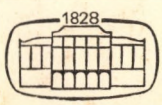
ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 73
FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1972

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
LÉVAI ANDRÁS

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, négy füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 16.00.

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS 73

INDEX

Antal, K.—Bolla, I.: Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium — Photoionisation außerhalb des termischen Leichtgewichts in Rauchgas Kalium-Arbeitsmedien — *Антал, К., Болла, И.:* Фотоионизация вне термического равновесия в магнитогидродинамической среде дымосых газав с калием 460

Barta, E.: Reflexionsmessung im Infraroten zur Kennzeichnung von diffundierten Schichten — Infrared Reflextometry for Characterizing Diffused Layers — *Барта, Э.:* Измерение рефлексии в ИК спектре для характерис³ики диффундированных слоев 445

Benedikt, O.: Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter magnetischer Kreise bei der Anwendung der elektronischen Rechenmaschine — The Nomographic Computation of Complicated Magnetic Circuits with Computer — *Венедикт, О.:* Комбинация номографического метода расчета сложных магнитных цепей с применением електронной вычислительной машины 3

Budincsevits, A.: Dispenser Cathodes with High Current Density — Vorratskathoden mit hoher Stromdichte — *Будинчевич, А.:* Катоды с непрерывным восстановлением активного слоя и большой плотностью тока 83

Dey, D. K.—Das, A. K.: Thermal Stresses in a Finite Transversaly Isotropic Hollow Circular Cylinder Heated on the Outer Curved Surface and with Ends in Contact with Smooth Insulating Plates — Wärmespannungen in einem endlichen, in der Querrichtung isotopen, an flache Wärmeisolierungsplatten anstoßenden und an der gekrümmtend Außenfläche erwärmten leeren Kreiszylinder — *Дей, Д. К., Даш, А. К.:* Термическая напряжение в некотором конечно изотропном по поперечному сечению полом круглом цилиндре, нагреваемом на его внешней кривой поверхности и соприкасающемся на его концах с плоскими термоизоляционными пластинами 434

Dzięcielak, R.: On the Determination of the Constants of a Consolidating Medium — Über die Ermittelung der Festwerte eines Befestigungsstoffes — *Дзицилак, Р.:* Определение постоянных некоторого усилителя 427

Erdélyi, E. A.: Magnetic Fields in Nonlinear Heteropolar Rotating Machines — Magnetische Felder in nichtlinearen, heteropolaren Drehmaschinen — *Эрдеи, Э.:* Магнитные поял в нелинейных гетерополярных вращающихся машинах 291

Falk, S.: Ein einfaches Iterationsverfahren zur Bestimmung der Eigenwerte eines Hermiteschen (reellsymmetrischen) Matrizenpaares — A Simplified Successive Approximation Method for Determination of the Eigenvalues of Hermite's (Real Symmetric) Pair of Matrices — *Фалък, Ш.:* Простой итерационный методй определения собственных значений матричной пары ГЕРМИТЕ (веществено симетричной) 325

Geszti, P. O. — *Patkó, J.* : Overhead Lines with Insulated Phase Conductors — Freileitungen mit isolierten Phasenleitern — *Гесши, П. О., Пашко, Я.:* Линия воздушной электропередачи с изолированными фазовыми провдоами 265

Hajdu, L.—Zahorán, J.: Recent Research Results in the Field of Hermetically Sealed Miniature Zinc-Silver Storage Batteries — Neue Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der hermetisch verschlossenen Miniatur-Zink-Silber-Akkumulatoren — *Хайду, Л., Захоран, Я.:* Новые результаты исследований в области герметизированных серебряно-цинковых аккумуляторов 117

Horváth, L.: Determination of the Optimum Number of Filter Plates for Filter Presses — Bestimmung der optimalen Anzahl der Filterplatten von Filterpressen — *Хорват, Л.:* определение оптимального числа фильтрующих элементов пресс-фильтров 209

Horváth, L.: Role of Cost Factors in the Optimisation of Filter Presses Operating at Constant Pressure — Die Rolle der Kostenfaktoren bei der Optimierung der Filterpressen mit konstantem Druck — *Хорват, Л.:* Роль факторов расходов при оптимализации пресс-фильтров постоянного давления 253

Huszthy, L.: Gear Calculation by Using Complex Expressions — Komplexe Schreibweise im Entwerfen von Zahnrädern — *Хусти, Л.:* Комплексное представление зубчатых колес при их проектировании 360

Michelberger, P.: Berechnung der durch die Fertigungsungenauigkeiten des Fahrgestells hervorgerufenen Montagespannungen mit Hilfe des Matrizen-Kraftgrößen-Verfahrens — Calculation of Mounting Stresses Induced by Inaccurate Manufacturing of Vehicle Frameworks with the Aid of the Matrix Force Methods — *Михельбергер, П.:* Расчет напряжений, образующихся при сборке от неточного изготовления конструкций транспортных средств 333

Muspratt, M. A.: Numerical Analysis of Circular Orthotropic Plates — Numerische Analyse von kreisförmigen orthotropen Platten — *Муспрат, М. А.:* Числовой анализ круглых ортотропных пластин 397

Mrs. K. Pásztor-Varga: On Some Minimizing Algorithms of Boolean Functions — Über einige Algorithmen für die Minimierung von Booleschen Funktionen — *Пастор, Э.:* О нескоторых минимализирующих алгоритмах функций Буля 316

Prohászka, J.: Determination of the Stereographis Pole Figures of Hexagonal Crystals without Plotting — Bestimmung der stereographischen Polbilder von hexagonalen Kristallen ohne Zeichnen — *Прохаска, Й.:* Определение без черчения стереографической конфигурации гексагональных кристаллов 278

Reményi, K.: Influence on the Ignition of the Injected Fuel Exerted by Heat Transfer and Material Motion — Über die Wirkung der Wärme- und Stoffbewegung auf die Entzündung des aus dem Brenner strömenden Brennstoffes — *Ремени, К.:* О воздействии движения тепла и материала на воспламенение топлива, итекающего из форсунки 143

Reményi, K.: Analysis of Ignition Problems Concerning Stability of Burners in Pulverized Coal Combustion Systems — Analyse von Zündungsfragen in einer Staubkohlenfeuerung mit Rücksicht auf die Brennerstabilität — *Ремени, К.:* Анализ проблем воспламенения, возникающих в случае пылеугольных топок, с точки зрения стабильности пылеугольных горелок 237

Roósz, A.—Fuchs, E.: Auflösung eutektischer Phasen während des Lösungsglühens in Gußlegierungen — Kinetics of the Dissolution of Eutectic Phases in Cast Alloy Structures — *Рос, А., Фукс, Е.:* Кинетика растворения эвтектических фаз в структуре литых сплавов 195

Sebők, F.: Statische Untersuchung einer längsversteiften Tonnenschale mit gelenkigem Kreisrand durch Anwendung Fourierscher Reihen — Design Analysis for a Hi ged Circular Cylinder with Axial Ribs by the Fourier Series Method — *Шебек, Ф.:* Статическое исследование цилиндрической оболочки с продольной жесткостью и с шарнирным круговым краем, применяя ряды Фурье 408

Singer, D.: Network Theory of Bar Structures — Über die Netzwerktheorie der Stabkonstruktionen — *Сингер, Д.:* О сетевой теории стержновых конструкций 217

Szabó, J.—Rózsa, P.: Große Verschiebungen von Stabkonstruktionen — *Большие смещения стержневых конструкциий* 53

Szőke, B.: Elastische Schwingungen in Wälzlagern, II. Teil — Elastic Vibrations in Rolling Bearnings, Part II. — *Сёке, Б.:* Эпастичные колебания подшипников качения, II. Вращающаяся масса не уравновешена относительно своей собственной оси 61

Varga, L.: Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally Anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function — Behandlung der Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Material mittels Einführung der Verschiebungsfunktion — *Варга, Л.:* Трактовка теории изгиба цилиндрических оболочек из ортогонально анизотропного конструкционного материала 175

Weber, Gy.: New Method for the Determination of Difference Operators for Plates and Grids — Ein neues Verfahren zur Ermittelung von Differenzoperatoren in Zusammenhang mit Platten und Trägerrosten — *Вебер, Д.:* Новый метод определения дифференицальных операторов в связи с плитами и балочными решетками 97

Zámbó, J.—Molnár, L.: Causes of the Partial Dissolution of the Vanadium Content in the Bayer Processing of Hungarian Bauxites — Ursachen des teilweisen Inlösungsgehens des Vanadiumgehalts bei der Verarbeitung der ungarischen Bauxite nach dem Bayer-Verfahren — *Замбо, Я., Мольнар, Л.:* Причины растичного растворения содержания ванадия при переработке венгерских бокситов методом Байера 151

RECENSIONES

Bogárdi, J. L.: Sediment Transportation in Alluvial Streams (Starosolszky, Ö.)..... 471

Beton-Kalender 1971, Taschenbuch für Beton u. Stahlbetonbau und die Verwandten Fächer (Csonka, P.)..... 472

Sályi, I.: Technische Mechanik Band 1. Elemente der Kinematik (Cholnoky, T.)..... 470

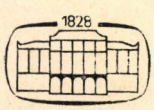
Szabó, J.—Roller, B.: Theorie und Berechnung der Stabkonstruktionen (Rosznay, Á.) 469

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 73



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1972

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 3—51 (1972)

DIE NOMOGRAPHISCHE METHODE DER BERECHNUNG KOMPLIZIERTER MAGNETISCHER KREISE BEI DER ANWENDUNG DER ELEKTRONISCHEN RECHENMASCHINE

O. BENEDIKT*

ORD. MITGLIED DER UNG. AKADEMIE DER WISS.

[Eingegangen am 8. Mai 1972]

Autor ist es vor kurzem gelungen, die Möglichkeit der Anwendung seiner nomographischen Methode — die er in seinem Buche: »Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter und stark gesättigter magnetischen Kreise elektrischer Maschinen« (Akademieverlag 1960) beschrieben hat — an elektronischen Rechenmaschinen auszuarbeiten und hiedurch diese Methode qualitativ stark weiter zu entwickeln. Zwecks Beleuchtung der Bedeutung dieser Tatsache stellt Autor in seinem Artikel in komprimierter Form zuerst die Mängel der bisher gelehrten klassischen Berechnungmethoden dar und zeigt nachher auf, wie diese Mängel mit Hilfe seiner nomographischen Methode in einfacher Weise behoben werden können. Hierauf zählt er kritisch die bisher angewendeten Methoden der Berechnung gesättigter magnetischen Kreise mit Hilfe der Anwendung elektronischer Rechenmaschinen auf. Er zeigt jene Schwierigkeiten auf, die die Anwendung seiner nomographischen Methode an Rechenmaschinen bisher praktisch verhinderte. Schliesslich erläutert Autor die von ihm vor kurzem entdeckte Möglichkeit, die erwähnte Schwierigkeiten in einfacher Weise zu überwinden.

Einleitung

Im Jahre 1960 erschien im Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ein Buch des Autors unter dem Titel »Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter und stark gesättigter magnetischer Kreise elektrischer Maschinen«.

Nun ist es *Zweck des vorliegenden Aufsatzes* zu zeigen, daß es dem Autor innerhalb der letzten Monate gelungen ist, die im erwähnten Buche ausführlich sowohl theoretisch als auch an Hand vieler praktischer Beispiele erläuterte *nomographische Methode dadurch sprungartig weiter zu entwickeln, daß die im Buche aufgezeigten neuartigen Zusammenhänge und die auf ihrer Grundlage abgeleiteten, der Lösung kompliziertester Probleme dienenden, einfachen Instruktionen auf eine elektronische Rechenmaschine übertragen werden können.* Hierdurch wird der zeitliche Ablauf der notwendigen nomographischen Verfahren in außerordentlich hohem Maße weiter verkürzt und die in der physischen und geistigen Sphäre des Berechners liegenden Fehlerquellen sehr stark verringert.

* Prof. Dr. O. BENEDIKT, Szépvölgyi u. 4/b Budapest, II., Ungarn

Um die praktische Bedeutung der Möglichkeit, die Vorteile der nomographischen Methode mit denen der Benützung der elektronischen Rechenmaschine zu verbinden, voll würdigen zu können, *ist es notwendig, den Leser vorher an die wichtigsten Ergebnisse des erwähnten Buches zu erinnern.* Auf diese Weise möge ihm bewußt werden, welch große Vorteile gegenüber den bisher unterrichteten »klassischen« Methoden der Berechnung der magnetischen Kreise elektrischer Maschinen die im erwähnten Buche abgeleiteten neuen Methoden bedeuten, die wir zum Unterschied von den am Ende des vorliegenden Aufsatzes erwähnten »maschinellen« Methoden vorläufig als „manuelle" nomographische Methoden bezeichnet werden.

Im folgenden sollen in sehr komprimierter Weise die wichtigsten wissenschaftlichen Ergebnisse des erwähnten Buches aufgezählt werden.

A. Die sich infolge der magnetischen Sättigung bei komplizierten Konfigurationen ergebenden Schwierigkeiten der klassischen Methoden der Berechnung magnetischer Kreise

1. Bild A1 zeigt schematisch Beispiele für verschiedene Gestalten ferromagnetischer Körper, die praktisch in elektrischen Maschinen vorkommen. Hierbei handelt es sich vorläufig nur um jene allereinfachsten Grundgestalten, die dadurch gekennzeichnet sind, daß der Querschnitt längs der Höhe konstant bleibt (Bild A1, a) oder, wie in sämtlichen anderen Fällen, sich monoton nur

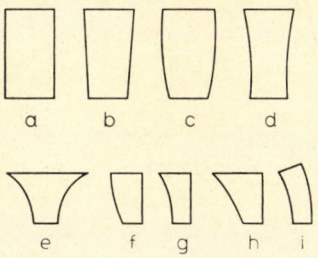


Bild A1

in einer bestimmten Richtung ändert. Selbst in diesen einfachsten Fällen gibt es nur einen einzigen Fall, in dem die Frage der geometrischen Konfiguration für die klassischen Methoden keine Schwierigkeiten bedeutet. Dies ist der quaderfömige Körper gemäß Bild A1, a. Bezeichnen wir nämlich den überall konstanten Querschnitt mit Q und die Höhe des Körpers mit h, ferner den hindurchgehenden magnetischen Fluß mit Φ und die durch letzteren längs der Höhe sich ergebende magnetische Spannung mit V, so können wir die

gegebene magnetische Kennlinie $H = f(B)$ der benützten Eisensorte auch als Kennlinie

$$\frac{V}{h} = f\left(\frac{\Phi}{Q}\right) \tag{A,1}$$

auffassen und derart für einen quaderförmigen Körper mit beliebigen Dimensionen sofort zum gegebenem Wert Φ die entsprechende Größe V bestimmen (oder umgekehrt).

Für sämtliche der übrigen der im Bild A1 dargestellten Fälle von b) bis i) ist aber diese Methode nicht mehr anwendbar, da sich ja Q längs der Höhe ändert. Nehmen wir vorläufig den dem Bild A1, b entsprechenden Fall

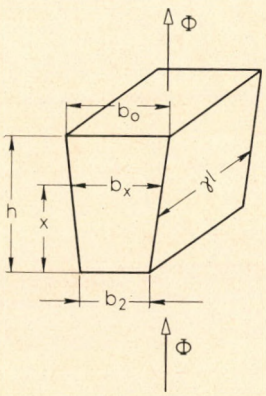


Bild A2

eines keilförmigen Körpers, (Bild A2) der die Höhe h und die Länge $\gamma \cdot l$ besitzen möge, wobei γ den Eisenfüllfaktor darstellt. Die Breite b_x möge mit der Höhe x des betreffenden Querschnittes linear von der kleinsten Breite b_2 bis zur größten b_0 zunehmen.

Selbst in diesem einfachsten Falle besteht im allgemeinen die klassische Rechenmethode der Berechnung der vom Fluß Φ erzeugten magnetischen Spannung V darin, daß der Körper in eine bestimmte Anzahl von aufeinander folgenden Teilen zerstückelt, diese als quaderförmig aufgefaßt, auf Grund der Gleichung (1) für jeden mittleren Querschnitt und die angenommene Teilhöhe die entsprechende Teilspannung bestimmt und letztere summiert werden. Wie im erwähnten Buche nachgewiesen wurde, sind bei dieser Methode, wenn man genaue Resultate erzielen will, mindestens etwa 18 Rechenoperationen durchzuführen.

Besteht aber die Aufgabe darin, zum gegebenen Wert V jene Größe Φ zu bestimmen, die ihm bei der gegebenen Konfiguration entspricht, so ist es

offenbar notwendig, die obenerwähnte umständliche Rechnung für verschiedene angenommene Werte Φ solange zu wiederholen, bis sich der gegebene Wert V ergibt. Hiebei ergibt sich die genügende Genauigkeit erst nach etwa 44 Rechenoperationen.

2. Noch größere Schwierigkeiten treten auf, wenn — was den allgemeinen Fall darstellt — gemäß Bild A3 eine Nut parallel zum ferromagnetischen Körper (Zahn) geschaltet ist, wobei wir wieder vom einfachsten Falle ausgehen wollen, in dem der Zahn keilförmig ist und die Nut parallele Wände besitzt. Bezeichnen wir die Breite der letzteren mit b, ferner den aus dem Zahn und zwei benachbarten Nuthälften bestehenden als den der Nutenteilung τ_n entsprechenden Zahn-Nut-Bereich, so verteilt sich der durch die letzteren hindurchgehende Fluß Φ_τ gemäß Bild A4 auf einen Zahnfluß Φ_x und einen Nutenfluß Φ_{nx}, wobei sich deren Werte mit wachsender Höhe x in sehr kom-

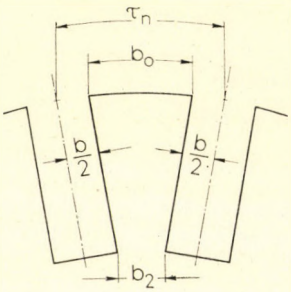


Bild A3

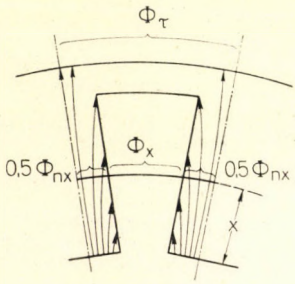


Bild A4

plizierter Weise ändern. Die klassische Methode zerteilt in diesem Falle, wenn sie aus Φ_τ den entsprechenden Wert V berechnen will, den Zahn-Nut-Bereich analog zu der im Punkte 1 dargelegten Methode in eine Reihe von längs der Höhe einander folgenden Teilbereichen. Da aber in diesem Falle außerdem für jeden der letzteren das der Höhe x entsprechende Verhältnis von Φ_x/Φ_{nx} bestimmt werden muß, von dem der entsprechende Teil der Größe V abhängt, wächst die Zahl der notwendigen Rechenoperationen weiter stark an. Gemäß dem im Punkte 1 Gesagten wird ihre Zahl noch weit größer sein im Fall der umgekehrten Aufgabe, aus einem gegebenen Werte V den entsprechenden Wert Φ_τ zu bestimmen.

3. Nun ist aber mit dem erwähnten Zahn-Nut-Bereich in elektrischen Maschinen im allgemeinen noch der entsprechende Teil eines Luftspaltes magnetisch in Reihe geschaltet, so daß es sich für den Berechner nicht um einen Zahn-Nut-Bereich, sondern um den im Bild A5 dargestellten Zahn-Nut-Luftspalt-Bereich *1—2—3—4—1* handelt. Besitzt der Luftspalt an dieser Stelle die Dicke δ, so vergrößert sich die vom Fluß Φ_τ erzeugte Spannung noch

um einen der Größe δ und dem Carterschen Koeffizienten entsprechen Wert, der zusammen mit V die zwischen der Polfläche und dem Zahngrund wirkende Spannung ergibt, die wir mit V_0 bezeichnen wollen. Offenbar wird nunmehr die Aufgabe, aus dem gegebenen Wert V_0 den Wert Φ_τ zu bestimmen, noch weit schwieriger, als die im Punkte *2* erwähnte Aufgabe, zu einem gegebenen Wert V die Größe Φ_τ zu berechnen. Denn im Falle des Bildes A5 wissen wir

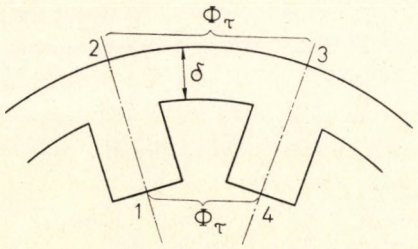


Bild A5

ja erst gar nicht, wie sich V_0 auf den Luftspalt und auf den Zahn-Nut-Bereich aufteilt, das heißt, es ist nicht nur Φ_τ sondern auch V unbekannt. Letztere Schwierigkeit zeigt sich besonders in jenen häufigen Fällen, in denen die Breite des Luftspaltes sich längs des Umfanges des Läufers verändert (Bild A6). Um in diesem Fall die Verteilung der Luftspaltinduktion längs des Um-

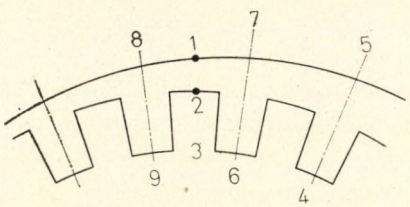


Bild A6

fanges zu ermitteln, ist es notwendig, für jede Nutenteilung diese Berechnung getrennt durchzuführen. Stellen wir uns vor, daß wir für den Zahn-Nut-Luftspalt-Bereich *6—7—8—9* festgestellt haben, wie sich V_0 zwischen den Punkten *1* und *2* bezw. *2* und *3* aufteilt und schließlich den durch diesen Bereich hindurchgehenden Fluß Φ_τ bestimmt haben. Dann ist offenbar der analog durch den benachbarten Zahn-Nut-Luftspalt-Bereich *4—5—7—6* hindurchgehende Fluß kleiner als Φ_τ, da ja der magnetische Widerstand des Zahn-Nut-Bereiches derselbe, aber der mit diesem in Reihe geschaltete magnetische Widerstand des betreffenden Luftspaltteiles größer geworden ist.

Wenn also sich unter dem sich verändernden Luftspalt gleichzeitig viele Nutteilungen befinden, so erkennen wir leicht, daß eine so wichtige Aufgabe, wie z.B. die der Bestimmung der Verteilung der Luftspaltinduktion längs des Läufers einer Gleichstrommaschine für die klassischen Berechnungsmethoden sogar bei Leerlauf einen ganz außerordentlich großen Arbeitsaufwand bedeutet. Ist die erwähnte Verteilung auch für verschiedene Belastungszustände festzustellen, so erfordert jede Belastung eine für sämtliche Nutenteilungen vollkommen neue Berechnung, da ja nunmehr in irgendeiner beliebigen Entfernung $\pm y$ von der Polmitte anstatt der Spannung V_0 die Spannung $V_0 \pm yA$ wirkt, wobei A die auf 1 cm Ankerumfang entfallende Amperebelastung darstellt.

4. In all den bisher erwähnten Fällen handelte es sich um die Bestimmung der magnetischen Spannung, die einem bestimmten Fluß entspricht (oder umgekehrt), also um eine Aufgabe, die der Berechnung der einem elektrischen Strom entspechenden Spannung (oder umgekehrt) analog ist. Während aber im allgemeinen die letztere Aufgabe leicht ist, weil die Formen der elektrischen Widerstände als verhältnismäßig einfach und ihre Größe im allgemeinen als konstant angenommen werden können, zeigt sich, daß die analoge magnetische Aufgabe große Schwierigkeiten bereitet. Dabei handelte es sich bisher um verhältnismäßig einfach geformte magnetische Körper oder Bereiche, wobei sich die Schwierigkeiten aus der Tatsache ergaben, daß der magnetische Widerstand, also das Verhältnis der magnetischen Spannung zum Fluß, nicht konstant war, sondern von der Größe des Flusses abhing. *Es ist jedoch offenbar klar, daß die sich für die klassischen Berechnungsmethoden ergebenden Schwierigkeiten mit der Zunahme der Kompliziertheit der geometrischen Konfiguration in einer immer rascher zunehmeuden Weise zunehmen müssen und immer weniger zu einer praktisch brauchbaren Lösung führen können.* Aus diesem Grunde ist es nicht verwunderlich, daß bei einem bestimmten Grad der Komplizierheit der geometrischen Konfiguration es *viele Aufgaben gibt, die die klassische Theorie nicht nur nicht zu lösen imstande war, sondern sie — offenbar in Erkenntnis ihrer Unlösbarkeit — niemals als speziell denkbare Aufgaben formuliert hat, obwohl die analogen Probleme bei elektrischen Stromkreisen allgemein bekannt und äußerst einfach lösbar sind.*

Diese interessante Tatsache sei an Hand einiger Beispiele aufgezeigt.

5. Bekanntlich ist es in der Elektrotechnik im allgemeinen sehr einfach, einen Widerstand von gegebener Konfiguration durch einen andern von gleicher Größe, aber vollkommen anderer Konfiguration, zu ersetzen. Dieser Aufgabe wäre bei magnetischen Körpern das folgende Problem analog: Ein ferromagnetischer Körper von bestimmter Konfiguration möge durch einen andern ersetzt werden, der zwar eine andere Konfiguration besitzt, aber trotzdem dem ersten magnetisch vollkommen äquivalent ist in dem Sinne, daß sein magnetischer Widerstand V/Φ *bei jedem beliebigen Wert* von Φ dieselbe Größe annimmt, wie im ersten Körper.

Diese interessante und — wie wir sofort sehen werden — sehr wichtige Aufgabe wurde von der klassischen Theorie niemals als Aufgabe gestellt, offenbar weil der vollkommen unübersichtliche Zusammenhang zwischen einer Konfigurationsänderung und der ihr entsprechenden Änderung der magnetischen Parameter dieses vom Autor zum ersten Mal formulierte Problem von vorneherein als gänzlich unlösbar erscheinen ließ.

6. Diese Tatsache hatte zur Folge, daß *auch eine andere sehr wichtige Aufgabe, deren analoge bei elektrischen Stromkreisen im allgemeinen äußerst einfach zu lösen ist, für die klassische Theorie der Berechnung magnetischer Kreise niemals gelöst und vor dem Autor auch niemals gestellt wurde. Es handelt sich um die Ersetzung von in Reihe geschalteten Widerständen durch einen einzigen äquivalenten.* Da es, wie soeben ausgeführt wurde, in elektrischen Stromkreisen prinzipiell sehr einfach ist, jeden der in Reihe geschalteten elektrischen Widerstände einzeln durch einen gleich großen, nur anders geformten zu ersetzen, so ist es nur selbstverständlich, daß auch die Ersetzung sämtlicher dieser in Reihe geschalteten Widerstände durch einen einzigen Widerstand von äquivalenter Größe auf einfachste Weise gelöst werden kann. Vollkommen anders steht es aber mit der analogen Aufgabe im Falle der magnetischen Kreise. Hier handelt es sich um das Problem, daß solche ferromagnetische Körper, die in bezug auf den durch sie hindurchgehenden Fluß miteinander in Reihe geschaltet sind, durch einen einzigen resultierenden ferromagnetischen Körper von einfacher Konfiguration ersetzt werden mögen, der den in Reihe geschalteten Körpern in dem Sinne magnetisch vollkommen äquivalent sei, daß das Verhältnis $\Sigma V/\Phi$ *bei jedem beliebigen Wert* von Φ denselben Wert annehme, wie die Summe der in den einzelnen Körpern sich ergebenden verschiedenen Werte V/Φ. *Da — wie wir soeben gesehen haben — die klassische Theorie sich niemals die Aufgabe gestellt hat, irgendeinen der einzelnen Körper durch einen äquivalenten von anderer Konfiguration zu ersetzen, so ist es nur selbstverständlich, daß das noch weit schwierigere Problem, mehrere solche Körper durch einen einzigen magnetisch äquivalenten zu ersetzen, die klassische Theorie noch weniger im Stande war zu lösen, oder auch nur als Aufgabe zu stellen.*

Im ersten Augenblick könnte natürlich die Frage auftauchen, ob nicht vielleicht die Formulierung dieser Aufgabe und ihre Lösung durch die klassische Theorie einfach deshalb unterblieb, weil diese Aufgaben keine praktische Bedeutung für den Berechner elektrischer Maschinen besitzen?

Wie aber die folgenden Beispiele zeigen werden, wäre nicht nur die Lösung der erwähnten Aufgabe von großer praktischer Bedeutung, sondern es gibt auch eine Reihe von Problemen, die sehr wichtig, aber für die klassische Theorie noch weit weniger lösbar sind.

7. Bild A7 zeigt den in Asynchronmaschinen sehr häufig vorkommenden Zahn eines Doppelnutrotors. Vergleichen wir ihn mit Bild A1, so sehen wir sofort, daß er als die magnetische Reihenschaltung von vier Einzelkörpern

aufgefaßt werden kann, von denen zwei den im Bild A1, b gezeigten und zwei den im Bild A1, e gezeigten Körpern entsprechen. Es ist für jeden Ingenieur mit praktischem Sinne klar, welch große Vorteile es für die Berechnung dieser Maschinenart hätte, wenn es z.B. möglich wäre, den im Bild A7 gezeigten Zahn durch einen einzigen von einfachster Gestalt zu ersetzen, der bei jeder Größe des durchgehenden Flusses Φ dieselbe magnetische Spannung V längs der Zahnhöhe hervorrufen würde, wie der im Bild A7 gezeigte kompliziert geformte Zahn.

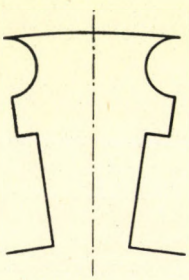


Bild A7

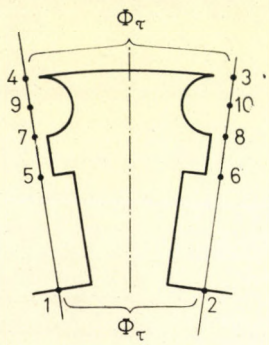


Bild A8

8. Dabei gibt es sehr wichtige praktische Aufgaben, deren Lösung für die klassische Theorie noch weit schwieriger wäre als die im Bild A7 angedeutete. Denn so, wie es sich im Falle des Bildes A4 zeigte, steht ja vor dem Berechner niemals die Frage der Bestimmung der im Zahne allein sich abspielenden magnetischen Vorgänge, sondern die Aufgabe besteht darin, die Parameter des gesamten Zahn-Nut-Bereiches zu bestimmen. Im Falle des Zahnes gemäß Bild A7 handelt es sich also in Wirklichkeit um die Feststellung der Parameterverteilung innerhalb des im Bild A8 angedeuteten Zahn-Nut-Bereiches *1—2—3—4*, wobei ein Blick auf diese Konfiguration zeigt, um wie viel komplizierter sich in diesem Fall die Zahnflüsse und Nutenflüsse zueinander verhalten, als im Fall des Bildes A4. Und wenn wir die im Bild A8 sich ergebende Aufgabe exakt wissenschaftlich formulieren wollen, so geht hervor, *daß es sich hier nicht mehr um die Ersetzung von in Reihe geschalteten ferroma netischen Körpern durch einen einzigen magnetisch äquvivalenten Körper, sondern um die Ersetzung der magnetisch nun hinsichtlich des Flusses Φ_τ in Reihe geschalteten vier Zahn-Nut-Bereiche 1—2—6—5, 5—6—8—7, 7—8—10—9 und 9—10—3—4 durch einen einzigen magnetisch äquivalenten Zahn-Nut-Besreich von einfacher Konfiguration handelt. Auf Grund des weiter oben Gesagten ist es nur selbstverständlich, daß auch diese Aufgabe niemals von der klassischen Theorie formuliert wurde.*

Dabei gibt es noch viele andere Fälle, in denen die Lösung der soeben geschilderten Aufgabe große praktische Bedeutung besitzen würde. Als Beispiel sei der im Bild A9 dargestellte Fall gezeigt, der in den verschiedensten Arten von Maschinen (z.B. Gleichstrommaschinen mit Kompensationswicklung, Synchronmaschinen mit Dämpferwicklung, usw.) vorkommt und dadurch gekennzeichnet ist, daß außer den Zahn-Nut-Bereichen, die an

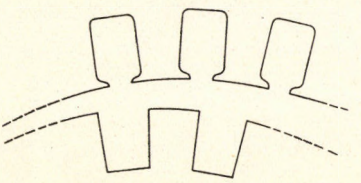


Bild A9

der Peripherie des Rotors liegen und durch die Anbringung der Rotorwicklung bedingt sind, auch an der inneren Oberfläche des Ständers Zahn-Nut-Bereiche angeordnet sind, die durch die Anbringung bestimmter entsprechender Statorwicklungen bedingt sind. In diesen Fällen ist mit irgendeinem Zahn-Nut-Bereich des Rotors nicht nur der entsprechende Teil des Luftspaltes sondern auch noch der entsprechende Zahn-Nut-Bereich des Rotors magnetisch in Reihe geschaltet.

Es ist klar, welch große Komplizierung der Berechnung dies bedeutet, da ja in diesem Falle die vom Zahngrund im Rotor bis zum Zahngrund im Stator zu rechnende Spannung V_0 sich auf drei Schichten in einer von vorneherein unbekannten Weise verteilt. Daher ist es aber auch klar, welchen großen Vorteil es hätte, wenn — analog zum Bild A8 — die beiden magnetisch in Reihe geschalteten Zahn-Nut-Bereiche des Bildes A9 durch einen einzigen magnetisch äquivalenten Zahn-Nut-Bereich von einfacher Konfiguration ersetzt werden könnten und derart der Fall des Bildes A9 auf den einfachen des Bildes A6 zurückgeführt werden könnte.

9. In sämtlichen weiter oben behandelten Fällen des vollkommenen Versagens der klassischen Theorie handelte es sich darum, daß ein Fluß durch mit einander in Reihe geschaltete Körper oder Bereiche hindurchgeht. Es gibt aber sehr wichtige Fälle, in denen der Verlauf der Flüsse noch weit komplizierter ist und hiedurch sich noch weitere, für die klassische Theorie unlösbare, zusätzliche Probleme ergeben. Einen in der Praxis des Maschinenbaus sehr häufig vorkommenden Fall zeigen die Bilder A10, a; A10, b und A10 c, und zwar den der Polvorsprünge am Ende des Polbogens.

Wir wollen ihn in drei Teile von verschiedenerer Gestalt teilen, in denen sich, wie wir später sehen werden, ganz verschiedene magnetische Verhältnisse ergeben. Auf diese Weise lassen sich also drei Teile I, II und III unter-

scheiden (Bild A10, a) von denen die Teile I und II den eigentlichen Vorsprung bilden, während der Teil III, obwohl er eigentlich zum Polkörper gehört, in unsere Untersuchung miteinbezogen werden muß, da innerhalb dieses Teiles ebenfalls ein Teil des magnetischen Spannungsabfalles entsteht, von dem im weiteren die Rede sein wird.

Bezeichnen wir (Bild A10, b) die Entfernung zwischen den Punkten *4* und *5*, *5* und *6* bezw. *6* und *7* mit *a*, *b* bzw. *c*, jene zwischen den Punkten *4*

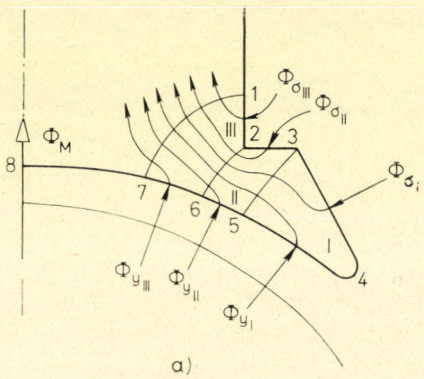


Bild A10 a

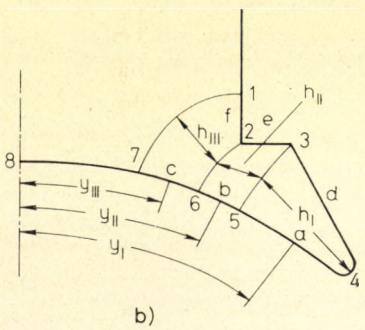


Bild A10 b

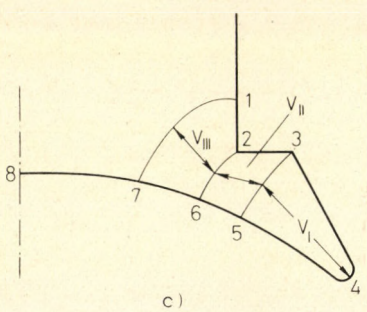


Bild A10 c

und *3*, *3* und *2*, bzw. *2* und *1* mit *d*, *e* bzw. *f*, ferner die peripherial gemessenen Entfernungen von der Polmitte bis zur Mitte der Strecken a, b bzw. *c* mit y_I, y_{II} bzw. y_{III} (Bild A10, b) und die Flüsse, die aus dem Anker in die Flanken *a*, *b* bzw. *c* eintreten, mit Φ_{yI}, Φ_{yII} bzw. Φ_{yIII} und schließlich die Streuflüsse, die aus dem zwischen Hauptpol und Wendepol befindlichen Luftraum durch die Flanken *d*, *e*, bzw. *f* in die Teile I, II bzw. III eintreten mit $\Phi\sigma_I$, $\Phi\sigma_{II}$ bzw. $\Phi\sigma_{III}$ (Bild A10, a), so können wir folgendes feststellen.

Die Flüsse Φ_{yI} und $\Phi\sigma_I$ sind innerhalb des Teils I gezwungen, ihre Richtung zu ändern und in peripherialer Richtung gemeinsam durch den der Linie *3*—*5*

entsprechenden effektiven Eisenquerschnitt in den Körper II einzutreten. Da sich diese Richtungsänderung offenbar auf sämtliche Induktionslinien dieser beiden Flüsse bezieht, wirkt der im Körper I entstehende Spannungsabfall V_I (Bild A10, c) offenbar längs der zwischen Punkt *4* und der Mitte der Linie *3—5* zu denkenden Höhe h_I des Teiles I (Bild A10, b). Hier und im weiteren möge angenommen werden, daß die Linien *3—5*, *2—6* und *1—7* Äquipotentiallinien sind.

Innerhalb des Körpers II treten zum Fluß $\Phi y_I + \Phi\sigma_I$ durch die Flanken *b* und *e* noch die Flüsse Φy_{II} und $\Phi\sigma_{II}$ dazu, deren Induktionslinien offenbar ihre Richtung innerhalb des Eisens ebenfalls ändern und zusammen mit $\Phi y_I + \Phi\sigma_I$ durch den der Linie *2—6* entsprechenden Querschnitt aus dem II-ten in den III-ten Teil übergehen. Der im Teil II entstehende Spannungsabfall V_{II} wirkt offenbar längs der Höhe h_{II} dieses Teiles. Schließlich ergibt sich analog, daß die durch die Flanken c und f in den Teil III eintretenden Flüße Φy_{III} und $\Phi\sigma_{III}$ samt dem Fluß $\Phi y_I + \Phi y_{II} + \Phi\sigma_I + \Phi\sigma_{II}$ durch den der Linie *1—7* entsprechenden Querschnitt des Teiles III einen längs der Höhe h_{III} dieses Teiles wirkenden Spannungsabfall V_{III} hervorrufen werden. Im weiteren vereinigt sich der Fluß $\Phi y_I + \Phi y_{II} + \Phi y_{III} + \Phi\sigma_I + + \Phi\sigma_{II} + \Phi\sigma_{III}$ mit den übrigen Teilen des Hauptflusses Φ_M und geht mit diesen zusammen in der der Symmetrielinie jedes Poles parallelen Richtung durch den Polkern.

Durch das Auftreten der magnetischen Spannungsabfälle V_I, V_{II} und V_{III} wird die Berechnung der aus dem Rotor in den Pol übertretenden Flußteile Φy_I, Φy_{II} und Φy_{III} zusätzlich zu den im Zusammenhang mit Bild A6, geschilderten Problemen außerordentlich erschwert. Im Falle des Bilder A6 ist für jede Entfernung $\pm$y von der Polmitte die zwischen Polfläche und Zahngrund wirkende magnetische Spannung $V_0 \pm y \cdot A$ bekannt. Bei den gesättigten Polvorsprüngen entfällt selbst diese Bedingung. Dank ihrer Sättigung wird die zwischen die Polfläche und den Nutboden entfallende Potentialdifferenz kleiner sein. Das Ausmaß dieser Abnahme hängt von der Größe des Flusses ab, der durch den Polvorsprung hindurchgeht. Dieser Fluß hängt seinerseits von der Größe jener Teilflüsse ab, die über die einzelnen Nutenteilungen aus dem Läufer in die Vorsprünge eintreten: diese Teilflüsse hängen dagegen von der oben erwähnten Potentialdifferenz ab, die zwischen dem Vorsprung und dem Nutboden entsteht.

Das Problem wird noch mehr erschwert dadurch, daß zwischen den aus dem Hauptpolluftspalt kommenden Flüssen Φy_I, Φy_{II} und Φy_{III} (Bild A10, a) einerseits, und den aus der Pollücke eintretenden Streuflüssen $\Phi\sigma_I$, $\Phi\sigma_{II}$ und $\Phi\sigma_{III}$ andererseits, ein komplizierter Zusammenhang besteht.

Wäre der Polvorsprung nicht gesättigt, so ließen sich obige beide Flußteile gesondert untersuchen und man könnte annehmen, daß der wirkliche Fluß des Vorsprunges deren Summe ist. Ist aber der Vorsprung, wie dies z.B.

bei Zugmotoren häufig der Fall ist, stark gesättigt, so wirkt sich der in ihm auftretende magnetische Spannungsabfall nicht nur auf die Größe der Flüsse Φy, sondern auch auf die Streuflüsse $\Phi\sigma$ aus. Hiezu ist noch folgendes zu bemerken.

Die klassische Methode hat, wie dies Bild A11 zeigt, ein von LEHMANN und RICHTER entwickeltes Mittel ausgearbeitet, durch das die Größe der erwähnten Streuflüsse verhältnismäßig einfach bestimmt werden kann. Hierzu

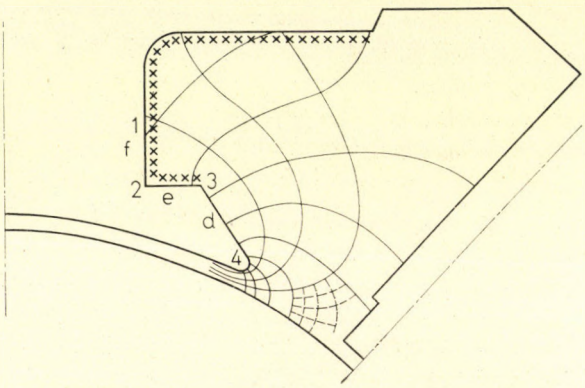


Bild A11

ist es nur nötig — unter der Annahme, daß die Erregerdurchflutung durch einen unendlich dünnen Strombelag mit unendlich großer Stromdichte angedeutet wird — das entsprechende Netz von Äquipotential— und Induktionslinien zu bestimmen.

Nun geht aber diese Methode von der vereinfachenden Annahme aus, daß die Oberfläche des Eisens einer Äquipotentiallinie entspricht, d.h. also z.B. zwischen den Punkten *3* und *4* kein magnetischer Potentialunterschied besteht. In Wirklichkeit besteht aber, wie wir dies im Bild. A10, c festgestellt haben, zwischen ihnen der uns vorläufig unbekannte Potentialunterschied V_{I}. Analog bestehen längs der Strecken *e* bzw. *f* Potentialunterschiede V_{II} bzw. V_{III}. Daraus folgt aber, daß die Größe z.B. des Streuflusses $\Phi\sigma_{\mathrm{I}}$ in Wirklichkeit bedeutend kleiner sein wird, als sich ohne Berücksichtigung der Größe $V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{\mathrm{III}}$ aus Bild A11 ergeben würde.

Es zeigt sich also nicht nur, daß die Flüsse Φ_y und $\Phi\sigma$ in komplizierter Weise auf einander einwirken, sondern auch eine große Schwierigkeit, die zu folgendem circulus vitiosus führt: Solange wir die Größen V_{I}, V_{II} bzw. V_{III} nicht kennen, sind uns auch die Werte der Flüsse Φy, sowie der Flüsse $\Phi\sigma$ unbekannt. Andererseits können wir doch offenbar die Werte V nur dann bestimmen, wenn die Größe der Flüsse Φy und $\Phi\sigma$, durch deren Gesamtheit die Spannungsabfälle V_{I}, V_{II} und V_{III} hervorgerufen wird, bestimmt wurde.

Es ist vollkommen klar, daß für die klassische Theorie die oben beschriebenen und bei der Sättigung der Polspitze auftretenden Erscheinungen außerordentlich große Schwierigkeiten hervorrufen, da sie ja keinerlei Methode ausgearbeitet hat, die gestattet, die Verteilung der magnetischen Induktionen und Potentiale innerhalb sehr stark gesättigter, kompliziert geformter, ferromagnetischer Körper zu bestimmen, durch die sich noch dazu verschiedene solche Flüsse schließen, die durch ganz verschiedene Arten von Durchflutungen und auf durchaus verschiedenen magnetischen Wegen hervorgerufen werden. *Es ist klar, daß im Fall des sich längs des Ankerumfanges ändernden Luftspaltes, der ja — wie wir weiter oben gesehen haben — sogar bei nicht gesättigtem Polvorsprung bei Anwendung der klassischen Rechenmethoden äußerst großen Arbeitsaufwand erfordert, die Sättigung des Polvorsprunges die klassische Theorie vor für sie praktisch unlösbare Probleme stellt.*

Dies bedeutet aber praktisch, daß solange die Größen V_{I}, V_{II} und V_{III} nicht bekannt sind, wir die Größen Φy_{I}, Φy_{II} und Φy_{III} nicht berechnen können, d.h. *gerade unter dem Polvorsprung die Verteilung der Luftspaltinduktion nicht kennen. Dies ist umso bedauerlicher, als gerade an dieser Stelle von dieser Verteilung zum großen Teil die Größe der verschiedensten Arten von Verlusten und außerdem auch die vom Standpunkt der Rundfeuergefahr entscheidende Verteilung der Spannungen zwischen den benachbarten Stromwenderstegen abhängt.*

Zum Abschluß dieses Kapitels möge nochmals betont werden, daß die oben aufgezählten Probleme nur einen kurzen Überlick einiger solcher Aufgaben der Berechnung der magnetischen Kreise elektrischer Maschinen darstellen, deren Lösung große praktische Bedeutung besitzt, aber von der klassischen Theorie nur mit sehr großen Schwierigkeiten oder gar nicht gelöst werden können.

B. Der prinzipielle Weg der manuellen nomographischen Lösung der im Abschnitt A geschilderten Schwierigkeiten

Die für die klassische Methode der Berechnung elektrischer Maschinen äußerst schwer oder überhaupt nicht lösbaren Probleme, von denen im Abschnitt A einige kennzeichnende Beispiele angeführt wurden, können durch das im erwähnten Buch des Autors beschriebene System manueller nomographischer Methoden auf einfache Weise und trotzdem mit großer Genauigkeit gelöst werden.

Es beruht auf der Entdeckung, daß es prinzipiell möglich ist, neben den magnetischen Parametern Φ und V die geometrische Konfiguration als einen eigenen dritten Parameter darzustellen. Hiebei kann jeder beliebige ferromagnetische Körper durch einen seiner geometrischen Konfiguration entsprechenden Koeffizient ϱ gekennzeichnet werden, wobei zu jedem möglichen Wert von ϱ je eine Kurve gehört, deren Abszissen dem durch den betreffenden Körper hin-

durchgehenden Fluß Φ und dessen Ordinaten dem durch letzteren hervorgerufenen Wert V entsprechen. Hierdurch ergibt sich offenbar prinzipiell sofort die Möglichkeit, bei gegebener Konfiguration, d.h. also bei bestimmtem Wert ϱ für irgendeinen Wert von Φ den betreffenden Punkt der ϱ-Kurve zu bestimmen und aus diesem die magnetische Spannung V unmittelbar abzulesen. Genau so einfach ist die — wie wir im Abschnitt A gesehen haben — für die klassische Theorie noch schwierigere, umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich zu gegebenem Wert V den bei einer bestimmten geometrischen Konfiguration dazugehörenden Wert Φ zu bestimmen. Es braucht nur zur gegebenen Ordinate der betreffenden ϱ-Kurve die dazugehörige Abszisse bestimmt zu werden. *Mehr als das, es ergibt sich prinzipiell sogar einfach auch die Lösung des folgenden Problems, das die klassische Theorie wegen ihrer Schwierigkeit niemals formuliert, geschweigedenn gelöst hat:* Dieses Problem besteht darin, die Konfiguration jenes ferromagnetischen Körpers zu bestimmen, in dem ein gegebener Fluß Φ einem gewünschten Wert von V entspricht. Auf Grund des oben Angeführten würde die Lösung dieser Aufgabe nur darin bestehen, festzustellen, auf welcher ϱ-Kurve jener Punkt liegt, dessen Abszisse dem gegebenen Wert Φ und dessen Ordinate dem gegebenen Wert V entspricht.

Bevor wir darangehen, aufzuzeigen, wie die erwähnte, den verschiedenen Werten ϱ entsprechende Kurvenschar bestimmt werden kann, wollen wir schrittweise darstellen, welche prizipiellen Probleme sich hierbei ergeben.

Wir wollen von dem im Bild B1, a dargestellten Körper ausgehen, der in Bezug auf seine Gestalt prinzipiell dem im Bild A1, d gezeigten Körper entspricht. Seine Breite in der Höhe x sei b_x, wobei b_x irgendeine Funktion von x sei gemäß der Formel

$$b_x = b_0 \cdot f_1\left(\frac{x}{h}\right). \tag{B.1}$$

Hierbei kennzeichnet f_1 (x/h) die Gestalt des Körpers und b_0 ist die größte Breite. Die kleinste Breite sei b_2, wobei wir im weiteren das Verhältnis b_2/b_0 mit α bezeichnen wollen. Es gilt also

$$\frac{b_2}{b_0} = \alpha. \tag{B.2}$$

Die Feldstärke H_x in der Höhe x sei eine Funktion von der Induktion B_x im Querschnitt $b_x \cdot \gamma \cdot l$. Es ist also

$$B_x = \frac{\Phi}{b_x \cdot \gamma \cdot l} \tag{B.3}$$

und

$$H_x = f(B_x). \tag{B.4}$$

Der durch den Fluß Φ längs der gesamten Höhe h erzeugte magnetische Spannungsabfall V ist

$$V = \int_0^h H_x \, dx. \tag{B.5}$$

Unter Berücksichtigung der Formeln B.1, B.3, B.4 erhalten wir anstatt B.5 den folgenden Zusammenhang:

$$V = \int_0^h f\left(\frac{\Phi}{b_0 \gamma l \cdot f_1\left(\frac{x}{h}\right)}\right) dx. \tag{B.6}$$

Wie diese letztere Formel zeigt, hängt die Größe V außer vom magnetischen Material einerseits von Φ und andererseits von den Abmessungen und der geometrischen Gestalt ab.

Die Betrachtung der Formel B.6 zeigt nun folgendes Problem. Damit wir die obenerwähnte Kurvenschar erhalten, darf offenbar die Spannung V außer vom Fluß Φ nur von einer einzigen, eben die Konfiguration kennzeichnenden Größe abhängen.

In der Wirklichkeit jedoch, wie Formel (B.6) zeigt, hängt der Wert V außer von Φ noch von b_0, γl, h und $f_1(x/h)$, d.h. von vier beliebigen Parametern ab.

Diese Schwierigkeit wird dadurch behoben, daß der Begriff des »Einheitskörpers« eingeführt wird.

Nennen wir von jetzt an B_0 die magnetische Induktion, die im größten Querschnitt $b_0 \gamma l$ des Körpers entsteht, wobei also

$$B_0 = \frac{\Phi}{b_0 \gamma l}. \tag{B.7}$$

Ferner bezeichnen wir den arithmetischen Mittelwert der verschiedenen Feldstärken H_x längs der Höhe h mit H. Es ist also gemäß B.5

$$H = \frac{V}{h}. \tag{B.8}$$

Wenn wir die beiden Seiten der Gleichung (B.6) durch h teilen, erhalten wir unter Berücksichtigung der Formeln (B.7) und (B.8) anstatt (B.6) folgende Gleichung:

$$H = \int_0^1 f\left(\frac{B_0}{f_1\left(\frac{x}{h}\right)}\right) d\left(\frac{x}{h}\right). \tag{B.9}$$

Diese Formel führt den im Bild B1, a abgebildeten Körper mit der Höhe h, der größten Breite b_0 und der kleinsten Breite b_2, dessen Spannung V und dessen Fluß Φ ist, auf einen ähnlichen Körper zurück, der im Bild B1, b abgebildet ist unddessen Höhe, Länge und größte Breite gleich 1 cm, seinekleinste Breite gleich $b_2/b_0 = a$, sein Fluß gleich der Induktion B_0, gemäß (B.7) ist.

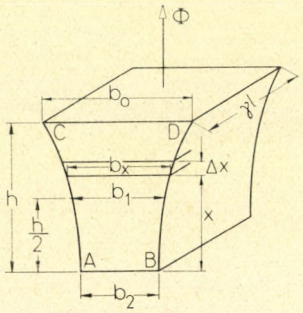


Bild B1 a

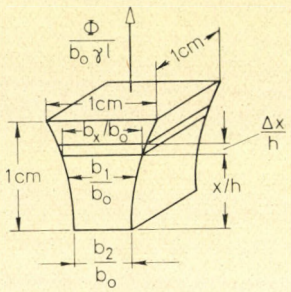


Bild B1 b

Es ist klar, daß in der Höhe x/h die Breite des Einheitskörpers b_x/b_0 beträgt, seine Mindestbreite hingegen b_2/b_0, wobei b_0 die Höchstbreite des ursprünglichen Körpers, b_2 seine Mindestbreite, b_x seine Breite in der Höhe x bedeuten. Induktion und Feldstärke werden in sämtlichen die Höhe x/h besitzenden Querschnitten des im Bild B1, b gezeigten Einheitskörpers die gleichen sein wie in den entsprechenden die Höhe x besitzenden Querschnitten des Körpers im Bild B1, a. Aus dem ursprünglichen Körper soll in Höhe x ein Prisma von der sehr kleinen Höhe Δx, aus dem Einheitskörper in Höhe x/h, eines von der Höhe $\Delta x/h$ herausgeschnitten werden. Danach wird die auf die Höhe $\Delta x/h$ des aus dem Einheitskörper herausgeschnittenenen Prismas entfallende Potentialdifferenz $H_x \cdot \Delta x/h$ sein, während auf die Höhe Δx des ursprünglichen Körpers eine Potentialdifferenz von $H_x \Delta_x$ entfällt. Da diese kleinen Prismen in beiden Körpern des Bildes B1 in der gleichen Zahl vorkommen (ihre Zahl ist $h/\Delta x$), ist die auf die Gesamthöhe des Einheitskörpers entfallende Potentialdifferenz gleich $V/h = H$, wenn durch ihn ein Fluß von der Größe $B_0 = \Phi/(b_0 \gamma l)$ hindurchtritt.

Die Einführung des Begriffes »Einheitskörper« ist mit den folgenden großen Vorteilen verbunden: der graphische Zusammenhang zwischen V und Φ muß nicht für den wirklichen Körper gesucht werden, wo h, b_0 und γl erscheinen würden, sondern der Körper kann durch den entsprechenden Einheitskörper ersetzt werden und wir erhalten einfach den Zusammenhang zwischen der längs dieses Einheitskörpers herrschenden Potentialdifferenz H und dem Wert B_0, als den Zusammenhang zwischen den Ordinaten H und den Abszissen B_0 einiger Kurven (B.2). Die wahre magnetische Spannung V

bekommen wir, wenn wir die Ordinate CK eines Punktes C dieser Kurven mit h multiplizieren; der wahre Fluß ergibt sich durch Multiplikation der Abszisse LC des Punktes C mit $b_0 \gamma l$. Wenn dann zu jeder Kurve eine andere Gestalt des Einheitskörpers d.h. eine andere, bestimmte Funktion $f_1(x/h)$ gehört, so können dann auch die magnetischen Verhältnisse der verschieden geformten Körper unter Benützung einer einzigen derartigen Kurvenschar bestimmt werden.

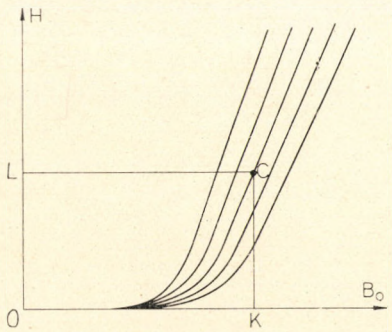


Bild B2

Unsere Aufgabe ist daher, ein Verfahren zu finden, welches einfach und dabei genau die Funktionen $f_1(x/h)$, d.h. den Einfluß der Gestalt des Körpers auf die magnetischen Verhätnisse, zu bestimmen gestattet.

Hiebei ergibt sich aber folgende prinzipielle Schwierigkeit.

Zwar ist es praktisch immer zulässig, die Funktion $f_1(x/h)$ durch eine quadratische Gleichung zu ersetzen, da es sich ja um den auch in der Nähe des kleinsten Querschnittes sich sehr sanft ändernden Zusammenhang zwischen B_x und x/h handelt. Aber auch bei einer quadratischen Parabel brauchen wir bei gegebenem Wert b_0 noch mindestens zwei b_x-Werte in zwei beliebigen Höhen, z.B. b_2 und die in der Höhe $h/2$ gemessene Breite b_1. Ähnlich verhält es sich auch mit den Körpern anderer Formen, soweit die Breite sich nur in einem Sinne und stetig ändert. Zur Charakterisierung der Formen der theoretisch möglichen Einheitskörper müssen demnach im allgemeinen zwei Parameter, nämlich die Verhältnisse b_2/b_0 und b_1/b_0 bekannt sein.

In diesem Falle müßte man also für alle möglichen Werte b_2/b_0 eine Kurvenschar haben und jede Kurve würde einem bestimmten Wert b_1/b_0 entsprechen. Es ist klar, daß man, um auch alle Werte von b_2/b_0 zu erfassen, eine sehr große Zahl solcher Kurvenscharen konstruieren müßte, wobei jede dieser einem bestimmten Wert von b_2/b_0 entsprechen würde. Dieser Umstand würde aber offenbar eine praktische Verwendung dieser Methode unmöglich machen.

Damit kommen wir zu dem entscheidenden Problem, wie es möglich werden könnte, jeder beliebigen Gestalt der Einheitskörper nur eine einzige Kurve zuzuordnen, wodurch der gewünschte einfache und anschauliche Zusammenhang zwischen den magnetischen Parametern B_0 *und* H *sowie den geometrischen Parametern gegeben wäre.*

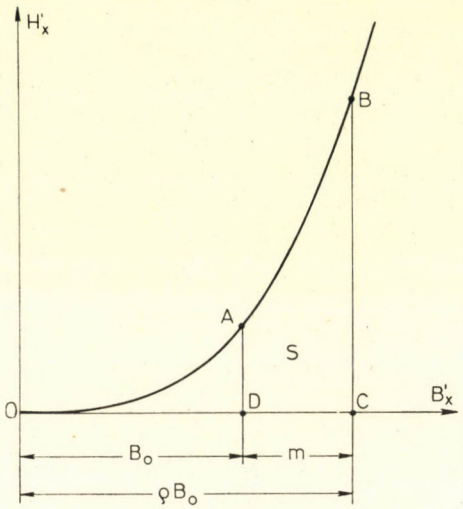


Bild B3

Dieses Problem wird auf Grund folgender Gedankengänge gelöst:

a) Wir bestimmen die Kurvenschar nur für keilförmige Einheitskörper, die eindeutig durch eine einzige Kurve gekennzeichnet sind, da der Wert b_2/b_0 *eindeutig seine Gestalt kennzeichnet.*

b) Wir suchen einen rein geometrischen (also von magnetischen Parametern unabhängigen) *Zusammenhang zwischen der Gestalt des im Punkt a) erwähnten keilförmigen Einheitskörper und den verschiedenen anderen uns interessierenden Formen von Einheitskörpern. Hiebei besteht das Postulat dieses Zusammenhanges darin, daß der magnetische Widerstand* (also das Verhältnis H/B_0), *des unter a) erwähnten Einheitskörpers bei allen praktisch in Frage kommenden Größen* H *und* B_0 *dem magnetischen Widerstand der verschiedenen anders gestalteten Einheitskörper gleich sei.*

Auf diese Weise kann offenbar erreicht werden, daß für jede mögliche Gestalt eines Einheitskörpers die magnetische Berechnung auf Grund einer einzigen Kurvenschar durchgeführt werden kann. Auf diese Weise gibt jeder Punkt der letzteren nicht nur den Zusammenhang zwischen den Größen H und B_0, sondern auch jenen zwischen diesen Größen und jenen geometrischen Formen von Einheitskörpern, die durch die den betreffenden Punkt berührende Kurve

gekennzeichnet sind. *Auf diese Weise ergibt sich offenbar die Möglichkeit, die oben erwähnten drei grundlegenden Aufgaben der magnetischen Berechnung auf einfachste Weise zu lösen.*

Gehen wir nunmehr daran, den soeben skizzierten Weg schrittweise zu verfolgen:

Zuerst führen wir den Begriff des „äpuivalenten Einheitskörpers" ein. Wählen wir einen solchen Einheitskörper, dessen in der Höhe x/h sich ergebende Induktion B_x' vom Werte B_0 im größten Querschnitt linear bis zu einem größeren Wert ϱB_0 im kleinsten Querschnitt steigt, also der Gleichung Genüge leistet:

$$B_x' = B_0\left[1+\left(\varrho-1\right)\frac{h-x}{h}\right]. \tag{B.10}$$

Der Induktion B_x' entspricht eine Feldstärke H_x'. Offenbar ist die längs der Höhe genommene mittlere Feldstärke, die wir wieder mit H bezeichnen wollen, gleich

$$H = \int_0^1 H_x' \, d\left(\frac{x}{h}\right). \tag{B.11}$$

Differenzieren wir (B.10) nach x, so erhalten wir

$$\frac{dB_x'}{dx} = -\frac{B_0(\varrho-1)}{h}. \tag{B.12}$$

Setzen wir aus (B.12) den Ausdruck dx/h in (B.11) ein, so ergibt sich folgender, für die weiteren Ausführungen grundlegender Zusammenhang:

$$H = \frac{1}{B_0(\varrho-1)} \cdot \int_{B_0}^{\varrho B_0} H_x' \, dB_x'. \tag{B.13}$$

Der Zusammenhang zwischen den Integrationsgrenzen $x/h = 0$ und $x/h = 1$ in der Gleichung (B.11) einerseits und den Integrationsgrenzen $B_x' = \varrho B_0$ und $B_x' = B_0$ in der Gleichung (B.13) andererseits ergibt sich offenbar aus der Tatsache, daß die Induktion B_x' für $x/h = 0$ ihren Maximalwert ϱB_0 und für $x/h = 1$ ihren Minimalwert B_0 annimmt.

Zeichnet man die Magnetisierungscharakteristik $H_x' = f(B_x')$ (B.3 Kurve *OAB)* und nimmt an, daß die Ordinate AD der Abszisse $OD = B_0$ und die Ordinate BC der Abszisse $OC = \varrho B_0$ entspricht, so ist die Größe S der Fläche $A\,B\,C\,D$ gleich

$$S = \int_{B_0}^{\varrho B_0} H_x' \, dB_x'. \tag{B.14}$$

Nennen wir die Entfernung der Punkte D und C im weiteren m, wobei also

$$m = (\varrho - 1) \cdot B_0 \tag{B.15}$$

ist und setzen wir aus den Gleichungen (B.14) und (B.15) in die Gleichung (B.13) ein, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$H = \frac{S}{m}. \tag{B.16}$$

Auf Grund dieser Beziehung kann also, wie Bild B3 zeigt, bei gegebenen Werten B_0 und ϱ der Wert H genau ermittelt werden.

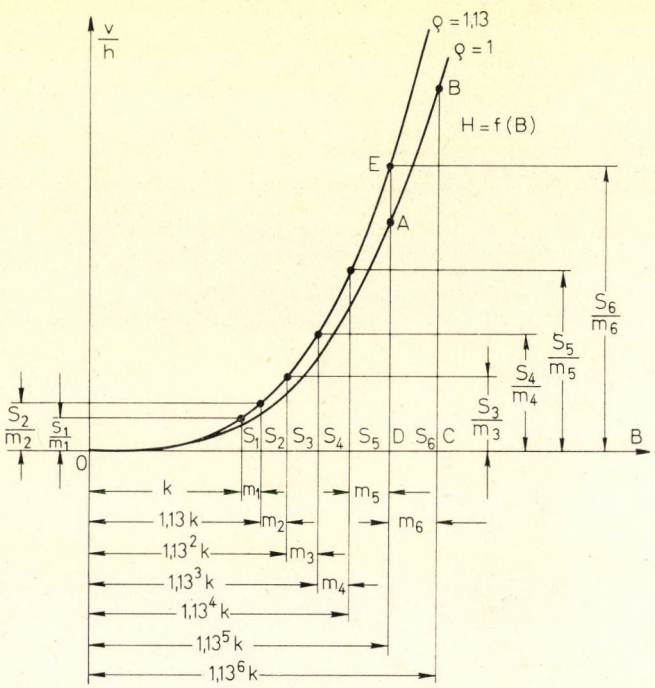


Bild B4 a

Durch diesen Zusammenhang wird ermöglicht, die gewünschte Kurvenschar besonders einfach und schnell, gleichzeitig aber auch sehr genau zu konstruieren. Mit Hilfe dieser Kurvenschar vermag man danach, wie im weiteren ausführlich gezeigt werden wird, die verschiedenen verwickelten Aufgaben der Berechnung der magnetischen Kreise leicht zu lösen.

An der Magnetisierungskennlinie des Eisens (Kurve *OAB)* soll die Ordinate, die einer bestimmten Abszisse k beigeordnet ist (z.B. zu 10 000 G) gezeichnet werden — wie es Bild B.4 zeigt. Von der erforderlichen Genauigkeit abhängig, soll irgendein Wert ϱ (z.B. $\varrho = 1{,}13$) angenommen und die zur Abszisse 1,13 k gehörige nächste Ordinate gezeichnet werden, sodann zu $1{,}13^2 \cdot k$ die zweite, zu $1{,}13^3 \cdot k$ die dritte, usw.

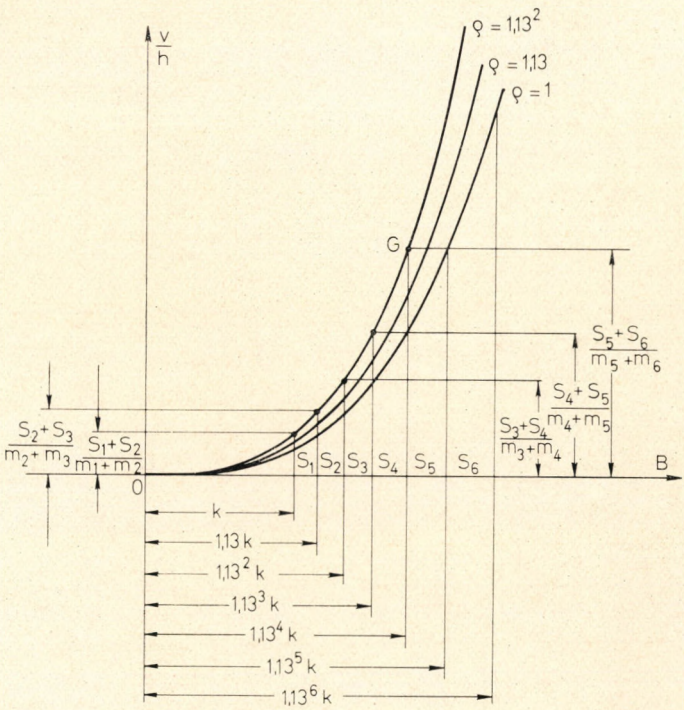


Bild B4 b

Die Grundlinien m_1, m_2, m_3, usw. der auf diese Weise gewonnenen Elementarflächen nehmen von links nach rechts im Verhältnis $1 : 1{,}13, 1 : 1{,}13^2 : 1{,}13^3$ usw. zu.

Die Konstruktion soll bis zu der in der Praxis vorkommenden Höchstinduktion fortgesetzt werden. Somit erhält man einige Flächen S_1, S_2, usw.

Werden sämtliche Flächen durch die eigenen Grundlinien geteilt, so erhält man die Reihe der Werte S_1/m_1, S_2/m_2 usw.

Hierbei bedeutet S_1/m_1 die der Strecke m_1 entsprechende Mittelordinate, d.h. den Mittelwert der Feldstärken, wenn die Induktion von k bis 1,13 k linear zunimmt. Mit anderen Worten ausgedrückt, ist das Verhältnis S_1/m_1

gleich jenem Wert H, der im äquivalenten Einheitskörper bei $B_0 = k$ und $\varrho = 1{,}13$ auftritt. Durch S_2/m_2 wird ganz analog jener Wert H geliefert, der in demselben äquivalenten Körper bei $B_0 = 1{,}13\ k$ vorkommt. Daraus folgt, daß zur Konstruktion der Kurve OE (B4, a), die die Abhängigkeit der mittleren Feldstärke H vom Fluß $\Phi/(b_0\gamma l) = B_0$ des gegebenen äquivalenten Einheitskörpers bei dem Faktor $\varrho = 1{,}13$ charakterisiert, man lediglich die Punkte auftragen muß, deren Ordinaten S_1/m_1, S_2/m_2, S_3/m_3 usw. und deren Abszissen k, $1{,}13\ k$, $1{,}13^2\ k$, usw. sind.

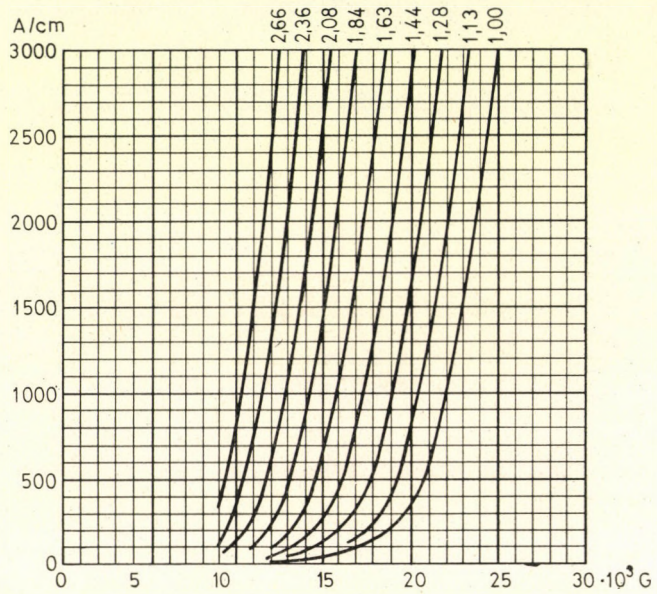


Bild B5

Berechnet man ähnlicherweise die Werte $(S_1 + S_2)/(m_1 + m_2)$, $(S_2 + S_3)/(m_2 + m_3)$ usw. und trägt diese als Ordinaten zu den entsprechenden Abszissen k, $1{,}13\ k$, $1{,}13^2\ k$, usw. auf, so erhält man eine zweite Kurve OG (Bild B4, b), die den magnetischen Widerstand für einen anderen äquivalenten Einheitskörper mit dem Faktor $\varrho = 1{,}13^2$, d.h. die zum Fluß $\Phi/(b_0\gamma l)$ gehörigen Werte H anzeigt. Analog ergeben die Werte $(S_1 + S_2 + S_3)/(m_1 + m_2 + m_3)$ usw. eine dritte Kurve für den mit $\varrho = 1{,}13^3$ charakterisierten äquivalenten Einheitskörper, usw.

Setzt man die Konstruktion bis z.B. $\varrho = 2{,}66$ fort, so erhält man acht Kurven für die nachstehenden Werte: 1,13, 1,28, 1,44, 1,63, 1,84, 2,08, 2,36 und 2,66 (B.5).

Die Praxis hat gezeigt, daß außer den obigen acht Grundkurven noch zwischenliegende Kurven in beliebiger Anzahl bei ausreichender Genauigkeit,

durch Interpolation gewonnen werden können. Im Bild B.5 sind die erwähten, zwischen den Grundkurven liegenden Kurven der Deutlichkeit halber nicht eingezeichnet.

Daß es genügt, die Kurvenschar nur bis $\varrho = 2{,}66$ zu konstruieren, ergibt sich aus folgender Überlegung.

Wird die in den elektrischen Maschinen praktisch vorkommende Höchstinduktion mit ungefähr 25 000 G angenommen, so wird bei $\alpha = 0{,}4$ im größten Querschnitt des Körpers eine Induktion auftreten, die kleiner als 10 000 G ist. Die beigeordnete Feldstärke wird also im Vergleich zu den Feldstärken, die im Bereich des kleinsten Querschnitts auftreten, sehr klein sein. Hieraus folgt, daß es bei den praktischen Berechnungen genügt, wenn man nur jenen Teil h' der Höhe h des Körpers in Betracht zieht, innerhalb welcher die Induktion größer ist als 40% der Höchstinduktion, d.h. also $\alpha \geq 0{,}4$. Der übrige Teil $h - h'$ der Höhe kann gänzlich vernachlässigt werden.

Die sich auf die beschriebene Weise ergebende Kurvenschar wird im weiteren als »Nomogramm« und die vom Verfasser ausgearbeitete, sich auf ihre Benützung stützende Methode als »nomographisch« bezeichnet werden.

Auf Grund der Einführing des Begriffes des äguivalenten Einheitskörpers sind wir vorläufig imstande den Zusammenhang der Werte H, B_0 *sowie des den betreffenden äquivalenten Einheitskörper kennzeichnenden Wertes* ϱ *einfach bestimmen zu können (Bild B.2). Nunmehr wollen wir untersuchen, auf Grund welcher Gedankengänge wir den rein geometrischen Zusammenhang zwischen verschieden geformten Einheitskörpern einerseits und den ihnen zuzuordnenden, in magnetischer Hinsicht äquivalenten Einheitskörpern andererseits bestimmen können.*

Wir wollen zuerst um die Forderung des Punktes *a*) zu erfühlen diese Frage an keilförmigen Einheitskörpern prüfen.

Die Mindest- bzw. Höchstbreite des keilförmigen Körpers betrage b_2 bzw. b_0, deren Verhältnis $b_2/b_0 = \alpha$. Dieser Körper soll durch einen keilförmigen Einheitskörper (Bild B6, a) ersetzt und die Induktionen $\Phi/(b_x \gamma_l)$, die in den Querschnitten der Breiten 1, α und $1 + a)/2$ auftreten, solle n mit B_0, B_2 und B_1 bezeichnet werden. Den angeführten Induktionen entsprechen im Bild B6, b, die Strecken *ab*, *cd* und *ef*. Ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, kann angenommen werden, daß sich die wirkliche Induktion B_x zwischen diesen Strecken gemäss einer solchen Parabel zweiten Grades ändert, die durch die Punkte *b*, *f*, und *d* hindurchgeht. Dieser Induktionsverteilung entspreche die Feldstärkenverteilung H_x, die mit irgendeiner uns unbekannten Kurve mn gekennzeichnet sei.

Nunmehr wollen wir den keilförmigen Einheitskörper durch einen »äquivalenten Einheitskörper« ersetzen, in dem definitionsgemäß die Induktion linear ansteigt, wobei wir offenbar von Äquivalenz nur dann sprechen können, wenn das Verhältnis H zu B_0 *bei verschiedenen Werten von* B_0 *dasselbe ist, wie im*

gegebenen keilförmigen Einheitskörper. Wir wollen annehmen, daß die minimale Induktion dieselbe ist, wie im keilförmigen Einheitskörper, also $B_0 = \overline{ab}$. Dann ist noch die maximale Induktion $\varrho \cdot B_0$ zu wählen. Wäre sie gleich dem Werte $B_2 = \overline{cd}$, so wäre die Verteilung der Induktion in diesem Falle durch die Gerade *bd* gekennzeichnet. Wie wir sehen, wäre die Induktion, die wir in diesem Falle B_x'' nennen wollen (in Bild B6 fehlt dieser Buchstabe), für alle

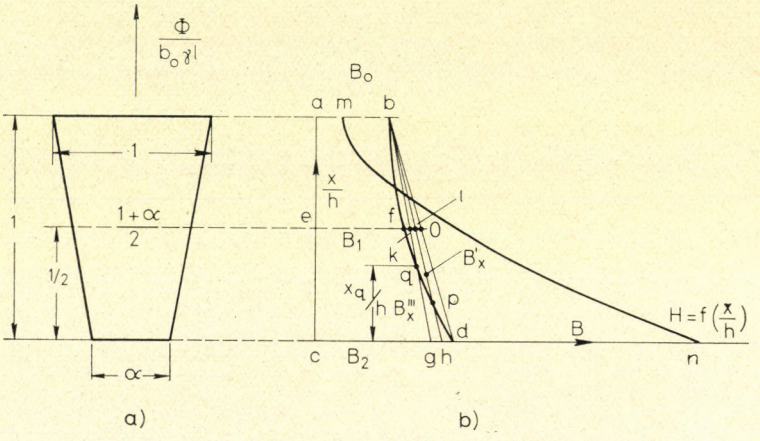


Bild B6

Werte von x/h (außer für 0 und 1) größer als die der Kurve bfd entsprechende, woraus wir schließen können, daß bei der Induktionsverteilung gemäß der Geraden bd der sich ergebende Betrag H'' höher ist als der wirkliche Wert H.

Nunmehr nehmen wir an, daß die maximale Induktion des äquivalenten Einheitskörpers einen anderen geringeren Wert $\overline{cg}$ besitzt, bei dem die Fläche des Trapezes abgca gleich der Fläche *abfdca* ist. In diesem Fall schneiden sich die Parabel *bfd* und die Gerade *bg* im Punkt *q*, was zur Folge hat, daß die Gleichheit der Flächen *abgc* und *abfdca* analytisch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\int_0^{x_q/h} (B_x - B_x''') \, d\left(\frac{x}{h}\right) - \int_{x_q/h}^1 (B_x''' - B_x) \, d\left(\frac{x}{h}\right) = 0, \qquad \text{(B.17)}$$

wobei B_x''' die Abszissen der Geraden *bg*, B_x hingegen die Abszissen der Kurve *bfd* und x_q/h die Höhe des Punktes *q* bedeuten.

Der neuen Induktionsverteilung B_x''' der Geraden *bg* entspricht eine neue nicht eingezeichnete Feldstärkeverteilung H_x'''. Da einer gewissen Induktionsänderung an den Stellen von kleiner Induktion eine geringere Feldstärkenänderung entspricht als an den Stellen von großer Induktion, ist das Verhältnis

$$\frac{H_x - H_x'''}{B_x - B_x'''}$$

im Bereich

$$0 < \frac{x}{h} < \frac{x_q}{h}$$

größer als bei

$$\frac{x_q}{h} < \frac{x}{h} < 1.$$

Setzt man also in Gleichung (B.17) statt $B_x - B'''$ den Ausdruck $H_x - H_x'''$ ein, so können wir folgende Ungleichheit aufschreiben:

$$\int_0^{x_q/h} (H_x - H_x''') \, d\left(\frac{x}{h}\right) - \int_{x_q/h}^1 (H_x''' - H_x) \, d\left(\frac{x}{h}\right) > 0. \tag{B.18}$$

Anstatt dieser können wir auch schreiben:

$$\int_0^1 H_x \, d\left(\frac{x}{h}\right) > \int_0^1 H_x''' d\left(\frac{x}{h}\right), \tag{B.19}$$

oder, was dasselbe bedeutet:

$$H > H'''. \tag{B.20}$$

Der zur Induktionsverteilung der Geraden *bg* beigeordnete Wert H''' ist also immer kleiner als die wirkliche Spannung H.

Damit wurde bewiesen, daß die gesuchte, den äquivalenten Einheitskörper kennzeichnende Gerade bh, *längs derer sich die Induktion derart verteilt, daßsich eine dem wirklichen Wert* H *gleiche mittlere Feldstärke ergebe, zwischen den Grenzgeraden* bd *und* bg *liegen muß.* Wird das Verhältnis der Strecke $\overline{kl}$ zur Strecke $\overline{ko}$ mit ε bezeichnet, d.h. also angenommen, daß

$$\frac{kl}{ko} = \varepsilon, \tag{B.21}$$

wobei mit k, l bezw. 0 die die Ordinate 1/2 besitzenden Punkte der Geraden *bg*, bh bezw. bd bezeichnet werden, so kann das erhaltene Resultat folgendermaßen formuliert werden:

$$0 < \varepsilon < 1. \tag{B.22}$$

Die genaue Lage der Geraden bh *zwischen den Grenzen* bd *und bg, die durch den Wert ε bestimmt wird — kann auf Grund nachstehender Überlegung geschätzt werden.*

Bezeichnen wir mit p den Schnittpunkt der die lineare Verteilung der Induktion B'_x darstellenden Geraden bh und der die tatsächliche Verteilung der Induktion B_x darstellenden Kurve bfd und nennen die zu den Werten B'_x gehörigen Feldstärken H'_x, so gilt offenbar definitionsgemäß für die richtige Lage der Geraden bh die Gleichung

$$\int_0^{x_p/h} (H_x - H'_x)\, d\left(\frac{x}{h}\right) - \int_{x_p/h}^{1} (H'_x - H_x)\, d\left(\frac{x}{h}\right) = 0, \tag{B.23}$$

wobei x_p/h die Höhe ist, in welcher sich der dem Punkte p entsprechende Querschnitt befindet.

Andererseits ist es klar, daß je größer bei gegebener Induktion B_0 die Größe ϱ ist, je größer also auch die maximale Induktion ist, desto größer ist in der Nähe des kleinsten Querschnittes die der Induktionsdifferenz $B_x - B'_x$ entsprechende Feldstärkendifferenz $H_x - H'_x$. Daraus folgt, daß, damit die Gleichung (B.23) weiter Geltung habe, die Gerade bh desto näher zur Grenzgeraden bd liegen muß, d.h. also ε desto größer sein muß, je höhere Werte ϱ annimmt. Wie weiter oben ausgeführt wurde, liegen die für die Praxis in Frage kommenden Werte von ϱ zwischen 1 und 2,6. Es zeigt sich, daß zwischen diesen Grenzen mit praktischer Genauigkeit der Wert ε dem Wert von ϱ proportional ist und der mittlere Wert $\varepsilon = 0{,}5$ dem mittleren Wert $\varrho = 1{,}8$ entspricht. Wir können also setzen

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{3{,}6}. \tag{B.24}$$

Berücksichtigen wir, daß gemäß der Definitionen der Geraden bg, bd und bh die Gleichungen gelten:

$$\overline{ek} = \frac{B_0 + 4B_1 + B_2}{6}, \tag{B.25}$$

ferner

$$\overline{eo} = \frac{B_0 + B_2}{2} \tag{B.26}$$

und

$$\overline{el} = \frac{B_0 + \varrho B_0}{2}, \tag{B.27}$$

so ergibt sich, daß

$$\overline{kl} = \overline{el} - \overline{ek} = \frac{B_0 + \varrho B_0}{2} - \frac{B_0 + 4B_1 + B_2}{6} \tag{B.28}$$

und daß

$$k_0 = \overline{eo} - \overline{ek} = \frac{B_0 + B_2}{2} - \frac{B_0 + 4B_1 + B_2}{6}. \tag{B.29}$$

Setzen wir in Gleichung (B.21) für $\overline{kl}$ aus (B.28), für $\overline{ko}$ aus (B.29) und für ε aus (B.24) ein, so erhalten wir:

$$\varrho = 1{,}8 \cdot \frac{B_2 + 4B_1 - 2B_0}{-B_2 + 2B_1 + 4{,}4B_0} . \tag{B.30}$$

Nachdem aber

$$\frac{B_0}{B_2} = \frac{b_2}{b_0} = \alpha \tag{B.81}$$

und

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \tag{B.32}$$

ist, so erhalten wir, wenn wir in (B.30) sowohl den Zähler als den Nenner durch B_2 dividieren und für B_0/B_2 aus (B.31) und für B_1/B_2 aus (B.32) einsetzen, als Endergebnis

$$\varrho = 1{,}8 \frac{1 + 7\alpha - 2\alpha^2}{-1 + 7{,}4\alpha + 4{,}4\alpha^2} . \tag{B.33}$$

Die Betrachtung der Formel (B.33) zeigt also die Richtigkeit der bereits am Beginn des Abschnittes B erwähnten grundlegenden Behauptung, daß es möglich ist — vorläufig zumindest für den Fall des keilförmigen Körpers des Bildes B.6 — den die Gestalt kennzeichnenden Koeffizienten ϱ einfach aus der gegebenen Konfiguration, die im Falle des keilförmigen Körpers ja eben durch den Wert α gekennzeichnet ist, zu berechnen.

Da wir bisher diese Tatsache nur für den keilförmigen Einheitskörper gemäß Punkt *a*) nachgewiesen haben, wollen wir zeigen, wie aus dem bisher Entwickelten es möglich ist der Forderung det Punktes *b*) entsprechend den Koeffizienten ϱ auch für Einheitskörper von anderer Gestalt zu bestimmen (bei denen also die Funktion $f_1(x/h)$ eine andere ist). Hierbei genügt es, dies bei dem Körper gemäß Bild A1, c nachzuweisen, da die prinzipielle Methode für die anderen Körpergestalten auf analogen Gesichtspunkten beruht.

Untersuchen wir solche Einheitskörper, deren Querschnitt sich gemäß einer Parabel zweiten Grades ändert (Bild B.7).

Als einzige Einschränkung wird vorausgesetzt, daß sich die Breite des Körpers längs der Höhe nur in einer bestimmten Richtung ändert. *Unsere Aufgabe besteht in der Bestimmung einer einzigen Kurvenschar zur Angabe des magnetischen Widerstandes aller derartigen Körper, obgleich die geometrische Form des Körpers von zwei Parametern definiert wird.*

Bei der Methode zur Bestimmung der magnetischen Verhältnisse von keilförmigen Körpern wurde angenommen, daß die der Wirklichkeit entsprechende Verteilung der magnetischen Induktion längs der Höhe des Ein-

heitskörpers durch eine parabolische ersetzt werden kann. Demnach könnte man, falls sich die Induktion im Körper (Bild B7, a) gleichfalls nach einer beliebigen Parabel zweiten Grades verteilen Würde, auch für diesen Körper die gleiche Methode anwenden. *Mit anderen Worten: Würde man den Fall des im Bild. B7, a gezeigten Einheitskörpers auf den Fall des keilförmigen Körpers reduzieren, so könnte man die oben besprochene Kurvenschar für diesen »reduzierten Einheitskörper« konstruieren und die vorherige nomographische Methode anwenden.*

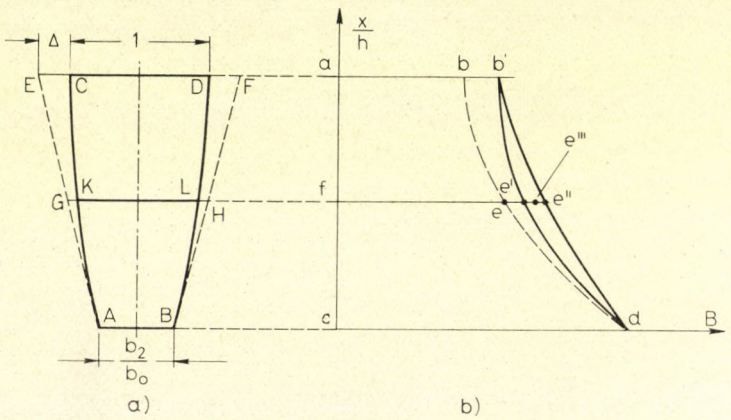


Bild B7

Zu diesem Zweck werden folgende Operationen durchgeführt:

Der Einheitskörper *ACDB* (Bild B7, a) wird durch einen keilförmigen Körper AGEFHB ersetzt, der von den Tangenten *EGA* und *FHB* begrenzt ist, die zu den Parabeln *AKC* und *BLD* in den Punkten *A* und *B* konstruiert wurden. Nehmen wir an, daß sich die dem Fluß $\Phi/(b_0\gamma l)$ entsprechende Induktion B_x in diesem Fall gemäß einer Kurve *bed* verteilt, die wir ohne praktischen Fehler ebenfalls als parabolisch annehmen werden (Bild B7, b). Beim Vergleich der beiden Körper kann man feststellen, daß ihre Höchstinduktionen gleich sind, und daß die Breite des Körpers *AGEFHB* in der Nähe des kleinsten Querschnitts von der Breite des Körpers *AKCDLB* nur sehr wenig abweicht. Deshalb ist der Unterschied der Induktion der beiden Körper in diesem Bereich und folglich auch jene der Feldstärken vernachlässigbar.

Somit kann mit Recht angenommen werden, daß die Abszissen der Parabel *bed* in der Nähe des Punktes *d* zugleich auch die Induktionsverteilung des Körpers *AKCDLB* darstellen. Das gleiche gilt auch für andere beliebige Parabeln, wenn diese durch den Punkt *d* hindurchgehen und in diesem Punkt ihre Differentialquotienten mit dem Differentialquotienten der Parabel *bed* identisch sind. Wenn man von allen möglichen, derart definierten Parabeln

jene Parabel $b'e'd$ wählt, deren Abszisse im Punkt $x/h = 1$ gleich der im Querschnitt CD tatsächlich herrschenden Induktion ist, so wird durch die Abszissen der Parabel $b'e'd$ die wirkliche Induktionsverteilung sowohl in der Nähe des größten als auch in der Nähe des kleinsten Querschnitts sehr genau widergespiegelt.

Im allgemeinen weicht aber die wirkliche Induktion fe'' im mittleren Querschnitt KL von der Abszisse fe' der Parabel $b'e'd$ etwas ab, weil die Kurve der wircklichen Induktionsverteilung (im Bild B.7, b nicht eingetragen) einer Parabel nicht völlig gleichkommt. Es soll vorausgesetzt werden, dass $fe'' > fe'$; dann wird der Wert H, welcher der Induktionsverteilung der Kurve $b'e'd$ entspricht, etwas kleiner als der wirkliche Wert sein.

Würde man die Parabel $b'e'd$ durch die Parabel $b'e''d$ ersetzen, so würden die Abszissen der letzteren im Bereich des Punktes $x/h = 1/2$ die wirkliche Induktionsverteilung darstellen, doch würde man im Bereich der Punkte $x/h = 0$ und $x/h = 1$ etwas zu große Induktionswerte erhalten. Folglich wäre der nach der Parabel $b'e''d$ berechnete Wert H etwas größer als der wirkliche.

Somit können wir für die Werte H *zwei Grenzen angeben: der genaueste Wert von* H *wird durch eine solche Parabel* b'e'''d (*sie ist im Bild B 7, b nicht gezeigt) geliefert, die zwischen die beiden Grenzparabeln* b'e'd *und* b'e''d *fällt. Zur Schätzung der Lage des Punktes* e''' *kann man von folgender Überlegung ausgehen.* In der Nähe des Punktes $x/h = 0$ sind die Abszissen der Parabel $b'e'''d$ etwas größer als die von $b'e'd$, die an dieser Stelle der wirklichen Induktionsverteilung entsprechen. Im Bereich des Punktes $x/h = 1/2$ sind die Abszissen der Parabel $b'e'''d$ etwas kleiner als die von $b'e''d$, die im gegebenen Bereich der wirklichen Verteilung entsprechen. Der Fehler, den man bei der Induktionsberechnung im Bereich des Punktes $x/h = 0$ infolge des Überganges auf die Parabel $b'e'''d$ begeht, wirkt sich aber auf den resultierenden Wert von H mehr aus, als der im Bereich des Punktes $x/h = 1/2$ begangene, weil die Permeabilität der ferromagnetischen Körper für große Induktionen klein ist. Punkt e''' muß daher näher zum Punkt e' als zum Punkt e'' fallen. Im weiteren wird vorausgesetzt, daß die Strecke $e'e''$ durch den Punkt e''' im Verhältnis von 1 : 2 geteilt wird, daß also

$$\overline{e'\,e'''} = 0{,}5\,\overline{e'''\,e''} \tag{B.34}$$

gilt.

Demnach wurde bewiesen, daß die tatsächliche Induktionsverteilung im Körper AKCDLB *mit parabolischen Wänden durch die Induktionsverteilung nach der nicht gezeichneten Parabel* b'e'''d *ersetzt werden kann. Dies bedeutet, daß der »wirkliche Einheitskörper« auf einen solchen »reduzierten Einheitskörper« zurückgeführt werden kann, in welchem sich die Induktion der obigen Parabel gemäß verteilt.*

Der reduzierte Einheitskörper besitzt in der Höhe $x/h = 1$ die Induktion

$$\overline{ab} = \frac{\Phi}{b_0 \gamma l} = B_0, \tag{B.35}$$

in der Höhe $x/h = 0$ die Induktion

$$\overline{cd} = \frac{\Phi}{b_2 \gamma l} = B_2, \tag{B.36}$$

und in der Höhe $x/h = 1/2$ die vorläufig noch unbekannte Induktion $\overline{fe'''}$

Bezeichnen wir das Verhältnis $\overline{fe'''}/B_2$ mit β, so können wir schreiben

$$\beta = \frac{\overline{fe'''}}{B_2}. \tag{B.37}$$

Für den Koeffizienten ϱ eines Körpers, in dem sich die Induktion gemäß einer quadratischen Parabel verteilt, haben wir bereits die allgemeine Formel (B.30) abgeleitet. Setzen wir in diese für B_1 den Wert $\overline{fe'''}$ aus (B.37) und für B_0 aus (B.31) ein, erhalten wir die Formel

$$\varrho = 1{,}8 \frac{1 - 2\alpha + 4\beta}{-1 + 4{,}4\alpha + 2\beta}. \tag{B.38}$$

Was den Koeffizienten β betrifft, so ist seine Größe gemäß der Formel (B.36) gleich

$$\beta = \frac{\overline{fe'''}}{\overline{cd}}. \tag{B.39}$$

Da durch die im Zusammenhang mit der im Bild B7 beschriebene Methode der Bestimmung der durch die Punkte $b'e'''$ und d festgelegten quadratische Parabel letztere als Funktion der drei Breiten $CD = 1$, $KL = b_1/b_0$ und $AB = b_2/b_0$ des gegebenen ferromagnetischen Körpers genau determiniert ist, können wir fe''' sowie $\overline{cd}$ berechnen und erhalten schließlich für β

$$\beta = \frac{b_2}{3} \cdot \left[\frac{4}{-b_0 + 4b_1 - b_2} - \frac{1}{2(-b_0 + 4b_1 - 2b_2)} + \frac{1}{2b_0} + \frac{1}{b_1} \right]. \tag{B.40}$$

Das gleiche Ergebnis hätte man auch dann erhalten, wenn man von der Bedingung $fe'' < fe'$ ausgegangen wäre.

Deshalb ist die Formel (B.40) von allgemeiner Gültigkeit.

Auf Grund ähnlicher Gedankengänge, wie die die Formeln (B.38) und (B.40) ergebenden, wird ermöglicht, das Nomogramm und die auf ihm basierende

nomographische Methode auch für die übrigen der im Bild A1 gezeigten Körper anzuwenden. Wir haben also an Hand von zwei Beispielen exakt die Grundthese des nomographischen Verfahrens nachgewiesen, daß tatsächlich prinzipiell jeder beliebige der im Bild A1 gezeigten Grundkörper von beliebiger monotoner Gestalt durch einen nur auf Grund der geometrischen Konfiguration zu berechnenden Koeffizient ϱ dargestellt werden kann, wobei die Größe ϱ jedesmal durch zwei denkbare, sehr nahe zu einander liegende extreme

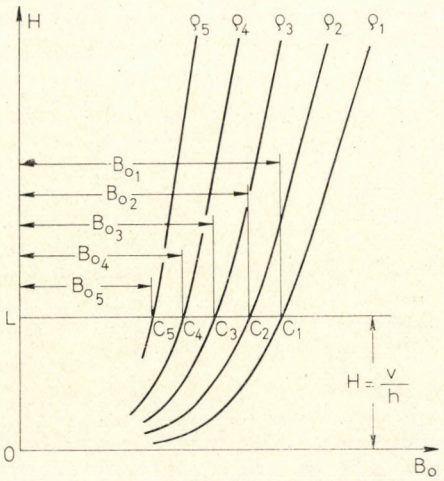


Bild B8

Werte gefunden wird. Die diesem Wert ϱ entsprechende Kurve des Bildes B5 widerspiegelt genau die Beziehungen zwischen den magnetischen und geometrischen Parametern. *Nunmehr wollen wir im weiteren die Lösung der übrigen im Abschnitt* A *aufgezählten Probleme nur kurz andeuten.*

So wurde z.B. im Abschnitt A *die Tatsache erwähnt, daß die klassische Theorie das Problem der Ersetzung eines ferromagnetischen Körpers durch einen magnetisch äquivalenten von anderer Gestalt nie gestellt hat. Demgegenüber möge Bild B8 wenigstens andeuten, daß die Lösung dieser Aufgabe für die nomographische Methode durchaus möglich ist.* Nehmen wir z.B. an, daß einem bestimmten Körper die Kurve ϱ_1 im Bild B8 entspricht. Der Punkt C_1 möge jenen Punkt dieser Kurve andeuten, bei dem der Induktion B_{0_1} von der Grösse LC_1 die mittlere Feldstärke $H = V/h$ entspricht. Denken wir uns nunmehr den Punkt C_1 bei derselben Ordinate H nach links verschoben, so bedeutet dies, daß der Koeffizient ϱ_1 sich auf die Beträge ϱ_2, ϱ_3 u.sw. vergrößert und gleichzeitig die Abszisse B_{0_1} sich auf bestimmte Werte B_{0_2}, B_{0_3} usw. verringert hat. Denken wir uns die Verringerung von B_{0_1} dadurch eingetreten, daß der größte Querschnitt Q_{0_1} des Körpers bei gleichbleibendem Wert des Flusses Φ dementspre-

chend sich auf die Werte Q_{0_2}, Q_{0_3} usw. vergrößert, so sehen wir, daß die magnetischen Hauptparameter Φ und V sich nicht geändert haben, dagegen die Konfiguration in starkem Maße. Es zeigt sich hierbei, daß die verschiedensten Konfigurationen des äquivalenten Einheitskörpers denselben Werten Φ und V entsprechen, z.B. die, bei der die Induktion vom Werte B_{0_1} linear auf den Wert $\varrho_1 \cdot B_{0_1}$ anwächst, oder die, bei der die kleinere Induktion B_0 dementsprechend steiler auf den Wert $\varrho_2 \cdot B_{0_2}$ anwächst, der größer ist als $\varrho_1 \cdot B_{0_1}$, usw.

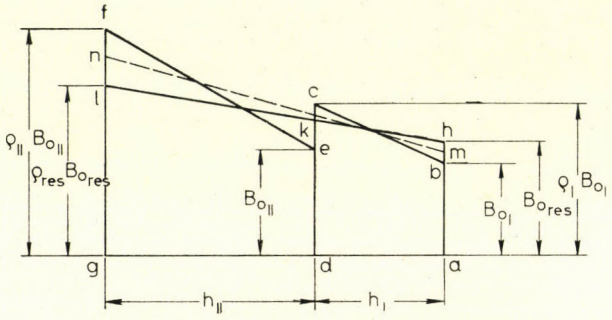


Bild B9

Auf diesem Prinzip weiterbauend, wollen wir im weiteren auch kurz andeuten, auf welchem Weg das im Zusammenhang mit Bild A7 gestellte Problem der Ersetzung von in Reihe geschalteten ferromagnetischen Körpern nomographisch gelöst werden kann. Bild B9 zeige dies für zwei derartige äquivalente Körper. Der eine besitze die Höhe h_I und seine Induktion wachse linear längs der Geraden b—c von B_{0_I} auf den Wert $\varrho_I \cdot B_{0_I}$. Der zweite besitze die Höhe h_{II} und seine Induktion wachse längs der Geraden e—f von $B_{0_{II}}$ auf $\varrho_{II} \cdot B_{0_{II}}$. Nun haben wir auf Grund des Bildes B8 festgestellt, daß z.B. die Induktionsverteilung längs der Geraden b—c durch eine äquivalente ersetzt werden kann, bei der B_{0_I} größer wird, aber $\varrho_I \cdot B_{0_I}$ kleiner wird. Eine derartige denkbare äquivalente Induktionsverteilung könnte also für den Körper mit der Höhe h_I z.B. die Verteilung längs der Geraden h—k sein. Analog können wir uns vorstellen, daß im Körper mit der Höhe h_{II} die Induktionsverteilung gemäß der Geraden e—f durch eine äquivalente Verteilung gemäß der Geraden k—1 ersetzt wird. Solche äquivalente Geraden gibt es offenbar wie aus Bild B8 hervorging, viele mögliche. Wenn wir aber von diesen jene Geraden m—k und k—1 auswählen, die zusammen eine einzige Gerade m—1 ergeben, so bedeutet dies offenbar, daß wir die beiden magnetisch in Reihe geschalteten Körper mit der Höhe h_I bezw. h_{II} durch einen einzigen äquivalenten ersetzt haben, der die Höhe $h_I + h_{II}$ besitzt und in dem die Induktion vom Wert $B_{0_{res}}$ auf einen Wert $\varrho_{res} \cdot B_{0_{res}}$ linear ansteigt. Dies bedeutet, daß es

möglich ist, die beiden Körper, von denen der eine durch h_{I} $B_{0_{\mathrm{I}}}$ und ϱ_{I} und der andere durch h_{II}, $B_{0_{\mathrm{II}}}$ und ϱ_{II} gekennzeichnet ist, durch einen einzigen resultierenden zu ersetzen, der durch die Werte $h_{\mathrm{I}} + h_{\mathrm{II}}$, $B_{0_{\mathrm{res}}}$ und ϱ_{res} gekennzeichnet ist.

Da im Buch des Autors der hier angedeutete Weg der Lösung der beiden erwähnten Probleme genau geschildert wird, wollen wir die Einzelheiten dieser Frage nicht mehr weiter verfolgen, sondern zu einem anderen Problem, nämlich dem der Wirkung der parallelgeschalteten Nut gemäß Bild A4 übergehen.

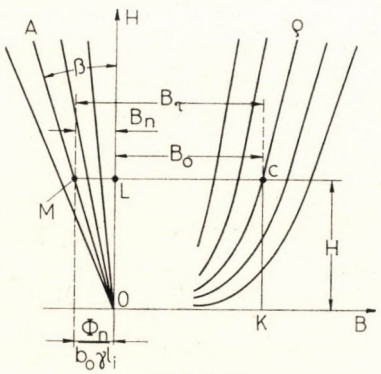


Bild B10

Es läßt sich beweisen, daß die Flüsse des Bildes A4 durch zwei solche ersetzt werden können, die für jeden Wert x dieselbe Größe besitzen. Den durch den Zahn gehenden Fluß werden wir mit Φ_z bezeichnen und den durch die Nut gehenden mit Φ_n. Der Wert des letzteren ist

$$\Phi_n = \frac{0{,}4\pi V}{h} \cdot b \cdot \zeta, \tag{B.41}$$

wobei der Koeffizient

$$\zeta = f(\varrho) > 1 \tag{B.42}$$

ist und für jedes berechnete ϱ leicht bestimmbar ist. Für diesen Fall sind im Nomogramm gemäß Bild B10 außer den Kurven ϱ auch noch vom Mittelpunkt O ausgehende Geraden vorgesehen, von denen jene, mit A bezeichnete ausgewählt wird, für die

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0{,}4\pi \cdot \zeta}{b_0 \gamma l_i} \tag{B.43}$$

ist. In diesem Fall ist offenbar die Strecke $\overline{LM}$ gleich $\Phi_n/(b_0 \cdot \gamma l_i)$ wobei l_i die ideale Länge des Ankers ist. Da, wie wir bereits wissen, die Strecke $\overline{LC}$

der Größe $B_0 = \Phi_z/(b_0 \gamma l_i)$ entspricht, gibt die Strecke $\overline{MC}$ jenen Wert der Induktion

$$B_\tau = \frac{\Phi_\tau}{b_0 \gamma l_i}, \tag{B.44}$$

aus dem für den gegebenen Wert $V = H \cdot h$ der entsprechende Wert Φ_τ (und umgekehrt) leicht bestimmt werden kann.

In diesem Zusammenhang möge auch kurz auf folgende Tatsache hingewiesen werden. Nach ähnlichen Prinzipien, wie die Ersetzung von magnetisch in Reihe geschalteten Körpern (z.B. gemäß Bild A7) durch einen einzigen magnetisch äquivalenten Körper von einfacher Gestalt erfolgt, ist es auch möglich, in Reihe geschaltete Zahn-Nut-Bereiche, von deren jeder aus je einem Zahn und einer parallel geschalteten Nut besteht, (z.B. gemäß Bild A8 bezw. A9) durch einen einzigen äquivalenten Zahn-Nut-Bereich von einfacher Konfiguration zu ersetzen, der den in Reihe geschalteten magnetisch in dem Sinne äquivalent ist, daß jeder beliebige Fluß Φ_τ im äquivalenten Bereich jene Spannung ΣV erzeugt, die die Summe der durch Φ_τ in den einzelnen Bereichen hervorgerufenen Spannungen V darstellt. Da diese Methode im erwähnten Buche des Autors genau dargestellt ist, wollen wir auf diese Frage nicht weiter eingehen.

Nunmehr erzeugen auch die in bezug auf Bild A5 und A6 sich für die klassische Theorie ergebenden Probleme keinerlei prinzipielle Schwierigkeit mehr, wenn sie nomographisch gelöst werden.

Vorher setzen wir fest, daß

$$\frac{V_0}{h} = H_0 . \tag{B.45}$$

Nun beträgt im Bild A5 der Spannungsabfall längs des Zahnes $V = H \cdot h$ und die magnetische Spannung zwischen der inneren Polfläche und dem Zahngrund $V_0 = H_0 \cdot h$. Die Differenz $V_0 - V$ ist gleich

$$V_0 - V = B_\delta \cdot \frac{\delta \cdot k_c}{0{,}4\pi}, \tag{B.46}$$

wobei

$$B_\delta = \frac{\Phi_\tau}{\tau_n \cdot l_i} \tag{B.47}$$

gleich ist der mittleren Luftspaltinduktion des Flusses der Nutteilung τ_n.

Setzen wir aus (B.44) in (B.47) für Φ_τ ein und aus (B.47) in (B.46) für B_δ ein, so erhalten wir die Formel

$$B_\tau = (H_0 - H) \cdot \frac{0{,}4\pi h \tau_n}{\delta k_c b_0 \gamma} . \tag{B.48}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $H_0/(H_0 - H)$, so erhalten wir

$$H_0 \cdot \frac{0{,}4\pi h\tau_n}{\delta k_c b_0 \gamma} : B_\tau = H_0 : (H_0 - H). \tag{B.49}$$

In dieser Gleichung sind bei gegebener Größe $H_{0'}$ also bei gegebener Größe $V_{0'}$ die beiden Werte B_τ und H unbekannt. Sie können aber nunmehr gemäß Bild B11 auf Grund folgender nomographischer Zusammenhänge ge-

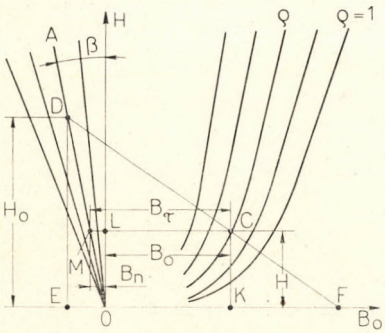


Bild B11

funden werden. Wir bestimmen auf der Geraden OA, die dem gewählten der Nut entsprechenden tg β entspricht, jenen Punkt D, dessen Ordinate $\overline{DE}$ gleich

$$\overline{DE} = H_0\,, \tag{B.50}$$

ist, und auf der Abszissenachse jenen Punkt F, dessen Abszisse die Größe

$$\overline{OF} = \overline{DE}\,\frac{0{,}4\pi h\tau_n}{\delta k_c b_0 \gamma} \tag{B.51}$$

besitzt. Wenn wir die Punkte D und F durch die Gerade DF miteinander verbinden, schneidet letztere aus der ϱ-Kurve einen Punkt C heraus, dessen Ordinate gleich H ist und dessen horizontale Entfernung $\overline{CM}$ von der Geraden OA die Größe B_τ besitzt. Dies geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DOF und DMC hervor, da diese zur Folge hat, daß

$$\overline{OF} : \overline{MC} = H_0 : (H_0 - H), \tag{B.52}$$

was genau dasselbe ausdrückt, wie die Gleichung (B.49). Wie früher ergeben sich mit der Größe B_τ auch die Werte B_n bzw. B_0 in Gestalt der Strecken $\overline{ML}$ bzw. $\overline{LC}$.

Wir sehen also, daß wir zu dem gegebenen Wert $V_0 = H_0 h$ in einfachster Weise die Größen $V_m = Hh$, $\Phi_\tau = b_0 \gamma l_i B_\tau$, $\Phi_z = b_0 \gamma l_i B_0$ und $\Phi_n = b_0 \gamma l_i B_n$ nomographisch bestimmen können.

*Es zeigt sich also, daß auf Grund der nomographischen Konstruktion gemäß Bild B*11 *nicht nur für die gegebene Größe H_0 und Luftspaltdicke δ im Falle des Bildes A*5 *sofort die dazu gehörigen magnetischen Parameter gefunden werden können, sondern, daß auf diese Weise nunmehr auch im Falle des Bildes A*6*, der der klassischen Theorie so große Schwierigkeiten bereitet, in äußerst einfacher Weise sämtliche uns interessierenden Parameter abgelesen werden können.*

Nehmen wir zuerst an, daß die Maschine leerläuft und daher an sämtlichen Stellen des Luftspaltes dieselbe Größe V_0 wirkt. In diesem Fall müssen wir nur für jede Nutenteilung den zu dieser Stelle gehörigen Wert $\delta \cdot k_c$ des sich ändernden Luftspaltes bestimmen und entsprechend der Vergrößerung des Luftspaltes die Entfernung OF gemäß der Formel (B.51) verkleinen. Den so erhaltenen neuen Punkt F mit dem gleichgebliebenen Punkt D verbindend, erhalten wir einen neuen Schnittpunkt C und dementsprechend die neuen Parameter H und B_τ, d.h. wir erkennen unmittelbar, um wie viel gemäß Formel (B.47) und (B.44) die Luftspaltinduktion B_δ mit der Vergrößerung des Luftspaltes abnimmt.

Handelt es sich nicht um Leerlauf, sondern um den Fall der Belastung, so ist die Bestimmung der Verteilung der Luftspaltinduktion B_δ genauso einfach. Da nunmehr in irgendeiner Entfernung von der Polmitte $\pm y$ die zwischen Polfläche und Zahngrund wirkende magnetische Spannung anstatt des Wertes V_0 den Wert $V_0 \pm y \cdot A$ besitzt, erhält $\overline{DE}$ nunmehr die Größe

$$\overline{DE} = \frac{V_0 \pm yA}{h}, \tag{B.53}$$

d.h. für verschiedene Stellen des Luftspaltes erhalten nunmehr nicht nur die Punkte F gemäß (B.50), sondern auch die auf der Geraden OA liegenden Punkte D andere entsprechende Lagen. Werden die derart sich ergebenden Punktpaare verbunden, ergeben sich analog zum Fall des Leerlaufes die entsprechenden Punkte C und damit die magnetischen Parameter H und B_τ. *Wir sehen also auch die interessante Tatsache, daß für die nomographische Methode Leerlauf und Belastung sich nur dadurch unterscheiden, daß der erste den Grenzfall der letzteren darstellt.*

Wir können aber genauso einfach, wie die soeben geschilderten, auch andere praktisch äußerst wichtige Fragen beantworten, z.B. die Frage, welche Gestalt der Luftspalt besitzen soll, damit die Verteilung der Größen B_δ eine gewünschte Gestalt erhält. Hierzu ist es offenbarenur notwendig, außer den zu einer bestimmten Stelle des Luftspaltes gehörigen Punkt D auch noch den zur gewünschten Größe B_δ gehörigen Punkt C festzulegen. Die Verbindungsgerade DC schneidet

offenbar aus der Abszissenachse jenen Punkt F heraus, für den sich gemäß der Formel (B.51) die notwendige Größe δk_c ergibt. Auch in diesem Fall ist es offenbar prinzipiell gleichgültig, ob die gewünschte Form der peripherischen Verteilung der Größen B_δ sich bei Leerlauf oder Belastung ergeben soll.

Bis jetzt haben wir in diesem Abschnitt die Prinzipien aufgezeigt, auf Grund derer die nomographische Methode die verschiedensten, im Abschnitt A aufgezählten Probleme löst.

