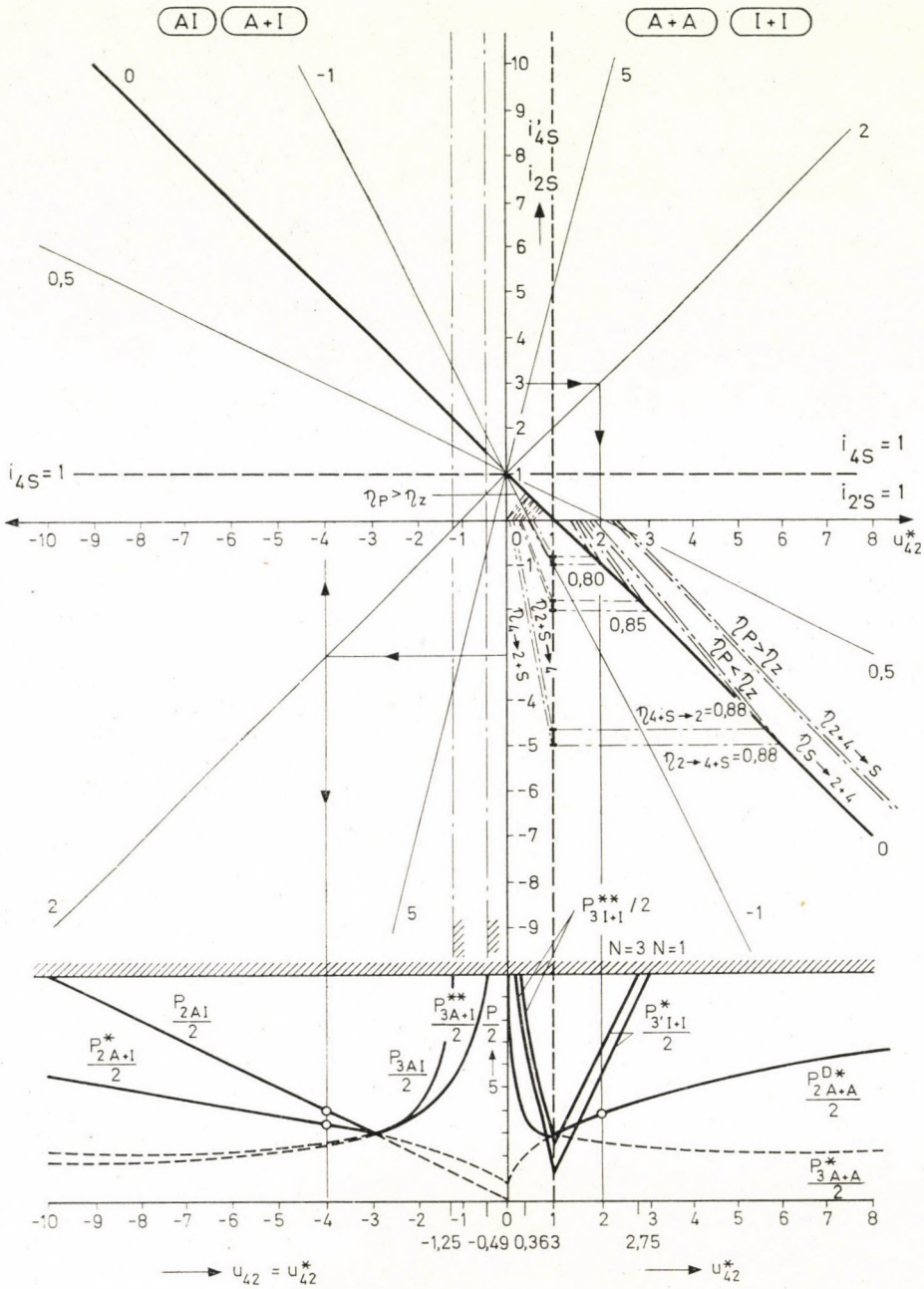

AI
A+I
A+A
I+I
0
-1
5
2
0,5
i'4S
i2S
i4S = 1
i2'S = 1
ηP > ηz
ηP < ηz
0,80
0,85
η4+S→2=0,88
η2→4+S=0,88
η2+I→S
ηS→2+4
N=3 N=1
P**3I+I /2
P2AI/2
P*2A+I/2
P3AI/2
P**3A+I/2
P/2
P*3'I+I/2
PD*2A+A/2
P*3A+A/2
-1,25 -0,49 0,363 2,75
u42 = u*42
u*42

Abb. 3

Auf dem unteren Teil des Bildes 3 sind die Änderungen der Poppingaschen Zahl zu sehen. Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\mathbf{A+I:}\quad \frac{P_2^*}{2} = 1 + \frac{2}{|u_{23}|} = 2\sqrt{1 + |u_{42}^*|_{\text{opt}}} - 1\,, \tag{37}$$

$$\frac{P_3^{**}}{2} = 1 + 2|u_{23}| = 1 + \frac{2}{\sqrt{1 + |u_{42}^*|_{\text{opt}}} - 1}\,, \tag{38}$$

$$\mathbf{A+A:}\quad \frac{P_2^*}{2} = 1 + \frac{2}{|u_{23}|} = 1 + 2\sqrt{u_{42\text{opt}}^*}\,. \tag{39}$$

Es sei bemerkt, daß $P_2^*,/2$ vollkommen symmetrisch mit $P_2^*/2$ auf $1/u_{42}^*$ ist.

$$\mathbf{I+I:}\quad \frac{P_{3'}^*}{2} = \frac{r'_{04}}{r'_{03}} = 2u_{42}^*\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{u_{42\text{opt}}^*}}\right) - 1\,. \tag{40}$$

$P_3^{**}/2$ ist vollkommen symmetrisch mit $P_3^*,|2$ auf $1/u_{42}^*$. Weil (40) sich auf $N = 1$ bezieht, ist es zweckmässig den Fall $N = 3$ z. B. auf den ungünstigsten Fall $u_{43} = 2{,}24$ abzuleiten. Dann ist:

$$\left(\frac{P_{3'}}{2}\right)_{N=3} = \frac{5u_{42}^* - 2{,}24}{1{,}24}\,, \tag{41}$$

wobei $(P_3^{**}/2)_{N=3}$ auch hier vollkommen symmetrisch mit $1/u_{42}^*$ ist.

Im unteren Teil des Bildes 3 sind die Funktionen (17), (18), (37)–(41) zu sehen. Die etwaigen Bereichsgrenzen werden aus $(P/2)_{\text{zul}} = 10$ bestimmt:

$$\mathbf{AI:}\qquad 1{,}25 \leq |u_{42}| \leq 10; \tag{42}$$

$$\mathbf{A+I:}\qquad 0{,}49 \leq |u_{42}^*| \leq 29; \tag{43}$$

$$\mathbf{A+A:}\qquad 0{,}05 \leq u_{42}^* \leq 20; \tag{44}$$

$$\mathbf{I+I:}\qquad 0{,}33 \leq u_{42}^* \leq 3; \quad \text{wenn } N = 1; \tag{45}$$

$$0{,}36 \leq u_{42}^* \leq 2{,}75, \text{ wenn } N = 3 \text{ ist}. \tag{46}$$

In dem Beispiel auf Bild 3 sei $|i_{2S}| = 3$ und $i_{4S} = i_{2'S} = 2$ (sie sind praktisch gleich den Bedingungen des Bildes 2), daraus folgt, daß $u_{42} = u_{42\mathbf{A+I}}^* = -4$ und $u_{42\mathbf{A+A}}^* = u_{42\mathbf{I+I}} = 2$ ist. Wie ersichtlich, tritt in diesem Beispiel die größte radiale Abmessung bei dem Grundtyp **I + I** und die kleinste bei **A + I** auf.

An dieser Stelle befassen wir uns nicht mit den weiteren Bereichsgrenzen (Montierbarkeits- und Nachbarschaftsbedingungen, sowie mit den üblichen Übersetzungsgrenzen der Zahnradpaare), denn wir finden schon darauf Hinweise in einer anderer Arbeit [1] des Verfassers. Wir müssen aber darauf aufmerksam machen, daß auf den Bildern 2 und 3 an bestimmten Stellen des

kinematischen Feldes auch mit dem Wirkungsgrad $\eta_P < \eta_Z$ zu rechnen ist [5]. Die Bilder zeigen die Gerade $\eta_P =$ konst für $\eta_Z = 90\%$.

Die hier behandelte Vergleichsmethode verweist nicht nur auf die Bereichsgrenzen der Grundtypen, sondern macht sogar darauf aufmerksam, daß die kinematischen Bedingungen der 1- und 2-Freiheitsgrad-Wirkung in bestimmten Fällen nicht bei allen Grundtypen der Planetengetriebe zu lösen sind. Es kann vorkommen, daß wir bei einigen Grundtypen in das Feld $\eta_P < \eta_Z$ kommen.

In den Beispielen des Bildes 2 und 3 besteht immer der Fall $\eta_P > \eta_Z$, aber bei den Typen **A** und **I** ist eine weitere Konstruktionsergänzung nötig (doppeltes Kardan-Kreuz oder eine Oldham-Kupplung) die durch ihre Verluste den Wirkungsgrad dieser Typen verschlechtert.

SCHRIFTTUM

1. TERPLÁN, Z.: Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.
2. POPPINGA, R.: Stirnrad-Planetengetriebe. Franckh'sche Verlagshandlung, Stuttgart 1949.
3. Магидович, Е. И.: Выбор чисел зубьев колес планетарных механизмов. — Станки и инструмент. *32* (1961) 4, 30/33.
4. TERPLÁN, Z.: Investigation of **A** + **I** Type Compound Planet Pinion Planetary Gear Drives = *ASME Publication*. 72-MECH-68. San Francisco, 1972. 1/5.
5. TERPLÁN, Z.: A fogaskerék-bolygóművek alaptípusainak működési határai elemi és kompenzált fogazat esetén. — *Műszaki Tudomány 49* (1974) 1—2. 71—96.

The Efficiency of Planetary Gear Drives. The planetary gear drives are always composed from six basic types, but each basic type may also be used as a gear drive by itself. The comparison signifies which basic type can be used, for the required kinematical conditions of operation, with 1 or with 2 degrees of freedom or, if several basic types are possible, which one is optimal. The author unites the POPPINGA limit of disproportionality with the MAGIDOVICH optimum. With this combination the nomogram of the kinematic function can be combined on a relatively simple figure with the POPPINGA functions of the optimum designs. The permitted disproportionality marks the limits of the ratio of tooth numbers of the basic types. The curves quickly inform on the possibilities of realizations with equal kinematical conditions, on the selection of the optimum basic type, and on the possible lower efficiency.

Сравнение зубчатых планетарных механизмов. Зубчатые планетарные механизмы во всех случаях собираются из шести основных типов. но каждый основной тип может присутствовать в планетарном механизме также самостоятельно. Сравнение означает то, что который из основных типов может быть использован для кннематических условий, предписанных для данного режима работы с одной или двумя степенями свободы, а если же можно выбрать несколько основных типов, то который из них является наиболее выгодным. В работе объединяется предел непропорциональности Поппинга с оптимумами Магидовича. При помощи такого метода на относительно простой диаграмме можно объединить номограмму кинематической функции с функциями Поппинга оптимальных механизмов. Допустимая непропорциональность определяет пределы отношений зубьев основных типов. Кривые дают быструю информацию о возможностях достижения идентичных кинематических условий, далее о выборе наиболее выгодного основного типа, а также о возможно худшем кпд.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 235—248 (1975)

AN APPROXIMATE METHOD TO CALCULATE THE EFFECT OF LEVEE BREACHES UPON FLOODING OF RIVERS HAVING A COMPOUND SECTION

M. KOZÁK*

DOCTOR OF TECHN. SCI.

[Manuscript received September 10, 1975]

The aim of this paper on to introduce a new approximate method of unsteady flow in channels having a compound section, with particular regard in showing the effect of levee breaches upon the flow. The main feature of the method consists in separately applying the continuity and dynamic equations upon the main channel and the flood plain. Also, the same water level is assumed to appear over the entire cross section, presupposing a linear discharge expressing the crosswise water exchange between main channel and flood plains. The levee breach is assumed to have an elementary length. Throughout the process the flood plain is assumed to be covered by an unbroken layer of water.

1. A brief decsription of flow conditions

The variable geometry of compound cross sections (Fig. 1) has also significant bearings on the flow. The mean velocity in the main channel having a considerable depth is higher than it is over the shallow flood plain. In case of compound cross sections, the transversal surface slope may assume positive and negative values during the rising and falling stages (Fig. 2). The water surface of a cross section is a *convex* curve during the rising stage and a *concave* one during falling stages. The wider the flood plain the more will the flood wave be flattened out. Wide flood plains also involve high seepage losses.

The situation is even more complicated by the extreme irregularities appearing in the layout of main channel and flood plain. These circumstances will result in a three-dimensional flow having an alternately directed component from the main channel to the flood plain or inversely. Thus, during the rising stage, the flood plain is to be considered as a reservoir fed from the main channel by a linear discharge q corresponding to momentary conditions. At the falling stages, the transversal flow is directed from the flood plain towards the main channel and water stored in the former feeds the latter. Some characteristic features of flood hydrographs of compound channels are shown in Fig. 3.

The flood plains have obviously not the only role of a reservoir, but at the same time they form a part of the channel carrying water. The greater the

* Prof. Dr. M. Kozák, Felvinci u. 17, H—1022 Budapest, Hungary

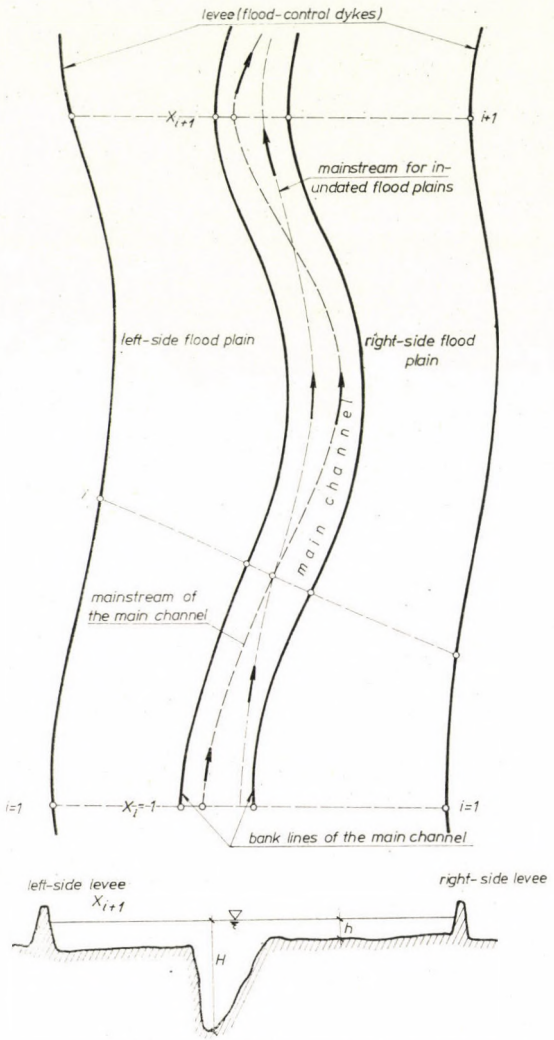


Fig. 1. Layout and typical cross section of a compound channel

ratio of wetted area of flood plain: wetted area of main channel, the greater will be the share of the flood plain in carrying the runoff, although the latter is also highly influenced by the roughness of the flood plain.

The multiple function of the flood plain results in very varied flow conditions. In addition one may often find an excessive growth of shrubs along the flood plain, contributing to an increased roughness. This, in turn, will further reduce flow velocity and consequently, the deposition of suspended sediment.

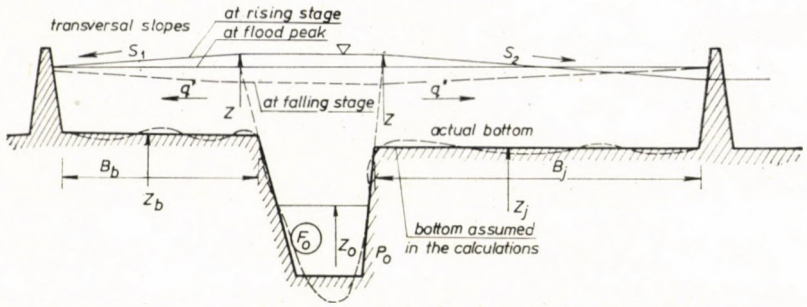


Fig. 2. Transversal surface slopes during rising and falling stages

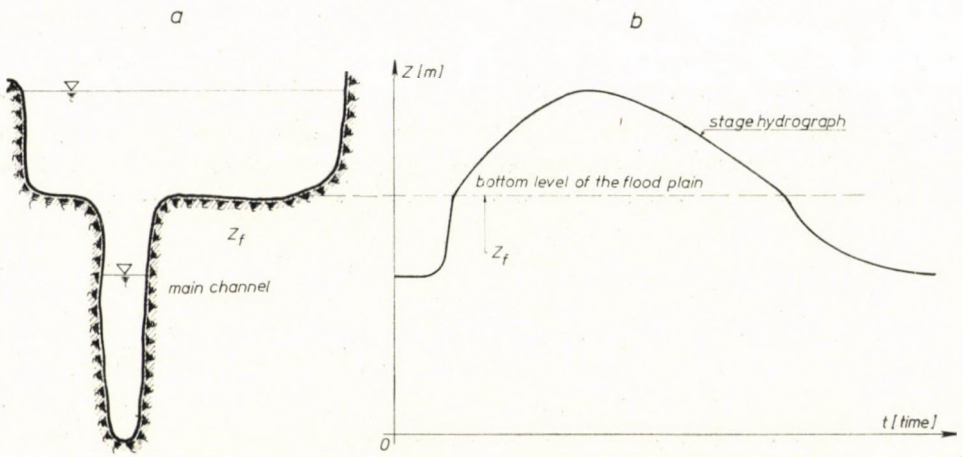


Fig. 3. Typical shape of a flood hydrograph in compound channels

It is a general experience that owing to sedimentation, the surface of the flood plains is rising from one year to year, and so their roughness grows due to excessive vegetation. All this results in the gradual decline of water-carrying capacity of flood plains.

Especially in earlier times, the distance between opposite levees was chosen too low, resulting in loss of energy, and thus, in dammed-up stages.

During drawn-out floods, the breach of a weakened levee may occur, entailing the inundation of deeper areas. On the other hand, the levee may be deliberately blasted in order to achieve a rapid fall of the river stages. In this way one may prevent a breach at a point where areas of high value would be exposed to disaster.

In this paper an entirely new approximate method is described, applicable to

a) the approximate flood routing in compound channel sections;

b) the verification of the effect of changing flood plain roughness upon the flood hydrograph;

c) the calculation of changes in flood routing affected by a levee breach.

2. Difficulties of calculation and the adopted approach

One of the basic difficulties in tackling unsteady flow problems is rooted in the fact that the dynamic equation is based upon the mean velocity. One of the most striking features of unsteady flow phenomena is their *propagation*, depending on the local velocity v_f prevailing in a vertical strip of elementary width of the wetted cross section, and the depth h of the same strip [6].

Obviously, the mean velocity and mean depth of the entire compound cross section is not suitable for expressing the propagation of an unsteady phenomenon. In channels of this kind, mean velocity as well as mean depth of the main channel is much greater than that in the flood channel. Therefore, flow during the rising stage advances more rapidly, resulting in a water stage of the main channel that exceeds those in both-side flood plains.

For the time being, there is only one approximate theory for calculating unsteady flow in compound channel sections [2]. Its main feature is that it is used for the two basic equations of the main channel only. Filling and emptying of the flood plain is taken into account by means of the linear transversal flow q only. The roughness of the flood plain is not directly accounted for and thus, this method may be appropriately termed as a *static method.*

Presently, an approximate method called a *semi-dynamic* one will be described. It is characterized by the assumption of different flow conditions for the main channel and the flood plain, in accordance with their respective roughnesses.

3. Theoretical basis of the new method

The essentials of the *semi-dynamic* method may be formulated as follows: nearly parallel flow is assumed to occur in the main channel and the flood plain, in accordance with their local roughness conditions. In spite of differences in roughness and other hydraulic features, the water surface over the entire cross section is level, discrepancies in continuity owing to dynamic conditions and seepage losses are taken into account within the transversal discharges q. Transversal slope required for the maintain transversal flow is neglected ($S_t = 0$). The discharge leaving through the breach is considered as if it were a uniformly distributed flow $q = Q_{\mathrm{br}}/\Delta x$ over a reach of calculation Δx.

In order to establish a mathematical formulation of the above basic assumptions, continuity and dynamic equations should be written separately

for the main channel and the flood plains on both its sides as well. For the sake of simplicity, let us first investigate a compound channel profile having identical flood plains on the left and right side. In this case, the continuity equation for the main channel will be:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial t} - q + q_{sf} = 0\,. \tag{1}$$

The dynamic equation for the same should be written as

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{Q^2}{gF^3}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2Q}{gF^2}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{gF}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q^2}{K^2} = 0\,. \tag{2}$$

The continuity equation of the flood plain will become

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial t} + q + q_{sh} = 0\,, \tag{3}$$

and the dynamic equation for the same:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{Q_*^2}{gF^3}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2Q^*}{gF^2}\frac{\partial Q^*}{\partial x} + \frac{1}{gf}\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{Q_*^2}{k^2} \tag{4}$$

where Q and Q^* are the discharges of the main channel and the flood plains, respectively,
B and b, F and f, K and k are width, cross-section area and conveyance of the main channel and the flood plains, respectively,
Z is the water surface above datum level,
q is the transversal flow between main channel and flood plain,
q_{sf} is the seepage loss of the main channel,
q_{hf} includes both seepage loss of the flood plain and flow through a levee breach,
x is the coordinate of the cross-section, measured in the direction of flow,
t is the time, and
g the gravity constant

In order to obtain an approximate general solution of Eqs 1 to 4, the implicit method of finite differences was adopted [6]. To this end, the river was divided into reaches of length Δx and the basic equations are solved stripwise, for time intervals Δt. Thus, the domain of integration $F(x, t)$ becomes divided into a series of finite rectangles with side lengths Δx, Δt and the four basic equations are written in a finite form for each of the rectangles [4, 6].

The general arrangement of one of these rectangles is shown in Fig. 4. Both couples of equations for the main channel and the flood plain have to be rewritten in a finite form.

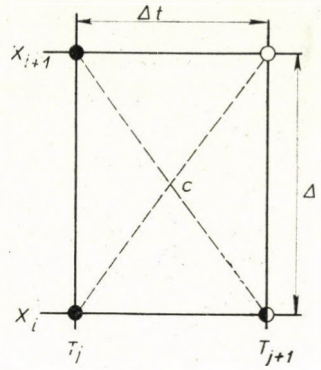


Fig. 4. Notations used in the rectangle of calculation

By using the notations of Fig. 4, the partial derivatives f'_x and f'_t of a function f may be written as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x}[f_{i+1} - f_i]_{j+1} + \frac{1}{2\Delta x}[f_{i+1} - f_i]_j, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{2\Delta t}[f_{i+1} + f_i]_{j+1} + \frac{1}{2\Delta t}[f_{i+1} - f_i]_j. \tag{6}$$

In the centre c of the rectangle, the function approximately assumes the value

$$f(c) \approx \frac{1}{4}[f_i + f_{i+1}]_j + \frac{1}{4}[f_i + f_{i+1}]_{j+1}. \tag{7}$$

This approximation $f(c)$ is used to approximate the coefficients of the difference equations [4]. If the pairs of differential equations (1)—(2) and (3)—(4) are rewritten in terms of finite differences and non-linear terms are substituted by linear ones, in order to obtain a more simple solution, four linear equations with 7 unknowns will be obtained:

$$\begin{aligned}
A_1Q_i + A_2Q_i + A_3Z_i + A_4q + A_5Q_{i+1} + A_6Q_{i+1} + A_7Z_{i+1} &= F_1 \\
B_1Q_i + B_2Q_i + B_3Z_i + B_4q + B_5Q_{i+1} + B_6Q_{i+1} + B_7Z_{i+1} &= F_2 \\
C_1Q_i^* + C_2Q_i^* + C_3Z_i + C_4q + C_5Q_{i+1}^* + C_6Q_{i+1}^* + C_7Z_{i+1} &= F_3 \\
D_1Q_i^* + D_2Q_i^* + D_3Z_i + D_4q + D_5Q_{i+1}^* + D_6Q_{i+1}^* + D_7Z_{i+1} &= F_4
\end{aligned} \tag{8}$$

The first two equations refer to the main channel, the last two to the flood plain. The coefficients $A_j, B_j, \ldots D_j$ (with $j = 1, 2, \ldots, 7$) and F_i i(with $i = 1, 2, \ldots, 4$) are determined by means of iteration, corresponding to the actual degree of approximation. By calculating the friction term by mean of a formula of partial iteration, the constants of Eq. 8 are to be derived [6].

4. Solution of the set of equations

In case of the set of equations (8) containing 7 unknowns and derived n connection with the *semi-dynamic method*, $4n$ equations may be written for n river reaches. But with regard to the fact that in equations of any two neighbouring reaches there are always 3 variables in common, and since the discharge q always refers to the reach in question only, the total number of unknowns would be $4n + 3$. Thus it is indispensable to consider the value of 3 variables as known at any instant both in the upper confining section ($x = x_u$) and the downstream confining section ($x = x_d$). In addition, *initial conditions* should be known too, usually given in the form

$$Q = Q(x)_{t=t_0}; \qquad Q^* = Q(x)_{t=t_0}; \qquad Z = Z(x)_{t=t_0}. \tag{9}$$

As far as *boundary conditions* are concerned, it is expedient to assume the variation with time of discharge Q in the main channel and discharge Q^* over the flood plain in the *upstream* confining section:

$$Q = Q(t)_{x=x_u}; \qquad Q^* = Q(t)_{x=x_u}, \tag{10}$$

whilst in the *downstream* confining section the variation of stages with time is assumed:

$$Z = Z(t)_{x=x_d}. \tag{11}$$

The levee breach is assumed to occur in the section $x = x_s$, and having a flow

$$Q_{br} = Q_{br}(t)_{x=x_s}. \tag{12}$$

When solving the set of linear equations (8), the Gauss—Seidel elimination method was used. As a result of the calculations, the values Q, Q^*, Z and q were obtained for each section and each time interval.

5. Applications of the method

Applications of the new method will be demonstrated in two examples. Example 1 is intended to show the;effect of flood plain roughness on food routing, whilst Example 2 will show the effect of a hypothetical levee breach.

Example 1. A river having a regular compound cross section with dimensions according to Fig. 5a is assumed. Originally, there was a uniform steady

flow with water depth $H = 3{,}3$ m in the main channel and $h = 0{,}3$ m over the flood plains. To cases will be investigated, and in both, the Manning smoothness coefficient of the main channel will be $k_f = 1/n = 40$.

a) In the first case, let us assume a smoothness coefficient of $k_a = 5$ for the flood plain;

b) In the second case, undesirable vegetation has been removed from the area, resulting in a smoothness coefficient $k_b = 20$.

Throughout the calculations $\Delta x = 2500$ m and $\Delta t = 0{,}25$ hr was used.

Now, let us assume a flood wave lasting $T = 3$ days, entering the upstream confining section, having a flood hydrograph $Q = Q(\ )_{x=}$, then one should calculate the stage hydrographs $h = h(t)_{x=x_i}$ further downstream for varying roughness of the flood plain. (Such a steeply rising wave was chosen in order to save computer time.)

Computed results were plotted on Fig. 5b, showing the stage hydrographs $h = h(t)$ at $x = 0$, 20, 40 and 60 km. These allow the drawing of the following conclusions.

1. The proposed approximate method appears to be suitable for flood-routing calculations in compound-profile channels. (The assessment of accuracy by comparing calculated results with measured ones is still a task to he proved.)

2. By increasing flood plain smoothness from $k_a = 5$ to $k_b = 20$, peak stages of the same flood wave carrying the same water mass were reduced considerably. Thus, e.g., the difference amounted to $\Delta h = 1{,}3$ m at $x = 0$ and to $\Delta h = 0{,}76$ m at $x = 20$ km.

3. Over flood plains with an improved smoothness (i.e. reduced roughness) the downstream propagation celerity of flood waves is increased.

In the course of these calculations, no seepage losses were assumed to occur either in the main channel or the flood plains ($q_{sf} = q_{sh} = 0$). In case of the rougher flood plain ($k_a = 5$) the computation was run for $T = 47$ hr only, owing to the then available computer time. In this case a rather high number of iterations, 10 to 18, were required.

Exemple 2. The previously described channel having a main channel smoothness $k_f = 40$ and a flood-plain smoothness $k_h = 20$ is assumed to fulfil the same upstream boundary condition $Q = Q(t)_{x=0}$ as above (Fig. 6). A levee breach is assumed to take place at $x = 50$ km, beginning at $t = 40$ hr and lasting for another 20 hr. The spilled water is assumed to have a triangular hydrograph as shown in the lower part of Fig. 6. The maximum discharge flowing through the breach is 1/3 of the maximum discharge at the upstream confining section.

Computation results are shown in Figs 6, 7 and 8, where, for the sake of comparison, hydrographs both with or without the breach were plotted.

Fig. 6 shows the stage hydrographs $h = h(t)$ for $x = 0$, 30, 50 and 60 km. By analyzing the curves one can draw the following conclusions:

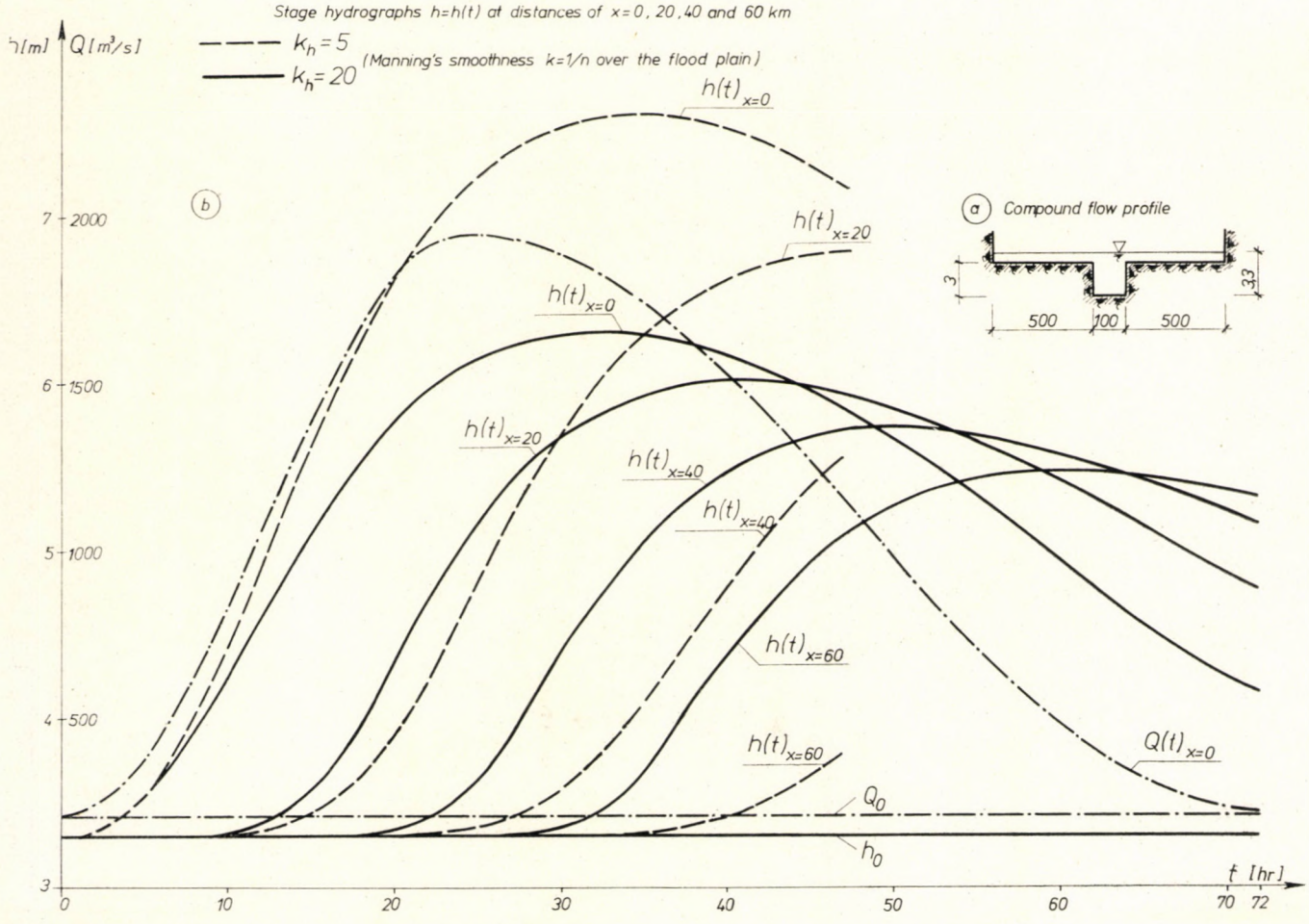


Fig. 5. **Initial and boundary conditions of Example 1. The cross section and the stage hydrographs $h = h(t)_x$ for the flood-plain roughness**

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae 81, 1975

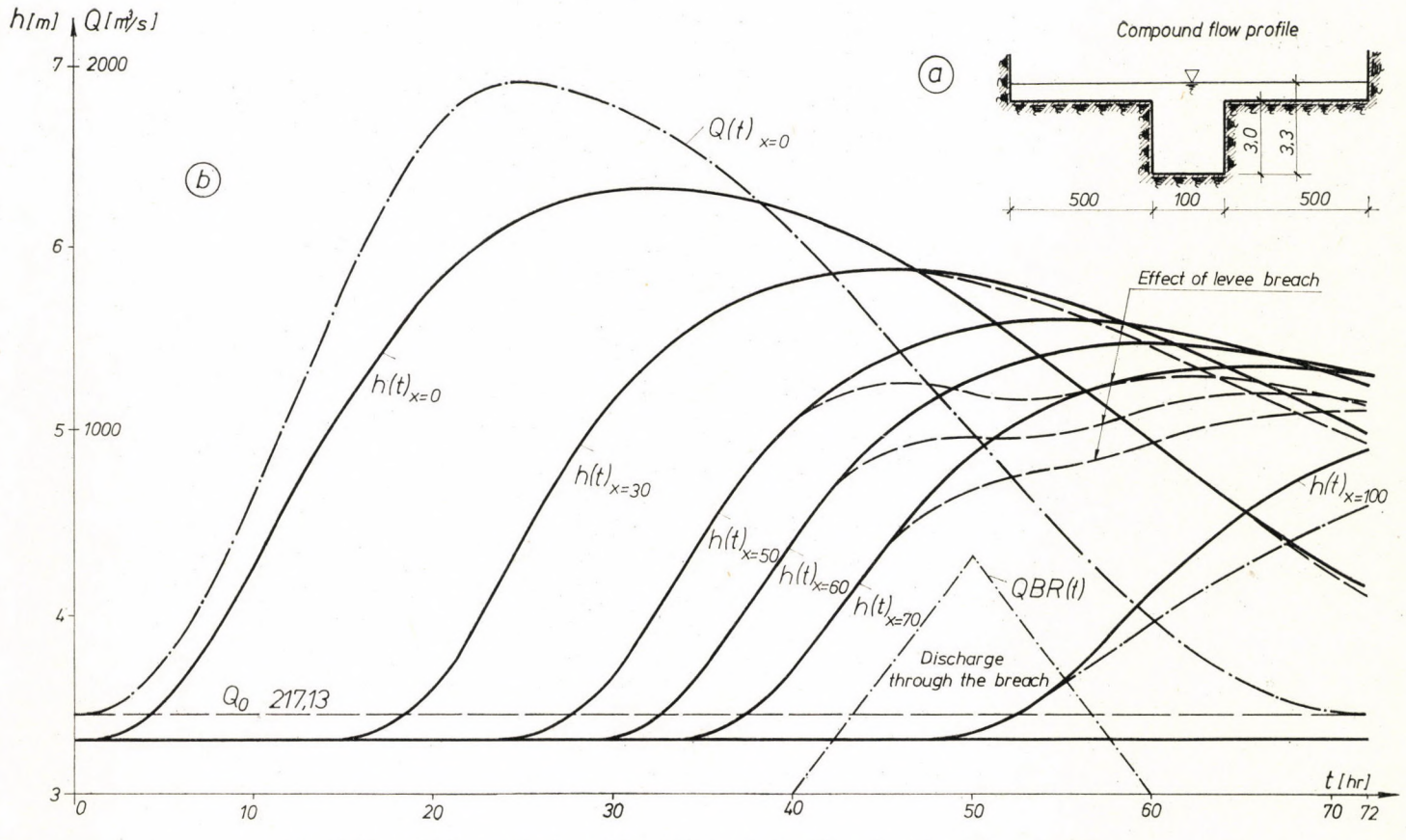


Fig. 6. Stage hydrographs $h = h(t)_x$ of Example 2 with and without levee breach

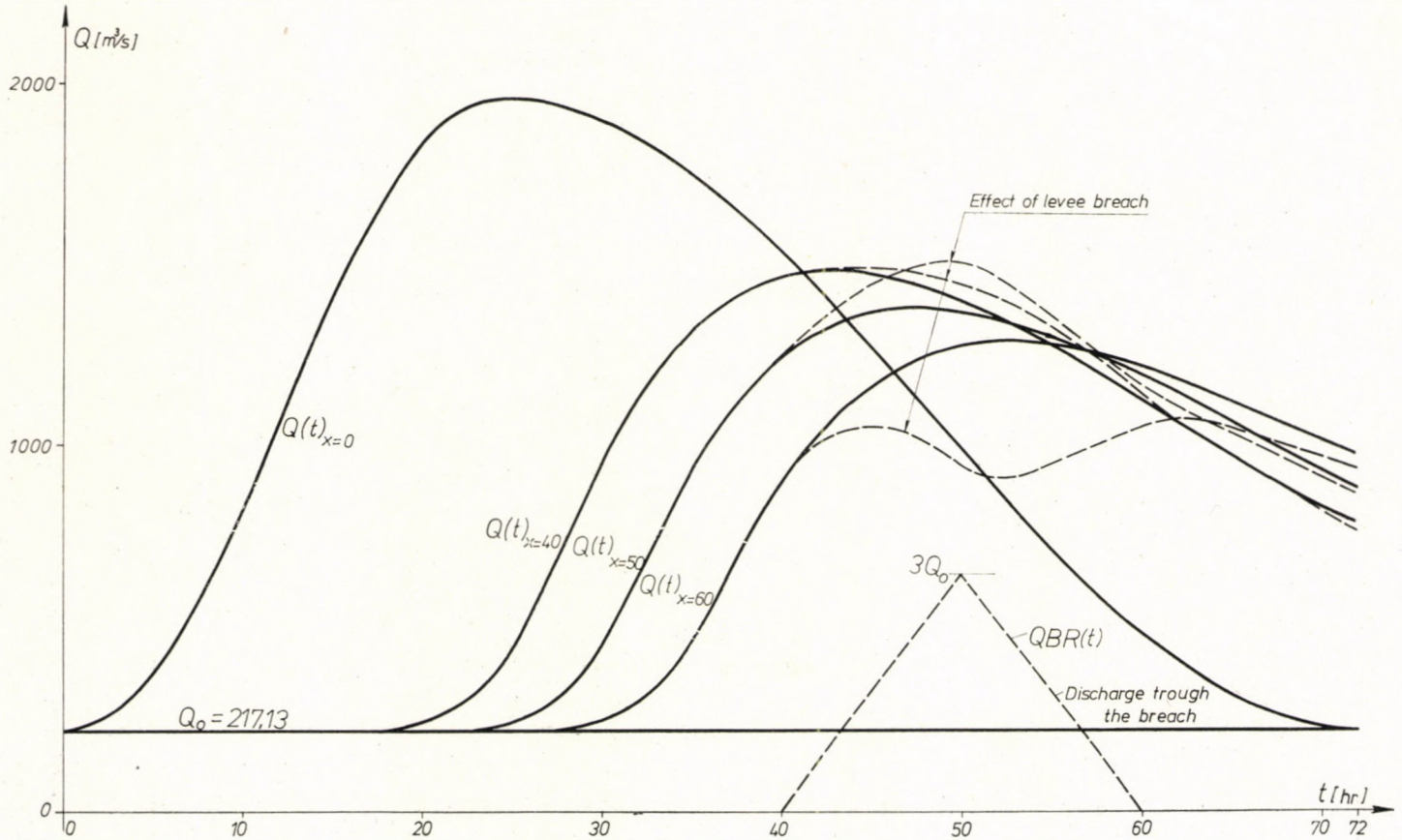


Fig. 7. **Flood hydrographs $Q = Q(t)_x$ of Example 2 with and without levee breach**

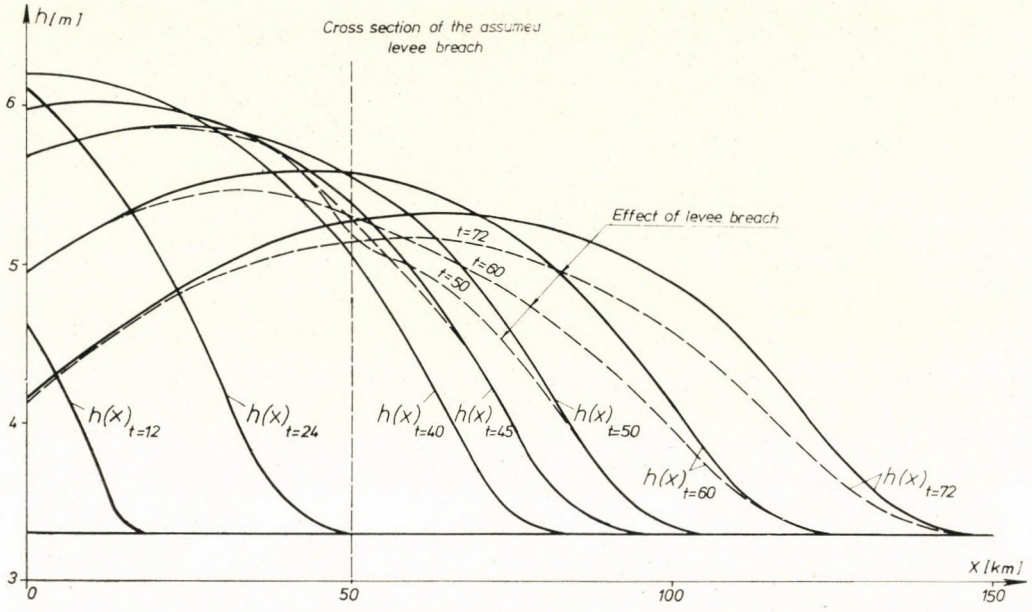


Fig. 8. River profiles $h = h(x)_t$ of Example 2 with and without levee breach

1. River stages are reduced as a consequence of the breach (Figs 6 and 8).

2. Upstream of the breach, flow will be accelerated, resulting in higher discharges, whilst downstream the breach discharge will diminish (Fig. 7).

3. The stage-reducing effect of the breach propagates more rapidly down stream than upstream.

4. In the section $x = 50$ km, the reduction of river stage $\Delta h = 29$ cm is lower than one might expect. This may be explained by the fact that upstream of the breach, flow will be accelerated (Fig. 7).

5. In case of an artificial breach (blasting), the reduction of river stages is highly influenced by the moment of blasting and by the extent of the breach (Fig. 7).

At $x = 50$ km and $t = 54$ hr a lowering of the stage by $\Delta h = 40$ cm will occur. Since the blasting occured too early, stages will subsequently rise again (Fig. 6). Fig. 8 very distinctly shows how hydraulic loads acting on the levee become lessened at various times.

It was previously mentioned that the reduction of stages owing to levee breach was less than expected. Among others this is also due to the fact that the volume of water passing the breach was rather negligible when compared to the total mass of the flood wave (Figs 6 and 7). A more substantial water withdrawal from the river would certainly have lead to a more significant drop of the stage.

6. Summary

The semi-dynamic method now described as being suitable for an approximate calculation of unsteady flow in compound river channels.

The main feature of this method consists in assuming — always in accordance with their respective local roughness — a nearly parallel flow in the main channel and the flood plain. Furthermore, transversal profiles of the water surface across the whole channel are horizontal lines. Apparent discrepancies of continuity, owing to dynamic conditions and seepage are eliminated by assuming transversal flows q. At the same time, the surface slope required for maintaining transversal flow is disregarded. The flood plain is assumed to have an unbroken water cover.

The above assumptions are taken into account by separately writing up according to the continuity and dynamic equations for the main channel and the flood plain.

Differential quotients are replaced by difference quotients. The linear set of equations (8) have been solved with the aid of the Gauss elimination method.

Numerical examples have shown that the same flood wave $Q = Q(t)$ will have considerably lower peak stages if the flood plain has a lower roughness. The proposed method is suitable for calculating the effect of variations in flood-plain roughness flood routing (Example 1, Fig. 5).

The method is equally applicable for the calculation of effects of levee breaches (Example 2, Figs 6—8). The variation with time of the spilled discharge Q_{br} may be chosen arbitrarily. The results obtained have shown reductions of the peak stages less than was expected. One of the reasons of this fact may lie with the acceleration of flow upstream of the section of levee breach. When resorting to levee blasting, the selection of the right time is of extreme importance; blastings performed either too early or too late are equally disadvantageous.

The number of necessary iterations may be reduced proportionally with the reduction of the dimension Δx and interval Δt.

REFERENCES

1. Abbot, M. B.: An Introduction on the Method of Characteristics. American Elsevier, New York 1966
2. Abbot, M. B.—Rodenhuis, G. S.—Verwey, A.: Further Development of the Implicit Difference Scheme for Flood Wave Calculation. IAHR. (1971), 183
3. Alan, G.—Fletcher—Hamilton: Flood Routing in an Irregular Channel. *Proceedings of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, June 1967
4. Daubert, A.—Marvaud, P.—Fabre, L.—Margnac, A.: Quelques applications de modèles mathematiques à l'étude des écoulements non permanents dans un réseau ramifié de rivières ou de canaux. *La Houille Blanche.* (1967), No. 7
5. Isaacson, E.—Stooker, J.: Numerical Solution of Flow Problems in Rivers. *Proceedings of the Hydraulics Division*, ASCE. HY 5. Oct. 1958

6. KOZÁK, M.: A szabadfelszínű nempermanens vízmozgások számítása összetett szelvényű medrekben (Manuscript) 1973
7. VERWEY, A.: Mathematical Model for Flow in Rivers with Realistic Bed Configuration. *International Courses in Hydraulic and Sanitary Engineering.* Delft 1973, 2—39.
8. YEVJEVICH, V. M.—BARNES, A. H.: Flood Routing through Storm Drains. Part I. Basic equation. Hydrological Papers, Fort Collins, Colorado, No. 44. 1970

Näherungsrechnung von Dammbrüchen zusammengesetzer Flußbetten. Die Zielsetzung des Aufsatzes ist die Darstellung Annäherungsverfahrens für die Berechnung von nicht permanenten Strömungen in Flußbetten von zusammengesetzten Profilen, mit besonderer Rücksicht auf die Auswirkungen der Dammbrüche. Das Wesen des Verfahrens ist, daß die Kontinuitätsund dynamischen Gleichungen für die Wasserbewegungen im Hauptbett und im Vorland abgesondert angewandt, und für jedes Profil sowohl im Hauptbett, als auch im Vorland gleiche Wasserstände angenommen werden, deren Querströmung mit einem linearen Durchfluß q berücksichtigt wird. Die Abflußmenge des Dammbruches wird an einer Streckenlänge von x ausgenommen. Das Verfahren setzt voraus, daß sich im Vorland eine gleiche zusammenhängende Wasserschicht befindet.

Приближениый расчет прорыва противопаводковых дамб в случае сложных русел. Работой ставится та цель, чтобы дать новый приближенный метод расчета для возможности вычисления не постоянных движений воды, возникающих в руслах со сложным разрезом, и уделяя при этом особое внимание показу воздействня от прорыва противопаводковых дамб. Суть предлагаемого фетода состоит в том, что для движений воды, возниникыщих в главном русле и в прирусловой пойме, применяются в каждом случае отдельно уравнения сплошности и динамики, и по отдельным поперечным разрезам исходит из идентичных уровней как в главном русле, так и в прирусловой пойме, поперечный гидрологический цикл которого учитывается с помощью $_7$ — линейногорасхода. Расход при прорыве дамбы определяется для участка длиной в Эв. Метод исходит из предположения, что в прирусловой пойме имеется до конца сплошой слой воды.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 249—264 (1975)

DIE SCHÄTZUNG VON EINFACHEN UND DOPPELINTEGRALEN AUFGRUND GESCHICHTETER PROBEENTNAHME

J. JANOSITZ*

[Eingegangen am 4. Juni 1971]

Stellen wir eine Beobachtung der Elementenzahl für irgendeinen Kennwert innerhalb eines Bereiches an. Aufgrund der Beobachtungen läßt sich die Schätzung des durchschnittlichen Kennwertes durchführen. Die Unsicherheit der Schätzung nimmt mit der Zunahme der Zahl aus zwei Gründen ab: einmal weil mit der Zunahme der Beobachtungen die Abweichung der Durchschnittswerte vom zu erwartenden Wert stochastisch gegen Null konvergiert und zweitenmal, weil mit der Verdichtung der Beobachtungen innerhalb des Bereiches der beobachtete Kennwert in immer mehr sich nähernden Punkten bekannt wird. Somit konvergiert die Abweichung des Integralwertes und des Durchschnittswertes auch kausal gegen Null. Bei der geschichteten Probeentnahme von einfachen und Doppelintegralen kommt die gleichzeitige Wirkung dieser beiden Konvergenzen zur Geltung. Vorliegende Arbeit leitet für die Streuung der Durchschnittswerte Zusammenhänge her, die die Wirkung sowohl der kausalen, als der stochastischen Konvergenz mit in Betracht ziehen.

In der Ingenieurpraxis kommt es fallweise vor, daß die Integrale (1) auf direktem Wege nicht berechnet werden können:

$$q = \int_a^b z(x)dx\,, \tag{1}$$

$$Q = \int\int_T z(x, y)dxdy\,.$$

Die Ursache dessen ist entweder die, daß die Eigenheit der zu integrierenden Funktion die direkte Berechnung nicht ermöglicht, oder aber die Funktion z nicht bekannt ist. Wenn nun in diesem Fall die Möglichkeit der Berechnung oder Messung der zu den im Bereich (a, b), bzw. T in repräsentativer Weise angeordneten Punkten gehörenden z_i-Werte $(i = 1, 2, \ldots, n)$, besteht, so läßt sich für die Integralwerte (1) die folgende Schätzung angeben:

$$q = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} z(x_i), \tag{2}$$

$$Q = \frac{|T|}{n}\sum_{i=1}^{n} z(x_i, y_i)\,,$$

* Dr. J. JANOSITZ, Kuruc-u. 81, H—3535 Miskolc, Ungarn

worin $|T|$ die Größe des Integrationsbereiches T bedeutet; es ist

$$T = \int\int_T dxdy .$$

In diesen Fällen kann stets die Frage gestellt werden: in welchem Maße nähert sich die Schätzung (2) an die gesuchten Integralwerte?

Da wir hier zufällige Erscheinungen untersuchen, läßt sich unsere Frage auch so formulieren: mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Differenz der Schätzung und des wahren Wertes kleiner, als eine gegebene Größe? Für die Berechnung der obigen Beziehungen findet man in der Literatur [3, 4, 5, 6] entsprechende Verfahren. Aufgrund dieser Methoden kann die stochastische Konvergenz des zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit gehörendes Fehlers $\bar{z}$ in Funktion der Probenzahl (n) bestimmt werden.

Weiterhin untersuchen wir neben der stochastischen Konvergenz auch die kausale Konvergenz der Abweichung zwischen $\bar{z}$ und q/l bzw. $Q/|T|$, unter Beachtung des repräsentativen Charakters der Probeentnahme und der hinsichtlich den Funktionen eventuell zur Verfügung stehenden übrigen Informationen. Zunächst wollen wir uns mit der Schätzung von q unter folgenden Bedingungen befassen.

1. Die Abszissenwerte x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ erhält man mittels geschichteter Probeentnahme aus dem Intervall (a, b). Also ist

$$x_i = \frac{b-a}{n}[i - l + \lambda], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad 0 < \lambda < 1 . \tag{3}$$

λ ist ein beliebiger, jedoch im Laufe des Vorgehens fester Wert.

2. Die Funktion $x(x)$ ist im Intervall (a, b) stetig, differenzierbar und begrenzt. Es sind

$$A \leqq z \leqq B ,$$
$$a \leqq x \leqq b , \tag{4}$$

und im Falle sämtlicher x-Werte $(a \leqq x \leqq b)$, ist

$$z'_x \leqq 0 ,$$

oder bei allen Werten

$$z'_x \leqq 0 . \tag{5}$$

Darüber hinaus sei der zu erwartende Wert der $z_i = z(x_i)$-Werte im Falle einer festgesetzten Zahl n

$$M(z_i) = M_i ,$$

und der der Streuung

$$D(z_i) = D_i . \tag{6}$$

Aus der vorherigen Bedingung folgt:

$$\frac{lh_i}{\sqrt{12\,n}} \leq D_i = \frac{lH_i}{\sqrt{12\,n}}, \tag{7}$$

worin

$$l = b - a\,;\; h_i = z'(x)_{\min}\,;\; H_i = z'(x)_{\max},$$

wenn

$$\frac{(i-1)\,l}{n} \leq x \leq \frac{il}{n}.$$

Da nun

$$\bar{z} = \frac{l}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

ist, wird

$$\frac{l^2}{12n^4}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \leq D(\bar{z})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{D_i^2}{n^2} \leq \frac{l^2}{12n^4}\sum_{i=1}^{n} H_i^2. \tag{8}$$

Ist n genügend groß, so läßt sich bezüglich des Wertes

$$t_n/S_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - z_i) \tag{9}$$

beweisen, daß seine Verteilung annähernd normal ist, mit dem zu erwartenden Wert 0 und der Streuung $n^2D(z)$.

Zum Beweis unserer Aussage genügt es darauf zu verweisen, daß in vorliegendem Fall die Lindebergsche Bedingung [3] erfüllt ist. Dies ist aufgrund folgender Ausführungen einzusehen. Die Wahrscheinlichkeitsveränderlichen $(M_i - z_i)n = \xi_i$ sind begrenzt, (3, 4), somit ist

$$\lim_{n\to\infty} S_n^2 = \lim_{n\to\infty} n^2\sum_{i=1}^{n} D_i^2 > n\,\frac{l^2h^2}{12} \quad 0 < h \leq h_i \;(i = 1,2\,,\ldots,n),$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\leq n}\frac{1}{n^2D_2^k}\int_{|v|\geq\varepsilon S_n} v^2 f_k(v)\,dv\,, \tag{10}$$

worin $f_k(v)$ die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeitsveränderlichen ξ_k ist.

Ist im folgenden

$$T_i = n(M_i - z_i)\,, \quad (i = 1\,,2\,,\ldots,n) \tag{11}$$

(Bild 1), so wird aufgrund von (9)

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} T_i\,. \tag{12}$$

Vom Wert t_n/S_n haben wir bewiesen, daß seine Verteilung im Falle genügend großer n normal ist, mit dem zu erwartenden Wert 0 und der Streuung $n^2D(z)$.

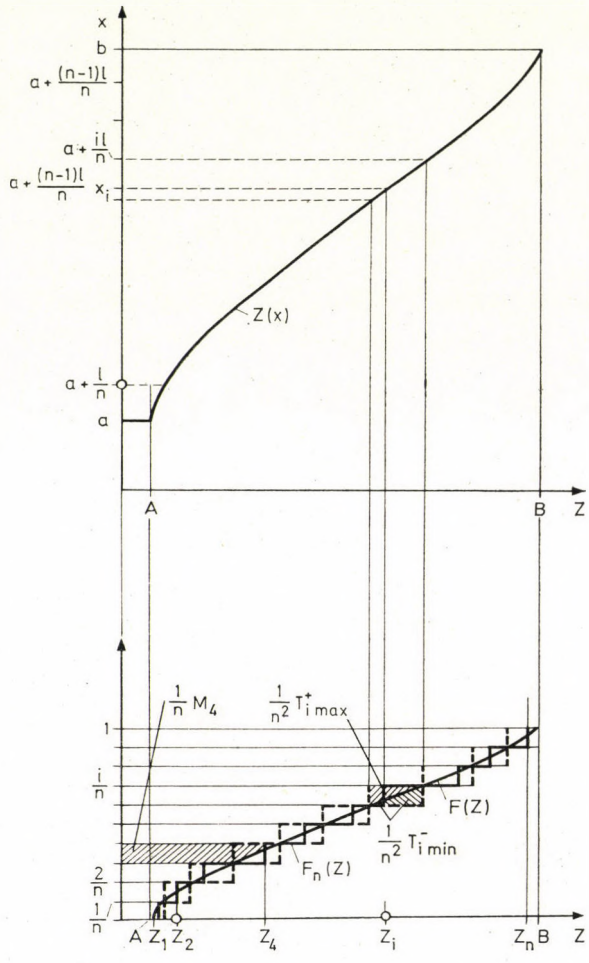


Bild 1

In Unkenntnis der D_i-Werte leiten wir zur Bestimmung von $D(\bar{z})$ einen für die Praxis in vielen Fällen mit Vorteil anwendbaren Zusammenhang her. Jeder T_i-Wert kann positiv (T_i^+) und negativ (T_i^-) sein und jeder hat ein Maximum ($T_{i\max}^+$) und ein Minimum ($T_{i\min}^-$).

Es sei nun deren Summe

$$t_n^+ = \sum_{i=1}^{n} T_{i\max}^+, \tag{13}$$

bzw.

$$t_n^- = \sum_{i=1}^{n} T_{i\min}^- . \tag{14}$$

Aufgrund des Bildes 1 ist leicht einzusehen, daß

$$\min [t_n^+, |\, t_n^- \,|\,] = \frac{E}{2} n\,, \quad (E = B - A)$$

ist, worin $B = Z_{\max}$ und $A = Z_{\min}$ im Intervall (a, b) sind. Da nun die Verteilung von t_n/S_n annähernd normal ist,

$$P\left[t_n^- \leq -\frac{En}{2}\right] = P\left[t_n^+ \geq \frac{En}{2}\right], \tag{16}$$

wenn

$$P(T_i > 0) = P_i, \tag{17}$$

wird

$$P(T_i < 0) = 1 - p_i$$

d. h.

$$P(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n > 0) = \prod_{i=0}^{n} p_i$$

und

$$P(T_1, T_2 \ldots, T_n < 0) = \prod_{i=0}^{n} (1 - p_i)\,. \tag{18}$$

Offensichtlich ist, daß

$$P(T_i > 0) > P(T_i \geq T_{i\max}^+ - \Delta_i)$$

und

$$P(T_i < 0) > P(T_{i\min}^- + \Delta_i) \tag{19}$$
$$0 < \Delta_i < T_{i\min}\,.$$

Natürlich je kleiner Δ_i ist, umso größer wird die Abweichung zwischen der rechten und linken Seite. Aufgrund von (15) und (19) läßt sich somit mit Sicherheit aussagen, daß

$$P\left(t_n \leq -\frac{nE}{2}\right) < \prod_{i=0}^{n} (1 - p_i)$$

und

$$P\left(t_n \geq \frac{nE}{2}\right) < \prod_{i=0}^{n} p_i\,. \tag{20}$$

Aus dem Vergleich von (16) und (20) folgt:

$$P\left[|\, t_n \,| \geq \frac{nE}{2}\right] < 2\left[\frac{l}{2}\right]^n, \tag{21}$$

weil

$$\min\left[\prod_{i=1}^{n} p_i,\ \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right] \leq \left[\frac{l}{2}\right]^n \tag{22}$$

ist. Aufgrund der bisherigen Zusammenhänge läßt sich aussagen, daß

$$2^{-n} < \int_{-\infty}^{-\frac{nE}{2}} \frac{1}{2n^2 D(\bar{z})} \exp\left[-\frac{t_n^2}{2n^4 D^2(\bar{z})}\right] dt_n \tag{23}$$

ist.

Aus (23) kann für den Wert von $D(\bar{z})$ eine Schranke nach oben angegeben werden.

Mit Einführung der Veränderlichen

$$u = \frac{t_n}{n^2 D(z)} \tag{24}$$

wird

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^2 D(\bar{z})} \int_{-\infty}^{-\frac{nE}{2}} \exp\left[\frac{-t_n^2}{2n^4 D^2(\bar{z})}\right] dt_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_2} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du\,,$$

d. h.

$$u_0 = -\frac{En}{2n^2 D(\bar{z})}\,. \tag{25}$$

Aufgrund von (23), (25) und Bild 2 folgt

$$2^{-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u_1^2}{2}\right], \tag{26}$$

woraus

$$u_1 = \sqrt{2(n-1{,}325)\ln 2}\,, \qquad (\sqrt{2\pi} \cong 2^{1{,}325}) \tag{27}$$

d. h.

$$u_0 < -\sqrt{2(n-1{,}325)\ln 2} + 1\,. \tag{28}$$

Es folgt daher

$$-\frac{E}{2nD(\bar{z})} < -\sqrt{2(n-1{,}325)\ln 2} + 1 \tag{29}$$

und dies umgeformt:

$$D(\bar{z}) = \frac{E}{2n(\sqrt{2(n-1{,}325)\ln 2} - 1)}\,. \tag{30}$$

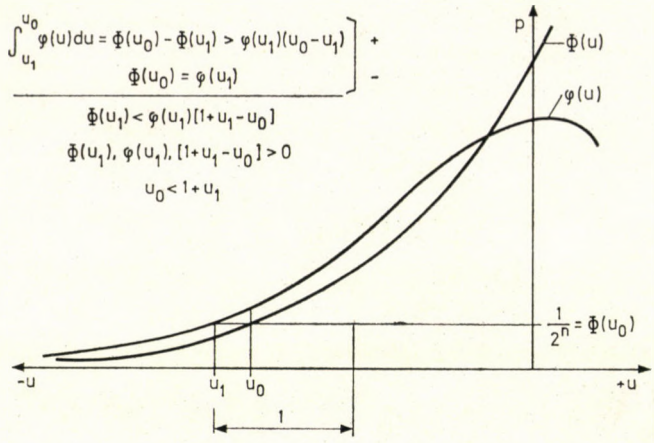


Bild 2

Das so erhaltene Ergebnis stimmt mit der in [5] mitgeteilten Beziehung überein, wonach unter ähnlichen Bedingungen

$$D(\bar{z}) \leq \frac{A}{n^{2/3}}$$

ist, mit

$$A = \sqrt{\frac{7}{60}} L \text{ und } L = \max \sup \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|. \tag{31}$$

Der Zusammenhang (30) ermöglicht für die Schätzung des $D(z)$ Wertes fallweise eine gegenüber (31) brauchbarere annähernde Schätzung, weil (31) die Schätzung von $z(x)$ bzw. L voraussetzt, diese jedoch in vielen praktischen Fällen fehlt und auch deren Schätzung auf Schwierigkeiten stößt.

Nach all diesem untersuchen wir nun, wie der Zusammenhang (30) umzuformen ist, wenn die Bedingung (5) nicht erfüllt ist.

Im folgenden soll die Funktion $z = z(x)$ auch weiterhin stetig, begrenzt und im Intervall (a, b) differenzierbar sein, ferner wird auch zugelassen, daß z'_x in diesem Bereich auch ihr Vorzeichen ändert. Offenbar wird so im n-ten Teil des Bereiches die Änderung (Streuung) der z-Werte allgemein größer sein, als dann, wenn z'_x das Vorzeichen nicht ändert (Bild 3).

Daraus folgt, daß im letztgenannten Fall nur bei einer größeren Probezahl ein so kleiner $D(z)$-Streuungswert erreicht werden kann, wie beim »undulationsfreien« Ablauf der z-Funktion, selbst demgegenüber, daß die Verteilung der z-Werte sich nicht unterscheidet.

Es sei im Intervall (a, b) die Verteilung der über Extreme verfügenden $z(x)$-Funktionswerte: $F(z)$ und die Streuung der Durchschnittswerte der z-Werte bei der repräsentativen Probeentnahme mit der Elementenzahl n: $D^*(z, n)$.

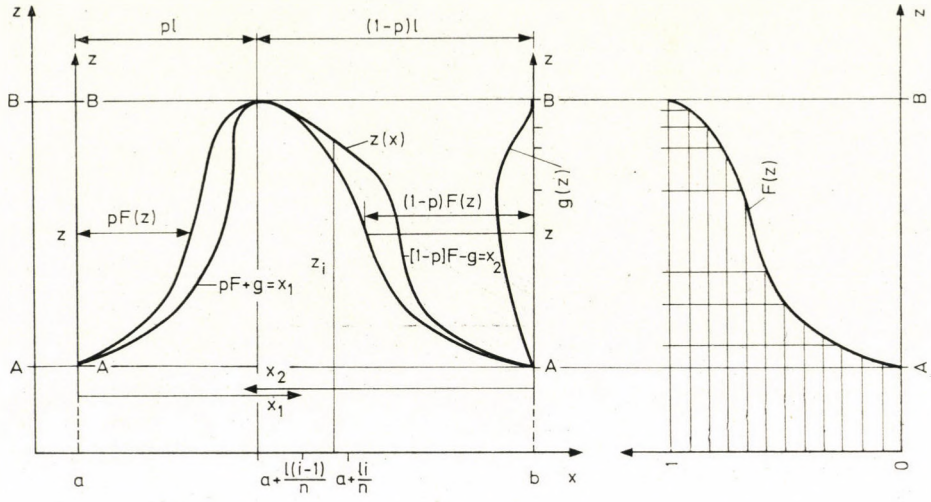


Bild 3

Bei einer repräsentativen Probeentnahme der Zahl n/k aus Funktionswerten der gleichen Verteilung $F(z)$, jedoch ohne Extreme im Intervall (a, b), ist die Streuung der $\bar{z}$-Werte: $D(\bar{z}, n/k)$.

Unser Ziel ist die Bestimmung jenes k-Wertes, für den

$$D^*(\bar{z}, n) = D\left(\bar{z}, \frac{n}{k}\right) \tag{32}$$

besteht. Diese Aufgabe kann durch Berechnung der Bogenlängen der Kurven gelöst werden.

Die Bogenlänge der Verteilungsfunktion beträgt (Bild 3):

$$S_E = \int_A^B \sqrt{1 + \left[\frac{dF}{dz}\right]^2}\, dz, \tag{33}$$

die der $z = z(x)$ Kurve im Intervall (a, b):

$$S_g = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dz}{dx}\right]^2}\, dx. \tag{34}$$

Sie weist bei gegebenem $F(z)$ offenbar dann ein Minimum auf, wenn die Funktion $z = z(x)$ die Bedingung (5) erfüllt. Neben (5) besteht außerdem:

$$\int_a^b \sqrt{1 + z_x'^2}\, dx = \int_A^B \sqrt{1 + (lF_z')^2} dz\,. \tag{35}$$

Nunmehr untersuchen wir jenen Fall, wenn sich der Bereich (a, b) in zwei Teile teilen läßt, überhalb derer für die Funktion $z(x)$ die Bedingungen (4, 5) gültig sind (Bild 3).

Es kann bewiesen werden, daß — falls die Verteilung der z-Werte $F(z)$ ist —

$$\int_a^b \sqrt{1 + z_x'^2}\, dz = 2 \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{lF_z'}{2}\right)^2}\, dz\,. \tag{36}$$

Ist nämlich aufgrund des Bildes 3:

$$x_1(z) = plF(z) + \varepsilon g(z),$$

so ist

$$x_2(z) = (1 - p)lF(z) - \varepsilon g(z). \tag{37}$$

Also ist die Bogenlänge der $z(x)$-Funktion im Intervall (a, b):

$$S(p, \varepsilon) = \int_A^B \left[\sqrt{1 + x_{1z}'^2} + \sqrt{1 + x_{2z}'^2}\right] dz\,. \tag{38}$$

Ist $F(z)$ gegeben, so hat die Funktion $S(p, \varepsilon)$ an der Stelle ein Minimum, wo

$$\frac{\partial S}{\partial p} = l \int_A^B \left[\frac{x_{1z}'^2}{\sqrt{1 + x_{1z}'^2}} - \frac{x_{2z}'}{\sqrt{1 + x_{2z}'^2}}\right] F_z' dz = 0 \tag{39}$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \int_A^B \left[\frac{x_{1z}'}{\sqrt{1 + x_{1z}'^2}} - \frac{x_{2z}'}{\sqrt{1 + x_{2z}'^2}}\right] g_z' dz = 0 \tag{40}$$

sind. Es sei weiters

$$\varphi(z) = \frac{x_{1z}'}{\sqrt{1 + x_{1z}'^2}} - \frac{x_{2z}'}{\sqrt{1 + x_{2z}'^2}}\,, \tag{41}$$

dann wird aufgrund von (40):

$$\left[\varphi(z) \cdot g(z)\right]_A^B - \int_A^B \varphi_z' \cdot g(z) dz = 0\,. \tag{42}$$

Weil aber $g(z)$ so ausgelegt ist (Bild 3), daß

$$g(A) = g(B) = 0, \tag{43}$$

wird aus (42)

$$\varphi_z' \cdot g(z) dz = 0. \tag{44}$$

Es sei φ_z' im Intervall (a, b) eine stetige Funktion; dem Grundlemma der Variationsrechnung [2] nach, ist im Falle jeglicher differenzierbarer Funktion $g(z)$:

$$\varphi_z' = 0 \tag{45}$$

im ganzen Intervall $A \leqq z \leqq B$.

Analog dem Besagten folgt aus (39):

$$[\varphi(z) \cdot F(z)]_A^B - \int_A^B \varphi_z' \cdot F(z)dz = 0\,. \tag{46}$$

Weil für die Verteilungsfunktion $F(z)$: $F(A) = 0$ und $F(B) = 1$ ist, folgt aus (45) und (46):

$$\varphi(B) = 0. \tag{47}$$

Aus (45) wird

$$\varphi(z) = \text{konst.} \quad (A \leqq z \leqq B), \tag{48}$$

d. h. aufgrund von (41), (47) und (48):

$$\frac{plF_z' + \varepsilon g_z'}{\sqrt{1 + x_{1z}'^2}} = \frac{(1-p)lF_z' - \varepsilon g_z'}{\sqrt{1 + x_{2z}'^2}}\,. \tag{49}$$

Wegen (43) existiert aufgrund des Rolleschen Satzes ein Wert $A \leqq \xi \leqq B$, wofür

$$(g_z')_{z=\xi} = 0 \tag{50}$$

wird. Nach dem Einsetzen von $z = \xi$ in (49), wird aufgrund von (50): $p = 1/2$.

Beide Seiten in (49) quadriert, erhält man:

$$\frac{x_{1z}'^2}{1 + x_{1z}'^2} = \frac{x_{2z}'^2}{1 + x_{2z}'^2}\,.$$

Weil gemäß (49) x_1' und x_2' im Vorzeichen übereinstimmen, ergibt sich:

$$x_{1z}' = x_{2z}'\,. \tag{51}$$

Für $p = 1/2$ wird aufgrund von (37) $\varepsilon = 0$.

Man kann sich unschwer überzeugen, daß der Extremwert der Funktion $S(p, \varepsilon)$ an der Stelle $p = 1/2$ und $\varepsilon = 0$ ein Minimum ist. D. h. in dem im Bild 3 dargestellten Fall, wenn

$$\int_a^b \sqrt{1 + z_x'^2} \cdot dx = k \int_A^B \sqrt{1 + \left[\frac{1}{k} F_z'\right]^2} \cdot dz\,, \tag{52}$$

$k = 2$ wird.

Es sei die Verteilung der z-Werte im Intervall $(a, a + pl)$: $F_1(z)$ und im Intervall $(a + pl, b)$: $F_2(z)$. Dann ist

$$F(z) = pF_1(z) + (1-p)F_2(z);\ 0 \leqq p \leqq 1 \tag{53}$$

und

$$M(z) = p \int_A^B z\, dF_1(z) + (1-p) \int_A^B z dF_2(z)\,. \tag{54}$$

Nehmen wir im Intervall (a, b) eine in repräsentativer Weise angeordnete Probe $z_i = z(x_i)$ mit n Elementen. In diesem Fall werden sich im Intervall

$(a, a + p)$ annähernd pnx_i Werte und im Intervall $(a + pl, b)$: $(1 - p)n$ Werte befinden. Unter Beachtung von (53) und (54) wird für den im Bild 3 dargestellten Fall der Wert in (15):

$$\min [t_n^+ \mid t_n^- \mid] = p \frac{E}{2pn} n + (1 - p) - \frac{En}{2(1 - p)n} = En . \tag{55}$$

sein. Analog dem vorherigen Fall, besteht auch hier

$$P[t_n \leq En] = 2\left[\frac{1}{2}\right]^n , \tag{56}$$

d. h. analog (30):

$$D(\bar{z}) = \frac{E}{n[\sqrt{2(n - 1{,}325) \ln 2} - 1]} , \tag{57}$$

und setzt man schließlich den gemäß (52) ausgelegten k-Wert in (57) ein:

$$D(z) = \frac{E}{2\left[\frac{n}{k}\right][\sqrt{2(n - 1{,}325) \ln 2} - 1]} . \tag{58}$$

In ähnlicher Weise kann bewiesen werden, daß falls die Funktion $z(x)$ im Intervall (a, b) eindeutig, stetig und begrenzt ist, von welchem Verlauf sie auch im gegebenen Intervall sei, die Ungleichheit (58) bei dem aufgrund von (52) bestimmten k-Wert besteht.

Im weiteren soll ohne Beweisführung gezeigt werden, wie der für den eindimensionalen Fall hergeleitete Zusammenhang (58) sich ändert, wenn z eine Funktion zweier Veränderlicher ist.

Die Schätzung von Doppelintegralen im Falle geschichteter Probeentnahme

Die Schätzung des Q-Wertes in (2) soll zunächst in einem sehr einfachen Fall untersucht werden.

Die Funktion $z = z(x)$ sei die Leitkurve einer Zylinderfläche (Bild 4):

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y) = \{x; y; z(x)\}. \tag{59}$$

Außerdem sollen für $z = z(x)$ die Bedingungen (4) und (5) gelten. Im folgenden untersuchen wir lediglich den in den Bereich

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq y \leq d \end{aligned} \tag{60}$$

entfallenden Teil der Fläche (59).

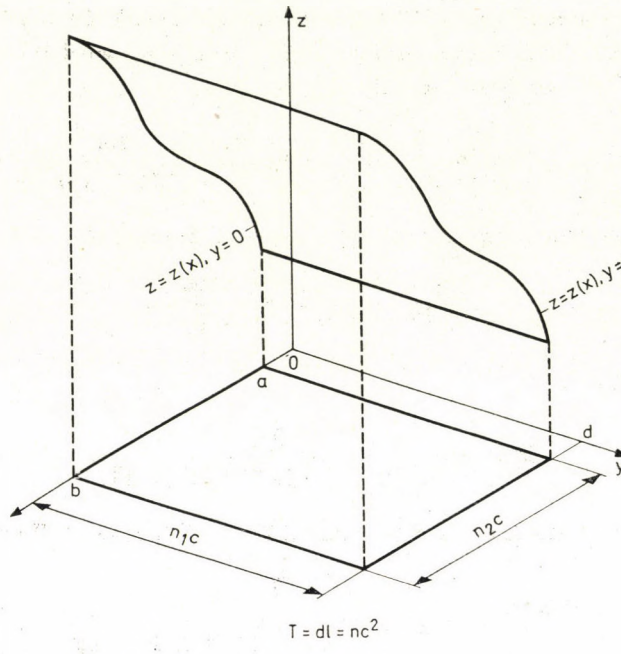


Bild 4

Will man im Bereich (60) mit geschichteter Probeentnahme n Punkte $P_i(x_i, y_i)$ anordnen, so wird jeder dieser Punkte im Bereich je eines Oblonges des Flächeninhaltes c^2 zu liegen kommen:

$$x_i = a + c[i + p_1], \tag{61}$$
$$y_j = c[j + p_2],$$

worin $n = T/c^2 = n_1 n_2$ und $l/n_1 = d/n_2 = c$ sind; ferner sind auch n_1 und n_2 ganze Zahlen.

Unter den obigen Bedingungen wird die Verteilung der z-Werte in den in der y-Richtung nebeneinander liegenden Oblongbereichen der Breite c und der Länge l übereinstimmen. Wir haben also n_2 gegebene Bereiche der gleichen Verteilung. Entnimmt man von diesen mittels geschichteter Probeentnahme Proben mit n Elementen, so wird aufgrund von (58):

$$D(\bar{z}) = \frac{E}{2\left[\frac{n}{n_2}\right] \cdot \left[\sqrt{2(n - 1{,}325) \ln 2} - 1\right]}. \tag{62}$$

Aus (61) ist

$$n_2 = d\sqrt{\frac{n}{T}} = \sqrt{\frac{nd}{l}}, \tag{63}$$

man kann also schreiben:

$$D(\bar{z}) = \frac{E\sqrt{d}}{2n\sqrt{l}\,[2(n-1{,}325)\ln 2 - 1]}\,. \tag{64}$$

Im folgenden untersuchen wir jene Fälle, wo wir für den oberhalb des Bereiches T liegenden Teil der Funktion $z = z(x, y)$ nur die Bedingungen der Steigkeit und der Begrenztheit gelten lassen.

Aus (68) ist zu ersehen, daß dessen rechte Seite umgekehrt proportional dem Wert $\sqrt{l}$ ist. Wir ersetzen sie also entweder durch den genauen Wert oder geben für sie eine Schätzung nach unten.

Im Falle der Fläche (59), aber auch allgemein trifft es zu, daß wir es bei einem festgesetzten T mit einem umso günstigeren Fall zu tun haben, je größer der Wert von l ist. Mit der Zunahme von l nimmt demgegenüber auch die Oberfläche der Fläche (59) ab. Die Oberfläche der Fläche (59) im Bereich T ist folgende:

$$F = \iint_T \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\cdot dx\,dy = d\int_{z=A}^{B} \sqrt{1 + (lF_z')^2}\cdot dz\,, \tag{65}$$

$$(A = z_{\min},\ B = z_{\max})\,.$$

Mit $T = dl$ kann geschrieben werden:

$$F = \int_A^B \sqrt{(d^2 + (TF_z')^2}\,dz\,. \tag{66}$$

Unter den bisherigen Bedingungen kann der Beweis dafür erbracht werden, daß im Falle des in (66) gegebenen T und $F = F(z)$ mit der Zunahme von $F : d$ zunimmt, also das zugehörige l abnimmt.