Als letztes wollen wir noch ganz kurz das Grundprinzip anführen, auf Grund dessen nomographisch auch die magnetischen Parameter des gesättigten Polvorsprunges bestimmt werden können. Wir gehen hierbei im Anfang ähnlich vor, wie wir dies bei der Berechnung der Koeffizienten ϱ getan haben. *Wir suchen nämlich zwei einander nachliegende Grenzen, innerhalb derer sich die gesuchten magnetischen Parameter befinden müssen. Der Grundgedanke ist hierbei folgender.*

Wir gehen zuerst von der Annahme aus, daß $V_{\mathrm{I}} = 0$, $V_{\mathrm{II}} = 0$ und $V_{\mathrm{III}} = 0$. Für diesen Fall lassen sich offenbar die entsprechenden Werte $\Phi_{y\mathrm{I}}$, $\Phi_{y\mathrm{II}}$ und $\Phi_{y\mathrm{III}}$ in einfacher Weise, auf Grund der in dem Bild B11 gezeigten Methode feststellen. Ebenso können die Größen Φ_{σ_I}, $\Phi_{\sigma_{II}}$ und $\Phi_{\sigma_{III}}$ in einfacher Weise gemäß der Lehmann-Richterschen Methode berechnet werden. Auf dies Weise können für den erwähnten Fall auch die sich ergebenden Summenflüsse in jedem der Teile I, II und III bestimmt werden. Schließlich können wir nomographisch für jeden der Teile I, II und III jene magnetischen Spannungsabfälle V_{Imax}, V_{IImax} und V_{IIImax} bestimmen, die durch die erwähnten Flüsse hervorgerufen werden. Hiebei stellen die Werte V_{Imax}, V_{IImax} und $V_{\mathrm{III\,max}}$ eine obere maximale Grenze für die wirklichen gesuchten Werte V_{I}, V_{II} und V_{III} dar. Dies ergibt sich einfach aus der Tatsache, daß die oben erwähnten Flüsse wegen der anfänglichen Vernachlässigung der schwächenden Wirkung der Größen V größere Werte annahmen, als sie in Wirklichkeit besitzen.

Berechnen wir nunmehr zum zweiten Male die verschiedenen Flüsse Φ_y und Φ_σ mit Berücksichtigung der soeben erhaltenen Größen V_{Imax}, V_{IImax} und V_{IIImax}, so erhalten wir offenbar Flüsse, die geringer sind als die wirklichen. Die auf Grund dieser Flüsse in den Teilen I, II und III sich ergebenden Größen V_{Imin}, V_{IImin} und V_{IIImin} stellen daher nunmehr den minimalen Grenzfall für die Werte V_{I}, V_{II} und V_{III} dar. Die Frage, wie zwischen den auf die geschilderte Weise erhaltenen Grenzfällen die letzteren bestimmt werden, wollen wir im weiteren, als nicht prinzipiell, nicht weiter behandeln, uzw. deshalb nicht, weil sie ja in dem, am Beginn dieses Artikels erwähnten Buch des Autors ausführlich beschrieben ist

Hierbei möge nur noch eine für die ganze nomographische Methode sehr wesentliche Tatasche erwähnt werden, die im Abschnitt D eine wichtige Rolle spielen wird. Dies ist der Umstand, daß im Buch sämtliche Lösungen in Form von ganz einfachen, durch praktische Berechnungsbeispiele demonstrierten Instruktionen gegeben werden.

C. Die bisherige Anwendung elektronischer Rechenmaschinen zur Berechnung magnetischer Kreise elektrischer Maschinen

In den letzten Jahre wurden von vielen Autoren elektromagnetische Probleme mit Hilfe der Anwendung elektronischer Rechenmaschinen gelöst. Diese Methode hat sich als umso fruchtbarer erwiesen, je mehr es sich um derartige Fragen handelt, deren Beantwortung die Lösung komplizierter Systeme von Differentialgleichungen erfordert. Nehmen wir z.B. das Problem, die im Bild A11 angedeutete Induktionsverteilung für den Fall zu bestimmen, in dem die Erregerdurchflutung nicht durch einen unendlich dünnen Strombelag ersetzt wird, sondern tatsächlich den größten Teil des Raumes zwischen Pol und Wendepol ausfüllt. In jedem Punkt der Durchflutung gelten in diesem Falle Beziehungen, die die differentiale Änderung der Durchflutung mit der differentialen Änderung der Induktionsverhältnisse gegenseitig verbinden und komplizierte Differentialgleichungen ergeben. Es ist klar, daß in diesem Falle die Rechenmaschine, wenn sie mit den den Randbedingungen entsprechenden Daten gespeist wird und wenn der zu untersuchende Raum in eine genügende Anzahl von sehr kleinen Elementen aufgeteilt wird, imstande ist, die sämtlichen dieser Teile entsprechende Lösung rasch und genau zu berechnen, wodurch sich schließlich die gesuchte Lage der Induktionslinien ergibt.

Es ist auch klar, daß Probleme, die mit der Nonlinearität der ferromagnetischen Körper zusammenhängen, mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine gelöst werden können. Wenn wir z.B. im Querschnitt einer Gleichstrommaschine nicht nur die den verschiedenen Durchflutungen entsprechenden Räume sondern auch das gesamte Eisensystem in eine sehr große Zahl von äußerst kleinen elementaren Flächen aufteilen, so ist es offenbar möglich, die Induktionslinien nicht nur in den von der Durchflutung erfüllten Räumen, sondern auch im Eisen zu erhalten, wofern die Rechenmaschine für jeden der erwähnten Elementarflächen das sich beständig ändernde Verhältnis zwischen der Feldstärke H und der Induktion B berücksichtigt. Offenbar erfordern diese und ähnliche Aufgaben eine sehr komplizierte und langwierige Arbeit der Programmierung. Diese zahlt sich unbedingt in jenen Fällen aus, in denen eine andere Methode einfach nicht zum Ziele führen kann. Als Beispiel für einen solchen Fall sei z.B. die Bestimmung der Verteilung von Wirbelströmen in gesättigten Eisenteilen erwähnt. Die sich in einem derartigen Fall ergebenden Differentialgleichungen, in denen außer der von Punkt zu Punkt sich ändernden Stromdichte auch die von Punkt zu Punkt sich auf komplizierte Weise ändernde Permeabilität fungiert, sind offenbar praktisch nur mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine lösbar, und in diesem Fall ist es einfach unvermeidbar, die entsprechende große Programmierungsarbeit auf sich zu nehmen.

Nun kommen aber bei der praktischen Berechnung von elektrischen Maschinen derartige Aufgaben nur verhältnismäßig selten vor, da man im allgemeinen — wie dies die Abschnitte A *und* B *des vorliegenden Artikels an Hand einiger Bespiele gezeigt haben — sich die magnetische Verteilung der gesamten Maschine auf einzelne verhältnismäßig einfache magnetische Kreise aufgeteilt denkt, wobei die gesuchten Parameter für jeden dieser Kreise getrennt berechnet werden.* Da in diesen, den weitaus größten Teil der praktischen Aufgaben darstellenden Fällen die sich auf die gesamte Maschine beziehende genaue Verteilung der magnetischen Parameter (die auch den Übergang zwischen den erwähnten einzelnen magnetischen Kreisen zeigen würde) überflüssig ist, ist es klar, daß die Lösung dieser Aufgaben mit Hilfe einer solchen Programmierung, auf Grund derer die elektronische Rechenmaschine die sich auf sämtliche Punkte der Maschine bezeichnende genaue Gesamtverteilung ergibt, zu kostspielig wäre und einen zu großen Arbeitsaufwand beanspruchen würde. Aus diesem Grund hat sich die oben beschriebene Art der Anwendung der elektrischen Rechenmaschine in der Praxis der Berechnung elektrischer Maschinen bisher nur bei wissenschaftlich-theoretisch zu nennenden Aufgaben, wie es die oben aufgezählten sind, praktisch durchsetzen können.

Andererseits haben wir aber im Abschnitt A dieses Artikels gezeigt, daß die praktische Berechnung der in den erwähnten einzelnen magnetischen Kreisen auftretenden magnetischen Parameter mit Hilfe der klassischen Berechnungsmethoden bei Zunahme der Sättigung und der Kompliziertheit der geometrischen Konfiguration nur mit Hilfe eines sehr großen Arbeitsaufwandes oder überhaupt nicht möglich ist.

Natürlich ist es auch möglich, die Formeln, deren sich die klassische Methode bedient, als Grundlage für die Programmierung der elektronischen Rechenmaschine zu verwenden und so die zur Berechnung notwendige Zeit bedeutend zu verkürzen. *Da aber, wie wir gesehen haben, die klassische Methode dazu führt, daß die Lösungsversuche immer wieder wiederholt werden müssen und zwar desto öfter, je komplizierter der Zusammenhang zwischen Sättigung und geometrischer Konfiguration ist, würde mit dieser Kompliziertheit auch die der Programmierungsarbeit rasch anwachsen und die Zweckmäßigkeit der Verwendung der Rechenmaschine immer mehr in Frage gestellt sein.* Außerdem möge daran erinnert werden, daß die klassische Methode gewisse, wie wir gesehen haben, große prinzipielle Wichtigkeit besitzende Aufgaben niemals formuliert hat, wie z.B. die Frage der magnetischen Äquivalenz von Körpern verschiedener Konfiguration, die Ersetzung von in Reihe geschalteten Körpern durch einen Äquivalenten und überhaupt die Frage der genauen Darstellung und Untersuchung der Wechselwirkung zwischen der Konfiguration und den magnetischen Parametern. *All diese Fragen konnte die klassische Theorie nicht stellen, weil es von vornherein klar war, daß die Lösung derartiger Fragen eine ganz ungeheure Menge von ständigen Versuchsberechnungen sowie die stän-*

dige Entscheidung darüber nötig macht, in welche Richtungen die Versuche zu ändern sind. Bei der Verwendung der Rechenmaschine würde dementsprechend die Programmierungsarbeit so langwierig und kompliziert werden, daß man letzten Endes aus diesem Grunde auf die Lösung der erwähnten Probleme auch bei Verwendung der elektronischen Rechenmaschine praktisch verzichten müßte. Dies würde aber folgendes bedeuten: Die Anwendung der Rechenmaschine würde nur zur Beschleunigung der Lösung derjenigen verhältnismässig einfachen Aufgaben verwendet werden, die der Berechner von elektrischen Maschinen im Betriebe bisher auf Grund der klassischen Methoden manuell durchgeführt hat. *Die große Zahl der vom Autor in seinem Buche ausführlich aufgezählten, hier nur teilweise und oberflächlich berührten, praktisch wichtigen, aber bisher für unlösbar gehaltenen Aufgaben würden auch weiter als unlösbar gelten und müßte sich der Berechner wie bisher mit dieser Tatsache abfinden.*

Unter diesen Umständen ist es nur selbstverständlich, daß sich als möglicher Ausweg aus der geschilderten bedauerlichen Lage der Gedanke ergab, die Berechnung der Parameter der erwähnten einzelnen von einander getrennten magnetischen Kreise mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine, nicht ausgehend von den die klassischen Methoden kennzeichnenden Formeln durchzuführen, sondern ausgehend von den Gedankengängen der nomographischen Methode des Autors. Dafür spricht offenbar die Tatsache, daß bei der letzteren — wie dies im Abschnitt B gezeigt wurde — die geometrische Konfiguration als selbstständiger Parameter auftritt, wodurch die Zusammenhänge zwischen der Konfiguration und den magnetischen Parametern sehr vereinfacht werden und daher die notwendige Berechnungsarbeit im Vergleich zur klassischen Methode verhältnismäßig sehr wenig Arbeitsaufwand erfordert. *Es lag also der Gedanke nahe, daß auch die Programmierung einer elektronischen Maschine bei Verwendung der durch die nomographische Methode ausgearbeiteten einfachen Formeln und Zusammenhänge verhältnismäßig einfach ist und es ermöglicht, die Zeit, die die manuelle Anwendung der nomographischen Methode erfordert, in bedeutendem Maße zu verringern.*

Soweit es dem Autor bekannt ist, haben sich zum ersten Mal eine zu diesem Fragenkomplex gehörige Aufgabe die Sowjetautoren B. A. KITAITSCHIK und G. G. GROMOV in einem in der Nr. 6 der Zeitschrift *Isvestija vüsschih Utschebnih Zavedenii* (Elektronika) im Jahre 1970 veröffentlichen Artikel gestellt.

Die Aufgabe bestand darin, die Verteilung der Luftspaltinduktion in dem längs der Peripherie des Ankers eines Zugmotors veränderliche Dicke besitzenden Luftspalt gemäß der im Zusammenhang mit dem Bild B11 beschriebenen nomographischen Methode festzustellen, wobei aber die Berechnung mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführt wurde. Zu diesem Zwecke berechneten die genannten Autoren den den keilförmigen Ankerzähnen entsprechenden Koeffizient $\varrho = 1{,}6$, nachher bestimmten sie

die zu den verschiedenen möglichen Abszissen gehörigen Ordinaten der gewünschten Kurve für $\varrho = 1{,}6$. Die derartig erhaltenen Abszissen und Ordinaten dieser Kurve wurden in der elektronischen Rechenmaschine gespeichert. Außerdem wurden die Gleichungen einprogrammiert, die gemäß des am Beginn dieses Artikels erwähnten Buches des Autors die Lage der Geraden DF für die zu verschiedenen Stellen des Luftspaltes gehörigen Werte $\delta \cdot k_c$ kennzeichnen, worauf die Rechenmaschine die gesuchten magnetischen Parameter der Punkte C berechnete, die sich als Schnittpunkte der verschiedenen Geraden DF mit der im Speicher fixierten Kurve für $\varrho = 1{,}6$ ergaben.

Auf die Frage, ob die Methode der Leningrader Autoren tatsäschlich einen praktischen Weg zur Überführung des gesamten, bisher auf manuellen Verfahren beruhenden nomographischen Systems auf die elektronische Rechenmaschine zeigt, muß festgestellt werden, daß dies leider aus den im Weiteren ausgeführten Gründen nicht der Fall ist.

An der erwähnten Berechnung fällt nämlich auf, daß nur ein einziger Wert $\varrho = 1{,}6$ fungiert, während im allgemeinen bei den im Buche aufgezählten Aufgaben die verschiedensten Werte von ϱ zu berechnen sind. Dies war den Autoren einerseits dadurch möglich, daß die Zähne des zu berechnenden Zugmotors keilförmig waren, während zur Berechnung solcher Zahnformen, die sich aus mehreren in Reihe geschalteten Teilen zusammensetzen, die Werte ϱ für jeden der erwähnten Teile bekannt sein müßten. Andererseits verzichteten die beiden Autoren auf die Berechnung des Spannungsabfalles im Polvorsprung, der, wie im Abschnitt A erwähnt wurde, sich aus mehreren Teilen zusammensetzt, für die ebenfalls die entsprechenden verschiedenen Koeffizienten ϱ bestimmt werden müssen.

Nun ist es natürlich den erwähnten Autoren, die Spezialisten auf dem Gebiet von Zugmotoren sind, sehr gut bekannt, daß gerade in dieser Art von Motoren die Spannungsabfälle V_{I}, V_{II} und V_{III} in den Polvorsprüngen oft eine sehr große Rolle spielen und daher bei ihrer Vernachlässigung die sich derart ergebende peripheriale Verteilung der radialen Luftspaltinduktion stark von der wirklichen abweichen kann. Andererseits berufen sie sich selbst auf das erwähnte Buch des Autors und kennen daher offenbar auch die von ihm vorgeschlagene nomographische Methode der Bestimmung der Spannungsabfälle in den Polvorsprüngen. Die Tatsache, daß sie trotzdem nicht versucht haben, auch diese Methode mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine zu verwirklichen und es vorgezogen haben, beträchtliche Abweichungen der Verteilung der Luftspaltinduktion in Kauf zu nehmen, dürfte daher folgende Ursache haben.

Wenn im Laufe der nomographischen Berechnung viele verschiedene ϱ-Kurven vorkommen, ergeben sich offenbar bei der von den Leningrader Autoren verwendeten Methode folgende zwei Möglichkeiten: Die eine besteht darin, dass die Daten jeder ϱ-Kurve mit Hilfe der oben erwähnten Methode

von der Rechenmaschine berechnet und in ihrem Speicher fixiert wird. Dies würde aber — wenn wir die große Zahl von verschiedenen ϱ-Kurven, die im Laufe einer nomographischen Berechnung vorkommen können, und die große Zahl der zur genauen Fixierung jeder ϱ-Kurve notwendigen Punkte berücksichtigen — eine sehr starke Beanspruchung der Speicherkapazität bedeuten. Die andere Möglichkeit besteht darin, daß die Rechenmaschine ohne zusätzliche Beanspruchung der Speicherkapazität die einzelnen Punkte jeder der im Laufe der Berechnung vorkommenden (und in vielen Fällen mehrmals vorkommenden) ϱ-Kurven immer wieder von neuem berechnet. Dieser Vorgang würde aber zur starken Vergrößerung der Programmierungsarbeit und der Berechnungszeit führen. *Die in beiden Fällen auftretenden erwähnten Nachteile würden dazu führen, daß die Zweckmäßigkeit der Anwendung der Rechenmaschine bei der Durchführung nomographischer Berechnungen von magnetischen Kreisen gerade für die wichtigsten und häufigsten solcher nomographischen Aufgaben in Frage gestellt wäre.*

D. Die nomographischen Methoden bei der Anwendung der elektronischen Rechenmaschine.

Autor ist überzeugt, daß die Anwendung der elektronischen Rechenmaschine — woferne die im Abschnitt C angedeuteten sich im Zusammenhang mit dem Vorkommen vieler ϱ-Kurven auftretenden Schwierigkeiten in einfacher Weise ausgeschaltet werden könnten — eine außerordentlich große Bedeutung für die Erhöhung der praktischen Ausnützung der nomographischen Methode der Berechnung stark gesättigter und kompliziert geformter magnetischer Kreise besitzen würde. Zu den im Abschnitt B aufgezählten Vorteilen gegenüber den klassischen Methoden kommt nämlich auch noch der Umstand hinzu, daß die nomographische Methode es ermöglicht, das durchzuführende Verfahren in Gestalt einfacher Instruktionen niederzulegen, die es auch weniger qualifizierten Berechnern ermöglichen, die aufeinander folgenden Stufen der Lösung sozusagen mechanisch zu verwirklichen. *Es ist klar, daß die Verwandlung dieser Instruktionen*, die im erwähnten Buche des Autors in großer Zahl aufgezählt sind, *in die entsprechenden Algorithmen sehr einfach erfolgen kann, was die Anwendung einer elektronischen Rechenmaschine sehr erleichtern würde.*

Es war aber vorher notwendig, eine solche Methode der Programmierung auszuarbeiten, bei der die oben erwähnten, bei der Berücksichtigung vieler verschiedener ϱ-Kurven auftretenden Schwierigkeiten wegfallen.

Dem Autor ist es im Rahmen der von ihm im Forschungsinstitut für Automatisierung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften geleiteten Arbeit gelungen, dieses interessante Problem zu lösen und zwar auf Grund von Überlegungen, die er im folgenden darlegen wird.

Die Grundlage, von der er ausgegangen ist, ist die Entdeckung, daß es möglich ist, jede irgendeinem beliebigen Wert von ϱ entsprechende Kurve des Nomogrammes in einfacher Weise auf eine beliebige andere ϱ-Kurve zurückzuführen. In Bild D.1. sei dies am Beispiel einer beliebigen ϱ-Kurven dargelegt, die im gegebenen Fall auf die $\varrho = 1$ Kurve zurückgeführt werden möge.

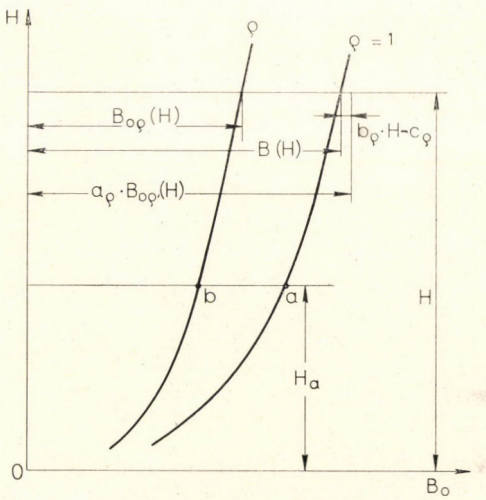


Bild D1

Nehmen wir irgend einen mittleren Wert der zur ϱ-Kurve gehörigen Werte H an und bezeichnen ihn mit H_a. Bezeichnen wir das Verhältnis der Abszisse des zu H_a gehörigen Punktes a der Kurve $\varrho = 1$ zur Abszisse des zu H_a gehörigen Punktes b der ϱ-Kurve mit a_ϱ. Dann gilt, wie Autor festgestellt hat, folgendes Gesetz: *Multiplizieren wir die zu einem beliebigen Wert* H *gehörige Abszisse* B_0 *der ϱ-Kurve (wir wollen diesen Wert mit* $B_{0\varrho}$ (H) *bezeichnen) mit der Größe* a_ϱ, *so ergibt sich eine Größe, die sich von dem zur selben Größe* H *gehörigen Wert der Abszisse der $\varrho = 1$-Kurve (er möge im weiteren mit* $B_{0\varrho 1}$(H) *bezeichnet werden) nur um einen verhältnismäßig geringen Betrag unterscheidet. Letzteren wollen wir — der Einfachkeit halber den Index 0 weglassend — im weiteren* ΔB(H) *nennen, wobei*

$$\Delta B(H) = a_\varrho \cdot B_{0\varrho}(H) - B_{0\varrho 1}(H) \qquad \text{(D.1)}$$

Wenn wir nunmehr die sich für verschiedene Werte H ergebenden Werte $\Delta B(H)$ als Funktion von H aufzeichnen, erhalten wir *Kurven, die wir genügend genau durch zwei Gerade ersetzen können.*

Es ist leicht einzusehen, daß die Werte $\Delta B(H)$ bei der Umrechnung der Kurve $\varrho = 2{,}66$ auf die Kurve $\varrho = 1$ am größten sein werden, da sich

ja die Gestalt der ersteren von der der letzeren mehr unterscheidet als die Gestalt der übrigen ϱ-Kurven. Daraus folgt offenbar auch, daß bei der Ersetzung dieser $\Delta B(H)-$Kurve durch Gerade die sich für diesen Fall ergebenden Fehler am größten sein werden. Nun ist es aber möglich, die sich bei der vom Autor entwickelten Methode ergebenden maximalen Fehler noch beträchtlich weiter zu verkleinern.

Wie nämlich anfangs ausgeführt wurde, ist es prinzipiell möglich, eine beliebige ϱ-Kurve auf eine beliebige andere ϱ-Kurve zurückzuführen. *Wir können also die ϱ-Kurve anstatt, wie es bisher der Einfachkeit halber gezeigt wurde, auf die Kurve für $\varrho = 1$, auf eine beliebige andere, z.B. auf eine ungefähr* in der Mitte zwischen den extremen Kurven ($\varrho = 1$ bezw. $\varrho = 2{,}66$) liegende zurückführen, die wir mit ϱ_m bezeichnen werden. In diesem Falle ändert sich offenbar in bezug auf den Koeffizienten a_ϱ nur das eine, daß seine Werte nur zwischen der Kurve für $\varrho = 2{,}66$ und der für $\varrho = \varrho_m$ größer als eins sein werden, während sie zwischen der letzteren Kurve und der für $\varrho = 1$ kleiner als eins werden. Die Werte $\Delta B(H)$ ergeben sich gemäß der Gleichung

$$\Delta B(H) = a_\varrho \cdot B_{0\varrho}(H) - B_{0\varrho m}(H), \tag{D.2}$$

wobei der Ausdruck $B_{0\varrho m}(H)$ die Abszissen der Kurve für $\varrho = \varrho_m$ als Funktion von H darstellt. Die Werte $\Delta B(H)$ gemäß der Formel (D.2) sind offenbar kleiner als die gemäß der Formel (D.1), da ja z.B. der Unterschied der Form der Kurve für $\varrho = 2{,}66$ im Vergleich zu der der Kurve für $\varrho = \varrho_m$ entsprechend kleiner sein wird, als im Vergleich zu der der Kurve für $\varrho = 1$. Ersetzen wir die derart kleinergewordenen Abszissen besitzende Kurve $\Delta B(H)$ durch entsprechende Geraden, so werden offenbar auch die sich hierbei ergebenden Fehler entsprechend kleiner werden.

Vom Standpunkt des Speichers der elektronischen Rechenmaschine ändert sich in diesem Falle nichts anderes, als daß in ihm nicht die Kurve für $\varrho = 1$ sondern die Kurve $B_{0\varrho m}(H)$ fixiert wird.

Von den oben erwähnten Geraden, durch die wir die ΔB(H) Kurven ersetzen können, gilt die eine für den stark gesättigten Bereich, d.h. von irgend einem Wert $H = H_k$ aufwärts und entspricht dem Ausdruck $b_\varrho H + c_\varrho$, während die zweite für den schwach gesättigten Bereich gilt, d.h. von H_k abwärts und dem Ausdruck $b'_\varrho H + c'_\varrho$ entspricht.

Hierbei ergeben sich die Konstanten b_ϱ, c_ϱ, b'_ϱ und c'_ϱ, die positive oder negative Werte annehmen können, als Funktion von ϱ. Es ergibt sich also genügend genau die Gesetzmäßigkeit:

$$a_\varrho \cdot B_{0\varrho}(H) = B_{0\varrho m}(H) + b_\varrho \cdot H + c_\varrho \tag{D.3}$$

für den Bereich $H > H_k$ und

$$a_\varrho \cdot B_{0\varrho}(H) = B_{0\varrho m}(H) + b'_\varrho \cdot H + c'_\varrho \tag{D.4}$$

für den Bereich $H < H_k$.

Auf Grund dieser Formeln können wir jede nomographisch auf Grund einer bestimmten ϱ-Kurve zu bestimmende Aufgabe leicht auf eine solche Aufgabe zurückführen, in der anstatt der ϱ-Kurve nur die Kurve $\varrho = \varrho_m$ fungiert und

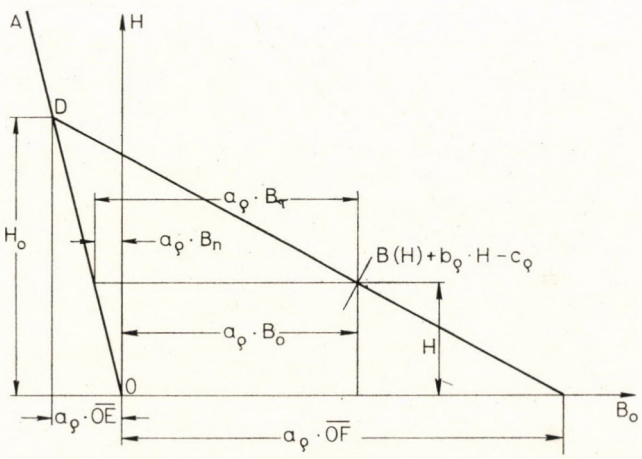


Bild D2

außerdem lineare Funktionen von H sowie Konstanten. Dies sei auf Grund des folgenden Beispieles illustriert.

Gehen wir aus vom Bild B.11, welches zeigt, wie bei der durch den Wert ϱ gekennzeichneten gegebenen Konfiguration des Zahnes, ferner der durch den Ausdruck tg β gekennzeichneten Konfiguration der ihm parallelgeschalteten Nut, ferner der gegebenen der Strecke OF verkehrt proportionalen Größe des Luftspaltes und schließlich der durch die Ordinate $H_0 = V_0 \pm y \cdot A/h$ gegebenen magnetischen Spannung der Punkt C als Schnittpunkt der ϱ-Kurve mit einer solchen Geraden gefundenen wird, die den Punkt F mit jenem Punkt D verbindet, der die Ordinate H_0 besitzt und bei dem das Verhältnis $\overline{E0}/H_0$ gleich ist dem gegebenen Wert tg β.

Nehmen wir nunmehr an, daß wir gemäß Bild. D.2 sämtliche Abszissen des Bildes B.11 mit dem Wert a_ϱ multiplizieren, aber die Werte sämtlicher Ordinaten unverändert lassen. Anstatt tg β erhalten wir also den Wert $a_\varrho \cdot$ tg β, d.h. anstatt der Strecke $\overline{OE}$ erhalten wir eine Strecke von der Größe $a_\varrho \cdot \overline{OE}$.

Anstatt der Strecke $\overline{OF}$ erhalten wir eine Strecke von der Größe $a_\varrho \cdot \overline{OF}$. Würden wir auch sämtliche Abszissen der Kurve ϱ mit a_ϱ multiplizieren, so würde sich offenbar zu dem sich nach Bild D.2 ergebenden Schnittpunkt der neuen, mit a_ϱ multiplizierte Abszissen besitzenden ϱ-Kurve in Bild B.11 sich die Abszisse $\varrho_\varrho \cdot B_0$ ergeben. Aus analogen Gründen würden sich in Bild D.2 anstatt der Werte B_τ und B_n aus Bild B.11 die Werte $a_\varrho \cdot B_\tau$ und $a_\varrho \cdot B_n$ ergeben, wobei die Größe H, entsprechend der als gleichbleibend angenommenen H_0, in Bild D.2 denselben Wert behält, wie in Bild B.11. Wir sehen also, daß sich zwischen den Ergebnissen in Bild B.11 und jenen in Bild D.2 keinerlei Unterschied zeigt, woferne wir die in Bild D.2 erhaltenen Größen $a_\varrho \cdot B_\tau$, $a_\varrho \cdot B_0$ und $a_\varrho \cdot B_n$ durch die gegebene Konstante a_ϱ dividieren.

Nun können aber gemäß der Gleichung (D.3) bezw. (D.4) die mit a_ϱ *multiplizierten Abszissen* $B_{0\varrho}(H)$ *irgendeiner* ϱ*-Kurve auf die Abszissen* $B_{0\varrho m}(H)$ *der Kurve für* $\varrho = \varrho_m$ *zurückgeführt werden. Das bedeutet also, daß zur Lösung irgendeiner nomographischen Aufgabe mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine bei beliebigem Wert von* ϱ *nichts anderes notwendig ist, als die Abszissen sämtlicher vorkommenden Geraden mit der erwähnten Konstanten* a_ϱ *zu multiplizieren und die* ϱ*-Kurve durch Kurven*

$$B_{0\varrho m}(H) + b_\varrho \cdot H + c_\varrho \qquad \text{bzw.} \qquad B_{0\varrho m}(H) + b'_\varrho \cdot H + c'_\varrho$$

zu ersetzen. Dies bedeutet also, daß bei beliebigen Werten von ϱ *im Speicher der elektronischen Rechenmaschine die Daten einer einzigen Kurve, nämlich der Kurve für* $\varrho = \varrho_m$ *fixiert sein müssen, d.h. das im Zusammenhang mit dem erwähnten Artikel der genannten Sowjetautoren beschriebene, bisher die Anwendung der nomographischen Methode bei elektronischen Rechenmaschinen erschwerende Problem gelöst ist.*

Im weiteren sei noch kurz angedeutet, wie die den verschiedenen ϱ-Werten entsprechenden verschiedenen Konstanten a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ bezw. b'_ϱ und c'_ϱ festgestellt werden können.

Zuerst wird die Kurve $\varrho = 1$ vorübergehend in den Speicher der Rechenmaschine fixiert und mit Hilfe der letzteren die gewünschte Zahl von Punkten der sich bei der Lösung von nomographischen Aufgaben praktisch als genügend erweisenden ϱ-Kurven berechnet, wobei der zur Programmierung notwendige Algorithmus jenen Formeln entspricht, auf Grund deren sich die in Bild B.4, *a* und B.4, *b* dargestellte Konstruktion ergibt. Aus den derart von der Rechenmaschine abgegebenen Daten kann das prinzipiell dem Bild B.5 entsprechende, die gewünschte Zahl von ϱ-Kurven enthaltende Nomogramm genau gezeichnet werden. Auf Grund dieser Methode haben meine wissenschaftlichen Mitarbeiter, die Herren Alexander Benkó und Gabriel Renner die ϱ-Kurven, die dem Bild B.5 entsprechen, mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine erhalten.

Nunmehr wird eine bestimmte Größe von H_a gewählt und aus den ihr entsprechenden Abszissen der den verschiedenen Werten von ϱ entsprechenden Kurven werden die Konstanten a_ϱ berechnet. Daraus ergeben sich für die verschiedenen Werte von H aus den den letzteren entsprechenden Abszissen $B_{0\varrho}(H)$ der ϱ-Kurven die Differenzen $\Delta B(H)$ gemäß Gleichung (D.2) als Funktionen von H. Wird jede dieser Kurven durch zwei solche Geraden ersetzt, die von Gesichtspunkt der entstehenden größten Abweichungen, die offenbar den sich ergebenden Fehlern entsprechen, optimal sind, so ergeben sich für die im Bereich $H > H_k$ liegende Gerade, die der Funktion $b_\varrho \cdot H + c_\varrho$ entspricht, die der betreffenden ϱ-Kurve entsprechenden Koeffizienten b_ϱ und c_ϱ und für die im Bereich $H < H_k$ liegende Gerade, die der Funktion $b'_\varrho \cdot H + c'_\varrho$ entspricht, die der betreffenden ϱ-Kurve entsprechenden Koeffizienten b'_ϱ und c'_ϱ. Auf diese Weise erhalten wir schließlich die Konstanten a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ, b'_ϱ, c'_ϱ und H_k als Funktionen von ϱ. *Aus diesen bestimmt die elektronische Rechenmaschine, nachdem sie den zu einer gegebenen Konfiguration gehörigen Koeffizienten ϱ berechnet hat, die zu letzteren gehörigen erwähnten Konstanten und auf Grund der Gleichungen* (D.3) *bzw.* (D.4) *mit Benützung der Werte* $B_{0\varrho m}(H)$ *die vorher anstatt der Kurve $\varrho = 1$ im Speicher zu fixiren sind, die zur Lösung einer bestimmten Aufgabe notwendigen Punkte der Kurve* $B_{0\varrho}(H)$.

Bild D.3 zeigt jene, von meinen erwähnten Mitarbeitern für den Fall $H_a = 1400$ und $\varrho_m = 1{,}44$ erhaltenen beiden $\Delta B(H)$-Kurven, die im Verhältnis zu den übrigen $\Delta B(H)$-Kurven die größten $\Delta B(H)$-Werte aufweisen. Dies sind offenbar die sich für die Extremwerte $\varrho = 2{,}66$ bzw. $\varrho = 1$ ergebenden Kurven. Auch ist in diesem Bild gezeigt, wie jededieser beiden$\Delta B(H)$-Kurven durch je zwei Gerade $b_\varrho H + c_\varrho$ bzw. $b'_\varrho H + c'_\varrho$ ersetzt werden kann, die sich bei einem Werte $H = H_k$ schneiden.

Die Programmierung muß dafür sorgen, daß, wenn die Ordinate den Wert H_k erreicht, die Konstanten b_ϱ bzw. c_ϱ mit den Konstanten b'_ϱ bzw. c'_ϱ den Platz tauschen. Wenn die Ordinate bis auf den Wert $H = 50$ herabsinkt, muß die Programmierung dafür sorgen, daß $b'_\varrho = 0$ und $c'_\varrho = 0$ wird. Die sich in Bild D.3 in Bezug auf die Induktion ergebenden Fehler erreichen die maximale Größe von 85 G, was für die Kurve $\varrho_m = 1{,}44$ zwischen 3000 und 100 A/cm prozentuell höchstens etwa 0,6% der Induktion ausmacht. Noch wichtiger ist die Frage des sich in bezug auf die Feldstärke ergebenden Fehlers. Er beträgt bei 3000 A/cm maximal 65 A/cm und nimmt mit abnehmender Feldstärke ab, da die Neigung der Kurve $\varrho_m = 1.44$, in bezug auf welche sich die erwähnten Fehler beziehen, entsprechendend abnimmt. Unterhalb von H = 100 A/cm beträgt dieser Fehler maximal 7 A/cm, d.h. er ist vernachläßigbar klein. Aus diesem Grunde wurde im Bild D.3 der zum Bereich H<100 A/cm gehörige Teil der ΔB/H/—Kurven als unwesentlich weggelassen.

Selbstverständlicherweise wäre es möglich, auf die Zeichnung der ϱ-Kurven zu verzichten, da es ja möglich ist, die soeben dargestellte Berechnung

der Werte a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ, $b'_\varrho c'$ und H_k für irgendeinen bestimmten Wert H_a nur durch die Rechenmaschine durchführen zu lassen. Autor ist aber der Meinung, daß trotz dieser Tatsache die Niederzeichnung sämtlicher ϱ-Kurven sehr erwünscht ist. *Es kommen nämlich bei der Anwendung der nomographischen Methode oft*

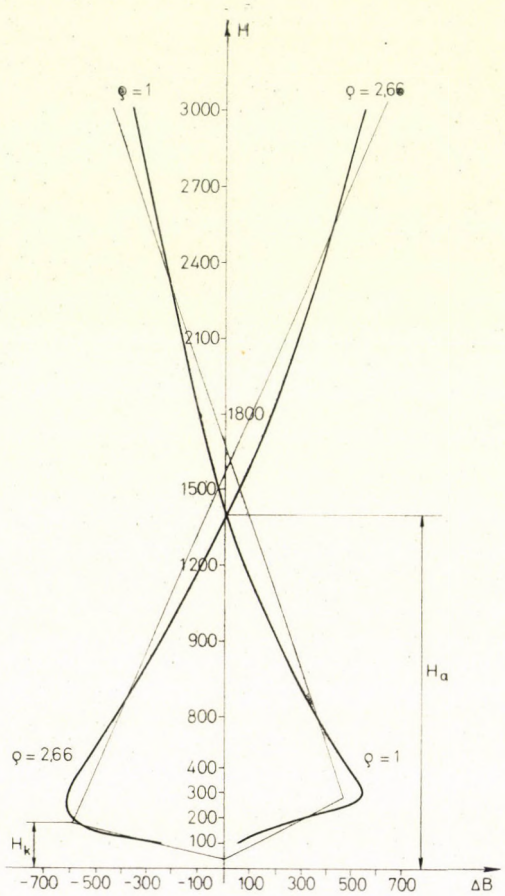


Bild D3

auch solche Fragen vor, deren Beantwortung sich direkt aus dem gezeichneten Nomogramm ergibt, ohne daß die Frage der Anwendung einer Rechenmaschine entstünde. Als ein Beispiel vieler solcher Fragen sei auf ein Problem hingewiesen, daß von der klassischen Methode niemals gestellt wurde, obwohl seine Lösung außerordentlich große Bedeutung besitzt. Dies ist das Problem der Auffindung jener Konfiguration eines ferromagnetischen Körpers, der für eine gegebene magnetische Spannung V einen bestimmten magnetischen Fluß Φ ergibt (oder umgekehrt). *Die Lösung dieses außerordentlich kompliziert erscheinenden Pro-*

blems kann aus der gezeichneten Kurvenschar direkt abgelesen werden als jener Wert ϱ, bei dem auf der zu ihm gehörigen Kurve der Punkt mit der Abszisse $\Phi/b_0\gamma l$ und der Ordinate V/h liegt.

Ein zweites Beispiel einer direkt auf Grund der Kurvenschar unmittelbar beantwortbaren Frage ist das in Bild B.8 gezeigte Problem, welcher Zusammenhang zwischen der Änderung der Größe ϱ *und der Änderung der Größe* B_0 *sich unter der Bedingung ergibt, daß der Wert* H *konstant bleibt. Weitere derartige Beispiele sind das Problem des sich zwischen den Werten* H *und* ϱ *ergebenden Zusammenhanges, unter der Bedingung, daß* B_0 *konstant bleibt, und das Problem des sich zwischen den Werten* B_0 *und* H *ergebenden Zusammenhanges, woferne ein bestimmter Wert von* ϱ *konstant bleibt.*

Aus diesem Grunde ist Autor der Meinung, daß der weitaus allergrößte Teil der sich ergebenden nomographisch zu lösenden Probleme mit Hilfe der Anwendung der elektronischen Rechenmaschine bearbeitet wird, bestimmte derartige Probleme aber — wie bisher — mit Hilfe der gezeichneten Kurvenschar. Ob die nomographische Methode maschinell oder manuell anzuwenden ist, darüber entscheidet die Frage der konkreten Zweckmäßigkeit.

The Nomographic Computation of Complicated Magnetic Circuits with Computer
Author succeeded in making possible the application of the nomographic method — elaborated by himself and detailed in his book: "The Nomographic Computation of Complicated and Highly Saturated Magnetic Circuits" (Pergamon Press, 1962) — to a computer and thereby in developing remarcably his method. For throwing light upon the significance of the problem, he points out briefly the deficiencies in the usual computing methods taught untill now, and describes how these could simply be eliminated by making use of his nomographic method. Hereafter, the methods of calculation of the saturated magnetic circuits by using computers known so far are surveyed, and it is pointed out why the use of these latter for the nomographic method caused difficulties. Lastly, the possibility to overcome the difficulties mentioned, discovered not long ago by the author, is presented.

Номографический метод расчёта сложных сильно насыщенных магнитных цепей с применением электронных вычислительных машин

Автору недавно удалось разработать возможность примения предложенного им номографического метода — изолженного им детально в его книге «Номографический метод расчёта сложных сильно насыщенных магнитных цепей электрических машин» выпущенной Госэнергоиздательством в 1953-ом году с использованием электронных вычислительных машин и таким образом качественно сильно усовершенстовать упомянутый номографический метод. Для освещения значения этого факта в статье в сжатой форме показаны недостатки преподаваемых до сих пор методов расчёта и потом излагется, каким образом можно просто устранить эти недостатки с помощью номографического метода. После этого критически рассматриваются применяемые до сих пор методы расчёта насыщенных магнитных цепей на ЭВМ. Автор указывает на те трудности которые до сих пор практически крепятствовали применению номографического метода с использованием ЭВМ Наконец этого он изагает на основании каких соображений эту недавно удалось простим образом преодолеть эти трудности.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 53—60 (1972)

GROSSE VERSCHIEBUNGEN VON STABKONSTRUKTIONEN

J. SZABÓ*

KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER UNG. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

und

P. RÓZSA**

[Eingegangen am 24. September 1971]

Bei der Untersuchung großer Verschiebungen von Stabkonstruktionen ist die diesen entsprechende momentane geometrische Lage in den Gleichgewichtsgleichungen zu berücksichtigen. In diesem Aufsatz wird angenommen, daß die geometrische Lage der Stabkonstruktion eine stetig differenzierbare Funktion der Verschiebungen ist. Im folgenden wird das lineare Differentialgleichungssystem mit veränderlichen Koeffizienten für große Verschiebungen der Stabkonstruktion entwickelt. Der Hypermatrix-Koeffizient des Gleichungssystems ist eine Funktion des Verschiebungs- und Spannungszustandes der Stabkonstruktion. Es wird der Algorithmus zur Lösung der Anfangswertaufgabe von großen Verschiebungen angegeben.

1. Einleitung

In unserem früheren, die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen betreffenden Aufsatz [1] waren nur kleine Verschiebungen zugelassen. Die dort angegebenen Zusammenhänge gelten — den vorgeschriebenen Genauigkeitsanforderungen entsprechend — nur solange die Wirkung der Verschiebungen in den geometrischen Daten der Gleichgewichtsgleichungen vernachlässigt werden darf. Bei kinematisch unbestimmten Konstruktionen und bei der Prüfung der großen Verschiebungen von Konstruktionen ist diese der Theorie erster Ordnung entsprechende Voraussetzung unzulässig. Im vorliegenden Aufsatz soll daher die Matrizengleichung für die großen Verschiebungen der Stabkonstruktionen angegeben werden. Es wird gezeigt, wie das Stabmodell zu wählen ist, und wie sich die der Theorie erster Ordnung entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen und Verschiebungsgleichungen ändern. Wenn man annimmt, daß die Elemente der geometrischen Matrix der Stabkonstruktion stetige Funktionen der Verschiebungen sind, kann man die Matrizendifferentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten für die infinitesimale Zustandsänderung in der Umgebung des Anfangszustands der Stabkonstruktion anschreiben. Diese Gleichung entspricht der für große Verschiebungen der Stabkonstruktion gültigen Theorie dritter Ordnung. Schreibt man die Gleichung mit Hilfe der endlichen Differenzen auf, so erhält man die der Theorie zweiter

* Prof. Dr. J. Szabó Ménesi út 21, Budapest XI., Ungarn
** Prof. Dr. P. Rózsa, Tulipán u. 15, Budapest II., Ungarn

Ordnung entsprechende Zustandsgleichung der Stabkonstruktionen. Auf Grund dieser Gleichung wird ein Lösungsalgorithmus der Anfangswertaufgabe für große Verschiebungen gebildet.

2. Der Stab

Betrachten wir einen Stab mit konstantem Querschnitt, der in lastfreiem Zustand eine geradlinige Achse besitzt[1].

Dem Anfangs- bzw. Endpunkt des Stabes ist je ein Achsenkreuz ξ, η, ζ zugeordnet, die Achse ξ liegt in der Achse des Stabes, die Achsen η und ζ fallen mit den Hauptträgheitsachsen des Querschnitts zusammen. In belastungsfreiem Zustand fallen also die dem Anfangs- und Endpunkt zugeordneten ξ-Achsen zusammen und die entsprechenden η-bzw. ζ-Achsen sind parallel zueinander. Infolge der Verschiebung und Verzerrung des Stabes werden sich die auf das Achsenkreuz des Anfangspunktes bezogenen relativen Koordinaten des Endpunktes ändern, das Achsenkreuz erleidet Verschiebung und Verdrehung (im folgenden sollen die üblichen Verschiebungen und die Verdrehungen des Achsenkreuzes mit dem Ausdruck »Verschiebungen« bezeichnet werden).

Die momentane Lage des mit den Indizes i, j bezeichneten Stabes wird durch folgende Daten gekennzeichnet: durch die Koordinaten x_i, y_i, z_i bzw. x_j, y_j, z_j des Anfangs- bzw. Endpunktes, durch die orthogonalen Matrizen $\mathbf{T}_{i,o}$ bzw. $\mathbf{T}_{j,o}$, deren Elemente den Kosinus der von den Achsen ξ_i, η_i, ζ_i bzw. ξ_j, η_j, ζ_j und von den Koordinatenachsen x, y, z eingeschlossenen Winkeln gleich sind:

$$\mathbf{T}_{i,o} = \begin{bmatrix} \cos(\xi_i, x) & \cos(\xi_i, y) & \cos(\xi_i, z) \\ \cos(\eta_i, x) & \cos(\eta_i, y) & \cos(\eta_i, z) \\ \cos(\zeta_i, x) & \cos(\zeta_i, y) & \cos(\zeta_i, z) \end{bmatrix}$$

ferner durch die auf das Koordinatensystem des Anfangspunktes bezogenen Koordinaten $\xi_{i;j}$, $\eta_{i;j}$, $\zeta_{i;j}$ des Endpunktes. Aus der Orthogonalität der Matrix $\mathbf{T}_{i;0}$ folgt, daß

$$\mathbf{T}_{i;0}\,\mathbf{T}^*_{i;0} = \mathbf{E}$$

ist, wo $\mathbf{T}^*_{i;0}$ die Transponierte von $\mathbf{T}_{i;0}$ und $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix bedeuten.

Angenommen, daß der mit den Indizes i, j bezeichnete Stab nur an seinem Anfangs- bzw. Endpunkt durch Kräfte belastet wird (Bild 1)[2] und

[1] Diese Beschränkung ist nur von praktischer Bedeutung. Die Zusammenhänge können mit gewissen, nicht entscheidenden Änderungen für einen Stab mit veränderlichem Querschnitt und krummliniger Achse verallgemeinert werden.

[2] Diese Voraussetzung dient nur der Vereinfachung der Ausdrücke. Eine allgemeinere Fassung verursacht nur eine geringe Änderung, die das Endergebnis formal nicht, inhaltlich in nur geringem Maße beeinflußt.

die Komponenten dieser im lokalen Koordinatensystem angegeben sind, lautet die Gleichgewichtsgleichung des Stabes mit den Indizes i, j

$$\mathbf{s}_i + \mathbf{B}^*_{i,j}\,\mathbf{T}_i\,\mathbf{T}^*_j\,\mathbf{s}_j = 0\,. \tag{1}$$

Hier sind:

$$\mathbf{B}^*_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & -\zeta_{i;j} & \eta_{i;j} & 1 & & \\ \zeta_{i;j} & & -\xi_{i;j} & & 1 & \\ -\eta_{i;j} & \xi_{i;j} & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} P_{i\xi i} \\ P_{i\eta i} \\ P_{i\zeta i} \\ M_{i\xi i} \\ M_{i\eta i} \\ M_{i\zeta i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{i;0} & \\ & \mathbf{T}_{i;0} \end{bmatrix}.$$

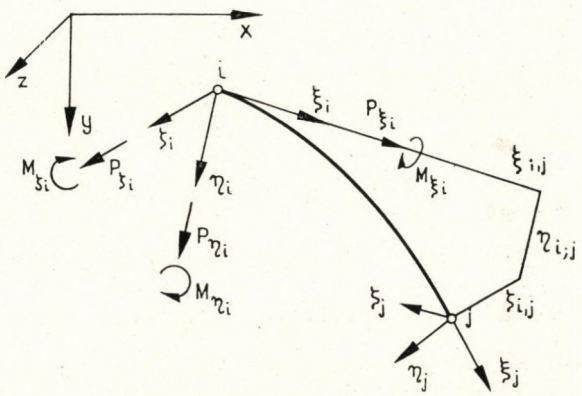


Bild 1

Im folgenden wird der Vektor der im Endpunkt des Stabes i, j angreifenden Kräfte Stabkraft genannt und mit $\mathbf{s}_{i,j}$ bezeichnet. Es sind daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_j &= \mathbf{s}_{i,j} \\ \mathbf{s}_i &= -\mathbf{B}^*_{i,j}\,\mathbf{T}_i\,\mathbf{T}^*_j\,\mathbf{s}_{i,j}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Der sich auf den Stab beziehende kinematische Zusammenhang gilt für die infinitesimale Änderung der Verschiebungen und der Stabkräfte und drückt die Tatsache aus, daß sich die Verschiebungsänderung des Punktes j aus der Verschiebungsänderung des Punktes i und aus der relativen Verschiebung längs des Stabes bestimmen läßt:

$$d\mathbf{u}_j = \mathbf{T}^*_i\,\mathbf{B}_{i,j}\,\mathbf{T}_i\,d\mathbf{u}_i + \mathbf{T}^*_i\,\mathbf{F}_{i,j}\,\mathbf{T}_i\,\mathbf{T}^*_j\,d\mathbf{s}_{i,j} + \mathbf{T}^*_j\,d\mathbf{t}_{i,j}\,, \tag{3}$$

wo die einzelnen Spalten der Matrix $\mathbf{F}_{i,j}$ die Verschiebungskoordinaten des Punktes j im Koordinatensystem des Punktes i angeben, wenn im Punkt j eine Einzelkraft der Größe 1 wirkt.

Ferner ist

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{jz} \\ \varphi_{jx} \\ \varphi_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix},$$

und $\mathbf{t}_{i,j}$ bedeutet den Vektor der relativen, aus sonstigen, von den Stabkräften unabhängigen Gründen längs des Stabes auftretenden, im Koordinatensystem des Punktes j angegebenen Verschiebungen.

3. Die Stabkonstruktion

Durch die Kopplung der Stabendpunkte wird aus den Stäben eine Stabkonstruktion gebildet, indem gewisse Verschiebungskoordinaten der Knotenpunkte als identisch vorgeschrieben werden. Es handelt sich um eine starre Kopplung, wenn die Verschiebungskoordinaten der gekoppelten Endpunkte gleich sind.

Betrachten wir eine Stabkonstruktion, die aus den Stäben 1, 2; 2, 3 und 3, 4 besteht (Bild 2). Die Gleichgewichtsgleichungen der einzelnen Knotenpunkte sind:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_1^* \mathbf{B}_{1,2}^* \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^* \mathbf{s}_{1,2} + \mathbf{q}_1 = 0\,, \\
&-\mathbf{T}_2^* \mathbf{s}_{1,2} + \mathbf{T}_2^* \mathbf{B}_{2,3}^* \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3^* \mathbf{s}_{2,3} + \mathbf{q}_2 = 0\,, \\
&-\mathbf{T}_3^* \mathbf{s}_{2,3} + \mathbf{T}_3^* \mathbf{B}_{3,4}^* \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4^* \mathbf{s}_{3,4} + \mathbf{q}_3 = 0\,, \\
&-\mathbf{T}_4^* \mathbf{s}_{3,4} + \mathbf{q}_4 = 0\,,
\end{aligned}$$

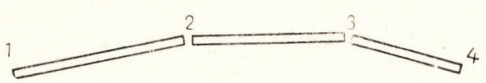


Bild 2

oder gedrängter geschrieben:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = 0\,, \tag{4}$$

wo $\mathbf{q}$ den im Koordinatensystem x, y, z angegebenen Vektor der in den Knotenpunkten wirkenden äußeren Kräfte bedeutet.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \\ N_{1x} \\ N_{1y} \\ N_{1z} \end{bmatrix}.$$

Ferner sind

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^* \mathbf{B}_{1,2}^* \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^* & & \\ -\mathbf{T}_2^* & \mathbf{T}_2^* \mathbf{B}_{2,3}^* \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3^* & \\ & -\mathbf{T}_3^* & \mathbf{T}_3^* \mathbf{B}_{3,4}^* \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4^* \\ & & -\mathbf{T}_4^* \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{1,2} \\ \mathbf{s}_{2,3} \\ \mathbf{s}_{3,4} \end{bmatrix}.$$

Die kinematischen Gleichungen der gekoppelten Stäbe lauten nach (3)

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1^* \mathbf{B}_{1,2} \mathbf{T}_1 d\mathbf{u}_1 - \mathbf{T}_2 d\mathbf{u}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1^* \mathbf{F}_{1,2} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^* d\mathbf{s}_{1,2} + d\mathbf{t}_{1,2} = 0, \\ &\mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2^* \mathbf{B}_{2,3} \mathbf{T}_2 d\mathbf{u}_2 - \mathbf{T}_3 d\mathbf{u}_3 + \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2^* \mathbf{F}_{2,3} \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3^* d\mathbf{s}_{2,3} + d\mathbf{t}_{2,3} = 0, \\ &\mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3^* \mathbf{B}_{3,4} \mathbf{T}_3 d\mathbf{u}_3 + \mathbf{T}_4 d\mathbf{u}_4 + \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3^* \mathbf{F}_{3,4} \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4^* d\mathbf{s}_{3,4} + d\mathbf{t}_{3,4} = 0, \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\mathbf{G}\, d\mathbf{u} + \mathbf{F}\, d\mathbf{s} + d\mathbf{t} = 0, \tag{5}$$

wo

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & & \\ & \mathbf{T}_3 & \\ & & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^* & & \\ & \mathbf{T}_2^* & \\ & & \mathbf{T}_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,2} & & \\ & \mathbf{F}_{2,3} & \\ & & \mathbf{F}_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & \\ & \mathbf{T}_2 & \\ & & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2^* & & \\ & \mathbf{T}_3^* & \\ & & \mathbf{T}_4^* \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,2} \\ \mathbf{t}_{2,3} \\ \mathbf{t}_{3,4} \end{bmatrix}.$$

sind.

4. Zustandsgleichung der Stabkonstruktion

In der Gleichgewichtsgleichung (4) der Stabkonstruktion war stillschweigend angenommen, daß die der Last $\mathbf{q}$ entsprechenden Stabkräfte $\mathbf{s}$ die Gleichgewichtsgleichung in einer geometrischen Lage befriedigen, welche im Vergleich zum lastfreien Zustand nach einer Verschiebung $\mathbf{u}$ zustande kommt. Diese geometrische Lage wird durch die Matrix $\mathbf{G}$ gekennzeichnet, die eine Funktion der Verschiebungen ist:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}).$$

Wenn der Lastvektor den Wert $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ annimmt, so nehmen der Stabkraftvektor die Form $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$ und der Verschiebungsvektor die Form $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ an. Es werde angenommen, daß sich die Vektoren $\mathbf{q}, \mathbf{s}, \mathbf{u}$ stetig ändern und daß die Matrix $\mathbf{G}$ eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion des Vektors $\mathbf{u}$ ist. Damit wird die geometrische Matrix $\mathbf{G}(\mathbf{u} + d\mathbf{u})$ durch den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ bestimmt. Die der veränderten erhöhten Last entsprechende Gleichgewichtsgleichung ist daher:

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{u}+d\mathbf{u})\,(\mathbf{s}+d\mathbf{s})+(\mathbf{q}+d\mathbf{q}) = 0. \tag{6}$$

Wird $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}+d\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u})+\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\,d\mathbf{u}+\ldots,$$

die Gleichung (4) in (6) eingesetzt und das Glied

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\,d\mathbf{u}\right) d\mathbf{s},$$

da es infinitesimal zweiten Grades ist, vernachlässigt, so ergibt sich die Gleichgewichtsgleichung für die Laständerung in der Form

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{u})\,d\mathbf{s}+\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\,d\mathbf{u}\right)\mathbf{s}+d\mathbf{q} = 0. \tag{7}$$

Das zweite Glied in Gleichung (7) enthält den zum Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ gehörenden Wert des Ableitungstensors von $\mathbf{G}$. Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [G_{ij}], & i &= 1, 2, \ldots, m, \\ \mathbf{u} &= [u_k], & j &= 1, 2, \ldots, n, \\ \mathbf{s} &= [s_l], & k &= 1, 2, \ldots, m, \\ & & l &= 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = [D_{ik}]; \qquad D_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{u})}{\partial u_k}\, s_j$$

kann das zweite Glied des Ausdruckes (7) in der Form

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{u})}{\partial u_k}\,du_k\right)s_j=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{u})}{\partial u_k}\,s_j\right)du_k=\sum_{k=1}^{m}D_{ik}\,du_k$$

angeschrieben werden, wodurch sich die Gleichgewichtsgleichung (7) der Laständerung in der Form

$$\mathbf{D}(\mathbf{u},\mathbf{s})\,d\mathbf{u}+\mathbf{G}^*(\mathbf{u})\,d\mathbf{s}+d\mathbf{q}=0 \tag{8}$$

ergibt. Werden die Gleichungen (5) und (8) in ein einziges Gleichungssystem zusammengefaßt, so erhält man

$$\begin{bmatrix}\mathbf{D}(\mathbf{u},\mathbf{s}) & \mathbf{G}^*(\mathbf{u})\\ \mathbf{G}(\mathbf{u}) & \mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\mathbf{u}\\ d\mathbf{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d\mathbf{q}\\ d\mathbf{t}\end{bmatrix}=0\,. \tag{9}$$

Diese Gleichung wird die Zustandsgleichung der Stabkonstruktion genannt. Gleichung (9) gilt für die der geometrischen Lage $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ entsprechende, durch die Verschiebung $\mathbf{u}$ und durch die innere Kraft $\mathbf{s}$ gekennzeichnete infinitesimale Veränderung, wo der Einfachheit halber die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{F}$ in einer endlichen Umgebung von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{s}$ als konstant angenommen ist. Durch eine von dieser abweichende Annahme wird die Gestalt der Gleichung (9) nicht beeinflußt.

5. Große Verschiebungen der Stabkonstruktion

Die Matrizendifferentialgleichung (9) gilt in erster Annäherung auch für die endlichen Differenzen der Veränderlichen. Demgemäß kann die Gleichung in der Form

$$\begin{bmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{G}^*\\ \mathbf{G} & \mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{u}\\ \Delta\mathbf{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{q}\\ \Delta\mathbf{t}\end{bmatrix}=0 \tag{10}$$

angeschrieben werden, die den in der sogenannten Theorie zweiter Ordnung gültigen Zusammenhang ergibt. Die Gleichung (10) eignet sich zur Bildung eines Algorithmus, der der numerischen Lösung der Anfangswertaufgabe (9) großer Verschiebungen dient. Es sei angenommen, daß alle irgendeinen Anfangszustand der Stabkonstruktion kennzeichnenden Parameter ($\mathbf{G}_0$, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{s}_0$ und $\mathbf{F}$) bekannt sind und daß sowohl die Vektoren der mit ihnen verträglichen Knotenpunktlasten $\mathbf{q}_0$ bzw. kinematischen Lasten $\mathbf{t}_0$ als auch ihre mit den vorgeschriebenen Lastvektoren $\mathbf{q}$, $\mathbf{t}$ gebildeten Differenzen

$$\Delta\mathbf{q}=\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\,,\qquad\qquad \Delta\mathbf{t}=\mathbf{t}-\mathbf{t}_0$$

bestimmt werden können. Die den Laständerungen $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\mathbf{t}$ entsprechenden Näherungswerte der Verschiebungs- und Kraftänderungen $\Delta\mathbf{u}^{(1)}$, $\Delta\mathbf{s}^{(1)}$ kann man aus der Gleichung (10) berechnen. In Kenntnis des Verschiebungsvektors

$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(1)}$ kann die geometrische Matrix $\mathbf{G}^{(1)}$ errechnet werden. So können die mit dem Kraftvektor

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}^{(1)}$$

bzw. mit dem Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(1)}$$

verträglichen Lastvektoren $\mathbf{q}^{(1)}$ bzw. $\mathbf{t}^{(1)}$ und auch ihre mit den vorgeschriebenen Lastvektoren gebildeten Differenzen

$$\Delta\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}; \qquad \Delta\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t} - \mathbf{t}^{(1)}$$

ermittelt werden.

Werden die auf diese Weise erhaltenen Differenzen der Lastvektoren mit der vorgeschriebenen Genauigkeit bestimmt, so kann die Berechnung als beendet gelten. Widrigenfalls können sich drei Möglichkeiten ergeben:

a) Nach wiederholter Anwendung des geschilderten Verfahrens befriedigen die Werte $\Delta\mathbf{q}^{(\nu)}$ und $\Delta\mathbf{t}^{(\nu)}$ die Genauigkeitsforderungen.

b) Der der vorgeschriebenen Last entsprechende Zustand kann nur durch die allmähliche Steigerung der Last bestimmt werden. In solchen Fällen muß die Iteration im ersten Schritt mit den Werten $\varepsilon\Delta\mathbf{q}$, $\varepsilon\Delta\mathbf{t}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ begonnen werden.

c) Der Anfangszustand stellt in der stabilen Zustandsänderung der Stabkonstruktion einen Grenzzustand dar, wo mit einer infinitesimalen Laständerung kein durch infinitesimale Verschiebungsänderung erreichbarer Gleichgewichtszustand hergestellt werden kann.

Liegt also nicht Fall c) vor, so wird die Iteration bei geeigneter Wahl des Wertes ε im Falle b) konvergent sein. Fall c) wird im Rahmen der Analyse der Stabilität der Zustandsänderung behandelt.

SCHRIFTTUM

[1] SZABÓ, J.—RÓZSA, P.: Die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen, *Acta Techn. Hung.* **71** (1—2), pp. 133—148 (1971)

Large Displacements of Trusses. In analysing large displacements of lattice structures, the instantaneous position of the structure associated with the displacement should be considered by the equilibrium equations. Author assumes that the geometric position of the lattice structure is a continuous derivable function of the displacements. The set of linear differential equations with variable coefficients for large displacements will be established. The hyper-matrix coefficients of the set of equations is a function of displacement and stress state of the truss. The algorithm of the solution to the problem of the initial value of large displacements is given.

Большие смещения стержневых конструкций *(Й. Сабо, П. Рожа)*. При исследовании больших смешений тержневых конструкций в уравнениях равновесия необходимо учитывать мгновенное геометрическое положение, соответствующее этим смешениям. При данной трактовке исходят из предположения, что геометрическое положение стержневой конструкции является постоянно дифференцируемой функцией смещений. В дальнейшем выводится система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для больших смещений стержневых кострукций. Гиперматричный коэффициент системы уравнений представляет собою функцию состояния смещений и напряжений стержневой конструкции. В статье приводится алгоритм для решения задачи начального зчачения больших смещений.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 61-81 (1972)

ELASTISCHE SCHWINGUNGEN IN WÄLZLAGERN

II. TEIL. DIE ROTIERENDE MASSE IST AUF DIE EIGENE ACHSE NICHT AUSGEWUCHTET

B. SZŐKE*

[Eingegangen am 29. September 1969]

Dieser Teil des Aufsatzes bietet einen kurzen Überblick über Erscheinungen, die nach Auffassung des Verfassers bei einer »rotierenden Kraft« auftreten mögen. Anschließend gibt der Verfasser auf Grund eines *planimetrischen Modells* seiner Vermutung Ausdruck, daß in einem Wälzlager mit Spiel von der rotierenden Kraft eine Verformung der Rollbahn derart hervorgerufen wird, daß sich dabei der Wälzvorgang auf einer möglichst kleinen Fläche abspielt.

XIII. Die Konfiguration der wirksamen Kräfte

1. *Wälzlager ohne radiales Lagerspiel*

In der Fachliteratur [17] unterscheidet man nach JÜRGENSMEYER [2] zwei Belastungsfälle: erstens die »Pendellast« und zweitens die »Umfanglast« uzw. als die Belastung durch eine unveränderliche Kraft. z. B. des Eigengewichts der rotierenden Teile, und durch eine umkreisende, aus Mangel der Auswuchtung entstehende Kraft.

Falls die ständige Kraft größer ist als die umkreisende Zentrifugalkraft, so ist der Schwingungswinkel der Resultanten kleiner als 180° (Bild 27: Pendellast). Wird aber bei gleichbleibender Einzellast die Zentrifugalkraft größer, so wird auch der Schwingungswinkel größer. Wenn die genannten Kräfte gleich groß sind, so erreicht der Schwingungswinkel den Wert von 180° (Bild 28: Grenzfall der Pendellast). Die Resultante ist im oberen Scheitelpunkt Null, und im unteren Scheitelpunkt ist sie doppelt so groß wie die ständige Einzellast. Wenn nun die Zentrifugalkraft die ständige Einzellast an Größe übertrifft, so haben wir eine kreisende Resultante, deren Richtung vom Mittelpunkt aus immer nach auswärts zeigt (Bild 29: Umfanglast).

Die obige Betrachtungsweise ist stichhältig, soweit man vom Radialspiel absieht. Es gibt in der Praxis kaum Fälle, wo das Radialspiel beseitigt oder das Wälzlager in vorgespanntem Zustand montiert werden muß. Der Umstand, daß man Wälzlager gerade wegen einer hohen Drehzahl mit Vorliebe als zuver- Halbmesser e durchführt, oder ob dieser Mittelpunkt irgendwann und irgendwie von dieser Zwangsbahn auf eine andere abgelenkt wird. Wir können aber

* B. SZŐKE, Batthyány u. 139. Budapest XVIII., Ungarn

lässige Stützelemente verwendet und in diesem Zusammenhang ein Lagerspile als unerläßlich mit in Kauf nimmt, um einer Erwärmung vorzubeugen, liefert uns den zwingenden Grund, den obigen Belastungsfall in Kombination mit dem radialen Lagerspiel etwas näher zu betrachten.

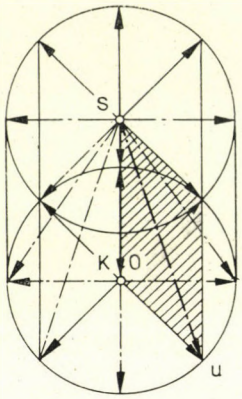


Bild 27. »Pendellast«. Schwerpunkt *U* rotiert im spielfreien Lager um den Wellenmittelpunkt *O*

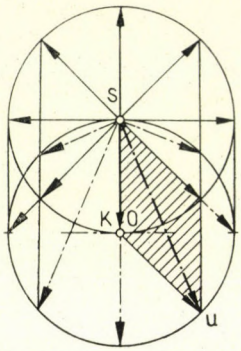


Bild 28. Grenzfall zwischen Pendellast und Umfanglast im spielfreien Lager

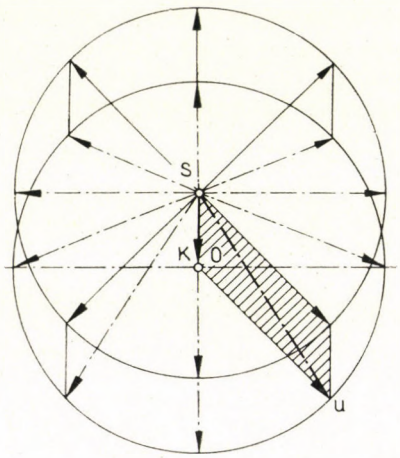


Bild 29. Umfanglast am spielfreien Lager

Die Darstellungsweise in den Bildern 27, 28 und 29 ist bei weitem nicht ausreichend, um die überaus komplizierten Zusammenhänge verständlich zu machen. Es darf nicht vergessen werden, daß unter den gegebenen Kräftewirkungen — bei Vorhandensein eines Lagerspiels — der Wellenmittelpunkt möglicherweise in jedweder Richtung binnen der Exzentrizität *e* sich verlegen kann; auch hängt es von einigen Ursachen ab, ob nun der Wellenmittelpunkt einen Teil einer umkreisenden Bewegung am Umfang des Kreises mit dem

die wichtigsten Aspekte dieser Frage unter Anwendung des im V. Abschnitt abgeleiteten Hilfssatzes beleuchten.

2. *Imaginärer Umlaufmechanismus im Fall eines radialen Lagerspiels*

Wir gehen aus folgendem Fall aus: Gegeben ist eine, mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Welle, wobei der Schwerpunkt U der Masse m in einem Abstand τ vom Wellenmittelpunkt O liegt. Dieselbe Welle verrichtet ferner eine durch die Bauart des Wälzlagers ermöglichte bzw. bestimmte kreisende Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_k um den Mittelpunkt K des Außenringes. Die Entstehung der Umlaufzahl n_k der kreisenden Bewegung kann noch in jener Weise gedacht werden, daß man sich in der Wellenquerschnittsfläche einen Kreis mit dem Halbmesser r_1 und dem Mittelpunkt O als an dem Kreis mit dem Halbmesser r_2 um den Mittelpunkt K abrollend vorstellt. Im Sinne der Gl. (5) läßt sich schreiben:

$$r_1 : r_2 = d : (D + d),$$

woraus mit

$$r_1 + r_2 = e$$

der Halbmesser des abrollenden Kreises sich als

$$r_1 = e\frac{d}{2d+D} = e/\nu \tag{67}$$

ausdrücken läßt. Ferner gilt für den Grundkreishalbmesser

$$r_2 = e\frac{d+D}{2d+D} = e\left(1 - \frac{1}{\nu}\right). \tag{68}$$

Nach Gl. (12) (s. Abschnitt V) liegt der Kräftemittelpunkt S in Richtung der Beschleunigung $\bar{a}$, in einem Abstand vom momentanen Rotationsmittelpunkt O von:

$$SO = p = \frac{\bar{a}}{\omega^2}.$$

Wenn nun Punkt O das Kreisen fortsetzt, so verlegt sich der Kräftepol S derart in die neue Lage, daß auch er eine kreisende Bewegung an dem Kreis vom Halbmesser e u. zw. gleichfalls mit der Winkelgeschwindigkeit ω_k durchführt, wobei die Größe des Polabstandes, die sich parallel zu sich verschieben läßt, unverändert bleibt. Diese Zusammenhänge sind im Bild 30 dargestellt: man sieht den Wellenmittelpunkt in einer aufs Geratewohl angenommenen Lage O_1 mit dem dazugehörigen Kräftepol S_1 und den neuen Schwerpunkt U_1 mit der auf denselben einwirkenden Kraft Q.

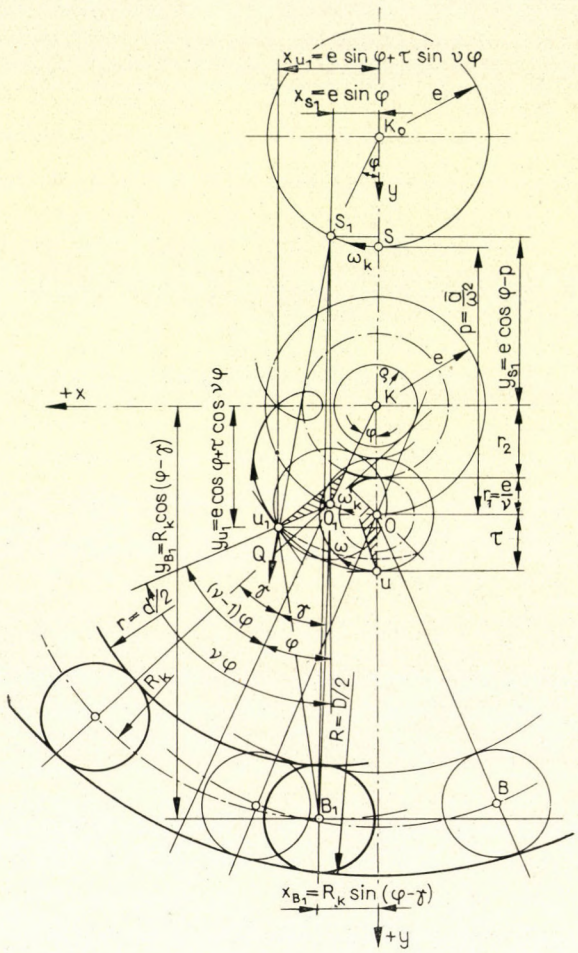


Bild 30. Umfanglast am Lager mit Spiel

Das Bild läßt die nachstehenden Folgerungen zu:

(1) Der Schwerpunkt U beschreibt eine Epizykloide, wobei diese Bahn eine geschlungene Form aufweist, falls $\tau > r_1$ ist. Mit $\tau = r_1$ weist sie die bekannten Spitzen auf und wenn nun $\tau < r_1$ ist, so ist sie gestreckt.

(2) Falls das Verhältnis

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{d+D}{d}$$

eine ganze Zahl ist, tritt bei einer gleichbleibenden Kraft P die regelmäßige Wiederholung derselben Kraftwirkung nach jeder r_2/r_1-ten Umdrehung auf.

Ist aber diese Verhältniszahl keine ganze Zahl, so wird bei einer neuen Konstellation der Punkte S, K, O die Lage des Schwerpunktes U immer eine andere, als zuvor, d. h. auch die Richtung SU der Kraftwirkung Q wird von der früheren abweichen.

(3) Wenn man in dem Dreieck OSU die Lage zweier Punkte kennt, so kann man die Lage des dritten mit Hilfe der Epizykloide geometrisch bestimmen.

(4) Bei der Beurteilung der Schwingungserscheinungen hat der Fall sicherlich eine besondere Bedeutung, wenn die Exzentrizität τ und das radiale Lagerspiel gleich groß sind.

(5) Wenn der Abstand τ des Schwerpunktes U der unausgewuchteten Masse vom Rotationsmittelpunkt einer bedeutend höheren Größenordnung angehört als das radiale Lagerspiel, dann hat man es mit Schwingungserscheinungen zu tun, die schematisch in den Bildern 27, 28 und 29 dargestellt sind.

3. *Bestimmung der Kipplage*

Einfachheitshalber haben wir in dem im Bild 30 dargestellten Beispiel eine Ausgangskonfiguration gewählt, in welcher der Umkreisungsmittelpunkt K_0 des kreisenden Kräftepols S, und die Punkte K, O und U sich in Konstellation befinden. Der Ursprung des Koordinatensystems (x, y) liegt in K. Das Kippen tritt ein, wenn die Dreipunktgruppe $S_1U_1B_1$ an derselben Geraden liegt (und Kraft Q den Belastungswinkel verläßt). In dieser Konstellation ist der Wert der Determinante, durch welche die Dreieckfläche $S_1U_1B_1$ bestimmt ist, gleich Null.

Beim Ausschreiben der Koordinaten dieser drei Punkte wollen wir neben R_k den Wert e unberücksichtigt lassen; so erhalten wir nach einer, dem gesuchten Winkel φ entsprechend vollendeten Drehung:

$$\text{für } S_1 \quad \begin{cases} x_{S1} = e \sin \varphi, \\ y_{S1} = e \cos \varphi - p; \end{cases}$$

$$\text{für } U_1 \quad \begin{cases} x_{U1} = e \sin \varphi + \tau \sin \nu\varphi, \\ y_{U1} = e \cos \varphi + \tau \cos \nu\varphi; \end{cases}$$

$$\text{für } B_1 \quad \begin{cases} x_{B1} = R_k \sin (\varphi - \gamma), \\ y_{B1} = R_k \cos (\varphi - \gamma). \end{cases}$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für das Kippen:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{S1} & y_{S1} \\ 1 & x_{U1} & y_{U1} \\ 1 & x_{B1} & y_{B1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e\sin\varphi & e\cos\varphi - p \\ 1 & e\sin\varphi + \tau\sin\nu\varphi & e\cos\varphi + \tau\cos\nu\varphi \\ 1 & R_k\sin(\varphi-\gamma) & R_k\cos(\varphi-\gamma) \end{vmatrix} = 0. \tag{69}$$

Zerlegt man diese Determinante nach der ersten Spalte, und ordnet man die Glieder, so erhält man:

$$\tau e(\sin\varphi\cos\nu\varphi - \cos\varphi\sin\nu\varphi) + \tau R_k[\sin\nu\varphi\cos(\varphi-\gamma) - \cos\nu\varphi\sin(\varphi-\gamma)] - \\ - p(x_{B_1} - x_{U_1}) = 0.$$

Wir können p außer acht lassen, falls ω^2 um ein Vielfaches größer ist als $\bar{a}$:

$$e\sin(\varphi-\nu\varphi) + R_k\sin(\nu\varphi-\varphi+\gamma) = 0$$

und weiter vereinfacht

$$e\sin[\varphi(1-\nu)] - R_k\sin[\varphi(1-\nu)-\gamma] = 0,$$

$$e\sin[\varphi(1-\nu)] - R_k\{\sin[\varphi(1-\nu)]\cos\gamma - \cos[\varphi(1-\nu)]\sin\gamma\} = 0,$$

$$\sin[\varphi(1-\nu)][e - R_k\cos\gamma] = -R_k\sin\gamma\cos[\varphi(1-\nu)],$$

$$\tan[\varphi(1-\nu)] = \frac{R_k\sin\gamma}{R_k\cos\gamma - e}.$$

Nun wollen wir neben $R_k\cos\gamma$ den Wert e vernachlässigen, so erhält man auf Grund der Gl. (67):

$$-\tan\left[\left(\frac{d+D}{d}\right)\varphi\right] \approx \tan\gamma,$$

$$\varphi = (180^\circ - \gamma)\frac{d}{d+D}. \tag{70}$$

Bemerkenswert ist, daß der kritische Wert von φ — bei den angedeuteten Vernachlässigungen — nicht von der Lage des Schwerpunktes U bzw. von der Größe des Abstandes τ abhängt.

Die Bewegungen, die infolge einer von der Belastung verursachten Deformation entstehen, lassen sich auf Grund der Erörterungen im Abschnitt IX analysieren.

XIV. Kreisende Kraft

1. *Der Fall mit* einem *tragenden Kugelpaar*

Es gibt einen besonderen Fall, in welchem die Rotationsachse parallel zur Richtung der Kraft P ist: gemäß der Ausführungen im Abschnitt V, steht hier der Polabstand p senkrecht zur Rotationsebene. Dieser Fall der Kraftwirkung tritt ein, wenn eine *vertikale Welle* nur von der *rotierenden Masse* belastet ist. Es wirkt auf jeden einzelnen Massepunkt der Rotationsebene die Kraft Q, welche den Polpunkt S passiert, wobei der Polabstand nach Gl. (12), wie bekannt, durch

$$p = \frac{\bar{a}}{\omega^2}$$

bestimmt ist. (Das Kräftebild gleicht einem Schirm.) Wir wollen hier die bereits oben angeführte Ableitung nicht wiederholen, gemäß welcher der Beweis erbracht wurde, daß die Resultante der auf das rotierende System wirkenden Kräfte den Schwerpunkt passiert. Wenn nun der Abstand τ des Schwerpunktes U nach der Größenordnung den Halbmesser e der Umlaufbahn vielfach übertrifft, dann können wir Q als eine *kreisende* Kraft betrachten. Nun aber wissen wir, daß die radialen Schwingungen des Mittelpunktes O, welche den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung darstellen, nur von den Kraftkomponenten in der Rotationsebene beeinflußt werden; demgemäß können wir hier von den axialen Kraftkomponenten absehen, und folglich haben wir im Bild 31 mit Q die Kraftkomponente in der Rotationsebene bezeichnet.

Im Bild 31 ist jene Konfiguration der tragenden Kugeln B und C dargestellt, in welcher die kreisende Kraft Q mit dem Leitstrahl der Kugel C koinzidiert, und es soll der Winkel φ gefunden werden, bei welchem die kreisende Kraft nach Verlassen der Kugel C die Kugel B erreicht, wodurch das Kippen hervorgerufen wird. Bei dem hier vorkommenden Winkel 2γ und φ können wir im Verhältnis zu R_k die Größe e vernachlässigen; es genügt, die Exzentrizität e bei der Behandlung der Schwingungsphasen zu berücksichtigen.

Da nun die Winkelgeschwindigkeit ω des Schwerpunktes U größer ist als die Winkelgeschwindigkeit ω_k des Kugelkranzes und mit Rücksicht auf (7), wonach

$$\frac{\omega_k}{\omega} = \frac{d}{d+D} = \frac{1}{1+\dfrac{D}{d}}$$

ist, kann festgestellt werden, daß der Leitstrahl von U sozusagen dem Leit-

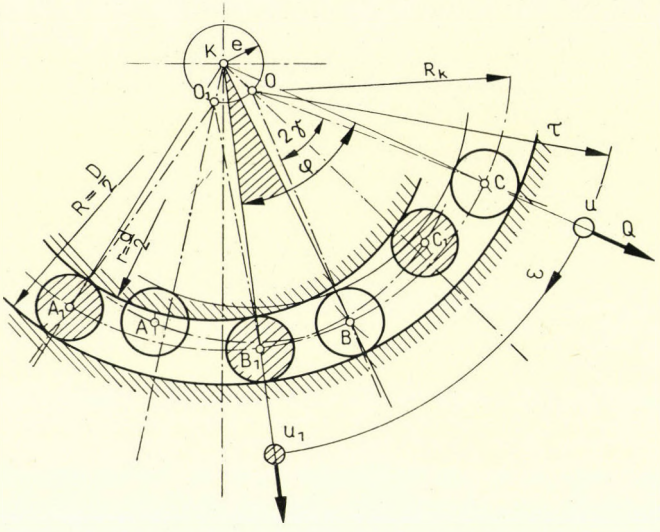


Bild 31. Kipplage bei einer rotierenden Kraft

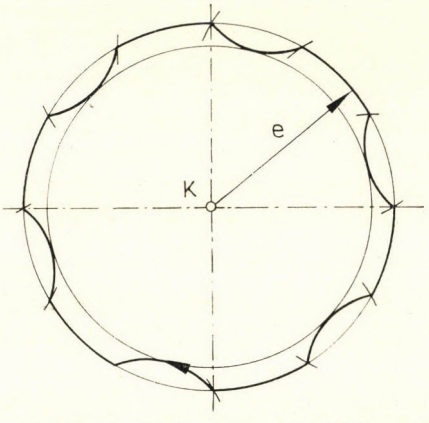


Bild 31a. »Zickzack«-Umlaufbahn des Wellenmittelpunktes

strahl von B »folgt« bzw. der erste den zweiten nach einer Drehung von φ nach folgender Formel einholt:

$$\varphi : (\varphi - 2\gamma) = (d + D) : d,$$

bzw.

$$\sphericalangle UKU_{\perp} = \varphi = 2\gamma \left(1 + \frac{d}{D}\right), \tag{71}$$

und daher

$$\sphericalangle BK\,B_1 = \varphi - 2\gamma = 2\gamma \frac{d}{D}\,. \tag{72}$$

In dem Augenblick, wenn B von U eingeholt wurde, wird der Kugelkäfig um das momentane Kippzentrum, also um die Kugel B_1 umkippen, gleichzeitig gelangen die Kugeln (A, B) als tragendes Kugelpaar in die Lage (A_1, B_1) und treten als solche an Stelle des Paares (B, C).

2. *Bei mehreren tragenden Kugelpaaren*

Bei einer Gesamtzahl von z Kugeln sei n_g die Zahl der tragenden Kugelpaare. Mit dieser Bezeichnung läßt sich der »Verfolgungswinkel« nach Gl. (71), wie folgt, formulieren:

$$\varphi = 360° \frac{n_g}{z} \left(\frac{D+d}{D} \right). \tag{73}$$

Also wird der Wellenmittelpunkt an dem Exzentrizitätskreis sprungweise eine Zickzack-Bahn beschreiben, und die Zahl der Sprünge gleicht der Verhältniszahl $n_c = 360°/\varphi$. Nach Gl. (73) ist also die Zahl der Sprünge:

$$n_c = \frac{z}{n_g} \left(\frac{D}{D+d} \right). \tag{74}$$

Diese Schwingungsbewegung des Mittelpunktes O kann ähnlich dem Bild 31a dargestellt werden.

Die Gl. (73) ist zugleich geeignet, die zu einem gegebenen φ koordinierte Verhältniszahl n_g/z zu errechnen. Ist also der Verfolgungswinkel $\varphi = 180°$, so ist

$$\frac{n_g}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{D+d} \right), \tag{73a}$$

mit anderen Worten in jeder halben Umdrehung spielt sich eine Schwingung ab; und wenn $\varphi = 360°$, so ist

$$\frac{n_g}{z} = \frac{D}{D+d}, \tag{73b}$$

d. h. jede Umdrehung ist zugleich mit einer Schwingung verbunden (immer im Sinne der Erörterungen im Abschnitt XII).

XV. Eine planimetrische Analogie

Aus unseren bisherigen Ausführungen geht klar hervor, daß die genaue Kreisform der *Hüllkurve des Kugelkranzes* während der Drehbewegung der Welle keinesfalls gesichert ist. Ja sogar, obwohl man die äußere Rollbahn konsequenterweise stets als einen echten Kreis darstellt, ist während der Wel-

lenrotation bzw. während der mit Kippen verbundenen Umlaufsbewegung des Kugelkranzes auch diese Rollbahn einer Deformation unterworfen. Wir können auf die wirkliche Form der besagten Hüllkurve aus den Erörterungen im Abschnitt VIII, insbesondere im Zusammenhang mit Bild 11, gewisse Folgerungen ziehen.

Da die Kugeln gewissen Abplattungen unterliegen und an der Rollbahn Eindrückungen entstehen, geben uns diese beiden Deformationserscheinungen, obwohl wir sie vernachlässigt haben, einen Anlaß zur Aufstellung einer aus

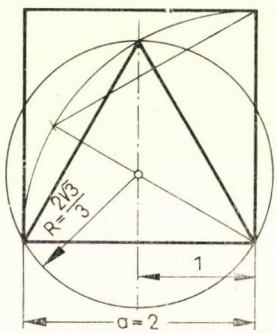


Bild 32. Umdrehung eines gleichseitigen Dreiecks in einem regelmäßigen Viereck mit derselben Seitenlänge

der Planimetrie genommenen Analogie; es ist nämlich naheliegend, das folgende Beispiel anzuführen: in welcher Weise ist es möglich, ein Vieleck mit einer gegebenen Seitenzahl in einem anderen, mit einer um 1 größeren Seitenzahl, jedoch nahezu von derselben Seitenlänge, um eine volle Umdrehung (zu 360°) umzudrehen?

Im Bild 32 bildet, gemäß unserer Annahme, die halbe Seitenlänge des Quadrates die Einheit. Nun soll, innerhalb dieses Quadrats, ein gleichseitiges Dreieck mit derselben Seitenlänge ($a = 2$) umgedreht werden. Der Halbmesser des um dieses Dreieck umschriebenen Kreises ist

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

und die Kreisfläche

$$T = \frac{4}{3}\pi.$$

Der Flächeninhalt des Quadrats und des um das Dreieck umschriebenen Kreises stehen in folgendem Verhältnis zueinander:

$$\eta = \frac{a^2}{T} = \frac{3}{\pi} = 0{,}955.$$

Jetzt soll folgende Frage beantwortet werden: Wie groß ist das gleichseitige Dreieck, welches in dem Vieleck umgedreht werden kann und welches dadurch entsteht, daß das ursprünglich angenommene Quadrat nach Bild 33 derart eingeengt wird, daß man aus dieser

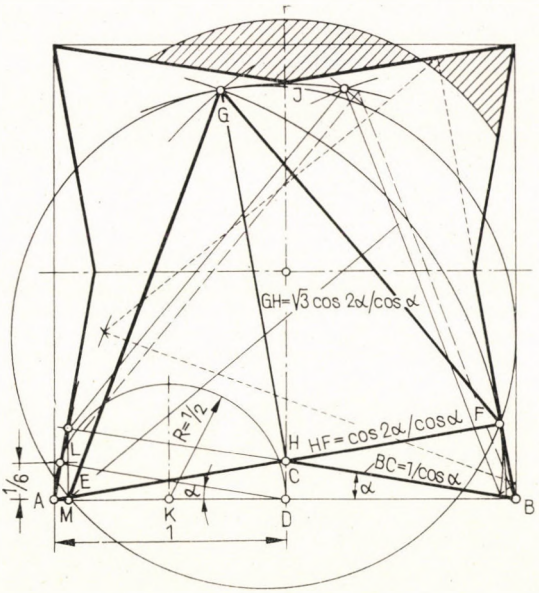


Bild 33. Umdrehung eines gleichseitigen Dreiecks in einem regelmäßigen Viereck mit verengtem Profil

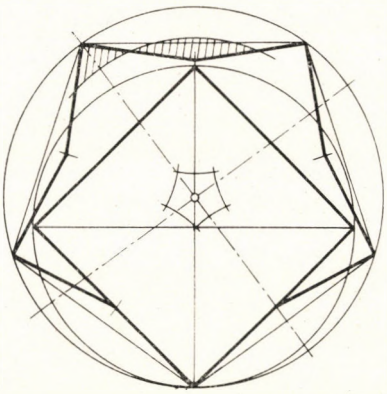


Bild 34. Umdrehung eines Quadrats in dem eingeengten Profil eines regelmäßigen Fünfecks, wenn die Seiten beider Polygone gleich sind

Quadratfläche die Fläche des Dreiecks ABC viermal abzieht. Der Winkel α in dem Viereck soll derart bestimmt werden, daß bei einer Drehung des Dreiecks um den Punkt C, weder zwischen dem Eckpunkt E des Dreiecks und der neuen Grenzlinie des Vierecks, noch zwischen Eckpunkt G des Dreiecks und Eckpunkt J des Vierecks, ein Stoß entstehen soll.

Man sieht in dem Bild den folgenden Zusammenhang:

$$AC = BC = \frac{1}{\cos \alpha} .$$

Auf Grund der Drehbarkeit ist die halbe Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks:

$$EH = HF = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha},$$

und die Höhe des Dreiecks:

$$GH = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \sqrt{3}.$$

Der Eckpunkt G läßt sich unter folgender Bedingung verdrehen:

$$DC = \tan \alpha = \frac{2 - GH}{2} = 1 - \frac{\cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} \sqrt{3} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

d. h.

$$2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha - \cos 2\alpha \sqrt{3} = 0.$$

Nun ist

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

und daher ergibt sich:

$$2 (\cos \alpha - \sin \alpha) - \sqrt{3} (\cos \alpha + \sin \alpha) (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0,$$

bzw.

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

und daher:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3},$$

d. h.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{6}.$$

Dieser Zusammenhang ist ein Hinweis auf eine einfache Ermittlung des Winkels α. Wir zeichnen mit dem Durchmesser $AD = 1$ einen *Thalesschen Kreis*. Durch Auftragen der Strecke $ML = 1/6$ ergibt sich der Winkel $\sphericalangle ADL = \alpha$.

In dem rechtwinkligen Dreieck ALD haben wir die Winkel

$$\sphericalangle \mathrm{ALM} = \sphericalangle ADL = \alpha,$$

weil die Höhe

$$LM = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{6}.$$

Nun ist es von Interesse, das Flächenverhältnis zwischen dem neuen Achteck und dem um das Dreieck gezeichneten Kreise zu kennen.

Zu dem Wert $\sin 2\alpha = 1/3$ gehört der Winkel $\alpha = 9°44'$.

Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ist

$$2EH = \frac{2 \cos 2\alpha}{\cos \alpha} = 1{,}914,$$

und

$$DC = \tan \alpha = 0{,}17153.$$

Die Dreieckfläche $\triangle ABC$ viermal genommen ist:

$$4 \cdot 0{,}17153 = 0{,}68612.$$

Die vom Originalquadrat durch Einengen erhaltene Achteckfläche ist:

$$T_0 = 4 - 0{,}68612 = 3{,}31388.$$

Der Halbmesser des um das gleichseitige Dreieck gezogenen Kreises ist:

$$R_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}\,\sqrt{3} = \frac{0{,}957\,\sqrt{3}\cdot 2}{3},$$

und der Flächeninhalt des umschriebenen Kreises ist:

$$T_1 = R_1^2\,\pi = 3{,}915.$$

Hieraus ergibt sich für die Verhältniszahl der eingeengten Achteckfläche zum Flächeninhalt des umschriebenen Kreises:

$$\eta_1 = \frac{T_0}{T_1} = \frac{3{,}31388}{3{,}915} = 0{,}848,$$

im Gegensatz zu der Zahl $\eta = 0{,}955$ des ersten Falles.

Bild 34 zeigt uns den Fall, in dem ein Quadrat in einem verengten Fünfeck verdreht wird; der Mitarbeiter der Forschungsanstalt für Mathematik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. A. HEPPES, erbrachte den Beweis, daß hier die Fläche des eingeengten Fünfecks kleiner ist, als die Fläche des um das Viereck geschriebenen Kreises.

Es liegt uns zwar kein Beweis vor, daß die in den Beispielen aufgezeichneten verengten Flächen die kleinsten unter den möglichen wären, trotzdem erscheint es sich zu lohnen, auf die augenscheinliche Ähnlichkeit zwischen den hier behandelten, durch das Kippen deformierten Laufbahnlinien und den soeben erwähnten verengten Vielecken hinzuweisen. Es ist nämlich höchst wahrscheinlich, daß das Eindrücken genau unter der als Kippzentrum figurierenden Kugel größer ist als in der Mitte des Belastungsbogens; dies kann aber grundsätzlich als ein Fall des »eingeengten Vielecks« bzw. jener Fläche aufgefaßt werden, die kleiner ist als die entsprechend umschriebene Kreisfläche und wir erlauben uns die mutmaßliche Aussage, daß die deformierte Laufbahn dem Prinzip folgt, die Form eines solchen eingeengten Vielecks anzunehmen; anders ausgedrückt: *in einem Wälzlager mit Spiel folgt die Deformation der Laufbahn dem Gesetz, wonach das Abrollen der Rollkörper sich an dem möglich kleinsten Umfang abspielen soll.*

XVI. Auswirkung der gemäß der vorausgesetzten Konfiguration wirkenden Kräfte auf die in der Literatur beschriebenen Erscheinungen

1. *Die von* F. JÜRGENSMEYER *behandelten Fälle*

Wir haben im Punkte 1 des Abschnittes XIII darauf hingewiesen, daß sich in einem Wälzlager mit Spiel die kinematischen Erscheinungen ganz anders abspielen, als in dem von JÜRGENSMEYER beschriebenen [2] Wälzlager.

Nach JÜRGENSMEYER ist der einfachste Belastungsfall dadurch gekennzeichnet, daß der Außenring des durch *EINE* konstante Kraft belasteten

Wälzlagers feststeht; diesen Fall bezeichnet JÜRGENSMEYER als die »Punktlast«. Wie wir diese Frage im I. *Teil* dieses Aufsatzes besprochen haben, kann von einer solchen »Punktlast« in einem Wälzlager mit Spiel überhaupt keine Rede sein, denn die Lage mit 2 lasttragenden Kugeln kommt viel früher zustande als das Verharren einer einzigen Kugel unter Last in der Mittellinie.

Übrigens weist JÜRGENSMEYER in seinem Buch mit richtigem Gefühl auf die *Pendelbewegung* und auf die *Schaukelbewegung* hin, ohne jedoch eine Analyse darzubieten.

2. *Die von* STRIBECK *als Berechnungsgrundlage angenommene Kugelanordnung*

STRIBECK weist in seiner Mitteilung über die untersuchten Fälle von belasteten Kugeln und Kugellagern [1] darauf hin, daß »jene Vorbedingungen«, die er als Grundlage seiner Berechnungen gewählt hat, daß nämlich die Kugeln noch vor dem Auftreten einer belastenden Kraft zwischen den Lagerringen sich frei bewegen und diese Ringe keine Durchbiegung erleiden, gar nicht erfüllt sind. Er führt die Berechnung für ein spielfreies Kugellager mit einem Belastungsbogen von 180° in jener Lage aus, in welcher eine Kugel sich genau in der vertikalen Mittellinie befindet.

Wir haben im Abschnitt VII darauf hingewiesen, daß *für ein Wälzlager mit Spiel* nur eine Anordnung als stabile Lage angenommen werden darf, in welcher in der Mittellinie überhaupt keine Kugel verharrt; wir haben folgerichtig die Rechenmethode von STRIBECK unter Einbeziehung der *Hertzschen Formeln* auf den, der Wirklichkeit viel mehr näherstehenden Fall ausgedehnt, wo die Stabilität *durch eine tragende Kugelgruppe* gesichert ist und wir zeigten den Weg, wie jene Zahl von Kugeln zu bestimmen ist, die binnen des Belastungsbogens effektiv als lasttragend zu erachten sind.

3. *Die Annahme nach* E. MELDAU

Auch MELDAU betont die Bedeutung einer vorhandenen stabilen Lage der Kugeln und ihrer Rolle im Betrieb [9].

Er nimmt nämlich in seinen Berechnungen (s. o. c. S. 309) — ähnlich wie STRIBECK [1], (s. o. c. S. 121) — das Vorhandensein einer Kraft P_0 in der Mittelebene an. Diese Annahme ist jedoch bei STRIBECK mit einer zweiten Annahme verbunden, nämlich, daß sich auch in der Mittelebene eine Kugel befindet, die mit dem Vorhandensein der Kraft P_0 gleichbedeutend ist. Hingegen kann von einer solchen Kraft in labilem Zustand keine Rede sein; auch MELDAU schreibt davon, daß die Voraussetzung einer solchen Kraft unnötig sei. Die Nutzlosigkeit dieser Annahme, aus der sich nur Unstimmigkeiten ergeben, ist in unserem Abschnitt VII konsequent klargelegt.

4. *Kugeldruck-Kurve nach* H. PERRET

In der zitierten Arbeit weist MELDAU darauf hin, daß seine Untersuchungen sich auf den Fall kleiner Drehzahlen beziehen. In der Mitteilung von PERRET [3] wird eine konstante Kraft angenommen, woraus man darauf schließen kann, daß auch seine Untersuchungen sich auf kleine Drehzahlen (also auf die *Null*drehzahl) beziehen.

Im Bild 2 der zitierten Arbeit von PERRET ist dem Belastungsbogen eine Druckverteilungskurve zugeordnet; dieser Kurve gemäß wirkt auf die Rollkörper auch bei Annahme einer unveränderten Exzentrizität, d. h. eines konstant bleibenden Spiels, ein veränderlicher Druck. Diese Voraussetzung bedeutet, daß die auf die unter dieser Kurve durchwandelnden Kugeln momentan wirkenden Kräfte von der im Raum feststehenden Druckverteilungskurve bestimmt werden. Diese Anschauungsweise stimmt aber mit den wirklichen Erscheinungen nicht überein; die Lage der Kugeln ändert sich, und dann ist die in der zitierten Abbildung festgesetzte Druckverteilungskurve nicht mehr stichhältig (z. B. muß die Druckverteilung bei einer geraden Zahl von tragenden Kugeln sich anders gestalten als bei einer ungeraden Zahl). Also *ändert sich die Belastungskurve mit der Änderung der Lage der Kugeln*; im labilen Zustand kann man die von STRIBECK [1] aufgestellte und bekannte 10. Formel akzeptieren, aber im stabilen Zustand ist die Gl. (23), Abschnitt VII für die Kugeldrücke maßgebend.

XVII. Der Weg zur Verringerung der Schwingungserscheinungen

1. *Berücksichtigung der Belastungsart*

Wenn man vom Lagerspiel spricht, muß man an das Sprichwort denken: »Kleine Ursachen haben große Folgen.«

Es ist keinesfalls irrtümlich, darauf hinzuweisen, daß eine Berechnungsweise, die auf den wirkenden Kräften beruhen könnte, infolge der mangelhaften Kenntnis der durch das Lagerspiel hervorgerufenen Erscheinungen nicht abgeleitet werden kann, und wir deshalb gezwungen sind, Wälzlager auf Grund der *experimentell* ermittelten Lebensdauerangaben zu dimensionieren.

Wie dies in den Lehrbüchern über »Maschinenelemente« [21] scharf betont wird, läßt sich *durch sorgfältige Beachtung der möglichen Belastungsfälle* die gewünschte Lebensdauer bei Anwendung der konventionellen und experimentell erprobten Wälzlagertypen in zuverlässiger Weise erzielen.

Wir wollen beispielsweise den Unterschied in den auftretenden Drehzahlen einzelner Bestandteile für den Fall ausfindig machen, wenn an Stelle der Welle das Gehäuse des Außenringes in Drehung versetzt wird; nebstbei,

die Änderung bzw. der Unterschied der Drehzahlen bringt auch Änderungen und Unterschiede in der Zahl der Kippbewegungen mit sich.

Nach dem im Abschnitt IV angeführten Beispiel können wir die Drehzahlangaben wie folgt zusammenstellen.

	Umdrehungen			
	des imaginären Armes $\bar{e}'$	des Innenringes $\varnothing\, d$	der Kugel $\varnothing\, b$	des Außenringes $\varnothing\, D$
Während einer Umdrehung des ganzen Systems	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
Wenn bei unbeweglichem Arm $\bar{e}'$ der Innenring d in die ursprüngliche Lage zurückgedreht wird	0	-1	$+\frac{d}{b}$	$+\frac{d}{D}$
Resultierende Umdrehung	$+1$	0	$1+\frac{d}{b}$	$1+\frac{d}{D}$

Wenn also der Außenring 1 Umdrehung ausführt, macht der Arm $\bar{e}'$ (und auch der Kugelkäfig) eine Drehbewegung gleich

$$\frac{1}{1+\frac{d}{D}}=\frac{D}{D+d}$$

und während n Umdrehungen des Außenringes D ist die Drehzahl des Armes $\bar{e}'$ (und des Käfigs)

$$\bar{n}_k = n\,\frac{D}{D+d}\,. \tag{75}$$

Wenn wir diese Drehzahl mit jener vergleichen, die nach (5) bei Umdrehung der Welle entsteht, so sehen wir, daß die Drehzahl des Käfigs im Verhältnis D/d gestiegen ist.

Diese Verhältniszahl ist zugleich charakteristisch für das Ansteigen der Kugeldrehzahl.

Nach der Tabelle im Abschnitt IV ist die Kugeldrehzahl bei *einer* Wellenumdrehung:

$$\frac{1-\frac{D}{b}}{1+\frac{D}{d}}=\frac{d}{b}\,\frac{(b-D)}{(d+D)}\,,$$

und nach der neuen Tabelle ist die Kugeldrehzahl bei *einer* Umdrehung des Außenringes:

$$\frac{1+\frac{d}{b}}{1+\frac{d}{D}} = \frac{D(b+d)}{b(d+D)} .$$

Der Quotient dieser Drehzahlen ist:

$$\frac{D(b+d)}{b(d+D)} : \frac{d(b-D)}{b(d+D)} = \frac{D(b+d)}{d(b-D)} .$$

Da aber die absoluten Werte

$$|b + d| = |b - D|$$

einander gleich sind, steigt die Kugeldrehzahl um das Verhältnis D/d, wenn sich an Stelle der Welle der Außenring dreht, die Drehrichtung jedoch in den zwei Fällen eine entgegengesetzte ist.

Wir können nicht umhin, nochmals auf die Wichtigkeit der hier besprochenen Schwingungserscheinungen hinzuweisen: es ist klar, daß durch Auftreten der Kippbewegungen die Schlagwirkungen immer häufiger werden; auch ist die Stelle, die von den Schlagkräften gehämmert wird, bei unveränderter Drehzahl — bis zu einer gewissen Grenzdrehzahl — immer dieselbe; so besteht also die erste Art der Abhilfe darin, daß man bei der Auswahl eines Wälzlagers die Art der Belastung und die begleitenden Betriebsverhältnisse gründlich erwägt.

In dem ausgezeichneten Werk von JÜRGENSMEYER [2] wird auch der Einfluß der Belastungsart auf das Eintreten der Wanderbewegung der Laufringe gründlich analysiert.

2. *Konstruktive Ausbildung der Wälzlager*

a) *Verringerung des Winkels* γ. Nach Gl. (1) ist bei einem gegebenen Spiel h die Exzentrizität e umso kleiner je kleiner der Teilwinkel 2γ, d. h. je größer die Zahl der Kugeln, unter Beibehaltung derselben mittleren Kranzdurchmessers $2R_k$, ist.

Bei zweireihigen Rollenlagern ist die Verschiebung einer Reihe der Rollen um einen halben Teilungswinkel γ gegenüber anderen Rollenreihen gleichbedeutend mit der Herabsetzung des Teilungswinkels.

b) *Verringerung des Spiels* h. Es gibt konstruktive Lösungen, bei denen man durch axiale Verschiebung eines der beiden Laufringe gegenüber dem

anderen das Spiel vermindern, bzw. beheben kann. Zu diesen gehören Kugellager, Pendelkugel- und Pendelrollenlager, Schrägkugellager und Kegelrollenlager.

Auch wird das Spiel bei der Montage kleiner, falls man den Innenring mit konischer Bohrung so schwach ausführt, daß er sich beim Aufziehen auf die Welle etwas dehnen kann.

3. *Hinweise für die Montage*

a) *Art des Einbaus.* Die Wälzlagererzeuger sind sich der hier erörterten Anforderungen bewußt; selbstverständlich wurden demgemäß Bauarten entwickelt, in denen z. B. eine willkürliche Verringerung des Spiels möglich ist; in einzelnen Fällen hat man auch schon Typen mit Bestandteilen unter Vorspannung angewendet. Aus der Fachliteratur [24] bringen wir das Beispiel einer Bauanordnung mit Federspannung bei Spindellagern für Schleifscheiben (Bild 35).

b) *Wahl der Passung.* Zum Zwecke einer normgerechten Passungsvorschrift für die Laufringe (Wellentoleranz für den Innenring, Bohrungstoleranz für den Außenring), kommt die entscheidende Rolle dem Verhindern des »Wanderns« der Laufringe zu. JÜRGENSMEYER hat in seinem Buch [2] die Ursachen des Wanderns der Laufringe in einem eigenen Kapitel analysiert. Nach seiner Meinung läßt sich diese Erscheinung auf die Ähnlichkeit eines Wälzlagers mit einem Planetentriebwerk zurückführen. Zu dieser Stellungsnahme können wir als Analogie eine eigene Ansicht des ungarischen Professors BÁNKI anführen, der in seinen Vorlesungen über Dampfturbinen [22] (Seite 403—404) die Meinung aussprach, daß aus ähnlichen Gründen eine Wanderbewegung entstehen muß, wenn man Turbinenlagerbuchsen aus ineinander geschobenen Rohren herstellt. Wir wollen auf diese, in der Fachliteratur ausführlich besprochenen Ursachen nicht näher eingehen, es soll aber nachdrücklich auf den Zusammenhang, der zwischen den hier analysierten Schwingungserscheinungen und der Ringwanderung offenkundig besteht, hingewiesen werden.

In den bekannten Richtlinien für den Einbau von Wälzlagern [23] wird z. B. die Belastungsart im Falle eines feststehenden Gehäuses und einer rotierenden Welle mit Nachdruck dadurch gekennzeichnet, daß *die Last den festsitzenden Außenring stets nur in einem Punkte* in Anspruch nimmt, wogegen *jeder einzelne Umfangspunkt des* mit der Welle rotierenden *Innnenringes bzw. der Innenlaufbahn einmal während einer Umdrehung der Belastung ausgesetzt ist.*

Die Erscheinungen, die im *ersten Teil* behandelt wurden, weisen hier ganz verschiedene Merkmale auf: am Außenring kann nicht eine einzige Umfangstelle als belastet erklärt werden: es gibt einen Punkt an der äußeren Laufbahn, wo *die Schlagwirkungen sich immer wiederholt auch mehrmals während*

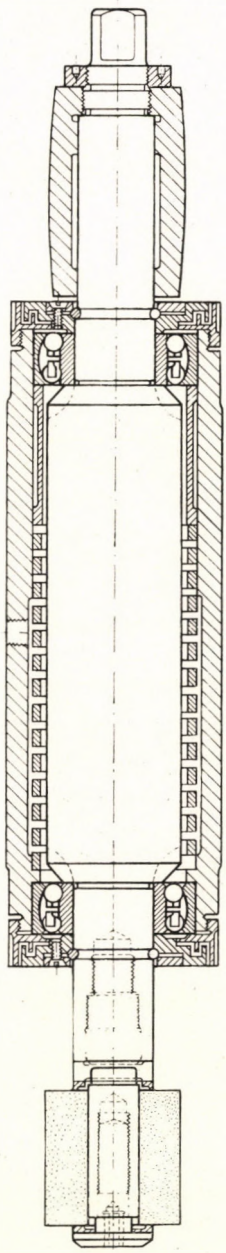


Bild 35. Lagerung eines Schleifscheibenspindels mit Spannfedern

einer Wellenumdrehung ereignen, und zwar innerhalb eines bestimmten Umdrehungsbereiches, auch bei unveränderter Drehzahl. Auch entsteht eine Wanderung der »gehämmerten« Stelle, deren Grenzen man errechnen kann, u. zw. im Gebiete zwischen der *Null*drehzahl bis zu der Betriebsdrehzahl.

In diesem Zusammenhang steht die Tatsache fest, daß die »Hammerschläge« auf den *rotierenden Innenring bzw. auf die innere Laufbahn rundherum und gleichzeitig »losregnen«*.

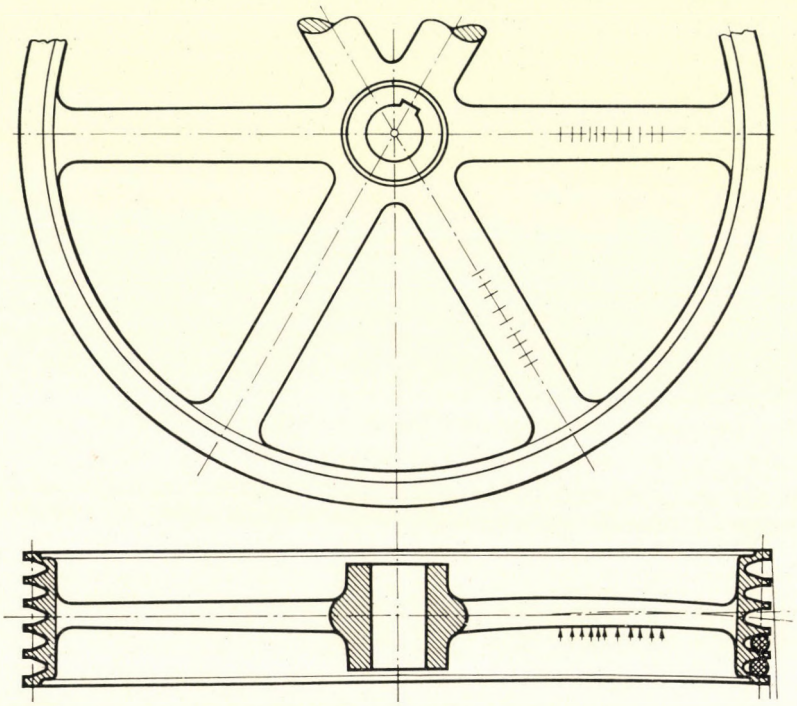


Bild 36. Die Dehnung der äußeren Materialschichte unter Einwirkung rasch aufeinander folgender Hammerschläge

Über die Wirkung von Hammerschlägen auf den Werkstoff seien hier zwei Erfahrungsbeispiele angeführt.

(1) Während einer Stillstandperiode hatte man vergessen, die gespannten Transmissionsseile, die an *eiuer Seite* der ruhenden Seilscheibe aufliegen, zu entspannen. Die Folge war, daß ein Teil der belasteten Seilradspeichen deformiert wurden das Seilrad nahm ebenfalls eine *»hinkende« Form* an. Ursache dieser Verzerrung war das einseitig wirkende Biegemoment der angespannten Seilzüge (Bild 36). Es gelang, das gußeiserne Rad nach Aufziehen auf einen Dorn und Abstützen durch Prismen (zur Kontrolle der runden Form) durch die auf die Speichen loshämmernden leichten Hammerschläge wieder auf die genaue Form zu bringen. Das Werkzeug war ein leichter Handhammer, dessen Pinne sorgfältig durch Schleifen (auf den Halbmesser von $2 \div 3$ mm) abgerundet wurde. Es genügte, die konkaven Seiten der Speichen leicht durchzuklopfen: hiedurch erfuhr der konkave Außenrand eine Dehnung, die dazu genügte, das Seilrad wieder auf die ursprüngliche kreisrunde Form zu bringen.

(2) Es ist eine bekannte Erscheinung, daß man, wenn man beim Zerlegen von alten Rohrverbindungen eine Muffe vom Rohr abziehen will, oft auf eine Dehnung durch Erwärmen verzichten kann, denn bereits durch einige rundherum wiederholt angebrachte Hammerschläge kann die Muffe leicht entfernt werden.

Die innere Laufbahn eines Wälzlagers wird von solchen »*rundherum auftreffenden Hammerschlägen*« getroffen, u. zw. bei jeder einzelnen Umdrehung der Welle. Deshalb wird bei Toleranzvorschriften für Wellen um einem Durchmesser von $100 \div 140$ mm die Passung n 6 vorgeschrieben, aber zu Lagern mit einem größeren Spiel gehört eine Welle mit der engeren Passung p 6.

Elastic Vibrations in Rolling Bearings. Part II.: The Rotating Mass in not Balanced with respect to its Centre Line. In this part of the paper a glance is thrown to some phenomena connected to a rotating force and an assumption is attempted according to which the displacement of the rolling elements caused by the rotating force generates a deformation, in consequence of which the rolling movement of those elements takes place on the smallest area possible.

Эластичные колебания подшипников качения, II. Вращающаяся масса не уравновешена относительн своей собственной оси *(Б. Секе)*. Данная часть сообщения дает краткий обзор явлений, которые по представлению автора могут возникать при некоторым «вращающемся усилии». В дальнейшем автор на основе планиметрической модели выражает то свое представление, что в некотором подшипнике качения при игре вращающегося усилия возникает деформация дорожки качения таким образом, что при этом процесс обкатки происходит на возможно малой поверхности.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 83—95 (1972)

DISPENSER CATHODES WITH HIGH CURRENT DENSITY

A. BUDINCSEVICS*

DR. ENG. SC.

[Manuscript received October 2, 1970]

The operation principle of the "L" cathode, its characteristic features and the possibilities of applying it, are discussed by the author, and considerably simplified as compared to the cathode of LEMMENS and others. The new version of "L" cathode design in a tube form, so-called "M" cathode, is presented in which, instead of porous sintered tungsten, the multilayer tungsten wire is used. The method of preparing flat "L" cathodes with porous tungsten layer pressed directly in molybdenum tube and sintered is presented. Emission properties of developed cathodes are given.

1. Introduction

The widespread research work concerning cathode investigation is due to the fact that the efficiency, lifetime and reliability of the electron tubes depend on the quality of their cathodes which are mainly exposed to wearing.

The paper deals with the characteristics of cathodes with high current density, carrying onto the surface of a metal having a high melting-point — e.g. on W. — an adsorbed monoatomic earth-alkali metal layer. In such systems the work function decreases from 4,5 eV to 1,6—2,0 eV and by applying them, cathodes with high current density are obtainable.

The different cathode constructions are usually divided into 3 main groups.

1. Pure metal cathodes with high melting points (Tungsten and Tantal emitting over 2000 °C).

2. Cathodes having an adsorbed atomic film of electropositive element on their tungsten surface. Film-cathodes Thorium-Wolfram cathodes, "L" and "M" cathodes. Emission temperature from 900 °C to 1600 °C.

3. Oxide cathodes: earth-alkaly oxides on metal ground. Emitting from 560 °C to 850 °C.

Tungsten metal cathodes, having decreased work function, due to an adsorbed atomic layer of an electropositive element, were first described by LANGMUIR and DUSHMAN [1].

* Dr. A. BUDINCSEVICS, Toborzó u. 1., Budapest XIII., Hungary

DE BOER and WAGENER [2] subsequently reviewing the operation of cathodes having atomic surface structure, arrived at new results. They found that if in between the atoms of the adsorbed electropositive element are intermediately atoms of an electronegative gas placed, e.g. O_2 on the surface of pure tungsten metal, this intermediate layer will decrease the work function, and will favourably affect the vaporisation of the layer, and the stability of the emission as well.

MOORE and ALLISON [3] seeking the effect of adsorbed Ba evaporated on pure W surfaces, without intermediate O obtained the same results. But the monoatomic Ba layer soon became destroyed and was not suitable for preparing practical usable cathodes.

LEMMENS [4] and collaborators were successful in preparing cathodes, consisting of adsorbed Ba on W surfaces, using a new design. The evaporating Ba was permanently compensated, from a reserve supply, through the pores of the porous W. Now these cathodes are called "L" (Lemmens) or dispenser cathodes.

The emission properties of the dispenser cathodes are very favourable. They allow the output of great current densities, both in permanent operation and in impulse work. They work in H.F. operation without sparking, are not affected by ionbombardment, and recover quickly after free set gas and poisoning effects.

The dispenser cathodes are significant for the preparation of microwave tubes with great specific current density, where the geometrical size is limited by the wavelength, so that often pointlike cathodes with high specific current density are needed. The obtainable values are of $2 \div 4$ A/cm^2 in permanent operation, and 100 A/cm^2 in impulse work. Mostly they are applied in impulsemagnetrons, klystrons, planertriodes and in some types of travelingwave tubes.

Oxide-cathodes also possess great specific emission, but due to the semiconductive character of the oxide-layer, they behave disadvantageously under the above mentioned conditions.

As is known, it is very difficult to secure the construction and operation conditions for the dispenser cathodes, described by LEMMENS, partly because of the complicated production technology, partly because of the diminuation of the emission current. The latter is due to the great probability of poisoning and accessory disproportionate Ba evaporation.

To solve the above mentioned problems, we set ourselves the task to work out a technology which secures both the conditions for the operation mechanism and for the production of great quantities of dispenser cathodes, with high current density and durability.

2. The working mechanism of dispenser cathodes

Several authors examined and described the physical and chemical processes occuring during the operation of dispenser cathodes. DU PRÉ and RITTNER [5] worked out a complete theory, which gives the following scheme for their operation.

Fig. 1 gives the schematic sketch of a dispenser cathode construction. It is built up from a hollow Mo cylinder 1 (coated with $BaCO_3$ 2) and is closed

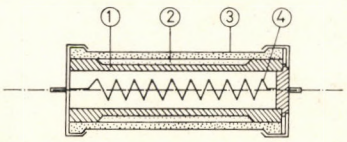


Fig. 1

up by a cylinder 3 of a porous tungsten. The heating of the cathode 4 is provided by a W spiral coated with Al_2O_3. Under thermal treatment in high vacuum, the $BaCO_3$ is decomposed to BaO, which, contacting the hot W wall, is reduced according to Eq.

$$6BaO + W = Ba_3WO_6 + 3Ba\ .$$

At high temperatures the chemical reduction-process is able to supply Ba metal without a current load, so that a tension of Ba vapour develops, which is balanced through the pores of the W. The Ba diffunding through the porous W spreads onto the surface, decreases the work-function and then evaporates.

On the surface, the Ba is continuously compensated through the pores. The lifetime of Ba atoms on the W surface depends on the adsorption and desorption energies, and is very greatly influenced by impurities, e.g. residual gases.

If on the W surface there are adsorbed O atoms as well, these as intermediate atoms have an orientation effect on the Ba atoms during their adsorption, forming dipoles with them and causing potential gradients on the surface. The presence of O effects a further decrease of the work-function, stabilizes the emission and moderates the evaporation of the cathode.

The high emission current of the dispenser cathodes is ascribed to the atomic Ba and O adsorbed on the pure W surface. In relation with this, widespread research work was made by BRODE and RITTNER as well as by JENKINS and ALLEN [6].

In every case of lessening emission it was ascertained that it was caused by set free, gases or evaporating impurities from the anode or other constituents, called cathode poisoning.

The adsorbed atomic layer on the W surface is very sensible to gas impurities. Concerning the poisoning effects JENKINS and TRODDEN [7] measured and determined the tension of several poisoning gases critical to the emission.

O_2	10^{-8} torr.
H_2O	10^{-7} torr.
CO_2	10^{-6} torr.
air	5×10^{-6} torr.

CO, N_2 and H_2 are less poisoning at similar pressures. After the tension of the poisonous gas becomes less than the critical value, the recovery-time of the cathode is about $5 \div 10$ sec.

The activation treatment using current load starts only a thermal process which releases gas from the anode, thus altering the chemical balance of the cathode. To demonstrate the above mentioned, long impulses of 100 μsec were used and it was found that the current break-downs and transients are the functions of the anode material and the temperature. In experimental diodes, using Ti. anodes, the current break-downs and transients are smaller.

3. Production technology of dispenser cathodes

Concerning the preparation of dispenser cathodes, papers of several authors give their results. The critical analysis of these methods led to the result that the shape of the cathode influences the technology of cathode preparation. It is advisable to use different technics for the preparation of cylindrical and of plane dispenser cathodes.

For the preparation of cylindrical dispenser cathodes we used porous W bars sintered to 28%, and shaped mechanically. For plane cathodes we developed a metallurgical and sinter methode using W powder.

To make cylindrical cathodes we omitted foreign metal saturation, to avoid impurities in the W.

In accordance with the working mechanism, a pressure of Ba vapour must develop in the dispenser space, the equalization of which with the vacuum space can take place only through the pores. The two spaces have to be separated completely, to avoid the penetration of Ba through the leakage of the structure components. The super cleanness of the porous W surface is not securable if we apply the welding technique of metals with high melting points like W and Mo.

Examining the situation from the point of vacuum technics two questions arise. *1.* What is the allowable pressure difference between the vacuum and the dispenser space? *2.* What is the tolerated leakage between the components.

According to the measurements of Ba vapour pressure, carried out by CLASSEN and VENEMANN [8] at 1400 °K

the tension of Ba on W—BaO is 8×10^{-5} torr.

Mo—BaO 1×10^{-6} torr.

In the cathode space, the vacuum is generally better than 1×10^{-7} torr. Experiments show, in cases of the above mentioned low pressures, that the application of tight fittings is sufficient to stop the equalisation, if the fitting is long in relation to the great mean free path. Thus the equalisation of the low Ba vapour tension takes place only through the pores.

RITTNER, AHLERT and RUTLEDGE [9] determined the mobility of Ba on W surfaces. If the roughness of the surface is less than 3 μm the migration path can be 0,1 mm/sec.

The numerical data make it possible to design the technology to prepare dispenser cathodes, securing the theoretical conditions and the realisation of mass production.

Taking in account the great migration path of Ba, the thickness of the porous W wall has to be 0,5 mm and the length of the fitting surfaces 5 mm. This ensures that the Ba will get stuck one the tight fitting surface, and the penetration into the vacuum space takes place only through the porous wall.

There remains the question whether the heated cathode when hot — becomes loose and permeable for Ba vapour or not.

The thermal expansion factor of Mo is 5.3×10^{-6}/degree

W is 4.4×10^{-6}/degree

The structure of the cathode is such, that the Mo cylinder with the greater expansion factor is placed inside the porous W body. When heated, the fitting becomes more close, without destroying the elastic porous W.

The closing up of the dispenser space is solved by a well-known and in many respects advantageous cold technology. Its success was proved by experiments in every respect.

We examined the question of the porosity of W in detail, and a new determination methode was given for the rapid examination of the surfaces and the porosity of the porous W body.

The internal and external surface of the porous W was measured with the cathalytic decomposition of H_2O_2 on the W surface. The porosity of W was determined with the aid of the flowing velocity of air through the pores. The results of both methods were in good agreement with the calculated values, and we received for the porous surface $10\div12$ times the value of the compact W surface.

We also determined the specific surface of W powder, with $0{,}5\div3$ μm grain size. We found the specific porous area of a sintered W cube to be $1{,}100\div1{,}200$ cm^2/cm^3.

The complete inner and outer surface of an experimental cathode is about 49,000 cm^2.

It is evident that big pores decrease the internal surface as well as the external one, and a consequence of the fine pores is the increase of the areas. However, the practical values move between narrow limits, because the size of the porous surface is a function of the equilibrium of Ba evaporation.
At the same time the roughness of the surface should not be more than 3 μm.

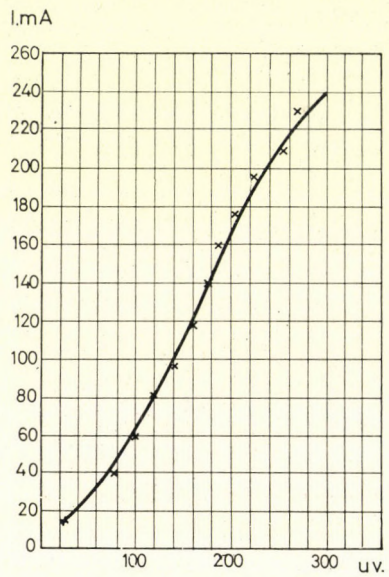


Fig. 2a

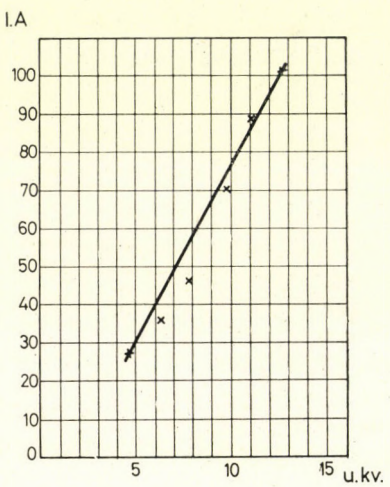


Fig. 2b

In the practice the main problem among the production of porous W bodies is, to find a suitable method, to open the pores which got closed during the steps of preparation. The W bodies were chemically cleaned and etched, first to open the closed pores, secondly to secure the adsorption of Ba.

The chemical treatment is the following. Corrosion for 24 hours in 30% HF and further 24 hours in 10% HCl followed by quenching in bidistilled water, which was changed many times during 48 hours, till the resistance of the last rinsing water became 500 000 ohm/cm. Then dehydration with acetone and when dry, a glow treatment is applied at 900 °C in flowing dry H_2.

The Mo cylinder is also cleaned and glowed in dry H_2. The dispenser space of the Mo cylinder is coated with carbonates. The composition is: 50% $BaCO_3$ + 45% $SrCO_3$ + $CaCO_3$. The spray is a suspension in isobuthylalcohol without fastening material. The quantity of coating material was 15÷20 mg/per cm^2.

The next step is the adjustment of the cathode. The porous W cylinder is heated to 100 °C and the cold Mo cylinder is pushed into the W body.

Diodes were made by using the above cathodes and built magnetrons of the type of 2J32 with them. The anode—cathode distance of the experimental diodes was 5 mm. The anode made of Mo sheet has in the middle a 2 mm perforation for pyrometric measurements.

The tubes were pumped to 10^{-6} torr. and heated at 450 °C for 4 hours. The following step was the slow thermic decomposition of the cathode. We raised the temperature in such a way that the pressure should not be more than 1×10^{-5} torr. In about 15÷20 min the cathode reaches the temperature of 800 °C, and an ion current of a few μA flows between anode and cathode. During the activation process this slowly decreases, and the starting electron current appears. The temperature will be raised then for 5 min to 1100 °C and the alteration of the starting current observed, which reaches the value of 0,2÷0,3 mA/cm^2. Then the temperature of the cathode is decreased to 900 °C and the anode is loaded by electron bombardment. During this, gas is set free and consequently the cathode becomes poisoned. The diminuation of the emission current should not be more than 10% of the saturation current.

The degased and activated diode is sealed off from the pump and by evaporating the getter the vacuum is improved. After the diodes were loaded with 200 mA for 50 hours, the emission currents were measured in continuous and impulse work.

Fig. 2 shows the current voltage curves, a) in continuous and b) in impulse work.

4. The technology of plane cathode preparation

Our research work concerning the dispenser cathodes included the plane cathodes too. We prepared several plane and concave Pierce cathodes with diameters from 10 mm to 2,8 mm.

The technology applied was based on a sinter method, which grew without shrinking the pressed W powder. The other constituents of the dispenser cathode are made by deep-drawing of Mo sheets, or by cutting from Mo bars.

The Mo ingradient cleaned chemically and glowed in H_2 is placed in a two-piece instrument, and the W powder — after the above mentioned etching and cleaning treatment — is measured into the tool. Then it is pressed into a hydraulic press with 0,6—0,8 t/cm^2. The pressure was applied successively for 20 sec and was also diminished to 20 sec. Using this method, faultless, porous W bodies without cracks, with 0,8 mm thickness were obtained.

The pressed porous elements were glowed in wet H_2 flow at 1550 °C, in a covered Mo vessel.

During the glowing process the W and the vapour of water react in the known way:

$$W + 2H_2O = WO_2 + 4H$$
$$WO_2 + 4H = W + 2H_2O$$

As a result bigger W particles and a strong binding to the Mo sheet were obtained which has a greater heat expansion factor than W. The arising force is compensated by the elasticity of the porous W. Carefully adjusting

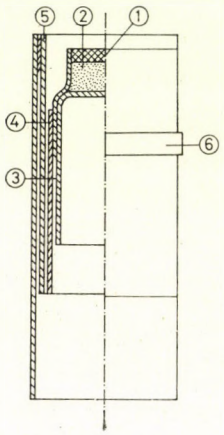


Fig. 3

the optimal temperature and duration time of the heating process, it is possible to ensure that through incomplete sintering the pores remain open. Using this method, W cathode was produced having bodies with the necessary strength and porosity and the welding process with the resulting impurities could be avoided.

After sintering the plane cathodes, the same procedure of cleaning and etching was used as described in the case of cylindrical W bodies. The chemical cleaning and the opening of pores ensures the supercleanness of the cathode surface.

The weighed carbonates are dosed into the cleaned cathode space, and fitting it into the closing sheath, it is pressed together, using a tool. According to the tight fitting blockade, long surfaces were applied. Fig. 3 shows the section of the structure of an "L" cathode.

Dispenser cathodes generally need 2,5÷3,0 times as much heating energy as oxide cathodes. This is due to their higher working temperature and bigger and blacker radiating surface.

The temperature of the construction according to Fig. 3 was adjusted by 10^{-7} torr. to 900 °C. This value is 100 °C less than the data given in the

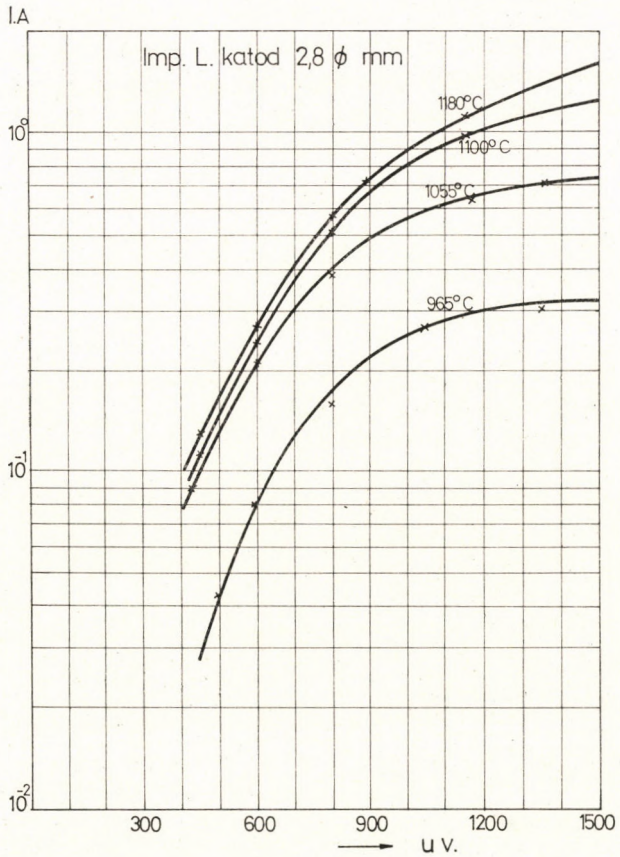

I.A
Imp. L. katod 2,8 ϕ mm
1180°C
1100°C
1055°C
965°C
10⁰
10⁻¹
10⁻²
300
600
900
1200
1500
u V.

Fig. 4

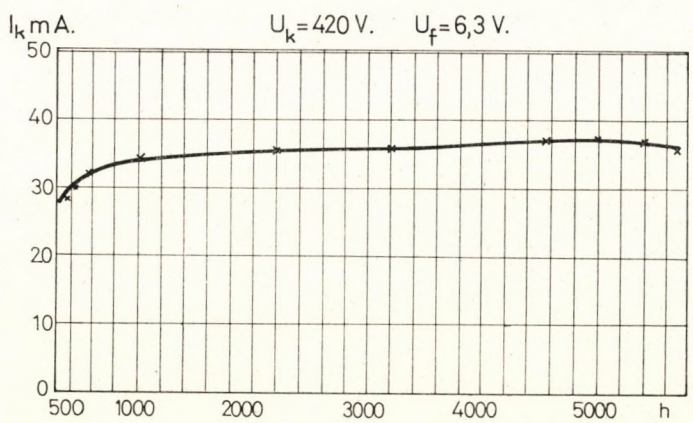

I_k m A.
U_k = 420 V.
U_f = 6,3 V.
50
40
30
20
10
0
500
1000
2000
3000
4000
5000
h

Fig. 5

papers for "L" cathodes. The efficiency of the cathode was improved by surrounding it with a threefold heat shield from Tantal folia. The low value of the balance of Ba evaporation and reduction is due to the low contamination ratio which, together, lead to the requirement of less heating energy. It is less than 2 times the value compared to oxide cathodes.

Diodes with plane cathodes and measured emission were prepared. Fig. 4 shows the current voltage diagram of a dispenser cathode with 3 mm diameter, at various colour temperatures of the W.

The subject for further experiments were the emission and life time. A great number of microwave tube cathodes have been investigated, the results are shown on Fig. 5.

5. Migration "M" cathodes

Our research work was directed to further improvements concerning the dispenser cathodes. A new structure of the migration type "M" cathode was suggested. Fig. 6 shows the schematic design of the "M" cathode.

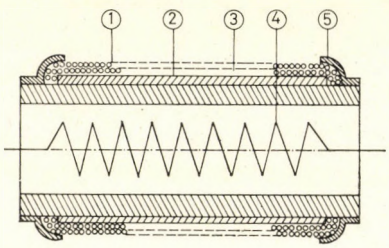


Fig. 6

The "M" cathode is built from a cathode-nickel cylinder containing 0,02% of the usual reducting material, Mg. The cylinder is coated with earth-alkali carbonates. The composition of the three carbonates is the same as in the case of "L" cathodes and the rate: $20 \div 30$ mg/cm^2. Then an etched and redheated W wire of $25 \div 20$ μm diameter was wound around the coating. The windings were close to each other. The winding went 2 mm beyond the ends of the coating, in order to shut off the dispenser space, $2 \div 4$ rows of the winding were applied depending on the thickness of the wire.

The pumping and activation process was carried out similar to that of the "L" cathode. Fig. 7 shows the illustrations of the "M" cathodes with $0{,}8 \div 14$ mm diameters.

The working mechanism of the "M" cathodes is in many respects similar to that of the dispenser cathodes with a porous W wall.

They differ only in their structural design. The dispenser space of the "M" cathodes is completely filled with the oxide material, as the winding is adjusted close to the oxide layer. Consequently, the Ba atoms, which are reduced with the aid of W from the oxide layer, are spreading directly through migration onto the surface of the W wire, and decrease the work function in the same way as in the case of the porous W. The continual Ba supply of the "M" cathode is ensured as well.

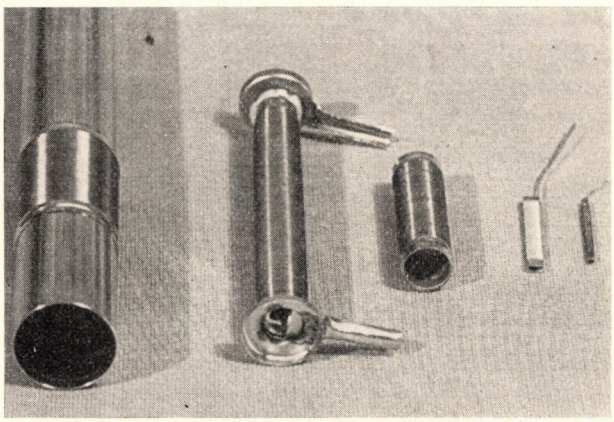


Fig. 7

The properties of the migration type "M" cathodes are similar to those of the "L" cathodes, only their production technology is more simple. Their further advantage is the possibility to prepare cylindrical and plane dispenser cathodes of less than 1 mm diameter. Fig. 8 shows the current voltage curve of a "M" cathode in continuous work.

Table I contains the results of investigation carried out in magnetrons with "L" and "M" cathodes, in oscillation and impulse operation.

The lifetime of dispenser cathodes is determined by the evaporation of the Ba. During the preparation with the dynamic equilibrium of the cathode it is inevitably influenced by impurities and gases set free. It is desirable to diminish the evaporation of Ba.

In our further investigations we searched for the conditions ensuring the Ba balance as well as the role of Ca in decreasing the evaporation and the work function. This question was thoroughly studied on sinter cathodes by COPPOLA and HUGHES [12]. In sinter cathodes the dispenser space is placed into the pores, that is the difference between "L" and sinter cathodes. They are a special version of the dispenser cathodes. The working mechanism of the

sinter cathode is in every respect the same as in the case of the dynamic equilibrium of the adsorbed atomic Ba layer on the surface of W crystals.

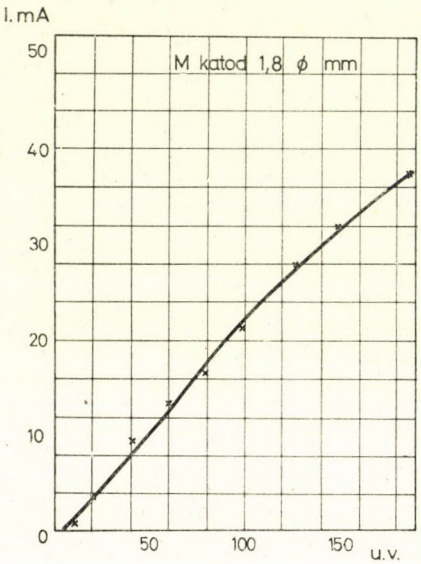


Fig. 8

There are several more questions to be answered. Which hitherto uncleared processes determine the emission properties of BaO layers, and the optimal conditions of the state of equilibrium? What parameters are stimulating, and, on the contrary, hindering the formation of perfect equilibrium at the working temperature of the cathode?

These questions will be answered in a following paper.

Acknowledgements

The author thanks Dr. WINTER for his valuable discussions and suggestions. He also thanks K. FATTA and GY. VARGA for their kind assistance.

REFERENCES

1. LANGMUIR: *Phys. Rev.* **22** (1923), 357, *Dushman Rev. Mod. Phys.* **2** (1930), 398. LANGMUIR: *Kingdom Proc. Roy. Soc.* **107** (1925), 61.
2. DE BOER, J. H.: Elektron Emission and Adsorption Phenomena. Cambridge University Press, London 1935. HERMANN, C.—WAGENER, B.: The Oxide-Coated Cathode. Chapmann and Hall, Ltd. London, Vol. 2, 1951.
3. MOORE, G. E.—ALLISON, H. W.: *Phys. Rev.* **77** (1950), 246—257.

4. LEMMENS, H. M. J.—JANSEN, M. J.—LOOSJES, R.: Incandescible Cathode U.S. patent Wo. 2. 543—728 Jul., 1948.
LEMMENS, H. J.—JANSEN, M. J.—LOOSJES, R.: Eine neue thermisch-emittierende Kathode für schwere Belastungen. *Philips Tech. Rew.* **2** (1950)
5. RITTNER, E. S.—DU PRE, F. K.: *Phys. Rev.* **82** (1951), 573.
6. BRODIE, I.—JENKINS, R. R. O. C.: Evaporation of Barium from Impregnated Cathodes, *Journal Electronics* (1957), 457—476.
KATZ H. KATE, M.: Metallcapillary Cathodes. *Journal of Applied Phys.* **24** (1953), 5.
7. JENKINS, R. O.—TRODDEN, W. G.: The Poisoning Impregnated Cathodes, *Journal of Electronics and Control*, Vol. VII. 5. (1959), 393/495.
8. CLASSEN, A.—VEENEMAN, C. F.: Dampfdruckbestimmungen von BaO, SrO, CaO und deren Mischungen aus Verdampfungsgeschwindigkeitsmessungen. *Z. Phys.* **80** (1933), 342.
9. RITTNER, E. S.—AHLERT, R. M.—RUTLEGDE, W. C.: *Journal Applied Phys.* **28** (1957), 156.
10. BUDINCSEVITS A.—BARLA E.: Porózus wolframtest külső felületének és porozitásának gyors meghatározása. *Távközlési Kutató Intézet Közleményei* (1955), I. 2. 63.
11. *Patented Apr. 5, 1960. 2, 931, 934:* Indirectly Heated Supply Cathode. USA.
Patent 144, 881, 1955. Feb. 5.: Közvetett fűtésű tartalékkatóda.
12. COPPOLA, P. P. O.—HUGHES, R. C: A New Pressed Dispenser Cathode. *Proceedings of the IRE.*

Vorratskathoden mit hoher Stromdichte. Der Verfasser legt die Theorie der Wirkungsweise, die charakteristischen Eigenschaften und das Anwendungsgebiet der »L«-Kathoden dar. Er wertet die von LEMMENS und seinen Mitarbeitern publizierte Technologie sowie die Konstruktion der zylindrischen und ebenen »L«-Kathoden kritisch aus und erörtert den Einfluß der Konstruktion auf die Emissionsparameter. Des weiteren berichtet der Verfasser über eine neue konstruktive Lösung für »M«-Kathoden, in welchen das poröse Wolfram durch eine mehrlagige Wolframdrahtwicklung ersetzt wird. Die Herstellung der »L«-Kathoden wird diskutiert, ferner einige Probleme der gepreßten und gesinterten porösen Körper und die Emissionseigenschaften der so hergestellten Dioden.

Катоды с непрерывным восстановлением активного слоя и большой плотностью тока *(А. Будичевич).* Автор описывает механизм действия, характерные свойства и область применения катодов «L». Он дает критическую оценку технологии, опубликованной Лемменсом и сотрудниками, а также конструкции цилиндрических и плоских катодов «L» и сообщает воздействие конструкции на параметр эмиссии. В дальнейшем автор сообщает об одном новом конструкционном решении в случае катодов «М», при котором пористый вольфрам замещается многослойной обмоткой из вольфрамовой проволоки. Обсуждаются изготовление катода «L», далее некоторые проблемы прессованных и спеченых пористых тел и эмиссионные свойства изготовленных таким образом диодов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 97 — 115 (1972)

NEW METHOD FOR THE DETERMINATION OF DIFFERENCE OPERATORS FOR PLATES AND GRIDS

GY. WEBER*

[Manuscript received May 7, 1970]

A grid model is described wherewith the biharmonic difference operators may be produced by taking into account the most different boundary conditions. The divergences between the boundary conditions of the actual free-edge plates and grids are demonstrated. This method of production of the difference operators has been developed and succesfully utilized for the purpose of computer programming.

Symbols

K = flexural rigidity;
H = torsional rigidity;
x, y = coordinate directions or subscripts;
w = vertical displacement;
M = bending and torsional moments;
Q = shear force;
D = dimension of the reticular division for calculation;
i, j = subscripts;
p = distributed load acting on the surface;
P = concentrated load acting on the joint.

1. Introduction, preceding special literature

In papers of the special literature, the method of the "finite differences" has several times been recommended for the numerical solution of the biharmonic difference (plate-) equation, for example by GIRKMANN [2], KANTAROVITCH—KRYLOV [3], MARCUS [4], RÓZSA [5], SZABÓ [6]. In the technical literature, in connection with the establishment of the boundary conditions and connected problems only references can be found. The various alternatives of the "reflection" principle applied at the perimeter are described by GIRKMANN [2], MARCUS [4] and TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER [7].

KANTAROVITCH—KRYLOV [3] divide the region investigated into two parts: to points belonging to an internal and to an external boundary zone. To the internal points the difference equation associated with the biharmonic differential equation may be established, and therefore, in this regard no

* Gy. WEBER, Sollner u. 26/a, Budapest XIII., Hungary

further difficulties are encountered. In the case of the points being in the boundary zone, the boundary conditions should be taken into consideration; these are either given at the points of the network or may be determined by estimation. Subsequently, the various methods of solution of the difference equations, estimation of the error in the calculation and the convergence of the procedure are described.

The intention of this paper is to present a new method of development of the difference operators whose essence is to lead back the problem of the plate to a grid model.

The bearing grid models, in connection with the subject in question, have been treated by BÉRES [1], RÓZSA [5] and SZABÓ [6]. From these, first of all, the study of SZABÓ [6] has to be mentioned, wherein the author points out that the calculation model of the plane grid is the approximate solution of the plate equation. It should be noted that the precision of the method of the "finite differences" may be increased according to KANTAROVITCH—KRYLOV [3] and the error made in the calculation may be reduced to a desired degree.

Advantage of the new procedure is that it simplifies and mechanizes the consideration of the boundary conditions, further, in the cases where the so-called "reflection principle" cannot be employed, it may provide practicable result. Such are, for example, in the case of free edges, the corners of various types or, where for the determinations of external points such assumption should be made as might lead to a contradiction (for example, at the concave corner of a plate supported at the edges). By applying the new procedure, the boundary conditions may be prescribed arbitrarily (separately for each point), however, at the same time, in the structure, internal openings as well as convex and concave corners may exist.

2. Relationships describing the stress pattern in the orthotropic plate

2.1. Analytic relations

Both for the plate and grid, the basic relationships describing the stress distribution are familiar from the special literature on the subject. (GIRKMANN [2], TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER [7]), the deduction and conditions of their application are taken from the work of TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER [7]; the stiffness conditions of the grid systems should be determined according to the theory of GIRKMANN [2] and TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER [7].

The relationship between the deflection, stiffness conditions and external load is

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y). \tag{1}$$

Since, herein, an approximate calculation and a summarizing presentation is dealt with, the Poisson-effect is ignored, however, its consideration in the calculation does not involve essential difficulties because its influence is of a constant nature, in fact, it only makes the formulas more intricate.

The relationships serving the determination of the moments and shear forces, are as follows:

$$M_x = -K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2}$$

$$M_y = -K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3}$$

$$M_{xy} = 2H \frac{^2w}{\partial x \, \partial y}, \tag{4}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \tag{5}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \tag{6}$$

In the case of edges of various types, the boundary conditions are as follows.

Restrained edge:

$$(w)_{x=\text{edge}} = 0 \quad \text{or} \quad (w)_{y=\text{edge}} = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=\text{edge}} = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=\text{edge}} = 0. \tag{8}$$

Hinged edge:

$$(w)_{x=\text{edge}} = 0 \quad \text{or} \quad (w)_{y=\text{edge}} = 0, \tag{9}$$

$$\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=\text{edge}} = 0 \quad \text{or} \quad \left(K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=\text{edge}} = 0. \tag{10}$$

Free edge:

$$\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=\text{edge}} = 0 \quad \text{or} \quad \left(K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=\text{edge}} = 0, \tag{11}$$

$$\left(K_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2H \frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial y^2}\right)_{y=\text{edge}} = 0,$$

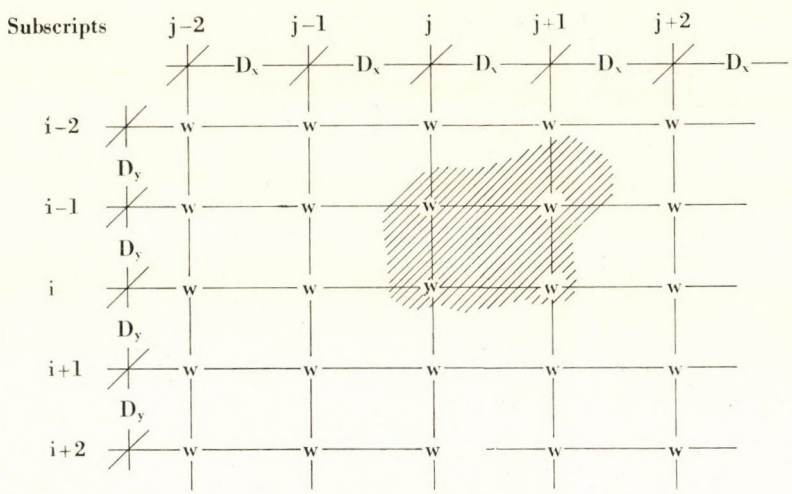
or

$$\left(K_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \, \partial y}\right)_{x=\text{edge}} = 0. \tag{12}$$

Upon the structure a quadrangular network should be fitted, identic with the reticulation of the method of calculation. For each of the internal intersection points the "finite difference" alternative of Eq. (1) should be written down, completed with the difference alternatives (7) to (12) of the boundary conditions in the boundary zone. By writing down the equations for each of the joints, one obtains a system of linear equations whose solution provides the deflection of the structure. The stresses induced in the structure may be determined by means of the difference alternatives of Eqs (2) to (6)

2.2. Establishment of the appropriate difference equations

By writing down the difference equations, the following symbols and reticular division for the calculation are used:



The well-known difference equations of fourth and third order are as follows:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \approx (1/D_x^4)\,(w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + w_{i,j+2}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \approx (1/D_y^4)\,(w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) \tag{14}$$

$$2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} \approx (1/D_x^2)\,(1/D_y^2)\,(2w_{i-1,j-1} - 4w_{i-1,j} + 2w_{i-1,j+1} -$$

$$-4w_{i,j-1} + 8w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + 2w_{i+1,j-1} - 4w_{i+1,j} + 2w_{i+1,j+1}), \tag{15}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \approx (1/D_x^3)\,(w_{i,j-2} - 3w_{i,j-1} + 3w_{i,j} - w_{i,j+1}), \tag{16}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \approx (1/D_y^3)\,(w_{i-2,j} - 3w_{i-1,j} + 3w_{i,j} - w_{i+1,j}), \tag{17}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} \approx (1/D_x^2)\,(1/D_y)\,(w_{i-1,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} -$$

$$-w_{i,j-1} + 2w_{i,j} - w_{i,j+1}), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} \approx (1/D_x)\,(1/D_y^2)\,(w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1} -$$

$$-w_{i-1,j} + 2w_{i,j} - w_{i+1,j}). \tag{19}$$

The way of writing down asymmetric differences has been selected in such a way that in the relationship, the deflection of the "imaginary point" being farthest from the perimeter, should be involved, and the values of the binomial coefficients should not change. By satisfying these conditions, the asymmetric differences should be written down, respectively, for the cases of the joints of various locations:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx (1/D_x^2)\,w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}), \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx (1/D_y^2)\,(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}), \tag{21}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx (1/D_x)\,(w_{i,j} - w_{i,j-1}), \tag{22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx (1/D_y)\,(w_{i,j} - w_{i-1,j}). \tag{23}$$

The difference alternatives of the relationships (1) to (12) may be established by making use of Eqs (13) to (23). These will not be treated herein.

2.3. Difference equations relating to different internal and external points

2.3.1. *Internal points*

At the nodes included in the internal regions of the structure, the difference equations corresponding to Eq. (1), may be written as

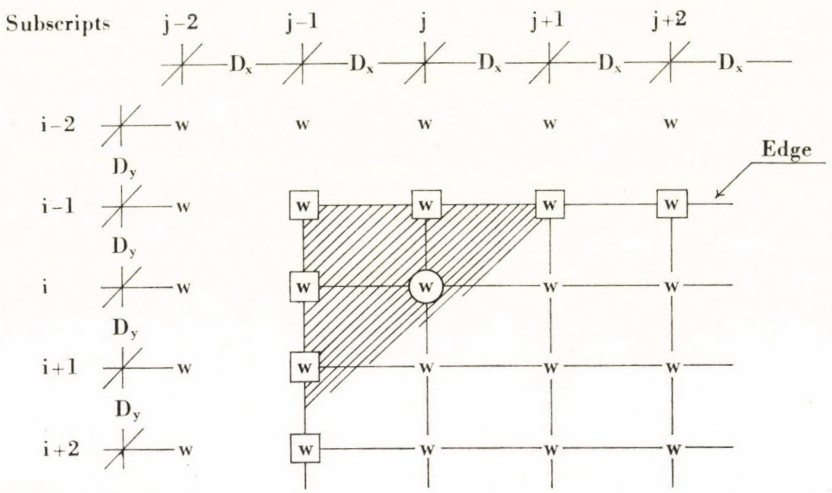
$$\begin{aligned} &K_x(1/D_x^4)\,(w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-4w_{i,j+1}+w_{i,j+2})+\\ &+H(1/D_x^2)\,(1/D_y^2)\,(2w_{i-1,j-1}-4w_{i-1,j}+2w_{i-1,j+1}-\\ &-4w_{i,j-1}+8w_{i,j}-4w_{i,j+1}+2w_{i+1,j-1}-4w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+\\ &+K_y(1/D_y)\,(w_{i-2,j}-4w_{i-1,j}+6w_{i,j}-4w_{i+1,j}+w_{i+2,j})=\frac{P_{i,j}}{D_x D_y}, \end{aligned} \tag{24}$$

wherein $P_{i,j}=p(x,y)D_xD_y$.

In the case of points lying in the boundary zone, the boundary conditions should be taken into account, and the difference alternatives of the Eqs (2) to (12) applied.

2.3.2. Boundary condition of a convex corner on restrained supports at both sides

Arrangement scheme:



Making use of Eqs (1), (7), (8), (13), (22) and (23) and reducing them, in the case of joints i, j yield the following result:

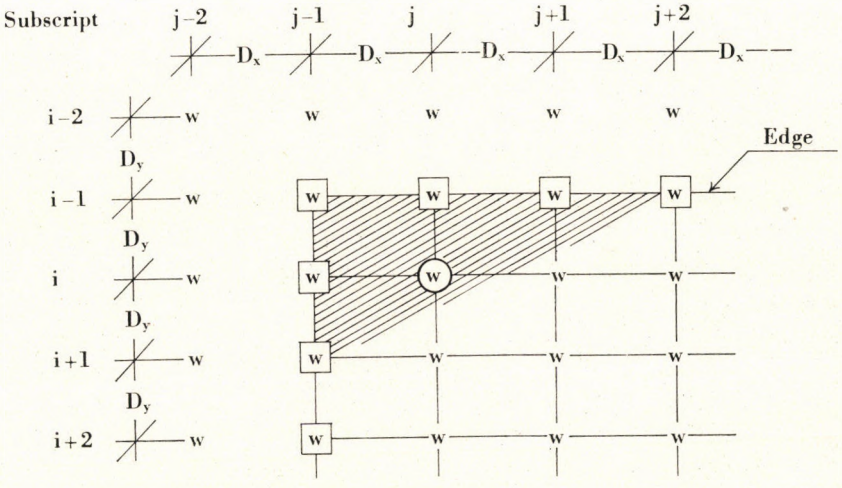
$$\begin{aligned} &K_x(D_y/D_x^3)\,(7w_{i,j}-4w_{i,j+1}+w_{i,j+2})+\\ &+H(1/D_x)\,(1/D_y)\,(8w_{i,j}-4w_{i,j+1}-4w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+\\ &+K_y\,D_x/D_y^3(7w_{i,j}-4w_{i+1,j}+w_{i+2,j})=P_{i,j}. \end{aligned} \tag{25}$$

The value of the enclosed symbol $\boxed{w}$ is, as a matter of course, equal to zero.

In the case of restrained edges, the result may be found with the help of a similar procedure in the middle segment of the edge, and in the case of concave corner point.

2.3.3. *Boundary condition of a convex corner on hinged supports at both sides*

Arrangement scheme:



Making use of, and reducing Eqs (1), (9), (10), (13), (15), (20) and (21) in the case of nodes i, j yield the following result.

$$K_x(D_y/D_x^3)(5w_{i,j}-4w_{i,j+1}+w_{i,j+2})+$$

$$+H(1/D_y)(1/D_x)(8w_{i,j}-4w_{i,j+1}-4w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+$$

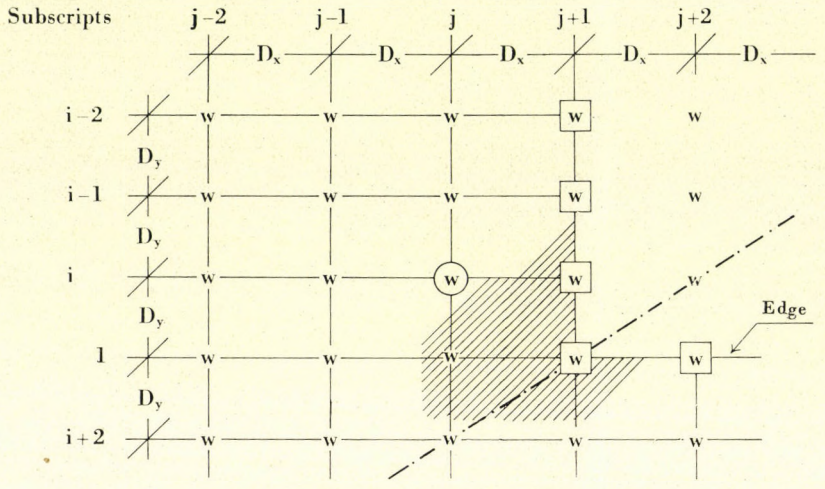
$$+K_yD_x/D_y^3(5w_{i,j}-4w_{i+1,i}+w_{i+2,j})=P_{i,j}. \qquad (26)$$

The value of the enclosed $\boxed{w}$ at the edge, equals, as a matter of course, zero.

The result may be obtained in a similar way in the case of hinged edges at the middle segment of the edge, and in the case of a concave corner joint.

2.3.4. Boundary condition of a concave corner on hinged supports at both sides

Arrangement scheme:



Making use of, and reducing Eqs (1), (9), (10), (13), (15) and (20), in the case of joints i, j yield the following equation.

$$K_x(D_y/D_x^3)(w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+5w_{i,j})+$$
$$+H(1/D_x)(1/D_y)(2w_{i-1,j-1}-4w_{i-1,j}-4w_{i,j-1}+8w_{i,j}+$$
$$+2w_{i+1,j-1}-4w_{i+1,j})+$$
$$+K_y(D_x/D_y^3)(w_{i-2,j}-4w_{i-1,j}+6w_{i,j}-4w_{i+1,j}+w_{i+2,j})=P_{i,j}. \qquad (27)$$

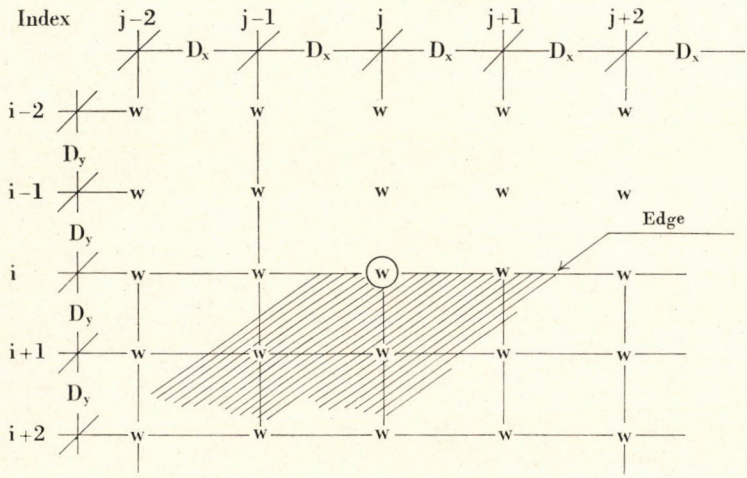
It should be noted that in the case of concave corner joint, the "reflection" principle cannot be applied unequivocally, because an assumption should be introduced, the application of which already leads to a contradiction, or a further new assumption should be taken. Namely, a two-layer imaginary continuation should be assumed. This assumption has not been necessary as yet. However, in the case where, as in the preceding figure, the axis drawn with a dash-and-dot line (—·—·—·—·—) is not an axis of symmetry, nor is the load of the structure symmetric, the "reflection" principle leads to contradiction.

In this case, the difference equation corresponding to Eq. (1) should be written down for points $w_{i,j}$ and $w_{i+2,j+2}$ in the arrangement scheme, and assumed that the negative values of the deflections $w_{i,j}$ and $w_{i+2,j+2}$ are the same as those of the point $w_{i,j+2}$. More simply written $w_{i,j}=w_{i+2,j+2}$. This

is a contradiction because the external load is not symmetric and, accordingly, the deflections $w_{i,j}$ and $w_{i+2,j+2}$ cannot be equal. In applying the procedure described in the foregoing, no assumptions could be made in respect to the deflection conditions of the imaginary points, consequently, the contradiction mentioned does not occur, and it is not necessary to assume the two-layer imaginary continuation, nor is it necessary to describe the zero-value of the anchoring force.

2.3.5. *Boundary conditions of the free edge*

Arrangement scheme:



Making use of the Eqs (1), (11), (12), (13), (15) and (21), of points i, j yield the following.

$$K_x(D_y/D_x^3)(w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-4w_{i,j+1}+w_{i,j+2})$$
$$+H(1/D_x)(1/D_y)(-2w_{i,j-1}+4w_{i,j}-$$
$$-2w_{i,j+1}+2w_{i+1,j-1}-4w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+$$
$$+K_y(D_x/D_y^3)(w_{i,j}-2w_{i+1,j}+w_{i+2,j})=P_{i,j}. \qquad (28)$$

It is to be noted that the means applied so far — the "reflection" principle included — cannot be employed in the case of the free edge to the convex and concave corner joints because the value of deflection of each of the imaginary points, after deduction, will also be included in the combined equation.

The contradictions may be eliminated in two ways:

— an assumption should be made in connection with the joint in question and eliminated from the equation. (Essentially, this is to return to the procedure of the "reflection" principle and to the method of estimation described in [3]);
— one should try to search for the physical model corresponding to the difference-method and by making use of it, the difference operators should be determined.

In this paper, we will try to find the result by means of this latter method.

Accordingly, the problem is to construct such a physical model as to satisfy the difference equations (24) to (28), and those to be established according to their concept, then, by making use of them, it should be tried to find the result at the convex and concave corners in the case of a free edge.

3. Model of the biharmonic difference operators

In compliance with [6] the approximate solution of the equation of the plate is the calculation model of the grid. A structure consisting of four rigid bars being connected in both directions by bending, and the opposite bars by torsion-preventing bars, should correlate to a part of plate of the quadrangular reticulation. According to the assumptions, the joints can only be vertically displaced similarly to the central part of the plate.

The formation of the model may be seen in Fig. 1.

The load may only act vertically on the nodal point.

Let us introduce a vertical unit displacement at joint i, j; which causes bending moments $(1/2)K_yD_x/D_y^3$ and $(1/2)K_xD_y/D_x^3$ at joints $i-1, j$; $i+1, j$ and $i, j-1$; $i, j+1$, respectively, at each bending spring. The angular rotation is two-fold both in the x and y-directions at joint i, j, therefore the magnitudes of the movements are K_yD_x/D_y^3 and K_xD_y/D_x^3 respectively. For contrabalancing the moments, at the joints vertical forces are induced; the method of their calculation is represented in Fig. 2.

Under the effect of the unit displacement between the bars j and $j+1$ a torsion of $1/D_y$ magnitude takes place, in consequence of which a torsional moment of $H\ 1/D_y$ magnitude will be induced in the spring connecting the two opposite bars, in the other direction the value of the torsional moment being $H\ 1/D_x$.

The calculation of the vertical forces caused by the torsional moments is presented in Fig. 3.

The vertical forces will be determined by taking the torsional moments into consideration as bending moments acting on the perpendicular bars.

Under the effect of the unit displacement, all of the induced vertical forces are depicted in Fig. 4.

The forces shown in Fig. 4 express the effect caused by the unit displacement introduced at the nodal point in question at the place i, j, that is, if the value of the displacement at the joint $i - 2, j$ is $w_{i-2,j}$ then, at the joint i, j,

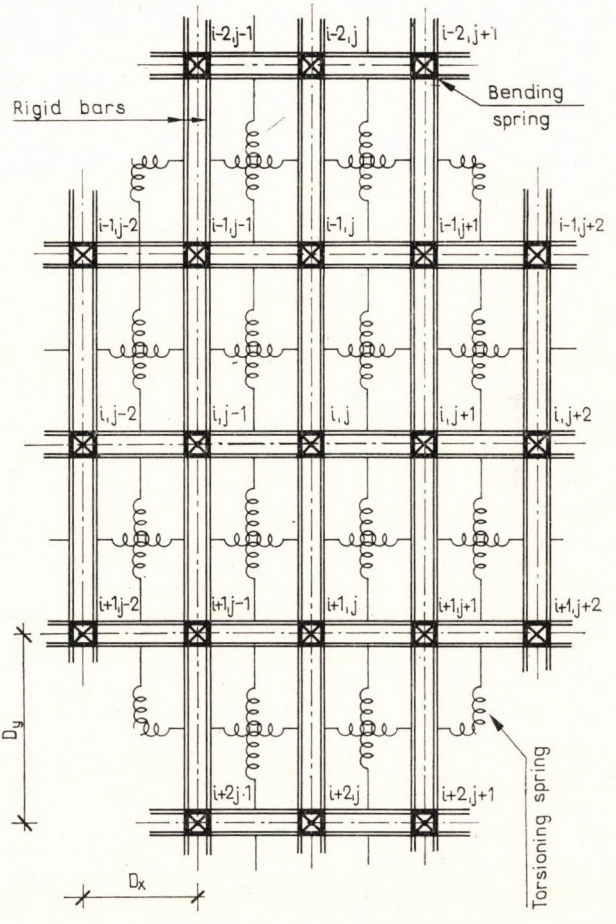


Fig. 1. Model of the biharmonic difference operators

a force of $w_{i-2,j}$. $K_y D_x / D_y^3$ magnitude is acting, in the case, where actually both of the bars of the model exist.

If, at an internal joint i, j, the vertical forces acting on the model are summed up by taking into account the deflections then, a difference equation, identic with Eq. (24) will be obtained where the vertical force is acting on the joint i, j, is $P_{i,j}$. Thus Eq. (24) may be considered as both the variant deducted

by making use of the differences of the plate equation and the equilibrium equation of the grid model. This agreement, at the same time, also justifies the correctness of the physical model.

Let us now look at the problem, how one can use the model in the case of the points situated in the boundary zone, in order to write down as a result

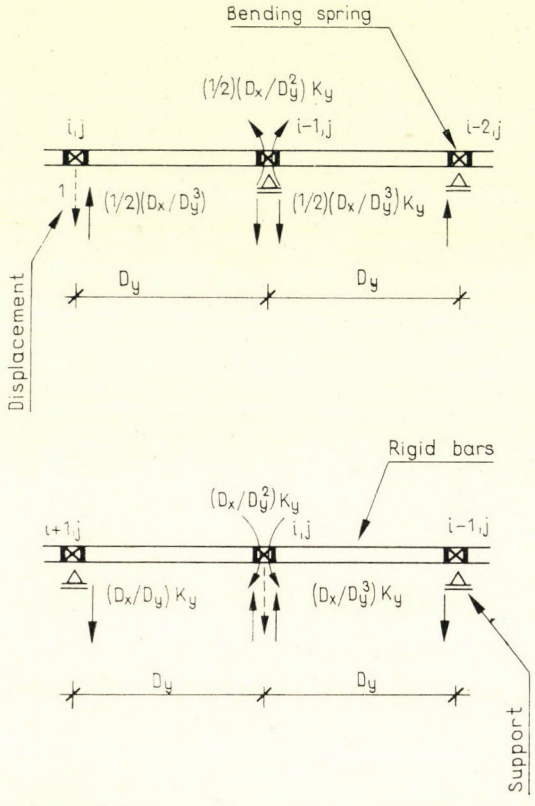


Fig. 2. Vertical forces acting on the model caused by bending

the difference equations for the point in question directly, wherein already also the boundary conditions are included.

The difference equations related to the particular nodal points or those ying at the edges, may be established with the aid of the model as follows:

— In the case of a restrained edge the system of forces of the lacking part (or parts) being in equilibrium should not be taken into account. The spring rate of the bending spring acting on the edge, should be taken into account by its double value. Nor should the vertical forces induced at the restrained edges be considered because here, the boundary conditions are: $(w)_{x=\text{edge}} = 0$

or $(w)_{y=\text{edge}} = 0$. Thus, in the case of the convex corner joint a difference equation being identic with Eq. (25) is obtained;

— in the case of a hinged edge, the system of forces of the lacking part (or parts) being in equilibrium should be ignored. The vertical forces induced at

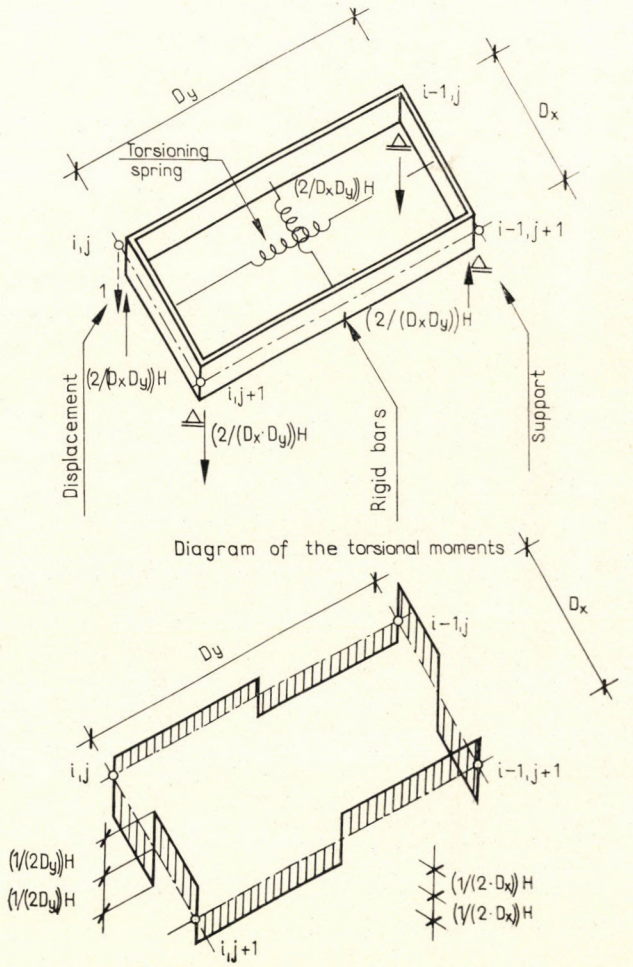


Fig. 3. Vertical forces acting on the model caused by torsion

the supports are left out of consideration owing to the boundary condition. Thus, in the case of a convex corner joint being hinged at both sides, a difference equation is obtained, identic with Eq. (26); in the case of a concave corner joint hinged at both sides, a difference equation identic with Eq. (27) will be the result;

— in the case of a free edge, only the system of forces of the lacking part (or parts) being in equilibrium, should be left out of consideration.

It should be noted that the procedure recommended is also successful in the case of convex, concave and intermediate parts, whilst the application of the difference-method or "reflection" principle does not give a practicable

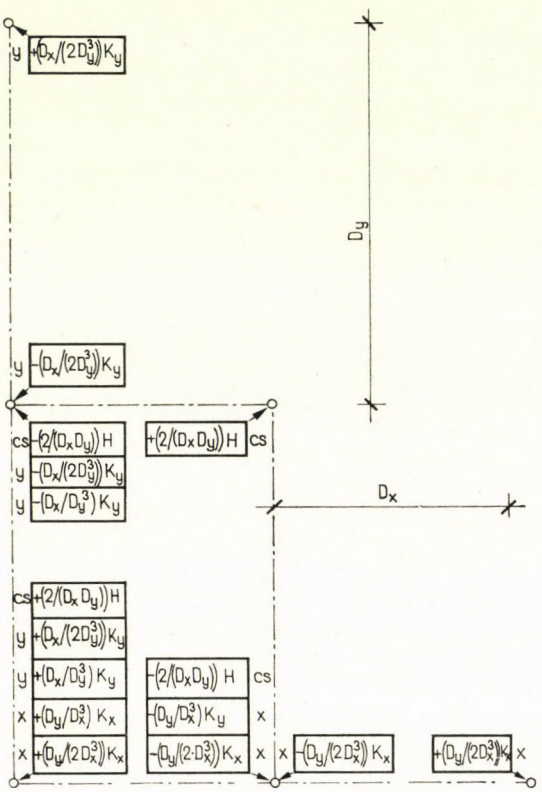


Fig. 4. Vertical forces acting on the model. Only one fourth of the model is depicted

result. However, in the case of a free edge, the actual plate and grid should be distinguished. Eq. (28) is valid in the case where an intermediate segment of the free edge of an actual grid is dealt with.

The model may also be employed and difference equations may be established in the case, where the boundary conditions are prescribed separately for each joint (see "Applications").

4. Divergence of the biharmonic difference operator model from the actual plate and gridwork

Let us first examine in the case of a free edge the difference between the actual plate and grid. In the model — as was mentioned above — the parts within the actual structure have been substituted by bars; by looking at Fig. 5

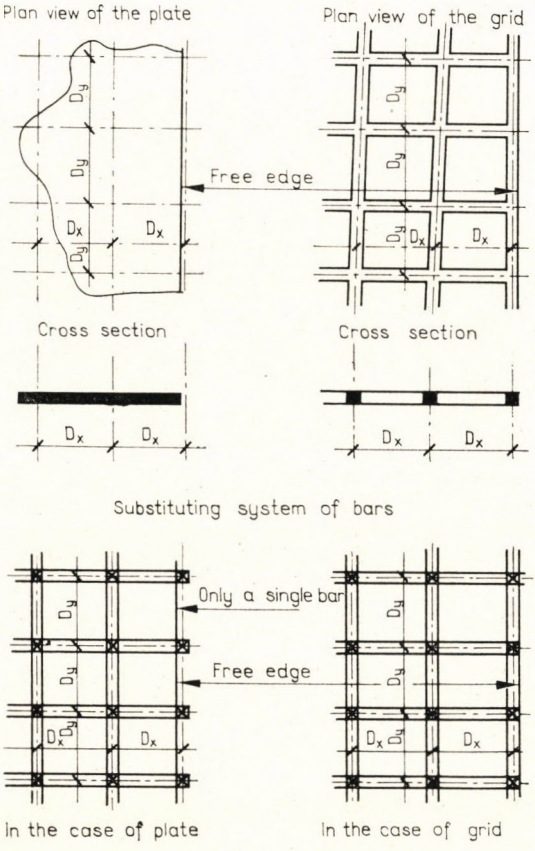


Fig. 5. Formation of the substituting system of the actual free-edge plate and grid

it becomes obvious that in the case of the actual plate only one of the substituting system of bars is included, whilst in the case of the actual grid both of the bars may be found on the edges. Therefore, in the case of the plate, in the calculations only the half, whilst in the case of grid the whole of the given spring rates should be taken into consideration.

5. Applications

5.1. Convex corner of a free-edge plate

The difference equation established for the point i, j is:

$$K_x(D_y/D_x^3)\left[(1/2)\,w_{i,j}-w_{i,j+1}+(1/2)\,w_{i,j+2}\right]+$$
$$+H(1/D_x\,(1/D_y)\,(2w_{i,j}-2w_{i,j+1}-2w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+ \qquad (29)$$
$$K_y\,D_y/D_y^3\left[(1/2)\,w_{i,j}-w_{i+1,j}+(1/2)\,w_{i+2,j}\right]=P_{i,j}.$$

5.2. Convex corner of a free-edge plate

The difference equation written for the point i, j:

$$K_x(D_y/D_x^3)\,(w_{i,j}-2w_{i,j+1}+w_{i,j+2})+$$
$$+H(1/D_x)\,(1/D_y)\,(2w_{i,j}-2w_{i,j+1}-2w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+ \qquad (30)$$
$$K_y\,D_x/D_y(w_{i,j}-2w_{i+1,j}+w_{i+2\,j})=P_{i,j}.$$

5.3. Concave corner of a free-edge plate

The difference equation written for the point i, j:

$$K_x(D_y/D_x^3)\left[w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+(11/2)w_{i,j}-3w_{i,j+1}+(1/2)w_{i,j+2}\right]+$$
$$+H(1/D_x)\,(1/D_y)\,(2w_{i-1,j-1}-2w_{i-1,j}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-$$
$$-2w_{i,j+1}+2w_{i+1,j-1}+4w_{i+1,j}+2w_{i+1,j+1})+K_y(D_x/D_y^3)\left[(1/2)w_{i-2,j}-\right.$$
$$\left.-3w_{i-1,j}+(11/2)w_{i,j}-4w_{i+1,j}+w_{i+2,j}\right]=P_{i,j}. \qquad (31)$$

5.4. The problem is the same as 5.3, only the row $i+1$ is to be supported

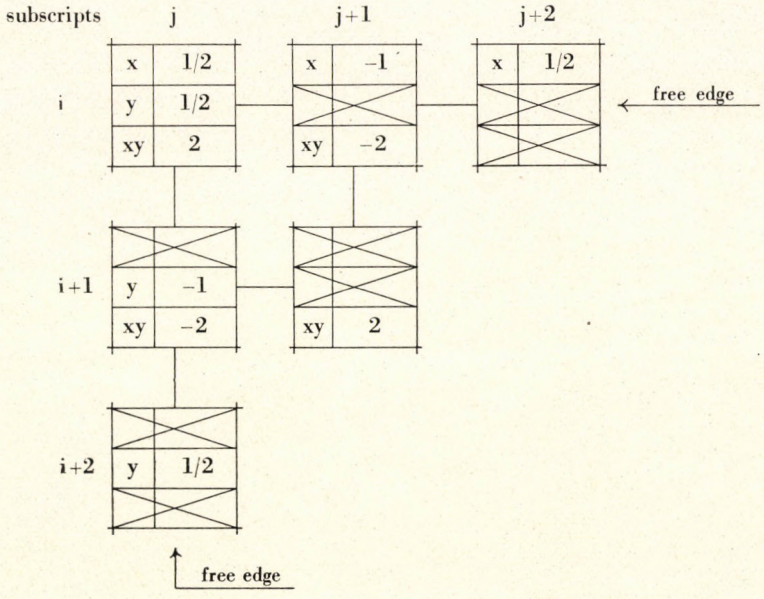
The difference equation written down for the point i, j:

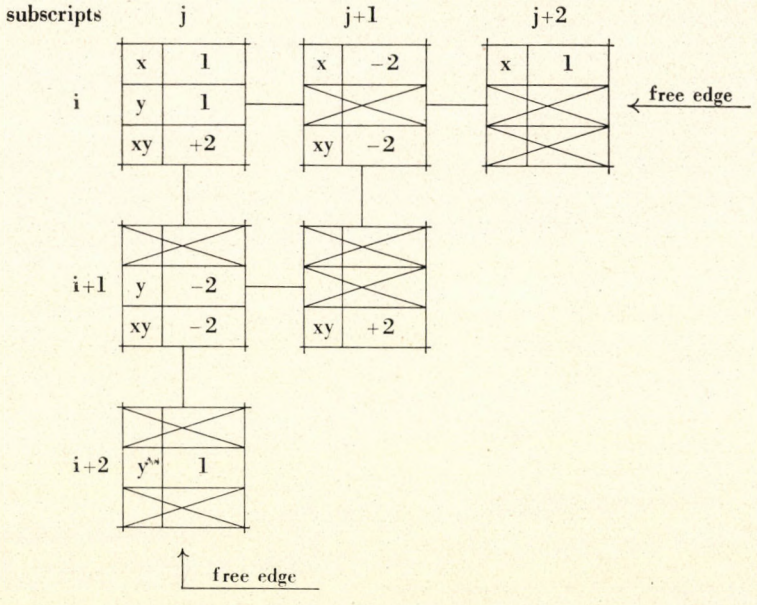
$$K_x(D_y/D_x^3)\left[w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+(11/2)w_{i.j}-3w_{i,j+1}+(1/2)w_{i,j+2}\right]+$$
$$+H(1/D_x)\,(1/D_y)\,(2w_{i-1,j-1}-2w_{i-1,j}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-2w_{i,j+1})+$$
$$+K_y(D_x/D_y^3)\left[(1/2)w_{i-2,j}-3w_{i-1,j}+(11/2)w_{i,j}+w_{i+2,j}\right]=P_{i,j}. \qquad (32)$$

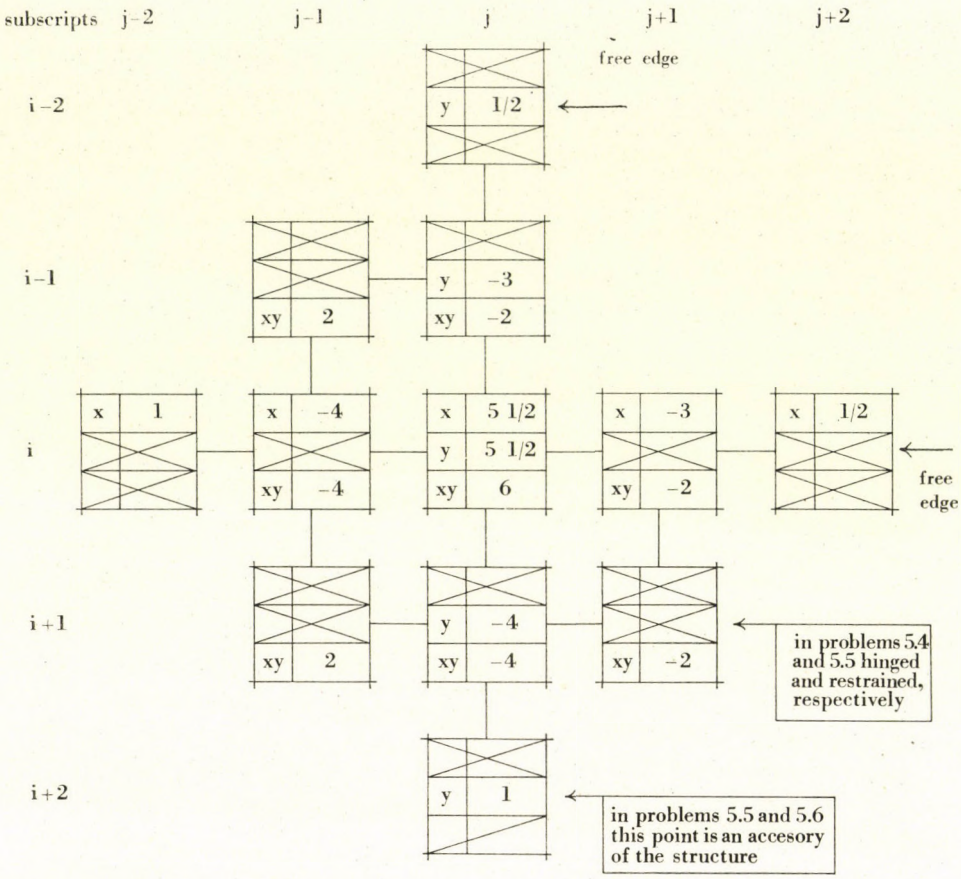
5.5. The problem is the same as 5.3, however, the row $i+1$ is to be restrained

The difference equation written down for the point $i+1$:

$$K_x(D_y/D_x^3)\left[(1/2)w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+(11/2)w_{i,j}-3w_{i,j+1}+(1/2)w_{i,j+2}\right]+$$
$$+H(1/D_x)\,(1/D_y)\,(2w_{i-1,j-1}-2w_{i-1,j}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-2w_{i,j+1})+$$
$$+K_y(D_x/(D_y^3)\left[(1/2)w_{i-2,j}-3w_{i-1,j}+(13/2)w_{i,j}\right]=P_{i,j}. \qquad (33)$$


subscripts
j
j+1
j+2
i
i+1
i+2
x 1/2
y 1/2
xy 2
x −1
xy −2
x 1/2
free edge
y −1
xy −2
xy 2
y 1/2
free edge


subscripts
j
j+1
j+2
i
i+1
i+2
x 1
y 1
xy +2
x −2
xy −2
x 1
free edge
y −2
xy −2
xy +2
y 1
free edge



REFERENCES

1. BÉRES, E.: Design Calculation of Grid (in Hungarian). *Építéstudományi Intézet Tudományos Közleményei*, Budapest 1967, p. 133.
2. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Springer-Verlag, Wien 1948, p. 502.
3. KANTAROVITCH, L. V.—KRYLOV, V. I.: Methods of Approximation of the Higher Analysis (in Hungarian). Akadémiai Kiadó, Budapest 1953, p. 703.
4. MARCUS, H.: Die Theorie elastischer Gewebe. Springer-Verlag; Berlin 1932, p. 320.
5. RÓZSA, M.: Solution of Structural Problems with the Help of Digital Automates (in Hungarian). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1961, p. 58.
6. SZABÓ, J.: Equation of the Space Grid Systems (in Hungarian). *Építéstudományi Intézet Tudományos Közleményei*, Budapest 1964, p. 242.
7. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY—KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shales (in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, p. 563.

Ein neues Verfahren zur Ermittelung von Differenzoperatoren in Zusammenhang mit Platten und Trägerrosten. Es wird ein Trägerrostmodell in der Abhandlung dargestellt, womit biharmonische Differenzoperatoren durch Berücksichtigung der verschiedensten Randbedin-

gungen hergestellt werden können. Ferner werden die Unterschiede hervorgehoben, die sich bei den Randbedingungen und Rändern der tatsächlichen Platte und des tatsächlichen Trägerrostes hervorkommen. Diese Art der Herstellung von Differenzoperatoren wurde zum Zwecke der Programmierung für Rechenautomaten ausgearbeitet und mit gutem Erfolg benutzt.

Новый метод определения дифференциальных операторов в связи с плитами и балочными решетками *(Д. Вебер)*. Представляется модель балочной решетки в такой трактовке, при которой можно вывести бигармонические дифференциальные операторы при учете самых различных краевых условий. Кроме того, подчеркиваются те отклонения которые встречаются по краевым условиям и краям действительной плиты и действительно, балочной решетки. Такой способ вывода дифференциальных операторов разработан длй цели программирования для решающих автоматов и используется очень эффективно. я

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 117 — 141 (1972)

RECENT RESEARCH RESULTS IN THE FIELD OF HERMETICALLY SEALED MINIATURE SILVER—ZINC STORAGE BATTERIES

L. HAJDÚ* and J. ZAHORÁN**

[Manuscript received October 29, 1970]

The author presents the operation of the so-called "double depolarizer" system which essentially consists in using a second depolarizer composed mainly of cadmium oxyde, besides the silver oxyde main depolarizer. This permits to develop in the cell characteristic a voltage level below the nominal one. In addition to the operating mechanism of the silver electrode the authors describe the parameters of a storage cell which can be operated in the so-called "monoxide phase" with a capacity equal to that of a traditionally arranged cell.

1. Introduction

After the end of World War II, a tendency towards miniaturization became a special feature of the rapid evolution in telecommunication engineering and instrument technology all over the world. Beside miniature components often reduced to microscopic sizes in telecommunication and measuring circuits, a relatively large space is required, however, by energy sources supplying the necessary power.

In an early period of development, power sources were only represented by different types of dry batteries with a relatively large energy storage capacity as compared to their small volume and weight. Dry battery manufacturers can hardly keep pace with the rapidly increasing demand, so that there is a shortage at present in dry batteries all over the world. On the other hand, an ever increasing emphasis is placed upon economic problems including the fact that the widely used and comparatively cheap types have a short shelf life with the result that in spite of their low prices substantial replacement costs are imposed on the users of equipment energized by dry batteries in a continuous operation.

As a consequence, an ever increasing importance is attached to rechargeable minute energy sources — miniature storage batteries — represented up to the last years mainly by the nickel—cadmium alkaline batteries of the West-German corporation VARTA-DEAC. Hermetically sealed, these miniature nickel—cadmium batteries can be built into the equipment in any posi-

* L. HAJDÚ, Szilágy E. fasor 107, Budapest II., Hungary
** Dr. J. ZAHORÁN, Sajó u 6, Budapest XX., Hungary

tion, and require no maintenance if used in accordance with prescriptions. Their specific energy storage capacity is 60 mWh/cm^3, even for types enclosed in a volume of 1 to 2 cm^3. The significant disadvantage of these types is their high sensitivity to overloading. In this respect a much more advantageous situation is taken by the nickel—cadmium miniature batteries with sintered electrodes of the French company *SAFT*, although their specific energy storage capacity is slightly lower than that of the VARTA-DEAC types.

2. Historical background of silver—zinc storage batteries

As early as in the years before World War II, professor Henri ANDRÉ of France investigated the problems of developing storage batteries with silver oxide as a positive active substance and zinc as the negative agent, the electrolite being an aqueous solution of potassium hydroxide. Produced chiefly under laboratory conditions, ANDRÉ's batteries, although having a number of initial troubles and difficulties, they definitely proved to attain an energy storage capacity 3 or 4 times higher than that of a standard lead or nickel storage battery with the same volume and weight and to have in addition a much higher loadability as compared to the latter. At the very start the obtained results showed that these storage batteries were very promising in such applications where high energy storage capacity and high loading capacity with a small volume and low weight are of capital importance.

ANDRÉ's first patent was adopted in France in 1936, and up to the beginning of World War II about 20÷25 thousand middle-power silver—zinc storage batteries (10÷20 Ah) were produced in France and taken possession of by the German troops invading the country.

To evade occupation, ANDRÉ fled to the United States, where he could continue his experiments with the co-operation and financial assistance of Michel YARDNEY.

In that time a great number of patent specifications were published, all relating to various constructional arrangements mainly to increase the life time to an acceptable level.

As a result of these efforts, the new power source found military application soon in World War II. In the United States a submarine was built to be energized with silver—zinc storage battery, the first of her kind (the *Barracuda)*. The battery contained 15 tons of silver as active material. After the world war ANDRÉ returned to France and built an electric motor car *(Panhard)* which, once charged, covered a distance of 400 km at an average speed of 60 km/h.

These were the first serious attempts to investigate the performances of a high power energy source primarily in those fields of application where

a high energy density, that is, a large amount of energy in a small volume and at a low weight, is of great importance.

After the war, a joint venture was launched in France (*Andyar*, for ANDRÉ—YARDNEY) and the silver—zinc storage batteries began to be produced in Europe. Later on, *Venner Accumulators Ltd.* in England and *Friemann und Wolf* in Germany introduced the manufacture of silver—zinc batteries on the basis of the awarded patents. At the same time, experiments were under way in the East-European countries, and production was started first in the Soviet Union, and then in a number of other countries including Czechoslovakia, Poland, and Hungary.

The interest in such batteries has been greatly enhanced by supersonic flying and space research, these being now the defining factors of their applications, to say the least. In addition to supersonic aeroplanes having silver—zinc storage batteries as exclusive electricity sources, the American intercontinental rocket Minuteman, artificial satellites, space ships in general use such batteries to satisfy all energy requirements.

In the development of silver—zinc power sources an important result deserving attention, even abroad, has been obtained in Hungary by developing the first hermetically sealed silver—zinc storage battery [1] on the basis of Hungarian patents [2, 3].

Of these, the most important Hungarian procedure relates to the production of a silver electrode in an active form, a technique without parallel in the world for which patents have been granted in several countries. The main point in this procedure is an electrolytic (anodic) chlorination to activate the surface of a thin silver wire, followed by a cathodic treatment (reduction) with the result of obtaining fine-grained active silver having a large surface. This has a strong adhesion to the intact core resulting in a highly uniform contact surface to convey current. Anodic oxidation of the active silver obtained in this way leads to a silver oxide electrode used as a depolarizator in the silver—zinc storage batteries. Similarly, a special process is used to produce a zinc electrode. The procedure for which a patent has been granted relates in this case to a structural property (and procedure), this offering the only possibility to ensure the necessary reversibility conditions even in a hermetically enclosed space for the zinc to be used in a sealed storage battery. An essential feature is the electrochemically refined zinc to which a cottonlike cellulose is added to obtain a homogeneous mixture which ensures a uniform electrolyte supply inside the electrode during operation. This makes it possible for the zinc electrode to be reversibly oxidized and reduced permanently (even for several years).

Both of these procedures are used in practice by the *Medicor Művek* in the manufacture of sealed silver—zinc button accumulators and other batteries.

3. Operating principle of silver – zinc storage batteries

The operation of the current sources in which chemical energy is converted into electric energy is based on the fact that the chemical reaction underlying the energy production can be broken up into two parts and the two partial reactions take place perfectly separated, even topologically. This separability in space is the basis of the operation of electrochemical current sources and their main criterion.

According to modern electrochemical nomenclature any process involving a loss of electrons is considered an oxidation and a process involving an

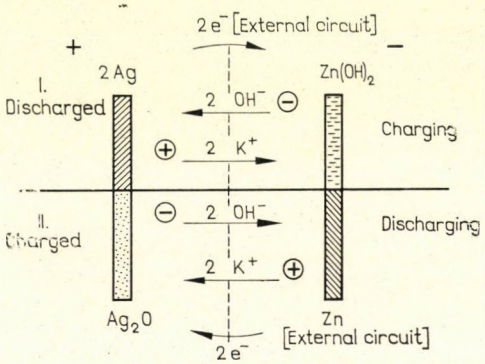


Fig. 1. Operation principle of silver–zinc storage batteries

electron gain is called a reduction. In other words, a chemical compound, radical or element yielding electrons is oxidized and, conversely, any compound, radical, or element taking up electrons is reduced. Correspondingly, all chemical processes are oxidation-reduction processes for all chemical changes involve a transport of electrons (valence electrons), or, more precisely, a rearrangement of electrons, where the electron orbits in the molecules of the reaction products are determined by the compounds taking part in the reaction as electron donors or electron acceptors.

When the process of electron yield and electron gain in such a reaction is restricted to the dimension of a molecule, an ordinary chemical reaction takes place accompanied by a thermal effect (exothermic and endothermic reactions), for example, the combustion of coal.

In a chemical reaction taking place under controlled conditions in such a way that the electrons are transferred over prescribed paths through a conducting metal wire, this electron flow can be forced to do work (electric work) and its magnitude is determined by the thermodynamic energy depending upon the difference of chemical potentials. Thus, a part of the energy involved in the chemical reaction is converted into electric energy.

The processes taking place in a silver—zinc storage battery can be illustrated schematically as is shown in Fig. 1.

In the interelectrode space filled with potassium hydroxide as an electrolyte there is a semi-permeable membrane (partition wall) through which ions are allowed to move freely.

In this way, electric current is carried by electrons in a conductor and by ions in the interelectrode space.

a) *Charging process.* The electrode materials in state I are converted into materials in state II according to the partial processes described by the equations

$$2Ag = 2Ag^+ + 2e^- \tag{1}$$

$$2Ag^+ + 2OH^- = Ag_2O + H_2O \tag{2}$$

$$2Ag + 2OH^- = Ag_2O + H_2O + 2e^- \quad E_{Ag/Ag_2O} = +0{,}344\ V. \tag{3}$$

Losing its electron which flows through the conductor to the negative electrode (and polarizes it), silver is oxidized into silver ions and becomes positive because of the electron loss. The hydroxyl ions in the electrolyte migrate to the positive electrode already polarized and are converted in the neighbourhood of the silver electrode into water while yielding oxygen as shown by the equation

$$2OH^- = H_2O + 1/2\ O_2 + 2e^-. \tag{4}$$

Oxygen is thus incorporated into the silver electrode.

When the process $Ag—Ag_2O$ is completed or well advanced to an extent depending on the morphological properties of silver and the actual current density, oxidation of Ag_2O as a consecutive reaction begins,

$$Ag_2O + 2OH^- = 2AgO + H_2O + 2e^- \quad E_{Ag_2O/AgO} = +0.570\ V. \tag{5}$$

Naturally, this part of the charging process takes place at a different potential level because of the difference in oxidation—reduction potentials. A more detailed account of this two-staged mechanism of the silver oxidation will be given later because it has a decisive effect on the electrical parameters of storage batteries and, consequently, it is a central problem of research.

The electrode with $Zn(OH)_2$ is polarized as a negative electrode by the electrons arriving through the wire, resulting in a migration of the kalium ions in the electrolyte towards the negative electrode. K^+ ions with positive charges reaching the electrode take part in the reaction

$$Zn(OH)_2 + 2K^+ + 2e^- = Zn + 2KOH \tag{6}$$

thus reducing the zinc hydroxide electrode to metallic zinc.

Another main point is the fact that the zinc electrode is always dissolved to a small degree in the form of $K_2[Zn(OH)_4]$. Taking this into account, the reaction also takes place as

$$K_2[Zn(OH)_4] + 2K^+ + 2e^- = Zn + 4KOH. \tag{7}$$

Of these processes, process (6) is quantitatively decisive because, in a discharged battery, the negative electrode is present mainly as $Zn(OH)_2$ and only a smaller part of it is dissolved.

b) *Discharging process.* In a discharging process, that is, during the electricity production, a process shown in the lower part of Fig. 1 takes place, which is essentially the opposite of the charging process.

As a result of the electrons reaching through the conductor the silver oxide electrode, this electrode becomes negative, thus attracting the positively charged ions K^+ present in the electrolyte,

$$Ag_2O + 2K^+ + H_2O + 2e^- = 2Ag + 2KOH, \tag{8}$$

this being reduced to metallic silver. The hydroxyl ions of the electrolyte migrate to the zinc electrode through the semi-permeable membrane. As a matter of fact, zinc loses its electrons and is transformed into positive ions, which will attract the hydroxyl ions,

$$Zn = Zn^{++} + 2e^-, \tag{9}$$

$$Zn^{++} + 2OH^- = Zn(OH)_2, \tag{10}$$

$$Zn + 2OH^- = Zn(OH)_2 + 2e^- \quad E_{Zn/Zn(OH)_2} = -1.245\ V. \tag{11}$$

A part of the obtained zinc hydroxide is further dissolved in the KOH electrolyte with the liberation of potassium zincate,

$$Zn(OH)_2 + 2KOH = K_2[Zn(OH)_4] \tag{12}$$

and the greater part of it forms the electrode material in a hydrated form. There is a possibility for zinc hydroxide, especially after a long storage time, to yield its water content and change into zinc oxide, a hard substance which cannot be dissolved any further,

$$Zn(OH)_2 = ZnO + H_2O. \tag{13}$$

It is to be noticed that the partial processes (half-reactions) shown above completely fulfil the conditions which define an electrochemical power source.

Electric current is carried by electrons in a conductor and by ions in an electrolyte.

Together with the reaction equations (3), (5), and (11) illustrating the oxidation—reduction processes of both electrodes redox potential of silver and zinc have also been shown allowing the electromotive force of the battery to be calculated.

By summing up processes (1) to (12), the double reaction producing an electric current can be written as

$$\text{I. } AgO + Zn + H_2O = Ag + Zn(OH)_2 \quad U_{eI} = 1{,}815\ \text{V} \tag{14}$$

$$\text{II. } Ag_2O + Zn + H_2O = 2Ag + Zn(OH)_2 \quad U_{eII} = 1{,}589\ \text{V}. \tag{15}$$

In the foregoing, basic processes underlying the operation of silver—zinc storage batteries were discussed. However, due attention should also be given to some additional processes which are the main causes of disadvantages encountered in silver—zinc storage batteries. These can be briefly summarized as follows:

1. Cellophane partitions used in silver—zinc batteries as well as for other partitions, fundamentally different from those made of cellophane, and those which are being tested or under research, do not fulfil their functions perfectly so far. A partition wall in most cases is a decisive factor in determining lifetime and this is one of the reasons for the lifetime of a silver—zinc storage battery being at present shorter than those of a conventional storage battery. Partitioning walls withstand electrolytes only for a limited period after which they are degraded, destructed, thus causing short circuits in a battery.

2. After a longer exposure to the active material of positive electrodes AgO, the substances acting as a frame in or additives to the partition usually made of organic materials is oxidized so that chain breaking in polimer molecules will occur. This process contributes to an early failure of the cellophan material.

Among the disadvantages caused by silver there is a colloidal dissolution of the electrode and silver deposition in the pores of the partition (at least the same degree of reduction is experienced !), thus leading to an undesirable increase in cell resistance due to a clogging of the pores.

3. The most important detrimental process of the zinc electrode during operation is that which prevents zinc from exhibiting a permanent tendency to reversible operation as with silver electrodes, which alters the equilibrium conditions of the storage battery with regard to initial values. Another disadvantage of the zinc electrode is that the part which is dissolved in the electrolyte tends to be reducible in the final period of charging only in a so-called dendrite form (as acicular crystals), thus piercing the partition. Thus, a short

circuit in the battery can occur. In a continuous operation, not only an impairment of reversibility can be observed, but also important morphological changes as a consequence can take place in the electrode.

4. Hermetically sealed miniature silver—zinc storage batteries

As has already been mentioned, a new path has been opened up in developing silver—zinc storage batteries by a family of hermetically sealed miniature silver—zinc batteries developed and manufactured since several years in Hungary, combining the advantageous properties of sealed miniature

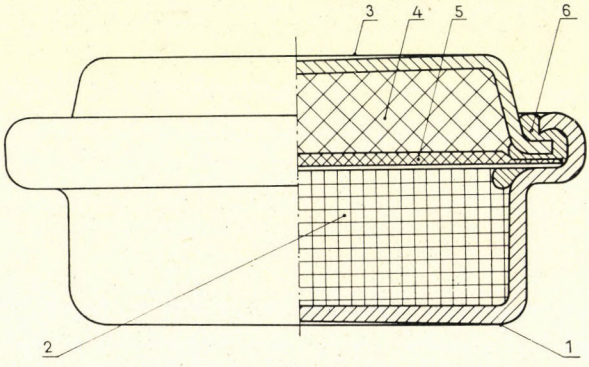


Fig. 2. A hermetically sealed silver—zinc button accumulator

nickel—cadmium storage batteries with those of an "open" silver—zinc accumulator. Their specific energy storage capacity is 120 to 150 mWh/cm³ with a much higher loadability than that of a nickel—cadmium storage battery.

Fig. 2 shows schematically the design of a hermetically sealed silver—zinc storage battery placed in a disc-like metal case. It is a so-called button accumulator. The pressed case *1* made of a corrosion-resistant sheet metal and coated on the inside with a non-porous silver layer, contains a specially manufactured silver electrode *2*. Lead-in to the electrode is provided by the metal case. The zinc electrode *4* is pressed into a lid *3* made of the same corrosion-resistant sheet metal and covered on the inside with a double layer of zinc amalgam. The two electrodes are separated by a microporous partition *5*. Hermetical sealing and electric insulation between lid and case is ensured by the use of a plastic gasket ring *6*. Before assembling the battery, both electrodes are impregnated with a solution of potassium hydroxide of a corresponding composition to allow the electrolite to wet each electrode particle and ensure a high activity of the electrodes. A theoretical qualitative operation as de-

scribed above cannot be completely achieved in practice, actual processes being much more complicated. Consequently, a number of fundamental theoretical, constructional, and technological problems had to be cleared up and solved when developing these minute storage batteries in order to ensure a hermetical sealing. A basic condition for obtaining hermetical seal is that the electrochemical processes in the battery take place quantitatively to such an extent as to have no gas production in the battery during a normal charging or discharging process. It is not the purpose of this paper to give a detailed description of all the constructional and technological principles allowing the manufacture of these hermetically sealed miniature silver—zinc storage batteries, so only the basic problems that are absolutely necessary to an understanding of the following sections will be discussed.

Silver electrodes are made of a silver wire of an adequately chosen diameter by passing the wire between two toothed wheels with a suitable toothing to obtain an undulating wire which is then irregularly balled. The ball comprising a desired amount of silver wire with a random filament distribution is pressed so as to obtain a disk of the appropriate dimensions. The structure of the agglomerated electrode is similar to that of a wire sponge, the wavy silver filaments giving the structure of sponge cells. By the use of a suitable electrochemical process, these silver-wire cakes are then transformed for the most part into AgO [2]. In this activation process, if carried out to a proper extent [4], the inner core of the wire remains in the original state as intact metallic silver ensuring a high conductivity of the electrode even during the charging—discharging cycles of the battery. Cyclic chlorination, reduction, and oxidation applied in the electrochemical activation process ensure a formed and charged state of the electrodes when placed into the batteries. Before assembling, the electrode is impregnated in an electrolyte. As a basic material for the zinc electrode a high purity, electrochemically active zinc raffinate having a cottonlike structure is used with an additive to build up a frame and to store electrolyte, and an inhibitor to prevent natural chemical solution of zinc in the potassium oxide electrolyte [3]. This mixture is then fed into a press to obtain zinc electrode pellets. The zinc electrode manufactured as described above is impregnated in a solution of potassium hydroxide added to potassium zincate in the necessary proportion. With a proper electrolyte concentration, natural dissolution of zinc [16] involving hydrogen generation is almost completely eliminated:

$$Zn + 2KOH + 2H_2O = K_2[Zn(OH)_4] + H_2. \qquad (16)$$

In general, chemical solution of zinc is likewise promoted by metallic impurities electrically positive with respect to zinc which may be present in a high purity zinc in traces (10^{-4} to 10^{-5} per cent) and form local cells with

zinc. In these local cells, zinc is the anode and a metal impurity the cathode. Because of a local effect, zinc is dissolved anodically while hydrogen is liberated at the cathode, that is, at an impurity. The last few years many researchers have been engaged in studying zinc behaviour in alkaline solutions and a great number of papers have been published [5—7]. In complete agreement with the authors' early observations, these results show that as the best inhibitor mercury can be used to dissolve impurity elements and distribute them in the zinc material to minimize local effects. Practically, this prevents spontaneous hydrogen generation as well. As a direct consequence of the electrochemically produced active zinc material having a cottonlike structure and, therefore, an extraordinarily great surface when regarded from an electrochemical point of view, the described zinc electrode has a high load carrying capacity during the current generating processes (14) and (15) and exhibits only a slight tendency towards the already described dendrite formation during the charging period, while zinc hydroxide is reduced to metallic zinc, thus effectively preserving the partition and increasing lifetime of the battery.

The microporous partition used in the batteries is made by superposing a number of layers of a regenerated good quality cellophane film. The partition having the form of a disk is flexibly mounted into the flange as a membrane, as is shown in the figure, in order to perfectly separate the electrode spaces but allowing ion transport through the partition wall, as it is necessary for the operation of the battery.

The porosity of the electrodes is designed in such a way that the amount of electrolyte stored in the electrodes and partition is that required by the reactions taking place in the battery.

The amount of built-in and activated agents is determined to ensure at least twice the nominal capacity of the storage battery during the first discharge after assembly, this operation being an integrated part of manufacture. This is achieved by a corresponding sizing of the zinc electrode, so that the amount of electricity available from the battery in the course of the first discharge is determined by a total conversion of the zinc material. On the other hand, the quantity of the positive agent (silver oxide) shall be chosen in such a way that a certain amount of active material remains after the total zinc conversion because in the reverse case the remainder of zinc left after a total reduction of the positive agent [according to Eq. (17)] would be oxidized, while a H_2 depolarization taking place at the positive electrode, that is, with liberation of hydrogen on the positive side.

$$2H_2O + Zn = Zn(OH)_2 + H_2. \qquad (17)$$

Obviously, in a hermetically sealed storage battery this is inadmissible.

According to the discharge characteristic of a silver—zinc storage battery (Fig. 3) the voltage established within a relatively short time after the begin-

ning of the discharge at the nominal value of 1,5 V falls very rapidly to a value practically equal to zero with a given discharging current. This property, while very advantageous from a consumer point of view, practically prevents the application of the operation prescription valid for other storage batteries, according to which the end value of discharge voltage should not greatly differ from the nominal value, a requirement which is impossible to meet because

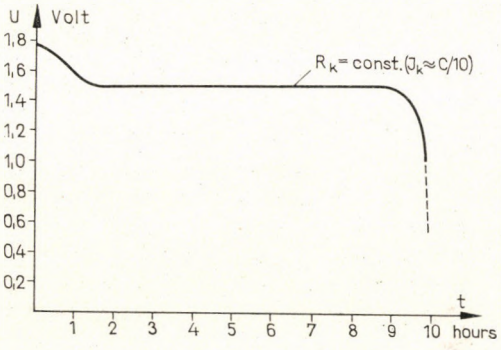


Fig. 3. Discharging characteristic of a sealed silver—zinc storage battery

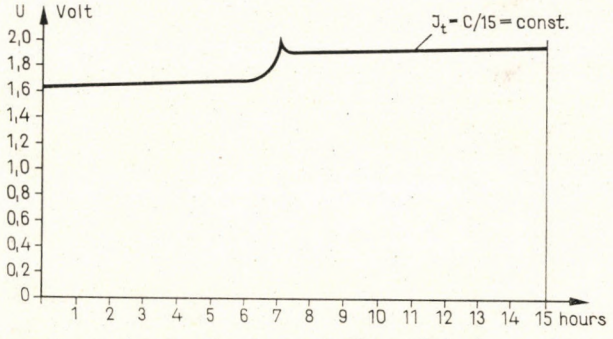


Fig. 4. Charging characteristic of a hermetically sealed silver—zinc storage battery

of the rapid voltage break-down. Therefore, an excess of the positive active material in miniature silver—zinc storage batteries is always justified especially in cases when the battery is used by unskilled persons, that is, under difficult conditions.

The charging characteristic of a sealed miniature silver—zinc storage battery is shown in Fig. 4. During charging which lasts 15 hours at a current of $I_{ch} \doteq$ C/15, as with other miniature storage batteries (nickel—cadmium accumulators), there are two definite voltage steps according to the two oxidation phases of silver. The first voltage level corresponding to Ag_2O generation

lasts about 45 per cent of the total charging time or useful capacity, similarly to an open-type high-power silver—zinc storage battery of good quality. It is interesting to note that although a greater part of the electricity is stored at a voltage corresponding to the higher potential of AgO generation, the voltage level corresponding to this higher potential is maintained only during the first minutes of the discharging cycle (Fig. 3) and the voltage continuously decreases

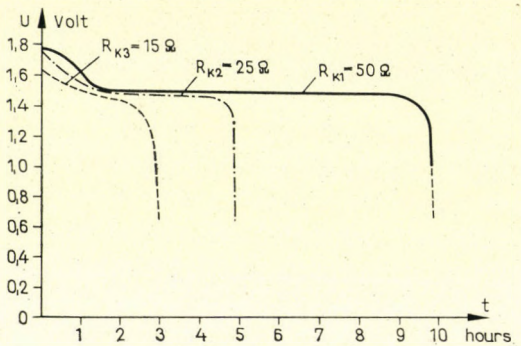


Fig. 5. Discharging characteristic of a silver—zinc storage battery type B 300 with various loading resistances

Table I

1 Type	Dimensions (mm) ± 0,1		4 Nominal voltage V	5 Nominal capacity mAh	6 Nominal energy storage capacity mWh	Equivalent nickel–cadmium battery			6/9
	2 Diameter	3 Height				7 Type	8 Manufacture	9 mWh	
B 50	11.5	5,2	1.5	50	75	20 DK	DEAC	24	3.1
B 80	15.5	6,0	1.5	80	120	50 DK	DEAC	60	2
B 150	20.0	6,3	1.5	150	225	—	—	—	—
B 200	20.0	7,0	1.5	200	300	D 0.1	Soviet	120	2.5
B 300	25.0	6,4	1.5	300	450	150 DK	DEAC	180	2.5

to the voltage level corresponding to Ag_2O in a relative short period of time. A detailed discussion of this problem will be given in Chapter 6.

The series of miniature silver—zinc button accumulators developed in Hungary and their main technical characteristics are listed and compared with the equivalent nickel—cadmium types with which they can be replaced can be found in the enclosed *Table*. A comparison of the energy storage capacity of each type with that of the equivalent nickel—cadmium types reveals a specific energy storage capacity at 2 to 3 times greater. In addition to the high energy storage capacity, an important activity and a low inner resistance

of the electrodes allow these storage batteries to be overloaded to a great extent without any appreciable decrease either in capacity or in lifetime. Fig. 5 shows the discharge characteristics of a storage battery type B 300 with a nominal voltage 1.5 V and nominal capacity 300 mAh for discharging resistances 50 ohms (I = C/10), 25 ohms (I = C/5), and 15 ohms (I = C/3).

In the discussion of the charging characteristics a point that may surprise the reader, is the fact, that with a charging current C/15, that is, one fifteenth of the nominal capacity, the charging process itself lasts 15 hours so that an amount of electricity equal to nominal capacity is introduced, and, at the same time, the available amount of electricity that can be taken out during a discharge is practically the same as the nominal capacity according to discharge characteristics in Fig. 5. As another advantage silver—zinc storage batteries have a current yield of nearly 100 per cent so that it is good practice to introduce into a battery an amount of electricity equal to the nominal capacity.

5. The problem of reversing the polarity and its elimination in a hermetically sealed silver—zinc storage battery

The typical discharging characteristic of a silver—zinc storage battery as shown in Fig. 3 is very advantageous for the consumers, generally requiring a constant voltage supply. The rapid voltage break-down at the end of a dis-

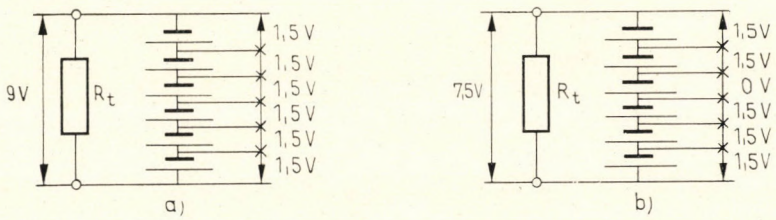


Fig. 6. Circuit diagram of a battery for a terminal voltage of 9 V

charging process also seems to be advantageous because it conspicuously indicates the moment when the battery turns to be discharged.

In practice, however, many consumers require a supply voltage that is greater than the output of a single cell and often amounts to 6÷12 V, which is obtained by connecting a number of cells in series.

In mass production there is always some scatter concerning various parameters in individual cells. As a consequence, in a series connection of several cells the rapidly declining discharging characteristic causes the cell with the lowest capacity to completely run down a short time before the discharge

of the other cells and so its voltage will fall to zero. In Fig. 6, a series connection of six silver—zinc cells giving 9 V nominal voltage is shown symbolically, as an example. While each cell takes part in energy production, the voltage of the whole battery is equal to the sum of the cell voltages each of which being 1.5 V, the resulting voltage is about 9 V (see section *a* in Fig. 7). Figure 6, *b* shows a situation in which the cell with the lowest capacity has just been exhausted and its voltage has fallen to zero. The resulting voltage of the battery is then about 7.5 V (section *b* in Fig. 7). An apparatus needing 9 V nominal

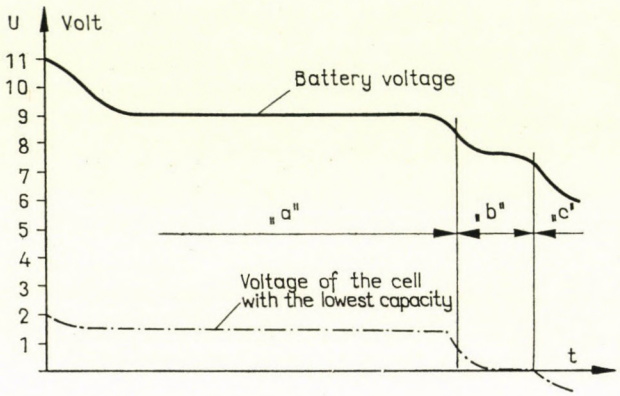


Fig. 7. Discharging process of a storage battery with a terminal voltage of 9 V

voltage, however, will operate satisfactorily at this voltage and even at some lower voltages. Thus, a discharging current determined by the loading resistance R_L representing the consumer, on the one hand, and the reduced battery voltage, on the other, will continue to flow through the cell already discharged with the result that the discharged cell now begins to be charged at the opposite polarity, while the battery voltage continues to decrease. This phenomenon is called polarity reversal and gives rise to the greatest problem in all types of battery systems. Special difficulties are encountered in a hermetically sealed silver — zinc battery because in the cell with the reversed polarity oxygen is generated according to the reaction

$$Ag_2O + Zn(OH)_2 = 2Ag + Zn(OH)_2 + 1/2\ O_2 \qquad (18)$$

in the neighbourhood of the negative electrode after the complete conversion of oxidable zinc even in case of an excess in positive active material when no hydrogen depolarization can take place in the space of the positive electrode (see section *c* in Fig. 7). In the course of charging—discharging cycles, this process is further enhanced and leads ultimately to an inflation and con-

sequently to a failure of the hermetically sealed cell. In this way, the lifetime of a battery with a number of cells will be much shorter than that of a single cell.

This gave the impetus to a research group under the authors' guidance to attempt the prevention of polarization reversal by the use of a simple design instead of the arrangements proposed so far for this purpose, which are, in general, extremely complicated [8, 9]. The idea was to insert a double depolarizer into the battery to ensure, after the breakdown of the terminal voltage 1,5 characteristic of Ag_2O, a second voltage level at about $0.3 \div 0.6$ V widely differing from the first one and acting even in the case of a forced discharging current mentioned above [10]. This is the essence of a recent Hungarian patent already in use at *Medicor Művek*, which solved the problem of connecting in series a number of hermetically sealed cells and keeping the battery so obtained in continuous operation.

With this solution the cell which is first discharged instead of dropping its voltage to zero will continue to operate at the second voltage level of the inserted second depolarizer material with respect to the zinc anode, until all the other cells reach this voltage level, provided that the quantity of the second depolarizer material can ensure a capacity corresponding to the time duration at the given load current. With the nominal battery voltage of 9 V as in the previous example and by assuming a potential of about 0,4 V at the second depolarizing agent with respect to zinc, the resulting terminal voltage of the six cells connected in series will be $6 \times 0.4 = 2.4$ V after a total reduction of silver oxide in each cell.

At this voltage equal to about 37 per cent of the nominal value, no consumer apparatus will operate indicating that the battery has been discharged. In this case, the zinc electrode should obviously be oversized with respect to the capacity of the silver oxide electrode, so as to prevent oxygen generation in the negative electrode space according to Eq. (18).

Any metal oxide, the oxidation—reduction potential of which in an alkaline medium is $0,9 \div 1,2$ V, lower than that of silver monoxide ($+0.344$) can be used as a secondary depolariser.

In selecting this agent a number of additional points should be kept in mind:

(a) The applied metal oxide and the reduced metal itself should have a negligible solubility (10^{-4} mole) in an alkaline electrolyte because the dissolved active agent will slowly diffuse into the partition separating the positive electrode space from the negative electrode space and thus being reduced during subsequent cycles gives rise to a leakage current or, in a worse case, an inner short circuit between the electrode spaces.

(b) The presence of the metal oxide or reduced metal should not enhance the spontaneous decomposition of the otherwise metastable [11] AgO present in the alkaline solution, $2AgO = Ag_2O + 1/2\ O_2$, involving oxygen generation.

(c) The metal oxide and reduced metal used should have a good conductivity, or a conductivity that can be increased by adequate means, to such an extent that no important ohmic polarisation is possible.

Based on partial results of the research work conducted in this direction, cadmium oxide (CdO) had been chosen. In the presence of an alkaline solution, CdO is immediately converted into cadmium hydroxide according to

$$CdO + H_2O = Cd(OH)_2 . \tag{19}$$

Oxidation—reduction potential of the redox system $Cd - Cd(OH)_2$ is

$$E_{Cd/Cd(OH)_2} = -0.815 \text{ V},$$

$$Cd + 2OH^- = Cd(OH)_2 \tag{20}$$

which, when compared with the oxidation—reduction potential +0,344 V of Ag_2O, Eq. (3), shows that the oxidation—reduction potential of $Cd(OH)_2$ is $+0{,}344 - (-0.815) = 1{,}159$ V lower than that of Ag_2O so that its potential with respect to the zinc anode is $1{,}589 - 1{,}159 = 0{,}43$ V thus, serving the purpose.

In an alkaline medium, $Cd(OH)_2$ and Cd are practically insoluble and, therefore, meet requirement (a). Stability of AgO in an alkaline medium will be later discussed in detail. It will suffice here to say that in accordance with very detailed investigations recently published by TVARUSHKO [11], the authors showed that cadmium impurities increase the stability of AgO, instead of reducing it, not only in a non-polarisation state, but also in a polarized state corresponding to the electrochemical generation of AgO, which reduces oxygen generation. The assumptions saying that the effect of oxygen overvoltage is responsible for this phenomenon seem to be justified. In other words, the use of cadmium also corresponds to criterion (b).

A serious problem was created by the very low conductivity of $Cd(OH)_2$, preventing this material from being used as a second depolarizer in spite of all its advantageous properties. It seemed logical to use conductive additives to obtain a satisfactory solution. A possible way in this direction is to have a mixture of AgO with CdO or $Cd(OH)_2$, the conductivity of AgO being very high both in an oxidated form and reduced to Ag. This, however, would prevent the use of a stable silver electrode made of silver wire according to [2] and exhibiting a long cycle life. Therefore, another alternative was chosen and the conductance of the secondary depolarizer CdO to be inserted beside an electrochemically activated silver-wire electrode of the desired capacity and size was increased to such an extent as to allow an adequate loading of the electrode itself without an excessive ohmic polarisation. As a conductive additive such a substance can only be used which is inactive in the system (it is not

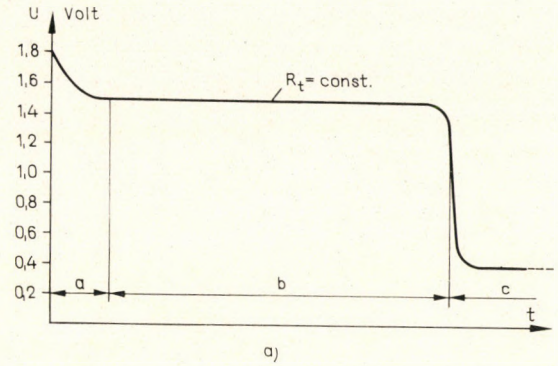


Fig. 8a. Discharging characteristic of a storage battery with a double depolarizer

solved, nor oxidized or reduced, does not reduce oxygen overvoltage, etc.) or takes part actively and usefully in reactions during the cycles.

Investigations showed that the best conductive additive is an electrochemically active silver powder of a high purity admixtured to CdO powder.

The load carrying capacity of a secondary electrode made of a CdO—Ag mixture of the proper composition and pressed to the desired porosity is so

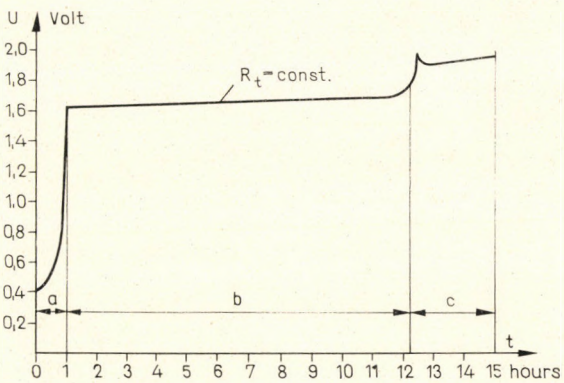


Fig. 8b. Charging characteristic of a storage battery with a double depolarizer

excellent that in a battery with such an electrode the rated loading current would result in a polarisation of only about 30 mV. The use of an electrochemically active silver powder of the corresponding purity and distribution as a conductive additive would have an additional advantage: during the charging process after the first discharge of a battery assembled in an active state, this silver is oxidised to a great extent and takes part in the operating process during the subsequent cycles as well. A detailed discussion of its effect and the development possibilities will be given in Chapter 6.

Typical discharging and charging characteristics of a storage battery designed in accordance with the principles discussed above are shown in Fig. 8. On the discharging characteristic (Fig. 8,*a*), section *a* corresponds to the reduction of AgO as in Eq. (5) and section *b* corresponds to the reduction of Ag_2O, Eq. (3), followed by the reduction of cadmium hydroxide represented by section *c*. It should be mentioned here that the amount of CdO to be built-in can be greatly varied. When properly chosen, the quantity of CdO should at least yield a useful Cd phase corresponding from 3 to 4 hours discharging time at a nominal discharging current. This obviously means that the quantity of zinc should also be chosen to ensure the reduction of $Cd(OH)_2$ after the total reduction of the silver active material. At a normal discharge, an important quantity of metallic zinc remains in the negative electrode if the discharge is stopped a short time after the appearence of the Cd phase. According to authors' experiments this is advantageous as far as the reversibility of zinc electrodes is concerned. As an acceptable explanation, the particles of the remaining metal having a highly advantageous structure due to the manufacturing process are assumed to represent crystal nuclei for zinc regaining its metallic structure during the charging process and to have a positive effect on the reduced zinc structure.

The charging characteristic shown in Fig. 8,*b* for a charging current C/15 in order to allow a comparison with Fig. 4 has three well discernible sections. Section *a* indicates the recharging of phase Cd discharged during the previous discharge, and sections *b* and *c* correspond to Ag_2O and AgO, respectively. As compared to Fig. 4, section *b* is much longer to the expense of section *c*. This is explained in two ways.

First, in a storage battery with a double depolarizer the whole amount of silver oxide can be reduced without the risk of a H_2 depolarisation on the positive side, so that only reduced silver will be present at the positive electrode when a switch over to a charging process occurs. Practical experience shows that, as a characteristic feature, a high-quality silver electrode receives $160 \div 170$ mAh electricity per gram of active silver in Ag_2O phase at a voltage level corresponding to the potential in Eq. (3). This is much lower than the theoretical value of 248 mAh/g as calculated from the reaction equations (3) and (5). All the same, the amount of electricity which can be recharged in phase Ag_2O is equal to about one third of the nominal capacity due to the active silver originally applied and reduced during the first discharge.

Second, there is an amount of active silver admixed as a conductive additive to the active agent CdO which is likewise to be charged in an Ag_2O phase. This is the second reason which, together with the first one, ensures the unusual length of section *b* in Fig. 8,*b*.

There are a number of advantages for a silver—zinc storage battery which obtains its charges in phase Ag_2O only. The recognition of these advantages

to be discussed in detail in Chapter *6*, together with the possibility offered by the insertion of a double depolarizer — inherently ensuring that the amount of electricity corresponding to 80÷85 per cent of nominal capacity will be charged in Ag_2O phase in a new storage battery (with only a few charging—discharging cycles) — gave the idea of extending the Ag_2O phase to a length covering nearly the entire nominal capacity in a new battery without an increase of the amount of silver already built-in. During the following cycles this length should not be decreased to a great extent.