Auch im allgemeinen Fall kann bewiesen werden, daß bei gegebenem T und $F(z)$ die Wirkung der kausalen Konvergenz im Falle eines umso geringeren n zur Geltung kommt, je kleiner die Oberfläche der Funktion $z = z(x, y)$ oberhalb des Bereiches T ist. Darüber hinaus kann auch bewiesen werden, daß im Falle eines gegebenen T und $F(z)$, wenn die Oberfläche der Funktion $z : F$ ist, bei Einführung des aufgrund von (66) bestimmbaren d in (64) die Ungleichheit besteht.

Wenn man also aufgrund der innerhalb der Fläche T mit geschichteter Probeentnahme gewonnenen nz_i Werte und anderer, für die Funktion $z = z(x, y)$ zur Verfügung stehenden Informationen für F eine Schätzung nach oben gibt und für $F(z)$ eine solche Näherungsfunktion findet, deren Bogenlänge kleiner ist, als die der $F(z)$ innerhalb des Bereiches (A, B), so kann aufgrund von (66) für d eine Schätzung nach oben gegeben werden.

F kann z. B. folgenderweise geschätzt werden. Es seien die Bogenlänge n der zu den Werten $z_0 < z_1 < \ldots < z_n$ gehörenden Isohypsen: $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Wenn man über die Bereiche zwischen den Isohypsen aufgrund der bezüglich

der Funktion z zur Verfügung stehenden Informationen auch das weiß, daß in diesen Bereichen z weder eine lokale Extremwertstelle, noch einen Sattelpunkt hat, dann kann gesagt werden, daß

$$F \leq \sum_{i=1}^{n+1} \Delta z_i S_i + T \tag{67}$$

ist, worin

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1};\ z_0 = A;\ z_{i-1} = B$$

sind. Außerdem müssen sämtliche Isohypsen geschloßene Kurven sein und es kann für die rechte Seite von (66) ähnlich (62) die nachstehende Schätzung gegeben werden:

$$F = d \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\Delta z_j^2 + \left[\frac{1}{n}\right]^2} \tag{68}$$

$$\Delta z_j = z_j^- - z_{j-1};\ z_0 = z_1. \tag{68}$$

Nachstehend soll noch für die Schätzung des Wertes

$$\frac{E}{2}\sqrt{\frac{d}{l}} = D^{**} \tag{69}$$

der Ungleichheit (64) eine neuere Schätzungsart dargelegt und hierzu soll vorerst der folgende Satz bewiesen werden.

Wenn innerhalb der Teilflächen t_i, $(i = 1, 2, \ldots, w)$, der Fläche T für die E- und d-Werte entsprechende Schätzungen E_j und d_j nach oben gemacht werden können, so gilt:

$$D^{**} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{w} d_i E_i\,; \quad T = \sum_{i=1}^{w} t_i\,. \tag{70}$$

Der Satz kann folgenderweise bewiesen werden. Ist $F_i(z)$ die Verteilung innerhalb der Flächen t_i der z-Werte, dann gelten:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{w} p_i F_i\,; \quad p_i = \frac{t_i}{T} \tag{71}$$

und aufgrund von (71):

$$M(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{w} p_i M_i\,. \tag{72}$$

(M_i ist der zu erwartende Wert der Funktion z innerhalb der Flächen t_i).

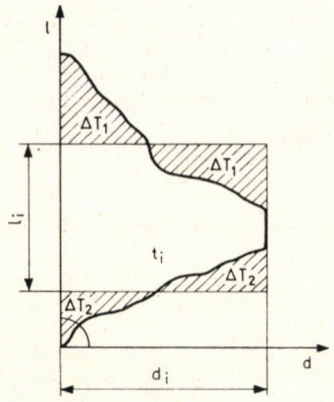


Bild 5

Ordnet man ferner auf der ganzen Fläche in repräsentativer Weise n Punkte an, dann werden aus diesen in den Flächen t_i annähernd

$$n_i \cong p_i n \tag{73}$$

Punkte.

Für die Abweichung des in (13) und (14) gedeuteten Durchschnitts der aus den Flächen t_i gewonnenen $n_i z_i$ Probewerten und der M_i-Werte gilt gemäß (64):

$$\min\left[t_{ni}^{+}, |\, t_{ni}^{-}\,|\,\right] = \frac{E_i t_i}{2\sqrt{p_i n l_i}}. \tag{74}$$

Aus (72) folgt dagegen, daß für die ganze Fläche derselbe Wert der folgende sein wird:

$$\min\left[t_n^{+}, |\, t_n^{-}\,|\,\right] = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{w} p_i \frac{E_i \sqrt{t_i}}{\sqrt{p_i}\, l_i}. \tag{75}$$

Damit ist aber die Aussage bewiesen.

Läßt sich also die Fläche T auf die auf Bild 5 dargestellten t_i Teilflächen teilen, wo in der d-Richtung z entweder eine nur stetig ansteigende oder abfallende Funktion ist, und der E-Wert eines beliebigen Schnittes in der Richtung d entweder gleich oder kleiner, als E_i ist, so gilt:

$$l_i = \frac{t_i}{d_i}. \tag{76}$$

Im Falle einer solchen Teilung in Teilflächen kann der Wert von D^{**} aufgrund von (70) rasch bestimmt werden, doch bedarf man auch hierzu, wie zur Berechnung der Oberfläche der z-Funktion, außer den z_i-Werten der P_i Punkte noch weitere Informationen.

SCHRIFTTUM

1. FAZEKAS F.: Műszaki Matematikai Gyakorlatok II. Variációszámítás. (Techn. mathematische Übungen, II. Variationsrechnung). Tankönyvkiadó, Budapest 1957.
2. LAVRENTYEV, M. A.—LJUSZTYERNYIK, L. A.: Variációszámítás. (Variationsrechnung) Akadémiai Kidaó, Budapest 1953.
3. PRÉKOPA, A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. (Wahrscheinlichkeitstheorie mit technischen Anwendungen.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1962.
4. RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás. (Wahrscheinlichkeitsrechnung.) Egyetemi Tankönyv, Budapest 1955.
5. SREJGYER, J. U. A.: Monte-Carlo módszerek. (Monte-Carlo-Verfahren.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965.
6. VINCZE, J.: Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal. (Mathematische Statistik mit Anwendungen, in der Industrie.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968.

Estimation of Simple and Double Integrals by Stratified Sampling. When making within a range n elementary observations of a characteristic, from the observations its mean value can be estimated. The incertainty of the estimation decreases with increasing n for two reasons: on the one hand, when increasing the number of observations the deviation of the mean from the expected value stochastically converges to zero. On the other hand, by densifying the observations within the range the characteristic is known in points ever closer to each other. Hence the difference of the mean value and the average value of the integral converges to zero also causally. In the stratified sampling of simple and double integrals the action of the two convergencies combines. The author deduces relations for the dispersion of the mean value which can be used in most practical cases and which take into account the effect of both the causal and the stochastic convergencies.

Оценка однократного и двойного интегралов на основе послойного отбора проб. Произведем n число наблюдений некоторого показателя в пределах одного диапазона. На основе данных наблюдений можно произвести оценку среднего значения показателя. Неопределенность оценок с увеличением числа наблюдений падает вследствие двух причин, а именно: с одной стороны, потому что с ростом числа наблюдений отклонение среднего значения стохастически сходится к нулю от ожидаемого значения, а с другой стороны, потому что с увеличением плотности наблюдений в пределах диапазона наблюдаемый показатель становится известным точками, все больше приближающимися друг к другу. Вследствие чего как значение интеграла, так и среднее значение каузально стремятся к нулю. В случае послойного отбора проб однократного и двойного интегралов проявляется одновременное действие обеих сходимостей.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 265—277 (1975)

KENNZEICHNUNG VON TRENNVORGÄNGEN MITTELS FUNKTIONEN DES AUSBRINGENS UND DES WIRKUNGSGRADES

SZ. PETHŐ*

CAND. DER TECHN. WISS.

[Eingegangen am 29. Sept. 1972]

1. Einleitung

Durch die TROMP-Kurve wird die zu dem konkret gewählten Trennungswert einer der das Material kennzeichnenden physikalischen Größe (z. B. der Korngröße, der Dichte) koordinierte Änderung des Ausbringens als Funktion der im voraus bestimmten Kenngröße dargestellt. Diese Darstellung und die gleichzeitig erkennbaren Parameterwerte sind geeignet die Arbeitsweise der Trennapparatur richtig zu werten. In diesem Sinne sind in dieser Arbeit Kurven des Ausbringens des Durchfallprodukts und jene des Restprodukts, ferner die Kurve des Wirkungsrades beschrieben, um klarzulegen, daß mit Hilfe dieser Kurven als Funktionen der gewählten Kenngröße bezw. des konkreten Trennungswertes derselben eine technologische Bewertung der gleichzeitigen Auswirkung der Arbeitsweise der Apparatur einerseits, und der Zusammensetzung des gekörnten Materials anderseits, möglich und nützlich sei.

2. Zeichenerklärung

a_i = kumulativer Verteilungswert (in Prozenten) des Rohproduktes
b_i = kumulativer Verteilungswert des Durchfallproduktes in Prozenten
c_i = kumulativer Verteilungswert des Restproduktes in Prozenten
k_i = Bestandteil-Ausbringen des Durchfallproduktes
K_i = Bestandteil-Ausbringen des Restproduktes
P = Kurvenkreuzungspunkt (P_A, F_B, P_c)
s = Massenausbringen des Trennproduktes (in Prozenten des Rohproduktes)
x = Abszissenwert.

Griechische Buchstaben:

δ = Dichte, Abzsissenwert
δ_A, δ_B, δ_C ..... zu P_A, P_B, P_C
η = Wirkungsgrad berechnet für »k«
Δ_c = Ordinatendifferenz
Δa_i = fraktionierter Direktwert des Rohproduktes
Δb_i = fraktionierter Direktwert des Trennproduktes »b«
Δc_i = fraktionierter Direktwert des Trennproduktes »c«
H = Wirkungsgrad berechnet für »K«

Indizes:

a, b, c — zum Rohprodukt bzw. zu den Trennprodukten gehörig
A, B, C — zu den Punkten P_A, P_B, P_C in dem betreffenden Teilabbildungen gehörig (in Bildern 2 und 3)
$1 \ldots i \ldots n$ — Reihenfolgenummern

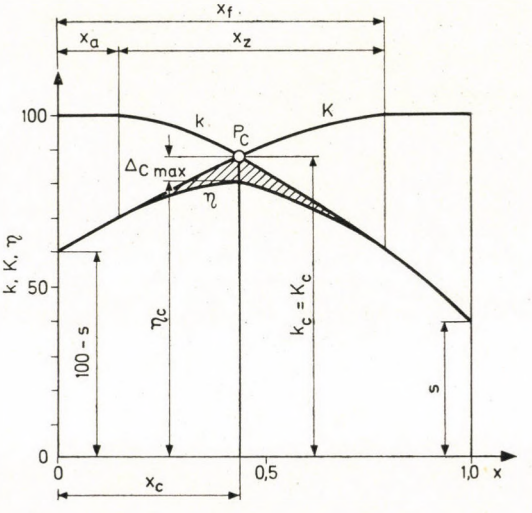
* Prof. Dr. Sz. PETHŐ, Csabai-kapu u. 36, H—3529 Miskolc, Ungarn

3. Die Funktionen des Ausbringens und des Wirkungsgrades

In Kenntnis des Massen-Ausbringens, der direkten Verteilungsangaben des Rohproduktes und der Trennporodukte kann man die zur Aufstellung bzw. Aufzeichnung der Tromp-Kurven benötigten Werte des Bestandteil-Ausbringens ermitteln.

Aus den Werten des Massenausbringens der Trennoperation, und aus den kumulativen Angaben der Produktenverteilung kann man die variierenden Werte des Bestandteilausbringens und des technischen Wirkungsgrades bestimmen. Wenn diese Kennwerte bestimmt, die bezüglichen Diagramme konstruiert, und die notwendigen Meßwerte ermittelt sind, so kann man die Arbeitsweise der Trennapparatur und die Beschaffenheit des Rohproduktes besser auswerten, als dies bisher nach herkömmlichen Verfahren gelingen konnte. Hierbei sind diese neuartigen Ergebnisse auch zu einer kontinuierlichen Betriebskontrolle äußerst geeignet.

Eine allgemeine Lösung des soeben aufgeworfenen Problems ist im Bild 1 dargestellt. Hier findet man die Kurven der Bestandteilausbringens und des Wirkungsgrades, in Abhängigkeit von irgendeiner, das Rohprodukt kennzeichenden physikalischen Größe (Korngröße, Endfallgeschwindigkeit, Wichte usw.). Es handelt sich um folgende Funktionen: Ausbringen des Durchfall-



x_f : Obere Grenze der Trennungszone
x_a : Untere Grenze der Trennungszone
x_z : Trennungszone
x_c : Trennungsparameterwert für gleiche Bestandteil - Ausbringen
x : Trennungsparameter

Bild. 1

produkts, d. h. von Bestandteilen, deren Kenngröße kleiner ist, als der distingtive Wert des Trennungparameters. Weiters das Ausbringen von Bestandteilen, deren Kenngröße größer ist als der distingtive Wert des Trennungsparameters: schließlich sind die Wirkungsgradkurven η und H, berechnet für k und K ebenfalls eingezeichnet.

Wir wollen nun den Verlauf dieser Kurven näher beschreiben. Ausgangspunkt unserer Besprechung gilt der Schnittpunkt P_C (mit der Abszisse x_C) beider Kurven »k« und »K«, und die eigentliche Trennungszone z_z (wobei $x_z = x_f - x_a$).

Im Gebiete $x \leq x_a$ (x_a untere Grenze der Trennungszone x_z) verläuft die Kurve k am Niveau 100%. Kurve K steigt an, ausgehend aus dem Anfangspunkt mit dem Ordinatenwert (100 s), in Koinzidenz mit der Kurve η.

Innerhalb der Trennungszone x_z verläuft die Kurve k monoton sinkend, Kurve K monoton steigend. Kurve η steigt ebenfalls monoton an, doch sie verläuft niedriger als Kurve »K«. Dies gilt bis zur Abszisse x_C des Kreuzungspunktes P_C. Von hier an verläuft die Wirkungsgradkurve (η) monoton sinkend, doch niedriger als Kurve »k«.

Von der oberen Grenze der Trennungszone fällt die Wirkungsgradkurve η in ihrem absteigenden Verlaut mit der ebenfalls absteigenden Kurvenstrecke k überein und verläuft bis zum Endpunkt (Ordinate »s«) in Koinzidenz mit Kurve k. Die steigende Strecke der Kurve K erreicht das Nieveau von 100% und bleibt auf diesem Niveau konstant.

Betrachtet man den Schnittpunkt P_C der Kurven k und K, so sieht man, daß in diesem Punkte der Ordinatenausschnitt Δ_C zwischen Kurven η und K (bezw. k) seinen Maximalwert im Punkte P_C erreicht. Hier gilt die Gleichheit

$$k_C = K_C \,.$$

Die schraffierte Fläche des Bildes ist die sogenannte Fehlerfläche.

Es zeigt sich, daß die auf dem Bild 1 definierten Kennwerte (x_C, $k_C = K_C$, Δ_C, η_C, usw.) für Bewertungszwecke nützlicher sind, als die herkömmlichen Angaben, deshalb es angebracht ist diese neudefinierten Kennwerte näher zu untersuchen.

Für den konkreten Fall einer Kohlen-Sortierung nach Dichte haben wir solche Ausgaben in Tafel I. zusammengestellt.

Die ersten 9 Kolonnen der Tafel I enthalten Ergebnisse einer Wichte-Analyse betreffs des Rohprodukts und der Trennprodukte gelegentlich einer Kohlensortierung, wobei b_i sich auf das Trennprodukt kleinerer und c_i auf jenen größerer Wichte bezieht: a_i (aus b_i und c_i berechnet) gilt für das Rohprodukt. Hierbei bezeichnet s das Massenausbringen des Leichtproduktes. Kolonne (10) enthält das Ausbringen des Durchfallproduktes k_i, Kolonne (11) das Ausbringen des Restproduktes K_i.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae 81, 1975

Tafel I

Sortierung nach Dichte: Werte des Bestandteil-Ausbringens und des Wirkungsgrades, berechnet aus kummulativen und experimentellen Angaben

Wichtestufen	Wichteverteilung				Massenausbringen des Produktes		Wichteverteilung des				
	kleinerer Wichte		größerer Wichte		kleinerer Wichte	größererWichte	Rohprodukts		Ausbringen des Bestandteils		Wirkungs-grad
	fraktioniert	kumulativ	fraktioniert	kumulativ	$\frac{\Delta b_i \cdot s100}{100}$	$\frac{\Delta c_i(100-s)}{100}$	fraktioniert	kumulativ			
	Δb_i	b_i	Δc_i	c_i			Δa_i	a_i	k_i	K_i	η_i(bzw. Hi)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,3<	1,3	65	65	—		45,5	—	45,5	45,5	100,—	55,05	55,05
1,3	1,4	25	90	1	1	15,5	0,3	17,8	63,3	99,53	80,93	80,45
1,4	1,5	5	95	2	3	3,5	0,6	4,1	67,4	98,67	89,26	87,92
1,5	1,5	3	98	5	8	2,1	1,5	3,6	71,0	96,62	95,17	91,79
1,6	1,8	1,4	99,4	10	18	0,98	3,0	3,98	74,98	92,80	98,32	91,12
1,8	2,0	0,6	100,0	20	38	0,42	6,0	6,42	81,40	86,00	100,—	86,00
2,0	2,2	—	100,0	25	63	—	7,5	7,5	88,9	78,74	100,—	78,74
2,2<		—	100,0	37	100	—	11,1	11,1	100,0	70,—	100,—	70,00
		100,0		100		$s = 70{,}00$	30,0	100,00				

Bemerkungen:

— Kolonnen 1,2 u. 4 sind experimentelle Angaben;
— Kolonne (6) beträgt 70% der Kolonne (2);
— Kolonne (7) beträgt 30% der Kolonne (4);
— Kolonne (8) ist die Summe von Kolonnen (6) und (7);
— Kolonnen 10, 11 und 12 sind berechnete Werte laut Gleichungen (1) (2) und (3).

Zur Berechnung der Kolonnenwerte 10, 11 und 12 sollen hier die folgenden Gleichungen angeführt werden:
Kolonne 10:

$$k_i = s \frac{b_i}{a_i}, \tag{1}$$

Kolonne 11:

$$K_i = (100 - s) \frac{100 - c_i}{100 - a_i}. \tag{2}$$

Zur Gleichung k_i sei bemerkt, daß es sich hier um das Ausbringen des Bestandteils von Leichtprodukt handelt uzw. von Teilen, deren Wichte kleiner ist, als der distinktive Trennungswert der Wichte. Die Gleichung (11) betrifft analogerweise das Ausbringen des Bestandteils von Schwerprodukt, usw. jener Teile, die eine größere Wichte haben als der distinktive Trennungswert der Wichte.

Die Gleichung für den technische Wirkungsgrad lautet:
Kolonne 12:

$$\eta_i = 100 \frac{k_i - s}{100 - s_{\text{opt}}}, \tag{3}$$

bezw.

$$H_i = 100 \frac{K_i - (100 - s)}{100 - (100 - s_{\text{opt}})}. \tag{4}$$

Für das Massenausbringen gilt:

$$s = 100 \frac{a_i - c_i}{b_i - c_i} \tag{5a}$$

und bekannterweise

$$s_{\text{opt}} = a_i \tag{5b}$$

Der Wert (5b) ist das theoretische Optimum (vollständige und fehlerfreie Trennung), das aber in der Praxis nur mehr oder weniger angenähert werden kann.

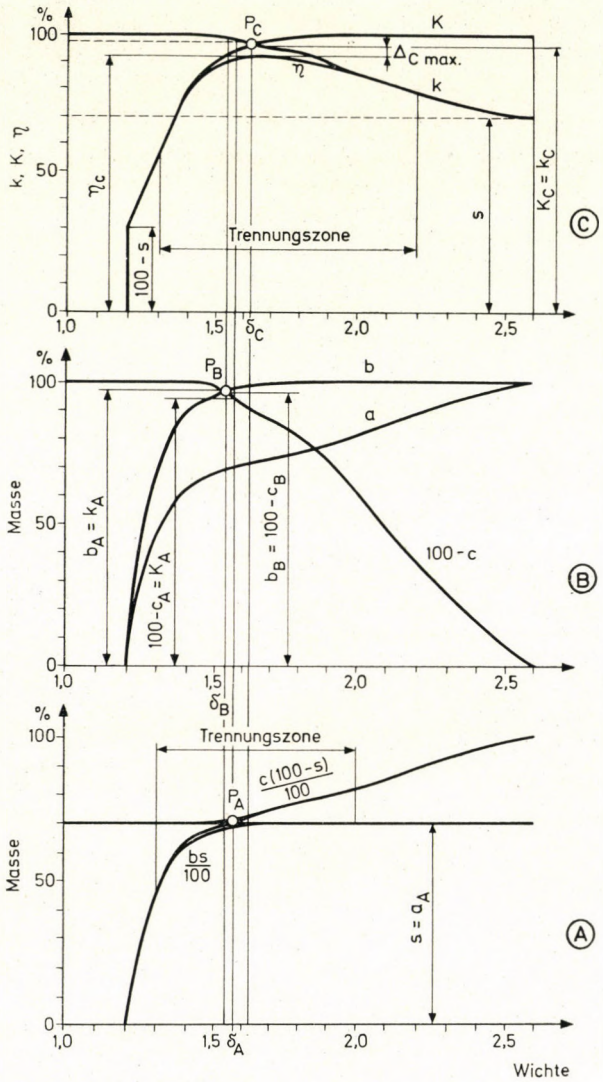


Bild. 2

Setzt man das Massenausbringen laut (5) und die Bestandteil-Ausbringen laut (1) und (2) in die Formel (3) und (4) ein, so erhält man den Beweis dafür, daß die Wirkungsgradwerte η und H (Kolonne 12) einander gleich sind:

$$\eta_i = H_i = 10^4 \frac{(a_i - c_i)(b_i - a_i)}{(b_i - c_i)a_i(100 - a_i)} = 100 \frac{s(b_i - a_i)}{a_i(100 - a_i)} . \qquad (6)$$

Aus den Angaben der Tafel I haben wir die Bilder 2A, 2B und 2C konstruiert.

Tafel II

Luftsichtung: Werte des Bestandteilausbringens und des Wirkungsgrades, berechnet aus experimentellen und kumulativen Angaben

Stufen der Korngröße um	Korngrößenverteilung des Produktes				Massenausbringen des Produktes		Korngrößenverteilung des Rohprodukts		Ausbringen des Bestandteils		Wirkungsgrad
	kleineren Grades		größeren Grades		kleinerer Korngröße	größerer Korngröße	frakzioniert	kumulativ			
	fraktioniert	kumulativ	fraktioniert	kumulativ	$\frac{\Delta b_i s}{100}$	$\frac{\Delta c(100-s)}{100}$			k_i	K_i	β_i bezw. H_i
	Δb_i	b_i	Δc_i	c_i			Δa_i	a_i			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0— 40	51,7	51,7	1,2	1,2	19,7	0,7	20,4	20,4	96,5	76,9	73,3
40—100	17,1	68,8	2,5	3,7	6,5	1,6	8,1	28,5	92,0	83,5	75,4
100—160	17,9	86,7	15,6	19,3	6,8	9,7	16,5	45,0	73,3	90,8	64,2
160—300	10,9	97,6	35,6	54,9	4,1	22,0	26,1	71,1	52,2	96,8	49,0
300—400	2,1	99,7	22,5	77,4	0,8	14,0	14,8	85,9	44,1	99,3	43,3
400—500	0,3	100,0	22,6	100,0	0,1	14,0	14,1	100,0	38,0	100,0	38,0
	100,0		100,0		s = 38,0	62,0	100,0				

Bemerkungen:

— Kolonnen 1,2 u. 4 sind experimentelle Angaben;
— Kolonne (6) beträgt 70% der Kolonne (2);
— Kolonne (7) beträgt 30% der Kolonne (4);
— Kolonne (8) ist die Summe von Kolonnen (6) und (7);
— Kolonnen 10, 11 und 12 sind berechnete Werte laut Gleichungen (im Text) (1) (2) und (3).

Bild 2A stellt Kurven dar, die den Verteilungswerten der Wichte für den Rohprodukt (a), und die Trennprodukte entsprechen, Trennprodukt »b« von Leichtgut, Trennprodukt »c« von Schwergut. — (Siehe Tafelwerte in Kolonnen 8 bezw. 6 u. 7.) Diese Kurven, ergänzt durch die Geraden s, verhelfen uns den Schnittpunkt P_A und den dazu gehörigen Abszissenwert x_A zu bestimmen, wobei der Wert x_A den absolut ausgleichenden Wert S_A darstellt.

Bild 2B enthält Verteilungskurven in der allgemein üblichen Darstellungsweise. a ist die Durchgangverteilung des Rohproduktes, b die des Leichtgutes, $100 - c$ ist die Rückgangverteilung des Schwergutes. Ausgehend aus den Wichtegrenzen an der Abszisse, zeigt Kurve (a) bzw. (b) die kumulativen Gewichtsprozente des Produktes kleinerer Wichte für Teile, deren Wichte kleiner ist, als der Abszissenwert. Hingegen zeigt die Kurve ($100 - c$) die kumulativen Gewichtsprozente des Produktes größerer Wichte für Teile deren Wichte größer ist, als der Abszissenwert. Wie bekannt, repräsentiert der Schnittpunkt P_B der Kurven b und $100 - c$ einen Wert, der als relativ ausgleichende Wichte δ_B zu erkennen ist.

Bild 2C (eine dem Bild 1 analoge Darstellung) zeigt uns die Kurven k und K, ferner die Kurve η, die aus den berechneten Werten der Kolonnen (Tafel I) 10, 11 und 12 konstruiert wurden. Punkt P_C, der Schnittpunkt der Kurven k und K, stellt jenen δ_C Wert der Wichte dar, bei dem beide Werte des Ausbringens — k_C und K_C — einander gleich sind.

Für den Fall einer Trennung nach der Korngröße, haben wir Tafel II und Bilder 3A, 3B und 3C aufgestellt. So kann man das Ausbringen k als Durchgangausbringen, und K als Rückgangausbringen bezeichnen.

3. Die Werte des Ausbrigens und des Wirkunggrades bei einigen kennzeichnenden Parametern der Trennvorgänge

3.1. *Die Werte bei absolut ausgleichendem Parameter*

Zurückkommend auf den Fall der Sortierung nach Dichte, so sieht man, daß zu der Abszisse x_A (des absolut ausgleichenden Wichtewertes δ_A), — in der Kurven (b) und ($100 - c$) des Bildes 2B, — die Ordinaten des Ausbringens k_A und K_A zugeordnet sind, bzw. den folgenden Formeln entsprechend (bekannterweise ist $s = a_A$):

$$k_A = s \frac{b_A}{a_A} = b_A, \tag{7}$$

$$K_A = (100 - s) \frac{100 - c_A}{100 - a_A} = 100 - c_A. \tag{8}$$

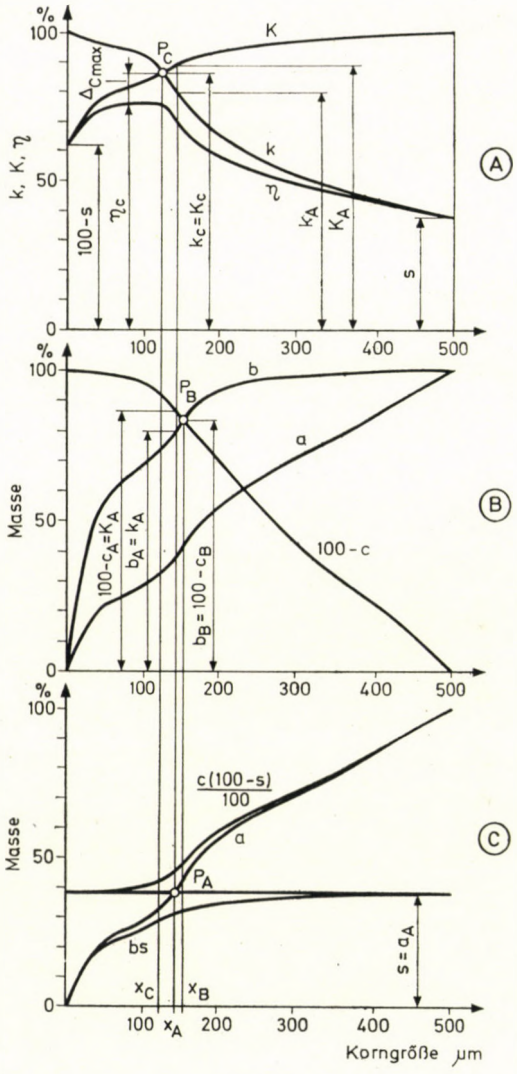


Bild. 3

Aufgrund der Gleichungen (7) und (8) lassen sich die Gleichungen des Wirkungsgrades wie folgt aufschreiben:

$$\eta_A = 100\,\frac{k_A - s}{100 - a_A} = 100\,\frac{b_A - s}{100 - s}, \tag{9}$$

$$H_A = 100\,\frac{s - c_A}{s}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) erhält man:

$$b_A = \frac{100(s - c_A) + sc_A}{s}. \tag{11}$$

3.2. *Die Werte bei relativ-ausgleichenden Parameter*

Bezüglich des relativ-ausgleichenden Parameters gelten folgende Beziehungen:

$$b = 100 - c_B, \tag{12}$$

$$k_B = s\frac{b_B}{a_B}, \tag{13}$$

$$K_B = (100 - s)\frac{100 - c_B}{100 - a_B}, \tag{14}$$

Aus (12), (13) und (14) erhält man

$$\frac{K_B}{k_B} = \frac{(100 - s)a_B}{s(100 - a_B)}. \tag{15}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichheit der Wirkungsgradwerte η und H besteht folgender Zusammenhang:

$$b_B = \frac{sa_B - (100 - s)(100 - a_B)}{2s - 100}. \tag{16}$$

3.3. *Die Werte bei Parameter* x_C

Auf Grund der Gleichheit der Ausbringungswerte für k und K, und der Gleichheit der Wirkungsgradwerte ($k_C = K_C$ und $\eta_C = H_C$) lassen sich folgende Gleichungen aufstellen

$$\frac{s}{100 - s} = \frac{100 - c_C}{100 - a_C}\frac{a_C}{b_C}, \tag{17}$$

$$b_C = \frac{100a_C[100 - (a_C + s)]}{s[100 - 2a_C]}, \tag{18}$$

$$k_C = K_C = 100\frac{100 - (a_C + s)}{100 - 2a_C}, \tag{19}$$

$$\eta_C = 100\frac{100 - 2s}{100 - 2a_C}. \tag{20}$$

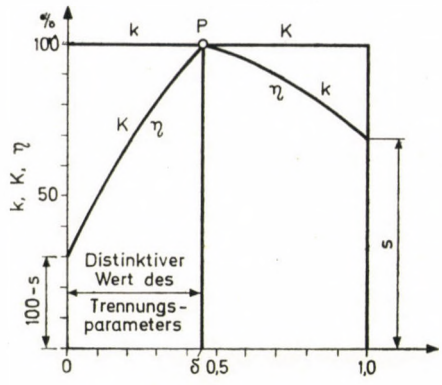


Bild. 4

In Anhang an die oben abgeleiteten Gleichungen, haben wir in Tafel III Kennwerte der folgenden Parameter: die Wichte, und die Größen a, b, c, k, K und $\eta(H)$ zusammengestellt, uzw. in bezug auf die drei charakteristischen Abszissenwerte: δ_A, δ_B, δ_C, für den Fall der Sortierung nach Dichte (Tafel I und Bild 2).

Tafel III

Sortierung nach Dichte. Wichtige Kennwerte

Aufzählung der wichtigen Kenngrößen	Bei dem absolutausgleichenden Wichtewert δ_A	Bei dem relativausgleichenden Wichtewert δ_B	Im Falle der Gleichheit der Ausbringen beider Bestandteile k und K, bei dem Wichtewert δ_C
1	2	3	4
	$\delta_A = 1{,}57$	$\delta_B = 1{,}53$	$\delta_C = 1{,}64$
a	70 (=s)	68,3	71,79
b	97,17	96,2	98,34
c	6,615	3,8	9,883
k	97,17 ($= b_A$)	98,4	95,89
K	93,385 ($=100 - c_A$)	91,2	95,89
η	90,57	88,6	91,78 $\Big\}\ \Delta_C = 4{,}11$

4. Der Ordinatenausschnitt zwischen den Kurven des Ausbringens und jenen des Wirkungsgrades

Es ist angebracht, die Größe des Ordinatenausschnittes zwischen den Kurven des Ausbringens und jenen des Wirkungsgrades in Formeln auszudrücken:

$$k - \eta = s\frac{100 - b}{100 - a}; \quad K - \eta = (100 - s)\frac{c}{a}. \tag{21}$$

Erfährt die Differenz $k-\eta$ ein monotones Ansteigen und $K-H$ ein monotones Sinken, dann weist der Ordinatenausschnitt Δ_C beim Schnittpunkt P_C der Ausbringungskurven des Durchfallproduktes und des Restproduktes ein Maximum auf; der Wert dieses Maximums ergibt sich als die Differenz der Ausdrücke (19) und (20), wie folgt:

$$\Delta_C = k_C - \eta_C = 100 \frac{s - a_C}{100 - 2a_C}. \tag{22}$$

Um auch den Fall eines vollkommenen Trennvorganges zu besprechen, gilt hier als wichtigste Angabe die Koinzidenz der Werte $\delta_A = \delta_B = \delta_C$.

Ferner (Bild 4) kommt die bekannte Fehlerfläche zum vollständigen Verschwinden. Im Vergleich zum Bild 2B, liegt der dem Punkte P_B entsprechende Punkt P im Bild 4 an der Horizontalen des 100%-igen Verteilungswertes.

Man sieht auch, daß in diesem Punkte P (zur Abszisse des Trennparameterwertes koordiniert) der Wirkungsgrad η das Maximum von 100% erreicht. Wie bereits erwähnt, verschwindet die Fehlerfläche vollkommen, die Kurvenstrecken k bzw. K und η koinzidieren. Es wird noch konstatiert, daß Kurve k oberhalb der Grenze δ den konstanten Wert von 100% annimmt, und die Kurvenstrecke K unterhalb des Abszissenwertes δ verläuft gleichfalls entlang der Horizontalen von 100%. Natürlich verschwindet auch die Ordinatendifferenz Δ_C.

5. Schlußfolgerungen

Aus dem besagten geht klar hervor, daß die Kurven des Durchfallproduktes und des Restproduktes, kombiniert mit der Wirkungsgradkurve und mit den mittels dieser Funktionen erkennbaren Parametern, geeignet sind dazu die gleichzeitige Auswirkung der Zusammensetzung des Rohstoffes und der Arbeitsweise der Apparatur aus technologischem Standpunkt richtig zu bewerten.

Evaluation of Separating Operations by Yield and Efficiency. The Tromp-diagram serves to show the variations of yield at the separation of granular materials as a function of their physical characteristics. Together with the parameters which can be read on the diagram, it serves for evaluating the operation of the separation installation. The combined influence of installation operation and of granular material composition, i.e. a given separating operation can be judged on the base of the proposed yield and residue curves established depending on the concrete values of the characteristic or from the efficiency curve and the relevant parameters.

Оценка операций разделения с помощъю функий выхода и коэффициента полезного действня. Кривая Тромпа в функции изических показателей зернистых материалов иллюстрирует изменения выходов, относящихся к конкретному значения показателя, и совместно с параметрами, определяемыфи по кривой, служит для понимания работы разделяющего устройства. Совместное воздействие работы устройства и гранулометрического состава зернистых материалов, следовательно технологическая оценка некоторой данной операции разделения может производиться на основе кривой кпд и соответствующих параметров, кривых провала и кривых выхода остатка, рекомендованных в данной работе и построенных в функции конкретного значения показателя.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 279—297 (1975)

COMPENSATION OF FLASH TEMPERATURE ON SPUR GEARS

F. KOLONITS*

[Manuscript received November 14, 1972]

Several theories have been developed for explaining failure by seizure of spur gears and for reducing this danger. According to one of the most widely accepted ideas the maximum contact temperature in the contact band is decisive, this must be reduced to the minimum possible (its value is the sum of the gear body temperature and the so-called contact flash temperature). In the Ganz–Botka toothing system the basic principle is the balancing of the maximum flash temperatures before and after the pitch point: in this way their minimization is striven for. In the present paper the practical method of compensating, i.e. the concrete determination of the gearing parameters are examined for straight toothings.

Notations

Subscript "1" refers to the pinion, "2" to the gear, the geometrical data generally refer to unit module.

Θ — flash temperature [C°]
p_n — line pressure [kp/cm²]
z — number of teeth
Σz — sum of numbers of teeth
u — z_2/z_1 ratio of numbers of teeth
p — relative line pressure
T — dimensionless flash temperature
ϱ — radius of curvature of involute profile
A, E — initial and end points of contact section
B, D — initial and end points of single tooth engagement
C — pitch point
N — point of contact of pressure line and base circle
λ — factor of load repartition in points A, E $(= p_A)$
α — pressure angle
h_k — working depth
q_2 — repartition number ($h_k q_2$ = addendum of wheel)
R — notation for ϱ_{2A} in the $A-D$ compensated position
r_a — base circle
$\Gamma = \sqrt{\varrho_{1E}^2 + r_{a1}^2} + \sqrt{\varrho_{2A}^2 + r_{a2}^2}$
n, p, x, y iteration variables formed from the radii of curvature of involutes
t_a — base pitch
M — index of speed of iteration calculation
F — square of the part of T depending on radii of curvature
φ — inverse function of F $(\varphi(F(\varrho)) = \varrho)$
r_g — pitch circle
r_f — tip circle
α_0 — tool pressure angle (20°)

Other, seldom used notations are explained at their occurring places.

*Dr. F. KOLONITS, Cirmos u. 4., 1112 Budapest, Hungary

1. The theory of seizure and the Ganz-Botka toothing system

Amongst the defects causing gear failure, seizure has assumed increased importance during the last decades. Load bearing capacity of high-power, high-speed gear drives is usually limited by this effect; compliance with the increasing requirements needed thorough investigation of a whole complex of questions ([1]—[6]).

According to the most widely accepted opinion, from the point of view of seizure the maximum instantaneous temperature arising in the moment of engagement (sum of wheel body temperature and of "flash temperature") is decisive. For the flash temperatures arising during engagement numerous, more or less divergent, theoretical and experimental results have been published ([7]—[12]).

The Ganz–Botka system of toothing uses as the theoretical basis of toothing compensation the BLOK method [3] of temperature calculation and assuming that the mean temperature of the wheel body (on which the temperature rise calculated according to BLOK in order to obtain the real maxmim temperature must be superposed) does not change for a given pair of gears for various repartitions of the sum of profile corrections, and that the coefficient of friction is constant.

With such assumptions, varying the repartition of the profile displacements continuously (or any other characteristic equivalent with them, e.g. the repartition of the working depth) the maximum flash temperatures at the two opposite sides of the pitch point change in an inverse sense. Hence, the flash temperatures will be lowest when these two maximum values are just equal for both sides.

Thus, in the Ganz–Botka toothing system, in order to minimize the danger of seizure, the wheel pair is dimensioned by compensating, having taken into consideration the other influences; i.e. the sum of profile displacements is distributed on the two wheels or a correspondent value, e.g. the distribution number q_2 is determined in such a way that during engagement the flash temperatures on the two sides of the pitch point are equal, hence minimum [13].

2. Flash temperature peaks

In order to examine the temperatures along the pressure line, let us rewrite the formula for the maximum flash temperature (in the contact band) calculated according to BLOK, in the following form:

$$\Theta_{\max} = C p_n^{3/4} \left| \left(\frac{u \varrho_1}{\varrho_2} \right)^{1/4} - \left(\frac{\varrho_2}{u \varrho_1} \right)^{1/4} \right| . \tag{1}$$

The mean temperature of the wheel body is constant during the examination, therefore, it may be omitted (this means taking this temperature as the zero of the temperature scale). The value of C does not change along the pressure line: it contains geometrical, strength, velocity etc. constants, (1) showing only the action of those factors which make the flash temperature vary from point to point along the pressure line: of the normal line pressure and of the radii of curvature of the profile involutes in contact.

This last factor contains only the ratios of the radii of curvature, i.e. the ratio by which the investigated point of engagement divides the section $\overline{N_1N_2}$. In order also to calculate with dimensionless quantities, let there be

$$p = \frac{p_n}{p_{n,\max}}, \quad T = \frac{\Theta_{\max}}{C p_{n,\max}^{3/4}}, \tag{2}$$

where $p_{n,\max}$ is the maximum normal line pressure on the section of single tooth engagement. The transformed formula is

$$T = p^{3/4} \left| \left(\frac{u\varrho_1}{\varrho_2} \right)^{1/4} - \left(\frac{\varrho_2}{u\varrho_1} \right)^{1/4} \right|. \tag{3}$$

On toothings considered as rigid $p = 0{,}5$ on the sections $\overline{AB}$ and $\overline{DE}$, $p = 1$ on the section $\overline{BD}$. Fig. 1 shows the variation of T for $p = 1$ (continuous line) and for $p = 0{,}5$ (dashed line); the ordinates of the first are $2^{3/4} \approx 1{,}68$ times longer. Taking the above into consideration, the real size of the flash temperatures is represented on sections $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ by the lower, on section $\overline{BD}$ by the upper curve. Approaching points N_1 and N_2, respectively, of the pressure line the branches of the curve approach infinite. It can be seen that the peak temperatures to be considered for compensation may arise at points A, B, D, E: on both sides of the pitch point the contact line section can be divided into ranges where the maximum value arises in one of the mentioned points.

If it is taken into account that owing to the elasticity of the teeth p from point to point changes on the two-teeth-pairs section (e.g. in the way represented by a continuous line in Fig. 1), the resulting curves must be corrected on section AB and DE: at points A and E the values are somewhat smaller, at points B and D it is somewhat larger than for rigid toothing (curves represented by continuous lines). Theoretically it is possible that within this sections local maxima arise, but during practical calculations no case occurred where instead of A or E such a local maximum had to be compensated.

If one can assume that the variation of p is not too large, such a local maximum, even if it occurred, could not exceed considerably the flash temperatures in points A or E, respectively. Therefore, with elastic toothings as well, it is generally sufficient to investigate the flash temperatures at the beginning

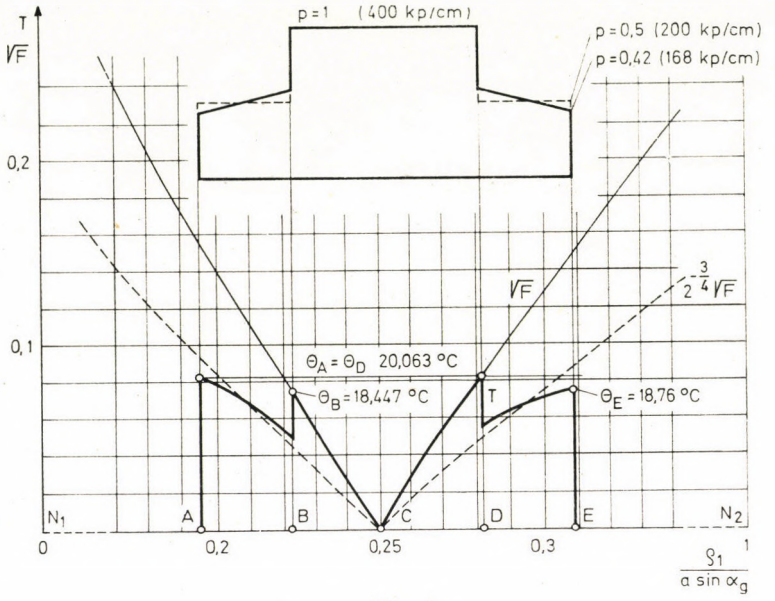


Fig. 1

and at the end of the engagement and of the single-pair engagement, in order to obtain the peak values. The conditions for the occurrence of a local maximum have not been investigated yet in detail.

Remark: the above considerations are true also for arrangements different from that shown in Fig. 1, e.g. when for large profile displacements B is outside of section $\overline{AC}$.

3. Compensation cases

An earlier investigation [14] has shown that when calculating with rigid teeth or if $p_A = p_E$ for elastic teeth, and when its value does not depend for a given $a \sin \alpha_g$ and u on the variation of the overlap coefficient (neglecting the influence of the backlash and of the dynamical loads; usual average value e.g. 0,42 [15] — let us denote it by λ in general), according to the basic principles of the Ganz–Botka system compensation of the flash temperatures is required at points $A - E$, $A - D$ or $B - D$. The inner maxima perhaps arising along the two-teeth-pair section, mentioned in the foregoing, has not been considered in the investigation according to the mentioned practical considerations.

In the Ganz–Botka profile selection table the toothing is characterized by three variables: depending on $\Sigma z, \alpha_g, u$ it gives the number q_2 which characterizes the distribution of the theoretical working depth h_k to the two gears

[16]. On the same principles a table for the compensation $B - D$ can be drawn up. But with the compensation $A - D$, for given $a \sin \alpha_g$ and u the position of the contact point A is determined and constant (the further considerations refer to unit module, the module being only a coefficient of proportionality in the further investigations). The compensated toothings can be *tabulated in a two-variable table*, e.g.

$$R = \varrho_{2A}(a \sin \alpha_g, u) \tag{4}$$

from this or from any other equivalent value all characteristics of the toothing can be calculated (for determining q_2 a three-variable table is required).

What compensation must be carried out on a given toothing, can be decided by trying the application of the compensation $A - D$ and determining T_B and T_E. If any of these is higher than $T_A = T_D$, so in the case of an outstanding value of T_B compensation $B - D$ must be used, in the case of an outstanding T_E compensation $A - E$ must be used. But it is also possible to calculate the values

$$\varrho_{1EI} = \frac{1}{\dfrac{u^2}{R} - \dfrac{u^2 - 1}{a \sin \alpha_g}}, \quad \varrho_{1EII} = \frac{1}{\dfrac{u^2}{R - t_a} - \dfrac{u^2 - 1}{a \sin \alpha^g}} + t_a \tag{5}$$

belonging, respectively, to the limit positions of the $A-D - A-E$ and $A-D - B-D$ compensations and from these, the quantities

$$\Gamma_i = \sqrt{\varrho_{1Ei}^2 + r_{a1}^2} + \sqrt{R^2 + r_a^2}, \quad (i = \mathrm{I}, \mathrm{II}) \tag{6}$$

are formed. The necessary compensations will be

$$\begin{aligned} &A-E \quad \text{for} \quad \Gamma_{\mathrm{I}} < a + h_k, \\ &A-D \quad \text{for} \quad \Gamma_{\mathrm{II}} < a + h_k < \Gamma_{\mathrm{I}}, \\ &B-D \quad \text{for} \quad \Gamma_{\mathrm{II}} > a + h_k. \end{aligned} \tag{7}$$

4. Carrying out the compensations

For the various cases of compensating a given toothing, several proposals are known ([16]—[20]). The major part of them deals with cases $A-E$ or $B-D$ which can be traced back to the compensation of relative sliding. Bódi points out that the diagrams of the functions to be solved can be approximated very well by straights, if certain new variables are introduced.

From the point of view of calculation technique it must be distinguished whether a given toothing is calculated only or whether a table is to be made and for what range. In the latter case it is more simple to obtain a series of corresponding values between which the points required for tabulation are

interpolated — while an individual toothing can be calculated only numerically (e.g. by iteration). For the methods elaborated in detail for individual calculation of $A-E$ and the quite similar $B-D$ case [18], for tabulation in [20], only the general outlines will be given here. In the calculations constant (elementary) radial clearance is considered, but with adequante modifications it can also be used for varying radial clearance.

4.1. *Individual calculation*

4.1.1. *Compensation A—E*

Introducing the new variables $n = r_{f1}^2 - r_{a1}^2$, $p = r_{f2}^2 - r_{a2}^2$, these can be determined by iterating the following system of equations:

$$p = \frac{u^4}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{u^2 - 1}{a \sin \alpha_g}\right)^2}, \tag{8}$$

$$n = p - 2(a + h_k)\sqrt{p + r_{a2}^2} + (a + h_k)^2 + (r_{a2}^2 - r_{a1}^2).$$

The speed of the iterative approximation is characterized by the value

$$M = \frac{r_{f1}^2}{r_{f2}^2}\left(\frac{\varrho_{2A}}{\varrho_{1E}}\right)^3 \frac{1}{u^2}, \tag{9}$$

if this is greater than 0,5 the iteration can be speeded up by continuing the calculation with the arithmetic mean of two consecutive iterated values.

4.1.2. *Compensation B—D*

With the variables

$$x = \sqrt{r_{f1}^2 - r_{a1}^2} - t_a, \quad y = \sqrt{r_{f2}^2 - r_{22}^a} - t_a$$

the equations to be iterated are

$$x = \frac{1}{\frac{u^2}{y} - \frac{u^2 - 1}{a \sin \alpha_g}}, \tag{10}$$

$$y = \sqrt{[a + h_k - \sqrt{(x + t_a)^2 + r_{a1}^2}]^2 - r_{a2}^2} - t_a ;$$

furthermore (with a remark similar to the foregoing)

$$M = \frac{r_{f2}}{r_{f1}} \frac{\varrho_{1E}}{\varrho_{2A}} \left(\frac{\varrho_{1E} - t_a}{\varrho_{2A} - t_a}\right)^2 u^2 . \tag{11}$$

4.1.3. *Compensation A—D*

If the square of the part depending on the radii of curvature of T is denoted by F, for a given value of F one radius of curvature can be calculated on each side of the pitch point:

$$\varrho_1 = \frac{a \sin \alpha_g}{u + 1 + \frac{u}{2}\left[F(F+4) \pm (F+2)\sqrt{F(F+4)}\right]} = \varphi(F, \pm 1). \quad (12)$$

Let us assume an arbitrary distribution coefficient so that A and D are at the two sides of the pitch point. Let us determine the points D' belonging to T_A on the other side of the pitch point and the point A' belonging to T_D. If the compensated position $A—D$ is just hit, $\overline{AD'} = \overline{A'D} = t_a$.

But this is improbable; it can easily be understood that one section is shorter, the other one is longer than t_a. As it is easy to prove that with increasing T_D, $\overline{AD'}$ always rigorously increases, it is possible to use the chord method according to the following equations for determining the value of ϱ_{1A} signifying the compensated position:

$$\begin{aligned}
\varrho'_{1D} &= \varphi[\lambda^{3/2} F(\varrho_{1A}), -1], \\
\varrho_{1D} &= \varrho_{1A} + t_a, \\
\varrho'_{1A} &= \varrho[\lambda^{-3/2} F(\varrho_{1D}), 1], \\
t &= \varrho'_{1D} - \varrho_{1A},\ t' = \varrho_{1D} - \varrho'_{1A}, \\
\varrho^*_{1A} &= \varrho_{1A} + (\varrho'_{1A} - \varrho_{1A}) \frac{t_a - t}{t' - t}.
\end{aligned} \quad (13)$$

The method converges rapidly.

4.2. *Establishing tables*

The methods presented below will be useful also if some general investigation is to be carried out on compensated toothings and for this purpose a great number of suitably distributed series of values must be calculated within the range of the toothing.

4.2.1. *Compensation A—E*

Introducing the notation $X_i = \sqrt{r_{fi}^2 - r_{ai}^2}/a \sin \alpha_g$ from the condition for compensation

$$X_2 = \frac{1}{\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{X_1} - 1\right) + 1}. \quad (14)$$

Let there furthermore be

$$A = \frac{\cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_g},$$

$$B = \frac{1}{2} - A + \frac{\text{inv } \alpha_g - \text{inv } \alpha_0}{2 \tan \alpha_0}, \tag{15}$$

$$C = \sin \alpha_g \left\{ \sqrt{X_1^2 + \frac{1}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} + \sqrt{X_2^2 + \frac{u^2}{[(u+1)\tan \alpha]^2}} \right\}.$$

It can be proved that

$$\Sigma z = \frac{2}{A(C-1) + B}.$$

For a given u and α_g the values of Σz can be determined by assuming a series of values for X_1. To the triplets of data Σz, α_g, u calculated in this way any characteristic of the compensated toothing can be calculated from $X_{1,2}$.

4.2.2. *Compensation B—D*

Writing in Eq. (14) $X_{3-i} - t_a/a \sin \alpha_g$ instead of X_i, the method as described in 4.2.1. can be applied with some modification.

4.2.3. *Compensation A—D*

In conformance with the notations used in 4.1.3 a value F is assumed. Let there be $F' = F\lambda^{-3/2}$, $p = u\varrho_{1A}/\varrho_{2A}$, $q = u\varrho_{1D}/\varrho_{2D}$. It can be proved that

$$p = \left(\frac{\sqrt{F'+4} - \sqrt{F'}}{2} \right)^4; \qquad q = \left(\frac{\sqrt{F+4} + \sqrt{F}}{2} \right)^4.$$

Let us denote $a \sin \alpha_g - t$ by k. From the condition that points A and D are at base-pich from each other, it follows that

$$k = t_a \frac{(p+u)(q+u)}{u(q-p)},$$

$$\varrho_{2A} = \frac{k}{\frac{p}{u} + 1}, \tag{18}$$

$$\varrho_{1EI} = \frac{k}{up+1},$$

$$\varrho_{1EII} = \frac{k}{uq+1} + t_a.$$

Hence, by assuming the values F sufficiently close to each other, for a given u according to (4) a series of sets of values can be calculated.

5. Computation technique

For manual calculation the work can be made easier by using a less accurate tool (slide rule) for the first steps of iteration and only after reaching their limits of resolution more accurate but more circumstantial methods are used (table of logarithms) [18]. With the spreading use of the larger and smaller mechanical calculating devices, the role of manual calculation diminishes; designers use more and more desk-top or larger computers or aids produced on these. (The author remarks in this connection that the larger computers which are in the foreground of public attention, are useful primarily for general investigations and elaboration of design aids because of their higher cost, less easily accessible and the necessity of suitable use of their possibilities: they might be called "strategic arms". Less popular are so far, in technical practice and in the public mind, the really modern "tactical arms" of the design engineer: the desk-top electronic calculators and chiefly the mini-computers. A well prepared staff of designers can use these relatively cheap instruments as an "automatic slide rule" — economically and efficiently.)

For a more efficient use of the methods described in the present paper the ALGOL-60 description of the flash temperatured compensating calculation was prepared in reference language [21]. The identifiers were chosen according to the notation used hitherto; moreover the calculation prepares the temperature diagrams of the compensated toothing (assuming for the friction $\mu = 0{,}01$; the units for the various values are the usual ones). If in the notations self-evidence is not adhered to, less storing place is needed; omitting the diagram-making part, a method which can be inserted as a "building block" can also be developed.

```
begin real sumz, u, alfggrd, alfg, alf0, lambda, a, hk, k,
      rg1, rg2, ra1, ral2, ra2, ra22, sumra, rf1, rf2, ro1A, rov1A, ro1D,
      rov1D, ta, t, tv, ro2A, ro2A2, ro1E, ro1E2, ro2A,
      ro1E1, ro1EII, GAMI, GAMII, p. pl, n, x, x1, y, h, q, c,
      c2, u2, u4, mod, n1, pnmax;
comment the last three is required for diagrams;
real procedure F(rol); value rol ; real rol;
    F:=(k+(u-1)×rol)/sqrt(u×rol×(k-rol)) -2;
real procedure fi(F, e); value F,e; real F,e;
    begin real s;
          s:=F×(F+4);
          fi:=k/(u+1+.5×u×(s+e×(F+2)×sqrt(s)))
    end;
real procedure ro(r1) range limit: (r2) line pressure
    limits: (p1, p2) location of the investigated point: (n) flash
    temperature: (th); value r1,r2,p1,p2,n; real r1, r2,p1,p2,
    n,th;
    begin comment this is required for the diagram only;
          real rc,pn;
          rc:=ro:=r1+(r2-r1)×n;
          pn:=p1+(p2-p1)×n;
          rc:=sqrt(sqrt(u×rc/(k-rc)));
          pn:sqrt(sqrt(pn)×pn);
          th:=pn×abs(rc-1/rc)
    end;
```

```
      comment if using the calculation as a procedure the global input and output instructions
      of read and print are omitted;
      read (sumz,u,alfggrd,lambda,mod, n1,pnmax);
      comment heading, the confirmation of the data can be printed here;
      pnmax:=sqrt(sqrt(pnmax)×(pnmax); comment for the diagram;
      alfg:=alfggrd×.017453292;
      q:=sqrt(lambda ↑ 3); ta:=2.95213165;alf0:=.34906584;
      sumra:=.5×sumz×cos(alf0);
      a:=sumra/cos(alfg);
      hk:=2+a−.5×sumz×(tan(alfg)−alfg+alf0)/tan(alf0);
      k:=a×sin(alfg);
      c:=u/(u+1); u2:=u×u; u4:=u2×u2;
      rg2:=c×a; rg1:=a−rg2;
      ra2:=c×sumra; ra1:=sumra−ra2;
      ra12:=ra1↑2; ra22:=ra2↑2;
      ro1A:=k−sqrt((rg2+.5×hk)↑2−ra22);
      comment starting id from toothing with distribution number .5;
AD:rovD:=fi(q×F(ro1A),−1);
      ro1D:=ro1A+ta;
      rov1A:=fi(F(ro1D)/q,1);
      t:=rov1D−ro1A;tv:=ro1D−rov1A;
      h:=(rov1A−ro1A)×(ta−t)/(tv−t);
      ro1D:=ro1A+h;
      if abs(h/ro1A)>.000001 then go to AD;
      q:=(u2−1)/k;
      ro1D:=ro1A+ta;
      ro2A:=k−ro1A; ro2A2:=ro2A↑2; y:=ro2A−ta;
      ro1EI:=1/(u2/ro2A−q); ro1EII:=1/(u2/y−q)+ta;
      rf2:=sqrt(ro2A2+ra22);
      GAMI:=sqrt(ro1EI↑2+ra12)+rf2;
      GAMII:=sqrt(ro1EII↑2+ra12)+rf2;
      c:=a+hk; rf1:=c−rf2;
      ro1E2:=rf1↑2−ra12; ro1E:=sqrt(ro1E2);
      print ("compensated on points")
      if GAMI < c then go to AE;
      if GAMII > c then go to BD;
      print ("A−D"); go to OUT;
 AE:c2:=c↑2+ra22−ra12; p:=ro2A2; n:=ro1E2;
      go to AE2;
AE1:n:=p−2×c×rf2+c2;
AE2:p1:=u4/(1/sqrt(n)+q)↑2; h:=abs(p/p1−1);
      p:=if(c/rf2−1)×sqrt((p/n)↑3)/u2>.5 then
      .5×(p+p1) else p1;
      rf2:=sqrt(p+ra22); rf1:=c−rf2;
      if h>.00001 then go to AE;
      ro1A:=k−sqrt(p); ro1E:=sqrt(rf1↑2−ra12);
      comment the last two instructions are needed for the diagram;
      print ("A−E"); go to OUT;
 BD:x:=ro1E−ta; go to BD2;
BD1:y:=sqrt(rf2↑2−ra22)−ta;
BD2:x1:=1/(u2/y−q); h:=abs(x/x1−1);
      x:=if rf2/rf1×(x+ta)/(y+ta)×u2×(x/y)↑2>.5 then
      .5×(x+x1) else x1;
      ro1E:=x+ta;
      rf1:=sqrt(ro1E↑2+ra12); rf2:=c−rf1;
      if h>.00001 then go to BD1;
      ro1A:=k-sqrt(rf2↑2−ra22); comment for the diagram;
      print ("B−D");
OUT:comment results and diagram follows;
      print (geometrical data multiplied by mod, distribution number
      (rf2−rg2)/hk);
      q:=.031465×pnmax×sqrt(n1×sqrt(k×mod/u));
      comment gives results on 6 points for each engagement section AB, BD, DE;
```

```
    for n:=0 step .2 until 1.01 do
    print (mod×ro(ro1A,ro1E−ta,lambda,1−lambda,n,c),
    q×c,mod×ro(ro1E−ta,ro1A+ta,1,1,n,c),q×c,
    mod×ro(ro1A+ta,ro1E,1−lambda,lambda, n,c),q×c)
end;
```

With the aid of the program the following three toothings were calculated as examples:

No.		1	2	3
Basic data	Σz	160	160	160
	u	3	3	3
	α_g [fok]	23,8	24,5	25
	λ	0,42	0,42	0,42
	modul [mm]	5	5	5
	n [l/min]	1000	1000	1000
	p_n, max [kp/cm]	400	400	400
Compensation	Γ_{I}	83,9049	84,3965	84,7582
	Γ_{II}	83,7913	84,2846	84,6475
	$a + h_k$ (m = 1)	83,9601	84,3228	84,5812
	Compensation	A−E	A−D	B−D
Results	a [mm]	410,812695	413,069279	414,734433
	h_k [mm]	8,987768	8,544791	8,171585
	r_{a1} [mm]	93,969261	93,969261	93,969261
	r_{a2} [mm]	281,907783	281,907783	271,907783
	r_{g1} [mm]	102,703714	103,267320	103,683608
	r_{g2} [mm]	308,109523	309,801959	311,050826
	r_{f1} [mm]	107,729222	107,849266	107,986559
	r_{f2} [mm]	312,071242	313,764804	314,919458
	q_2	0,440790	0,463773	0,473425
	θ_A	21,204	20,063	18,815
	$\theta_{A+\Delta}$	19,330	18,904	18,173
	$\theta_{A+2\Delta}$	17,200	17,533	17,360
	θ_B	14,175	18,447	21,029
	θ_D	19,689	20,063	21,029
	$\theta_{E-2\Delta}$	18,817	17,232	16,410
	$\theta_{E-\Delta}$	20,154	18,015	16,901
	θ_E	21,205	18,760	17,227

In the tables the flash temperatures arising in the vicinity of the engagement points A and E are shown as well. According to the comment in the program, 6 points can be calculated on sections $\overline{AB}$ and $\overline{DE}$: the distance of the adjacent points is $\overline{AB}/5$.

It can be seen that flash temperatures increase in the directions of A and E. By itself this does not exclude the existence of an "inner maximum". Let us assume that in the given small ranges the flash temperature curve can be replaced by a parabol. It can be proved that if $y_0 > y_1 > y_2$ are values of the parabolic function calculated for constant steps, the condition for the vertex of the parabol being outside the whole section is $4y_1 < 3y_0 + y_2$. This condition is satisfied for all triplets of flash temperature values.

As far as the practical realization of the calculated toothings is concerned, according to the profile selection table [16] (prepared for toothings with variable radial clearance, for $A-E$ compensation), for a given sum of numbers of teeth BOTKA's upper interference limits, the toothing range at increasing pressure angles. In the present case, when calculating according to [22] an upper interference occurs in the Case 3 only.

Fig. 1 shows diagrammatically the toothing No. 2.

Remark: while for the compensations $A-E$ and $B-D$ the value of λ does not influence the compensation, it depends on it for the $A-D$ case: the toothing compensated for $\lambda = 0{,}42$ is not compensated in the case of rigid teeth.

6. The limits of the compensation cases

Within the range of the toothing the location of the curves delimiting the different compensation cases are determined in the following way:

According to 4.2.3. a group of matching values (18) is calculated for a given u. For both limit positions k, ϱ_{2A} and ϱ_{1E} definitely determine a toothing. There still is

$$a \sin \alpha_g = k, \tag{19}$$

$$\sqrt{\varrho_{1E}^2 + r_{a1}^2} + \sqrt{\varrho_{2A}^2 + r_a^2} = a + h_k .$$

The values of a, $r_{a1,2}$, h_k can be expressed by Σz, α_g and u. u can be considered as given, hence (19) is a system of equations with two unknowns Σz, α_g and can be solved by iteration after suitable arrangement. In this way the points of the delimitation curve ($u = \text{const}$) are obtained which can be represented in the $\Sigma z - \alpha_g$ system of co-ordinates.

In order to show the usefulness of minocomputers it can be mentioned that it is possible to carry out the above calculation also on a HEWLETT—PACKARD 9100 B (32 storage registers; one register accomodates one number or 14 program steps).

The series of values (18) was calculated in the form $\bar{k} = k/t_a$, $\bar{\varrho}_i = \varrho_i/k$ and (19) was rearranged as follows:

$$\Sigma z = \frac{2\bar{k}\pi}{\tan \alpha_g} \tag{20}$$

$$\alpha_g = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{K}, \tag{21}$$

where

$$K = \sqrt{\bar{\varrho}_{1E}^2 + \frac{1}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} + \sqrt{\bar{\varrho}_{2A}^2 + \frac{u^2}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} - \frac{2}{\bar{k}t_a} + \frac{1}{\sin \alpha_0} - \frac{\alpha - \alpha_0}{\sin \alpha_0 \tan \alpha_g}.$$

After solving (21) for α_g, Σz is obtained from (20). The iteration of (21) converges for $\alpha = 20°$ very slowly to the solution, and that from one direction, so that the acceleration used in 4.1.1—2 (alternating approach) is impracticable here. But based on [23] a suitable method can be derived. (21) is abbreviated by the notation $\alpha_g = A(\alpha_g)$, the formula for accelerated iteration is

$$\alpha_{g,n+1} = -(b-1)\alpha_{g,n} + bA(\alpha_g, n). \tag{22}$$

If the derivative of the right side of (21) is M_0 (a value as far below 1 as possible is desirable for a rapid approach), for (22) this is

$$M = 1 - (1 - M_0)b, \tag{23}$$

hence, the worse the (unilateral) approach is the higher b is needed. Taking a b which is above the favourable, an alternating approach, or increasing it further a divergent calculation is obtained. The calculation can be programmed so that after the step α_g and its change appears on the display of the HP; the value of b can be modified en route by the operator. By using $b = 9 \ldots 50$ the time needed for the calculations (carried out until 10^{-7} change) can be reduced considerably.

For $\lambda = 0{,}42$ the necessary number of points of the delimitation curves was determined for various values of u. The results were checked at random by a chordal method program. The curves are represented in Figs 2 . . . 7, and it can be seen that they are strongly distorted by the variation of u. The left limiting point which can be observed until $u = 5$ is the position of interference beginning at both wheels, where the compensated T is theoretically infinite; with increasing u this wanders towards the practically uninteresting small pressure angles. Simultaneously a slight return occurs first in the descending lower, than in the upper limit curve towards larger Σz in the range of the lower pressure angles (Figs 6, 7).

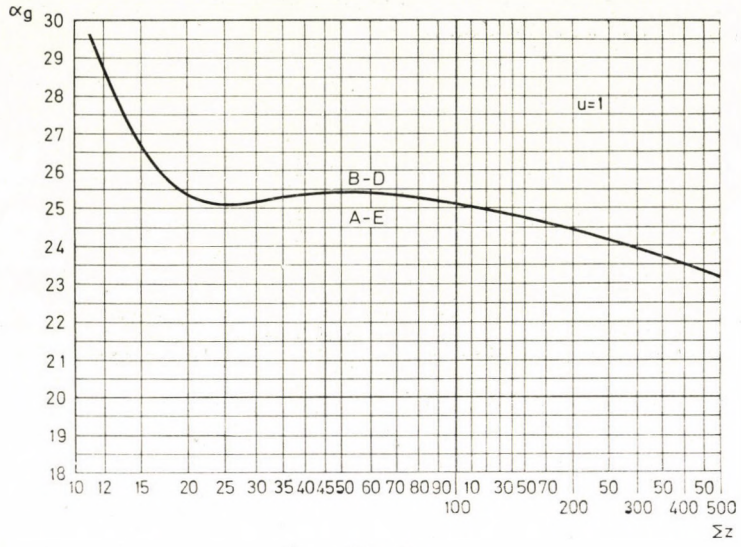

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=1
B-D
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 2

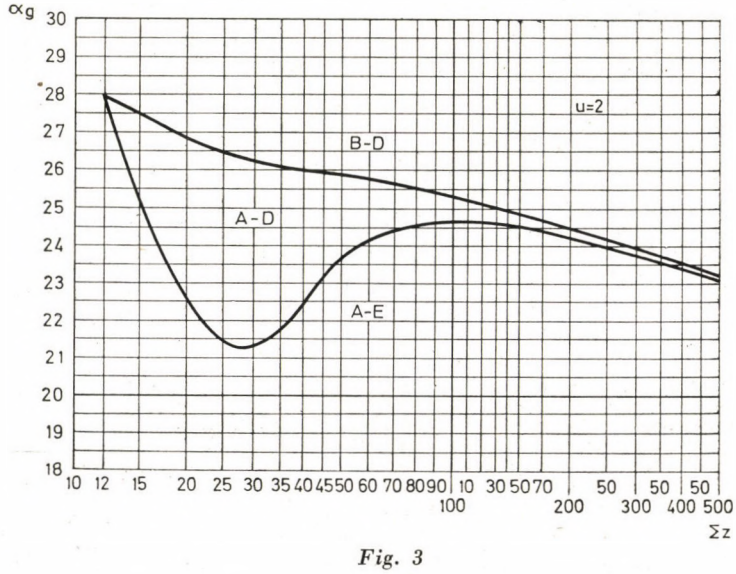

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=2
B-D
A-D
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 3

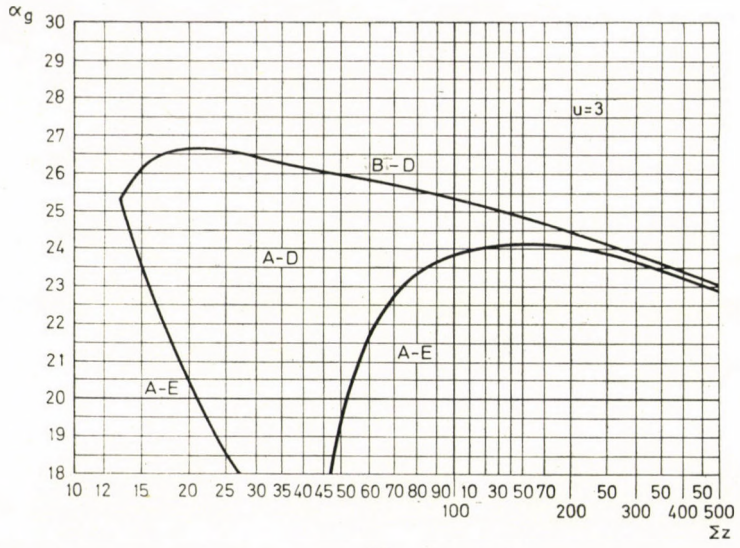

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=3
B-D
A-D
A-E
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 4

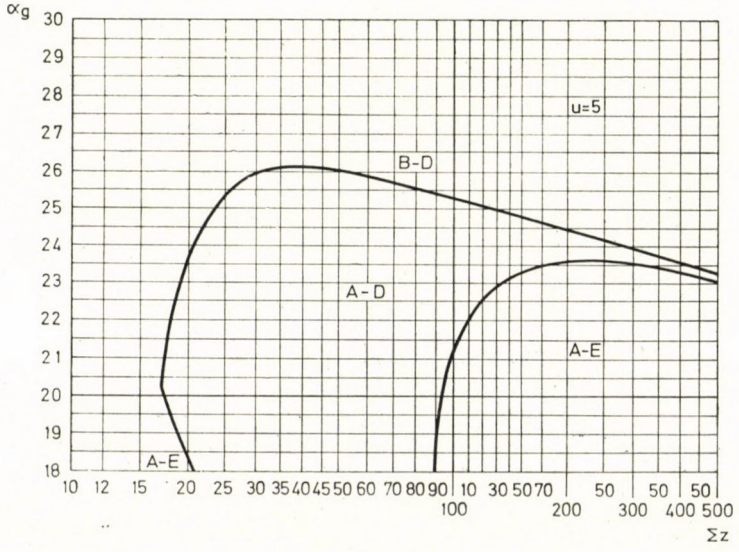

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=5
B-D
A-D
A-E
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 5

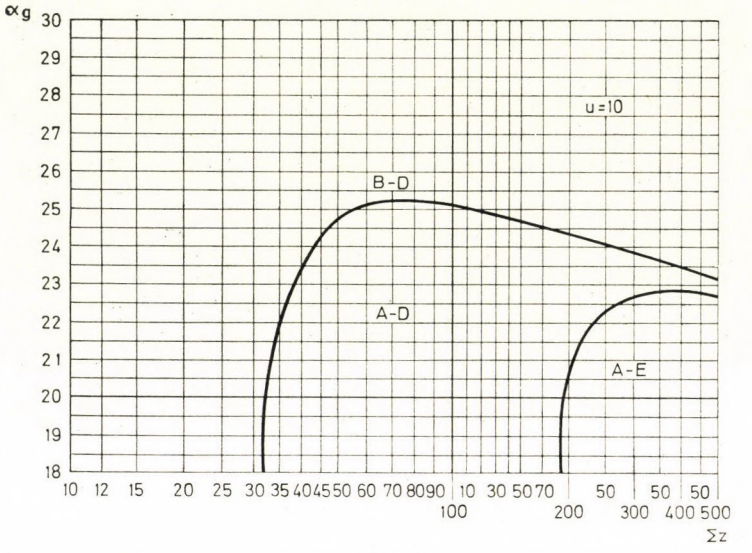

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=10
B-D
A-D
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 6

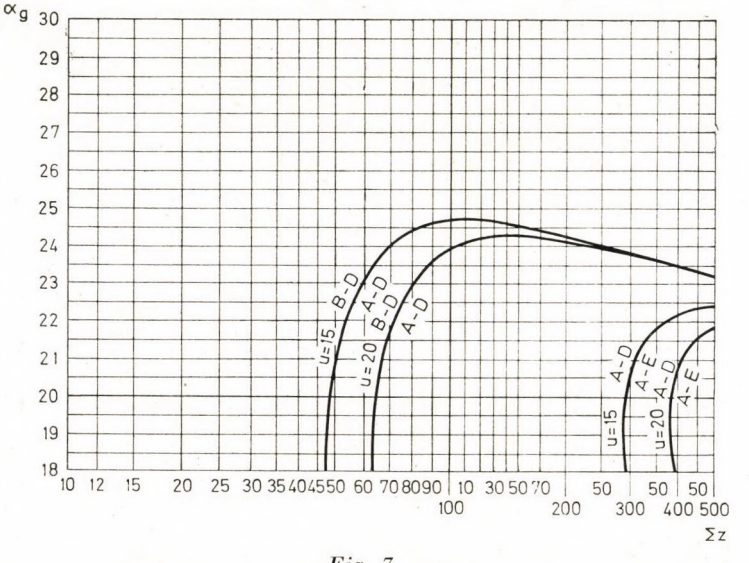

αg
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
u=15
B-D
A-D
u=20
B-D
A-D
u=15
A-D
A-E
u=20
A-D
A-E
10 12 15 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80 90 10 30 50 70 50 50 50
100 200 300 400 500
Σz

Fig. 7

In general, the convergence of the method could be assured with a convenient b; only for $u = 20$ in the vicinity of 18° had became divergent after a temporary convergence, so extrapolation was used here. By rearranging (21) the iteration is convergent for pressure angles considerably smaller than 18°, so probably for the whole $\Sigma z - \alpha_g$ plane the limits are multi-value curves while the figures show only the practically interesting range.

7. Complementary remarks

The basic principles and calculation methods worked out in the present paper for flash temperature compensation can be used with suitable modifications for limiting similar spurious characteristics to minimum values. The triple compensation principle of BOTKA pointed out the connection between the flash temperature, the Almen-product and the relative sliding ([13], [22]). If the latter, multiplied by μp_n is explained as the specific friction loss[15], from the point of view of the mentioned variables the correction can be carried out according to the ideas discussed here. For the case $A-D$ the results are different, but for the compensations $A-E$ resp. $B-D$ for all three variables are suitable compensations of the relative sliding which can be attained.

It has not been examined, in general, yet to what extent the most favourable correction, as determined by the methods discussed so far, can be realized by considering the various limiting factors (interference, etc.). In this connection the author refers to the investigations of ERNEY and to BOLOTOVSKY's diagrams ([2], [15]).

8. Summary of the results

On straight involute gearing without tip relief the compensation of flash temperatures must be carried out for the points $A-E$, $A-D$ or $B-D$ in order to minimize the danger of seizing, according to the assumptions of the Ganz–Botka system.

Knowing the parameters of the $A-D$ compensation for a given toothing it is possible to decide which one of the three compensations must be used. Elaborating the calculations for the different cases, the ALGOL program for calculating a toothing given by Σz, α_g, u have been worked out.

If it is not a certain given toothing that is calculated, but a table or, for further investigations, sets of matching values are needed for different compensations, the progress of the calculation can be suitably modified. This procedure can also be elaborated for all three cases of compensation, and, by using it, the compensation cases were delimited in the $\Sigma z - \alpha_g$ plane for several ratios of tooth numbers.