6. Oxidation of silver electrodes in an alkaline medium

In the years after the creation of silver—zinc storage batteries research work was oriented towards zinc-electrode and partition problems.

With the general use of this energy source research was extended towards silver, although fewer problems were initially encountered with the silver-electrode, and at present a great number of papers are published on this subject.

As a first approximation, the oxidation of silver as an electrode in an alkaline medium (either for a fine granulated active material with a large surface on a wire or for a sheet material pressed and sintered from a powder) will take place in two steps according to the two silver oxides so far known, Eq. (3) and (5).

Structural investigations preceding mechanism investigations have established unanimously that silver oxide with a higher oxidation number is a bivalent silver oxide instead of being a peroxide as was earlier assumed. In accordance with this statement the proper definition for Ag_2O is silver(I)oxide and that for AgO is silver(II)oxide.

According to DIRKSE [12] and GAINES [13], chemical compounds with higher oxidation numbers such as $AgO_{1,2}$, $AgO_{1,5}$, $AgO_{1,6}$ may also occur and they contain oxygen in an absorbed state rather than chemically bound. Experience shows that oxygen in these oxides is bound during a longer period and is ineffective in a depolarisation (discharging) process, and during a discharge it often leaves the electrode without any energy production. As was mentioned, anodic oxidation takes place at two potential levels of which the first, that is, the lower one, corresponds to Ag_2O production and the second corresponds to AgO production. Oxidation begins at the boundary surface between the electrolyte and solid phase and the production of Ag_2O continues until a certain depth is reached (Fig. 9).

When Ag_2O generation has reached a certain depth without the whole oxidation of the silver particle, AgO generation begins at the surface with an immediate increase in oxidation potential. Various theories on oxygen building-in mechanism have been proposed [12].

With either of these mechanisms, some important statements about the operation of storage batteries have been made in the course of research, mainly revealing the fact that Ag_2O and AgO appear in the active electrode material as discrete phases readily separated from each other instead of being mixed. AgO is only produced on an already present Ag_2O layer and can never be

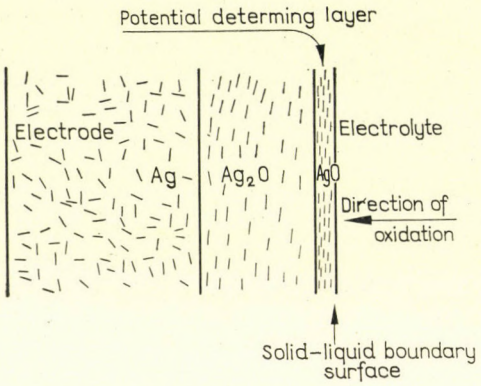


Fig. 9. Oxidation process of active silver

found directly on the metallic silver surface. The conductivity of AgO is much higher than that of Ag_2O, a factor that may determine the mechanism in many respects.

Further anodic oxidation will lead to oxygen generation, and the appearance of higher oxides (solid solutions or alloys) is unlikely.

Both at home and abroad research was conducted to investigate the effects of particle size, pression, density, and sintering temperature on the anodic oxidation of silver. As a common result of various research works it has been established that the particle size of active material has a very important role in oxygen consumption [13], while the pressing conditions and density mainly affect mechanical properties and lifetime. Sintering temperature exerts influence upon anodic oxidation with a very flat maximum [14]. Experience shows that, with a good contact to the anodically oxidized electrode, the first part of the polarisation curve exhibits potential values corresponding to Ag_2O generation on a section representing about 1/3 of the electricity that can be introduced anodically, and the remaining section has the potential values of an AgO generation. In general, the quantity of electricity that can be introduced through oxidation into the active silver is actually only $1{,}2 \div 1{,}4$ Q or $300 \div 350$ mAh/g instead of the theoretical electric charge $2Q = 2 \times 96{,}540$ coulombs/gram equivalent or 496 mAh/g that could be utilized theoretically.

The use of AgO in a storage battery is certainly advantageous in order to utilize the specific charge more effectively. Electrochemical generation of

AgO already takes place at a potential higher than that of O_2 liberation which is only possible when overvoltage of O_2 on silver is high enough to increase the liberation potential above the oxidation potential of AgO. However, the use of AgO has some disadvantages which will be discussed later and, therefore, it would be advisable to minimize the ratio AgO/Ag_2O in the active electrode material.

However, the procedure of anodic oxidation described previously does not result that the ratio AgO/Ag_2O in the charged electrode will be 2/3 : 1/3, but it will be less than that. It shows, therefore, that the curve of oxidation potential fails to reveal quantitatively the phenomena because Ag_2O is produced even in the second part of the charging process. Further, when the possible amount $1{,}2 \div 1{,}4$ Q has been introduced (gas liberation), AgO will take part in a disproportion process with metallic silver always being present under such conditions,

$$2AgO + 2Ag = 2Ag_2O \tag{22}$$

so that the ratios continue to decrease without a loss in the quantity of charge.

On improving electrical and life time parameters of storage batteries, a vital point is to increase the amount of Ag_2O to a maximum without decreasing the practical amount of charge to a value much lower than the theoretical amount 1 Q. From this point of view, a disproportion process proves to be advantageous, but it is exceedingly slow. To achieve this, there were two possibilities in practice according to the investigations so far completed. Namely,

a) decreasing anodic current density, and

b) using various heat treatments to convert AgO into Ag_2O.

The first procedure would limit the application of storage batteries since the charging time of a storage battery, which generally amounts to $10 \div 15$ hours in practice, should not be increased considerably. The second procedure, on the other hand, would imply a hardly controllable production technique resulting in a final product with a variable composition depending on a number of further constructional factors.

Most recent research results supported by the authors of this paper have shown that there were other means of obtaining good results in this respect. This will possibly allow for some new idea about the mechanism of anodic oxidation to complete and perhaps combine the various assumptions made so far in this regard.

According to a patent of the *Yardney International Corp.* [15] the ratio of oxidation potentials AgO/Ag_2O in the anodic oxidation curve is such as to correspond to Ag_2O generation up to 45 per cent (0.9 Q) if the size of the active particles varies between 1 and 5 μ (in practice much larger particles

are used). This is followed by gas liberation at the electrode after a very short AgO phase.

Investigating spontaneous AgO decomposition due to various metallic impurities, GAINES [13] and TVARUSHKO [11] have established — quite independently from the investigators mentioned above — that small quantities of lead and cadmium have a positive effect, probably due to an increase in oxigen overvoltage in that they reduce oxygen generation, an extremely important condition for the operation of a hermetically sealed storage battery. Within the scope of the present research work, the role of both additives in the process of anodic oxidation (charging) was closely investigated.

In the course of these investigations it was established that in the initial state

1. a dispersion of the active particles during subsequent charging cycles is caused by a Pb content of 0,8 per cent in active silver with variable particle size;

2. proportionately to the dispersion, an increasing Ag_2O potential is obtained on the charging curves to such an extent as to give the hope of producing a storage battery operating numerically in an AgO_2 phase; and

3. oxygen liberation due to a spontaneous AgO decomposition is reduced by an order of magnitude with respect to the present practical values.

From these observations, the following consequences can obviously be drawn:

According to Yardney's patent already referred to, a small fraction of particle sizes led to the fact that in the course of an anodic oxidation process the particle can be oxidized practically entirely to Ag_2O without the generation of AgO taking place at the boundary surface between the electrolyte and Ag_2O. The subsequent gas liberation section is to all certainty due to the disappearance of the intact silver core ensuring a high electric conductance, as the active silver particles are completely oxidized to Ag_2O. As is generally known, the resistivity of Ag_2O is high with respect to that of silver or AgO.

When the particle size is larger (this being generally the case in practice), a critical Ag_2O layer is built before a total oxidation (see d_{critical} in Fig. 10).

During a further oxidization of silver, an important and continually increasing ohmic polarisation is taking place at the critical AgO layer. If the corresponding voltage reaches the difference between the two oxidation potentials (Fig. 10) AgO generation on the particle surface can occur with a lower energy demand as compared to a further oxidation of the silver core. The peak at the potential step in the charging characteristic of a silver—zinc storage battery indicates in this case the activation energy of AgO generation.

The magnitude of the voltage gradient in an Ag_2O layer of critical depth depends upon two determining factors according to the experiences so far

gained. The first of these is an ohmic voltage drop due to the resistance of the Ag_2O layer, and the second is the component caused by diffusion.

Further research will be needed to decide which of these factors is dominating in a given case although diffusion seems to play a secondary role to the usual current densities and becomes conspicuous only after an important increase in current density.

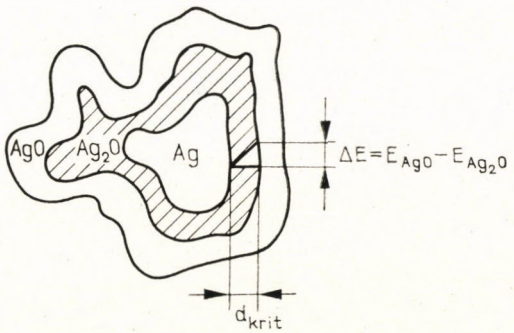


Fig. 10. Oxidation of a silver particle

Without knowledge of the mechanism of particle dispersion process, lead additive allows the formation of a particle size, during a few oxidation cycles, so as to correspond to the presumed oxidation mechanism. The starting material consists of larger particles with a heterogeneous initial composition.

So as to support this statement, there is no increase in Ag_2O potential level if an active material with initial particle sizes of $50 \div 150\ \mu$ is used.

These results are of special importance when on a wire electrode electrolitically produced AgCl is used to give active silver, since in this way an intact metal ensuring current flow is automatically obtained, and dispersion only takes place at the silver particles on the core. Individual storage batteries operating in an Ag_2O phase, produced under laboratory conditions by these techniques, obtain the amount of electricity corresponding to their nominal capacity at a voltage level corresponding to Ag_2O; this result being obtained without any change in specific silver consumption.

With respect to a normal battery, silver—zinc storage batteries charged in an Ag_2O phase have a number of advantages, these are as follows:

a) An important reduction of the oxygen generation very harmful in a sealed battery.

b) Ag_2O is much less aggressive to the partition than AgO. (During the formation or decomposition of AgO, the liberated oxygen *in statu nascendi* also exerts an oxidizing effect.) In the available charging—discharging cycles this proves to be a favourable condition.

c) A storage battery which can be charged at Ag_2O voltage level can be used with a charger that will stop the charging process automatically when a voltage jump of about 0,3 V corresponding to AgO formation is reached, thus offering a practically perfect protection against overcharge.

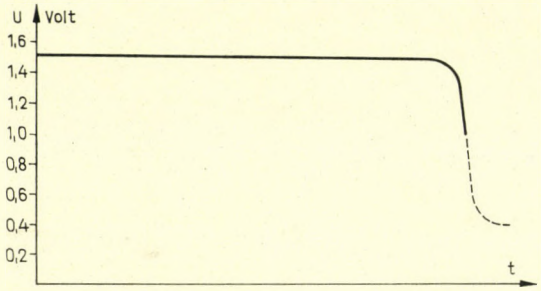


Fig. 11. Discharge characteristic of a storage battery with constant terminal voltage

d) An apparatus with modern integrated circuits is rather sensitive to the magnitude of supply voltage. When energized by a normal silver—zinc battery which is charged in an AgO phase this will inevitably lead to a situation in which the battery just charged will produce 1,8/1,5 = 1,2 times the nominal voltage of 1,5 V, thus damaging the circuits.

When a battery is charged only in an Ag_2O phase, it is absolutely impossible to get a higher voltage corresponding to AgO (Fig. 11).

REFERENCES

1. HAJDÚ, L.: Sealed Zinc—Silver Miniature Rechargeable Batteries. *Medicor News* (1968), 4.
2. *Hungarian Patents*, BA 1386 and BA 1459.
3. *Hungarian Patent*, HA 662.
4. HEGYESSY, GY.: Akkumulátorok ezüstelektródjainak aktiválása. *Magyar Kémikusok Lapja* (1970), 3.
5. DIRKSE, T. P.: Electrolytic Oxidation of Zinc in Alkaline Solutions. *Journ. El. Chem. Soc.* **9.** 102, 497—501; 09.1955. New York.
6. ELDER, I. P.: The Electrochemical Behaviour of Zinc in Alkaline Media. *Journ. El. Chem. Soc.* **6.** 116, 757—762; 6 (1969), New York.
7. DIGGLE, I. W.—DESPIC, A. R.—BOCKRIS, J. O. M.: The Mechanism of the Dendritic Electrocrystallization of Zinc. *Journ. El. Chem. Soc.* **11.** 116, 1503—1514; (1969), New York.
8. *German Democratic Republic Patent*, No. 63,547.
9. *British Patent*, No. 1,112,013.
10. *Hungarian Patent*, ME 1008.
11. TVARUSHKO, A.: The Decomposition of AgO in Alkaline Solutions. *Journ. El. Chem. Soc.* **8** (1969).
12. DIRKSE, T. P.: The Cathodic Behaviour of AgO in Alkaline Solutions. *Journ. El. Chem. Soc.* **9** (1969).
13. GAINES, L.: Secondary Silver—Zinc Battery Technology. *Journ. El. Chem. Soc.* **2** (1969).
14. ZAHORÁN J.: Az ezüst—cink akkumulátorok élettartam-kérdései. Doctor's Thesis, V. V. E. 1965—67.
15. *British Patent*, No. 905,603.

Neue Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der hermetisch verschlossenen Miniatur-Silber—Zink-Akkumulatoren. Die Verfasser stellen das sogenannte »Doppel-Depolarisator-System« vor, welches die nachteiligen Eigenschaften der Zelle beseitigt und welches im wesentlichen daraus besteht, daß neben dem Silberoxyd-Hauptdepolarisator auch ein zweiter, hauptsächlich aus Kadmiumoxyd bestehender Depolarisator verwendet wird. Dies ermöglicht die Ausbildung eines unter dem nominalen Niveau liegenden Spannungsniveaus in der Zellencharakteristik. Über den Wirkungsmechanismus der Silberelektrode hinausgehend besprechen die Verfasser die Parameter eines Akkumulators, dessen Nennkapazität im Vergleich zu einem herkömmlich aufgebauten Akkumulator unverändert ist und der in der sogenannten »Monoxyd-Phase« betrieben werden kann.

Новые результаты исследований в области г рметированных миниатюрных серебряно цинковых аккумуляторов *(Л. Хайду, Я. Захоран).* Авторы описывают работу системы с т. н. «двойной деполяризацией», устраняющей отрицательные свойства таких элементов; суть ее заключается в том, что наряду с основным деполяризатором из окиси серебра используется также еще и второй деполяризатор, состоящий в основном из окиси кадмия. При таком решении для храктеристики элемента можно получить уровень напряжения ниже номинального. Кроме описания механизма действия серебряного электрода авторы излагают параметры такого аккумулятора, который можно эксплуатировать по так называемой «моноксидной фазе» при неизменной (*номинальной*) емкости по отношению к обычной конструкции аккумулятора.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 143—150 (1972)

INFLUENCE ON THE IGNITION OF THE INJECTED FUEL EXERTED BY HEAT TRANSFER AND MATERIAL MOTION

K. REMÉNYI*

CAND. OF TECHNICAL SC.

[Manuscript received January 5, 1971]

When, with due consideration of ignition, the extension of the recirculation zone is changed by a spinning motion, re-circulation should be generated from a zone from which a re-mixing of combustion products, having a high temperature, and of already burning parts of flame can be effectuated. Ignition conditions should not be altered by the quantity of returning inert gases. With regard to the actual state of ignition, it is advisable to convey into the combustion chamber a fuel-air mixture at an elevated temperature in order to lessen the need of heat to be transferred from the surroundings. By intensifying the spinning motion, the resulting velocity of a turbulent ignition acts as an accelerator of the flame expansion velocity. This involves intensification of ignition, improvement of burner stability and decrease of flame dimensions, too.

Ignition of the fuel entering the combustion chamber counts for the most intricate period of the burning process! Undoubtedly, as far as ignition conditions are concerned, the influence of the physico-chemical properties of the fuel, and that of ambient circumstances is highly important. Other conditions being given, ignition temperature is determined by fuel characteristics and conditions in the combustion chamber.

In general, the temperature of the fuel entering the combustion chamber is lower than what would be necessary for prompt ignition. Thus, additional heat transfer is needed to reach the real ignition temperature.

Heat transfer methods:

— irradiation,
— re-circulation of hot combustion gases.

There is no clear evidence referring to the role of these transfer methods. Actually, it is considered as a basic principle that a reliable re-circulation of the hot combustion gases should be permitted by an adequate arrangement of the entire combustion equipment. No objection is made against a re-circulation along the flame surface. Anyhow, for up-to-date burners, and especially when hydrocarbons serve as fuel, it is usual to arrange an internal re-circulation within the flame by the application of a so-called flame-stabilizer.

* K. REMÉNYI, Uri u. 38. Budapest I., Hungary

In [1] we find an overall review of some papers dealing with experimental research work in the field of re-circulation processes induced by a flame stabilizer. In Fig. 1 a diagram shows the flow-picture behind the stabilizer according to the conclusion set down in the review [1] quoted above.

Generally, the flow-function

$$\Psi = \int_0^r U_a \, r \, dr$$

is considered as the adequate parameter for setting down flow-curves,

where

U_a — the axial component of the velocity-vector,
r — radial distance.

The size of the re-circulation sphere depends on the performance of the stabilizer.

As for the measure of the spin, the following equation serves to determine the "spin characteristic" "S": (See [1])

$$S = \frac{G_{ot}}{G_a R}$$

where

G_{ot} — impulsion-momentum, calculated for the axis of symmetry by taking into account the mass flowing in an axial direction,
G_a — linear impulse of the mass flowing in axial direction,
R — outlet-surface radius.

The quantities G_{ot} and G_a are calculated as follows:

$$G_{ot} = \int_0^r 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot U_a \cdot \varrho \cdot W \cdot r = 2\pi \cdot \varrho \int_0^\infty U_a W_t \, r^2 \, dr$$

where

ϱ — material density,
w_t — tangential component of the velocity-vector.

$$G_a = \int_0^\infty 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot U_a \, \varrho \, U_a + \int_0^\infty 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot P =$$

$$= 2\pi \cdot \varrho \cdot \int_0^\infty U_a^2 \cdot r \cdot dr + 2\pi \int_0^\infty P r \cdot dr$$

with P — static pressure.

The shape and size of the re-circulation sphere vary, depending upon the spin characteristic. In Fig. 2 we find informative data for a few kinds of flame-stabilizers.

Taken again from [1], the curve in the diagram (Fig. 2) shows the experimental results concerning the change of the length of the re-circulation sphere depending on the spin characteristic.

Keeping in mind the real conditions of flame formation, we can observe, by a particular study of the curves in Fig. 2 and 3, some apparent contradictions. Namely, whereas by increasing the spin within the usual limits the re-circulation sphere is also increasing: in some contrasting way the flame size decreases and the flame approaches the burner; this seeming paradoxon may

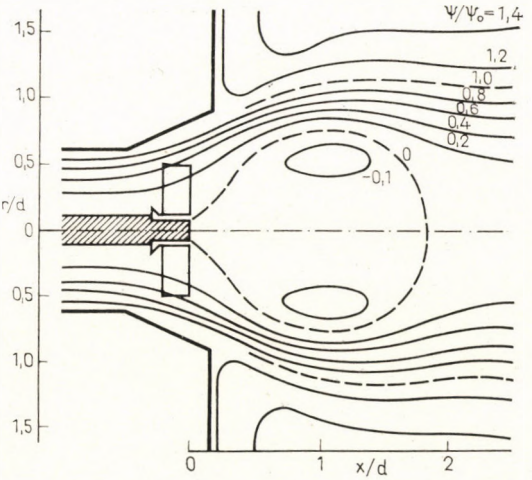


Fig. 1

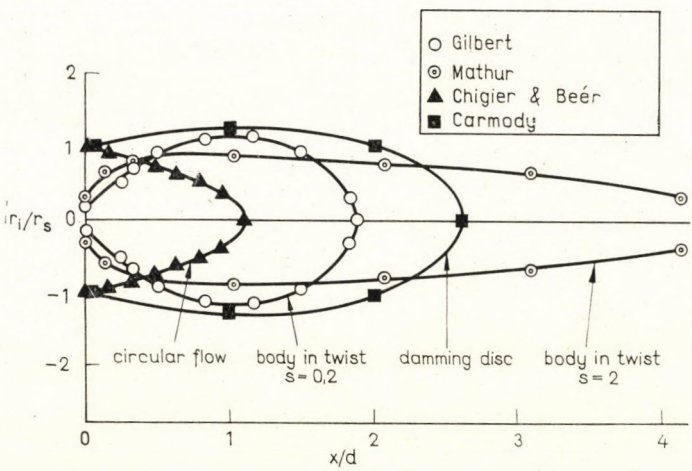


Fig. 2

be explained by due consideration of some interaction of physical and chemical processes with each other, within the flame.

In studying the flow formation induced by re-circulation, we observe many factors which exert somewhat contrarious influence on the ignition and

combustion conditions of the fuel entering the combustion chamber. Among them, the main factors are:

— change of the turbulent ignition velocity;

— re-circulating combustion gases; viz. the influence of N_2, CO_2, H_2 etc. exerted upon heat-transfer and ignition characteristics;

— variation of the size of the re-circulation sphere;

— flame elements which have already reached the stage being ignited, form some ignition nuclei in the re-circulating gases.

In what follows we shall try to analyse in detail these various effects.

When speaking of a turbulent ignition velocity, reference should be made to the definition as given in [2]. In considering a turbulent flame, the turbulent flow velocity is defined in terms of a pulsating velocity component superposed on an average velocity. Hence, the momentaneous value of flow velocity is expressed by:

$$U = \bar{U} + U'$$

where

U — average velocity of the turbulent flow,
U' — pulsating velocity component.

According to the above correlations, the ratio between the turbulent ignition velocity S_t and the laminar ignition velocity S_1 is expressed as:

$$\frac{S_t}{S_l} = \sqrt{1 + \left(\frac{2U'}{S_l}\right)^2}.$$

In general, the value U' of the pulsating velocity component amounts to 10% of the average flow-velocity. Thus, with an average velocity of 20 m/s (viz. with $U' = 2$ m/s) and with the laminar velocity value $S_1 = 0{,}4$ m/s (namely for methane CH_4), the value S_t of turbulent flow velocity amounts to somewhat higher than the tenfold of the laminar velocity S_1.

When re-circulation is highly intensified, extremely hot combustion gases are added to the air-combustible mixture not ignited yet. In order to obtain the necessary ignition heat in a dependable way, it seems desirable to have large masses re-circulate and this at an elevated temperature. In this connection a longer zone of re-circulation involves better conditions, so far as the flame temperature is higher in a more developed stage of combustion, understood within a certain upper limit.

However, a longer re-circulation zone involves a larger content of inert gases (N_2, CO_2, H_2O) in the re-circulating masses that obviously causes a deteri-

oration of ignition conditions. When this content of inert gases surpasses a certain limit, it would result in a completely frustrated ignition.

In Fig. 4 the triangular diagram taken from [2] shows the influence of nitrogen exerted upon ignition limit in the case of some kinds of air-combustible mixtures. Similar diagrams can be set down for other types of combustible mixtures.

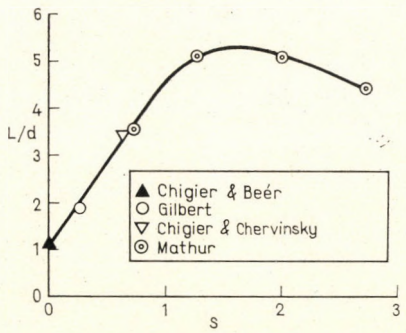


Fig. 3

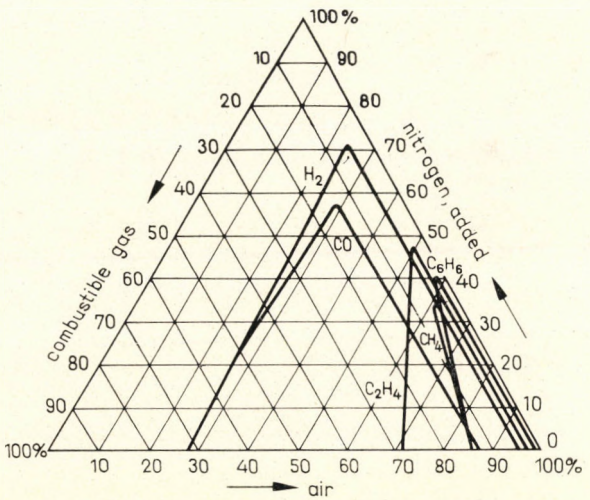


Fig. 4

It is to be noted that the re-circulating masses contain some already burning particles originating from the starting period of combustion. These particles added to the newly arriving fuel masses form certain ignition nuclei which serve as a kind of promoting factor for flame propagation. The important role of these nuclei in creating a stable flame formation should not be overlooked.

As is seen from the diagram in Fig. 3, the increase of the length of the re-circulation zone goes on only up to a certain critical value of increased spin,

but beyond this limit, re-circulation length begins to decrease. Anyhow, greater spin values are always accompanied by the intensified effect of hot re-circulating masses which act in promoting the ignition.

In fact, it goes without any justifying motivation that a higher spin involves a decrease of the flame size; namely, combustible particles are bound to pass through a longer stretch to reach the same axial distance: this already serves as a factor to reduce the length of the flame, to shorten the flame tip. Anyhow, the movement of combustible particles along a helical path on the conical surface cannot yield a sufficient basis for an improvement of the ignition conditions, or/and for some approaching movement towards the burner's orifice of the flame-surface that forms an envelop around this orifice. When looking for some explanation, re-circulation conditions should be taken into account together with the influence of flame size reduction exerted by an increase of the average temperature of the re-circulation zone. Re-circulation and the use of oxygen along the flame surface are influenced, first of all, by the difference between the velocity values of the flowing masses at both sides of the boundary surface. Besides, the resultant of the axial and tangential velocity-components in spin-flow is larger than that of a spin-free flow, even at supposedly identical geometric formation of the burner and identical burning capacity: hence, when the entire material flowing from the burner into the combustion chamber performs a spinning motion, then the effect of the high spin onto the outer re-circulation results in affecting ignition conditions.

By an appreciable increase of the spin, the velocity of the turbulent ignition increases, too. The re-circulation sphere size becomes larger, combustion gases having a higher temperature can find a way to re-circulate, and a more intensive supply of the necessary heat for ignition follows. At the same time, reduction of flame size is involved. With a too short size of the re-circulation zone, re-circulation mainly starts from an air combustible mixture that could not reach the stage of being ignited yet; of course, in such a case ignition conditions cannot be improved.

Ignition conditions can be improved by a forced spin by which the above described double featured influence will be exerted and, in addition, a re-mixing of already burning fuel elements plays a supplementary role.

On the other hand, there is a rather disadvantageous influence exerted by a forced re-circulation induced by a greater spin. This is obvious because the returning inert gases act as a factor through which the limits of probable ignition become narrower. There are cases when a complete extinction of the flame results.

Under extreme conditions, the unfavourable feature of re-circulation may result in a re-flow of gases only from a rather cold zone located behind the zone of complete combustion, resulting in a very disadvantageous formation of the whole ignition process.

In summing up, measures that can be advantageous for promoting ignition, are the following:

— When the intention is to modify the re-circulation sphere size in the presence of a flame stabilizer by means of a forced spin, it is important to arrange a starting zone from which intensely hot combustion gases and already burning particles may be re-mixed.

— The whole process of re-mixing should be controlled in such a way that the mass of returning inert gases should not affect ignition conditions.

— Of course, improvement of ignition conditions should be reached by a possibly feable re-circulation. To this purpose, it is advisable to have the air-combustible mixture introduced into the combustion chamber at a temperature as high as possible (of course in due consideration of the inflammation point) in order that the necessary amount of supplementary heat from the surroundings should be kept low. In this way, ignition conditions in the combustion chamber can be kept independent of the load conditions. However, when a precisely composed air-combustible mixture happens to reach the ignition stage, explosive phenomena are liable to occur, thus causing a sudden increase of pressure. Anyhow, to bring an air-combustible mixture near to the exact igniting ratio into the combustion chamber, this seems to yield the most effective improvement of igniting conditions.

By a forced spin the effect of the turbulent ignition velocity results in an intensified flame propagation. Consequently, ignition intensity increases, burner stability improves, flame size becomes reduced.

REFERENCES

1. Chigler, N. A.—Gilbert, J. L.: Rückwärts gerichtete Wirbel in der Lee von Flammenhaltern. *Öl- und Gasfeuerung* **2** (1969), 109—120.
2. Fritsch, W. N.: Zweistoffbrenner. Verlag A. W. Gentner KG., Stuttgart.

Über die Wirkung der Wärme- und Stoffbewegung auf die Entzündung des aus dem Brenner strömenden Brennstoffes. Wenn unter Berücksichtigung der Entzündung die Ausdehnung der Rezirkulationszone durch ein Anwirbeln geändert wird, so soll die Rückströmung aus einem Gebiet stattfinden, aus welchem es möglich sei, eine Rückmischung von Brennprodukten hoher Temperatur und bereits brennender Flammenteile zu verwirklichen. Entzündungsumstände dürfen von der Menge der zurückkehrenden inerten Gase nicht beeinträchtigt werden. Unter Berücksichtigung des Entzündungszustandes ist eine möglichst hohe Temperatur des dem Verbrennungsraum zugeführten Brennstoff-Luft-Gemisches anempfohlen, um den Bedarf an Wärmezufuhr aus der Umgebung je niedriger anstellen zu können. Durch Intensivierung der Wirbelbewegung ergibt sich eine Geschwindigkeit der turbulenten Entzündung, durchwelche die Flammenverbreitungsgeschwindigkeit kräftig ansteigt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Intensivierung der Entzündung, einer Steigerung der Betriebsstabilität des Brenners und mit einer Verringerung der Flammendimension.

О воздействие движения тепла и материала на воспланение топлива, истекающего из форсунки *(К. Ремени)*. Если при учете воспламенения производится изменение размеров рециркуляционной зоны с помощью некоторого завихрения, тогда должен иметь место обратный ток из некоторой области, а именно из которой можно осуществить обратный ток продуктов горения высокой температуры, а также частей горящего факела пламени. На условия воспламенения не должны воздействовать количества возвратных инертных газов. Для состояния воспламенения следует учитывать некоторую возможно высокую температуру подаваемых в камеру горения смесей топлива и воздуха, чтобы потребность в подводимом из окружающей среды тепле можно было брать возможно низкой. Путем интенсификации вихревого движения получается такая скорость турбулентного воспламенения, при которой скорость распространения пламени возрастает в очень большом масштабе. А это однозначно, собственно говоря, интенсификации самого воспламенения, или же стабильности работы форсунки, а также уменьшению размеров факела пламени.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 151 — 174 (1972)

CAUSES OF THE PARTIAL DISSOLUTION OF THE VANADIUM CONTENT IN THE BAYER PROCESSING OF HUNGARIAN BAUXITES

J. ZÁMBÓ
CAND. ENG. SCI.
and
L. MOLNÁR

[Manuscript received April 2, 1971]

On the basis of literary data, authors enumerate the forms of vanadium occurrence in nature, and survey the possibility of their appearance in connection with bauxites. In the experimental part they discuss the correlation between the components and vanadium content of bauxite, and the potential increase of dissolution. In conformity with the present geochemical knowledge, the test results reveal that, in the case of Hungarian bauxites, a greater part of the vanadium content is discovered as an isomorphous contaminant of the iron minerals (mainly goethite) and, therefore, it cannot be recovered under the usual operational conditions. An increased dissolution can only be expected through the thermal or hydrothermal decomposition, or the reduction of the goethite structure.

Introduction

Among the primary vanadium carriers to be found in Hungary, at present only bauxite can be considered as a raw material suitable for industrial scale vanadium salt production [1]. Depending on the site of origin, Hungarian bauxites generally contain 0,10 to 0,14 per cent V_2O_5, with only slight deviations.

In the Bayer type alumina production, about 25 to 33 per cent of the V_2O_5 content of the bauxite will be dissolved during recovery, and enriched in the aluminate solution present in the cycle. The major part of the vanadium content will remain in the red mud, and be lost for utilization. From the alumina plant cycle about 80 to 85 per cent of the dissolved vanadium can be recovered in the form of a crystalline salt mixture, which then represents the raw material of V_2O_5 production.

The extent of dissolution, most likely, depends on the mineral appearance form of the vanadium in bauxite, so our investigations were aimed at the establishment thereof. In addition to the relatively small quantity, phase analysis difficulties are due to the fact that vanadium cannot be obtained from bauxites in the amount necessary for direct mineral determination. In first

* Dr. J. Zámbó, Fehérvári út 146, Budapest XI., Hungary
** L. Molnár, Fejér Lipót u. 32, Budapest XI., Hungary

approximation, therefore, the possible occurrence forms of vanadium in nature will be assessed, then, on the basis of the available information on the rare element content of sedimentary rocks, the eventual forms of the given occurrences will be surveyed, and their potentialities reviewed.

1. Forms of vanadium occurrence

Vanadium, as a transitional element of the periodic system, displays a peculiar behaviour in crystal structures. Its co-ordination number and configuration with other atoms varies in the function of the oxidation degree, and the pH of the medium.

Smaller vanadium quantities are often present in the magma but they do not frequently form independent minerals. In such cases it can usually be found in a trivalent form, and since the radius of the V^{3+} ion (0,61 Å) is almost identical to that of Fe^{3+} (0,67 Å), vanadium is inclined to follow iron when forming minerals. Thus, minor vanadium quantities can be discovered in magnetite, pyroxene, amphibole and biotite.

1.1. Forms of vanadium occurrence in the earth's crust

Geochemically, vanadium may be concentrated within four different formations where it will exhibit different crystallochemical behaviour [2]. These formations are

1.1.1 Sulphides,
1.1.2 Oxidized sulphide ores,
1.1.3 Silicates, and
1.1.4 Oxides

1.1.1. Sulphides

There are two vanadium sulphide minerals known: sulvanite $Cu^{[4]}_3V^{[4]}_4S_4$ and patronite $V^{[3]}S_4$. In addition, vanadium may be found in sphalerite, colusite $Cu^{[4]}_3(As, Sn, V, Fe)^{[4]}S_4$, and in a synthetic compound of the spinel type: CuV_2S_4.

1.1.2. Oxidized sulphide ores

In some places secondary vanadate mineral groups can be observed within the oxidized zones above copper, lead, zinc ores which reveal a formal similarity to phosphates and arsenates, although structural identity can be

discovered only in two such cases. Vanadium is always quinquevalent in such minerals. So far, the following mineral structures have been tested:

Chileite $Pb^{[8]}(Zn, Cu)^{[6]}[V^{[4]}O_4](OH)$, of a structure identical to that of Conichalcite $CaCu[AsO_4](OH)$,
Pyrobelonite $Pb^{[7]}Mn^{[6]}[V^{[4]}O_4](OH)$,
Brackebuschite $Pb^{[8]}Pb^{[10]}(Mn, Fe)^{[6]}[V^{[4]}O_4]_2H_2O$,
Bucherite $Bi^{[8]}[V^{[4]}O_4]$ and
Vanadinite $Pb_2^{[9]}Pb_3^{[8]}[V^{[4]}O_4]_3Cl$ whose structure is identical to that of chloral apatite $Ca_5[PO_4]_3Cl$.

1.1.3. Silicates

Large quantities of vanadium, as a substituting element, can be found in muscovite mica, forming the mineral roscoelite. In the octahedron layers of the mica, vanadium(III) plus some iron(II) replace aluminum, and can bring about a wide range of formations. A typical roscoelite from Colorado may be characterized by the following formula:

$$(K_{0,75}Ca_{0,25})^{[12]}(V^{3+}_{1,16}Al_{0,72}Fe^{2+}_{0,09}Mg_{0,08})^{[6]}(Si_{3,18}Al_{0,82})^{[4]}O_{10}(OH)_{1,97}Fe_{0,03}$$

In the course of roscoelite oxidation and weathering some montmorillonite and chlorite type clays of a certain vanadium content will be produced. In these minerals, vanadium is always tetravalent, and located in the octahedron strata. Further, oxidation is associated by the decomposition of the silicate structure, and the appearance of the quinquevalent vanadium.

1.1.4. Oxides

In some sandstone strata, particularly over the Colorado highland, vanadium had formed as an oxide, then weathered away parallel to an extensive mineral formation. The original formation mainly includes trivalent oxide-hydroxides, and montroseite $V^{[6]}O(OH)$ which, similarly to the goethite FeO(OH) and grothite MnO(OH), features a diaspore structure. At such an oxidation degree, vanadium usually reveals a normal octahedron co-ordination with oxygen, and its crystallochemical behaviour resembles that of iron(III) or manganese(III). Iron is usually present in montroseite, in the form of a solid solution. Vanadium may form a number of synthetic spinel type oxides as $V^{3+}Mg_2O_4$, $V^{3+}ZnO_4$, $V_2^{4+}MgO$, and $V_2^{4+}ZnO_4$. The nonalite seam mineral $Fe_{2,5}V^{3+}_{1,5}V^{4+}_6O_{16}$ has a hexagonal structure and is close to a spinel, where vanadium exhibits both octahedral and tetrahedral co-ordination.

The octahedral oxide-hydroxide structure may contain tetravalent vanadium as well, thereby changing the octahedral relation as in the häggite

$^{2}_{\infty}V^{[6]}_{2}O_2(OH)_3$, with an average oxide number of 3,5 or in an anonymous "B" mineral phase $^{2}_{\infty}V^{[6]}_{3}O_3(OH)_5$ with an average oxide number of 3,67 or, again, changing the hydrogen content, as in the paramontroseite $V^{[6]}O_2$ and doloreseite $V^{4+[6]}_{3}O_4(OH)_4$. Paramontroseite may be considered as the oxidation product of montroseite, in the solid phase (its general structure is maintained during hydrogen losses), which points to a metastable character as compared to synthetic VO_2 whose structure resembles that of the rutile. Doloreseite is similar to the anonymous "B" phase. In all these structures the double octahedron chain diaspore composition is dominant.

In its tetra- and quinquevalent condition the vanadium usually maintains its approximately octahedral co-ordination with oxygen, but the configuration is seriously distorted because of one or two multiple chemical bonds, although the quadratic pyramid configuration is quite frequent.

Montroseite oxidation and weathering make possible the following alternative sequence:

Montroseite $VO(OH)$ → doloreseite $V_3O_4(OH)_4$ → duttonite $VO(OH)_2$ → → corvusite $V_3O_{13}(OH)_3 \times H_2O(?)$ → hewettite $CaV_6O_{16} \times H_2O$.

The fully quinquevalent oxidized vanadium can be much better resolved, and the further essential modifications of the structure depend on the pH of the medium. If the vanadium content of the groundwater is increased, in the 2,5 to 6 pH range an orange coloured salt precipitation will be observed, isopolycomplex decavanadate ions are produced $V_{10}O^{6-}_{28}$, as represented by pascoite $Ca^{[6]}Ca^{[7]}_{2}[V^{[6]}_{10}O_{28}]17H_2O$ and huemulite $Na_4Mg[V^{[6]}_{10}O_{28}]24H_2O$.

Many transitional elements from groups 5 and 6 as V, Ta, Nb, Mo, W produce large polynuclear ions, but so far only decavanadate has been found in nature. The structure of decavanadate ions is rather peculiar, containing $10VO_6$ octahedrons. As the acidity of such a complex solution decreases (for example, when passing through a calcite type sandstone layer), the decavanadate complex will be decomposed to minor polyions of unknown structure, and colorless rossite $^{1}_{\infty}Ca^{[8]}[V^{[5]}O_3]_2 4H_2O$, metarossite $^{1}_{\infty}Ca^{[8]}[V^{[5]}O_3]_2 2H_2O$ or the $K^{[10]}[V^{[5]}O_3]H_2O$ crystal may be produced. At a pH of 11 in rather alkaline media, although never encountered in nature, mononuclear ions $[HVO_4]^{2-}$ and $[VO_4]^{3-}$ similar to phosphate and arsenate will be formed.

1.2. Probable forms of vanadium occurrence in bauxites

No publication refers to the presence of independent vanadium minerals in bauxites but, according to the information obtained from BÁRDOSSY, GY. [8], he succeeded in separating from the Austrian Unterlaussa bauxite, and to identify metatuyamunite.

According to HAMMER, A. I. [3], who studied vanadium occurrences in clays, and TERENTEVA and conducted investigations on rare elements in bauxites [4], as well as other publications on the vanadium content of bauxite as such, vanadium may be present in bauxites in the following forms.

1.2.1. Isomorphous contaminant in the main mineral components of bauxite

Investigating on the relation between the main components and the vanadium content, BENESLAVSKY [5] found in the high iron content oolites of Tartarian and Sofievsky bauxites a 2÷2,5-times vanadium enrichment, as compared to the basic material of the bauxite, and a 3 to 5-times enrichment in the pyrite fraction of the North-Uralian bauxites, in a comparison to the average.

In bauxites of different origin, TENYAKOV [6] discovered rather close correlation between the vanadium and iron content, with an average V/Fe ratio of $2{,}8 \times 10^{-3}$.

DUDICH, Jr., and Mrs. SIKLÓSSY [7] found a correlation between the Fe_2O_3 and V_2O_5 contents of different Hungarian bauxites (the correlation coefficient was around +0,9). This correlation between the TiO_2 and V_2O_5 components was very close in bauxites from Gánt and Halimba (+0,927), whereas in those from Fenyőfő and Iszka no such correlation could be detected (−0,909, −0,996). The correlation test between Al_2O_3 and V_2O_5 did not reveal any regularity, although an $Fe_2O_3 + Al_2O_3/V_2O_5$ correlation could be observed by vertical distribution examinations in certain seams.

Another large quantity mineral component of the Hungarian bauxites is kaolinite whose potential vanadium content, however, has not been referred to in literature so far.

1.2.2. Contaminant of the tributary minerals of bauxite

Many of the small quantity minerals in bauxite may contain vanadium. Thus, the fine crystal rubble consisting of primary rock residues, frequently found in bauxite, such as rutile, anatase, sphene, ilmenite, or the various clay minerals and decomposition products like muscovite, tourmaline, kyanite, garnet, apatite, zircon, chlorite, etc. [8]. Their quantity in the Hungarian bauxites is, however, rather small.

1.2.3. Secondary vanadate precipitation results

The vanadium entering a solution form during bauxite formation may produce, depending on the pH, anions of different compositions. According to IVEKOVITCH, H. [9], the acidic medium of the soil transforms the vanadate

ion into vanadile (VO_2^{2+}) ion, through a hypergenetic process, which then re-transforms into an $H_2VO_4^-$ ion with atmospheric oxygen. Between 2 and 6,8 pH, the latter would polymerize into $H_3V_5O_{16}^{4-}$ which, in acidic media, slowly reacts with the Fe^{3+} ion, leading to the production of salts. This is how IVEKOVITCH explains the linear correlation between the iron oxide and vanadium contents of the Drnis bauxites. TENYAKOV, V., in a subsequent work [6], has arrived at the same conclusion with other bauxites.

1.2.4. Adsorbed form

Over the surface of the sedimentary rock components the ions of rare elements may be adsorbed. The surface activity of bauxite and its main components is quite well-known (active bauxite, active alumina, etc.).

HAMMER has demonstrated that the clay minerals and, particularly, the oxide hydrates of bauxite are capable of adsorbing a considerable quantity of vanadium from vanadate ion content solutions. He believes that the relatively large quantity of vanadium in magnetite and ferrotitanium ores may be explained by the isomorphous incorporation of vanadium, whereas in the sedimentary iron ores by adsorption capacity.

1.2.5. In complex organic compounds

Certain rare elements can often be found in sedimentary rocks as the components of complex organic compounds. Vanadium is known to have been frequently discovered in plant and animal origin organic matter such as petroleum, blood, etc. In addition, vanadium was observed to be readily bonded and adsorbed by organic substances.

According to GEDEON, T. [10], these vanadium content organic compounds belong to the porphyrine group (C, H, O, N content). These compounds are very stable, their decomposition is between 150 and 400 °C, they are generally alkali and acid resistant, and can be destroyed only by extremely strong oxidizing agents. In his experiments, about 2 to 3 per cent $K_2S_2O_8$ (or Na_2O_2) reduced the usual 0,16 per cent V_2O_5 content of the red mud to 0,06 per cent. BOGÁRDI, E. [11], observed similar vanadium resolution increase in his experiments involving Na_2O_2.

1.3. The valence and caustic solubility of vanadium

Vanadium may be di-, tri-, tetra-, quinque-, or heptavalent. In nature, usually the quinquevalent vanadium is the most stable type, with a definitely acidic character. The tetravalent vanadium has amphoteric properties with however, an expressed basic character, whereas the lower valency types are

simply basic. So it may be assumed that only the quinquevalent vanadium content of the bauxite, or what had been earlier oxidized into a quinquevalent form would enter the aluminate base during recovery [11].

Numerous laboratory examinations and plant material balance data show that in the Hungarian bauxites the value of V dissolution varies within a relatively narrow range depending on the site of origin [12, 13].

From caustic solubility aspects, the potential V occurrence forms can be classified into three categories:

That part of the vanadium content which enters the solution even under the present technological conditions includes the isomorphous vanadium eventually contained by the aluminum and clay minerals of the bauxite, and the vanadium compounds soluble in base.

The second group includes that part of the vanadium content which is decomposed by calcination or upon the effect of strong oxidizing agents, or will become accessible for the solvent base due to destruction or relaxation.

The third group cannot be made to enter the solution by either bauxite treatment or any feasible modification of the alkaline digestion process.

Taking the above considerations into account, the possibilities can be further reduced by some specially selected acidic, alkaline, and combined treatment of the bauxites and their red mud. Our investigations were aimed, therefore, at the demonstration and verification of the individual V occurrence forms.

2. Distribution of the V content in bauxites

In order to further examine the correlations observed in the various bauxite seams, two multicoloured bauxite types from the Kincses II plant were selected, then separated by colour into light and dark groups. The analysis data of these bauxites and their fractions are presented in Table I.

The analysis data reveal that, in the bauxites tested, the correlation between the iron and vanadium content can be unequivocally demonstrated even in the 1—2 cm areas of the multicoloured bauxites. In order to determine whether this correlation exists under microdimensional conditions as well, the electron microprobe examination of the vanadium distribution was attempted, although, due to the physical limitations of the X-ray reflexions, the V cannot be determined in the presence of a large Ti quantity. These investigations were conducted by VASSEL, K. R. et al., by means of a JEOL-JXA-5 electron microprobe.

Figures 1, 2, and 3 show the areal distribution of the Fe-K_a, Ti-K_a, and V-K_α reflexions, in a 400-times actual magnification, as given by a bauxite sample obtained from the Almásfüzitő Alumina Works. The distribution of the element studies is illustrated by the bright points, and the pattern of these

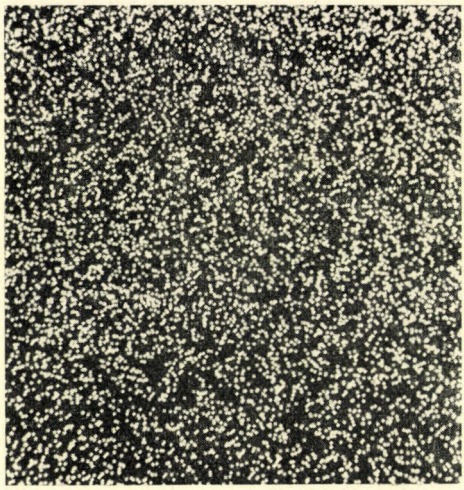


Fig. 1. The areal distribution of the Fe—K_α of a bauxite from Almásfüzitő Alumina Works

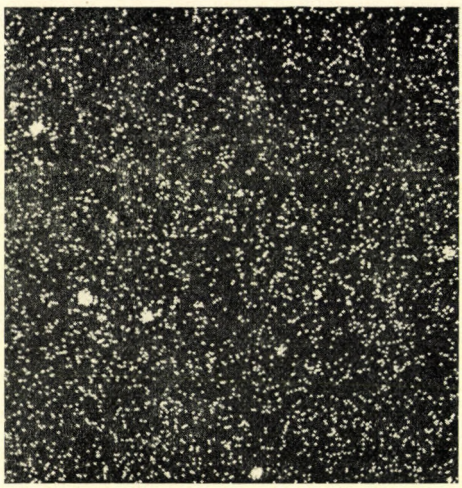


Fig. 2. The areal distribution of the Ti—K_α of a bauxite from Almásfüzitő Alumina Works



Fig. 3. The areal distribution of the V—K_α of a bauxite from Almásfüzitő Alumina Works

points, scintillating on the cathode ray tube in the course of scanning. While the distribution pattern of iron exhibits local enrichments and attenuations, and the apparently uniform Ti distribution is associated with similar local enrichments which refer to an independent Ti mineral, the V distribution does not show any such local densities reflecting mineral formation at this magnification either, although certain regularities, linear arrangements can definitely be detected. In other parts of the pattern still greater Fe and Ti concentrations can be found, but in the neighbourhood of these particles the V test cannot be performed.

Table I

Analysis data of multicoloured bauxites and their parts separated by colour

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	CaO	MgO	V_2O_5	SO_3	Ignition losses
1. Multicoloured bauxite, Kincses II	52,3	8,0	12,1	3,0	0,7	0,5	0,142	0,24	20,9
2. Multicoloured bauxite, light part	58,7	8,7	6,0	3,3	0,7	0,5	0,092	0,19	22,0
3. Multicoloured bauxite, dark part	50,5	7,2	14,3	2,9	0,7	0,4	0,126	0,26	20,0
4. Multicoloured bauxite, Kincses II	53,2	7,8	11,6	2,7	0,7	0,5	0,121	0,29	21,5
5. Multicoloured bauxite, light part	57,6	8,0	7,1	3,1	0,7	0,3	0,083	0,24	22,2
6. Multicoloured bauxite, dark part	46,9	6,5	18,0	2,8	0,7	0,3	0,168	0,22	20,2

Table II

Count numbers measured on the reflected electron image of selected bauxites

	Al	Fe	Si	Ti	V
1. Almásfüzitő, plant type	46 000	10 000	6 000	500	100
2. Multicoloured bauxite, "red part"	42 000	10 000	13 000	350	90
3. Multicoloured bauxite, "yellow part"	52 000	2 000	13 000	350	50
4. Lignite bauxite	40 000	800	16 000	300	50

Fig. 4 presents a reflected electron pattern on the Almásfüzitő bauxite referred to earlier, Fig. 5 on the multicoloured bauxite tested, and Fig. 6 on a lignite bauxite poor in iron but rich in organic matter. The picture is resolved by the electrons reflected from the phases of that property, included by the electron beam scanning the sample surface. The areas of higher average atom weight, that is, the phases of a greater electron reflecting capacity are brighter in the picture than those rich in light-weight elements. All three exposures were made with an acceleration potential of 20 kV, at an actual magnification of 430.

In the above experiments, microscopic distinction was attempted by using macroscopically separated multicoloured bauxite samples but, because of the magnification, this could not be performed clearly enough with the electron microprobe. In Fig. 5, the light field corresponds to the red part, while the darker veins to the yellow section.

In the area of the photos shown, the relative changes and ratio of the Al, Fe, Si, Ti, and V concentrations have been studied on the basis of the

element distribution pattern, and the measurement of the count numbers. The latter is presented in Table II.

Repeated examinations under conditions similar to the earlier situation performed, however, at different measurement points, gave almost the same count numbers. Table III illustrates the approximative metal concentrations determined on the basis of the count numbers measured.

The analysis data of the bauxites tested are shown in Table IV.

Microprobe test results reveal that the Fe-V correlation can be demonstrated for the tested bauxites even in microdimensions. These investigations, however, cannot lead to conclusions on the Ti-V correlation, as the Ti con-

Table III

Metal content percentage according to the count numbers

	Al	Fe	Si	Ti	V
1. Almásfüzitő, plant type	27	7	3,5	0,6	0,1
2. Multicoloured bauxite, "red part"	25	7	7,5	0,4	0,09
3. Multicoloured bauxite, "yellow part"	30	1,5	7,5	0,4	0,05
4. Lignite bauxite	23	0,6	10	0,3	0,05

Table IV

Analysis data of different organic matter content bauxites, per cent

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	CaO	MgO	V_2O_5	SO_3	$C_{org.}$	Ignition losses
1. Almásfüzitő, plant type	49,0	7,0	18,0	2,6			0,09		0,062	20,3
2. Ajka, plant type	47,9	6,4	23,1	2,6			0,110			19,6
3. Bagolyhegy, lignite bauxite	36,2	12,6	2,3	2,5	2,4	0,8	0,091	0,46	9,42	43,1
4. Multicoloured bauxite, Kincses II	52,3	8,0	12,1	3,0	0,7	0,5	0,142	0,24	0,010	20,9
5. Multicoloured bauxite, Kincse II	53,2	7,8	11,6	2,7	0,7	0,5	0,121	0,29	0,011	21,5
6. Grey bauxite, Kincses II	47,7	20,2	7,0	2,2	1,1	0,5	0,093	7,0	0,12	21,2
7. Violet iron-rich bauxite, Kincses II	28,7	19,2	36,0	1,3			0,06		0,06	11,3



Fig. 4. Reflected electron pattern on the Almásfüzitő bauxite

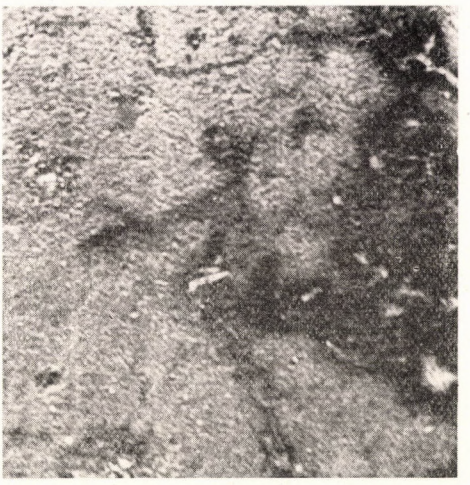


Fig. 5. Reflected electron pattern on the multi-coloured bauxite from Almásfüzitő



Fig. 6. Reflected electron pattern on a lignite bauxite from Bagolyhegy

centration points have been avoided. No local V concentration could be detected in the samples, and the distribution was statistically uniform. As was expected, a significant C concentration could be discovered only in the sample displayed by Fig. 6, with a homogeneous distribution, not associated however with a V enrichment.

3. Investigations on the correlation between vanadium and other bauxite components

3.1. Correlation between vanadium and organic matter

Hitherto correlation studies did not cover the organic matter content, but, since such a connection can well be assumed on the basis of literary data, further experiments in this field appeared to be indispensable.

Different organic matter content bauxite samples were collected. Their analysis data are presented in Table IV. Although they do not reveal any correlation between the tested component quantities, technological experiments were conducted in order to study jointly the behaviour of both components.

The bauxites were digested under the usual conditions (240 °C for two hours, 200 g/lit Na_2O_2), and the vanadium distribution between the red mud and the base was determined. In the sequence of the samples, the dissolution values were 27,6, 32,0, 55,0, 47,2, 47,8, 72,2, and 6,1 per cent.

In the Research Institute for Metal Industry, FEHÉR, I. studied in detail organic matter dissolution during bauxite recovery [14] and found that about 60 per cent organic matter would be dissolved from the Almásfüzitő bauxite under normal recovery conditions, which is much more than the usual vanadium dissolution values. Similar values were obtained for the other Hungarian bauxites as well.

In order to decompose organic matter, the bauxite was calcinated for two hours at different temperatures, each. The composition of raw and calcinated bauxites is presented in Table V.

Accordingly, the organic matter can be readily burnt off during calcination. The raw and calcinated bauxites thus obtained were digested under identical conditions, and the organic matter as well as the vanadium content in the red mud and aluminate base, respectively, were measured. According to the measured and calculated data (Table VI), a considerable vanadium quantity will be left over indigested, even if the organic matter was fully burnt out. Determination of the organic matter content of the samples was made by MAROS, L., et al., of the Department of Inorganic and Analytical Chemistry, "Eötvös Loránd" University of Sciences, Budapest. According to these investigations, no correlation between the organic matter and vanadium contents of the bauxites could be detected, because

— there was no correlation between the quantities of the two components in the bauxites,

— the organic matter was dissolved to a much greater extent during recovery, than the vanadium,

— the organic matter was decomposed at a far more rapid rate upon the effect of calcination, than the dissolution of V_2O_5 was increased.

Table V

Composition of the bauxite processed in the Almásfüzitő Alumina Plant, in raw condition, and calcinated at different temperatures

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	V_2O_5	Ignition losses	$C_{org.}$
Green bauxite	49,0	7,0	18,0	2,6	0,09	20,3	0,062
Calcinated at 350°C	53,9	7,7	20,9	2,9	0,10	11,2	0,025
Calcinated at 550°C	55,2	8,4	22,5	3,1	0,108	4,8	0,006
Calcinated at 750°C	55,8	8,5	22,8	3,2	0,11	3,1	0,002

Table VI

Organic matter and V content dissolution data during the digestion of green and calcinated bauxites of the Almásfüzitő plant type

Type	Organic C		V_2O_5		
	in the base g/l	in the slurry %	in the base g/l	in the slurry %	%
Green bauxit	0,043	0,033	0,028	0,084	25
Calcinated at 350°C	0,020	0,010	0,044	0,064	39
Calcinated at 550°C	not measurable		0,060	0,064	53,6
Calcinated at 750°C	not measurable		0,078	0,042	69,8

These experimental results, however, do not exclude the possibility of having a minor part of the vanadium content bonded to the organic compounds.

3.2. Correlation between the V and Ti contents of bauxites

Since direct physical and mineral methods could not be employed for the discovery of this correlation, technological investigations have been attempted. Mrs. HAZAI and SOLYMÁR [15] found that, during recovery, the titanium minerals partially react with the caustic lye of soda, and form sodium titanate. The reaction of the anatase and rutile content of the bauxite with the recovery base depends, in addition to the temperature and time of digestion, on the concentration and mole ratio of the recovery base. If, during recovery, a high mole ratio is provided for, the entire anatase and rutile content will be transformed to sodium titanate via the solution phase, whereby the eventually incorporated V will also become accessible for the digestion base. The effect of excess alkali on the dissolution of the vanadium content was, therefore, tested with Almásfüzitő bauxite under identical operational conditions (240 °C for 2 hours). The experimental results are presented in Table VII.

The results rendered by sample No 1 cannot be evaluated as, due to the insufficient desilification, the silicic acid left in the solution had greatly distorted the results because of the low bauxite measurements. The soda content of samples No 2 and 3 above the average refers to a complete sodium titanate

Table VII

Digestion data of the Almásfüzitő plant type bauxite, under different measurement mole conditions (base 150 ml)

Slurry analysis, %

	Measurement g	Slurry g	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	$V2O_5$	Na_2O	Ignition losses	V dissolution %
1	5	1,7	13,8	9,6	48,0	6,8		8,4	9,7	
2	10	4,5	17,1	11,1	37,5	5,1	0,15	14,5	13,0	30,4
3	20	9,3	18,4	12,7	37,0	5,1	0,15	13,8	11,3	29,2
4	30	13,7	18,5	13,3	37,4	5,1	0,15	12,8	10,2	29,8
5	43	20,0	19,7	13,2	36,9	5,2	0,15	10,5	10,6	29,1
6	60	33,7	29,6	11,5	31,1	4,5	0,13	12,6	10,9	24,8

Base analysis

	Na_2O g/l	Al_2O_3 g/l	Mole ratio	V_2O_5 g/l	V dissolution %
1	122,6	68,0	2,97	0,0095	42,4
2	128,1	73,0	2,89	0,0189	42,0
3	126,1	89,0	2,33	0,0336	37,5
4	121,6	105,5	1,95	0,049	36,5
5	117,6	129,0	1,49	0,060	31,7
6	110,6	138,0	1,31	0,074	27,6

formation. Thus, the results reveal that, even in the case of a complete transformation of the Ti content of the bauxite, the extent of V dissolution will not change to a significant degree and, therefore, a considerable part of the V content cannot be associated to the Ti minerals, either. A smaller increase observed on the basis of the alkali analysis may be attributed to the greater activity of the OH^- ions.

3.3. Investigations on the correlation of Fe and V contents

Subsequent investigations involved the gradual removal of the Fe content of the bauxite, by acidic treatment, with a simultaneous determination of the V dissolution. Different quantities of average Almásfüzitő and Ajka

bauxites were treated in 100 ml of 10 per cent hydrochloric acid solution for 15 min, under boiling conditions.

Figures 7 and 8 present the percentage quantities of dissolved Fe_2O_3 and V_2O_5. It can clearly be observed that, in the case of an acidic treatment, only after the dissolution of about 1/3 of the Fe content will the V solution start

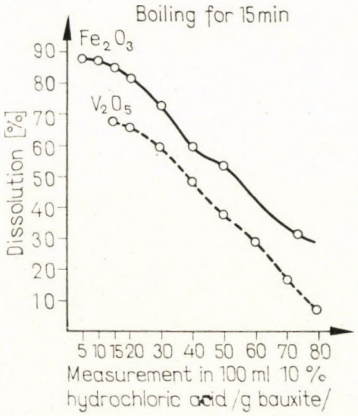


Fig. 7. Dissolution of the iron oxide and vanadium oxide content of Almásfüzitő technological bauxites in the function of hydrochloric acid excess

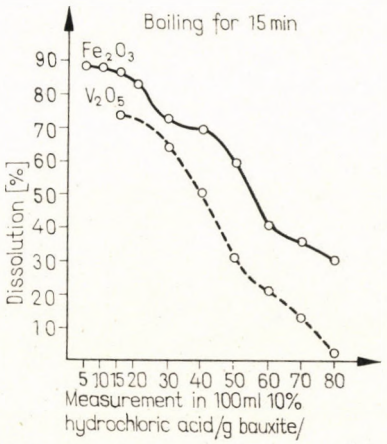


Fig. 8. Dissolution of the iron oxide and vanadium oxide content of Ajka

Table VIII

Fe_2O_3 and V_2O_5 content (%) of acid treated and base digested bauxite slurries

Type	Almásfüzitő		Ajka	
	Fe_2O_3	V_2O_5	Fe_2O_3	V_2O_5
1	28,0	0,123	34,8	0,125
2	12,6	0,044	15,0	0,056
3	11,0	0,038	9,1	0,044
4	7.9	0,021	6,6	0,038

and, with both bauxite types, only about 2/3 to 3/4 of the V content will enter the solution. It follows that by alkaline digestion and acidic treatment the entire V quantity might be dissolved and, for this reason, the bauxites treated with different acids have been digested in aluminate base under the usual conditions. The results are summarized in Table VIII.

Although in alkaline digestion the vanadium dissolution will increase by about 10 per cent in the case of slightly acidified bauxites, and by about 5 per cent if highly deironized bauxites are being dealt with, considerable vanadium recovery could only be achieved by the removal of the iron oxide content. Thus, the next step was to study the role of iron minerals in the bauxite during the dissolution of the vanadium content.

Table IX

Chemical analysis data of plant type bauxites, %

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	V_2O_5	Ignition losses
1. Magyaróvár bauxite	47,6	5,6	25,5	2,7	0,133	15,7
2. Ajka bauxite	47,9	6,3	23,1	2,7	0,116	19,6
3. Almásfüzitő bauxite	48,7	6,9	18,3	2,5	0,100	20,6

Table X

Chemical red mud analysis data of plant type bauxites, %

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	V_2O_5	Na_2O	Ignition losses	V_2O_5 recovery
1. Magyaróvár bauxite	16,8	11,2	50,0	5,5	1,160	9,4	6,9	39,0
2. Ajka bauxite	18,0	11,9	46,4	5,3	0,152	9,9	7,6	35,7
3. Almásfüzitő bauxite	20,6	13,2	37,9	5,1	0,150	10,4	9,7	28,8

Table XI

Fe_2O_3 content phase analysis data of plant type bauxites

Type	Magyaróvár	Ajka	Almásfüzitő
	bauxite		
Goethite (FeOOH)	5,5	5,5	9,3
Hematite (Fe_2O_3)	19,4	17,6	9,0
Total iron (Fe_2O_3)	25,5	23,1	18,3

The chemical analysis data of the bauxites obtained from three Hungarian alumina plants are presented in Table IX. Table X contains the red mud analysis data collected during bauxite digestion, and the vanadium recovery values. Table XI shows the quantitative data of the iron minerals of bauxites,

while Table XII presents the Fe_2O_3 to V_2O_5 content ratio of the various bauxites, the V_2O_5 quantity dissolved when processing 1 ton of bauxite, and the ratio of hematite content to the dissolved V_2O_5 quantity.

In the bauxites tested, the close correlation between iron and vanadium contents can clearly be seen, whereas the quantity of dissolved vanadium may be considered, on the basis of the few experiments completed, as proportional to the hematite content of the bauxites.

Table XII

Ratio of vanadium dissolution and iron mineral phase analysis data

Type	$\frac{Fe_2O_3\%}{V_2O_5\%}$	Dissolved V_2O_5 kg/t	$\frac{\text{Hematite, kg/t}}{\text{Dissolved } V_2O_5\text{, kg/t}}$
1. Magyaróvár bauxite	192	0,52	373
2. Ajka bauxite	199	0,41	430
3. Almásfüzitő bauxite	183	0,28	320

4. Experiments to increase the dissolution of the vanadium content

4.1. Bauxite calcination

Laboratory experiments and operational experiences revealed that calcination would favourably affect the dissolution of vanadium during the Bayer process, in the case of Hungarian bauxites.

In order to determine the numerical correlation, identical quantities of Almásfüzitő bauxite were calcinated at 350, 550, 750, and 1000 °C, in each case for two hours. After measuring the reduction in weight, the bauxite samples were digested in identical composition and quantity aluminate base media, at a temperature of 240 °C, for 2 hours.

The recovery values calculated on the basis of the red mud analysis data are presented in Fig. 9.

As against the general opinion, the Al_2O_3 recovery was not impaired by a calcination at 550 °C, because such a reduction could be observed only at 750 and 1000 °C, respectively. Since the V dissolution was gradually increased with an increased temperature, the effect of the calcination period was tested but, according to the experiences gained, not even a 24-hour calcination period would modify the dissolution results to a significant degree at the given temperature.

To study the phase transformations during calcination, the X-ray diffractograms of the bauxites tested, and their red mud, were plotted as presented in Fig. 10.

These reveal that, of the aluminum oxide hydrates, the hydrargillite peak disappears at 350 °C, while the böhmite line cannot be seen in the calcinated sample at 550 °C. Among the iron minerals, the goethite peak gradually disappears before 550 °C, while that of the hematite will increase, although not to the expected degree which might be reached if the goethite transforma-

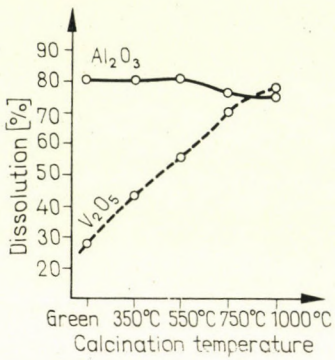


Fig. 9. Variation of AL_2O_3 and V_2O_5 dissolution in Almásfüzitő technological bauxites calcinated at different temperatures during digestion

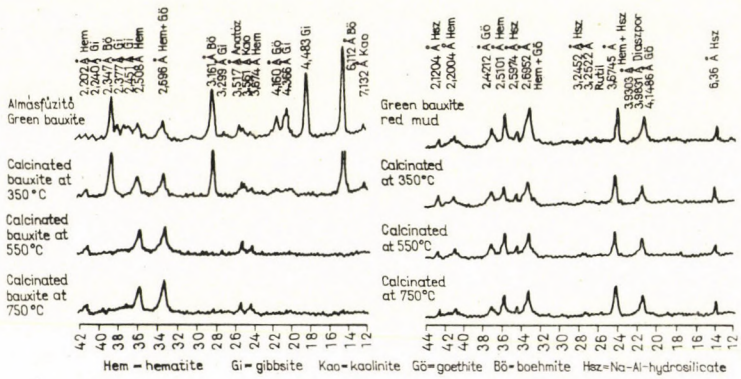


Fig. 10. X ray diffractogram of raw and calcinated technolohical bauxites and their red muds from Almásfüzitő

tion into hematite were completed. The X-ray diffractograms exhibiting uniform goethite peaks up to 750 °C even in the case of calcinated bauxite red mud clearly show that the transformation had not been completed to reach the hematite stage. This refers unequivocally to the decomposition of the mineral structures containing bonded water during calcination, because of the loss of water, when the lattice structure will lose its stability, rearrangement will start, but this process will not be completed at that temperature,

so the majority of the goethite will be re-transformed by water uptake during digestion. The solubility of aluminum minerals similarly leads to conclusions on the development of instable lattice structures as the γ and α Al_2O_3, difficult to dissolve, will not be produced in considerable quantities at the temperatures tested.

SOLYMÁR, K. [16] proved that in the Hungarian bauxites goethite contained a considerable quantity of aluminum built into the lattice through isomorphous substitution which, upon digestion, could not become accessible for the base. Aluminum can be incorporated by the hematite lattice as well, although only in a much smaller quantity. Thus the increased Al_2O_3 recovery can obviously be explained by the lattice rearrangement action of calcination.

4.2. Digestion at an elevated temperature

The structural relaxation of the iron minerals, and the transformation of goethite can be performed according to our earlier investigations not only by thermal but also by hydrothermal treatment [17]. Depending on the concentration and mole ratio of the recovery base, the transformation will be completed within 1 or 2 hours at a temperature of 280÷320 °C. This is why the extent of V dissolution was studied in the course of elevated temperature digestion.

Almásfüzitő and Ajka bauxites were digested at 308 °C for 1,5 hours, in a 4 mole ratio aluminate base containing 200 g/lit Na_2O_2. The red mud analysis data are presented in Table XIII.

Table XIII

Slurry analysis data of plant type bauxites digested at an elevated temperature

Type	Measure-ment	Slurry	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	Na_2O	V_2O_5	Ignition losses
Almásfüzitő bauxite	43	18,5	17,6	15,5	42,0	6,0	11,7	0,08	4,7
Ajka bauxite	43	19,0	16,1	13,9	48,6	5,6	11,1	0,14	4,8

The Al_2O_3 and V_2O_5 recoveries calculated on the basis of the iron oxide content were 84,2, 66,6, and 84,1, 42,6 per cent, respectively, which confirms our assumption since, as was expected, the V dissolution will increase from the higher goethite content Almásfüzitő bauxite. The greater than usual Al_2O_3 recoveries can also be explained by goethite decomposition.

4.3. Oxidizing additive experiments to increase vanadium dissolution

In order to reproduce literary data, experiments involving Almásfüzitő, Magyaróvár, and Ajka average bauxite types were conducted, in such a manner as to feed the different oxidizing agents into the slurries prepared for digestion (150 ml base, 43 g bauxite), then the extent of vanadium dissolution was measured after a digestion of 2 hours at a temperature of 240 °C. The analysis data of the bauxites and their red mud products are presented in Table XIV. According to the experimental results, the oxidizing agents added even in great quantities to the slurry prepared for digestion would not increase vanadium dissolution significantly or beyond the analysis error limit, only the $K_2S_2O_8$ additive brought about a slight V recovery increase from the Almásfüzitő bauxite.

5. Evaluation of the experimental results

On the basis of the test results concerning the appearance, distribution, and alkaline solubility of the vanadium content of Hungarian bauxites, it may be established that

— the vanadium distribution in these bauxites is statistically uniform, and no independent vanadium mineral or local concentration can be detected;

— there is a close correlation between the iron and vanadium content, respectively, both in macro- and microdimensions;

— a greater part of the vanadium cannot be in connection with either the organic matter or the titanium minerals;

— the muscovite, tourmaline, kyanite, garnet, apatite, zircon, and chlorite minerals of the bauxites may contain vanadium, but the quantity is rather small in the samples tested;

— in the Bayer type digestion of bauxites the quantity of dissolved vanadium can be considered as proportional to the hematite content;

— by increasing the temperature of digestion to 300÷320 °C, vanadium dissolution from goethite bauxites can be considerably increased;

— the addition of oxidizing agents to the digestion base does not affect vanadium solubility;

— bauxite calcination will significantly increase the alkaline solubility of vanadium;

— complete vanadium recovery is feasible only by the dissolution of of the iron oxide content.

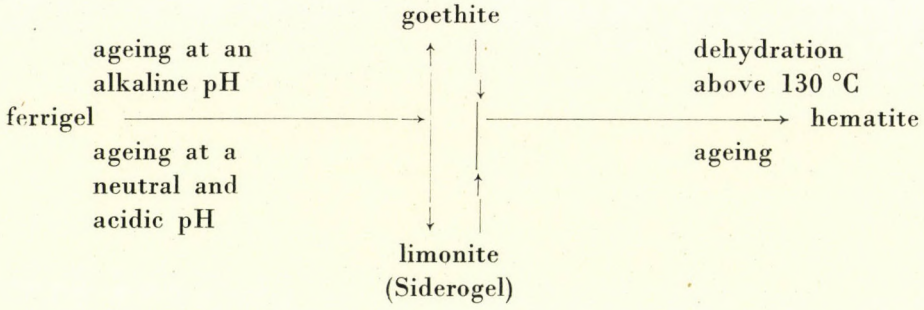
On the basis of these findings, a conclusion on the appearance of vanadium may be arrived at, according to which vanadium had been present at the sedimentation of the material concerned as early as during the initial stage

Table XIV

The effect of oxidizing additives on V solubility

Type	Al_2O_3	SiO_2	Fe_2O_3	TiO_2	Na_2O	V_2O_5	Ignition losses	V_2O_5 recovery, %
Almásfüzitő technological bauxite	48,7	6,5	17,9	2,5		0,106	21,0	
„ digested without additives	17,8	13,5	37,6	5,5	11,9	0,13	10,1	41,2
„ digested with 3 ml Hypo detergent	18,4	13,4	37,6	5,6	11,8	0,13	9,8	41,0
„ digested with 0,3 g Na_2O_2 detergent	17,9	13,3	37,5	5,6	11,8	0,13	9,8	41,3
„ digested with 0,3 g $K_2S_2O_8$ detergent	18,0	13,1	35,9	5,6	12,5	0,1	10,1	52,4
„ digested with 2,5 ml H_2O_2 detergent	15,0	14,1	40,9	5,4	11,5	0,124	8,7	45,4
„ digested with 5,0 ml H_2O_2 detergent	16,3	14,7	39,6	5,3	12,0	0,118	8,3	46,1
„ digested with 7,5 ml H_2O_2 detergent	16,1	14,6	40,6	5,3	12,0	0,132	8,3	41,4
„ digested with 10,0 ml H_2O_2 detergent	16,6	14,3	39,9	5,3	12,0	0,137	8,4	38,2
Magyaróvár technological bauxite	47,9	5,5	26,5	2,9	0	0,13	15,7	
„ digested without additives	12,5	9,7	50,0	4,9	9,6	0,137	8,1	45,0
„ digested with 3 ml Hypo detergent	11,7	10,0	50,7	5,5	9,4	0,129	7,3	48,8
„ digested with 0,3 g Na_2O_2 detergent	13,0	10,0	50,2	5,2	9,4	0,129	7,9	48,9
„ digested with 0,3 g $K_2S_2O_8$ detergent	13,5	10,0	49,2	5,2	9,6	0,133	7,9	46,1
Ajka technological bauxite	47,9	6,3	23,1	2,9		0,116	16,3	
„ digested without additives	13,3	13,6	48,7	5,8	10,5	0,11	7,3	55,0
„ digested with 1 g $NaClO_3$ detergent	13,0	13,4	48,0	5,8	10,3	0,11	7,3	54,4
„ digested with 1 g $K_2S_2O_8$ detergent	13,3	13,9	48,0	5,8	10,5	0,10	5,4	59,1
„ digested with 5 ml Hypo detergent	13,5	13,6	51,1	5,8	10,6	0,13	6.3	48,6

of bauxite formation, and has most likely been precipitated together with the ferrigel which then transformed itself during the bauxite formation. According to BÁRDOSSY [8], after SCHEFFER, WELTHE and LUDWIEG, this transformation is as follows, depending on the pH variation:



In Hungary, the formation of sedimentation and bauxite took place in a highly oxidizing medium, thus the initial iron content could have been represented entirely by ferrigel. This, then, has undergone ageing at a neutral pH, whereafter goethite was formed at an alkaline pH. The formation of these two minerals varied during the bauxite formation with the fluctuation of the pH. Limonite, however, has been transformed into hematite at a relatively rapid rate through the loss of water, whereas goethite was transformed in nature into hematite only at a much slower rate. Quantitatively, the vanadium content of the original gel could be embedded into the goethite but, at a neutral and acidic pH, limonite was formed and crystallized into hematite at a relatively rapid rate again; since the lattice structure of the latter was much more compact, a greater part of the vanadium was displaced from the hematite lattice into the cracks and over the surface of the crystal thus produced, in a very fine distribution. This vanadium may produce various crystals by further oxidation or weathering (montroseite, doloreseite, duttonite, corvusite, etc.) or, with other elements, it may create certain minerals (hewettite, nonalite, etc.), or again, it can be incorporated by other minerals produced during bauxite formation (pyrite, rutile, anatase, muscovite, chlorite, etc.).

The vanadium quantity displaced from the lattice during the re-crystallization of the ferrigel must be proportional to the hematite content, if it is assumed that the total quantity of the vanadium originally present in the gel could be embedded into the new crystal in the course of the goethite transformation, and only a small part could be incorporated by the hematite structure.

Accordingly, the causes of only a partial dissolution of the vanadium in processing Hungarian bauxites with the Bayer technique are represented most likely by the fact that a considerable part of the vanadium content in these bauxites is present in the form of isomorphous contaminants of iron minerals (mainly goethite) and, therefore, it is not accessible to the digestion base under operational conditions. In other words, under the usual digestion conditions only that part of the vanadium will be dissolved which is present in the

bauxite in the form of an alkali soluble compound, or the isomorphous constituent of a bauxite component which itself will be dissolved during digestion.

An increased dissolution can only be expected by the thermal or hydrothermal decomposition of the goethite structure, or through its relaxation.

Acknowledgement

Authors express their gratitude to Dr. György BÁRDOSSY and Mr. Károly SOLYMÁR for their valuable advice, and the supervision of the manuscript.

REFERENCES

1. An Approximate Survey of the Long-Range Development of Vanadium Requirements in the Hungarian National Economy, and the Possibilities to Meet this Demand, with Respect to Domestic Raw Material Sources, mainly our Bauxite Stock. OMFB study, 1963.
2. Handbook of Geochemistry II-1. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1969, 23 A 1—7.
3. HAMMER, A. I.: *Ceramic Age.* **65** (1955), 47—50, 7—10, 19—20, **66** (1955), 16—17, 18—19, 28—29, 24—27.
4. Терентьева, К. Ф.: Редкие элементы в бокситах. Москва, Госгеолтехиздат, 1959.
5. Бенеславский, С. И.: Минералогия бокситов. Госгеолтехиздат, 1963.
6. Теняков, В. А.: Геохимия, 1965. 6. стр. 733—737.
7. DUDICH, E.—SIKLÓSSY, L., Mrs.: *Annales Instituti Geologici Publici Hungarici.* **54.** Fasc. 3. Conference on Bauxite Geology, Budapest, 4—8. IX. 1969. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970, pp. 319—345.
8. BÁRDOSSY, GY.: Geochemical Study of Hungarian Bauxites (in Hungarian). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961.
9. IVEKOVITCH, H.: *Bulletin International de l'Académie Yougoslave des Sciences et des Beaux Arts*, Livre 12. Nouvelle Série Zagreb, 1954, pp. 93—96.
10. GEDEON, T.: *Bányászati Lapok* (1954), 88.
11. BOGÁRDI, E.: Aluminate Base Contaminants in Alumina Plants, and their Removal (in Hungarian). Mérnök Továbbképző Intézet, 1955.
12. VERES, I.: *Kohászati Lapok* (1959), 473—476.
13. KLUG, O. et al.: *Fémipari Kutató Intézet Közleményei*, **10** (1971), 45—59.
14. Final Report, Fémipari Kutató Intézet, No. 11—32, 1971.
15. HAZAI, Mrs.—SOLYMÁR, K.: *Bányászati és Kohászati Lapok*, **101** (1968), 187—192.
16. SOLYMÁR, K.: *Bányászati és Kohászati Lapok, Kohászat*, **102** (1969), 454—460.
17. Замбо, Я.: Исследование выщелачивания венгерских бокситов и отстаивания их красных шламов. Диссертация. Москва — 1957.

Ursachen des teilweisen Inlösunggehens des Vanadiumgehalts bei der Verarbeitung der ungarischen Bauxite nach dem Bayer-Verfahren. Auf Grund der einschlägigen Literatur untersuchen die Verfasser der Reihe nach die Erscheinungsformen des Vanadiums in der Natur und erwägen die Möglichkeit ihres Vorkommens in den Bauxiten. Im experimentellen Teil untersuchen sie die Beziehungen zwischen den Komponenten des Bauxits und seinem Vanadiumgehalt, und die Möglichkeiten für die Erhöhung der Lösung des Vanadiums. In Übereinstimmung mit den goechemischen Kenntnissen stellen die Verfasser auf Grund der Untersuchungen fest, daß im Falle der ungarischen Bauxite ein bedeutender Teil des Vanadiumgehalts als isomorphe Verunreinigung der Eisenminerale (innerste Reihe des Goethits) zu finden ist und so unter den üblichen Betriebsbedingungen nicht aufgeschlossen werden kann. Vergrößerung des Inlösungsgehens kann nur auf dem Wege der thermischen oder hydrothermalen Aufschließung, bzw. Lockerung des Goethitgefüges erwartet werden.

Причины частичного растворения содержания ванадия при преработке венгерских бокситов методом Байера *(Я. Замбо, Л. Мольнар)*. На основе литературных сообщений авторы подряд рассматривают формы появления ванадия в природных условиях и взвешивают возможности их существования в отношении бокситов. В экспериментальной части производится исследование связи компонентов бокситов и содержания ванадия, а затем возможностей повышения степени его растворения. На основе экспериментальных данных в согласии с геохимическими сведениями можно установить, что в случае венгерских бокситов значительная часть содержания ванадия пристствует в качестве изоморфной примеси минералов железа (в первую очередь геотит) и, таким образом, при обычных производственных условиях не разлагается. Повышения степени растворения можно ожидать только путем термического или гидротермического разложения или же разрушения геотитной структуры.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 175—194 (1972)

DISCUSSION OF THE BENDING THEORY OF CYLINDRICAL SHELLS OF ORTHOGONALLY ANISOTROPIC STRUCTURAL MATERIAL, BY INTRODUCING THE DISPLACEMENT FUNCTION

L. VARGA*

CAND. ENG. SCI.

[Manuscript received April 16, 1971]

The general bending theory of cylindrical shells of orthogonally anisotropic structural material (e.g. glass reinforced plastic) in the case of edge loads normal to the shell surface is discussed. First, the correlations between internal forces and deformation are explained, then the differential equations of bending are presented. This homogeneous differential equation system is solved by introducing the displacement function. Determination of the displacement function and bending stress state in the case of periodically changing edge loads acting along the generatrix and the great circle is dealt with in detail. On the basis of the relations thus derived, the bending stress state caused by an edge load varying according to an optional function, readily described by the Fourier series, can also be determined. Finally, a numerical example illustrating the root development of the characteristic equation is shown.

Symbols

m = generatrix directional wave number
n = peripheral wave number
s = shell thickness (cm)
u = generatrix directional displacement (cm)
v = peripheral displacement (cm)
w = radial displacement (cm)
x_1 = generatrix directional co-ordinate (cm)
x_2 = peripheral co-ordinate (cm)
x_3 = radial co-ordinate (cm)
$\bar{x}_1 = x_1/R$ = dimensionless co-ordinate related to the generatrix direction
$\bar{x}_2 = x_2/R$ = dimensionless co-ordinate related to the peripheral direction
B_1 = generatrix directional bending stiffness (kp/cm)
B_2 = peripheral bending stiffness (kp/cm)
B_3 = torsional stiffness (kp/cm)
D_1 = generatrix directional elongation stiffness (kp/cm)
D_2 = peripheral elongation stiffness (kp/cm)
D_3 = shear stiffness (kp/cm)
E_1 = generatrix directional Young modulus (kp/cm^2)
E_2 = peripheral Young modulus (kp/cm^2)
E_3 = shear Young modulus (kp/cm^2)
M_1 = generatrix directional specific moment (cmkp/cm)
M_2 = peripheral specific moment (cmkp/cm)
M_3 = torsional specific moment (cmkp/cm)
N_1 = generatrix directional section force (kp/cm)
N_2 = peripheral section force (kp/cm)
N_3 = shear sectional force in the shell plane (kp/cm)
$P_1(\bar{x}_1)$ = edge load normal to the shell surface, and acting along the generatrix (kp/cm)
$P_2(\bar{x}_2)$ = edge load normal to the shell surface, and acting peripherally (kp/cm)
R = curvature radius of the middle surface (cm)

* Dr. L. VARGA, Gábor Á. u. 42, Budapest II., Hungary

Q_1 = sectional force perpendicular to the middle surface, as related to the generatrix direction (kp/cm)
Q_2 = sectional force perpendicular to the middle surface, as related to the periphery (kp/cm)
β_1 = shell constant related to the generatrix direction
β_2 = shell constant related to the periphery
ε_1 = specific elongation in the generatrix direction
ε_2 = peripheral specific elongation
ε_3 = specific angular displacement
η = derivation index
ν_{12}, ν_{21} = Poisson coefficients (the first index refers to the direction of deformation, while the second one to the force direction)
Φ_m = peripheral damping function
ψ_n = generatrix directional damping function
σ_1 = generatrix directional normal stress (kp/cm^2)
σ_2 = peripheral normal stress (kp/cm^2)
σ_3 = shear stress in the shell plane (kp/cm^2)
Further symbols are explained in the text.

1. Introduction

Discussion of the general bending theory of shells of usual (isotropic) structural material can repeatedly be found in literature, see for example FLÜGGE [1] and WLASSOW [2]. Papers dealing with the examination of anisotropic shells can similarly be found, as reviewed by AMBARTSUMIAN [3]. Particular attention is deserved by the papers of AMBARTSUMIAN [4, 5] which contain a detailed discussion of bending anisotropic and orthotropic shells, respectively.

A majority of the papers referred to the present fundamental correlations for the determination of the stress state, and introducing general methods. In practical calculations, these fundamental correlations represent the basis of investigations, but the methods described do not exclude the possibility of further considerations, or the elaboration of more expedient calculation techniques.

By making use of the basic correlations derived for orthotropic shells, glass reinforced plastic shells (pressure vessels, containers, pipelines, etc.) can also be studied which, due to their good corrosion resistance, relatively high strength, and low specific gravity, are increasingly accepted. Because of their strength characteristics, they can be considered as orthotropic materials. Their flexibility properties can be measured or calculated if the elastic properties of both the glass fibre and the plastic, the ratio of components, and the orientation of the reinforcement are known. (See, for example, [6] in the literature cited.) Their determination will not be dealt with here, and the elasticity characteristics of the main trends of orthotropy will be assumed as known.

Orthotropic cylindrical shells will be studied. The principal directions of orthotropy are identical to the generatrix and peripheral directions of the shell here.

In our investigations homogeneous anisotropy will be reckoned with, and the absolute values of the specific deformations caused by tensile or compressive stresses will be regarded as equal, following the Hooke law.

With a cylinder satisfying the conditions specified, the effect of edge loading normal to the surface and local in character will be studied. The function describing the variation of the external load is assumed to be readily expanded to a Fourier series. In order to ensure easy survey, and to simplify the entire description, only one member (m-th or n-th) of the function series will be taken into consideration, as the calculations on the other members can be performed in the same way.

Elaboration of the calculation method adaptable for the determination of the bending stress state produced in the orthotropic cylindrical shell is by introducing the idea of displacement function.

2. Correlations between internal forces and deformations

The relations between the stresses produced in the orthotropic material and the specific deformations in the main stiffness directions may be expressed, according to the Hooke law (and by assuming a planar stress state), in the following form:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_1+\nu_{12}\varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_2+\nu_{21}\varepsilon_1), \qquad (1a-c)$$

$$\sigma_3 = E_3\varepsilon_3 .$$

As is well known, specific deformations can be expressed by middle surface displacements [1]:

$$\varepsilon_1 = \frac{u'}{R} - x_3\frac{w''}{R^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{v'}{R} - \frac{x_3}{R}\frac{w''}{R+x_3} + \frac{w}{R+x_3}, \qquad (3a-c)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{u'}{R+x_3} + \frac{R+x_3}{R^2}v' - \frac{w''}{R}\left(\frac{x_3}{R}+\frac{x_3}{R+x_3}\right).$$

In the above relations, the symbols representing derivation mean

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x_1/R} = \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_1} = (\ )'$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x_2/R} = \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_2} = (\ )^{\cdot}.$$

The co-ordinate system on the middle surface, and the internal forces are illustrated in Fig. 1. With the relations (1a—c) and (2a—c) the functions describing the connection between sectional forces, specific moments and dis-

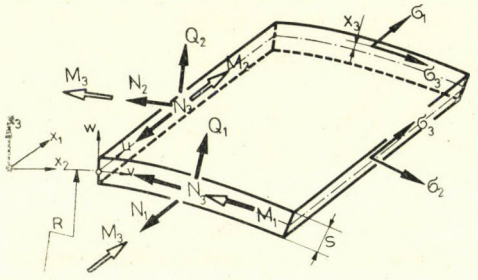


Fig. 1

placements, respectively, can readily be produced and expressed, with the permissible neglections in the case of thin shells, as follows (Fig. 1):

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_1 \left(1+\frac{x_3}{R}\right) dx_3 \approx \frac{D_1}{R}\left[u'+\nu_{12}(v^{\cdot}+w)\right], \\
N_2 &= \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_2\, dx_3 \approx \frac{D_2}{R}\left(\nu_{21}\, u'+v^{\cdot}+w\right), \\
N_3 &= \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 \left(1+\frac{x_3}{R}\right) dx_3 \approx \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3\, dx_3 \approx \frac{D_3}{R}\left(u^{\cdot}+v'\right), \\
M_1 &= -\int_{-s/2}^{s/2} \sigma_1 \left(1+\frac{x_3}{R}\right) x_3\, dx_3 \approx \frac{B_1}{R^2}\left(w''+\nu_{12}\, w^{\cdot\cdot}\right), \\
M_2 &= -\int_{-s/2}^{s/2} \sigma_2\, x_3\, dx_3 \approx \frac{B_2}{R^2}\left(w^{\cdot\cdot}+\nu_{21}\, w''\right), \\
M_3 &= -\int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3 \left(1+\frac{x_3}{R}\right) x_3\, dx_3 \approx -\int_{-s/2}^{s/2} \sigma_3\, x_3\, dx_3 \approx 2\,\frac{B_3}{R^2}\, w^{\cdot}
\end{aligned}
\qquad (3a-f)
$$

where

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{E_1\, s}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}, & B_1 &= \frac{E_1\, s^3}{12(1-\nu_{12}\,\nu_{21})}, \\
D_2 &= \frac{E_2\, s}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}, & B_2 &= \frac{E_2\, s^3}{12(1-\nu_{12}\,\nu_{21})}, \\
D_3 &= E_3\, s, & B_3 &= \frac{E_3\, s^3}{12}.
\end{aligned}
\qquad (4a-f)
$$

In deriving relations (3a—f), the terms multiplied by B_i in the precise expression of the edge forces have been neglected [1]. The error due to this neglection will develop in the function of factor

$$k = \frac{B_i}{R^2 D_i} = \frac{s^2}{12R^2}$$

which is an extremely small value ($R/s \geqq 100$) in the case of thin walls, whereby its neglection, as compared to the unit, is fully justified. Another neglection is to omit the lower order derivatives of the displacements, as against the higher order ones, in the expression of the specific moments [1].

For the thin shells studied, relations of an accuracy acceptable in practice and easy to handle will be obtained after the neglections referred to above.

3. Differential equations of bending

The differential equations describing the stress state of a cylindrical shell can be composed by making use of relations (3a—f), and with the relevant equilibrium equations known. The equilibrium equations of a shell component can be expressed with good approximation, as is well known, in the following form [1]:

$$\begin{aligned} &N_1' + N_3^{\cdot} = 0, \\ &N_2^{\cdot} + N_3' \approx 0, \\ &Q_1' + Q_2^{\cdot} + N_2 = 0, \\ &M_2^{\cdot} + M_3' - RQ_2 = 0, \\ &M_1' + M_3^{\cdot} - RQ_1 = 0. \end{aligned} \qquad (5a—e)$$

In connection with the above equilibrium equations it must be noted that, in Eq. (5b) describing the equilibrium of forces, the very small peripheral component of the relatively small section force Q_2 was omitted and, furthermore, the relation expressing the moment equilibrium around axis x_3 is also missing because, as it is irrelevant, it will have to be forgotten hereafter [1].

In order to express the differential equations describing the stress state, the equilibrium equation (5c) should be rewritten, by making use of Eqs (5d—e), in the following form:

$$RN_2 + M_1'' + M_2^{\cdot\cdot} + 2M_3^{\cdot\prime} = 0. \qquad (5c')$$

Substituting the expressions (3a—f) of the section forces and specific moments into equilibrium equations (5a—c'), and after rearrangement, the differential equations sought for will be readily obtained:

$$u'' + \frac{E_3}{E_1^*} u^{\cdot\cdot} + \left(\frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12}\right) v^{\cdot\prime} + \nu_{12} w' = 0,$$

$$\left(\frac{E_3}{E_2^*}+\nu_{21}\right)u''+v''+\frac{E_3}{E_2^*}v''+w'=0\,, \qquad (6a-c)$$

$$\nu_{21}\,u'+v'+w+k\left[\frac{E_1}{E_2}w''''+2\left(2\frac{E_3}{E_2^*}+\nu_{21}\right)w''''+w^{::}\right]=0$$

where

$$k=\frac{1}{12}\frac{s^2}{R^2}\,, \qquad E_i^*=\frac{E_i}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}\,.$$

The stress state will then be defined by the solution of the homogeneous differential equation system (6a—c).

4. Solution of the differential equations by introducing the displacement function

The relatively simple solution of the homogeneous differential equation system (6a—c) describing the bending stress state produced by local edge load is obtained by introducing the displacement function

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(\bar{x}_1\,,\,\bar{x}_2). \qquad (7)$$

For this purpose, let us first express the displacement of the middle surface, by means of the displacement function. It is to be noted that this function relation can be found in a volume by WLASSOW [2] for the case of isotropic structural materials. This will now be generalized to orthotropic materials, as follows:

$$\begin{aligned} u&=\mathfrak{F}'''-\nu_{21}\,\mathfrak{F}''',\\ v&=-\mathfrak{F}'''-\left(\frac{E_1}{E_3}-\nu_{21}\right)\mathfrak{F}''', \qquad (8a-c)\\ w&=\frac{E_1}{E_2}\,\mathfrak{F}''''+\left(\frac{E_1}{E_3}-2\nu_{21}\right)\mathfrak{F}''''+\mathfrak{F}^{::}\,. \end{aligned}$$

Substituting the (8a—c) expressions of displacement in the (6a—c) equation system, the identity with the first two equations will be arrived at, whereas from the third one the following differential equation will be obtained:

$$\mathfrak{F}^{\mathrm{VIII}}+4n_1\,\mathfrak{F}^{\mathrm{VI}:}+6n_2\,\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}::}+4n_3\,\mathfrak{F}^{\mathrm{II}:::}+n_4\,\mathfrak{F}^{::::}+4\beta_2^4\,\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}}=0\,. \qquad (9)$$

Here the Roman figures above the displacement function indicate the number of derivations with respect to $\bar{x}_1$.

The coefficients can be calculated from the following equations:

$$n_1=\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{E_3}{E_2^*}+\frac{1}{4}\frac{E_1}{E_3}\right),$$

$$n_2 = \frac{E_2}{E_1}\left(1+\frac{1}{3}\frac{E_2}{E_3}\nu_{21}-\frac{4}{3}\frac{E_3}{E_2^*}\nu_{12}-\frac{4}{3}\nu_{12}\nu_{21}\right),$$

$$n_3 = \frac{E_2}{E_1}n_1, \qquad (10a-e)$$

$$n_4 = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2,$$

$$\beta_2 = \sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{R}{s}\right)^2}.$$

Naturally, section forces and specific moments can also be expressed by means of the displacement function. Substituting the (8a—c) displacement expressions into (3a—f), and taking the (5d—e) equilibrium equations into consideration, the following formulae are obtained:

$$N_1 = \frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21})\mathfrak{F}^{\mathrm{II}:},$$

$$N_2 = \frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21})\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}},$$

$$N_3 = -\frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21})\mathfrak{F}^{\mathrm{III}\cdot},$$

$$M_1 = \frac{B_1}{R^2}\left[\frac{E_1}{E_2}\mathfrak{F}^{\mathrm{VI}}+\left(\frac{E_1}{E_3}-\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}:}+\left(1+\nu_{12}\frac{E_1}{E_3}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{II}::}+\nu_{12}\mathfrak{F}^{:::}\right].$$

$$M_2 = \frac{B_1}{R^2}\left[\nu_{21}\mathfrak{F}^{\mathrm{VI}}+\left(1+\nu_{21}\frac{E_2}{E_3}-2\nu_{12}\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}:}+\left(\frac{E_2}{E_3}-\nu_{12}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{II}::}+\frac{E_2}{E_1}\mathfrak{F}^{:::}\right],$$

$$M_3 = 2\frac{B_1}{R^2}(1-\nu_{12}\nu_{21})\left[\frac{E_3}{E_2}\mathfrak{F}^{\mathrm{V}\cdot}+\left(1-2\nu_{21}\frac{E_3}{E_1}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{III}:\cdot}+\frac{E_3}{E_1}\mathfrak{F}^{\mathrm{I}::}\right],$$

$$Q_1 = \frac{B_1}{R^3}\left[\frac{E_1}{E_2}\mathfrak{F}^{\mathrm{VII}}+\left(2\frac{E_3}{E_2^*}+\frac{E_1}{E_3}-\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{V}:}+\right. \qquad (11a-h)$$

$$\left.+\left(3+\nu_{12}\frac{E_1}{E_3}-4\nu_{21}\frac{E_3}{E_1^*}-4\nu_{12}\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{III}::}+\left(2\frac{E_3}{E_1^*}+\nu_{12}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{I}:::}\right],$$

$$Q_2 = \frac{B_1}{R_3}\left[\left(2\frac{E_3}{E_2^*}+\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{VI}\cdot}+\left(3+\nu_{21}\frac{E_2}{E_3}-4\nu_{21}\frac{E_3}{E_1^*}-4\nu_{12}\nu_{21}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{IV}:\cdot}+\right.$$

$$\left.+\left(2\frac{E_3}{E_1^*}+\frac{E_2}{E_3}-\nu_{12}\right)\mathfrak{F}^{\mathrm{II}::\cdot}+\frac{E_2}{E_1}\mathfrak{F}^{::::}\right].$$

The actual form of the displacement function in the sectional force; displacement, and specific moment expressions can be determined by solving the differential equation (9), if the external load is known. The method of this solution, and the determination of the actual form of the displacement function as well as of the stress state will be described below for two fundamental load cases.

5. Determination of the bending stress condition caused by the edge load along the generatrix ($\bar{x}_2$ = constant)

For the sake of easy understanding, let us assume that in our investigations the external edge load normal to the shell surface is described by

$$P_1(\bar{x}_1) = P_m \cos(m\bar{x}_1), \tag{12}$$

(see Fig. 2).

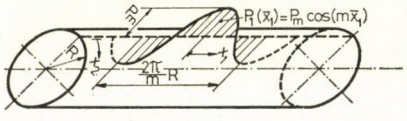


Fig. 2

The displacement function has a form similar to that of the load:

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}_1 = \Phi_m \cos(m\bar{x}_1). \tag{13}$$

The actual form of the

$$\Phi_m = \Phi_m(\bar{x}_2) \tag{14}$$

damping function in (13) is obtained by solving the differential equation (9) which, after the substitution of (13) and the performance of the necessary operations, will assume the following form:

$$[\Phi_m^{::::} - 4m_1 m^2 \Phi_m^{:::} + 6m_2 m^4 \Phi_m^{::} - 4m_3 m^6 \Phi_m^{:} + m_4 m^8 \Phi_m + 4\beta_1^4 m^4 \Phi_m] \cos(m\bar{x}_1) = 0. \tag{15}$$

Here

$$m_1 = \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{1}{4}\frac{E_1}{E_3},$$

$$m_2 = \frac{E_1}{E_2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{E_2}{E_3}\nu_{21} - \frac{4}{3}\frac{E_3}{E_2^*}\nu_{12} - \frac{4}{3}\nu_{12}\nu_{21}\right),$$

$$m_3 = \frac{E_1}{E_2} m_1, \qquad (16a-e)$$

$$m_4 = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2,$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{3(1-\nu_{12}\nu_{21})\frac{E_1}{E_2}\left(\frac{R}{s}\right)^2}.$$

As a solution, let us take

$$\Phi_m = C_m e^{\lambda_m \bar{x}_2} \qquad (17$$

where the coefficients can be calculated from the characteristic equation

$$\lambda_m^8 - 4m_1 m^2 \lambda_m^6 + 6m_2 m^4 \lambda_m^4 - 4m_3 m^6 \lambda_m^2 + m_4 m^8 = -4\beta_1^4 m^4. \qquad (18)$$

The expressions of the conjugate complex root representing the solution are

$$\begin{aligned} \lambda_{m1} &= -\alpha_{m1} + \beta_{m1} i, & \lambda_{m5} &= \alpha_{m1} + \beta_{m1} i, \\ \lambda_{m2} &= -\alpha_{m1} - \beta_{m1} i, & \lambda_{m6} &= \alpha_{m1} - \beta_{m1} i, \\ \lambda_{m3} &= -\alpha_{m2} + \beta_{m2} i, & \lambda_{m7} &= \alpha_{m2} + \beta_{m2} i, \\ \lambda_{m4} &= -\alpha_{m2} - \beta_{m2} i, & \lambda_{m8} &= \alpha_{m2} - \beta_{m2} i. \end{aligned} \qquad (19a-h)$$

As is known, in the case of relatively long cylindrical shells [1] it will suffice to reckon with only the roots under (19a—d). Thus the damping function can be written in the form

$$\Phi_m = C_{m1}\bar{\Phi}_{m1} + C_{m2}\bar{\Phi}_{m2} + C_{m3}\bar{\Phi}_{m3} + C_{m4}\bar{\Phi}_{m4} = \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\bar{\Phi}_{mj}. \qquad (20)$$

the $\bar{\Phi}_{mj}$ functions of which can be calculated from the relations

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{m1} &= e^{-\alpha_{m1}\bar{x}_2}\cos(\beta_{m1}\bar{x}_2), \\ \bar{\Phi}_{m2} &= e^{-\alpha_{m1}\bar{x}_2}\sin(\beta_{m2}\bar{x}_2), \\ \bar{\Phi}_{m3} &= e^{-\alpha_{m2}\bar{x}_2}\cos(\beta_{m2}\bar{x}_2), \\ \bar{\Phi}_{m4} &= e^{-\alpha_{m2}\bar{x}_2}\sin(\beta_{m2}\bar{x}_2). \end{aligned} \qquad (21a-d)$$

Thus the actual form of the displacement function, in the case of the studied edge load, will be

$$\mathfrak{F}_1 = \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\bar{\Phi}_{mj}\cos(m\bar{x}_1). \qquad (22)$$

The integration constants C_{mj} can be determined by taking the boundary conditions into account. This requires first the expression of the displacements, then that of the section forces and the specific moments, by using the displacement function (22).

According to relations (8a—c):

$$u_m = \sum_{j=1}^{4} -C_{mj}(m\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} + \nu_{21}\, m^3\, \bar{\Phi}_{mj}) \sin(m\bar{x}_1),$$

$$v_m = \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\left[\left(\frac{E_1}{E_3} - \nu_{21}\right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} - \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot}\right] \cos(m\bar{x}_1) \qquad (23a-c)$$

$$w_m = \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\left[\frac{E_1}{E_2}\, m^4\, \bar{\Phi}_{mj} - \left(\frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{21}\right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} + \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot}\right] \cos(m\bar{x}_1),$$

and with respect to expressions (11a—h):

$$N_{1m} = \frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} -C_{mj}\, m^2\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} \cos(m\bar{x}_1),$$

$$N_{2m} = \frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\, m^4\, \bar{\Phi}_{mj} \cos(m\bar{x}_1),$$

$$N_{3m} = \frac{D_1}{R}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\, m^3\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} \sin(m\bar{x}_1),$$

$$M_{1m} = \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\left[\nu_{12}\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} - \left(1+\nu_{12}\frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{12}\nu_{21}\right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{E_1}{E_3} - \nu_{21}\right) m^4\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} - \frac{E_1}{E_2}\, m^6\, \bar{\Phi}_{mj}\right] \cos(m\bar{x}_1),$$

$$M_{2m} = \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=4}^{4} C_{mj}\left[\frac{E_2}{E_1}\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} - \left(\frac{E_2}{E_3} - \nu_{12}\right) m^2 \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} + \right.$$

$$\left. + \left(1+\nu_{21}\frac{E_2}{E_3} - 2\nu_{12}\nu_{21}\right) m^4\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot} - \nu_{21}\, m^6\, \bar{\Phi}_{mj}\right] \cos m\bar{x}_1),$$

$$M_{3m} = 2\frac{B_1}{R^2}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\left[-\frac{E_3}{E_1}\, m\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} + \left(1-2\nu_{21}\frac{E_3}{E_1}\right) m^3\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot} - \right.$$

$$\left. - \frac{E_3}{E_2}\, m^5\, \bar{\Phi}_{mj}^{\cdot}\right] \sin(m\bar{x}_1),$$

$$Q_{1m} = \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^{4} C_{mj}\left[-\left(2\frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12}\right) m\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \left(3+\nu_{12}\frac{E_1}{E_3} - 4\nu_{21}\frac{E_3}{E_1^*} - \right.\right.$$

$$-4\nu_{12}\,\nu_{21}\Big)\,m^3\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot}-\left(2\,\frac{E_3}{E_2^*}+\frac{E_1}{E_3}-\nu_{21}\right)m^5\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot}+\frac{E_1}{E_2}\,m^7\,\bar{\Phi}_{mj}\Big]\sin\,(m\bar{x}_1),$$

$$Q_{2m}=\frac{B_1}{R^3}\sum_{j=1}^{4}C_{mj}\left[\frac{E_2}{E_1}\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}-\left(2\,\frac{E_3}{E_1^*}+\frac{E_2}{E_3}-\nu_{12}\right)m^2\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot\cdot}+\right.$$

$$\left.+\left(3+\nu_{21}\,\frac{E_2}{E_3}-4\nu_{21}\,\frac{E_3}{E_1^*}-4\nu_{12}\,\nu_{21}\right)m^4\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot\cdot}-\left(2\,\frac{E_3}{E_2^*}+\nu_{21}\right)m^6\,\bar{\Phi}_{mj}^{\cdot}\right]\cos\,(m\bar{x}_1). \tag{24a–h}$$

Derivatives of the damping functions in the displacement, section force, and specific moment expressions can be calculated as follows:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{m1}^{(\eta)}&=e^{-\alpha_{m1}\bar{x}_2}\,[A_{1\eta}\cos\,(\beta_{m1}\bar{x}_2)+A_{2\eta}\sin\,(\beta_{m1}\bar{x}_2)],\\
\bar{\Phi}_{m2}^{(\eta)}&=e^{-\alpha_{m1}\bar{x}_2}\,[A_{1\eta}\sin\,(\beta_{m1}\bar{x}_2)-A_{2\eta}\cos\,(\beta_{m1}\bar{x}_2)],\\
\bar{\Phi}_{m3}^{(\eta)}&=e^{-\alpha_{m2}\bar{x}_2}\,[A_{3\eta}\cos\,(\beta_{m2}\bar{x}_2)+A_{4\eta}\sin\,(\beta_{m2}\bar{x}_2)],\\
\bar{\Phi}_{m4}^{(\eta)}&=e^{-\alpha_{m2}\bar{x}_2}\,[A_{3\eta}\sin\,(\beta_{m2}\bar{x}_2)-A_{4\eta}\cos\,(\beta_{m2}\bar{x}_2)].
\end{aligned} \tag{25a–d}$$

Coefficients $A_{j\eta}$, on the other hand, lead to the following equations:

$$\begin{aligned}
A_{1\eta}&=-\alpha_{m1}\,A_{1(\eta-1)}+\beta_{m1}\,A_{2(\eta-1)},\\
A_{2\eta}&=-\alpha_{m1}\,A_{2(\eta-1)}-\beta_{m1}\,A_{1(\eta-1)},\\
A_{3\eta}&=-\alpha_{m2}\,A_{3(\eta-1)}+\beta_{m2}\,A_{4(\eta-1)},\\
A_{4\eta}&=-\alpha_{m2}\,A_{4(\eta-1)}-\beta_{m2}\,A_{3(\eta-1)}
\end{aligned} \tag{26a–d}$$

where

$$\begin{aligned}
A_{10}&=A_{30}=1,\\
A_{20}&=A_{40}=0.
\end{aligned} \tag{27a–b}$$

In the case of edge loads ($\bar{x}_2=0$) along the generatrix, the C_{mj} integration constants are defined by the following fitting conditions:

$$\begin{aligned}
&v_m(\bar{x}_1,0)=0,\\
&w_m^{\cdot}(\bar{x}_1,0)=0,\\
&N_{3m}(\bar{x}_1,0)=0,\\
&Q_{2m}(\bar{x}_1,0)=1/2\;P_1(\bar{x}_1).
\end{aligned} \tag{28a–d}$$

Expressing the fitting conditions by means of the displacement function, we obtain

$$\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}C_{mj}\,A_{j1}=0\,,$$

$$\sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j3} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j5} = 0, \qquad (29a-d)$$

$$\sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} C_{mj} A_{j7} = 2\beta_1^4 \frac{R}{s} \frac{P_m}{E_1}.$$

After the determination of the integration constants, we can express the actual form of the displacement function related to the external load under test. Then, with this knowledge, the deformations, section forces, and specific moments (thus stresses) representing the bending stress state can be calculated without any difficulty.

6. Determination of the bending stress state caused by an edge load along the great circle ($\bar{x}_1$ = constant)

Similarly to an edge load along the generatrix, let us assume that the external edge load normal to the shell surface varies according to relation

$$P_2(\bar{x}_2) = P_n \cos(n\bar{x}_2) \qquad (30)$$

(see Fig. 3).
Corresponding to the character of the load, the displacement function can be written as

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}_2 = \Psi_n \cos(n\bar{x}_2). \qquad (31)$$

The actual form of the damping function

$$\Psi_n = \Psi_n(\bar{x}_1) \qquad (32)$$

in the expression (31) can again be obtained by solving the differential equation (9) which, after the substitution of (31) and the performance of the necessary operations, can be rewritten in the following form:

$$\left[\Psi_n^{\mathrm{VIII}} - 4n_1 n^2 \Psi_n^{\mathrm{VI}} + 6n_2 n^4 \Psi_n^{\mathrm{IV}} - 4n_3 n^6 \Psi_n^{\mathrm{II}} + \right.$$
$$\left. + n_4 n^8 \Psi_n + 4\beta_2^4 \Psi_n^{\mathrm{IV}}\right] \cos(n\bar{x}_2) = 0. \qquad (33)$$

Solutions of the differential equation can be written again as

$$\Psi_n = C_n e^{\lambda_n \bar{x}_1} \qquad (34)$$

and the coefficients λ_n may be calculated from the characteristic equation

$$\lambda_n^8 - 4n_1 n^2 \lambda_n^6 + 6n_2 n^4 \lambda_n^4 - 4n_3 n^6 \lambda_n^2 + n_4 n^8 = -4\beta_2^4 \lambda_n^4. \qquad (35)$$

Expressions of the conjugate complex roots representing the solution are

$$\begin{aligned}
\lambda_{n1} &= -\alpha_{n1} + \beta_{n1}i, & \lambda_{n5} &= \alpha_{n1} + \beta_{n1}i,\\
\lambda_{n2} &= -\alpha_{n1} - \beta_{n1}i, & \lambda_{n6} &= \alpha_{n1} - \beta_{n1}i,\\
\lambda_{n3} &= -\alpha_{n2} + \beta_{n2}i, & \lambda_{n7} &= \alpha_{n2} + \beta_{n2}i,\\
\lambda_{n4} &= -\alpha_{n2} - \beta_{n2}i, & \lambda_{n8} &= a_{n2} - \beta_{n2}i.
\end{aligned} \qquad (36a-h)$$

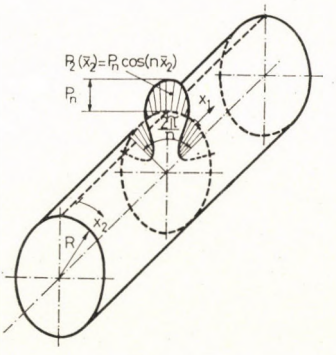


Fig. 3

With the four roots under (36a—d) taken into consideration (since we study relatively long cylindrical shells), the damping function can be rewritten as

$$\Psi_n = C_{n1}\overline{\Psi}_{n1} + C_{n2}\overline{\Psi}_{n2} + C_{n3}\overline{\Psi}_{n3} + C_{n4}\overline{\Psi}_{n4} = \sum_{j=1}^{4} C_{nj}\overline{\Psi}_{nj} \qquad (37)$$

where the functions $\overline{\Psi}_{nj}$ may be calculated from the following equations:

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{n1} &= e^{-\alpha_{n_1}\bar{x}_1}\cos(\beta_{n1}\bar{x}_1),\\
\overline{\Psi}_{n2} &= e^{-\alpha_{n_1}\bar{x}_1}\sin(\beta_{n1}\bar{x}_1),\\
\overline{\Psi}_{n3} &= e^{-\alpha_{n_2}\bar{x}_1}\cos(\beta_{n2}\bar{x}_1),\\
\overline{\Psi}_{n3} &= e^{-\alpha_{n_2}\bar{x}_1}\sin(\beta_{n2}\bar{x}_1).
\end{aligned} \qquad (38a-d)$$

Accordingly, the actual form of the displacement function, in the case of the studied edge load, will be

$$\mathfrak{F}_2 = \sum_{j=1}^{4} C_{nj}\overline{\Psi}_{nj}\cos(n\bar{x}_2). \qquad (39)$$

After substituting (39), the displacements, forces, and moments can be determined according to (8a—c) as follows:

$$u_n = \sum_{j=1}^{3} -C_{nj}(n^2\overline{\Psi}^{\mathrm{I}}_{nj} + \nu_{21}\overline{\Psi}^{\mathrm{III}}_{nj})\cos(n\bar{x}_2),$$

$$v_n = \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[\left(\frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) n \overline{\Psi}_{nj}^{II} - n^3 \overline{\Psi}_{nj} \right] \sin (n\bar{x}_2), \qquad (40a-c)$$

$$w_n = \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[\frac{E_1}{E_2} \overline{\Psi}_{nj}^{IV} - \left(\frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{21} \right) n^2 \overline{\Psi}_{nj}^{II} + n^4 \overline{\Psi}_{nj} \right] \cos (n\bar{x}_2).$$

Furthermore, with respect to (11a—h):

$$N_{1n} = \frac{D_1}{R} (1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} -C_{nj} n^2 \overline{\Psi}_{nj}^{II} \cos (n\bar{x}_2),$$

$$N_{2n} = \frac{D_1}{R} (1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \overline{\Psi}_{nj}^{IV} \cos (n\bar{x}_2),$$

$$N_{3n} = \frac{D_1}{R} (1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{nj} n \overline{\Psi}_{nj}^{III} \sin (n\bar{x}_2), \qquad (41a-h)$$

$$M_{1n} = \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[\frac{E_1}{E_2} \overline{\Psi}_{nj}^{IV} - \left(\frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) n^2 \overline{\Psi}_{nj}^{IV} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 2\nu_{12}\nu_{21} \right) n^4 \overline{\Psi}_{nj}^{II} - \nu_{12} n^6 \overline{\Psi}_{nj} \right] \cos (n\bar{x}_2),$$

$$M_{2n} = \frac{B_1}{R^2} \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[\nu_{21} \overline{\Psi}_{nj}^{VI} - \left(1 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 2\nu_{12}\nu_{21} \right) n^2 \overline{\Psi}_{nj}^{IV} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) n^4 \overline{\Psi}_{nj}^{II} - \frac{E_2}{E_1} n^6 \overline{\Psi}_{nj} \right] \cos (n\bar{x}_2),$$

$$M_{3n} = 2 \frac{B_1}{R^2} (1-\nu_{12}\nu_{21}) \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[-\frac{E_3}{E_2} n \overline{\Psi}_{nj}^{V} + \left(1 - 2\nu_{21} \frac{E_3}{E_1} \right) n^3 \overline{\Psi}_{nj}^{III} - \right.$$

$$\left. - \frac{E_3}{E_1} n^5 \overline{\Psi}_{nj}^{I} \right] \sin (n\bar{x}_2),$$

$$Q_{1n} = \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[\frac{E_1}{E_2} \overline{\Psi}_{nj}^{VII} - \left(2 \frac{E_3}{E_2^*} + \frac{E_1}{E_3} - \nu_{21} \right) n^2 \overline{\Psi}_{nj}^{V} + \right.$$

$$\left. + \left(3 + \nu_{12} \frac{E_1}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - 4\nu_{12}\nu_{21} \right) n^4 \overline{\Psi}_{nj}^{III} - \left(2 \frac{E_3}{E_1^*} + \nu_{12} \right) n^6 \overline{\Psi}_{nj}^{I} \right] \cos (n\bar{x}_2),$$

$$Q_{2n} = \frac{B_1}{R^3} \sum_{j=1}^{4} C_{nj} \left[-\left(2 \frac{E_3}{E_2^*} + \nu_{21} \right) n \overline{\Psi}_{nj}^{VI} + \left(3 + \nu_{21} \frac{E_2}{E_3} - 4\nu_{21} \frac{E_3}{E_1^*} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4\nu_{12}\nu_{21} \right) n^3 \Psi_{nj}^{IV} - \left(2 \frac{E_3}{E_1^*} + \frac{E_2}{E_3} - \nu_{12} \right) n^5 \overline{\Psi}_{nj}^{II} + \frac{E_2}{E_1} n^7 \overline{\Psi}_{nj} \right] \sin (n\bar{x}_2).$$

Derivatives of the damping function, like that in the previous chapter, can be calculated from the following formulae:

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}^{(\eta)}_{n_1} &= e^{-\alpha_{n1}\bar{x}_1}\,[B_{1\eta}\cos(\beta_{n1}\bar{x}_1) + B_{2\eta}\sin(\beta_{n1}\bar{x}_1)],\\
\overline{\Psi}^{(\eta)}_{n_2} &= e^{-\alpha_{n1}\bar{x}_1}\,[B_{1\eta}\sin(\beta_{n1}\bar{x}_1) - B_{2\eta}\cos(\beta_{n1}x_1)],\\
\overline{\Psi}^{(\eta)}_{n_3} &= e^{-\alpha_{n2}\bar{x}_1}\,[B_{3\eta}\cos(\beta_{n2}\bar{x}_1) + B_{4\eta}\sin(\beta_{n2}\bar{x}_1)],\\
\overline{\Psi}^{(\eta)}_{n_4} &= e^{-\alpha_{n2}\bar{x}_1}\,[B_{3\eta}\sin(\beta_{r.2}\bar{x}_1) - B_{4\eta}\cos(\beta_{n2}\bar{x}_1)].
\end{aligned} \tag{42a—d}$$

Relations adaptable for the definition of coefficients $B_{j\eta}$:

$$\begin{aligned}
B_{1\eta} &= -\alpha_{n1}B_{1(\eta-1)} + \beta_{n1}B_{2(\eta-1)},\\
B_{2\eta} &= -\alpha_{n1}B_{2(\eta-1)} - \beta_{n1}B_{1(\eta-1)},\\
B_{3\eta} &= -\alpha_{n2}B_{3(\eta-1)} + \beta_{n2}B_{4(\eta-1)},\\
B_{4\eta} &= -\alpha_{n2}B_{4(\eta-1)} - \beta_{n2}B_{3(\eta-1)}
\end{aligned} \tag{43a—d}$$

where

$$\begin{aligned}
B_{10} &= B_{30} = 1,\\
B_{20} &= B_{40} = 0.
\end{aligned} \tag{44a—b}$$

Integration constants C_{nj} can be determined, in the case of an edge load along the great circle away from the cylinder ends ($\bar{x}_1 = 0$), if the fitting conditions below are satisfied:

$$\begin{aligned}
u_n(0, \bar{x}_2) &= 0,\\
w'_n(0, x_2) &= 0,\\
N_{3n}(0, \bar{x}_2) &= 0,\\
Q_{1n}(0, x_2) &= 1/2\ P_2(\bar{x}_2).
\end{aligned} \tag{45a—d}$$

After the introduction of the displacement function, the fitting conditions may thus be simplified:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}C_{nj}B_{j1} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}C_{nj}B_{j3} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}C_{nj}B_{j5} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}C_{nj}B_{j7} = 2\beta_2^4\frac{R}{s}\frac{P_n}{E_1}.
\end{aligned} \tag{46a—d}$$

Table I

Coefficients of orthotropic materials

n	α_{n_1}	α_{n_2}	β_{n_1}	β_{n_2}
4	14,7989	0,8210	13,4034	0,7435
8	16,7565	3,6098	11,3962	2,4550
12	17,9127	9,7116	6,8028	3,6882
16	19,7994	16,8059	4,8984	4,2341
20	24,3577	21,3951	6,0155	5,2838
24	29,0538	25,8482	7,1292	6,3425
28	33,8071	30,2445	8,2739	7,4019
32	38,5868	34,6148	9,4319	8,4609
36	43,3803	38,9713	10,5967	9,5196
40	48,1815	43,3202	11,7562	10,5780
44	52,9868	47,6649	12,9357	11,6363
48	57,7950	52,0069	14,1075	12,6945
52	62,6051	56,3469	15,2803	13,7527
56	67,4165	60,6856	16,4536	14,8107
60	72,2284	65,0239	17,6272	15,8688
64	77,0409	69,3615	18,8011	16,9268
68	81,8540	73,6986	19,9752	17,9848
72	86,6673	78,0354	21,1495	19,0428
76	91,4809	82,3719	22,3239	20,1008
80	96,2948	86,7082	23,4984	21,1588
84	101,1083	91,0448	24,6728	22,2168
88	105,9225	95,3808	25,8474	23,2748
92	110,7364	99,7171	27,0119	24,3328
96	115,5506	104,0530	28,1966	25,3907
100	120,3649	108,3889	29,3713	26,4487
104	125,1792	112,7247	30,5460	27,5066
108	129,9934	117,0606	31,7207	28,5646
112	134,8082	121,3960	32,8957	29,6225
116	139,6222	125,7322	34,0702	30,6805
120	144,4366	130,0679	35,2450	31,7385
124	149,2508	134,4038	36,4197	32,7964
128	154,0651	138,7394	37,5944	33,8544
132	158,8597	143,0753	38,7692	34,9123
136	163,6941	147,4110	39,9440	35,9703
140	168,5085	151,7468	41,1188	37,0283
144	173,3230	156,0824	42,2936	38,0862

n	α_{n_1}	α_{n_2}	β_{n_1}	β_{n_2}
148	178,1374	160,4182	43,4683	39,1442
152	182,9520	164,7538	44,6432	40,2021
156	187,7661	169,0897	45,8178	41,2601
160	192,5812	173,4249	46,9929	42,3180
164	197,3955	177,7607	48,1676	43,3760
168	202,2093	182,0970	49,3421	44,4340
172	207,0242	186,4322	50,5171	45,4919
176	211,8386	190,7681	51,6919	46,5499
180	216,6534	195,1034	52,8668	47,6078
184	221,4671	199,4398	54,0413	48,6658
188	226,2819	203,7752	55,2162	49,7237
192	231,0962	208,1110	56,3909	50,7817
196	235,9112	212,4462	57,5660	51,8396
200	240,7254	216,7821	58,7407	52,8976

It is to be noted here that the cylinder is considered as of an infinite length so there are no support boundary conditions existing.

Determination of the integration constants means that, essentially, the problem has been solved. Substituting the numerical values of the C_{nj} constants into the expressions of displacements, edge forces, and edge moments, the bending stress state caused by the edge load normal to the shell surface and acting along the great circle will be arrived at.

Numerical example

In the determination of the bending stress state, the most difficult problem is represented by the calculation of the roots of the characteristic equations (18) and (35). Our numerical investigations, therefore, have been concentrated on the determination of the root coefficients.

The calculation involved a glass fibre reinforced polyester tube, with the assumption of an edge load acting along the great circle.

The elasticity characteristics of polyester are:

$$E_M = 40\,000 \text{ kp/cm}^2,$$
$$\nu_M = 0{,}35,$$
$$G_M = \frac{E_M}{2(1+\nu_M)} = 14\,814 \text{ kp/cm}^2,$$

the same for the glass fibres:

$$E_{\ddot{U}} = 730\,000 \text{ kp/cm}^2,$$
$$\nu_{\ddot{U}} = 0{,}22,$$
$$G_{\ddot{U}} = \frac{E_{\ddot{U}}}{2(1+\nu_{\ddot{U}})} = 299\,180 \text{ kp/cm}^2.$$

Table II

Coefficients of isotropic materials

n	α_{n_1}	α_{n_2}	β_{n_1}	β_{n_2}
4	13,5033	0,6492	12,2643	0,5897
8	15,6059	2,7518	10,9272	1,9268
12	18,8772	6,0231	9,7447	3,1092
16	22,6288	9,7748	8,9765	3,8775
20	26,5322	13,6782	8,4815	4,3725
24	30,4883	17,6342	8,1437	4,7103
28	34,4657	21,6116	7,9002	4,9538
32	38,4530	25,5989	7,7168	5,1372
36	42,4452	29,5912	7,5738	5,2802
40	46,4403	33,5862	7,4593	5,3947
44	50,4370	37,5829	7,3656	5,4884
48	54,4347	41,5806	7,2874	5,5666
52	58,4331	45,5790	7,2213	5,6327
56	62,4318	49,5778	7,1645	5,6894
60	66,4309	53,5769	7,1154	5,7386
64	70,4302	57,5762	7,0724	5,7816
68	74,4297	61,5756	7,0344	5,8196
72	78,4293	65,5752	7,0007	5,8533
76	82,4289	69,5749	6,9705	5,8835
80	86,4287	73,5746	6,9433	5,9107
84	90,4284	77,5744	6,9187	5,9352
88	94,4282	81,5742	6,8964	5,9576
92	98,4281	85,5740	6,8760	5,9780
96	102,4279	89,5739	6,8573	5,9967
100	106,4278	93,5738	6,8400	6,0130
104	110,4277	97,5737	6,8242	6,0298
108	114,4277	101,5736	6,8095	6,0445
112	118,4276	105,5736	6,7958	6,0582
116	122,4275	109,5735	6,7831	6,0709
120	126,4275	113,5743	6,7712	6,0828
124	130,4274	117,5734	6,7601	6,0939
128	134,4274	121,5733	6,7497	6,1043
132	138,4274	125,5733	6,7399	6,1141
136	142,4273	129,5733	6,7307	6,1233
140	146,4273	133,5732	6,7220	6,1319
144	150,4273	137,5732	6,7138	6,1401

n	α_{n_1}	α_{n_2}	β_{n_1}	β_{n_2}
148	154,4272	141,5732	6,7061	6,1479
152	158,4272	145,5732	6,6987	6,1552
156	162,4275	149,5731	6,6918	6,1622
160	166,4272	153,5731	6,6852	6,1688
164	170,4272	157,5731	6,6789	6,1751
168	174,4272	161,5731	6,6729	6,1811
172	178,4272	165,5731	6,6671	6,1868
176	182,4271	169,5731	6,6617	6,1923
180	186,4271	173,5731	6,6565	6,1975
184	190,4271	177,5731	6,6515	6,2025
188	194,4271	181,5730	6,6467	6,2073
192	198,4271	185,5730	6,6421	6,2118
196	202,4271	189,5730	6,6377	6,2162
200	206,4271	193,5730	6,6335	6,2205

The elasticity characteristics of the principal directions of orthotropy were calculated [6] by assuming $\omega = 54°45'$ winding angle and a 65 per cent glass fibre content, with the following results:

$E_1 = 102\,526$ kp/cm²,
$E_2 = 195\,904$ kp/cm²,
$E_3 = 125\,487$ kp/cm²,
$\nu_{12} = 0{,}7708$,
$\nu_{21} = 0{,}4034$.

Taking into consideration the above characteristics and the value of $R/s = 100$, the characteristic equation (35) will assume the following form according to (10a—e):

$$\lambda_n^8 - 4{,}934732\, n^2\lambda_n^6 + 3{,}717818\, n^4\lambda_n^4 - 9{,}429139\, n^6\lambda_n^2 + 3{,}651041\, n^8 = \\ = -157999{,}9\, \lambda_n^4.$$

Determination of the roots, respectively, the α_{n1}, α_{n2}, β_{n1} and β_{n2} was by means of an ICT-1905 computer, following the elaboration of a relatively sophisticated program, for wave numbers $n = 4, 8, \ldots, 200$. The results thus obtained are presented in Table I.

For the sake of comparison, the coefficients of an isotropic structural material were similarly calculated, by taking the elasticity characteristics

$$E_1 = E_2 = E,$$
$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0{,}3,$$
$$E_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

into account.

In this case the characteristic equation can be reduced to second degree, whereby the determination of the roots will be greatly simplified [7]. The coefficients thus calculated are shown in Table II.

According to Tables I and II, there is no significant difference to be found between the development of the coefficients calculated for orthotropic and isotropic shells, respectively, and naturally the same applies to root development. Thus, the adaptability of he method described here can be concluded from the numerical investigations conducted for isotropic

shells the literature referred to may be found under [7] Accordingly, for example, even the maximum stresses caused by a constant edge load acting along a unit arc length can be calculated in a relatively simple manner with acceptable accuracy, by taking about 25 terms of the Fourier series into consideration. Thus, on the basis of the above findings, introduction of the displacement function simplifies the investigations on orthotropic shells as well.

REFERENCES

1. Flügge, W.: Stresses in Shells. Springer Verlag, Berlin 1960.
2. Wlassow, S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag, Berlin 1958.
3. Ambartsumian, S.: Some Current Aspects of the Theory of Anisotropic Layered Shells. Applied Mechanics Surveys, Washington DC, 1966.
4. Ambartsumian, S.: On the General Theory of Anisotropic Shells. *Prikl. Mat. Mekh.*, **22** (1958).
5. Ambartsumian, S.—Peshtmaldzhian, D.: On the Theory of Orthotropic Shells and Plates. *Izv. Akad. Nauk. Arm. SSR*, Ser. Fiz. Mat. Nauk. **12**, No 1 (1959).
6. Varga, L.: Elastic Properties of Glass Reinforced Plastics. *Műanyag és Gumi* **8** (1971) (in Hungarian).
7. Varga, L.: Bestimmung der durch Apparatpratzen geweckten Spannungen und Ausbildung der optimalen Pratzenkonstruktion, I—II. *Periodica Polytechnica*, **12** (1968). No. 3. und No. 4.

Behandlung der Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Material mittels Einführung der Verschiebungsfunktion. Gegenstand der Arbeit ist die allgemeine Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Werkstoff (z. B. glasfaserverstärktem Kunststoff) für den Fall von auf die Schalenoberfläche normalen Linienbelastungen. Zuerst werden die Zusammenhänge zwischen den inneren Kräften und den Formänderungen beschrieben und dann werden die Differentialgleichungen der Biegung vorgelegt. Das homogene Differentialgleichungssystem wird durch die Einführung der Verschiebungsfunktion gelöst. Eingehend werden die Berechnung der Verschiebungsfunktion und des Biegespannungszustandes vorgeführt, für den Fall von periodisch wechselnden Linienbelastungen entlang der Erzeugenden und des Leitkreises. Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen kann auch ein solcher Biegespannungszustand berechnet werden, welcher von einer, gemäß einer beliebigen — durch eine Fourierschen Reihe beschreibbaren — Funktion wechselnden Linienbelastung verursacht wird. Zum Schluß veröffentlicht der Verfasser ein Zahlenbeispiel, welches den Verlauf der Wurzeln der charakteristischen Gleichung veranschaulicht.

Трактовка теории изгиба цилиндрических оболочек из ортогонально анизотропного конструкционного материала *(Л. Варга)*. Работа рассматривает общую теорию изгиба цилиндрических оболочек из орготонально анизотропного материала (напр. армированная стекловолокном пластическая масса) в случае нагрузки, прикладываемой к вершине, перпедникулярной к поверхности. Сначала описываются зависимости между внутренними силами и деформациями, а затем сообщается дифференциальное уравнение изгибания. Система гомогенных дифференциальных уравнений решается путем введения функции сдвига. Детально излагается определение функции сдвига и состоямия напряжения изгиба, в случае нагрузок на вершину, действующих по образующей и главному кругу и меняющихся периодически. На основе выведенных зависимостей можно определить состояние напряжения изгиба, вызванное нагрузкой на вершину, меняющейся по произвольной функции, описываемой рядом Фурье. В завершение автор сообщает числовой пример, который в наглядной форме показывает изменение корней характеристического уравнения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 195—207 (1972)

AUFLÖSUNG EUTEKTISCHER PHASEN WÄHREND DES LÖSUNGSGLÜHENS IN GUSSLEGIERUNGEN

A. ROÓSZ*

und

E. G. FUCHS**

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 5. Juli 1971]

Im Gefüge der gegossenen Legierungen sind oft Phasen anwesend, die als Folgen der Kornseigerung erscheinen, das Verarbeiten des Materials erschweren, und die durch ein Lösungsglühen bei entsprechend hoher Temperatur in der Mischkristall-Matrix der Legierung aufgelöst werden können. Es wird eine neue Theorie erörtert, die die Kinetik der Auflösung richtiger beschreibt als die bisherigen Theorien.

1. Einleitung, Zielsetzung

Ein wesentlicher Teil der durch Ausscheidungshärtung vergütbaren Legierungen wird in Blöcke vergossen, aus denen durch spanlose Verformung Halbzeuge (Bleche, Rohre usw.) herzustellen sind. Die bei der Kristallisation auftretenden Seigerungen, und besonders die als Folge einer Kornseigerung erscheinenden zweiten Phasen verhindern oft das unmittelbare Verarbeiten des gegossenen Materials. Die rohen Blöcke müssen deshalb vor dem Walzen, Strangpressen meist geglüht, homogenisiert werden.

Mit den während des Erstarrens und Glühens sich abspielenden Vorgängen befaßt sich heute bereits eine umfangreiche Fachliteratur. Trotzdem kann die Kinetik der Auflösung der unerwünscht im Block vorhandenen, spröden Phasen nicht für entsprechend geklärt betrachtet werden. In der vorliegenden Arbeit sei deshalb ein *neuer Gedankengang* angeführt, mit dessen Hilfe *die Auflösungsvorgänge richtiger beschrieben werden können* als auf Grund der bisherigen Theorien.

2. Phasenverhältnisse des Gußgefüges

Das Gefüge der mit Kornseigerung, das heißt durch Entfallen von Diffusionsvorgängen erstarrten Legierungen kann eine von drei charakteristischen Gefügearten aufweisen [1, 2]. Vom Standpunkt unserer Überlegun-

* A. Roósz, T. U. für Schwerindustrie, Lehrstuhl Metallkunde, Miskolc (Ungarn)
** E. G. Fuchs, Eisenforschungsinstitut, Budapest

gen muß nur der Gefügetyp III beachtet werden. Solche Legierungen bestehen im gegossenen Zustand aus geseigerten Mischkristallen und aus einer zweiten Phase, wobei die zweite Phase infolge eines bei genügend hoher Temperatur durchgeführten Glühens im Mischkristall restlos aufgelöst werden kann.

Bild 1 zeigt das Prinzip des Zustandsschaubildes von eutektischen Systemen; die Löslichkeit des Legierungselementes ist stark temperaturab-

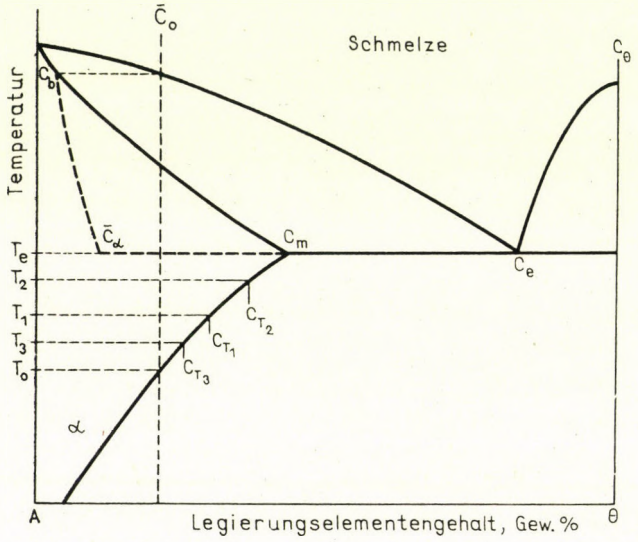


Bild 1. Eutektisches Zustandsdiagramm mit den verwendeten Bezeichnungen

hängig. Die beispielsweise durch den durchschnittlichen Legierungselementengehalt $\bar{c}_0$ charakterisierte Legierung ist deshalb durch Ausscheidungshärtung vergütbar. Die Konzentrationen c_{T_1}, c_{T_2}, ... bedeuten das Lösevermögen des Mischkristalles bei den Temperaturen T_1, T_2, ... usw.

Die genannte Legierung beginnt im Sinne des Zustandsschaubildes, bei Erreichen der Liquidus-Temperatur, mit dem Entstehen von Mischkristall-Dendriten zu kristallisieren. Der Gehalt c_b an Legierungselementen ist hier noch gering. Bei sinkender Temperatur werden weitere Schichten ausgeschieden, indem an den Kristallisationsfronten die Zusammensetzungen der jeweiligen Solidus- bzw. Liquiduslinie entsprechen. Bei Erreichen der eutektischen Temperatur T_e ist also am Rande der Dendritenäste, in den zuletzt erstarrten Mischkristallteilen, der Legierungselementengehalt c_m. Der durchschnittliche Legierungselementengehalt der α-Dendrite ist dagegen $\bar{c}_\alpha$. Die eutektische Zusammensetzung beträgt c_e, die Zusammensetzung der Θ-Phase c_Θ.

In unseren Betrachtungen sei bezüglich der Kristallisation angenommen, daß die Legierung bei vollkommenem Entfallen des Diffusionsausgleiches erstarrt; dies ist auch der Grund dafür, daß $\bar{c}_\alpha < c_m$ ist. Dadurch kann im Gefüge auch ein *Eutektikum* erscheinen, was im Gleichgewichtszustand nicht möglich wäre. Die Menge ξ_{eut} eines solchen Eutektikums kann einfach berechnet werden [4]:

$$\xi_{eut} = \left(\frac{\bar{c}_0}{c_e}\right)^{1/1-k} \tag{1}$$

(Bild 1). Der Wert k drückt die Neigung der Legierung zur Seigerung aus, und zwar als das Verhältnis des Legierungselementengehaltes der beim Erstarren zusammengehörigen kristallinen und flüssigen Phasen. Die Größe von k kann mit guter Annäherung bestimmt werden, indem die Liquidus- bzw. die Soliduslinie des Zustandsschaubildes durch Geraden ersetzt wird, und in die Formel die Konzentrationen der Eutektikalen eingesetzt werden:

$$k = \frac{c_m}{c_e}. \tag{2}$$

Aufgabe des Lösungsglühens ist das Auflösen der nichtgleichgewichtsmäßigen zweiten Phase (oder genauer, des Eutektikums). Die Menge ξ_Θ der Θ-Phase ergibt sich aus

$$\xi_\Theta = \xi_{eut} \frac{c_e - c_m}{c_\Theta - c_m}, \tag{3}$$

und die durchschnittliche Zusammensetzung $\bar{c}_\alpha$ der Mischkristallphase ist

$$\bar{c}_\alpha = \frac{\bar{c}_0 - c_e \cdot \xi_{eut}}{1 - \xi_{eut}}. \tag{4}$$

3. Das verwendete morphologische Modell

Der idealisierte Aufbau einer unseren Voraussetzungen entsprechend erstarrten Legierung ist auf Bild 2 dargestellt. Die hier gut erkennbaren primären und sekundären Dendritenäste betrachten wir als solche, die einheitlich aus Platten bestehen, die die Maße von *l. h. d.* besitzen. Das Eutektikum ist zwischen diesen Platten entartet, gleichmäßig verteilt. Das Auflösen der Θ-Phase kann unter diesen Umständen so beschrieben werden, als ob die Lösung ausschließlich an den Flächen *l. h.* stattfinden würde (platelike morphology). Die konkreten Berechnungen werden durch das besprochene Modell

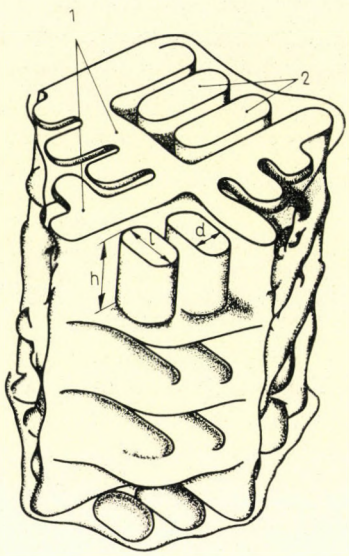


Bild 2. Schematische Struktur eines dendritisch erstarrten Gußstückes [5]: *1* primäre Äste; *2* sekundäre Äste

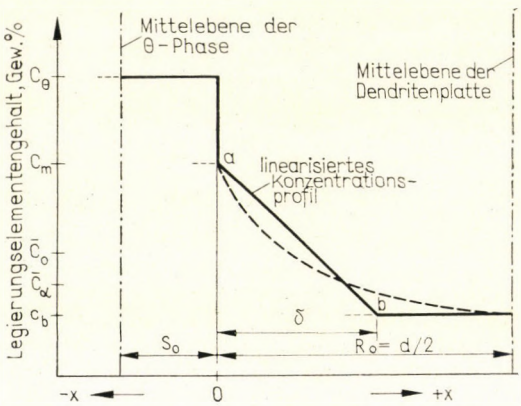


Bild 3. Anfangsverteilung des Legierungselementes entlang einer Dendriten-Plattennormale (Modell)

bedeutend erleichtert: infolge der plattenartigen Anordnung genügt es nämlich, die Verteilung des Legierungselementes nur einer Plattennormalen entlang zu verfolgen.

Bild 3 zeigt die Verteilung der Legierungselemente (das sogenannte ***Konzentrationsprofil***) zwischen den Mittelebenen der Θ-Phase und der Dendritenplatte. Als Abszisse wurde die Plattennormale gewählt, und als Origo

zweckgemäß die anfängliche Berührungsfläche der beiden Phasen betrachtet. Wie ersichtlich, ist der Legierungselementengehalt in der Mitte der Dendritenäste niedrig (c_b), am Rande dagegen entsprechend c_m. Die Zusammensetzung ändert sich innerhalb der Dendrite prinzipiell monoton. In der Wirklichkeit kann diese Verteilung infolge von Unterkühlung bzw. örtlichen Strömungen der Schmelze auch sehr kompliziert sein. Die Verteilung wird im Weiteren trotzdem nur linear angenähert.

Die Breite δ des schiefen Abschnittes der Verteilung wird aus der Überlegung berechnet, daß die Oberfläche unter dem linearisierten Konzentrationsprofil immer proportional zum Legierungselementengehalt der Mischkristallphase sein muß:

$$\delta = d \frac{\bar{c}_\alpha - c_b}{c_m - c_b}. \tag{5}$$

Ähnlich ergibt sich die Dicke S_0 solcher Θ-Phasenpartikel-Hälften, die zu einer $l \cdot h$-Fläche der Dendritenplatten gehören. Der Wert S_0 bedeutet also die halbe Dicke von einer Θ-Phasenschicht, die zwischen zwei benachbarten Dendritenplatten, im Ausgangszustand vorhanden ist:

$$S_0 = \frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\xi_\Theta}{1 - \xi_\Theta}. \tag{6}$$

In (6) symbolisiert ϱ_α die Dichte des α-Mischkristalles und ϱ_Θ die Dichte der Θ-Phase.

4. Der Lösevorgang

4.1 *Allgemeine Überlegungen*

Die anfängliche Verteilung des Legierungselementes wurde an Hand von Bild 3 charakterisiert. Nehmen wir nun an, daß ein isothermes Lösungsglühen bei der Temperatur T durchgeführt wird (Bild 1). Während des Aufwärmens muß sich die randliche Zusammensetzung des Mischkristalles von c_m auf c_T ändern. Das auf diese Weise, unter stark vereinfachten Bedingungen entstandene, anfängliche Konzentrationsprofil veranschaulicht im Bild 4 der dünnere, kontinuierliche Liniengang.

Während des Glühens wird die anfängliche halbe Stärke S_0 der Θ-Phase mit der Zeit t immer kleiner. Die Dicke des *aufgelösten* Teiles sei mit S bezeichnet (Bild 4a). Die Verteilung des Legierungselementes wird auch weiterhin als linear betrachtet. Infolge des Lösevorganges wandert deshalb der End-

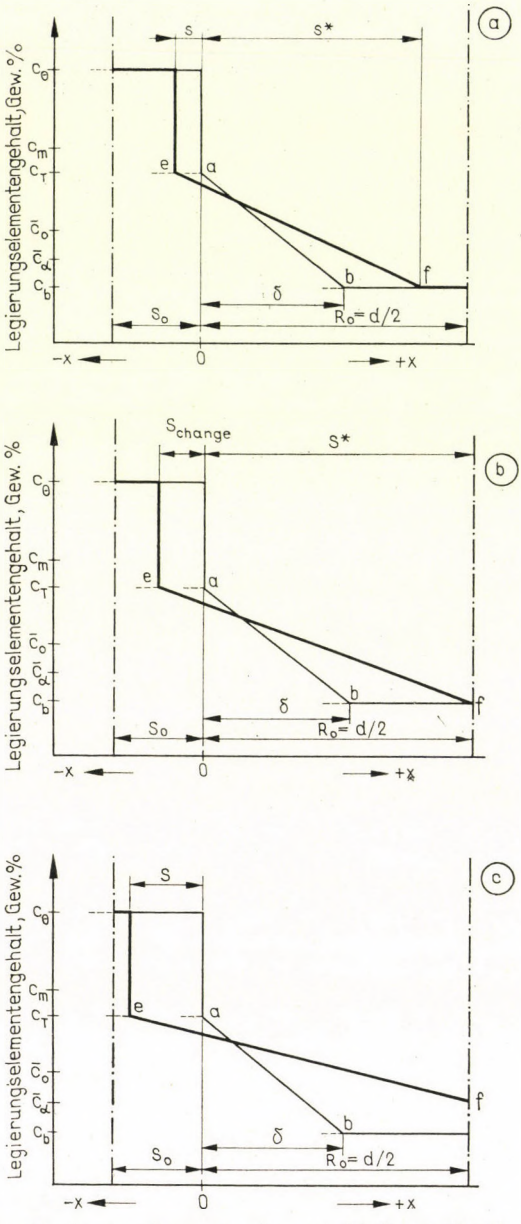


Bild 4. Verteilung des Legierungselementes in verschiedenen Stadien des Auflösungsvorganges

punkt *b* des schiefen Geradeteiles $\overline{ab}$ in das Innere der Dendritenplatte (*f* im Bild 4a), erreicht die Mittelebene (Bild 4b) und bewegt sich dann entlang der mittleren Ebene aufwärts (Bild 4c).

Die Kinetik des Auflösens kann auf Grund des I. FICKschen Gesetzes durch die Differentialgleichung

$$\varrho_\Theta(c_\Theta - c_T)\,dS = D_V \frac{\partial c_\alpha}{\partial x}\,dt \tag{7}$$

gekennzeichnet werden, wo dS die Dicke der während der Zeitspanne dt aufgelösten Schicht und D_V den Koeffizienten der Volumendiffusion bei der Glühtemperatur T bedeuten. Der partielle Differentialquotient $\partial c_\alpha/\partial x$ bedeutet die jeweilige Richtungstangente der auf Bild 4 mit $\overline{ef}$ bezeichneten, schiefen Strecke der linearisierten Verteilungskurve.

Aus dem weiter Gesagten geht hervor, daß die Abhängigkeit der Richtungstangente von der Glühzeit anfangs anders ist, als in der zweiten Etappe der Auflösung. Die beiden Gesetzmäßigkeiten gehen dann ineinander über, wenn das gelöste Legierungselement eben die Mittelebene der Dendritenplatte erreicht (Bild 4b).

4.2 *Erste Etappe der Auflösung*

Bei Beginn der Auflösung kann auf Grund des Gesetzes von der Erhaltung der Masse geschrieben werden, daß

$$\varrho_\Theta \int_{-S}^{0} c_\Theta\,dx - \varrho_\Theta \int_{-S}^{0} c_{\overline{ef}}\,dx = \varrho_\alpha \int_{0}^{S^*} c_{\overline{ef}}\,dx - \varrho_\alpha \int_{0}^{\delta} c_{\overline{ab}}\,dx \tag{8}$$

sei. In (8) bedeutet $c_{\overline{ab}}$ den Legierungselementengehalt im Inneren der Dendrite, bei Beginn der Glühung, entlang der x-Achse:

$$c_{\overline{ab}} = c_T - \frac{c_T - c_b}{\delta} \cdot x, \tag{9}$$

$c_{\overline{ef}}$ denselben Wert im Zeitpunkt t:

$$c_{\overline{ef}} = c_T - \frac{\partial c_\alpha}{\partial x}(x+S) \tag{10}$$

(Bild 4). S^* gibt endlich den Abstand zwischen dem Punkt f und der Grenzfläche *Dendrit—Θ-Phase* an.

Nach Integrieren der Gleichung (8) und Weglassen der vernachlässigbaren Glieder ergibt sich

$$\varrho_\Theta c_\Theta S + \varrho_\Theta \left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial x}\frac{S^2}{2} - c_T S\right) =$$

$$= \varrho_\alpha \left(c_T S^* - \frac{\partial c_\alpha}{\partial x}\frac{S^{*2}}{2} - \frac{\partial c_\alpha}{\partial x} S S^* - \frac{c_T + c_b}{2}\,\delta\right), \tag{11}$$

wobei S^* nach

$$S^* = \frac{c_T - c_b}{\partial c_\alpha / \partial x} - S \tag{12}$$

berechnet werden kann.

Die Gleichung (12) in (11) eingesetzt, erhält man nach Umordnen für den gesuchten Differentialquotienten

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial x} = \frac{\varrho_\alpha^2 (c_T^2 - c_b^2)/2}{\varrho_\Theta c_\Theta S + \varrho_\alpha [(c_T + c_b)/2]\delta} . \tag{13}$$

Setzt man letzteren Ausdruck in (7) ein, und löst man die so entstehende Differentialgleichung, so erhält man:

$$\left(\frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S\right)^2 c_\Theta + \frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S\delta(c_T + c_b) = \frac{D_V}{c_\Theta - c_T}(c_T^2 - c_b^2)t . \tag{14}$$

Schreibt man anstelle von δ die rechte Seite von (5), so erhält man endlich die folgende — *die erste Etappe der Auflösung im allgemeinen beschreibende — implizite Gleichung:*

$$\left(\frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S\right)^2 c_\Theta + \frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S d(\bar{c}_\alpha - c_b) \frac{c_T + c_b}{c_m - c_b} = \frac{D_V}{c_\Theta - c_T}(c_T^2 - c_b^2)t . \tag{15}$$

Praktisch kann noch in Betracht gezogen werden, daß c_b meistens klein ist im Vergleich zu den anderen Konzentrationswerten. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\left(\frac{\varrho_\theta}{\varrho_\alpha} S\right)^2 c_\theta + \frac{\varrho_\theta}{\varrho_\alpha} S d\bar{c}_\alpha \frac{c_T}{c_m} = \frac{D_V}{c_\Theta - c_T} \cdot c_T^2 t . \tag{16}$$

Die Dichte der einzelnen Phasen pflegt nicht sehr unterschiedlich zu sein ($\varrho_\Theta / \varrho_\alpha \approx 1$) und bei den betriebsmäßigen, praktischen Glühtemperaturen gilt meistens auch, daß $c_T \approx c_m$ ist. Die erste Etappe der Auflösung kann also auch durch die vereinfachte, explizite Formel

$$S = \left[\frac{D_V}{c_\Theta (c_\Theta - c_T)} c_T^2 t + \left(\frac{d\bar{c}_\alpha}{2c_\Theta}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{d\bar{c}_\alpha}{2c_\Theta} \tag{17}$$

gekennzeichnet werden.

4.3 *Der Wechselpunkt*

Die erste Etappe der Auflösung dauert — wie erwähnt — so lange, bis das in Lösung gehende Legierungselement die Mittelebene der Dendritenäste nicht erreicht (Bild 4b). Die bis zu diesem Zeitpunkt aufgelöste Phasendicke S_{change} kann durch Integrieren der Gleichung (8) berechnet werden, vorausgesetzt, daß die Bedingung $S^* = d/2$ sowie die auf Grund von Bild 4b unmittelbar aufschreibbare Beziehung

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial x} = \frac{c_T - c_b}{d/2 + S} \tag{18}$$

erfüllt ist. Auf Grund dessen kann weiter geschrieben werden, daß

$$\varrho_\Theta c_\Theta S_{change} + \varrho_\Theta \left(\frac{c_T - c_b}{d/2 + S_{change}} \cdot \frac{S_{change}^2}{2} - c_T S_{change} \right) =$$

$$= \varrho_\alpha \left(c_T \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_T - c_b}{d/2 + S_{change}} - \frac{c_T - c_b}{d/2 + S_{change}} \frac{d}{2} \cdot S_{change} - \frac{c_T + c_b}{2} \delta \right) \tag{19}$$

sei. Da $S_{change} \ll d/2$ ist, erhält man unter gewissen Vernachlässigungen:

$$S_{change} (\varrho_\Theta c_\Theta - \varrho_\Theta c_b) + \varrho_\alpha (c_T - c_b) \frac{S_{change}^2}{d} = \varrho_\alpha \frac{d}{4} (c_T + c_b) - \varrho_\alpha \frac{c_T + c_b}{2} \delta. \tag{20}$$

Das zweite Glied der linken Seite dieser Gleichung ist im allgemeinen bedeutend kleiner als das erste, und kann deshalb vernachlässigt werden. Die Gleichung (5) in die so aufgeschriebene Gleichung (20) eingesetzt, erhält man:

$$S_{change} = \frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta} \frac{d}{c_\Theta - c_b} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{\bar{c}_\alpha - c_b}{c_m - c_b} \right) (c_T + c_b). \tag{21}$$

Es wurde schon erwähnt, daß in der Praxis meistens $c_b \approx 0$ ist. Die Formel (21) kann dadurch auf die Gestalt

$$S_{change} = d \frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{\bar{c}_\alpha}{c_m} \right) \frac{c_T}{c_\Theta} \tag{22}$$

gebracht werden. Wenn noch angenommen wird, daß $\varrho_\alpha / \varrho_\Theta \approx 1$ sein kann sowie, daß bei den betriebsmäßigen, hohen Temperaturen $c_T \approx c_m$ sei, gelangt man zum wenigstens in Näherungsrechnungen gut brauchbaren Ergebnis

$$S_{change} = \frac{d}{2 c_\Theta} \left(\frac{c_T}{2} - \bar{c}_\alpha \right). \tag{23}$$

Den Zeitpunkt t_{change} des Funktionswechsels kann man durch sinngemäßes Einsetzen des Wertes S_{change} in die Gleichungen (15) bzw. (16) ermitteln. Im Falle der meist zulässigen Vernachlässigungen ist es zweckmäßig, die aus den Gleichungen (22) oder (23) berechneten S_{change}-Werte sowie die durch Umordnen der Gleichung (16) erhaltene Beziehung

$$t_{change} = \frac{1}{D_V}\left[\left(\frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S_{change}\right)^2 c_\Theta + \frac{\varrho_\Theta}{\varrho_\alpha} S_{change}\, d\bar{c}_\alpha \frac{c_T}{c_m}\right] \frac{c_\Theta - c_T}{c_T^2} \tag{24}$$

zu verwenden. Besteht weiter, daß $\varrho_\Theta/\varrho_\alpha \approx 1$ und $c_T \approx c_m$ ist, kommt man zum Endergebnis:

$$t_{change} = \frac{1}{D_V}(S_{change}^2 \cdot c_\Theta + S_{change}\, d \cdot \bar{c}_\Theta) \frac{c_\Theta - c_T}{c_T^2}\,. \tag{25}$$

4.4 *Zweite Etappe der Auflösung*

Für die zweite Etappe der Auflösung kann man ebenfalls auf Grund des Gesetzes von der Erhaltung der Masse aufschreiben:

$$\varrho_\Theta \int_{-S}^{S_{change}} c_\Theta\, dx - \varrho_\Theta \int_{-S}^{0} c_{\bar{e}f}\, dx = \varrho_\alpha \int_0^{d/2} c_{\bar{e}f}\, dx - \varrho_\alpha \frac{c_T - \bar{c}_\alpha}{2}\left(\frac{d}{2} + S_{change}\right). \tag{26}$$

Die Gleichung integriert, die Beziehung (10) in Betracht gezogen, und die vernachlässigbaren Glieder weggelassen, ergibt sich:

$$\varrho_\Theta\, c_\Theta (S - S_{change}) - \varrho_\Theta\, c_T\, S =$$

$$= \varrho_\alpha\left[c_T \frac{d}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial c_\alpha}{\partial x}\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{c_T - \bar{c}_\alpha}{2}\left(\frac{d}{2} + S_{change}\right)\right]. \tag{27}$$

Nach Umordnen erhält man — analog zu (13) —:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial x} = -\frac{8}{d^2}\left[\varrho_\Theta (c_\Theta - c_T)\, S - \varrho_\Theta (c_\Theta - c_T)\, S_{change} - \varrho_\alpha \frac{c_T - \bar{c}_\alpha}{2}\frac{d}{2}\right]. \tag{28}$$

Setzt man diese Gleichung in (7) ein, so erhält man — nach Umordnen und Trennen der Veränderlichen:

$$\frac{dS}{(S - S_{change}) - \frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta}\frac{c_T - \bar{c}_\alpha}{c_\Theta - c_T} \cdot \frac{d}{4}} = -\frac{8}{d^2} D_V \cdot dt\,. \tag{29}$$

Durch Lösen dieser Gleichung erhält man die Formel

$$\ln\left[(S-S_{change})-\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta}\,\frac{c_T-\bar{c}_\alpha}{c_\Theta-c_T}\,\frac{d}{4}\right]-\ln K=-\frac{8}{d^2}\,D_V\,t\,, \tag{30}$$

in der K eine Integrationskonstante ist. Wenn $S = S_{change}$ ist, so ist sinngemäß $t = t_{change}$; diese Daten als Randbedingung behandelt, kann man die Größe von $\ln K$ ermitteln. Setzt man das Ergebnis in (30) ein, so erhält man die gesuchte Beziehung

$$S = S_{change}+\frac{d}{4}\,\frac{\varrho_\alpha}{\varrho_\Theta}\,\frac{c_T-\bar{c}_\alpha}{c_\Theta-c_T}\left\{1-\exp\left[-\frac{8}{d^2}\,D_V(t-t_{change})\right]\right\}, \tag{31}$$

die den Verlauf der *zweiten Etappe der Auflösung beschreibt.* Durch Einführung der im Zusammenhang mit den Gleichungen (16) und (24) besprochenen Vernachlässigungen ergibt sich endlich die vereinfachte Gestalt zu:

$$S = S_{change}+\frac{d}{4}\,\frac{c_T-\bar{c}_\alpha}{c_\Theta-c_T}\left[1-\exp\frac{8}{d^2}\,D_V(t_{change}-t)\right]. \tag{32}$$

5. Darstellung

Die abgeleiteten Beziehungen sind dazu geeignet, den Auflösevorgang von nichtgleichgewichtsmäßigen Phasen des Gußgefüges in Abhängigkeit von der Glühtemperatur und der Glühdauer zu beschreiben. Bild 5 zeigt anschaulich den Verlauf der Kurven bei drei verschiedenen Temperaturen und bei

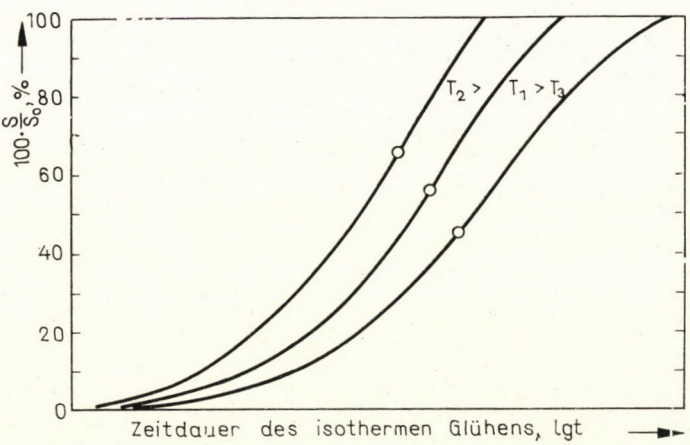


Bild 5. Einfluß der Temperatur auf den Auflösungsvorgang

einer willkürlich gewählten Legierung, deren Dendritenast-Dicke d_1 ist. Die kleinen leeren Kreise auf den Kurven bedeuten die Stelle des Funktionswechsels. — Die mittlere Kurve auf Bild 6 stimmt mit der zur Temperatur T_2 gehörigen Kurve auf Bild 5 überein. Die beiden anderen Kurven des Bildes 6 beziehen sich auf ein gröberes (d_2) und auf ein feineres (d_3) Gußgefüge, als das durch d_1 charakterisierte. Auf Bild 6 ist also eigentlich die Wirkung

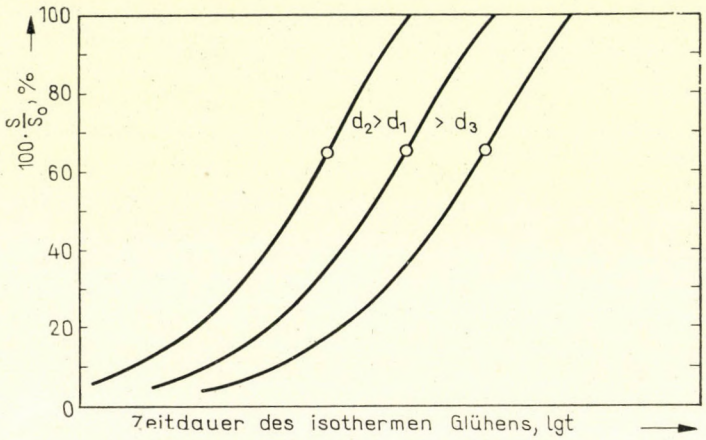


Bild 6. Einfluß der Dicke der Dendritenplatten auf den Auflösungsvorgang

der S_0-Ausgangsdicken der aufzulösenden Phasen in Abhängigkeit vom Zeitbedarf der Auflösung dargestellt.

Die Richtigkeit der in der vorliegenden Arbeit erörterten Theorie kann quantitativ bewiesen werden [6].

SCHRIFTTUM

1. FUCHS, E. G.: Újabb összefüggések az öntött ötvözetek homogenizálódásának jellemzésére (Neuere Beziehung zur Charakterisierung der Homogenisation in Gußlegierungen). *Bányászati és Kohászati Lapok, Öntöde* **101** (1968), 169—173.
2. FUCHS, E. G.: Einige Gesetzmäßigkeiten des Homogenisierungsvorganges in Gusslegierungen. *Acta Techn. Hung.* **65** (1969), 99—112.
3. MASING, G.: Konzentrationsausgleich bei der Homogenisierung von Zonenkristallen. *Z. Metallkunde* **34** (1942), 10—14.
4. SINGH, S. N.—BARDES, B. P.—FLEMINGS, M. C.: Solution Treatment of Cast Al—4.5 pct. Cu-Alloy. *Met. Trans.* **1** (1970), 1383—1388.
5. Ötvözetek izzításakor végbemenő folyamatok kutatása (Forschung der sich beim Glühen von Legierungen abspielenden Vorgänge). Forschungsbericht Nr. 10-2-020/1969 des ungarischen Eisenforschungsinstitutes. Budapest 1970.
6. FUCHS, E. G.—ROÓSZ, A.: Comments on »Solution Treatment of Cast Al—4.5 pct. Cu-Alloy«. *Met. Trans.* **3** (1972), 1019—1020.

Kinetics of the Dissolution of Eutectic Phases in Cast Alloy Structures. In cast alloys there often occur nonequilibrium second phases which hinder the further processing of the material and which, by heating at an adequate elevated temperature, can be dissolved in the basic solid solution. The paper presents a new theory which gives a better description of the kinetics of the dissolution process than the theories known so far.

Кинетика растворения эвтектических фаз в структуре литых сплавов *(А. Роос, Е. Фукс)*. В сплавах литого состояния часто можно встречать такую неравновесную вторую фазу, которая затрудняет переработку материала и которую можно растворить в основном материале твердого раствора путем негрева, выполняемого при достаточно высокой температуре. В работе сообщается такая новая теория, которая правильнее чем известные до сих пор теории описывает кинетику процессов обработки.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 209—216 (1972)

DETERMINATION OF THE OPTIMUM NUMBER OF FILTER PLATES FOR FILTER PRESSES

L. HORVÁTH*

[Manuscript received October 7, 1971]

The paper first summarises the methods of optimisation of filter plate number in case of batch filter presses operating at constant pressure, to be found in technical literature, and further develops them to such forms which can be directly used for operational conditions in industry, too. Finally, those equations have been modified so that they can be used to determine optimum filter plate number for different types of pressure filters.

Symbols

b_1	slope filtrate constant
$b_0 = b_m + b_i$	intercept filtrate constant expressing the initial resistance
b_i	intercept filtrate constant expressing the initial cake resistance
b_m	intercept filtrate constant expressing the resistance of the filtering medium
L	thickness of the filter cake or filter frame (chamber)
M	dry solid throughput
m	ratio of the volume of wash liquid to that of the filtrate
m_p	solid throughput per unit purchase cost of the filter
$n = z - 1$	number of filter plates
P	purchase cost of filter
P_1	purchase cost of the frame structure, and plates, opening and closing structure etc.
P_2	purchase cost of a recessed filter plates
P_3	purchase cost of a filter plate
P_4	purchase cost of a filter frame
P'_4	purchase cost of a filter frame of unit thickness
Q	filtrate throughput
q_p	filtrate throughput per unit purchase cost of the filter
S	dry weight of the filter cake in one chamber
t	main filtration period
t_a	actual filtration period
t_c	cycle time
$t' = t_c - t_{di}$	cycle time less discharge time
t_{ch}	time of changing from filtration to washing
t_d	down-time, i.e. all the time of the cycle time excluding main filtration time and washing time
t_{di}	discharging time of the cake
t'_{di}	discharging time of a chamber (frame) or the time elapsed in the movement of the two consecutive filter plates
t_f	filling time of the filter
$t_i = t_f + t_{pb}$	initial filtration time
t_n	non-filtration time

* L. HORVÁTH, Mining Research Group at the Technical University for Heavy Industries, Miskolc, Hungary

t_{oc} opening and closing time of the filter
t_{pb} time of pressure build-up to constant pressure
t_r time of consolidation or time during which moisture of the cake is reduced
$t_s = t_i + t_r$ secondary filtration time, i.e. all the filtration time excluding main filtration time
t_w washing time
V filtrate volume flowing out of one filter frame (chamber) during main filtration time
V_c filtrate volume from one frame (chamber) during cycle time
V_i filtrate volume from one frame (chamber) during initial filtration time
V_r filtrate volume from one frame (chamber) during consolidation time
$V_s = V_i + V_r$ filtrate volume from one frame (chamber) during secondary filtration time
w solid-filtrate ratio, i.e. ratio of the weight of dry solid material to the filtrate volume
y factor or the ratio of the flow rate of the final filtrate volume to that of the washing liquid
z number of filter chambers (frames).

1. Well-known methods for finding an optimum filter plate number

The thorough study of technical literature on pressure filters reveals the fact that the determination of optimum filter plate number (expressed as Optimisation of Plate Number in the following) in case of batch filter press has not been dealt with to the required extent, though there is an important aspect to be considered in case of large, modern pressure filter plants because it would be simply impossible to achieve minimum filtering cost without due consideration of this fact.

Not long ago, only data based on experience were available for the Optimisation of the Plate Number. Chemical Engineer's Handbook [1] suggests, as an approximate rule, that the number of filter plates in case of plate-and-frame or chamber filters should be equal to the length of the plate expressed in inches. This would, however, give a lower limit and so some higher value could be expected.

The same book gives diagrams from which optimum plate number can be determined in case of plate-and-frame and chamber filters, made out of metal as well as plate-and-frame filters made of wood which assures minimum investment cost of the filtering equipment. In the following, these diagrams have not been dealt with as they are only empirical, because they neither take into consideration the filtrability characteristics of the slurry, nor the down-time (so characteristics of the filter unit), nor the washing conditions of the filter cake. Actually speaking, the author neglected the above factors at the very start.

In the technical literature, HOOTON—THOMAS [2] are the first to deal with the calculation of the optimum filter plate number. The equations for calculations presented by them in their paper [2] can be rewritten with symbols used by the author of this paper as follows. As a start, the investment

cost of chamber filter presses (recessed plate filter presses) can be calculated from

$$P = P_1 + P_2 (z - 1). \tag{1}$$

The solids throughput can be expressed by

$$M = \frac{S \cdot z}{t_c} = \frac{S \cdot z}{t + t_f + t_{oc} + t_w + z \cdot t'_{di}} . \tag{2}$$

The solids throughput per unit purchase cost can be expressed by

$$m_p = \frac{M}{P} = \frac{S \cdot z}{(t + t_f + t_{oc} + t_w + z \cdot t'_{di})(P_1 + z \cdot P_2 - P_2)} = f(z). \tag{3}$$

Differentiating (3) with chamber number as variable and equating it to zero, the optimum chamber number according to paper [2]:

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{(t + t_f + t_{oc} + t_w)(P_1 - P_2)}{t'_{di} \cdot P_2}} . \tag{4}$$

Concerning Eq. (4), the following comments are worth noting:

1. As an approximate modification which would not affect the final result significantly, it would be appropriate to use $(z - 1)$ instead of z in the denominator of (2) because the first chamber gets emptied during the opening time of the end-plate and so does not require separate time.

2. According to the article, optimum filter time is equal to down time, i.e.:

$$t_{opt} = t_d = t_f + t_{oc} + t_{di} . \tag{5}$$

In the Eq. (5), so many factors, e.g. consolidation time, the initial filtrate volume, the initial resistance which are so characteristic of the actual filtering conditions, have been neglected. Thus, Eq. (5) can be only approximate. The exact equations for the determination of optimum filter time have been partly given in this article but have been dealt with in detail in papers [3, 4, 5].

3. In the Eq. (4) for the determination of the optimum chamber number, washing time t_w also occurs but not its optimum value. It does not even differentiate the optimum filter time for the case when the filter cake is washed, in which case the filter time would naturally be different from the case when the filter cake is not washed. Thus, it is not advisable to use Eq. (5) even in the case when the filter cake is washed. The optimisation equation

for the filter cake washing has been given in this article but has been discussed in detail in ref. [3].

Bearing in mind the above discussion, Eqs (2) and (4) have been considered as fundamental ones for the optimisation of the plate number and have further been developed to find more exact relationships.

2. Advanced methods for the optimisation of filter plate number

The actual solids throughput of a batch filter working at constant pressure can be expressed more precisely by the following equation compared to Eq. (2):

$$M = \frac{(V+V_s)wz}{t_c} \tag{6}$$

where:

$$V_s = V_i + V_r,$$
$$t_c = t_a + t_n + t_w,$$
$$t_a = t_i + t + t_r = t + t_s,$$
$$t_n = t_{oc} + t_{di} + t_{ch} = t_{oc} + t_{ch} + (z-1)\,t'_{di},$$
$$t_w = (8mb_1V^2 + 2mb_0V)\,y.$$

As during the calculation of the cycle time, the chamber number is the only variable, other factors can be considered constant and so:

$$t_c = t'_c + (z-1)\,t'_{di} \tag{7}$$

where

$$t'_c = t + t_s + t_{oc} + t_{ch} + t_w\,. \tag{8}$$

In the case of pressure filters with the washing of the filter cake, the optimum filter time and optimum washing time occurring in (8) can be expressed as follows:

$$t_{\text{opt}} = \frac{t_d}{1+8my} + b_o V_{c\,\text{opt}} + 2b_1 V_s^2 - 2b_1 V_s V_{c\,\text{opt}} - b_o V_s \left(\frac{1+2my}{1+8my} + 1\right), \tag{9}$$

$$t_{w\,\text{opt}} = 2my\left[\frac{4t_d}{1+8my} + b_o V_{c\,\text{opt}} + 8b_1 V_s^2 - 8b_1 V_s V_{c\,\text{opt}} - b_o V_s \left(\frac{1+2my}{1+8my} + 1\right)\right] \tag{10}$$

where:

$$t_d = t_s + t_n$$

$$V_{c\,\text{opt}} = V_{\text{opt}} + V_s$$

$$V_{\text{opt}} = -V_s + \sqrt{\frac{t_d}{b_1(1+8my)} + V_s^2 - \frac{1+2my}{1+8my}\,\frac{b_0}{b_1}\,V_s}. \tag{11}$$

Thus, the modified equation for the solids throughput per unit purchase cost of the filter is

$$m_p = \frac{(V+V_s)\, wz}{(t'_c - t'_{di} + z \cdot t'_{di})(P_1 - P_2 + z \cdot P_2)} \,. \tag{12}$$

Starting from Eq. (12) and completeing the differentiation, optimum chamber number:

$$z_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t'_c(P_1-P_2)}{t'_{di}P_2} - \frac{P_1-P_2}{P_2}} \,. \tag{13}$$

Thus, optimum chamber number depends on the cost factors (P_1, P_2) construction of the filter unit (t'_{di}, t_{oc}, t_{ch}), slurry pump used (t_i), properties of the slurry (t, t_s) to be filtered and the washing conditions (t_w) of the filter cake. From the above it can be concluded that it would not be economic to plan a chamber filter press having a fixed optimum filter plate number supplied by the manufacturer, without taking into consideration the properties of the slurry or the factors affecting the washing time.

In the paper [2], on the basis of calculation, generally 60 has been found to be the optimum plate number. The above result can be accepted with the following comments:

First, let us assume that the original slurry has been treated with chemical reagents to give better filtering properties, thus, increasing the optimum filter time which in turn increases z_{opt}. At the same time, higher t_{opt} means thicker filter cake which increases the thickness of the filter chamber. Thus, the length, i.e. the optimum purchase cost of the filter unit increases, due to higher filter plate number, on the one hand, and to the thicker filter chamber (frames), on the other. Due to this, the total volume of the filter chamber is increased compared to that in case of untreated original slurry which means that, using the same slurry pump, the filling time (t_f) would also increase, i.e. z_{opt} would increase, unless a new pump of higher capacity is utilized to reduce the increased filling time.

Secondly, in the paper [2], the filter time occuring in the equations has been determined by the equations valid for ideal conditions only which generally yield a lower than that required by operational conditions. This is also the main reason that the authors advise the selection of a higher filter plate number than the optimum value calculated from the known equations.

Thirdly, the optimum filter plate number would be different in case of filter cake washing compared to that without washing. In the latter case, Eqs (8), (9), (11) can be simplified to the following forms:

$$t'_c = t + t_s + t_{oc} \,, \tag{8a}$$

$$t_{opt} = t_d + b_o V_{c\,opt} + 2b_1 V_s^2 - 2b_1 V_s V_{c\,opt} - 2b_o V_s\,, \tag{9a}$$

$$V_{opt} = -V_s + \sqrt{\frac{t_d}{b_1} + V_s^2 - \frac{b_o}{b_1} V_s}\,. \tag{11a}$$

3. Application of the optimisation of the plate number to different types of filter presses

The above equations are valid only for chamber filter presses for which the cost of recessed filter plate depends insignificantly on the chamber thickness which itself changes in narrow ranges in case of such types. In the following, applicability of optimisation equations will be extended also to the following types of filter presses.

a) The plate-and-frame filters with constant filter cake thicknesses.

b) The plate-and-frame filters whose filter cake thickness can be changed within a given frame.

c) Pressure filters with horizontal filter plates, i.e. closed pressure filters.

In case of plate-and-frame filters with a constant thickness of filter cake, the basic equations for purchase cost and final equations derived from them are, respectively:

$$P = P_1 + P_3\,(z - 1) + LP_4' z, \tag{14}$$

$$Q = \frac{(V + V_s)\,z}{t_c' + t_{di}'\,z}\,, \tag{15}$$

$$q_p = \frac{(V + V_s)\,z}{(t_c' + t_{di}'\,z)\,(P_1 + P_3\,z - P_3 + LP_4'\,z)}\,, \tag{16}$$

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{t_c' P_1}{t_{di}'(P_3 + LP_4')}}\,. \tag{17}$$

In case of plate-and-frame filter presses with a changeable thickness of the cake, the equation takes the following form:

$$P = P_1 + P_3\,(z - 1) + P_4 z, \tag{18}$$

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{t_c' P_1}{t_{di}'(P_3 + P_4)}}\,. \tag{19}$$

Finally, in case of pressure filters with horizontal filter plates, the equations are as follows:

$$P = P_1 + P_2 n, \tag{20}$$

$$Q = \frac{(V+V_s)\,n}{t'_c+t'_{di}\,n}, \tag{21}$$

$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t'_c}{t'_{di}} \cdot \frac{P_1}{P_2}}\ . \tag{22}$$

If in case of filter presses with horizontal filter plates, the filter cake is washed, Eqs (9), (10), (11) for thorough washing, can be written in the following forms adopted in case of simple washing:

$$t_{\text{opt}} = \frac{t_d}{1+2my} + b_o V_{c\,\text{opt}} + 2b_1 V_s^2 - 2b_1 V_s V_{c\,\text{opt}} - b_o V_s \left(\frac{1+my}{1+2my}+1\right), \tag{23}$$

$$t_{w\,\text{opt}} = my\left[\frac{2t_d}{1+2my} + b_o V_{c\,\text{opt}} + 4b_1 V_s^2 - 4b_1 V_s V_{c\,\text{opt}} - b_o V_s \left(\frac{1+my}{1+2my}+1\right)\right], \tag{24}$$

$$V_{\text{opt}} = -V_s + \left[\frac{t_d}{b_1(1+2my)} + V_s^2 - \frac{1+my}{1+2my} \cdot \frac{b_o}{b_1} V_s\right]^{1/2}\ . \tag{25}$$

Within the above types of filter presses itself, there are so many variations in the constructions of filters for which the above equations lose their sense, in many cases, because their emptying may not be based on the hand or mechanical movement of the filter plates or filter frames in sequence. For example, the filter presses with horizontal filter plates are operated in such a way that there is a reserve filter plate assembly for the filter which is replaced once complete with filter cake.

4. Summary and conclusions

During the optimisation of the filter plate number for filter presses, the following two most important factors have to be taken into consideration:

As a basis of planning, it would be of the utmost essentiality to use equations suiting the type of the filter press;

in the so-selected right equations, data specifying the given slurry to be filtered and the given operational conditions of the filter plant have to be used. For example, in case of filter cake washing, suitable optimum filter time and washing time have to be used as constants in the equations for optimum filter plate number.

The optimisation calculations have to be generally carried out in steps by the method of approximation. This is necessarily due to the fact, that the optimum filter time (and washing time also) is a function of the down-time which is in itself a function of the filter plate number. To start with, in the first step, filter time is taken to be equal to the down-time multiplied by a factor depending on the filtrability characteristics of the slurry, as well as type and operating conditions of the filter. This can be used again to calculate filter and washing time and the whole process has to be repeated.

The method discussed above for the optimisation of the filter plate number has its importance only in case of large filtering plants. If one or two filter units are used only, the operating conditions may limit the use of the optimum filter plate number.

REFERENCES

1. PERRY, J. H.: Chemical Engineer's Handbook. McGraw Hill Book Co., New York, London 1963, pp. 19/64 and 19/71.
2. HOOTON, J. A.—THOMAS, C. M.: Filter Presses (including the Overpressure Rotary Drum Filters). *Filtration and Separation* (1968), 238—251.
3. HORVÁTH, L.: Analysis of the Minimum Manufacturing Cost of a Pressure Filtration Process at Constant Pressure. *Publications of the Technical University for Heavy Industries, Miskolc* (Hungary), **28** (1969), 97—111.
4. HORVÁTH, L.: Új optimalizációs egyenletek a présszűrők maximális szűrőteljesítményének számítására. *Bányászati és Kohászati Lapok, Bányászat.* (New Optimization Equations for Determining the Maximum Filter Throughput of Filter Presses. In Hungarian) (1968), 781—785.
5. HORVÁTH, L.: A présszűrők szűrőlapszámának optimálása. *Bányászati és Kohászati Lapok, Kohászat.* (Optimization of the Filter Plate Number for Filter Presses. In Hungarian.) (1969), 425—426.

Bestimmung der optimalen Anzahl der Filterplatten von Filterpressen. Die Arbeit faßt zuerst die im Schrifttum bekannten Methoden für die Optimierung der Plattenzahl von Filterpressen zusammen und entwickelt dann diese Methoden weiter, so daß sie auch den tatsächlichen Betriebsverhältnissen entsprechen. Zum Schluß gibt die Arbeit auch für verschiedene Typen von Filterpressen diejenigen Zusammenhänge bekannt, welche für die Bestimmung der optimalen Filterplattenzahl geeignet sind.

Определение оптимального числа фильтрующих элементов пресс-фильтров *(Л. Хорват)*. В статье сначала обобщаются методы, известные по литературе и служащие для оптимализации числа фильтрующих элементов пресс-фильтров, после чего, усовершенствуя существующие, делает их пригодными и для действительных режимов фильтрации. Наконец, статья также для пресс-фильтров различного типа дает те зависимости, которые пригодны для определения оптимального числа фильтрующих элементов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 217 — 235 (1972)

NETWORK THEORY OF BAR STRUCTURES

D. SINGER*

[Manuscript received August 24, 1971]

The network theoretical basis of bar structure statics was explained. It was demonstrated that, as compared to hitherto matrix techniques, the network concept would permit a deeper formulation of the problems encountered. Diacoptic methods so far hardly employed in bar structure statics was thoroughly dealt with, and the derivation of a fundamental relation in bar network diacoptics was presented. Finally, the relative time saving to be achieved by the application of this method was estimated.

1. Introduction

In the statics of supports, awkward graphoanalytical methods are being gradually replaced by computer techniques based on matrix algebraic considerations. A great advantage of the matrix calculation method is its improving the possibility of surveying the correlations, and its facilitating the composition of computer programs. This is most important particularly in the case of sophisticated support structures.

Introduction of the matrix method to support statics is rather important from other aspects as well, as it will pave the way leading to a view representing the foundation of a problem complex. This new concept which has permitted the correct interpretation of the most diverse physical phenomena in the literature of recent years is called the "theory of discrete systems", "network mechanics", or "physical network theory". Essentially, these theories generalize the regularities and calculation methods of electric networks which is based on the pioneer work of G. KRON [2]. The graph theory and tensor analytical considerations introduced by KRON have released the theory of electric systems from the narrow hydraulic concepts. The formalism thus obtained lends itself to the investigation of other systems as well, including bar structures, without dealing with any "flowing" medium in this case.

Hereafter only physical networks, that is, especially bar systems related to the statics of supports will be dealt with. A physical network means a physical system that can be divided, actually or theoretically, into discrete

* Dr. D. SINGER, Furulya u. 9. Budapest XI., Hungary

elements whose interrelations may be characterized by a graph. In the case of bar systems, the elements are "bars" loaded or stressed by forces and force pairs, that is, solid configurations which have a dimensionof priority as against their other dimensions. The graph of the system describes the topology of the element connections and, therefore, in the case of a bar network this should not be confused with the geometrical configu- ration of that network (which might be changed by the load).

This definition requires a supplementation and, at the same time, some restrictions. The elements may only be represented by the so-called bipole element type, that is, they can be connected to only two junction points of the network. Equations describing the individual elements should have the form

$$e = \mathbf{Z}(i), \qquad i = \mathbf{Y}(e)$$

where i resp. e are through or across variables or vectors.

Without attempting to offer a precise definition of through and across variables, the two quantities can be characterized as variables analogous to electrical current i and voltage e, so their indication was selected to remind us of this analogy. Hence, for the sake of abbreviation, variables i and e will be spoken of instead of through and across variables.

2. Some graph theory correlations

Since the equations of the physical network will have to be derived in a graphic form, let us compose the graph theory correlations required for that purpose [1]. Graph tree means a partial set of branches which do not form a closed loop, anywhere. The links are graph branches completing the tree to closed loops. The graph structure can be characterized in several ways. Hence, for this purpose, the branch node incidence matrix and the loop matrix will be used, under the denomination **A** and **C** matrices.

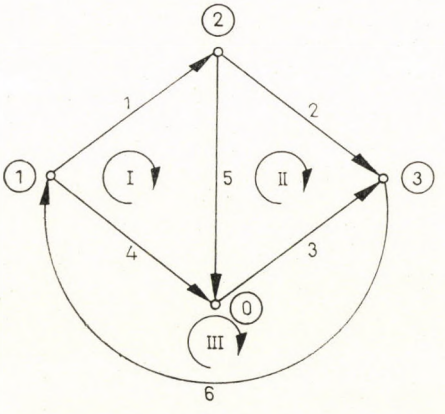
An a_{ij} element of the $\overline{\mathbf{A}}$ matrix can be defined as follows:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if the direction of the branch points away from the node;} \\ -1, & \text{if the direction of the branch points to the node;} \\ 0, & \text{if the branch cannot be connected to the node.} \end{cases}$$

Fig. 1. If the columns corresponding to fixed points are omitted from matrix $\overline{\mathbf{A}}$ (such as the junction points corresponding to the clamps of a support system), a reduced branch node incidence matrix, that is, matrix **A** will be obtained.

A c_{ij} element of matrix **C** may be defined in the following way:

$$c_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{if the direction of the branch is identical with the loop direction;} \\ -1, & \text{if the direction of the branch is opposite with the loop direction;} \\ 0, & \text{if the loop does not contain the branch.} \end{cases}$$



A

	1	2	3
1	1	-1	
2		1	-1
3			-1
4	1		
5		1	
6	-1		1

C

	I	II	III
1	1		
2		1	
3		-1	1
4	-1		1
5	1	-1	
6			1

Fig. 1

The following relations exist between matrices **A** and **C**:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{C} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{C}^*\mathbf{A} = 0. \tag{3}$$

Matrices **A** and **C** can be divided into submatrices corresponding to the graph tree and its links respectively:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_T \\ \mathbf{A}_L \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T \\ \mathbf{C}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

As for definition, $\mathbf{C}_L$ equals unit matrix **U**. Since $\mathbf{A}_T$ is a quadratic and non-singular matrix, the following equation may be written on the basis of [2]:

$$[\mathbf{A}_T^* \mathbf{A}_L^*] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_T^* \mathbf{C}_T + \mathbf{A}_L^* = 0, \tag{5}$$

that is

$$\mathbf{C}_T = -[\mathbf{A}_T^*]^{-1} \mathbf{A}_L^*; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_T \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_T^*)^{-1} \mathbf{A}_L^* \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

3. General equations of the physical networks

For the sake of generality, let us assume that each branch of the network contains e and i sources (that is, certain specified E and I values, respectively), [2], [3], [4]. In this case, a single branch of the network may be illustrated by the scheme shown in Fig. 2. This reveals that branch characteristics e and i are not identical with the across and through variables, respectively, of the two bipole elements which are now indicated by V and J. According to this Figure,

$$V = e + E, \quad \text{resp} \; . \; J = i + I. \tag{7}$$

In linear systems, the bipole element equations are

$$(e + E) = Z(i + I), \quad \text{resp.} \quad (i + I) = Y(e + E). \tag{8}$$

Z and $Y = Z^{-1}$ represent the impedance and admittance, respectively, of the element. On the basis of (8), the totality of the (unconnected) branches of the linear network can be characterized by the vector equations

$$(e + E) = Z(i + I) \tag{9a}$$

and

$$i + I = Y(e + E) \tag{9b}$$

where **Z** and **Y** are the so-called *primitive* impedance and admittance matrices, again respectively, of the network.

In a connected network, beyond (9), two more fundamental relations will exist, according to which in the nodal points the algebraic sum of the i variables will equal zero, just like that of the e variables in the loops, that is,

$$\mathbf{A}^* i = 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{C}^* e = 0. \tag{11}$$

On the basis of (7), these expressions may be written as

$$\mathbf{A}^*(J - I) = 0, \quad \text{that is,} \quad \mathbf{A}^* J = \mathbf{A}^* I = I', \tag{10'}$$

and

$$\mathbf{C}^*(V - E) = 0, \quad \text{that is,} \quad \mathbf{C}^* V = \mathbf{C}^* E = E', \tag{11'}$$

where I′ means the vector of i nodal source variables, while E′ that of the e loop source variables. It is to be noted here that these two relations known as the Kirchoff law of electric networks do not represent a law for the theory

of physical networks, but give the definition of variables i and e. Expressions (9), (10) and (11) which represent the primary mathematical model of the network represent, at the same time, a $2\times b$ number of equations for the determination of the $2\times b$ number of unknown variables, where b is the number of branches.

From the primary mathematical model it is best to derive secondary models where, instead of a $2\times b$ number of equations, only a lower number

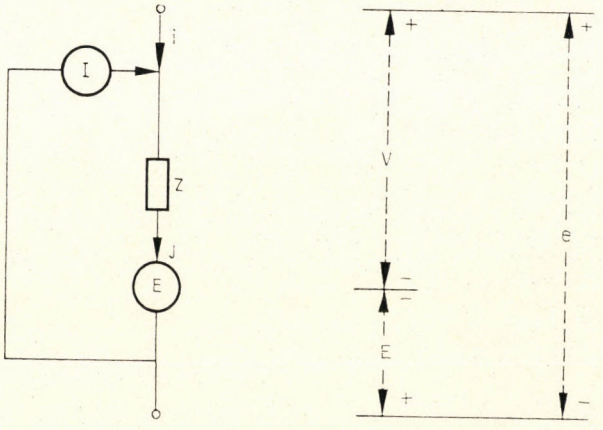


Fig. 2

of equations should be solved simultaneously, while the other unknown variables can be obtained through simple substitution. In a matrix sense this means that for secondary models instead of the $(2b\times 2b)$ matrix only one or more smaller-size matrices will have to be inverted, which represents a considerable machine time saving. Of the secondary models the two most important ones are the so-called nodal and loop models, respectively.

By the rearrangement of (9b) we get the expression

$$\mathbf{Y}e = i+I-\mathbf{Y}\mathbf{E} \tag{12}$$

Multiplying both sides by $\mathbf{A}^*$, and taking into consideration Eq. (10), we obtain

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Y}e = \mathbf{A}^*(I-\mathbf{Y}E). \tag{13}$$

The e variables pertaining to the individual branches, that is, vector e can be expressed by vector e' associated wich the nodal points. As a definition:

$$e = \mathbf{A}e'. \tag{14}$$

Substituting (14) into (13), we obtain

$$\mathbf{A}^* \mathbf{Y}\mathbf{A}(e' = \mathbf{A}^*(I - \mathbf{Y}E) \tag{15}$$

and

$$e' = (\mathbf{A}^* \mathbf{Y}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*(I - \mathbf{Y}E), \tag{16}$$

This is the nodal form of the network equations.

The loop form can be similarly obtained. On the basis of (9a),

$$\mathbf{Z}i = e + (E - \mathbf{Z}I). \tag{17}$$

Multiplying both sides by $\mathbf{C}^*$, and taking (11) into consideration, we get

$$\mathbf{C}^* \mathbf{Z}i = \mathbf{C}^*(E - \mathbf{Z}i), \tag{18}$$

Variables i can be expressed by the i' loop variables. With respect to the definition of loop matrix $\mathbf{C}$, we obtain

$$i = \mathbf{C}i'. \tag{19}$$

By substituting (19) into (18), the loop form sought for will be arrived at:

$$i' = (\mathbf{C}^* \mathbf{Z}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^*(E - \mathbf{Z}I). \tag{20}$$

In the case of the nodal form, the node admittance matrix $\mathbf{Y}_N = \mathbf{A}^*\mathbf{Y}\mathbf{A}$ is of an $(n \times n)$ size, where n is the number of free nodes. The loop impedance matrix in the case of a loop form, that is, $\mathbf{Z}_H = \mathbf{C}^*\mathbf{Z}\mathbf{C}$ has a $[(b - n) \times (b - n)]$ size. The use of (16) and (20), respectively is justified, above all, by the network structure: for moderately looped (tree type) networks the use of a loop, whereas for highly looped systems the employment of the nodal form is advantageous. However, in addition to the number of nodes and branches, in many cases several other aspects may also be reckoned with when seleeting the model.

4. Bar network equations

Equations (9) — (20) apply to cases when the physical network is linear, and the branches can be described by scalar relations (8). It is easy to realize that formally similar equations can be obtained when a single branch is described by a vector relation, as the entire network was earlier. Equations of these hyper-networks differ from (9) — (20) only by the replacement of

vectors e, i, E, I, etc., by the corresponding hypervectors. Matrices **A**, **C**, **Z**, and **Y** are here similarly hypermatrices.

This is the case with bar networks. Between the external and internal forces, and the deformation (displacement) of a single bar the following relation exists ([5], p. 78):

$$\boldsymbol{u}_k^{(\xi,\eta,\zeta)} = \mathbf{B}_{jk}\, \boldsymbol{u}_j^{(\xi,\eta,\zeta)} + \mathbf{F}_{jk}\, \boldsymbol{s}_{jk} + \boldsymbol{t}_{jk} \tag{21}$$

where u_k and u_j are the total branch distortion vectors of bar terminals k and j, respectively, s_{jk} is the induced member force vector, and t_{jk} is the vector of applied branch distortions. $\mathbf{B}_{jk}$ is the transfer matrix, $\mathbf{F}_{jk}$ is the flexibility matrix of the bar, while j and k are the bar terminal indices. The u_k, u_j t_{jk} six-dimensional vector components represent the displacements corresponding to the eigencoordinates ξ, η, ζ of the bar, and the rotations conforming to these axes. The s_{jk} components are the forces or torques exerting their effect in the same direction. Flexibility matrix $\mathbf{F}_{jk}$ has the following form:

$$\mathbf{F}_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EJ_\zeta} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EJ_\zeta} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3EJ} & 0 & \frac{-L^2}{2EJ_\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ_\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{2EJ_\eta} & 0 & \frac{L}{EI_\eta} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EJ_\zeta} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EJ_\zeta} \end{bmatrix} \tag{21}$$

where L is the bar length, A the cross sectional area of the bar, E and G the elasticity and shear moduli, respectively, GJ_ξ the torsional rigidity per unit length, E_η and E_ζ the specific rigidities related to the η and ζ bar axes, respectively.

$$\mathbf{B}_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\mathrm{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

If the

$$\mathbf{B}_{jk}^{(\xi,\eta,\zeta)}\, u_j^{(\xi,\eta,\zeta)} - u_k^{(\xi,\eta,\zeta)} = u_{jk} \tag{23}$$

expression is introduced, Eq. (21) may be written in the following form:

$$[u_{jk}+t_{jk}] = -\mathbf{F}_{jk}\, s_{jk}. \tag{24}$$

If (24) is compared to (8) and (7), formally identical relations are seen. In our case, deformation u_{jk} corresponds to branch characteristic e, and the applied

Table I

General characteristic	Bar system characteristic	Denomination	Co-ordinate system
e	u	total branch distortion	1
e'	u'	nodal displacement	g
E	t	applied branch distortion	1
V	v	induced member distortion	1
i	q	total branch force	1
i'	q'	loop force	g
I	Q	applied branch force	1
J	s	induced member force	1
I'	Q'	applied nodal force	q
Z	$\mathbf{F}$	flexibility matrix	g
Y	$\mathbf{K}$	stiffness matrix	g

branch distortion t_{jk} to the source characteristic E. J corresponds to the induced force vector s_{jk}.

With a strict adherence to the symbols used in (5), *Table I* presents the equivalents of the variables considered in the theory of physical networks as applied to the statics of bar systems (as against the symbols in [4], the nodal variables are indicated here simply by adding a comma to the corresponding branch variable symbols).

Prior to expressing the connected bar network nodal and loop equations on the basis of (16) and (20), two aspects missing from a network consisting of scalar elements must be taken into consideration, namely, that

a) the variables of branch equations (24) are given for local, that is, different co-ordinate systems corresponding to the different branches, whereas Eqs (16) and (20), as well as their hypervector forms apply only to the global co-ordinate system, that is, the one related to the entire network;

b) the nodes do not necessarily transfer every and each component of the force and displacement vectors; for example, in the case of a ball joint connected bar only the component exerting its effect along the axis (ξ local co-ordinate) will be transferred.

Thus, first it should be determined whether the variables to be substituted from *Table I* into Eqs (16) and (20) are defined in the global (related to the entire network) or in a local co-ordinate system (see column 4 of *Table I*); in the latter case the appropriate transformations will have to be performed.

The u_j and u_k terminal displacement vectors of branch j, k will be transformed from the ξ, η, ζ local co-ordinate system into the global co-ordinate system x, y, z in the following manner (5):

$$\boldsymbol{u}_j^{(\xi,\eta,\zeta)} = \mathbf{T}_{jk}\, \boldsymbol{u}_j^{(x,y,z)}$$

where the transformation matrix T_{jk} has the following form:

$$\mathbf{T}_{jk} = \begin{bmatrix} \cos(\xi_{jk}, x) & \cos(\xi_{jk}, y) & \cos(\xi_{jk}, z) & & \\ \cos(\eta_{jk}, x) & \cos(\eta_{jk}, y) & \cos(\eta_{jk}, z) & \mathbf{0} & \\ \cos(\zeta_{jk}, x) & \cos(\zeta_{jk}, y) & \cos(\zeta_{jk}, z) & & \\ & & & \cos(\xi_{jk}, x) & \cos(\xi_{jk}, y) & \cos(\xi_{jk}, z) \\ \mathbf{0} & & & \cos(\eta_{jk}, x) & \cos(\eta_{jk}, y) & \cos(\eta_{jk}, z) \\ & & & \cos(\zeta_{jk}, x) & \cos(\zeta_{jk}, y) & \cos(\zeta_{jk}, z) \end{bmatrix} \tag{25}$$

Expression (23) will be transformed as follows:

$$\boldsymbol{u}_{jk}^{(x,y,z)} = \mathbf{B}_{jk}\, \mathbf{T}_{jk}\, \boldsymbol{u}_j^{(x,y,z)} - \mathbf{T}_{jk}\, \boldsymbol{u}_k^{(x,y,z)} \tag{26}$$

which can be written as

$$\boldsymbol{u}_{jk} = [\boldsymbol{B}_{jk}\, \boldsymbol{T}_{jk} - \boldsymbol{T}_{jk}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{jk}\, \boldsymbol{u}_{jk} \tag{27}$$

where

$$\mathbf{B}_{jk}\, \mathbf{T}_{jk} - \mathbf{T}_{jk} = \mathbf{G}_{jk}, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_{jk}.$$

On the basis of (27) describing the transformation of the individual branch deformations into the global co-ordinate system x, y, z, and according to (14), the following relation can be found between the u branch, and u′ nodal displacements of the entire network:

$$u = \mathbf{G}_r\, \mathbf{P} u' = \mathbf{G}_c\, u' \tag{29}$$

where $\mathbf{G}_r$ is the hypermatrix obtained from matrices $\mathbf{G}_{jk}$ pertaining to the individual branches, $\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_r\mathbf{P}$, where P is the topological matrix expressing the relations of the branches and nodes concerned, or those of their vector components, while u and u′ are the hypervectors of the branch and node deformations, respectively.

It is quite similar as to how the s_{jk} induced member force of the j, k branch, expressed in local co-ordinates, is transformed. The Q_k force exerting its effect in point k will produce, on the basis of the action-reaction principle, a total branch force s_{jk} in that branch. The force produced by the Q_k force acting in point j of the branch is $\mathbf{B}^*_{jk}\, s_{jk}$, where $\mathbf{B}^*_{jk}$ is the transpose of transfer matrix (22). Thus the force equilibrium of the bar is expressed by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^*_{jk} \\ -\mathbf{U} \end{bmatrix} s_{jk} = \begin{bmatrix} Q_j \\ Q_k \end{bmatrix} \tag{30}$$

Since the external forces are generally given in global, whereas the internal forces in local co-ordinates, Eq. (30) must be multiplied by the $\mathbf{T}^*_{jk}$ transformation matrix:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^*_{jk}\,\mathbf{B}^*_{jk} \\ -\mathbf{T}^*_{jk} \end{bmatrix} s_{jk} = \begin{bmatrix} Q_j \\ Q_k \end{bmatrix} \tag{31}$$

Since (10) and (10') apply to the global co-ordinate system, in network the following relations will exist:

$$\mathbf{P}^*\,\mathbf{G}^*_r\, s - \mathbf{P}^*\,\mathbf{G}^*_r\, Q = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{G}_c\, s - \mathbf{G}_c\, Q' = 0 \tag{32}$$

whre

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{P}^*\,\mathbf{G}^*_r \quad ; \quad Q' = \mathbf{P}^*\mathbf{G}^*_r Q \tag{33}$$

q, s, Q' are hypervectors composed of vectors q_{jk}, s_{jk}, Q_{jk}, and Q is the nodal load (source pressure) hypervector. $\mathbf{G}^*_r$, $\mathbf{G}^*_c$ are the transposes of the previous hypermatrices $\mathbf{G}_r$ and $\mathbf{G}_c$, respectively, related to the entire network.

Using (32) and (29) instead of (10) and (14), on the basis of (12) the following node equation will be obtained for the bar network (see *Table 1)*:

$$u' = [\mathbf{G}^*_c\,\mathbf{K}\,\mathbf{G}_c]^{-1}\mathbf{G}^*_c[Q - \mathbf{K}t] \tag{34}$$

A certain number of bar system nodes are fixed. Self-evidently, G_c cannot contain the columns corresponding to the fixed junctions or else (34) would be far overdetermined. Eq. (34) contains, therefore, the G partial (hyper) matrix of $(b \times n)$ dimension instead of $\mathbf{G}_c$:

$$u' = [\mathbf{G}^*\,\mathbf{K}\mathbf{G}]^{-1}\,\mathbf{G}^*[\mathbf{Q} - \mathbf{K}t] \tag{35}$$

where G is a partial matrix corresponding to the free nodes of G_c, that is, $G_c = (G_p; G)$ where, in turn, $\mathbf{G}_p$ is a partial matrix corresponding to the fixed

nodal points of G_c. If, on the basis of (33), the Q branch load vector is replaced by nodal load vector Q' then

$$u' = [\mathbf{G^*KG}]^{-1} Q' - [\mathbf{G^*\,KG}]^{-1} \mathbf{G^*\,K}t \tag{36}$$

may be written instead of (34). This expression is identical to the so-called displacement equation of bar system statics, if that is expressed in a matrix form.

Eq. (34) is seen to be formally analogous to the general node equation (16) of physical networks. As the only difference, the **A** topological matrix consisting of 1 and 0 terms is replaced by hypermatrix **G** whose elements are given expressions containing the directional cosinus and length figures of the bars, and 0 terms.

Usually, expressions (12)—(16) related to a general physical network, and the other relations derived therefrom are modified in such a manner as to replace **A** by **G**. Thus, for example, the $s = (q + Q)$ stress, most essential in static calculations, can be computed on the basis of (12) and (14):

$$J = i + I = \mathbf{Y}[\mathbf{A}e' + E], \tag{37}$$

Substituting the expression of e' from (16), we get

$$J = \mathbf{YA}[\mathbf{A^*\,YA}]^{-1} [\mathbf{I'} - \mathbf{A^*\,YE}] + \mathbf{YE} \tag{38}$$

where, on the basis of (10′), $\mathbf{A^*}I$ was replaced by I'. Substituting now the corresponding bar system characteristics into (38), on the basis of *Table I*, and replacing matrix **A** by **G**, the following expression will be obtained for the induced member force:

$$s = \mathbf{KG}[\mathbf{G^*KG}]^{-1} [\mathbf{Q'} - \mathbf{G^*K}t] - \mathbf{K}t. \tag{39}$$

This relation makes the determination of the reaction forces corresponding to the fixed junctions possible. According to (10′), the following relation exists between the nodal source variables I' of the physical network (including the reaction forces), and the J variables of the branches:

$$\mathbf{A^*}J = I'. \tag{40}$$

If the fixed junctions are separately reckoned with, the above equation may be written, for a bar network, in the following form:

$$\mathbf{G}_c^* s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p^* \\ \mathbf{G^*} \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} Q_p \\ Q' \end{bmatrix} \tag{41}$$

where the vectors marked by an index p apply to fixed, whereas those without a p index to the free nodes. Determination of the Q_p reaction force of fixed nodes is, therefore, by

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{G}_p^* s. \tag{42}$$

Substituting the expression of s from (39), the following equation will be obtained for Q_p:

$$Q_p = \mathbf{G}_p^* \mathbf{K}\mathbf{G}[\mathbf{G}^* \mathbf{K}\mathbf{G}]^{-1} [Q' - \mathbf{G}^* \mathbf{K}t] - \mathbf{G}_p \mathbf{K}t. \tag{43}$$

So far it was assumed that each component of the fixed nodal displacement vectors would be similarly fixed. If this fixed character applies only to some of the u components, the above relations will remain essentially valid, but the partitioning of G_c will have to be performed at a matrix instead of a hypermatrix level.

The equivalent of the loop equation (20) of a general physical network, suitable for bar system calculations, can also be expressed. Here again, as in the derivation of the nodal equation, the topological matrix is replaced by another one which reckons not only with the topological conditions of the network but also with their metrics.

The best way is to express loop matrix **C**, on the basis of (6), by matrix **A** or its A_T tree or A_L link components. If then, just like above, **A**, $\mathbf{A}_T$, and $\mathbf{A}_L$ are replaced by **G**, $\mathbf{G}_T$ and $\mathbf{G}_L$, respectively, the matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{G}_T^*)^{-1} \mathbf{G}_L^* \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \tag{44}$$

will be obtained, with the same role in a bar system as that of matrix **C** in connection with the general equation (20). Thus the loop equation of the bar network can be directly obtained from (20), by making use of *Table I:*

$$q' = [\mathbf{D}^*\mathbf{F}\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{D}^*(t - \mathbf{F}\mathbf{Q}) \tag{45}$$

Eq. (45) corresponds to the fundamental equation of the process called force method in statics (see page 131 in [5] of the literature cited).

5. Bar network diacoptics

It was shown that the application of the physical network theory would lead to the same relations which could be obtained in the statics of supports by using the well-known displacement or force method, on the basis of classic mechanical considerations. It will now be demonstrated that, in addition, this

view may offer significant practical advantages. First of all the method called diacoptics by G. KRON should be considered which might permit the building of the numerical solution of network equations from part solutions [6]. Such a time saving may be particularly considerable when calculating sophisticated structures.

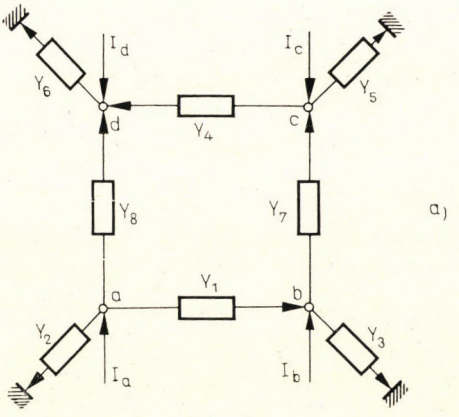


Fig. 3a

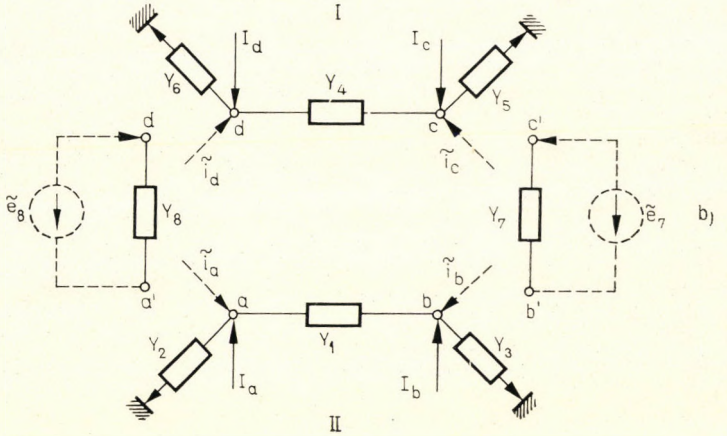


Fig. 3b

In the statics of supports, the method of division has not previously been unknown, either. Such a method is, for example, the statically indeterminate main support technique. It is believed, however, that the network theory view may greatly assist the further development of these methods. Of the several diacoptic methods here only one will be dealt with, as this seems to be readily adaptable for bar system statics.

Since bar network conditions are to a certain degree complicated by the necessity of transforming the relations expressed in local co-ordinate systems related to the individual elements into a global co-ordinate system, first let us derive these relations for a physical network structurally identical with the bar system. By eliminating branches 7 and 8, the network presented in Fig. 3a may be divided into part networks I and II. Our duty is now to determine, by solving the equations of the two parts, the nodal variables e_a, e_b, e_c, e_d, produced by the nodal i sources Ia, Ib, Ic, Id of the original network.

In order to compensate for the elimination of branches 7 and 8, hypothetic flows $\tilde{i}_a$, $\tilde{i}_b$, $\tilde{i}_c$, $\tilde{i}_d$ may be assumed in the a, b, c, d nodes, whose magnitude and direction are assumed not to modify the nodal e variables in spite of the division. From the viewpoint of branches 7 and 8, part systems I and II may be considered as e sources producing the same i values in the excluded branches as those of the original network. These $\tilde{e}_7$, $\tilde{e}_8$ values, in turn, may be regarded as the characteristics of the e sources series connected to elements 7 and 8, see Fig. 2b.

This Figure reveals the following equalities:

$$\begin{aligned} \tilde{i}_a &= -i_8 \\ \tilde{i}_b &= -i_7 \\ \tilde{i}_c &= i_7 \\ \tilde{i}_d &= i_8 \end{aligned} \qquad (46) \qquad\qquad \begin{aligned} \tilde{e}_7 &= e'_b - e'_c \\ \tilde{e}_8 &= e'_a - e'_d \end{aligned} \qquad (47)$$

In vector form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{i}_a \\ \tilde{i}_b \\ \tilde{i}_c \\ \tilde{i}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} \quad (46') \qquad \begin{bmatrix} \tilde{e}_7 \\ \tilde{e}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_a \\ e'_b \\ e'_c \\ e'_d \end{bmatrix} \quad (47')$$

Or in a still more simple way:

$$\tilde{i}' = \mathbf{G}_1 i_k \qquad (46') \qquad\qquad \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{C}_1^* e' \qquad (47')$$

where $\mathbf{C}_1$ is a connecting matrix.

Nodal equations (16) can be separately written for part networks I and II. It is easy to check that the two equations can be expressed as

$$\begin{bmatrix} (Y_1 + Y_6) & -Y_1 \\ -Y_1 & (Y_1 + Y_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_a \\ e'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_a + \tilde{i}_a \\ I'_b + \tilde{i}_b \end{bmatrix} \qquad (48)$$

$$\begin{bmatrix} Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_4 & Y_4 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_c \\ e'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_c + \tilde{i}_c \\ I'_d + \tilde{i}_d \end{bmatrix} \qquad (49)$$

$$\mathbf{Y}_{N1}\, e_1' = I_1' + \tilde{i}_1 \tag{48'}$$

or

$$\mathbf{Y}_{N2}\, e_2' = I_2' + \tilde{i}_1. \tag{49'}$$

Indices 1 and 2 refer to part networks I and II, respectively. Eqs (48') and (49') can be expressed in the form of a single hypermatrix equation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{N1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_{N2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_1' + \tilde{i}_1) \\ (I_2' + \tilde{i}_2) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Indicating the diagonal hypermatrix by $\mathbf{Y}_{Nd}$ Eq. (50) can be expressed in the form

$$\mathbf{Y}_{Nd}\, e' = I' + \tilde{i}. \tag{50'}$$

For the connecting branches (7) and (8), the following equation may be written on the basis of Fig. 2b:

$$\begin{bmatrix} Y_7^{-1} & 0 \\ 0 & Y_8^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_7 \\ i_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_7 \\ \tilde{e}_8 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

If the primitive admittance and impedance matrices of branches 7 and 8 are indicated by $\mathbf{Y}_K$ and $\mathbf{Z}_K$, respectively, then the following expression will be obtained:

$$\mathbf{Y}_K^{-1}\, i_K = \mathbf{Z}_K\, i_K = \tilde{e}_K. \tag{51'}$$

According to (46') and (47'), hypothetical vectors e and i can be eliminated from (50') and (51'):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{Nd}\, e' &= I' + \mathbf{C}_1\, i_K \\ \mathbf{Z}_K\, i_K &= -\mathbf{C}_1^*\, e'. \end{aligned} \tag{52}$$

Expressing e' from the first equation of (52) we get

$$e' = \mathbf{Z}_{Nd}^{-1}[\mathrm{I}' + \mathbf{C}_1\, i_k]. \tag{53}$$

Substituting now into the second equation of (52) will give

$$i_K = -\mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{C}_1^*\, \mathbf{Y}_{Nd}^{-1}\, I' \tag{54}$$

where

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}_K + \mathbf{C}_1^*\, \mathbf{Y}_{Nd}^{-1}\, \mathbf{C}_1. \tag{54'}$$

By substituting (54) into (53), finally the following expression is obtained for the determination of the nodal e variables:

$$e' = \mathbf{Y}_{Nd}^{-1}[\mathrm{I}' - \mathbf{Y}_{Nd}^{-1}\, \mathbf{C}_1\, \mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{C}_1^*\, \mathbf{Y}_{Nd}^{-1}\, I']. \tag{55}$$

It is easy to realize that (56) is independent of the number of part systems the network had been divided into. Generally, the diagonal hypermatrix $\mathbf{Y}_{Nd}$ of an $(m \times m)$ dimension assumes the form

$$\mathbf{Y}_{Nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{N1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y}_{N2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{Y}_{Nm} \end{bmatrix} \tag{56}$$

where $\mathbf{Y}_{Ni}$ is the nodal admittance matrix of the i-th part network, and m is the number of part systems. Finally, $\mathbf{Z}_K$ is the primitive impedance matrix of the links:

$$\mathbf{Z}_K = \begin{bmatrix} Z_i & & & \mathbf{0} \\ & Z_j & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & Z_r \end{bmatrix} \tag{57}$$

and it is a diagonal matrix of $(b_k \times b_k)$ dimension, where b_k is the link number. Connecting matrix $\mathbf{C}_1$ is a matrix of $(n \times b_k)$ dimension, consisting of 1, -1, 0 elements, where n is the number of nodes in the entire network (except the fixed points). The elements of $\mathbf{C}_1$ are defined as follows:

$$C_{aj} = \begin{cases} 1, \text{ if the direction of the } j\text{-th link points to node } a; \\ -1, \text{ if the direction of the } j\text{-th link points away from node } a, \\ 0, \text{ if the } j\text{-th link does not contain node } a. \end{cases}$$

Let us now apply (55), introduced for general physical networks, and the diacoptic considerations leading thereto, for bar systems. The fact that the branch and nodal characteristics e and i of the network are here not scalars but vectors, does not greatly modify the result formally. The difference is that where previously we had vectors and matrices, now we shall have hypervectors and hypermatrices (hypervectors and hypermatrices, in turn, will be replaced by the corresponding higher order figures).

So instead of (50'), we may write

$$\mathbf{K}_{Nd}\, u^{(x,y,z)'} = Q^{(x,y,z)'} + q^{(x,y,z)'} \tag{58}$$

where

$$\mathbf{K}_{Nd} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^* \mathbf{K}_{p1} \mathbf{G}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{G}_2^* \mathbf{K}_{p2} \mathbf{G}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{G}_m^* \mathbf{K}_{pm} \mathbf{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{N1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_{N2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{K}_{Nn} \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Here u', Q' are hypervectors of the nodal displacements and nodal loads of the part networks, and $\tilde{q}$ is the hypervector of the virtual nodal loads.

The equation corresponding to (51') and valid in the case of bar networks is

$$\mathbf{F}_k \, s_k^{(\xi,\eta,\zeta)} = -\mathbf{G}_k \, \tilde{u}_k^{(x,y,z)} \tag{60}$$

where $\tilde{u}_k$ and s_k are the hypervectors of hypothetic source displacements and internal link forces, respectively, and $\mathbf{G}_k$ is the transformation matrix of the links or connecting bars.

The equation corresponding to (46') can be expressed on the basis of relations between the s internal and q terminal forces of the connecting bars:

$$\tilde{q}'^{(x,y,z)} = \mathbf{C}_2 \, \mathbf{G}_k^* \, s_k^{(\xi,\eta,\zeta)} \tag{61}$$

where hypermatrix $\mathbf{C}_2$ creates a connection between the terminals of the connecting bars and the nodal points of the entire network, while the elements of $\mathbf{C}_2$ are either $\mathbf{U}(6\times 6)$ unit matrices or $\mathbf{0}(6\times 6)$ zero matrices, depending on whether the terminals of the connecting bars (links), actually do connect the nodal point in question, or not.

The form of (47'), corresponding to the bar network, is:

$$\tilde{u}_k'^{(x,y,z)} = -C_2^* \, u'^{(x,y,z)}. \tag{62}$$

Matrix $\mathbf{C}_2^*$ creates a connection between the nodal points of the entire network, and the terminals of the links. To facilitate an easier survey, (60), (61), and (62) indicate whether the variables should be interpreted in a local or global co-ordinate system.

By making use of (61) and (62), the hypothetic vectors $\tilde{q}$ and $\tilde{u}$ can be eliminated from (58) and (60):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{Nd} \, u' &= Q' + \mathbf{C}_2 \, G_k^* \, s_k \\ \mathbf{F}_k \, s_k &= \mathbf{G}_k \, C_2^* \, u' \, . \end{aligned} \tag{63}$$

Expressing u' from the first equation of (63), and substituting it into the second, we get

$$u' = \mathbf{K}_{Nd}^{-1}(Q' + \mathbf{C}_2 \, \mathbf{G}_k^* \, s_k) \tag{64}$$

$$s_k = \mathbf{W}^{-1} \, \mathbf{G}_k \, \mathbf{C}_2^* \, \mathbf{K}_{Nd}^{-1} \, Q' \tag{65}$$

where

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k \, \mathbf{C}_2^* \, \mathbf{K}_{Nd}^{-1} \, \mathbf{C}_2 \, \mathbf{G}_k^* .$$

Substituting s_k from (65) into (64), the nodal displacements will be expressed by the following equation:

$$u' = \mathbf{K}_{Nd}^{-1}[Q' - \mathbf{C}_2 \mathbf{G}_k^* \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}_k \mathbf{C}_2^* \mathbf{K}_{Nd}^{-1} Q']. \tag{66}$$

Eq. (66) defines the nodal displacement of the bar network for an optional division thereof. Obviously, it is advantageous to divide the system into

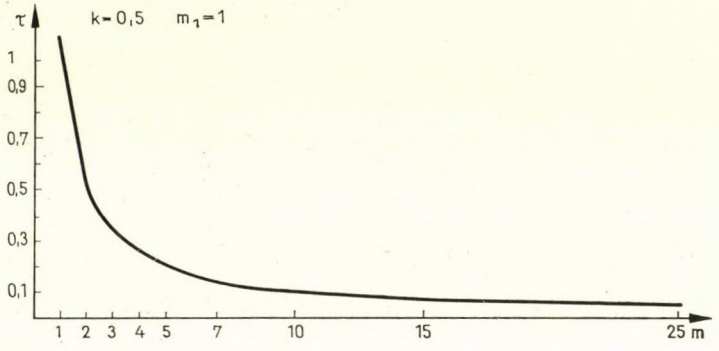


Fig. 4

part networks interconnected only by a small number of links. This ensures a small-size matrix **W**, whereby the time required for inversion will be similarly short.

Inversion of the $\mathbf{K}_{Nd}$ matrix, since here we have to deal with a diagonal hypermatrix, is by inverting the partial matrices. The machine time is all the shorter, the smaller size the partial matrices are, that is, the greater number of parts the system had been divided into. Particularly significant savings can be achieved, if the system is constructed of identical modules since, in such a case, the matrices of the corresponding part networks will have to be inverted only once.

Let us roughly estimate the time saving due to the application of (66), as compared to using the simple nodal method. Let us assume that the system had been divided into $m = (m_1 + m_2)$ parts equal in size, where m_1 is the number of parts of identical design. Let us assume, furthermore, that the part systems are connected, on the average, by k number of links. So we can assume that the machine time required for matrix inversion is quadratically proportional to the number of junctions, and the machine time of the individual operations in (66) are neglected at and as compared to this matrix

inversion. The time required for the inversion of matrices $\mathbf{W}$ and $\mathbf{K}_{Nd}$, respectively, will be proportional to

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{m}\right)^2 \quad \text{and} \quad (m-m_1+1)\left(\frac{n}{m}\right)^2$$

respectively. Since the inversion of (non-diagonal) matrix $\mathbf{K}_N$ required for the displacement method is roughly proportional to n^2, the relative time saving τ will be

$$\tau = \frac{m-m_1+k^2/4+1}{m^2} . \tag{67}$$

Fig. 4, plotted on the basis of (67), demonstrates what a tremendous time saving can be achieved by the employment of the diacoptic method described above. According to Fig. 4, if $m_1 = 1$ and $k = 0{,}5$ and if the system has been divided into 5 parts, the machine time requirement will be reduced to its one-fifth.

REFERENCES

1. Seshu, S.—Reed, M. B.: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley, Mass. 1961.
2. Kron, G.: Tensor Analysis of Networks, J. Wiley, N. Y. 1939.
3. Branin, F. H.: Computer Methods of Network Analysis, *IEEE Int. Conv. Rec.*, CT5 (1967), 45—63.
4. Fenves, S. J.—Branin, F. H.: Network Topological Formulation of Structural Analysis. *Proc. ASCE* ST4 (1963), 483—513.
5. Szabó, J.—Roller, B.: Theory and Calculation of Bar Structures, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971 (in Hungarian).
6. Kron, G.: Diacoptics, MacDonald, London 1961.

Über die Netzwerktheorie der Stabkonstruktionen. Die Arbeit behandelt die netzwerktheoretische Formulierung der Statik von Stabträgersystemen. Es wird gezeigt, daß die Netzwerkanschauung einen tieferen Einblick in diese Problematik ermöglicht. Die Untersuchung richtet sich der bisher noch wenig angewandten diakoptischen Methoden zu und gibt die Ableitung einer grundlegenden Beziehung der Diakoptik von Stabträgersystemen. Es wird schließlich eine Abschätzung der mittels dieser Methode erzielbaren Rechenzeitverminderung gegeben.

О сетевой теории стержневых конструкций *(Д. Сигнер)*. В статье излагается трактовка с точки зрения теории сетей статики стержневых конструкций. Показано, что в противоположность применявшимся до сих пор матричным методам сетевая теория позволяет давать более глубокую трактовку данной проблематики. Статья глубоко занимается диакоптическими методами, мало использованными до сих пор в статике стержневых конструкций, и, кроме того, дается вывод одной основной зависимости диакоптики стержневых конструкций. Наконец, дается оценка относительной экономии времени при применении указанного выше метода.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 237 — 251 (1972)

ANALYSIS OF IGNITION PROBLEMS CONCERNING STABILITY OF BURNERS IN PULVERIZED COAL COMBUSTION SYSTEMS

K. REMÉNYI*

CAND. OF TECHN. SC.

[Manuscript received January 5, 1971]

A great many problems relating to ignition conditions of an air-pulverized coal mixture are not cleared up yet. The process of pulverized coal ignition involves reaction phenomena, homogeneous and heterogeneous alike; of course, an attempt to deal with these questions reveals a lot of disputable matter, especially from the viewpoint of the kinetic theory of gases. Ignitability is mostly defined by flame propagation velocity, or just as an ignition velocity; in this line, research work concerns the influence of various parameters, chemical and physical. Therefore, when dealing with ignition conditions, the interaction between chemical and physical properties should be taken as a basis. As regards a stable ignition, the influence of the blowing velocity of the primary agent is considerable. When assessing the optimum of a recirculation in the combustion chamber, the result is influenced by the heat quantity re-transferred by the formation of igniting nuclei, and by re-mixed inert gases. A larger content of volatiles in the coal involves an increased flame propagation velocity. Anyhow, the flame propagation velocity counts for a value of minor importance when the combustion process in a system of pulverized coal burners is considered. Once the conception of a twofold and a manifold ignition process is accepted, the desirable amount of primary air is larger than the quantity calculated on the basis of a given flame propagation velocity.

1. Ignition defined in terms of kinetic reaction phenomena

Starting out in 1968, author initiated a large scale research activity to which plant experts and researchers joined in order to carry out theoretical and practical experiments, especially to analyse ignition problems of burners for pulverized coal combustion systems, and further, to throw light on the role of parameters which may influence the creation of a stable ignition process. In this paper, results of both theoretical and practical testing experiments are made known [1—8]. Based on these results, author endeavours to derive theoretic outlooks on the ignition of a pulverized coal jet.