REFERENCES

1. THEYSE, F. H.: Die Blitztemperaturhypothese nach BLOK und ihre praktische Anwendung bei Zahnrädern. *Schmiertechnik* **14** (1967), 22—29
2. ERNEY, GY.: A fogazatrendszerekről (On the Tothing Systems). *Járművek, Mezőgazdasági Gépek* **18** (1971), 59—61
3. BLOK, H.: The Surface Temperatures under Extreme Pressure Lubricating Conditions. Eddition of the author, Delft 1937
4. NIEMANN, G.—LECHNER, G.: Die Freß-Grenzlast bei Stirnrädern aus Stahl. *Erdöl und Kohle*, **20** (1967), 96—106
5. NIEMANN, G.—SEITZINGER, K.: Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Freßtragfähigkeit, *VDI-Z.* **113** (1971), 97—102
6. NIEMANN, G.: Maschinenelemente, Bd. II. Springer, Berlin 1961
7. NIEMANN, G.—LECHNER, G.: The Measurement of Surface Temperatures on Gear Teeth, *Trans. ASME* (Basic), (1965), 641—654
8. NIEMANN, G.—LECHNER, G.: Die Erwärmung der Zahnräder im Betrieb. *Schmiertechnik.* **14** (1967), 13—20
9. TERAUCHI, Y.—MIYAO, Y.: On the Measurement of Temperature Flashes on Spur Gear Teeth. *Bulletin of JSME;* 1st Rep.: Vol. 7, No. 26, pp. 444—451, 1954; 2nd Rep.: Vol. 8, No. 29, pp. 109—120, 1965
10. TERAUCHI, Y.—HAMAMOTO, T.: On the Surface Temperature Rise Caused by Frictional Heating, *Journal of the JSLE*, **15** (1970), 133—138
11. YOKOYAMA, M.—ISHIKAWA, J.—HAYASHI, K.: Measurement of Surface Temperatures on Gear Teeth by Dynamic Thermocouple Method, *Journal of ISLE*, **16** (1971), 475—485
12. TOBE, T.—KATO, M.—TAKATSU, N.: Surface Temperature on Gear Teeth. IV. Conference on Dimensioning and Strength Calculation, Section B, Budapest 1971
13. BOTKA, I.: Fogaskerékméretezés kiegyenlített kontakthőmérsékletre (Dimensioning of Gears for Compensated Contact Temperature), *GÉP*, **16** (1964), 425—430
14. KOLONITS, F.: Kiegyenlítési esetek a GANZ—BOTKA fogazatrendszerben (Compensation Cases in the Ganz—Botka Toothing System), *GÉP* **19** (1967), 339—343
15. Кудрявцев, В. Н.—Державец, Ю. А.—Глухарев, Е. Г.: Конструкции и расчёт зубчатых передач, изд. «Машиностроение», Ленинград 1971
16. BOTKA, I.: Profilkiválasztási táblázat (Profile Selection Table). 2nd improved edition. Edited by the author, Budapest 1961
17. BÓDI, J.: Kiegyenlítési feltételek biztosítása hengereskerekeknél (Securing Compensation Conditions with Spur Gears), Technical University, Budapest Doctor's thesis, 1971
18. KOLONITS, F.: Calculation of Gear Correction by Iteration, *Acta Techn. Hung.* **56** (1966), 3—20
19. KOLONITS, F.: Fogazathelyesbítési iterációs eljárások elemzése (Analysis of Iteration Procedures for Toothing Compensation). *VI. Oszt. Közl.* **36** (1965) 85—91
20. KOLONITS, F.: Elosztószám táblázat készítése a Ganz—Botka fogazáshoz (Making of Repartition Number Tables for the Ganz—Botka Toothing. *VI. Oszt. Közl.* **39** (1967), 227—232
21. LŐCS, GY.: Az ALGOL 60 programozási nyelv (The ALGOL 60 Programming Language). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1962
22. VÖRÖS, I.: Gépelemek III, Fogaskerekek (Elements of Machines III, Gears). Tankönyvkiadó, Budapest 1961
23. "PATTANTYUS" Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve (Manual for Mechanical and Electrical Engineers), II, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971

Blitztemperaturausgleich bei geradverzahnten Evolventerädern. Für die Erklärung des Zugrundegehens der Zahnräder durch Einfressen und zur Verringerung der Einfreßgefahr wurden mehrere Theorien entwickelt. Gemäß einer der verbreitetsten Vorstellungen ist die sich im Berührungs-Druckband bildende maximale Kontakttemperatur maßgebend und muß möglichst niedrig gehalten werden. Das Ganz-Botka sche Verzahnungssystem schreibt als Grundprinzip den Ausgleich der, vor, bzw. nach dem Wälzpunkt auftretenden maximalen Blitztemperaturen vor, um diese zu minimalisieren. In der vorliegenden Arbeit untersucht der Verfasser die praktische Verwirklichung dieses Ausgleichs, d.h. die konkrete Berechnung der Verzahnungsparameter für gerade Verzahnungen.

Уравнивание мэмпературы молнии в случае прямозубых эволъвентных зубсатых колес. Для теоретического освящения порчи зубчатых колес от заедания и для снижения опасности заедания сложилось ряд различных теорий. На основе одного из наиболее широко распространенных представлений важным является контактная температура, возникающая при контактном давлении: это давление необходимо уменьшить до возможно наименьшеговеличины (величина его является суммой температуры тела зубчатого колеса и температуры контакта т. н. температуры молнии). Система зацепления Ганз—Ботка в качестве основного принципа предписывает уравнивание максимальной температуры молнии, возникающей перед и после участка главной точки контактирования: следовательно, таким образом желает минимализировать их. В данной работе исследуется в случае прямозубых зацеплений практическое выполнение этого уравнивания, т. е. метод конкретного определения параметров зубьев.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3–4), pp. 299–312 (1975)

THERMAL NON-LINEARITY

L. GÁDOR*

[Manuscript received February 6, 1974]

In metallic- type electrical-conductors the linear relation between current and voltage also breaks down because of the heating of the conductor traversed by the current. In an a. c. circuit this phenomenon also leads to the generation of upper harmonics. The thermal inertia of the system moderates the variations within one period, and this permits to linearize the oscillations and to establish very simple relations. As a practical utilization of the thermal non-linearity the voltage-sensing circuit of the automatic voltage regulator used in the Hungarian network has been realized.

Perhaps the best known law of classical electrotechnics is Ohm's law, which states that in a current-traversed conductor, current and voltage are in linear connection. Those formulating laws are alwas particularly simple if between the characteristics of phenomena, processes, states a linear relation can be defined. Simultaneously, the strival for simple mathematical handling and the theoretico-logical claims are satisfied, which want to recognize the laws of nature in an elementary simple form.

But as the limits of knowledge widen and the ranges of the investigated parameters increase, the simple relations break down again and again, more than once giving place to more universal, and may be, simpler relations. The electromagnetic phenomena have been overtaken by this fate. Even in optics which, for the longest time, have resisted the torsioning effect of range widening, non-linearity has appeared with the intensities possible to be produced by using laser rays.

The linearity defined by Ohm's law is also valid between relatively narrow limits only: for defined types of conduction, within one range of values for each of the characteristics — current and voltage — and at constant temperature.

Subsequently, those non-linearities of the current-voltage relation will be dealt with, which stem from the fact, that it is practically the current traversing the conductor itself which destroys the constancy of temperature.

* Dr. L. GÁDOR, Attila út 111, H-1012 Budapest, Hungary

1. Direct current

Let us examine the relation between current and voltage for conductors of metallic character, also considering the temperature change caused by the current.

In the stationary state there is a thermal equilibrium, the thermal power arising at the resistance is equal to the thermal power transferred to the surroundings by conduction and radiation.

$$I^2R = \alpha A(T - T_k) + \beta B(T^4 - T_k^4) \tag{1}$$

where

I = current passing through the resistance R,
T = stationary temperature of the resistance,
T_k = temperature of the surroundings,
α = coefficient of heat-transfer,
A = area of the heat-transmitting surface,
β = emissivity,
B = radiating surface.

For the sake of simplicity, it may be written that $\alpha A = a$ and $\beta B = b$ and with these

$$I^2R = a(T - T_k) + b(T^4 - T_k^4) . \tag{2}$$

In the first part of the equation describing linear heat transfer it makes no difference whether °K or °C are used, but in the radiation formula $T^4 - T_k^4$ must always be calculated in °K.

The resistance R is a linear function of the temperature:

$$R = R_0[1 + k(T - T_0)] , \tag{3}$$

where

R_0 = resistance measured at temperature T_0,
k = temperature coefficient of the resistance.

In the tables T_0 is usually given for 15°C or 20°C, but there is no obstacle to giving R_0, e.g. for 0°C.

The linearity in temperature of the resistance is naturally valid only within certain limits but this range of several hundred degrees is sufficient for the present examinations.

Substituting R into (2)

$$I^2R_0[1 + k(T - T_0)] = a(T - T_k) + b(T^4 - T_k^4) . \tag{4}$$

The voltage is

$$U = IR = IR_0[1 + k(T - T_0)] . \tag{5}$$

The required non-linear characteristic $U = f(I)$ can be obtained by eliminating T from Eqs (4) and (5). T being represented by its fourth power, it is

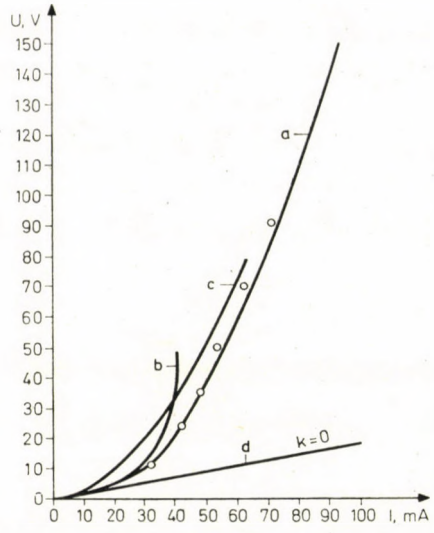


Fig. 1. Voltage-current characteristic of a tungsten incandescent lamp

practically simpler to determine, on the base of the values a, b, k and R_0, the values R, U and I for an arbitrarily assumed value of T.

E.g., curve a of Fig. 1 shows the voltage-current characteristic of a tungsten-filament incandescent lamp with the following data:

$$R_0 = 180\ \Omega \text{ (at } 20\ ^\circ\text{C)},$$
$$k = 0{,}0047\ \Omega/^\circ\text{C},$$
$$a = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{W}/^\circ\text{C},$$
$$b = 10^{-12}\ \text{W}/^\circ\ \text{C}^{1/4}.$$

The curve shows the good agreement between the calculated and the measured values.

It is worthwhile to analyze the role of the two types of heat transfer, the linear heat convection and the radiation, in the development of the non-linear characteristic.

First, let us assume that $b=0$, then the whole thermal power is delivered by the convection proportional to the temperature difference. Then

$$UI = a(T - T_k). \tag{6}$$

The result is shown in curve b of Fig. 1. After a certain point any further increase of the voltage is in vain, the current does not rise any longer. The additional Joule heat due to the rising resistance produces just that additional heat drain which is due to the rising temperature. In this state the system stabilizes the current.

On the stabile section $dI/dU = 0$. From Eqs (5) and (6) — if for simplicity's sake $T_0 = 0$ — the stabilized current is

$$I_{st} = \sqrt{\frac{a}{R_0 k}} .$$

By substituting the concrete values

$$I_{st} = 0{,}0422 \text{ A} ,$$

i.e., the current of the tungsten-filament lamp in question would increase until this I_{st} and would stabilize there, if by some means radiation could be prevented.

Now, let us have a look at the other extremity: $a = 0$, the heat energy leaves only by way of radiation. In this case

$$UI = b(T^4 - T_k^4) . \tag{7}$$

The characteristic calculated according to this condition is the curve marked *c* in Fig. 1.

Comparing curves *b* and *c* shows that the apparition of the higher powers of the temperature straightens the characteristic, the non-linearity of the relation decreases.

Let us remark that the thermal non-linearity as described is the consequence of the temperature dependence of resistance. For the sake of completeness also the characteristic *d* has been traced which is valid for $k = 0$ and is naturally a straight. Hence, the resistances made from constantan and similar metals do not show the phenomenon of thermal non-linearity.

2. Alternating current

With a.c. supply conditions are already much more complicated if the system is completely free from thermal inertia, at every instant it follows the external parameters, in the equations describing its behaviour no derivatives with respect to time appear, its momentary state is independent of its previous state. Because of the non-linear relation between the parameters, when placing a sinus voltage at the terminals of the resistance, the current will be non-linear.

The situation becomes even more complicated, if the thermal inertia, always present to a certain extent, is also taken into account. In that case the thermal power arising at the resistance partly goes into the surroundings by way of conduction and radiation, partly it accumulates in the thermal capacity of the resistance. Hence, the thermal equilibrium according to Eq. (2)

is completed by a further member:

$$\frac{u^2}{R} = a(T - T_k) + b(T^4 - T_k^4) + c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

where

u = instantaneous voltage across the resistance,
c = thermal capacity of the resistance,
t = time.

The relation has been established for the voltage and not for the current because it is the former which retains its pure sinusoidal character in most of the cases, while the current becomes non-linear.

If $u = U_0 \sin \omega t$ is the alternating voltage and R is a linear function of the temperature according to Eq. (3), substituting these values into Eq. (8) and rearranging it gives

$$cR_0[(1 - kT_0) + kT]\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + bkR_0T^5 + bR_0(1 - kT_0)T^4 + akR_0T^2 +$$

$$+ R_0[(1 - kT_0) - k(aT_k + bT_k^4)]T - R_0(1 - kT_0)(aT_k + bT_k^4) = U_0^2 \sin^2 \omega t\,. \tag{9}$$

In the thermally inert conductor the basic harmonic of the current lags behind the voltage and its content of higher harmonics diminishes. The solution of the differential equation (9) provides detailed information on all phenomena. Suddenly branching the voltage on the conductor, a transient temperature component appears, later on, in the stationary state, some mean value is attained and the temperature oscillates around it with 2ω frequency. Together with the temperature the resistance varies, its oscillation within one period determines the non-linear distortion of the current.

The correct solution of the differential equation (9) would be too high a price to pay for the expected result, even in the age of computers. Therefore, the solution is attempted with such concepts and simplifications which also provide a better understanding of the essentials of the phenomena.

The greater the thermal inertia of the system is, the slower it reaches the stationary state and the smaller the amplitude of the oscillations around the stationary state is.

As a first approximation, such a high thermal capacity is assumed that it practically suppresses the oscillations in the stationary state.

The excitation function on the right side of (9) can be decomposed into two parts: a constant member which is equal to the square of the effective value of the voltage U and an oscillating member superimposed on it, the amplitude of which is the square of the effective voltage U and its angular frequency ω_2 is the double of the mains angular frequency.

In the case of a very high thermal capacity the stationary state is determined by the constant member of the excitation function, the oscillations caused by the oscillating member do not count. In the stationary state $dT/dt = 0$. Hence, the stationary state is determined by

$$bkR_0T^5 + bR_0(1 - kT_0)T^4 + akR_0T^2 + R_0[(1 - kT_0) - k(aT_k + bT_k^4)]T - \\ - R_0(1 - kT_0)(aT_k + bT_k^4) = U^2 . \tag{10}$$

On the left side there are only constants, except T, so for every voltage U the stationary temperature T_a can be calculated. Practically it is simpler to calculate the other way round for an assumed stationary temperature T_a the value U which brings it about is determined. By the way, the stationary state is the only one of the otherwise complicated non-linear system which can be precisely determined.

Now, starting from the stationary state, let us slowly diminish the thermal capacity of the system. By this the oscillations around the stationary state start, first with very small amplitudes. In the range of the small amplitudes the linearization of the phenomenon can be permitted. For this purpose and in order to simplify the handling of the problem, the differential equation of the system is somewhat transformed. The merit of the results is not changed if it is assumed that $T_0 = T_k = 0°C$ and subsequently the temperature T is counted from 0°C. So

$$R = R_0(1 + kT) , \tag{11}$$

and the heat transfer of the system is

$$aT + b[(T + 273)^4 - 273^4] .$$

Let us define the heat transfer coefficient a_T depending on T so that it becomes

$$a_TT = aT + b[(T + 273)^4 - 273^4] ,$$

or

$$a_T = a + b\frac{(T + 273)^4 - 273^4}{T} . \tag{12}$$

Introducing these assumptions the d.e. (9) takes the following very simple form:

$$u^2 = a_TRT + cRT' , \tag{13}$$

where a_T and R are non-constant factors depending on T which make the Eq. non-linear, T' is the derivative with respect to time of the temperature. The factors a_T and R are simply added to each value of T, if a, b and k are known.

The excitation function of the oscillations around the stationary temperature is $U^2 \sin \omega_2 t$ where U is the effective value of the mains voltage and

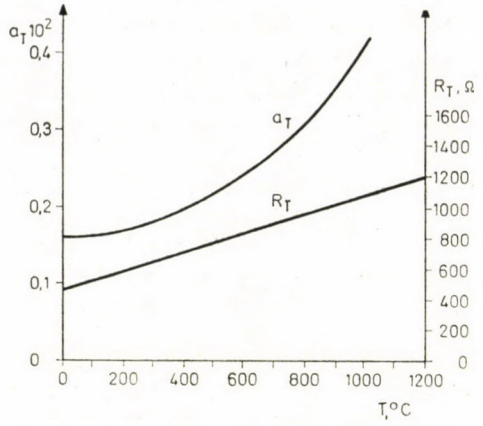


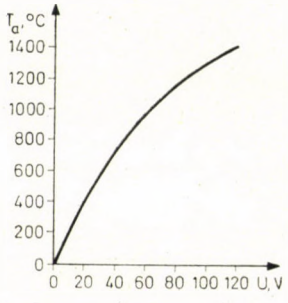
Fig. 2. a_T combined heat transfer coefficient and resistance R as functions of temperature T

ω_2 the double of the mains angular frequency. Assuming lineary conditions within a small range, T also oscillates sinusoidally with this same frequency, lagging behind the excitation function.

The amplitude variations of the temperature T_c can be simply determined from the d.e. (13):

$$T_c = \frac{U^2}{R\sqrt{a_T^2 + c^2\omega_2^2}}, \tag{14}$$

remarking that here a_T and R are the values belonging to the stationary temperature T_a, which are theoretically not constant, but are considered as being that for the calculations.



Fif. 3. T_a stationary temperature as a function of effective voltage U

Returning to the incandescent lamp which was discussed above, Fig. 2 shows the values a_T and R as a function of temperature T, Fig. 3 shows the stationary temperature T_a as a function of U. In the denominator of (14) a_T^2 is of the order $10^{-5} \div 10^{-6}$. If the thermal capacity is a small value, e.g.

10^{-3} Ws/°C, then the member $c^2\omega_2^2$ still exceeds by $4 \div 5$ orders of magnitude the heat-transfer coefficient a_T, thus the latter can be practically neglected in the sum. With this, Eq. (14) is simplified to

$$T_c = \frac{U^2}{Rc\omega_2}. \tag{15}$$

The d.e. (13) is not suitable for calculating in a simple way the stationary temperature T_a, because a_T and R are functions of T, but there is

$$T_a = \frac{U^2}{a_T R} \tag{16}$$

where a_T and R are values corresponding to temperature T_a. This provides a simple method for calculating the relative amplitude of the oscillations around the stationary temperature:

$$\frac{T_c}{T_a} = \frac{a_T}{c\omega_2}. \tag{17}$$

The non-linear system does not have a time constant in the same sense as a linear one, the rise not being exponential but only similar to it. Nevertheless, the speed of ascendance can be characterized on the $T(t)$ characteristic by the time co-ordinate τ at the point where the initial tangent intersects the constant temperature.

The initial tangent from (13) is

$$T_0' = \frac{U^2}{cR_0},$$

if $u^2 = U^2$ and $T = 0$. On the other hand,

$$\tau = \frac{T_a}{T_0'},$$

hence, by using (16)

$$\tau = \frac{R_0}{R}\frac{c}{a_T}. \tag{18}$$

If (13) were a differential equation with constant coefficients, the real time constant would be c/a_T. The reduction of time by the ratio R_0/R is the result of the forcing, caused by the still cold resistance at the start and therefore having a smaller value. τ becomes smaller and smaller with increasing T_a and increasing U, because R as well as a_T are increasing in the denominator; embracing the influence of the non-linearity at greater intervals which gradually makes itself felt.

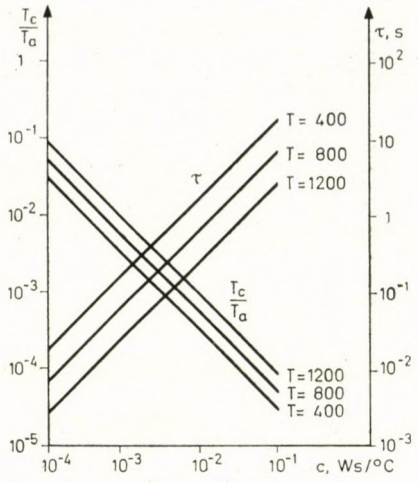


Fig. 4. The relative amplitude of the temperature oscillations and the time characteristic τ of the starting as functions of thermal capacity

In Fig. 4 T_c/T_a and τ are shown as functions of the thermal capacity c at three different temperatures and voltages, on a logarithmic scale. The figure shows that the value of τ characterizing the lag is of the same order of magnitude as the period, while the relative amplitude of the temperature oscillations is only $1 \div 2\%$. Therefore, a much smaller thermal capacity is sufficient to eliminate the upper harmonics than for reaching a significant value of τ as long as for tens of seconds or one minute.

The variations of the temperature are followed by a periodic oscillation of the resistance R with the amplitude R_c. The resistance being a linear function of temperature

$$R_c = R_0 k T_c \tag{19}$$

the relative intensity of the oscillation is

$$\frac{R_c}{R} = \frac{kT_c}{1 + kT_a}. \tag{20}$$

This value is about two-thirds of the value T_c/T_a shown on Fig. 3, i.e. for a thermal capacity of the order 10^{-3} does not even attain 1%. If c is of the order 10^{-4}, that is — increasing with the temperature — about 2 . . . 8%.

3. Utilization

The sensing element of the high-power voltage regulating transformers developed by the Research Institute of the Electrical Industry is a non-linear bridge. This simple, reliable, cheap sensing device has so far been able to main-

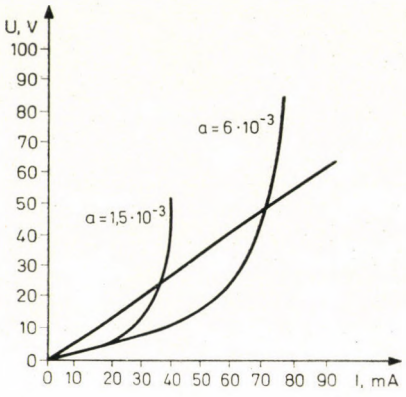


Fig. 5. Dependence of the voltage-current characteristic of an incandescent lamp on the heat transfer coefficient a

tain its position even against the semi-conductors. The non-linear member of the bridge is an incandescent lamp, the non-linearity of which is of thermal origin. Therefore, the relations deduced in the foregoing chapters can be utilized for designing the voltage-sensing bridge.

Fig. 1 proves that the linear heat transfer results in a far more powerful non-linearity of the voltage-current characteristic. Therefore, it is appropriate to choose the working point in the range of the lower temperatures, this is also in favour of a longer life time of the lamp.

The voltage factor of the non-linear bridge, i.e. the ratio of the output signal to the voltage difference counted from the equilibrium point is

$$f = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1},$$

where R_1 and R_2 are the dynamic resistances of the two branches of the symmetrical bridge. These are nothing else but the slope of the voltage-current characteristic at the examined point. The voltage factor of the bridge realized, in practice, is about $f = 0{,}01$.

Fig. 5. shows the dependence of the characteristic traced exclusively for linear heat transfer on the coefficient of heat transfer. The dissipated power obviously increases in proportion with a, the variation of the heat-transfer coefficient just expresses how the transferred heat varies for on equal temperature differences. As is also shown by the figure, at the working point, however — the point of intersection of the linear and the non-linear characteristics —, the slopes do not change, the voltage coefficient is the same.

What is the dependence of the output signal on the temperature coefficient k? The size of the output signal being determined by the difference of the temperature coefficients of the two bridge branches, one pair of resistances

is suitably chosen with $k = 0$ temperature coefficient, i.e. the commercially available wire resistances. Then

$$f = \frac{R_d - R_s}{R_d + R_s} \tag{21}$$

where R_d is the dynamic, R_s the static resistance of the non-linear member at the point of equilibrium. If the co-ordinates of the equilibrium point are U_0 and I_0,

$$R_s = \frac{U_0}{I_0} \quad \text{and} \quad R_d = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}\right)_0 .$$

If $T_0 = T_k = 0$,

$$U = \frac{aR_0 I}{a - kR_0 I^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} = aR_0 \frac{a + kR_0 I^2}{(a - kR_0 I^2)^2},$$

furthermore

$$I_0^2 = \frac{a}{k} \frac{R_s - R_0}{R_s R_0},$$

and with this

$$f = \frac{R_s - R_0}{R_s},$$

that is

$$f = \frac{kT}{1 + kT}. \tag{22}$$

The above relations are valid with neglected radiation at relatively low temperatures.

With an a.c. supply the bridge is balanced only for the basic harmonic, and because of the non-linearity, the upper harmonics appear in the output signal even then. This is true also when in the range of small deviations simplification by linearization is used, as long as the oscillation within one period of the temperature and hence of the resistance, are not neglected. This fact also points out the peculiar character of thermal non-linearity. The bridge is balanced only at a given value of the resistance, because of the variation with frequency ω_2 of the resistance the bridge periodically becomes unbalanced and at the output terminals the second upper harmonic appears.

The resistances of one diagonally opposed pair of resistors of the bridge is $R = \text{const.}$, those of the other pair oscillate around its values according

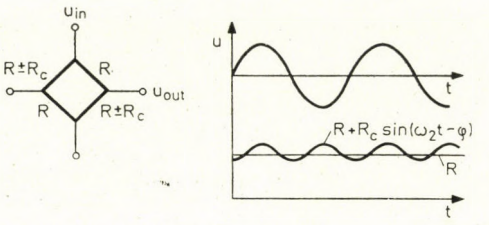


Fig. 6. Oscillation of the resistance

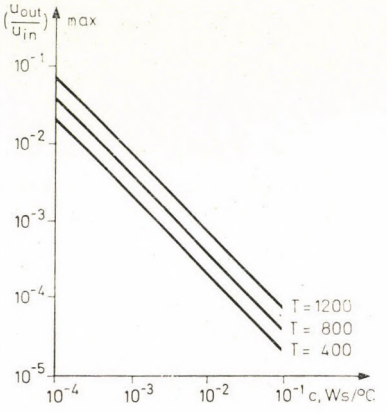


Fig. 7. The upper harmonics amplitude of the output voltage as a function of thermal capacity

to (19) with the amplitude R_c, i.e. $R + R_c \sin(\omega_2 t - \varphi)$, as shown in Fig. 6. The theory discussed in the foregoing is modified inasmuch as the constant resistance branched in series with the varying resistance makes the upper harmonic distortion appear in the voltage, too. The voltage on the variable bridge branch is

$$u \frac{R + R \sin(\omega_2 t - \varphi)}{2R + R_c \sin(\omega_2 t - \varphi)}$$

instead of $u/2$, i.e. the voltage oscillates twice per period between the values

$$U \frac{R \pm R}{2R \pm R_c},$$

instead of being $U/2$.

For the maximum elongation of the resistance, the relative output voltage is

$$\left(\frac{u_{ki}}{u_{be}}\right)_{\max} = \frac{R_c}{2R + R_c}. \tag{23}$$

If $R_c \ll R$,

$$\left(\frac{u_{ki}}{u_{be}}\right)_{\max} = \frac{R_c}{2R}. \tag{24}$$

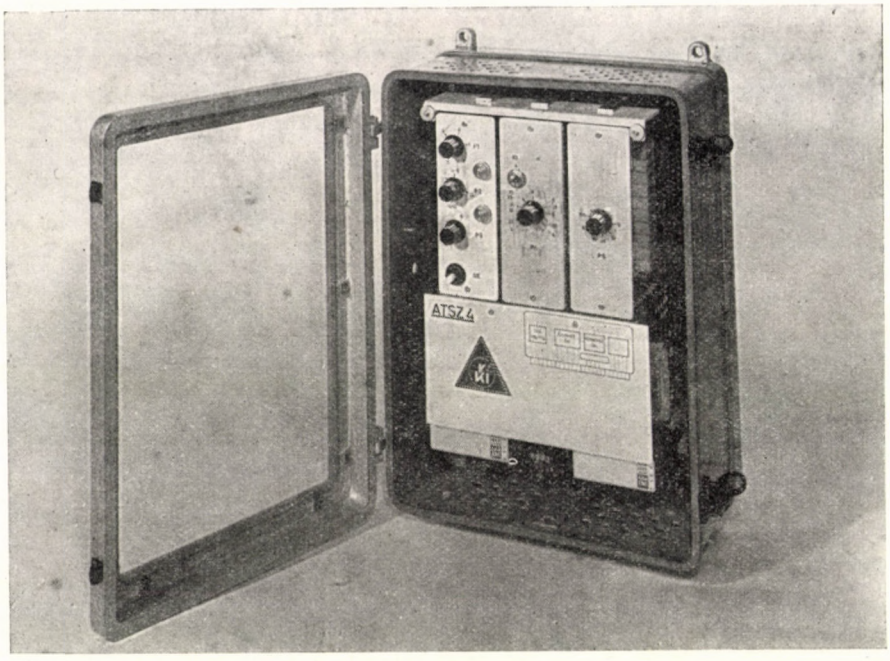


Fig. 8. The ATSz 4 type automatic voltage regulator, with incandescent lamp bridge-connected voltage sensor

In the calculation those effects of second order were neglected which are caused by the variation of R not being sinusoidal either, due to the distortion of the voltage.

The above value is the relative size of the instantaneous output voltage at maximum elongation of the resistance, and, depending on φ, it can take different positions within the period. Essentially, this is not a superposed second harmonic, but the modulation of the basic harmonic in consequence of the variation with frequency ω_2 of the resistance, which also appears on the terminals of the bridge balanced for the basic harmonic.

Fig. 7 shows the maximum amplitude of the upper harmonics caused by the temperature oscillations of the output voltage of the balanced bridge, as functions of the thermal capacity and with the temperature as a parameter. It can be seen that at temperatures around 800°C and with 10^{-4} thermal capacity, the upper harmonics signal appearing at the output of the balanced bridge is only of percents of the order of magnitude. In this range the linear approximation is still justified, in practice.

The thermal inertia is an efficient means for the simple assumption of the upper harmonics content appearing at the output of the non-linear bridge, but it does not seem practical to use it for providing a time lag.

Fig. 8 shows the ATSz4 type automatic voltage regulator which has been developed at the Research Institute of the Electrical Industry and has proved to be efficient in the Hungarian distribution network. Its voltage-sensing element is a bridge working on the principle of thermal non-linearity.

Thermische Nichtlinearität. Auch in metallischen Leitern bricht der lineare Zusammenhang zwischen Strom und Spannung zusammen, und zwar infolge der Erwärmung des stromdurchflossenen Leiters. In Wechselstromkreisen führt diese Erscheinung auch zur Entstehung von oberen Harmonischen. Die Wärmeträgheit des Systems mäßigt die Änderungen innerhalb einer Periode, was die Linearisierung der Schwingungen und damit die Festlegung von sehr einfachen Beziehungen ermöglicht. Als praktische Verwendung der thermischen Nichtlinearität wurde der spannungsempfindliche Stromkreis des im ungarischen Netz eingeführten Spannungsreglers verwirklicht.

Термическая Нелинейность. Также в случае электрического проводника металлического типа нарушается линейная зависимость между током и напряжением вследствие нагрева проводника, по которому течет электрический ток. В цепях переменного тока это явление вызывает также образование высших гармоник. Термическая инерция системы уТеньшает изменения в течение одного периода, что позволяет осуществить линеаризацию колебаний и вс?едствие чего определение очень простых зависимостей.-В качестве практического использования термической нелинейности разработана цепь восприятия автоматического регулирования напряжения, введеная на венгерской электросети.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 313—329 (1975)

INFLUENCE OF FIBER GEOMETRY ON THE PUNCHING FORCE CHARACTERISTICS OF WEBS DURING NEEDLE FELTING

T. BECK*

[Manuscript received March, 28 1974]

A small needle loom assembly (consisting of a needle board, stripper and a bed plate unit) mounted on an INSTRON tensile tester was used to measure the punching forces generated during the needling process. It was found that fiber linear density has a profound effect on the punching force of polyester fiber webs, while surface roughness, cross sectional shape, length and crimp seemed to have little or no effect on the punching force values. However, the interaction and length had a significant influence on the punching force. Measurements of the punching force in successive cycling experiments showed that, in addition to fiber linear density, fiber length, crimp and cross sectional shape also significantly affected the recovery behavior of the reoriented fibers.

1. Introduction

In recent years, there has been a great urge of activity in the production of nonwoven fabrics by the needle felting process. This is partly due to the introduction and the development of new and improved needle-punching looms and partly because of the economics of production. Needle punching is one of the various techniques by which fibers in a web are interlocked mechanically to produce a strong and coherent nonwoven fibrous structure. The principal action involved in the making of these structures is that of passing a fiber batting or lap composed of multipie layers of card web through a needle loom wherein the needles penetrate into the thickness of the batting. During this action, the penetrating barbs transport the surface fibers and reorient some of them into the vertical plane. The extent of reorientation and the degree of interlocking depend on various fiber-physical characteristics (e.g. length, fineness, crimp, surface geometry, etc.), web structure (e.g. areal density and fiber orientation) and needling parameters (e.g. needling density, type and size of needle, depth of penetration, etc.). In the process of needle penetration, certain forces are generated which are a result of the resistance offered by the fibers being transported (reoriented) by the penetrating barbs. These punching

* T. BECK, visiting scientist in Textile Research Institute, Princeton, N. J., U. S. A. in the academical year 1971/72. General manager of the Hungarian Linen Works, Szentendrei út 1—3, H—2011 Budakalász, Hungary.

forces are in turn quite important in influencing the condition of the needles, fiber breakage and the production efficiency of the needling process.

An experimental approach to the study of punching forces involved during needling was first reported by HEARLE and SULTAN [4]. They devised a simple model of a needling loom for adaptation and attachment into an INSTRON tensile tester. From their investigation on viscose rayon and Courtelle fibers, they concluded that there is a large increase in the punching force with an increase in needle penetration followed by a reduction in punching force with further penetration. They also reported that the punching force increased with increase in web density and fiber coefficient of friction but decreased with an increase in fiber length.

In a recent publication LÜNENCHLOSS [5] demonstrated that an increase in fiber length, fineness and crimp leads to higher punching force. He also observed that the amount of delusterant (varied from 0 to 0,88% TiO_2) did not have any noticeable influence at lower penetration depths but had a discernible effect at higher penetrations.

The present investigation deals with the determination of the effect and relative importance of five fiber geometric parameters and their interactions in influencing needle punching force. These five geometric parameters are fiber surface roughness, cross sectional shape, linear density, crimp and length. Furthermore, this investigation was extended to encompass an evaluation of the recovery hebavior of fibers after the needles had been withdrawn. For this assessment of the recovery characteristics (resistance to permanent reorientation), punching force for the second penetration cycle was measured. For some samples, the effect of recovery time (time between successive penetration cycles) was also evaluated.

2. Experimental and results

2.1. *Preparation of model fiber structures*

Thirty-two different samples of Dacron[3] polyester staple fiber which had been specially prepared and furnished by the du Pont Company for a previous study [7], were processed into multiple card-web structures (battings or laps). The characteristics of these samples, according to information received from the duPont Company, are given in Table I. It can be seen that the samples vary in each of the five geometric parameters at two levels differing as widely as feasible. The samples were processed on a worsted card with no finish other than the producer's (originally on the two) and a minimal application of an antistatic spray. Equal portions of each sample were hand-spread over a one-foot width on the feed table of the card. The fiber web produced by the card was accumulated in a multiple-layer form, wherein fiber orientation remained primarily in the machine direction of processing.

Table I

*Description of model fiber samples**

Sample batch Code	TiO_2** content (%)	Shape of cross section	Linear density (den.)	Crimp frequency (no. in.)	Staple length (in.)
1A	0,1	round	3,0	11÷12	3
1B	0,1	round	3,0	11÷12	6
1C	0,1	round	3,0	none	3
1D	0,1	round	3,0	none	6
2A	2,0	round	2,7	11÷12	3
2B	2,0	round	2,7	11÷12	6
2C	2,0	round	2,7	none	3
2D	2,0	round	2,7	none	6
3A	0,1	round	5,9	11÷12	3
3B	0,1	round	5,9	11÷12	6
3C	0,1	round	5,6	none	3
3D	0,1	round	5,7	none	6
4A	2,0	round	6,6	9÷10	3
4B	2,0	round	6,6	9÷10	6
4C	2,0	round	6,6	none	3
4D	2,0	round	6,6	none	6
5A	0,1	trilobal	3,2	11÷12	3
5B	0,1	trilobal	3,2	11÷12	6
5C	0,1	trilobal	3,2	none	3
5D	0,1	trilobal	3,2	none	6
6A	2,0	trilobal	3,3	11÷12	3
6B	2,0	trilobal	3,2	11÷12	6
6C	2,0	trilobal	3,2	none	3
6D	2,0	trilobal	3,2	none	6
7A	0,1	trilobal	6,2	11÷12	3
7B	0,1	trilobal	6,2	11÷12	6
7C	0,1	trilobal	6,2	none	3
7D	0,1	trilobal	6,2	none	6
8A	2,0	trilobal	5,7	11÷12	3
8B	2,0	trilobal	5,7	11÷12	6
8C	2,0	trilobal	5,7	none	3
8D	2,0	trilobal	5,7	none	6

* According to information received from the du Pont Company

** 0,1% TiO_2 provides a smotth surface; 2,0% TiO_2 provides a rough surface according to previous studies [6]

2.2. *Model needle punching unit*

A model of the needle punching assembly is shown mounted on an INSTRON tensile tester in Fig. 1. It consists essentially of two parts: (a) a needle board assembly with dead weight, mounted in the top jaw, and (b) a bed and stripper plate unit fastened to the cross-head. The needle board was 2 1/2 inches $\times$ 2 1/2 inches in dimensions and had 15 needles (size 15 $\times$ 18 $\times$ 25 $\times$ 3 1/2R) arranged in a diagonal pattern in a 2-inch square, as shown in Fig. 2(b). The size of the holes in the bed plate was approximately three times the diameter of the triangular blade part of the needle. The overall dimensions of the felting needles used in the present investigation are given in Fig. 2(a). The dead weight was used to preload the top jaw before the start of each test. Alignment of the needles with the holes in the stripper and in the bed plate was achieved by making two guide rods (screwed to each side of the needle board assembly as shown in Fig. 1) pass through two concentric holes drilled into the bed plate unit. The distance between the stripper and the bed plate was kept constant at 1/4 inches throughout the investigation; this was achieved by inserting two brass spacers between the two plates. The mounting of the specimen was achieved by clearing the bed plate assembly of the needles and of the guide rods and removing the stripper plate. A web specimen of 2 inches $\times$ 4 inches

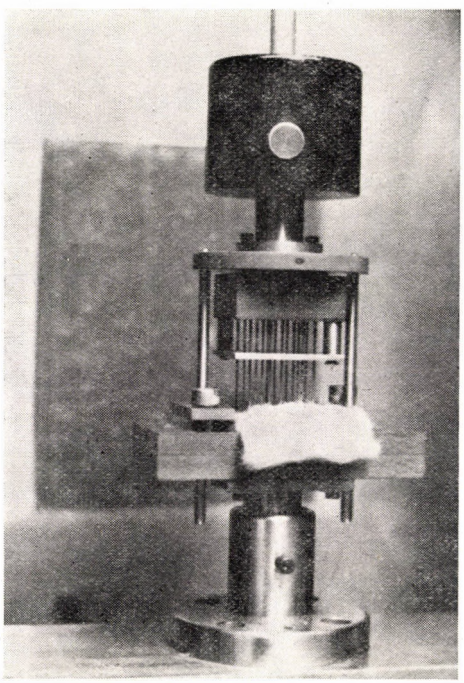


Fig. 1. Needle punching unit mounted on the INSTRON tensile tester

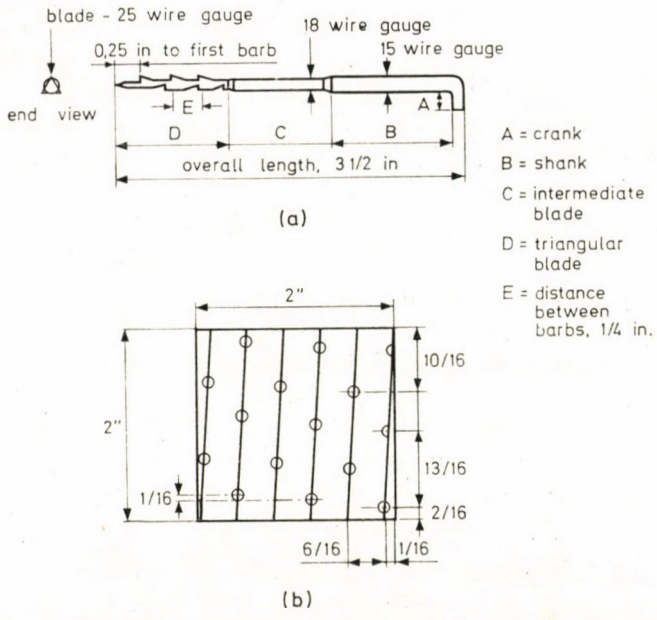


Fig. 2. (a) Felting needle used; (b) needle board showing needle arrangement

(long dimension taken in the machine direction of the web) was placed into position on top of the bed plate. The stripper plate was then positioned with the aid of two screws as shown in the photograph. In the present investigation, the needle board assembly was kept stationary, while punching was achieved by moving the bed plate assembly upward at a speed of 5 inches per minute. This penetration action caused the unloading of the top jaw which was recorded on the chart as a function of penetration depth. The needle penetration which is defined as the distance of the tip of the needle below the top of the bed plate, was kept constant at 1/2-inch throughout the investigation. This depth of penetration was found to be the most suitable for comparison purposes, as penetrations beyond 1/2-inch produced oscillation patterns in the punching load diagrams. At the end of the first penetration cycle, the bottom jaw reversed automatically. This procedure was repeated to measure the punching force for the second penetration cycle without allowing any recovery time in between the cycles, thereby simulating the quick, repetitive action in actual needling operations. All samples were stored under standard atmospheric conditions of temperature and relative humidity (72 $\pm$ 2 °F and 65 $\pm$ 2% R.H.) where the punching force tests were also made. The areal density of each specimen was determined after the penetration test.

2.3. *Needle punching force*

First cycle. The areal densities and the corresponding punching force values of samples studies are given in Table II. Because of great differences in fiber geometry features among the fiber samples, it was extremely difficult to prepare webs having similar areal densities. Consequently, needle punching force per needle has been normalized with areal density, and expressed as grams (of force) per needle per grams (of weight) per square inch (g/needle — g/in^2), thus allowing meaningful comparison between various samples.

The data for the punching force was first analyzed by applying the "student *t*-test" which established the significance of the influence of each individual variable in affecting the punching force. This analysis revealed that fiber linear density was the single most important parameter which had the main effect on the needle punching force of webs. In addition, crimp and length were found to have a moderate but significant influence. However, analysis of this kind does not give any indication as to the relative importance of each parameter as well as the presence of interactions which might influence the punching force results. Consequently, the data were subjected to factorial analysis and interpreted with the aid of DANIEL's half-normal plot method [1]. This analysis indicated that the needle punching force in the first cycle was highly affected by the fiber linear density, the level of significance being 99%. In addition, the interactions of linear density and crimp, linear density and length, and crimp and length, were also found to be effective at the 99% level of significance. It appears that the effects of surface roughness and cross sectional shape are completely obscured, perhaps due to the very strong influence of the other three variables.

In general, the data show that the webs made from 3-denier fibers yield higher punching forces than those made from 6-denier fibers. Figures 3 and 4 show typical punching force-needle penetration curves, indicating the influence of fiber denier (the first 0,25-inch on the needle penetration scale corresponds to the distance between the stripper and the bed plate). The dominant influence of fiber linear density in affecting the needle punching force can be simply understood when one considers the basic action of the penetrating barbs through the web, which has been discussed by various authors in detail [2, 3]. Moreover, in the present investigation it was also observed that, during the needle penetration, some of the surface fibers are gripper by the barbs in bundles and transferred into the vertical plane and reoriented as shown in Fig. 5. This transference of fibers causes jamming of the fibers in the holes of the bed plate and the generation of frictional drag due to fiber surface interactions and entanglement. Ideally, for a given fiber orientation, barb size and shape, the number of 3-denier fibers caught by a single barb will be twice as many as that of 6-denier fibers. Obviously, this action creates greater jamming

Table II

Needle punching force

(g/needle—g/in^2)

Fiber		Web weight g/sq yd	1st cycle F_1	2nd cycle F_2	Ratio F_2/F_1
Sample	Description				
1A	S-C-3-c-l	77	343	143	0,42
1B	S-C-3-c-L	145	1766	377	0,21
1C	S-C-3-nc-	179	1711	461	0,27
1D	S-C-3-nc-L	155	1342	401	0,30
2A	R-C-3-c-l	96	1004	200	0,20
2B	R-C-3-c-L	83	788	171	0,22
2C	R-C-c-nc-l	139	2314	438	0,19
2D	R-C-3-nc-L	133	1839	188	0,10
3A	S-C-6-c-l	205	428	176	0,41
3B	S-C-6-c-L	216	764	268	0,35
3C	S-C-6-nc-l	160	486	176	0,36
3D	S-C-6-nc-L	132	291	100	0,34
4A	R-C-6-c-l	205	661	235	0,35
4B	R-C-6-c-L	220	573	194	0,34
4C	R-C-6-nc-l	116	286	100	0,35
4D	R-C-6-nc-L	160	446	116	0,26
5A	S-T-3-c-l	149	1650	214	0,20
5B	S-T-3-c-L	199	2524	1409	0,56
5C	S-T-3-nc-l	135	801	468	0,58
5D	S-T-3-nc-L	136	2258	585	0,26
6A	R-T-3-c-l	181	2526	1304	0,52
6B	R-T-3-c-L	108	3029	1071	0,35
6C	R-T-3-nc-l	116	1561	236	0,15
6D	R-T-3-nc-L	109	1481	171	0,12
7A	S-T-6-c-l	113	356	113	0,32
7B	S-T-6-c-L	148	648	261	0,40
7C	S-T-6-nc-l	142	390	119	0,30
7D	S-T-6-nc-L	158	428	155	0,36
8A	R-T-6-c-l	150	1139	313	0,27
8B	R-T-6-c-L	173	491	170	0,34
8C	R-T-6-nc-l	144	678	172	0,25
8D	R-T-6-nc-L	148	788	136	0,17

S = smooth surface
R = rough surface
C = circular cross section
T = trilobal cross section

l = 3 inches
L = 6 inches
3 = 3 den (nominal)

6 = 6 den (mominal)
c = crimped
nc= no crimp

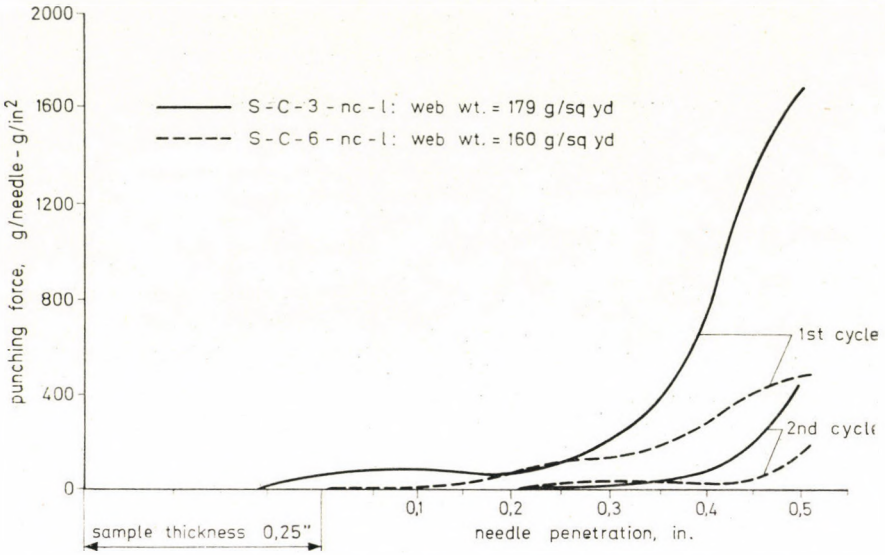


Fig. 3. **Effect of fiber linear density on the needle punching force during 1st and 2nd cycle. (Polyester fibers; — smooth, circular, 3-den., no crimp, 3 inches — smooth, circular, 6-den., no crimp., 3 inches)**

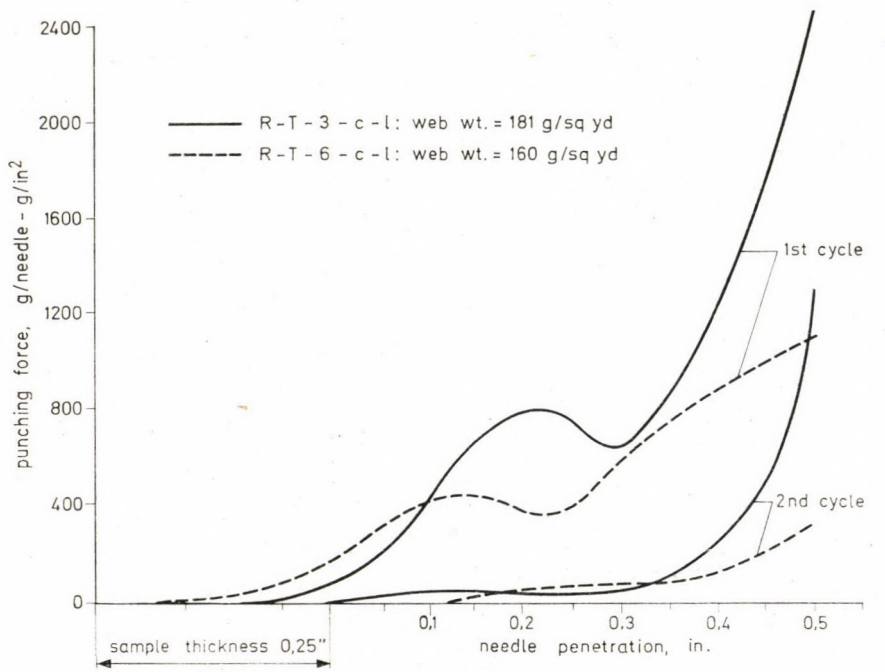


Fig. 4. **Effect of fiber linear density on the needle punching force during 1st and 2nd cycles (Polyester fibers; — rough, trilobal, 3-den., crimped, 3 inches; — rough, trilobal, 6-den., crimped, 3 inches)**



Fig. 5. Cross section of a needle punched web showing the reorientation and transference of surface fibers

and higher frictional drag (due to higher area of surface contact and entanglement), eventually resulting in higher punching force for webs made from 3-denier fibers. Figure 4 shows an interesting phenomenon observed only for 3-inch fibers of both 3- and 6-denier fibers of trilobal cross section having rough surface and crimp. The shape of the curves indicates a drop in punching load at about 0,25-inch penetration (entrance of first barb through the bed plate) and then a sudden increase in the punching load. This could perhaps be due to the interaction of cross sectional shape, linear density and crimp. Figures 6 through 9 show representative load penetration curves for the effect of fiber length, crimp, surface roughness and cross sectional shape on the needle punching force of webs. Evidently, none of these factors indicate (also revealed by the statistical analysis) any effect either on the shape of the curve or the ultimate force at 1/2-inch needle penetration.

Interactions (1st cycle). Although, as mentioned earlier, the two-level factorial analysis of the results revealed no main effect of the variables other than that of fiber linear density, there are a few iterations which exhibit strong influences on the punching force. Fig. 10(a) shows the effect of interactions of length and crimp on the punching force. The punching force values

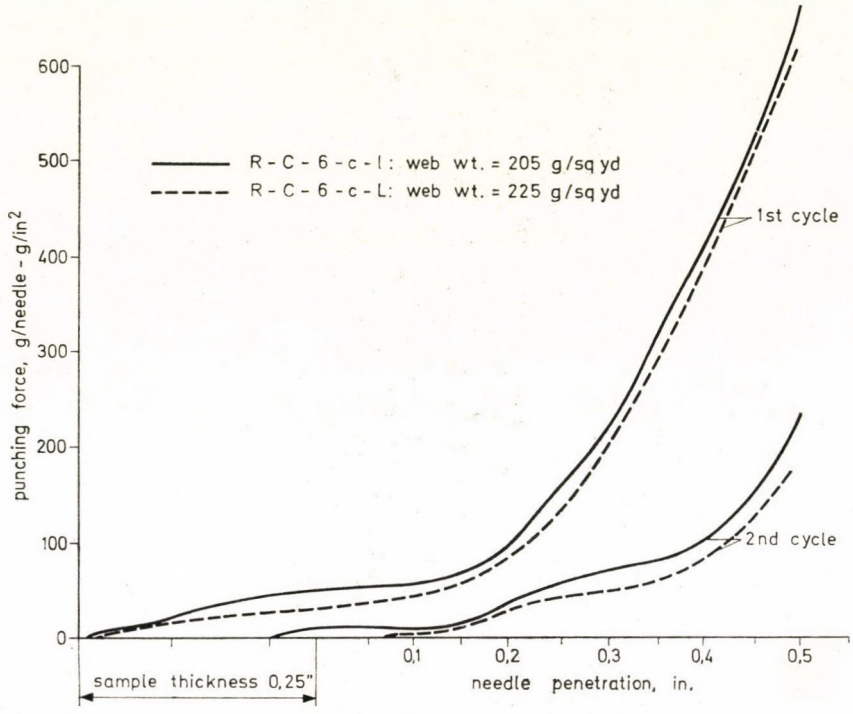


Fig. 6. **Effect of fiber length on the needle punching force during 1st and 2nd cycles. (Polyester fibers; — rough, circular, 6 den., crimped, 3 inches; — rough, circular, 6 den., crimped 6 inches)**

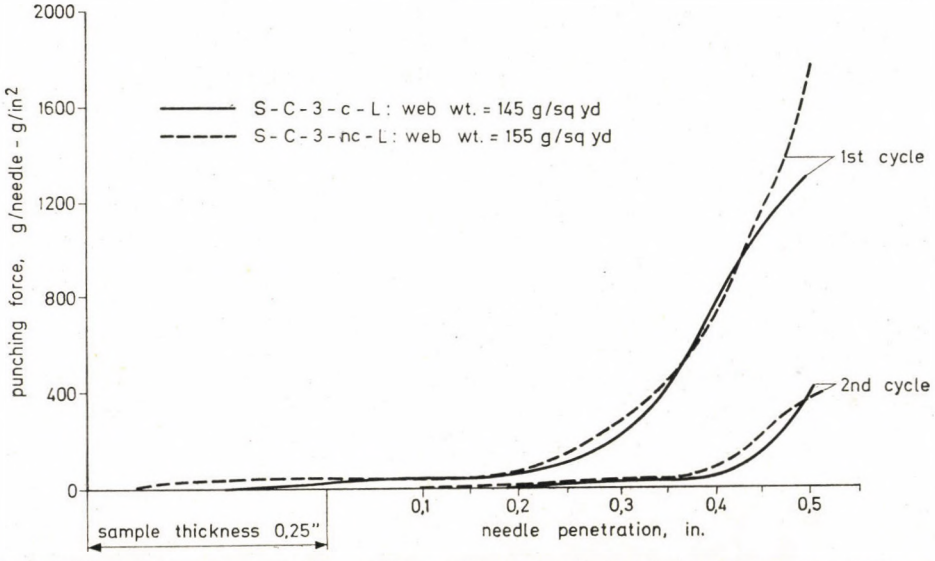


Fig. 7. **Effect of fiber crimp on the needle punching force during 1st and 2nd cycles. (Polyester fibers; — smooth, circular, 3 den., crimped, 6 inches: — smooth, circular, 3 den., no crimp, 6-inches)**

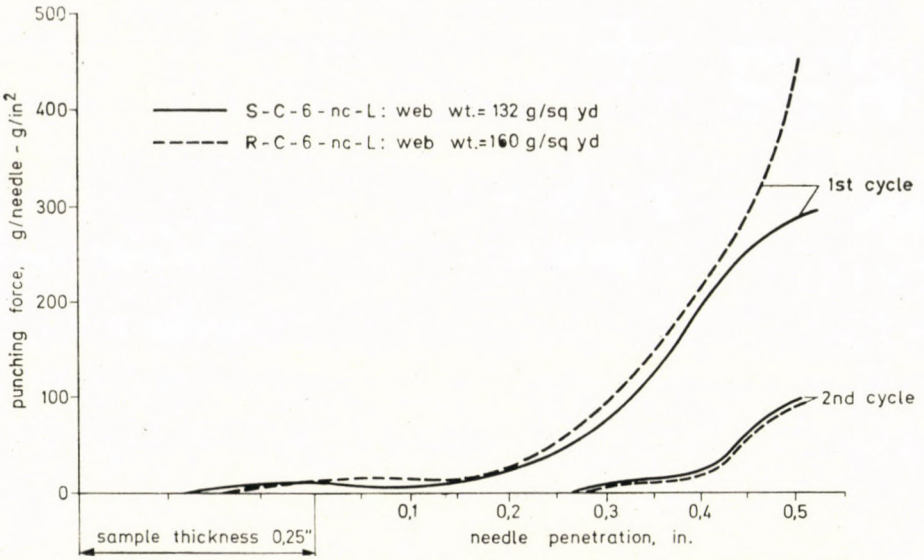


Fig. 8. Effect of surface roughness on the needle punching force during 1st and 2nd cycles. (Polyester fibers; — smooth, circular, 6 den., no crimp, 6 inches; — rough, circular, 6 den., no crimp. 6 inches)

plotted are obtained by calculating the average after pooling the data for specific variables; a detailed interpretation of this type of diagram is given elsewhere [6]. It is clear from the plot that at the higher fiber length (6 inches), crimp has a tendency to cause a considerable increase in the punching force; but at the lower fiber length (3 inches) crimp has absolutely no effect. This is understandable because the presence of crimp in longer fibers would provide a greater probability of causing short- range entanglement of the ratchet type, thus resulting in higher frictional drag. The figure also shows that the webs composed of 6-inch fiber with or without crimp tend to produce higher punching force than their 3-inch counterparts.

Fig. 10(b) shows the interaction of fiber linear density (denier) and length. It can be seen that with finer fibers (3 denier) increase in fiber length has a tendency to show an increase in punching force, but for fiber webs of coarser denier (6 denier) the effect due to fiber length has completely disappeared. However, fiber fineness (denier) has a marked effect on the punching force at both the studied fiber lengths.

The interaction of crimp and linear density is shown in Fig. 10(c). It is clear from this plot that for finer fibers (3 denier) crimp has apparently no effect on the punching force, however, for coarse fiber webs, an increase in crimp shows a discernible increase on the punching force. The effect of fiber fineness is again obvious from a tremendous drop in punching force with increase in fiber linear density, regardless of crimp.

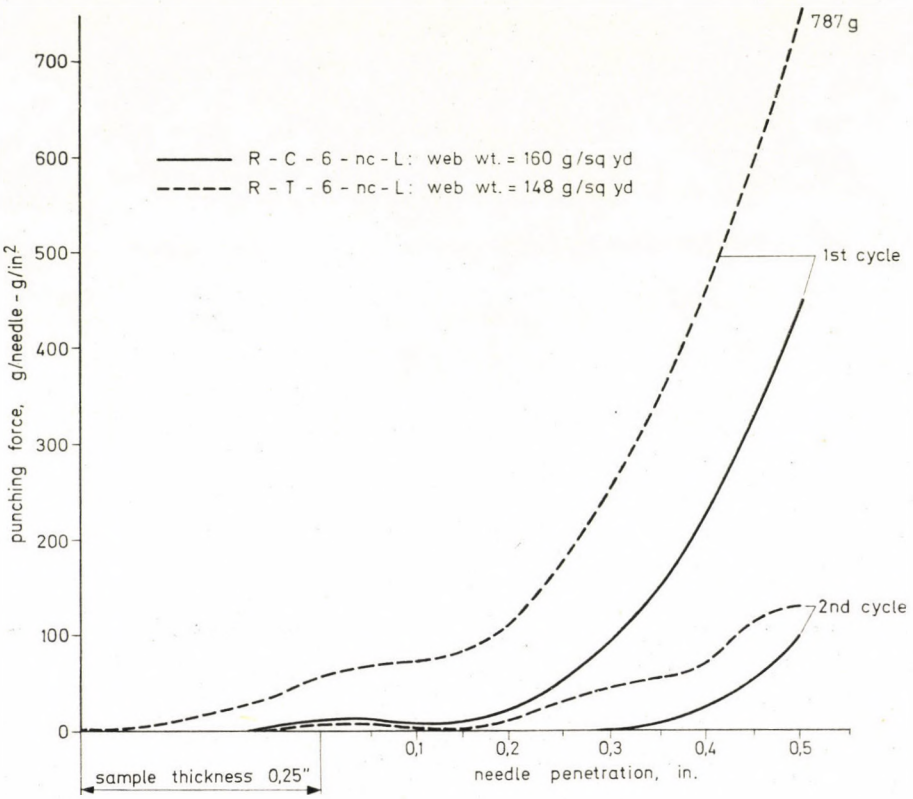


Fig. 9. Effect of fiber cross sectional shape on the needle punching force during 1st and 2nd cycles. (Polyester fibers; — rough, circular, 6 den., no crimp, 6 inches; — rough, trilobal, 6 den. no crimp, 6-inches)

Second cycle. The second-cycle punching force data for all of the samples investigated are given in the fifth column of Table II. Representative punching force — needle penetration curves showing the influence of fiber denier, length, crimp, roughness and cross sectional shape are shown in Figs 3 and 4, and 6 through 9.

The punching load encountered by the punching needle during the second cycle may be regarded as an indirect measure of the efficiency of the needles in transporting the fibers (or fiber segments) and of the degree of reorientation achieved in the web during the first penetration cycle. The statistical analysis of the punching force data for the second cycle by the DANIEL's half-normal plot method revealed that, once again, fiber linear density had a strong and significant effect at the 99% level of probability. In addition, the variables of fiber length, crimp and shape were also found to have the main effect, all significant at the 95% level.

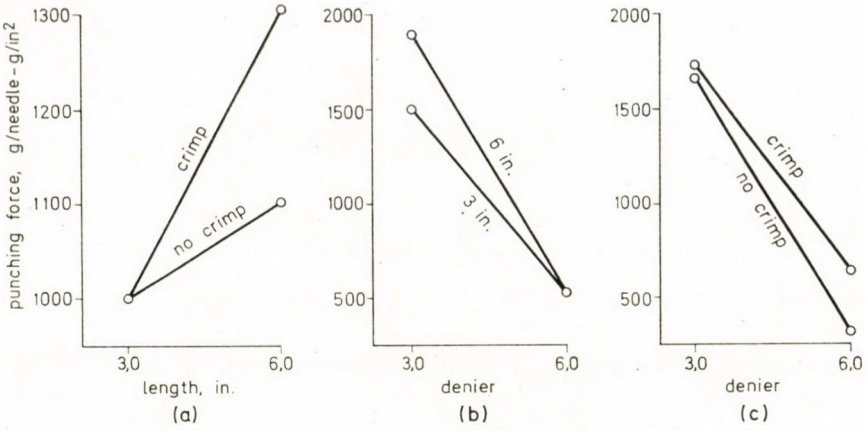


Fig. 10. Influence of various interactions of fiber properties on the needle punching force during 1st cycle; (a) interaction of length and crimp; (b) interaction of linear density (den) and length; (c) interaction of linear density and crimp

It can be seen from Table II and from Figures 3 and 4 that, in general, webs composed of finer fibers (3 denier) exhibit higher residual punching force than their coarse fiber counterparts (6 denier). Interestingly, fiber length seems to have emerged as one of the main factors affecting the punching force in the second cycle; an increase in fiber length produces a decrease in the punching force. This could perhaps be attributed partly to the number of untransferred fibers, during the first cycle, as a result of the differences in the bulk density of webs composed of 3-inch and 6-inch fibers. The latter would, generally, result in a fluffier web, provided all other factors are kept constant. It is also acknowledged that the effect of fiber length is greatly dependent upon specimen size, clamping arrangement and effective area of needling.

The presence of crimp in the fibers results in a moderate but significant increase in puching force of webs in the second cycle. Obviously, the crimped fibers have a greater tendency to recover from small deformations and to revert to a crimped configuration, thereby accommodating internal stresses.

Surprisingly, webs composed of fibers with trilobal cross sections generally result in higher residual punching force than webs composed of fibers with circular cross sections. This is perhaps an indication that fibers with a circular cross section have a greater tendency to pack tightly and to retain their reoriented configuration, making it easy for the needle to penetrate through the hole during the second cycle. This is evident to some extent from the load-penetrations curves (first cycle) for webs composed of fibers with trilobal cross sectional shapes as shown in Figure 4.

Interactions (2nd cycle). Figure 11(a) shows the effect of interaction of crimp and length on punching force during the second cycle. Evidently, at a lower fiber length, crimp has a tendency to increase punching force moderately;

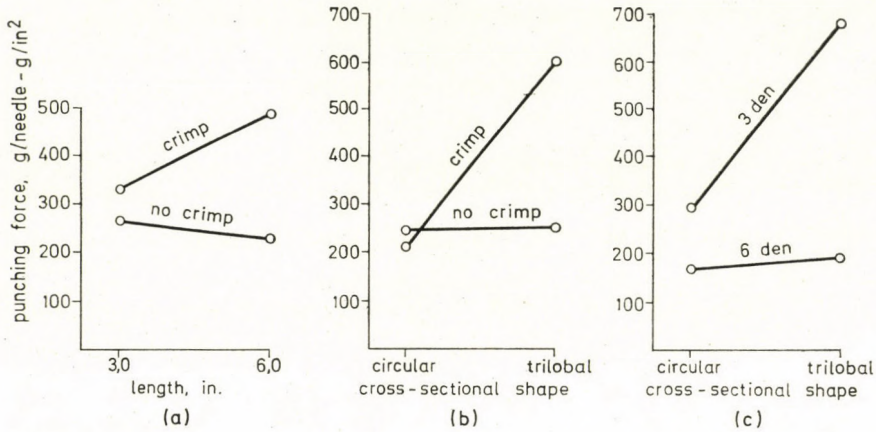


Fig. 11. Influence of interactions of various fiber properties on the needle punching force during 2nd cycle; (a) interaction of length and crimp; (b) interaction of cross sectional shape and crimp; (c) interaction of cross sectional shape and linear density

at a higher fiber length, the effect of crimp is quite pronounced. Moreover, in the case of webs composed of fibers with crimp, an increase in length brings about a marked increase in punching force; while in webs composed of fibers without crimp, the opposite trend is seen. This observation reinforces the importance of crimp in fibers in affecting their needle-punching behavior.

The interaction of crimp and of cross sectional shape of fibers also has a strong and significant effect on the punching force of webs as shown in Figure 11(b). Webs from fibers with a trilobal cross section and crimp have a higher punching force than those from fibers with a circular cross section and crimp. While the absence of crimp obscures the influence due to the cross sectional shape, the behavior of circular fibers *versus* trilobal fibers in affecting needle penetration is not altered, regardless of crimp.

Figure 11(c) shows the effect of the interaction of fiber cross sectional shape and linear density. Here again, webs from fibers with trilobal cross sectional shape, generally, show higher punching force at both fiber linear densities. The influence is greater in webs composed of 3-denier fibers than in webs composed of 6-denier fibers. This observation indicates that fiber geometry plays an important role in affecting the recovery behavior of fibers as well as the needle punching force characteristics of webs.

Punching force ratio (2nd cycle/1st cycle). A proper way of characterizing the recovery behavior of reoriented fibers in the punched holes would be to compare the area under the load-penetration curves for first and second cycles. However, for the sake of simplicity, it is assumed that the ratio of the ultimate punching force (at 1/2-inch penetration in the present investigation) during the second cycle to that of the first cycle gives an approximate measure of the recovery behavior of the fibers. The values of the punching force ratio

calculated for various samples are listed in the last column of Table II (a value of unity would mean complete recovery and inefficient punching; a value of zero would indicate total reorientation of web structure and the most efficient punching). The statistical analysis (by DANIEL's half-normal plot method) of the values for the ratios reveals that fiber surface roughness and crimp significantly influence the recovery characteristics at the 90% level of probability. Webs made from smoother fibers, in general, show consistently higher ratios than webs made from rough-surface fibers. Smoother fibers either have a greater tendency to recover or they experience more fiber-to-needle slippage because of greater fiber-to-fiber cohesion during the first penetration cycle. As would be expected, webs composed of crimped fibers have a tendency to result in higher punching force ratios than webs composed of fibers without crimp. Surprisingly, fiber linear density appears to have an insignificant effect on the punching force ratio indicating little influence on the recovery behavior of reoriented fibers.

Effect of recovery time between punching cycles. As a corollary to the preceding experiments, some measurements were made on webs of samples from the "A" series only, in order to investigate the influence of time of recovery between punching cycles. The "A" series represents fibers with crimp. In this investigation, web samples were needled for three cycles, allowing two minutes of recovery time between each penetration cycle. The punching force ratio of samples tested with recovery time along with the ones obtained in the previous experiments (taken from Table II) are listed in Table III. It is clear from the comparison of the results in column *a* and *b* (Table III) that the recov-

Table III

Punching force ratio

Sample	(a)[1] II/I Cycle	(b)[2] II/I Cycle	(c)[2] III/I Cycle
1A	0,42	0,41	0,27
2A	0,20	0,25	0,15
3A	0,41	0,45	0,32
4A	0,35	0,41	0,37
5A	0,20	0,23	0,17
6A	0,52	0,45	0,32
7A	0,32	0,38	0,26
8A	0,27	0,32	0,25

[1] reproduced from Table II

[2] Calculated from a separate set of experiments where 2 minutes recovery time was allowed between successive cycles

ery time in between two successive cycles tends to cause an increase in the punching force ratio, as would be expected. Furthermore, the reoriented fibers recover very litte after the second penetration cycle, as indicated by nearly similar punching force ratios obtained for the third-to-first cycles (column *c*) to those given in column *b* (2nd-to-1st-cycles). This indicates that after the second cycle the reoriented fibers are very efficiently locked into position. It may also be safe to infer that most of the fiber reorientation and interlocking occur during the first punching cycle which would indicate a high efficiency of the needling process. It is expected that similar behavior would not be observed for the webs made from fibers with no crimp, given the same recovery time between successive cycles. This is presumably due to the fact that fibers with crimp have an inherent tendency to spring back to their original configuration.

3. Conclusions

The results of the present investigation indicate that linear density is the most important fiber property which has a profound influence on the punching force of polyester webs. The effect of surface geometry (roughness and cross sectional shape) is somehow obscured by the other fiber variables. However, punching force is strongly affected by the interactions of crimp and length, linear density and crimp, and linear density and length. These interactions suggest that even though variables such as fiber length and crimp do not appear as main effects, they cannot be ignored in making predictions regarding the generation of punching loads during needling.

Measurements of the punching force in successive cycling experiments indicate the importance of length, crimp, and cross sectional shape, in addition to linear density, in influencing the recovery behavior of reoriented fibers or fiber segments in the web. The magnitude of the ratio of the punching force during the second cycle to the punching force during the first cycle may be used to characterize the degree of fiber reorientation and the needling efficiency.

Acknowledgements

Thanks are due to Dr. Bhuvenesh C. GOSWAMI, Textile Research Institute, and Associate Professor Francis L. SCARDINO, Philadelphia College of Textiles and Science for their help and friendly direction.

The card webs used in this study were processed in the laboratories of the Philadelphia College of Textiles and Science. Thanks are due to Mr. Harold LAMBERT of TRI for fabricating the model and needling apparatus used in the investigation, and to Dr. Ian BROWN and Mr. Arthur COE for preparing the photomicrograph. Professor J. C. WHITWELL of TRI and Princeton University provided valuable advice on the statistical analysis of the data. TRI was further pleased to acknowledge the financial support given to author by the International Research and Exchange Board (New York, N. Y. C.) during his tenure as a TRI Visiting Staff Scientist.

REFERENCES

1. DANIEL, C.: Use of Half-normal Plots in Interpreting Factorial Two-level Experiments, *Technometrics* **1** (1959), 311—341
2. GÄRDMÄRK, L.—MARTENSSON, L.: An Experimental Investigation of Fiber Orientation and some Properties of Needled Felts, *Textile Res. J.*, **36** (1966), 1037—1042
3. HEARLE, J. W. S.—PURDY, A. T.: The Structure of Needle Punched Fabric, *Fiber Science and Technology*, **4** (1971) 81—100
4. HEARLE, J. W. S.—SULTAN, M. A. I.: A Study of Needled Fabrics, Part VI, The Measuremet of Punching Force during Needling, *J. Textile Institute* **59** (1968), 237—242
5. LÜNENSCHLOSS, J.: Effect of Fiber Length, Fiber Fineness, Crimp and Delusterant on the Needle Punching and Needle Felt Properties, *Melliand Textil Internat.* **53** (1972), 144—151
6. MORBY, G. K.—WHITWELL, J. C.: Solution Spinning from a Mixed Polymer System: a Multivariable Study, *Textile Res. J.* **33** (1963), 673—688
7. SCARDINO, F. L.—LYONS, W. J.: Influence of Fiber Geometry on the Mechanical Properties of Assemblies during Processing, *Textile Res. J.* **40** (1970), 559—570

Der Einfluß der Fasergeometrie auf die Kenngrößen der Nadelkraft der Vliese im Verlauf der Nadelverfilzung. Der Verfasser verwendete eine auf ein INSTRON Reißfestigkeitsprüfinstrument montierte kleine Modellnadelfilzmaschine für die Messung der während des Nadelfilzvorganges auftretenden Nadelkräfte. Laut den Forschungsergebnissen beeinflußt die Feinheitszahl der Faser stark die Größe der für das Nadeln der Polyester-Vliese benötigten Nadelkraft, die Länge und die Krümmung der Fasern wirken jedoch kaum oder gar nicht auf den Wert der Nadelkraft ein. Die Wechselwirkung der Krümmung und der Länge, der Feinheit und der Krümmung, schließlich der Feinheit und der Länge beeinflussen jedoch die Nadelkraft in bedeutendem Maße. Die experimentelle Untersuchung und Auswertung der nacheinander folgenden Zyklen, die Messungen der Nadelkraft zeigen, daß neben der Feinheit der Faser die Faserlänge, die Krümmung und die Form des Querschnitts das Rückbildungsverhalten der neugeordneten Fasern ebenfalls beträchtlich beeinflussen.

Примнение нитевой геометрии — в процессе сбиваания иглой — для характеристики усилия стегания ватки. Автор смонтировал на разрывную машину марки Инстрон небольшую стегальную машину для измерения усилий стегания, возникающих во время процесса стегания. На основе результатов исследований номер нити в значительной мере воздействует на величину усилия стегания, необходимую стегания ваток, изготовленных из по?иэфирного волокна, в то же время шероховатость поверхности нити, форма поперечного сечения, длина нити и изв?листость нити очень незначительно или же совершенно не действуют на величины усилия стегания. Однако, взаимодействия между извилистостью и длиной нити, далее тониной и извилистостью и, наконец, тониной и длиной в значительной мере воздействуют на усилие стегания. Экспериментальное исследование следующих друг за другом циклов и их оценка, измерения усилия стегания показали, что наряду с тониной нити в значительной мере воздействуют на поведение обратного перборазования повторно упорядоченных нитей также длина нитей, их извилистость и форма поперечного сечения нитей.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 331—340 (1975)

WIRKUNGSGRAD DER ZAHNRAD-PLANETENGETRIEBE

Z. TERPLÁN*

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. Juni 1974]

Der Grund der Wirkungsgrad-Untersuchung von Zahnrad-Planetengetrieben ist die Analyse der Wirkungsgradgestaltung der sechs Grundtypen, denn alle Planetengetriebe können auf diese sechs Typen zurückgeführt werden. Diese Arbeit gibt eine einfache Zusammenfassung der kompliziert erscheinenden Ergebnisse, die in anderen Arbeiten des Verfassers ausführlich analysiert wurden. Sie beinhaltet drei Formeltypen und fünf Tabellen. Die Ergebnisse werden in den zusammengefaßten kinematischen Nomogrammen der Grundtypen mit der Einzeichnung der Wirkungsgrad-Gerade dargestellt. Die Gerade bezieht sich auf einige konstante Werte des Planetengetriebe-Wirkungsgradfeldes, deren Wirkungsgrad schlechter ist als bei Standgetrieben.

Alle Zahnrad-Planetengetriebe — seien sie noch so kompliziert — werden immer aus den sechs Grundtypen aufgebaut, aber die Grundtypen können auch selbständig einen Antrieb bilden.

Die sechs Grundtypen können nach Art und Gleichzeitigkeit der Zahnradpaar-Eingriffe mit den Abkürzungen **A**, **I**, **AI**, **A** + **I**, **A** + **A** und **I** + **I** bezeichnet werden, wobei **A** auf die Außen- und **I** auf die Inneneingriffe verweist (Bilder 1 und 2).

Die Grundtypen können mit 1 sowie mit 2 Freiheitsgraden funktionieren. Zwischen ihren kinematischen Übersetzungen besteht folgender Zusammenhang [1]:

$$i' = 1 - u + ui'', \tag{1}$$

wobei i die kinematische Übersetzung und u das Zähnezahlverhältnis bedeuten.

Die theoretische Wirkungsrad-Analyse der sechs Grundtypen bei 1- und 2-Freiheitsgrad-Wirkung führt zu den folgenden relativ einfachen Wirkungsgrad-Formeln (s. [1] auf Seite 69):

$$\eta_S^{\pm 1} = \frac{1 - u\,\eta_Z^{\pm 1}}{i(1 - \eta_Z^{\pm 1}) + (1 - u)\eta_Z^{\pm 1}}, \tag{2}$$

$$\eta_4^{\pm 1} = \frac{1 - i - u}{(1 - i)\eta_Z^{\pm 1} - u}, \tag{3}$$

$$\eta_2^{\pm 1} = \frac{i}{1 - (1 - i)\eta_Z^{\pm 1}}. \tag{4}$$

* Prof. Dr. Z. TERPLÁN, Szabadságharc u. 12. H—3529 Miskolc, Ungarn

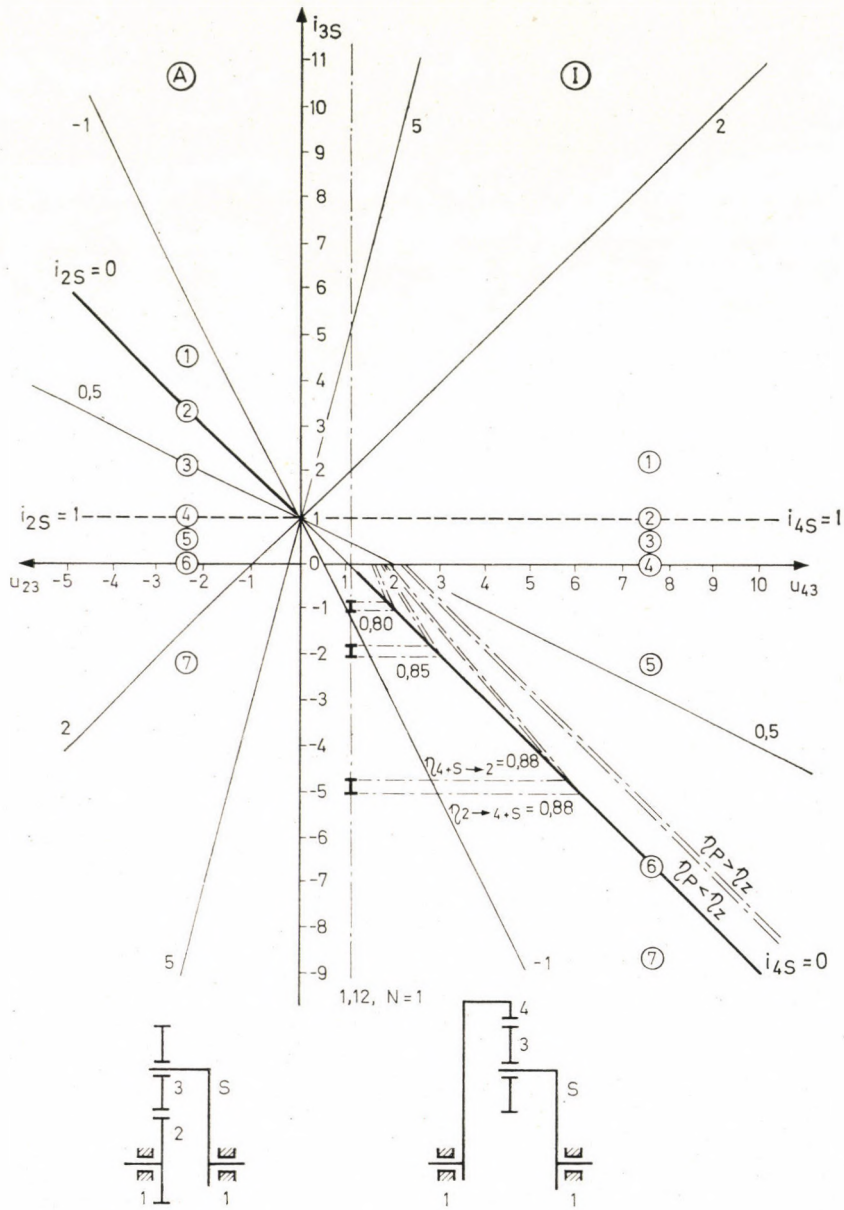

i3S
A
I
-1
5
2
i2S = 0
0,5
i2S = 1
i4S = 1
u23
u43
0,80
0,85
2
0,5
η4•S→2=0,88
η2→4•S = 0,88
ηP>ηz
ηP<ηz
i4S = 0
5
-1
1,12, N = 1
3
S
2
1
4

Fig. 1

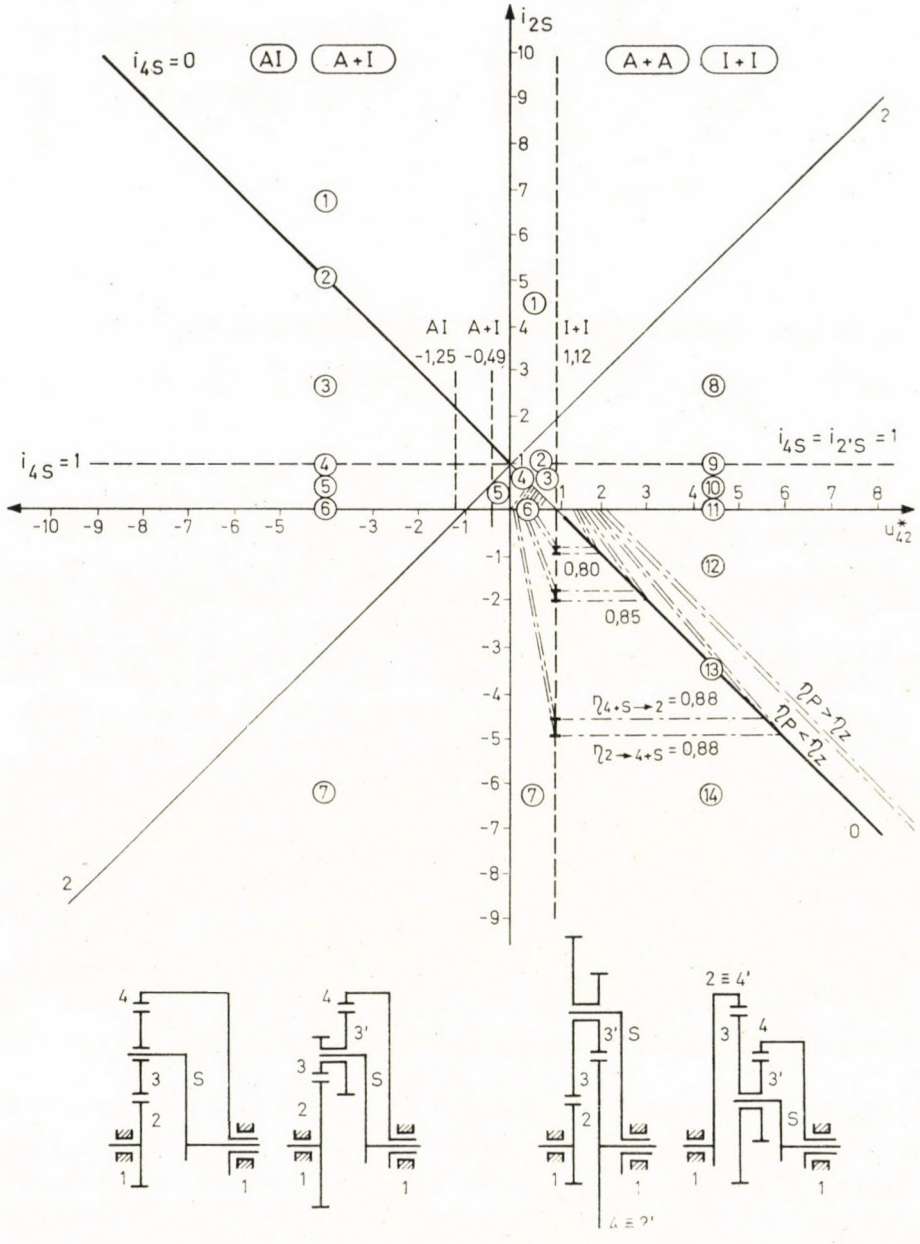

i2S
i4S = 0
AI
A+I
A+A
I+I
AI A+I I+I
-1,25 -0,49 1,12
i4S = 1
i4S = i2'S = 1
u*42
0,80
0,85
η4+S→2 = 0,88
η2→4+S = 0,88
ηP > ηz
ηP < ηz
0
2
S
4 ≡ 2'
2 ≡ 4'

Fig. 2

Tafel I

Typ **A**: $u \rightarrow u_{32}$; $i \rightarrow i_{2S}$

Lfd. Nr der Bemerkung	Leistungsfluß	Vorzeichen des Potenzexponenten von		Nr der Formel
		η_P	η_Z	
①	2+S→3	+	−	[3]
	3→2+S	−	+	
②	3→S	−	+	[4]
$i \rightarrow i_{3S}$	S→3	+	−	
③	2+3→S	+	−	[2]
$\omega_3 > \omega_S$	S→2+3	−	+	
④	2+3→S	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	S→2+3			
⑤	2+3→S	+	+	[2]
$\omega_3 < \omega_S$	S→2+3	−	−	
⑥	2→S	−	+	[3]
	S→2	+	−	
⑦	3+S→2	+	−	
	2→3+S	−	+	

Die ausführliche Untersuchungen finden wir in [1, 2]. Bei der Wirkungsgrad-Untersuchung nehmen wir an, daß die Lager- und Zahneingriffverluste der Planetengetriebe unabhängig von der Wirkung der Planetengetriebe sind. In den Formeln (2)—(4) ist i die eine kinematische Übersetzung, u das charakteristische Zähnezahlverhältnis, η_Z der Wirkungsgrad der Zahnwirkung. Auf Grund der Tafeln I—V kann der Wirkungsgrad des Planetengetriebes für alle Leistungsflüsse der Grundtypen (also für 1 und 2 Freiheitsgrade gleichzeitig) aufgeschrieben werden. Die Serienzahlen der Tafeln beziehen sich auf die Nomogrammfelder der Bilder 1 und 2. In den Formeln (2)—(4) bedeutet der untere Index des Planetengetriebe-Wirkungsgrades die Gliedbezeichnung, die im Leistungsfluß *allein* steht.

Nehmen wir ein Beispiel aus den Tafeln. Es sei, daß wir auf den Wirkungsgrad des summierenden Leistungsflusses $4 + S \rightarrow 2$ des Grundtyps **A** + **A** neugierig sind. Weil in diesem Falle nur das mit 2 bezeichnete Glied (das Abtriebsglied) *allein* steht, kann nur die Formel (4) angewendet werden. Das Vorzeichen der Exponenten des Planetengegriebes $\eta_{4+S\rightarrow 2} = \eta_P$ und des Zahnradgetriebe-Wirkungsgrades η_Z kann aus Tafel IV abgelesen werden.

Table II

Typ **I**: $u \to u_{43}$; $i \to i_{4S}$

Lfd. Nr und Bemerkung	Leistungsfluß	Vorzeichen des Potenzexponenten von		Nr der Formel
		η_P	η_Z	
①	3+S→4	+	−	[4]
$\omega_3 > \omega_S$	4→3+S	−	+	
②	3+S→4	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	4→3+S			
③	3+S→4	+	+	
$\omega_3 < \omega_S$	4→3+S	−	−	[4]
④	4→S	−	−	
	S→4	+	+	
⑤	3+4→S	+	−	[2]
	S→3+4	−	+	
⑥	3→S	−	+	[4]
$i \to i_{3S}$	S→3	+	−	
⑦	4+S→3	+	−	[3]
	3→4+S	−	+	

Wissen wir außerdem z. B., daß $u_{42}^* = z_4/z_2 > 1$ (wobei z die Zähnezahl ist), dann ist unter der Serienzahl ⑭ der Exponent von η_P positiv und jener von η_Z negativ. Danach lautet die richtige Formel:

$$\eta_P = \eta_{4+S\to 2} = \frac{i_{2S}}{1 - (1 - i_{2S})/\eta_Z} \,. \tag{5}$$

Aus den ausführlichen Untersuchungen [1] kann folgendes zusammengefaßt werden: in den Grundtypen **A**, **AI** und **A** + **I** ist

$$\eta_P \geq \eta_Z,$$

n den Grundtypen **I**, **A** + **A** und **I** + **I** bei bestimmten Leitungsflüssen kann auch

$$\eta_P < \eta_Z$$

vorkommen (Bilder 1 und 2).

Bilder 1 und 2 wurden nach Formel (1) gefertigt. Die schnelle Skizzierung wird dadurch erleichtert, daß $i' = 1$ immer eine kupplungähnliche Wirkung

Tafel III

Typen **AI** *und* **A + I**: $u \to u_{42}$ *oder* u_{42}^*; $i \to i_{2S}$

Lfd. Nr und Bemerkung	Leistungsfluß	Vorzeichen des Potenzexponenten von		Nr der Formel
		η_P	η_Z	
①	4+S→2	+	−	[4]
	2→4+S	−	+	
②	2→S	−	+	
	S→2	+	−	
③	2+4→S	+	+	[2]
$\omega_3 < \omega_S$	S→2+4	−	−	
④	2+4→S	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	S→2+4			
⑤	2+4→S	+	−	[2]
$\omega_3 > \omega_S$	S→2+4	−	+	
⑥	4→S	−	+	[4]
$i \to i_{4S}$	S→4	+	−	
⑦	2+S→4	+	−	[3]
	4→2+S	−	+	

bedeutet (waagerechte gestrichelte Linie). $u = 1$ würde dagegen eine kupplungähnliche Ausbildung bedeuten, wenn also $i' = i''$ ist (nach der senkrechten gestrichelten Linie, die kein Planetengetriebe ergeben würde). Die Funktionslinie mit 1 Freiheitsgrad (dicke Linie) kann auch leicht eingezeichnet werden, weil $i'' = 0$ ist, und nach (1) $i' = 1 - u$ ist. Damit ist das Vorzeichen des Feldes i'' schon entschieden. Die Geraden $i'' =$ konst. können auch leicht eingezeichnet werden, gerade auf Grund $u = 1$ und $i' = i''$, bzw. $u = 0$ und $i' = 1$.

Auf Bildern 1 und 2 ist vom Gesichtspunkt der Wirkungsgrad-Untersuchung nur das Feld $\eta_P < \eta_Z$ interessant. Aus den Formeln (2)—(4) ergibt sich im Fall von $\eta_P =$ konst. für $i = f(u)$ immer eine lineare Funktion, die also durch eine Gerade dargestellt werden kann. Bei den Grundtypen **I** (Abb. 1) bzw. **A + A** und **I + I** (Bild 2) erhalten wir die Bereichsgrenze $\eta_P = \eta_Z$ immer aus Formel (2).

Wählen wir als Beispiel wieder den Grundtyp **A + A**. Mit der Wahl $\eta_Z = 90\%$ im Falle von $u_{42}^* > 1$ können aus ⑫ der Tafel IV folgende zwei

Tafel IV

Typ **A + A** $u \to u^*_{42}$; $i \to i_{2S}$; $4 \equiv 2'$

Lfd. Nr und Bemerkung	Leistungsfluß	Vorzeichen des Potenzexponenten von		Nr der Formel
		η_P	η_Z	
$u^*_{42} < 1$				
(1)	4+S→2	+	−	[4]
$\omega_3 < \omega_S$	2→4+S	−	+	
(2)	4+S→2	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	2→4+S			
(3)	4+S→2	+	+	
$\omega_3 > \omega_S$	2→4+S	−	−	[4]
(4)	2→S	−	−	
	S→2	+	+	
(5)	2+4→S	+	−	[2]
	S→2+4	−	+	
(6)	4→S	−	+	[4]
$i \to i_{4S}$	S→4	+	−	
(7)	2+S→4	+	−	[3]
	4→2+S	−	+	
$u^*_{42} > 1$				
(8)	2+S→4	+	−	[3]
$\omega_3 < \omega_S$	4→2+S	−	+	
(9)	2+S→4	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	4→2+S			
(10)	2+S→4	+	+	[3]
$\omega_3 > \omega_S$	4→2+S	−	−	
(11)	4→S	−	−	[4]
$i \to i_{4S}$	S→4	+	+	
(12)	2+4→S	+	+	[2]
	S→2+4	−	−	
(13)	2→S	−	+	
	S→2	+	−	
(14)	4+S→2	+	−	[4]
	2→4+S	−	+	

Tafel V

Typ **I** + **I** : $u \rightarrow u_{42}^{*}$; $i \rightarrow i_{2S} = i_{4,'S}$; $2 \equiv 4'$

Lfd. Nr und Bemerkung	Leistungsfluß	Vorzeichen des Potenzexponenten von		Nr der Formel
		η_P	η_Z	
$u_{42}^{*} < 1$				
①	4+S→2	+	−	[4]
$\omega_3 > \omega_S$	2→4+S	−	+	
②	4+S→2	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	2→4+S			
③	4+S→2	+	+	
$\omega_3 < \omega_S$	2→4+S	−	−	[4]
④	2→S	−	−	
	S→2	+	+	
⑤	2+4→S	+	−	[2]
	S→2+4	−	+	
⑥	4→S	−	+	[4]
$i \rightarrow i_{4S}$	S→4	+	−	
⑦	2+S→4	+	−	[3]
	4→2+S	−	+	
$u_{42}^{*} > 1$				
⑧	2+S→4	+	−	[3]
$\omega_3 > \omega_S$	4→2+S	−	+	
⑨	2+S→4	100%		
$\omega_3 = \omega_S$	4→2+S			
⑩	2+S→4	+	+	[3]
$\omega_3 < \omega_S$	4→2+S	−	−	
⑪	4→S	−	−	[4]
$i \rightarrow i_{4S}$	S→4	+	+	
⑫	2+4→S	+	+	[2]
	S→2+4	−	−	
⑬	2→S	−	+	
	S→2	+	−	
⑭	4+S→2	+	−	[4]
	2→4+S	−	+	

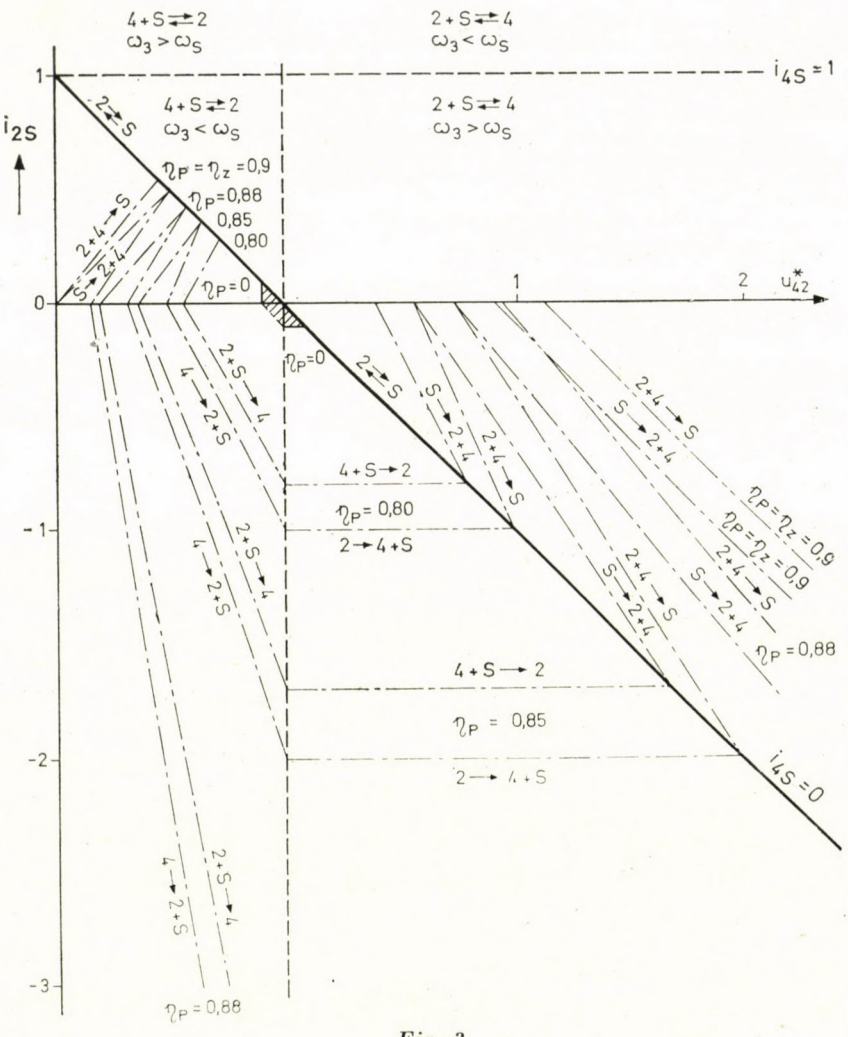


Fig. 3

Gleichungen aufgeschrieben werden:

$$\eta_{2+4\to S} = \frac{1 - u^*_{42}\eta_Z}{i_{2S}(1-\eta_Z) + (1-u^*_{42})\eta_Z} = \frac{1 - 0{,}9u^*_{42}}{0{,}1i_{2S} + 0{,}9 - 0{,}9u^*_{42}}, \tag{6}$$

$$\eta_{S\to 2+4} = \frac{1 - u^*_{42} - (1-\eta_Z)i_{2S}}{\eta_Z - u^*_{42}} = \frac{1 - u^*_{42} - 0{,}1i_{2S}}{0{,}9 - u^*_{42}}. \tag{7}$$

Unter Annahme von $\eta_{2+4\to S} = \eta_Z$ und $\eta_{S\to 2+4} = \eta_Z$ ergibt sich aus (6):

$$i_{2S} = 2{,}11 - u_{42}^* ;$$

und aus (7):

$$i_{2S} = 1{,}9 - u_{42}^* .$$

Beide Funktionen sind Geraden mit 45° und bedeuten mit $i_{2S} = 1 - u_{42}^*$ (dicke Linie) parallele Geraden (punktgestrichelte Linie).

Auf gleiche Weise erhalten wir die Grenzen in der Zone $0 \leq u_{42}^* \leq 1$ (Bild 3), die auf Bild 2 wegen der Überfüllung kaum ersichtlich ist. Die Gleichungen der Abgrenzungsgeraden sind, wie folgt:

$$i_{2S} = 1{,}11 u_{42}^* \text{ und } i_{2S} = 0{,}9 u_{42}^* ,$$

Bild 3 — das also die Vergrößerung eines Feldes des Bildes 2 darstellt — eignet sich außer den Abgrenzungsgeraden $\eta_P = \eta_Z$ auch zur Darstellenung der Wirkungsgrad-Geraden $\eta_P = 0$, $\eta_P = 0{,}8$, $\eta_P = 0{,}85$ und $\eta_P = 0{,}88$.

Bild 3 kann zugleich für den Grundtyp **I + I** verwendet werden, nur muß nach Bild $2, 2 \equiv 4'$ verstanden werden. Interessant ist, daß die Untersuchungen des Bildes 3 für $\eta_Z = 90\%$ gleiche Geraden ergeben, wie das Bild 1 für den Grundtyp **I**, nur statt Index 2 muß 3 geschrieben werden.

Bild 3 (oder auf Grund derselben Bilder 1 und 2) gibt Aufschluß über die „gefährlicheren" Zonen der Planetengetriebe, bzw. über die Umgehung derselben. Wenn man z. B. im Fall des Grundtyps **A + A** anstelle der negativen Werte positive einsetzt, kann i_{2S} trotzdem realisiert werden (in einigen Fällen mit negativen Vorzeichen), und man gelangt in die günstige Zone $\eta_P > \eta_Z$.

SCHRIFTTUM

1. TERPLÁN, Z.: Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
2. КОЖЕВНИКОВ. С. Н.: Теория механизмов и машин. Машгиз. Киев 1949.

On the Efficiency of Planetary Gear Drives. The base of the examination of the efficiency of the planetary gear drive can be reduced to the analysis of *six* basic gear types. The present paper gives a simple summary of the apparently complicated results of the author, published elsewhere in detail: three types of formulae and five tables; then the results are presented on the combined nomograms of the basic types, by tracing the straight referring to some constant values of planetary gear efficiency which is worse than the gear wheel-like operation.

Кпд зубчатых планетрных механизмов. Основной исследования кпд зубчатых планетарных механизмов является анализ формирования кпд шести основных типов, которые можно свести из каждого планетарного механизма. Из анализа автора, детально представленного в других его работах, в данной работе дается простое обобщение кажущихся сложными зависимостей, а именно три различных типа формул и пять таблиц; после чего полученные результаты демонстрируется на объединенных кинематических номограммах основных типов с указанием прямых, касающихся нескольких постоянных значений поля кпд планетарного механизма, который хуже кпд при работе в виде зубчатого колеса.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 341—359 (1975)

AXISYMMETRICALLY LOADED PARABOLOID SHELLS OF REVOLUTION ON STAR-POLYGON BASE

P. CSONKA*

DR. OF TECHN. SCI.

[Manuscript received October, 1970]

The paper deals with the determination of the membrane forces in shells erected over a star-polygonal base, loaded by axisymmetrically distributed continuous system of vertical forces, as dead load and uniformly distributed snow load. As an approximate solution of the problem, author establishes the stress function by a linear combination of three auxiliary functions. All these functions are associated with axisymmetrically distributed vertical load systems that exactly satisfy the edge conditions of the problem. For the case of dead load, the paper presents tables containing the expedient values for the unknown coefficients of the linear combination. For uniformly distributed snow load, the exact solution may be found by simple closed formulae.

1. Introduction

The edge arches of paraboloid shells of revolution constructed over a regular polygon base, are, in general, of relatively low rise which is, for several reasons, disadvantageous. This inconvenience may be eliminated by selecting a regular polygon-like base figure with concave curved sides instead of a regular polygon.

Regular polygon-like base figures with concave curved sides — the so-called *star-polygons* [1] — have beside architectural advantages also benefits in the calculation technique. This advantage, as well as the interesting architectural appearance of the paraboloid shells of revolution based on a star-polygon (Fig. 1), account for the presentation of a calculation method suitable for the statical analysis of such types of shells, i.e., *star-shells*.

2. Assumptions

In the following discussion it is assumed that at the edge of the shell a circumferential edge beam is constructed which is propped along its full length either by a wall or a dense system of columns. In the absence of such a support the circular edge beam should be replaced by arches stressed by ties.

* Prof. Dr. P. Csonka, Bartók B. út 31, H-1114 Budapest, Hungary

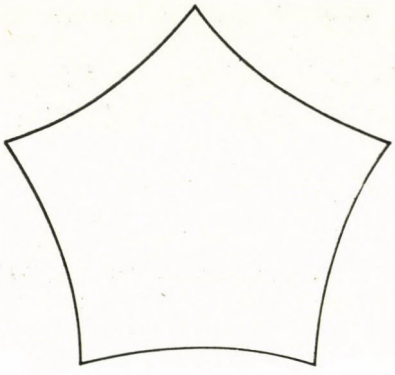


Fig. 1. Five-sided star-polygon

The calculations are based on the usual assumptions of the membrane theory of shells. The effect of constraints due to the deformations generated at the joint of the shell wall and edge beam, disturbing the stress pattern in the shell, are left out of consideration.

As loads attacking the shell, only a continuously distributed system of vertical forces, arranged axisymmetrically, are taken into consideration.

3. Basic concepts

The equation of the *star-polygon* having n sides ($n = 3, 4, 5, \ldots$) is in the polar system of co-ordinates $0(r, \varphi)$

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi = 0\,, \tag{1}$$

and that of the middle surface of the *star-shell* constructed over a star-polygon with n sides as a base, is in the cylindrical system of co-ordinates $0(r, \varphi, z)$

$$z = h\,\frac{r^2}{R^2}\,. \tag{2}$$

In the above formulae R designates the radius vector of the corners of the middle surface of the shell, and h the altitude of the shell.

The stress function $F = F(r, \varphi)$ of the shells to be investigated, has to satisfy the Pucher differential equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{R^2}{2h}g = 0\,. \tag{3}$$

This equation might be written in explicit form with respect to the load function g:

$$g = -\frac{2h}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) \equiv -\frac{2h}{R^2}\Delta F. \tag{4}$$

In the above formulae g denotes the specific value of the distributed load acting on the shell, related to the unit area of the *base*.

The stress function $F = F(r, \varphi)$ should, besides the differential equation (3) of the problem also satisfy the boundary condition expressing the particular type of support of the shell. This condition may be expressed by the equation

$$F_{\text{edge}} = 0, \tag{5}$$

for shells continuously supported on a wall [2] and by the equation

$$F_{\text{edge}} \cong 0 \tag{6}$$

for an edge beam supported on vertical columns.

Should the condition (5) or (6) be fulfilled, so the edge beam of the shell would be subjected to none or only insignificant bending and torsional moments.

The stress function of the shell to be investigated being known, the *reduced* stress resultants of the shell in the radial and arc directions may be calculated with the aid of the following formulae [3]:

$$\begin{aligned} n_r &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ n_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \\ n_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

4. Auxiliary functions

The solution to the set problem cannot be expressed in a closed form in case of an arbitrary axisymmetrical load, wherefore, instead of the exact solution, an approximate solution should be selected. To this end, three auxiliary functions are introduced to all of which, as to stress functions, an axisymmetrically distributed vertical load system can be co-ordinated, each of which satisfies also the boundary condition (5).

4.1. *The first auxiliary function*

For the first auxiliary function the stress function known from the Ref. [1] multiplied with $1/g_0$ is chosen. Thus, the first auxiliary function is:

$$F^{\mathrm{I}} = -\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right). \tag{8}$$

To the above function, as stress function, according to (2), the following reduced stress resultants are co-ordinated:

$$\begin{aligned} n_r^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^4}{4h}\left[1-(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right], \\ n_{r\varphi}^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^2}{4h}(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\sin n\varphi, \\ n_{\varphi}^{\mathrm{I}} &= -\frac{R^2}{4h}\left[1+(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

The load function to be co-ordinated to the function (8), as stress function, according to formula (4), is

$$g^{\mathrm{I}} = 1, \tag{10}$$

i.e., of constant value. Its diagram is to be seen in Fig. 3.

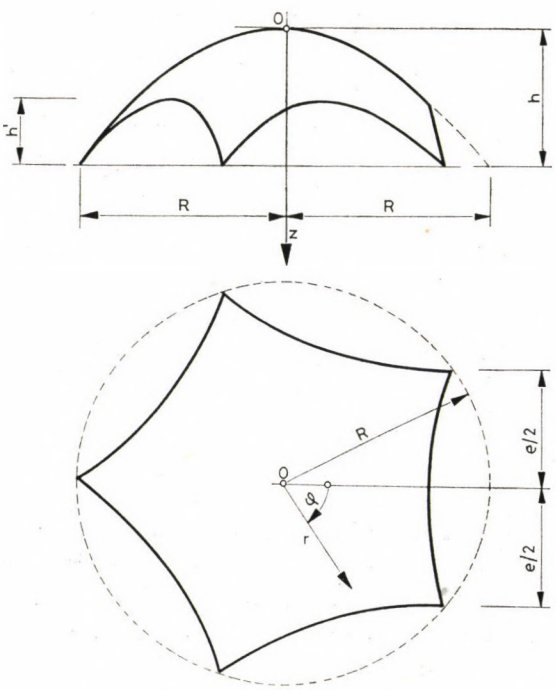


Fig. 2. System of co-ordinates $0(r, \varphi, z)$

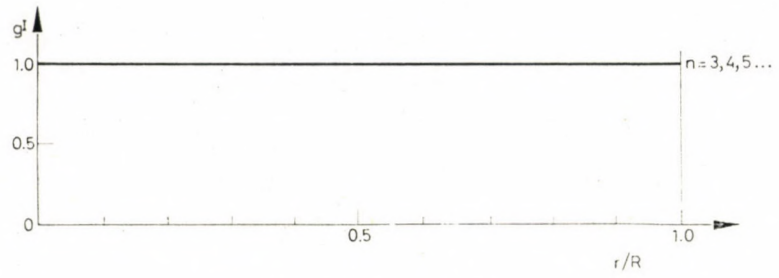


Fig. 3. Diagram of load system g^1

4.2. *The second auxiliary function*

The second auxiliary function is produced by multiplying the first auxiliary function with the expression

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\,.$$

Thus,

$$F^{II}=-\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right).$$

Performing the multiplication, yields:

$$F^{II}=-\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^2-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\cos^2 n\varphi\right].$$

Hence, by making use of the relationship

$$\cos^2 n\varphi=\frac{1+\cos 2n\varphi}{2}\,,$$

the function

$$F^{II}=-\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^2-\frac{2}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}(1+\cos 2n\varphi)\right] \qquad (11)$$

is obtained.

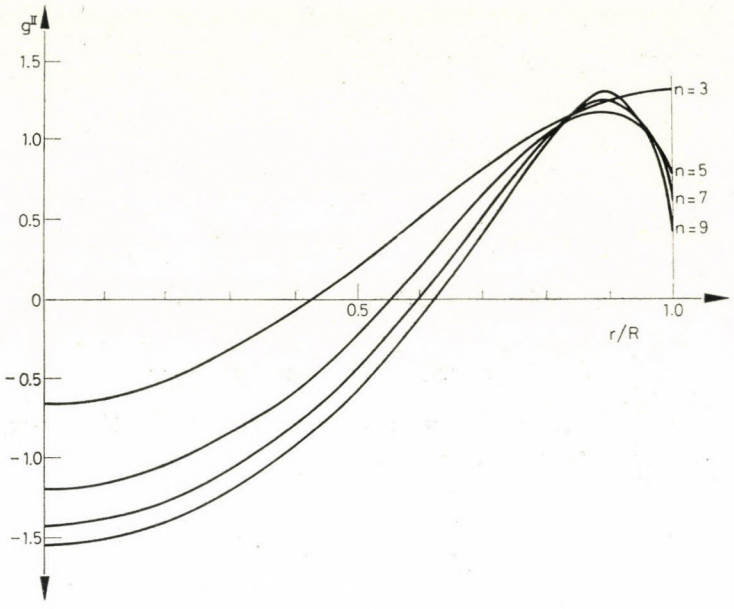


Fig. 4. Diagram of load system g^{II}

Selecting this function as stress function, and determining the reduced stress resultants n_r^{II}, $n_{r\varphi}^{II}$, n_φ^{II} with the aid of formulae (7), it is found that

$$n_r^{II} = -\frac{R^2}{2h}\left(-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{n}\cdot\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\cos 2n\varphi\right),$$
$$n_{r\varphi}^{II} = -\frac{R^2}{2h}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\sin 2n\varphi\,, \tag{12}$$
$$n_\varphi^{II} = -\frac{R^2}{2h}\left(-\frac{n-2}{n} + 3\frac{r^2}{R^2} - \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\cos 2n\varphi\right).$$

The load system corresponding to the second auxiliary function is, according to formula (4), the following:

$$g^{II} = 2\left(-\frac{n-2}{n} + 2\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}}\right). \tag{13}$$

Table I

Value of the auxiliary function g^{II}

r/R	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
0	−0,667	−1,000	−1,200	−1,333	−1,429	−1,500	−1,556	−1,600
0,05	−0,657	−0,990	−1,190	−1,323	−1,419	−1,490	−1,546	−1,590
0,10	−0,627	−0,960	−1,160	−1,293	−1,389	−1,460	−1,516	−1,560
0,15	−0,578	−0,910	−1,110	−1,243	−1,339	−1,410	−1,466	−1,510
0,20	−0,510	−0,840	−1,040	−1,173	−1,269	−1,340	−1,396	−1,440
0,25	−0,424	−0,750	−0,950	−1,083	−1,179	−1,250	−1,306	−1,350
0,30	−0,323	−0,641	−0,840	−0,973	−1,069	−1,140	−1,196	−1,240
0,35	−0,207	−0,514	−0,710	−0,843	−0,939	−1,010	−1,066	−1,110
0,40	−0,078	−0,368	−0,561	−0,694	−0,789	−0,860	−0,916	−0,960
0,45	0,061	−0,207	−0,393	−0,524	−0,619	−0,690	−0,746	−0,790
0,50	0,208	−0,031	−0,208	−0,335	−0,429	−0,500	−0,556	−0,600
0,55	0,360	0,155	−0,007	−0,128	−0,220	−0,290	−0,346	−0,390
0,60	0,514	0,347	0,206	0,095	0,007	−0,062	−0,116	−0,160
0,65	0,666	0,539	0,426	0,330	0,250	0,185	0,132	0,089
0,70	0,813	0,725	0,645	0,570	0,504	0,446	0,398	0,357
0,75	0,950	0,894	0,850	0,804	0,758	0,714	0,674	0,639
0,80	1,074	1,036	1,024	1,012	0,994	0,972	0,948	0,924
0,85	1,179	1,136	1,145	1,163	1,177	1,184	1,186	1,183
0,90	1,261	1,178	1,179	1,209	1,247	1,282	1,314	1,340
0,95	1,314	1,140	1,083	1,079	1,101	1,135	1,174	1,216
1,00	1,333	1,000	0,800	0,667	0,571	0,500	0,444	0,400

This system of load is also of axisymmetrical arrangement. Its diagram, for star-shells of different side numbers is to be seen in Fig. 4. The values of the ordinates are given in Table I.

4.3. *The third auxiliary function*

The third auxiliary function is produced by multiplying the first auxiliary function with the expressions

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi+\frac{2\pi}{3n}\right)=$$

$$=-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)$$

and

$$-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\left(\varphi-\frac{2\pi}{3n}\right)=$$

$$=-\frac{n-2}{2}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right),$$

which yields:

$$F^{III}=-\frac{R^4}{8h}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right)\times$$

$$\times\left[-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\left(-\frac{1}{2}\cos n\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\varphi\right)\right].$$

Performing the multiplication, we obtain:

$$F^{III}=-\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^3-\frac{3}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^3}\cdot\frac{r^{3n}}{R^{3n}}(\cos^3 n\varphi-3\cos n\varphi\cdot\sin^2 n\varphi)\right].$$

However,

$$\cos^3 n\varphi-3\cos n\varphi\cdot\sin^2 n\varphi=\cos 3n\varphi,$$

so that

$$F^{III}=-\frac{R^4}{8h}\left[\left(-\frac{n-2}{n}+\frac{r^2}{R^2}\right)^3-\frac{3}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\left(-\frac{n-2}{2}+\frac{r^2}{R^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^3}\cdot\frac{r^{3n}}{R^{3n}}\cos 3n\varphi\right].$$

To the auxiliary function F^{III}, as stress function, according to (7), the following stress resultants are attached:

$$n_r^{III} = -\frac{3R^2}{4h}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 2\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} + \frac{n-2}{n^2}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}} + \frac{1-3n}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\cos 3n\varphi\right],$$
$$n_{r\varphi}^{III} = -\frac{3R^2}{4h}\cdot\frac{3n-1}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\sin 3n\varphi\,, \tag{15}$$
$$n_\varphi^{III} = -\frac{3R^2}{4h}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 6\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + \frac{5r^4}{R^4} + \right.$$
$$+ \frac{(n-2)(2n-1)}{n^2}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\cdot\frac{r^{2n}}{R^{2n}} -$$
$$\left. - \frac{1-3n}{n^2}\cdot\frac{r^{3n-2}}{R^{3n-2}}\cos 3n\varphi\right].$$

To the auxiliary function F^{III}, according to formula (4), the following load system may be co-ordinated:

$$g^{III} = 3\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 - 4\frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^2}{R^2} + 3\frac{r^4}{R^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{n-2}{n}\cdot\frac{r^{2n-2}}{R^{2n-2}} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{r^{2n}}{R^{2n}}\right]. \tag{16}$$

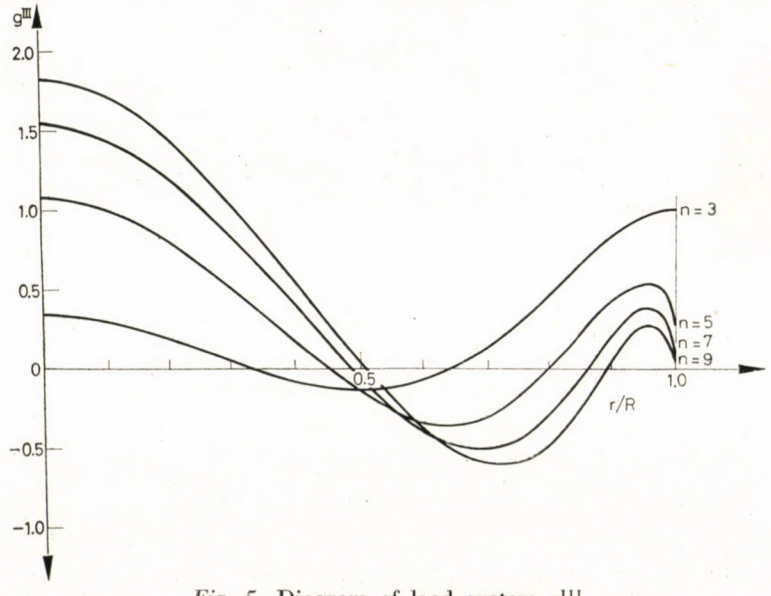


Fig. 5. Diagram of load system g^{III}

Table II

Value of the auxiliary function g^{III}

r/R	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
0	0,333	0,750	1,080	1,333	1,531	1,688	1,815	1,920
0,05	0,323	0,735	1,062	1,313	1,509	1,665	1,792	1,896
0,10	0,294	0,691	1,009	1,254	1,446	1,598	1,722	1,825
0,15	0,248	0,620	0,923	1,158	1,342	1,490	1,609	1,709
0,20	0,189	0,524	0,806	1,028	1,202	1,342	1,456	1,550
0,25	0,121	0,410	0,665	0,868	1,030	1,160	1,267	1,355
0,30	0,050	0,284	0,505	0,686	0,832	0,950	1,048	1,129
0,35	−0,016	0,152	0,333	0,488	0,616	0,720	0,807	0,879
0,40	−0,073	0,023	0,159	0,284	0,390	0,478	0,552	0,614
0,45	−0,111	−0,091	−0,007	0,083	0,164	0,234	0,294	0,345
0,50	−0,125	−0,182	−0,155	−0,103	−0,049	0,000	0,044	0,083
0,55	−1,009	−0,239	−0,270	−0,261	−0,238	−0,211	−0,185	−0,160
0,60	−0,059	−0,252	−0,341	−0,377	−0,387	−0,385	−0,379	−0,369
0,65	0,026	−0,215	−0,356	−0,436	−0,481	−0,507	−0,521	−0,529
0,70	0,147	−0,123	−0,305	−0,426	−0,505	−0,559	−0,596	−0,622
0,75	0,298	0,020	−0,185	−0,336	−0,445	−0,525	−0,585	−0,630
0,80	0,471	0,203	−0,003	−0,166	−0,294	−0,394	−0,473	−0,536
0,85	0,651	0,401	0,216	0,064	−0,062	−0,168	−0,256	−0,330
0,90	0,820	0,574	0,421	0,302	0,201	0,114	0,036	−0,032
0,95	0,948	0,658	0,520	0,435	0,372	0.322	0,278	0,239
1,00	1,000	0,563	0,360	0,250	0,184	0,141	0,111	0,090

This load system is axisymmetrical, its diagram is, for star-shells of different side numbers, to be seen in Fig. 5. The data for the ordinates of the load function might be read off from Table II.

5. The general solution to the problem

The required stress function of the problem can be produced approximately, by making use of the functions presented in Chapter 4, in the followng form:

$$F^* = c_1 F^{I} + c_2 F^{II} + c_3 F^{III}. \tag{17}$$

In this formula c_1, c_2, c_3 denote unknown coefficients. Their values should be selected so that the load system

$$g^* = c_1 g^{I} + c_2 g^{II} + c_3 g^{III}, \tag{18}$$

consistent with the approximate stress function F^*, should not differ significantly from the actual one, i.e., from $g = g(r)$.

The above requirement may be fulfilled in the simplest way be *collocation*. For the loci of the collocation three adequate circles with $r = \text{const.}$ are selected, and there it should be prescribed that along these circles the following condition should be fulfilled:

$$g^* = g. \tag{19}$$

Thus, three linear equations are obtained. From these, the coefficients c_1, c_2 and c_3 can be determined.

For determining the values of the coefficients c_1, c_2, c_3, also the Ritz—Galerkin procedure, commonly known, might be conveniently applied. This, in this case, calls for satisfying the condition

$$\int_0^R (g^* - g)^2 \mathrm{d}r = \min !$$

This requirement will obviously be fulfilled in the case, where

$$\begin{aligned} \int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{I}} \mathrm{d}r &= 0 , \\ \int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{II}} \mathrm{d}r &= 0 , \\ \int_0^R (g^* - g)^2 g^{\mathrm{III}} \mathrm{d}r &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

The most convenient values of the coefficients c_1, c_2, c_3 can be obtained from these three linear equations. The values of the integral expressions may conveniently be calculated by numerical methods.

6. The case of dead load

When the thickness of the shell wall is constant and its specific weight p_0, related to the unit area of the *middle surface*, is also constant, so the value of the dead load related to the unit area of the *base surface* is:

$$g = p_0 \sqrt{1 + (dz/dr)^2}.$$

By making use of the relationship

$$\frac{dz}{dr} = 2 \frac{h}{R} \cdot \frac{r}{R},$$

this load value can be expressed by the following formula:

$$g = p_0 \sqrt{1 + 4 \frac{h^2}{R^2} \cdot \frac{r^2}{R^2}} . \tag{21}$$

Table III

Values of the coefficients c_1, c_2, c_3 in case of star-shells with sides $n = 3$ and $n = 4$

h/R	$n = 3$			$n = 4$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0225	0,0438	0,0265	1,0328	0,0471	0,0237
0,30	1,0322	0,0622	0,0364	1,0469	0,0665	0,0327
0,35	1,0436	0,0832	0,0470	1,0631	0,0884	0,0424
0,40	1,0566	0,1067	0,0580	1,0815	0,1127	0,0526
0,45	1,0710	0,1324	0,0691	1,1019	0,1390	0,0629
0,50	1,0869	0,1601	0,0800	1,1241	0,1670	0,0732
0,55	1,1041	0,1896	0,0907	1,1481	0,1965	0,0834
0,60	1,1225	0,2207	0,1009	1,1736	0,2273	0,0933
0,65	1,1422	0,2532	0,1106	1,2006	0,2592	0,1028
0,70	1,1629	0,2870	0,1197	1,2290	0,2920	0,1119
0,75	1,1847	0,3219	0,1282	1,2586	0,3256	0,1205

Table IV

Values of the coefficients c_1, c_2, c_3 in case of star-shells with sides $n = 5$ and $n = 6$

h/R	$n = 5$			$n = 6$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/pp	c_3/p_0
0,25	1,0399	0,0471	0,0190	1,0446	0,0457	0,0151
0,30	1,0568	0,0663	0,0261	1,0634	0,0643	0,0207
0,35	1,0763	0,0880	0,0337	1,0851	0,0853	0,0266
0,40	1,0983	0,1119	0,0417	1,1095	0,1083	0,0327
0,45	1,1225	0,1377	0,0497	1,1363	0,1330	0,0388
0,50	1,1489	0,1650	0,0577	1,1653	0,1591	0,0448
0,55	1,1771	0,1937	0,0655	1,1965	0,1865	0,0505
0,60	1,2072	0,2234	0,0729	1,2295	0,2148	0,0558
0,65	1,2389	0,2541	0,0800	1,2642	0,2440	0,0608
0,70	1,2721	0,2856	0,0867	1,3006	0,2738	0,0654
0,75	1,3067	0,3176	0,0930	1,3383	0,3041	0,0695

Since the load system g is continuous and axisymmetrically arranged, for the solution of the problem, the methods described in Chapter 5, are to be applied.

In applying the Ritz—Galerkin procedure, for the coefficients c_1, c_2, c_3, the values listed in Table III to VI are obtained.

Table V

Values of the coefficients c_1, c_2, c_3 in case of star-shells with sides $n = 7$ and $n = 8$

h/R	$n = 7$			$n = 8$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0478	0,0441	0,0122	1,0501	0,0425	0,0100
0,30	1,0680	0,0620	0,0166	1,0172	0,0597	0,0135
0,35	1,0911	0,0821	0,0213	1,0955	0,0791	0,0172
0,40	1,1171	0,1041	0,0260	1,1226	0,1002	0,0209
0,45	1,1457	0,1277	0,0306	1,1525	0,1229	0,0244
0,50	1,1766	0,1527	0,0350	1,1847	0,1468	0,0276
0,55	1,2097	0,1788	0,0391	1,2192	0,1717	0,0306
0,60	1,2448	0,2057	0,0429	1,2556	0,1974	0,0331
0,65	1,2816	0,2234	0,0462	1,2939	0,2238	0,0352
0,70	1,3200	0,2616	0,0491	1,3338	0,2506	0,0369
0,75	1,3599	0,2903	0,0516	1,3753	0,2779	0,0381

Table VI

Values of the coefficients c_1, c_2, c_3 in case of star-shells with sides $n = 9$ and $n = 10$

h/R	$n = 9$			$n = 10$		
	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0	c_1/p_0	c_2/p_0	c_3/p_0
0,25	1,0519	0,0411	0,0083	1,0532	0,0399	0,0070
0,30	1,0737	0,0577	0,0112	1,0755	0,0560	0,0093
0,35	1,0987	0,0764	0,0141	1,1012	0,0741	0,0117
0,40	1,1267	0,0968	0,0170	1,1300	0,0938	0,0139
0,45	1,1575	0,1186	0,0196	1,1613	0,1149	0,0159
0,50	1,1907	0,1416	0,0220	1,1953	0,1371	0,0175
0,55	1,2262	0,1655	0,0240	1,2316	0,1602	0,0188
0,60	1,2637	0,1902	0,0256	1,2698	0,1840	0,0197
0,65	1,3030	0,2154	0,0267	1,3100	0,2083	0,0201
0,70	1,3441	0,2412	0,0274	1,3519	0,2330	0,0200
0,75	1,3886	0,2672	0,0277	1,3953	0,2581	0,0195

7. Snow load

If the shell is subjected to a uniformly distributed snow load g_0, the stress function of the problem can be expressed in a closed form as follows [1]:

$$F^{(0)} = -\frac{R^4 g_0}{8h}\left(-\frac{n-2}{n} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{n}\cdot\frac{r^n}{R^n}\cos n\varphi\right). \tag{22}$$

In the above formula g_0 designates the specific value of the snow load related to the unit of the *base* surface.

In the case in question, the following formulae are obtained for the reduced stress resultants of the shell:

$$n_r^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}\left[1 - (n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right],$$

$$n_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}(n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\sin n\varphi\,, \tag{23}$$

$$n_\varphi^{(0)} = -\frac{R^2 g_0}{4h}\left[1 + (n-1)\frac{r^{n-2}}{R^{n-2}}\cos n\varphi\right].$$

8. Numerical examples

The application of the described calculation methods is presented by two numerical examples. The subject chosen for the numerical examples is a star-shell, *steeper than the customary shells*, for it should be verified that the proposed procedures present, even in such *extreme* cases, sufficiently exact results.

One of the two star-shells to be investigated has *five sides* and the other *nine sides*. The geometrical data for both shells are the same:

$$R = 20{,}0 \text{ m}; \qquad h = 14{,}0 \text{ m}.$$

The same system of loads has been assumed for both cases. The dead weight of the shell wall is taken into account by the specific value

$$p_0 = 200 \text{ kp/m}^2,$$

related to the unit area of the *middle surface* of the shell wall, and the snow load by the specific value

$$g_0 = 80 \text{ kp/m}^2,$$

related to the unit area of the *base surface*.

8.1. *Five-sided star-shell* (Fig. 6)

First, the problem should be solved by collocation. For fitting loci, the circles

$$r = 0{,}25\,R, \qquad r = 0{,}65\,R, \qquad r = 0{,}95\,R,$$

will be chosen. Dead load and snow load are taken into account at the same time. The values of the total load obtained in this way are

at loci

$r = 0{,}25\,R$:	291,99 kp/m²
$r = 0{,}65\,R$:	350,41 kp/m²
$r = 0{,}95\,R$:	412,80 kp/m²

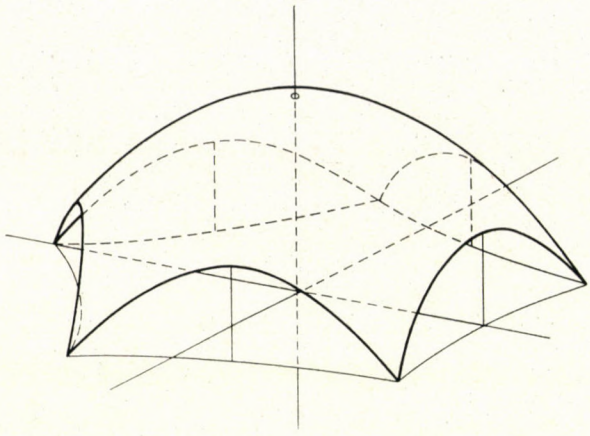


Fig. 6. Five-sided star-shell

In this case, the load values g^{I}, g^{II} and g^{III} corresponding to the auxiliary functions F^{I}, F^{II} and F^{III} respectively, are according to formula (10) and Tables I and II,

at loci

$r = 0{,}25\ R$:	1,0	−1,179	0,665
$r = 0{,}65\ R$:	1,0	0,426	−0,356
$r = 0{,}95\ R$:	1,0	1,083	0,520

With the above values the three collocation equations will be

$$1{,}0\ c_1 - 1{,}179\ c_2 + 0{,}665\ c_3 = 291{,}99\ [\mathrm{kp/m^2}],$$
$$1{,}0\ c_1 + 0{,}426\ c_2 - 0{,}356\ c_3 = 350{,}41\ [\mathrm{kp/m^2}],$$
$$1{,}0\ c_1 + 1{,}083\ c_2 + 0{,}520\ c_3 = 412{,}80\ [\mathrm{kp/m^2}].$$

From these three equations

$$c_1 = 333{,}33\ \mathrm{kp/m^2},$$
$$c_2 = 61{,}22\ \mathrm{kp/m^2},$$
$$c_3 = 25{,}30\ \mathrm{kp/m^2}.$$

Calculated with these values, the approximate load function becomes:

$$g^* = 333{,}33\ g^{I} + 61{,}22\ g^{II} + 25{,}30\ g^{III}. \tag{24}$$

If the problem in question is to be solved with the aid of the *Ritz—Galerkin* procedure the values of the coefficients c_1, c_2, c_3 can be taken from Table IV:

$$c_1 = (1{,}2721 \cdot 200) + 80 = 334{,}58\ \mathrm{kp/m^2},$$
$$c_2 = 0{,}2856 \cdot 200 = 57{,}12\ \mathrm{kp/m^2},$$
$$c_3 = 0{,}0867 \cdot 200 = 17{,}34\ \mathrm{kp/m^2}.$$

With these values the load function will be:

$$g^* = 334{,}58\ g^{I} + 57{,}12\ g^{II} + 17{,}34\ g^{III}. \tag{25}$$

Table VII

Load values g and g* and value of the error quotient ε in case of a five-sided star-shell

r/R	Calculated by the collocation method		Calculated by the Ritz–Galerkin method	
	g^*	ε	g^*	ε
0,00	287,18	−0,026	284,62	−0,016
0,05	287,34	−0,024	284,88	−0,015
0,10	287,83	−0,021	285,67	−0,013
0,15	288,71	−0,015	287,02	−0,009
0,20	290,05	−0,008	289,01	−0,005
0,25	291,99	0	291,70	+0,001
0,30	294,67	+0,006	295,20	+0,002
0,35	298,26	+0,015	299,63	+0,010
0,40	302,99	+0,020	305,12	+0,013
0,45	309,06	+0,023	311,83	+0,014
0,50	316,69	+0,022	319,87	+0,013
0,55	326,08	+0,019	329,35	+0,009
0,60	337,33	+0,011	340,29	+0,002
0,65	350,41	0	352,59	−0,006
0,70	365,07	−0,014	365,94	−0,016
0,75	380,66	−0,029	389,74	−0,053
0,80	395,96	−0,041	392,87	−0,033
0,85	408,89	−0,046	403,56	−0,032
0,90	416,17	−0,036	409,07	−0,018
0,95	412.80	0	405,30	+0,018
1,00	391,41	+0,077	386,35	+0,089

In order to prove the exactitude of the calculation methods proposed, the value of the load function g^*, as well as that of the error quotient

$$\varepsilon = \frac{g - g^*}{g}$$

along the different circles of $r = \text{const}$ were calculated. The results are summarized in Table VII. From this table it can be seen that the exactitude of both proposed calculation methods go far to satisfy the requirements of the practice. A major divergence between the values of g and g^* is to be found only in the neighbourhood of the corners, and even here only in a quite narrow region.

8.2. *Nine-sided star-shell* (Fig. 7)

First, this problem should also be solved by *collocation*. If for the loci of the collocation the same circles are selected as in case of the five-sided star- shell, so, for the coefficients c_1, c_2, c_3, the following values are obtained by the use of the calculation process, similar to that

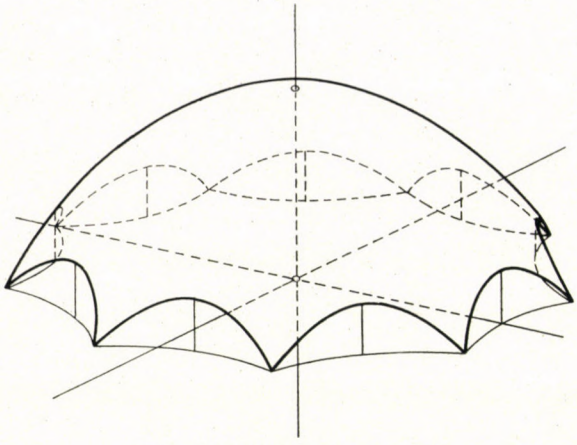


Fig. 7. Nine-sided star-shell

Table VIII

Load values g and g* and value of the error quotient ε in case of a nine-sided star-shell

r/R	Calculated by the collocation method		Calculated by the Ritz–Galerkin method	
	g^*	ε	g^*	ε
0,00	284,10	−0,015	283,74	−0,013
0,05	284,40	−0,014	284,10	−0,013
0,10	285,32	−0,012	285,16	−0,011
0,15	286,86	−0,009	286,98	−0,009
0,20	289,07	−0,005	289,49	−0,006
0,25	291,99	0	292,79	−0,003
0,30	295,67	+0,003	296,90	+0,000
0,35	300,19	+0,008	301,84	+0,003
0,40	305,63	+0,012	307,68	+0,005
0,45	312,09	+0,013	314,47	+0,006
0,50	319,68	+0,014	322,26	+0,006
0,55	328,52	+0,012	331,13	+0,004
0,60	338,72	+0,007	341,14	+0,000
0,65	350,41	0	352,34	−0,005
0,70	363,64	−0,010	364,73	−0,013
0,75	378,27	−0,022	378,13	−0,022
0,80	393,73	−0,035	391,95	−0,030
0,85	408,30	−0,045	404,61	−0,035
0,90	417,82	−0,040	412,38	−0,027
0,95	412,80	0	405,37	+0,018
1,00	372,86	+0,121	370,86	+0,126

described in connection with the example of the five-sided shell:

$$c_1 = 348{,}45 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_2 = 52{,}54 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_3 = 9{,}58 \text{ kp/m}^2.$$

Applying these values for the approximate load function we have:

$$g^* = 348{,}45\, g^{\mathrm{I}} + 52{,}54\, g^{\mathrm{II}} + 9{,}58\, g^{\mathrm{III}}. \tag{26}$$

The same problem has also been solved with the aid of the *Ritz—Galerkin* method. In this case, the values for the coefficients c_1, c_2, c_3 can be taken Form Table VI:

$$c_1 = (1{,}3441 \cdot 200) + 80 = 348{,}82 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_2 = 0{,}2412 \cdot 200 = 48{,}24 \text{ kp/m}^2,$$
$$c_3 = 0{,}0274 \cdot 200 = 5{,}48 \text{ kp/m}^2.$$

With the above values the approximate load function will be:

$$g^* = 348{,}82\, g^{\mathrm{I}} + 48{,}24\, g^{\mathrm{II}} + 5{,}48\, g^{\mathrm{III}}. \tag{27}$$

The approximate load values g^* and the value of the error quotient

$$\varepsilon = \frac{g - g^*}{g},$$

along different circles of $r = \text{const.}$ are assembled in Table VIII. As is to be seen, both methods proposed are quite exact, also in this case: only in the neighbourhood of the corners of the shell a major difference presents itself between the load values g and g^*, but even this difference is rapidly diminishing with the distance measured from the corner.

REFERENCES

1. CSONKA, P.: Paraboloid Shells of Revolution on Star-polygon Base (In Hungarian) *Műszaki Tudomány*, **42** (1970), 243—256
2. CSONKA, P.: Membrane Shells with Vertically Supported Edge Beam. Simplified Calculation Methods. *Proceedings of the Colloquium on Simplified Calculation Methods*, Brussels, September 4—6, 1961. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1962, 219—234
3. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Springer Verlag, Wien 1959

Achsensymmetrisch belastete Rotationsparaboloidschalen mit sternförmigem Grundriß. Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung der Membrankräfte von achsensymmetrisch belasteten Rotationsparaboloidschalen, die durch achsensymmetrisch verteilte Vertikalkräfte, wie z. B. Eigengewicht oder gleichmäßig verteilte Schneelast entstehen. Die Spannungsfunktion des Problems wird durch eine Linearkombination von drei Hilfsfunktionen angenähert, deren jede einem achsensymmetrisch verteilten vertikalen Lastsystem entspricht und gleichzeitig die Randbedingungen des Problems genau befriedigt. Für Eigengewicht enthält der Aufsatz Tafeln mit empfehlbaren Werten für die unbekannten Koeffizienten der Linearkombination. Für den Fall gleichmäßig verteilter Schneelast ist die exakte Lösung durch einfache, geschlossene Formeln ausgedrückt.

Центрально симметрично нагруженные оболочки в виде параболоида вращенида вращения с планом в виде звездчатого многоугльника. Данная работа занимается определением мембранных усилий таких оболочек в виде параболоида вращения с планом в виде звездчатого многоугольника, на которые воздействует нагрузка вертикальной сплошной системы усилий с центрально симметричным распределением (напр. собственный вес, равномерная нагрузка от снегового покрова). В работе функция усилий, дающую приближенное решение этой задачи, получается в виде линейной комбинации трех вспоТогательных функций. Каждой из этих трех Вспомогательных функций соответствует по одной системе вертикальных нагрузок с центрально симметричным распределением, и каждая из вспомогательных функций точно удовлетворяет также оцружным условиям данной задачи. Для с?учая нагрузки от собственного веса-в работе сообщается в табличной форме целесообразные значения неизвестнык коэффициентов линейной комбинации. В с?учае равномерной нагрузки от снегового покрова точное решение задачи может быть решено с помощью простых формул закрытого типа.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 361—410 (1975)

BILDUNG VON LUFTLEEREN RÄUMEN INFOLGE DES PLÖTZLICHEN ABSTELLENS VON PUMPENANLAGEN

S. MÁTTYUS*

[Eingegangen am 1. Juli, 1974]

Die Arbeit untersucht die Bedingungen für die Bildung von Hohlraumen beim plötzlichen Abstellen einer Pumpe. Gestützt auf theoretische Erwägungen, werden die Gesetzmäßigkeiten für die Entstehung, die Entwicklung und das Zusammenschließen eines Hohlraums abgeleitet. Gesondert werden die Vorgänge in waagrechten, senkrechten und schräg steigenden Rohren behandelt, in einfach zu behandelnde Teile zerlegt und anhand von Zahlenbeispielen einzeln gelöst. Auch einige Versuche und die dabei beobachteten Erscheinungen werden besprochen.

1. Einleitung

Die katastrophalen Folgen der Hohlraumbildung in den Druckrohrleitungen von Pumpanlagen haben die Aufmerksamkeit seit jeher auf diese Erscheinung gelenkt. Mehrere Bücher [1, 2, 3] und Abhandlungen befassen sich mit den verschiedenen Erscheinungsformen der Hohlraumbildung, jedoch steht eine durchgreifende systematische Bearbeitung noch aus. Unsere Kenntnisse auf diesem Gebiet sind in vieler Hinsicht lückenhaft. Deshalb mögen im Pumpwerksbetrieb manche Überraschungen vorkommen, die bei der Planung nicht vorausgesehen werden konnten. Es kam auch vor, daß zur Verhinderung der Hohlraumbildung überdimensionierte, überflüssige oder gar unzweckmäßige Einrichtungen angewandt wurden.

Die vorliegende Abhandlung hat zum Ziele, die erwähnten Lücken auszufüllen, doch vermag sie, zum Teil infolge der Kompliziertheit der Aufgabe, zum Teil infolge der Unvollständigkeit der für den Aufbau der Theorie unentbehrlichen Versuche, kein vollständiges Bild zu bieten. Trotz der reichlichen Literatur sind die Angaben ziemlich mangelhaft und deshalb für die nachträgliche Auswertung der Beobachtungen ungeeignet. In anderen Fällen ist das Längenprofil der Rohrleitung derart verwickelt, daß der tatsächliche Ablauf der Erscheinungen aus dem aufgenommenen Druckdiagramm nur ungenau verfolgt werden kann.

Die Budapester Wasserwerke haben seinerzeit auch diesbezügliche Versuche angestellt. Allerdings mußten diese ohne merkliche Störung der Wasser-

* S. MÁTTYUS, Kresz G. u. 51, H—1132 Budapest, Ungarn

versorgung durchgeführt werden, ferner waren die damals zur Verfügung stehenden Meßgeräte nicht den Ansprüchen gewachsen. Somit bieten diese Versuche bloß eine schwache Stütze für die vorliegenden Betrachtungen. Demgegenüber sind die durch die Fa. SULZER in 1959 veröffentlichten Versuchsergebnisse recht aufschlußreich, obwohl auch hier manche für die Auswertung wichtige Daten fehlen.

Die eingehende Bearbeitung sämtlicher Probleme der Hohlraumbildung geht ohnehin über den Rahmen einer einzigen Abhandlung. Hierzu wären weitere, planmäßig angelegte Versuche notwendig. Darum kann die vorliegende, hauptsächlich auf theoretischen Erwägungen fußende Abhandlung kein geschlossenes Ganzes bilden. Die Probleme mußten in mehrere, einfach zu behandelnde Teilprobleme zerlegt, sodann durch Zahlenbeispiele erläutert und ohne höherern mathematischen Aufwand gelöst werden. Kompliziertere Aufgaben wurden mittels Näherungsmethoden gelöst. Dabei wurde auf jene Lücken hingewiesen, die durch weitere Versuche und genauere Berechnungsmethoden ausgefüllt werden müssen.

Zwecks Vereinfachung sollen im folgenden nur kreisrunde Rohre mit gleichbleibendem Durchmesser und Wandstärke sowie nur die echte Hohlraumbildung, bei der die entstehende Leere durch gesättigtem Wasserdampf ausgefüllt ist, in Betracht gezogen werden. Die Rohrreibung wird überhaupt vernachlässigt, bzw. ihr Einfluß auf die Hohlraumbildung gesondert behandelt.

2. Allgemeiner Teil

Ein Hohlraum bildet sich unter zwei Bedingungen in einem Rohrleitungsabschnitt der Länge l: 1. Am höchsten Punkt jedes Rohrquerschnittes muß ein der Wassertemperatur entsprechender Sattdampfdruck vorherrschen. 2. Der Zufluß Q_{I} im Eintrittsquerschnitt I muß kleiner sein, als der *im gleichen Zeitpunkt* meßbare Abfluß Q_{II} im Austrittsquerschnitt II. Falls beide Bedingungen während einer Zeitdauer Δt erfüllt werden, so bildet sich im erwähnten Rohrabschnitt der Hohlraum

$$V = \int_0^{\Delta t} (Q_{\mathrm{II}} - Q_{\mathrm{I}})\, dt\,.$$

Der durch die Pumpe geförderte Wasserstrom Q fällt nach Abschaltung des Pumpenaggregates in endlicher Zeit vom betriebsmäßigen Durchfluß Q_0 auf $Q = 0$ zurück; also ist Q eine mit der Zeit veränderliche Größe. Anhand der erforderlichen Daten kann man die Funktion $Q(t)$ nach den Literaturquellen [2] und [5], oder, wenn zum Abbremsen des Wasserstromes auch das Absperrorgan der Pumpe herangezogen wird, nach der Quelle [6] ermitteln.

Der durch die gekoppelten Zeitfunktionen $Q(t)$ und $H(t)$ beschriebene Zustand pflanzt sich gemäß der — u. a. in [7] und [8] besprochenen — Alliévi-

schen Kettengleichung mit der Wellengeschwindigkeit a von der Pumpenanlage zum Oberbecken fort. Es wird dabei angenommen, daß der Wasserspiegel des Oberbeckens mit der Atmosphäre in Berührung steht, also vom atmosphärischen Druck belastet ist.

Der Abstand eines beliebigen Punktes A der Rohrleitung von der im Pumpenwerk errichtete Meßstelle sei mit l_A, der Höhenunterschied zwischen dem Punkt A und der Meßstelle mit y_A bezeichnet. In Dauerbetrieb sind die Zustandsgrößen Förderstrom Q_0 und Druckhöhe (unter Vernachlässigung der Rohrreibung) $H_0 - y_A$ im Punkt A konstant. Nach einem plötzlichen Abstellen der Förderung bleiben Q_0 und $H_0 - y_A$ solange unverändert, bis die Stoßwelle den Punkt A erreicht. Von diesem Zeitpunkt an beginnen der Förderstrom und die Druckhöhe gemäß den Funktionen $Q = Q(t)$ und $H = H(t)$ zu sinken.

Liegt der Punkt A gegebenenfalls so hoch, daß in einem Zeitpunkt t_x die Druckhöhe auf

$$H(t_x) - y_A = (p_D - p_A)/\gamma$$

sinkt — wobei p_D den Sattdampfdruck, p_A den atmosphärischen Druck und γ die Wichte des Wassers bedeuten —, so wird die Bedingung 1 der Hohlraumbildung erfüllt. Wenn auch der Bedingung 2 Genüge geleistet wird, kommt es in diesem Rohrleitungsabschnitt zur Ausdampfung und damit zur Bildung eines Hohlraumes. Gleichzeitig verlieren die Gesetze der elastischen Wasserdruckschwankungen die Gültigkeit und an ihre Stelle treten die Bewegungsgesetze im Schwerefeld. Der Hohlraum unterbricht die Verbindung zwischen Pumpenwerk und Oberbecken. Die Stoßwelle wird nicht vom Wasserspiegel des Oberbeckens, sondern von demjenigen Ende des Hohlraumes reflektiert, das näher zum Pumpenwerk liegt.

Im folgenden wird versucht, die mit der Hohlraumbildung verbundenen Erscheinungen auführlich darzustellen, u. zw. getrennt für waagrechte, senkrechte und schräg verlegte Rohrleitungen.

3. Waagrechte Rohrleitung

3.1. *Die Bedingungen der Hohlraumbildung*

Vorerst soll klargestellt werden, ob die im vorigen Kapitel angeführten beiden Bedingungen der Hohlraumbildung notwendig und ausreichend sind. Die Untersuchung erfolgt anhand eines konkreten, der Abhandlung [6] entnommenen Beispiels einer Pumpenanlage, deren Anordnung — mit geringen Modifizierungen — aus Bild 1 ersichtlich ist. Die Anlage enthält einen waagrechten, $L_2 = 3550$ m langen Rohrleitungsabschnitt, dessen Oberkante um $H_1 = 30$ m über dem Wasserspiegel des Unterbeckens liegt. Die Betriebsförderleistung des Pumpenwerkes beträgt Q_0 m³/s, die Förderhöhe H_0 m. Letztere wird unter vorübergehender Vernachlässigung der Verlusthöhe h_v

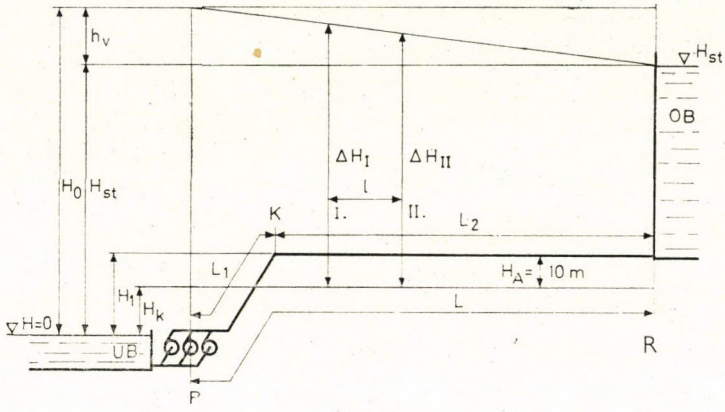


Bild 1

infolge der Rohrreibung gleich der statischen Druckhöhe angenommen, d. h., $H_0 = H_{st}$. Der Unterschied zwischen der Sattdampfdruckhöhe des kalten Wassers und der atmosphärischen Druckhöhe wird hier und im folgenden mit $H_A = -10$ m WS angesetzt. Wenn später vom vollständigen Vakuum (oder kurz: Vakuum), bzw. vom Dampfdruck die Rede ist, soll darunter dieser Wert verstanden werden.

Nach Abschalten der Pumpe geht die Wasserförderung zufolge des geringen Schwungmomentes der umlaufenden Maschinenteile sehr rasch auf Null zurück, desgleichen fällt die Betriebsdruckhöhe vom H_0 auf H_B (Bremsdruckhöhe). Wenn der lichte Rohrleitungsquerschnitt mit F_0, die Stoßwellengeschwindigkeit mit a und die Betriebsgeschwindigkeit des Förderstromes mit c_0 bezeichnet wird, folgt nach dem Alliévischen Gesetz, daß

$$H_B = H_0 - c_0 \frac{a}{g} = H_0 - \frac{Q_0}{F_0} \cdot \frac{a}{g} \tag{1}$$

ist.

Wenn der sich mit der elastischen Wellengeschwindigkeit a fortpflanzende neue Zustand $Q = 0$ und $H = H_B$ die obere waagrechte Rohrstrecke im Knickpunkt K erreicht, fällt auch hier die Förderung von Q_0 auf Null und die Betriebsdruckhöhe $(H_0 - H_1)$ — falls möglich — auf $(H_B - H_1)$ zurück.

Bei $H_B > H_1 - 10$ m, herrscht am höchsten Punkt des inneren Querschnittes des waagsrechten Rohrleitungsabschnittes überall ein höherer Druck als der Sattdampfdruck. Somit wird die Bedingung 1 nicht erfüllt, es tritt keine Hohlraumbildung auf.

Falls $H_B = H_1 - 10$ m $= H_K$, so stellt sich eben der kritische Zustand ein, wobei nach Durchgang der Druckwelle das infolge elastischer Verformung vergrößerte Wasservolumen den zufolge des Schrumpfens der Rohrwand verkleinerten Querschnitt gerade ausfüllt. Im oberen Teil des Rohrleitungs-

querschnittes bildet sich zwar ein Vakuum, jedoch werden die zwei Bedingungen der Hohlraumbildung nicht erfüllt. Betrachtet man nämlich eine Länge l jenes Leitungsabschnittes, den die Druckwelle bereits verlassen hat, so wird nur die erste Bedingung erfüllt, die zweite aber nicht, weil $Q_{II} = Q_I = 0$. Verlegt man jedoch die betrachtete Länge l auf einen Leitungsabschnitt, den die Druckwelle soeben durchläuft, so wird die erste Bedingung nicht erfüllt, denn es herrscht nicht in allen Punkten ein vollständiges Vakuum.

Die notwendige Bedingung bedingt somit, daß nach Gl. (1) $H_B < H_1 - 10 \text{ m} = H_K$ sei. Da aber der Druck im waagerechten Leitungsabschnitt nicht unter den Sattdampfdruck sinken kann, entspricht hier die Verringerung der Druckhöhe nicht $H_0 - H_B$ (wie nach Gl. (1)), sondern $H_0 - H_K$. Für die Ermittlung der Wassergeschwindigkeit c_K gelten

$$H_0 - H_B = c_0 \frac{a}{g} \text{ und } H_0 - H_K = (c_0 - c_K) \frac{a}{g},$$

folglich

$$c_K = (H_K - H_B) \frac{g}{a}. \tag{2}$$

Nach Durchlauf der Druckwelle wird also die Geschwindigkeit nicht Null, sondern nimmt den endlichen Wert c_K auf. Diese Geschwindigkeit pflanzt sich im vollen Rohrleitungsquerschnitt in der Richtung zum Oberbecken fort. Die Förderung des Pumpenwerkes hört gänzlich auf, es gibt keinen Nachschub. Somit kann die Geschwindigkeit c_K nur dann aufrecht bleiben, wenn das entleerte Volumen durch einen Hohlraum ausgefüllt wird. Hiermit werden beide Bedingungen der Hohlraumbildung erfüllt. Der Hohlraum beginnt im Punkt K und dehnt sich so lange vorwärts aus, bis er durch die vom Oberbeckenspiegel reflektierte Druckwelle — gegebenenfalls in mehreren aufeinander folgenden Schritten — aufgefüllt wird.

3.2. *Die Mechanik der Hohlraumbildung*

Im folgenden werden die Gesetzmäßigkeiten gesucht, nach denen sich ein Hohlraum bildet, ausdehnt und zusammenbricht. Außerdem werden die beim Zusammenbruch auftretenden Kräfte ermittelt.

In dem Leitungsabschnitt, wo die Strömungsgeschwindigkeit den sich mit der Wellengeschwindigkeit fortpflanzenden Wert c_K bereits angenommen hat, ist die elastische Formänderung schon zu Ende und es herrscht überall die Druckhöhe H_K, d. h. der Sattdampfdruck p_D. Es liegt auf der Hand, daß hier die Strömung als eine Freispiegelströmung im Schwerefeld aufzufassen ist und für die Entstehung und Ausbreitung des Hohlraumes die Gesetze der Wasserbewegung im offenen Kanal gültig sind. (Siehe Bild 2, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Freispiegelwellenfront mit w bezeichnet ist.) Leider kann in diesem Fall das in [7] beschriebene Verfahren nicht herangezogen werden.

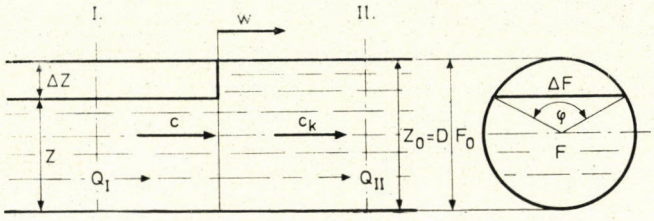


Bild 2

Zum ersten liegt hier ein Kreisquerschnitt vor, zum zweiten wird der Querschnitt hinter der durch das Schwerefeld hervorgerufene Welle möglicherweise ganz entleert. Deshalb soll der Energiegehalt für beide Seiten in einem Koordinatensystem dargestellt werden, das sich zusammen mit der Wellenfront mit der Geschwindigkeit w fortbewegt. Die Gleichheit der Energiegehalte bedeutet, daß der Übergang von einem Zustand in den anderen ohne Energieverlust stattfindet. Mit den Bezeichnungen des Bildes 2 (Z_0 Innendurchmesser des Rohres, Z Höhe des Wasserspiegels im Rohr, F_0 lichter Querschnitt des Rohres, F mit Wasser ausgefüllter Querschnitt, $Z_0 = D$) lautet die Energiegleichung:

$$\frac{(c-w)^2}{2g} + Z = \frac{(c_K - w)^2}{2g} + Z_0\,,$$

$$\frac{w(c_K - c)}{g} - \frac{c_K^2 - c^2}{2g} = Z_0 - Z = \Delta Z\,. \tag{3}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$(c-w)F = (c_K - w)F_0,$$

$$c_K F_0 - cF = Q_{II} - Q_I = w(F_0 - F) = w\Delta F\,, \tag{4}$$

was genau der zweiten Bedingung der Hohlraumbildung entspricht.

In der Praxis sind überhaupt Q, c_K und F_0 bekannt, gesucht werden w, c und F. Die weiteren Unbekannten ΔZ, ΔF und Z können aus den geometrischen Zusammenhängen bestimmt werden. Immerhin stehen für die drei Unbekannten nur zwei Gleichungen zur Verfügung, es kann also eine genaue Lösung nur für die volle Abbremsung, d. h. $Q = cF = 0$ gefunden werden.