2. Ignition defined in terms of kinetic reaction phenomena

N. N. SEMENOV was the first to set down the bases of dealing with ignition conditions in terms of kinetic reaction phenomena. In continuation of this work, a more precise definition is associated with the activity of

*K. REMÉNYI, Uri u. 38. I. 10, Budapest I., Hungary

FRANK—KAMENETZKIY. A very detailed description of the basic theory is to be found in [1], thus we can confine ourselves to the enumeration of the starting conditions in what follows.

Here the expression of the heat liberated from the fuel in the time unit during the period of some chemical reaction:

$$Q_{\mathrm{I}} = k_0 \, e^{-\frac{E}{RT}} \, r(c) \, H_i \, V \tag{1}$$

where

k_0 — multiplying factor of the reaction-velocity constant;
g — activation energy;
R — gas constant, universal;
T — temperature, absolute;
$r(c)$ — function to describe the varying reaction-velocity depending on the degree of concentration;
H_i — inferior calorific value of the fuel;
V — volume of the combustion chamber.

By linking all the coefficients of the exponential variable we obtain:

$$Q_{\mathrm{I}} = A e^{-\frac{E}{RT}} \tag{2}$$

Simultaneously, the heat quantity transferred to the surroundings is

$$Q_{\mathrm{II}} = \alpha \, F(T - T_0) \tag{3}$$

where

α — heat transfer coefficient;
F — transfer area;
T_0 — ambient temperature.

Assuming that the ignition process happens to proceed under critical conditions, both the above values themselves and their derivatives equal each other, viz.:

$$Q_{\mathrm{I}} = Q_{\mathrm{II}} \quad \text{and} \quad \frac{dQ_{\mathrm{I}}}{dT} = \frac{dQ_{\mathrm{II}}}{dT} \, . \tag{4}$$

From these equations we obtain, after having performed the relevant operations, the original formula of Semenov, namely

$$T_{ig} = \frac{E}{2R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4R}{E} \, T_0} \right) \tag{5}$$

where T_{ig} — the ignition temperature.

3. Ignition process of pulverized coal discussed on the basis of a unidimensional jet moving through a flowing air-coal mixture

By making use of the ignition theory based on reaction kinetics, the working group of D. M. HZMALYAN carried out testing experiments in order to investigate the influence exerted by the main parameters on the ignition process with the assumption of a quasi-unidimensional jet composed of air and pulverized coal [2]. These studies were extended to an analysis of the established mathematical model and to an experimental verification of some tests performed in conformity with the model. The mathematical model represents the influence exerted by the flow velocity, by the concentration of pulverized coal and oxygen, by the fractional distribution of particles etc. upon the ignition process. Of course, in establishing the model, some approximative simplifications had to be tolerated that do not correspond to real conditions. What is more, the essential physico-chemical content of the model is liable to be contested since some propositions taken from the kinetic theory of gases are applied for the case of pulverized coal, in spite of certain heterogeneous phenomena occurring. Heat, that is liberated during chemical reactions, is partly expended to increase the temperature of the mixture, and is partly conducted away.

When solving this unidimensional problem, it is assumed that at the sectional area F_x all the relevant parameters (velocity, concentration, temperature) are kept constant, and their variation occurs only along the length of the chamber. The velocity of fuel-grains within the rectilinear gas-flow can be considered as identical with the local value of gas-velocity.

During the period preceding the ignition of the particle, gas temperature within the air-coal jet deviates but little from the temperature of the particle, and during the reaction period the values of the two temperatures mentioned above increase in parallelity, thus, the mixture air-coalgrains can be considered as being homogeneous.

Since the ignition process develops within the critical range, some burning out that happens before ignition took place, can be neglected. With these assumptions, the equilibrium formula for the air-coal mixture takes the form of the following differential equation:

$$\beta k_0 c_0 \mu_0 f H_i \cdot \frac{273^2}{T^2} e^{-\frac{E}{RT}} - W_0(c_l + \mu_0 c_p)\frac{dT}{dx} - \frac{4\alpha}{d}(T - T_0) = 0 \qquad (6)$$

where β — stoechiometric coefficient determined when the air quantity needed for coalcombustion is known;

$k_0 e^{-\frac{E}{RT}}$ — constant coefficient of he reaction-velocity; by the coefficient k_0, the volatile contents are taken into account;

μ_0 and C_0 — concentration of coalgrains and of oxygen, respectively;

f — specific surface of a coal grain;
H_i — lower calorific capacity of coal;
C_l and C_P — specific heat of air and coalgrain, respectively;
W_0 — coal grain velocity at normal state conditions;
x — coordinate (of length);
α — heat transmission coefficient;
T_0 — initial temperature equalling the chamber-wall temperature;
T — momentaneous temperature value;
d — combustion chamber diameter.

After re-arrangement of the dimensionless factors we have:

$$\frac{1}{\Theta^2} e^{-\frac{1}{\Theta}} - \frac{d\Theta}{d\varkappa} - \Omega(\Theta - \Theta_0) = 0 \tag{7}$$

where $\Theta = \dfrac{RT}{E}$ — dimensionless temperature-value;

$\varkappa = \dfrac{x}{\pi}$ — dimensionless coordinate-value;

$\pi = \dfrac{W_0(C_l + \mu_0 C_P)\, E^3}{\beta \cdot K_0 \cdot C_0 \mu_0 f H_l\, 273^2\, R^3}$ — parameter as the index by which the reactive capacity of the fuel and the course of the process are characterized;

$\Omega = \dfrac{4\alpha E^3}{d\beta K_0 C_0 \mu_0 f H_i\, 273^2\, R^3}$ — dimensionless coefficient that characterizes heat-abstraction. (9)

According to the above mentioned conditions considered as being critical for the process of ignition, the instantly liberated heat at ignition equals the heat abstraction; and taking into account the first derivatives, with temperature of the functions which describe the processes in question, are equal to each other. In these terms, viz. adapting formula (7) to the critical state, and forming its first derivative (for the critical state), we obtain the following equation, where the subscript k denotes the critical state:

$$\frac{1}{\Theta_k^2} e^{-\frac{1}{\Theta_k}} = \Omega_k(\Theta_k - \Theta_0) \tag{10}$$

and

$$\Omega_k = -\frac{2}{\Theta_k^3} e^{-\frac{1}{\Theta_k}} + \frac{1}{\Theta_k^4} e^{-\frac{1}{\Theta_k}}. \tag{11}$$

The solution is:

$$\Theta_k - \Theta_0 = \frac{\Theta_k^2}{1 - 2\Theta_k}, \tag{12}$$

$$\Omega_k = \frac{\dfrac{1}{\Theta_k^2} e^{-\frac{1}{\Theta_k}}}{\Theta_k - \Theta_1} \tag{13}$$

Now, we are in a position to determine the critical difference of temperature $(T_{ig} - T_{in})$ and the dimensionless critical value of the heat-abstaction parameter.

These formulae are suitable for a numerical evaluation of the coal-grain ignition process.

In particular, these formulae can be used for the purpose of analyzing the influence exerted by the reactive capacity of the fuel, by some service

Table I

Ignition temperature values t_{ig} at various degrees of coal concentration μ and at various blow velocities w_0 and w

	$\mu = 0.2$	$\mu = 0.4$	$\mu = 0.6$
$w_0 =$ 7,7 Nm/s $w =$ 12,0 m/s	942	877	842
$w_0 =$ 9,0 Nm/s $w =$ 14,0 m/s	967	892	862
$w_0 =$ 10,5 Nm/s $w =$ 16,0 m/s	987	907	877

conditions (viz. concentration of reagents, motion velocity of the air-coal mixture etc.) onto the ignition process. Thus, we made calculations referring to the species of Gyöngyös lignite for which we assumed physical and chemical indices similar to what are known as true values in normal operating conditions. In this way, in Table (I) the ignition temperature values, understood for a longitudinal section of 1 m, are tabulated in coordination to various values of concentration and of blowing velocity [9]. This relationship can be expressed, in other words, that in order to be ignited, the injected mixture should meet within this space at 1 m distance, the temperature value as quoted in the table. Experiences carried out with this Gyöngyös species of lignite nearly justified the same values as calculated.

4. Special problems of ignition with burners for pulverized coal

As can be understood, burners mounted for boiler installations are supposed to create stable ignition conditions and continuous ignition process for a wide range of boiler output. Thus, it is important, instead of considering temperature conditions, to calculate with some mutual interactions occurring between a fuel (characterized by its physical and chemical properties), and the actual surroundings [1]. This is the more significant for the case of pulver-

ized coal combustion with special regard to the differring simultaneous reaction processes of the homogeneous gas-phase and the heterogeneous solid phase. In view of the complex nature of the concurring processes as a whole, we shall not continue expanding our investigation to these details: our further rationalization will provide some macroscopic observations to show the characteristics of combustion processes and their influencing power.

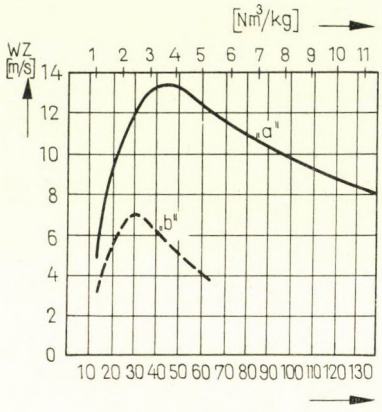


Fig. 1

In general, when stable combustion conditions are at stake, plant experts never use terms pertaining to a theoretic, chemico-physical conception of ignition: the usual way is to determine the flame propagation velocity that is generally referred to as "igniting velocity". In concreto, this velocity refers to the propagation of a flame already ignited; it incorporates a notion that is considered as a main index, as far as the relative location of the flame towards the burners' orifice is concerned. When the outlet velocity of the mixture is less than the flame propagation-velocity, the flame may be thrusted backwards into the burner; again, when outlet-velocity surpasses the value of the flame velocity, abruption may take place, the flame moves away from the orifice and actually stability is quite out of question. Thus, a great number of investigations were carried out in order to clarify the influence of various chemical and physical parameters onto the flame propagation velocity.

When considering a system of pulverized coal combustion, ignition stability depends mainly on the actual coal species. The most intensive influence can be ascribed to the volatile content of the coal. In general, experiences show that keeping other factors unchanged, a larger content of volatiles favourably affects the ignition velocity. On the other hand, with unchanged content of volatiles, the most advantageous ignition conditions are not reached when the

oxygen quantity fed in corresponds to the true theoretic value; taking into account the large masses of the accompanying nitrogen, the best conditions are obtained when the oxygen quantity remains slightly below the theoretical value. When compared to conditions that are characteristic for a combustion in pure oxygen, — in presence of volatiles — no monotone increase of the characteristic curve up to the theoretic value of the necessary quantity of

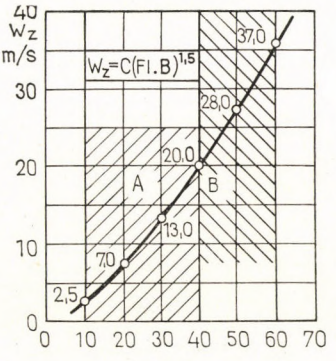


Fig. 2

oxygen is experienced: there is a maximum that occurs at a point where the air quantity is less than the theoretically correct one; the plotting of this maximum depends on the content of volatiles.

In Fig. 1 we can see the change of ignition velocity as a function of air input for the case of two coal species.

As is motivated by the diagram in Fig. 1, the influence of primary air quantity should be considered as decisive, inasmuch as this quantity can be regulated during operation. Notably, deviation from the optimum air quantity does not exert the same influence as when the mixture is richer than the optimum (less air quantity) or when it is weaker (larger air quantity). In the first case, decrease of velocity is quicker. It follows that in conformity with other conditions to be dealt with later, combustion is preferable with a weaker mixture (larger air quantity) even when considering ignition velocity conditions.

A truly monotone curve (Fig. 2) shows the maximum ignition velocity values as a function of the content of volatiles in various coal species, obtained by testing experiments.

The curve in the diagram (Fig. 2) corresponds to a parabola of the 1,5-th degree, according to the following equation:

$$W_z = c(\text{volatiles})^{1,5} \tag{14}$$

where

W_z — ignition velocity;
c — constant (determined experimentally).

Anyhow, when the real combustion conditions of pulverized coal are taken into account, all these experimental results require some modification.

Namely, in the case of pure gas-combustion, values of the flame propagation velocity, as experienced for divers gas species proved to be almost near the mixture ratio corresponding to the stoechiometric proportion. For pulverized coal, deviations should be ascribed to the simultaneous presence of homogeneous and heterogeneous processes, and to the differences which prevail between the features and parameters belonging, first to the solid particles and second to the volatile matter.

In former textbooks we find the statement according to which the quantity of primary air for pulverized coal equals the quantity needed for the combustion of the volatile matter. In other handbooks the primary air quantity expressed in percents of total air L_0 numerically equals the percentage of the volatile content.

With a view to the combustion process as a whole, all these suggestions should be revised. On considering ignition of the coal grains we proceed without taking into account the complete combustion of the fuel, the above derived conclusions concerning primary air result on the basis of flame propagation velocity values.

Again, with a view to the entire combustion process, a quite different point of view should be accepted for the purpose of finding the correct air ratio. From experiments made in testing the simultaneous combustion of oil and gas, it was found that due to better mixing conditions a highly intensive oxigen-consumption by gas is observed; in the following phase, when oil drops come to be ignited, the actual concentration of oxigen decreases, and lack of air may result, too. The same consequences can be expected in the case of pulverized coal, yet at a higher degree. By volatiles intensively mixed with the primary air, a quick consumption of oxygen occurs; the remaining air quantity might be insufficient for the ignition of the solid particles. Consequently, in the first period of coal-grain combustion we have to rely on the theorem of a double ignition process. According to this theory, in the combustion system of pulverized coal initial igniting of the coal grain jet involves two simultaneous phenomena, that should be taken into account in order to obtain more exact results. As a rule, with a primary air quantity that corresponds to the air needed for the combustion of volatiles, in consequence of favourable mixing conditions, the combustion of the volatiles involves a quick complete consumption of the primary air fed in. Solid particles, already difficult to ignite, now encounter rather disadvantageous conditions. Along the affected region, in lack of oxygen, no continuous flame formation is possible. What happens here is mainly

some gasifying process developed between combustion gases and carbon particles. Of course, such a process remains as a significant factor during the next period of combustion. In any case, the necessity of a repeated ignition of the solid particles has to be expected. And here, the efficiency of a secondary air becomes evident. In view of great deviations of the viscosity value of the various components, the problems relating to the mixing conditions of the extremely hot combustion gases and of the relatively cool other agents are well known.

Now, by introducing the new conception of a double or multiple ignition process, first the need to modify air feed conditions becomes obvious.

It is quite conceivable that based on a complete survey of the total combustion procedure, including ignition conditions, it is necessary to feed in an air quantity that is far larger than that which has been considered as sufficient up to now. Doing so, the temperature of preheated air becomes a significant factor, too. When a low temperature of the preheated air is assumed, the first period of volatile combustion has to be considered as a factor important from the aspect of spending heat for a further heating of the mixture. May be, under such circumstances, a smaller quantity of primary air would suffice, mainly because the heat liberated by the volatile combustion process is badly needed for a further heating of the mixture. Again, when the primary air temperature is higher, the maximum value of ignition velocity is plotted towards the range of larger air quantities: summing up all what has been explained in this point, the quantity of the primary air greatly depends on the temperature of the preheated air mass.

5. Pilot plant experiments

On the author's initiative, these experiments were carried out by the Research Station in Dorog, a pilot plant of the VEIKI (Research Institute of the Electric Energy Industry). First it was necessary to determine the group of parameters the variation of which should serve as the basis of observations and measurements. These were: coal-grain indices, blowing velocity, values of the air temperature, temperature distribution, excess air ratio. In the reports [5] and [6] one can find a survey of the results obtained.

Now, this our evaluation will be based partly on measurement results, partly on conclusions that were inferred from these. Sometimes our present statement will differ from former ones.

The pilot plant combustion chamber is shown in the sketch Fig. 3. This represents a model, the magnitude of which is about 1/7 of the original plant in Oroszlány, this latter having a boiler output of 230 t/h. Cross-section of the model chamber is 1,32 m^2. The helical tube's total projection onto the chamber wall is 6,8 m^2. Cooling ratio equals 0,4 viz. considerably less than is usual under

normal plant conditions: this was deliberately chosen in order to have a temperature of the combustion gases (that leave the chamber) nearly the same as the temperature of those gases in normal plants.

Characteristic indices of the coal species used in these experiments, including grain size data are summarized in Table II.

Since the coal species group as enumerated, includes older and younger ones, the generalization of inferred conclusions may be considered as justifiable.

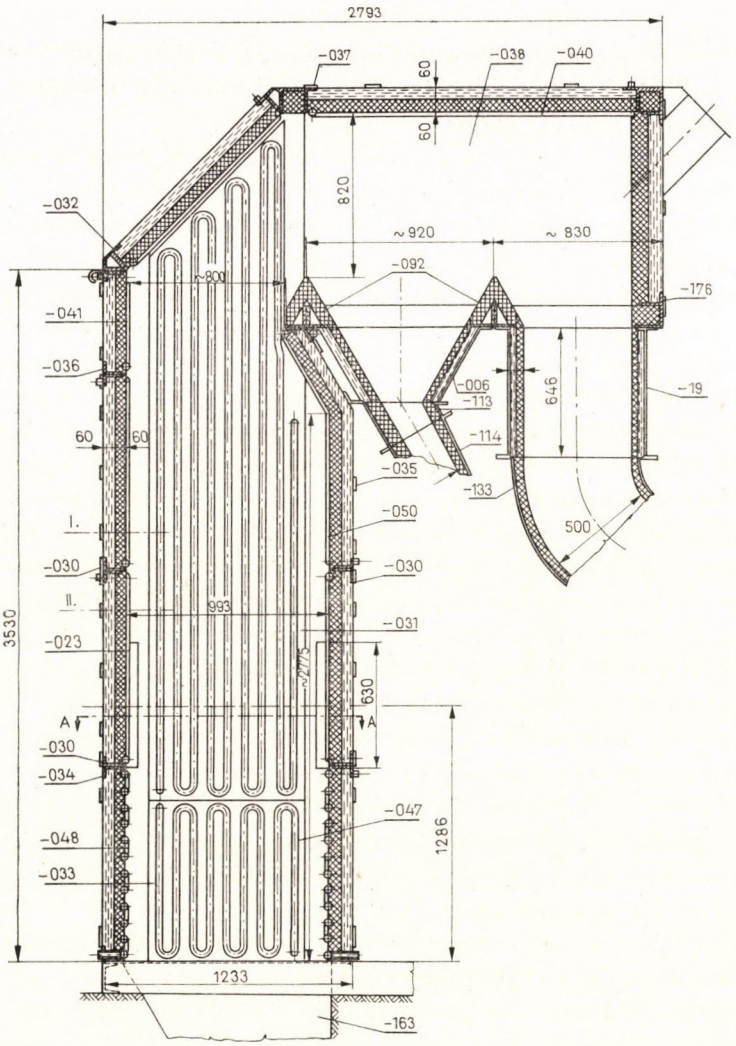
Table II

	1	2	3	4	5	6	7
Coal species	Species Tatabánya	Lignite Gyöngyös	Semi-product Pécs	Semi-product Pécs	Species Oroszlány	Species Oroszlány	Lignite Gyöngyös
Date	1968 XI. 26	1968 XI. 26, 29 XII. 6, 10	1968 XII. 10	1968 XII. 10	1969 XII. 4	1969 XII. 4	1969 XII. 10
Indices							
total moisture, %	24,2	24,8	4,7	0,7	2,7	2,7	6,02
ash, %	13,6	42,2	56,5	56,5	42,5	42,5	41,2
volatiles, %	31,0	18,3	11,4	11,4	—		—
Sulphur, combustible, %	2,8	1,4	2,4		1,5		—
heat of combustion, kcal/kg	4574	1946	—		3533		
calorific value, kcal/kg	4243	1707	2782		3354		2728
Grain size							
over 1 mm, %	0	0	0,04	0	0,1	0	0,6
over 0,5 mm, %	1,8	2,87	1,84	0,4	4,6	0,9	9,2
over 0,2 mm, %	18,6	53,13	16,64	4,8	26,0	12,3	33,0
over 0,09 mm, %	53,6	65,54	45,24	19,8	54,4	40,4	59,2

6. Influence of the blow velocity, primary and secondary

Under testing conditions, the larger influence could be ascribed to the variation of the blow velocity of the primary air-coal mixture. As can be seen in column 2 of Table II, results of the testing experiments carried out on the species Gyöngyös lignite showed an increase of the ignition length when — with unchanged grain size — the primary blow velocity was increased within the values from 7,5 m/s up to 9,5 m/s. With a further increase of velocity up to 12,7 m/s, the fire suddenly ceased. When the combustion was supplied by a secondary air conducted through a jacket-tube, ignition conditions were deteriorated. This secondary air supply resulted in an increase of the primary air excess from 10% up to 40%.

Within the range of testing experimental results comply with the relationship as disclosed in Table I, according to which stability is affected, first by an increase of the blow velocity, second by decrease of grain concentration.


2793
-037
-038
-040
60
60
820
≈ 920
≈ 830
-032
-092
-176
-041
-036
-006
-113
-19
646
60
60
-114
-035
-133
500
-050
I.
-030
-030
II.
993
-031
3530
-023
630
A
A
-030
-034
-047
-048
1286
-033
1233
-163

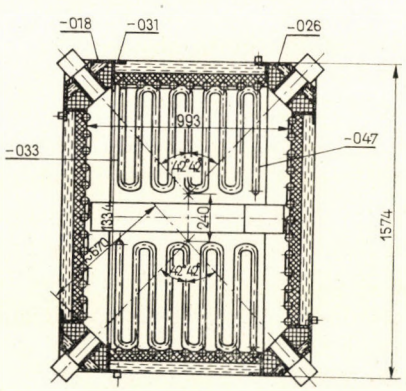

-018
-031
-026
993
-033
-047
1574
240

Fig. 3

The role of secondary blow was investigated in the case of the coal species Tatabánya. When blow velocity was diminished from 12,5 m/s down to 1,6 m/s, ignition distance became shorter.

In summing up the results of blow experiments, the diminution of the primary blow velocity involved better ignition conditions; by the increase of the secondary blow velocity ignition conditions were deteriorated.

As explained in [5], it had been inferred, from the above mentioned results, that heat transfer by radiation exerts a decisive influence. In our opinion, this conclusion is rather erroneous. The observed phenomenon should be ascribed to some other causes. As can be seen from the experiments, conditions can not be kept stable when blow velocity surpasses the value of 12,7 m/s. The optimum velocity value, in general, is considerably lower than the critical extinction value; obviously, in the range under discussion, a decrease of blow velocity corresponds to a change in the direction of the optimum. Further, the deteriorating influence of a secondary air supply, conducted through a jacket tube, seems to indicate the significance of heat re-transfer by the recirculating gases, and of the ignition nuclei created by the re-transport of burning grains.

Under testing circumstances, the envelope-like formation of the secondary air having a relatively low temperature of 180 °C and being located at the initial portion of the flame, acts as a hindrance to recirculation.

When the combustion process is operated without using a system of secondary air, maybe a diminished primary air blow affects the mass transport to the jet injected, anyhow, the actual existence of an optimum can be considered as probable. A forced re-circulation that involves the return of a large quantity of inert gases (nitrogen, carbon-dioxide, etc.) and steam, causes a restriction of the igniting range. The chance may come about, that in spite of the presence of a high temperature, no ignition occurs. Again, when along the ignition zone the oxygen concentration diminishes, a subsequent increase of igniting temperature may result. Thus, it would be erroneous, in view of a favourable effect of a lower velocity of the primery blow, to ascribe less importance to the heat transfer by re-circulation.

7. Influence of the grain size

The species of a semi-ground Pécs coal-grain, which is difficult to ignite, was the most suitable for the investigation of the influence of grain size. Returning to the results gathered in Table I first we refer to column 3 ($\mu = 0{,}4$.) With these relatively coarse grains, it was not possible even for a short time to reach a normal combustion by keeping the blow velocity at the optimum level, and we had to resort to an auxiliary oil injection; again, with the concentration $\mu = 0{,}6$ (finer grains, column 4), ignition conditions were much

better. When operating without a secondary blow, there was no need to apply oil-burners if the primary blow velocity remained within the range of 6,9 m/s up to 7,5 m/s.

When finer grains are injected, the flame's location comes nearer to the burner's orifice. As it is to be found in the Report F 32/a (issued by the Flame Radiation Research Foundation Ijmuiden), the degree of mixture, unexpectedly, proved to depend on the grain fineness. According to this report this phenomenon may be ascribed to some improvement of flow conditions, viz. to the increase of turbulence to the account of the aptitude of the finer grains to fit better into the stream lines.

In the same report the signification of grain size as far as flame radiation is concerned is duly emphasized. According to these experimental observations, coarser grains cause a considerable diminution of flame radiation.

Without a particular analysis of the influence exerted by various combustion factors, the explanations relating to the role of grain fineness cannot be considered as fully satisfactory. Flame propagation conditions were tested in the *IEn Research Institute Warsaw* in Poland. These experiments were carried out in a combustion chamber without cooling. The coal species tested were the following:

Scavina-coal, grain range 60—120, calorific capacity $H_i = 5200$ kcal/kg, total moisture $n = 4{,}7\%$;

Javozhno-coal, range 60—120, $H_i = 4900$ kcal/kg, $n = 7{,}5\%$;

Szersa-coal, range 60—120, $H_i = 4000$ kcal/kg, $n = 7\%$.

In all the three cases, finer grains involve increased flame propagation velocity values [7]. Besides, there occurred velocity values less than the usual ones (as low as 1,0—1,6 m/s).

Thus, when looking for an explanation of parameter effects, one has to proceed with great circumspection by taking into account all particular moments of the experiments, thus, the actual range within the subject in question always remains essential.

First of all, it makes a great difference whether ignition and combustion of the coal jet takes place in a cooled, or in a non-cooled, space. In a non-cooled, but highly heated chamber radiating phenomena coming from the surroundings may ascend to a high importance. In this case, the irradiation of walls may reach a deeper penetration into the jet when grains are coarser.

There is a special range of grain size within which coarser grains may act in the direction of increasing flame propagation velocity. Anyhow, such a relationship can be expected only in the case when penetration of the heat rays reflected by the wall approaches the magnitude of actual flame dimensions.

Combustion chamber walls of boilers generally have a much lower temperature than the flame temperature. In a chamber intensively cooled, the

radiation heat exchange between flame and the cooled walls, and between the flame elements having a high temperature, takes place, on the outer surface of the coal-grain jet, at a penetration depth corresponding to the actual grain size. In the cool region, deeper penetration involved by coarser grain size exerts, at any case, a disadvantageous influence. Without cooling, heat transfer by radiation may occur from the walls to the coal jet; again, when the chamber is intensively cooled down, heat transfer proceeds, from the jet in a state of starting ignition, to the walls; a procedure that strongly affects ignition conditions. In other words, under special heat transfer conditions of the coal jet (to or from) the role of the radiation depth may be contrarious, and the same can be stated, within a special range, of the role of grain size.

In a cooled combustion chamber, a higher fineness of grain size is, as a whole, more advantageous for the ignition process.

With finely ground coal grains, radiation to the cool walls, affects only a small outer layer of the flame: heat exchange within the jet is accompanied by an intensive turbulence through masstransport. With coal grains of an elevated fineness, the content of already ignited particles in the re-circulating gases is considerably high, and this means a great many number of probable nuclei promoting ignition.

8. Influence of the grain concentration

When the grain concentration in the air-coal mixture decreases, there is a certain critical limit point at which ignition can not be induced any longer. Notably, there is some interaction between concentration and air-excess, and what is more, the final formation of ignition conditions is subject to the influence of load change effects.

REFERENCES

1. VULIS, L. A.: Teplovoy rezhim goreniya. Moscow 1954. (Boiler Service in Mining Plants.)
2. HZMALYAN, D. M.: Issledovanie vosplamenyie odnomernovo pylevozdushnovo potoka pri naltchii teplootvoda (Ignition Experiments with Heat Conducting Unidimensional Hot Air Jet), *Teploenergetika* **8** (1964), Moscow.
3. FEHLING, M.: Kohlenstaubbrenner, *Mitteilungen der VGB* (1957), Okt.
4. GEISSLER, TH.—SCHÜLER, U.: Erfahrungen im Bau und Betrieb von Braunkohlenfeuerungen. VGB-Sondertagung "Österreich 1970".
5. BOROSS, L.—FORRÓ, T.: Jelentés a szénpor gyulladási viszonyainak 1968. évi vizsgálatairól (Ignition Conditions of Pulverized Coal, Report of Experiments Carried out in 1968).
6. BOROSS, L.—FORRÓ, T.: Jelentés a szénpor—levegő keverék gyulladási viszonyainak 1969. évi vizsgálatáról (Ignition Conditions of the Mixture Air—Coalgrains, Report of Experiments Carried out in 1969).
7. WROBLEWSKA, V.: A láng terjedési sebességének vizsgálata lengyel feketeszénpor—levegő keverék égésekor (Investigation of the Velocity of Flame Propagation when Hard Coal of Poland is Used for the Air—Coalgrain Mixture).

8. Bassa G.: Az égési folyamat vizsgálata szénportüzelésű kazánok tűzterében (Investigation of the Combustion Process in the Combustion Chamber of Boilers Heated with Pulverized Coal). Doctoral thesis.
9. Buzna V.: BME Diplomaterv, Budapest 1970. (Diploma-project.)

Analyse von Zündungsfragen in einer Staubkohlenfeuerung mit Rücksicht auf die Brennerstabilität. Für die Beurteilung der Gestaltung der Zündungsverhältnisse ist die mögliche Wechselwirkung zwischen chemischen und physikalischen Faktoren maßgebend. Bezüglich der Entstehung eines stabilen Zündungsvorganges ist insbesonders die Einblasegeschwindigkeit der primären Brennungskomponenten entscheidend. Die Schaffung einer optimalen Rezirkulation im Verbrennungsraum ist eigentlich das Ergebnis der kombinierten Beeinflussung durch die Rückwärme, die Gestaltung von Zündherden, durch inerte Gase. Wenn in der Kohle der Gehalt an flüchtigen Teilen ansteigt, verläuft die Flammenverbreitung mit einer größeren Geschwindigkeit. Hingegen, für die Verhältnisse einer Staubkohlenfeuerung kann der Wert der Flammenverbreitungsgeschwindigkeit nur als informativ akzeptiert werden. Nach der Einführung der Theorie eines doppelten bezw. vielfachen Zündvorganges soll, man die empfohlene Menge der primären Luft höher ansetzen als diejenige, die auf Grund der Flammenverbrei-tungsgeschwindibkeit bestimmt werden sollte.

Анализ проблем воспламенения, возникающих в случае пылеугольных топок, с точки зрения стабильности пылеугольных горелок *(К. Ремени)*. Условия воспламенения необходимо рассматривать с точки зрения взаимодействия химических и физических характеристик. С точки зрения стабильности воспламенения очень важна скорость вдувания первичной среды. Оптимум рециркуляции, возникающий в камере сгорания, формируется в качестве результирующей совместного действия поданного обратно количества тепла, образования центра горения и инертных газов. С ростом содержания летучих угля возрастает также скорость распространения пламени. Однако, рассматривая весь процесс горения в целом, скорость распространения пламени в случае пылеугольной топки можно принять только в качестве ориентировочного параметра. Введением двойного или же многократного воспламенения в отношении количества подаваемого первичного воздуха на основе скорости распространения пламени рекомендуется принимать более высокое значение, чем заданное.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (1—2), pp. 253—264 (1972)

ROLE OF COST FACTORS IN THE OPTIMISATION OF FILTER PRESSES OPERATING AT CONSTANT PRESSURE

L. HORVÁTH*

[Manuscript received October 7, 1971]

The article deals with the role of different expense factors influencing the minimum filtration cost for batch pressure filters operating at constant pressure. It further discusses the different optimisation equations with regard to their applicability to different types of pressure filters under different operating conditions to achieve the best results.

Symbols

A filter area
a $= P_1 + zP_3 - P_3$
b $= zP'_4x/A$
b_1 slope filtrate constant
b_m intercept filtrate constant
C annual total cost
C_d the part of annual variable cost related to down time
C_f annual invariable (fixed) cost
C'_f annual invariable cost reduced by annual amortisation of the filtering equipment
C_n number of cycle in a year
C_p annual amortisation of filtering equipment
C_t the part of annual variable cost related to filtration time
C_v annual variable cost
C_3 the part of annual invariable cost which is a function of yearly operation hours
C_4 the part of annual invariable cost which is really constant and does not depend on the annual operation hours
c specific filtration cost
c_d the part of specific running cost related to down time
c_f specific invariable cost
c'_f specific invariable cost excluding specific amortisation cost of the filtering equipment
c_p specific amortisation of the filter. i.e. ratio of the annual amortisation and annual production
c_t the part of specific running cost related to filtration time
c_v specific running cost
c_3 the part of the specific invariable cost which is a function of the annual operation hours
c_4 the part of the specific invariable cost which does not depend on annual operation hours
D the amortisation of the filter in percentage of its purchase cost
k_1 running cost per unit filtration time
k_2 running cost per unit down time
k_3 apparent invariable cost per unit of operation time
k'_3 total invariable cost per unit filtering area of the pressure filter
k_4 actual invariable cost per unit filtering area of the pressure filter
P purchase cost of the filter

* L. HORVÁTH, Mining Research Group at the *Technical University for Heavy Industries, Miskolc*, Hungary

P_1 cost of supporting structure, end-plates, closing and opening structures etc. of the pressure filter
P_3 cost of one filter plate
P_4' cost of filter frame of unit length
Q filtrate throughput in an hour
T number of yearly operation hours
T_D life of the filter in hours
t filtration time
t_c $= t + t_d$ = filter cycle time
t_d down time (non filtration time)
V filtrate volume in a cycle
V_y filtrate volume in a year
x ratio of cake and filtrate volume

1. Summary of methods for determining the minimum filtration cost to be found in technical literature

Determination of minimum filtration cost is generally a complicated task and so has not been adequately dealt with in technical literature either. The present article discusses optimisation of a given filtering equipment. It has been a traditional method to operate the filter at its maximum capacity to achieve minimum filtration cost in case of constant pressure filters. The equation for the determination of this filtration cost:

$$c_{\min} = \frac{C}{TQ_{\max}} . \tag{1}$$

Equations for optimum filtration parameters assuring maximum filtrate throughput can be found in a number of articles and books [1, 2]. These equations are as follows:

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1}} , \tag{2}$$

$$t_{\text{opt}} = t_d + b_m V_{\text{opt}} , \tag{3}$$

$$Q_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{t_d b_1} + b_m} . \tag{4}$$

However, in practice it is always to be experienced that there exists a difference between the so-calculated maximum filtrate throughput and that actually found in industrial operations. Out of the many reasons causing this difference, probably the most important one is that these optimisation equations have been derived for ideal filtering conditions which are hardly to be realised in practice. The exact optimisation equations for actual operating conditions have been discussed in [3, 4, 5] in detail.

In connection with optimisation, taking the cost factors also into consideration, [6] can be mentioned as the most important one on this subject. The basic equation expressing cost without washing is:

$$C = C_n(t\,k_1 + t_d\,k_2) + Ak_3'. \tag{5}$$

In (5) the annual cycle number and filtration time can be expressed, as a function of filtrate volume, as follows:

$$C_n = \frac{V_y}{V}, \tag{6}$$

$$t = b_1\,V^2 + b_m\,V. \tag{7}$$

The annual filtrate volume in (6) has been taken to be constant in the paper [6] and so in the cost equation (5), all the factors except the filtrate volume are constant. Finding the maxima-minima, we come to the following results:

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1} \cdot \frac{k_2}{k_1}}. \tag{8}$$

It is characteristic of (8) that the invariable cost factor does not occur in this, though it was there in the basic Eq. (5). The reason for its disappearance is the fact that the annual filtrate volume cannot be considered constant because if so, the filtering area cannot be constant, in which case filtrate constants also do change. Eq. (5) can be solved only when the annual cycle number be expressed as a function of filtrate volume in the following manner:

$$C_n = \frac{T}{t_c} = \frac{T}{b_1\,V^2 + b_m\,V + t_d} = f(V). \tag{9}$$

Further, it is essential to turn to specific cost equations from the annual ones. Substituting (9) into basic Eq. (5), we obtain the following cost equation:

$$c = b_1\left(k_1 + \frac{Ak_3'}{T}\right)V + t_d\left(k_2 + \frac{Ak_3'}{T}\right)\frac{1}{V} + b_m\left(k_1 + \frac{Ak_3'}{T}\right), \tag{10}$$

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1}\,\frac{k_2 + \dfrac{Ak_3'}{T}}{k_1 + \dfrac{Ak_3'}{T}}}. \tag{11}$$

The optimum filtrate volume Eq. (11) is obtained by differentiating (10) with respect to filtrate volume. Eq. (11) of optimum filtrate volume is itself a function of invariable cost factors and annual operation hours. Equations for optimum filtration time etc. have been discussed in detail in paper [7], taking also cake washing into consideration.

Equations regarding minimum running cost of filtration can be found in [8]. Also according to [8], we get the same equation (8) for the optimum filtrate volume.

It has to be noted that Eq. (8) is correct in itself and gives V_{opt} corresponding to minimum specific running cost and not that relating to minimum specific manufacture cost (filtration cost). However, it cannot be correct if it is the result derived from basic Eq. (5) because correctly we have to come to optimisation Eq. (11).

2. Further developed method for the determination of minimum filtration cost

As is well known, the total cost can be divided into two main groups: variable cost (C_v) and invariable (fixed) cost (C_f). The variable cost consists of:

$$C_v = C_t + C_d,$$

$$c_v = \frac{tk_1 + t_d k_2}{V} = c_t + c_d. \tag{12}$$

After differentiating the specific cost Eq. (12) with respect to filtrate volume, Eq. (8) is obtained giving the minimum specific running cost.

The above division of variable cost is, first of all, justified only in case of big filtering plants in which numerous classical plate-and-frame or chamber filters, by hand or hydraulically operated opening and closing structures operate.

There still exists other industrial cases for which the above division of variable cost is not justified. In such cases:

$$c_v = \frac{C_v t_c}{TV} = \frac{C_v}{T}\left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V}\right) = f(V). \tag{13}$$

As a result of differentiating Eq. (13), well known Eq. (2) is obtained which can generally be satisfactorily used under the following industrial conditions:

In case of small filter plants where few classical filters are operating. These are handled (discharging, opening, closing, handling during filtration etc.) and maintained by one group of workers independent of the filtration

time. In such cases, therefore, one part of variable cost, i.e. labour wages is a fixed one, division of which for filtration and down time has no influence on minimum running cost. Further, in case of small filtration plants where filtering operation is only a part of the whole process, energy and material cost, forming parts of variable cost, can hardly be separated into the parts relating to filtration and down time in book-keeping.

In case of automatic filter presses, the labour cost is included in purchase cost. This fixed amount is independent of the order of down time within cycle time, i.e. independent of cake thickness. Thus, labour cost cannot be attributed to down time because one worker operates more filtering units, independent of the order of filtration time.

We are forced to take off from the division of variable cost in case of such filter plants also where cost is not properly booked due to administrative reasons.

Finally, in case of such filter presses where cost relating to filtration time is nearly equal to that relating to down time, there is practically no significance of the division of variable cost and calculating optimum from them.

The invariable cost can, however, be divided according to the following:

$$C_f = C_P + C'_f,$$

$$c_f = \frac{C_f}{C_n V} = \frac{P t_c}{T_D V} + \frac{C'_f t_c}{TV} = c_P + c'_f. \tag{14}$$

The invariable costs can be further distributed according to the following:

$$C_f = C_3 + C_4$$

$$c_f = \frac{Tk_3 + Ak_4}{C_n V} = \frac{k_3 t_c}{V} + \frac{Ak_4 t_c}{TV} = c_3 + c_4. \tag{15}$$

In case of the cost equations not dealt with as yet, following three simplifications were used:

First of all, ideal filtering conditions were assumed, i.e. effect of filling, initial resistance during pressure build-up was neglected. Its influence on optimum filtration parameters (V_{opt}, t_{opt} etc.) and minimum filtration cost can be found in [4, 9, 10].

Secondly, cake washing was also neglected. The effect of washing has been discussed in [6, 7].

Thirdly, effect of feeding back the turbid filtrate formed in the beginning of filtration was also neglected.

The above three simplifications were introduced to emphatically stress the effect of cost factors. The simplifications are all of such nature that they do not change the characteristic influence of the cost factors on optimum filtration parameters or minimum filtration cost and, therefore, they will also be accepted in the following.

The specific filtration cost equations can be written in the following variations:

1. $c = c_t + c_d + c_P + c'_f$,
2. $c = c_v + c_P + c'_f$,
3. $c = c_t + c_d + c_f$,
4. $c = c_v + c_f$,
5. $c = c_t + c_d + c_3 + c_4$,
6. $c = c_v + c_3 + c_4$,
7. Similar to variation 3.
8. Similar to variation 4.

In case of variations 1 and 2, the following two cases have to be differentiated:

a) The purchase cost of filter can be taken to be constant or nearly constant within certain range of change in the cake thickness. For example, this holds good for chamber filter presses and pressure filters with horizontal filter plates.

b) The purchase cost of the filter is not constant if the cake thickness changes because in that case, a larger or smaller filter frame thickness is required and so the purchase cost differs. This is true for plate-and-frame filter presses.

In the following, it has been examined as to for what optimum volume of the filtrate cost equations, written in different variations, reach their minimum.

Variation 1

a) *For* $P =$ *constant.*

$$c = \frac{tk_1 + t_d k_2}{V} + \left(\frac{P}{T_D} + \frac{C'_f}{T}\right)\frac{t_c}{V}. \tag{16}$$

Substituting (7) into the above equation and differentiating it with respect to filtrate volume as well as equating it to zero, we obtain:

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1}\,\frac{k_2 + \dfrac{P}{T_D} + \dfrac{C'_f}{T}}{k_1 + \dfrac{P}{T_D} + \dfrac{C'_f}{T}}}. \tag{17}$$

Thus, if P = constant (e.g. chamber filter presses and pressure filters with horizontal plates), the filtrate volume is influenced, not only by variable cost factors (k_1, k_2) but also by invariable cost factors and in the way that the quotient k_2/k_1 tends to 1.

b) *For $P \neq$ constant.*

Starting from the equation referring to this case in article [5], the following equation is obtained:

$$P = P_1 + zP_3 - P_3 + zP'_4 \frac{x}{A} V = f(V), \tag{18}$$

$$P = a + bV, \tag{18a}$$

$$a = P_1 + zP_3 - P_3,$$

$$b = \frac{zP'_4 x}{A}.$$

Substituting (18a) into (16) and carrying out necessary mathematical operations, we obtain:

$$\frac{2b_1 b}{T_D} V^3 + \left[b_1 \left(k_1 + \frac{a}{T_D} + \frac{C'_f}{T} \right) + \frac{b_m b}{T_D} \right] V^2 - t_d \left(k_2 + \frac{a}{T_D} + \frac{C'_f}{T} \right) = 0. \tag{19}$$

The general polynom form of (19) is:

$$a_1 V^3 + a_2 V^2 - a_4 = 0.$$

It can also be solved by different methods. For example, it can be so solved if, first of all, optimum filtrate volume corresponding to maximum filtrate throughput calculated only from technical factors should be found and this value be increased or decreased till (19) is equal or nearly equal to zero. From t_{opt} and L_{opt} corresponding to this V_{opt}, z_{opt} can be calculated according to [5]. If this does not differ much from the previously calculated value, there is no need to repeat the calculation.

According to (19), optimum filtrate volume corresponding to minimum filtration cost depends on:

the filtering equipment (t_d, k_1, k_2, P_1, P_3, P'_4, z, A, T_D);
properties of sludge and filter medium (b_1, b_m, x);
other invariable costs (C'_f);
number of annual operation hours (T).

If it is required only to find out as to for what optimum filtrate volume the amortisation of filtering equipment corresponding to unit product is minimum; for the case a) we obtain:

$$c_P = \frac{PD}{C_n V} = \frac{PD}{T}\left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V}\right) \quad . \tag{20}$$

Eq. (2) is the solution of (20). In this case (e.g. in case of chamber filter presses) minimum specific amortisation cost is achieved for that optimum filtrate volume which assures maximum filtrate throughput.

For the case b):

$$C_P = \frac{D}{T}(a + bV)\left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V}\right), \tag{21}$$

$$2b_1 b V^3 + (b_1 a + b_m b)\, V^2 - t_d a = 0. \tag{22}$$

Eq. (22) is a simplified form of polynom (19) because variable cost factors and invariable costs excluding purchase cost of the filter are lacking. Thus, the amortisation cost corresponding to unit filtrate volume of the classical plate-and-frame filter would be minimum for the filtrate volume satisfying Eq. (22).

Variation 2

a) *For* $P =$ *constant.*

$$c = \frac{C_v + PD + C_f'}{T} \cdot \frac{t_c}{V}, \text{ will give known Eq (2).} \tag{23}$$

This could also be expected from (17) if $k_1 = k_2$.

b) *For* $P \neq$ *constant*, i.e.

$$P = a + bV = f(V),$$

$$c = \frac{C_v + aD + bDV + C_f'}{T}\left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V}\right) = f(V), \tag{24}$$

$$2b_1 bDV^3 + [b_1(C_v + aD + C_f') + b_m bD]\, V^2 - t_d(C_v + aD + C_f') = 0. \tag{25}$$

Polynom (25) can be deduced from (19) also if $1/T_D = D/T$ and $k_1 = k_2 = C_v/T$ are substituted in (19).

Variation 3

$$c = \frac{tk_1 + t_d k_2}{V} + \frac{C_f t_d}{TV}, \tag{26}$$

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1} \frac{k_2 + \frac{C_f}{T}}{k_1 + \frac{C_f}{T}}} \,. \tag{27}$$

Eq. (27) is a reduced form of (17). Eq. (27) can be deduced from (17) if $1/T_D = D/T$ is substituted and then $PD + C_f' = C_f$ simplification is introduced.

Variation 4

$$c = \frac{C_v + C_f}{C_n V} = \frac{C_v + C_f}{T} \left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V} \right) = f(V). \tag{28}$$

Solution of specific cost Eq. (28) is the well-known Eq. (2) which can be obtained from the relationship $Q = V/t_c$. That is why, many times in industrial practice, minimum specific filtration cost is determined by optimum filtrate volume corresponding to maximum filtrate throughput.

Variation 5

$$c = c_t + c_d + c_3 + c_4 \,.$$

This can be first solved graphically. Each term can be expressed as a function of filtrate volume as follows:

$$c_t = \frac{tk_1}{V} = b_1 k_1 V + b_m k_1 = f(V). \tag{29}$$

Eq. (29) represents a straight line shown in Fig. 1.

$$c_d = t_d k_2 \frac{1}{V} = f(V). \tag{30}$$

Fig. 1 also shows the hyperbola represented by Eq. (30).

$$c_3 = \frac{Tk_3}{C_n V} = k_3 \left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V} \right) = f(V) \tag{31}$$

$$c_4 = \frac{Ak_4}{C_n V} = \frac{Ak_4}{T} \left(b_1 V + b_m + \frac{t_d}{V} \right) = f(V) \tag{32}$$

V_{opt} obtained from (31) and (32) separately will be equal and they assure maximum throughput to which c_{3min} and c_{4min} relate. Finally, graphical summation of different cost factors has been carried out in Fig. 1.

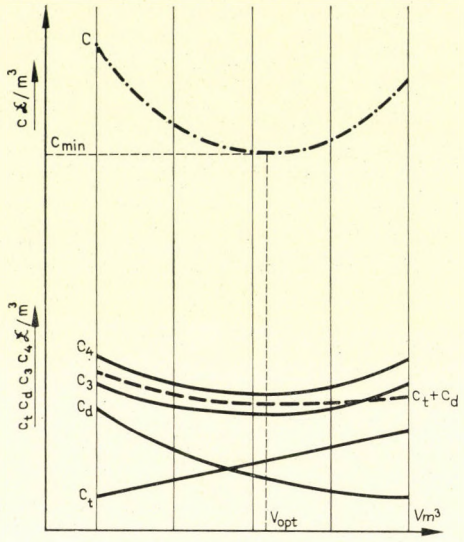


Fig. 1

The basic equation of the fifth variation and the result of its analytical solution are as follows:

$$c = \frac{C_n(tk_1 + t_d k_2) + Tk_3 + Ak_4}{C_n V}, \tag{33}$$

$$V_{opt} = \sqrt{\frac{t_d}{b_1} \frac{k_2 + k_3 + \frac{Ak_4}{T}}{k_1 + k_3 + \frac{Ak_4}{T}}}. \tag{34}$$

Eq. (34) is theoretically of similar nature as Eq. (17), obtained in case a) of variation 1. The only difference between the two equations lies in the method of expressing the invariable cost factors.

Variation 6

If the variable cost is not distributed into those corresponding to filtration and down times, then from the cost equation:

$$c = c_v + c_3 + c_4 .$$

Also, optimum filtrate volume equation corresponding to maximum filtrate throughput can be obtained, similar to case a) of variation 2.

3. Summary and conclusions

The effect of different cost factors on minimum specific filtration cost can be briefly summarised in the following:

Examination of different cost factors separately is, first of all, justified in the case of big filter plants, mainly, if so many classical filters are operating for which the running cost per unit down time is higher than that per unit filtration time.

In case of small filtration plants with only a few filter units and automatic pressure filters as well as in the case when $k_1 = k_2$, filtration cost can be calculated in one. In such cases, minimum specific filtration cost is achieved by the use of optimum filtrate volume corresponding to maximum filtrate throughput, i.e. the given filter unit can be set up to optimum without taking into consideration the cost factors.

Acknowledgements

The author expresses his heartfelt thanks to the Dept. of Chemical Engineering, Loughborough University of Technology and to the Mining Research Group of the Hungarian Academy of Sciences for their support in this research work. He has to personally thank Prof. D. C. FRESHWATER (Loughborough University, England) and Prof. G. TARJÁN (Miskolc University, Hungary) for their valuable suggestion in the preparation of this article.

REFERENCES

1. PURCHAS, D. B.: Filtration Theory can be Useful. *Chemical Product* (1957) 149—151.
2. COULSON, J. M.—RICHARDSON, J. E.: *Chemical Engineering*, Vol. II, Unit Operations, 432. pp.
3. HORVÁTH, L.: Vákuumszűrők és présszűrők szűrőteljesítmény egyenletei. *Bányászati és Kohászati Lapok — Bányászat* (Throughput Equations for Vacuum and Pressure Filters. In Hungarian.) (1968), 722—724.
4. HORVÁTH, L.: Új optimalizációs egyenletek a présszűrők maximális szűrőteljesítményének számítására. *Bányászati és Kohászati Lapok — Bányászat* (New Optimisation Equations for Determining the Maximum Filter Throughput of Filter Presses. In Hungarian.) (1968), 781—785.
5. HORVÁTH, L.: Présszűrők szűrőlapszámának optimálása. *Bányászati és Kohászati Lapok — Kohászat* (Optimisation of Filter Plates Number for Filter Presses. In Hungarian.) (1969), 425—426.
6. SKELLAND, A. H. P.: Optimum Filtration Cycles. *Chemical and Process Engineering* (1962), 78—80.
7. HORVÁTH, L.: Analysis of the Minimum Manufacturing Cost of a Pressure Filtration Process at Constant Pressure. *Publications of the Technical University for Heavy Industries*, Miskolc (Hungary) **28** (1969), 97—111.
8. SCHWEYER, H. E.: Process Engineering Economics. McGraw-Hill Book Co., Inc. New York and London 1955, pp. 82—92 and 261—266.

9. HORVÁTH, L.: Új optimalizációs egyenletek a présszűrők minimális szűrési költségének számítására. *Bányászati és Kohászati Lapok — Bányászat* (New Optimisation Equations for Determining the Minimum Manufacturing Cost of a Pressure Filtration Process. In Hungarian.) (1969), 131—133.
10. HORVÁTH, L.: A présszűrés minimális költségének meghatározása, különös tekintettel a gazdasági paraméterekre. *Bányászati és Kohászati Lapok — Kohászat* (Role of Cost Factors in Determining the Minimum Manufacturing Cost of a Pressure Filtration Process. In Hungarian.) (1969), 447—454.

Die Rolle der Kostenfaktoren bei der Optimierung der Filterpressen mit konstantem Druck. Die Arbeit bespricht den Einfluß der verschiedenen Kostenfaktoren bei der Bestimmung der minimalen Filtrierkosten von Filterpressen mit konstantem Druck, und befaßt sich auch damit, welche der verschiedenen Formeln für die Optimierung der Filtriergeräte für welche Typen von Filterpressen, und unter was für Betriebsverhältnissen, am vorteilhaftesten angewendet werden kann.

Роль факторов расходов при оптимализации пресс-фильтрации постоянного давления *(Л. Хорват)*. В статье излагается воздействующая роль различных факторов расходов, фильтрации при пресс-фильтрации периодического режима и постоянного давления. В дальнейшем статья занимается тем, что которая из различных формул оптимализации, применяемых для оптимализации фильтр-аппаратов, пригодна для какого типа пресс-фильтра, и при каких режимах работы может быть использован некоторый данный тип наиболее выгодно.

INDEX

Benedikt, O.: Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter magnetischer Kreise bei der Anwendung der elektronischen Rechenmaschine — The Nomographic Computation of Complicated Magnetic Circuits with Computer — *Венедикт, О.:* Комбинация номографического метода расчета сложных магнитных цепей с применением електронной вычислительной машины 3

Szabó, J.—Rózsa, P.: Große Verschiebungen von Stabkonstruktionen — Large Displatements of Trusses — Большие смещения стержневых конструкций 53

Szőke, B.: Elastische Schwingungen in Wälzlagern, II. Teil — Elastic Vibrations in Rolling Bearings, Part II. — *Сёке, Б.:* Эластичные колебания подшипников качения, II. Вращающаяся масса не уравновешена относительно своей собственной оси 61

Budincsevits, A.: Dispenser Cathodes with High Current Density — Vorratskathoden mit hoher Stromdichte — *Будинчевич, А.:* Катоды с непрерывным восстановлением активного слоя и большой плотностью тока 83

Weber, Gy.: New Method for the Determination of Difference Operators for Plates and Grids — Ein neues Verfahren zur Ermittelung von Differenzoperatoren in Zusammenhang mit Platten und Trägerrosten — *Вебер, Г.:* Новый метод определения дифференциальных операторов в связи с плитами и балочными решетками 97

Hajdu, L.—Zahorán, J.: Recent Research Results in the Field of Hermetically Sealed Miniature Zinc-Silver Storage Batteries — Neue Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der hermetisch verschlossenen Miniatur- Zink-Silber-Akkumulatoren — *Хайду, Л., Захоран, Я.:* Новые результаты исследований в области герметизированных миниатюрных серебряно-цинковых аккумуляторов 117

Reményi, K.: Influence on the Ignition of the Injected Fuel Exerted by Heat Transfer and Material Motion — Über die Wirkung der Wärme- und Stoffbewegung auf die Entzündung des aus dem Brenner strömenden Brennstoffes — *Ремени, К.:* О воздействии движения тепла и материала на воспламенение топлива, истекающего из форсунки 143

Zámbó, J.—Molnár, L.: Causes of the Partial Dissolution of the Vanadium Content in the Bayer Processing of Hungarian Bauxites — Ursachen des teilweisen Inlösungsgehens des Vanadiumgehalts bei der Verarbeitung der ungarischen Bauxite nach dem Bayer-Verfahren — *Замбо, Я., Мольнар, Л.:* Причины частичного растворения содержания ванадия при переработке венгерских бокситов методом Байера 151

Varga, L.: Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally Anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function — Behandlung der Biegetheorie von zylindrischen Schalen aus orthogonal anisotropischem Material mittels Einführung der Verschiebungsfunktion — *Варга;* Л.: Трактовка теории изгиба цилиндрических оболочек из ортогонально анизотропного конструкционного материала 175

Roósz, A. – *Fuchs, E.*: Auflösung eutektischer Phasen während des Lösungsglühens in Gußlegierungen — Kinetics of the Dissolution of Eutectic Phases in Cast Alloy Structures — *Рос, А., фукс, Е.:* Кинетика растворения эвтектических фаз в структуре литых сплавов 195

Horváth, L.: Determination of the Optimum Number of Filter Plates for Filter Presses — Bestimmung der optimalen Anzahl der Filterplatten von Filterpressen — *Хорват, Л.*: Определение оптимального числа фильтрующих элементов пресс-фильтров 209

Singer, D.: Network Theory of Bar Structures — Über die Netzwerktheorie der Stabkonstruktionen — *Сингер, Д.*: О сетевой теории стержневых конструкций 217

Reményi, K.: Analysis of Ignition Problems Concerning Stability of Burners in Pulverized Coal Combustion Systems — Analyse von Zündungsfragen in einer Staubkohlenfeuerung mit Rücksicht auf die Brennerstabilität — *Ремени, К.*: Анализ проблем воспламенения, возникающих в случае пылеугольных топок, с точки зрения стабильности пылеугольных горелок 237

Horváth, L.: Role of Cost Factors in the Optimisation of Filter Presses Operating at Constant Pressure — Die Rolle der Kostenfaktoren bei der Optimierung der Filterpressen mit konstantem Druck — *Хорват, Л.:* Роль факторов расходов при оптимализации пресс-фильтров постоянного давления 257

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. III. 10. — Terjedelem: 23,5 (A/5) ív, 89 ábra

72.73253 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 3—51

BENEDIKT, O.: *The Nomographic Computation of Complicated and Highly Saturated Magnetic Circuits with Computer*

Author succeeded in making possible the application of the nomographic method — elaborated by himself and detailed in his book: "The Nomographic Computation of Complicated and Highly Saturated Magnetic Circuits" (Akadémiai Kiadó 1960) — to a computer and thereby in developing remarcably his method. For throwing light upon the significance of the problem, he points out briefly the deficiencies in the usual computing methods taught untill now, and describes how these could simply be eliminated by making use of his nomographic method. Hereafter, the methods of calculation of the saturated magnetic circuits by using computers known so far are surveyed, and it is pointed out why the use of these latter for the nomographic method caused difficulties. Lastly, the possibility to overcome the difficulties mentioned, discovered not long ago by the author, is presented.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 53—60

SZABÓ, J.—RÓZSA, P.: *Large Displacements of Trusses*

In analysing large displacements of lattice structures, the instantaneous position of the structure associated with the displacement should be considered by the equilibrium equations. Author assumes that the geometric position of the lattice structure is a continuous derivable function of the displacements. The set of linear differential equations with variable coefficients for large displacements will be established. The hyper-matrix coefficients of the set of equations is a function of displacement and stress state of the truss. The algorithm of the solution to the problem of the initial value of large displacement is given.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 61—81

SZŐKE, B.: *Elaestic Vibrations in Rolling Bearings. Part II.: The Rotating Mass in not Balanced with Respect to its Centre Line.*

In this part of the paper a glance is thrown to some phenomena connected to a rotating force and an assumption is attempted according to which the displacement of the rolling elements caused by the rotating force generates a deformation in consequence of which the rolling movement of those elements takes place on the smallest area possible.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 83—95

BUDINCSEVICS, A.: *Dispenser Cathodes with High Current Density*

The operation principle of the "L" cathode, its characteristic features and the possibilities of applying it, are discussed by the author, and considerably simplified as compared to the cathode of LEMMENS and others. The new version of "L" cathode design in a tube form, so-called "M" cathode, is presented in which, instead of porous sintered tungsten, wire is used The method of preparing flat "L" cathodes with porous tungsten layer pressed directly in molybdenum tube and sintered is presented. Emission properties of developed cathodes are given.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 97—115

WEBER, GY.: *New Method for the Determination of Difference Operators for Plates and Grids*

A grid model is described wherewith the biharmonic difference operators may be produced by taking into account the most different boundary conditions. The divergences between the boundary conditions of the actual free-edge plates and grids are demonstrated. This method of production of the difference operators has been developed and succesfully utilized for the purpose of computer programming.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 117—141

HAJDU, L.—ZAHORÁN, J.: *Recent Research Results in the Field of Hermetically Sealed Miniature Silver-Zinc Storage Batteries*

The author presents the operation of the so-called "double depolarizer" system which essentially consists in using a second depolarizer composed mainly of cadmium oxyde, besides the silver oxyde main depolarizer. This permits to develop in the cell characteristic a voltage level below the nominal one. In addition to the operating mechanism of the silver electrode the authors describe the parameters of a storage cell which can be operated in the so-called "monoxide phase" with a capacity equal to that of a traditionally arranged cell.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 143—150

REMÉNYI, K.: *Influence on the Ignition of the Injected Fuel Exerted by Heat Transfer and Material Motion*

When, with due consideration of ignition, the extension of the recirculation zone is changed by a spinning motion, re-circulation should be generated from a zone from which a re-mixing of combustion products, having a high temperature, and of already burning parts of flame can be effectuated. Ignition conditions should not be altered by the quantity of returning inert gases. With regard to the actual state of ignition, it is advisable to convey into the combustion chamber a fuel-air mixture at an elevated temperature in order to lessen the need of heat to be transferred from the surroundings. By intensifying the spinning motion, the resulting velocity of a turbulent ignition acts as an accelerator of the flame expansion velocity. This involves intensification of ignition, improvement of burner stability and decrease of flame dimensions, too.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 151—174

ZÁMBÓ, J.—MOLNÁR, L.: *Causes of the Partial Dissolution of the Vanadium Content in the Bayer Processing of Hungarian Bauxites*

On the basis of literary data, authors enumerate the forms of vanadium occurrence in nature, and survey the possibility of their appearance in connection with bauxites. In the experimental part they discuss the correlation between the components and vanadium content of bauxite, and the potential increase of dissolution. In conformity with the present geochemical knowledge, the test results reveal that, in the case of Hungarian bauxites, a greater part of the vanadium content is discovered as an isomorphous contaminant of the iron minerals (mainly goethite) and, therefore, it cannot be recovered under the usual operational conditions. An increased dissolution can only be expected through the thermal or hydrothermal decomposition, or the reduction of the goethite structure.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 175—194

VARGA, L.: *Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally Anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function*

The general bending theory of cylindrical shells of orthogonally anisotropic structural material (e.g. glass reinforced plastic) in the case of edge loads normal to the shell surface is discussed. First, the correlations between internal forces and deformation are explained, then the differential equations of bending are presented. This homogeneous differential equation system is solved by introducing the displacement function. Determination of the displacement function and bending stress state in the case of periodically changing edge loads acting along the generatrix and the great circle is dealt with in detail. On the basis of the relations thus derived, the bending stress state caused by an edge load varying according to an optional function, readily described by the Fourier series, can also be determined. Finally, a numerical example illustrating the root development of the characteristic equation is shown.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 209—216

HORVÁTH, L.: *Determination of the Optimum Number of Filter Plates for Filter Presses*

The paper first summarises the methods of optimisation of filter plate number in case of batch filter presses operating at constant pressure, to be found in technical literature, and further develops them to such forms which can be directly used for operational conditions in industry, too. Finally, those equations have been modified so that they can be used to determine optimum filter plate number for different types of pressure filters.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 217—235

SINGER, D.: *Network Theory of Bar Structures*

The network theoretical basis of bar structure statics was explained. It was demonstrated that, as compared to hitherto matrix techniques, the network concept would permit a deeper formulation of the problems encountered. Diacoptic methods so far hardly employed in bar structure statics was thoroughly dealt with, and the derivation of a fundamental relation in bar network diacoptics was presented. Finally, the relative time saving to be achieved by the application of this method was estimated.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 237—251

REMÉNYI, K.: *Analysis of Ignition Problems Concerning Stability of Burners in Pulverized Coal Combustion Sytems*

A great many problems relating to ignition conditions of an air-pulverized coal mixture are not cleared up yet. The process of pulverized coal ignition involves reaction phenomena, homogeneous and heterogeneous alike; of course, an attempt to deal with these questions reveals a lot of disputable matter, especially from the viewpoint of the kinetic theory of gases. Ignitability is mostly defined by flame propagation velocity, or just as an ignition velocity; in this line, research work concerns the influence of various parameters, chemical and physical. Therefore, when dealing with ignition conditions, the interaction between chemical and physical properties should be taken as a basis. As regards a stable ignition, the influence of the blowing velocity of the primary agent is considerable. When assessing the optimum of a recirculation in the combustion chamber, the result is influenced by the heat quantity re-transferred by the formation of igniting nuclei, and by re-mixed inert gases. A larger content of volatiles in the coal involves an increased flame propagation velocity. Anyhow, the flame propagation velocity counts for a value of minor importance when the combustion process in a system of pulverized coal burners is considered.

Acta Techn. Hung. **73** (1972), 253—264

HORVÁTH, L.: *Role of Cost Factors in the Optimisation of Filter Presses Operating at Constant Pressure*

The article deals with the role of different expense factors influencing the minimum filtration cost for batch pressure filters operating at constant pressure. It further discusses the different optimisation equations with regard to their applicability to different types of pressure filters under different operating conditions to achieve the best results.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 16.00 a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 16.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, английском, французском и немецком языках.

«*Acta Technica*» выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 16.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA

Drejtorija Qändrone e Pärhapjes dhe Propagandimit tä Librit
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

GLOBUS
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St.-Jean
Bruxelles

BULGARIA

HEMUS
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arska Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
SLOVART A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay-Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import Department
Dennington Estate
Wellingsborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4—5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
Techna
Via Cesi 16.
40135 Bologna

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41—43
Oslo 1

POLAND

Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucureşti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31. East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

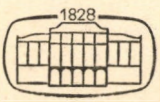
26. X. 1972. **Index: 26.025**

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 73
FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1972

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
LÉVAI ANDRÁS

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten. Abonnementspreis pro Baud: $ 16.00

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 265—277 (1972)

OVERHEAD LINES WITH INSULATED PHASE CONDUCTORS

P. O. GESZTI*
CORR. MEMBER OF THE HUNG. AC. OF SC.
and
J. PATKÓ

[Manuscript received July 5, 1971]

In the steady-state operation of high-voltage overhead transmission lines, the dielectric strength of the air may break down partially causing thus corona effects; during transient states short-circuits may occur between a phase conductor and the earth or between phase conductors mainly due to the switching overvoltages. For eliminating or reducing these effects the authors propose to coat the phase conductors with a thin, smooth, self-cleaning insulation layer. The thermal load capacity of the line would not change at all, or only insignificantly. The results of measures showed that the critical voltage (and the corona loss too) are considerably reduced by the insulating layer covering the surface of the cable, and the resistance against switching overvoltages is considerably improved as well.

1. Introduction

In the construction of high-voltage overhead lines the insulation of the phase conductors cause many problems. This chiefly means the problems of insulation by air of the phase conductors, because during steady-state operation this insulation may partly break down, which phenomenon causes the corona effect.

As far as high voltage lines in transient state are concerned, the switching overvoltages should be mentioned which may cause short-circuits between a phase conductor and the earth or between two phase conductors.

It is an obvious idea to examine a solution where the phase conductors are covered with a thin, smooth, selfcleaning insulation layer which does not alter the thermal capacity of the line, or at least not essentially and which insulation might be suitable for favourably influencing the corona effect as well as the arcing due to the switching overvoltages.

The authors think that such a thin insulation, which is not suitable for insulating the whole phase voltage but only a small part of it, must — among others — have the effect that the alternating voltage does not — or at least, only insignificantly — generate a space charge in the vicinity of the conductor (under normal conditions with stationary phenomena) and that under switching overvoltages it prevents breakdowns through the air (such

* Prof. Dr. P. O. Geszti, Jagelló u. 13, Budapest XII., Hungary.

an insulating layer can also be adapted for the armatures at the end of the insulation chains).

In the present paper the authors present the results of investigations carried out — so far under laboratory conditions — with insulated conductors in order to examine

a) the corona phenomena,

b) the breakdowns due to the switching overvoltages.

The authors are fully aware that laboratory experiments are not unconditionally conclusive for real conditions even in case of favourable results. They are convinced that even in this case prolonged research is needed in order to clarify how a system with insulated phase wire behaves under conditions of contamination, with various precipitations and naturally experiments must be carried out with a synthetic material which is stable under outdoor conditions for a long time and meets the various requirements of overhead transmission lines.

2. The corona effect

In designing transmission lines for 120 kV or higher nominal voltage, it is one of the principal points of view to consider the corona effect conditions. Under unfavourable circumstances above the losses, acoustic and radio interference may be considerable.

The increase of corona losses is caused by the diminuation of the corona threshold voltage (U_k). This may cause especially large disturbances if the corona threshold voltage drops below the phase voltage. The corona threshold voltage can be increased, among others, by the insulating layer applied to the conductor.

The conductors of high-voltage transmission lines have small corona losses already at operating voltages but under unfavourable meteorological conditions, the corona loss is considerably greater.

The authors have investigated the above ideas by measurements too. Some theoretical relations concerning the measurements are presented in the Appendix.

The data of the cables used in the tests were:

D_{bare} = 18 mm diameter
D_{ins} = 24 mm diameter
v_{ins} = 3 mm (thickness of insulating layer)
$d_{\text{elem. wire}}$ = 2,5 mm diameter
n_{ac} = 7 (number of steel wires)
n_{Al} = 30 (number of aluminium wires)

Measurements were made with 3 different cables:

a) bare cable,
b) cable with *F* type plastic layer,
c) cable with *K* type plastic layer.

Comparative measurements were made on blank cables of 240, 300, 600 mm^2 nominal cross section and on smooth metal cylinders of 30 and of 50 mm diameter.

The increase of the corona effect threshold voltage was determined from the dependence of the loss factor (tan δ) on voltage. The loss factor was measured with a Schering bridge (Fig. 1). (This bridge is also suitable for directly

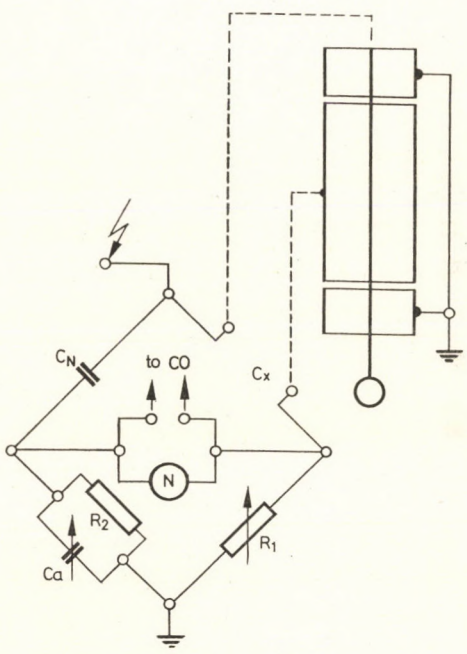


Fig. 1. Circuit of the Schering bridge

indicating the beginning of the corona effect.) An oscilloscope was connected to the bridge on the screen of which the starting of the corona effect could be directly observed. The U_k determined in this way was always smaller than the U_k determined from the tan $\delta(U_k)$ curves.

For measuring the loss factor a suitable electrode system had to be arranged. Fig. 2 shows that the examined cable is placed in the axis of a cylinder. The two ends of the external cylinder are insulated from the central part and are connected according to the Fig. 1.

Fig. 3 shows the result of the measurements carried out on the cable covered with F type insulation (b), and also with an additional metal foil. The role of the metal foil was to demonstrate the effect of increasing the diameter (metal instead of plastic).

Fig. 4 shows the results of the cables covered with K type insulation (c), with and without metal foil coating.

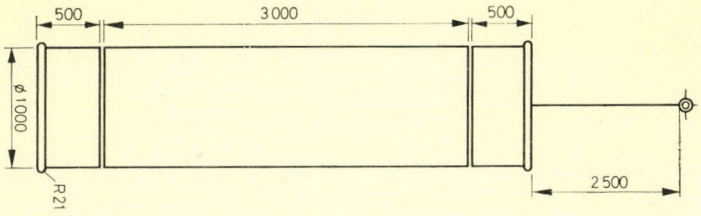


Fig. 2. Test specimen

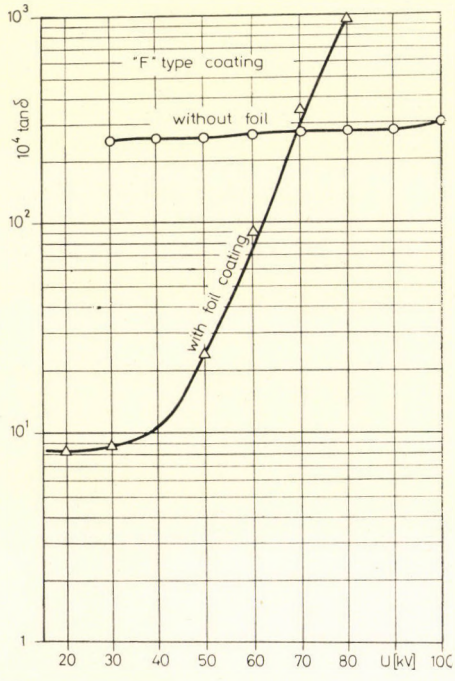


Fig. 3. tan $\delta(U)$ for coating F, until 100 kV

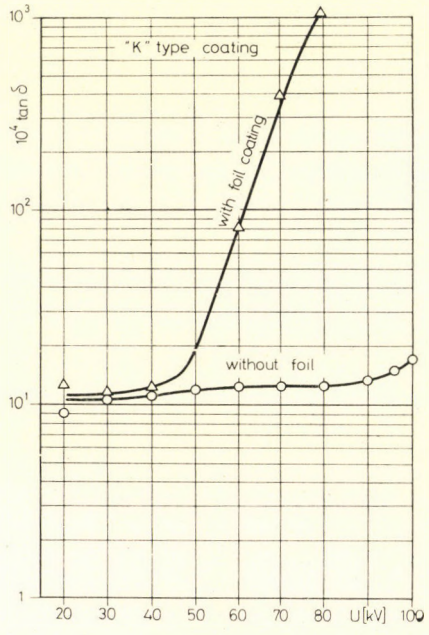


Fig. 4. tan $\delta(U)$ for coating K, until 100 kV

Fig. 5 shows together the results of the measurements a, b and c, i.e. of the cable without insulation, with F and with K type insulation, respectively.

It is evident that e.g. in the vicinity of the phase voltage of a 120 kV network ($120/\sqrt{3} \approx 60$ kV) the cables with layers b and c are both better than

the bare cable.

$$\tan \delta_a \approx 820 ,$$
$$\tan \delta_b \approx 270 ,$$
$$\tan \delta_c \approx 12{,}5 .$$

This means that in the case c when using the K layer the loss is approximately the 820/12,5 $\approx$ 65th part of the corona loss occuring in the cased bare cable.

The other advantage of the coated cable is that for a small increase of the voltage (10% may occur) the loss factor is not increased or hardly, while the corona loss of a bare cable rapidly rises.

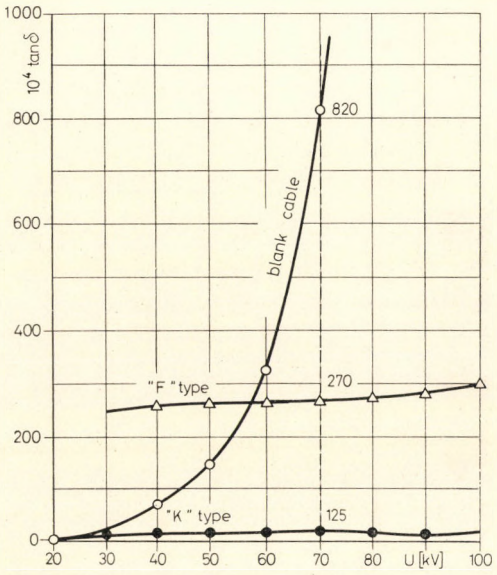


Fig. 5. tan $\delta(U)$ for bare conductor and for coatings F and K, until 100 kV

The cables covered with plastic were then provided with an additional metal foil, in order to show that U_k can be reduced somewhat by solely increasing the diameter of the bare wire. (Due to the not perfect smoothness of the metal foil surface these curves are in cases b and c only informative.)

The results of the measures clearly show that for a considerable domain (within the application zone) the corona loss (and also the space charge) can be reduced by one order of magnitude and even more by an insulation layer. This favourable effect of the insulating layer is lost only at extremely high voltages (which anyhow are outside the domain of application).

The measurements also showed that the reduction of losses is far more important than can be attained by increasing the diameter and the surface

smoothness. The some percents magnitude voltage taken up by the insulating layer — which may be a quite thin layer — cannot greatly improve the situation either in such a way. The authors attribute the main cause to the fact that the insulating layer prevents the emission of electrons from the metal — quasi from an infinite storage tank — and thus space charges can develop only corresponding to the very small leakage current, i.e. the development of the space charges is strongly hindered and reduced.

3. Switching overvoltages

Experiments were carried out with the above insulated cables and with two parallel bare tubes of diameters equal to that of the cables and placed with 190 cm spacing. The voltage wave used was 300/3000 μsec, positive. According to the tests the 50% breakdown voltage between the two bare tubes was approx. 100 kV_{peak}, corresponding to a circ. 900 kV_{peak} withstand voltage.

For the insulated conductors the results were as follows. Three shocks at 1200 kV_{peak} were withstood forthwith. At 1300 kV_{peak} two shocks were resisted, but the third was not. So the withstand voltage can be appreciated at 1200 kV_{peak} and the increase of the withstand voltage due to the insulation was 300 kV_{peak}, equivalent to 33%. In this sense, due to the presence of the 3 mm insulation layer, a considerable improvement in the resistivity against switching overvoltages could be observed.

4. Summary

In the laboratory tests of high-voltage overhead transmission lines with insulated phase conductors, the use of a thin insulation layer considerably improved the behaviour against corona effects and switching overvoltages.

Possibly, after finding a suitable insulating material, considerable technical and economical advantages can be drawn from the use of an overhead line with insulated phase conductors.

The authors wish to express their thanks to Dr. Gábor BÁN who carried out the measurements related to switching overvoltages.

APPENDIX

1. Some theoretical relations referring to the measurements are presented hereafter.

$$E_{max} = f E_{average} = \frac{1}{\eta} E_{average}$$

where $f > 1$ is the factor of inhomogenity,
$\eta < 1$ is the so-called coefficient of utilization, or else

$$E_{\max} = kU = \frac{U}{\alpha}$$

where k is a characteristic depending on geometrical configuration,
α is the so-called virtual electrode distance.

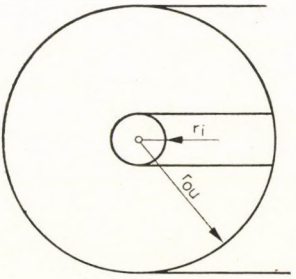


Fig. 6. Coaxial cylinder with smooth conductor

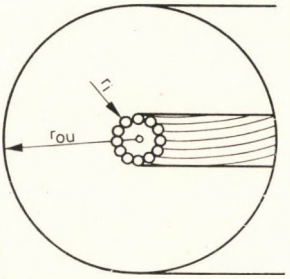


Fig. 7. Coaxial cylinder with cable

The maximum field strength — as a function of voltage — was determined for two cases (of the conductor used in the tests):

a) the surface of the conductor is smooth,

b) the conductor consists of elementary wires (cable).

In one case — coaxial cylinders — allowing the inner electrode to be a smooth metal cylinder (Fig. 6), in the other case the inner electrode is a cable consisting of 37 elementary wires (Fig. 7). The dimensions of the coaxial cylinder are:

$r_i = 0{,}9$ cm
$r_0 = 50$ cm
$n' = 37$ (number of elementary wires)
$n = 18$ (number of wires in the exterior layer)

In the first case the field strength is given by

$$E_{\max} = \frac{U}{r_a \ln \frac{r_k}{r_b}} = \frac{1}{0{,}9 \ln \frac{50}{0{,}9}} U = 0{,}278\ U$$

In the second case

$$E_{\max \text{ cable}} = \frac{\lambda U}{r_b \left(n \ln \frac{r_k}{r_b} + \ln \frac{\lambda}{n} \right)}$$

where

$$\lambda = n\left(1 + \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{n}}\right) = 18\left(1 + \frac{1}{18 \sin \frac{\pi}{18}}\right) = 22{,}65 \ .$$

Hence

$$E_{\max \text{ cable}} = \frac{\lambda}{r_b\left(n \ln \frac{r_k}{r_b} + \ln \frac{\lambda}{n}\right)} U = \frac{22{,}65}{0{,}9\left(18 \ln \frac{50}{0{,}9} + \ln \frac{22{,}65}{18}\right)} U \ .$$

$$E_{\max \text{ cable}} = 0{,}348 \ U$$

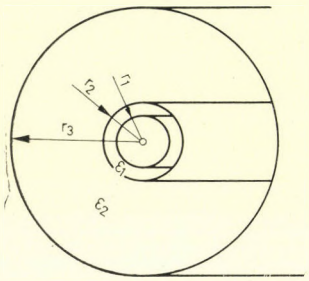


Fig. 8. Coaxial cylinder arrangement with stratified insulation

On the surface of the cable the field strength in this case is

$$\frac{E_{\max \text{ cable}}}{E_{\max}} = \frac{0{,}348 \ U}{0{,}278 \ U} = 1{,}25 \text{ times}$$

larger.

The maximum field strength in the air was calculated, if the conductor of radius r_1 is coated with plastic (Fig. 8). The dimensions are:

$$r_1 = 0{,}9 \text{ cm},$$
$$r_2 = 1{,}2 \text{ cm},$$
$$r_3 = 50 \text{ cm}.$$

At the place $r_2 - r_1$ there is a material of permittivity ε_1, at the place $r_3 - r_2$ a material of permittivity ε_2.

$$\varepsilon_1 = 3{,}5,$$
$$\varepsilon_2 = 1 \text{ (air)}.$$

On the insulation, the maximum field strength arises at radius r_1,

$$E_{1\max} = \frac{U}{r_1} \frac{1}{\varepsilon_1 A} \ .$$

In the air the field strength is maximum at radius r_2,

$$E_{2\max} = \frac{U}{r_2} \frac{1}{\varepsilon_2 A}$$

where

$$A = \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{3{,}5} \ln \frac{1{,}2}{0{,}9} + \frac{1}{1} \ln \frac{50}{1{,}2} = 3{,}8 \ .$$

Hence

$$E_{1\,\max} = \frac{1}{r_1\,\varepsilon_1\,A} = \frac{1}{0{,}9 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}8}\,U = 0{,}084\;U$$

$$E_{2\,\max} = \frac{1}{r_2\,\varepsilon_2\,A} = \frac{1}{1{,}2 \cdot 1 \cdot 3{,}8}\,U = 0{,}22\;U\,.$$

The dielectric strength of the air belonging to $r_1 = 0{,}9$ is

$$E_{ds\,r_1} = 40/\sqrt{2}\ \text{kV/cm},$$

and to $r_1 = 1{,}2$ cm belongs

$$E_{ds\,r_2} = 37/\sqrt{2}\ \text{kV/cm}.$$

Here the latter value is of interest.

$$E_{2\,\max} = 0{,}22\;U \rightarrow U = \frac{E_{ds\,r_2}}{0{,}22} = \frac{37}{0{,}22\sqrt{2}} = 119\ \text{kV}.$$

At this voltage the dielectric strength of the air breaks down already.

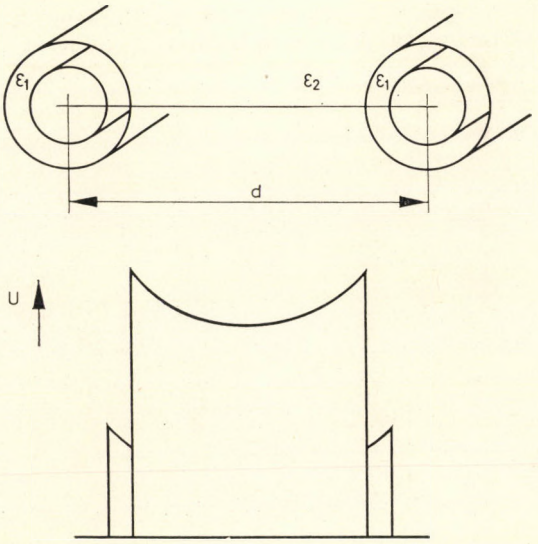


Fig. 9. Parallel cylinders not enveloping each other, with stratified insulation, and their potential distribution

The best approximation of the real conditions is not the coaxial cylinder arrangement, but the field of the parallel cylinders with small radii (Figs 9, 10), the cylinders being covered with plastic. In the field of stratified insulators the voltage is

$$U_{AB} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\ln\frac{d_{X_1}}{d_{A_1}} + \ln\frac{d_{B_1}}{d_{Y_1}}\right) + \frac{1}{\varepsilon_3}\ln\frac{d_{Y_1}}{d_{X_1}}\right] -$$

$$- \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\ln\frac{d_{A_2}}{d_{X_2}} + \ln\frac{d_{Y_2}}{d_{B_2}}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{d_{X_2}}{d_{Y_2}}\right].$$

Let us assume that $Q_1 = +Q$ and $Q_2 = -Q$, then the field strength at the point F is

$$E_F = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_F \varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{d_{1F}} + \frac{1}{d_{2F}}\right).$$

From these two relations the field strength is

$$E_F = U_{AB}$$

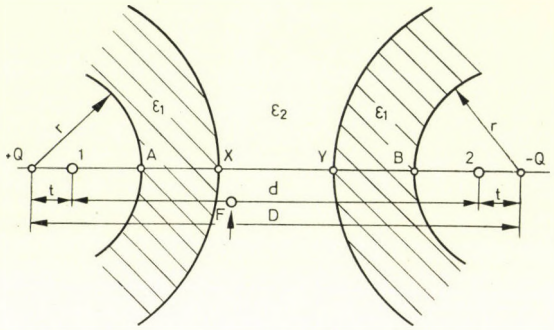


Fig. 10. Cylinders not enveloping each other, with stratified insulation (enlargement)

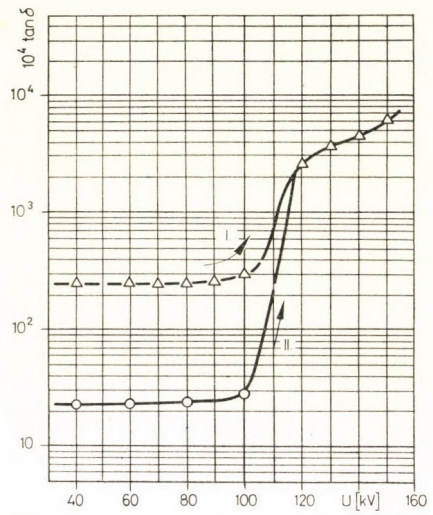


Fig. 11. tan $\delta(U)$ for cable type F measured until 150 kV

2. For the sake of completeness the measurements were extended up till 150 kV. Fig. 11 represents the conductor with F type coating. Curve I shows the results of the first measurement, curve II the results of the second measurement. Presumably such voids were present in the synthetic insulation when there was corona at the first measurement and there was no corona at the second measurement (possibly having been rigidified at the first measurement).

Fig. 12 shows the tan $\delta(U)$ diagram of the bare cables and tubes, while Fig. 13 shows the tan $\delta(U)$ diagrams of the 240 mm² cable for the bare and for the insulated conditions.

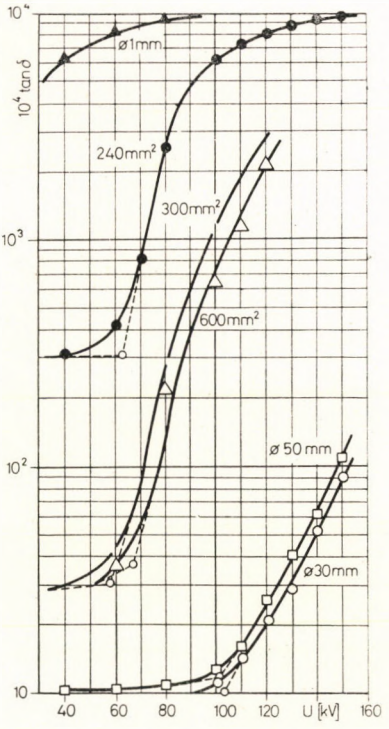


Fig. 12. tan $\delta(U)$ measured on bare cables and tubes up till 150 kV

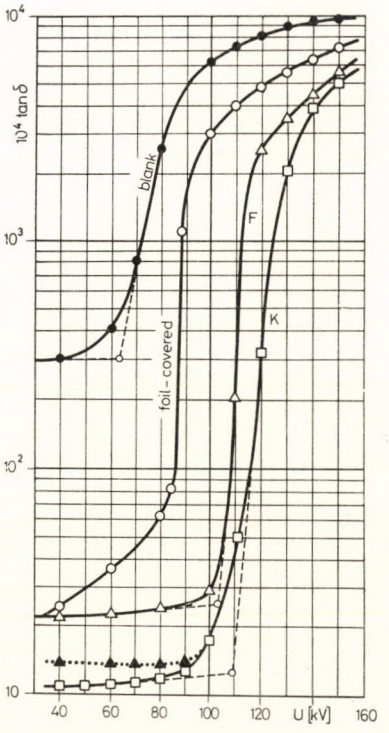
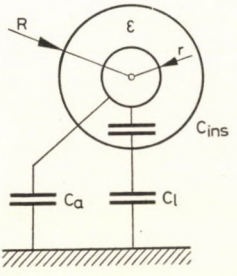


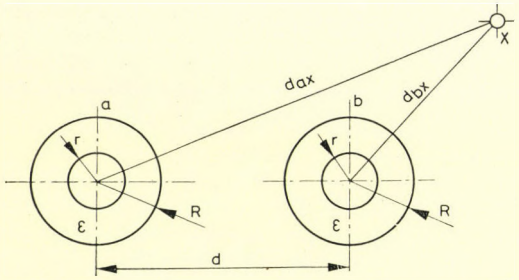
Fig. 13. tan $\delta(U)$ measured on bare *F*-coated and on *K*-coated 240 mm² cable



$$C_a = \frac{1}{18 \ln \frac{d}{\sqrt[\varepsilon]{R^{(\varepsilon-1)} r}}} = \frac{1}{18 \left[\ln \frac{d}{R} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r}\right]} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{R}{r}}\right) \cdot \left(\frac{1}{18 \ln \frac{d}{R}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{R}{r}} + \frac{1}{18 \ln \frac{d}{R}}}$$

$$C_{sz} = \frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{R}{r}} \; ; \; C_l = \frac{1}{18 \ln \frac{d}{R}} \; ; \; C_a = \frac{C_{sz} \cdot C_l}{C_{sz} + C_l}$$



$$Q_a + Q_b = 0$$

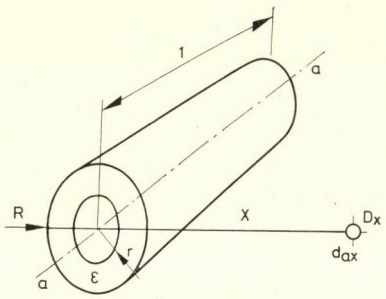
$$Q_a = -Q_b$$

$$U_{ax} = U_{aax} + U_{abx} = 1{,}8 \cdot 10^{10}\left[Q_a \ln \frac{d_{ax}}{R_{\text{red}}} + Q_b \ln \frac{d_{bx}}{d}\right] =$$

$$= 1{,}8 \cdot 10^{10} Q_a \left[\ln \frac{d_{ax}}{R_{\text{red}}} - \ln \frac{d_{bx}}{d}\right] = 1{,}8 \cdot 10^{10}\, Q_a \ln \frac{d}{R_{\text{red}}} \cdot \frac{d_{ax}}{d_{bx}}$$

if d_{ax} and $d_{bx} \to \infty$

$$U_a = 1{,}8 \cdot 10^{10}\, Q_a \ln \frac{d}{R_{\text{red}}}\ [V] \qquad C_a = \frac{1}{18 \ln \dfrac{d}{R_{\text{red}}}}\ [\mu F/\text{km}]$$



$$D_x = \frac{Q_a}{2\pi x 1}$$

$$D_x = \varepsilon\varepsilon_0 E_x$$

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{10}}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_a}{x}\ [\text{V/m}]$$

Q [Coul], x [m], ε [1]

$$U = -\int_{d_{ax}}^{r} E_x\, dx = -\int_{R}^{r} E_{xs}\, dx - \int_{d_{ax}}^{R} E_{x\,\text{lev}}\, dx = 1{,}8 \cdot 10^{10}\, Q_a \left[\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{d_{ax}}{R}\right] =$$

$$= 1{,}8 \cdot 10^{10} Q_a \ln \frac{d_{ax}}{\sqrt[\varepsilon]{R^{(\varepsilon-1)} r}}\ [\text{V}]; \quad R_{\text{red}} = \sqrt[\varepsilon]{R^{(\varepsilon-1)} r}\ [\text{m}]$$

Freileitungen mit isolierten Phasenleitern. Im stationären Betrieb von Hochspannungs-Freileitungen kann die elektrische Festigkeit der Luft teilweise zusammenbrechen, was Korona-Erscheinungen verursacht; während transienter Zustände, insbesondere unter der Wirkung von Schaltüberspannungen, entstehen Überschläge zwischen Phasenleiter und Erde, eventuell zwischen Phasenleitern. Zwecks Beseitigung bzw. Reduzierung dieser Fehler schlagen die Verfasser vor, die Phasenleiter mit einer dünnen, glatten, selbstreinigenden Isolierschicht zu überziehen. Die thermische Belastbarkeit der Leitung ändert sich so nicht oder nur in unbedeutendem Maße. Die Meßergebnisse zeigen, daß die kritische Spannung der Korona (und auch der Koronaverlust) unter der Wirkung der die Oberfläche des Seils überziehenden Isolierschicht bedeutend abnimmt und daß auch die Festigkeit gegenüber den Schaltüberspannungen sich beträchtlich erhöht.

Линия воздушной электропередачи с изолированными фазовыми проводами. При стационарном режиме высоковольтных воздушных линий электропередачи электрическая прочность воздуха может частично упасть, а это соэдает коронный эффект, а в переходном режиме, в соновном под воздействием коммутационных перенапряжений, могут иметь место разряды между фазовым проводом и землей, или даже между фазовыми проводами. Авторы в интересах устранения упомянутых выше дефектов, или же их уменьшения предлагают покрывать фазовые провода тонким изоляционным слоем, имеющим гладкую поверхность и обладающим самоочищающим свойством. Таким образом, допускаемая термическая нагрузка линии или не изменяется совершенно, или же только незначительно. Результаты проведенных измерений показывают, что начальное напряжение короны (также и коронные потери) значительно снижается под воздействием изоляционного слоя, покрывающего поверхность провода, кроме того значительно улучшается также сопротивляемость коммутационным перенапряжениям.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 279—291 (1972)

DETERMINATION OF THE STEREOGRAPHIC POLE FIGURES OF HEXAGONAL CRYSTALS WITHOUT PLOTTING

J. PROHÁSZKA*

CORRESP. MEMBER OF THE HUNG. ACADEMY OF SCI.

[Manuscript received September 30, 1971]

The paper describes a method for the simple determination of the pole diagrams of cubic and hexagonal crystals. Instead of the usual drafting technique, determination of the individual pole positions is by two point co-ordinates that can be measured in the basic plane. For the determination of these co-ordinates simple relations are introduced whose computerized solution greatly simplifies the construction of the pole diagram. Finally, a method is described whereby a pole diagram of any axis ratio can be simply replotted from the 0001 pole diagram of a given c/a ratio hexagonal crystal.

For the solution of orientation problems of hexagonal crystals usually stereographic pole figures are required. Although the literature offers a few such pole figures [1—3], their utilization is rather limited, as they apply only to crystals of a predetermined c/a ratio and since they contain, in addition, only the poles of directions normal to the crystallographic planes. For the solution of certain problems, however, often pole figures missing from the literature would be needed. The plotting of a new pole figure demands much work, since first the angles included by the respective lattice elements must be defined, then measured by means of the Wulf net when searching for the location of the corresponding poles. The acceptance of computers facilitated the simplification of the calculation problems, but plotting itself did not change. The present paper describes a method for the composition of the pole figures of hexagonal crystals where plotting is reduced to a simple linear measurement and makes possible, by using the 001 pole figure of a crystal of given c/a ratio, the simple drawing of the 001 pole figure of another crystal with any optional c/a quotient.

Essentially, the method involves the determination of the correspondents of the crystallographic planes and directions of the hexagonal system in a cubic co-ordinate system, and the calculations are then performed by using these correspondent lattice members. In a cubic crystallographic system the perpendicularity of any optional crystallographic plane to a crystallographic direction of the same index is valid without any restriction whatsoever, that is, $(hkl) \perp [hkl]$. In the cubic system this geometrical relation will greatly simplify

* Prof. Dr. J. Prohászka, Tigris u. 48, Budapest I., Hungary.

the calculation, and reduce the work of plotting by about 50 per cent, because in the pole figures of cubic system crystals the poles of directions and planes of the same index will be found in a single point, due precisely to the above geometrical relation. In non-cubic crystallographic systems this coincidence can be observed only in the case of special planes and directions. The pole figures of non-cubic crystallographic systems determine, therefore, only the poles of either the directions normal to the planes, or those of the crystallographic directions. Thus, actually two pole figures are required: one on the poles of the directions, and another one on those of the planes. Naturally, the two pole sets can be plotted in a single pole figure but in this case the poles of identical indices will be doubled, and either an excessively small number of poles will be obtained, or the possibility of their survey will be greatly impaired.

The necessity to have two pole diagrams may be best realized by an example. In a hexagonal pole diagram of $c/a = 1{,}633$ axial ratio, the great circles of twin planes $(10\bar{1}2)$ and $(01\bar{1}2)$ can be easily drawn, and their point of intersection will indicate the pole of the line of intersection of the two twin planes. Thereby, since hitherto literary pole diagrams render the poles of crystallographic planes, the figure $\bar{3}\bar{3}68$ will be found at the point of intersection of the two great circles, although the two twin planes referred to, intersect each other in the $\bar{2}\bar{2}41$ direction. It follows that in a hexagonal system of the possibly most compact fit the plane $(\bar{3}\bar{3}68)$ is normal to direction $[\bar{2}\bar{2}41]$. This example quite clearly illustrates that in non-cubic, such as hexagonal crystal systems the use of a pole diagram must be very carefully made, because of the discrete character of planes and directions of an identical index. This is why the application of two pole figures is considered to give much better results, and the relevant calculation process is introduced.

The method will be presented in connection with cubic crystal pole diagrams, then the problems of hexagonal systems will be reduced to cubic system problems.

The fundamental equation of crystals is

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \tag{1}$$

where $\mathbf{r}_0$ is the vector directed to any optional point of the crystal, whereas vector $\mathbf{r}$ points to another point of the same crystal, equivalent thereto from every aspect, while m, n and p are integers and $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{c}$ represent the three translational unit vectors of the crystal system in question. Thus, any $[hkl]$ crystallographic direction may determined by a single vector:

$$\mathbf{r} = h\mathbf{a} + k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \tag{2}$$

where h, k and l are integers, and the indices of the corresponding crystallographic directions.

In the cubic system let us indicate the three translational unit vectors of identical length and normal to one another by $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{e}_3$. Thus, the cubic system directions expressed by the indices may be written as

$$\mathbf{r} = h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + l\mathbf{e}_3 . \tag{3}$$

With the $\mathbf{r}$ vectors known, determination of the geometrical relations of the lattice members will now be a simple task. Thus, for example, the cosinus of the angle included by the two directions equals the scalar product of the vectors pertaining to the given directions, divided by the product of the absolute values of the two vectors. The cosinus of the angle included by two

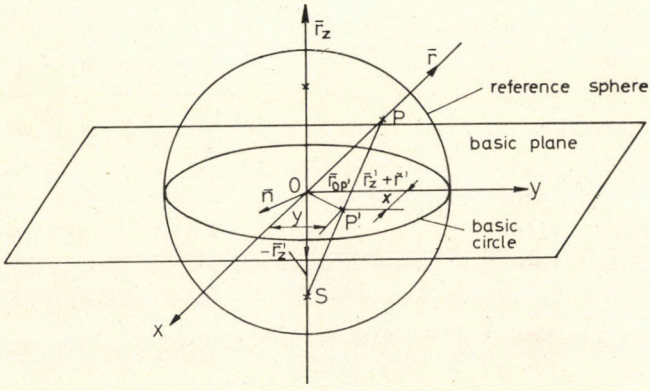


Fig. 1

planes can be obtained in the same way, only here the normal of the two planes must be used in the calculation. Determination of the line of intersection of two planes is likewise very simple as this is the vectorial product of the normal vectors of the two planes involved.

Now let us have a look at the problems of plotting a stereographic pole diagram. Let $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ be the unit vector system connected to the crystal, according to Fig. 1. Let furthermore, $\mathbf{r}_z$ be the vector defining the pole given by O in the centre of the pole figure. If, in addition, an optional vector $\mathbf{r}$ or its pole P and image P' are also given, the position of the projection or basic plane has already been determined. Now the co-ordinate system will have to be fitted to vector $\mathbf{r}_z$, so as to make the axis z parallel, and axes x and y perpendicular thereto, and the same applies to the corresponding $\mathbf{r}_x$ and $\mathbf{r}_y$ vectors. According to what has been said before these can be readily selected as the scalar product of the vectors sought for equals O. Thus, a vector $\mathbf{r}_x$ normal to $\mathbf{r}_z$ and, in order to simplify the calculation, of an index expressed by small

numbers will have to be looked for if possible, whereafter $\mathbf{r}_y$ will be obtained as the vector product of $\mathbf{r}_z$ and $\mathbf{r}_x$.

This gives the O origo in the basic circle, which is the pole of vector $\mathbf{r}_z$ and the vectors $\mathbf{r}_x$ and $\mathbf{r}_y$ normal to the latter which, in turn, give the co-ordinate axes x and y.

The next problem is how to define the pole of an optional $\mathbf{r}[hkl]$ crystallographic direction in this co-ordinate system. Using the symbols of Fig. 1, let $\mathbf{r}$ be this optional direction, and let its pole be the meeting point P of the reference sphere and vector $\mathbf{r}$. The image P' of this pole on the basic plane is the meeting point of the line connecting projection centre S and pole P with the base plane. This is to be determined since this pole figure represents the pole of vector $\mathbf{r}$.

Distance OP depends on the length of the reference sphere radius. Once this distance has been defined, it will have to be used as a basis for the solution of each subsequent problem. So far, in our considerations only angles have been dealt with the values of which are independent of the vector lengths and, as a consequence, they are not affected by the length of the radius.

Let us have a unit radius. In this case pole P will be cut out from the sphere by vector $\mathbf{r}$ at a unit distance. Point P on the reference sphere is indicated by unit vector $\mathbf{r}'$ of vector $\mathbf{r}$. If we now use unit vector $\mathbf{r}'_z$ of vector $\mathbf{r}_z$, the vector connecting projection centre S and pole P will be readily determined as it is the vectorial sum of vectors $\mathbf{r}'_z$ and and $\mathbf{r}'$ (hereafter the $'$ at a vector means the unit vector of the $\mathbf{r}$ vector in question).

However, for the determination of the x and y co-ordinates of the pole we need the distance $\mathbf{OP}'$ and its projections to axes x and y. This $\mathbf{OP}'$ distance is, from the $\mathbf{SOP}'$ triangle,

$$\mathbf{OP}' = \tan \alpha \,, \tag{4}$$

since the length of vector $-\mathbf{r}_z$ is exactly a unit. According, however, to the vector algebra

$$\tan \alpha = \frac{|\mathbf{r}'_z \times (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)|}{\mathbf{r}'_z \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)} \,. \tag{5}$$

Co-ordinate x is obtained by multiplying distance OP' with $\cos \varphi$. This, however, is the scalar product of the OP' directed unit vector, and vector $\mathbf{r}'_x$. In other words,

$$x = \tan \alpha \cos \varphi = \frac{|\mathbf{r}'_z \times (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)|}{\mathbf{r}'_z \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)} \cdot \frac{\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_{OP'}}{|\mathbf{r}_x| \cdot |\mathbf{r}_{OP'}|} \,. \tag{6}$$

Similarly, co-ordinate y is:

$$y = \tan \alpha \cos (90^\circ - \varphi) = \frac{|\mathbf{r}'_z \times (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)|}{\mathbf{r}'_z (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)} \cdot \frac{\mathbf{r}_y \cdot \mathbf{r}_{OP'}}{|\mathbf{r}_y| \, |\mathbf{r}_{OP'}|} \,. \tag{7}$$

Now, there is only the determination of vector $\mathbf{r}_{OP'}$ left over. Vector $\mathbf{r}_{OP'}$ is in the plane of vectors $\mathbf{r}_z$ and $\mathbf{r}$, and is normal to vector $\mathbf{r}_z$. This relation can be expressed by two vector equations.

Let us determine the $\mathbf{n}$ normal vector in the plane of $\mathbf{r}_z$ and $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}_z. \tag{8}$$

The $\mathbf{r}_{OP'}$ vector sought for is perpendicular to the normal vector $\mathbf{n}$, and is in the plane of $\mathbf{r}_z$ and $\mathbf{r}$. This condition is satisfied by the vectorial product of $\mathbf{n}$ and $\mathbf{r}_z$, that is,

$$\mathbf{r}_{OP'} = \mathbf{r}_z \times \mathbf{n} . \tag{9}$$

Thereby all the vectors required for the determination of the co-ordinates have been calculated. Substituting the value of $\mathbf{r}_{OP'}$ into the equations defining the co-ordinates, we obtain as a final result that

$$x = \frac{|\mathbf{r}'_z \times (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)|}{\mathbf{r}'_z \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)} \cdot \frac{\mathbf{r}_x \mathbf{r}_z \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_z)}{|\mathbf{r}_x| \cdot |\mathbf{r}_z \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_z)|} , \tag{10}$$

and

$$y = \frac{|\mathbf{r}'_z \times (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)|}{\mathbf{r}'_z \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'_z)} \cdot \frac{\mathbf{r}_y \cdot \mathbf{r}_z \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_z)}{|\mathbf{r}_y| \cdot |\mathbf{r}_z \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_z)|} . \tag{11}$$

Thus, all the relations required for the determination of the pole diagrams of materials crystallizing in the cubic system have been defined, since the last two equations are suitable for the calculation of the desired points of any stereographic pole diagram of an optional *hkl* pole. Calculation can be further simplified by the appropriate selection of vectors $\mathbf{r}'_x$, $\mathbf{r}'_y$ and $\mathbf{r}_z$. If, for example, the so-called 001 standard pole diagram is to be plotted, then $\mathbf{r}'_x$ will correspond to the crystallographic diagram [100], $\mathbf{r}'_y$ to [010], and $\mathbf{r}'_z$ to [001]. In this case, the co-ordinates will be given by the following simple formulae:

$$x = \frac{h}{l + \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} , \tag{12}$$

and

$$y = \frac{k}{l + \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} . \tag{13}$$

It is easy to realize that plotting a given pole diagram is much simpler by means of the last two equations than in the usual way.

The next task is to define the location of the hexagonal crystal poles in the same simple way. As was mentioned earlier, this will be done by finding in the cubic system the element corresponding to each hexagonal lattice

member, and then performing the calculation in the cubic system as described above. Thus, the reduced problem is to define the individual lattice elements of the hexagonal system in the cubic system.

The hexagonal axis system of a general layout is shown in Fig. 2. The geometrical relations among the three translational unit vectors are

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq |\mathbf{c}| \tag{14}$$

and

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = -\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = 0 . \tag{15) (16}$$

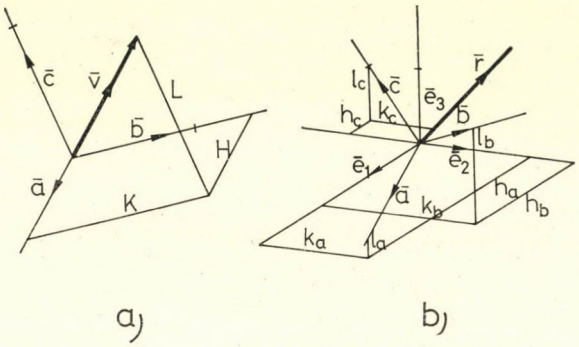


Fig. 2

The hexagonal system of general arrangement, but replotted in the cubic system, is illustrated in Fig. 2b. Let us indicate the crystallographic directions by **v** in the hexagonal, and by **r** again in the cubic system. In the hexagonal system an optional crystallographic direction can be defined, as shown below, if its indices are H, K and L (the indices of the hexagonal system are expressed by capitals to distinguish from those of the cubic lattice members):

$$\mathbf{v} = H\mathbf{a} + K\mathbf{b} + L\mathbf{c} . \tag{17}$$

The **v** vectors in the hexagonal, and the **r** vectors in the cubic system are naturally parallel and equal in length, and since (see Fig. 2b):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= h_a \mathbf{e}_1 + k_a \mathbf{e}_2 + l_a \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{b} &= h_b \mathbf{e}_1 + k_b \mathbf{e}_2 + l_b \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{c} &= h_c \mathbf{e}_1 + k_c \mathbf{e}_2 + l_c \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{18}$$

v will be

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = H(h_a \mathbf{e}_1 + k_a \mathbf{e}_2 + l_a \mathbf{e}_3) + K(h_b \mathbf{e}_1 + k_b \mathbf{e}_2 + l_b \mathbf{e}_3) + \\ + L(h_c \mathbf{e}_1 + k_c \mathbf{e}_2 + l_c \mathbf{e}_3), \end{aligned} \tag{19}$$

that is,

$$\mathbf{v} = (Hh_a + Kh_b + Lh_c)\mathbf{e}_1 + (Hk_a + Kk_b + Lk_c)\mathbf{e}_2 + \\ + (Hl_a + Kl_b + Ll_c)\mathbf{e}_3 = h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + l\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}\,. \tag{20}$$

The latter may be written as

$$\begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a & h_b & h_c \\ k_a & k_b & k_c \\ l_a & l_b & l_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} \tag{21}$$

or more concisely

$$\mathbf{r} = A\mathbf{v}\,. \tag{22}$$

On the basis of the latter expressions, each crystallographic direction in the [*HKL*] hexagonal system can have a crystallographic direction from the [*hkl*] cubic system associated, whereby not only the location of the stereographic pole diagram points can be determined, but also the problems related to the crystallographic directions of the hexagonal system can be solved just as in the cubic system. Accordingly, the pole diagram of hexagonal crystal structures can be obtained by looking for the $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{r}_y$ and $\mathbf{r}_z$ vectors of vectors $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ and $\mathbf{V}_z$ as explained by Eqs (20)—(22), and then these vectors can be used, by means of Eqs (10) and (11), to define the location of the pole of any optional $\mathbf{v} \sim [HKL]$ crystallographic direction. The calculation will again be quite simple, if the co-ordinates of the hexagonal and cubic systems are selected as, for example, shown in Fig. 3, because in this case several coefficients of Eq. (20), and a number of elements of matrix A in Eq. (21) will be 0.

In other words:

$$\begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Accordingly, when selecting the co-ordinate system as shown in Fig. 3, the cubic system direction

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}H;\ K - \frac{H}{2};\ \frac{c}{a}L\right]$$

will correspond to the [*HKL*] crystallographic direction of the hexagonal system.

In solving problems we often encounter the difficulty of having to look for the hexagonal system corresponding to a given **r** cubic system orientation. This, however, can easily be done on the basis of Eq. (22):

$$\mathbf{v} = A^{-1}\,\mathbf{r}\,. \tag{24}$$

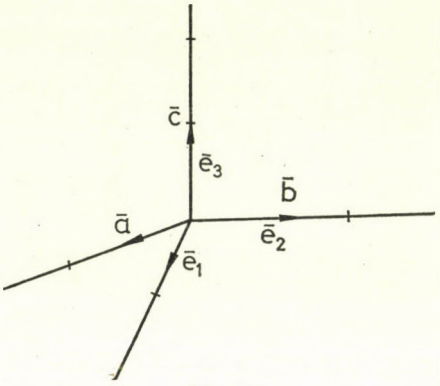


Fig. 3

If, on the other hand, the relation shown in Fig. 3 is maintained, this can be written in the form

$$\begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}. \tag{25}$$

From among the previous relations derived in connection with the pole diagrams, Eqs (12) and (13) may be written in the following form, if the 001 standard pole diagram of the hexagonal system orientations is to be determined:

$$x_d = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} H}{\frac{c}{a} L + \sqrt{H^2 + K^2 - KH + \left(\frac{c}{a}\right)^2 L^2}}, \tag{26}$$

and

$$y_d = \frac{K - \frac{H}{2}}{\frac{c}{a} L + \sqrt{H^2 + K^2 - KH + \left(\frac{c}{a}\right)^2 L^2}}. \tag{27}$$

In this pole diagram $\mathbf{V}_x = [210]$, $\mathbf{V}_y = [010]$, and $\mathbf{V}_z = [001]$.

By means of the last two equations, the 001 pole diagram of any hexagonal crystal can be determined in a very simple way by calculation. However, it will have to be noted here that in the literature usually not the pole diagram of the orientations discussed above is being dealt with, but that of the crystallographic planes. The following paragraphs describe the calculation of the pole diagrams of hexagonal crystal planes.