Mit den Bezeichnungen $\Delta Z/Z_0 = \Delta Z/D = \Delta z$ und $\Delta F/F_0 = \Delta f$ gilt für $c = 0$

$$\frac{c_K w}{g} - \frac{c_K^2}{2g} = \Delta z D\,, \tag{3a}$$

$$c_K = w\Delta f. \tag{4a}$$

Nach der Beseitigung von w

$$\frac{c_K^2}{2gD} = \frac{\Delta z \Delta f}{2 - \Delta f}\,. \tag{5}$$

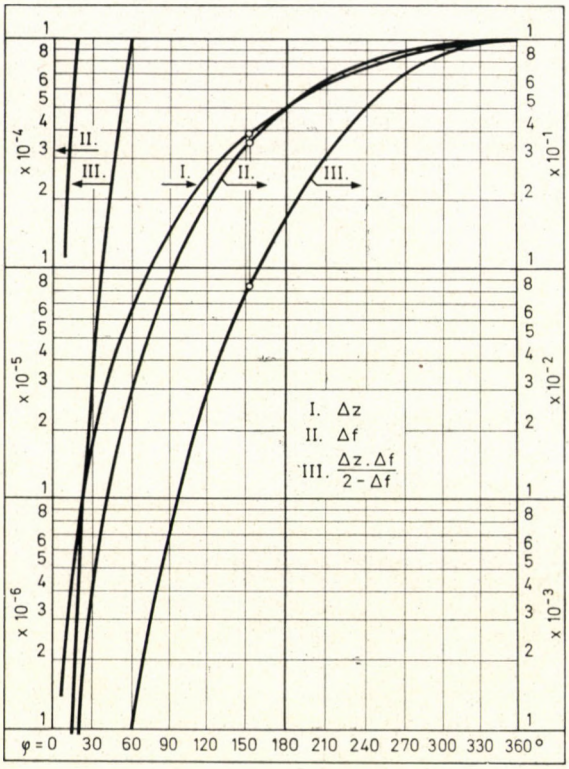


Bild 3

Der Zusammenhang zwischen Δz und Δf ist aus den Funktionen $\Delta z(\varphi)$ und $\Delta f(\varphi)$ zu ermitteln, jedoch können diese Werte auch Tabellen von Hilfsbüchern (z. B. Hütte) entnommen werden. Am einfachsten kommt man zum Ziel, wenn anhand der Tabellenwerte die Kurven Δz und Δf, sowie $\Delta z \Delta f/(2-\Delta f)$ als Funktionen von φ auf halblogarithmisches Papier aufgezeichnet werden (Bild 3). Man berechne mit den bekannten Werten c_K und $D(=Z_0)$ die linke Seite der Gl. (5). Danach können mit den zugehörigen, auf den Kurven Δz und Δf des Bildes 3 abgelesenen Werten die Unbekannten mit Hilfe der Gl. (3) und (4) errechnet werden.

Zwecks Kontrolle der Richtigkeit der vorhin für einen kreisrunden Kanal abgeleiteten Gleichungen sollen diese für einen viereckigen rechtwinkligen Kanal aufgeschrieben werden, wobei die Zusammenhänge einfacher ausfallen. Die Kanalbreite sei mit b bezeichnet, die Höhenbezeichnungen seien wie vorher. Die Querschnitte ergeben sich zu $F_0 = bZ_0$; $F = bZ$ und $\Delta F = b\Delta Z$. Mit den bezogenen Werten $f = z$ und $\Delta f = \Delta z$ lautet Gl. (5)

$$\frac{c_K^2}{2gZ_0} = \frac{\Delta z^2}{2 - \Delta z},$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (4a) erhält man

$$w^2 = 2gZ_0 \frac{1}{2 - \Delta z} . \tag{5'}$$

Für kleine Werte von Δz nimmt Gl. (5') die Form

$$w \cong \sqrt{gZ_0}$$

an, d. h. die Geschwindigkeit der Wellenfront wird gleich der Grenzgeschwindigkeit zwischen Strömen und Schießen [7]. Bei größeren Werten der Wellenhöhe Δz ist die rechte Seite der Gl. (5') gültig.

Im Falle eines kreisrunden Leitungsquerschnittes ist die Wellengeschwindigkeit w bei φ-Werten $0° < \varphi < 180°$ größer, bei $180° < \varphi < 360°$ dagegen kleiner, als in einem Kanal mit Rechteckquerschnitt, wie dies auch von den Kurven I und II des Bildes 3 abzulesen ist. Für $\varphi = 360°$ wird schließlich $\Delta z = \Delta f = 1$, also hinter der Wellenfront wird das Rohr vollkommen entleert. Die Wellengeschwindigkeit wird dann

$$w = c_K = \sqrt{2gD} .$$

Wenn also die linke Seite der Gl. (5)

$$\frac{c_K^2}{2gD} \geqq 1$$

wird, so läßt die Strömung den Leitungsabschnitt hinter der Welle leer, und läuft wie ein Kolben mit der Geschwindigkeit c_K dem Oberbecken zu.

Die Gln. (3), (4) und (5) können auch bei nicht vollständigem Abbremsen der Wasserförderung verwendet werden, falls Δf gering, also $F \cong F_0$ anzunehmen ist. Zweckmäßig ist mit der relativen Wellengeschwindigkeit $w_1 = w - c$ zu rechnen, die sich mit der Strömungsgeschwindigkeit c des Wassers fortpflanzt, weshalb $w = w_1 + c$ ist. Auf diese Weise erhält man nämlich für Δc eine Gleichung von der Form wie vorher und somit kann Bild 3 angewendet werden. Setzt man den Wert $w = w_1 + c$ und die bezogenen Größen in Gln. (3) und (4) ein, so erhält man

$$\frac{\Delta c w_1}{g} - \frac{\Delta c^2}{2g} = \Delta z D , \tag{3b}$$

$$\Delta c = w_1 \Delta f, \tag{4b}$$

$$\frac{\Delta c^2}{2gD} = \frac{\Delta z \Delta f}{2 - \Delta f} . \tag{5b}$$

Man darf jedoch nicht vergessen, daß die Gleichungen nur für kleine Werte von Δc Ergebnisse mit annehmbarer Genauigkeit liefern, weil stillschweigend $F \cong F_0$ vorausgesetzt wurde.

Für die Praxis ist die Annahme der vollen Abbremsung ($Q = 0$) und der kleinen Werte von Δc und ΔQ zulässig und ausreichend. Die erste Annahme gibt an, welches Volumen, bzw. ein wie großer Teil des Querschnittes durch den beim plötzlichen Abstellen sich bildenden Hohlraum eingenommen würde. Die zweite gibt darüber Auskunft, wie weit der zu Beginn der Abbremsung von endlicher Zeitdauer entstehende Hohlraum bis zum Augenblick der Strömungsumkehr fortgeschritten ist. Über die Vorkommnisse während der endlichen Abbremszeit weiß man nur soviel, daß die Grenze zwischen dem Hohlraum und dem Leitungswasserspiegel eine in Strömungsrichtung ansteigende krumme Fläche bildet. Zur Bestimmung der Geometrie dieser Fläche bedarf es einer Rechenmaschine. Für die Programmierung bieten die vorstehenden Ausführungen einige Anhaltspunkte.

3.3. *Rechenbeispiel für die Hohlraumbildung*

Die weitere Gestaltung eines entstandenen Hohlraumes kann am besten anhand eines Zahlenbeispieles erläutert werden. Die im Bild 1 dargestellte Pumpenanlage stimmt genau mit jener, die im Kapitel V der Abhandlung [6] beschrieben wurde, überein. Allerdings ist da im Punkt K des Druckrohres kein Belüftungsventil vorhanden und deshalb tritt die Hohlraumbildung auf. Die Daten der Maschineneinrichtung sowie der Rohrleitung stimmen ebenfalls mit denjenigen in Abhandlung [6] überein. Danach beträgt die Betriebsförderhöhe des Pumpenwerkes $H_0 = 82{,}7$ m, der Förderstrom $Q_0 = 0{,}882$ m³/s, die Leistungsaufnahme $N_0 = 960$ kW, das gesamte Schwungmoment der umlaufenden Teile $(GD^2) = 125{,}4$ kpm², die Abbremszeit mit dem Betriebsdrehmoment $T_B = 0{,}928$ s, die lichte Weite des Druckrohres $D = 800$ mm, seine Gesamtlänge $L = 3600$ m, die elastische Wellengeschwindigkeit $a = 1000$ m/s, die Reflexionszeit $T_R = 2L/a = 7{,}2$ s, der statische (geodetische) Höhenunterschied $H_{st} = 70$ m, $H_1 = 30$ m und die Verlusthöhe $h_v = 12{,}7$ m. Der Einfluß der Verlusthöhe, bzw. der Rohrreibung auf die Hohlraumbildung wird später besprochen. Vorläufig soll die gesamte Verlusthöhe — ähnlich wie in den Kapiteln IV und V der Abhandlung [6] — durch eine Drosselstelle am Ende der Rohrleitung (Punkt R) ersetzt werden.

Eine geringe Abweichung von der im Kapitel V der Abhandlung [6] betrachteten Anlage besteht darin, daß dort im Punkt K ein Belüftungsventil eingebaut war. Die Wassersäule reißt deshalb dort bei der Förderhöhe $H_1 = 30$ m, in diesem Rechenbeispiel dagegen bei $H_{K0} = H_1 - 10$ m $= 20$ m, ab. Die Berechnung erfolgt auch diesmal mittels einer kombinierten grafisch-rechnerischen Methode der Abhandlung [5]. Die Resultate sind in Bildern 4 und 5 zusammengefaßt.

Das Bild 4 gibt über die Vorgänge im Pumpenwerk Auskunft. Die Achsen des Koordinatensystems sind die dimensionslosen Werte $q = Q/Q_0$ und $h =$

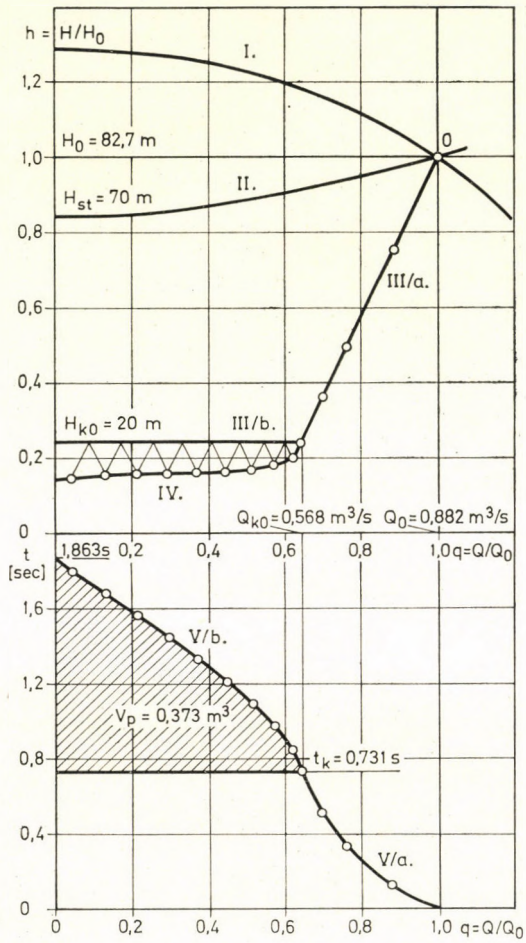


Bild 4

$= H/H_0$ in bezug auf den Betriebspunkt (Q_0, H_0). Der obere Teil des Bildes enthält die Kurven I (Kennlinie der Pumpe), II (Kennlinie der Rohrleitung) und IIIa (Stoßgerade, ausgehend vom Betriebspunkt). Nach Ausfall der Pumpe im Zeitpunkt $t = 0$ wandert der durch die Zustandsgrößen bestimmte Betriebspunkt entlang der Stoßgeraden abwärts, u. zw. zufolge des verhältnismäßig geringen Schwungmomentes ziemlich rasch. Bereits in der Zeit von $t_K = 0{,}731$ s wird die kritische Druckhöhe $H_K = 20$ m erreicht (Linie IIIb), wobei der Förderstrom $Q_0 = 0{,}882$ m³/s auf $Q_{K0} = 0{,}568$ m³/s abfällt, wie die Kurve Va im unteren Teil des Bildes zeigt. Diese Kurve stellt die Funktion $t(q)$ der Abbremsung des Förderstromes dar.

Der Zustandspunkt würde entlang des Stoßgeraden weiter abwärts wandern und die q-Achse kreuzen. Beim Absinken der Förderhöhe auf H_{K0}

beginnt aber die Bildung des Hohlraumes. Die ursprüngliche $L = 3600$ m lange Wassersäule zerreißt in zwei, $L_1 = 50$ m und $L_2 = 3550$ m lange Teile. Von diesem Augenblick an arbeitet die Pumpe gegen eine Wasserspiegelhöhe $H_{K0} = 20$ m; die Abbremsung des Förderstromes geht weiter. Dieser Vorgang ist im oberen Teil des Bildes in der (q, h)-Ebene durch Kurve IV und im unteren Bildteil durch Kurve Vb (die sich aus Kurve IV ergibt) dargestellt. Die Kurve Vb zeigt, daß die Förderung des Pumpenwerkes (gerechnet von $t = 0$) in der Zeit von $t = 1{,}863$ s aufhört. Die schraffierte Fläche unterhalb der Kurve Vb gibt die während der Abbremsung geförderte Wassermenge $V_P = 0{,}373$ m³ an.

Die Vorgänge im dem $L_2 = 3550$ m langen, hinter dem Punkt K liegenden waagerechten Rohrleitungsabschnitt werden anhand des Bildes 5 untersucht. Die mit der Geschwindigkeit $a = 1000$ m/s vorrückende Druckwelle legt die $L_1 = 50$ m lange Strecke $P - K$ in $t_1 = 0{,}05$ s zurück. Deshalb verspätet sich die Ortszeit des Punktes K um t_1. Im Zeitpunkt $t_K = 0$ der örtlichen Zeitzählung kommt es zu einem Druckabfall und der Druck erreicht nach $t_K = 0{,}731$ s den Wert $H_{K0} = 0$ m, bzw. den Sattdampfdruck. Dabei vermindert sich die Förderung von Q_0 auf $Q = 0{,}568$ m³/s und die Strömungsgeschwindigkeit von $c_0 = 1{,}756$ m/s auf $c_{K0} = 1{,}14$ m/s.

Die vom Punkt K ausgehende Zustandsänderung erreicht nach der Laufzeit $t_s = T_{RK}/2 = 3{,}55$ s das Oberbecken im Punkt R ($T_{RK} = T_R - 2t_1 = 7{,}2 - 0{,}1 = 7{,}1$ s). Hier steigt der Druck auf den der Wasserspiegelhöhe des Beckens entsprechenden Wert, demzufolge die Wasserförderung und die zugehörige Strömungsgeschwindigkeit abnimmt. Dieser Zustand wird wiederholt reflektiert und kehrt in der Laufzeit t_s zum Punkt K zurück. Dort herrscht der dem Hohlraum entsprechende Sattdampfdruck vor, was wieder die Änderung des Druckes und der Strömungsgeschwindigkeit auslöst.

Die Erscheinung geht aus dem oberen Teil des Bildes 5 hervor. Hier veranschaulicht die aus zwei Parabeln zusammengesetzte Kurve II den Druckverlauf im Endpunkt R der Rohrleitung. Zwischen Kurve II und der Geraden $H_{K0} = 20$ m liegen die nach der üblichen Sägezahnkonstruktion gezeichneten Stoßgeraden. Zu den Knotenpunkten der Stoßgeraden auf der Waagerechten H_{K0} sind die Zeitpunkte aufgeschrieben, in denen die durch den Schnittpunkt gekennzeichneten Zustände in den Knotenpunkten vorherrschen. Da uns jetzt der Verlauf des sich in der Nähe des Punktes K ausbildenden Hohlraumes interessiert, wurde anhand der Knotenpunkte auf der Waagerechten H_{K0}, sowie mit den diesen Punkten zugeordneten Zeitabständen der untere Teil des Bildes 5 konstruiert. Dieser Teil veranschaulicht die Gestaltung der Wasserförderung bez. der Strömungsgeschwindigkeit als Funktionen der Zeit. Die schraffierte Fläche rechts von der Achse $q = 0$ gibt das Volumen $V_a = 4{,}18$ m³ an. Das ist die Summe der Volumina des beim Punkt K entstandenen Hohlraumes und der vom Pumpenwerk laut Bild 4 eingespeisten Wassermenge $V_P = 0{,}373$ m³. Auf den Hohlraum entfallen also $V_b = 3{,}807$ m³. Dem ent-

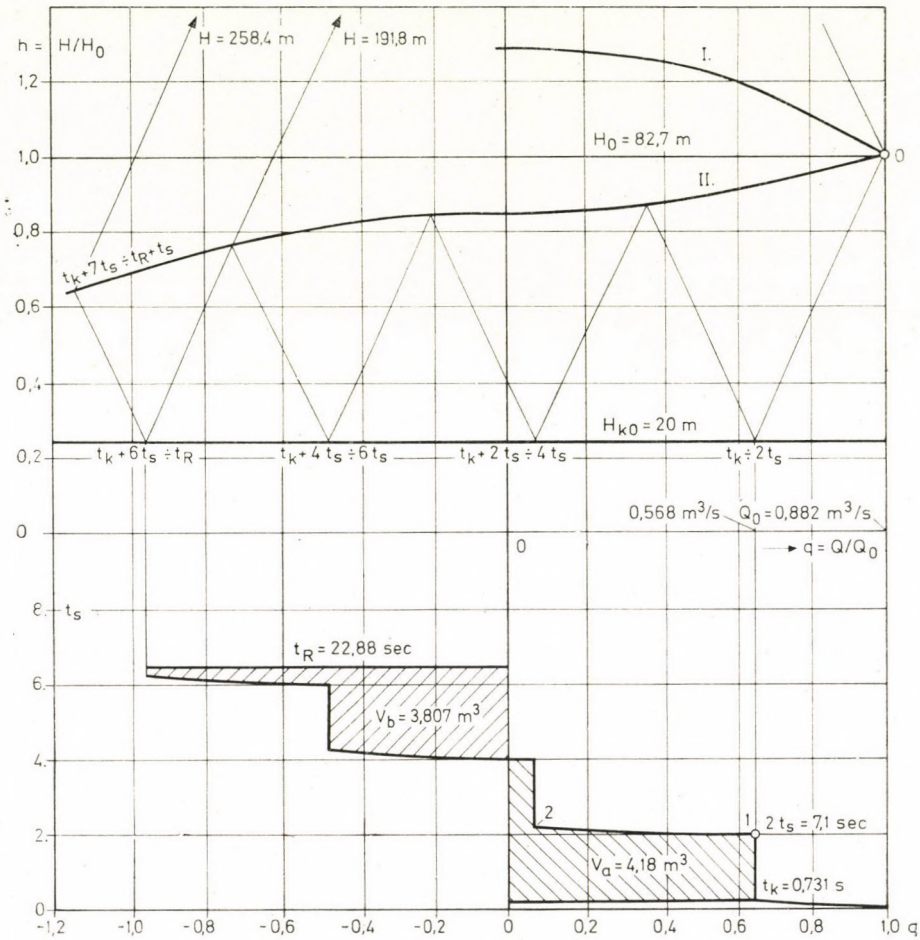


Bild 5

spricht die schraffierte Fläche links von der Achse $q = 0$. Die durch Berechnung gefundene Lage der oberen Grenzlinie dieser Fläche gibt den Zeitpunkt $t_R = 22{,}88$ s an, in dem der Hohlraum völlig zusammenbricht. In diesem Augenblick wird die Geschwindigkeit der Rückströmung $c = -1{,}683$ m/s im Punkt K abgebremst. Demzufolge steigt hier der Druck von $p = 0$ ata sehr steil auf $p = 17{,}18$ ata. Der Druckanstieg erreicht binnen 0,05 s das Pumpenwerk, wo die bisherige Druckhöhe $H = 20$ m auf $H = 191{,}8$ m hinaufschnellt. Damit ist jedoch die Druckschwankung noch nicht beendet, weil die Geschwindigkeit $c = -1{,}683$ m/s bereits im Zeitpunkt $t_K + 6t_s = 22{,}031$ s in K angelangt ist, und dort das Vakuum vorfindet. Somit kehrt die Druckänderung und die damit verbundene Geschwindigkeitsänderung nach R zurück. Dieser Zustand erreicht den Punkt R im Zeitpunkt $t_K + 7t_s$, dreht sich wieder um und trifft nach

$t_{s0} = T_K/2 = 3{,}6$ s in P ein, wird dort durch die abgeschlossene Rückschlagklappe abgebremst, worauf die Druckhöhe im Pumpwerk auf $H = 258{,}4$ m ansteigt.

Interessant ist, daß dieser Wert fast genau mit dem im Kapitel V der Abhandlung [6] angegebenen Spitzenwert von 255 m übereinstimmt, der zufolge der fehlerhaften Arbeitsweise eines Belüftungsventils hervorgerufen wurde.

Wenn das Rohr den starken und heftigen Druckstoß überstanden hat, setzt sich die Druckschwankung fort. Die erwähnten Spitzenwerte sollen von der Achse $q = 0$ mittels negativer Stoßgeraden auf die den Beckendruck repräsentierende Parabel projiziert werden. Die aus dem Schnittpunkt gezogenen positiven Stoßgeraden schneiden erneut die Waagerechte $H = 20$ m, die Hohlraumbildung setzt wieder ein, lediglich die Zeitpunkte ändern sich und das Kurvensystem im unteren Teil des Bildes 5 wird verwickelter.

Der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung soll die Gestaltung und das Ausmaß des Hohlraumes sein. Im oberen Teil des Bildes 5 sind die Geschwindigkeiten in den Knotenpunkten auf der rechten Seite der waagerechten Linie, die die kritische Druckhöhe $H_{K0} = 20$ m darstellt, $c_{K0} = 1{,}14$ m/s und $c_{K1} = 0{,}1193$ m/s. Nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (5) erhält man

$$\frac{c_{K0}^2}{2gD} = 8{,}28 \cdot 10^{-2},$$

bzw.

$$\frac{c_{K1}^2}{2gD} = 9{,}07 \cdot 10^{-4}.$$

In Bild 3 können die zugehörigen Werte von Δf und Δz abgelesen werden. Zum ersten Knotenpunkt c_{K0} findet man $\Delta f = 0{,}352$, bzw. $\Delta z = 0{,}386$, woraus sich der zentrale Winkel zu $\varphi = 155°$ ergibt. Die mit Gl. (4a) errechnete Geschwindigkeit der Wellenfront beläuft sich auf $w_0 = 3{,}235$ m/s, d. h., die Wellenfront legt in der Zeit $2t_s - t_K = 6{,}369$ s den Weg $s_0 = 20{,}6$ m zurück. Dem zweiten Knotenpunkt c_{K1} entsprechen: $\Delta f = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$, $\Delta z = 6{,}4 \cdot 10^{-2}$, $\varphi = 59°$ sowie die Geschwindigkeit der Wellenfront $w_1 = 4{,}26$ m/s. Der während der zweiten Reflexionszeit zurückgelegte Weg beträgt $s_1 = 27{,}1$ m. Somit durchlief die Wellenfront während der Hohlraumbildung den Weg $s = s_0 + s_1 = 47{,}7$ m. Die aufgrund der Vollentleerung des Querschnittes berechnete Wasserkolbenverschiebung würde bloß $s = 7{,}7$ m betragen.

Der Einfachheit halber wurde mit einer plötzlichen Abbremsung gerechnet, aber das Abbremsen in endlicher Zeit sowie die unterdessen durch die Pumpen eingespeiste Wassermenge ändern nichts an den grundsätzlichen Feststellungen. Gemäß des vorher Gesagten verlängern diese Einflüsse nur das

Profil der Wellenfront und verändern die steile Front in einen flach ansteigenden Übergang. Die Analyse und die Auswertung dieser Erscheinung geht jedoch über die Zielsetzung der vorliegenden Abhandlung hinaus.

In diesem Zusammenhang soll nur noch eine Frage besprochen werden: Wie weit dehnt sich die sich verjüngende Wellenfront aus? Die Abhandlung [4] erwähnt, daß in das Innere des waagrechten Versuchsrohres senkrecht von oben elektrisch isolierte Sonden eingeführt waren. Die Eintauchtiefe wird nicht angegeben. Im vorliegenden Beispiel soll die Eintauchtiefe 4 mm betragen. Demzufolge wird Δz in Gl. (3b) und (5b) mit dem Wert $5 \cdot 10^{-3}$ erscheinen. Nach Bild 3 entsprechen diesem Wert

$$\Delta f = 6{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ und } \frac{\Delta z \Delta f}{2 - \Delta f} = 1{,}65 \cdot 10^{-6}.$$

Dementsprechend erhält man aus den erwähnten Gleichungen

$$\Delta c = 5{,}08 \cdot 10^{-3} \text{ m/s und } w = 7{,}71 \text{ m/s}.$$

Daraus geht hervor, daß am Anfang der endlichen Abbremszeit die durch den Geschwindigkeitsunterschied von $\Delta c = 5$ mm/s hervorgerufene Welle bis zur Umkehr der Strömung $s = 104$ m in der Zeit $4t_s - t_K$ fortgeschritten ist. Das ist natürlich eine grobe Annäherung, weil erstens das Fortschreiten der Welle die Verkürzung der Reflexionszeit zur Folge hat, zweitens schon die erste Reflexion den Vorderteil des Hohlraumes abschließt. Dieser Teil wird wieder freigemacht, sobald die Welle zum Becken zurückzulaufen beginnt, denn die Abbremsung in endlicher Zeit ist auch für diese Phase gültig. Die geschilderte Tatsache wird durch die erwähnte Abhandlung erhärtet, wonach die Sonden ... „rasch aufeinander folgende Ablösungen des Wassers an der oberen Rohrwand registriert haben".

3.4. *Hohlraumbildung infolge der Rohrreibung*

Vorstehend wurde die Rohrreibung durch eine Drosselung im Punkt R ersetzt, was dadurch berechtigt war, daß allein die Vorkommnisse in der Umgebung des Punktes K ins Auge gefaßt wurden. Aber die Rohrreibung kann ebenfalls Anlaß zur Hohlraumbildung geben. Diese ist zwar gering, immerhin muß man sich — schon der Vollständigkeit halber — damit befassen. Der von der Rohrreibung herrührende Höhenverlust h_v verteilt sich nämlich gleichmäßig auf die ganze Rohrlänge. Die tatsächliche Drucklinie wird in Bild 1. durch eine schräge Gerade dargestellt, die in einem Punkt in der Höhe H_0 über dem Unterbeckenspiegel beginnt und in der Höhe H_{st} des Oberwasserspiegels endet. Die Richtungstangente der Geraden ist

$$\tan \delta = -\frac{h_v}{L_2} = -\frac{\lambda}{D} \cdot \frac{c_{K0}^2}{2g}.$$

Hier bezeichnet λ die Rohrreibungszahl. Die kritische Druckhöhe, bei der ein Hohlraum im oberen Teil des Rohrleitungsquerschnittes entstehen kann, sei wieder mit H_k bezeichnet. Längs der Rohrstrecke $K - R$ werden zwei Querschnitte I und II mit einem beliebigen Abstand l bestimmt. Man sieht, daß

$$(H_{\mathrm{I}} - H_K) = \Delta H_{\mathrm{I}} > (H_{\mathrm{II}} - H_K) = \Delta H_{\mathrm{II}}$$

ist. Nach den Gesetzen der elastischen Wasserschwingung gilt

$$\Delta H_{\mathrm{I}} = \Delta c_{\mathrm{I}} \frac{a}{g} = (c_0 - c_{\mathrm{I}}) \frac{a}{g}$$

und

$$\Delta H_{\mathrm{II}} = \Delta c_{\mathrm{II}} \frac{a}{g} = (c_0 - c_{\mathrm{II}}) \frac{a}{g},$$

also $c_{\mathrm{II}} > c_{\mathrm{I}}$ und $Q_{\mathrm{II}} > Q_{\mathrm{I}}$.

Damit werden beide Bedingungen der Hohlraumbildung erfüllt: im oberen Teil des Rohres herrscht volles Vakuum und der Abfluß ist größer als der Zufluß.

Während der Zeit Δt bildet sich auf der Strecke l der Hohlraum

$$V = (Q_{\mathrm{II}} - Q_{\mathrm{I}}) \Delta t.$$

Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Kapitels 3.3

$$V = \Delta F \cdot l,$$

und die auf die Längeneinheit während der Zeiteinheit entfallende Hohlraumbildung ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \tan \delta \; F_0 \frac{g}{a}. \tag{7}$$

Das in der Formel vorkommende Δt ist nichts anderes, als die erste Reflexionszeit. Für einen Punkt im Abstand x von R rückwärts gemessen, ist diese Zeit

$$\tau_x = \frac{2x}{a}.$$

Aus den Zahlenwerten des Beispiels ermittelt man

$$\tan \delta = \frac{0{,}018}{0{,}8} \cdot \frac{1{,}14^2}{2g} = 1{,}49 \cdot 10^{-3}$$

und

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = 1{,}49 \cdot 10^{-3} F_0 \frac{g}{a} = 7{,}34 \cdot 10^{-6}.$$

Am längsten ist Δt im Punkt K, u. zw. $\tau_K = 2L_2/a = 7{,}1$ s. Diesem Wert entspricht

$$\Delta f_K = 5{,}21 \cdot 10^{-5}\,.$$

Dazu gehört laut Bild 3: $\Delta z_K \cong 1{,}3 \cdot 10\mathrm{V}^{-3}$, somit für ein Rohr von 800 mm l. W.: $\Delta Z_K \cong 1$ mm.

Vom Punkt K aus in Richtung zum Oberbecken verlaufend verringert sich Δf linear mit der Entfernung. Damit wird auch die Höhe des entstandenen Hohlraumes geringer, deshalb spielt eine durch Rohrreibung verursachte Hohlraumbildung praktisch keine Rolle. Die reflektierte Druckwelle füllt diesen Hohlraum genauso auf, wie jene infolge der elastischen Volumänderung. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß die elastische Volumänderung eine nutzbare Energie speichert, die Hohlraumauffüllung aber diese in Wärmeenergie umwandelt, also verloren geht.

3.5. *Versuche in einer waagerechten Rohrleitung*

In der Betriebswarte der größten Pumpenanlage der Budapester Wasserwerke wurde in den 30er Jahren ein schreibender Druckmesser eingebaut. Im Normalbetrieb lief der Papierstreifen dieses Rohrfeder-Druckschreibers mit der Geschwindigkeit von 20 mm/h. Bei Stromausfall wurde die Geschwindigkeit auf 4 mm/s umgeschaltet, d. h., in 240 s lief eine Streifenlänge von 960 mm ab. Das Instrument registrierte mehrere Betriebsstörungen. Einen interessanten Abschnitt zeigt Bild 6. Kennzeichnend dabei ist, daß der Druck nicht auf den dem vollen Vakuum entsprechenden Wert sinkt. Vielmehr zeigte das Instrument $-0{,}6$ atü an, was am höchsten Punkt des Rohrleitungsquerschnittes einem Vakuum von 0,2 at entspricht. Deshalb kann keine wirkliche Hohlraumbildung auftreten. Als Erklärung hierfür sei erwähnt, daß die Pumpenanlage hindurch das Versorgungsgebiet in das Oberbecken arbeitet und sogar innerhalb dieses Gebietes liegt. So genügt schon ein geringes Vakuum, um durch die offengelassenen Hähne bei den Verbrauchern und durch etwaige undichte Stellen Luft, ferner aus den Steigleitungen gespeichertes Wasser einzusaugen und dadurch die ausgefallene Fördermenge zu ersetzen.

Das zweite interessante Merkmal der Aufzeichnung ist, daß das Vakuum nach etwa 35 s verschwindet und der Druck ohne Überschwingung langsam von 1,2 atü auf 2 atü ansteigt. In 90 s nach dem Übergang erscheint eine flache, bis auf 4 atü steigende Welle (in Bild 6 nicht mehr sichtbar), die allmählich den Beharrungswert von etwa 2,3 atü annimmt und diesen bis zum Wiederanlassen der Pumpen beibehält.

Das durch das Pumpenwerk geförderte Wasser gelangt durch zwei gußeiserne Rohrleitungen von je 1200 mm l. W. in das Stadtinnere. Die Lei-

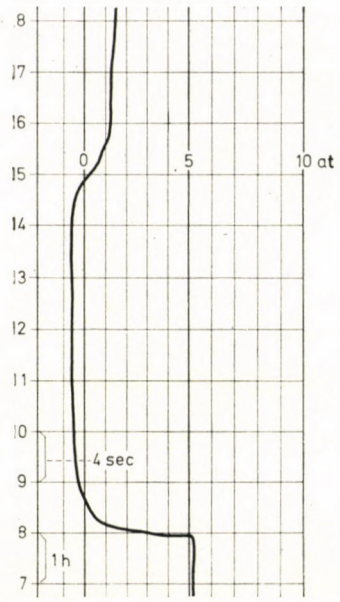


Bild 6

tungen haben anfangs eine gemeinsame Spur und mehrere Abzweigungen mit großen Nennweiten. Nach etwa 7,6 km trennen sich die Leitungen und kommen mit den Druckrohren anderer Pumpenwerke in Verbindung. Das nächste Speicherbecken liegt 4,6 km von der Verzweigstelle, gemessen längs der Rohrleitung.

Vor dem registrierten Stromausfall förderte das Pumpenwerk einen Wasserstrom von $Q_0 = 9660$ m³/h. Dem entsprach die Geschwindigkeit $c_0 = 1{,}188$ m/s. Wie aus dem Diagramm hervorgeht, fiel der Betriebsdruck infolge der Störung von $p_0 = 5{,}16$ atü auf $p_1 = -0{,}6$ atü. Dies entspricht einer Druckhöhenänderung von $H = 57{,}6$ m. Unter Zugrundelegung der Stoßwellengeschwindigkeit $a = 1000$ m/s änderte sich die Strömungsgeschwindigkeit um $\Delta c = 0{,}565$ m/s, d. h., die Betriebsgeschwindigkeit c_0 verminderte sich auf $c_1 = 0{,}623$ m/s. Die aus der Entfernung von 7,6 km reflektierte erste Stoßwelle verringert die Strömungsgeschwindigkeit beinahe auf Null und wie aus dem Diagramm ersichtlich, schließt die zweite Stoßwelle bereits den Hohlraum ab. Das entleerte Volumen — ohne Berücksichtigung der Pumpenförderleistung während des Abbremsens — geht nicht über 20 m³ hinaus. Dieses Volumen wird hauptsächlich durch die von höheren Niveaus zurückströmenden Wassermengen, und zum geringeren Teil durch angesaugte Luft ausgefüllt. Die Luft entweicht nachher langsam durch die Ausflußstellen bei den Verbrauchern, sobald der Leitungsdruck ansteigt. Leider war eine exakte Aus-

wertung der Versuche wegen der Kompliziertheit des Pumpenwerksystems ganz unmöglich.

Eher verwertbar erwies sich der durch die Fa. SULZER zwecks Untersuchung der Hohlraumbildung angelegte Versuch, der in der Abhandlung [4] veröffentlicht wurde. Die Versuchsstrecke bestand aus einer 1000 m langen waagerechten gußeisernen Rohrleitung von 200 mm l. W., der ein 6 m langes und um 5% steigendes Plexiglasrohr von 125 mm l. W. als Beobachtungsstrecke vorgeschaltet war. Im Plexirohr konnte die Hohlraumbildung unmittelbar verfolgt und gefilmt werden. Zum Schutz der Beobachtungsstrecke vor dem Anschluß an die Hauptleitung war eine Rückschlagklappe von 125 mm l. W. mit einer Umleitung von 20 mm l. W. eingebaut, gefolgt von dem Übergangsstück 125/200 mm. Ohne diesen Schutz hätte der Druckstoß das Plexirohr zersprengt, wie dies beim Abschluß der Versuche, nach Ausbau der Rückschlagklappe, geschah. Das 200-mm-Rohr mündete in ein Wasserbecken, in dem der Wasserspiegel auf der Höhe von 0,6 m über dem höchsten Punkt des Rohrleitungsquerschnittes gehalten war. Zur Versorgung der Versuchsanlage diente eine Kreiselpumpe mit der Förderleistung von $Q_0 = 26$ l/s, deren Druckstutzen nebst der Rückschlagklappe noch mit einem Schnellschlußventil versehen war. Die Einspeisung erfolgte mittels einer 30 m langen, die Pumpe mit der Versuchsstrecke verbindenden Steigleitung von 125 mm l. W., deren Ende an das durchsichtige Beobachtungsrohr mit Hilfe eines Krümmers angeschlossen wurde. Der Höhenunterschied zwischen Pumpenwelle und Rohrachse der Beobachtungsstrecke betrug rd. 10 m.

Die Abhandlung enthält mehrere Aufnahmereihen über dem Verlauf der Hohlraumbildung, aber für uns hauptsächlich die Erscheinungen in dem waagrechten Rohrleitungsabschnitt Interesse verdienen. Für die vorliegende Untersuchung der Hohlraumbildung wird auch an dieser Stelle die vorher schon angewandte Sägezahn-Konstruktion herangezogen. In Bild 7 wird die waagerechte Koordinatenachse wieder auf das höchste Niveau des Rohrleitungsquerschnittes verlegt. 10 m tiefer liegt die die Hohlraumbildung kennzeichnende Waagrechte H_K, während 0,6 m höher sich der gemeinsame Gipfelpunkt der zwei Parabeln befindet, die die Rohrreibung als Funktion der Geschwindigkeit darstellen (Kurve I). Die Reibungsverlusthöhe $h_{v0} = 5{,}4$ m ist auf Bild 14a der Abhandlung [4] dargestellt. Dieser Verlust tritt bei der Förderung $Q_0 = 26$ l/s, bzw. bei der Strömungsgeschwindigkeit $c_0 = 0{,}828$ m/s auf. Zwischen Kurve I und der Waagrechten H_K ist das Sägezahn-Diagramm der Stoßgeraden eingezeichnet. Zu den Knotenpunkten sind im Maßstab $t_S = L/a = 1000/1100 = 0{,}91$ s die Zeitpunkte angegeben, in denen sich die einem plötzlichen Abschluß folgenden Zustände in den Knotenpunkten befinden. Hier bezeichnet a die während der Versuche in der an beiden Enden abgeschlossenen Rohrleitung gemessene Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stoßwelle. Anhand der angeführten Daten konnte das Diagramm $t(c)$ im unteren Teil des Bildes 7

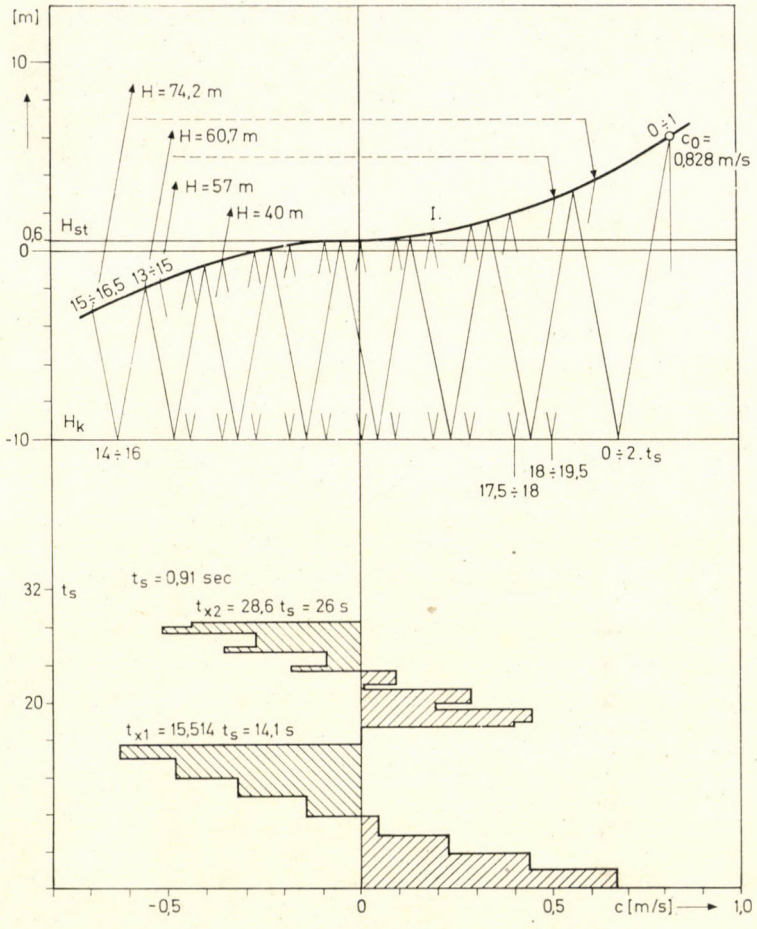


Bild 7

aufgetragen werden. Ähnlich dem Bild 5 wurde auch hier aufgrund der Gleichheit der Flächen rechts und links von der Achse $c = 0$ der Zeitpunkt des Zusammensackens des Hohlraumes u. zw. nicht bloß für das erste, sondern auch für das zweite Zusammensacken, ermittelt. Mit den dem Sägezahn-Diagramm entnommenen Daten wurden die beim Zusammensacken auftretenden Druckstöße berechnet und in Bild 8 unterhalb des beim Versuch aufgenommenen Diagrammes als Funktion der Zeit eingezeichnet. Wie man sieht, stimmt der Zeitpunkt und die Amplitude des ersten Druckstoßes ziemlich gut mit dem Versuchsergebnis überein. Die Abweichung der Kurvenform ist allerdings bedeutsam. Hingegen ist der Zeitpunkt, die Amplitude und die Gestaltung des zweiten Zusammensackens schon vollkommen anders. Wahrscheinlich ist dafür die sekundäre Schwankung des freien Wasserspiegels verantwortlich, wie dies auch aus den Filmaufnahmereihen hervorgeht.

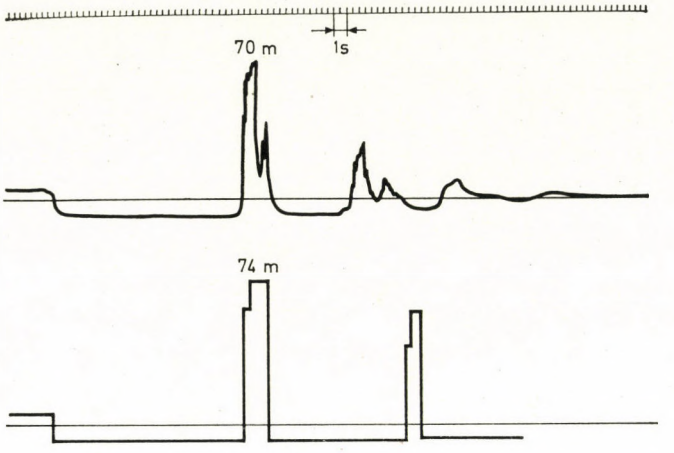


Bild 8

Aus den Daten des Sägezahn-Diagramms wurden mit Hilfe der Gl. (4a) und (5) die die Gestalt und die Abmessungen des Hohlraumes bestimmenden Zahlenwerte berechnet und in die Tafel I eingetragen.

Das Volumen des entstandenen Hohlraumes beträgt: $Fc_{ki} = 0{,}314 \cdot 1{,}420 \cdot 182 = 0{,}811$ m³. Selbstverständlich ergibt das Produkt der Werte in der Spalten 6 und 8 summiert dasselbe Ergebnis.

Die gesamte Vorwärtsbewegung des Hohlraumes beträgt 13 m. Dieser Wert steht in Widerspruch zu der Feststellung der Abhandlung, wonach auch die in dem Abstand von 35 m von der Meßstelle eingebaute Sonde sich rasch wiederholende Ablösungen angezeigt hat. Der Grund des Widerspruches ist darin zu suchen, daß das plötzliche Abschließen nicht unmittelbar vor der

Tafel I

1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{t_i}{t_s}$	c_{ki} (m/s)	$\frac{c_{ki}}{2gD}$	φ^0	Δz	Δf	w_i [m/s]	$S\Delta = w_i \Delta t$ [m]
0—2	0,682	0,1187	168	0,441	0,422	1,62	2,94
2—4	0,447	0,0510	138	0,322	0,279	1,60	2,92
4—6	0,241	0,0148	104	0,194	0,137	1,76	3,18
6—8	0,050	0,00064	55	0,055	0,023	2,18	3,96
	1,420						13,00

Meßstelle, sondern mittels des Schnellschlußventils am Druckstutzen der Pumpe erfolgte. Zwischen dem Ventil und der Meßstelle befand sich die 36 m lange Steigleitung von 125 mm l. W. mit einem rd. 10 m hohen Anstieg. Beim plötzlichen Abschließen entstand auch in dieser Steigleitung ein Hohlraum. Die mit der Anfangsgeschwindigkeit $c_0 = 2{,}03$ m/s strömende Wassermasse — den Anstieg auf 10 m Höhe als gleichmäßig angenommen — wurde mit einer negativen Beschleunigung $g_1 = g \sin \alpha = 2{,}73$ m/s² binnen 0,743 s abgebremst, kehrte um und schloß den Hohlraum mit einem heftigen Schlag ab. Zufolge der Elastizität des Wassers und der Rohrwandung wiederholte sich dieses Spiel mehrmals. Dadurch wird erklärt, daß . . .„Besonders nach einer plötzlichen Unterbrechung der Pumpfenförderung . . . die Kavitation sich durch eine rasche Folge von starken Schlägen bemerkbar machte". (Auf diese Frage kommen wir später noch zurück.) Für die Betrachtung der Erscheinungen im waagerechten Rohrleitungsabschnitt ist dieser Umstand nur soweit bemerkenswert, daß auch in diesem Falle von einer plötzlichen Abbremsung dort keine Rede sein kann. Nach dem erfolgten Abschluß strömt gleichfalls noch Wasser in diesen Rohrleitungsabschnitt ein, u. zw. mit linearer Verlangsamung. Es liegt wieder die gleiche Tatsache vor, die bezüglich des 800-mm-Rohres am Ende des Kapitels 3.3 geschildert wurde. Leider besagt die Abhandlung [4] nichts davon, wie weit die Sonden in das Rohrinnere hineinragten. Darum kann eine zahlenmäßige Auswertung hier nicht gegeben werden. Es ist allerdings wahrscheinlich, daß mit keiner neuen Aussage zu rechnen ist.

Es wurde auch die durch die Rohrreibung verursachte Hohlraumbildung berechnet, obwohl $\tan \delta = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$ hier größer ist, als der im Kapitel 3.4 erwähnte Wert. Zufolge des kleinen Rohrdurchmessers und des kurzen Rohrleitungsabschnittes ergab sich $\Delta Z \cong 0{,}2$ mm. Die Auswirkung der Reibung beschränkt sich auf eine ganz dünne Haut als Hohlraum.

4. Vertikale Rohrleitung

Die Betrachtungen beschränken sich hier auf Fälle, in denen ein Hohlraum nur in dem vertikalen Teilstück einer Rohrleitung entsteht, aber sich nicht auf die waagerechte oder schräge Strecke vor dem vertikalen Teil ausbreitet. In der Praxis kommen solche Fälle z. B. in den Steigleitungen von Wassertürmen, doch nur bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten vor. Häufiger begegnet man dieser Erscheinung in den Druckrohren der Entwässerungspumpanlagen von Bergwerken. Ein solches Beispiel sei für die vorliegenden Betrachtungen herangezogen. Die Anordnung einer ausgeführten Anlage geht aus Bild 9 hervor.

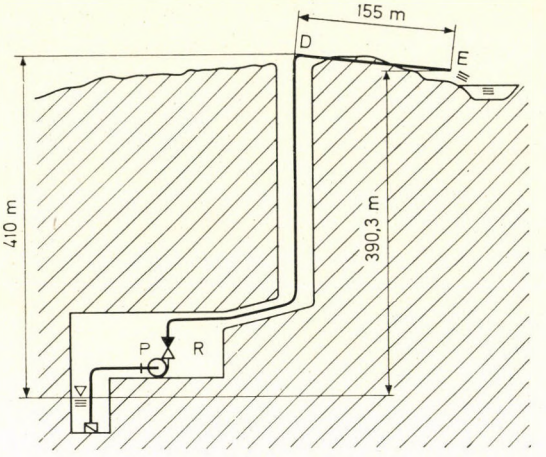


Bild 9

4.1. *Ausfluß ins Vakuum, plötzlicher Abschluß*

Der Ausfluß ins Vakuum kommt nicht selten bei Betriebsstörungen vor. So z. B., wenn die Neigung des Rohrleitungsabschnittes $D-E$ in Bild 9 so gering wäre, daß die Strömung in Normalbetrieb den ganzen Rohrleitungsquerschnitt ausfüllte, reißt die Wassersäule beim plötzlichen Abstellen im Punkt D ab und der dort gebildete Hohlraum bleibt solange bestehen, bis sich die Strecke $D-E$ entleert, oder rückströmendes Wasser den Hohlraum schließt.

Die Voraussetzung für den plötzlichen Abschluß, die Außerachtlassung der Rohrreibung, die Annahme eines konstanten Rohrdurchmessers und solcher Wandstärken sind bloß Annäherungen zwecks Vereinfachung der Betrachtungen.

Die Betriebsgeschwindigkeit c_0 des Wassers geht im Augenblick des Abschlusses auf Null zurück. Das zieht laut dem Alliévischen Gesetz eine Verminderung der Druckhöhe $y_0 = c_0\, a/g$ nach sich. Das Ende des senkrechten Rohrleitungsabschnittes (Punkt D, im folgenden mit Y_0 bezeichnet) mündet ins Vakuum. Im Abstand y_0 vom Punkt Y_0 abwärts gemessen liegt unter bestimmten Betriebsverhältnissen der kritische Punkt der Rohrleitung. Dieser soll im folgenden als Nullpunkt O des Koordinatensystems dienen. Beim Durchlauf der Stoßwelle fällt hier sowohl die Geschwindigkeit als auch der Druck auf Null. Unterhalb des Nullpunktes O ist die Geschwindigkeit $c = 0$, dagegen die Druckhöhe $h > 0$. Oberhalb des Nullpunktes beträgt die Druckhöhe $h = 0$, während $c > 0$ ist. Nachdem der Druck nicht unter den Dampfdruck sinken kann, steht in der Höhe y über Nullpunkt der Druckhöhenunterschied

$y_0 - y$ zur Verfügung. Es ist

$$y_0 - y = (c_0 - c_K)\frac{a}{g},$$

und weil $y_0 = c_0\, a/g$ ist, wird

$$c_K(y) = y\frac{a}{g}. \tag{8}$$

Die nach Durchlauf der Welle zurückbleibende kritische Geschwindigkeit c_K ändert sich also proportional zu y, während im Punkt Y_0 die Betriebsgeschwindigkeit c_0 aufrechterhalten bleibt. Die Bedingungen der Hohlraumbildung sind erfüllt: im Rohrleitungsabschnitt zwischen den ausgewählten Querschnitten I und II sinkt nach Durchlauf der Stoßwelle der Druck auf Null, und die eingespeiste Wassermenge ist kleiner als die abströmende. Nach Beginn der Hohlraumbildung bewegt sich ein Wasserelement in dem Schwerefeld nach den Gesetzen des vertikalen Wurfes. Eine elementare Wassermasse in der Höhe y über dem Nullpunkt O wird durch die Welle nach Ablauf der Zeit $t_A = y/a$ erreicht. Hier beträgt die kritische Geschwindigkeit des Wasserelementes nach Gl. (8) $c_K = y\, g/a$. Diese Geschwindigkeit verringert sich mit der Beschleunigung $-g$, wird nach der Zeit $\Delta t = c_K/g = y/a$ gleich Null, wobei das Wasserelement in der Höhe von $h_H = c_K^2/2g$ gipfelt. Danach kehrt es nach Ablauf der Zeit $\Delta t = y/a$ mit der Geschwindigkeit $-c_K$ auf seinen Ausgangspunkt zurück und setzt sich auf die Wassersäule, die unterhalb dessen bereits zur Ruhe kam. Wenn also die Zeitzählung mit $t = 0$ beginnt, d. h. bei Ankunft der Stoßwelle im Nullpunkt O, so wird die Welle im Zeitpunkt $t_A = y/a$ die Höhe y erreichen. Das Wasserelement gipfelt im Zeitpunkt $t_H = 2y/a$ und kehrt im Zeitpunkt $t_R = 3y/a$ auf seinen ursprünglichen Platz zurück. Wird dieser Vorgang auf den Punkt Y_0 bezogen und die Durchlaufzeit der Stoßwelle mit $t_D = y_0/a$ bezeichnet, so ergeben sich die Werte $t_A = t_D$, $t_H = 2t_D$, $t_R = 3t_D$.

Die Entstehung und das Zusammensacken des Hohlraumes sind in Bild 10 sehr anschaulich dargestellt. Hier sind die Zustände in der (c, y)-Ebene mit einer Zeitverschiebung von $1/4\ t_D$ gezeichnet. Rechts und links von der y-Achse liegen in den Abständen $c = c_0$, bzw. $c = -c_0$ die mit dünner Linie gezeichneten lotrechten Geraden. Die Diagonalen der durch die Koordinatenachsen, sowie die Linien c_0 und y_0 gebildeten Parallelogramme veranschaulichen die kritische Geschwindigkeit c_K. Die dick ausgezogenen Linienstücke stellen die Geschwindigkeit des Wasserelementes dar, u. zw. die stetigen im kavitationsfreien, die strichlierten im kavitationsbehafteten Bereich.

Das waagerechte Linienstück zwischen den Vertikalen $c = 0$ und $c = c_0$ bildet das plötzliche Abbremsen ab. Dieses Stück befindet sich im Zeitpunkt $t = 0$ in dem Nullpunkt O und bewegt sich mit der Stoßwellengeschwindigkeit a aufwärts, legt somit im Zeitmaßstab der Bilderreihe $\Delta t = 1/4 t_D$ den Weg

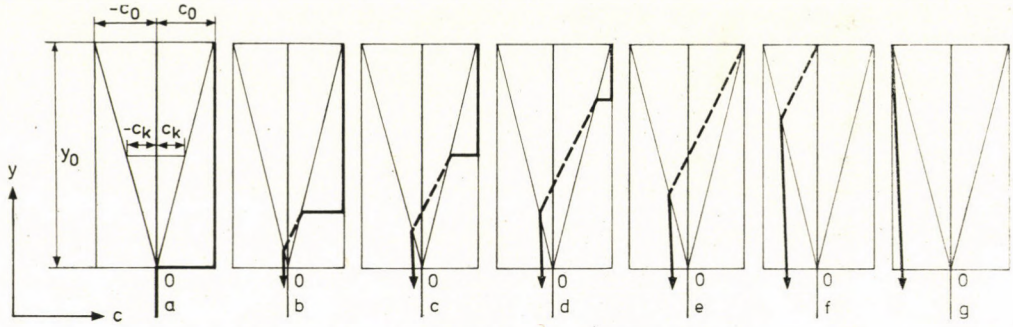


Bild 10

$\Delta y = at_D/4 = y_0/4$ zurück. Der waagerechte Abstand zwischen der Koordinatenachse $c = 0$ und der schrägen Geraden c_K zeigt die verbleibende Geschwindigkeit, und der Abstand zwischen den Linien c_K und c_0 den Geschwindigkeitsabfall an. Der Schnittpunkt der den Kavitationszustand anzeigenden gestrichelten schrägen Geraden mit der $+c_K$-Linie entspricht dem Beginn der freien Bewegung, ihr Schnittpunkt mit der Koordinatenachse den Gipfeln, und mit der $-c_K$-Linie der Rückkehr. Aus dem Vorstehenden folgt, daß die Punkte des Anfanges, der Kulmination und der Rückkehr der Reihe nach mit den Geschwindigkeiten a, $a/2$ und $a/3$ während eines Zeitschrittes die Wege $y_0/4$, $y_0/8$ und $y_0/12$ aufwärts zurücklegen.

Von dem Punkte, wo die Rückkehr endet, läuft eine elastische Welle zu dem Pumpenwerk, weil unterhalb dieses Punktes die Kavitation schon aufhört. Die abwärts gerichtete schräge Gerade gibt hier die Gestaltung der Geschwindigkeit an. Sie ist leicht zu konstruieren, weil der Punkt O, wofür $t_A = t_H = t_K = 0$ gilt, während der Rückkehrzeit mit der Geschwindigkeit a den Weg $3y$ abwärts, entlang der Koordinatenachse durchläuft. Der Tangens des Winkels zwischen der schrägen Geraden und der y-Achse ist daher

$$\tan \varepsilon = \frac{c_0}{4y_0}.$$

Wie aus dem Bild ersichtlich, verlaufen die den Kavitationszustand darstellenden schrägen Linien parallel. Daraus ist abzuleiten, daß

$$\frac{dc}{dy} = \frac{2c_0}{y_0} = \frac{2g}{a} \; [\mathrm{s}^{-1}]$$

ist. Der sich während der Zeiteinheit auf der Längeneinheit bildende Hohlraum ist

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dy}.$$

Auf der Höhe y ergibt sich die für die Hohlraumbildung verfügbare Zeit zu

$$t(y) = \frac{2y}{a}.$$

Im Endergebnis kann das Hohlraumvolumen mit diesen Gleichungen errechnet werden, doch nützt dies wenig, denn in diesem Falle besteht der Hohlraum aus einer Unzahl von Blasen, als Folge der Ausdehnung des Wasserelementes. Das Schließen erfolgt durch allmähliche Auffüllung der Blasen und nicht als ein schlagartiges Zusammensacken eines großen Hohlraumes und so tritt auch keine jähe Druckerhöhung oder ein harter Wasserschlag auf.

Genau genommen sind die die Geschwindigkeiten abbildenden schrägen Linien eigentlich keine Geraden, weil der wirkliche Gipfelpunkt um $\delta y = c_K^2/2g$ höher liegt, als im Bild sichtbar. Die wirkliche Linie ist also nach unten konkav. Weil jedoch $c_K^2/2g \ll y$, oder — unter Berücksichtigung der Gl. (8) — $c_K^2/2gy = c_K/2a \ll 1$ ist, kann die krumme Linie ohne Bedenken durch eine Gerade ersetzt werden.

Nach Überblick der Ereignisse oberhalb des Punktes O soll nun die Aufmerksamkeit auf den Einfluß des Rohrleitungsabschnittes vor dem Punkt O gelenkt werden. Das anschauliche graphische Verfahren zur Konstruktion der Stoßgeraden wird auch diesmal gute Dienste leisten. Im oberen Teil des Bildes, in der (c, y)-Ebene wurden zu den Schnittpunkten der Stoßgeraden die Zeitpunkte der Ankunft der Welle und der Umkehr des Wasserelementes im Maßstab der Zeitschritte aufgeschrieben. Als Zeitschritt wird das Einviertel der Durchlaufzeit des Abstandes $O - Y_0$ gewählt, d. h. $\Delta t = y_0/4a = t_D/4$. Der Anfangspunkt des Zeitschrittes ist jetzt nicht der Punkt O, sondern der Rohranfangspunkt (die Abschlußstelle) P. Alle hier beobachteten Zustände (bzw. ihre Kennpunkte) liegen der Reihe nach auf der y-Achse. Ihre Numerierung wurde — der besseren Übersichtlichkeit zuliebe — auf eine Gerade rechts vom Diagramm projiziert. Aus mehreren bearbeiteten Konstruktionsbeispielen sollen hier zwei vorgestellt werden.

Wie Bild 11 zeigt, befindet sich zwischen der Abschlußstelle P und dem Punkt O ein verhältnismäßig langer Rohrleitungsabschnitt, u. zw. das Dreifache des Abstandes y_0. Die den Abschluß tragende Welle trifft im 12ten Zeitschritt im Punkt O ein. Gemäß dem vorher Gesagten herrscht dort bereits ein volles Vakuum, jedoch ist die Geschwindigkeit noch $c = 0$. Von nun an sitzen die Zustandspunkte nicht mehr auf der y-Achse, sondern — wie aus Gl. (8) folgt — auf der Geraden $c_K(y)$, die unter dem Winkel von 45° im Punkt 12 von den Koordinatenachsen abzweigt. Zum nächstfolgenden Punkt 13 gelangt die Welle in der Zeit Δt, somit wird die mit Gl. (8) des vertikalen Wurfes berechnete Anfangsgeschwindigkeit $c_{13} = g\Delta t$. Deshalb kehrt das Wasserlement mit der Geschwindigkeit $-c_{13}$ in der Zeit $2\Delta t$ (oder vom Punkt P ab gerechnet, in $15\Delta t$) auf seinen ursprünglichen Platz zurück und schließt

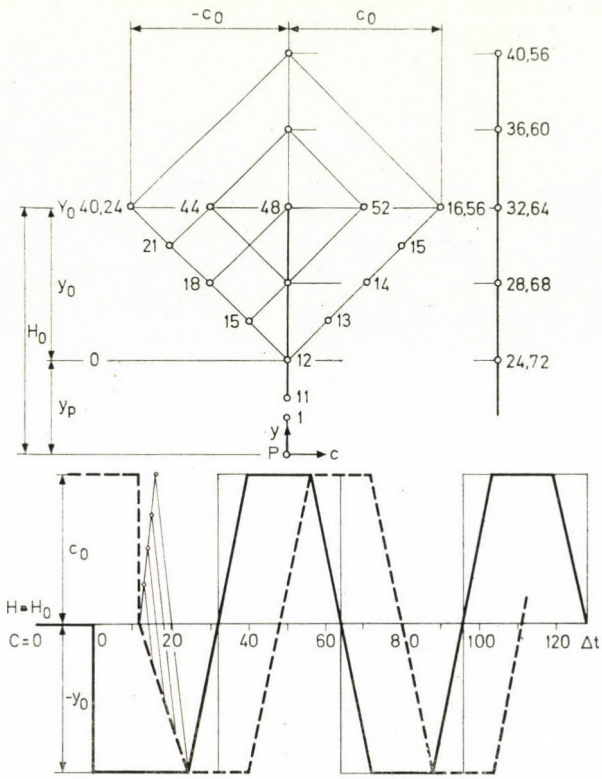


Bild 11

sich an die unterhalb befindliche Wassersäule an. Der folgende Punkt 14 liegt im Zeitabstand $2\Delta t$ vom Punkt O entfernt, also gelangt das Wasserelement in dem mit 18 bezeichneten Zeitpunkt wieder auf ihren alten Platz zurück.

Die Druckhöhenwerte im Punkt P gewinnt man durch Projizieren der Punkte 15, 18, ... auf die y-Achse mit Hilfe von positiven Stoßgeraden. Die zugehörigen Zeitpunkte sind durch Hinzuaddieren der Druchlaufzeit zwischen dem jeweiligen Druckhöhenpunkt und dem Punkt P zu berechnen. So erhält man $15 + 13 = 28$; $18 + 14 = 32$ usw. Nach der Konstruktion des ganzen Diagramms kann der zeitliche Verlauf der Zustandsänderungen anhand der aufgeschriebenen Zeitwerte eingezeichnet werden.

Im unteren Bildteil zeigt die volle Linie den im Punkt P gemessenen Druck, die gestrichelte Linie die Geschwindigkeit im oberen Endpunkt der dort schon zusammengepreßten Wassersäule, und die stetige dünne Linie den Druckverlauf für den Fall, wenn sich kein Hohlraum in dem oberen Rohrstück bildete, sondern die $L = 16\Delta ta$ lange Rohrleitung in ein $4\Delta ta$ hohes Becken mündete.

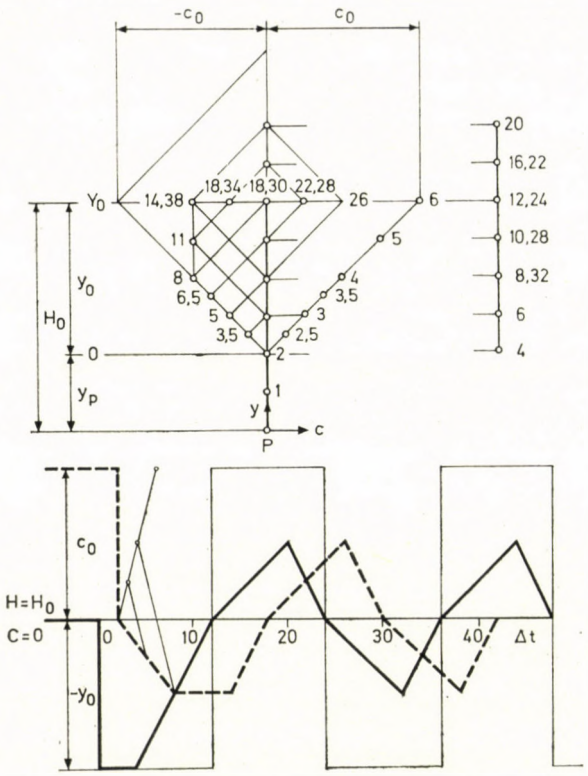


Bild 12

Der Vergleich der beiden Drucklinien verrät, daß die Hohlraumbildung in einem senkrechten Rohr die steile Ausgestaltung der Stoßwelle abschwächt und in dieser Hinsicht die Gefahr des Druckstoßes verringert. In erhöhtem Maße gilt dies für eine kurze Rohrleitung, wo außer der Steilheit auch die Amplitude der Welle geringer ausfällt.

Das Bild 12 wurde ähnlich dem Bild 11 angefertigt. Im dargestellten Fall ist der Rohrleitungsabschnitt vor dem Punkt *O* kurz, seine Länge beläuft sich auf bloß 2 Einheiten. Beim Vergleich der Bilder springt sofort ins Auge, daß die linke Seite des Rhombusses auf Bild 12 abgeschnitten ist. Auf diesem Gebiet der Zahlenebene bildet sich nämlich bis zur Ankunft der Welle noch kein kavitationsloser freier Wasserspiegel aus, von dem die Welle reflektiert werden könnte. Dementsprechend sind die im unteren Teil des Bildes dargestellten Druck- und Geschwindigkeitswellen nicht nur flacher, sondern auch ihre Amplituden sind kleiner.

Beim noch kürzerem Abstand $P-O$ werden die Amplituden noch geringer und im Grenzfall sind die Punkte P und O identisch. Man sucht dann bei der

Konstruktion der Figur vergebens nach einem kavitationslosen freien Wasserspiegel, der die Welle reflektieren könnte. Dies bedeutet, daß die fortwährende Hohlraumbildung und das Zusammensacken die Energie verbrauchen und sich in Kürze ein Ruhezustand $h_P = y_0$ einstellt.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde vorausgesetzt, daß das in der Höhe y im Zeitpunkt $t_A = y/a$ mit vertikalem Wurf in Bewegung gesetzte Wasserlement im Zeitpunkt $t_R = 3y/a$ auf die Höhe y zurückkehrt und dort der unterhalb dessen bereits zusammengesackten Wassersäule begegnet. Das trifft aber nur annähernd zu, weil sich die unten befindliche Wassersäule während der Zeit $\Delta t = t_R - t_A = 2y/a$ infolge elastischer Zusammenpressung abwärts bewegt hat. Somit liegt der Treffpunkt tiefer als y. Allerdings kann die Höhenverschiebung δy gegenüber y vernachlässigt werden ($\delta y \ll y$). Ihre Wirkung offenbart sich bloß darin, daß die Rückkehrgeschwindigkeit $|c_R^*| > c_R = y\,g/a$ wird und sich auch die Rückkehrzeit auf $t_R^* > t_R = 3y/a$ verlängert. Das Bild 11 wurde mit der Annahme einer Rückkehrzeit von $t_R^* = 4a/a$ umgezeichnet. Es weicht vom originalen Bild nur soweit ab, daß die Flanken der die Wellen darstellenden Trapeze flacher wurden. Deshalb kann hier auf eine weitere Betrachtung dieser Varianten verzichtet werden.

4.2. *Ausfluß ins Vakuum, Abbremsen in endlicher Zeit*

Bei Betriebsstörungen im Pumpenwerk hört die Wasserförderung immer in endlicher Zeit auf. Die Bremskurven $t(q)$ des Förderstromes sind aus den Bildern 4, 15 und 17 ersichtlich, wobei t die Zeit von der Abschaltung der Pumpe an gerechnet wird und $q = Q/Q_0 = c/c_0$ ist. Das erstgenannte Bild bezieht sich auf den Fall, wo an irgendeinem Punkt der Druckrohrleitung ein lange anhaltender, umfangreicherHohlraum entsteht. Das zweitgenannte Bild veranschaulicht den Fall, in dem die Druckrohrleitung im Verhältnis zum Schwungmoment der umlaufenden Maschinenteile kurz ist, wodurch auch die Wirkung der rückkehrenden Welle zur Geltung kommt. Im dritten Bild erscheint die Abbremszeit kürzer als die Reflexionszeit, d. h. $t_B < T_R$.

Nachstehend soll nur der letzterwähnte Fall geschildert werden. Aus Bild 17 ist ersichtlich, daß die Kurve $t(q)$ — Kurve IV — ein einziger flacher Bogen ist, der der Einfachheit halber durch die seine Endpunkte verbindende Sehne linearisiert wird. Dadurch entspricht der Abbremslinie eine schräge Gerade zwischen dem Ordinatenpunkt $t = t_B$ und dem Abszissenpunkt $q = 1$. Die Neigung der Geraden zu der $+q$-Achse wird durch die Richtungstangente $\tan\beta = -t_B$ angegeben. Die Geschwindigkeit c ergibt sich aus $c = qc_0$.

Auf der y_0 langen Strecke $O - Y_0$ der Rohrleitung tritt auch diesmal die Hohlraumbildung auf, jedoch nur unter bestimmten Bedingungen. Diese Bedingungen und der Verlauf der Hohlraumbildung können am deutlichsten in Bild 13 verfolgt werden, die ähnlich dem Bild 10 in der (c, y)-Zahlenebene gezeichnet wurde. Das Bild unterscheidet sich vom früheren nur soweit, daß hier die Bremslinie kein waagerechtes Linienstück zwischen $c = 0$ und $c = c_0$, sondern ein aus der (q, t)-Ebene in die (c, y)-Ebene transformiertes Abbild der $t(q)$ Kurve ist. Wenn als Anfang der Zeitzählung der Augenblick gewählt wird, in dem die durch Abschalten der Pumpe verursachte Stoßwelle im Punkt

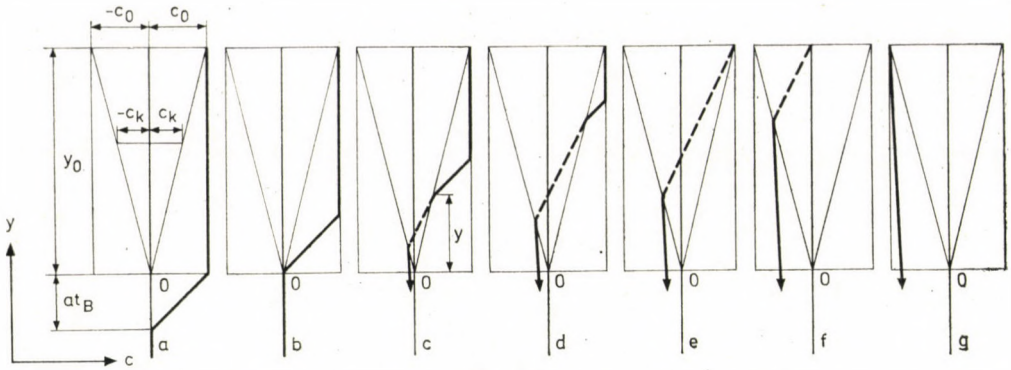


Bild 13

O eintrifft, so wird die transformierte Kurve eine schräge Gerade, die den Ordinatenpunkt $y = -t_B a$ mit dem Abszissenpunkt $c = c_0$ verbindet (Bild 13a). Danach verschiebt sich die schräge Gerade aufwärts, ihr unteres Ende erreicht nach t_B den Punkt O, wo die Hohlraumbildung einsetzt. Während der Zeitspanne t_B legt das obere Ende der schrägen Bremsgeraden ebenfalls den Weg $y = t_B a$ längst der Ordinate $c = c_0$ aufwärts zurück. Für das Zurücklegen des übrigen Weges $y_0 - y$ steht also die Zeitspanne $t_D - t_B$ zur Verfügung. Während dieser Zeitspanne kann die Hohlraumbildung entlang der ganzen Strecke $O - Y_0$ einsetzen. Die Hohlraumbildung setzt nämlich in einem beliebigen Punkt in der Höhe y erst dann ein, wenn die Bremsgerade die c_K-Linie in der Höhe y schneidet. Der Schnittpunkt durchläuft die Strecke $O - Y_0$ während der Zeitspanne $t_D - t_B$. Demnach beträgt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Einsetzens der Hohlraumbildung

$$u_A = \frac{y_0}{t_D - t_B}. \tag{9}$$

Ansonsten ist der Verlauf der Hohlraumbildung genau gleich jenem, der in Verbindung mit Bild 10 besprochen wurde. Allein die Anfangszeitpunkte und damit auch die Gipfelzeitpunkte sowie die Rückkehr sind verschoben. Die Hohlraumbildung gestaltet sich ebenso. Die gestrichelten Linien sind parallel zu denjenigen im Bild 10.

Falls $t_B = t_D$, so wird $u_A = \infty$, d. h., die Hohlraumbildung beginnt gleichzeitig auf der ganzen Strecke $O - Y_0$. Wenn jedoch $t_B > t_D$, so wird $u_A < 0$, die Bildung des Hohlraumes beginnt in Punkt Y_0 und läuft von da aus zurück. Die Ereignisse während des Verlaufes der Hohlraumbildung sind für mehrere abgerundete Werte von t_B in Tafel II angeführt.

Hinsichtlich des Wasserstoßes hat nur die Rückkehr, das Schließen des Hohlraumes Bedeutung. Die gefährliche Auswirkung des Wasserstoßes rührt nicht nur von der Größe des Druckanstiegs, sonders auch von der Steilheit

Tafel II

t_B	Ankunft			Kulmination			Rückfall		
	in 0	in Y_0	u_A	in 0	in Y_0	u_H	in 0	in Y_0	u_R
$t_B = 0$	0	t_D	a	0	$2t_D$	0,5a	0	$3t_D$	$\frac{1}{3}a$
$t_B = t_D$	t_D	t_D	∞	t_D	$2t_D$	a	t_D	$3t_D$	$\frac{1}{2}a$
$t_B = 2t_D$	$2t_D$	t_D	$-a$	$2t_D$	$2t_D$	∞	$2t_D$	$3r_D$	a
$t_B = 3t_D$	$3t_D$	t_D	$-2a$	$3t_D$	$2t_D$	$-a$	$3t_D$	$3t_D$	∞
$t_B = 3t_D$	keine Hohlraumbildung								

der Wellenstirn her. Darum ist das plötzliche Zusammensacken eines großen und dabei steilflankigen Hohlraumes gefährlicher, weil ein jäher Wasserstoß die schwächeren Teile der Rohrleitung hammerartig zerstört. In einem vertikalen Rohr kommt, wie schon erwähnt, kein plötzliches Schließen eines größeren Hohlraumes vor. Die Wasserlemente lagern sich mit endlicher Geschwindigkeit schichtenweise aufeinander, wie aus der letzten Spalte der Tafel II hervorgeht. Die Rückfallgeschwindigkeit ist zwar bei $t_B = 3t_D$ $u_R = \infty$, das ist aber jener Grenzwert, bei dem sich die Hohlraumbildung nicht mehr abwärts ausbreitet. Im Endergebnis bremst die Hohlraumbildung in einem vertikalen Rohr — wie auch die Bilder 11 uns 12 zeigen — die Steilheit der Druckwellen ab.

In Wirklichkeit ist es unnötig, die Bremskurve $t(q)$ durch eine Gerade zu ersetzen. Die Kurve selbst kann in die Zahlenebene (c, y) des Bildes 13 transformiert werden, wie in Zusammenhang mit der schrägen Bremsgeraden geschildert wurde.

4.3. *Ausfluß in die Atmosphäre, plötzliches Abbremsen*

Das in einem vertikalen Rohrleitungsabschnitt strömende Wasser kommt entweder am Ende des Abschnittes mit der Atmosphäre in Berührung, oder mündet in einen mehrere Meter hohen, mit Wasser gefüllten, offenen Behälter. Ein Beispiel für den ersten Fall ist auf Bild 9 ersichtlich, falls das Wasser mit freiem Spiegel im Rohleistungsabschnitt $D—E$ strömt. Der zweite Fall kommt vor, wenn die Rohrleitung an oder nahe an den Boden eines offenen Behälters angeschlossen ist.

In der Verlängerung der lotrechten Rohrleitung sei ein Punkt Y_0 10 m hoch über dem freien Wasserspiegel bestimmt. Hier wäre das Rohrende, wenn der Ausfluß ins volle Vakuum stattfinden würde. Unterhalb dieses Punktes

im Abstand $y_0 = c_0\, a/g$ befindet sich der Punkt O in jener kritischen Höhe, wo die Strömungsgeschwindigkeit bei Ankunft der Stoßwelle auf $c = 0$ und der Druck auf den Sattdampfdruck sinkt. Oberhalb des Punktes O in der Höhe y tritt beim Durchlauf der Stoßwelle Vakuum auf, aber die Geschwindigkeit behält den kritischen Wert $c_K = y\, g/a$. Bis jetzt spielt sich alles genauso ab, wie im Kapitel 4.1 beschrieben. Dieser Zustand bleibt solange aufrecht, bis die Stoßwelle das Rohrende in der Höhe y_E erreicht. Hier wirkt auf die freie Bewegung des auf die Geschwindigkeit

$$c_E = y_E - y_E \frac{g}{a} = c_0 \frac{y_E}{y_0}$$

abgebremsten Wasserelementes nicht allein die Schwerkraft, sondern auch der atmosphärische Druck und allenfalls noch die Druckhöhe der Wassersäule in einem darüberliegenden Behälter, insgesamt also die Wassersäule $h_E = y_0 - y_E$ [m]. Dementsprechend ist die Bremsbeschleunigung des an das Rohrende in Y_E anschließenden Δy hohen Wasserelementes nicht $-g$, sondern erheblich größer:

$$b = -g \left(1 - \frac{h_E}{\Delta y}\right) [\mathrm{m/s^2}]\,. \tag{10}$$

Das Schließen des nach Durchlauf der Stoßwelle entstandenen Hohlraumes wird also aus zwei Richtungen eingeleitet: 1. von unten her, wie im Kapitel 4.1 eingehend dargelegt wurde, 2. von oben her, rückwärts vom Punkt Y_E aus, weil dort die Bremsbeschleunigung einen höheren Wert hat. Das endgültige Schließen erfolgt daher in irgendeinem Punkt der Strecke $O - Y_E$.

Die Bewegungsgesetze des aus dem Punkt Y_E rückwärts eingeleiteten Schließens sind schon viel verwickelter, in den Gleichungen kommen Glieder zweiten Grades vor. Deshalb wird versucht, den Verlauf der Ereignisse mittels eines Näherungsverfahrens zu erläutern. Zwecks Erleichterung der Berechnung und der Darstellung sollen folgende Vereinfachungen eingeführt werden: 1. Der vor dem Punkt O liegende Rohrleitungsabschnitt soll so lang sein, daß die zurücklaufende Stoßwelle die sich oberhalb des Punktes O abspielenden Ereignisse nicht beeinflußt. 2. Der Rohrleitungsabschnitt $O - Y_E$ wird in mehrere gleiche Δy lange Elemente zerlegt; in jedem Punkt eines Elementes hat die Geschwindigkeit, die Wasserdichte und der Druck jederzeit denselben Wert. Daraus folgt, daß innerhalb eines Elementes die Fortpflanzungszeit der elastischen und der durch Blasenbildung hervorgerufenen Formänderung zu Null wird. In Wirklichkeit gilt dies nur, wenn das Element unendlich kurz ist. Aber durch Verringerung der Elementenlänge auf einen sehr kleinen endlichen Wert kann die Bedingung praktisch erfüllt werden. 3. Das Gleiche gilt für die Vereinfachung, womit das Impulsgesetz des unelastischen Stoßes auf den Aus-

gleich der Geschwindigkeiten bei dem von oben nach unten gerichteten Zusammenschluß der Wasserelemente angewandt wird. 4. Die elastische Formänderung anläßlich des Durchlaufes der Stoßwelle wird vernachläßigt, bzw. in die Voraussetzung einverleibt, daß während der Laufzeit der Welle vom Schwerpunkt des i-ten Elementes zum Schwerpunkt des $(i+1)$-ten Elementes das letztere — der augenblicklichen Abbremsung entsprechend — sich mit der Geschwindigkeit c_{ki} vorwärts bewegt. Dies ist zwar eine etwas gewaltsame Einschränkung, doch ist der hierdurch begangene Fehler bedeutungslos und kann beim Gebrauch einer Rechenmaschine durch Verkürzung der Elemente fast zum Verschwinden gebracht werden. Es ist auch möglich, die Bedingung anderswie zu fassen.

Als Beispiel für den Rechnungsgang soll der vertikale Rohrleitungsabschnitt der im Bild 9 dargestellten Bergwerks-Entwässerungsanlage dienen. Die lichte Weite des Stahlrohres ist $D = 300$ mm, der betriebsmäßige Förderstrom $Q_0 = 0{,}15$ m³/s, daher $c_0 = 2{,}12$ m/s. Die Stoßwellengeschwindigkeit wurde zu $a = 1250$ m/s ermittelt und daraus $y_0 = c_0\, a/g = 270$ m, sowie $y_E = 260$ m bestimmt. Als Längenmaßstab wurde $\Delta y = 2{,}5$ m gewählt. Das ist gleich dem Wege, den die Stoßwelle während des Zeitschrittes $\Delta t = 0{,}002$ s $= 2$ ms durchläuft. Hiermit folgt $y_E = 104\Delta y$ und $y_0 = 108\Delta y$. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems liegt im Punkt O. Da beginnt die Numerierung der Wasserelemente mit $i = 1$.

Um die Bezeichnungen zu vereinfachen wird für die Darstellung der von oben eingeleiteten Schließung ein Koordinatensystem eingeführt, das in den Endpunkt Y_E des Rohres verschoben ist. In diesem System bezeichnet $\eta_i = y_i - y_E$. Die Numerierung der $\Delta\eta = \Delta y = 2{,}5$ m langen Elemente gilt nun von oben nach unten. Der Nummer $i = 104$ entspricht hier $j = 1$, d. h., im allgemeinen ist $j = 104 - (i - 1)$. Als Anfang der Zeitzählung wird der Augenblick gewählt, in dem die Welle den Schwerpunkt des mit der Atmosphäre in Berührung stehenden Elementes erreicht. Dieses Element trägt die Nummer $j = 1$, sein Schwerpunkt liegt in $\eta_{1s} = -1{,}25$ m, wodurch dem Zeitpunkt $\tau = 0$ die Höhe $y_{104s} = 258{,}75$ m entspricht. Im Zeitpunkt $\tau = 0$ beträgt die Anfangsgeschwindigkeit des Elementes $j = 1$

$$c_1(0) = y_s \frac{g}{a} = 258{,}75 \frac{g}{a} = 207g\,.$$

Um in der Rechnung die langen Dezimalbrüche zu vermeiden, sollen als Einheiten der Länge und der Zeit mm und ms dienen. Man hat bloß darauf zu achten, daß jetzt für $g = 9{,}81$ mm/(ms)² $= 9{,}81 \cdot 10^{-3}$ m/s² einzusetzen ist.

Durch Ausklammern der Beschleunigung erhält man für die Beiwerte in den Bewegungsgleichungen — die Funktionen von j sind — regelmäßige Zahlenreihen, welche sich leicht tabellieren lassen.

Die Kinematik des Schwerpunktes des frei beweglichen j-ten Elementes wird durch folgende Ausdrücke beschrieben:

die Beschleunigung $b_j = -g$,

die Geschwindigkeit $c_j(\tau) = g[-\tau + 207 - 4(j-i)]$,

die Lage (Koordinate)

$$\eta_j(\tau) = g\left\{-\frac{\tau^2}{2} + [207 - 4(j-i)]\tau - 6(j-1)^2 - 18(j-1)\right\} - \\ - 2500(j-1) - 1250\,. \tag{11}$$

Ähnlicherweise gelten für den Schwerpunkt des mit der Atmosphäre in Berührung stehenden, aber schon verkuppelten oj-ten Elementen die Ausdrücke:

die Beschleunigung

$$b_{0j} = -g\left(1 + \frac{4}{j}\right),$$

die Geschwindigkeit

$$c_{0j}(\tau) = g\left[-\left(1 + \frac{4}{j}\right)\tau + 207 - 2(j-1)\right], \tag{12}$$

die Lage (Koordinate)

$$\eta_{0j}(\tau) = g\left\{-\left(1 + \frac{4}{j}\right)\frac{\tau^2}{2} + [207 - 2(j-1)]\tau\right\}.$$

Das $(j+1)$-te freie Element schließt sich in dem Augenblick an das j-te, bereits angeschloßene Element an, wenn der Abstand ihrer Schwerpunkte

$$\eta_{0j}(\tau) - \eta_{j+1}(\tau) = -1250j + 2500j + 1250 = 1250(j+1) \tag{13}$$

beträgt. In diesem Moment hat sich das Glied $j+1$ bereits auf seine ursprüngliche Länge zusammengezogen.

Unter dieser Bedingung ergibt sich aus den vorigen Ausdrücken eine Gleichung zweiten Grades für den Zeitpunkt **a** des Anschlusses

$$\tau^2 - j(j+1)\tau = 3j^3 + 9j^2. \tag{14}$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung liefert den Zeitpunkt $\tau_{0j,j+1}$ des Anschlusses (kurz mit τ_K bezeichnet). Beim Anschluß gleichen sich die Geschwindigkeiten c_{0j} und c_{j+1} nach dem Gesetz des unelatischen Stoßes aus. Der entstandene, aus $j+1$ Elementen bestehende Wasserkörper bewegt sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit seiner Glieder $c_{0,(j+1)}$ weiter. Dies bietet die

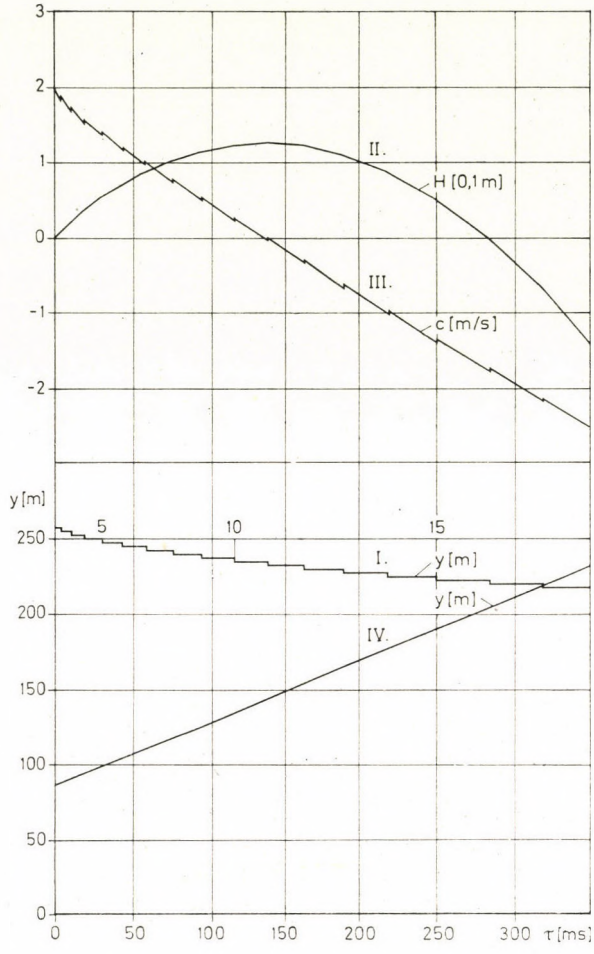


Bild 14

Möglichkeit, die Berechnung zu kontrollieren, denn durch Einsetzen des Anschlußzeitpunktes τ_K in die Gln. (11) und (12) erhält man

$$jc_{0j}(\tau_K) + c_{j+1}(\tau_K) = (j+1)c_{0,(j+1)}(\tau_K),$$
$$\eta_{0j}(\tau_K) - \eta_{j+1}(\tau_K) = 1250(j+1). \tag{15}$$

Die Berechnung wurde, beginnend mit dem Element $j = 01$, bis zu jenem Augenblick durchgeführt, in dem der obere und der untere geschlossene Wasserkörper aufeinander treffen. Das Ergebnis ist in Bild 14 dargestellt.

Die waagrechte Achse des Koordinatensystems ist die Zeitachse. Darauf wurden die Zeitpunkte $\tau = t - 207$ ms aufgetragen. Die im unteren Bildteil

sichtbare zackige Linie I ist der geometrischer Ort der Ordinaten, die die Höhenlage der unteren Endpunkte der von oben her anschließenden Elemente angeben. Die Stufung dieser Ordinaten ist 2,5 m. Die Linie I wird durch die Linie II im oberen Bildteil ergänzt. Diese Kurve veranschaulicht die freie Bewegung des oberen Endpunktes des Elementes $j = 1$, aber in einem anderen Maßstab. Sie ist ein aus mehreren Parabelbögen zusammengesetztes Poligon, das in Punkt $\eta = 0$ beginnt, beim Anschluß des Elementes Nr. $j = 11$ auf der Höhe $H_{\max} = 0{,}125$ m gipfelt, nahe zum Anschlußpunkt des Elementes Nr. $j = 16$ die waagrechte Achse $\eta = 0$ kreuzt, und weiter fallend beim Anschluß des Elementes Nr. $j = 20$ die Höhe $H = -0{,}394$ m erreicht. Hieraus folgt, daß die Eigenbewegung das vom Anschluß herrührende Sinken nur in verschwindendem Maße beeinflußt. Die zackige Linie III stellt die Bewegungsgeschwindigkeit der oberen dichten Wassersäule dar.

Die Gerade IV im unteren Bildteil gibt die Lage des oberen Endpunktes der sich aufwärts bewegenden unteren, geschlossenen Wassersäule in Funktion der Zeit an. Dieser Vorgang wurde im Kapitel 4.1 eingehend geschildert. Ergänzend sei zugefügt, daß diese Gerade jenen Idealfall darstellt, in dem sich das aus der Höhe y mit der Geschwindigkeit $c_K = y\,g/a$ abgehende Wasserelement mit der Endgeschwindigkeit $-c_K$ nach der Zeit $t_R = 3y/a$ in der Höhe y an die darunter befindliche Wassersäule anschließt. Die Linien I und IV kreuzen sich in der Höhe $y_{R2} = 219$ m im Zeitpunkt $\tau_{R2} = 318$ ms, bzw. $t_{R2} = 525$ ms. In diesem Augenblick beträgt die Geschwindigkeit der oberen, $L_1 = 42{,}5$ m langen Wassersäule $c_1 = -2{,}15$ m/s (siehe Kurve III), diejenige der untern Wassersäule $c_2 = -1{,}72$ m/s. Zufolge des Geschwindigkeitsunterschiedes muß also das Aufeinandertreffen mit einem Stoß erfolgen.

In Wirklichkeit findet der Anschluß etwas tiefer statt, denn die y_{R2} hohe Wassersäule wird inzwischen aus zwei Gründen kürzer. Zum ersten wird sie durch das Eigengewicht elastisch zusammengepreßt, zum zweiten tritt eine bestimmte Wassermenge durch den Querschnitt bei O während der Zeit t_{R2} aus, entsprechend den Gesetzen der Wasserschwankung. Die Abweichung ist im Verhältnis zu y_{R2} gering, daher lohnt es sich nicht, diese Frage ausführlich zu behandeln. Deshalb bleibt in der folgenden Berechung die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle außer acht. Dadurch ergibt sich die Verkürzung δL_1 infolge der elastischen Pressung zu

$$\delta L = -\int_0^y \frac{\gamma}{E} y\,dy = -\frac{\gamma}{E} \cdot \frac{y^2}{2}$$

und mit $E = ga^2/\gamma$

$$\delta L_1 = -0{,}5g\left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

Die Verkürzung infolge der austretenden Wassermenge beläuft sich auf

$$\delta L_2 = -\int_0^{t_R} c(y)\mathrm{d}t = -g\int_0^{t_R}\frac{y}{a}\,\mathrm{d}t = -g\int_0^{t_R}\frac{t_R}{3}\,\mathrm{d}t = -g\frac{t_R^2}{6} = -1{,}5g\left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

Die Gesamtverkürzung beträgt also

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 = -2g\left(\frac{y}{a}\right)^2. \tag{16}$$

Die $y_{R2} = 219$ m lange Wassersäule verkürzt sich um $\delta L = 0{,}6$ m, was weniger als $3‰$ ausmacht. Die Berechnung mit endlicher Wellengeschwindigkeit liefert eine noch geringere Abweichung. Die unter Berücksichtigung der Verkürzung gezeichnete Linie würde sich praktisch nicht von der gezeichneten Linie IV unterscheiden. Die Verkürzung wirkt sich nur soweit aus, daß sich der Zeitpunkt des Zusammensackens ein wenig, die Geschwindigkeiten der Wassersäulen jedoch, und damit auch die beim Zusammenstoß wirksamen Kräfte, sich erheblich verändern. Die Durchrechnung hat keinen Sinn, weil zufolge der angewandten Vereinfachungen und der verhältnismäßig großen Längen- und Zeitschritte ohnehin keine brauchbaren Ergebnisse zu erwarten sind. Der Zweck war bloß, ein Verfahren bekanntzugeben, das über die Vorgänge einige Kenntnisse vermittelt und unter Zuhilfenahme einer Rechenmaschine verwertbare und ausreichend genaue Resultate liefert.

4.4. *Ausfluß ins Freie, Abbremsen in endlicher Zeit*

Bereits die vorhergehende, vereinfachte Aufgabe konnte nicht mit den üblichen Berechnungsmethoden zufriedenstellend gelöst werden, deshalb erscheint es aussichtslos, in eine genaue Behandlung dieses noch verwickelteren Problems einzugehen. Bei den Entwässerungsanlagen von Bergwerken müßte man auch den Einfluß des vor dem Punkt O liegenden Rohrleitungsabschnittes berücksichtigen, weil dieser im Vergleich zu dem Abstand $O - Y_0$ überhaupt kurz ist. Die tatsächlich auftauchenden Probleme sind gewöhnlich derart verwickelt, daß ihrer Lösung nur die Rechenmaschine gewachsen ist. Zu der Programmierung vermögen die Betrachtungen der vorangehenden Kapitel etliche Stützpunkte zu bieten.

Mit dieser Feststellung könnte man die Betrachtungen der Vorgänge im lotrechten Rohr abschließen. Immerhin kamen im Laufe der Untersuchungen in Entwässerungsanlage gemäß Bild 9 so viele auseinandergehende Meinungen und Angaben zum Vorschein, daß man erwägen soll, die Frage unter Berücksichtigung des langsamen Abbremsens des Wasserstromes, von einer anderen Seite zu beleuchten.

In der früher erwähnten Anlage fördern das Wasser mehrstufige, durch 1000 kW-Motoren angetriebene Hochleistungspumpen durch eine kurze Rohr-

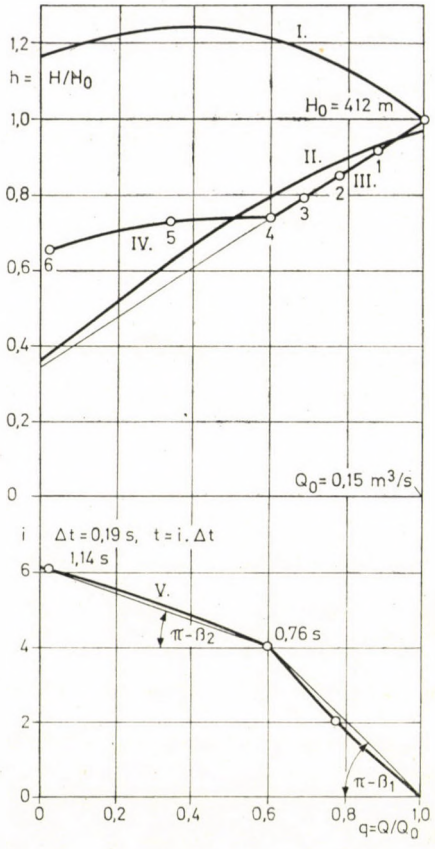


Bild 15

leitung. ($Q_0 = 0{,}15$ m³/s, $H_0 = 412$ m, $N_0 = 820$ kW, $(GD^2) = 400$ kpm², $n_0 = 1480$ min^{-1}.) Die mit dem Betriebsdrehmoment errechnete Abbremszeit ist $T_B = 2{,}94$ s. Die Länge der Stahlrohrleitung von 300 mm l. W. beträgt zwischen dem Punkt D (Bild 9) und dem Saugrohrende $L = 475$ m, die Stoßwellengeschwindigkeit $a = 1250$ m/s, die Reflexionszeit $T_R = 2L/a = 0{,}76$ s. Demnach ist die Abbremszeit T_B ziemlich lang im Vergleich zur Reflexionszeit T_R.

Die Ergebnisse der nach dem in [5] geschilderten Verfahren durchgeführten Berechnung sind in Bild 15. dargestellt. Die Kurve I ist die Pumpenkennlinie in der (q, h)-Ebene, die Kurve II stellt das Drehmoment dar, u. zw. unter Berücksichtigung des mechanischen Reibungsverlustes von 3%. Als Zeitschritt wurde $\Delta t = T_R/4 = 0{,}19$ s gewählt, die der Rohrreibung zuzuschreibende Verlusthöhe ($h_v = 6{,}5$ m) außer acht gelassen. Hieraus ergaben sich die Abbremskurven III und IV. Letztere schneidet die Ordinatenachse bei $h =$

$= 0{,}646$, d. h., die Druckhöhe fiel von dem der Abbremsung vorangehenden Wert $H_0 = 412$ m auf $H = 266$ m. Somit betragen die Grenzamplituden der Druckwellen 266 und 558 m.

Den zeitlichen Verlauf der Wasserförderung zeigt die Kurve V, die einen Knickpunkt im Augenblick der Wellenrückkehr $t_R = 0{,}76$ s aufweist. Demgemäß beträgt die Abbremszeit $t_B = 1{,}14$ s, und die bis zur Rückkehr der Welle vergangene Zeit $t_B^* = 0{,}76$ s. Wenn man die zwei Kurvenstücke $t_B(q)$ durch ihre Sehnen ersetzt, können die Richtungstangenten $\tan \beta_1 = t_{B1} = 1{,}87$ s und $\tan \beta_2 = t_{B2} = 0{,}65$ s ermittelt werden. Diese Werte sind das 8,65fache, bzw. 3,01fache der Zeit $t_D = 0{,}216$ s. Gemäß den im Kapitel 4.2, bzw. in Tafel II mitgeteilten Angaben kommt also im lotrechten Rohrleitungsabschnitt auch dann keine Hohlraumbildung vor, wenn im Punkt D ein vollkommenes Vakuum herrscht.

Die Berechnung erfolgte auch für den Fall, wenn zwei Pumpen durch eine gemeinsame Rohrleitung fördern. In diesem Fall könnte auch im unteren Rohrabschnitt ein Hohlraum entstehen, wenn das Rohrsystem nicht sehr kurz wäre. Das Abbremsen der Wasserförderung geht so langsam vor sich, daß während der Reflexionszeit $T_R = 0{,}76$ s die Förderung nur um 26% abnimmt. Deshalb kann ein Hohlraum weder in dem horizontalen, noch im vertikalen Rohrleitungsabschnitt entstehen. Es ist zu bemerken, daß die durch Konstruktion gewonnenen Druckschwankungs-Amplituden 412, 209 und 621 m sehr gut mit den am örtlichen Manometer abgelesenen Werten übereinstimmen.

Wenn die Neigung des ins Freie mündenden Rohrleitungsabschnittes $D-E$ so groß ist, wie das Bild 9 zeigt, dann strömt darin das Wasser mit freiem Spiegel auch in dem Fall, wenn zwei Pumpen in Betrieb stehen und im Punkt D herrscht jederzeit der atmosphärische Druck vor. Wird die Neigung schwächer, so füllt das Wasser den ganzen Rohrleitungsquerschnitt aus und die Wassersäule reißt im Punkt D beim Abbremsen ab. Für die Berechnung des Auslaufes bzw. des Rücklaufes der Wassersäule ist die Kenntnis der Anlagendaten nötig.

5. Schräg ansteigende Rohrleitung

5.1. *Allgemeine Beschreibung*

Die Schräglage ist die häufigste Anordnung der Druckrohrleitungen von Pumpenanlagen. Hinsichtlich der Hohlraumbildung nimmt diese Verlegungsart die Mittelstellung zwischen den bisher betrachteten zwei Anordnungen ein. Die Verwandschaft mit der waagerechten Leitung ist nur insofern nachzuweisen, daß ein Hohlraum im oberen Teil des Rohrleitungsquerschnittes in Form eines Kreisabschnittes entsteht und sich längs der Oberkante fortpflanzt. Dementsprechend werden die Höhenangaben im folgenden auf die Oberkante des Rohrinneren bezogen.

Wesentlich deutlicher ist die Verwandschaft mit dem lotrechten Rohr. Anhand der Winkelfunktionen können alle Gesetze der lotrechten Leitung auf die schräge Leitung umgeschrieben werden. Demzufolge lautet die Bahnbeschleunigung des frei beweglichen Wasserelementes $g_\alpha = -g \sin \alpha$, gemäß den Bewegungsgesetzen auf schiefer Ebene. Auch in diesem Falle kann ein Punkt L_0 in der Höhe Y_0 bestimmt werden, der im Fall des Ausflusses ins Vakuum in der Höhe des Wasserspiegels, beim Ausfluß ins Freie 10 m oberhalb des freien Wasserspiegels liegt. Senkrecht darunter auf dem Niveau $y_0 = c_0\, a/g$ befindet sich der kritische Punkt O der Rohrleitung, wo die Betriebsgeschwindigkeit c_0 beim völligen Abbremsen ($q = 0$) der Wasserförderung auf $c = 0$, und der Betriebsdruck auf den Sattdampfdruck zurückgeht. Aufwärts von Punkt O läßt der Durchlauf der Druckwelle ein Vakuum hinter sich, doch verbleibt die kritische Geschwindigkeit $c_K = y\, g/a$ ebenso wie im Falle des lotrechten Rohres.

Die Hohlraumbildung im lotrechten Rohr wurde erschöpfend geschildert, weil darin die Verhältnisse und folglich die Berechnungsergebnisse übersichtlicher sind. Deshalb sollen hier nicht sämtliche Varianten besprochen, sondern allein das Umrechungsverfahren erläutert werden.

5.2. *Ausfluß ins Vakuum, Abbremsen in endlicher Zeit*

Die Umrechnung wird an einem einfachen Beispiel demonstriert, wobei ein langes, unter dem Winkel α steigendes Rohr ins volle Vakuum mündet. Die Abbremskurve sei (wie im Kapitel 4.2) durch eine Gerade ersetzt. Das linksseitige Diagramm des Bildes 16 zeigt den oberen, der Hohlraumbildung ausgesetzten Teil der schrägen Rohrleitung, das rechtsseitige Diagramm wurde durch Projektion des ersteren auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem erhalten. Die Projektion stimmt vollkommen mit Bild 13b überein und stellt die Situation in dem Augenblick dar, wenn im Punkt O des Rohres die Hohlraumbildung gerade einsetzt. Auch hier ist die Senkrechte $c_0 = y_0\, g/a$ mit dünner Linie gezeichnet. Die Diagonale des Rechteckes repräsentiert die c_K-Linie, deren Abstand von der Achse $c = 0$ die nach Durchlauf der Stoßwelle verbleibende Geschwindigkeit darstellt. In dem linksseitigen schiefwinkligen Koordinatensystem der schrägen Rohrleitung entartet das Rechteck in ein Rhomboid, worin die Diagonale zwischen dem Origo O und dem Punkt (c_0, l_0) auch hier der c_K-Linie entspricht. In diesem Diagramm ist nämlich die Abszissenachse auf das Rohr bezogen, die waagrechte x-Achse, aber gleichzeitig auch die Achse der Geschwindigkeit c.

Der wesentliche Gegensatz zur lotrechten Rohrachse besteht darin, daß die Stoßwelle im schiefwinkligen Koordinatensystem, d. h. entlang der schrägen Rohrachse, mit der Geschwindigkeit a verläuft. Dementsprechend bewegt sich der Punkt $q = 1$ der Bremslinie (das bedeutet den Zeitpunkt des Abschal-

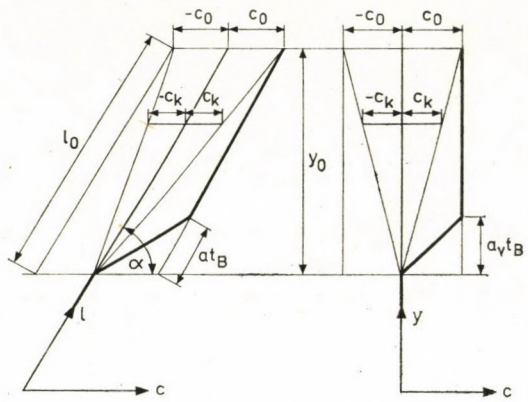


Bild 16

tens) auf der schrägen Linie $c = c_0$ im schiefwinkligen Koordinatensystem und durchläuft den Weg $l = at_B$. Diesem Weg entspricht im rechtwinkligen Koordinatensystem die Höhe $y = a \sin \alpha \, t_B$. Die tatsächliche Stoßwellengeschwindigkeit a wird durch ihre Projektion $a_v = a \sin \alpha$ als scheinbare Wellengeschwindigkeit ersetzt. Das Wesentliche kurz gefaßt: Die Stoßwelle pflanzt sich im schrägen Rohr mit der Geschwindigkeit a fort; die kritische Geschwindigkeit wird durch den vom Punkt O lotrecht gemessenen Abstand abgebildet; die freie Bewegung, des Wasserelementes nach seiner Abtrennung gehorcht den Bewegungsgesetzen auf schiefer Ebene.

Die Bewegungsgesetze der Strömung im lotrechten Rohr können unter Anwendung der angegebenen Regeln auf die Strömung im schrägen Rohr umgeformt werden. Allerdings ist die Umformung recht schwierig im Falle eines Rohres mit sehr geringer Neigung (z. B. einer Rohrunterführung unter dem Straßenkörper). Das Rhomboid des Bildes 16. wird nämlich überaus flach. Deshalb soll im folgenden ein kombiniertes grafisch-rechnerisches Verfahren geschildert werden, das recht anschaulich ist und sich sehr gut für eine Rohrleitung eignet, deren Längenprofil veränderliche Neigungen aufweist. Diese Eingenschaft des Verfahrens ist besonders darum zweckdienlich, weil es üblich ist bei Längenprofilen mit mäßigen Neigungen für waagerechte senkrechte Abstände verschiedene Maßstäbe zu wählen.

5.3. *Zahlenbeispiel für eine leichtansteigende Rohrleitung*

Zum Gegenstand der Betrachtungen sei eine Pumpenanlage der Budapester Wasserwerke gewählt, die ein Gebiet in Berggelände versorgt. Hier wurden seinerzeit mehrere Versuche angestellt. Das Pumpenwerk hebt das Wasser durch eine Rohrleitung mit gleichbleibendem Durchmesser aber ungleichmäßiger Steigung aus einem Unterbecken in ein Oberbecken. Die vier-

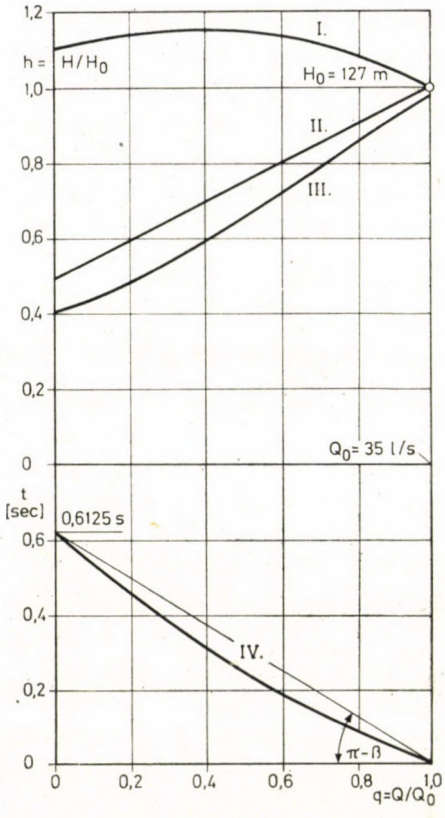


Bild 17

stufige Pumpe fördert einen Wasserstrom $Q_0 = 35$ l/s gegen eine Förderhöhe $H_0 = 127$ m. Die Leitungsaufnahme beträgt $N_0 = 91{,}2$ PS, die Drehzahl $n_0 = 1466\ \text{min}^{-1}$. Zum Antrieb dient ein Motor mit einer Leistung von 80 kW, das Gesamtschwungmoment beläuft sich auf $(GD^2) = 10{,}5\ \text{kpm}^2$. Aus diesen Daten und dem Betriebsdrehmoment ergab sich die Abbremszeit zu $T_B = 0{,}923$ s. Die Nennweite des Druckrohres ist 300 mm, die waagerechte Projektion der Leitungslänge $L = 1800$ m (infolge der leichten Steigung ist dieser Wert annähernd gleich der wirklichen Leitungslänge). Die Reflexionszeit beträgt $T_R = 2L/a = 3{,}28$ s. Durch Messungen wurde die Stoßwellengeschwindigkeit zu $a = 1100$ m/s ermittelt. Nachdem die betreibsmäßige Strömungsgeschwindigkeit $c_0 = 0{,}553$ m/s beträgt, ergibt sich der Druckhöhenabfall bei vollständiger Abbremsung zu $c = 0$ zu $y_0 = c_0\, a/g = 62$ m. Dieser Wert stimmt mit den Versuchsergebnissen überein.

Die Abbremsung des Wasserstromes wurde laut [5] berechnet und graphisch im Bild 17. dargestellt. Die Linie I ist die Kennlinie der Pumpe in

der (q, h)-Ebene ($q = Q/Q_0$, $h = H/H_0$), die Linie III ist die Kurve des Drehmomentbedarfes unter Annahme eines 4%-igen mechanischen Reibungsverlustes. Die Linie II stellt die Stoßgerade, die Kurve IV den zeitlichen Verlauf $t = f(q)$ des Abbremsens dar. Hieraus ergibt sich die Abbremszeit der Wasserförderung auf Null zu $t_B = 0{,}6125$ s.

Das Längenprofil der Rohrleitung ist aus Bild 18 ersichtlich (Linie I). Der Höhenmaßstab ist das Zehnfache des waagerechten. Das Profil wurde aufgrund einer Landkarte mit Schichtlinien gezeichnet, und so ergab sich ein aus geraden Linienstücken zusammengesetztes Poligon, dessen Knickpunkte mit Höhenunterschieden von je 10 m aufeinander folgen. Die Profillinie beginnt am Pumpenwerk P neben dem Saugbecken und endet am Oberbecken. In letzterem war der Wasserstand anläßlich der Messungen 3,40 m. Von diesem Wasserspiegel aufwärts wurde die Druckhöhendifferenz von 10 m WS des atmosphärischen Druckes und des Sattdampfdruckes aufgetragen und dadurch das mit Y_0 bezeichnete Niveau erreicht. Hier herrscht Vakuum auch in dem mit $q = 1$ und $h = 1$ gekennzeichneten Betriebszustand. Unterhalb des Niveaus Y_0 wurde der dem vollen Abbremsen entsprechende Druckhöhenabfall $y_0 = 62$ m aufgetragen, wodurch sich das Niveau O ergab. Auf diesem Niveau tritt Vakuum in der Rohrleitung auf, sobald der Zustandspunkt $q = 0$ der vollen Abbremsung mitsamt der Druckwelle den auf Niveau O liegenden Punkt der Rohrleitung erreicht.

In Bild 18 wurde die Kurve IV des Bildes 17 (das ist die Kurve $t = f(q)$) eingetragen und erhielt die Nummer II. Der dem Betriebszustand $q = 1$ entsprechende Punkt liegt auf der Waagerechten des Niveaupunktes Y_0. Der Zustandspunkt $q = 0$, $t = t_B$ der vollen Abbremsung wird als Schnittpunkt der Niveaulinie O und der Profillinie erhalten. Damit entspricht der Abstand $q = 1$, gemessen auf der waagrechten Koordinatenachse der Kurve IV in Bild 17 dem Höhenunterschied y_0 in Bild 18. Der andere Endpunkt der Kurve $t = f(q)$ befindet sich auf der waagerechten Linie des Y_0-Niveaus, rechts vom Punkt O, im Abstand $x_B = at_B$. Anhand der lotrechten und waagerechten Maßstäbe können auch die weiteren Punkte der Kurve $t = f(q)$ in Bild 18 übertragen werden, zweckmäßig in Poligonform (Kurve II) in Anpassung an das Längenprofil der Rohrleitung.

Der durch die Kurven II und IV des Bildes 17 verknüpfte und mit den gekuppelten Werten (q, h, t) gekennzeichnete Zustand verläuft mit der Geschwindigkeit a längs des Rohres vom Pumpwerk zum Oberbecken. Die Steigung der Rohrleitung ist sehr mäßig, besonders auf der kritischen Strecke $O - Y_0$ bleibt sie überall unter 10%, so daß $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong \alpha \cong [\text{rad}] < 0{,}1$ deshalb $\cos \alpha \cong 1$ und $(1 - \cos \alpha) < 0{,}005$ angenommen werden kann. Es is also kein großer Fehler, wenn man die Kurve II zwischen den Niveaus O und Y_0 in waagerechter Richtung verschiebt. So kann man sich vorstellen, daß sich der Punkt $q = 1$ der Kurve II im Augenblick der Abschaltung der Maschinen-

1 tang $\alpha_i \cong$ sin α_i	2 tang φ_i	3 g_i [m/s^2]	4 c_K [m/s]	5 t_A [ms]	6 t_R [ms]	7 $t_A + t_R$ [ms]
			$c_0 = 0{,}553$ 0,4335	344		
0,03367	0,1122	0,3303 0,7730	0,3580 0,3442	155	927	1082
0,04695	0,0945	0,6370	0,2550	112	1081 801	1236 913
0,03497	0,0841	0,3430	0,1658	-34	1487 967	1599 935
0,07575	0,0717	0,7430	0,0767	-32	446 206	412 174
0,09720	0,0710	0,9530	0,0000	0	161 0	129 0

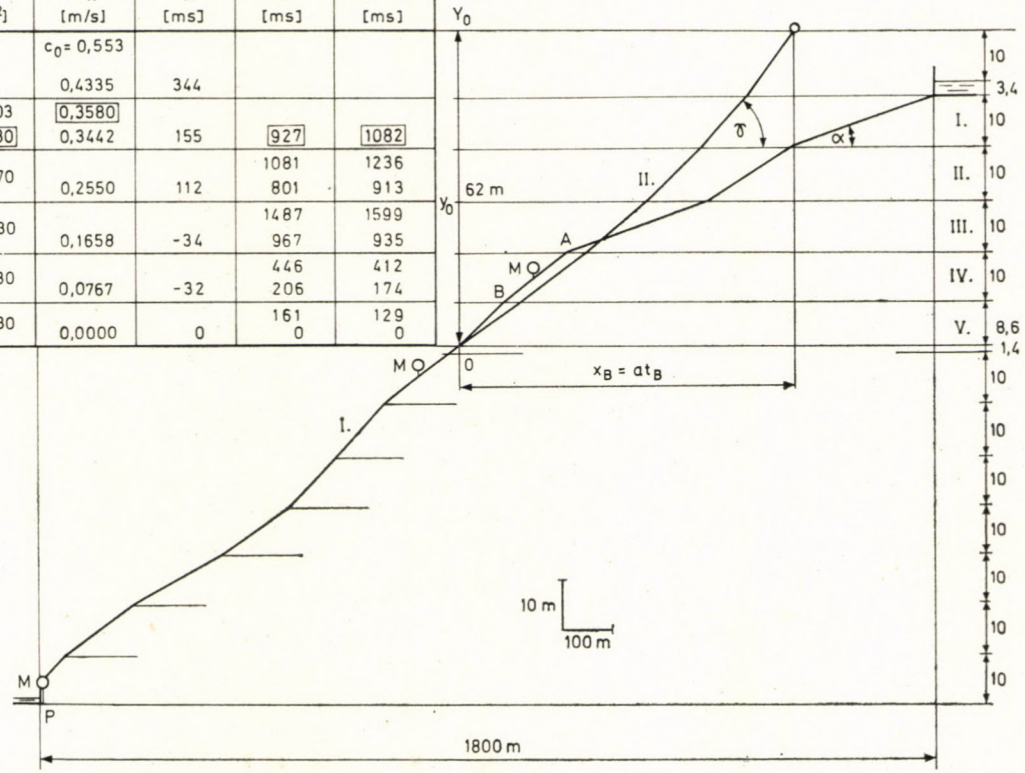


Bild 18

gruppe vom Pumpenwerk an auf der Waagerechten Y_0 in Bewegung setzt und die Kurve II mitschleppt. Die Kurve II trifft dann die Profillinie zuerst in Punkt A. Hier beginnt die Hohlraumbildung. Beinahe zu gleicher Zeit — mit nur 2 ms Verspätung — kommt das Treffen in Punkt B zustande, sodann nach 32 ms wird der Punkt O und damit die im Bild sichtbare Lage der Kurve II erreicht. Im folgenden wird dieser Augenblick als Anfang der Zeitzählung dienen. Hiervon gerechnet erhält man die Zeitpunkte, in denen die die Hohlraumbildung auslösende Stoßwelle die weiteren Punkte des Profils antrifft, durch Dividieren des waagerechten Abstandes zwischen I und II mit der Wellengeschwindigkeit a.

Nachdem es unmöglich ist, die Zahlen in der Zeichnung genau abzulesen, wurde das Bild 18 durch eine Tafel ergänzt, die folgende Daten enthält: 1. die Tangentenwerte der einzelnen Abschnitte des Längenprofils; 2. die Tangentenwerte der zwischen den Schichtlinien liegenden Abschnitte der Bremskurve; 3. die Werte der Bahnbeschleunigung ($g_i = -g \sin \alpha_i$); 4. die kritischen Geschwindigkeiten in den Knickpunkten der Poligone ($c_K = y\, g/a$); 5. die Ankunftzeitpunkte t_A, ermittelt nach dem beschriebenen Verfahren; 6. die Rückkehrzeit des sich auf der Neigung frei bewegenden Wasserelementes ($t_{Ri} = 2\, c_{Ki}/g_i$); 7. die Rückkehrzeit, gerechnet von $t = 0$, d. h. die Summe $t_A + t_R$. An dem unteren und dem rechten Rand sind noch die waagerechten und die lotrechten Abmessungen eingeschrieben. Im Bereich der Hohlraumbildung sind die lotrechten Strecken von oben nach unten numeriert.

Für die erste Phase der freien Bewegung in den Abschnitten II bis V, also bis zum Zusammensacken des in ihnen entstandenen Hohlraumes gelten die Gesetze des Ausflusses ins Vakuum. Weil aber das obere Ende des Rohrleitungsabschnittes I in ein Becken mündet, das mit der Atmosphäre in Verbindung steht, bedarf dieser Abschnitt einer eingehenden Betrachtung. Die Aufgabe ähnelt dem in Kapitel 4.3 geschilderten Fall, jedoch die Schräglage der Rohrleitung, das Abbremsen der Wasserströmung in endlicher Zeit und schließlich die 3,4 m hohe Wassersäule zwischen Rohrende und Wasserspiegel des Oberbeckens verursachen Abweichungen. Von dem in Kapitel 4.3 angewandten Näherungsverfahren wird, unter Berücksichtigung der erwähnten Abweichungen, auch hier Gebrauch gemacht, Zwecks Betrachtung des von oben nach unten verlaufenden Zusammensackens soll dieser Rohrleitungsabschnitt auch jetzt in Elemente von endlicher Länge $\Delta\lambda$ zerlegt und es sollen dieselben vereinfachenden Voraussetzungen getroffen werden, wie im Kapitel 4.3. Es wird also auch diesmal kein genaues Resultat angestrebt, sondern ein Verfahren geschildert, das bei Heranziehen einer Rechenmaschine beliebig verfeinert werden kann. Deshalb soll ein verhältnismäßig langer Zeitschritt von $\Delta\tau = 10$ ms gewählt werden. Hiermit beträgt die Länge der Wasserelemente je $\Delta\lambda = a\Delta\tau = 11$ m, so daß die 297 m lange Strecke I aus 27 Elementen besteht.

Bei den angeführten Abweichungen wirken sich die Einflüsse der Schräglage der Rohrleitung folgendermaßen aus: Die Bahnbeschleunigung der freien Bewegung beträgt jetzt $g_i = -g \sin \alpha_i = -0{,}3303$ m/s². Der Höhenunterschied der Schwerpunkte zweier benachbarter Elemente ist $\Delta y_i = \Delta\lambda \sin \alpha_i = 0{,}3704$ m; dem entspricht die Abweichung der kritischen Geschwindigkeit $\Delta c_{Ki} = \Delta y_i\, g/a = \Delta\lambda_i \sin \alpha_i\, g/a = g_i \cdot 10^{-2}$ m/s. In der Höhe des Rohrendes beläuft sich die kritische Geschwindigkeit auf $c_{KE} = 0{,}4335$ m/s (Spalte 4, der Tafel in Bild 18). Also ist die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes des obersten Elementes Nr. $j = 1$ gleich $c_1 = 0{,}432$ m/s.

Einer der Einflüsse der endlichen Abbremszeit wirkt sich so aus, daß entgegen den im Kapitel 4.3 Gesagten die die kritische Geschwindigkeit tragende Welle jetzt den Weg zwischen den Schwerpunkten zweier benachbarter Elemente nicht während dem Zeitschritt $\Delta\tau_I = 10$ ms, sondern in $\Delta t_I = \Delta y_I/a\,(\operatorname{ctg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}\gamma_1) = 7$ ms durchläuft.

Der andere Unterschied besteht darin, daß im Falle der plötzlichen Abbremsung ein Wasserelement solange mit der Betriebsgeschwindigkeit c_0 weiterläuft, bis es den Schwerpunkt der die Bremswirkung tragenden Welle antrifft. In diesem Moment schlägt seine Geschwindigkeit augenblicklich in den kritischen Wert c_K um. Hingegen verringert sich im Falle der Abbremsung in endlicher Zeit die Geschwindigkeit des Wasserelementes schon vor dem Zeitpunkt an, wo die Bremswirkung spürbar wird. Die Verringerung findet bis zum Erreichen des kritischen Wertes c_K statt.

Von nun an ist die Bewegung den Gesetzen des Schwerefeldes unterworfen. Wenn also im vorliegenden Fall (wo die Numerierung der Elemente von oben nach unten erfolgt) der Schwerpunkt des j-ten Elementes die kritische Geschwindigkeit c_{Kj} annimmt, wird die Schwerpunktgeschwindigkeit des im Abstand $\Delta\lambda$ darüber befindlichen $(j-1)$-ten Elementes um $\Delta c = \Delta\lambda \tan\gamma\, g/a$ höher. Dieser Unterschied vermindert sich bei Ankunft des kritischen Geschwindigkeitswertes im Punkt Nr. $(j-1)$ auf $\Delta c^* = \Delta\lambda \sin\alpha_1\, g/a$. Es ist angebracht, in diesem Zeitraum mit dem Mittelwert der Geschwindigkeiten zu rechnen

$$c_{j-1} - c_j = \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \frac{g}{a} (\tan\gamma + \tan\alpha_1) = \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \frac{g_1}{a} \left(1 + \frac{\tan\gamma}{\tan\alpha_1}\right) = 2{,}17 \cdot 10^{-2} g_1.$$

Die 3,40 m hohe Wassersäule im Oberbecken verursacht bloß insoweit eine Abweichung, daß das j-te Element, welches über die Wassersäule mit der Atmosphäre verbunden ist, außer der Schwerkraft noch durch die Druckhöhe von 13,4 m belastet wird. Dies ist gleich dem 36,18fachen des Höhenschrittes $\Delta y_I = 0{,}3704$ m.

Unter Beachtung der erwähnten Abweichungen lauten die mit den Einheiten mm (Länge) und ms (Zeit) aufgeschriebenen Schwerpunktbewegungsgleichungen des frei beweglichen j-ten Elementes:

Beschleunigung $b_j = -g \sin \alpha_I = -g_I$,
Geschwindigkeit $c_j(\tau) = g_I[-\tau + 1307 - 17(j-1)]$,
Lage (Koordinate)

$$\lambda_j(\tau) = g_I\left\{-\frac{\tau^2}{2} + [1307 - 17(j-1)]\tau - (j-1)^2\left(\frac{7^2}{2} + 70\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{70}{2} j(j-1) - 7 \cdot 21{,}7(j-1)\right\} - 5500 - 11000(j-1). \qquad (17)$$

Die Bewegungsdaten der verkuppelten $0j$ Elementen, die sich zu der Mündung der Rohrleitung ins Becken anschließen:
Beschleunigung

$$b_{0j} = -g_I\left(1 + \frac{36{,}18}{j}\right)$$

Geschwindigkeit

$$c_{0j}(\tau) = g_I\left[-\left(1 + \frac{36{,}18}{j}\right)\tau + 1307 - \frac{17}{2}(j-1)\right], \qquad (19)$$

Lage (Koordinate)

$$\lambda_{0j}(\tau) = g_I\left\{-\left(1 + \frac{36{,}18}{j}\right)\frac{\tau^2}{2} + \left[1307 - \frac{17}{2}(j-1)\right]\tau\right\} - 5500j. \qquad (18)$$

Der Zeitpunkt des Anschlusses wird bestimmt durch

$$\frac{36{,}18}{j}\tau^2 - 17(j+1)\tau - [7^2 j^2 + 70j(j-1) + 304j] = 0. \qquad (19)$$

Die Lösung der Gl. (19) ergibt den Zeitpunkt τ_{KI} der Aneinanderkupplung der Elemente Nr. j_{026} und j_{27}:

$$\tau_{KI} = 464 \text{ ms}.$$

Diesen Wert in die Gl. (17) und (18) eingesetzt, erhält man $c_{027} = 0$ mm/ms, woraus folgt, daß die 27 verkuppelten Elemente zufällig gerade gipfeln, wobei ihr höchster Punkt den Weg $\Lambda_I = 82{,}79$ mm längs der Bahn zurücklegte. Wenn nun die aus 27 Elementen zusammengesetzte, $L_1 = 11{,}27 = 297$ m lange Wassersäule mit der Beschleunigung

$$b_{027} = -\left(1 + \frac{36{,}18}{27}\right)g_I = -2{,}43 g_I = -2{,}773 \text{ m/s}^2$$

in ihre im Zeitpunkt $\tau = 0$ eingenommene Lage zurückgeführt wird, ergibt sich die Rückfallzeit zu

$$t_{RI} = \sqrt{\frac{2\Lambda}{b_{027}}} = 463 \text{ ms},$$

was innerhalb der Toleranz mit der Gipfelzeit $\tau_{KI} = 464$ ms übereinstimmt. Das ist die selbstverständliche Folge der Tatsache, wonach sich die Geschwindigkeiten bei Verkuppelung der Elemente laut dem Gesetz der Impulserhaltung summieren. Die Rückfallgeschwindigkeit der Wassersäule beträgt $c_{RI} = -b_{027}t_{RI} = -0{,}358$ m/s, d. h. höher als die für den untersten Punkt des Abschnittes I in der Tafel des Bildes 18 ausgewiesene kritische Geschwindigkeit $c_{KI} = 0{,}3442$ m/s. Die Ergebnisse der hier geschilderten Berechnung erscheinen in der Tafel als eingerahmte Zahlen.

Die Auswertung der Tafelwerte gibt Aufschluß über die sich in den Knickpunkten abspielenden Hohlraumbildungen und ihr Zusammensacken. Das meiste kann man den Angaben der Spalte 7 entnehmen. Diese sagen aus, daß die Wassersäule des Abschnittes I binnen 1082 ms nach Beginn der Zeitzählung in die Anfangslage zurückkehrt. Dort sackte der Hohlraum am oberen Teil des unterhalb liegenden Abschnittes II noch nicht zusammen, weil die laut der Tafel erst nach 1236 ms stattfindet. Die Erscheinung ähnelt derjenigen, die sich am oberen Ende des ins Becken mündenden Abschnittes I abspielt. Die sich mit höherer Beschleunigung und Geschwindigkeit bewegende Wassersäule I wirkt fördernd auf den Zusammenschluß der Wassermassen. Im Augenblick des Zusammensackens gleichen sich die abweichenden Geschwindigkeiten der zwei Wassersäulen — begleitet durch einen mäßigen Wasserstoß — gemäß dem Impulsgesetz aus und die verkuppelten Säulen bewegen sich mit gemeinsamer Geschwindigkeit abwärts. Die Erscheinungen lassen sich rechnerisch schwer verfolgen. Man muß sich damit begnügen, daß die Welle auch ins Becken hineinläuft, wobei die Energie aufgezehrt wird.

Die Vorgänge weiter abwärts beobachtend erfährt man, daß das Schließen in dem mäßig geneigten Abschnitt III noch langsamer (binnen 1599 ms) vor sich geht. Deshalb trifft hier die abstürzende, 451 m lange Wassersäule auf einen bedeutenden Hohlraum und schließt diesen vorerst allmählich ab. Aber in den noch tiefer liegenden, jedoch steileren Abschnitten IV und V ist das Schließen des Hohlraumes bereits beendet. Deshalb erfolgt das Aufeinandertreffen der Wassersäulen, die den Hohlraum in dem flacheren Abschnitt oben und unten umfassen, mit einem heftigen Stoß, der diesen Rohrleitungsabschnitt ernstlich gefährden kann.

Aus diesem Beispiel darf man den Schluß ziehen, daß mit einem größeren Wasserstoß nur im oberen Teil der Rohrleitung gerechnet werden muß, wo der atmosphärische Druck und die Wassersäulenhöhe im Becken die abbremsende negative Beschleunigung der auslaufenden Wassermasse erhöhen. Besonders gefährdet sind die zwischen steileren Rohrstrecken eingeschalteten flacheren Strecken, in denen die Eigenbewegung unter der Schwerkraftwirkung den Hohlraum langsamer abschließt und das volle Abschließen durch die darüber liegende, sich abwärts schneller bewegende Wassersäule beendet wird. Falls sich im oberen Teil der Rohrleitung — wo die Hohlraumbildung

vorkommen kann — eine waagerechte oder abwärts neigende Strecke befindet, sackt der Hohlraum immer mit einem gefahrbringenden Druckstoß zusammen.

Das im Beispiel vorgestellte Berechnungsverfahren ist bloß dann anwendbar, wenn die Steigung — zumindest der kritischen Strecke — tatsächlich schwach (unter 10%) ist, wodurch $\cos \alpha$ gleich 1 angenommen werden kann. Nur in diesem Fall ist es berechtigt, die Bremskurve waagerecht zu verschieben und auf der ins Becken mündende Strecke $\sin \alpha$ durch $\operatorname{tg} \alpha$ zu ersetzen.

5.4. *Versuche*

Mit der im Zahlenbeispiel dargestellten Pumpenanlage wurde eine Anzahl von Versuchen durchgeführt, jedoch wurde es nur in einem Fall gewagt, eine mehr als 70 Jahre alte Druckrohrleitung vom Versorgungsnetz abzutrennen und damit der Gefahr eines Rohrbruches auszusetzen. Obwohl die verwendeten schreibenden Druckmesser recht primitiv waren, verdienen die Aufzeichnungen eine besondere Beachtung. Es mag lehrreich sein, hier zwei vorzustellen. Die Einbaustellen der Druckschreiber sind in Bild 18 mit M bezeichnet.

Das obere Diagramm in Bild 19 wurde mit einem Druckschreiber hergestellt, der im Maschinenhaus hinter der Rückschlagklappe an die Rohrleitung angeschlossen war, während das untere Diagramm von dem auf dem Abschnitt IV — nahe der Sackstelle des Hohlraumes — angeschlossenen Schreibgerät herrührt. Noch ein dritter Druckschreiber war unterhalb der Stelle der Hohlraumbildung vorgesehen, doch sagte seine Aufzeichnung nichts Neues aus. Die waagerechten Linien wurden durch Kalibrierung der Druckschreiber gewonnen, der Zeitmaßstab ist in beiden Diagrammen angegeben.

Am meisten fällt die außerordentlich starke Dämpfung auf, die keineswegs der Rohrreibung zugeschrieben werden kann. Zufolge der geringen betriebsmäßigen Strömungsgeschwindigkeit $c_0 = 0{,}553$ m/s beläuft sich die Verlusthöhe auf höchstens $h_v = 4$ m. Wie das obere Diagramm in Bild 19 zeigt, fällt die Betriebsdruckhöhe $H_0 = 122$ m nach Abschalten der Pumpe auf 60 m. Die Gipfelhöhe der ersten Welle erreicht anstatt 184 m nur 164 m, diejenige der zweiten Welle nur 156 m. Die starke Dämpfung offenbart sich auch im unteren Diagramm. Leider lief das Schreibwerk infolge seiner großen Trägheit bei den ersten zwei Wellen unter den absoluten Nullwert, bzw. sprang oben von der Trommel ab. Infolgedessen waren die Amplituden der ersten zwei Druckschwankungen nicht meßbar.

Es lohnt sich, die zwei Diagramme von dem Gesichtspunkt aus miteinander zu vergleichen, daß die Schwankungsperioden des unteren Diagrammes viel kürzer sind, als diejenigen des oberen, weil die Druckwellen gegen das Oberbecken auslaufen und vom freien Beckenwasserspiegel reflektiert werden. Das im Maschinenhaus montierte Schreibgerät zeichnete die aus dem Zusammensacken des Hohlraumes herrührenden Ausschläge als Zacken auf der stei-

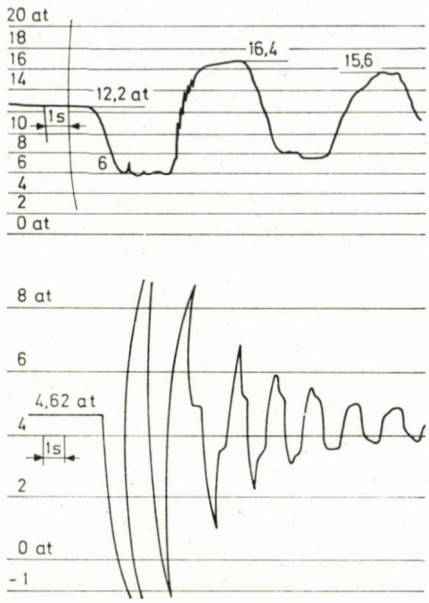


Bild 19

genden Flanke der Druckwelle auf. Diese Zacken rühren möglicherweise von der Trägheit des Meßwerkes her. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß die beim Abtrennen der Rohrleitung vom Verteilnetz abgeschlossenen Schieber leck waren, wodurch verfälschte Meßergebnisse erschienen.

Dieser Versuch diente wohl als Anfang. Vermutlich wäre es mit besseren Schreibgeräten und der Sicherstellung ihres Gleichlaufes möglich, die noch offenstehenden Fragen zu klären und eine tiefere Einsicht in die Vorgänge bei der Hohlraumbildung zu gewinnen. Die vorliegende Abhandlung vermag vielleicht im großen und ganzen behilflich zu sein, die zu erwartenden Versuchsergebnisse vorherzusagen, sowie die Auswahl und Anordnung der Meßgeräte zu erleichtern. Wenn die Aufmerksamkeit der Forscher hiermit auf die — oft unrichtig gedeuteten — Erscheinungen der Hohlraumbildung gelenkt wird, haben die in der Abhandlung angestellten Betrachtungen das gesteckte Ziel erreicht.

SCHRIFTTUM

1. Bergeron, L.: Du coup de belier en hydraulique, Paris 1950
2. Parmakian, I.: Waterhammer Analysis, New York 1955
3. Gandenberger, W.: Druckschwankungen in Wasserversorgungsleitungen. Oldenburg, München 1950
4. Duc, I.: Unterdruckerscheinungen in einer Pumpenleitung. *(Technische Rundschau Sulzer*, 1959 Nr. 3.)
5. Mátyus, S.: Druckschwankungen nach dem Ausfall des Pumpenantriebes. *Schweizer Archiv* (1964), Nr. 10

6. MÁTTYUS, S.: Wechselwirkungen zwischen druckstoßmäßigenden Einrichtungen und Rohrleitungsarmaturen. *Acta Techn. Hung.* **70** (1971)
7. PATTANTYUS, Á. G.: Gyakorlati áramlástan (Praktische Strömungslehre), III. Auflage, Budapest 1959
8. JAEGER, CH.: Technische Hydraulik, Basel 1949

Formation of Cavities due to the Sudden Stopping of Pumping Plants. The paper discusses the conditions for the formation of cavities when a pump suddenly stops. Supported by theoretical considerations, it deduces the law for the beginning, the development and the collapsing of a cavity. The phenomena arising with horizontal, upward inclined and vertical pipes are dealt with separately, separated into simple elements easy to be dealt with and solved individually, using numerical examples. Some experiments are presented and explanations are sought for to observe phenomena.

Образование пустого гространства от внезапного останва насоса. В работе определяются условия образования пустого пространста от внезапного останова насоса, а на основе эт?х-условий, исходя из теоретических соображений, выво1ятся закономерности образования, развития и смыкания пустого пространства. Отдельно рассматриваются явления, возникающие в случае гор?зонтальных, вертикальных и нак?онныц труб; разбивает их на легкие в обращении и простые элементы и при использовании числовых примеров каждый тип решается отдельно. Иллюстрируется несколько экспериментов и сделана попытка найти объяснение явлениям, наблюдаемым при этих опытах.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 411—437 (1975)

ABWÄLZVERFAHREN ZUR HERSTELLUNG EINES FINGERFRÄSERS FÜR ZYLINDRISCHE SCHRÄGZAHNRÄDER

I. TEIL. ANALYTISCHE BEHANDLUNG DER OBERFLÄCHE DES FINGERFRÄSERS

I. LIPKA*

und

B. SZŐKE**

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 3. April 1974]

Die einzigen Werkzeuge für die Herstellung der großen Kräftewirkungen ausgesetzten pfeilverzahnten Kammwalzen von Stahlwalzwerken sind die Fingerfräser. Im vorliegenden Aufsatz werden für ihre Herstellung nicht scheibenartige, sondern zylindrische Schleif- oder Fräswerkzeuge oder ein geradschneidiger Meißel vorgeschlagen. Im allgemeinen beschreiben die Erzeugenden der Schrägzahnflanke des zylindrischen Rades, wenn sie um die Achse des Fingerfräsers gedreht werden, Hyperboloidflächen, welche die Oberfläche des Fräsers einhüllen. Bei der Verwendung von zylindrischen Schleif- oder Fräswerkzeugen ist die Aufgabe jedoch komplizierter, da bei der Drehung einer einzelnen Zahnerzeugenden nicht ein einziges Hyperboloid, sondern entsprechend den Erzeugenden des zylindrischen Werkzeuges eine Schar von Hyperboloiden entsteht. Infolgedessen erscheint jetzt die Oberfläche des Fingerfräsers als die Hüllfläche von kontinuierlich entstehenden Hyperboloidscharen. Der I. Teil des Aufsatzes befaßt sich mit der analytischen Behandlung dieses geometrischen Gebildes.

Zeichenerklärung

a	— Index zur Bezeichnung der Elemente des Grundzylinders
a	— Index der Elemente des Sonnenrades (z. B. Durchmesser, Halbmesser, Zähnezahl)
A	— Achse des Sonnenrades
b	— Index der Elemente des Planetenrades
B	— Achse des Planetenrades
c	— $r_a \cdot \operatorname{tg} \gamma_a$ — Achse des Richtungskegels der Schraubenlinie
C	— Wälzpunkt an der Eingriffslinie des Sonnenrades „a" und des Planetenrades „b"
$é$	— Berührungsgerade der Schraubenlinie, zugleich Erzeugungsgerade des Schleifzylinders (Kapitel I—IV)
$é$	— Spanwerkzeug mit gerader Schneide (Kapitel V—VIII)
e	— Berührungsgerade der Schraubenlinie, zugleich Erzeugungsgerade der Zahnseitenfläche bzw. des Grundzylinders
f	— Normale zur Ebene $(n, é)$ im Fußpunkt N, wobei n die Normaltransversale der Drehachse x und der Erzeugungsgeraden $é$ der Schraubenfläche ist
h	— Ganghöhe der Schraubenlinie
h_1	— Ganghöhe der Schraubenlinie in der Bohrung des Kegelrades k_z
k	— Steg des Planetengetriebes
k_x	— Kegelrad der Achse x
k_z	— Kegelrad der Achse z
n	— Normaltransversale, gegebenenfalls mit dem Index der Reihenfolge

* Dr. I. LIPKA, Szakasits Árpád u. 43, H—1119 Budapest, Ungarn
** Dr. B. SZŐKE, Batthyány u. 139, H—1182 Budapest, Ungarn

n — Umdrehungszahl, gegebenenfalls mit dem Index des rotierenden Elementes
0 — Index der Elemente des Teilzylinders
0 — Index als Numerierung der Ausgangslage
0 — Nullpunkt des Koordinatensystems
p — Parameter der Hyperbel, zugleich Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkt
p — Abstand zwischen den Ebenen der Schlitten, die zur Einstellung des Grundzylinderhalbmessers dienen
r — Halbmesser mit dem notwendigen Index, z. B. r_a-Grundzylinderhalbmesser
R — Kreishalbmesser
t — laufender Parameter
x — Koordinatenachse, oder eine entsprechende wirkliche Achse
X — Rohrachse
y — Koordinatenachse
z — Koordinatenachse
z — Zähnezahl
α — (Alpha) ohne Index, Eingriffswinkel im Stirnschnitt, gegebenenfalls irgendein Winkel
α_n — Winkel im Normalschnitt (Werkzeugeingriffswinkel)
β — Winkel zwischen der Berührungsgeraden der Schraubenlinie und der Erzeugungsgeraden eines Zylinders; der Index deutet auf den gegebenen Zylinder
γ — Steigungswinkel der Berührungsgeraden der Schraubenlinie, den Winkel β zu 90 Grad ergänzend ,z. B. γ_a — Steigungswinkel am Grundzylinder
δ — Winkel, der den Winkel zwischen der Normaltransversalen und der Berührungsebene des Grundzylinders zu 90 Grad ergänzt
$\vartheta = \varphi$ — φ_0, wobei φ den Zentriwinkel am Teilkreis der Evolvente, und φ_0 den Zentriwinkel am Grundkreis der Evolvente bezeichnet
λ, μ, ν — Winkel, deren Kosinuswerte als Richtungsparameter dienen
ϱ — Halbmesser des Fingerfräserprofils mit dem notwendigen Index
φ — Abroll-Winkel, mit dem notwendigen Index
Φ — Parameter in der Parametergleichung der Ellipse

Einleitung

Die Bedeutung des Fingerfräsers als Verzahnwerkzeug ist besonders auffällig in der Herstellung von Walzwerk-Kammwalzen. Die hier obwaltenden mechanischen Kräfteverhältnisse erheischen die Forderung des Ausbleibens von Axialkräften, die von Zahndruckumständen herrühren dürften, sowie die Notwendigkeit, keine Unterbrechung zwischen den rechts- und linksgängigen Zahnkränzen zuzulassen. Mit Rücksicht auf die Größenordnung der hier verwendeten Verzahnungen ($m = 25 \div 75$ mm), wird es sofort klar, daß für eine solche Verzahnungsarbeit der Fingerfräser sowohl aus technischen, wie auch wirtschaftlichen Gründen, als das einzig taugliche Werkzeug erachtet werden muß.

In früheren Zeiten wurden die Kammwalzen ausnahmslos als Gußstücke erzeugt. Zur Zeit, wo man auf die Fräsarbeit überging, waren Handbücher gebräuchlich, in denen die technologischen Angaben für den Bereich $40 \div 50$ mm Modul ziemlich ungenaue, ja sogar gefährliche Zahlenwerte enthielten. Infolgedessen erschienen damals nebst gebrochenen oder vorzeitig abgenützten Kammwalzen nicht nur gegossene, wohl aber auch durch Zerspanung bearbeitete Kammwalzen als Ausschußstücke in den Höfen der Walzwerke. Hierdurch fühlten sich die Verfasser dieser Abhandlung in den zwanziger Jahren bewogen,

eine genaue konstruktive Bestimmung des Fingerfräserprofils auf Grund der damals noch wenig bekannten „involute sin" Funktion auszuarbeiten. In einer Schrift [5] wurde der Gedanke eines Abwälzschleifverfahrens aufgeworfen. Dies bot dem Verfasser der Arbeit [2] den Ansporn, die mathematische Theorie der Hüllfläche abzuleiten. In der Folge wurden beide Verfasser vom Präsidenten des Rates für Professorenbildung aufgefordert, den absolvierenden Hörern der darstellenden Geometrie, und jüngeren Vortragenden, an der Universität ELTE, Budapest, über das genannte Thema im Schuljahr 1961/62 Vorlesungen abzuhalten.

In den erwähnten Arbeiten — wie auch in der unter [1] angeführten Arbeit — lag den Autoren die Idee einer (zylindrischen) Schleifscheibe als Abwälzwerkzeug zu Grunde. Demgegenüber haben sie sich in der vorliegenden Arbeit zur Lösung der Frage der Fertigung die Anwendung eines Werkzeugs vorgestellt, dessen Schneiden zylindrisch, oder konisch, oder aber geradlinig gestaltet sind.

Es ist bekannt, daß beim Vorhandensein eines großen Zahnflankendrukkes und der hiedurch hervorgerufenen Biegungsdeformation des Zahnes ein vollauf ungestörter Eingriff selbst mit einem geometrisch vollkommenen Profil nicht erreicht werden kann. Das ist eben der Grund, weshalb man daran ging, das Zahnkopfprofil zu verjügen. In der Behandlung des Problems des Abwälzschleifens soll also auch die Teilfrage einer möglichen Korrektur des Werkzeugprofils untersucht werden, mittels welcher eine bessere Annäherung an das theoretisch richtige Zahnradprofil erreichbar wäre (nachträgliche Zahnprofilverjüngung).

Es wurde auch dem Umstand Rechnung getragen, daß eine erfolgreiche Schleifarbeit nur duch Anpassung der Antriebsgeschwindigkeit an das Material und an den Durchmesser des zylindrischen Werkzeugs erzielt werden kann. Man kann aber weder einen zu schwachen, noch einen zu schweren Antrieb anwenden. Nach Meinung der Verfasser ist unter solchen Umständen ein Turbo-Triebwerk am besten geeignet.

I. Untersuchung einer einschaligen hyperboloidischen Rotationsfläche, die durch Abwälzverfahren (Schleifen mit zylindrischem Werkzeug, Fräsen) erzeugt wird

Um unser Werkzeug, d. h. den Fingerfräser, durch Abwälzen herzustellen können, haben wir uns folgende Anordnung vorgestellt: eine Flanke des Schrägzahns, also eine Schraubenfläche mit Evolventenprofil lassen wir um eine zur Zahnradachse rechtwinklige Rotationsachse rotieren, wobei die Erzeugungsgeraden der Schraubenfläche eine Schar von Hyperboloiden beschreiben. Bild 1/a. Die Hüllfläche dieser Schar bildet nun die Rotationsfläche des

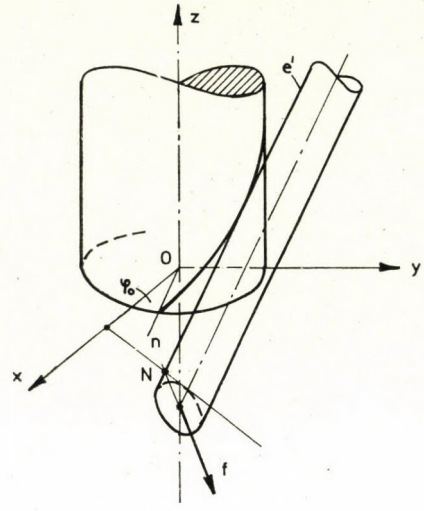


Bild 1. Erzeugungsgerade *é* des zylindrischen Werkzeuges ist zugleich berührende Gerade der Schraubenlinie am Grundzylinder

Werkzeugs. Wenn wir den Fingerfräser durch Schleifen, u. zw. mittels einer zylindrischen Schleifscheibe herstellen wollen, so werden die Erzeugungsgeraden des Schleifzylinders eben die Gesamtheit der Erzeugungsgeraden der Schraubenfläche durchlaufen. Mit anderen Worten, der Ablauf der hier diskutierten Gestaltung des Werkzeugs ist dadurch gekennzeichnet, daß anstelle der geraden Erzeugenden der Schraubenfläche, bestimmte Zylinderflächen treten, die die Schraubenfläche entlang ihrer Erzeugenden berühren; die Hüllfläche der Schleifzylinderschar, die durch Umdrehung dieses Zylinders entsteht, wird nicht eine echte Hyperboloidfläche, sondern eine davon abweichende Rotationsfläche darstellen. Die resultierende Abweichung wird größer, je größer der Durchmesser des Schleifzylinders ist. Wenn wir uns den (praktisch unmöglichen) Grenzfall eines Schleifzylinders mit Nulldurchmesser vorstellen, so wird auch die Hüllfläche in eine gewöhnliche einschalige Rotationshyperboloidfläche übergehen.

Nun soll n die Normaltranversale der Erzeugenden $é$ der Schraubenfläche und der Rotationsachse x bezeichnen, wobei x zur Achse z der Schraubenfläche rechtwinklig steht. Es soll f die Normale zur Ebene $(é, n)$ im Fußpunkt N der Normaltransversalen bedeuten (Bild 1). Mit anderen Worten, die Geraden f, n und $é$ bilden ein rechtwinkliges Trieder. Die zylindrische Schleifscheibe soll entlang der Erzeugenden $é$ die Ebene $(n, é)$ berühren und die Schleifscheibenachse soll die Normale f schneiden. Wir wollen die Erzeugende $é$ und zugleich den Schleifzylinder um die Achse x soweit umdrehen, bis die mit $é$ und mit der Schleifscheibe fest verbundene Normaltransversale n in die Horizontalebene (x, y) zu liegen kommt. In dieser Lage ist $é$ parallel zur Ebene (x, z), da die

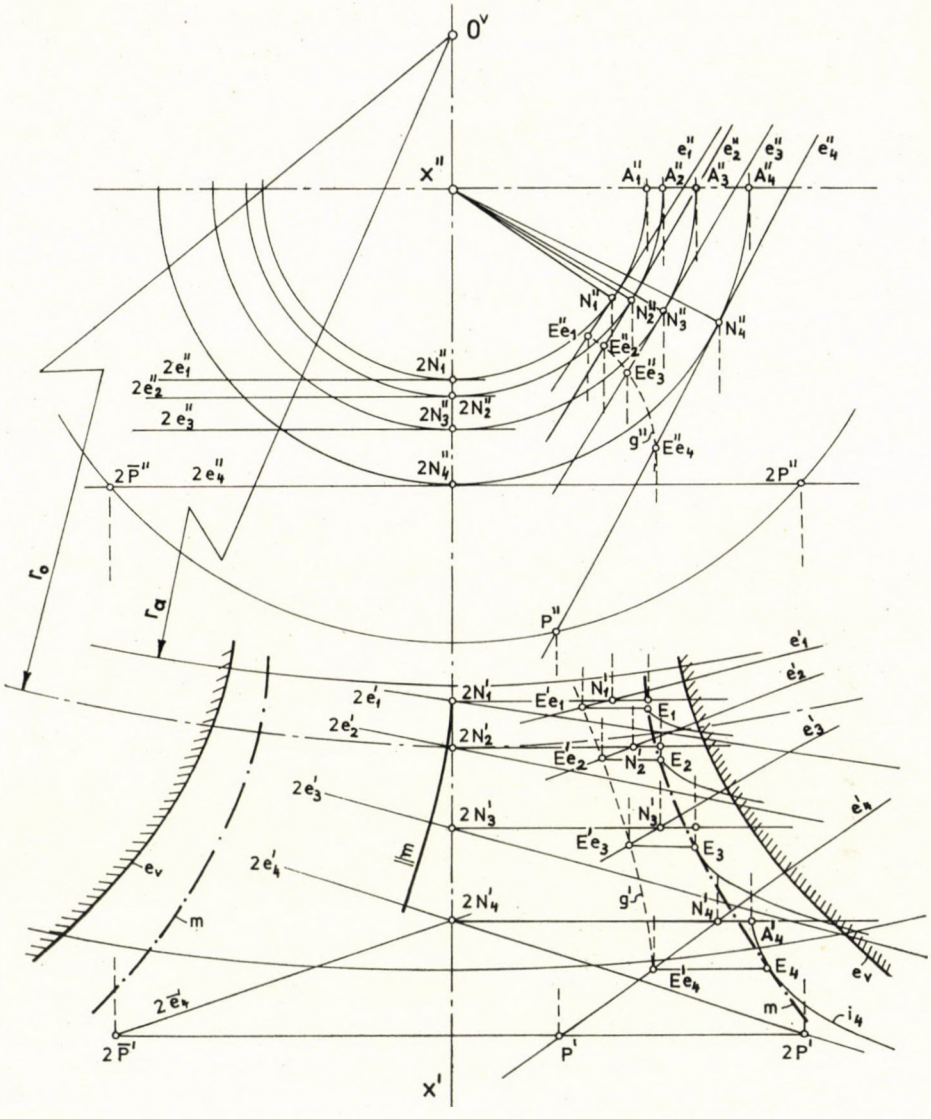


Bild 1/a Durch Drehung der Erzeugenden der Schraubenfläche um die x-Achse des Fingerfräsers wird je ein Rotationshyperboloid beschrieben; die Hüllfläche dieser Hyperboloide ist der Fingerfräser

$e_1 \ldots e_4$ = Erzeugende der Schraubenfläche in der ersten und zweiten Bildebene

$N_1 \ldots N_4$ = Punkte der Normaltransversalen der Fräserachse — x und der Berührungsgeraden e, die an diesen Berührungsgeraden liegen

$2N_1 \ldots 2N_4$ = je ein Punkt der zweiten Projektion der Berührungsgeraden, die um die zur zweiten Bildebene senkrecht stehende X-Achse in horizontale Lage gedreht wurden. Durch den, auf der Geraden e_4 angenommen Hilfspunkt P wird die Konstruktion der ersten Projektion der Berührungsgeraden nach erfolgter Drehung dargestellt

$2\acute{e}_4$ und $2\grave{e}_4$ sind Asymptoten der Hyperbel i_4

$E_1 \ldots E_4$ = Hüllkurve m der Hyperbel, d. h. Meridiankurve des Fingerfräsers

$E_{e1} \ldots E_{e4}$ = jene Punkte der Berührungsgeraden, die während der Drehung die Berührungspunkte bilden

g = Raumkurve, entlang welcher die Schraubenfläche, charakterisiert durch den Evolventen-Stirnschnitt e_v, vom Fräser berührt wird

Der Abstand der Kurve m_1 (die zur Kurve m parallel verläuft), gemessen von $2N'$ in Richtung e', ist gleich der Gleitbewegung der Frührungsleiste e entlang der Führungsbahn

Normaltransversale n zur Achse x rechtwinklig steht. Durch diese Drehung verändert sich auch die Lage des Trieders $(f, n, é)$, wobei doch die Erzeugungsgerade $é$ noch immer die Berührungslinie zwischen Schleifzylinder und Ebene $(n, é)$ bleibt. Wie bereits erwähnt, Schleifzylinderachse und Normale f schneiden sich.

Nun wollen wir nicht nur die neue Lage der Erzeugenden $é$ (als gemeinsamen Erzeugers der Schleifzylinderfläche und der Schraubenfläche) sondern auch die Lage der übrigen Erzeuger der Zylinderfläche in dem, nach der Drehung entstandenen Zustand bestimmen.

Für die Erzeugende $é$ der Schraubenfläche gilt [2], gemäß Bild 1, das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= r_a \cos\varphi - tr_a \sin\varphi, \\ y &= r_a \sin\varphi + tr_a \cos\varphi, \\ z &= c(\varphi - \varphi_0) + ct \end{aligned} \tag{1}$$

mit den Parametern φ, t, und $c = r_a \tan\gamma_a$; (hiebei ist r_a der Halbmesser des Grundzylinders der Schrägverzahnung) und γ_a ist der Steigungswinkel, gemessen am Grundzylinder.