As is shown in Fig. 4, let an (HKL) crystallographic plane be given by its axial sections $1/H$, $1/K$ and $1/L$. The pole of this plane can be determined as explained above, if the normal vector **n** perpendicular to this plane is

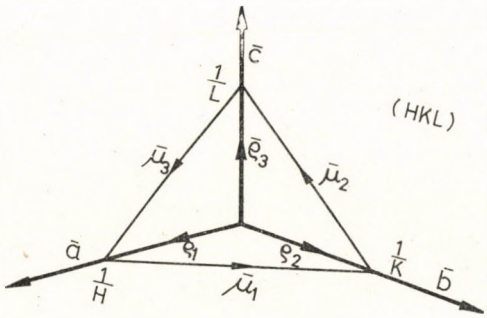


Fig. 4

known. This, in turn, is given by the vectorial product of any two $\mu_i; \mu_k$ vectors, if μ means the vectors parallel to the lines of intersection of the crystallographic plane in question, and the planes defined by the co-ordinate axes. Thus, normal vector **n** perpendicular to the crystallographic plane is

$$\mathbf{n} = \mu_1 \times \mu_2 = \mu_2 \times \mu_3 = \mu_3 \times \mu_1 . \tag{28}$$

Vectors μ parallel to the lines of intersection, on the other hand, are obtained as the difference vectors of the ρ_i; ρ_k vectors directed to the point of intersection of the plane studied and the two co-ordinates, that is

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \rho_2 - \rho_1 = \frac{\mathbf{b}}{K} - \frac{\mathbf{a}}{H}, \\ \mu_2 &= \rho_3 - \rho_2 = \frac{\mathbf{c}}{L} - \frac{\mathbf{b}}{K}, \\ \mu_3 &= \rho_1 - \rho_3 = \frac{\mathbf{a}}{H} - \frac{\mathbf{c}}{L}, \end{aligned} \tag{29}$$

as it follows from Fig. 4.

Thus,

$$\mathbf{n} = \mu_1 \times \mu_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{h_b}{K} - \frac{h_a}{H} & \frac{k_b}{K} - \frac{k_a}{H} & \frac{l_b}{K} - \frac{l_a}{H} \\ \frac{h_c}{L} - \frac{h_b}{K} & \frac{k_c}{L} - \frac{k_b}{K} & \frac{l_c}{L} - \frac{l_b}{K} \end{vmatrix} . \tag{30}$$

The last expression may be rewritten as

$$\mathbf{n} = B\rho , \tag{31}$$

or

$$\begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b l_c - k_c l_b & k_c l_a - k_a l_c & k_a l_b - k_b l_a \\ h_c l_b - h_b l_c & h_a l_c - h_c l_a & h_b l_a - h_a l_b \\ h_b k_c - h_c k_b & h_c k_a - h_a k_c & h_a k_b - h_b k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} . \tag{32}$$

Here vector $\mathbf{p} = H\mathbf{a} + K\mathbf{b} + L\mathbf{c}$ should be considered as an auxiliary vector whereby the normal $\mathbf{n}$ of the (HKL) hexagonal system plane might be determined. Since, furthermore, the relations whereby the orientation poles can be determined had already been given, the problem raised at the beginning is thus solved.

Simple relations excellently suitable for calculation purposes are obtained, if again the connection outlined in Fig. 3 is made use of. In this case the matrix of tensor B will assume the form

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{c}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} . \tag{33}$$

So with the relation referred to in Fig. 3 taken into account, the cubic system direction

$$\mathbf{n} = \left(H + \frac{K}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} K\mathbf{e}_2 + \frac{a}{c}\frac{\sqrt{3}}{2} L\mathbf{e}_3$$

will be normal to the (HKL) crystallographic plane of a hexagonal crystal. Again the problem may be faced that the correspondent of the (hkl) cubic system plane must be found. The relevant equation follows from Eq. (30):

$$\rho = B^{-1}\mathbf{n} . \tag{34}$$

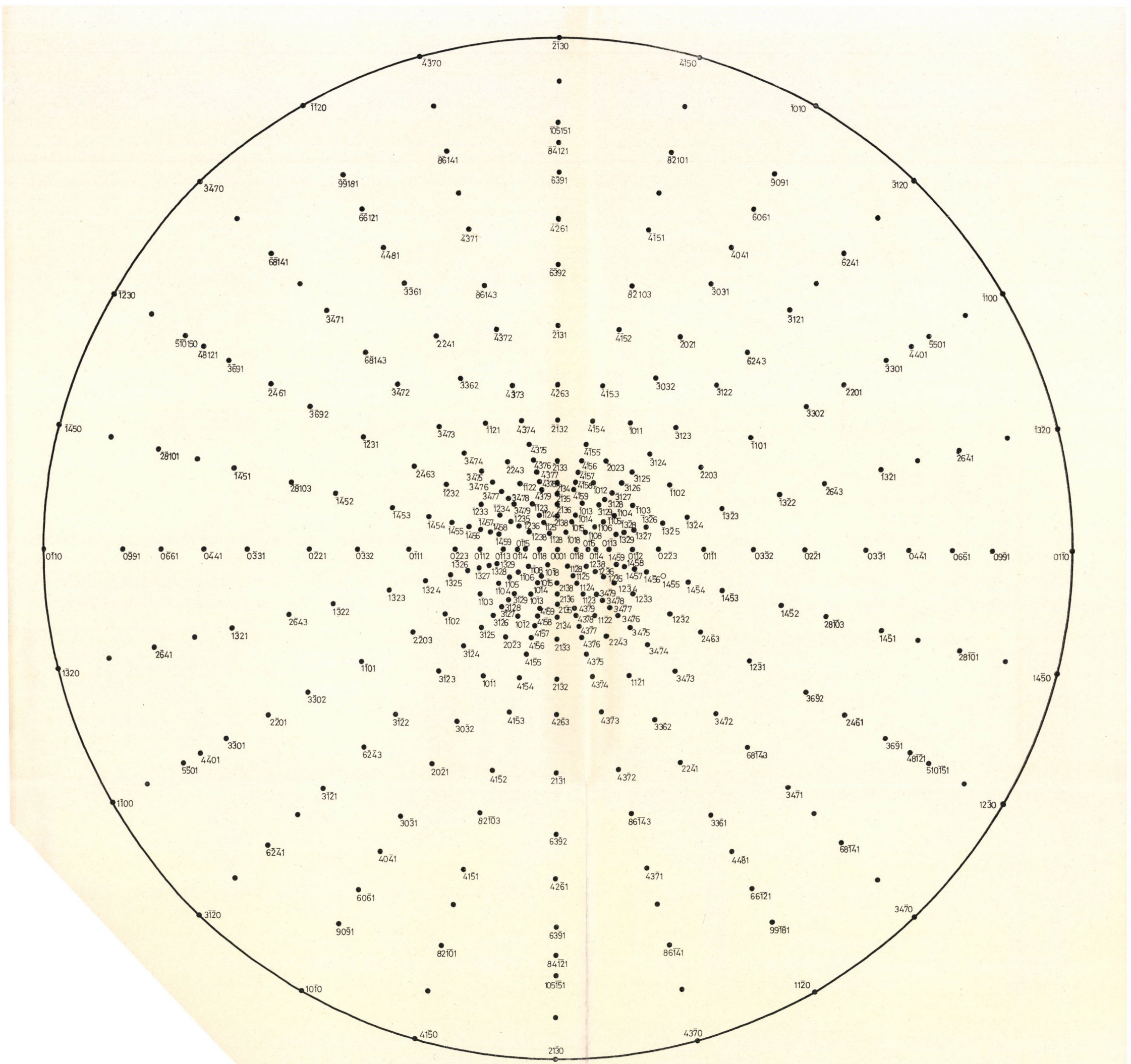


Fig. 5.

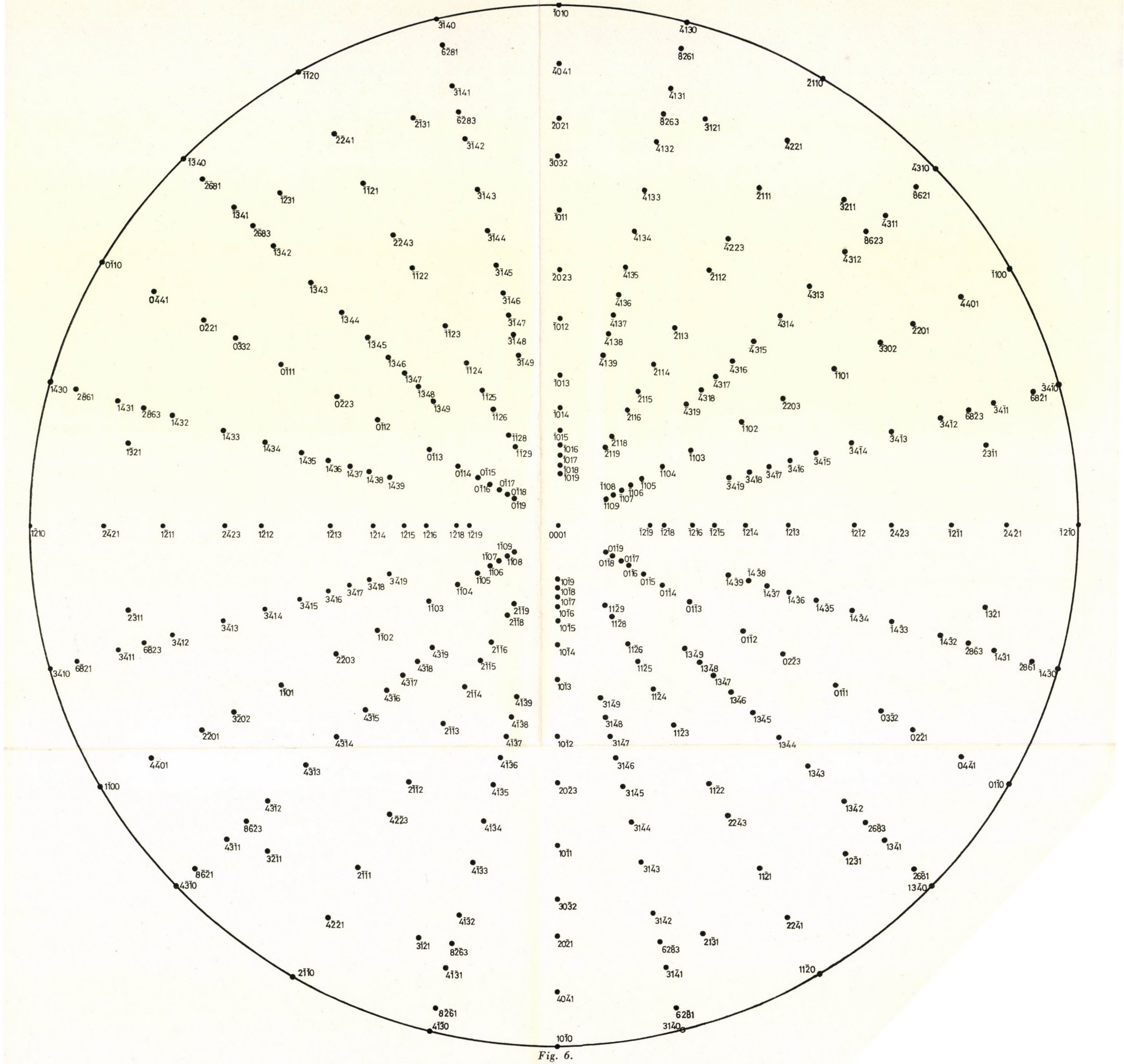

$\bar{3}140$ $\bar{6}281$ $\bar{1}120$ $\bar{3}141$ $\bar{2}131$ $\bar{6}283$ $\bar{2}241$ $\bar{3}142$ $\bar{1}340$ $\bar{2}681$ $\bar{1}231$ $\bar{1}121$ $\bar{3}143$ $\bar{1}341$ $\bar{2}683$ $\bar{2}243$ $\bar{3}144$ $\bar{1}342$ $0\bar{1}10$ $\bar{1}122$ $\bar{3}145$ $\bar{1}343$ $0\bar{4}41$ $\bar{3}146$ $\bar{1}344$ $\bar{3}147$ $0\bar{2}21$ $\bar{1}123$ $\bar{3}148$ $0\bar{3}32$ $\bar{1}345$ $\bar{3}149$ $\bar{1}346$ $0\bar{1}11$ $\bar{1}124$ $\bar{1}347$ $1\bar{4}30$ $2\bar{8}61$ $\bar{1}348$ $\bar{1}125$ $1\bar{4}31$ $2\bar{8}63$ $\bar{1}349$ $0\bar{2}23$ $\bar{1}126$ $1\bar{4}32$ $0\bar{1}12$ $\bar{1}128$ $1\bar{4}33$ $\bar{1}321$ $1\bar{4}34$ $\bar{1}129$ $0\bar{1}13$ $1\bar{4}35$ $1\bar{4}36$ $1\bar{4}37$ $1\bar{4}38$ $1\bar{4}39$ $0\bar{1}14$ $0\bar{1}15$ $0\bar{1}16$ $0\bar{1}17$ $0\bar{1}18$ $0\bar{1}19$
$\bar{1}\bar{2}10$ $2\bar{4}21$ $\bar{1}\bar{2}11$ $2\bar{4}23$ $\bar{1}\bar{2}12$ $\bar{1}\bar{2}13$ $\bar{1}\bar{2}14$ $\bar{1}\bar{2}15$ $\bar{1}\bar{2}16$ $\bar{1}\bar{2}18$ $\bar{1}\bar{2}19$
$\bar{1}\bar{1}09$ $\bar{1}\bar{1}07$ $\bar{1}\bar{1}08$ $\bar{1}\bar{1}06$ $\bar{1}\bar{1}05$ $\bar{1}\bar{1}04$ $3\bar{4}19$ $3\bar{4}18$ $3\bar{4}17$ $3\bar{4}16$ $3\bar{4}15$ $\bar{1}\bar{1}03$ $2\bar{1}\bar{1}9$ $2\bar{3}11$ $3\bar{4}14$ $2\bar{1}\bar{1}8$ $3\bar{4}13$ $\bar{1}\bar{1}02$ $6\bar{8}23$ $3\bar{4}12$ $2\bar{1}\bar{1}6$ $3\bar{4}11$ $4\bar{3}19$ $2\bar{2}03$ $2\bar{1}\bar{1}5$ $6\bar{8}21$ $3\bar{4}10$ $4\bar{3}18$ $4\bar{3}17$ $\bar{1}\bar{1}01$ $2\bar{1}\bar{1}4$ $4\bar{3}16$ $4\bar{1}39$ $3\bar{2}02$ $4\bar{3}15$ $2\bar{1}\bar{1}3$ $4\bar{1}38$ $2\bar{2}01$ $4\bar{3}14$ $4\bar{1}37$ $4\bar{4}01$ $4\bar{3}13$ $4\bar{1}36$ $\bar{1}\bar{1}00$ $2\bar{1}\bar{1}2$ $4\bar{1}35$ $4\bar{3}12$ $8\bar{6}23$ $4\bar{2}\bar{2}3$ $4\bar{1}34$ $4\bar{3}11$ $3\bar{2}11$ $8\bar{6}\bar{2}1$ $2\bar{1}\bar{1}1$ $4\bar{1}33$ $4\bar{3}10$ $4\bar{2}21$ $4\bar{1}32$ $3\bar{1}21$ $8\bar{2}63$ $2\bar{1}\bar{1}0$ $4\bar{1}31$ $8\bar{2}61$ $4\bar{1}30$
1010 4130 8261 4041 2110 4131 8263 3121 2021 4132 4221 3032 4310 4133 2111 8621 3211 1011 4311 4134 8623 4223 4312 1100 2023 4135 2112 4313 4136 4401 1012 4137 4314 2201 2113 4138 3302 4315 4139 2114 4316 1101 1013 4317 3410 6821 4318 3411 2115 4319 2203 1014 2116 1102 3412 3411 1015 2118 3413 2119 1016 1017 3414 1103 1018 3415 1019 1104 3416 3417 1108 1105 3418 1106 3419 1107 1109
0001 $\bar{1}\bar{2}19$ $\bar{1}\bar{2}18$ $\bar{1}\bar{2}16$ $\bar{1}\bar{2}15$ $\bar{1}\bar{2}14$ $\bar{1}\bar{2}13$ $\bar{1}\bar{2}12$ $2\bar{4}23$ $\bar{1}\bar{2}11$ $2\bar{4}21$ $\bar{1}\bar{2}10$
$0\bar{1}19$ $0\bar{1}18$ $0\bar{1}17$ $0\bar{1}16$ $0\bar{1}15$ $1\bar{4}38$ $1\bar{4}39$ $1\bar{4}37$ $1\bar{4}36$ $1\bar{4}35$ $1\bar{4}34$ $1\bar{4}33$ $1\bar{3}21$ $0\bar{1}14$ $1\bar{4}32$ $2\bar{8}63$ $1\bar{4}31$ $2\bar{8}61$ $1\bar{4}30$ 1019 1018 1017 1016 1015 $0\bar{1}13$ 1129 1128 $0\bar{1}12$ 1126 1349 1125 1348 $0\bar{2}23$ 1347 1346 1014 1345 $0\bar{1}11$ 1124 3149 1344 1148 1123 $0\bar{3}32$ 1147 $0\bar{2}21$ 1012 1343 3146 $0\bar{4}41$ 1145 1122 2023 1342 2683 1341 1144 2243 1143 1121 2131 1142 2241 1141 1120 6283 1140 3141 $0\bar{1}10$ 6281 3140 1010

Fig. 6.

With the co-ordinate relation of Fig. 3, this corresponds to the expression

$$\begin{bmatrix} H \\ K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}\ a}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Poles of the directions normal to the crystallographic planes of the hexagonal system, on the other hand, can be found by means of the following equations, if the 001 standard pole diagram is to be obtained:

$$x_p = \frac{H + \frac{K}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{c}L + \sqrt{H^2+K^2+HK+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{c}\right)^2 L^2}}, \tag{36}$$

and

$$y_p = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}K}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{c}L + \sqrt{H^2+K^2+HK+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{c}\right)^2 L^2}}. \tag{37}$$

In this pole diagram, axis x intersects the origo and the pole defining the (100) hexagonal system plane, axis y the origo and the $(\bar{1}20)$ plane, while again axis z the origo and plane (001).

Figure 5 illustrates the standard 001 pole diagram defining the poles of the hexagonal system directions, for a $c/a = 1{,}633$ axial ratio. Figure 6 presents the 001 pole diagram related to the crystallographic planes of the same system.

Each pole diagram related to a hexagonal system applies to a given c/a ratio. The HKL crystal elements identical in the 001 pole diagrams although of different c/a quotients, fit along the same line starting from the centre. This is illustrated in Fig. 7 for the planes of two identical (HKL) index crystals of different c/a ratios in the hexagonal system. Here $(HKL)_1$ means the poles of the planes of the $(c/a)_1$ ratio crystal, and $(HKL)_2$ those of the crystal with the $(c/a)_2$ ratio. Thus, if a 001 pole diagram of any $(c/a)_1$ ratio is given, another 001 pole diagram of any c/a ratio can readily be replotted, even faster than described above.

The pole distance of an $[HKL]$ crystallographic direction from the origo, in the case of a $(c/a)_1$ ratio, is

$$\mathbf{r}_{d1} = \sqrt{x_{d1}^2+y_{d1}^2} = \frac{\sqrt{H^2+K^2-HK}}{\left(\frac{c}{a}\right)_1 L + \sqrt{H^2+K^2-HK+\left(\frac{c}{a}\right)_1^2 L^2}}. \tag{38}$$

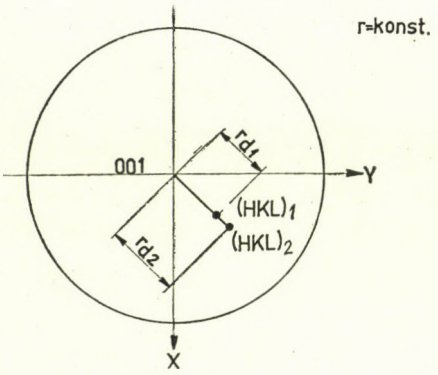


Fig. 7

The distance of a pole with the same index but $(c/a)_2$ ratio can be determined from the latter equation but then, of course, $(c/a)_2$ will have to be substituted. Thus, in the 001 pole diagram related to the new crystal nothing will change, only the original r_{d1} distance will be replaced by

$$r_{d2} = r_{d1} \frac{\left(\frac{c}{a}\right)_1 L + \sqrt{H^2+K^2-HK+\left(\frac{a}{c}\right)_1^2 L^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)_2 L + \sqrt{H^2+K^2-HK+\left(\frac{a}{c}\right)_2^2 L^2}} . \tag{39}$$

Similarly, the r_s distance of the poles of crystallographic planes can be determined as follows:

$$r_{s2} = r_{s1} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{c}\right)_1 L + \sqrt{H^2+K^2+HK+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{c}\right)_1^2 L^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{c}\right)_2 L + \sqrt{H^2+K^2+HK+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{c}\right)_2^2 L^2}} . \tag{40}$$

Here r_{s2} means the pole distance of the new $(c/a)_2$ ratio (HKL) index plane from the origo, while r_{s1} indicates the same for the old $(c/a)_1$ ratio plane.

REFERENCES

1. BARRETT, C. S.: Structure of Metals. McGraw-Hill, 1952.
2. CULLITY, B. D.: Elements of X-ray Diffraction. Addison-Wesley Publ., London 1959.
3. ANDREWS, K. W.—DYSON, D. J.—KEOWN, S. R.: Interpretation of Electron Diffraction Patterns. Adam Hilger Ltd, London 1971.
4. PROHÁSZKA, J.: *Kohászati Lapok*, **103,** (1970), 59 (in Hungarian).

Bestimmung der stereographischen Polbilder von hexagonalen Kristallen ohne Zeichnen. In der Arbeit wird ein überaus einfaches Verfahren für die Bestimmung der stereographischen Polbilder von kubischen und hexagonalen Kristallen mitgeteilt. Die einzelnen Pollagen werden statt durch die zeichnerische Technik, durch zwei in der Basis ebene meßbare Lagekoordinaten definiert. Für die Berechnung dieser Lagekoordinaten werden einige einfache Beziehungen eingeführt, durch deren Bestimmung mittels Rechnern die Berechnung des Poldiagramms außerordentlich vereinfacht wird. Schließlich wird eine Methode beschrieben, mittels welcher aus dem 0001 Poldiagramm eines hexagonalen Kristalls mit gegebenem Verhältnis c/a ein Poldiagramm mit beliebigem Achsenverhältnis c/a einfach umgezeichnet werden kann.

Определение без черчения стереографической конфигурации гексагональных кристаллов. В статье автор описывает такой метод, с помощью которого можно очень просто определить конфигурацию полюсов кубических и гексагональных кристаллов. Вместо обычно принятой техники черчения определение отдельных положений полюсов производится с помощью двух измеряезмых в основной плоскости местных координат. Для определения этих местных координат автор вводит простые зависимости и при их решении на вычислительной машине сильно упрощается определение полюсной диаграммы. Наконец, дается описание такого метода, с помощью которого на основе полюсной диаграммы гексагонального кристалла 0001 с данным отношением c/a можно просто отобразить полюсную диаграмму с любым соотношением осей.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 293—326 (1972)

MAGNETIC FIELDS IN NONLINEAR HETEROPOLAR ROTATING MACHINES*

E. A. ERDÉLYI**

[Manuscript received September 30, 1970]

When the non-linearities caused by iron saturation are considered, the usual linear theories for the determination of the performance characteristic of rotating electrical machines cannot be used. In this paper methods are developed by the author for solving the boundary value problem of the non-linear two-dimensional vector potential. The transformation of the partial differential equations into difference equations is explained and numerical methods developed to obtain solutions. The procedure is illustrated by applications to heteropolar salient rotating machines.

I. Introduction

The design methods of rotating machinery are based considerably on the so-called "Magnetic Ohm's Law" and on experience. The excitation for no-load operation is found by first assuming an airgap flux density. Next the flux densities in individual parts of the magnetic paths are estimated and the necessary field intensities are found from the B—H characteristics of the materials. The field ampere-turns are then found by adding the individual magnetomotive potential drops. On load an attempt is made to evaluate the magnetomotive force in the various parts of the airgap and the iron parts, and to estimate the reluctance from point to point as determined by the configuration of the airgap and the field. Basically, this is a process of trial and error in which an attempt is made to draw the probable tubes of flux in order to calculate the reluctance of the individual flux tubes. Following this tedious work, the magnetomotive force is established along a closed path and compared with the available excitation. The initial assumptions are then suitably modified and the process is repeated until the desired agreement is achieved.

This slow and cumbersome method does not lead always to good results and it is generally recognized that the magnetic Ohm's Law is not sufficiently a fundamental conception. The search for a more systematic method for finding the magnetic fields in d. c. machines has engaged many workers. CARTER [1], in his classical paper, has given a solution based on the Schwartz—Christoffel transformation for the flux distribution between the main pole and

* A lecture prepared for the Hungarian Academy of Sciences in Budapest, June 1970.

** Professor of Electrical Engineering, University of Colorado.

the armature of d.c. machines. Carter's mathematical achievement was admirable but applicable only to very simply, idealized machine contours.

HAGUE [2] has reviewed and extended Carter's method basing it on the direct solution of Maxwell's field equations. His treatment refers mainly to non-salient pole machines. HAGUE and all the investigators before him sought an explicit solution of the field problem, and thus were necessarily restricted to very idealized machine cross sections. MOTZ and WORTHY [3] described a method of finding the magnetic fields of electrical machines using Southwell's relaxation method. In all these early efforts the permeability of the iron has been assumed to be infinite and discrete currents were replaced by current sheets.

BENEDIKT [4] described in great detail a nomographic method established by him, and he illustrated his procedure with a number of important examples. BENEDIKT does consider the non-linearity of the appropriate equations caused by iron saturation. A research group at the University of Colorado has for several years now developed a numerical method for the determination of fields in electrical machines. The field quantities are obtained everywhere in the cross section of rotating machines from the solution of Maxwell's field equations. The quasi-Poissonian partial differential equation used is nonlinear, and a solution satisfying the exacting boundary conditions is found using a relaxation method combined with block relaxation procedures. In the present paper the scheme is described to find the fields in salient pole machines on-load. The saturation of the iron is considered fully and the actual currents in the slots are taken into account.

Some designers may suggest that existing methods in which the magnetic path is subdivided into separate portions are satisfactory. We feel that this is not so and that many important problems of rotating machine analysis cannot be solved successfully. The abandonment of the many usual simplifications and the use of high-speed electronic computers have considerably increased the range of problems amenable to solutions.

Based on the so-called two-reaction theory, the theory of synchronous machines under load was developed at the beginning of this century by BLONDEL [5] and others. In this theory, the reaction of the armature currents was resolved into two components, both assumed sinusoidally distributed. The amplitude of one component was in line with the axis of a pole, the so-called direct axis; the amplitude of the other coincided with the axis of the interpolar space, the so-called quadrature axis. BLONDEL's theory was firmly based on the principle of superposition and thus could not take well into account the nonlinear characteristics of the iron circuit. The performance characteristics of the machine itself have been established by the use of a phasor diagram.

SUMEC [6] has improved this diagram by introducing certain conditions to take care of saturation effects estimated from the no-load characteristics of

the salient pole synchronous machine. DOHERTY and NICKLE [7] have further developed the theory of synchronous machines on load by a series of classical papers. In all the above works, the permeance of the airgap has been assumed to be a quantity independent of the load, and in all, the linear principle of superposition is used freely. In 1926, WIESEMAN [8] published a set of curves based on flux plots, designed to find the effect of load currents on the magnetic induction in the airgap, assuming that a sine wave armature magnetomotive force excites the field, if its axis coincides either with the direct or quadrature axis.

In the simplified treatment of the steady-state and transient performance of alternators, the assumption of infinite or constant permeability of the iron is generally made. The application of this assumption may be the reason that the results of calculations using the two-reactions method often did not agree with the characteristics of synchronous machines found by tests.

Great changes have taken place in the economics of rotating machine design since BLONDEL established the two-reaction theory. Design has become less and less an art based on experimentation. The size of most modern apparatus is so exorbitantly high that experimentation becomes prohibitive and a more exact predetermination of the performance of a design becomes necessary.

The acceptance of the two-reaction theory is so general that most of the users have lost sight of the simplifying assumptions made by the originators. Direct and quadrature axis fluxes cannot be superposed when linearity simplifications are abandoned.

Even though it may seem to some designers sacrilegious to suggest that the two-reaction theory should be abandoned, a method is presented here for finding the flux distribution in salient pole heteropolar machines, at any balanced load, based on the numerical solution of the nonlinear magnetic vector potential equation without recourse to the two-reaction theory based on linearity assumptions.

II. The nonlinear partial differential equation of the magnetic field of heteropolar machines

a) *Assumptions*

In order to reduce the enormous task of finding the field of magnetic inductions in the radial cross section of heteropolar machines, these simplifying assumptions are made:

1. The heteropolar machine is infinitely long in the direction of the shaft, and the problem is thus reduced to two dimensions.

2. The magnetic material is isotropic, and the saturation curve is single valued, i.e., hysteresis effects are not considered.

3. The discrete currents in the field windings are replaced by uniform current density fields of the vector $\tilde{J}$ over the cross section of the field coils.

4. The magnetic induction outside the contours of the machine is negligible.

The assumption of infinite permeability or of a permeability independent of the magnetic inductions will not be made.

b) *The Constituent Relation in Magnetic Materials*

The magnetization characteristic representing the relationship between the magnetic field vectors is generally given as

$$\tilde{B} = \mu \tilde{H} \tag{1}$$

where the permeability μ is a function of H.

In this paper, an alternative formulation, suggested by many, including KING, TRALLI and others [9], is used with the constituent relation expressed as

$$\tilde{H} = \nu \tilde{B} \tag{2}$$

where ν is the reluctivity of the medium and a function of B. The reluctivity ν is obviously the reciprocal of the permeability μ. Its unit in the rationalized MKS system is the meter per henry.

c) *The partial differential equation of the vector potential*

Neglecting displacement currents, Maxwell's first equation at power frequencies reduces to

$$\operatorname{curl} \tilde{H} = \tilde{J}. \tag{3}$$

The vector potential A is defined by its curl

$$\tilde{B} = \operatorname{curl} \tilde{A} \tag{4}$$

and by its sources. According to Coulomb's convention one assumes that

$$\operatorname{div} A = 0.$$

The continuity equation for the current density vector is expressed as

$$\operatorname{div} J = 0 .$$

Equations (3) and (9) can be combined by using (2)

$$\operatorname{curl}(\nu \operatorname{curl} \tilde{A}) = 0. \tag{5}$$

Because of Assumption 1, the field is two-dimensional and one can put

$$B_z = 0\,; \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0\,.$$

Furthermore,

$$J_x = 0\,; \quad J_y = 0\,; \quad J_z = \tilde{J}$$

so that

$$A_x = A_y = 0\,; \quad \tilde{A} = A_z\,.$$

The partial differential equation (5) can be written explicitly in rectangular and polar system of coordinates respectively as

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial y}\right) = -J, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial \Phi}\right) = -J. \tag{7}$$

In Eqs (6), (7) x, y, r and Φ denote orthogonal coordinates. The z axis of the coordinate system coincides with axis of the shaft of the machine.

d) Calculation of the magnetic induction

The solution of Eqs (6) and (7) yields the vector potential over the cross section of a heteropolar machine. The magnetic induction $\tilde{B}$ is found as the curl of the vector potential $\tilde{A}$. In rectangular coordinates one obtains for the components of the magnetic induction

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}\,. \tag{8}$$

Similary, one obtains in polar coordinates for the components of the magnetic induction

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \Phi}\,; \quad B_\Phi = -\frac{\partial A}{\partial_r}\,. \tag{9}$$

The magnetic induction is then computed as the square root of the sum of the square of the components of B.

e) *Boundary conditions*

The solution of Eq. (6) and Eq. (7) must satisfy the following boundary conditions:

1. In the direct axis at no-load and at purely reactive loads the vector potential is constant. The flux lines must be perpendicular to the quadrature axis.

2. At air–iron interfaces the tangential component of the magnetic intensity $\widetilde{H}$ and the normal component of the magnetic induction $\widetilde{B}$ is continuous. At interface corners the above boundary conditions must be satisfied at the infinitesimal distance from the corners at both boundaries forming the corners.

3. At the boundary of current fields, the current-carrying conductor has the same permeability as the air or insulation surrounding the conductor. The tangential component of $\widetilde{H}$ is discontinuous by the linear current density and the normal component of $\widetilde{B}$ is continuous.

4. On load the vector potential remains a periodic function of the double pole pitch. The vector potential A_p at a point P will be equal in magnitude and opposite in sign to the vector potential $A_{p'}$, at a corresponding P' a pole pitch away on the same arc.

5. The vector potential of the armature of field outer contour and the bore of the rotor is zero, assuming μ of air is zero outside the machine.

III. The transformation of the partial differential equation into finite difference form

a) *The discretization and grid system*

An explicit solution to (6) and (7) cannot be found which takes into account the complicated contours of the different regions, the boundary conditions, and the nonlinearities.

As a first step in the numerical solution the partial differential equation is replaced by partial difference equations. For this reason, the continuous region of the machines cross section is replaced by grid systems with small but finite mesh lengths. In these difference equations, the partial derivatives of the original equations are replaced by algebraic difference expressions which approximate the derivatives. The resulting set of algebraic equations with variable coefficients are then solved simultaneously for the vector potential. The results provide the values of the vector potential A at each of these discrete grid points which, in turn, yield the approximate solution of the nonlinear problem.

b) *Grid systems* (Figs 1, 2)

In order to index grid points with a minimum of logical discrimination or special procedure, it was considered imperative, in previous papers, to extend both radial and transversial grid lines entirely across the machine section in which the analysis was done. The number of radial grid lines is generally determined by the geometry and location of the radial or nearly radial boundaries of slots and teeth. At boundaries the grid lines should be closely arranged in order to satisfy boundary conditions. Since the grid lines required by the rotor construction and stator construction are in general not congruent, there will be a considerable economy of grid points, and hence of core memory, in using separate grid systems in the stator and armature as required by their respective structures. It becomes convenient, therefore, to tear the stator and rotor grid systems apart.

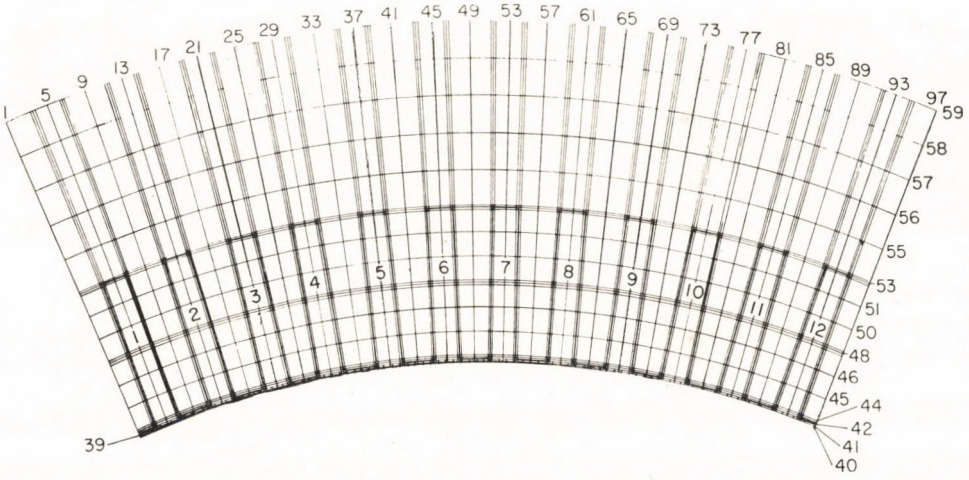


Fig. 1. Grid system of stator

The airgap in the scheme of tearing apart is also covered by two polar grid systems, one attached to the stator and the other to the rotor. The continuity of the vector potentials is provided by a linear interpolation procedure. The stator and rotor grid systems have two circular grid lines in the air gap.

The transverse circular grid lines are denoted with the letter K and numbered consecutively. K *38* circular grid of the rotor grid system of Fig. 2 coincides with the K *40* circular grid line of the stator grid system of Fig. 1. Similarly, the K *39* circular grid line of the rotor grid system is identical with the K *41* circular grid line of the stator grid system. All radial grid lines of the stator grid system end on the K *40* circular grid line of the Stator (K *38* circular line of the rotor). Similarly, all rotor radial grid lines end on rotor

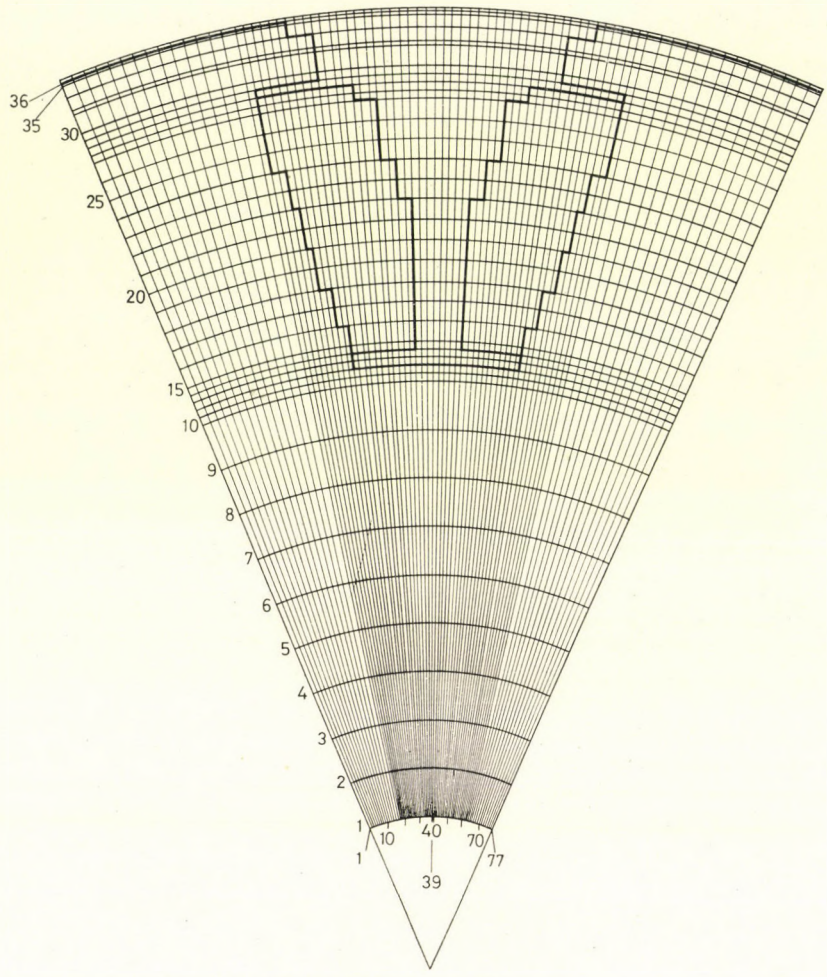


Fig. 2. Grid system of rotor

circular grid line *K 39* (*K 41* circular grid line of the stator system). The radial grid lines, or in the case of the slots the grid lines parallel to the slot sides, will be denoted with the letter *J* and numbered consecutively.

c) *Stator grid system*

In Fig. 1, the quasi-circular grid lines of the stator start with grid line *K 40* and extend to the outer contour of the stator stamping represented by the *K 59* grid line. The grid lines *K 55* to *K 59* are circles. The grid lines *K 42* to *K 54* consist partly of arcs and partly of chords. This is because the slotted areas of the stator are covered with rectangular grids. As an example, the *J* lines *2* to *8* of slot 1 in Fig. 1 between the *K 42* and *K 47* arcs are all parallel to

the slot sides of slot 1. The slot sides are defined by the *J 3* and *J 7* lines. The portions of the *K 42* to *K 47* grid arcs between the *J 2* and *J 8* grid lines are chords perpendicular to the slot sides. Between grid lines *K 40* to *K 42* and *K 55* to *K 59*, the *J* lines parallel to the slot sides are continued as radial lines drawn from the bore center. The slots are assumed to be rectangular and the slot wedge notches are not considered. A more refined grid system at the toothheads could easily take care of the saturation effects caused by the notches.

A polar grid system is chosen for the remainder of the stator tooth between slot *1* and *2*. The origin of this polar system is at the intersection of the continuation of grid lines *J 8* (parallel to the sides of slot *2*). Similar individual polar grid systems are used for all other tooth portions between adjacent slots. The name "polycentric" has been adopted for such grids. In the case of the stator all polycentric origins are on the periphery of a circle, the center of which is at the bore center.

d) *Rotor grid system*

The circular *K* grid lines in Fig. 2 extend in the rotor from 1 to 39. It is assumed also that the shaft has a bore between the origin and the grid line *K 1*. This assumption is necessary in order that the differential equations and the difference expressions do not become singular. The *K* lines of the rotor grid system are all perfect circles because a purely polar coordinate system is used for the discretization of the field system.

Two consecutive radial grid lines between *J 1* and *J 14* are at distances of 3/4 degree. The distance between two neighbouring radial grid lines between *J 14* and *J 58* is 1/2 degree. The grid arrangement is symmetrical about the quadrature axis (*J 39* line), so that all grid lines between *J 58* and *J 72* are again at distances of 3/4 degree.

e) *Partial difference algorithm*

In order to facilitate the logic of the computer program, it is of great advantage to develop a difference algorithm that is valid for all types of mesh blocks, i.e., in Cartesian coordinates, in polar coordinates, and also for those represented by a Cartesian system combined with a polar coordinate system as shown in Fig. 3.

Using Ampere's law, it has been found that the vector potential in a grid point *J*, *K* denoted as A_0 can be expressed

$$A_0 = \left(I_0 + \sum_i \alpha_i A_i\right) \Big/ \sum_i \alpha_i , \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{10}$$

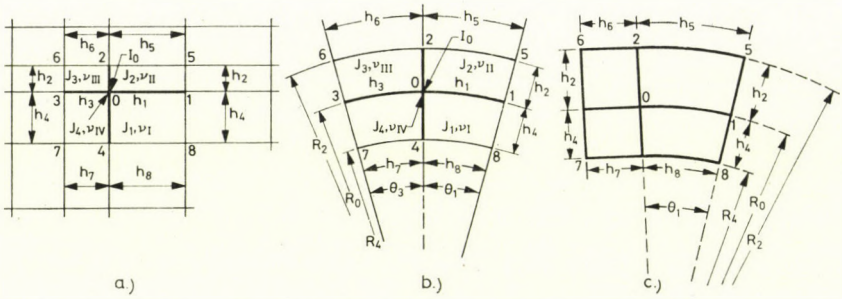


Fig. 3. Meshblocks. *a)* Cartesian; *b)* Polar; *c)* Combined

In this equation the α_i are functions of the mesh geometry and of the reluctivities as follows:

$$\alpha_1 = (\nu_2 h_2 + \nu_1 h_4)/2h_1 \; ; \quad \alpha_3 = (\nu_3 h_3 + \nu_4 h_4)/2h_3 \, , \tag{11a, b}$$

$$\alpha_2 = [\nu_2(h_1 + h_5) + \nu_3(h_3 + h_6)]/4h_2 \; ; \; \alpha_4 = [\nu_4(h_3 + h_2) + \nu_1(h_1 + h_8)]/4h_4 \tag{11c, d}$$

The current term I_0 is a function of the current densities and meshblock geometry

$$I_0 = (1/8)\,[J_1(h_1 + h_8)h_4 + J_2(h_1 + h_2)h + J_3(h_3 + h_6)h_2 + J_4(h_3 + h_7)h_4]. \tag{12}$$

The following relationship exists for the mesh distances.

For rectangular meshes

$$h_1 = h_8 = h_5 \; ; \quad h_2 = h_3 = h_6 \, . \tag{13a, b}$$

For cylindrical polar coordinates, the mesh distances h_1 to h_8 are

$$h_1 = R_0\,\theta_1 \; ; \quad h_2 = R_2 - R_0; \quad h_3 = R_3\,\theta_3 \; ; \quad h_4 = R_0 - R_4, \tag{14a, b, c, d}$$

$$h_3 = R_2\,\theta_2 \; ; \quad h_6 = R_2\,\theta_3; \qquad h_7 = R_4\,\theta_3 \; ; \quad h_8 = R_4\,\theta_1. \tag{14e, f, g, h}$$

The currents I_0 in (10) and the constants given by (11) and (12) are retained in the computer memory. For each iteration only the α_i constants, defined by (11), the vector potentials defined by algorithm in (10), and the reluctivities described below have to be calculated.

f) *Difference expressions for magnetic inductions*

The average value of the reluctivity ν in a mesh determined as a function of the magnetic induction B in the geometric center of the mesh. For example, the *average* value of the radial component of the magnetic induction in mesh

0, 1, 5, 2 of Fig. 3a can be established as

$$B_{r1} = \left[\frac{A_1 - A_0}{2\,h_1} + \frac{A_5 - A_2}{2h_5} \right]. \tag{15a}$$

The tangential component is given as

$$B_{\Phi 1} = \left[\frac{A_1 - A_0 + A_5 - A_1}{2h_2} \right]. \tag{15b}$$

In (15) the h's are determined by (13a) and (13b) for rectangular meshes, and by (14a—h) for polar meshes. The magnetic induction at the geometric center of a mesh is then found as the square root of the sum of the squares of the radial component and the tangential component of induction. The reluctivity ν corresponding to the magnetic induction B is found by a numerical process described below.

g) *Computer representation of the magnetization curve* (Fig. 4)

It has been found that only very rarely can a good fit be obtained by a single function over the whole useful range of a magnetization characteristic. During the iteration procedures used, the flux densities may also overshoot into the high-saturated region, so that a reasonable fit also has to be obtained beyond the saturation point. In order to achieve this, the magnetization curve

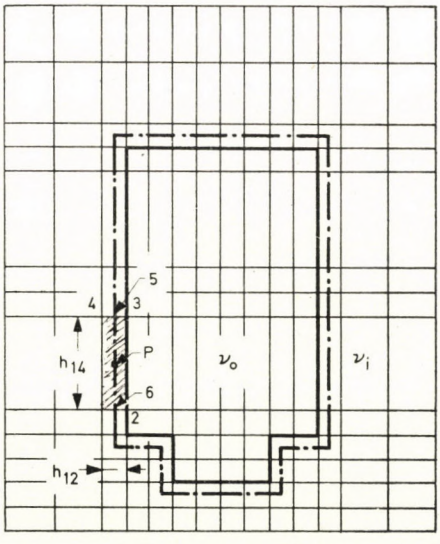


Fig. 4. Integration path for additive acceleration of convergence

had to be subdivided in two to four parts to ascertain that the relaxation procedures converge well. The calculation of the reluctivity in the saturated region from an improper fit can lead to large values of reluctivities that hamper convergence, because in the saturated region a small change of the magnetic induction B requires very large changes in the magnetizing intensity H.

The subdivision of the magnetization curve can be easily obtained. However, when used in a computer program, an artifice has to be incorporated for sensing the portion of the magnetization curve to be used for the calculation of the reluctivity for a given magnetic induction or for reluctivity.

Once a decision has been made to subdivide the magnetization curve it really does not matter if it is subdivided in a few or many sections. The sensing time will be independent of the number of sections chosen. To make the calculation procedure fast, it is imperative to keep the calculation of the magnetic intensity or of the magnetic induction in each section to a very few operations. This is best achieved by a method of linear interpolation in adequately small sections as described by TRUTT and ERDÉLYI [10].

IV. The point-to-point relaxation method

a) *Alternating method*

After all the finite difference equations have been written for the N grid points, an iteration method is used to find the simultaneous solution of the N equations. The solution of the set of N equations yields the potential at the N grid points. To alleviate the difficulty caused by nonlinearities, the iteration procedure is split into two steps. In the first the vector potentials are relaxed, assuming that the reluctivities are locally fixed during the iteration. In the second step the reluctivities are recalculated from the vector potentials, as explained below. Experience with several programs has shown that for vector potential problems this can be best accomplished in a sequence of three steps:

1. Relaxation of the potentials;
2. Acceleration of the procedure of step 1;
3. Underrelaxation of the reluctivities.

b) *Relaxation of the potentials*

Initial values are assumed for the potentials and reluctivities. The J_0 value of the currents are calculated using Eq. (12). The potentials are relaxed at all grid points by replacing the original values by the results of calculations using algorithm of Eq. (10).

c) *Acceleration of convergence by multiplicative block relaxation*

If no means are used to accelerate the iterations procedures convergence, several hundred iterations would be required before the vector potentials attain their final values. A block relaxation technique based on Stokes' theorem is used. We at the University of Colorado have introduced the multiplicative acceleration of convergence (MAC) as suggested by AHAMED [11]. Ampere's law

$$\oint_C \tilde{H} \cdot d\tilde{l} = \int_S \int \tilde{J} \cdot d\tilde{s} \tag{16}$$

must be satisfied in every subdomain of the field. In the MAC procedure a suitable closed path is chosen around the region (generally the outer contour), and the line integral of $\tilde{H}$ formed after the r-th iteration and denoted $F(r)$. The surface integral of the current density, the excitation I, is the independent variable. The ratio of I and $F(r)$ is denoted as $C(r)$. Eq. (16) is generally not satisfied at the r-th iteration. To force an agreement all potentials within the integration path are multiplied by $C(r)$.

An extended MAC procedure including several integration paths and a formula for potential adjustment is given in a paper by ERDÉLYI et al. REECE [12] concluded that successful application of the method depends on judgment and experience of the analyst, and a safe automatic routine is not likely to be economical.

d) *Additive acceleration of vector potentials*

The additive acceleration of convergence (AAC) devised by de LA-VALLÉE-POUSSIN and LION [13] is now used at the University of Colorado. The theoretical proof is based on the assumption that the air domains, the "windows", are fully enclosed by iron of zero reluctivity.

In the procedure a closed integration path is drawn in the iron, Fig. 5, hugging closely the contours of the window, and the line integral $\oint \tilde{H} \cdot d\tilde{l}$ along the closed path is formed. Again, according to Ampere's law this integral

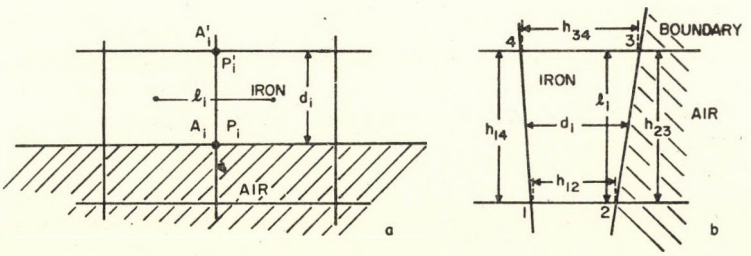


Fig. 5. To nonlinear accel. of convergence

should be equal to the current I_c enclosed by the path. This, however, will not be the case at the early stage of iterations. The resulting difference divided with a weighted length of the integration path yields a quantity ΔA. A corrected value of the vector potential A' is defined,

$$A' = A + \Delta A \,. \tag{17}$$

If the assumption of the analysis would be met, this artifice should accelerate the iteration procedure of the vector potential partial difference equation. The convergence would be then the same as though the reluctivity differences of the regions would be small.

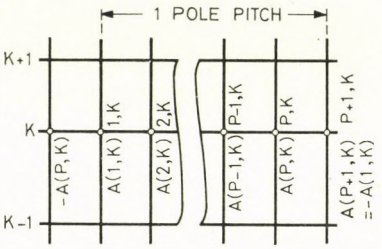


Fig. 6. Periodicity condition

Several computer programs have indicated that the acceleration artifice may lead to improved convergence even if the ideal assumptions are not exactly fulfilled. This is always the case in practical machines in which the windows, that is the slots, are not closed and the iron reluctivity is not zero. Results of computations have shown that additive acceleration of convergence provides some damping for oscillations of overrelaxations.

The method has not been extended to nonlinear problems by the originators. ERDÉLYI et al. [16] have developed the nonlinear formula based on Fig. 6

$$\Delta A = [I_c + \sum_i (\nu_{fe})_i \, (l_i/d_i) \, (A_i' - A_i)] / \sum_i (\nu_{fe})_i \, (l_i/d_i) \,, \tag{18}$$

$$\Delta A = \frac{I_c + \Sigma_i \left(\frac{\nu_{fe}}{2}\right)_i \frac{h_{14}+h_{23}}{h_{12}+h_{34}} \, [A_1 - A_2 + A_4 - A_3]}{\Sigma_i (\nu_{fe})_i \, \frac{h_{14}+h_{23}}{h_{12}+h_{34}}} \,, \tag{18a}$$

$$h_{34} = h_{12} \,; \qquad h_{14} = h_{23}$$

and Eq. (18a) becomes simpler:

$$\Delta A = \frac{I_c + \Sigma_i (\nu_{fe}/2)_i \, (h_{14}/h_{12}) \, (A_1 - A_2 + A_4 - A_3)}{\Sigma_i \, \nu_{fe} \, (h_{14}/h_{12})} \,. \tag{18b}$$

e) *Underrelaxation of reluctivities*

Experience has shown that the use of ν's calculated from Eq. 15 may lead to oscillations and the rate of convergence is reduced. For this reason the reluctivity ν_{r+1} calculated after $(r+1)$th iteration using Eq. 15 is underrelaxed to

$$\nu^{r+1} = (\nu_{r+1} - \nu^r)\omega(u) + \nu^r \,. \tag{19}$$

V. The successive line overrelaxation technique (SLOR)

In order to achieve a faster convergence of the relaxation iterations it is advisable to involve more than four neighboring points to determine the potential of a point. For this reason the line iteration technique is introduced in the present plan. In the point-to-point iteration method described above, the vector potential at a point was a function of four neighboring points at south, west, north and east. In the line iteration method all potentials on one gridline are found from potentials on two neighboring gridlines. The nature of the vector potential difference expressions based on line iterations have the so-called Young's property "A" [14]. A mild overrelaxation thus becomes possible even for the nonlinear treatment of magnetic fields.

To overcome the slow convergence of the point-by-point relaxations, in the faster converging SLOR method the potentials of all points on a gridline are relaxed simultaneously; indeed, they can be overrelaxed as described below.

a) *The difficulties of satisfying periodicity conditions*

The implicit solution of the potentials on a line leads to a tridiagonal matrix if the boundary conditions are of Dirichlet or Neumann kind. The potentials on a line can then be found by a simple recursion formula [15]. On load both the stator and rotor conductors carry currents and the so-called periodicity condition shown in Fig. 7 must be satisfied. The potentials on a K line must satisfy the condition:

$$A(J, K) = -A(J + P, K)$$

where $2P$ is the number of grid points of the contour's period on the K line. The potentials on the K line during the r-th iteration can then be formed from the equation

$$\begin{vmatrix} 1 & -g1(1) & 0 & 0 & 0 & g3(1) \\ -g3(2) & 1 & -g1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & -g1(P-1) \\ g1(P) & 0 & & 0 & -g3(P) & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A(1,K) \\ A(2,K) \\ \\ A(P,K) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \\ C(P) \end{vmatrix} \tag{20}$$

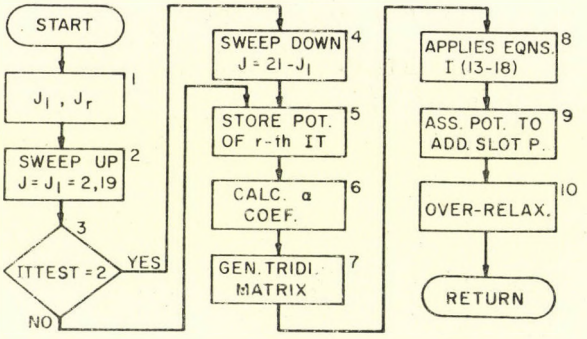


Fig. 7. Flowchart of one sweep

or

$$|G| \cdot |A| = |C| . \tag{20a}$$

The coefficients g and C denote the following:

$$g1(1) = \alpha_1(1)/\Sigma_i \alpha_i(1) ; \ldots g1(P) = \alpha_1(P)/\Sigma_i \alpha_i(P) , \tag{21a—n}$$

$$g3(1) = \alpha_3(1)/\Sigma_i \alpha_i(1) ; \ldots g3(P) = \alpha_3(P)/\Sigma_i \alpha_i(P) , \tag{22a—n}$$

$$C(1) = [\alpha_2(1)A(1, K+1)+\alpha_4(1)\, A(1, K-1)+I_0(1, K)]/\Sigma_i \alpha_i(1), \tag{23a}$$

$$C(P) = [\alpha_2(P)A(P,K+1)+\alpha_4(P)A(P,K-1)+I_0(P,K)]/\Sigma_i \alpha_i(P) \tag{23n}$$

where $i = 1, 2, 3, 4$.

The matrix Eq. (20) is "cleaned" by transferring the terms $g3(1)$ and $g1(P)$ to the right of the equation sign of Eq. (20) and combining them with the terms $C(1)$ and $C(P)$ respectively of the vector C. The modified C vector is now denoted as D. In this artifice the potentials $A(1, K)^{r-1}$ and $A(P, K)^{r-1}$ ensuing from the $(r-1)$th iteration are used for the calculation of the potentials $A(J, K)^r$ during the r-th iteration.

$$|G'| \cdot |A| = |C| \tag{24}$$

where

$$|G'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -g3(2) & 1 & -g1(2) & & \\ & -g3(3) & 1 & -g1(3) & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & -g3(P) & 1 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} D(1) \\ D(2) \\ D(3) \\ \\ \\ D(P) \end{vmatrix} \tag{24a, b}$$

The new matrix $|G'|$ will be purely tridiagonal and the well-known recursion formula [16] can be used.

b) *Overrelaxation of the vector potentials*

In solving elliptic partial differential equations using relaxation methods, it has been shown that the rate of convergence of the simultanous solution of the difference equations may be improved greatly by the use of a weighing factor, known as the overrelaxation factor. It is used in the following way:

$$A'(J, K)_{r+1} = A(J, K)_r + W[A(J, K)_{r+1} - A(J, K)_r]. \tag{25}$$

In Eq. (25) W is the overrelaxation factor, r is the number of completed iterations, and A_{r+1} is the new calculated value of the potential at the mesh point.

This method may be used for nonlinear differential equations, although there is no justification for it, based on present theory. The determination of the optimum value of W, for most rapid convergence, cannot be found analytically for nonlinear problems, and has to be found experimentally.

The line iteration technique allows overrelaxation for it satisfies property "A". Experience gained with scalar potential problems has indicated that overrelaxation can be applied also in nonlinear problems if the overrelaxation factor is reduced. Generally, this factor should be decreased with increased saturation. Experiments carried out for a d.c. machine have shown that overrelaxation of the vector potentials can be applied if the overrelaxation factor is about 1.3 and if some damping is provided for the oscillations of the potentials and residues.

c) *Monitoring of convergence*

Because of high computation costs iterations are discontinued when results acceptable from an engineer's point of view are achieved. Residuals ϱ are defined as:

$$\varrho(J, K) = [A(J, K) - I_0(J, K) + \Sigma_i(\alpha_i A_i)]/\Sigma\alpha_i \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{26}$$

The residuals of the r-th SLOR iteration are obtained from the equation

$$|\varrho^r(J, K)| = |G'(A^r(J, K))| \cdot |A^r(J, K)| - |D(A^r(J, K))|. \tag{27}$$

In the present programs of the authors [17] the sum of the absolute values of the residuals R_S defined by

$$R_s = \Sigma_K \Sigma_J |\varrho^r(J, K)|;\quad K = 1, \ldots\ K(\max);\ J = 1, \ldots\ J(\max), \tag{28}$$

and the maximum residual R_M are used as criteria of convergence. If both

quantities R_S and R_M are below certain predetermined small bounds $\varepsilon(S)$ and $\varepsilon(M)$ and both R_S and R_M decrease monotonically, it is assumed that a satisfactory set of the solutions of A is obtained and the iterations are stopped.

d) *Sequence of operations of one sweep* (Fig. 8)

The choice of the sequence of operations for finding the vector potentials at a given load condition and rotor position is based on experience with several former programs. Some 30 short runs and several longer runs using the computer programs described by flow charts below were used to obtain additional

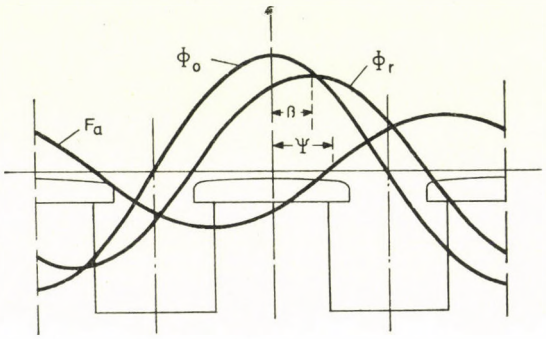


Fig. 8. Internal p. f. angle

guide. During one sweep from grid line *K 59* to *K 1* (or in the opposite direction) the relaxation iterations were carried out in the following steps:

1. Successive line overrelaxation in the stator (from *K 59* to *K 21*);
2. Interpolation on line *K 21*;
3. Successive line overrelaxation in the rotor (from *K 19* to *K 1*);
4. Additive acceleration of convergence by block relaxation of all the windows;
5. The calculation of the residues at each interior grid point;
6. Determination of the sums of the absolute values, R_S, of the residues;
7. Searching for the position in the grid and the magnitude of the maximum residue, R_M ;
8. Test if the sum of the absolute values of the residuals R_S and the maximum residual R_M are less than present quantities ε_S and ε_M;
9. Calculation of reluctivities and underrelaxation of the new reluctivities.

e) *Final sequences of computing*

The steps 1 to 9 were repeated until the conditions specified in step eight were satisfied. At this point the following final procedure was initiated:

10. The overrelaxation factors of step 1 and 3 were reduced to 1.00 and the additive acceleration of convergence (step 4) omitted. Iterations were continued as long as criteria 6 and 7 decreased monotonically. At an increase of the absolute sums of residues the iterations were stopped, and

11. the radial components of the magnetic inductions on the rotor surface calculated. After this

12. all the final vector potentials, reluctivities, residues, sums of absolute values of residues, position, and magnitude of the maximum residue and the radial inductions were printed out.

VI. Results of computations

a) *Point-to-point iterations*

The techniques described have been used on a number of salient pole machines. The point-to-point procedure has been used to find the radial magnetic inductions in the airgap of a three-phase alternator having the following data: rating, 2750 kva; 2300 volts between lines, wye-connected; 60 Hz, 900 r/min, 8 pole (Figs. 1, 2). The radial airgap magnetic inductions have been

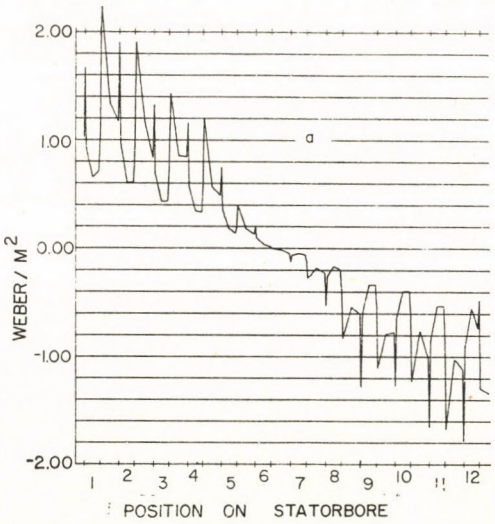


Fig. 9. Radial airgap induction (computer output)

found for normal excitation of 10 500 ampere-turns per pole and at full load of 696 amperes at zero degree internal power factor angle. Because of the nonlinear characteristic of the problem the new concept of the internal power factor angle has been introduced (Fig. 10).

It is the nature of the nonlinear analysis of synchronous machines that the angle ψ has to be selected as an independent variable and not the terminal power factor usually chosen as the independent variable in the linear theory of unsaturated alternators. In the method proposed, the internal power-factor has to be estimated first; the torque angle and the power-factor angle θ will be the results of calculations.

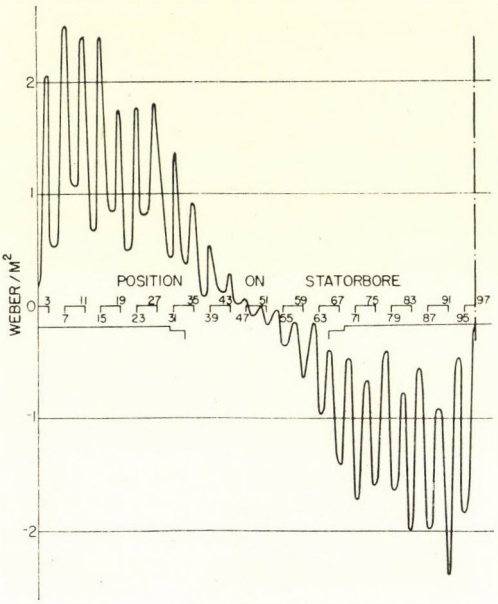


Fig. 10. Radial airgap induction (synthesis of harm. comp.)

A typical results of computation of the radial airgap inductions at the armature bore is shown in Fig. 11. Digital-analog conversion arrangements are used to draw this curve. This figure is not very useful for the designer because it contains harmonic components that have their origin in the armature grid system design. In order to have a practical representation of the results, the output was subjected to Fourier analysis. The sum of the harmonics, including the second slot harmonics, were then computed. The resultant flux distribution is then established as the sum of these harmonics and is shown in Fig. 12.

b) *SLOR applied to d.c. machine* [17]

The new SLOR procedure has been applied to a Westinghouse 500 hp, 7500, 544A, 300/900 *r*/min, four-pole motor, shown schematically in Fig. 11. The grid system used is shown for half a pole pitch in Fig. 13.

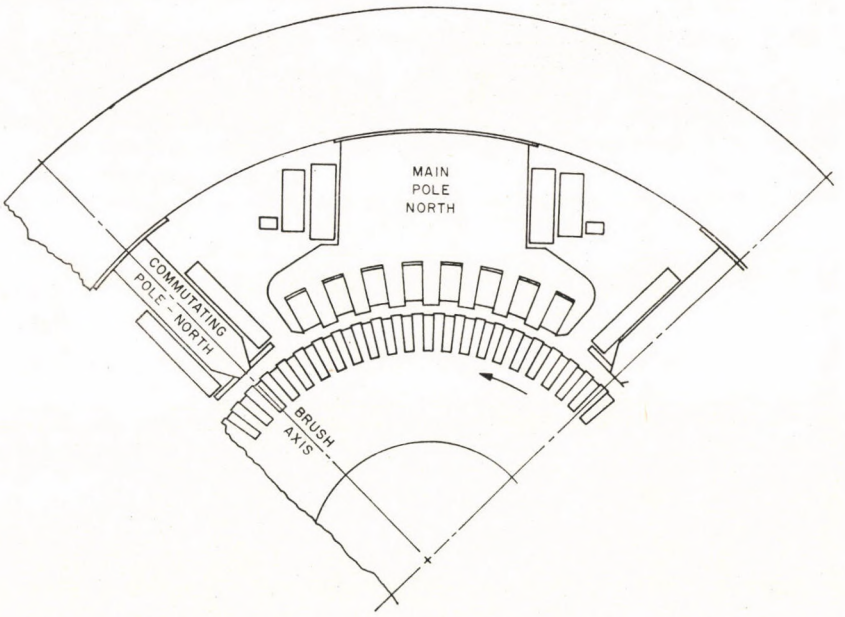


Fig. 11. Schematic cross section of a d.c. machine

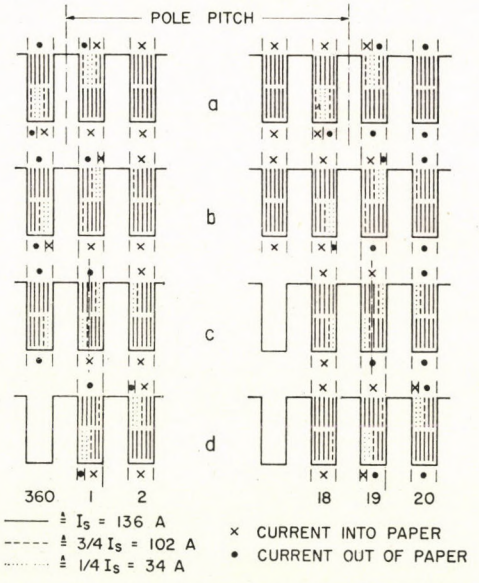


Fig. 12. Commutating zone currents. *a)* Rotor position 1. *b)* Rotor position 2. *c)* Rotor position 3. *d)* Rotor position 4

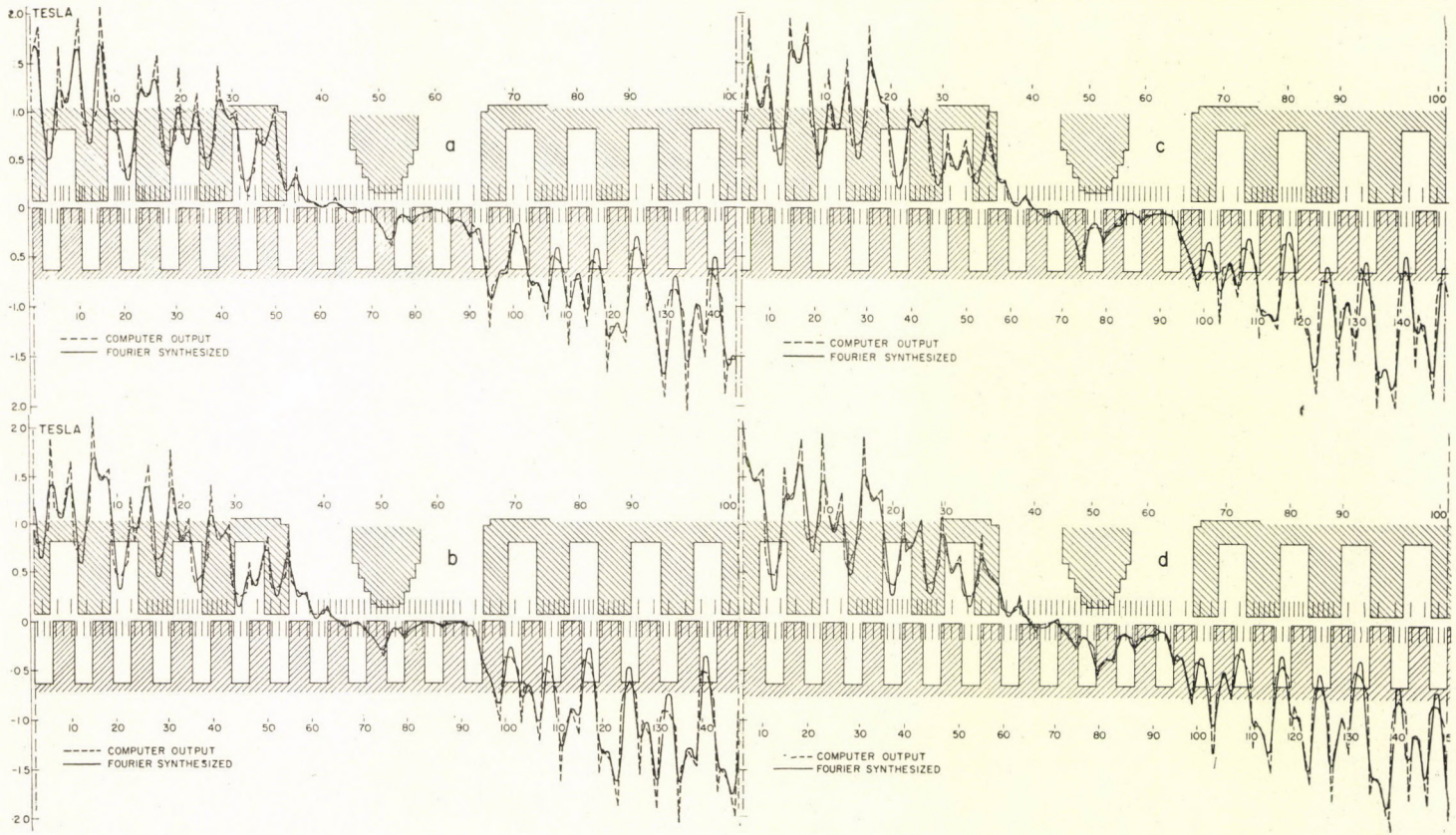


Fig. 13. Radial airgap inductions at full load. *a)* Rotor position 1. *b)* Rotor position 2. *c)* Rotor position 3. *d)* Rotor position 4

Operation at full load was calculated at four rotor positions, and double-load operation in rotor position 1. The currents and excitations were as follows: armature current 544 A; main field excitation, 8300 At; compounding winding excitation, 540 At; commutating pole excitation, 5450 At; compensating winding excitation, 8720 At. The commutating zone conductor currents are shown in Fig. 1.

The overrelaxation factor for the vector potential was chosen 1,3. This magnitude is based on experimentation described below. The underrelaxation factor for the reluctivities was kept constant during all iterations as 0,1. The

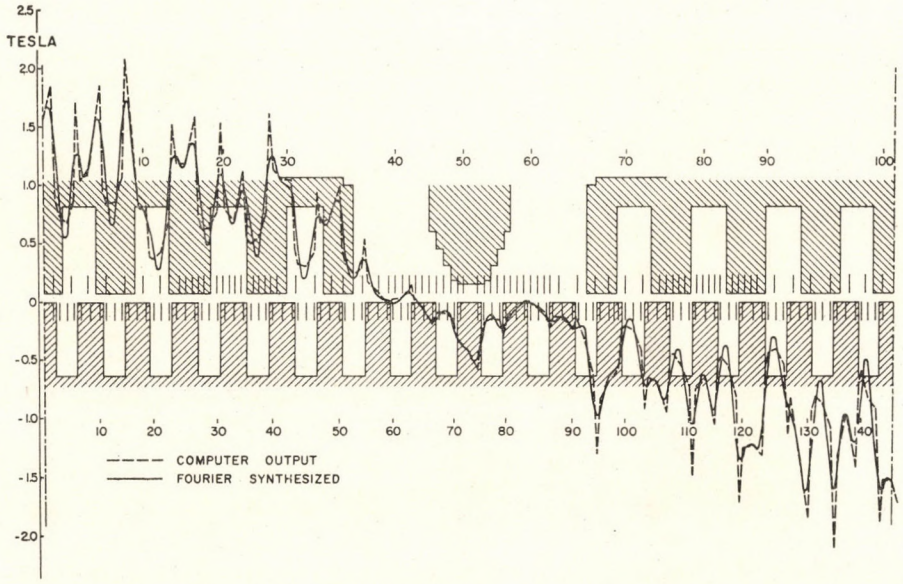


Fig. 14. Radial airgap induction at twice full load

predetermined acceptable maximum of the sum of the absolute values of the residual ε_S was $2{,}2 \times 10^{-1}$ Wb/m; the acceptable ε_M of the residues was set at $1{,}75 \times 10^{-3}$ Wb/m. The computations were carried out on three different computers. On the average 90 to 100 iterations were required to reach convergence criteria ε_S and ε_M. Twenty iterations without overrelaxations and acceleration of convergence were carried out after ε_S and ε_M were attained. Generally the computations were discontinued after a total of 110 = 130 iterations. Thus in all cases the ultimate values of R_S and R_M were smaller than ε_S and ε_M.

Resultant airgap radial inductions. The full-load resultant airgap induction at the armature surface in the four-rotor positions are shown in Fig. 14. The inductions on the individual radial grid lines were connected by straight segments; consequently, the initial results seem rugged. This is partly caused by edge effects at the slot corners and partly by the choice of the grid system.

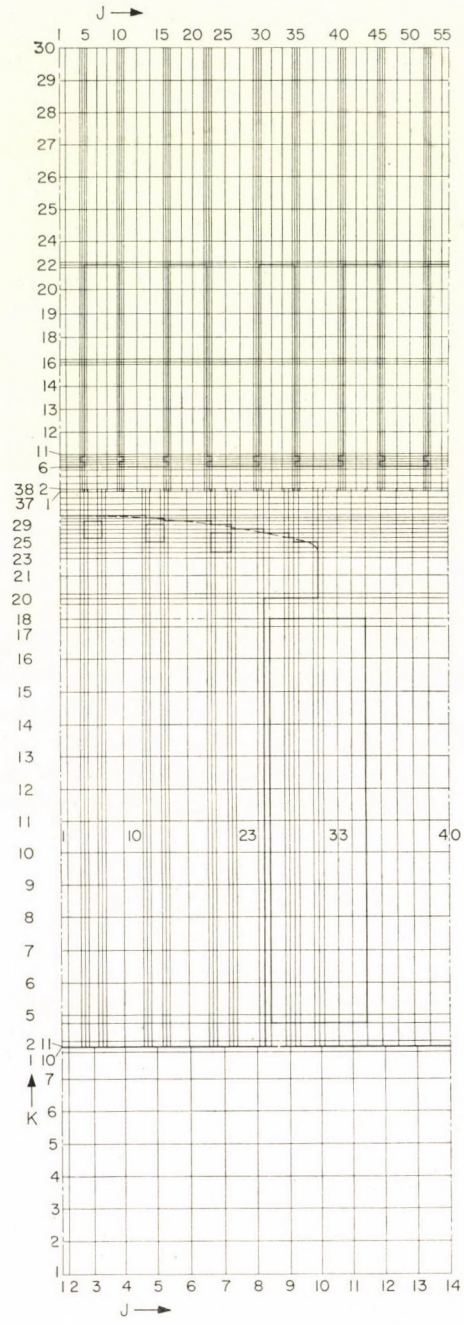


Fig. 15. Grid system of large waterwheel alternator

For practical results the inductions represented by the set of connected broken lines are subjected to a Fourier analysis, and the significant harmonics up to the third slot harmonic are summed. The synthesized curves are shown heavier.

As seen from Figs 14a to d and on Fig. 15, the compensation is quite complete on this machine. The changes of the magnetic induction at the different rotor positions and the changes in the commutating zone are clearly discernible.

c) *SLOR applied to large synchronous machine*

The new program has been also applied to an 82,5 MVA, 16,5 KV, 40-pole, 60 Hz, three-phase, wye-connected waterwheel generator. The grid system is shown in Fig. 16. Because of the large number of poles, the alternator has been developed. The radial airgap inductions have been found and the no-load characteristic Fig. 17 determined. As seen, the calculated points are in good agreement with measurements.

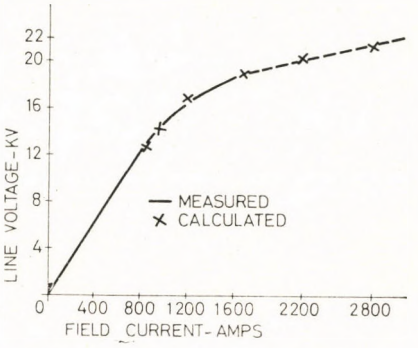


Fig. 16. No-load characteristic of waterwheel alternator

The rated load case was calculated for an internal power factor $\psi = \pi/6$ radians, at 1680 A excitation current and 2886,75 A armature phase current. The radial induction on the stator bore is shown by the rugged dashed line in Fig. 18. This distribution was subjected to a Fourier analysis to dispense with the harmonic that has been introduced by the grid system. In order to calculate the quantities of the phasor diagram the radial induction on the line connecting the slot centers has also been calculated, but is not shown here.

The no-load voltage E_0 calculated from the flux distribution Fig. 18 is 18 892,0 Volts from L — L. The airgap voltage E has been calculated from the Fourier analysis (5,2) as 16 931,0 Volts from L — L. The internal power factor ψ was assumed 30°; the angle β between the no-load voltage E_0 and the airgap voltage E was found from the Fourier analysis to 4,76° (electrical). The terminal voltage, calculated from the phasor diagram, was 16 300,0 Volts from L — L;

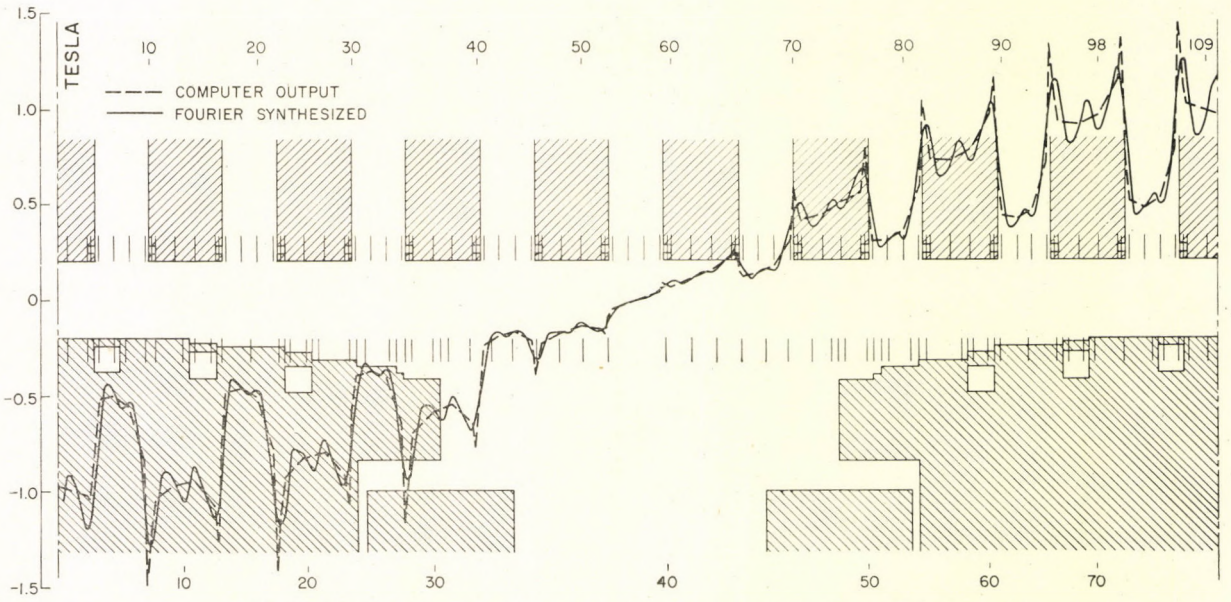


Fig. 17. Radial airgap induction in large waterwheel alt. at full load

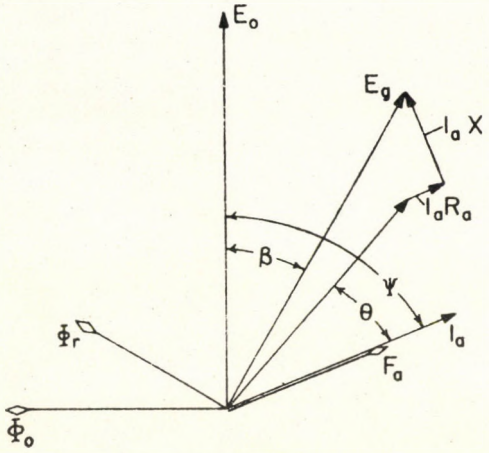


Fig. 18. Phasor diagram

the torque angle $\delta = 12°$ (electrical), the external power factor was $\cos \theta = 0{,}951$ leading, and the armature leakage reactance $X_{al} = 0{,}142$ p.u. The phasor diagram is simple, as all data are obtained from the Fourier analysis, Fig. 19.

d) *The flux plots*

In order to have a more graphical view of the flux distribution a program has been written for flux plotting with the aid of a computer and an x—y plotter. This new program [16] carries out the following steps: Scanning of the grid lines in the cross section to find the points of definite magnetic potentials from the discrete vector potential established by the method described. Next, the location of the point of the mesh containing the given vector potential is found by interpolation. Then the positions of the points are expressed in rectangular coordinates and all points of the same vector potentials are found and printed out by a plotter. This procedure is carried out for several values of the vector potentials to obtain a comprehensive plot of flux lines. The results of this flux plotting program are shown in Fig. 19 for the fully loaded 500 hp d.c. machine. Figs. 20a, b and c show the detailed flux plot in the commutating zone at three different rotor positions. Fig. 21 shows the commutating zone flux plot at double rated load. Fig. 22 is the flux plot of 82 MVA, 40-pole alternator at full load and 0,95 p.f. leading.

e) *Study of convergence of SLOR*

Before full-scale calculations, experiments were carried out to study the influence of additive acceleration of convergence. Fig. 22 shows clearly the effect. Chain dotted curve I is the graph of R_S without AAC and curve II

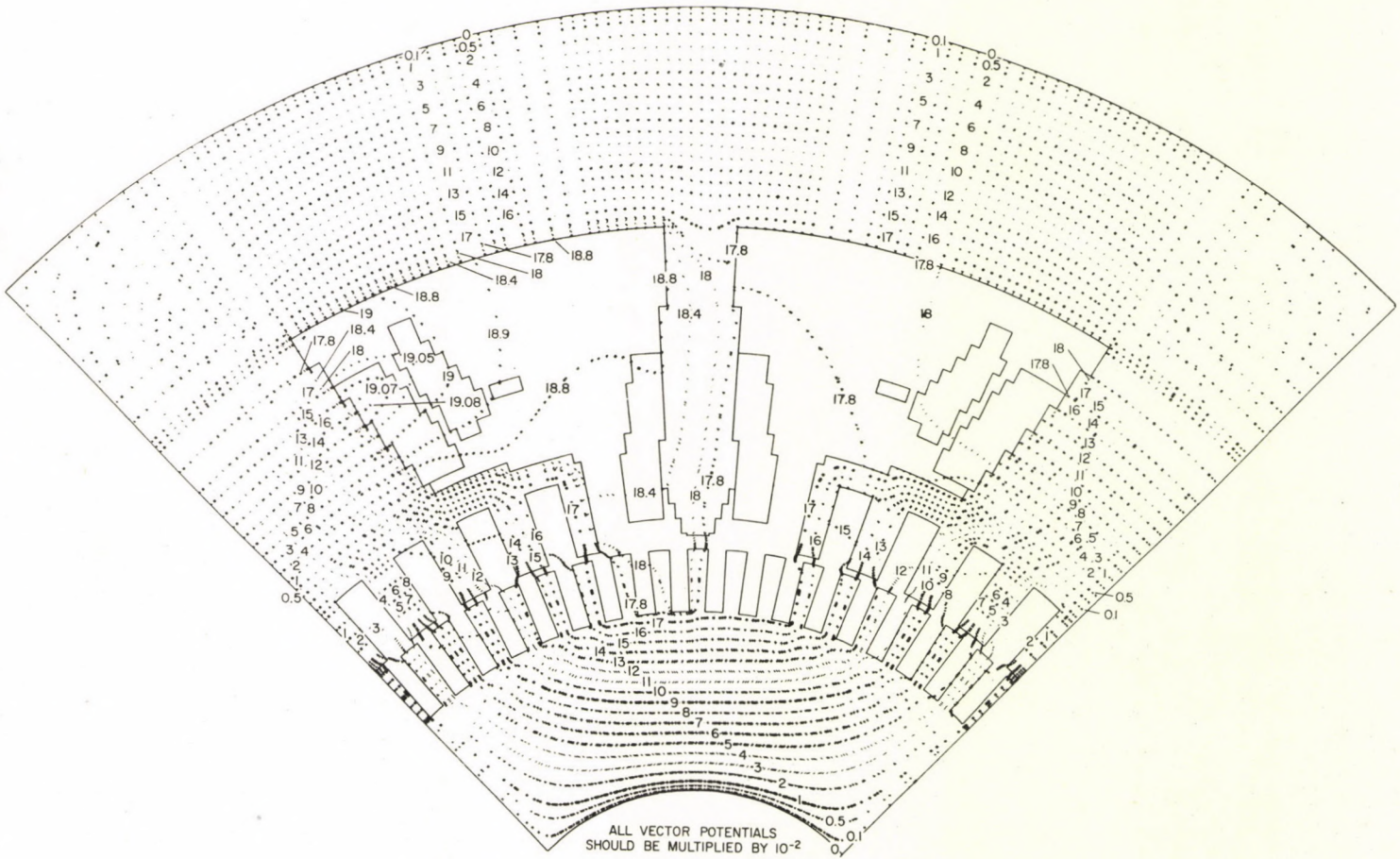


Fig. 19. Flux distribution in d.c. machine at full load

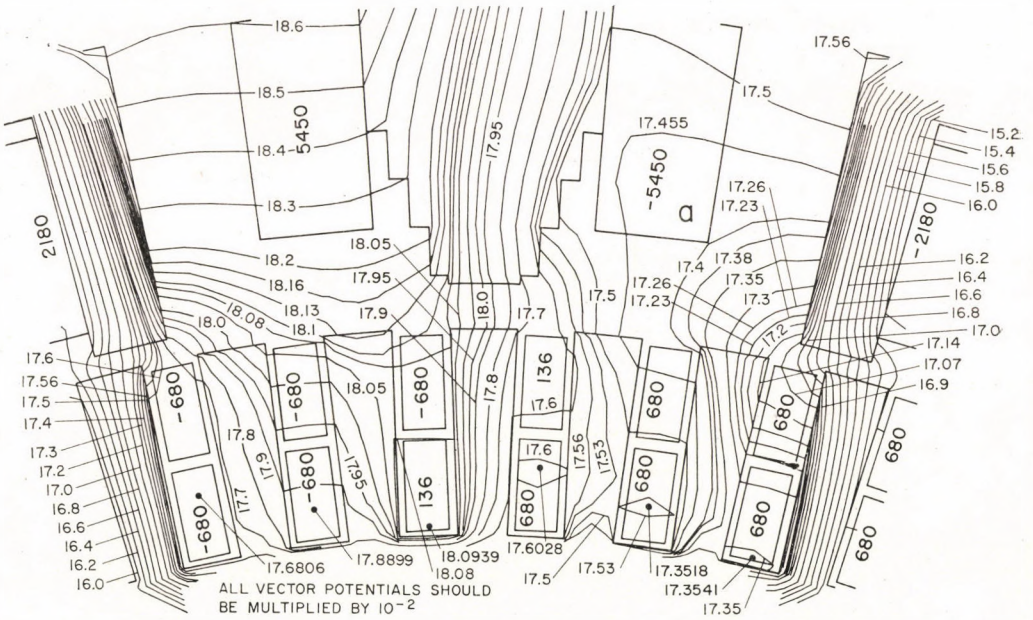


Fig. 20(a)

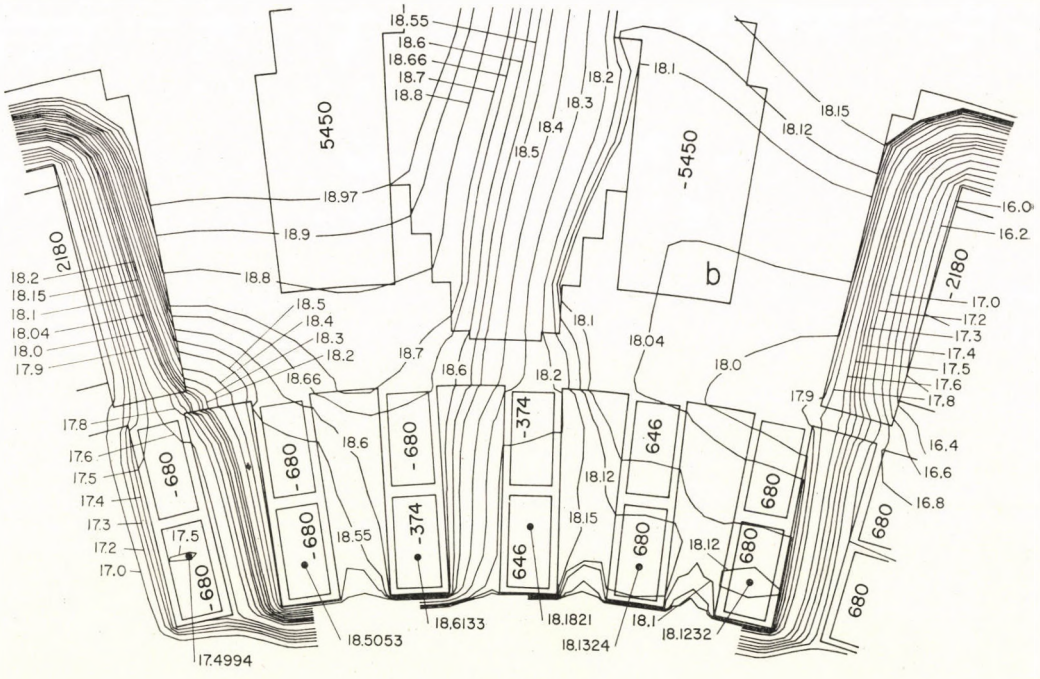


Fig. 20(b)

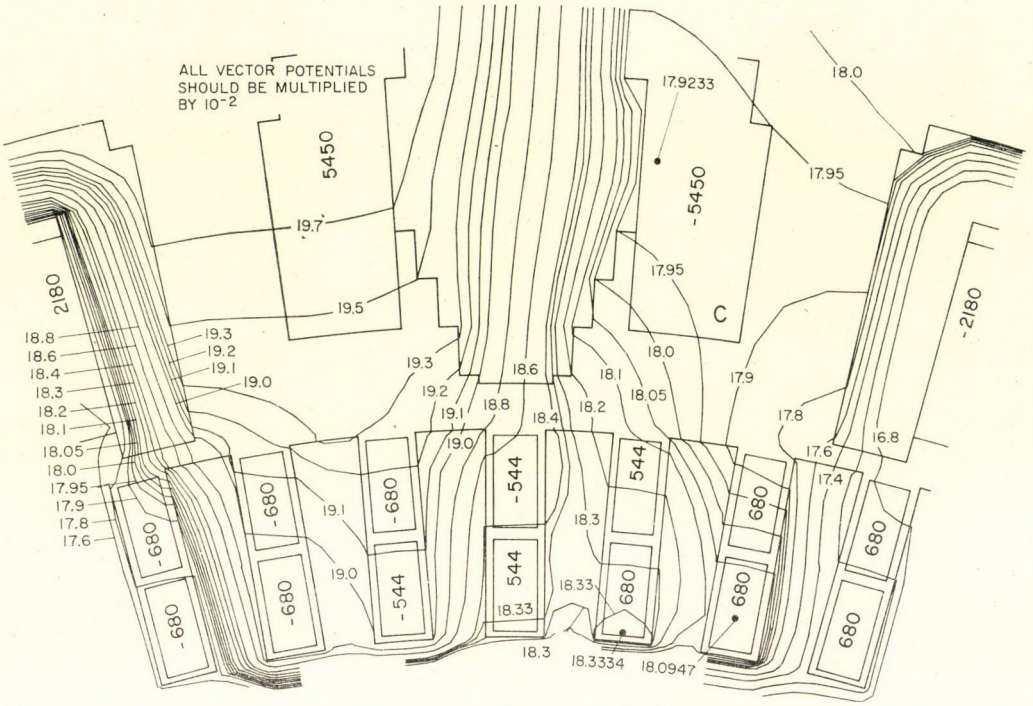


Fig. 20(c) Flux distribution in commutating zone. *a)* Rotor position 1. *b)* Rotor position 2 *c)* Rotor position 3.

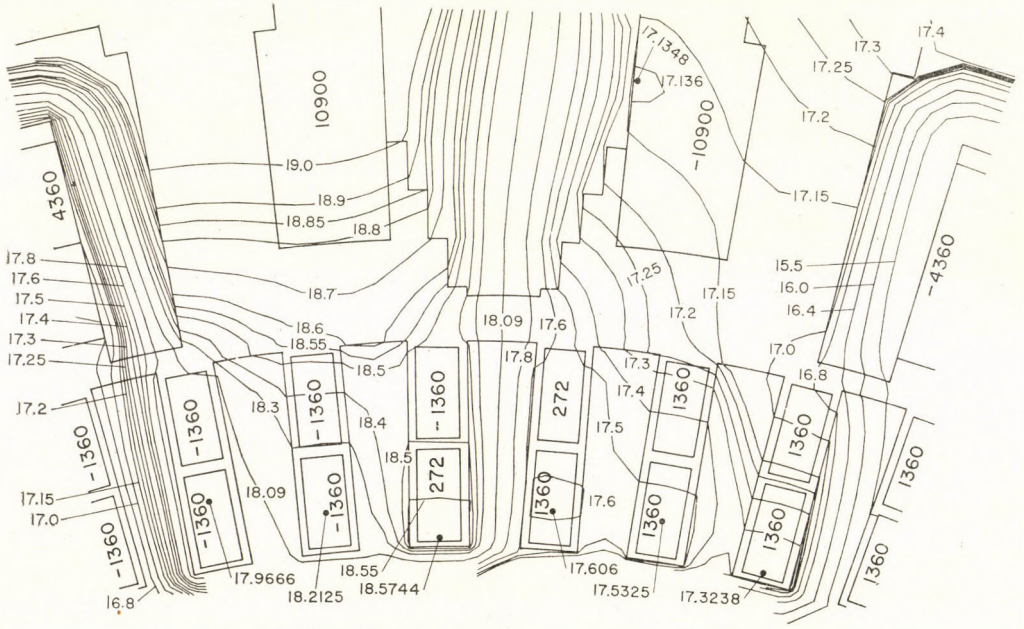


Fig. 21. Flux distribution in com. zone at double load

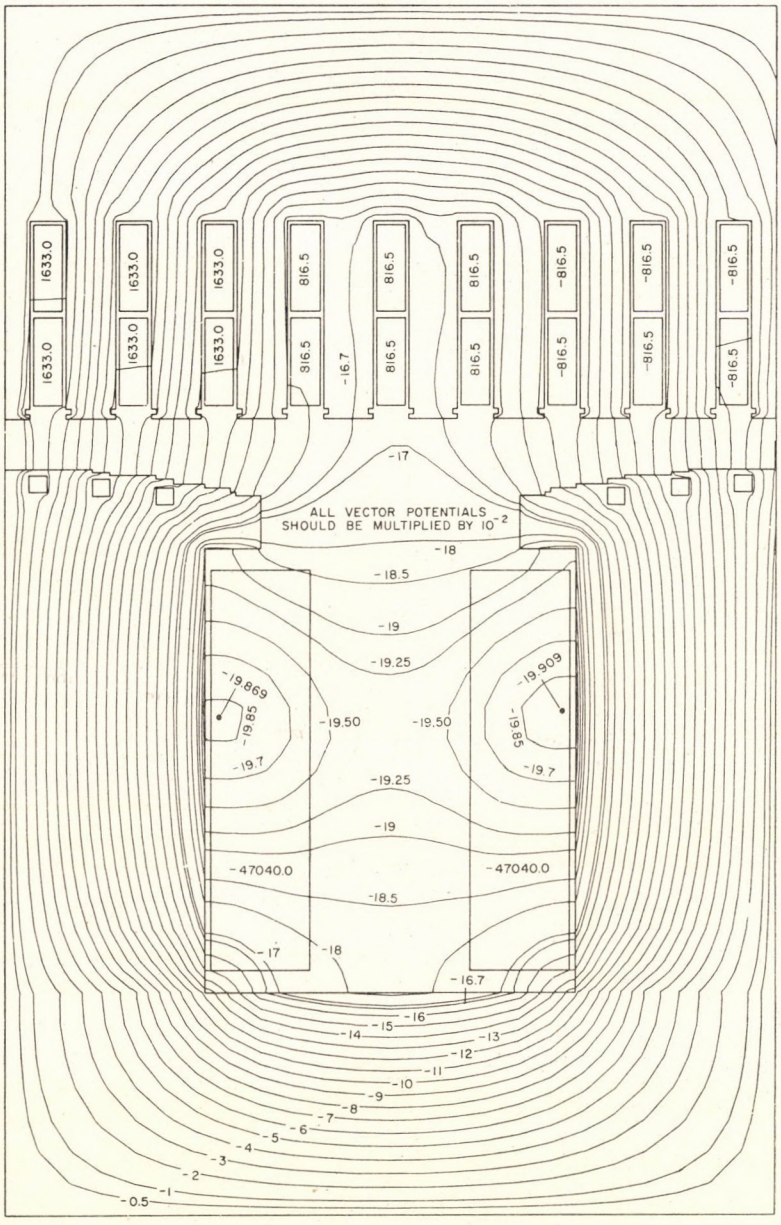


Fig. 22. Flux distribution in large waterwheel alternator at full load

with AAC. The damping influence and the faster reduction of R_S is clearly visible. The integration paths can be drawn either separately for each iron domain, or joint paths can be chosen. The effect of either choice is seen from Fig. 23. Joint paths provide a faster rate of convergence.

Fig. 24 shows the effect of the choice of the overrelaxation factor on the iteration process in conjunction with additive acceleration of convergence. Judging from the behaviour of R_S and R_M $\omega = 1.3$ provides the fastest rate of convergence. This factor has been used in other analyses [17] and has been found very useful.

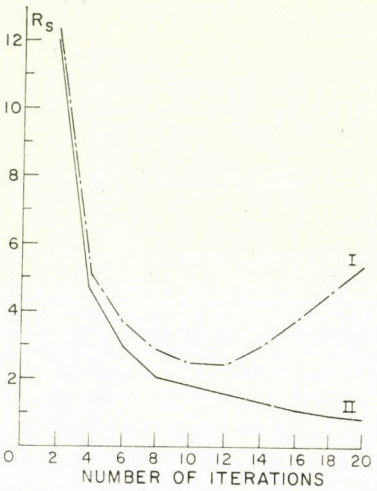


Fig. 23. Effect of additive acceleration of convergence

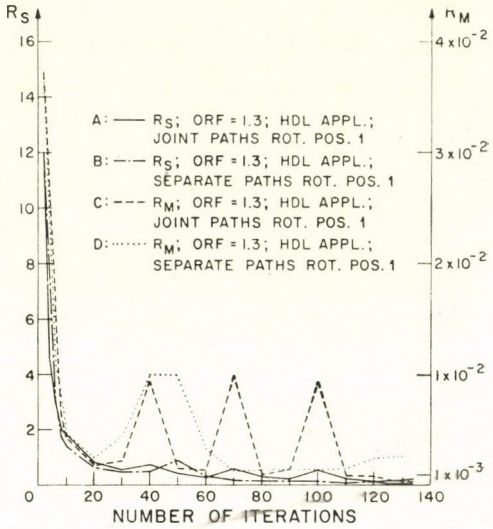


Fig. 24. Separate and joint path

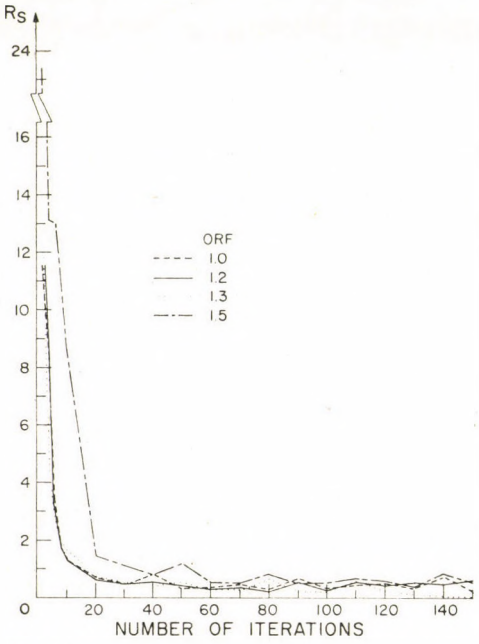


Fig. 25. Effect of overrelaxation factor on convergence

VII. Concluding remarks

The procedure described here for the calculation of the magnetic vector potentials in electrical devices consisting of successive line overrelaxations, additive acceleration of convergence and of constant monitoring of the residuals has a good rate of convergence. The oscillations of the potentials and residuals are kept to very small amplitudes. Suitable overrelaxation factors for rotating machine problems have been experimentally found.

REFERENCES

1. Carter, F. W.: Airgap Induction, Electrical World 38 (1901), 884—888
2. Hague, B.: The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines. Dover, New York 1962.
3. Motz, H.—Worthy, W. D.: Calculation of Magnetic Field by Southwell's Relaxation Method. J. Instn. Elect. Engrs (Part 2) **92** (1946), 522—528
4. Benedikt, O.: Die nomographische Methode der Berechnung komplizierter und stark gesättigter magnetischer Kreise elektrischer Maschinen. Akadémiai Kiadó, Budapest 1960.
5. Blondel, A. E.: On the Armature Reaction of Alternators. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **129** (1899), 586—589
6. Sumec, J.: Impedance Drop of Polyphase Synchronous Generators. *Elektrotechnische Zeitschrift* **31** (1910), 1174—1177 and **32** (1911), 77—80
7. Doherty, R. E.—Nickle, C. A.: Synchronous Machines (Part I and Part II "An Extension of Blondel's Two-Reaction Theory") *Trans.* AIEE **44** (1925), 403—418
8. Wieseman, R. W.: Graphical Determination of Magnetic Fields. *Trans.* AIEE **46** (1927), 141—151
9. King, R. W. P.: Fundamental Electromagnetic Theory. Dover, New York 1963; 139
10. Trutt, F. C.—Erdélyi, E. A.—Hopkins, R. E.: Representation of the Magnetization Characteristic of D. C. Machine for Computer Use. IEEE *Trans.* Power Apparatus and Systems PAS-87 (1968), 665—669
11. Erdélyi, E. A.—Ahamed, S. V.—Hopkins, R. E.: Nonlinear Theory of Synchronous Machines On-Load. IEEE *Trans.* Power Apparatus and Systems PAS-**85** (1966), 792—801
12. Reece, P.: Some Experiences with the Application of Block Relaxation to the Automatic Iteration of Finite Difference Equation. IEE Coll. of Computers to Field Analyses, London 1967; 4/1—4/13
13. Ahamed, S. V.: Acceleration of Convergence of Numerical Solutions of Vector Field Problems. Computer Journal **8** (1965), 73—76
14. Young, D.: The Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations (Modern Mathematics for the Engineer). MacGraw-Hill Book Co. Inc., New York 1961; 373—419
15. McCracken, D. D.—Dorn, W. S.: Numerical Methods and Fortran Programming. John Wiley & Sons Inc., New York 1964; 398
16. Erdélyi, E. A.—Fuchs, E. F.: Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part I (Theoretical Fundamentals); IEEE Winter Power Meeting, New York (N. Y.) January 25—30, 1970; Paper 70 TP 183
    Fuchs, E. F.—Erdélyi, E. A.: Nonlinear Magnetic Analysis of DC Machines, Part II (Application of the Improved Treatment); ibidem Paper 70 TP 184
    Erdélyi, E. A.—Fuchs, E. F.—Binkley, D. H.: Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part III (Equipotential Plots Drawn by Computer); ibidem Paper 70 TP 185
17. Fuchs, E. F.—Erdélyi, E. A.: Steady-state Reactances and Magnetic Fields in Nonlinear Large, Saturated Waterwheel Alternators Determined from Flux Plots. Record 22nd Southwestern IEEE Conference, Dallas (Texas) April 1970; 387—391

Magnetische Felder in nichtlinearen, heteropolaren Drehmaschinen. Werden die durch die Sättigung des Eisens verursachten Nichtlinearitäten in Betracht gezogen, so sind die zur Bestimmung der Betriebseigenschaften von elektrischen Drehmaschinen verwendeten üblichen linearen Theorien nicht anzuwenden. Die vorliegende Arbeit enthält die vom Verfasser ausgearbeiteten Verfahren zur Lösung des Grenzwertproblems des zweidimensionalen nichtlinearen Vektorpotentials und die Umwandlung der partiellen Differentialgleichungen in Differenzengleichungen sowie die zu deren Lösung ausgearbeiteten numerischen Verfahren. Das Verfahren wird in bezug auf Drehmaschinen mit hervorstehenden Polen dargestellt.

Магнитные поля в нелинейных гетерополярных вращающихся машинах. Если учитывать нелинейности, вызванные от насыщения стали, то нельзя использовать обычно применяемые для определения эксплуатационных свойств электрических вращающихся машин линейные теории. Данная работа излагает разработанный автором метод, предназначенный для решения проблемы граничного значения двумерного нелинейного векторного потенциала и преобразования парциальных дифференциальных уравнений в дифференциальные уравнения, а также числовой метод, разработанный для их решения. Метод излагается в связи с вращающимися машинами с выступающими полюсами.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 327—334 (1972)

EIN EINFACHES ITERATIONSVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DER EIGENWERTE EINES HERMITESCHEN (REELLSYMMETRISCHEN) MATRIZENPAARES

S. FALK*

Gegeben ist ein Hermitesches Matrizenpaar, das heißt die Hermiteschen quadratischen n-reihigen Matrizen **A** und **B**, wobei **B** außerdem positiv oder negativ definiert ist, und gesucht werden die Eigenwerte und Eigenvektoren des Matrizenpaares. Mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens wird eine Iterationsmethode aufgezeigt, die die kleinsten Eigenwerte in aufsteigender bzw. die größten Eigenverte in absteingender Reihenfolge mit geringem Rechenaufwand zu ermitteln gestattet.

1. Aufgabenstellung

Gegeben seien die Hermiteschen (bzw. reellsymmetrischen) quadratischen n-reihigen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, wobei $\mathbf{B}$ außerdem positiv oder negativ definit ist, in Formeln

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\,;\ \mathbf{B}^* = \mathbf{B} \text{ definit.} \tag{1}$$

Macht man den Rayleigh-Quotienten

$$R = \frac{\mathbf{z}^* \mathbf{A}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^* \mathbf{B}\mathbf{z}} \tag{2}$$

extremal bezüglich aller von Null verschiedenen Vektoren z, so führt dies auf die Matrizeneigenwertaufgabe

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}\,, \tag{3}$$

deren Eigenwerte λ_i die extremalen Rayleigh-Quotienten (2), gebildet mit den Eigenvektoren $\mathbf{z} = \mathbf{x}_i$ sind. Auf Grund der Voraussetzung (1) existieren genau n reelle Eigenwerte λ_i, die der Größe nach geordnet seien:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots \leq \lambda_n\,. \tag{4}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_j$ sind $\mathbf{A}$-unitär und $\mathbf{B}$-unitär (bzw. im Reellen $\mathbf{A}$-orthogonal und $\mathbf{B}$-orthogonal), das heißt es gilt:

$$\mathbf{x}_i^* \mathbf{A}\mathbf{x}_j = 0\,; \quad \mathbf{x}_i^* \mathbf{B}\mathbf{x}_j = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j\,. \tag{5}$$

* Prof. Dr. Ing. S. Falk, Postfach 7050, 33 Braunschweig, BRD

Bei den meisten Aufgaben der Praxis sind von den n Eigenwerten (Eigenschwingungszahlen, Knickwerten usw.) nur die $\varkappa$ kleinsten (manchmal auch die γ größten) Eigenwerte von Interesse, und wir werden daher im folgenden mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens eine Iterationsmethode aufzeigen, die die kleinsten Eigenwerte in aufsteigender bzw. die größten Eigenwerte in absteigender Reihenfolge mit minimalem Rechenaufwand zu ermitteln gestattet.

2. Das Verfahren von Ritz

Obwohl das Verfahren von Ritz eines der bewährtesten Verfahren der numerischen Analysis ist, findet man es seltsamerweise in der Literatur fast niemals auf Matrizenprobleme angewendet, obwohl es gerade hier durch das Fehlen von Randbedingungen besonders einfach zu handhaben und auch sehr wirksam ist. Es sei daher noch einmal kurz beschrieben. Man wählt ϱ linear unabhängige Vektoren $\mathbf{k}_i$ und kombiniert diese mit noch unbekannten skalaren Freiwerten f_i in der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{k}_1 f_1 + \mathbf{k}_2 f_2 + \ldots + \mathbf{k}_\varrho f_\varrho , \tag{6}$$

was wir kürzer in der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{K} f \tag{7}$$

schreiben können mit der aus ϱ Zeilen und n Spalten bestehenden Rechtecksmatrix

$$\mathbf{K} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \ \ldots \ \mathbf{k}_\varrho) \tag{8}$$

und dem Vektor

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \ldots \\ f_\varrho \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Der Rayleigh-Quotient (2) als Funktion des Vektors $\mathbf{f}$ ist dann

$$R = \frac{\mathbf{z}^* \mathbf{A} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^* \mathbf{B} \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{f}^* \mathbf{K}^* \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^* \mathbf{K}^* \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}^* \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^* \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{f}} \tag{10}$$

mit den ϱ-reihigen quadratischen Matrizen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{K}^* \mathbf{A} \mathbf{K}, \ \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{K}^* \mathbf{B} \mathbf{K} , \tag{11}$$

die, wie man leicht zeigt, ebenfalls der Bedingung (1) genügen. Macht man jetzt den Rayleigh-Quotienten extremal bezüglich $\mathbf{f}$, so entsteht analog zu

(3) die Ersatzeigenwertaufgabe

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{f} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{f} \tag{12}$$

deren ϱ Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ ebenfalls der Größe nach geordnet werden; es bestehen dann nach Minimum-Maximumprinzip die beiden folgenden Ungleichungen:

$$\lambda_i \leq \tilde{\lambda}_i\,; \qquad i = 1, 2, \ldots \ \varrho\,, \tag{13}$$

$$\tilde{\lambda}_j \leq \lambda_j\,; \qquad j = n, n-1, \ldots \ n-\varrho+1\,. \tag{14}$$

In Worten: die ϱ Näherungswerte $\tilde{\lambda}$ sind der Reihe nach sämtlich größer als die ϱ kleinsten und sämtlich kleiner als die ϱ größten Eigenwerte λ.

Für jeden der ϱ Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ findet man aus der Ersatzaufgabe (12) den zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{f}_j$ und daraus aus (7) auch den zugehörigen gesuchten Näherungsvektor $\mathbf{z}_j$. Diese Näherungen werden um so besser, je größer ϱ ist und je mehr die willkürlich gewählten Vektoren $\mathbf{k}_j$ mit den ϱ ersten bzw. ϱ letzten Eigenvektoren zusammenfallen.