Es soll die Gerade $é$ um die Achse x, bis zu einem Winkel α in positiver Richtung gedreht werden. Für diesen Fall läßt sich das Gleichungssystem für $é$ auf Grund der Formeln (1) folgend aufschreiben:

$$\begin{aligned} x &= r_a \cos\varphi - tr_a \sin\varphi, \\ Y &= (r_a \sin\varphi + tr_a \cos\varphi)\cos\alpha - [c(\varphi - \varphi_0) + ct)]\sin\alpha, \\ Z &= (r_a \sin\varphi + tr_a \cos\varphi)\sin\alpha + [c(\varphi - \varphi_0) + ct]\cos\alpha. \end{aligned}$$

Nach dieser Drehung bleibt die Gerade $é$ in paralleler Lage zur Ebene (x, z), also wird der Fußpunkt N in den Punkt E der Ebene (x, y) verlegt (Bild 2). Da der Koordinatenwert Y konstant bleibt, verschwindet der Koeifizient für t (in der Formel für Y). Das heißt:

$$r_a \cos\varphi \cos\alpha - c \sin\alpha = 0 .$$

Und es gilt für Winkel α:

$$\tan\alpha = \frac{r_a \cos\varphi}{c} .$$

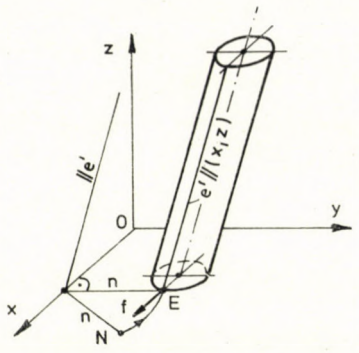


Bild 2. Drehung des zylindrischen Werkzeuges in eine zur Ebene (x, z) parallele Lage

Durch Einsetzen der rechten Seite dieser Formel erhalten wir:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}{c^2}}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{r_a\cos\varphi/c}{\sqrt{\dfrac{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}{c^2}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}},$$

$$\sin\alpha = \frac{r_a\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}}.$$

Wir setzen diese Ausdrücke von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ in die oben angeführte Gleichung für y ein und erhalten für den konstanten Wert

$$Y = \frac{r_a c\sin\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}} - \frac{r_a c(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}} = r_a c\,\frac{\sin\varphi - (\varphi-\varphi_0)\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}}$$

und für den Koordinatenwert

$$Z = \frac{r_a^2\sin\varphi\cos\varphi + c^2(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}} + t\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}\,.$$

Zusammenfassend gilt für die zum Winkel φ gehörende Erzeugungsgerade der Schraubenfläche in der nach einer Drehung entstandenen Lage das folgende

parametrische Gleichungssystem:

$$x = r_a \cos\varphi - t r_a \sin\varphi\,,$$
$$y = r_a c \frac{\sin\varphi - (\varphi - \varphi_0)\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}}\,, \tag{2}$$
$$z = \frac{r_a^2 \sin\varphi\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}} + t\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}\,.$$

Wir können nach (2) zwischen den Koeffizienten des Parameters t folgenden Zusammenhang festlegen:

$$(r_a \sin\varphi)^2 + (\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi})^2 = r_a^2 + c^2,$$

woraus sich die drei Richtungscosinuswerte der zum Winkel φ gehörenden Schraubenflächenerzeugenden $é$, wie folgt, bestimmen lassen:

$$\cos\lambda = -\frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + c^2}}\sin\varphi\,,$$
$$\cos\mu = 0\,, \tag{2'}$$
$$\cos\nu = \frac{\sqrt{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{r_a^2 + c^2}}\,.$$

In der neuen Lage ergibt sich zwischen dem Schleifzylinder (mit dem Halbmesser r) und der Koordinatenebene (x, y) als Schnittlinie eine Ellipse, deren große Achse (gleich $2A$) parallel zur Achse x, und die kleine Achse ($2r$) parallel zur Achse y verläuft (Bild 3), wobei der Ellipsenmittelpunkt C (in Ebene x, y) durch die Koordinatenwerte x_0, y_0 bestimmt und beliebige Punkte der Ellipse durch Parameter Φ, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$x = x_0 + A\cos\Phi\,,$$
$$y = y_0 + r\sin\Phi\,, \tag{3}$$

wo Φ den Parameter bedeutet.

Die Koordinaten x_0, y_0 des Ellipsenmittelpunktes lassen sich folgenderweise ermitteln: Scheitelpunkt E der Ellipse ist eben der Schnittpunkt der Geraden $é$ mit der Ebene (x, y) bei einem Nullwert der Koordinate z, also erhalten wir aus der dritten Gleichung des Gleichungssystems (2):

$$t = -\frac{r_a^2 \sin\varphi\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)}{c^2 + r_a^2\cos^2\varphi}\,.$$

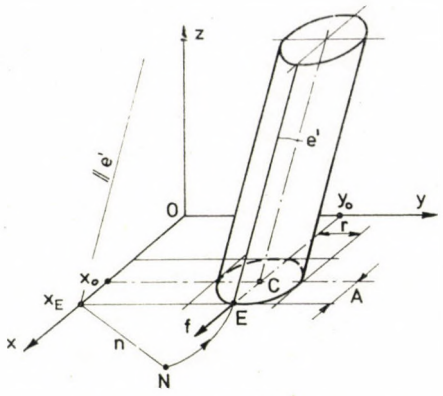


Bild 3. In der im Bild 2 dargestellten Lage des Werkzeuges bildet die Schnittlinie mit der Ebene (x, y) eine Ellipse

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck von x ein [Gleichungssystem (2)], so ergibt sich die Koordinate x_E des Scheitelpunktes E:

$$x_E = r_a \cos\varphi + r_a \sin\varphi \frac{r_a^2 \sin\varphi \cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)}{c^2 + r_a^2 \cos^2\varphi} =$$

$$= r_a \frac{(r_a^2 + c^2)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi}{c^2 + r_a^2 \cos^2\varphi} . \qquad (3')$$

Damit erhalten wir den Koordinatenwert x_0 des Ellipsenmittelpunktes C:

$$x_0 = x_E - A = r_a \frac{(r_a^2 + c^2)\cos\varphi + c^2(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi}{c^2 + r_a^2 \cos^2\varphi} - A , \qquad (3'')$$

wo die große Halbachse der Ellipse:

$$A = \frac{r}{\cos\nu} ,$$

da ν den Winkel zwischen der Geraden $\acute{e}$ und der Achse z bedeutet (siehe Gl. (2')].

Die Koordinate y_0 des Mittelpunktes C ist gleich dem konstanten Koordinatenwert y der zur Ebene (x, z) parallelen Geraden $\acute{e}$, d. h. in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung des Systems (2):

$$y = y_0 = r_a c \cdot \frac{\sin\varphi - (\varphi - \varphi_0)\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r_a^2 \cos^2\varphi}} .$$

Nun sind wir in der Lage, das parametrische Gleichungssystem der zylindrischen Mantelfläche des Schleifzylinders aufzustellen; diese Aufstellung ist nämlich deshalb nötig, um nachher die Hüllfläche der Mantelflächenschar untersuchen zu können. Da die Erzeugenden des Schleifzylinders parallel zur Geraden $\acute{e}$

verlaufen und zugleich die Punkte der Ellipse (mit dem Mittelpunkt C) in der Ebene (x, y) schneiden, erhalten wir auf Grund der Gleichung (3) und des Gleichungssystems (2′) die folgenden Gleichungen:

$$x = x_0 + A\cos\Phi + t\cos\lambda,$$
$$y = y_0 + r\sin\Phi,$$
$$z = t\cos\nu,$$

worin Φ und t zwei Parameter bedeuten und dieses Gleichungssystem die Mantelfläche des Schleifzylinders darstellt, u. zw. nachdem die Achse dieses Zylinders in eine zur Koordinatenebene (x, z) parallele Lage gedreht wurde. Nun soll dieser Zylinder um die Achse x bis zu einem Winkel α weiter gedreht werden, womit wir für die Schleifzylinderschar das folgende parametrische Gleichungssystem erhalten:

$$x = x_0 + A\cos\Phi + t\cos\lambda,$$
$$y = (y_0 + r\sin\Phi)\cos\alpha - t\cos\nu\sin\alpha,$$
$$z = (y_0 + r\sin\Phi)\sin\alpha + t\cos\nu\cos\alpha$$

mit den drei Parametern Φ, t und α. Nach Berechnen der partiellen Differentialquotienten von x, y und z nach α, Φ und t, können wir die Hüllfläche dieser Zylinderschar bestimmen.

$$x'_\alpha = 0, \quad x'_\Phi = -A\sin\Phi, \quad x'_t = \cos\lambda,$$
$$y'_\alpha = -(y_0 + r\sin\Phi)\sin\alpha - t\cos\nu\cos\alpha, \quad y'_\Phi = r\cos\Phi\cos\alpha, \quad y'_t = -\cos\nu\sin\alpha,$$
$$z'_\alpha = (y_0 + r\sin\Phi)\cos\alpha - t\cos\nu\sin\alpha, \quad z'_\Phi = r\cos\Phi\sin\alpha, \quad z'_t = \cos\nu\cos\alpha.$$

Mit Hilfe dieser Differentialquotienten ergibt sich die zur Eliminierung notwendige Funktionaldeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} x'_\alpha & x'_\Phi & x'_t \\ y'_\alpha & y'_\Phi & y'_t \\ z'_\alpha & z'_\Phi & z'_t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -A\sin\Phi & \cos\lambda \\ -(y_0 + r\sin\Phi)\sin\alpha - t\cos\nu\cos\alpha & r\cos\Phi\cos\alpha & -\cos\nu\sin\alpha \\ (y_0 + r\sin\Phi)\cos\alpha - t\cos\nu\sin\alpha & r\cos\Phi\sin\alpha & \cos\nu\cos\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhält man:

$$D = A\sin\Phi \begin{vmatrix} -(y_0 + r\sin\Phi)\sin\alpha - t\cos\nu\cos\alpha & -\cos\nu\sin\alpha \\ (y_0 + r\sin\Phi)\cos\alpha - t\cos\nu\sin\alpha & \cos\nu\sin\alpha \end{vmatrix} +$$
$$+ \cos\lambda \begin{vmatrix} -(y_0 + r\sin\Phi)\sin\alpha - t\cos\nu\cos\alpha & r\cos\Phi\cos\alpha \\ (y_0 + r\sin\Phi)\cos\alpha - t\cos\nu\sin\alpha & r\cos\Phi\sin\alpha \end{vmatrix}.$$

Indem wir die hier auftretenden Determinanten zweiter Ordnung auf Produkte zweier einfacher Determinanten umschreiben, erhalten wir:

$$D = A \sin \Phi \begin{vmatrix} y_0 + r \sin \Phi & t \cos \nu \\ \cos \nu & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{vmatrix} +$$

$$+ \cos \lambda \begin{vmatrix} y_0 + r \sin \Phi & t \cos \nu \\ 0 & -r \cos \Phi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -A \sin \Phi \cdot t \cos^2 \nu - \cos \lambda \cdot r \cdot \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi) = 0.$$

Und hieraus ergibt sich die Formel für den Parameter t:

$$t = -\frac{\cos \lambda \cdot r \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi)}{A \cos^2 \nu \sin \Phi}$$

Setzt man den Ausdruck für t in die obigen Formeln für x, y und z ein, so erhält man das Gleichungssystem der Hüllfläche:

$$x = x_0 + A \cos \Phi - \frac{\cos^2 \lambda \cdot r \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi)}{A \cos^2 \nu \sin \Phi},$$

$$y = (y_0 + r \sin \Phi) \cos \alpha + \frac{\cos \lambda \cdot r \cdot \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi)}{A \cos \nu \sin \Phi} \sin \alpha,$$

$$z = (y_0 + r \sin \Phi) \sin \alpha - \frac{\cos \lambda \cdot r \cdot \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi)}{A \cos \nu \cdot \sin \Phi} \cos \alpha.$$

Es ist aber die große Halbachse der Ellipse:

$$A = \frac{r}{\cos \nu}$$

und wir können diesen Wert in obige Gleichungen einsetzen, um daraus das folgende Gleichungssystem zu gewinnen:

$$x = x_0 + A \cos \Phi - \frac{\cos^2 \lambda \cos \Phi (y_0 + r \sin \Phi)}{\cos \nu \sin \Phi},$$

$$y = (y_0 + r \sin \Phi) \frac{\sin \Phi \cos \alpha + \cos \lambda \cos \Phi \sin \alpha}{\sin \Phi},$$

$$z = (y_0 + r \sin \Phi) \frac{\sin \Phi \sin \alpha - \cos \lambda \cos \Phi \cos \alpha}{\sin \Phi}$$

u. zw. als Darstellung der Hüllfläche, mit anderen Worten, die Darstellung der durch den Schleifzylinder (mit Halbmesser r) erzeugte Rotationsfläche, wenn nämlich der Schleifzylinder um eine, zur Achse der Schraubenfläche rechtwinklige Achse x rotiert.

Wir untersuchen die zur Achse x rechtwinklig stehenden ebenen Kreisschnitte der soeben abgeleiteten Umdrehungsfläche (Hüllfläche), da diese Kreisschnitte tatsächlich die Kreisschnitte des einschaligen, durch die Erzeugende *é* der Schraubenfläche erzeugten Rotationshyperboloides (bei einem als fix angenommenen Winkelwert φ) liefern.

Um den Halbmesser ϱ eines solchen Kreisschnittes zu gewinnen, bilden wir die Quadratsumme $(y^2 + z^2)$ und vereinfachen den abgeleiteten Ausdruck im Sinne des Satzes $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, wie folgt:

$$\varrho^2 = y^2 + z^2 = (y_0 + r \sin \Phi)^2 \frac{\sin^2 \Phi + \cos^2 \lambda \cos^2 \Phi}{\sin^2 \Phi}$$

$$= (y_0 + r \sin \Phi)^2 (1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi) .$$

Die Ebene dieses Kreises wird durch jenen x-Wert bestimmt, der demselben Parameterwert Φ entspricht wie der Halbmesser ϱ:

$$x = x_0 + A \cos \Phi - \frac{\cos^2 \lambda}{\cos \nu} (y_0 + r \sin \Phi) \cot \Phi .$$

Gemäß Gl. (2′) gilt:

$$\cos \lambda = - \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + c^2}} \sin \varphi ,$$

wobei $c = r_a \tan \gamma_a$ (γ_a ist der Steigungswinkel am Grundzylinder).

Mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma_a}} = \cos \gamma_a$$

erhält man:

$$\cos \lambda = - \sin \varphi \cos \gamma_a$$

Da nun die Gerade *é* parallel zur Ebene (x, z) liegt, so ist:

$$\cos \nu = \sin \lambda , \tag{4}$$

Aus Bild 3 folgt der Ausdruck

$$A = \frac{r}{\cos \nu} ,$$

und gemäß Gln. (3′) und (3″) ist

$$x_0 = x_E - A,$$

woraus die Formel

$$x_0 = x_E - \frac{r}{\cos \nu}$$

hervorgeht. Endlich erhält man hieraus den die Lage des Kreisschnittes bestimmende Wert von x:

$$x = x_E - \frac{r}{\cos \nu}(1 - \cos \Phi) - \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 + r \sin \Phi) \cot \Phi$$

und

$$\varrho = (y_0 + r \sin \Phi) \sqrt{1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi},$$

worin, gemäß obiger Ausführungen, die Gleichung

$$\cos \lambda = - \sin \varphi \cos \gamma_a$$

gilt. Wenn in diesen Formeln für x und ϱ der Parameterwert Φ sich ändert, so ergeben sich die verschiedenen Kreisschnitte (immer in einer zur Achse x normalen Ebene), für einen festen φ Wert bzw. in der damit verbundenen Rotationsfläche. Wenn nun der Wert φ geändert wird, so ergeben sich alle Rotationsflächen, die den durch alle Erzeugenden der Schraubenfläche erzeugten einschaligen Rotationshyperboloiden entsprechen.

Gemäß Arbeit [3] besteht die Hüllfläche der durch Drehung des Schleifzylinders entstehenden Zylinderschar aus 2 Teilen: eine innere und eine äußere Hüllfläche. Für uns sind offenkundig die innere Hüllfläche und deren Kreisschnitte von Bedeutung.

So eine innere Hüllfläche entsteht, wenn wir die Änderung des Parameters Φ binnen eines Winkelintervalls beschränken u. zw. in folgender Weise:

$$(360° - \delta) \leq \Phi \leq (360° + \delta); \quad (\delta > 0)$$

In diesem Sinne wollen wir in die Formeln für x und ϱ anstelle von Φ die Differenz $(360° - \varphi)$ einsetzen, wodurch wir für x folgende Gleichung erhalten:

$$x = x_E - \frac{r}{\cos \nu}(1 - \cos \Phi) + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 - r \sin \Phi) \cot \Phi .$$

Es ist nämlich mit Rücksicht auf die goniometrischen Formeln:

$$\cos (360° - \Phi) = \cos \Phi, \quad \text{und} \quad \cot (360° - \Phi) = -\cot \Phi.$$

Nun, auf Grund des Zusammenhanges

$$\sin (360° - \Phi) = -\sin \Phi$$

ergibt sich für den Halbmesser des Kreisschnittes

$$\varrho = (y_0 - r \sin \Phi) \sqrt{1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi},$$

worin

$$\cos \lambda = - \sin \varphi \cos \gamma_a.$$

II. Untersuchung der Kreisschnitte der erzeugten Rotationsfläche

Wir gingen von der Annahme aus, daß wir die zylinderförmige Schleifscheibe um eine zur Achse der Evolventen-Schraubenfläche rechtwinkligen Achse drehen lassen und dadurch eine der einschaligen Hyperboloidfläche ähnliche Rotationsfläche erzeugen. Für die Kreisschnitte dieser Rotationsfläche erhalten wir

$$\varrho = (y_0 - r \sin \Phi) \sqrt{1+\cos^2 \lambda \cdot \cot^2 \Phi}\,, \tag{5$_1$}$$

$$x = x_E - \frac{r}{\cos \nu}(1 - \cos \Phi) + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 - r \sin \Phi) \cot \Phi\,, \tag{5$_2$}$$

worin Φ den, zu den einzelnen, zueinander parallel liegenden Schnittebenen zugeordneten Parameterwert darstellt und r der Halbmesser des Schleifzylinders ist. Mit Rücksicht auf $c = r_a \cot \gamma_a$ und nach Formel (2), erhält man:

$$y_0 = r_a \tan \gamma_a \frac{\sin \varphi - (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{\sqrt{\tan^2 \gamma_a + \cos^2 \varphi}}\,,$$

$$\cos \lambda = - \sin \varphi \cos \gamma_a,$$

$$x_E = r_a \frac{(1 + \tan^2 \gamma_a) \cos \varphi + \tan^2 \gamma_a (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi}{\tan^2 \gamma_a + \cos^2 \varphi}$$

und

$$\cos \nu = \sin \lambda = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma_a}\,.$$

Nun wollen wir den (theoretischen) Grenzfall betrachten, in dem der Halbmesser r des Schleifzylinders Null sei. In diesem Falle treten anstelle der Formeln (5$_1$) und (5$_2$) die folgenden Beziehungen:

$$\varrho = y_0 \sqrt{1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi}\,,$$

$$x = x_E + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda} y_0 \cot \Phi\,.$$

Wir bilden das Quadrat von ϱ:

$$\varrho^2 = y_0^2 + y_0^2 \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi.$$

Ferner, wir drücken den Wert $\cot \Phi$ auf Grund der Gleichung für x aus:

$$\cot \Phi = \frac{x - x_E}{y_0 \cos^2 \lambda} \sin \lambda\,.$$

Das Quadrat von $\cot \Phi$ soll in die Formel für ϱ^2 eingesetzt werden:

$$\varrho^2 = y_0^2 + y_0^2 \cos^2 \lambda \frac{(x_E - x)^2}{y_0^2 \cos^4 \lambda} \sin^2 \lambda ,$$

bzw.

$$\varrho^2 = y_0^2 + (x_E - x)^2 \tan^2 \lambda. \tag{6}$$

Nun ist ϱ tatsächlich der Halbmesser jenes Kreisschnittes der einschaligen Hyperboloidfläche, deren Schnittebene in einem Abstand x vom O liegt. Nämlich, falls die Erzeugende $\acute{e}$ um die Achse x in eine zur Ebene (x, z) parallele Lage gedreht wird, so ergibt sich für die Gerade $\acute{e}$ im Raum (die zugleich den Punkt E mit den Koordinaten x_E und y_0 passiert), das folgende parametrische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= x_E + t \cos \lambda, \\ y &= y_0, \\ z &= t \cos \nu , \end{aligned}$$

wobei, da gemäß (4) $\lambda - \nu = 90°$ ist, auch $\cos \nu = \sin \lambda$ ist. Wenn diese Gerade um die Achse x bis zum Winkel α gedreht wird, gewinnt man für die einschalige Rotationshyperboloidfläche das folgende Gleichungssystems mit zwei Parametern:

$$\begin{aligned} x &= x_E + t \cos \lambda, \\ y &= y_0 \cos \alpha - t \cos \nu \cdot \sin \alpha, \\ z &= y_0 \sin \alpha + t \cos \nu \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Schnittebene im Abstand x, so erhalten wir aus der ersten Formel obigen System:

$$t = \frac{x - x_E}{\cos \lambda}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\varrho^2 = y^2 + z^2 = y_0^2 + t^2 \cos^2 \nu ,$$

bzw.

$$\cos \nu = \sin \lambda ,$$

erhält man:

$$\varrho^2 = y_0^2 + \left(\frac{x - x_E}{\cos \lambda} \right)^2 \cos^2 \nu = y_0^2 + (x - x_E)^2 \tan^2 \lambda .$$

Diese Formel ist mit der unter (6) angeführten Formel identisch. Mit anderen Worten entspricht die neue Formel — mit veränderlichen Punktkoordinaten: x, y, z — der folgenden Rotationshyperboloidfläche:

$$y^2 + z^2 = y_0^2 + (x_E - x)^2 \tan^2 \lambda, \tag{6'}$$

wobei y_0 dem Halbmesser des Kehlkreises gleich ist.

Wenn wir uns also einen (theoretischen) Schleifzylinder mit dem Halbmesser Null vorstellen, so werden alle geschliffenen Flächen zu einschaligen Rotationshyperboloiden. Die Hüllfläche dieser Flächenschar von einschaligen Rotationshyperboloiden bildet tatsächlich die erwünschte Rotationsfläche des Fräswerkzeuges. Unter Berufung auf die Arbeit [1] erkennen wir hierin den Fall, in welchem die Schneide der flachen Schleifscheibe — mit Hilfe der Vorrichtung von SZŐKE — die Rotationsfläche des Fräsers durch Linien-Schleifen erzeugt. Um zu erreichen, daß die durch Schleifen praktisch erzeugte Fräserfläche je weniger von einem echten Hyperboloid abweicht, soll der Halbmesser des Schleifzylinders möglichst klein sein.

Nachstehend wollen wir die Abweichung (am Halbmesser ϱ und in der Lage x) zwischen dem theoretischen und dem praktischen Fall der Kreisschnitte für einen Schleifzylinderhalbmesser r größer als Null untersuchen.

III. Vergleich der Kreisschnitte eines einschaligen Hyperboloids mit jenen der praktisch erzeugten Rotationsfläche

Um den Rechnungsgang näher zu beleuchten, wollen wir einen Fingerfräser zur Herstellung einer Verzahnung mit kleinem Modulwert betrachten. Hiezu wählen wir, im Stirnschnitt der Schrägverzahnung, einen Modul m_h gleich 1. In diesem Falle können wir einen entsprechend kleinen Schleifzylinder von 2 mm Durchmesser wählen (Halbmesser r gleich 1). Nun gelten für die Kreisschnitte der durch Schleifen erzeugten Rotationsflächen die Formeln (5_1) und (5_2):

$$\varrho = (y_0 - \sin \Phi) \sqrt{1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi}$$

$$x = x_E - \frac{1 - \cos \Phi}{\cos \nu} + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda} (y_0 - \sin \Phi) \cot \Phi.$$

Betrachten wir nun einen Kreisschnitt — mit dem Halbmesser ϱ — der tatsächlich erzeugten Rotationsfläche, dessen Lage durch den Wert der Koordinate x bestimmt ist. Hiezu suchen wir jenen Kreisschnitt der (theoretischen) einschaligen Rotationshyperboloidfläche, dessen Halbmesser mit dem Halbmesser des vorigen Kreisschnittes übereinstimmt. Fürs erste wollen wir jenen x-Wert in der Gleichung (6) bestimmen, für welchen

$$y_0^2 + (x_E - x)^2 \tan^2 \lambda = \varrho^2$$

gilt, wobei, gemäß (5_1):

$$\varrho^2 = (y_0 - \sin \Phi)^2(1 + \cos^2 \lambda \cot^2 \Phi)$$

ist.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$(x_F - x)^2 = \frac{\varrho^2 - y_0^2}{\tan^2 \lambda} .$$

Dabei soll aber nicht vergessen werden, daß nach dem Wurzelziehen der Wurzelausdruck immer 2 Werte annimmt

$$x_E - x = \pm \frac{\sqrt{\varrho^2 - y_0^2}}{\tan^2 \lambda} .$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß in der einschaligen Hyperboloidfläche jeweils zwei Kreisschnitte mit demselben Halbmesserwert ϱ zu finden sind. Diese Kreisschnitte liegen symmetrisch zur Ebene des Kehlkreises und die Lage dieser zwei Kreisschnitte wird durch die folgenden Koordinatenwerte bestimmt:

$$x = x_E - \frac{\sqrt{\varrho^2 - y_0^2}}{\tan \lambda} , \tag{6_1}$$

und

$$x = x_E + \frac{\sqrt{\varrho^2 - y_0^2}}{\tan \lambda} . \tag{6_2}$$

Diese x-Werte gelten also für die echte Hyperboloidfläche.

Jetzt soll, wie bereits angedeutet, die Bestimmung der demselben ϱ-Wert zugehörigen x-Koordinatenwerte in der praktisch generierten Rotationsfläche erfolgen.

Hiezu kehren wir zur Gl. (5_2) zurück, wobei wir für unseren Fall den Wert $r = 1$ gelten lassen: demgemäß nimmt diesmal die Gl. (5_2) die folgende Form an:

$$x = x_E - \frac{1 - \cos \Phi}{\cos \nu} + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 - \sin \Phi) \cot \Phi. \tag{7}$$

Wir werden im IV. Kapitel betreffs der Größenordnung des Gliedes $(1 - \cos \Phi)/\cos \nu$ numerisch nachweisen, daß es gegenüber dem nachstehenden Glied:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 - \sin \Phi) \cdot \cot \Phi > 0$$

vernachlässigt werden kann. Demzufolge gilt für den Wert x in Gl. (7) die Ungleichung:

$$x > x_E .$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß der Abstand eines Kreisschnittes vom Origo in der praktisch erzeugten Rotationsfläche größer sei, als der Abstand in der theoretisch echten einschaligen Hyperboloidfläche, wenn beide Kreisschnitte durch demselben Halbmesserwert ϱ gekennzeichnet sind. Diese Feststellung über die Abstandsdifferenz gilt für beide Fälle gemäß Gl. (6_1) und (6_2). (Siehe Kapitel IV.) Daraus folgt unsere praktisch wichtigste Empfehlung, die Lage des Schleifzylinders um ein gewisses, noch genauer zu bestimmendes Maß (in negativem Sinn der Koordinatenachse x) dem Origo näher zu bringen, eben zum Ausgleich der konstatierten Abstandsabweichung zwischen dem theoretischen und den praktischen Fall. Auf diese Weise kann man die Übereinstimmung der Lage des praktisch erzeugten Kreisschnitts mit jener des theoretischen gemäß (6_2), jeweils mit demselben Halbmesser ϱ zustandebringen.

Wir haben in Tafel I die wichtigsten verzahnungstechnischen Grundwerte für den folgenden Fall zusammengestellt:

Modul $m = 27$ mm. Zähnezahl $z = 27$,
Schrägungswinkel am Teilzylinder $\beta = 30°$,
Eingriffswinkel der Pfeilverzahnung $\alpha_0 = 20°$,
Schleifzylinderdurchmesser $2r = 60$ mm.

Aus dieser Tafel geht klar hervor, daß der Abstandsunterschied vom Origo O, zwischen der Höhenlage des praktisch effektiven und des theoretischen Kreisschnittes stets abnimmt, wenn diese Lage dem Origo näher kommt. Dieser

Tafel I

Verzahnungstechnische Kennwerte (mm) bei Erzeugung eines Fingerfräsers mittels eines zylindrischen Abwälzwerkzeuges vom Durchmesser W 60 mm (m = 27)

Zylinderhalbmesser am Zahrand r_h	Durch Abwälzen erzeugter Halbmesser des Fingerfräsers ϱ_{max}	Abstand der Ebene des ϱ_{max} vom Origo $x_{\varrho max}$	$x_{\varrho max} - x_{theor.} = \Delta x$
387,00000	17,3650	390,10642	0,57563
$r_0 =$ 405,29989	24,470	410,91139	1,29276
418,29989	31,342	425,12368	1,77864
423,00000	34,143	430,64012	1,98987
425,00000	35,37415	432,81928	2,04085
$r_f =$ 432,29989	40,11131	441,62	2,4813

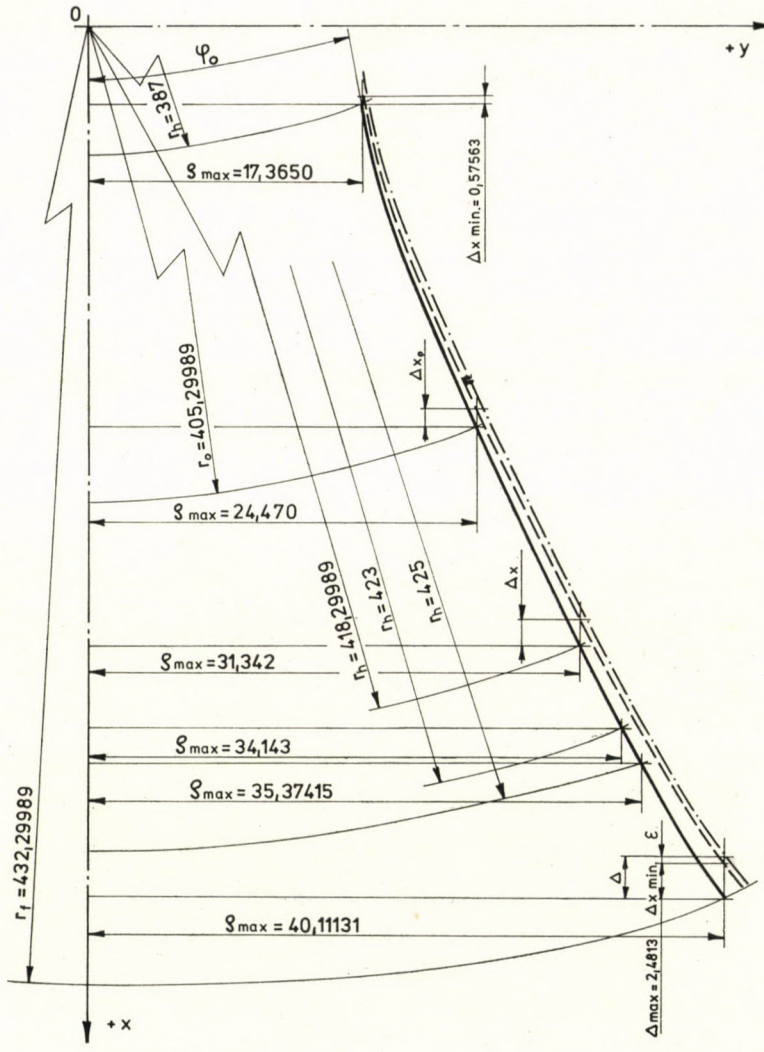


Bild 4/a Korrektionsmöglichkeit des Fingerfräserprofils

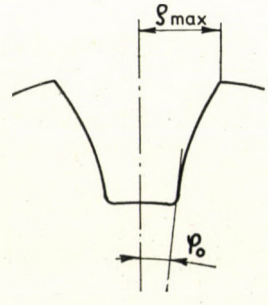


Bild. 4/b Halbzentriwinkel φ- der Zahnlücke und ϱ_{max} Halbmesser des Fingerfräsers

Umstand ist, betreffs der berechneten Werte, im Bild 4/a leichtverständlich dargestellt. Die Kurven dieses Bildes haben folgende Bedeutung:

———— volle Linie: Wert der verschiedenen Halbmesser ϱ_{max}, erzeugt durch ein Schleifwerkzeug (mit dem Dm 60 mm) in den einzelnen geometrischen Zahnradzylinderflächen mit dem Halbmesser r_h.

— — — — — gestrichelte Linie: die Profilkurve des Fingerfräsers entsprechend der theoretischen Differenz $\Delta x = x\varrho_{max} - x\varrho$.

—.—.—.—. strichpunktierte Linie: Profilkurve des Fingerfräsers in der bereits verschobenen Lage des Werkzeuges.

Mit Rücksicht auf Gründe der in der Einleitung angedeuteten Zahnprofilverjüngung wollen wir auf Einhaltung des Versetzungswerts Δx (der übrigens in Richtung zum Origo immer kleiner wird) verzichten, und wir wählen lieber eine — im Laufe des Abwälzens konstante — Verschiebung, womit die Wurzel des Fingerfräserprofils stärker wird. Mit anderen Worten, durch dieses Werkzeugprofil wird ein an dem Kopfteil etwas verjüngtes Zahnprofil erzeugt. Als Maß der Verschiebung mag ein Wert von Δx_{max} gewählt werden, der genau gesprochen am Halbmesser r_f des Zahnkopfkreises geltend erkannt ist, oder aber können wir eine Verschiebung $\Delta x_{max} + \varepsilon$ vornehmen, wobei ε sehr klein sei. Wenn wir in unserer Apparatur nur kleine Schleifzylinder (z. B. Durch-

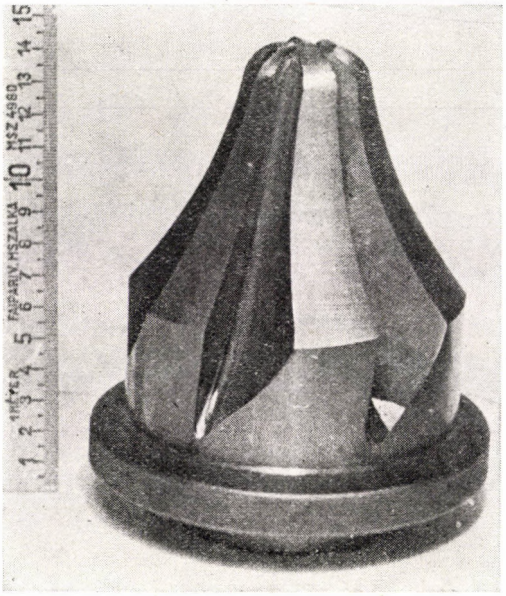


Bild. 5. Bild eines Fingerfräsers für Pfeilverzahnung

messer 8 ÷ 12 mm) verwenden, so genügt es, eine, dem Teilkreis entsprechende Verschiebung Δx_0 vorzunehmen, da in dieser Größenordnung die Kurve der effektiven ϱ_{max} sich eng an die theoretische Kurve anschmiegt.

Eine Schwächung des Zahnprofils in der Wurzel durch Verstellen des Schleifzylinders bezw. Fräsers ist bedeutungslos, da, wie aus dem Bild (Bild 5) des Fingerfräsers ersichtlich ist, die Richtung der Meridiankurve — in ihren sich dem Origo nähernden Punkten — immer mehr der Fräserachsrichtung identisch wird. Also bedeutet die effektive Versetzung in Richtung minus x in der Gegend des Grundzylinders sozusagen eine Verschiebung in sich selbst.

IV. Zahlenbeispiele zur näheren Beleuchtung unserer theoretischen Grundlegungen

Die verzahnungstechnischen Angaben dieses Beispiels sind die folgenden: Zähnezahl $z = 26$. Schrägungswinkel am Teilzylinder $\beta = 30°$. Werkzeugeingriffswinkel $\alpha_0 = 20°$. Die gewählte Zähnezahl stellt die untere Grenze dar, um bei dem angebenem Schrägungswinkel ein echtes, ununterbrochenes Evolventelprofil erzeugen zu können. (Siehe Arbeit [2] p. 227.) Es soll der hiezu geeignete Fingerfräser hergestellt werden. Hiezu ist der Modul im Stirnquerschnitt $m_h = 1$ mm, und der Schleifzylinderhalbmesser $r = 1$ mm.

Gemäß den evolventengeometrischen Regeln erhalten wir noch folgende Zahlenwerte: Grundkreishalbmesser $r_a = 11{,}98459$ mm. Kopfkreishalbmesser $r_f = 13{,}86603$ mm. Theoretische Zahnhöhe $= 2 \cdot \cos\beta = 1{,}73205$ mm. Durch eine genaue Analyse der erzeugenden Linien (Linienstrecken) der Zahnflanken im Stirnschnitt wurde uns folgendes klar: Der größte Kreisschnitt der einschaligen Rotationshyperboloide (eigentlich Hyperboloidringe) — die die Erzeugenden (Linienstücke) der Zahnflanken beschreiben —, der bei Ausbildung der Hüllfläche in Betracht kommt, besitzt den Halbmesser $\varrho_{max} = 1{,}286$ mm (s. Bild 4/b).

Der Winkelparameter φ, bei dem die die Zahnflanken erzeugende Linie den Kopfkreis passiert, ist gleich:

$$\varphi = 35° 35' 36'',$$

und der Zahnlückenbalbwinkel am Fußkreis ist

$$\varphi_0 = 2° 15' 8''.$$

Nun sind wir in der Lage, die weiteren zahngeometrischen Werte aus diesen Zahlangaben zu berechnen, u. zw. wie folgt: gemäß Gl. (5_1) und (5_2) lassen sich die Werte y_0 und λ für das, dem oben angegebenen Parameterwert $\varphi = 35° 35' 36''$ entsprechende, Hyperboloid aus den Gl. (2) und (4) errechnen:

$$y_0 = 1{,}19706; \quad \cos\lambda = 0{,}2734638; \quad \lambda = 74° 7' 46''.$$

Doch ist Gl. (5_1) für Φ explizit nicht auflösbar. Es ist aber möglich, eine gut annähernde Lösung durch Iteration, diesmal dem aus der Formel (5_1) stammenden Wert $\varrho_{max} = 1{,}286$ entsprechend, zu finden, nämlich

$$\Phi = 15° 48'.$$

Dieses Ergebnis läßt sich folgenderweise kontrollieren:

$$\sin \Phi = 0{,}2722802; \quad \cos \Phi = 0{,}9622180; \quad \cot \Phi = 3{,}5339251; \quad r = 1;$$

gemäß (5_1) läßt sich anschreiben:

$$\varrho = (1{,}19706 - 0{,}27228)\sqrt{1 + 0{,}2734638^2 \cdot 3{,}5339251^2} = 0{,}92478\sqrt{1{,}93393} =$$

$$= 0{,}92478 \cdot 1{,}300658 = 1{,}286.$$

Der x-Wert, der die Lage dieses Kreisschnittes bestimmt, kann aus (5_2) aufgrund folgender Angaben berechnet werden:

nach Gl. (3′): $x_E = 13{,}95182$;
nach Gl. (4): $\cos \nu = \sin \lambda = \sin 74° 7', 46'' = 0{,}9618820$;
somit erhält man aus (5_2):

$$x = 13{,}95182 - \frac{1 - 0{,}962218}{0{,}961882} + \frac{0{,}2734638^2}{0{,}961882}(0{,}92478) \cdot 3{,}5339251 =$$

$$= 13{,}95182 - 0{,}0392792 + 0{,}254 = 14{,}16662,$$

d. h. $x = 14{,}16662$ ist jener Koordinatenwert, der die Lage des Kreisschnittes mit dem Halbmesser: $\varrho = 1{,}286$ bestimmt. Man sieht auch, daß unsere Behauptung (Kapitel III) nach welcher der Wert

$$\frac{1 - \cos \Phi}{\cos \nu} = 0{,}0392792$$

im Vergleich zum folgenden Glied:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}(y_0 - \sin \Phi) \cot \Phi = 0{,}25408$$

vernachlässigbar sei, zu Recht besteht.

Wir wollen jetzt den durch den Halbmesser $\varrho_{\max} = 1{,}286$ gekennzeichneten Kreisschnitt des zum Parameterwert $\varphi = 35° 35' 36''$ gehörenden Rotationshyperboloids bestimmen.

In Kenntnis der Werte $\tan \lambda = 3{,}5173868$ und $x_E = 13{,}95182$ lautet die Formel (6) für die oben bezeichnete Hyperboloidfläche:

$$\varrho^2 = y_0^2 + (x_E - x)^2 \operatorname{tg}^2 \lambda = 1{,}19706^2 + (13{,}95182 - x)^2 3{,}5173868^2,$$

$$\varrho^2 = 1{,}43295 + (13{,}95182 - x)^2 \cdot 12{,}3720099.$$

Mit $\varrho = 1{,}286$ ist $\varrho^2 = 1{,}653796$, und daher haben wir:

$$0{,}220846 = (13{,}95182 - x)^2 \cdot 12{,}3720099$$

d. h.

$$(13{,}95182 - x)^2 = 0{,}0178505$$

und

$$x - 13{,}95182 = 0{,}133606,$$

also ist $x = 14{,}08543$ die Koordinate der Lage des ($\varrho = 1{,}286$) Kreisquerschnittes im echten Hyperboloid. Dieser Wert is tatsächlich kleiner als $x = 14{,}16662$ mm in der effektiven Rotationsfläche. Somit haben wir nachgewiesen, daß ein Kreisschnitt im echten Hyperboloid dem Origo näher liegt, als ein Querschnitt desselben Halbmessers in der praktischen Rotationsfläche.

Die gesuchte Abweichung dieser Abstände ist:

$$14{,}16662 - 14{,}08543 = 0{,}08119 \text{ mm}.$$

Das heißt, bei einem Stirnmodul $m_h = 1$ mm soll der Schleifzylinder um 0,081 mm näher ans Origo gerückt werden. Bei einem Stirnmodul $m_h = 10$ mm ist das Maß des Näherrückens 0,812 mm, natürlich für eine Schleifscheibe mit dem Halbmesser $r = 10$ mm.

Ergänzend sei bemerkt, daß man in der Praxis der Schrägverzahnung nicht mit dem Sitrnmodul, sondern dem Werkzeugmodul m rechnet, wobei diese zwei Werte folgenderweise zusammenhängen:

$$m_h = \frac{m}{\cos \beta} .$$

Wenn wir also der praktischen Wirklichkeit Rechnung tragen wollen, so gehen wir von einem Wert von $m = 1$ mm aus.

(Oben haben wir $m_h = 1$ mm gewählt, um den Rechnungsgang zu vereinfachen.) Nun gilt für $m = 1$ mm, bei einem Wert von $\cos \beta = \cos 30° =$ $= 0{,}866254$, der Wert $m_h = 1{,}154700$ mm. Also werden die oben gewonnenen Werte um den Multiplikator 1,1547 größer.

In Zahlen: die Verschiebung bei $m = 1$ wird $(0{,}0811 \cdot 1{,}1547) = 0{,}09364$ und bei $m = 10$, beträgt sie 0,9364 mm.

Der vollen Analogie halber sollte man die bezüglichen Schleifscheibenhalbmesser an Stelle von 1 und 10 mm, als 1,1547 bzw. 11,547 annehmen. Doch wird durch Beibehaltung der Werte von 1 und 10 mm die Abwälzgestaltung des Werkzeuges sicherlich genauer.

Es folgt nun ein Beispiel mit einem schwächeren Schrägungswinkel, u. zw. mit $\beta = 10°$ am Teilzylinder, Zähnezahl $z = 33$, als die untere Grenze eines vollen Evolventenprofils (s. [2] Seite 227).

— Im Falle $m_h = 1$, ist der Grundkreishalbmesser

$$r_a = \frac{33}{2} \cdot \cos \alpha_h = 15{,}4768037,$$

und der Kopfkreishalbmesser ist

$$r_f = 16{,}5 + \cos 10° = 17{,}48481 \text{ mm},$$

die theoretische Zahnhöhe ist

$$2 \cos \beta = 1{,}9692 \text{ mm}.$$

Halbmesser des maximalen Kreisschnittes der zur Ausbildung der Hüllfläche benötigten Rotationshyperboloide, erzeugt durch die Erzeugenden der Zahnflanke, ist:

$$\varrho_{\max} = 1{,}288.$$

Der Parameterwert φ, bei welchem der Kopfkreis der Erzeugenden der Zahnflanke passiert wird, ist gleich $\varphi = 31° 51' 18''$.

Der halbe Zentriwinkel der Zahnlücke am inneren Kreis ist $\varphi_0 = 1° 50' 30''$.

Die Werte y_0 und λ für die Formeln (5_1) und (5_2), u. zw. für das zum Parameterwert $\varphi = 31° 51' 18''$ gehörende Rotationshyperboloid, lassen sich gemäß Formeln (2) und (4) feststellen:

$$y_0 = 1{,}2443964,$$

$$\cos \lambda = -0{,}0861196 ,$$

$$\lambda = \pi - 85° 3' 35''.$$

Der dem Halbmesser $\varrho_{\max} = 1{,}288$ entsprechende, und aus (5_1) durch Iteration gewonnene Wert Φ ist: $8° 8'$.

Mit diesem Φ-Wert erhalten wir tatsächlich:

$$\varrho = 1{,}1029192\sqrt{1{,}3631208} = 1{,}288.$$

Die übrigen Zahlenwerte sind:

gemäß (3): $x_E = 17{,}1019814$,

gemäß (4): $\cos \nu = \sin \lambda = \sin 85^\circ\, 3'\, 35'' = 0{,}9962850$.

Nach (5_2) ist die die Lage des Kreisschnittes bestimmende Koordinate (für die erzeugte Rotationsfläche):

$$x = 17{,}1019814 - 0{,}0100960 + 0{,}0574496 = 17{,}14933 \text{ mm}.$$

Auf Grund von

$$\tan \lambda = 11{,}5689291 \quad \text{und} \quad x_E = 17{,}1019814$$

erhalten wir zum Parameterwert $\varphi = 31^\circ\, 51'\, 18''$ die Gleichung des Rotationshyperboloids gemäß (6):

$$\varrho^2 = 1{,}2443964^2 + (17{,}1019814 - x)^2\, 11{,}5689291^2 =$$

$$= 1{,}5485224 + (17{,}1019814 - x)^2\, 133{,}8401205 = 1{,}658944$$

und daher

$$(17{,}1019814 - x)^2 = 0{,}00082503,$$

d. h.

$$x - 17{,}1019814 = 0{,}0287233,$$

also ist: $x = 17{,}13070$ (für das theoretische Hyperboloid).

Die Abweichung zwischen x (theoretisch) und x (praktisch) ist demgemäß:

$$17{,}14933 - 17{,}13070 = 0{,}0186 \text{ mm},$$

also kleiner als im vorigen Beispiel, eben infolge des kleineren β-Winkels.

Daß die genannte Abweichung mit abnehmender Schrägheit sich gleichfalls vermindert, folgt unter anderem aus dem Ausdruck der notwendigen Verschiebung:

$$\frac{\sqrt{\varrho^2 - y_0^2}}{\tan \lambda}.$$

Es gilt nämlich für den im Nenner auftretenden Winkel λ gemäß (4):

$$\cos \lambda = -\sin \varphi \cdot \cos \gamma_a.$$

Ist nun die Schrägung sehr klein, d. h. γ_a sehr groß, z. B. $\gamma_a = 90^\circ$, so folgt $\cos \lambda = 0$, $\tan \lambda = \infty$ und die notwendige Verschiebung gleich Null ($\gamma = 0^\circ$, Geradverzahnung).

Zum Schluß soll eine große Kammwalze mit folgenden Kennzahlen berechnet werden: Werkzeugmodul $m = 27$ mm. Zähnezahl $z = 26$. Schrägungswinkel $\beta = 30^\circ$. Werkzeugeingriffswinkel $\alpha_0 = 20^\circ$. Wir wollen nicht mit den spezifischen, sondern mit den wirklichen Werten rechnen.

Es ergaben sich folgende Zahlenwerte:

Stirnmodul: $m_h = 31{,}1769147$ mm,

Grundkreishalbmesser: $r_a = 373{,}6424435$ mm,

Teilkreishalbmesser: $r_0 = 405{,}29998911$ mm,

Kopfkreishalbmesser: $r_f = 432{,}2998911$ mm.

Der bereits genau definierte maximale Kreisschnitt des einschaligen Rotationshyperboloids hat den Halbmesser:

$$\varrho_{\max} = 40{,}1029046 \text{ mm}.$$

Der zum Kopfkreis gehörende Parameterwert ist:

$$\varphi = 35^\circ\, 35'\, 36'',$$

und der Zahnlückenhalbwinkel

$$\varphi_0 = 2^\circ\, 15'\, 8''.$$

Hieraus erhalten wir, mit den bezüglichen Formeln, die Werte:

$$y_0 = 37{,}3203175, \quad \cos\lambda = 0{,}2734638, \quad \lambda = 74^\circ\, 7'\, 46'' .$$

Durch Iteration erhält man den zum $\varrho_{\max} = 40{,}1029046$ gehörenden Winkelparameter

$$\Phi = 26^\circ\, 20'.$$

Der Nachweis der Richtigkeit läßt sich wie folgt ableiten:

$$\sin\Phi = 0{,}4435927, \quad \cos\Phi = 0{,}8962285, \quad \cot\Phi = 2{,}0203862.$$

Mit einem Schleifscheibenhalbmesser $r = 5$ mm lautet die Berechnung von $\varrho_{\max}$ folgenderweise:

$$\varrho_{\max} = (37{,}3203175 - 5 \cdot 0{,}443593)\sqrt{1 + 0{,}2734638^2 \cdot 2{,}02038^2} =$$

$$= 35{,}102367 \cdot \sqrt{1{,}30525} = 35{,}102367 \cdot 1{,}14247 = 40{,}10371 \text{ mm}.$$

Die Koordinate x, womit die Lage unseres Kreisschnittes bestimmt wird, läßt sich in der bekannten Weise berechnen:

gemäß (3′): $x_E = 434{,}9748218$ mm,

gemäß (4): $\cos\nu = \sin\lambda = \sin 74^\circ\, 7'\, 46'' = 0{,}9618820$,

und gemäß (5_2):

$$x = 434{,}9748218 - \frac{5}{0{,}9618820}(1 - 0{,}8962285) + \frac{0{,}2734638^2}{0{,}961882}\, 35{,}102354 \cdot 2{,}0203862 =$$

$$= 434{,}9748218 - 0{,}5394191 + 5{,}5137685 = 439{,}9491712 \text{ mm}.$$

Durch diesen x-Wert ist also die Lage des Kreisschnittes (mit $\varrho = 40{,}10371$ mm) bestimmt.

Es soll jener Kreisschnitt des zum $\varphi = 35^\circ\, 35'\, 36''$ Parameterwert gehörenden einschaligen Hyperboloids bestimmt werden, der den Halbmesser

$$\varrho_{\max} = 40{,}10371$$

besitzt. Aus $\tan\lambda = 3{,}5173868$ und $x_E = 434{,}9748218$ erhält man gemäß (6):

$$\varrho^2 = y_0^2 + (x_E - x)^2 \tan^2\lambda = 37{,}3203175^2 + (434{,}9748218 - x)^2 \cdot 3{,}5173868^2 =$$

$$= 1392{,}8060983 + (434{,}9748218 - x)^2 \cdot 12{,}3720099;$$

mit den obigen Wert $\varrho = 40{,}10371$ erhält man

$$\varrho^2 = 1608{,}3075558,$$

und ferner:

$$215{,}5014575 = (434{,}9748218 - x)^2\ 12{,}3720099,$$

$$(434{,}9748218 - x)^2 = 17{,}4184679,$$

$$x - 434{,}9748218 = 4{,}1735438,$$

woraus die Lage des Kreisschnittes ($\varrho = 40{,}10371$) in dem echten einschaligen Rotationshyperboloid durch folgenden x-Wert bestimmt wird:

$$x = 439{,}1483656.$$

Also liegt der Kreisschnitt im echten Hyperboloid näher zum Origo, als in der praktisch erzeugten Rotationsfläche, wofür, wie oben berechnet,

$$x = 439{,}9491712$$

gilt. Der Unterschied beträgt:

$$439{,}9491712 - 439{,}1483656 = 0{,}8008066 \text{ mm}.$$

Um technologischen Gesichtspunkten näher zu kommen, wollen wir zum Zwecke einer niedrigeren Drehzahl der Schleifscheibe eine Scheibe mit dem Halbmesser $r = 30$ mm (anstelle von $r = 5$ mm) wählen. In diesem Falle ist, nach den diesbezüglichen Rechnungen, eine Verschiebung von 2,48 mm notwendig. Diese ist im Vergleich zu 0,8 mm um 1,68 mm größer, natürlich in negativer Richtung entlang der Koordinate x.

Zum Schluß wollen wir die notwendige Verschiebung für den Fall eines noch größeren Werkzeugmoduls $m = 40$ mm angeben. Mit denselben Ausgangsangaben ($z = 26$, $\beta = 30°$, $\alpha_0 = 20°$, und $r = 30$ mm) ergibt sich das Maß der notwendigen Verschiebung des Schleifzylinders zu 2,97 mm.

SCHRIFTTUM

1. Szőke, B.: Schleif- und Abrichtgerät für Formwerkzeuge von Schrägstirnrädern. *Acta Techn. Hung.* **60** (1968), 21—38
2. Lipka, I.: Bemerkungen zu dem Aufsatz von J. Drahos Jr., L. Hornyik und M. Hosszú: Die mathematische Lösung eines werkzeuggeometrischen Problems. *Mitteilungen des Mathematischen Forschungsinstututes der Ung. Akademie der Wissenschaften* **3** (1958), 219—236
3. Lipka, I.: Geometrie der Wölbung von Laufflächen an Wälzlagerringen. *Act. Techn. Hung.* **31** (1960), 339—390
4. Szőke, B.: Das richtige Profil des Fingerfräsers für Kammwalzen. *Werkstattstechnik* (1924) Heft 16, pp. 417—421.
5. Szőke, B.: Schleifwerkzeug für Formfingerfräser. *Maschinenbau V.D.I. Vorl.* Berlin (1926) Heft 7. 308—311
6. Szőke, B.: A fogaskerék profilmaróinak gépi előállítása (Mechanische Herstellung von Zahnprofilfräsern). *A Magyar Mérnök- és Építészegylet Közlönyének Havi Füzetei* (1927) 124—129
7. Drahos, I.—Hornyik L.—Hosszú M.: Modulujjmaró profiljának meghatározása szerkesztéssel és számítással (Konstruktive und rechnerische Bestimmung des Profils eines Modul-Fingerfräsers). *GÉP* **10** (1958), 306—310
8. Drahos, J. jun. Hornyik, L.—Hosszú, M.: Die Mathematische Lösung eines werkzeuggeometrischen Problems. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Imtézetének Közleményei* **3** (1958), 83—95
9. Niemann, G.—Loomon, J.: Abrichtgeräte für das Profilschleifen von Schrägstirnrädern. *VDI-Zeitschrift* **102** (1960), 231—238
10. Szőke, B.: A térláttató ábrák társszerzője Pál I.: A forgácsoló szerszámok geometriája (Geometrie von Zerspanungswerkzeugen). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, pp. 166—171
11. Szőke, B.: Engrenages Planétaires. *Acta Techn. Hung.* **58** (1967), 245—270
12. Szőke, B.: Bolygókerekes fogaskerékhajtások. *Gépgyártás technológia* (Planetenantriebseinheiten) **8** (1960), 293—302
13. Radványi, B.: Involut. Az „inv. α" evolutfüggvény nyolcjegyű táblázata (Die Funktion „Involute "; 8 stellige Tabelle). Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, Budapest 1954.
14. Litvin, F. L.: A fogaskerék kapcsolás elmélete (Theorie des Zahnrädereingriffes). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972.
15. Szőke, B.: Cranked Epicyclic Gear Drives. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **30** (1970), 141—164

Generation of the End Milling Cutters for Helical Gears, Part I. The Surface of the End Mill. The only tool for producing the herringbone gears transmitting heavy shock loads in steel rolling mills, are end milling cutters. The present paper proposes for their production a cylindrical instead of a disc-like grinding or milling tool or a straight single-edged tool. In general, the generatrics of the tooth flanks of the helical toothing, rotated around the axis of the cutter, describe a hyperboloid surface which envelopes the surface of the end cutter. When using a cylindrical grindig or milling tool, the situation is more complicated because, when rotating a single tooth generatrix, not a single hyperboloid, but according to the generatrics of the cylindrical tool, a series of hyperboloids is produced. Consequently, the surface of the end mill is not the enveloping surface of the continuously generated series of hyperboloids. The present paper deals with the analytics of this geometrical configuration.

Изготовление обкаткой концевой фрезы косозубых цилиндрических колес, I. Поверхность концеопй фрезы. Единственным инструментом для изготовления ел1чных зубчатых колес, предназначенных для передачи толчкообразных больших усилий на прокатных станах и рольгангах сталепрокатных цехов, является концевая фреза. Для изготовления этой фрезы в данной работе предлагается не современный инструмент, а цилиндрический шл?фовальный или фрезерный инструмент или же резец с прямой режущей кромкой, Вообще, образующие винтовой поверхности, представляющие косую сторону зуба цилиндрического колеса, если их вращать вокруг оси концевой фрезы, описывают такие гиперболоидные поверхности, которые огибают поверхность концевой фрезы. Однако, при использовании цилиндрических шлифовальных илифрезерных инструментов задача является на столько более сложной, что при полном повороте одной единственной образующей зуба получается не один единственный гипербо?оид, а семейство гиперполоидов — в соответствии с числом образующих цилиндрического инструмента. Vследствие сказанного выше поверхность концевой фрезы в данном случае в качестве огибающей поверхности последовательно образующегося семейства гиперболоидов. Первая часть данной работы занимается аналитическим анализом этой геометрической формы.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3—4), pp. 439—447(1975)

KOHLENSTAUBFEUERUNG NACH DEM WIRBELSCHICHT-VERFAHREN

K. REMÉNYI*

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

und

L. VÖRÖS**

[Eingegangen am 15. Okt. 1974]

Im vorliegenden Aufsatz berichten die Verfasser über die bei der Erforschung der Wirbelschicht-Feuerung in einer Versuchsanlage erzielten Ergebnisse, wobei der Beweis dafür erbracht wurde, daß bei dieser Feuerung eine äußerst hohe Wärmeübergangszahl erreicht werden kann. Außerdem lieferte der Versuch auch Anhaltspunkte für die Zielsetzungen weiterer Untersuchungen. Aufgrund der Auswertung der erhaltenen Resultate können weitere eingehendere Untersuchungen zur Verwirklichung neuer Kesselkonstruktionen führen und auch hinsichtlich des Umgebungsschutzes günstige Ergebnisse erzielt werden.

1. Einleitung

Der Einsatz von nach dem Wirbelschicht-Verfahren arbeitenden Feuerungsanlagen gewinnt auf der ganzen Welt immer mehr an Bedeutung. Zahlreiche Versuche erbrachten den Beweis dafür, daß mit diesem Verfahren, besonders in bezug auf die Wärmeübergangszahl, vorzügliche Resultate erzielt werden können, was übrigens auch zur wesentlichen Verringerung der Abmessungen der Anlagen führt. In letzterer Zeit befassen sich immer mehr Publikationen nebst diesen wärmetechnischen Vorteilen auch mit den hinsichtlich des Umgebungsschutzes günstigen Eigenschaften dieses Verfahrens,da nämlich bei dem in der Wirbelschicht verbrennenden Brennstoff von der restlichen Flugasche eine bedeutende Menge von Schwefel eingebunden und so die Verunreinigung der Umgebung verringert wird.

Aufgrund dieser Erkenntnisse und der in einer heimischen Patentschrift [10] ausgeführten Idee wurden aufgrund eines Auftrages seitens des Trusts der Ungarischen Elektrizitätswerke (Magyar Villamos Művek Tröszt) und des Trusts des Kohlenbergwerkes zu Tatabánya (Tatabányai Szénbányászati Tröszt) auch mit heimischen Kohlensorten konkrete Untersuchungen und Versuche durchgeführt.

* Dr. K. Reményi, Villamosenergiaipari Kutató Intézet, Zrínyi u. 1, H—1051 Budapest, Ungarn.

** L. Vörös, Villamosenergiaipari Kutató Intézet, Zrínyi u. 1, H—1051 Budapest, Ungarn.

2. Beschreibung der Versuche

Aufgrund der im Institut der Verfasser (Villamosenergiaipari Kutató Intézet) hinsichtlich des Verhaltens des Kohlenstaubes beim Wirbelschicht-Verfahren unter isothermischen Verhältnissen durchgeführten Forschungstätigkeit, bzw. der im Laufe derselben erzielten Ergebnisse [1], [2], wie auch der Schrifttumsangaben [3—10] wurde eine Untersuchung der Kohlenstaubfeuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren in einer Versuchsanlage durchgeführt, wobei der Entwurf der versuchsweise verwendeten Feuerungsanlage durch die bei den isothermischen Untersuchungen erzielten Ergebnisse ermöglicht wurde. Die Schnittzeichnung der in zwei Hauptebenen angeordneten Anlage geht aus Bild 1 hervor (an der linken Seite dieses Bildes sieht man den Schnitt ohne Mauerwerk).

Die beim Entwurf der hinsichtlich der Bemessung berücksichtigten wichtigsten Daten waren:

Tatabányaer Kohle	Korngröße	0 ÷ 6 mm
Heizwert		5 044 kcal/kg
Aschegehalt		12,16%
Feuchtigkeitsgehalt		12,61%
theoretische Luftmenge		5,58 Nm^3/kg
theoretische Rauchgasmenge		6,05 Nm^3/kg
Rostfläche		30,25 m^2
Luftgeschwindigkeit		0,8 m/s
Luftmenge		720 m^3/h
Kohlenmenge		109 kg/h
freigewordene Wärmenge nach Abzug eines Verlustes von 20%		440 000 kcal/h
Rauchgastemperatur über der Wirbelschicht		600 °C
Wärmeentzug in der Wirbelschicht		294 000 kcal/h
Wärmestrom, der die Kühlrohre bestreicht		140 000 $kcal/m^2h$
Fläche der Kühlrohre		2,1 m^2
Mittlerer Durchmesser der Kühlrohre		23 mm
Kühlwassermenge bei einer Erwärmung von 30 °C auf 80 °C		5,6 t/h
Entstauber-Zyklon		Van-Tongeren

Die Stoffströme in der Anlage und deren Arbeitsprinzip ergeben sich, wie folgt:

Weg der Kohle. Die Kohle wird mechanisch zugeteilt und gelangt aus dem Bunker durch einen Zellenzuteiler und ein schräges Einwurfrohr in den Feuerraum und die Menge der Kohle kann durch Drehzahländerung des Zellenzuteilers geregelt werden. Die Zufuhr der Kohle kann auch durch eine pneumatische Förderanlage erfolgen, jedoch war diese zum Zeitpunkt der Versuche noch nicht in Betrieb. Bei dieser Anlage gelangt die Kohle durch einen Schaufelbeschicker mit einer Leistung von 200 kg/h in den Druckluftförderkanal,wobei die Kohlenmenge ebenfalls durch die Drehzahländerung des Beschickers geregelt werden kann. Den Luftbedarf des pneumatischen Förderrohres deckt ein Ventilator durch die Förderung von Umgebungsluft. Nach Passieren der

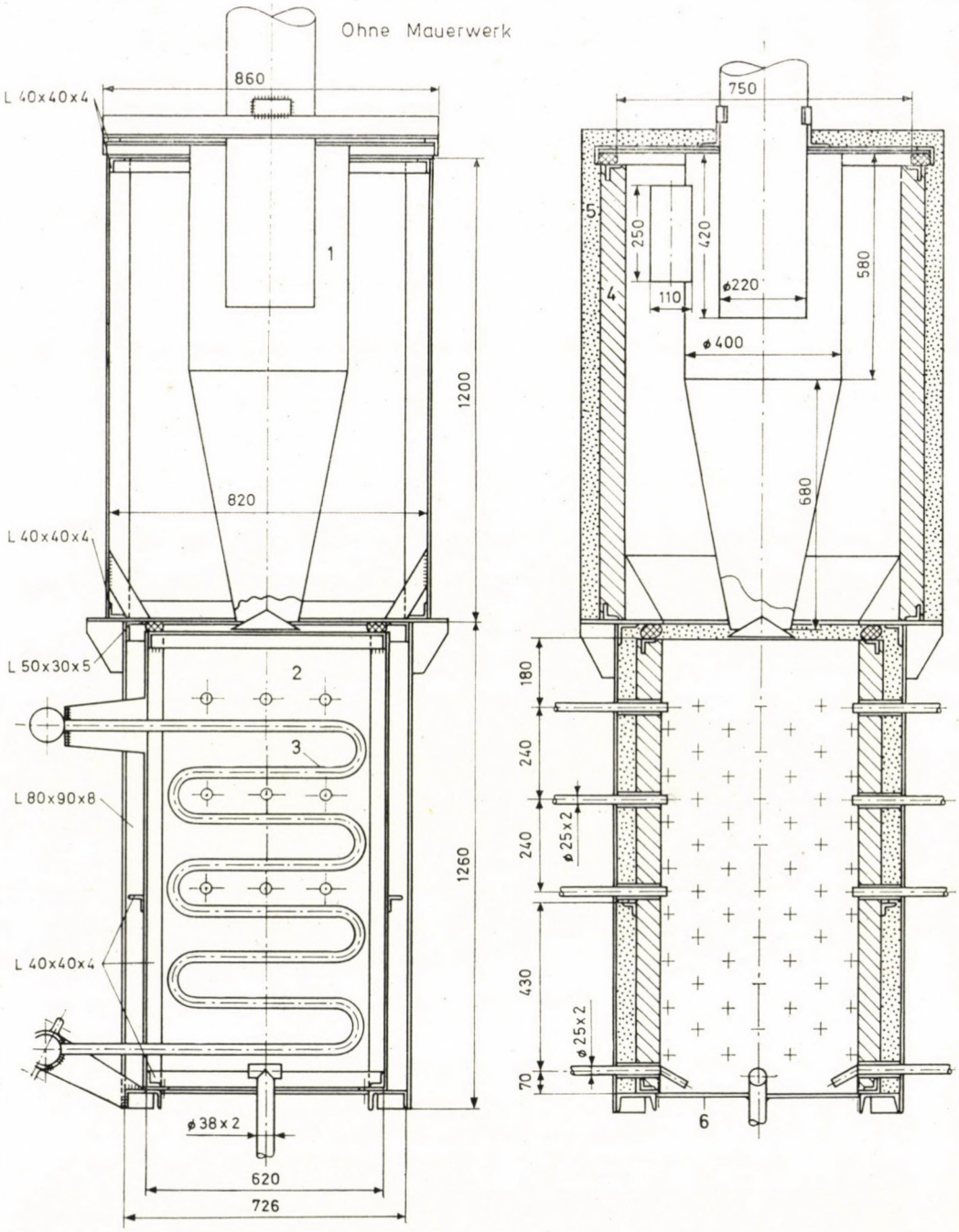


Bild 1. Versuchsanlage einer Kohlenstaubfeuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren: 1 — Zyklon beim Austritt aus dem Feuerraum; 2 — Wirbelschicht-Feuerraum; 3 — Kühlrohre; 4 — wärmebeständiges Mauerwerk; 5 — Wärmeisolierung (Glaswolle); 6 — poröser Luftverteiler

zur Verteilung der Verbrennungsluft dienenden Platte verzweigt sich das Förderrohr in zwei Richtungen, wobei die Abzweigung die gleichmäßigere Verteilung der Kohle bezweckt und das Luft—Kohle-Gemisch unter der Wirbelschicht in den Feuerraum gelangt.

Weg der Luft. Der Lüfter zur Beförderung der Verbrennungsluft befördert, bzw. saugt eine genau meßbare Menge von Luft mit Umgebungstemperatur an und die Verbrennungsluft tritt durch den Rost in den Feuerraum.

Feuerraum. Der Feuerraum ist mit einem ungekühlten, wärmebeständigen und wärmeisolierten Mauerwerk ausgekleidet. Zur Kühlung der Brennstoffschicht dient das in 7 parallel geschalteten Rohrschlangen strömende Speisewasser. Die Schlacke kann sowohl vom oberen, als auch unteren Teil der Brennstoffschicht entfernt werden. Durch die unteren Entaschungsrohre können größere Körner in kleineren Mengen absatzweise entzogen und durch das obere Rohr die Asche unter Einwirkung des durch das Saugzuggebläse eingestellten geringfügigen Überdruckes laufend entfernt werden. Die oberen Entaschungsrohre sind in drei Ebenen angeordnet und durch Änderung des Abstandes zwischen den einzelnen Ebenen kann die Höhe der Wirbelschicht geregelt, d. h. eine einfache Niveauregelung erzielt werden. Zum Austritt des Feuerraumes wurde ein Zyklon eingebaut und die abgeschiedene Flugasche wieder der Wirbelschicht zugeführt, um dadurch die Aufenthaltsdauer zu verlängern.

Gemessene Kennwerte und deren Bezeichnung. Im Laufe der durchgeführten Versuche wurden die folgenden Kennwerte ermittelt:

Temperaturmessung:

t_1 — Temperatur in der Wirbelschicht 150 mm über dem Luftverteiler
t_2 — Temperatur in der Wirbelschicht 300 mm über dem Luftverteiler
t_3 — Temperatur in der Wirbelschicht 450 mm über dem Luftverteiler
t_4 — Temperatur vor dem Eintritt in den Zyklon
t_5 — Temperatur beim Austritt aus dem Zyklon

Druckmessung:

P_v — die durch das Unterwindgebläse beförderte Luftmenge
ΔP_1 — vor dem Eintritt in den Zyklon
ΔP_2 — 300 mm über der Luftverteilerplatte
ΔP_3 — unter der Luftverteilerplatte

Mengenmessung:

Kühlwasser
verbrannte Kohle
Messung der Rauchgasanalyse
Messung des CO_2- sowie O_2- und CO-Gehaltes
Rauchgasanalyse hinter dem Zyklon
Messung der Staubkonzentration.

Dabei wurde die Staubkonzentration der aus der Rauchgasmenge hinter dem Zyklon entnommenen Gasprobe ermittelt.

Messung des Wärmestromes. Dies erfolgte mit Hilfe einer gekühlten Sonde in der Wirbelschicht.

Die durchgeführten Messungen und deren Auswertung. Grundsätzlich wurden zwei Ziele verfolgt:

a) Untersuchung der bei der Verbrennung von verschiedenen Kohlenmengen auf einer gegebenen Luftverteilerfläche während der Zeiteinheit entstandenen Verhältnisse und Beobachtung der Verbrennungsverluste.

b) Ermittlung der wirbelschichtseitigen Wärmeübergangszahl, bzw. des Wärmestromes.

Anstelle der Errechnung der Verbrennungsverluste ist es zweckdienlicher, die die einzelnen Verluste verursachenden Komponenten zu beachten, da man die einzelnen Betriebszustände miteinander vergleichen will.

Diese wichtigen Verlustfaktoren sind:

der CO-Gehalt der Rauchgase (%)
der mitgerissene Staub (g/m³)
der brennbare Gehalt des mitgerissenen Staubes (%)
der brennbare Gehalt der bei der Regelung der Brennschicht mitgerissenen Körner
der brennbare Gehalt der vom unteren Teil der Brennstoffschicht entfernten größeren Körner.

Die Ergebnisse der bei verschiedenen zugeteilten Kohlemengen durchgeführten Messungen gehen aus Tafel I hervor. In bezug auf diese Tafel sei bemerkt, daß bei der Messung der lfd. Nr. 2 (etwa 100 kg/h) die Zuteilung der Kohle wegen Schwierigkeiten mit dem Zuteiler nur sehr ungleichmäßig verwirklicht werden konnte. Dagegen konnte man bei den anderen Messungen mit dem mechanischen Förderer eine gleichmäßige Kohlezuteilung erzielen.

Der Wert der Luftüberschußzahl wurde anhand der zugeteilten Kohlenmenge, der berechneten theoretischen Luftmenge und der tatsächlichen Unterwindmenge errechnet.

Mit dem Wärmestrommesser (q/kcal/m²/h) wurde der Wert der spezifischen Wärmebeanspruchung der Kühlrohre ermittelt. Je nach dem Stand der Wirbelschicht waren die Kühlrohre in größerem oder kleinerem Maße davon beschlagen, wobei der sonstige Teil der Rohre unter Einwirkung der Wärmestrahlung und Wärmeübergabe durch Konvektion stand, weshalb auch die niedrigeren Werte erzielt wurden.

Bei der Temperaturverteilung zeigte sich übrigens eine interessante Erscheinung. Wie aus Tafel I ersichtlich, ist die durchschnittliche Temperatur der Wirbelschicht und die Temperature des oberen Teiles derselben niedriger als die Rauchgastemperatur (t_4) vor dem Zyklon, worauf man darauf schließen kann, daß über der Wirbelschicht eine weitere Verbrennung stattfindet. Diese resultiert aus der Verbrennung der Gase und des Kokses aus der Wirbelschicht, wie auch daraus, daß im Verlauf der mechanischen Zuteilung der Kohle zufolge

des Abstandes von etwa 200 mm zwischen dem schrägen Zuteilungsrohr und der Wirbelschicht die feinsten Fraktionen der herabfallenden Kohle von den aufwärts strömenden Gasen mitgerissen werden. Diese Wirkung hätte man nur durch Anwendung einer pneumatischen Kohlezuteilung (wobei die Kohle zum unteren Teil der Wirbelschicht geführt wird) von der Verbrennung der aus den Rauchgasen anfallenden Gase und des Kokses trennen können. Jedoch konnte man bei der pneumatischen Zuteilung wegen der Verstopfung des Förderrohres den kontinuierlichen Betrieb nicht gewährleisten.

In voller Übereinstimmung mit dem Gesagten steht der hohe Gehalt an Brennbarem des mitgerissenen Staubes und der vom Oberteil der Wirbelschicht abgeführten Schlacke.

Hinsichtlich des brennbaren Gehaltes der Schlacke zeigen sich in Abhängigkeit von der Kohlebelastung keine wesentlichen Änderungen, dagegen tritt in bezug auf den Gehalt an Brennbarem in der vom oberen und unteren Teil der Wirbelschicht entnommenen Schlacke ein wesentlicher Unterschied in Erscheinung, woraus man darauf schließen kann, daß eine Entaschung vom oberen Teil der Wirbelschicht ungünstig ist. Die Ermittlung der richtigen Stelle für die Entaschung erfordert die Durchführung weiterer Versuche.

Brennbares Gas konnte nur bei hohen Kohlebelastungen in den Rauchgasen hinter dem Zyklon nachgewiesen werden.

In der Wirbelschicht gelang es, mit den verwendeten Kühlrohren eine verhältnismäßig gleichmäßige Temperaturverteilung zu erzielen, die auch im Bereich der Höchstlasten den Wert von 850 °C nicht überschritten hat.

Die Stabilität der Feuerung erwies sich als gut, zumal auch bei einem beabsichtigten Ausfall der Kohleversorgung nach einigen Minuten ein sicheres Zünden und Verbrennen eintrat. Dem absichtlichen Ausfall der Kohlezuteilung folgte naturgemäß eine Abnahme der Temperaturen und ein Anstieg des O_2-Gehaltes, und diese Werte passten sich nach Wiederaufnahme der Kohlenzufuhr dem vorangehenden stationären Zustand an.

Die Zündung der Brennstoffschicht erfolgte mittels eines Ölbrenners, dessen abwärts gerichtete Flamme das Niveau der mit einer geringen Luftmenge durchwirbelten Brennstoffschicht erreichte. An dieser Stelle bildete sich ein Zündherd, der sich immer mehr ausbreitete und schließlich die ganze Schicht erfaßte, was durch den Anstieg der Temperatur in Erscheinung trat. Danach konnte die Kohlezuteilung eingeleitet und der zugeteilten Kohlenmenge auch die zugeführte Luftmenge erhöht werden.

Zur Ermittlung der schichtseitigen Wärmeübergangszahl, bzw. des Wärmestromes wurden die Messungen mit einer zu diesem Zweck angefertigten, wassergekühlten Sonde durchgeführt. Während dieser Messungen betrug bei der Messung Nr. 3 nach Tafel I die Kohlelast 90 kg/h. Die Sonde hat man diagonal bis zu verschiedenen Tiefen in die Brennstoffschicht eingetaucht, wodurch ein guter Durchschnittswert erhalten wurde. Durch größere Ein-

Tafel I

Gemessener Kennwert	Maßeinheit	Anzahl der Versuche				
		1	2	4	3	5
Kohlenmenge	kg/h	117,5	100	90	83	60
Luftmenge	m^3/h	736	742	596	565	427
Luftgeschwindigkeit	m/s	0,82	0,83	0,66	0,63	0,475
Luftüberschußzahl m	—	1,13	—	1,19	1,22	1,28
O_V-Gehalt (Orsat-Analyse)	%	2,3	2,5	1,6	1,3	2,5
CO-Gehalt	%	0,3	0,3	0	0	0
Wärmestrom q	$kcal/m^2/gh$	—	—	64 464	—	47 640
t_1	°C	543	841	849	768	763
t_2	°C	786	707	794	659	643
t_3	°C	771	729	779	731	586
t_4	°C	1235	964	950	883	674
t_5	°C	1170	948	890	903	664
ΔP_1	mm WS	+8	+2	+2	+12	0
ΔP_2	mm WS	12	25	16	12	0
ΔP_3	mm WS	143	131	66	87	21
Staubkonzentration hinter dem Zyklon μ	g/m^3	1.1	—	7,2	4,0	2,2
Gehaltan Brennbarem am unteren Teil der Wirbelschicht S_{eu}	%	17,6	11,9	—	—	15,0
Gehalt an Brennbarem am oberen Teil der Wirbelschicht S_{e0}	%	78,0	67,6	—	76,6	56,3
Gehalt an Brennbarem im mitgerissenen Kohlenstaub (aus der Wirbelschicht) S_c	%	38,7	32,7	34,1	64,6	49,3

tauchtifen wurden die integrierten Werte des Wärmestromes erhalten. Aus diesen Messungen ergab sich ganz offenkundig die Möglichkeit der Bestimmung der Schichthöhe bei einer Feuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren in einem geschlossenen Raum (der Wert der in der Schicht ermittelten Wärmeströmung übertrifft jenen, der bei derselben Temperatur aus der Wärmestrahlung und der konvektiven Wärmeübertragung der Rauchgase ermittelt wird ganz wesentlich, etwa zwei- bis dreifach).

Die in der Wirbelschicht ermittelten Wärmestromzahlen:

$q = 110{,}000 \div 140{,}000$ kcal/m²/h.

Der Wert des Wärmestromes wird wahrscheinlich auch durch die Körnung der Kohle und das Spaltvolumen beeinflußt, es wurden jedoch bei dieser Meßreihe diese Wirkungen nicht untersucht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß unter Verwendung von Kohle aus Tatabánya (Korngröße: etwa $0 \div 6$ mm; Heizwert: $Hi = 5044$ kcal/kg; $h = 12{,}16\%$; $n = 12{,}61\%$) bei verschiedenen Kohlenmengen versuchsweise Feuerungen durchgeführt haben, wobei festgestellt wurde, daß die mechanische Kohlenbeschickung und das Fallenlassen der Kohle auf die Brennstoff-

schicht ungünstig ist, und daß über der Wirbelschicht eine weitere Verbrennung stattfindet, die teils aus dem Verbrennen der aus der Schicht stammenden Gase und des Koksgehaltes und teils aus dem Verbrennen der bei der mechanischen Zuteilung durch den Gasstrom mitgerissenen feinen Staubteilchen besteht. Als Beweis für diese Erscheinung dient die Verteilung der Temperatur und der Anfall an brennbarem Gehalt in der Asche. Die pneumatische Kohlezuteilung erscheint als zweckdienlicher. Einen brennbaren Gasgehalt konnte man in den entweichenden Rauchgasen nur bei der Beschickung mit großen Kohlenmengen beobachten.

Da bei der Entaschung durch Entnahme vom oberen Teil der Wirbelschicht ein hoher Gehalt an Brennbarem erzielt wurde, erscheint die Durchführung weiterer Versuche zur Ermittlung der richtigen Stelle der Entaschung als notwendig.

Die Stabilität der Feuerung ist gut und die Temperaturverteilung in der Wirbelschicht verhältnismäßig gleichmäßig und hat im Verlauf der Versuche den Wert von 850 °C nicht überschritten.

In der Schicht wurde ein Wärmestrom von etwa $q = 110\,000 \div 140\,000$ kcal/m²/h gemessen.

Bei der Auswertung der im Verlauf der Versuche erhaltenen Ergebnisse kann festgestellt werden, daß unter den heimischen Kohlensorten die aus den Gruben von Tatabánya stammende Kohle sich günstig für die Feuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren eignet, wobei es aber zweckmäßig wäre, die Versuche auch mit anderen Kohlesorten durchzuführen, bzw. fortzusetzen. In der Wirbelschicht läßt sich eine äußerst hohe Wärmeübergangszahl erzielen, jedoch muß die Antwort auf zahlreiche andere Fragen noch erforscht werden. Dabei denken die Verfasser an die Untersuchung der verschiedenen Kennwerte sowie der chemischen und physischen Eigenschaften, wie auch der Korngröße und Größenverteilung usw. der Kohle, bzw. der Einwirkungen derselben.

SCHRIFTTUM

1. Vörös, L.: Sortierung von Kohlenstaub-Mahlgut durch das Wirbelschicht-Verfahren oder durch pneumatische Pulsation — *VEIKI-Bericht* Nr. 47 1969, Budapest
2. Vörös, L.: Feuerungsversuche nach dem Wirbelschicht-Verfahren — *VEIKI-Bericht* Nr. T. 65 1970, Budapest
3. Vörös, L.: Pilot-scale Combustion Studies — *BCURA Annual Report* 1967, pp. 31—33
4. Vörös, L.: Fluid-bed Combustion of Coal — *BCURA Annual Report* 1968, pp. 8—15
5. Roberts : The Combustion of Coal in Fluidized Beds under Pressure. *BCURA Gazette* (1968), No. 8
6. Wright—Ketley—Hickman: The Combustion of Coal in Fluidized Beds for Firing Shell Boilers, *Journal of the Institute of Fuel* (1969), No. 6
7. Wright—Ketley—Hickman: The Development of Fluid Bed Combustion 1—2, *The Steam and Heating Engineer* (1969) 4—5
8. Wright—Ketley—Hickman: Fluidized Bed Combustion, *J. Fuel and Heat Technology* (1969), No. 3

9. WRIGHT—KETLEY—HICKMAN: A Coal-burning Fluidized-bed Combustion System. *J. Fuel and Heat Technology* (1968), No. 5
10. BENEDEK, L.: Kohlenstaubaufbereitungs- und -Feuerungsanlagen — *OTH* 147.759. 1958, Aug. 27, Budapest

Pulverized Coal Firing with Fluidization. The paper presents results of fluidization firing investigation in an experimental plant. The experiment confirms that an extraordinarily high heat transfer coefficient can be obtained with this firing method and it also presents a basis for research objectives. It is considered that further detailed research will make possible the realization of new boiler designs and that favourable results might be obtained in einvironmental protection.

Пылеугольное отонление флюидизационным методом. В работе дается отчет о результатах, достигнутых при исследованиях в област флюидизационного отопления, решенного на экспериментальной установке. Проведенные экспериментальные опыты подтверждают, что можно добиться исключительно высокого коэффициента теплопередачи при применении данного типа отопления, но, кроме того, накопленный опыт позволяет определить цели дальнейших исснедований. На основе анализа авторов дальнейшие детальные исследования позволят разработать новые конструкции котлов, далее в отношении охраны окружающей среды можно добиться положительных результатов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 81 (3–4), pp. 449–464 (1975)

AN EFFICIENT COMPUTER METHOD FOR OPTIMAL CONTROL OF GAS NETWORKS

D. SINGER*

DR. OF ENG. SCI.

and

GY. BOROSSAY,** – T. KOLTAI***

[Manuscript received January 7, 1975]

The paper deals with the optimization of non-linear networks and explains the theoretical basis of a method for minimization of losses on gas networks by the simultaneous stabilization of all node pressures with a prescribed tolerance limit. The method takes into account the differences in geodatical altitudes of the individual nodes. The description of the program, elaborated by the authors for practical purposes, is given. The application of the program is demonstrated on an illustrative example enabling to estimate the economical consequences of the optimal control of gas networks.

1. Introduction

Like electrical networks, gas networks have to support the energy to the consumers with a minimum loss. The main losses in a gas network are due to the leakage losses. The network must be controlled in a manner that leakage losses reach a minimum value under guaranting appropriate pressure relations.

The determination of optimal network pressures is a non-linear optimization problem with constraints. There exists a lot of communications dealing with non-linear optimization, e.g. [1], [2], but methods capable to solve large problems are of restricted number. On optimization methods for gas networks see [3], [4].

From the set of theoretically possible methods the method of Lagrange multipliers, specially its generalized form elaborated by Kuhn–Tucker, the gradient method and the indirect application of the simplex method in linear programming may be taken into account.

The method described below is also based on the indirect application of linear programming. In order to diminish the computer time and memory due to the great number of variables, special technics are used, e.g. the optimal choice of the network-tree, the method for sparse matrices, etc. The latter makes use of the fact that in most cases the number of branches connecting the nodes is more less than theoretically possible and so the matrices of nodal equations contain a great number of zeros ([5], [6]).

* Dr. D. SINGER, Furulya u. 5, H-1021 Budapest, Hungary
** GY. BOROSSAY, Akacfa u. 54, H-1073 Budapest, Hungary
*** T. KOLTAI, Újpesti rkp. 8, H-1137-Budapest, Hungary

2. The optimization problem

The scheme of a small gas network is demonstrated in Fig. 1a. It consists of two hierarchic networks: of a low pressure (80 ÷ 300 mm of m) supplying the consumers (lines drawn in full) and a feeding network of 500 ÷ 3000 mm pressure supplying the former (dotted lines). The gas flows from the feeding network through pressure control valves into the low pressure network. The valves ensure in the input points — independently of the demands in gas — a constant pressure.

In order to simplify the theoretical considerations, let us suppose that the consumers load the network branches uniformly. This assumption is a realistic one and its aim is to simplify the calculations. The branch loads can be regarded as nodal ones. The branch loads can be divided into two parts and these are assigned to the two nodes belonging to the branch. The calculation error can be neglected in the most cases, — as it can be proved theoretically. The corresponding network scheme is shown in Fig. 1b.

The concrete form of the loss function is very important. To deduce it, we can start from the following considerations [4]. The gas losses originate mainly from the pipe-joints. Since the number of pipe-joints is proportional to the whole length of pipes, the same is valid for the losses too. On the other hand, the losses are proportional to the difference of the node pressures and of the atmospheric one.

Since the pressures are low, it can be assumed that the relations are linear ones. Further, it can be assumed that the mean branch pressures equal the mean of the pressures at their end points. The losses can be therefore referred the nodes. The loss q_i concerning to the ith node is

$$q_i = 0{,}5\varepsilon \sum_{j=1}^{b_i} l_{ij}(p_i' - p_A) = M_i(p_i' - p_A) \tag{1}$$

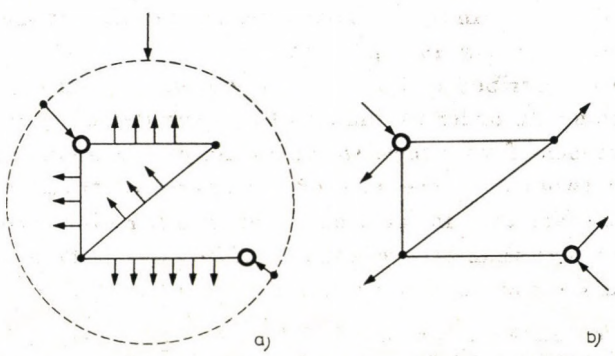


Fig. 1

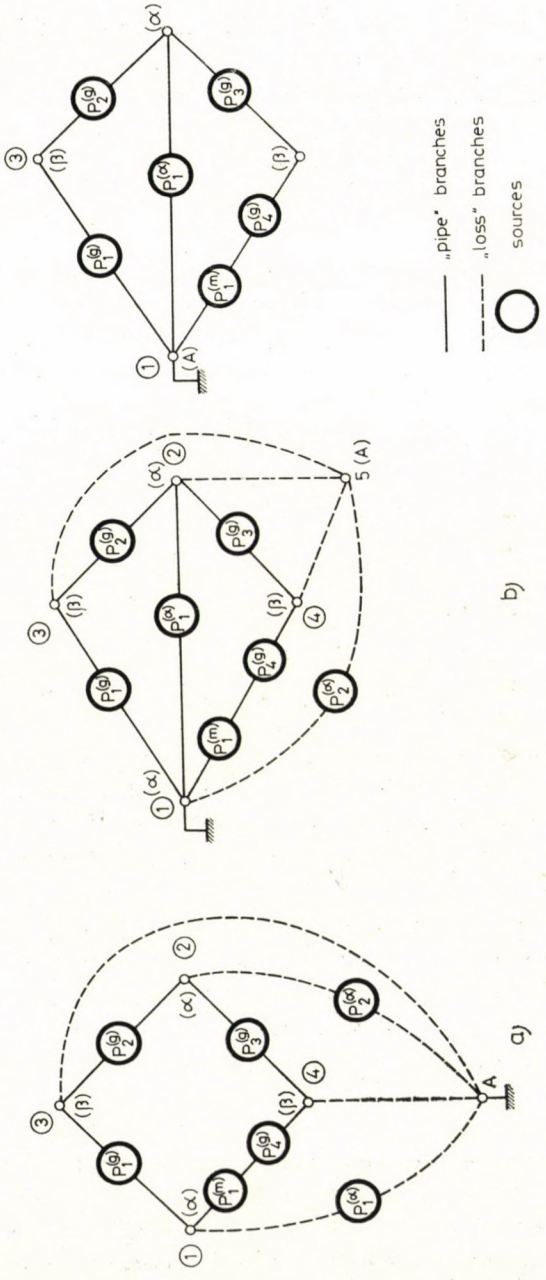


Fig. 2

where l_{ij} is the length of the branch connecting the nodes i and j, p'_i and p_A are the node pressures in the ith node and the atmospheric pressure, resp., ε is the loss constant, b_i is the number of branches incident to the ith node, M_i is a constant. The factor 0,5 in Eq. (1) was introduced from the fact that each branch is joined to two nodes.

The total loss of the network is thus

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} M_i(p'_i - p_A) \tag{2}$$

or in vector form

$$\Phi = \mathbf{M}^t(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_A) \tag{3}$$

where M is a vector of n dimensions, its elements being the constants M_i. It can be seen that the losses appear as streams of virtual branches joined to the nodes. Taking these into account, the network in Fig. 1b can be replaced by that in Fig. 2. The virtual branches ("loss branches") are drawn with dotted lines.

The minimization of the losses can be formulated as follows:

$$\begin{aligned}
&\Phi(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n) \to \min && \text{a)}\\
&\mathbf{G}(P'_1, \ldots, P'_m, Q'_{m+1} \ldots Q'_n) = \mathbf{0} && \text{b)}\\
&P^{(\min)} \leq P'_i \leq P^{(\max)}; \quad i = 1, 2, \ldots, m && \text{c)}\\
&p^{(\min)} \leq p'_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n - m && \text{d)}
\end{aligned} \tag{4}$$

where Φ means the loss function defined by (3), $G = O$ are the network equations, P'_i is the source pressure of the node i, Q'_i is the consumption reduced to the node j, which can be regarded as independent of the pressure. The nodes 1, 2, . . ., m are feeding nodes and are called nodes of type α, the remaining $n - m$ ones are of type β.

According to Eq. (4c) the feeding point pressures, P_i must be between $P^{(\min)}$ and $P^{(\max)}$. In the case of nodes of type β the pressures must be limited only from below.

The node variables are marked by an accent in order to distinguish them from the branch variables.

3. The loop form of the equation of gas networks with losses

As it can be seen from Eq. (4), in order to solve the non-linear optimization problem, the equations of the network must be stated so that the independent variables be the $P'_1, \ldots, P'_m$ source pressures (the pressures of α-nodes) and the nodal loads $Q'_{m+1}, \ldots, Q'_n$. The dependent variables are the

β-node pressures. This requirement is fulfilled in first line by the nodal form of the network equations. On the other hand, the use of the nodal form is disadvantageous from computing point of view, since gas networks are relatively slightly looped. For our purpose the loop form must be transformed so that its independent variables be the variables in Eq. (4b).

Among the branch source pressure P, branch pressure (pressure drop) p and branch stream q the equation

$$p + P = V(q) \tag{5}$$

is valid. $V(q)$ is a function of the branch resistance. All equations of type (5) referring to all branches of the network can be joined into a vector equation

$$\mathbf{p} + \mathbf{P} = \mathbf{V}(\mathbf{q}) \tag{6}$$

According to the former chapter, the branches of gas networks can be divided into "pipe" branches and "loss" branches having different branch resistance functions. At low pressures in the range of usual Reynolds numbers, the resistance function of a "pipe" branch is

$$V(q) = kq^2 \tag{7}$$

where k is a constant depending on the diameter and length of the pipe, further from the density and viscosity of the gas. The "loss" branch resistance function is, according to (1)

$$V(q) = \frac{1}{M} q \tag{8}$$

Multiplying both sides of Eq. (6) by $\mathbf{C}^t$

$$\mathbf{C}^t[\mathbf{p} + \mathbf{P}] = \mathbf{C}^t\mathbf{V}(\mathbf{q}) \tag{9}$$

where $\mathbf{C}$ is the loop matrix of the network.

Using the two Kirchhoff laws written in the following form

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{q}_L, \tag{10}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}' \tag{11}$$

the conventional loop equatioo of the network is got; $\mathbf{C}^t\mathbf{A} = \mathbf{O}$

$$\mathbf{C}^t\mathbf{V}(\mathbf{C}\mathbf{q}_L) - \mathbf{C}^t\mathbf{P} = \mathbf{O} \tag{12}$$

where $\mathbf{A}$ is the branch node incidence matrix, $\mathbf{q}_L$ is the vector of loop streams. The vector $\mathbf{C}\mathbf{q}_L$a is the argument of the V vector-vector function.

Since in the forthcoming, the independent variables are not only the branch source pressures $\mathbf{P}$ but the nodal source streams $\mathbf{Q}'$ too, let us trans-

form Eq. (12) accordingly. Between the branch and nodal source streams there exists the following relation

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'. \tag{13}$$

Since, according to the first Kirchhoff law,

$$\mathbf{A}^t\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{14}$$

is valid. Eq. (13) can be replaced by

$$\mathbf{A}^t[\mathbf{q} + \mathbf{Q}] = \mathbf{Q}'. \tag{15}$$

In the case of the gas network branch source streams do not occur, so Eq. (15) can be replaced by

$$\mathbf{A}^t\mathbf{q} = \mathbf{Q}'. \tag{16}$$

Let us decompose the branch stream vector $\mathbf{q}$ into tree and link branch components: $\mathbf{q}_T$ and $\mathbf{q}_L$ resp. Eq. (16) can be written

$$[\mathbf{A}_T^t \vdots \mathbf{A}_L^t]\begin{bmatrix}\mathbf{q}_T \\ \mathbf{q}_L\end{bmatrix} = \mathbf{Q}' \tag{17}$$

where $\mathbf{A}_T$, $\mathbf{A}_L$ are the tree and link components of the corresponding $\mathbf{A}$ matrix. So

$$\mathbf{q}_T = [\mathbf{A}_T^t]^{-1}\mathbf{Q}' - [\mathbf{A}_T^t]^{-1}\mathbf{A}_L^t\mathbf{q}_L. \tag{18}$$

Taking into account the topological relation

$$\mathbf{C}_T = -[\mathbf{A}_T^t]^{-1}\mathbf{A}_L, \tag{19}$$

Eq. (18) can be replaced by

$$q_T = [\mathbf{A}_T^t]^{-1}\mathbf{Q}' + \mathbf{C}_T\mathbf{q}_L. \tag{20}$$

The whole stream vector $\mathbf{q}$ is so:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_T \\ \mathbf{q}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\mathbf{A}_T^t]^{-1}\mathbf{Q}' \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_T \\ \mathbf{U}\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{q}_L. \tag{21}$$

Thus, the vector $\mathbf{q}$ is decomposed into the sum of two terms. The first is given, the second contains the unknown bridge branch streams $\mathbf{q}_L$. Denoting the first term by $\mathbf{Q}^{(0)}$, Eq. (12) can be written

$$G(\mathbf{q}_L) = \mathbf{C}^t[\mathbf{V}(\mathbf{Q}^{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{q}_L) - \mathbf{P}] = \mathbf{0} \tag{22}$$

where the term in round parentheses is the argument of the function V.

Eq. (22) is general enough to be able to solve a wide clap of gas network problems. When applying Eq. (22), the independent variables must be the nodal source streams $\mathbf{Q}'$ and the branch source potentials $\mathbf{P}$.

If not **Q** and **P** are given, then the problem can be traced back to this case by an appropriate transformation. This is the case for the optimization problem explained below.

It is easy to recognize that in our case the prescribed node source pressures can be regarded as branch source pressures of the "loss branches". In Fig. 2a the graph of a gas network containing two nodes of type α and two nodes of type β is shown. Here different branch pressure sources occur, denoted by the letter P marked with a circle. So $P_1^{(\alpha)}$ and $P_2^{(\alpha)}$ are the node pressures of the α-nodes 1 and 2, resp. and belonging to the branches 1—A and 2—A, resp. $P_1^{(g)}$, $P_2^{(g)}$, $P_3^{(g)}$, $P_4^{(g)}$ are the branch source pressures due to the differences of geodetic heights of node-pairs 1—3, 3—2, 2—4 and 4—1, resp. The source pressure $P_1^{(m)}$ is the supply pressure of the compressor in the branch 1—4. The point A is in our case the basis point denoting the onto atmosphere.

The scheme in Fig. 2a ist not the unique one. The scheme of the equivalent network with losses is demonstrated in Fig. 2b. The basis point is in this case the node 1 and the node 5 corresponds to the atmosphere.

A simplified version of scheme 2b can be seen in Fig. 2c. The streams in the loss branches are 1—2% of the pipe branch streams, so they can be neglected from the point of view of determining the nodal pressures; see Fig. 2c. Diminishing the number of branches and loops, an essential economization in computer time and memory can be achieved. The losses can be got from the nodal pressures calculated on the basis of Fig. 2c by Eq. (1). The optimization algorithm described below supposes a network scheme corresponding to Fig. 2c.

Let us pass some remarks on the dimensions of the matrices and vectors in Eq. (22). Denoting the number of pipe branches by b, the number of nodes (without the basis point) by n, the whole number of branches is $(b + n)$ that of the linear independent loops. On the scheme according to Fig. 2b the number of branches and loops is $(b + n + n_\alpha)$ and $(b + n_\alpha)$ resp.; where n_α is the number of nodes of type α. The number of branches and loops according to the scheme in Fig. 2c is $(b + n_\alpha)$, and $(b - n + n_\alpha)$ resp.

The elevating power due to the differences in geodetic heights of nodes can be taken into account as follows. The elevating pressure is

$$P = h(\gamma - \gamma_{\text{gas}})$$

where h is the difference of geodetic heights of the end points of the pipe branch, γ and γ_{gas} are the specific gravities of the air and gas, resp.

When $(\gamma - \gamma_{\text{gas}}) \cong 0{,}5$ kg m^{-3} then a difference in geodetic heights of 100 m means a pressure of 50 mm of water, i.e., it is of the same order of magnitude as the pressure drop due to the pipe friction. Some communications on the optimization of gas networks [3], [4] do not take into account the differences in geodetic height and so their results are illusory ones.

For solving Eq. (22), the Newton—Raphson method is advisable, since its convergence is good even in the case of relatively wrong starting values. So

$$\mathbf{q}_L^{(r+1)} = \mathbf{q}_L^{(r)} + \Delta\mathbf{q}_L^{(r)}, \tag{23}$$

$$\Delta\mathbf{q}_L^{(r)} = -\left[\frac{\partial\mathbf{G}^{(r)}}{\partial\mathbf{q}_L}\right]^{-1}\mathbf{G}^{(r)}$$

where r is the counter of iteration. On the basis of (10) and (22) the Jacobian in brackets can be written

$$\left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{q}_L}\right] = \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{q}}\right]\left[\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_L}\right] = \mathbf{C}^t\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{q}}\right]\mathbf{C}\,. \tag{24}$$

Since the Jacobian consists in our case of a relatively great number of zeros, it is advantageous to use for inversion sparse matrix technics. The Zollenkopf algorithm (8) proved to be useful. The number of zeros in the matrix $[\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{q}_L]$ equals those of the loop impedance matrix $\mathbf{C}^t\mathbf{V}\mathbf{C}$ [10].

4. The formulation of minimizing the losses as a problem of linear programming

In order to solve the optimization problem (4) by the method of linear programming, we shall operate instead of the objective function Φ with a small increment of it $\Delta\Phi$. On a similar way, instead of the network equation $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ and of the system of constraints (4), the corresponding increments will be used. The linear problem of optimizing got so can be formulated as follows:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi(\mathbf{P}', \mathbf{p}') \to \min, && \text{a)}\\
&\Delta\mathbf{G} = \mathbf{0}, && \text{b)}\\
&\Delta\mathbf{P}^{(\min)} \leq \Delta\mathbf{P}' \leq P^{(\max)}, && \text{c)}\\
&\Delta\mathbf{p}^{(\min)} \leq \Delta\mathbf{p}' && \text{d)}
\end{aligned} \tag{25}$$

where the nodal pressures — from the point of view of optimization independent and dependent —, are denoted by $\mathbf{P}'$ and $\mathbf{p}'$, resp. The increments in Eq. (25) will be explainted later. The scalar $\Delta\Phi$ and the vectors $\Delta\mathbf{G}$, $\Delta\mathbf{P}^{(\max)}$, $\Delta\mathbf{P}^{(\min)}$ are defined by Eqs (29), (31) and (35), resp.

By adding the solution of the linear programming task, the vector $\Delta\mathbf{p}'^{(s)}$ to the starting vector $\mathbf{p}'^{(s)}$, the vector

$$\mathbf{p}'^{(s+1)} = \mathbf{p}'^{(s)} + \Delta\mathbf{p}'^{(s)} \tag{26}$$

is got which is in general nearer to the solution of the non-linear optimization problem (4) than $\mathbf{p}'^{(s)}$. By carrying out the outlined calculation in cycles, the

solution of the problem is got. The integer s is the counter of the linear programming cycles.

The expression $\Delta\Phi$ is the total differential of G, ΔG can be got by an expansion of G into a series and omitting the non-linear terms. On the basis of (3), if the network pressures are referred to the outer atmosphere

$$\Phi = \mathbf{M}^t\mathbf{p}' \tag{27}$$

is got. The losses at pressure $(\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}')$ are

$$\Phi(\mathbf{P}' + \Delta\mathbf{P}', \mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}') = \mathbf{M}^t\mathbf{P}' + \mathbf{M}^t\mathbf{p}' + \mathbf{M}^t\,\Delta\mathbf{P}' + \mathbf{M}^t\,\Delta\mathbf{p}' \tag{28}$$

where Φ is decomposed in terms of nodes α and β. So $\Delta\Phi$ can be expressed as

$$\Delta\Phi = \mathbf{M}^t\,\Delta\mathbf{P}' + \mathbf{M}^t\,\Delta\mathbf{p}'\,. \tag{29}$$

Decomposing the left-hand term of the network equation $\mathbf{G} = \mathbf{O}$ with respect to the nodes α and β and expanding into a power series

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}' + \Delta\mathbf{P}') = \mathbf{G}(\mathbf{P}', \mathbf{p}') + \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{P}'}\right]\Delta\mathbf{P}' + \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{p}'}\right]\Delta\mathbf{p}' + \ldots = \mathbf{O} \tag{30}$$

is got. Since

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}', \mathbf{p}') = \mathbf{O}\,,$$

$$\Delta\mathbf{G} = \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{P}'}\right]\Delta\mathbf{P}' + \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{p}'}\right]\Delta\mathbf{p}' = \mathbf{O} \tag{31}$$

where the higher terms have been neglected. As the matrix

$$\left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{p}'}\right]$$

is in general not a singular one, the increments $\Delta\mathbf{p}'$ can be expressed in terms of $\Delta P'$ by (30).

$$\Delta\mathbf{p}' = -\left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{p}'}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{P}'}\right]\Delta\mathbf{P}' = -\,\Delta\mathbf{P}' \tag{32}$$

where

$$\mathbf{W} = \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{p}'}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{P}'}\right], \tag{32'}$$

The expression of the matrix $\mathbf{W}$ on the basis of the network equation $\mathbf{G} = \mathbf{O}$ is as follows

$$\mathbf{W} = [\mathbf{A}_\beta^t\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{A}_\beta]^{-1}[\mathbf{A}_\beta^t\mathbf{Y}\mathbf{A}_\alpha] \tag{33}$$

where the matrices $\mathbf{A}_\alpha$ and $\mathbf{A}_\beta$ are partial matrices of the branch node matrix $\mathbf{A}$ partitionated in terms of nodes α and β. $\mathbf{Y}$ is the primitive and $\tilde{\mathbf{Y}}$ is the differential admittance matrix of the network. For details see also [10].

Eq. (29) can be written, taking into account (32), as follows:

$$\Delta\Phi = [\mathbf{M}_\alpha^t - \mathbf{M}_\beta^t \mathbf{W}]\Delta\mathbf{P}'. \tag{34}$$

Among the limiting values $\Delta\mathbf{P}^{(\min)}$, $\Delta\mathbf{P}^{(\max)}$, $\Delta\mathbf{p}^{(\min)}$ in (25c), (25d) and the limiting values $\mathbf{P}^{(\min)}$, $\mathbf{P}^{(\max)}$, $\mathbf{p}^{(\min)}$ in the original problem ,(4) the following relations are valid

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{P}^{(\min)} &= \mathbf{P}^{(\min)} - \mathbf{P}'^{(s)}, \\ \Delta\mathbf{P}^{(\max)} &= \mathbf{P}^{(\max)} - \mathbf{P}'^{(s)}, \\ \Delta\mathbf{p}^{(\min)} &= \mathbf{p}^{(\min)} - \mathbf{p}'^{(s)}. \end{aligned} \tag{35}$$

The linear programming task (25) can be formulated on the basis of (32), (34) and (35) as follows

$$\begin{aligned} &[-\mathbf{M}_\alpha^t + \mathbf{M}_{-\beta}^t \mathbf{W}^{(s)}]\Delta\mathbf{P}'^{(s)} \to \max, && \text{(a)} \\ &\Delta\mathbf{P}'^{(s)} \leq [\mathbf{P}^{(\max)} - \mathbf{P}'^{(s)}], && \text{(b)} \\ &-\Delta\mathbf{P}'^{(s)} \leq [-\mathbf{P}^{(\min)} + \mathbf{P}'^{(s)}], && \text{(c)} \\ &\mathbf{W}^{(s)}\Delta\mathbf{P}'^{(s)} \leq [-\mathbf{p}^{(\min)} + \mathbf{p}'^{(s)}]. && \text{(d)} \end{aligned} \tag{36}$$

The solution of (36) is got the most suitably by the simplex method. The method is comprehensively dealt with in the literatury, see References [1], [2], [9].

The expression (36) does not guarantee the positive definiteness of the solution, i.e., it does not guarantee the inequality $\mathbf{P}'^{(s)} > \mathbf{0}$. As the solution of the simplex method and the existing computer programs for this purpose refer in general to this case, a further transformation is carried out on (34). Let us introduce the new variable $\hat{\mathbf{P}}$ defined by

$$\hat{\mathbf{P}}^{(s)} = \mathbf{P}'^{(s)} + \Delta\mathbf{P}'^{(s)} - \mathbf{P}^{(\min)}. \tag{37}$$

Expressing $\Delta\mathbf{P}'^{(s)}$ from (37)

$$\Delta\mathbf{P}'^{(s)} = \hat{\mathbf{P}}^{(s)} - \mathbf{P}'^{(s)} + \mathbf{P}^{(\min)}. \tag{38}$$

Substituting this into (36)

$$[-\mathbf{M}_\alpha^t + \mathbf{M}_\beta^t \mathbf{W}^{(s)}]\ (\hat{\mathbf{P}}^{(s)} - \mathbf{P}'^{(s)} + \mathbf{P}^{(\min)}) \to \max. \tag{39}$$

Since $P'^{(s)}$ and $P^{(\min)}$ can be regarded in point of view of the linear programming problem as constants, (39) can be written in the following form

$$[-\mathbf{M}_\alpha^t + \mathbf{M}_\beta^t \mathbf{W}^{(s)}]\hat{\mathbf{P}}^{(s)} \to \max. \tag{40}$$

On the basis of (38) Eq. (36b) can be written

$$\hat{\mathbf{P}}^{(s)} - \mathbf{P}'^{(s)} + \mathbf{P}^{(\min)} \leq [\mathbf{P}^{(\max)} - \mathbf{P}'^{(s)}] , \tag{41}$$

i.e.

$$\hat{\mathbf{P}}^{(s)} + \mathbf{P}^{(\min)} \leq \mathbf{P}^{(\max)} . \tag{42}$$

Since $\mathbf{P}'^{(s)}$ is by all means positive and is greater than $\mathbf{P}^{(\min)}$ according to the definition (37) $\hat{\mathbf{P}}^{(s)} \geq \mathbf{0}$, i.e. necessarily positive. When $\hat{\mathbf{P}}^{(s)}$ is regarded as the variable of the linear programming, the problem is a positive definite one.

The linear programming task can be formulated on the basis of (36), (38) and (40)

$$\begin{gathered} [-\mathbf{M}_{\alpha}^{t} + \mathbf{M}_{\beta}^{t}\mathbf{W}^{(s)}]\hat{\mathbf{P}}^{(s)} \to \max , \\ \hat{\mathbf{P}}^{(s)} \leq \mathbf{P}_{(\max)} , \\ \mathbf{W}^{(s)}\hat{\mathbf{P}}^{(s)} \leq [\mathbf{p}'^{(s)} - \mathbf{p}^{(\min)} + \mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{P}'^{(s)} - \mathbf{P}^{(\min)})] , \\ \hat{\mathbf{P}}^{(s)} \geq \mathbf{0} . \end{gathered} \tag{43}$$

As can be seen, the problem (43) has the following standard form

$$\begin{gathered} \mathbf{c}^{t}\mathbf{x} \to \max, \\ \mathbf{L}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{44}$$

where

$$\mathbf{c}_{t} = -\mathbf{M}_{\alpha}^{t} + \mathbf{M}_{\beta}^{t}\mathbf{W}^{(s)}, \tag{44'}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(\max)} \\ \hline \mathbf{p}'^{(s)} - \mathbf{p}^{(\min)} + \mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{P}'^{(s)} - \mathbf{P}^{(\min)}) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{P}}^{(s)}$; $\mathbf{E}$ is the unit matrix.

$\mathbf{P}'^{(s)}$ can be calculated by (38) from the solution $\check{\mathbf{P}}^{(s)}$ of task (43) and from $\mathbf{P}'^{(s)}$ of the network equation (22). Substituting $\mathbf{p}'^{(s)}$ and $\Delta\mathbf{p}'^{(s)}$ into (26), the $(s+1)$th approximation of the solution of the non-linear optimization problem (4) is got.

5. A brief description of the computer program

The right-hand side of expression (43) contains the vectors $\mathbf{P}'^{(s)}$ and $\mathbf{p}'^{(s)}$ which are *constants in point of view of linear programming*. They are determined by solving the equations of the non-linear network. Since, for solving the network equations, an iterative method is used, in each linear programming cycle (s-cycle) ϱ Newton—Raphson iterations are embedded (r-cycle). The matrix $\mathbf{W}^{(s)}$, the differential loss $\Delta\Phi^{(s)}$ and the matrix $\mathbf{L}^{(s)}$ representing the constraints of (43) are calculated in each s-cycle over again. The calculation flow sheet is demonstrated in Fig. 3 [10].

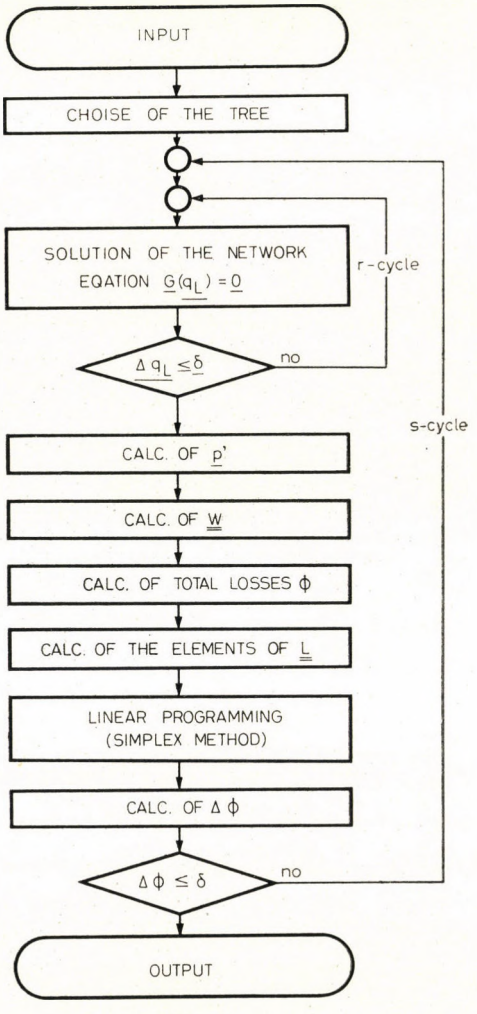


Fig 3

It must be mentioned that the actual structure of the program differs in some extent from the scheme to be seen in Fig. 3. This is motivated by reasons of programming technics.

a) It is advantageous to replace the matrix operations in the computer program by heuristic algorithms. Into this category belongs the Zollenkopf algorithm elaborated for sparse matrices.

b) There are built-in library routines. The connection to the main program requires some modifications and insertion of program interfaces.

c) In the case of extended problems there are special requirements on memory efficiency. Appropriate procedures are in close connection to the sparse matrix technics.

d) An important part of the program system is the program package built-in for control which is indispensable for security purposes.

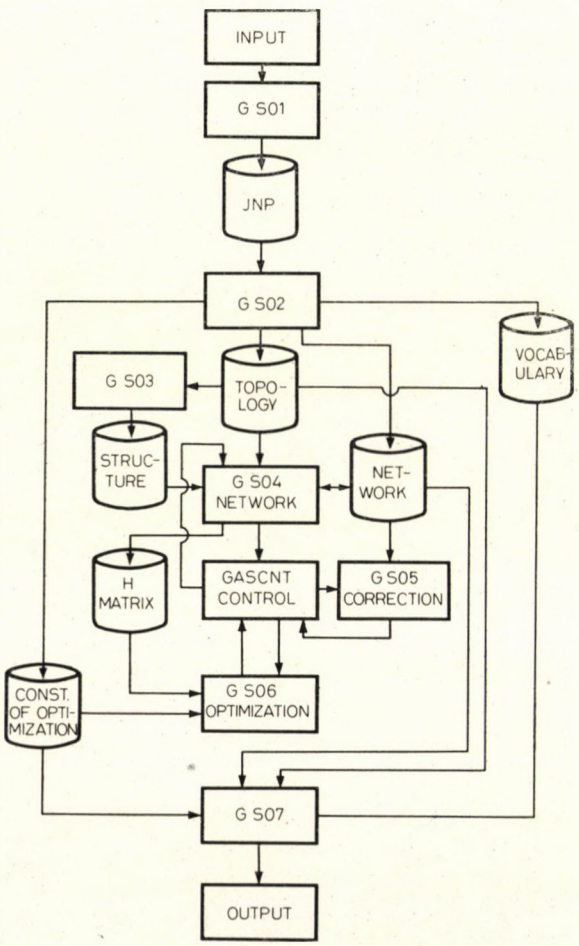


Fig 4

The real structure of the FORTRAN program is shown in Fig. 4. The structure of the program elaborated for a CDC-3300 computer is determined to a great extent by the operation system of the computer. The program consists of the following sub-programs:

a) a subprogram for the input of cards, their control and writing to the back-ground memory (GSO1);

b) a preparatory program for numbering the branches and nodes GSO2);

c) a subprogram for getting topological informations and for the application of sparse matrix technics (GSO3);

d) a subprogram for calculating the network equations and for setting up the matrix of optimization (GSO4);

e) an organizing part for governing the cyclic calculations (GSO5);

f) the library program for solving the linear programming tasks by the simplex method in cycles (GSO6);

g) an organizing program for scheduling tasks d), e), f) (GASCNT);

h) a subprogram for printing the input and output data in proper form (GSO7);

i) a program for testing the system and for printing error message (GASTST).

6. Application

The application of the program was tested on a part of the Budapest Gas Network. The tested network has 79 nodes and is fed through 4 pressure-reducing valves (nodes of type α). The task is instructive from the point of view of relative large differences in geodetic heights of the area (max. 200 m). The driving forces originating from the height differences are of the same magnitude as the forces due to the feeding pressures.

The operating conditions of the network have been determined in 5 loading states which can be characterized globally by the total consumptions (see Table I). The consumptions referring to the individual loading states are the twofold of the antecedent one. The investigation of the network in such a wide range is motivated by the fact that the consumption per hour varies in a rate of 1 : 5 depending on the hour of the day.

Table I

Loading state	Loading (total consumption) m^3h^{-1}	Losses, conventional operating conditions m^3h^{-1}	Losses, optimal operating conditions m^3h^{-1}	Relative losses, conventional operating conditions %	Relative losses, otpimal operating conditions %	Relative economization %
1	946	50,7	42,3	5,35	4,47	16,50
2	1884	49,3	40,9	2,62	2,17	17,04
3	2823	47,8	40,9	1,68	1,45	14,35
4	3731	45,2	40,1	1,21	1,08	11,11
5	4652	43,4	41,3	0,93	0,89	4,84

There have been determined the nodal pressures, the branch streams and the total network losses in each loading state for optimal (minimum of losses) and conventional operating conditions.

Table I contains the most important results of calculations, the total and relative losses for conventional and optimal operating conditions, further the achieved percentual gain when optimal control is used instead of the conventional one. This latter index is important because — in contrary to the other results of calculation — it is independent of the incertainty due to the leakage loss coefficient ε. Since measured data for ε are not available, the value

$$\varepsilon = 4{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3 h^{-1} m^{-1} (mbar)^{-1}}$$

taken from the literature [5] has been used in the calculations. As it can be seen from the Table, the relative gain achieved by optimal control varies from 17 to 5% and diminishes with increasing gas consumption.

Acknowledgements

The authors express their thanks to Prof. G. FODOR, Dr. Sci. for his highly valuable remarks concerning some conclusions of the paper.

REFERENCES

1. KREKÓ, B.: Optimumszámítás. Nemlineáris programozás (Computing of Optimums. Nonlinear Programming) Közg. Hogi Kiadó, Budapest 1972
2. DUCK, W.—M. BLIEFERNICH: Operationsforschung 3 Bd. VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1972
3. BRAMELLER, A.—V. E. CHANCELLOR—Y. HAMAN—C. YALCINDAG: Recent Advances in Mathematical Analysis for Gas Industry Applications. *I.G.E. Journal* (1971) 188—215
4. DAVENPORT, R.: Minimum Leakage from GasNetworks. Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1972
5. TINNEY, W. F.: Some Examples of Sparse Matrix Methods for Power Network Problems. *Proc. 3rd Power System Computation Conf.*, Rome 1969, Preprints
6. SINGER, D.: Nagy hálózatok megoldási módszereiről (On Solving Methods for Large Networks), *Műszaki Tudomány* **49** (1974), 181—197
7. SINGER, D.—KOLTAI, T.: Új algoritmus gázhálózatok számítására (New Algorithms for Computing Gas Networks), *Műszaki Tudomány* **47** (1973), 139—149
8. ZOLLENKOPF, K.: Bifactorization — Basic Computation Algorithm. *Conf. on Large Sparse Sets of Linear Equations*, Oxford 1970
9. DANZIG, G. B.: Maximation of a Linear Function Subject to Linear Inequalities in KOOPMANN's: "Activity Analysis of Production and Allocation". J. Wiley and Sons Inc. New York 1951, 339—347
10. SINGER, D.—BOROSSAY, GY.—KOLTAI, T.: Gázhálózatok optimális irányítása, különös tekintettel a Fővárosi Gázművek hálózatára. Az OPTPRESS programrendszer leírása (Optimum Control of Gas Networks as Regards the Networks of the Municipal Gas Works in Budapest. Description of the Programming System OPTPRESS). Report of the Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, October 1974
11. SINGER, D.— BOROSSAY, GY.—CZOCH, Á.: Budapest XII. ker. Szabadsághegy földgázhálózat optimális üzemeltetésének vizsgálata. (Investigation of Optimization of the Natural Gas Distribution in the 12th District of Budapest. Report of the Computer and Automation Institute of the Hung. Acad. of Sci., October, 1974

Eine leistungsfähige Methode zur Bestimmung der optimalen Arbeitsverhältnisse von Gasnetzen. Die Arbeit gibt eine allgemeine Übersicht über die Problematik der Optimierung von nicht-linearen Netzwerken. An Hand dieser wird die Theorie einer Methode eingehend behandelt, welche die Minimisierung der Gasverluste des Gasnetzes bei vorgeschriebenen Toleranzen der Knotenpunktdrucke ermöglicht. Die Lösung zieht die Wirkung der Differenzen der geodetischen Höhen der Knotenpunkte in Betracht. Der Aufsatz beschreibt das entsprechende Programmsystem, dessen Leistungsfähigkeit an Hand eines reellen Beispiels demonstriert wird. Aufgrund der hier gewonnenen Zahlenergebnisse werden Schlußfolgerungen über ökonomische Folgen der Optimalregelung von Gasversorgungsnetzen gezogen.

Эффективный метод оптимизации эксплуатационных условий газовых сетей с помощью ЭВМ. В работе даётся общая характеристика проблемы оптимизации нелинейных сетей. Излагаются теоретические основы метода расчёта оптимальных эксплуатационных условий сетей городского газа, при которых давление во всех условиях точках будет внутри заранее заданного интервала и одновременно потери за счёт утечки газа будут минимальными. Алгоритм расчёта принимает во внимание влияния разной геодетической высоты условых точек. В работе кратко описывается пакет программ, разработанный для прикладной цели (управление сетью), его применение иллюстрируется на примере практической задачи. Приводятся данные возможной экономии за счёт оптимального управления сетью городского газа.

BOOK REVIEWS

BETONTECHNISCHE BERICHTE 1973

Beton Verlag GmbH, Düsseldorf

Das Buch gibt die wichtigeren Forschungen des Forschungsinstituts der Zementindustrie in Düsseldorf bekannt. Die wesentlichsten Feststellungen können, wie folgt, zusammengefaßt werden.

Die günstigen Ergebnisse der in den Vereinigten Staaten mit Zementgrundstoff durchgeführten Bodenbefestigungen haben in der Deutschen Bundesrepublik zu ausgedehnten Laborversuchungen Anlaß geboten. Das verfolgte Ziel der Forschungen war die Vorbereitung der Vorschriften für die Planung. Die Untersuchungen wurden neben den klimatischen und chemischen Einwirkungen auch auf die Stabilität der Uferschutzwerke erstreckt. Die Stabilität der Dämme kann durch Anwendung von Erdzement auf der Wasserseite des Damms erfolgreich erhöht werden. Der Widerstand gegen den Wellenschlag kann durch die Zusammensetzung des Erdzements geregelt werden; eine Beimischung von 20 Prozent Sand und von 2 Prozent Zement erwies sich als äußerst wirksam. Die Wellenbrechung kann durch Ausbildung einer gestuften Böschung gesichert werden.

Die Abhandlung von B. Dartod berichtet über den Zusammenhang zwischen dem Porenanteil und den mechanischen Eigenschaften der Betonsorten verschiedener Zusammensetzungen. Nach der Meinung des Autors verdient der Normentwurf, der die Regelung der Schutzschicht der Betone behandelt, und als Ergänzung und Modernisierung von DIN 4030 durch die Mitarbeiterschaft von hervorragenden deutschen Fachleuten betrachtet werden kann, besondere Aufmerksamkeit. Die Richtlinien des Schutzes gegen die agressiven Einwirkungen, die Regeln für den Entwurf und die Konstruktion, sowie die die Technologie des Auftragens enthaltende Anleitung dienten als nützliche Hinweise sowohl für den Konstrukteur, als für den Bauherrn.

Die Studie von Jürgen Dahnes umfaßt die Beschreibung der Zusammensetzung des Torkretbetons und die Anforderungen gegenüber den physikalisch-mechanischen Eigenschaften sowie der Güte des Betons. Gemäß der neuen deutschen Vorschriften wird der Torkretbeton in fünf Güteklassen eingeteilt, die durch den unteren Schwellenwert der 28tägigen Würfelfestigkeit (sog. Mindestfestigkeit) von B50 bis B550 bezeichnet werden.

Der Bericht des Forschungsinstituts befaßt sich auch mit den Schädigungen der auf die Einwirkung der Alkaliverbindungen empfindlichen Betone und mit der Größenordnung der Reparaturarbeiten. Die durch Laborversuche nachgewiesenen Methoden ermöglichen die Steigerung der Widerstandsfähigkeit der Betone. Die Anwendung des Na-Zements mit einer Beimischung von 800 kg/m^3, wird vorgeschlagen, wenn es sich um eine alkalische Umgebung, besonders verunreinigte Luft handelt.

Bei der Untersuchung der rheologischen Eigenschaften des Frischbetonts und Zementbreis stellen die Forscher fest, daß die mit den Konsistenzmessungen bisher durchgeführten rheologischen Untersuchungen den Verlauf der Verformung nur in ihren einzelnen Phasen abgebildet haben, und so die Ergebnisse nur als relative Werte betrachtet werden können. Der Frischbeton kann als ein Zweiphasensystem betrachtet werden, dessen rheologisches Verhalten zeitgemäß mit Hilfe eines Drehrheometers ermittelt werden kann. Das bigame Stoffgefüge thixotropen Verhaltens ist viskos, d. h., die Beziehung Schubverformungsgeschwindigkeit und Schubspannung ergibt eine konkave Kurve, gegenüber dem linearen rheologischen Gesetz des idealen vollkommenen plastischen Stoffes. Das rheologische Verhalten des Betons kann man durch den Zuschlagstoff regeln, jedoch folgt dieses dem Charakter nach jenem des Zementbreis, bzw., des Zementmörtels.

Das Forschungsinstitut untersucht auch erfolgreich die Ursachen der Rißbildung im frischen (noch in Bindung befindlichen) Betons und die Feststellungen gewähren einen wert-

vollen Anhaltspunkt hinsichtlich der Begrenzung der Rißbildung der nach der Technologie der heimischen Wohnbaubetriebe hergestellten Betonfertigteile. Die Risse des Frischbetons werden im allgemeinen durch Innenspannungen verursacht, u. zw. zu der Zeit, wo die Festigkeit und Verformungsfähigkeit des Betons noch sehr gering ist. Die Ursachen der im Betonkörper auftretenden Zwangsspannung können, wie folgt, bezeichnet werden: 1. Verformung der Verschalung (Schablone); 2. plötzliche Änderung der Umgebungstemperatur; 3. rasches Austrocknen des wasserreichen Betons.

Hinsichtlich der Risse kann man die Zeit von 2 bis 10 Stunden nach dem Einarbeiten des Betons als kritisch betrachten. Die Rißbildung im Frischbeton ist bei hohem (250 lit/m^3) Wassergehalt nahezu unvermeidlich. Ein starker Wind, bzw. Dampfdruckunterschied begünstigt in wesentlichem Maße die Austrocknung. Die infolge der raschen Austrocknung auftretende Rißbildung kann durch Nachbehandlung und Rüttelung vermieden werden. Die auf der Oberfläche des Betons erschienenen Risse können durch leichte Flächenrüttelung mit Plattenrüttler geschlossen werden.

Zum Schluß wird ein Literaturverzeichnis der bisher erschienenen Studien beigelegt.

L. Palotás

G. Franz (Schriftleiter):

BETONKALENDER 1975

TASCHENBUCH FÜR BETON-, STAHLBETON- UND SPANNBETONBAU SOWIE DIE VERWANDTEN FÄCHER

Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf, 1975, 2080 Seiten

Der neueste 64ste Jahrgang dieses Handbuchs erschien nach der bisherigen Tradition in zwei Bänden — diesmal beide von gleichem Umfang.

Der erste Band enthält — auf 960 Seiten — zwölf Abschnitte. Umfassende Abschnitte behandeln die Materialeigenschaften des Betons (J. BONZEL), die mit dem Stahl- und Holzbau zusammenhängenden Kenntnisse (W. SCHUMACHER, Prof. K. MÖHLER), Probleme der Plattentheorie (Prof. F. CZERNY—K. STIGLAT—H. WIPPEL), Kenntnisse der Elastizitätslehre (N. DIMITROV), Statik der Stabkonstruktionen (H. AHRENS—Prof. H. DUDDECK), sowie die Bemessungsvorschriften für Stahlbetonelemente und Stahlbetonkonstruktionen (E. GRASSER—Prof. K. KORDINA—U. QUAST—Prof. H. RÜSCH—Prof. H. KUPFER).

Der zweite Band umfaßt — auf 1150 Seiten — fünf Hauptabschnitte, u. zw.: die auf den Stahlbetonbau bezüglichen Regelungsvorschriften (H. GOFFIN); die mit den Spannbetonkonstruktionen zusammenhängenden Kenntnisse (Prof. H. RÜSCH—Prof. H. KUPFER); Vorschriften für den Bau mit vorgefertigten Bauteilen (Prof. H. PASCHEN); Bau- und Bemessungsprinzipien für die Hochhäuser (G. KÖNIG), sowie die Theorie des Stahlbetonbrückenbaus (H. BECHERT).

Dabei ist der neue Abschnitt, der sich mit dem Entwurf, der Bemessung und der Sicherheit der Hochhäuser beschäftigt besonders beachtenswert. Von den darin angeführten Entwurfsgrundsätzen ist besonders eine Vorschrift hervorzuheben, wonach die *auf die Hochhäuser wirkenden vertikalen Kräfte am kürzesten Weg auf das Fundament übertragen werden sollen;* von der Anwendung dieses Prinzips darf man nur in wohlbegründeten Sonderfällen absehen. (Bedauerlicherweise hat die Baupraxis diese Regel nicht immer entsprechend berücksichtigt.) Auch die Feststellung, daß Konstruktion und Ausführung nicht voneinander unabhängig sind, ist von großer Wichtigkeit und die Knotenpunktlösungen müssen schon in der Anfangsphase der Entwurfsarbeiten bis zu einer zur Ausführung geeigneten Ausführlichkeit ausgearbeitet werden. Die Gegenüberstellung der richtigen und fehlerhaften Lösungen veranschaulicht recht gut die zweckmäßige Anordnung der Versteilungswände. Umfangreiche Abschnitte befassen sich mit den auf die Hochhäuser wirkenden Windkräften, mit den durch das Erdbeben ausgeübten Wirkungen und im allgemeinen mit den aktuellen Problemen der Bemessungsverfahren. Die Abhandlung wird durch die Darstellung einiger typischer Ausführungsbeispiele ergänzt.

Ein neuer, sehr wertvoller Abschnitt befaßt sich mit den Bauvorschriften für den Bau mit vorgefertigten Bauteilen und enthält in Zusammenhang mit der Verbindung der einzelnen Bauelemente sowie mit der Ausbildung der Auflager und der aufsitzenden Trägerenden nützliche, zu befolgende Hinweise.

Im allgemeinen ist festzustellen, daß die Verfasser der einzelnen Abschnitte die angeführten Probleme in einem gedrängten, jedoch klaren, leicht verständlichen Stil und nach dem

neuesten wissenschaftlichen Stand behandeln. Die den Text begleitenden Bilder sind klar und lehrreich, die große Anzahl von Tabellen und die reiche Bibliographie befriedigt die praktischen Ansprüche. Das ausgezeichnete Autorenteam hat unter der sicheren Leitung des Professors Dr.-Ing. G. FRANZ, Altmeisters des Betonfachs, das umfassende, vielfältige Kenntnismaterial, welches die Fachleute, die sich mit der Planung und Ausführung beschäftigen, im Laufe ihrer Fachtätigkeit benötigen, erfolgreich zusammengefaßt.

Dadurch is der durchschlagende, die Grenzen des deutschen Sprachgebiets weit überschreitende Erfolg dieses auf mehr als sechzigjährige Tradition zurückblickenden, jedoch sich von Jahr zu Jahr verjüngenden Taschenbuchs gesichert.

P. Csonka

M. Kubinszky:

UNGARISCHE LOKOMOTIVEN UND TRIEBWAGEN

Akadémiai Kiadó, Budapest—Birkhäuser Verlag, Basel—Stuttgart 1975, 343 Seiten, 265 Bilder

Die Geschichte der Eisenbahn anerkennt G. Stephenson als Bahnbrecher des Eisenbahnbaus, Erfinder der ersten betriebsfähigen Dampflokomotive im Jahre 1814, die heute noch im BEAMISH-Museum neben der Stadt Newcastle upon Tyne in England sichtbar ist.

In der Geschichte des vergangenen anderthalb Jahrhunderts hat auch der *ungarische Lokomotivbau* bis zum Jahre 1959, beinahe ein Jahrhundert lang, sowohl in Beziehung der Qualität, als auch des Umfangs der Produktion nicht nur den inländischen Bedarf befriedigt, sondern produzierte auch für den Ausfuhr. In gleicher Weise erreichte in Ungarn auch die Herstellung von *Triebwagen* und *Diesellokomotiven* (schon von 1903 an) sowie die *Elektrifizierung* der *Eisenbahn* und der Bau von *elektrischen Lokomotiven* (von 1897 an) ein hohes Niveau. Diesen Umständen ist die Ausgabe dieses die Geschichte des ungarischen Lokomotiv- und Triebwagenbaus darlegenden Werkes zu verdanken.

Das Werk besteht aus folgenden vier Abschnitten: I. Die Geschichte und geographische Lage der ungarischen Eisenbahnen (Verfasser: M. KUBINSZKY); II. Die Dampflokomotiven (Verfasser: B. VARJU); III. Triebwagenzüge und Diesellokomotiven (Verfasser: K. KOPASZ); IV. Elektrische Lokomotiven (B. MANNDORFF).

Diese Abschnitte werden durch das Vorwort und einen Anhang ergänzt. Der Anhang enthält die hervorragenden Persönlichkeiten des ungarischen Lokomotivbaus samt einer kurzen Lebensbeschreibung; die vorkommenden Ortsnamen in mehreren Sprachen; das Bezeichnungssystem der Lokomotiven; eine Übersichtstabelle der Lokomotivtypen; eine Liste der Lokomotivbaufirmen und Unternehmungen; ein Fachliteratur- und Lichtbildverzeichnis.

Das von M. KUBINSZKY redigierte Werk stellt eine leicht übersichtliche, gedrängt verfaßte und genußreiche Lektüre dar.

Das Werk ist gut redigiert, weil die einzelnen Lokomotivgattungen samt den wichtigsten technischen Angaben, Eigenschaften, ausländischen Beispielen und mit den etwaigen Konstruktionsänderungen, mit Benennung der Baufirmen in der Reihenfolge der Entwicklung der einzelnen Eisenbahngesellschaften, später im Rahmen der einzigen Staatlichen Eisenbahngesellschaft in Ungarn, der MÁV, in der Reihe der Herstellung beschrieben werden.

Die Übersichtlichkeit des Buches wird außer der gut gelungenen Redaktion auch durch die ausführliche Inhaltsangabe und im Anhang befindliche Tabellen gefördert.

Die gedrungene Abfassung bedeutet, daß die Erörterungen den erforderlichen Umfang nicht überschreiten. Die interessanteren Einzelheiten sind in Fußnoten zusammengefaßt.

Das Werk ist auch deshalb eine genußreiche Lektüre, weil von einigen Lokomotiven der Heldenzeit der ungarischen Eisenbahnen abgesehen, auch die noch heute oder vor einigen Jahrzehnten auf den Haupt- und Nebenbahnen der Ungarischen Staatseisenbahnen im Betrieb befindlichen Lokomotiven in Bild und Zeichnung dargestellt sind.

Es kann jedoch bemängelt werden, daß das Buch die in der Zeit von 1897 bis 1904 entfaltete Tätigkeit des ungarischen Ingenieurs K. KANDÓ, u. a. die unter seiner Leitung durchgeführte Elektrifizierung der italienischen Valtellina-Eisenbahn; Konstruktion und Bau der ersten elektrischen Lokomotiven, die den Namen von KANDÓ zur Weltberühmtheit brachten, kaum erwähnt.

Eine hervorragende Rolle spielte auch der ungarische Ingenieur J. CSERHÁTI, der damalige Direktor der Elektrischen Abteilung der Ganz-Werke in der Organisation des Elektrolokomotivbaus. Unter seiner Direktion wurden im Jahre 1896 die heutigen Ganz-Elektrizitätswerke errichtet.

Außer K. KANDÓ und J. CSERHÁTI hätten auch noch M. HERRMANN, G. SZABÓ und GY. CSANÁDI erwähnt werden sollen, die als Eisenbahningenieure und später als Professoren der Budapester Technischen Universität auf dem Gebiet der Entwicklung der ungarischen Lokomotivkonstruktion und des Lokomotivbaus, sowie im Interesse der Hebung des Niveaus der Dampf-, Gas- und elektrischen Traktion auf den ungarischen Eisenbahnlinien eine ausgedehnte Tätigkeit entfaltet haben.

Der geschmackvolle Druck, die schönen Fotos und Konstruktionszeichnungen erhöhen den Wert des gehaltvollen, technisch-historischen Werkes.

Z. Terplán

L. Varga — S. Kaliszky:

GRÜNDUNGEN TURMARTIGER BAUWERKE

Gemeinschaftsausgabe des Verlags Akadémiai Kiadó, Budapest, und des Bauverlags GmbH. Wiesbaden und Berlin. 1974, 253 Seiten

Die Verfasser des Buches befassen sich mit der konstruktiven Ausgestaltung von zentralen Fundamenten und der statischen Bemessung von Türmen. Die reichhaltige Literatur der turmartigen fernmeldetechnischen Bauwerke behandelt die Gründungsprobleme nur nebenbei und erörtert hauptsächlich Bau- und funktionelle Fragen. Deswegen war die Publikation einer Monographie, die sich mit der Gründung von turmartigen Bauwerke beschäftigt, berechtigt und aktuell.

Die komplizierte Beanspruchung der Gründung der sich schnell ändernden großen Windlasten ausgesetzten Türme können nur mit Hilfe von komplizierteren bodenmechanischen Berechnungen, als gewöhnlich und durch eine genauere Analyse der Belastungen ermittelt werden. Die Untersuchungen wurden in einer klaren und leicht verständlichen Abfassung behandelt.

Das Buch umfaßt hauptsächlich einen schon bekannten literarischen Stoff und will nicht einen Bericht über neue wissenschaftliche Ergebnisse erstatten, sondern die Probleme der Türmgründungen in Form eines den Ansprüchen der Praxis angemessenen Hilfsbuchs behandeln. Durch Darbietung von zahlreichen Diagrammen und Tabellen wird die Entwurfsarbeit vereinfacht und so dient das Buch vor allem den Ansprüchen der Entwurfspraxis. Es enthält keine, für die grundwissenschaftlichen Monographien charakteristischen eingehenderen theoretischen Begründungen und der größte Teil der aus der Fachliteratur übernommenen Formeln wird ohne Ableitung angeführt, jedoch deren physischer Inhalt jeweils erklärt. Dagegen geht der die praktische Bemessung erörtende Teil auf alle Teilprobleme ein und gibt die zur Bemessung notwendigen Angaben ausführlich an. So erfordert die Benutzung des Buches keine besonderen bodenmechanischen oder statischen Vorkenntnisse und eignet sich zur Bemessung von Turmgründungen auch ohne Benutzung von aderen Werken.

Die Autoren faßten den in der Fachliteratur vereinzelt zur Verfügung stehenden Stoff in glücklicher Weise zusammen, haben die zur Planung notwendigen Kenntnisse hervorgehoben und vereinfacht dargelegt und dadurch ein ausgezeichnetes Hilfsbuch geschaffen. Die Belastungen und die bodenmechanische Bemessung der Gründungen wurden in den von L. VARGA, während die Festigkeitsbemessungen des Fundamentenkörpers in den von S. KALISZKY geschriebenen Abschnitten behandelt. Die Bemessungsverfahren benützten auch die neuen Ergebnisse der Statik, sowohl bei der Bemessung auf Risiko, als auch unter Berücksichtigung der plastischen Verformungen.

Es sei besonders auf die Gründlichkeit und Ausführlichkeit des Teils verwiesen, der sich mit der Windlast befaßt und die Erklärung und Motivierung der bezüglichen internationalen Regelungen enthält. In diesem Zusammenhang wird außer der statischen auch die dynamische Bemessung der Türme behandelt.

Da der Wert der zur Bemessung der Turmfundamente benutzten Belastungs- und bodenmechanischen Angaben unsicher ist, kann die Bemessung nur als grobe Näherung erfolgen. Diese Tatsache ist im Buch nachdrücklich betont und es wird hervorgehoben, daß eine äußerst genaue Berechnung, infolge der unsicheren Grundgaben, illusorisch ist. Die unvermeidliche Ungenauigkeit der Berechnungen wird dadurch verringert, daß über die behandelten Probleme Ansichten und empirische Angaben von mehreren anderen Autoren mitgeteilt werden, so daß der Leser unter mehreren Lösungsalternativen wählen kann.

Der letzte Abschnitt, der die Bemessung des Fundamentenkörpers behandelt, befaßt sich auch mit der Bemessung der symmetrisch und antimetrisch belasteten kreis- und kreisringförmigen Fundamente sowie mit der elastischen und plastischen Berechnung der kegelförmigen Gründungen. Die Abschnitte des Buches sind mit einem reichlichen Literaturverzeichnis versehen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das Buch ein ausgezeichnetes Werk ist, das durch die klare und leichtverständliche Behandlung der vielfältigen Probleme der turmförmigen Gründungen in erster Linie für die Entwurfpraxis eine wertvolle Hilfe darbietet.

L. Palotás

INDEX

S. Dékány, 1904—1974 193

L. Kator, 1932—1974 195

Benedikt, O.: Der Vergleich des sich auf den Motorbetrieb der fremderregten Gleichstrommaschine beziehenden stationären, strukturellen Schemas und der entsprechenden mechanischen Kennlinien — Comparison of the Stationary Structural Schema of the Separately Excited D. C. Machine in Motor Operation with the Corresponding Mechanical Characteristics — *Бенедикт О.* Сравнение стационарны структурныk схем, действительных для машин постояного тока с независимым возбужлением в случае двигательного режима, и соответствуюших механических характеристик 197

Terplán, Z.: Vergleich der Zahnrad-Planetengetriebe — Comparison of Planetary Gear Drives — *Терплан З.*: Сравнение зубчатых планетарных механизмов. 225

Kozák, M.: An Approximate Method to Calculate the Effect of Levee Breaches upon Flooding of Rivers Having a Compound Section — Näherungsrechnung von Dammbrüchen zusammengesetzter Flußbetten — *Козак М.*: Приближенный расчет прорыва противопаводковых дамб в случае сложных русел. 235

Janositz, J.: Die Schätzung von Einfachen- und Doppelintegralen aufgrund geschichteter Probeentnahme — Estimation of Simple and Double Integrals by Stratified Sampling — Оценка однократного и двойного интегралов на основе послойного отбора проб. 249

Pethő, Sz.: Kennzeichnung von Trennvorgängen mittels Funktionen des Ausbringens und des Wirkungsgrades — Evaluation of Separating Operations by Yield and Efficiency — *Петэ С.*: Оценка операций разделения с помощью функций выхода и коэффициента полезного действия. 265

Kolonits, F.: Compensation of Flash Temperature on Spur Gears — Blitztemperaturausgleich bei geradverzahnten Evolventenrädern — Уравнивание температуры молнии в случае прямозубых эвольвентных зубчатых колес. 279

Gádor, L.: Thermal Non-Linearity — Thermische Nichtlinearität — *Гадор Л.*: Термическая нелинейность. 299

Beck, T.: Influence of Fiber Geometry on the Punching Force Characteristics of Webs During Needle Felting — Der Einfluß der Fasergeometrie auf die Kenngrößen der Nadelkraft der Vliese im Verlauf der Nadelverfilzung — *Бек Т.*: Применение нитевой геометрии — в процессе сбивания иглой — для характеристики усилия стегания ватки. 313

Terplán, Z.: Wirkungsgrad der Zahnrad-Planetengetriebe — On the Efficiency of Planetary Gear Drives — *Терплан З.*: Кпд зубчатых планетарных механизмов. 331

Csonka, P.: Axisymmetrically Loaded Paraboloid Shells of Revolution on Star-Polygon Base — Achsensymmetrisch belastete Rotationsparaboloidschalen mit sternförmigem Grundring — *Чонка П.*: Центрально симметрично нагруженные оболочки в виде параболоида вращения с планом в виде звездчатого многоугольника. 341

Máttyus, S.: Die Hohlraumbildung als Folge des plötzlichen Abstellen von Pumpen — Formation of Cavities due to the Sudden Stopping of Pumping Plants — *Матьюш М.*: Образование пустого пространства от внезапного останова насоса. 361

Lipka, I.—Szőke, B.: Abwälzverfahren zur Herstellung eines Fingerfräsers für zylindrische Schrägzahnräder — Generation of the End Milling Cutters for Helical Gears. I. The Surface of the End Mill — *Липка И., Секе Б.:* Изготовление обкаткой концевой фрезы косозубых цилиндрических колес, I. Поверхность концевой фрезы. 411
Reményi, K.—Vörös, L.: Kohlenstaubfeuerung nach dem Wirbelschicht-Verfahren — Pulverized Coal Firing with Fluidization — *Ретени К., Вереш Л.:* Пылеугольное отопление флюидизационным методом. 439
Singer, D.: An Efficient Computer Method for Optimal Control of Gas Networks — Eine leistungsfähige Methode zur Bestimmung der optimalen Arbeitsverhältnisse von Gasnetzen — Эффективный метод оптимизации эксплуатационных условий газовых сетей с помощью ЭВМ. 449

BOOK REVIEWS

Betontechnische Berichte 1973 (Palotás, L.) 465
Franz, G.: Betonkalender 1975 (Csonka, P.) 466
Kubinstzky, M.: Ungarische Lokomotiven und Triebwagen (Terplán, Z.)..... 467
Varga, L.—Kaliszky, S.: Gründung turmartiger Bauwerke (Palotás, L.) 468

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária
A kézirat nyomdába érkezett: 1975. VII. 11. — Terjedelem: 24,50 (A/5) ív 94 ábra

76.2065 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *197—224*

BENEDIKT, O.: *Comparison of the Stationary Structural Schema of the Separetely Excited D. C. Machine in Motor Operation with the Corresponding Mechanical Characteristics.*

The author describes the phenomena in the separately excited d.c. machine by traditional sets of characteristics on the one hand, and on the base of the stationary structural schema, elaborated by him, on the other hand. He concludes that all those relations the representation of which needs five sets of characteristics can be clearly shown on one stationary structural schema. This schema puts into evidence not only these relations, but also the underlying physical states and phenomena, and in many cases it points to facts to which are important also for the operational practice and are not shown at all by the characteristics or where the characteristics may cause certain misunderstandings.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *225—234*

TERPLÁN, Z.: *The Efficiency of Planetary Gear Drives.*

The planetary gear drives are always composed from six basic types, but each basic type may also used as a gear drive by itself. The comparison signifies which basic type can be used, for the required kinematical conditions of operation, with 1 or with 2 degrees of freedom or, if several basic types are possible, which one is optimal. The author unites the POPPINGA limit of disproportionaliy with the MAGIDOVICS optimum. With this combination the nomogram of the kinematic function can be combined on a relatively simple figure with the POPPINGA functions of the optimum designs. The permitted disproportionality marks the limits of the ratio of tooth numbers of the basic types. The curves quickly inform on the possibilities of realizations with equal kinematical conditions, on the selection of the optimum basic type, and on the possible lower efficiency.

Acta Techn. Hung. 81 (1975) *235—248*

KOZÁK, M.: *An Approximate Method to Calculate the Effect of Levee Breaches Upon Flooding of Rivers having a Compound Section*

The aim of this paper on to introduce a new approximate method of unsteady flow in channels having a compound section, with particular regard in showing the effect of levee breaches upton the flow. The main feature of the method consists in separately applying the continuity and dynamic equations upon the main channel and the flood plain. Also, the same water level is assumed to appear over the entire cross section, presupposing a linear discharge expressing the crosswise water exchange between main channel and flood plains. The levee breach is assumed to have an elementary length. Throughout the process the flood plain is assumed to be covered by an unbroken layer of water.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *249—264*

JANOSITZ, J.: *Estimation of Simple and Double Integrals by Stratified Sampling*

When making within a range n elementray observations of a characteristic, from the observations its mean value can be estimated. The incertainty of the estimation decreases with increasing n for two reasons: on the one hand, when increasing the number of observations the deviation of the mean from the expected value stochastically converges to zero. On the other hand, by densifying the observations within the range the characteristic is known in points ever closer to each other. Hence the difference of the mean value and the average value of the integral converges to zero also causally. In the stratified sampling of simple and double integrals the action of the two convergencies conbines. The author deduces relations for the dispersion of the mean value which can be used in most prectical cases and which take into account the effect of both the causal and the stochastic convergencies.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *265—277*

PETHŐ, SZ.: *Evaluation of Separating Operations by Yield and Efficiency*

The Tromp-diagram serves to show the variations of yield at the separation of granular materials as a function of their physical characteristics. Together with the parameters which can be read on the diagram, it serves for evaluating the operation of the separation installation. The combined influence of installation operation and of granular material composition, i.e. a given separating operation can be judged on the base of the proposed yield and residue curves established dependingon the concrete values of the characteristic or from the efficiency curve and the relevant parameters.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *279—297*

KOLONITS, F.: *Compensation of Flash Temperature on Spur Gears*

Several theories have been developed for explain ing failure by seizure of spur gears and for reducing this danger. According to one of the most widely accepted ideas the maximum contact temperature in the contact band is decisive, this must be reduced to the minimum possible (its value is the sum of the gear body temperature and the so-called contact flash temperature). In the Ganz-Botka toothing system the basic, principle is the balancing of the maximum flash temperatures before and after the pitch point: in this way their minimization is striven for. In the present paper the practical method of compensating, i.e. the concrete determination of the gearing parameters are examined for straight toothings.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *299—312*

GÁDOR, L.: *Thermal Non-Linearity*

In metallic type electrical-conductors the linear relation between current and voltage also breaks down because of the heating of the conductor traversed by the current. In an a. c. circuit this phenomenen also leads to the generation of upper harmonics. The thermal inertia of the system moderates the variations within one period and this permits to linearize the oscillations and to establish very simple relations. As a practical utilization of the thermal non-linearity the voltage-sensing circuit of the automatic voltage regulator used in the Hungarian network has been realized.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *313—329*

BECK, T.: *Influence of Fiber Geometry on the Punching Force Characteristic of Webs During Needle Felting*

A small needle loom assembly (consisting of a needle board, stripper and a bed plate unit) mounted on an Instron tonsile tester was used to measure the punching forces generated during the needling process. It was found that fiber linear density has a profound effect on the punching force of polyester fiber webs, while surface roughness, cross-sectional shape, length and crimp seemed to have littleor no effect on the punching force values. However, the interaction and length had a significant influence on the punching force. Measurements of the punching force in successive cycling experiments showed that, in addition to fiber linear density, fiber length, crimp and cross-sectional shape also significantly affected the recovery behavior of the reoriented fibers.

Acra Techn. Hung. 81 (1975), *331—340*

TERPLÁN, Z.: *On the Efficiency of Planetary Gear Drives*

The base of the examination of the efficiency of the planetary gear drive can be reduced to analysis of *six* basic gear types. The present paper gives a simple summary of the apparently complicated results of the author, published elsewhere in detail: three types of formulae and five tables; then the results are presented on the combined nomograms of the basic types, by tracing the straight referring to some constant values of planetary gear efficiency which is worse than the gear wheel-like operation.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *341—359*

CSONKA, P.: *Axysimmetrically Loaded Paraboloid Shells of Revolution on Star-Polygon Base*

The paper deals with the determination of the membrane forces in shells erected over a star-polygonal base, loaded by axisymmetrically distributed continuous system of vertical forces, as dead load and uniformly distributed snow load. As an approximate solution of the problem, author establishes the stress function by a linear combination of three auxiliary functions. All these functions are associated with axisymmetrically distributed vertical load systems that exactly satisfy the edge conditions of the problem. For the case of dead load, the paper presents tables containing the expedient values for the unknown coefficients of the linear combination. For uniformly distributed snow load, the exact solution may be found by simple closed formulae.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *361—410*

MÁTTYUS, S.: *Formation of Cavities due to the Sudden Stopping of Pumping Plants*

The paper discuses the conditions for the formation of cavities when a pump suddenly stops. Supported by theoretical co ısiderations, it deduces the law for the beginning, the development and the collapsing of a cavity. The phenomena arising with horizontal, upward inclined and vertical pipes are dealt with separately, separated into simple elements easy to be dealt with and solved individually, using numerical examples. Some experiments are presented and explanations are souath for-to observe phenomena.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *411—437*

LIPKA, I.—SZŐKE, B.: *Generation of the End Milling Cutters for Helical Gears Part I. The surface of the End Mill*

The only tool for producing the herringbone gears transmitting heavy shock loads in steel rolling mills, are end milling cutters. The present proposes for their production a cylindrical instead of a disc-like grinding or milling tool or a straight single-edged tool. In general, the generatrics of the tooth flanks of the helical toothing, rotated around the axis of the cutter, describe a hyperboloid surface which envelopes the surface of the end cutter. When using a cylindrical grindig or milling tool, the situation is more complicated because, when rotating a single tooth generatrix, not a single hyperboloid, but according to the generatrics of the cylindrical tool, a series of hyperboloids is produced. Consequently, the surface of the end mill is not the enveloping surface of the continuously generated series of hyperboloids. The present paper deals with the analytics of this geometrical configuration.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *439—447*

REMÉNYI, K.—VÖRÖS, L.: *Pulverized Coal Firing with Fluidization*

The paper presents results of fluidization firing investigation in an experimental plant. The experiment confirms that an extraordinarily high heat transfer coefficient can be obtained with this firing method and it also presents a basis for research objectives. It is considered that further detailed research will make possible the realization of new boiler designs and that favourable results might be obtained in environmental protection.

Acta Techn. Hung. 81 (1975), *449—464*

SINGER, D.: *An Efficient Computer Method for Optimal Control of Gas Networks*

The paper deals with the optimization of non-linear networks and explains the theoretical basis of a method for minimization of losses on gas networks by simultaneous stabilization of all node pressures with a prescribed tolerance limit. The method takes into account the differences in geodatical altitudes of the individual nodes. The description of the program, elaborated by the authors for practical purposes, is given. The application of the program is demonstrated on an illustrative example enabling to estimate the economical consequences of the optimal control of gas networks.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 32.00 a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Account No. 218 10990) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 32.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 compte courant No. 218 10990) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
1051 Budapest
Münnich Ferenc u. 7.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 32.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (1389 Budapest 62, P.O.B. 149 Текущий счет № 218 10990) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

AUSTRALIA

C. B. D. Library and Subscription Service
Box 4886, G. P. O.
Sydney N. S. W. 2001

Cosmor Bookshop
145 Acland St.
St. Kilda 3182

AUSTRIA

Globus
Höchstädtplatz 3
A—1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
1050-Bruxelles

Du Monde Entier
162 Rue du Midi
1000—Bruxelles

BULGARIA

Hemus
Bulvar Ruszki 6
Sofia

KANADA

Pannonia Books
P. O. Box 1017
Postal Station "B"
Toronto, Ont. M5T 2T8

CHINA

C N P I C O R
Periodical Department
P. O. Box 50
Peking

CZECHOSLOVAKIA

Mad'arská Kultura
Národní třida 22
115 66 Praha

PNS Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2

PNS Dovoz tlače
Bratislava 2

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
DK—1165 Copenhagen K

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
P. O. Box 128
SF—00101 Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48 Rue Gay Lussac
Paris 5

Librairie Lavoisier
11 Rue Lavoisier
Paris 8

Europeriodiques S. A.
31 Avenue de Versailles
78170 La Celle St. Cloud

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Haus der Ungarischen Kultur
Karl-Liebknecht-Strasse 9
DDR—102 Beriin

Deutsche Post
Zeitungsvertriebsamt
Strasse der Pariser Kommüne 3—4
DDR—104 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
P. O. Box 40
Hythe Bridge Street
Oxford OX1 2EU

Collet's Holdings Ltd.
Denington Estate
London Road
Wellingborough Northants NN8 2QT

Bumpus Haldane and Maxwell Ltd.
5 Fitzroy Square
London W1P 5AH

Dawson and Sons Ltd.
Cannon House
Park Farm Road
Folkestone, Kent

HOLLAND

Swets and Zeitlinger
Heereweg 347b
Lisse

Martinus Nijhoff
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

India Book House
Subscription Agency
249 Dr. D. N. Road
Bombay 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
20124 Milano

Libreria Commissionaria Sansoni
Via Lamarmora 45
50121 Firenze

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo 160—91

Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 5050
Tokyo International 100—31

Nauka Ltd.—Export Department
2—2 Kanda
Jinbocho
Chiyoda-ku
Tokyo 101

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgatan 41—43
Oslo 1

POLAND

Węgierski Instytut Kultury
Marszalkowska 80
Warszawa

BKWZ Ruch
ul. Wronia 23
00—840 Warszawa

ROUMANIA

D. E. P.
Bucureşti

Romlibri
Str. Biserica Amzei 7
Bucureşti

SOVIET UNION

Sojuzpechatj — Import
Moscow
and the post offices in each town

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almqvist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

A. B. Nordiska Bokhandeln
Kunstgatan 4
101 10 Stockholm 1 Fack

SWITZERLAND

Karger Libri AG.
Arnold-Böcklin-Str. 25
4000 Basel 11

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood, Mass. 02090
Stechert-Hafner Inc.

Serials Fulfillment
P. O Box 900
Riverside N. J. 08075

Fam Book Service
69 Fifth Avenue
New York N. Y. 10003

Maxwell Scientific International Inc.
Fairview Park
Elmsford N. Y. 10523
Read More Publications Inc.
140 Cedar Street
New York N. Y. 10006

VIETNAM

Xunhasaba
32, Hai Ba Trung
Hanoi

YUGOSLAVIA

Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

Forum
Vojvode Mišića 1
21000 Novi Sad

25. II. 1976

Index: 26.025