3. Ritz-Ansatz mit $\varrho = 2$ Variablen

Mit $\varrho = 2$ lautet der Ansatz (6)

$$\mathbf{z} = \mathbf{k}_1 f_1 + \mathbf{k}_2 f_2\,. \tag{15}$$

Wir wollen voraussetzen, daß $f_1 \neq 0$ ist, dann kann man infolge der Homogenität der Aufgabe auch $f_1 = 1$ setzen und ferner zur Abkürzung $f_2 = f$; dann geht (15) über in

$$\mathbf{z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 f\,. \tag{16}$$

Speziell möge nun $\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_j$ der Einheitsvektor der Nummer j sein; außerdem wollen wir $\mathbf{k}_1$ mit $\mathbf{z}_\nu$ und $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z}_{\nu+1}$ bezeichnen, um anzudeuten, daß es sich um ein Iterationsverfahren handelt, bei dem die Komponente der Nummer j des Vektors $\mathbf{z}$ verbessert wird. Der Ansatz (16) lautet somit

$$\mathbf{z}_{\nu+1} = \mathbf{z}_\nu + \mathbf{e}_j f\,. \tag{17}$$

Die Matrix $\mathbf{K}$ hat zwei Spalten und n Zeilen

$$\mathbf{K} = (\mathbf{z}_\nu, \mathbf{e}_j) \tag{18}$$

und der Vektor $\mathbf{f}$ ist:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Berechnet man damit die zweireihigen Matrizen (11) so wird

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{A}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{A}\mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_j^* \mathbf{A}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{e}_j^* \mathbf{A}\mathbf{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{A}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_j^* \mathbf{z}_\nu & a_{jj} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{B}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{B}\mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_j^* \mathbf{B}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{e}_j^* \mathbf{B}\mathbf{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{B}\mathbf{z}_\nu & \mathbf{z}_\nu^* \mathbf{b}_j \\ \mathbf{b}_j^* \mathbf{z}_\nu & b_{jj} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Und nun führt die Ersatzaufgabe (12) auf die quadratische Gleichung

$$|\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B}| = 0 \tag{22}$$

mit den Wurzeln

$$\tilde{\lambda}_1 = k\,, \quad \tilde{\lambda}_2 = g\,, \tag{23}$$

wo, wie verabredet, $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2$ ist, und das heißt nach (13) bzw. (14), es bestehen die Ungleichungen

$$\lambda_1 \leq k \leqq \lambda_{n-1}\,, \tag{24}$$

bzw.

$$\lambda_2 \leq g \leq \lambda_n\,. \tag{25}$$

Die zu k und g gehörigen Werte f findet man leicht, indem man in der jetzt zweireihigen Ersatzaufgabe (12) eine Zeile streicht und f aus der verbleibenden Gleichung berechnet. Damit ist dann auch der verbesserte Vektor $z_{\nu+1}$ (17) bekannt.

4. Iteration gegen den kleinsten bzw. größten Eigenwert

Wir wählen jetzt einen beliebigen Ausgangsvektor $\mathbf{z}_1$ und verbessern der Reihe nach gemäß der Vorschrift (17) seine Komponenten auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 + \mathbf{e}_1 f_1 = \mathbf{z}_2 &\rightarrow k_1, g_1 \\ \mathbf{z}_2 + \mathbf{e}_2 f_2 = \mathbf{z}_3 &\rightarrow k_2, g_2 \\ \cdots\cdots\cdots &\quad\cdots \\ \mathbf{z}_n + \mathbf{e}_n f_n = \mathbf{z}_{n+1} &\rightarrow k_n, g_n \end{aligned} \tag{26}$$

Wählen wir jedesmal die kleinere Wurzel k der quadratischen Gleichung (22), so kann die Folge $k_1, k_2 \ldots$ immer nur kleiner (jedenfalls nicht größer) werden, da ja der freie Parameter f_i den Rayleigh-Quotienten jeweils zum Minimum macht, siehe Bild 1. Es werden nun so viele Touren (26) gerechnet, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Den letzten Vektor $\mathbf{z}$ sieht man als Näherung für $\mathbf{x}_1$ an und berechnet abschließend, um sich von allen vorange-

gangenen Rundungs- und Rechenfehlern zu befreien, nochmals den Rayleigh-Quotienten

$$R = \frac{\mathbf{z}^* \mathbf{A}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^* \mathbf{B}\mathbf{z}} \approx \lambda_1 . \tag{27}$$

Außerdem wird der Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ abschließend zweckmäßig normiert:

$$\mathbf{x}_1^* \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = 1 . \tag{28}$$

Die eigentliche Rechenarbeit besteht im Bilden der Skalarprodukte $\tilde{a}_{12} = \mathbf{z}^* \mathbf{a}_j$ und $\tilde{b}_{12} = \mathbf{z}^* \mathbf{b}_j$ in (20) bzw. (21). Die Hauptdiagonalenelemente $\tilde{a}_{22} = a_{jj}$ und $\tilde{b}_{22} = b_{jj}$ fallen ohne Rechnung an, und die quadratischen For-

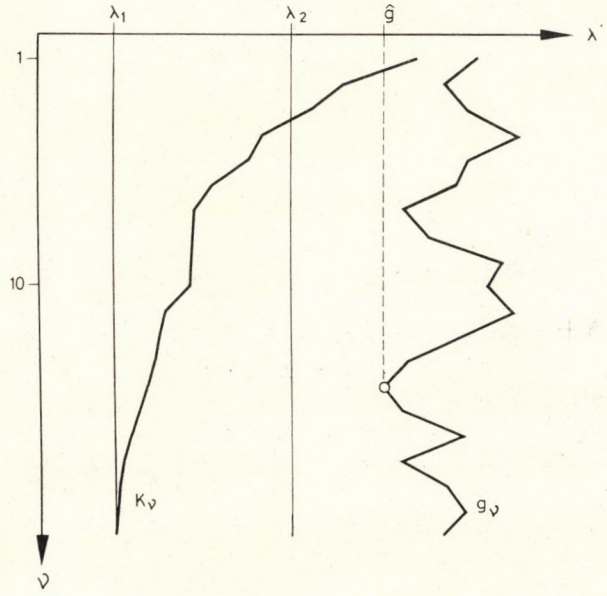


Bild 1. Verlauf der Wurzeln $\tilde{\lambda}_1 = k$ und $\tilde{\lambda}_3 = g$ als Funktion der Iterationsstufe ν bei Iteration gegen den kleinsten Eigenwert λ_1

men $\tilde{a}_{11}$ und $\tilde{b}_{11}$ braucht man nur zu Anfang mit dem Vektor $\mathbf{z}_1$ explizit zu berechnen; bei den folgenden Schritten benutzt man dazu den Vektor (19) und kommt durch jeweils nur vier Multiplikationen und Additionen zum Ziel.

Da auch das Auflösen der quadratischen Gleichung (22) sowie das Berechnen der zu den Wurzeln (23) gehörigen Werte f bei großen Ordnungszahlen n — wir denken dabei immer an $n = 100$ oder $n = 1000$ — nicht ins Gewicht fällt, kostet jeder Iterationsschritt rund $2n$ Multiplikationen und Additionen, jede Tour nach (26) somit rund $2n^2$ Multiplikationen und Additonen, immer

vorausgesetzt, daß **A** und **B** Vollmatrizen sind. Bei Bandmatrizen ist der Rechenaufwand entsprechend geringer.

Wünscht man die Konvergenz gegen den größten Eigenwert λ_n, so ist jedesmal die größere Wurzel g der quadratischen Gleichung (22) zu wählen.

5. Iteration gegen weitere Eigenwerte

Ist der kleinste Eigenwert λ_1 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ genügend genau bestimmt, so verlegen wir λ_1 nach rechts, um Platz für die nächste Iterationsfolge zu schaffen. Dies geschieht dadurch, daß man anstelle des gegebenen Paares **A**; **B** mit dem Paar $\mathbf{C}_1$; **B** rechnet, wo, wenn wir zur Abkürzung

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i \tag{29}$$

setzen, $\mathbf{C}_1$ von folgender Form ist:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^* . \tag{30}$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit dem Eigenvektor $\mathbf{x}_1$, so wird wegen der Normierung (28)

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 = (\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^*)\, \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \varepsilon \mathbf{v}_1 \cdot 1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{B}\mathbf{x}_1 + \varepsilon \mathbf{B}\mathbf{x}_1 = (\lambda_1 + \varepsilon)\, \mathbf{B}\mathbf{x}_1 . \tag{31}$$

Somit hat das Paar $\mathbf{C}_1$; **B** zum Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ den Eigenwert $\lambda_1 + \varepsilon$. Multipliziert man dagegen die Gleichung (30) mit einem anderen Eigenvektor von rechts, so wird auf Grund der Orthogonalitätsbeziehung (5):

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_j = (\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^*)\, \mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{x}_j + \mathbf{o} = \lambda_j \mathbf{B}\mathbf{x}_j ; \quad j \neq 1 , \tag{32}$$

und das bedeutet, daß alle übrigen Eigenwerte und Eigenvektoren des Paares $\mathbf{C}_1$; **B** mit dem des gegebenen Paares **A**; **B** übereinstimmen.

Damit diese Verschiebung ihren Zweck erfüllt, muß $\lambda_1 + \varepsilon$ größer sein als λ_2. Es ist daher notwendig, auch die größere Wurzel g der quadratischen Gleichung (22) zu berechnen, deren kleinster Wert $\hat{g}$ nach (25) größer als λ_2 sein muß, so daß $\varepsilon = \hat{g} - \lambda_1$ sicher ist; siehe auch Bild 1.

Ist nun λ_2 und der dazugehörige Eigenvektor $\mathbf{x}_2$ berechnet, so verschiebt man auch λ_2 um ε nach rechts usw. Um den Eigenwert λ_{k+1} zu berechnen, hat man somit das gegebene Paar **A**; **B** durch das Paar $\mathbf{C}_k$; **B** zu ersetzen mit

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{A} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^{k} \mathbf{v}_\mu \mathbf{v}_\mu^* . \tag{33}$$

Will man andererseits die größten γ Eigenwerte in absteigender Reihenfolge ermitteln, so sind entsprechend die bereits berechneten Eigenwerte um eine Größe ε nach links zu verschieben.

Nun braucht man die in (33) auftretenden Dyaden $\mathbf{v}_\mu \mathbf{v}_\mu^*$ gar nicht explizit zu berechnen, da ja die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ (20) als Elemente lediglich quadratische Formen von $\mathbf{A}$ enthält. Beispielsweise wäre das Element $a_{jj} = \mathbf{e}_j^* \mathbf{A} \mathbf{e}_j$ jetzt zu ersetzen durch

$$\mathbf{e}_j^* \left[\mathbf{A} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^{k} \mathbf{v}_\mu \mathbf{v}_\mu^* \right] \mathbf{e}_j = a_{jj} + \varepsilon \sum_{\mu=1}^{k} \mathbf{v}_{\mu j} \bar{\mathbf{v}}_{\mu j}. \tag{35}$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_\mu = \mathbf{B}\mathbf{x}_\mu$ sind daher im Speicher aufzubewahren.

6. Varianten

Zu dem hier in seinen Grundzügen geschilderten Verfahren sind zahlreiche Varianten denkbar. So kann man beispielsweise die Konvergenz beschleunigen, indem man Ritz-Ansätze mit $\varrho > 2$ macht und die jeweils anfallenden Ersatzmatrizenpaare $\tilde{\mathbf{A}}$; $\tilde{\mathbf{B}}$ nach (26) iteriert. Bei großen Ordnungszahlen ist bei Maschinen mit geringer Stellenzahl hin und wieder eine Auffrischung der Rechnung erforderlich, indem man nach einer gewissen Anzahl von Touren mit dem zuletzt im Speicher stehenden Vektor $\mathbf{z}$ die Rechnung von vorn beginnt, das heißt die Elemente $\tilde{a}_{11}$ und $\tilde{b}_{11}$ in (20) bzw. (21) tatsächlich als quadratische Formen berechnet. Die Verschiebung der Eigenwerte nach (33) setzt natürlich voraus, daß die Vektoren (29), also auch die Eigenvektoren $\mathbf{x}_j$ exakt bekannt sind. In Wirklichkeit sind diese Vektoren und damit auch die aus ihnen berechnete Matrix $\mathbf{C}_k$ fehlerbehaftet, was die Ermittlung der nachfolgenden Eigenwerte unsicher macht. Man sollte daher jedesmal, wenn ein neuer Eigenvektor bestimmt wurde, mit Hilfe der Jacobischen Rotation [1] die berechneten Näherungsvektoren verbessern. Zahlreiche durchgerechnete Beispiele haben jedoch gezeigt, das selbst ohne die Zwischenschaltung solcher Rotationen sämtliche n Eigenwerte in aufsteigender bzw. absteigender Reihenfolge verhältnismäßig sicher berechnet werden können.

Kennt man keinen Näherungsvektor für $\mathbf{x}_1$, so beginnt man zweckmäßig mit $\mathbf{z}_1 = \mathbf{e}_n$, womit dann die Berechnung der Elemente (20) bzw. (21) trivial wird, denn es ist $\tilde{a}_{11} = a_{nn}$ und $\tilde{b}_{11} = b_{nn}$ sowie $\tilde{a}_{12} = a_{1n}$ und $\tilde{b}_{12} = b_{1n}$. Es empfiehlt sich, die zu g gehörigen Vektoren $\mathbf{z}_j$ ebenfalls mitzuführen und den zum kleinsten Wert $\hat{g}$ (siehe Bild 1) gehörigen Vektor als Ausgangsvektor für die nächste Iterationsfolge zu benutzen.

Das Verfahren ist besonders dann empfehlenswert, wenn nur wenige Eigenwerte in aufsteigender bzw. absteigender Reihenfolge zu berechnen sind und wenn gute Näherungsvektoren vorliegen, was in vielen praktischen An-

wendungen zutrifft, zum Beispiel dann, wenn ein gegebenes Matrizenpaar **A**; **B** geringfügig abgeändert wurde. Bemerkenswerte Vorzüge des Verfahrens sind, daß eine etwa vorhandene Bandgestalt von **A** oder **B** voll ausgenutzt wird und daß die Kehrmatrix $\mathbf{B}^{-1}$ nicht berechnet werden muß.

A Simplified Successive Approximation Method for Determination of the Eigenvalues of Hermite's (Real Symmetric) Pair of Matrices. A Hermite-type pair of matrices — i.e. Hermite's quadric matrices A and B nth order, from which B is a positive or negative definite — is assumed to be given, and the eigenvalues of the pair of matrices should be determined. The method of successive approximation based upon Ritz's procedure is presented which permits the determination with a reasonable calculation work the minimum eigenvalues in an increasing sequence, and the maximum eigenvalues in a decreasing sequence.

Простой итерационный метод определения собственных значений матричной пары ГЕРМИТЕ (вещественной симметричной) Принимается в качестве заданной матричная пара ГЕРМИТЕ — т. е. квадратные матрицы ГЕРМИТЕ А и Б n-ного порядка, среди которых Б является положительными или отрицательным дефинитом — и необходимо определить собственные значения матричной пары. Описывается итерационный метод, основывающийся на способе РИТЦА и который позволяет определять наименьшие собственные значения в возрастающем порядке, а наибольшие собственные значения падающем порядке при выполнении относительно умеренных по масштабам вычислительных работ.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 335—347 (1972)

BERECHNUNG DER DURCH DIE FERTIGUNGSUNGENAUIGKEITEN DES FAHRGESTELLS HERVORGERUFENEN MONTAGESPANNUNGEN MIT HILFE DES MATRIZEN-KRAFTGRÖSSEN-VERFAHRENS*

P. MICHELBERGER**
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. September 1970]

Zur Berechnung der Montagespannungen von Fahrgestellen, bzw. der nach den vorschriftsmäßigen Beanspruchungen zulässigen Fertigungsungenauigkeiten können durch Vereinfachung des statischen Modells vorteilhaft Differenzengleichungen verwendet werden. Zur Ermittlung der zulässigen Fertigungstoleranz können einfache geschlossene Formeln abgeleitet werden. Im Fall von unregelmäßigen Konstruktionen die mit genügender Genauigkeit durch das vereinfachte Modell nicht mehr ersetzt werden können, ist es zweckmäßig, die kinematischen Belastungen mit Hilfe der Matrizenrechnung zu analysieren. Dabei kann die auch ansonsten zur Verfügung stehende Reziproke der Koeffizientenmatrix der Kompatibilitätsgleichung angewendet werden. In solchen Fällen kann die in der technologischen Anweisung vorgeschriebene Fertigungstoleranz (d. h., die zulässige Fertigungsungenauigkeit anstelle einer einzigen skalaren Ungleichheit (im Grenzfall: Gleichheit) aus einer Matrizenungleichheit ermittelt werden.

1. Einleitung

Bei den ersten, zu Beginn der sechziger Jahre gefertigten Fahrgestellomnibussen traten serienweise unregelmäßige Brüche und Risse auf. Aus den eingehenderen Untersuchungen ging hervor, daß ein gewisser Teil der Brüche sich auf die Überlastung der Fahrzeuge zurückführen ließ, der Großteil derselben aber nicht mit den auf die Fahrzeuge wirkenden Belastungen erklärt werden konnte. Die weiteren Analysen bewiesen, daß diese Beschädigungen durch gewisse Fertigungsungenauigkeiten verursacht bzw. mit den während des Zusammenbaus auftretenden Beanspruchungen erklärt werden können. Unter den technologischen Bedingungen, im Fall eines nachlässig durchgeführten Zusammenbaus, können Beanspruchungen auftreten, die die Größenordnung der statischen Belastung des Fahrzeuges erreichen können. Während der Untersuchungen wurde das Fahrzeug in erster Näherung durch ein sehr einfaches Modell dargestellt, da sowohl das Fahrgestell, als auch der Wagenkasten durch je einen Balken von gleichbleibender Steifheit ersetzt, die Querträger des Wagenkastens für unendlich steif und ihre Abstände als gleichförmig angenommen wurden. Durch Anwendung des einfachen Modells wurde die Benutzung von Differenzengleichungen für die Berechnungen ermöglicht,

* Das Thema dieser Abhandlung wurde gelegentlich eines Privatgesprächs mit Dr. J. Szabó, korrespondierendem Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, aufgeworfen. Der Verfasser möchte auch auf diesem Wege seinen Dank für das Aufwerfen des interessanten Themas und für die wertvollen Bemerkungen aussprechen.

** Prof. Dr. P. Michelberger, Egri J. u. 19–21, XI., Budapest, Ungarn

und die Spannungsverteilung konnte bei einer bekannten Montageungenauigkeit mit Hilfe von einer einfachen geschlossenen Formel ermittelt werden [1]. Da die Ungenauigkeiten während der Fertigung nicht ständig beobachtet werden können, ist es zweckmäßig, diese Ungenauigkeiten als Zufallsveränderliche zu betrachten. Vorausgesetzt, daß die an den einzigen Verbindungspunkten meßbaren Maßabweichungen paarweise unabhängige Zufallsvariablen sind, weiters angenommen, daß jede derselben mit guter Näherung einer normalen Verteilung folgt, kann auch — unter Beibehaltung der Vereinfachungen für das Modell — das Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hilfe von Differenzengleichungen behandelt und auch der Mittelwert und die Streuung der Beanspruchung, sowie die Verteilungsfunktion können anhand einer geschlossenen Formel ermittelt werden [2].

Die inzwischen durchgeführten Messungen und Berechnungen erwiesen, daß bei den Fahrgestellomnibussen die Querträger des Wagenkastens nicht für unendlich steif, sondern elastisch angenommen werden können. Jedoch wurden dadurch die sich auf die Aufgabe bezüglichen Grundzusammenhänge nicht mehr beeinflußt; nur das die Erscheinung beschreibende Differenzengleichungssystem ergab sich als vierter, anstelle von zweiter Ordnung; durch die Analyse der Steifheitsverhältnisse der Konstruktion konnte aber auch dieses Differenzengleichungssystem auf ein solches zweiter Ordnung zurückgeführt werden [3].

Die in den Berechnungen angewandten Annahmen (die paarweise Unabhängigkeit, Normalverteilung) wurden durch im Betrieb angestellte Messungen mit guter Näherung erwiesen [4], und so haben wir für das Herstellerunternehmen eine geschlossene Formel abgeleitet, mit der die Konstrukteure die erforderliche Fertigungsgenauigkeit (den Maßtoleranzbereich) — in Kenntnis der Steifheitsparameter — ermitteln können.

Dessenungeachtet werden die auf die Regelmäßigkeit des Modells bezüglichen Annahmen nicht immer mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllt, und so — obwohl dadurch die Ergebnisse der Berechnungen der Größenordnung nach nicht beeinflußt werden — erscheint auch die Ausarbeitung der Berechnung der sich aus den Montageungenauigkeiten der unregelmäßigen Konstruktion ergebenden Beanspruchungen als erforderlich.

Im folgenden wird also bei dem den Omnibus ersetzenden Modell zugelassen, daß sich die Steifheit des Fahrgestell-Längsträgers und des Wagenkastens entlang deren Länge ändert; die Querträgerabstände sind nicht notwendigerweise gleichmäßig und auch die Tragfähigkeit der einzelnen Bauteile kann sich entlang deren Länge ändern. Aufgrund der Meßergebnisse bleiben wir auch weiter dabei, daß die Ungenauigkeiten bei weitgehender Näherung mit normaler Verteilung beschrieben werden können, sowie daß sie paarweise unabhängig sind. An den einzelnen Verbindungspunkten können natürlich die Verteilungsfunktionen (Erwartungswerte und Streuungen) verschieden sein.

2. Zusammenbau eines Fahrgestells (Untergestells) und eines Wagenkastens von gegebenen Maßabweichungen

Die ganze Fahrzeugkonstruktion wird durch ihr vereinfachtes ebenes Modell ersetzt (Bild 1). Im Bild ersetzt der untere Balken den Längsträger des Fahrgestells und der obere den Wagenkasten; die die beiden Balken verbindenden Stäbe symbolisieren die Querträger des Wagenkastens, die bei den Fahrgestellfahrzeugen mit guter Näherung als elastisch und für Bodenrahmen-

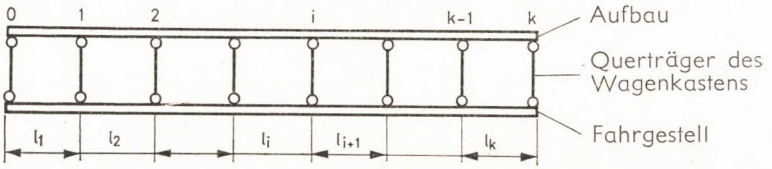
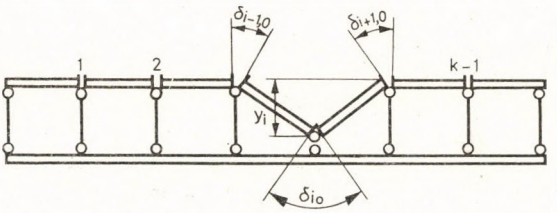


Bild 1



Unbestimmtheitsgrad n = k-1

Bild 2

fahrzeuge als steif angenommen werden können. Die Aufgabe kann mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens gelöst werden, wozu das Grundsystem durch eine Zahl der Querschnitte des Wagenkastens gebildet wird. Auf Bild 2 ist das Grundsystem des den Omnibus ersetzenden Modells dargestellt; gleichzeitig wurden auch die angegebene Abmessungsungenauigkeit y_i, die bei dem i-ten Querträger auftritt, sowie die dadurch hervorgerufenen Bewegungen $(\ldots \delta_{i,0} \ldots)$ angeführt. Der Wert der durch die gegebene Ungenauigkeit verursachten Bewegungen (vorausgesetzt, daß y_i im Vergleich zu l_i klein ist) ist wie folgt:

$$\delta_{i-1,0} = y_i \left(-\frac{1}{l_i} \right),$$

$$\delta_{i,0} = y_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right),$$

$$\delta_{i+1,0} = y_i \left(-\frac{1}{l_{i+1}} \right),$$

$$\delta_{j,0} = 0, \quad \text{wenn} \quad j \neq i-1, i, i+1.$$

Bezeichnet man den aus den Werten $\delta_{j,0}$ gebildeten Spaltenvektor mit $\mathbf{d}_1$, so erhält man die die Verträglichkeitsbedingungen beschreibende Gleichung

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}\,, \tag{1}$$

wo $\mathbf{D} = \int \mathbf{m}\mathbf{m}^* \, ds/JE$ bedeutet, worin $\mathbf{m}$ ein Spaltenvektor der Beanspruchungen (der Biegemomente) ist, die durch die in den einzelnen Querschnitten wirkenden Einheitsbelastungspaare erregt werden, selbstverständlich in Abhängigkeit von der Bogenlänge s des Trägers. Hat man aber bei der Berechnung der Formänderungen außer dem Biegemoment auch die Wirkung anderer Innenkräfte (Normal- und Schubkräfte, Verdrehungsmomente) zu berücksichtigen, so muß die Matrix $\mathbf{D}$ sinngemäß geändert werden. Die Änderung beeinflußt zwar nicht den Charakter, den bandartigen Aufbau der Matrix, jedoch können sich die Werte der einzelnen Einheitsfaktoren und die Zahl der in einer Reihe befindlichen Einheitsfaktoren gewissermaßen ändern.

Aus Gleichung (1) erhalten wir die Werte der unbekannten Innenkräfte, die in den einzelnen Schnitten entstehen:

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{d}_1\,,$$

und die Beanspruchung des Trägerwerks:

$$M = \mathbf{m}^*\,\mathbf{x}_1 = -\mathbf{m}^*\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{d}_1\,. \tag{2}$$

Wenn z. B. die Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots y_i \ldots y_k$ aus den Meßergebnissen bekannt sind, so kann aus denselben $\mathbf{d}_2$ in einem Schritt unmittelbar berechnet werden. Für die Berechnung ist es zweckmäßig, die einzelnen Werte von y_i in einen Spaltvektor zu ordnen:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{l_1}\right) & \left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) & \left(-\frac{1}{l_2}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{l_2}\right) & \left(\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\right) & \left(-\frac{1}{l_3}\right) & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \left(-\frac{1}{l_{i-1}}\right) & \left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right) & \left(-\frac{1}{l_i}\right) \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \left(-\frac{1}{l_{k-1}}\right) & \left(\frac{1}{l_{k-1}}+\frac{1}{l_k}\right) \end{bmatrix}.$$

Aus den geometrischen Abmessungen des Trägers wird es zweckmäßig sein, eine Parallelogramm-Matrix **L** zu konstruieren. (Diese Matrix hat eine Bandstruktur, in jeder Reihe mit drei, von der Null unterschiedlichen Elementen).

Der Spaltenvektor der aus den Maßungenauigkeiten (aus der kinematischen Belastung) entstehenden Belastungskoeffizienten kann mit Hilfe von **L** und **y** ermittelt werden:

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{L}\mathbf{y}\,, \tag{3}$$

und die Beanspruchung des Trägerwerks wird sinngemäß aus der Gleichung

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_2 = 0 \tag{4}$$

errechnet:

$$M = \mathbf{m}^* \mathbf{x}_2 = -\mathbf{m}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d}_2\,. \tag{5}$$

Es ist leicht einzusehen, daß wenn $y_0 = y_1 = y_2 = \ldots = y_i = \ldots y_k = $ = konstant sind; dann $\delta_{i,0} \equiv 0$ und M(konstant) $= 0$ ist, d. h. es ergibt sich keine kinematische Belastung.

3. Effekt einer vorgegebenen Maßungenauigkeit

Wenn die Zufallsveränderliche y_i und ihre Verteilung als normal betrachtet werden kann, so kann der Erwartungswert der Maßungenauigkeit an den einzelnen Verbindungspunkten mit $(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_i, \ldots, \bar{y}_k)$ bezeichnet werden; die Streuung sei: $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots \tilde{y}_i, \ldots \tilde{y}_k$. (5a)

Aus dem Erwartungswert der Abmessungsungenauigkeit kann der aus den kinematischen Belastungen entstehenden Spaltenvektor mit sinngemäßer Anwendung der Formel (3) ermittelt werden, d. h.,

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{L}\bar{y}\,. \tag{6}$$

Die Berechnung der Beanspruchung kann aus dem Erwartungswert der Maßungenauigkeiten auf ganz ähnliche Weise durchgeführt werden, wie jene aus der gegebenen Maßungenauigkeit (5), d. h.,

$$\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{d}} = 0 \tag{7}$$

und davon

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}^{-1}\bar{\mathbf{d}}\,. \tag{7a}$$

Weiters ergibt sich als Mittelwert der Beanspruchung des Trägerwerks

$$\bar{M}(s) = -\mathbf{m}^* \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{d}}\,. \tag{8}$$

Aus der Streuung der einzelnen Abmessungsungenauigkeiten kann die Parallelogramm-Matrix $\widetilde{\mathbf{D}}$ gebildet werden

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \delta_{1,0}(\tilde{y}_0) & \delta_{1,0}(\tilde{y}_1) & \dots & \delta_{1,0}(\tilde{y}_k) \\ \delta_{2,0}(\tilde{y}_0) & \delta_{0,0}(\tilde{y}_1) & \dots & \delta_{2,0}(\tilde{y}_k) \\ \vdots & & & \\ \delta_{n,0}(\tilde{y}_0) & \delta_{n,0}(\tilde{y}_1) & \dots & \delta_{n,0}(\tilde{y}_k) \end{bmatrix}.$$

Diese aus der Streuung der Ungenauigkeiten gebildete Parallelogramm-Matrix kann aus dem Produkt der die geometrischen Abmessungen enthaltenden Parallelogramm-Matrix $\mathbf{L}$ und der von den Streuungswerten $\tilde{y}_i$ aufgebauten $\widetilde{\mathbf{Y}}$ Diagonalmatrix erzeugt werden.

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{Y}}, \tag{9}$$

wo:

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \langle \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots \tilde{y}_i, \dots \tilde{y}_k \rangle \tag{9a}$$

ist.

Die den Streuungen der einzelnen Maßungenauigkeiten zugehörigen Kompatibilitätsgleichungen können auf eine einzige Matrixgleichung reduziert werden, deren Form wird:

$$\mathbf{DZ} + \widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \tag{10}$$

wovon:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{D}^{-1}\widetilde{\mathbf{D}}. \tag{10a}$$

Mit Hilfe von $\mathbf{Z}$ können aus der Streuung der Abmessungsungenauigkeiten der einzelnen (punktweise) unabhängigen Stellen $0, 1, \dots i, \dots, k$ die Einzelstreuungen der Beanspruchung des Tragwerks, $\mathbf{M}$, ermittelt werden, d.h.

$$\mathbf{M}^* = -\mathbf{m}^* \mathbf{D}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}} \tag{11}$$

wo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_1 \\ \widetilde{M}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{M}_i \\ \vdots \\ \widetilde{M}_k \end{bmatrix}$$

ist.

(Hiezu sei bemerkt, daß von der bisher benutzten Bezeichnung abweichend, die Majuskel ($\mathbf{M}$) nicht eine Parallelogramm-Matrix, sondern einen Spaltenvektor bedeutet.)

Das Element $\widetilde{M}_i$ des Spaltenvektors ergibt in Abhängigkeit von s die Streuung der Beanspruchung, die unter der Wirkung der Streuung an der i-ten

Stelle meßbaren Maßabweichung entstand, vorausgesetzt, daß an den übrigen Verbindungsstellen die Streuung der Maßabweichung gleichzeitig gleich Null ist, d. h., daß die beiden verbindenden Elementen, mit Ausnahme des i-ten Verbindungspunktes an allen übrigen Verbindungsstellen mit genauen Abmessungen gefertigt werden.

Die Streuung der vollen Beanspruchung, d. h., die Streuung der unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Abmessungsungenauigkeiten gerechneten Beanspruchung kann durch die von der Quadratsumme der Teilstreuungen gezogene Quadratwurzel ermittelt werden:

$$\widetilde{M} = \sqrt{\widetilde{M}_1^2 + \widetilde{M}_2^2 + \ldots + \widetilde{M}_i^2 + \ldots + \widetilde{M}_k^2} = \sqrt{\mathbf{M}^* \mathbf{M}}, \tag{12}$$

oder kurzgefaßt:

$$\widetilde{M}(s) = |\mathbf{M}(s)|. \tag{12'}$$

Damit kann in Kenntnis der Streuung der einzelnen Maßungenauigkeiten (d. h., bei normaler Verteilung in Kenntnis der Mittelwerte und Streuungen) auch die Verteilungsfunktion der Beanspruchung des Fahrgestells oder können auch der Erwartungswert und die Streuung der vollen Beanspruchung, die die obenerwähnte Funktion völlig charakterisieren, in Abhängigkeit von der jeweiligen Koordinate s erzeugt werden.

4. Verwendung der mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhaltenen Ergebnisse zur Bemessung des Fahrgestells

Setzt man eine normale Ungenauigkeitsverteilung voraus, und nimmt man an, daß der Bereich der völligen Beanspruchung um den Erwartungswert der Beanspruchung durch das $\pm$ Dreifache der Streuung begrenzt wird (und Beanspruchungen, die von einer 0,3 prozentigen Wahrscheinlichkeit, größer oder kleiner, als die gerechneten Maximal- oder Minimalwerte möglich sind), so kann die Grundrelation der Bemessung in folgender einfacher Form angegeben werden

$$|M_{zul}(s)| \geqq |\overline{M}(s) \pm |3\,\widetilde{M}(s)||, \tag{13}$$

wobei $M_{zul}(s)$ die von uns vorgeschriebene zulässige Beanspruchung (in diesem Zusammenhang: das Biegemoment) in einem Punkte des Tragwerks definiert durch die Koordinate s bezeichnet wird.

In den praktischen Rechnungen ist es nicht zweckmäßig, die Beanspruchung als eine kontinuierliche Funktion von s zu bezeichnen. Es kann ein einfacheres Rechenverfahren angewandt werden, wenn man annimmt, daß die von den Einheitsbelastungen erregten Beanspruchungen entlang der Trägerlänge, mit Funktionen und den einzelnen Abschnitten von konstantem Werte,

oder nach einer größeren Genauigkeit strebend mit sich in den Abschnitten linear, eventuell parabolisch ändernden Funktionen angenähert werden können. Im folgenden sei angenommen, daß bei einer genügend dichten Abschnitteinteilung eine in den einzelnen Abschnitten lineare Näherung möglich und die Steifheit des Trägers, wenigstens innerhalb eines Abschnittes, konstant ist. Die lineare Näherungsfunktion kann durch zwei, zweckmäßig am Anfang und am Ende des Abschnittes angenommene Funktionswerte angegeben werden. Damit können die aus den Einheitsbelastungen berechneten Beanspruchungen anstelle des Spaltenvektors $\mathbf{m}$ durch die Parallelogramm-Matrix $\mathbf{N}$ gegeben werden, die im Falle von einer n-fach unbestimmten Konstruktion n Reihen und im Falle von p Abschnitten $2p$ Spalten enthält.

Die Koeffizientenmatrix der Verträglichkeitsgleichung kann in der Form

$$\mathbf{D} = \mathbf{NRN}^*$$

erzeugt werden, wo $\mathbf{R}$ eine aus Blöcken von 2×2 erzeugte diagonale Hypermatrix, d. h., die sog. Federmatrix ist. Untersucht man mit Hilfe derselben die Beanspruchungen nur mehr an den Abschnittsgrenzen, so erhält man

$$\|\mathbf{M}_{\text{zul}}\| \geqq \|-\mathbf{N}^*(\mathbf{NRN}^*)^{-1}\,\bar{\mathbf{d}} \pm 3\,|\mathbf{N}^*(\mathbf{NRN}^*)^{-1}\,\tilde{\mathbf{D}}|\,\|. \tag{14}$$

(Mit $\mathbf{M}_{\text{zul}}$ bezeichnet man in dieser Abhängigkeit einen Spaltenvektor von $2p$ Elementen. Der mit vertikalen Doppelstrichen bezeichnete Absolutwert weist darauf hin, daß der Vektor aus Absolutwerten zusammengesetzt ist; der durch die einfachen vertikalen Striche eingeschlossene Absolutwert bedeutet einen Spaltenvektor, ebenfalls mit $2p$ Elementen, gebildet aus den zum Reihenvektor der Parallelogramm-Matrix der Streuung gehörigen Normen.)

Die Matrixungleichung (bzw. im Grenzfall: Gleichheit) (14) ist im Falle von p Abschnitten den $2p$ skalaren Ungleichungen, bzw. im Grenzfall der Gleichheit, gleichwertig.

5. Bestimmung einer einheitlichen Maßtoleranz

Zufolge der Gebundenheiten der technologischen Bedingungen ist es in der Praxis der Industrie zweckmäßig, für die komplette Konstruktion oder wenigstens für die Hauptteile (Untergestell, Wagenkasten) derselben eine einheitliche Maßtoleranz vorzuschreiben.

Die Feststellung einer einheitlichen Maßtoleranz ermöglicht auch die Lösung der Inverse der oben behandelten Aufgabe, namentlich bei Festsetzung der zulässigen Beanspruchung kann die in den Verbindungspunkten erforderliche Genauigkeit, d. h., der Bereich der Maßtoleranzen, vorgeschrieben werden.

Es soll vorausgesetzt werden, daß das vorläufig unbekannte ganze Toleranzgebiet in allen Vereinigungspunkten a cm breit ist (mit Ausnahme der im ersten Schritt des Zusammenbaus statisch bestimmt verbundenen Punkte, wo der Mittelwert der Abmessungsungenauigkeit und die Streuung gleich Null sind) und die Abmessungen der Konstruktionsteile sich voraussichtlich um die Mitte des Toleranzgebiets verdichten, d. h., die Konstruktionselemente größtenteils mit Nominalabmessungen hergestellt werden und von diesen Nominalabmessungen höchstens um $\pm(a/2)$ cm abweichen können. Es soll weiters angenommen werden, daß 99,7 Prozent der sämtlichen hergestellten Stücke sich innerhalb des vorgeschriebenen Toleranzgebiets befinden, d. h., das Toleranzgebiet gleich dem Sechsfachen der Streuung der Abmessungen ist.

In diesem Falle können $\bar{\mathbf{d}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ aus der Breite des Toleranzbereiches a und aus $\bar{\mathbf{d}}'$ gerechnet von der Maßungenauigkeit von 1 cm, und aus $\tilde{\mathbf{D}}'$, gerechnet aus der für 1 cm angenommenen Maßungenauigkeit, ermittelt werden:

$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{a}{2}\bar{\mathbf{d}}'$$

und

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{a}{6}\tilde{\mathbf{D}}'. \tag{14a}$$

Durch Anwendung dieser Abhängigkeit erhält man

$$|M_{\text{zul}}(s)| \geqq \left|\frac{a}{2}\left[-\mathbf{m}^*(s)\,\mathbf{D}^{-1}\,\bar{\mathbf{d}}' \pm |\mathbf{m}^*(s)\,\mathbf{D}^{-1}\,\tilde{\mathbf{D}}'|\right]\right|. \tag{15}$$

Für jedes s, oder wenn man die Beanspruchung anstelle der kontinuierlichen Funktion von s abschnittsweise durch die lineare Beanspruchung substituiert, so erhält man

$$\|\mathbf{M}_{\text{zul}}\| \geqq \left\|\frac{a}{2}\left[-\mathbf{N}^*(\mathbf{NRN}^*)^{-1}\,\bar{\mathbf{d}}' \pm |\mathbf{N}^*(\mathbf{NRN}^*)^{-1}\,\tilde{\mathbf{D}}'|\right]\right\| = \frac{a}{2}\|\mathbf{M}_{mg}\| \tag{15'}$$

für den Anfang und für das Ende jedes Abschnittes.

Mit $\mathbf{M}_{\text{mg}}$ wurde der Spaltenvektor mit $2p$ Elementen der für die Grenzen der einzelnen Abschnitte erhaltenen Beanspruchungen bezeichnet. Die Ungleichheiten übergehen im Grenzfall in Gleichheiten und aus den Gleichheiten ergeben sich für a $2p$, im allgemeinen verschiedene Toleranzgebietswerte. Das Minimum von diesen a-Werten gibt die für die Gesamtkonstruktion einheitlich einzuhaltende Breite des Toleranzgebiets.

6. Zahlenbeispiel

Die Änderung der Stabkräfte des auf Bild 3 dargestellten einfach unbestimmten Gitterwerks soll untersucht werden, wenn:

1. das Toleranzgebiet der Länge des Stabes 6 dem Nominalmaß ± 1 mm gleich ist;
2. das Toleranzgebiet der Stablänge 5 und 6 dem Nominalwert ± 1 mm entspricht;
3. das Toleranzgebiet der sämtlichen Stäbe der Nominalabmessung ± 1 mm entspricht;
4. das Toleranzgebiet der äußeren Belastungskraft der Nominalbelastung ± 30 Prozent entspricht.

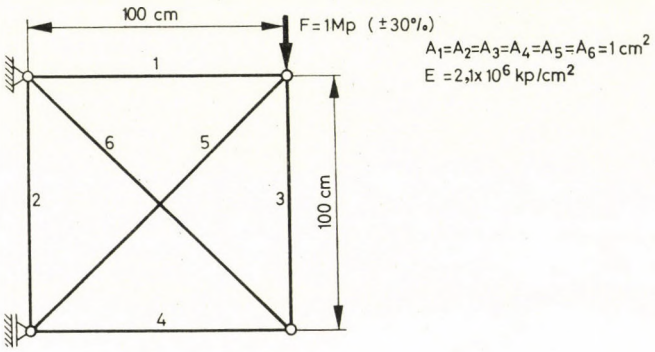


Bild 3

Die Berechnungen wurden mit Hilfe der in der Abhandlung dargestellten wahrscheinlichkeitsrechnerischen Erwägung durchgeführt, d. h., es wurde angenommen, daß sowohl die Abmessungen der Stäbe, als auch die Größe der Kraft einer normalen Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt, weiters, daß sowohl die Längen der Stäbe, als auch die Größen der Kräfte paarweise voneinander unabhängig sind. Bei der Berechnung der kinematischen Belastungen haben wir den Vorteil ausgenutzt, daß die Maßabweichung der Stäbe im Vergleich zur Länge derselben — und folglich auch zu den Dimensionen der Gesamtkonstruktion — unbedeutend ist, d. h., wir haben in den Berechnungen angenommen, daß der durch die einzelnen Stäbe miteinander gebildete Winkel sich, trotz der Maßungenauigkeit, nicht merkbar ändert. Die Ergebnisse der Berechnung sind in den Tafeln I und II zusammengefaßt.

Tafel I

Die Stabkräfte und deren Streuung ermittelt durch wahrscheinlichkeitsrechnerische Erwägung

Zeichen des Stabes	Größe der Nominal-stabkraft kp	Infolge der Abmessungs-streuung des Stabes 6 (1/3 mm) auftretende Stabkraft-streuung kp	Infolge der Abmessungs-streuung der Stäbe 5 und 6 (1/3 mm) auftretende Stabkraft-streuung kp	Infolge der Abmessungs-streuung der Stäbe 1, 2, 3, 4, 5 und 6 (1/3 mm) auftretende Stabkraft-streuung kp	Infolge der Streuung der äußeren Belastung (10%) auftretende Stabkraft-streuung	Stabkraft-streuung gerechnet unter gleichzeitiger Berück-sichtigung der Länge des Stabes 6 und der äußeren Belastung	Stabkraft-streuung gerechnet unter gleichzeitiger Berück-sichtigung der Länge der Stäbe 5 und 6 und der äußeren Belastung	Stabkraft-streuung gerechnet unter Berück-sichtigung der Längen der Stäbe 1, 2, 3, 4, 5 und 6, und der äußeren Belastung
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+500							
2	+500	98	137	193	50	109	146	199
3	−500							
4	−500							
5	−707	138	194	274	71	154	207	284
6	+707							

Tafel II

Die Stabkräfte und deren Toleranzgebiet (+3fache Streuung) ermittelt durch wahrscheinlichkeitsrechnerische Erwägung

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+500							
2	+500	±293	±411	±580	±150	±327	±438	±597
3	−500							
4	−500							
5	−707	±414	±582	±820	±210	±462	±620	±852
6	+707							

Zum Vergleich wurde die Änderung der Stabkräfte auch mit Hilfe der Maximum-Minimum-Methode ermittelt, u. zw. unter Berücksichtigung jener in der Praxis nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit erfüllten Annahme, daß das Stablängenmaß ausnahmslos auf die Grenze des Toleranzgebiets entfällt, und zwar derart, daß die dadurch erregten Beanspruchungen ungünstig überlagert werden (z. B., daß beide Diagonale auf die obere, und gleichzeitig die sämtlichen Gurtstäbe auf die untere Grenze des Toleranzgebiets oder umgekehrt entfallen). Auch der Fall wurde untersucht, wo, bei der ungünstigsten Anordnung der Stabkräfte auch die äußere Belastung auf die Grenze des Toleranzgebiets entfällt. Die Ergebnisse der Maximum-Minimum-Untersuchung sind in Tafel III angeführt. (Die Kopfleisten der Tafeln II und III können der Kopfleiste der Tafel I entnommen werden.)

Tafel III

Die Stabkräfte und deren Toleranzgebiet errechnet nach der Maximum-Minimum-Methode

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+500							
2	+500	±293	±586	±1402	±150	±443	± 736	±1552
3	−500							
4	−500							
5	−707	±414	±828	±1998	±210	±624	±1038	±2208
6	+707							

Die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen (die prozentuellen Abweichungen von Nominalwert der Stabkräfte) sind auf Bild 4 auch graphisch dargestellt. Es ist zu bemerken, daß im Diagramm nur die mit einem Kreuz bezeichneten Punkte interpretiert werden können, die mittleren Linien wurden nur der leichteren Übersichtlichkeit halber eingezeichnet.

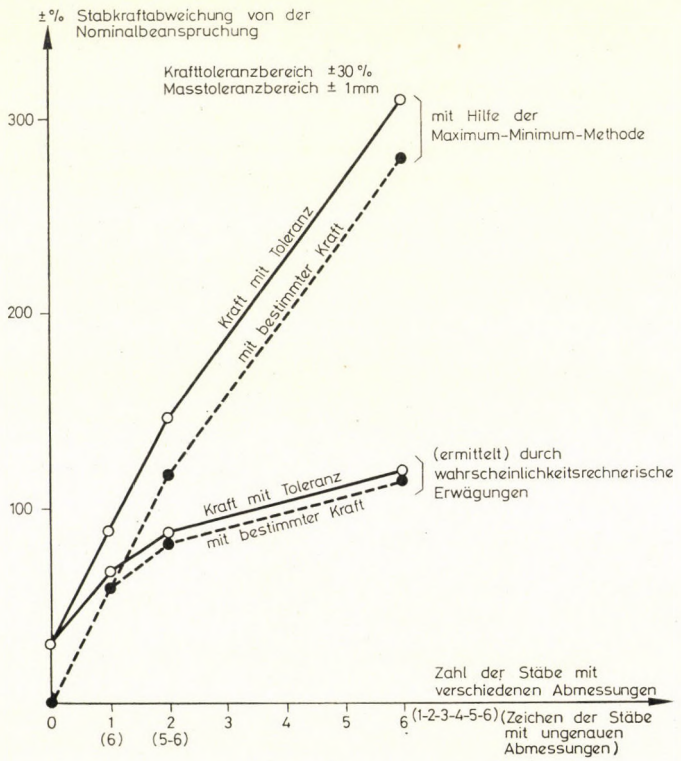


Bild 4

Im Zahlenbeispiel wurden die Konsequenzen der infolge der zusätzlichen Belastung eventuell auftretenden plastischen Formänderungen, bzw. der durch die Ausbeugung der gedrückten Stäbe erregten Beanspruchungen nicht untersucht.

SCHRIFTTUM

1. MICHELBERGER, P.: Die von Montage-Ungenauigkeiten stammenden Innenkräfte bei dem Zusammenbau von Fahrgestell und Wagenkasten eines Autobusses. *Acta Techn. Hung.* **44** (1963), 313—328
2. MICHELBERGER, P.—KÖRMENDY, I.: Auswahl der Fertigungstoleranzen beim Zusammenbau von Wagenkasten und Fahrgestell an Autobussen mit Fahrgestell. *Periodica Polytechnica.* **8** (1964), 248—258
3. MICHELBERGER, P.: Some Problems on Prestress of Vehicle Structures. *Proceedings on the Second Conference on Dimensioning and Strength Calculations.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1965, pp. 93—104
4. MICHELBERGER, P.: Einige Fragen der Vorspannung von Fahrgestellen. *VI. Oszt. Közl.* (Ungarische Akad. der Wissenschaften, Abt. 6. Sektionsmitteilungen), **37** (1966), 193—205
5. GERBETH: Matrizenkraftgrößenverfahren zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. *IfL Mitteilungen.* Dresden 1964.

Calculation of Mounting Stresses Induced by Inaccurate Manufacturing of Vehicle Frameworks with the Aid of the Matrix Force Methods. For the calculation of the mounting stresses of vehicle structures, or in the case of specification of the permissible stress values, by simplifying the static model, difference equations may successfully be applied. For the determination of the permissible fabrication tolerances, simple, closed formulas may be derived. In the case of irregular structures which cannot be simulated with satisfactory accuracy by a simplified model, it is convenient to analyse the kinematic loads with the aid of matrix calculation. Here, the inverse of the coefficient matrix of the compatibility equation being anyway available, might be used. The size tolerance (i.e., the permissible inaccuracy in fabrication) to be prescribed by the technological instructions may, in such cases, be determined from a matrix unequality instead of a single scalar unequality (in the limiting case: equality).

Расчет напряжений, образующихся при сборке от неточного изготовления конструкций транспортных средств. Для расчета степени допускаемой неточности изготовления при заданных уровнях нагрузки, а также сборочных напряжений конструкций транспортных средств в случае упрощения статической модели можно выгодно использовать дифференциальные уравнения. Для допускаемого размера зазора при изготовлении можно вывести замкнутые уравнения. В случае конструкций неправильной формы, которые упрощенной моделью уже не замещаются с удовлетворительной точностью, целесообразно с помощью матричного исчисления проанализировать кинематические нагрузки. Здесь можно использовать обратный матричный коэффициент, который и в прочем имеется в распоряжении, матричного коэффициента уравнения компатибильности. Размер зазора (допускаемая неточность изготовления), задаваемый в в технологии, в таких случаях вместо единственного скалярного неравенства (в граничном случае уравнения) определяется по матричному неравенству.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 349—362 (1972)

ON SOME MINIMIZING ALGORITHMS OF BOOLEAN FUNCTIONS

Mrs. K. PÁSZTOR-VARGA*

[Manuscript received April 17, 1969]

The paper presents algorithms for calculating the disjunctive normal form containing a minimum number of variables of completely and incompletely determined Boolean functions, which algorithms are more efficient, from an electrical design engineer's point of view, than the existing ones. — The algorithm called the algebraic method uses certain basic elements of the Quine algorithm and of the consensus method. The basic idea of the trial method can be traced to a paper by GAVRILOV. — The methods presented here do not assume that the full disjunctive normal form of the Boolean function which is to be minimized is given, but an arbitrary disjunctive normal form of the function can be given. The algorithms utilize the special possibilities inherent in the given disjunctive normal form, thus the number of steps and the memory requirement are greatly reduced. — The algorithm yields the enumeration of all prime implicants of the function and of its essential prime implicants; and the covering table for the non-essential prime implicants and for the function points not yet covered by the essential prime implicants.

1. Introduction

An important problem in the theory of the abstract synthesis of automata is how to construct other automata from simple automata by combining them into an appropriate network. In connection with this problem the question arises whether a finite set of automata can be found with which an arbitrary automaton network could be constructed. As is known ([1], Chapter 4) with the delaying element as an automaton and some basic set of Boolean functions any arbitrary automaton can be constructed. Such a basic set is e.g. $\{\wedge, \vee, \neg\}$ of the Sheffer operation alone etc. So, when realizing an automaton, the realization of Boolean functions on the base of some basic set is needed. Therefore, it is an important task to completely minimize, or at least to a certain extent, the Boolean functions constructed from the various basic sets, possibly with limiting conditions for the definition domain, furthermore to mechanize the minimizing procedure. For this purpose the author has elaborated algorithms which, using certain elements of the already known algorithms, take into consideration the memory limitations of medium-size computers. Let the function to be minimized be given by an arbitrary (not always full) disjunctive normal form. In this paper the aim of minimization is always to establish such a

* Mrs. K. Pásztor-Varga, Bimbó u. 171/b. Budapest I., Hungary

disjunctive normal form where the number of variables — counting each as many times as it occurs — is as small as possible. The algorithms have several phases which approach the solution successively. The algorithms are related to the base $\{\wedge, \vee, \neg\}$, the maximum number of variables is 14 in the program elaborated for the MINSK—22 computer.

In most cases the minimizing algorithms assume that the function is given in its full disjunctive normal form. The statement of the problem as given here permits to start from an arbitrary disjunctive normal form instead of a full disjunctive normal form, and to avoid during the different procedures, the great increase in the quantity of intermediate data.

Starting from the full disjunctive normal form of the Boolean function the Quine-algorithm [6] gives its minimum disjunctive normal form. During the algorithm the so-called reduced disjunctive normal form of the function is obtained by successively using the simplifications of the type

$$ax \vee a\bar{x} = a \tag{1}$$

$$ax \vee a = a \tag{2}$$

(x is a single variable, a is an elementary conjunction not containing x), i.e. the disjunctions of all prime implicants of the function. A minimum disjunctive normal form consists of the essential prime implicants and those non-essential prime implicants the disjunction of which still implicates the function and contains a minimum number of variables; therefore selecting by all possible ways from the non-essential prime implicants, those which satisfy the minimum conditions, all minimum disjunctive normal forms are obtained.

This algorithm can be re-stated as follows: let us call *minterm* every conjunction $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_n^{\alpha_n}$ which contains every variable exactly once, non-negated or negated, of the given function ($\alpha = 0, 1$; $x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \bar{x}_i$). To every minterm can be made to correspond a point of the $B_n = \{0, 1\}^n$ n-dimensional bit space, i.e. to $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_n^{\alpha_n}$ the point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. In this case the first application of the identity (1) within the Quine-algorithm when a is the conjunction of n—1 or non-negated variables, means that two adjacent points differing only by one co-ordinate are fusioned into one interval. Use of the identity (2) (absorption rule) means that every point is omitted which is an element of some interval created during the fusion. The remaining minterms represent such points which are not adjacent to any point corresponding to any single minterm of the function. In general, at the k-th repetition of the two steps, by using (1), two adjacent $(k-1)$-dimensional intervals (containing 2^{k-1} points) corresponding to a conjunction consisting of $n - (k-1)$ variables are fusioned. By applying (2) every $k-1$ dimensional interval is omitted which is part of some new k-dimensional interval. The intervals which cannot be omitted are not adjacent to any of the other $k-1$-

dimensional intervals, so they cannot be fusioned, hence their number of dimensions and together with this, the number of points they contain cannot be increased (the number of variables of the corresponding conjunction cannot be reduced). These correspond to the conjunctions which it is not possible to further simplify in the k-th simplification step of the Quine-algorithm, they being prime implicants.

The procedure is finished when (1) cannot be applied any longer, i.e. among the intervals of highest dimension there are not adjacent ones. In this way all possible intervals are obtained which contain the maximum number of points of the function, i.e. the prime implicants.

The search for all prime implicants is therefore equivalent to the search for all intervals which it is possible to construct from the points of the function and containing the maximum number of these points.

One of the algorithms described in the paper determines these intervals on the base of an *arbitrary* disjunctive normal form of the function. For this procedure those intervals must be found which originate from fusioning the partial intervals occurring in the intervals corresponding to different conjunctions in the given form of the function. For this purpose those conjunctions which correspond to the maximum intervals consisting of the adjacent point pairs of the interval possessing adjacent points, are joined to the given form of the function, on the base of the so-called expansion theorem

$$abx \vee ac\bar{x} = abx \vee ac\bar{x} \vee abc\,, \tag{3}$$

(a, b, c are elementary conjunction without common variables, x is a single variable; according to the terminology of [8], § 7, the conjunction abc added to it is the consensus of abx and $ac\bar{x}$).

2. Boolean functions and the n-dimensional bit-space B_n

If according to the above a minterm is made to correspond to a point of space B_n, a Boolean function can be considered as the characteristic function of the subset of space B_n. Writing a Boolean function f in the form of full disjunctive normal form is equivalent to enumerating the points of the set: these points can also be called the points of f. In the following "function" will always mean a Boolean function.

Definition 1

A *point* of space B_n is a sequence of length n consisting of $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 0,1 elements. The first, second, ... n-th *co-ordinate* of this point will be $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. [The characteristic function of this point is the minterm $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_n^{\alpha_n}$, of which we can say that it *covers* the point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$.]

Definition 2

An interval of *rank* k or of *dimension* $n - k$ $(k < n)$ of space B_n is the totality of those points $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ the k co-ordinates $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ of which, corresponding to the indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$, are fixed, while the other co-ordinates may arbitrarily assume the values 0 and 1. (The characteristic function of this interval, thus consisting of 2^{n-k} point, is the conjunction $x_{i_1}^{\alpha i_1}, x_{i_2}^{\alpha i_2}, \ldots, x_{i_k}^{\alpha i_k}$; we can say that it covers the interval. E.g. the conjunction $x_2 \bar{x}_3 x_5$ corresponding to the interval —10 — 1 covers the points 01001, 01011, 11001, 11011). Furthermore, under the term conjunction we always understand a conjunction of the form $x_{i_1}^{\alpha i_1}, x_{i_2}^{\alpha i_2}, \ldots x_{i_k}^{\alpha i_k}$ every factor (conjunction member) of which is either some variable or the negation of some variable, and every variable occurs at the most once (in a negated or in a non-negated form). Between the conjunctions and the intervals there exists therefore a one-to-one correspondence and hence we may say that $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ is the interval corresponding to the conjunction $a = x_{i_1}^{\alpha i_1} \ldots x_{i_k}^{\alpha i_k}$ and conversely. If subsequently a notion is defined for intervals, we would consider it as being automatically defined for the corresponding conjunction, and conversely. The symbol for the rank of the conjunction a or the interval corresponding to a will be $r(a)$.

Definition 3

The intervals of minimum rank which can be created from the points of the subset R of the space B_n, i.e. those which are not subsets of an interval of lower rank consisting of the points of R, are called *prime intervals* of R; the conjunctions corresponding to these are the *prime implicants* of the characteristic function of R (see Introduction).

Definition 4

The *distance* of two points of space B_n is the number of their co-ordinates differring from each other (Hammingian distance).

A new notion of deviation between the intervals of space B_n will be introduced.

Definition 5

The *deviation* of two intervals of rank k_1 and k_2 is the number of different co-ordinates fixed in both intervals. Its symbol is $\varrho(a_1, a_2)$, where a_1 and a_2 are the intervals in question or the corresponding conjunctions. E. g. for the intervals corresponding to the conjunctions $a = x_1 \bar{x}_2 x_3 x_5 x_7$ and $a_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$ $\varrho(a_1, a_2) = 1$, as is evident from the scheme showing the co-

ordinates:

1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	—	1	—	1
—	0	0	1	1	—	—

This notion of deviation plays an important role in the simple description of the minimization procedure, as will be shown later.

Definition 6

The intervals of deviation 0 will be called *similar.*

Definition 7

The intervals of deviation 1 are called *adjacent. Remark:* The notion of deviation as introduced in the 5th definition — except the case when the same co-ordinates are fixed — only satisfies the symmetry axiom from among the usual distance axioms [7], but satisfies neither the identity axiom: two intervals of deviation 0 are not always identical (e.g. the deviation of *different* intervals corresponding to $x_1x_2x_3$ and $x_1x_3x_5x_7$ is 0), nor the triangle axiom (e.g. for $a_1 = \bar{x}_1x_3x_4x_5$, $a_2 = x_1x_2$ and $a_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5$, $\varrho(a_1, a_2) + \varrho(a_2, a_3) < \varrho(a_1, a_3)$. But this deviation notion is very suggestive for giving the distance of the various intervals considered as sets of points. The deviation is 0, if two intervals have at least one point in common and, in general, the deviation is l if the distance of the two nearest points of the interval is l. With this terminology the rule of the consensus (3) clearly means the joining to the adjacent intervals abx and $ac\bar{x}$ the interval abc, which is obtained by the reduction of the subintervals $abcx$ and $abc\bar{x}$ of identical rank and deviation 1, contained in the intervals abx and $ac\bar{x}$.

Definition 8

The intervals a and b are *connectable*, if there exists such a finite sequence of intervals a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ that

$$a = a_1, \qquad b = a_n$$

and

$$\varrho(a_1, a_{i+1}) = 0$$

for every i.

Definition 9

A sequence of points consisting of n points of space B_n, where the distance of the i-th and of the $i + 1$-st $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ point is 1, is called a *path.*

Definition 10

A subset of the space B_n is called *connected* if for two of its arbitrary points there is at least one path which contains both points.

Definition 11

A Boolean function which is the characteristic function of a subset R of space B_n is said to *cover* R or to cover the points of R.

Remark: It is easy to see that those prime implicants of a Boolean function f corresponding to the intervals of a connected subset of space B_n, are connectable. Hence, if the set covered by f is not connected, the set of all prime intervals of this set breaks down into such subsets that the intervals belonging to each subset are connectable and intervals belonging to different subsets are not connectable.

Definition 12

The *disjunct domain* of a Boolean function f are those spatial maximum sets of points B_n having no common point, the union of which is that set R which is covered by f and from which sets the intervals corresponding to every prime implicant can be generated only by union.

Knowing the prime implicants, it is easy to prove the existence of the disjunct domains and to construct them. Let p^{α} there be negation of the conjunction p, if $\alpha = 0$ and p, if $\alpha = 1$.

Let $p_1, p_2, \ldots, p_m$ there be all prime implicants of f. Let us take all possible $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ combinations of values consisting of zeroes and ones and let us form the expression

$$d_j = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_m^{\alpha_m} \left(j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, 2^{m-k} \right).$$

Theorem: the sets of points covered by the functions d_j differing from zero, where $j = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$ form the disjunct domains of f.

Proof: since $p_i = 1$ for the points which it covers, $\overline{p}_i = 1$ for the points which p_i does not cover, for a given j there is $d_j = 1$ for the points covered by every prime implicant contained in d_j with an exponent $\alpha = 1$ (non-negated), but not covered by another prime implicant. If there are no such points, $d_j = 0$. From this it follows that:

a) $d_j = 1$ is possible only for the points of f. (The p_i-s cover only the points of f.)

b) $d_j \cdot d_k = 0$, if $j \neq k$. (There exists at least one p_i, which is non-negated in d_k, and is negated in d_j.)

c) An arbitrary prime implicant of f can be written in the form $p_i = \bigvee_{s=1}^{k_i} d_{js}$. (I.e. as the disjunction of all d_j in which there is a non-negated p_i.)

d) $f = \bigvee_{j=1}^{2^m-1} d_j$. In any d_j there is at least one non-negated p_i, that fact provides for $d_j = 1$ being true only for points covered by f. Every point of f is covered by some d_j, i.e. that where prime implicants covering the point in question are non-negated and the other ones are negated.

e) It is easy to see that the number of points of d_j cannot be increased while maintaining the properties of the disjunct domains. It follows from the construction that d_j covers all points which are covered by any one prime implicant of d_j and are not covered by any one prime implicant contained in d_j in a negated form. Adding a single point of f to a set of points covered by d_j, there certainly is at least one prime implicant p_k which: a) covers this point and does not cover the points of d_j, or b) does not cover this point, but covers the points of d_j. In both cases it is impossible to obtain the above prime implicant p_k in the form of

$$p_k = \bigvee_{s=1}^{l_k} d_{js}.$$

In the a) case the points of d_j will occur besides the points p_k, and in the b) case besides the points of p_k there will occur the point added to the points of d_j. Therefore, the set of points covered by d_j $(j = 1, 2, \ldots, 2^m)$ is a maximum one. This proves the theorem.

Algorithms for determining all prime implicants

The prime implicant of a Boolean function with n variables is an n-dimensional interval of minimum rank consisting of the points of the function. (This follows from the steps of the Quine-algorithm [6].) The two algorithms below seek for all possible intervals with such qualities, i.e. for all prime implicants. Let the function be given in an arbitrary disjunctive normal form. We may assume that the domain where the function is defined is the whole space B_n, thus a completely determined function is treated.

1. Algebraic method

Phase 1. To define the previously reduced disjunctive normal form.

Starting out from the intervals corresponding to the members (conjunctions) contained in the given disjunctive normal form, those intervals of minimum rank are determined by which they may be replaced without increasing the number of intervals.

The algorithm starts with the comparison of the first two intervals, every subsequent step consists in comparing the following interval with the intervals created at the preceding steps. If the deviation between the compared intervals is 2 or more, both are left unchanged. If the deviation is 0, the general law of absorption $a \vee ab = a$ is used; if the deviation is 1, any of the identities $ax \vee a\bar{x} = a$, $acx \vee a\bar{x} = ac \vee a\bar{x}$, $ac\bar{x} \vee ax = ac$ is used, provided that this is possible, in the opposite case again both intervals are left unchanged (x is a Boolean variable, a, b, c are intervals and a and b as well as a and c have no variable in common, $r(a) \geq 0$, $r(b) \geq 0$, $r(c) > 0$ are arbitrary. If in this way the rank of the next interval is reduced, the new interval of lower rank is again compared to the intervals created in the course of the preceding steps. The disjunctive normal form obtained at the end of the algorithm is called previously reduced disjunctive normal form (PRDNF).

Phase 2. To define the disjunctions of all prime implicants, i.e. to define the reduced disjunctive normal forms.

This procedure means minimizing the rank of the intervals forming part of the PRDNF and with this, searching for all possible intervals of minimum rank consisting of the points of the function. The algorithm starts by comparing the first two intervals of the PRDNF, every following step consists in comparing the next interval with the intervals created at the previous steps. If the deviation between the two compared intervals is 2 or more, both are left unchanged. If this deviation is 1, we investigate whether it is possible to apply the rule of the consensus to them (3). If this is not possible, again both intervals are left unchanged. But if it is possible, so before joining the consensus abc to the intervals previously created, it is compared to one after the other to previously created interval but now not only from the point of view whether the rule of the consensus (3) can be applied to them, but in the case of distance 0 also from the point of view whether some interval created previously does not "absorb" the consensus in the sense of the law of absorption $a \vee ab = a$, or conversely. The extension is added to the intervals created previously, if none of them absorbs it. The same procedure is followed with that extension to which and to some previously created interval the rule of the consensus (3) can be applied, together with the new extension created by its application, etc. (There is no need here for using the simplifying identities $ax \vee a\bar{x} = a$, $acx \vee a\bar{x} = ac$, $ac\bar{x} \vee ax = ax$, because they can be traced to the application of the rules of the consensus and of absorption. E.g. the consensus of ax and $a\bar{x}$ is a, which absorbs ax and $a\bar{x}$ as well, while the consensus of acx and $a\bar{x}$ is ac, which absorbs acx.)

It can easily be understood that the algorithm when it is no longer possible to apply the absorption identity and when use of the identity (3) does not give a consensus which does not occur amongst the intervals obtained so far, finally provides the reduced disjunctive normal form (RDNF).

2. *Method of trial*

The method of trial was first used by GAVRILOV in a lecture delivered in 1954; ([2] is a later publication on the subject), and has again been discussed in [9]. [3] and [5] each describes one computerized realization of the method.

The method is based on the recognition that those conjunctions which contain the least possible variables and implicate the function f, are the prime implicants of this function. Thus investigating one by one all conjunctions $x_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, 1, \ldots, n)$ containing one variable and retaining from amongst them those which implicate f, all prime implicants of f with rank 1 are obtained. Afterwards all conjunctions $x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j}$ of rank 2 containing two variables are examined which are not absorbed by the prime implicants of f found so far, and among them the conjunctions implicating f are the totality of prime implicants of f with rank 2. The procedure is continued as long as either $k = n$, or until the disjunction of the obtained conjunctions are equivalent to the whole f. GAVRILOV also considers the case of the incompletely determined Boolean functions. In that case the truth table of f given in those points of B_n where f is determined (i.e. the 0-places and the 1-places of f are given). In [3], [5], [9] the complete truth table of the function is given, i.e. in every place f assumes either the value 1 or the value 0, or is not determined.

A conjunction is considered to be the implicant of f if it covers no point where the value of f is zero and if it covers at least one point where the value of f is 1 (it covers not only such points where f is not determined). Prime implicants are called those implicants of f from which, by omitting one or several factors, only a conjunction can originate which is already not an implicant of f. On this base, and with the aid of the mentioned tables, the algorithm for selecting the prime implicants is constructed.

Based on the above principle an algorithm has been constructed which gives all prime implicants of the function in the cases when in an arbitrary disjunctive normal form is given

a) the completely determined function f.

b) each of the functions f and $\bar{f}$,

c) in the case of a not completely determined function f the characteristic functions of its places 1 and 0, f_1 and f_0.

Remark: In the cases b) and c) the algorithm simultaneously provides all prime implicants of f and $\bar{f}$, and of f_1 and f_0, respectively, and in a more simple way than if the algorithm were separately applied to f and $\bar{f}$, and to f_1 and f_0, respectively.

In the algorithm described here the number of variables (rank) of the conjunctions to be examined first is not necessarily 1, but depends on the form of the function, therefore, the number of trials may be reduced substantially. For attaining the minimum disjunctive normal form it is necessary to define

all prime implicants [4], therefore, it is not sufficient to find only those prime implicants the disjunction of which implicates f. The following theorem provides a criterion for checking whether in some phase of the procedure all prime implicants are defined.

Theorem: Let f be a n-variable Boolean function, furthermore $vc_i = f$, where every c_i is a conjunction and amongst the ranks of the c_i-s the minimum is l, the maximum is k, and $l \leq k < n$. Let us also assume that all c_i-s of higher rank than l there is no conjunction of rank l implicating f. Let q be the maximum among the ranks of the extensions belonging to adjacent pairs of the above implicants c_i. Then, and only then, will f not have prime implicants of rank higher than k, if it has not a single prime implicant of rank s for which $k < s \leqq q$.

Proof: From an arbitrary disjunctive normal form of a function all prime implicants of the function applying the rule of the consensus (3) and the absorption identity can be deduced ([8], 7).

Let us assume that there is no prime implicant of rank $s(k < s \leqq q)$; this means that those extensions (consensus) which can be obtained by one single consensus operation and are of higher rank than k, are absorbed by some c_i. It will be shown that in this case no prime implicant of rank higher than q exists.

As an implicant of rank higher than q can be obtained from the c_i-s only by a series of extensions and as the extensions of two arbitrary adjacent c_i and c_j is absorbed by some c_m, therefore, for the series of extensions there exists at least one c_p which absorbs the final extension brought about by the series of extensions. Thus, none of the prime implicants of higher rank than q can be a prime implicant. This proves the theorem.

Now an algorithm for the determination of all prime implicants, using the trial principle, can be presented.

Phase 1. Determining the PRDNF

Let the designate $r_{\min}$, the rank of the interval with minimum rank, contained as member of a disjunction given in cases a), b) in the form of f, in the case c) in the form of f_1. The algorithm examines all the $(n/r_{\min})2^{r_{\min}}$ possible intervals of rank $r_{\min}$ and selects those implicating f or f_1, respectively. Then one by one it examines those of the intervals of rank $r_{\min} + 1$, $r_{\min} + 2, \ldots$ which are not absorbed by the preliminarily selected intervals and retains those implicating f or f_1, respectively.

The algorithm is continued until the disjunction of the selected intervals are already equivalent to f or f_1, respectively, then the value q of the theorems is calculated and the algorithm is continued until we find the inter-

vals of rank q. When a further prime implicant is obtained, the new q is calculated and the procedure is continued until it is finished either because $q = n$ or because no new prime implicant of maximum rank q is found.

To the intervals of rank $r > r_{\min}$ obtained in this way correspond the prime implicants of f and f_1, respectively, i.e. all these are prime intervals. I.e. because of the method of selection none of these intervals is a part of any of the intervals implicating the initial f or f_1, respectively, and of a rank lower than it is, but not lower than $r_{\min}$. As in the first step all intervals of rank $r_{\min}$ have been selected which implicate the given function, there are among these intervals all subintervals of rank $r_{\min}$ implicating the intervals of lower rank. If any interval of rank $r > r_{\min}$ would be absorbed by an interval of rank lower than $r_{\min}$, this would have a subinterval of rank $r_{\min}$ which it would also absorb. As there is no such a thing, the statement has been proved.

Hence, after finishing the algorithm, all prime implicants of rank $r > r_{\min}$ and all implicants of rank $r_{\min}$ of the function are obtained. Let us note that the situation is the same after the $(n - r_{\min} - 1)$th step of the Quine algorithm [6]. Therefore, in the search for the prime implicants of rank below $r_{\min}$ here, too, only the intervals of rank $r_{\min}$ should be used.

Phase 2. Determining the RDNF

From among the intervals created during the first phase the algorithm exclusively uses those of rank $r_{\min}$. Let k be the number of these intervals of rank $r_{\min}$. If $k \cdot r_{\min} > (k/2)$, the algorithm continues according to α), otherwise according to β).

α) All possible simplifications are carried out according to the identity $ax \vee a\bar{x} = a$. Those intervals which did not take part in the simplification, being prime intervals, are listed with the prime intervals obtained in phase 1. The procedure is continued by the l, new intervals of rank $r\ (< r_{\min})$, in the way whether α or β depends on $l \cdot r > (l/2)$ or not; the procedure is terminated if $l = 0$ or $r = 1$.

β) Let us form all intervals of rank $r - 1$ by absorbing those of rank r (the initial value of r is $r_{\min}$). Let us investigate whether the conjunction corresponding to the interval is still implicant. Those which are implicant are retained. The intervals of rank higher by one and similar to the new intervals are retained and the procedure is continued for the new intervals of rank r according to α) or to β), on the base of a similar criterion than in α). The procedure is finished when it does not provide any new interval, i.e. $r = 1$ is reached.

In order to decide whether a conjunction implicates the function f, in the case a) the following theorem is used:

Theorem: The interval a is a part of the set covered by the intervals $b_1, b_2, \ldots, b_k$, i.e. $\bigvee_{i=1}^{k} b_i \wedge a = a$ if and only if $\bigvee_{i=1}^{k} b_i' = 1$ where b_i' is obtained by omitting from b_i the common co-ordinates of a and b_i.

Proof: It is enough to show that as far as $\vee\, b_i \wedge a = a$ and even more so $\vee\, b_i' \wedge a = a$ holds true, $\vee\, b_i' \wedge \bar{a} = \bar{a}$ is true, too. Let us assume that $\vee\, b_i'\, \bar{a} \neq \bar{a}$. Then $\bar{a}$ has at least one point P which is not covered by $\vee b_i'$. The co-ordinates fixed in a and not being fixed in the b_i'-s, $\vee\, b_i'$ does not cover either P or that interval which is obtained from P by omitting the co-ordinates fixed in a. Fixing the missing co-ordinates of this interval in the same way as the co-ordinates of a, such points of a are obtained which are not covered by $\vee\, b_i'$ in contradiction to the condition. This proves the theorem. It follows from the theorem that if the conjunction a is an implicant of f, then

$$\bigvee_{i=1}^{k} c_i' = 1,$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are all conjunctions forming part of the given form of f, similar to a.

In the cases b) and c) a simpler procedure is possible in order to obtain a decision. (The following statements are true also if instead of f, f_1 is taken and instead of $\bar{f}, f_0$).

If a conjunction is an implicant of f, it does not implicate a point of $\bar{f}$, thus, every point of f being at least at a distance 1 from the points of $\bar{f}$, $\varrho(a, c_i) \neq \neq 0$ where $f = \vee\, c_i$.

Remark: In some cases it is necessary to minimize f as well as $\bar{f}$. With the decision procedure, as described above, all prime implicants of f as well as of $\bar{f}$ are obtained.

In cases b) and c) the decision procedure is as follows: We check whether in the given disjunctive normal form there exists a conjunction which resembles the investigated conjunction. If there is none, the investigated conjunction is an implicant of f. If one does exist, the investigation is whether in the given disjunctive normal form of f there is a conjuction similar to the examined conjunction. If not, the conjunction is not an implicant of f or $\bar{f}$.

Selection of essential prime implicants

Making use of the theorems connected with definition 12, the Boolean functions covering the disjunct domains of the function are written down. Those non-0 d_j-s are selected where only one p_i is non-negated. The correspond-

ing p_i-s are the essential prime implicants, because the points covered by d_j are covered only by p_i (definition 12) and because all points covered by p_i are only points of d_j.

Remark: A disjunct domain can be represented by a single one of its points, each point behaving in the same way as regards the covering by the prime implicants.

Not completely determined functions

All prime implicants can be defined by using the preceding methods in the following way: let g be the characteristic function of that set of points of space B_n where f is not defined. According to the above, all prime implicants of $f \vee g$ can be defined and from among them those are deleted which do not contain a point belonging to $f\bar{g}$ or in other words those, the deviation of which from any implicant of $f\bar{g}$ is at least 1.

The essential prime implicants are also selected on the base of the method already used. The disjunct domains of $f \vee g$ are defined (definition 12). For all $d_j = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ the products $d_j \bar{g} = d_j^*$ are formed, i.e. those disjunct domains are omitted which have no point in $f\bar{g}$. From the d_j^*-s formed in this way (for the case of $d_j^* \neq 0$) are selected those in formula $d_j^* = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) \bar{g}$ of which there is a single non-0 exponent α_i only. With this selection method all essential prime implicants of $f \vee g$ concerning $f\bar{g}$ are obtained.

Research of the minimum disjunctive normal form

As in most concrete cases it is sufficient to indicate the essential prime implicants and a table equivalent to the table of the Quine—McCluskey algorithm [4], [6], there are two possible terminations of the algorithm, according to whether the said table is considered as the final result, or whether on the base of the table the possible minimum disjunctive normal forms are listed. The rows of the mentioned table correspond here to the non-essential prime implicants, its columns correspond to the points representing the disjunct sets not covered by essential prime implicants of the function. When making the table, the completely and the incompletely determined functions can be handled in the same way, only for the completely determined case $g \equiv 0$.

Preparation of tables

Let us form the functions $f\bar{g}\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_s$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ are all essential prime implicants). From the points representing the disjunct domains of the original function only those are retained which are points of the set covered

by the obtained function. In other words, those disjunct domains are omitted which are covered by an essential prime implicant. The list of the points so obtained is given and to every point the list of those non-essential prime implicants is given which are non-negated in the represented d_j. Finally, the non-essential prime implicants are listed.

Two possible ends of the algorithm

1. The list of the essential prime implicants and the table as described above are given.

2. Using the method of McCluskey [4], on the base of the table the minimum disjunctive normal form of the function is written down.

*

The present paper is based on part of the author's work for the Automatics Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences; the author wishes to express her thanks to Prof. L. KALMÁR for the encouragement and help due to which the paper assumed its present form.

Über einige Algorithmen für die Minimierung von Booleschen Funktionen. Die Arbeit bringt Algorithmen für die Berechnung der disjunktiven Normalform mit minimaler Anzahl von Veränderlichen von vollständig und unvollständig bestimmten Booleschen Funktionen, welche Algorithmen vom Standpunkte des projektierenden Elektroingenieurs zweckmäßiger sind als die bisherigen. Der »algebraische Methode« genannte Algorithmus verwendet gewisse Grundelemente des Quine-Algorithmus und der Consensus-Methode. Der Grundgedanke der Versuchsmethode kann auf eine Arbeit von GAVRILOV zurückgeführt werden. Die hier angegebenen Verfahren setzen nicht voraus, daß die zu minimierende Boolesche Funktion durch ihre volle (ausgezeichnete) disjunktive Normalform gegeben ist, sondern die Funktion kann in einer beliebigen disjunktiven Normalform gegeben sein. Die Algorithmen nützen die in der gegebenen disjunktiven Normalform vorhandenen speziellen Möglichkeiten aus, und so werden die Zahl der Schritte und der Bedarf an Speicherkapazität erheblich verringert. Ergebnis der Algorithmen ist die Aufzählung sämtlicher Primimplikanten und der wesentlichen Primimplikanten der Funktion, sowie die Belegungstafel für die von den nicht wesentlichen Primimplikanten und den wesentlichen Primimplikanten noch nicht belegten Punkte der Funktion.

О некоторых минимализирующих алгоритмах функций Буля. В работе даются более целесообразные с точки зрения электротехнического проектирования — чем имеющиеся — алгоритмы для получения полностью и не полностью определенных функций Буля в разделительной нормальной форме, содержащей минимальное число переменных. Алгоритм, называемый алгебраическим методом, использует определенные основные элементы квинового алгоритма и консенсусного (согласительного) метода. Мысль метода испытания можно свести к одной работе Гаврилова. Приведенные здесь методы не предполагают того, что минимализируемая Булева функция является данной в полной (предпочтительной) разделительной нормальной форме, а может быть дана в произвольной разделительной нормальной форме. Алгоритмы используют специальные возможности, кроющиеся в данной разделительной нормальной форме, таким образом в большой мере уменьшают число переходов и потребную емкость памяти. Результатом алгоритмов является перечисление всех примимпликантов и существенных примимпликантов функции, далее — таблица покрытия, касающаяся функциональных точек, еще не покрытых существенными примимпликантами, и касающаяся существенных примимпликантов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 363—399 (1972)

GEAR CALCULATION BY USING COMPLEX EXPRESSIONS

L. HUSZTHY*

[Manuscript received September 10, 1970]

In this paper, some geometric and mechanical properties of pairs of spur gears, characterized by straight teeth and parallel axes, are treated. The main points are: definition of the mating profile of a given one; analysis of the line of action; analysis of the geometric and mechanical conditions of mating; investigation of the gear ratio modification motivated by some deviation of the interaxis; calculation of the relative tooth-sliding velocity; calculation of the momentaneous normal tooth-force. One of the mating profiles, usually the pinion profile, is considered as given; by this datum, the line of action is determined and so is the other mating profile. A remarkable feature of the calculation method as described below, besides the usage of complex expressions, is the derivation of the results from given functions by which the profile of the pinion is determined.

Introduction

Since the literary source [2] includes both the description of the pinion profile on a complex plane, and the derivation of the equation by which the line of action is determined, and contains also the formation of the mating profile in detail, here this will be summarized only briefly as follows (NB: as regards the definition of the mating profile, the method applied in the quoted literary source somewhat deviates from the one proposed in the present paper).

In what follows, in considering a pair of straight spur gears having parallel axes,

the centre distance a,
and the gear ratio i

are given values, and i is constant. In other words, the assumption is taken as granted according to which the division ratio of the centre distance as defined by the common normal of the mating profiles at the pitch point is a constant value.

1. Based on a given profile, determination of the mating profile

In Fig. 1, the system of planar co-ordinates is shown that serves as the basic principle of our calculation. The point O_1 being the origin of the system, coincides with the rotation centre of the pinion. Axis y passes through

* Dr. L. Huszthy, Rácz Ádám u. 13, Miskolc, Hungary.

the two centres O_1 and O_2 of the pinion and of the gear, respectively; axis x is perpendicular to axis y. In the following, subscript 1 refers to the pinion and 2 refers to the gear.

According to the accepted convention, the real quantities are represented by axis x, and axis y represents the imaginary ones. On axis y, the unity equals j (with $j^2 = -1$).

Anyone of the profiles in question is described by means of complex numbers; this number is composed as usual of a real and of an imaginary part, both of which are represented by a real function. By conformly chosen parameters, the geometric pictures of the profiles of both the pinion and the gear are characterized by the origin O_1 and O_2 respectively, and by an end-point that delineates the respective profile curve.

Vector quantities which serve to describe the profiles of the pinion and the gear, respectively, are denoted by Z_1 and Z_2. Their component parts are X_1, X_2 and Y_1, Y_2, written as capitals in order to avoid any confusion with small letters, since z_1 and z_2 refer to the teeth numbers, x represents the addendum modification factor and y represents the modification of the centre distance.

Now, first we shall fix the tooth profile of the pinion at any arbitrary time, $t = 0$. This profile, considered as being in the initial position can be described by the complex expression:

$$Z_{01} = X_{01}(\varphi_1) + jY_{01}(\varphi_1). \tag{1}$$

Further, φ_1 represents a real parameter suitably chosen as an angle, or a distance, etc. The vector Z_{01} is characterized by its origin in O_1 and its end-point travelling along the profile curve when the parameter value φ_1 varies within a given range. Subscript $_0$ refers to the initial position.

For the sake of further consideration, the functions $X_{01}(\varphi_1)$, $Y_{01}(\varphi_1)$ and their first and second derivatives are all assumed as being continuous.

When considering the profile as rotating in a positive sense at an angular velocity ω, the complex function Z_{01} has to be multiplied by the quantity

$$Z_{f1} = \cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t.$$

In terms of geometry, referring to some given point of the profile being originally in the initial position, the vector Z_{01} revolves in a positive sense, through an angle $\omega_1 t$. The rotating profile is expressed as follows:

$$Z_1(\varphi_1; t) = [X_{01}(\varphi_1) + jY_{01}(\varphi_1)] [\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t]$$

viz.

$$\begin{aligned} Z_1(\omega_1; t) = {} & [X_{01}(\varphi_1) \cos \omega_1 t - Y_{01}(\varphi_1) \sin \omega_1 t] + \\ & + j [X_{01}(\varphi_1) \sin \omega_1 t + Y_{01}(\varphi_1) \cos \omega_1 t]. \end{aligned} \tag{2}$$

In considering the function Z_1 and with the assumption that t is constant and φ_1 is variable, then the endpoint of vector Z_1 delineates the profile at the chosen moment. Again, taking φ_1 as constant and t as variable, the endpoint of Z_1 travels along the curve that corresponds to the path of the profile point determined by the chosen (initial) parameter value. Taking the tooth profile of pinion (1) as known, the profile of the gear (2) can be determined as follows:

The gear remains in a fixed position. The pinion's rolling circle r_{g1} rolls along the gear's rolling circle r_{g2}. By the family of curves represented as the pinion's profile positions during this rolling motion an envelope is generated that corresponds to the gear's tooth profile.

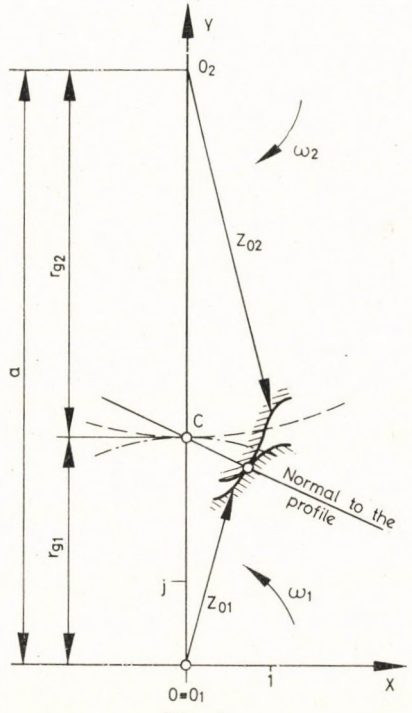


Fig. 1.

For the point of time $t = 0$, in the initial position, the pinion's tooth profile is characterized by equation (Fig. 2):

$$Z_{01} = Z_{01}(\varphi_1).$$

During this rolling motion, whereas the radius O_2O_1 revolves around centre O_2 through an angle ψ, O_1 finds its new position in O_1^*, and P^* is the new position of the initial P. In other terms, the arc $i \cdot r_{g1} \cdot \psi$ of the pinion per-

forms a rolling motion along the arc $r_{g2}\,\psi$ of the gear. Herefrom, the angle of rotation of the pinion around its centre amounts to:

$$\psi + i\psi = (1 + i)\,\psi.$$

Of course, there exists a rigid connection between the tooth-profile and the rolling circle of the pinion. Accordingly, taking the vector Z_{01} (drawn from the origin O_1 to a certain point P) and, when the pinion performed the above-mentioned rolling motion, considering the vector Z_{01}^* (drawn from the new centre O_1^* to the point P^* in a new position), the angle included by these vectors also amounts to $(1 + i)\psi$.

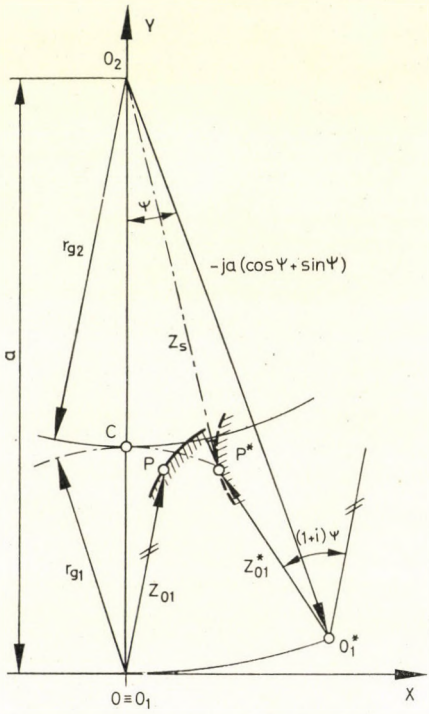


Fig. 2.

In order to find a more "natural" expression of the gear profile, we chose by simple shifting, the centre O_2 as the new origin of our system of co-ordinates, the direction of the axes being kept unchanged. Again, among the family curves we shall consider a curve co-ordinated to a certain rolling angle ψ, when the pinion performs the rolling motion along the rolling circle of the gear. Now, the local vector Z_s (drawn from O_2) of the point P^* that lies on the curve belonging to angle ψ, can be derived as follows:

We shall consider the vector $-ja$ that originates from O_2 and points

to O_1. This vector will revolve through the angle ψ, i.e. it is multiplied by the rotating unity vector

$$\cos\psi + j\sin\psi;$$

so we obtain:

$$-ja\,(\cos\psi + j\sin\psi),$$

in which position the new vector, originating from O_2, points to O_1^*.

To this vector we add the other vector Z_{01}^*; this latter, originating from O_1^* and pointing to P^*, forms with vector Z_{01} an angle $(1+i)\psi$.

Accordingly

$$Z_{01}^* = Z_{01}\,[\cos(1+i)\psi + j\sin(1+i)\psi],$$

where the vector in square brackets represents the rotating unity vector.

Finally, we obtain:

$$\begin{aligned} Z_s &= -ja\,(\cos\psi + j\sin\psi) + Z_{01}\,[\cos(1+i)\psi + j\sin(1+i)\psi] = \\ &= -ja\,(\cos\psi + j\sin\psi) + [X_{01}(\varphi_1) + jY_{01}(\varphi_1)]\cdot \\ &\cdot\,[\cos(1+i)\psi + j\sin(1+i)\psi]. \end{aligned}$$

After the necessary arrangement:

$$\begin{aligned} Z_s(\varphi_1;\psi) = {} & [X_{01}(\varphi_1)\cos(1+i)\psi - Y_{01}(\varphi_1)\sin(1+i)\psi + a\sin\psi] + \\ & + j\,[X_{01}(\varphi_1)\sin(1+i)\psi + Y_{01}(\varphi_1)\cos(1+i)\psi - a\cos\psi]. \end{aligned} \tag{3}$$

Let us denote the real part (of vector Z_s) as X_s, and the imaginary part as Y_s. As we arrive from the profile point belonging to the parameter value φ_1 to the other point having the parameter value $(\varphi_1 + d\varphi_1)$, and the pinion rotates at an angle $d\psi$, we can observe that the total change of the vector Z_s is equal to

$$dZ_s = \left(\frac{\partial X_s}{\partial\varphi_1} + j\frac{\partial Y_s}{\partial\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial\psi} + j\frac{\partial Y_s}{\partial\psi}\right)d\psi. \tag{4}$$

The postulate is obvious that this vector should be parallel to the differential change $dZ_{b\varphi 1}$ viz. to a tangent of the vector $Z_b = Z_{02}(\varphi_1)$ which represents the desired envelope; this change is expressed by

$$dZ_{b\varphi_1} = \left(\frac{\partial X_b}{\partial\varphi_1} + j\frac{\partial Y_b}{\partial\varphi_1}\right)d\varphi_1, \tag{5}$$

of course, every single point of the envelope coincides with a point lying on one curve belonging to the family. Thus, for all these points:

$$Z_b = Z_s\,,$$

and

$$\begin{aligned} X_b &= X_s\,, \\ Y_b &= Y_s\,. \end{aligned} \tag{6}$$

In view of the parallelity between the vectors dZ_b an dZ_s, the quotient of them is a purely real quantity, viz. with an imaginary part equalling zero. Thus, with the equalities of (6) we obtain:

$$\operatorname{Im} \frac{\left(\frac{\partial X_s}{\partial \varphi_1} + j \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi_1}\right) d\varphi_1 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial \psi} + j \frac{\partial Y_s}{\partial \psi}\right) d\psi}{\left(\frac{\partial X_s}{\partial \varphi_1} + j \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi_1}\right) d\varphi_1} = 0\,.$$

After division and simplifying arrangement we obtain:

$$\left(\frac{\partial X_s}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial \psi} - \frac{\partial X_s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi_1}\right) d\varphi_1 \cdot d\psi = 0\,,$$

and in the form of a determinant:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_s}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial X_s}{\partial \psi} \\ \frac{\partial Y_s}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial Y_s}{\partial \psi} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{7}$$

The partial derivatives of X_s and Y_s with respect to φ_1 and ψ will be substituted in D (7). Since in the present examination the actual relationship between X_{01} and φ_1 (and between Y_{01} and φ_1 respectively) are not defined, the derivatives with respect to φ_1 are indicated by an upper comma; further, the denotation $(1 + i) = k$ is introduced. Thus we can write:

$$\begin{vmatrix} X'_{01} \cos k\psi - Y'_{01} \sin k\psi & -X_{01}\, k \sin k\psi - Y_{01}\, k \cos k\psi + a \cos \psi \\ X'_{01} \sin k\psi + Y'_{01} \cos k\psi & X_{01}\, k \cos k\psi - Y_{01}\, k \sin k\psi + a \sin \psi \end{vmatrix} = 0,$$

that gives (with $k - 1 = i$)

$$(i + 1)\,(X_{01}\, X'_{01} + Y_{01}\, Y'_{01}) - a\,(X'_{01} \sin i\psi + Y'_{01} \cos i\psi) = 0. \tag{8}$$

From this, parameter ψ will be expressed as a function of φ_1. By substituting the resulting value into the expression of Z_s, equation of the gear profile is obtained in a system of co-ordinates of axes parallel to the original axes and having the origin in O_2. This equation takes the form:

$$Z_s\,[\varphi_1; \psi(\varphi_1)] = Z_s(\varphi_1).$$

It is possible, that the actual expression is rather intricate; its main advantage consists in the fact that the gear profile is described as a function of φ_1, this latter being the parameter of the pinion-profile. In this way, to every single point of the gear profile, a special mating point of the pinion profile is co-ordinated. In some actual cases it is possible to modify the equation of the gear profile in such a way, by which a more suitable parameter can be established.

2. Equation of the line of action

The basis of this equation is given by the condition that the common normal of the mating profiles always passes through the point C as indicated in Fig. 3.

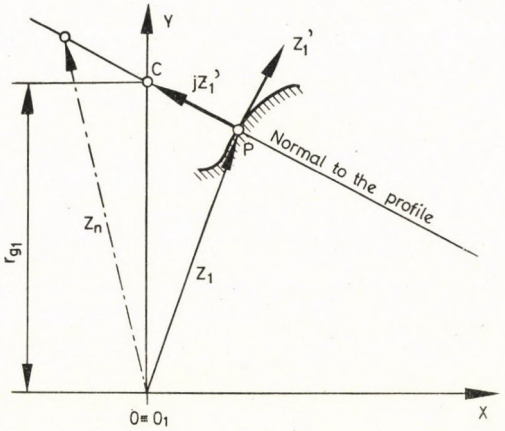


Fig. 3.

According to our consideration, point P is the new point of contact at the period of time t elapsed after the initial position. The local vector $Z_1(\varphi_1; t)$ refers to the actual mating point of the pinion's tooth profile. The derivative with respect to φ_1 shall usually be indicated by an upper comma; consequently, Z_1' denotes the tangent of the profile in point P, and jZ_1' denotes at the same point the perpendicular to the profile. Thus, the local vector Z_n

belonging to an arbitrary point lying on the normal of the profile at the momentaneous point of contact is expressed as follows:

$$Z_n(\varphi_1; t; \lambda) = Z_1(\varphi_1; t) + j\lambda Z_1'(\varphi_1; t);$$
$$(-\infty < \lambda < +\infty)$$

with λ as a real parameter. Point P is effectively a point of mating contact, if the above described normal to the profile passes through the mentioned point C. In other words, a triad of the parameter values (φ_1, t, λ) should exist for which

$$\begin{aligned} &\text{Re} \quad Z_n = 0, \\ &\text{Im} \quad Z_n = r_{g1}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

By using Eq. (2) by which Z_1 is defined, the normal line of the profile is described by the equation:

$$Z_n = [(X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}\sin\omega_1 t) - \lambda(X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t)] +$$
$$+ j\,[(X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t) + \lambda(X_{01}'\cos\omega_1 t - Y_{01}'\sin\omega_1 t)],$$

from which the detailed conditions implied by equations (9) can be written:

$$\begin{aligned} &(X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}\sin\omega_1 t) - \lambda(X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t) = 0\,, \\ &(X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t) + \lambda(X_{01}'\cos\omega_1 t - Y_{01}'\sin\omega_1 t) = r_{g1}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

The above Eqs (10) describe the relationship between the parameter φ_1 belonging to a certain point of the pinion profile and the point of time t at which the profile point referred to represents a point of active mating.

The first equation according to (10) gives us the expression

$$\lambda = \frac{X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}\sin\omega_1 t}{X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t}\,;\quad (X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t \neq 0)\,,$$

with this, the second equation of (10) can be written as follows:

$$X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t + \frac{X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}}{X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t}\sin\omega_1 t\,(X_{01}'\cos\omega_1 t - Y_{01}'\sin\omega_1 t) = r_{g1}.$$

After elimination of the fractionel members and rearrangement

$$X_{01}\,X_{01}' + Y_{01}\,Y_{01}' - r_{g1}\,(X_{01}'\sin\omega_1 t + Y_{01}'\cos\omega_1 t) = 0,$$

with $r_{g1} = a/(1 + i)$ we obtain:

$$(1 + i)\,(X_{01}\,X'_{01} + Y_{01}\,Y'_{01}) - a(X'_{01}\sin\omega_1 t + Y'_{01}\cos\omega_1 t) = 0 = \\ = V(\varphi_1; t). \tag{11}$$

This function $V(\varphi_1; t) = 0$ represents the interconnection between the parameter of an arbitrary point on the profile and the point of time t at which the point referred to forms the actual point of active mating.

With the assumption $\partial V/\partial t \neq 0$, by Eq. (11) we can obtain an explicit expression of the time t as a function of the parameter φ_1. When this function

$$t = t(\varphi_1)$$

is substituted into Eq. (2) of the rotating profile (1), the following equation of the line of action is obtained:

$$Z_k = Z_1[\varphi_1; t(\varphi_1)] = [X_{01}(\varphi_1)\cos\omega_1 t(\varphi_1) - Y_{01}(\varphi_1)\sin\omega_1 t(\varphi_1)] + \\ + j[X_{01}(\varphi_1)\sin\omega_1 t(\varphi_1) + Y_{01}(\varphi_1)\cos\omega_1 t(\varphi_1)]. \tag{12}$$

3. Conditions of mating

In the Eq. (11) of the function $V(\varphi_1; t) = 0$ the second member on the left-hand side can be transformed:

$$X'_{01}\sin\omega_1 t + Y'_{01}\cos\omega_1 t = \\ = \sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}\left(\frac{X'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}}\sin\omega_1 t + \frac{Y'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}}\cos\omega_1 t\right),$$

and by using the denotations:

$$\frac{X'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}} = \cos\delta,$$

$$\frac{Y'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}} = \sin\delta,$$

we obtain:

$$X'_{01}\sin\omega_1 t + Y'_{01}\cos\omega_1 t = \sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}\sin(\omega_1 t + \delta)$$

and

$$(1+i)(X_{01}\,X'_{01} + Y_{01}\,Y'_{01}) - a\sqrt{X'^2_{01} + Y'^2_{01}}\sin(\omega_1 t + \delta) = 0,$$

and finally:

$$t(\varphi_1) = \frac{1}{\omega_1}\left[\arcsin\frac{(1+i)(X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01})}{a\sqrt{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}} - \arctan\frac{Y'_{01}}{X'_{01}}\right]. \qquad (13)$$

$(X'_{01} \neq 0)$

Considering the contact of a pair of mating teeth, two conditions should be fulfilled:

a) every point of the profile must form a mating point once, and only once;

b) at any point of time, only one point of the profile must form a mating point.

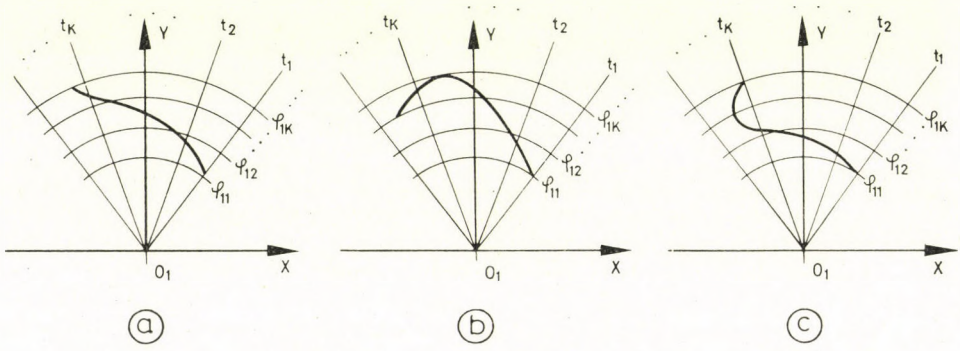


Fig. 4.

A certain type of a line of action is shown in Fig. 4*a* that fulfills the conditions *(a) (b)* given above.

In the type of a line of action, as delineated in Fig. 4*b*, there are profile points which, during the mating action, come twice into contact.

The case shown in Fig. 4*c* is characterized by a simultaneous mating contact of two points of a profile.

In order to avoid the above mentioned two possibilities, it is postulated that *the function* $t = t(\varphi_1)$ according to (13) must rigorously form *a monotonic function* during the mating period.

In Eq. (13) the absolute argumentum value of the function arc sin must have, of course, a maximum equalling 1:

$$\left|\frac{(1+i)(X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01})}{a\sqrt{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}}\right| \leq 1 . \qquad (14)$$

The geometric sense of this condition can be formulated as follows:
We establish the quotient with a vector Z_{01} as numerator drawn to an arbitrary

point of the profile, and with the tangent vector Z'_{01} (at the same point) as denominator:

$$\frac{Z_{01}}{Z'_{01}} = \frac{X_{01}+jY_{01}}{X'_{01}+jY'_{01}} = \frac{(X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01})+j(X'_{01}Y_{01}-X_{01}Y'_{01})}{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}.$$

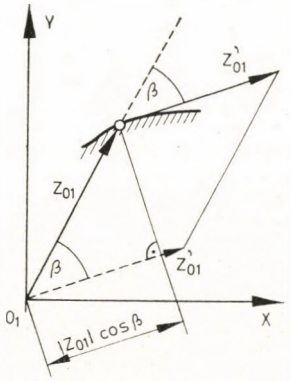


Fig. 5.

Let β be the sign of the angle formed by vector Z_{01} with vector Z'_{01} (Fig. 5), we shall find as the real part of the quotient defined above:

$$\mathrm{Re}\,\frac{Z_{01}}{Z'_{01}} = \mathrm{Re}\left[\frac{|Z_{01}|}{|Z'_{01}|}(\cos\beta + j\sin\beta)\right] = \frac{|Z_{01}|}{|Z'_{01}|}\cos\beta,$$

where

$$|Z_{01}|\cos\beta = |Z'_{01}|\,\mathrm{Re}\,\frac{Z_{01}}{Z'_{01}} =$$

$$= \sqrt{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}\,\frac{X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01}}{X'^2_{01}+Y'^2_{01}} = \frac{X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}}$$

equals the length of the image of vector Z_{01} projected onto the direction of vector Z'_{01}.

In view of

$$\frac{1+i}{a} = \frac{1}{r_{g1}},$$

Eq. (14) takes the form:

$$\left|\frac{X_{01}X'_{01}+Y_{01}Y'_{01}}{\sqrt{X'^2_{01}+Y'^2_{01}}}\right| \leq r_{g1}. \tag{15}$$

According to the Eq. (15) we can state *that, considering a local vector coordinated to an arbitrary profile point, the length of its image projected onto the*

direction of the tangent at the same point equals, at maximum, the radius of the rolling circle.

We shall find in Fig. 6 three different points of the pinion profile. Considering the point P_2, we can see that the length of the image of its local vector $Z_{01}(P_2)$ projected onto the direction of its tangent vector $Z'_{01}(P_2)$ exactly equals the radius r_{g1} of the rolling circle. This point P_2 may be a mating point, namely, when considering the profile normal at point P_2, we find that, by rotation of the pinion, its tangential point P' on the rolling circle falls so as to coincide with point C.

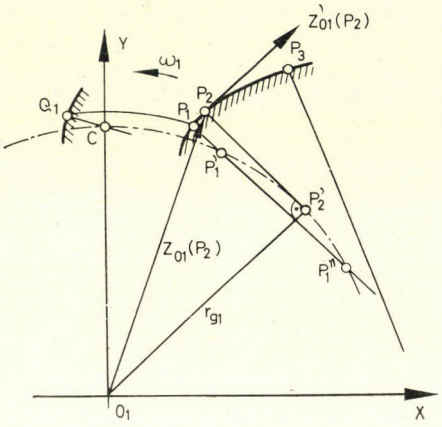


Fig. 6.

The profile normal at point P_1 intersects the rolling circle in two points P'_1 and P''_1. When, during rotation point P'_1 coincides with point C, the profile point P_1 comes into the mating position Q_1. After a further period of rotation, it is point P''_1 which coincides with the pitch point C, thus the original profile point P_1 again comes into mating position: this corresponds to the special case as shown in Fig. 4*b*: one special point of the profile comes twice into a mating position. Usually the mating period of the profile takes such a short time that there is, for such a profile point, no opportunity to come to mating a second time.

Again, profile point P_2 assumes a mating position only once.

Further, the normal to the profile at point P_3 has no intersection with the rolling circle and hence this point never assumes any mating position.

For the function (13) the postulate is cogent that

$$X'_{01} \neq 0, \tag{16}$$

otherwise the expression

$$\arctan \frac{Y'_{01}}{X'_{01}}$$

becomes meaningless.

Since the expression

$$Z'_{01} = X'_{01} + j\, Y'_{01}$$

represents the directional vector of the tangent at some (arbitrary) point of the profile, the geometric sense of formula (16) can be conceived as follows: in the profile there does not exist any special point for which the equality $X'_{01} = 0$ might be true. Namely, in the opposite case, the profile function

$$Y = f(X)$$

could not be differentiated at this point, and the respective tangent line would be parallel to the Y axis. In terms of geometry, it is possible to find a tangent line that is parallel to the Y axis. In order to solve the problem of such a case, for which the equality

$$X^{*\prime}_{01}(\varphi_1^*) = 0$$

holds true, then the second member of function (13) would reach the limit $\pi/2$ as corresponding to the trend

$$\varphi_1 \to \varphi_1^*.$$

For the formula (13) the inequality

$$X_{01}X'_{01} + Y_{01}Y'_{01} \neq 0 \tag{17}$$

incorporates a condition sine qua non.

Namely, when the equality

$$X_{01}X'_{01} + Y_{01}Y'_{01} = 0$$

would hold true, we had to set up

$$X_{01}X'_{01} = -Y_{01} \cdot Y'_{01},$$

or

$$\frac{Y'_{01}}{X'_{01}} = -\frac{X_{01}}{Y_{01}} = -\frac{1}{(Y_{01}/X_{01})}. \tag{18}$$

In plain words, Y'_{01}/X'_{01} represents the slope of the tangent line at the mating point of the profile, and Y_{01}/X_{01} represents the slope of the local vector at the same point. In other terms, the equality (18) should represent a position, in which the local vector of the mating point would be perpendicular to the

tangent line at the same point (Fig. 7). In such a case, no normal force action can exist between the teeth (the limit case of friction).

To sum up: when the toothing of a pair of gears has to be designed, we are, in principle, free to choose the profile curve of one of the pairs: postulated is that the function (13) should be strongly monotonic, and that the relationships specified in Eqs (15), (16) and (17) should hold true.

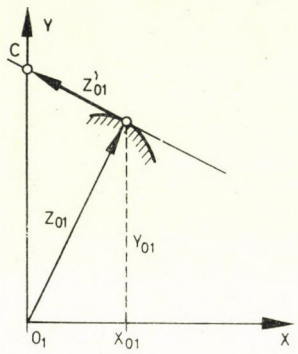


Fig. 7.

Of course, a monotonic function (13) involves the relationship, that with increasing values of the pinion profile parameter φ_1, the length of local vectors should also increase.

4. Sensitive alteration of the gear ratio to any variation of the centre distance

When the basic principle concerning the normal to the profile is maintained, then the gear ratio is constant during the mating action, if only the centre distance exactly equals the theoretic value calculated.

Now, some deviation of the centre distance may occur, due either to technological errors or faulty assemblage, or else to deformations caused by large forces. When some alteration of this distance happens to exist, generally, the common normal of the mating profiles does not pass through the pitch point (C); what is more, the intersection point of the normal to the profile with the central line O_1O_2 may move away during the mating of one pair of teeth; consequently, the gear ratio, first, does not equal the theoretic one, and secondly it varies during the mating period, too.

Taking into consideration the case when, from the kinematical view-point, the pair of gears have correct profiles, but in running the centre distance becomes altered, we are allowed to assume that a certain value of the centre distance is given, and to state that the formation of the profile curves does

not conform with the basic theorem as regards the common normal. Thus, this problem can be put up by assuming a given centre distance and some given profiles that do not comply with the known principle underlying the common normal. These profile curves may be quite arbitrary except for the condition of a continuous mating contact.

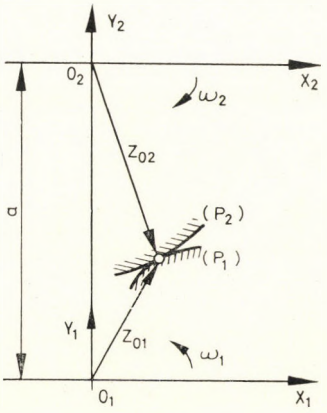


Fig. 8.

Let us establish, according to Fig. 8, the following equations: first

$$Z_{01} = X_{01}(\varphi_1) + jY_{01}(\varphi_1)$$

represents the local vector to the profile of pinion (1) expressed in the system of co-ordinates x_1y_1 having the origin 0_1; secondly

$$Z_{02} = X_{02}(\varphi_2) + jY_{02}(\varphi_2)$$

represents the local vector to the profile of gear (2) in the system of co-ordinates x_2, y_2 having the origin 0_2.

Suppose that, in the initial position indicated by the index "0" the teeth of the two wheels are just in contact, and, of course, the value a of the centre distance is given.

When the pinion revolves, in a positive sense, at the angular speed

$$\omega_1 = 1,$$

so does the gear revolve in a negative sense, at an angular speed

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i};$$

and with $\omega_1 = 1$ we have:

$$\omega_2 = \frac{1}{i} = \omega_2(t)$$

where, in general, i is a function of time.

In a period of time t the pinion revolves through the angle

$$\omega_1 \cdot t = 1 \cdot t = t$$

and the revolving angle of the gear is, at the same time:

$$T = \int_0^t \omega_2(t)\, dt \ .$$

We shall find the equation of the profiles revolving at the corresponding angular velocity by multiplying the respective profile vector with the corresponding rotating unity vector. Thus, we can write the for pinion (1) profile:

$$Z_1 = Z_{01} \cdot Z_{f1} \ ,$$

where

$$Z_{f1} = \cos t + j \sin t$$

is the unity vector rotating in a positive sense at the angular velocity ω_1 (around the centre 0_1);

and for the gear $\qquad Z_2 = Z_{02} \cdot Z_{f2} \ ,$

where

$$Z_{f2} = \cos T - j \sin T$$

is the unity vector rotating throug angle T in a negative sense (around the centre O_2).

Thus, the revolving profiles are expressed as follows:

$$Z_1 = Z_{01} Z_{f1} = (X_{01} + jY_{01})\,(\cos t + j \sin t),$$

$$Z_1 = (X_{01} \cos t - Y_{01} \sin t) + j(X_{01} \sin t + Y_{01} \cos t), \qquad (19)$$

and

$$Z_2 = Z_{02} Z_{f2} = (X_{02} + jY_{02})\,(\cos T - j \sin T),$$

$$Z_2 = (X_{02} \cos T + Y_{02} \sin T) + j(-X_{02} \sin T + Y_{02} \cos T). \qquad (20)$$

Considering the range of mating action characterized by $t_1 \leq t \leq t_2$, the postulate must be fulfilled that the two profiles always contact at a mutual point in which the respective tangent lines are in coincidence. In this sense,

the following equations can be written as:

$$\begin{aligned} Z_1 &= ja + Z_2, \\ Z_1' &= \mu(ja + Z_2)' = \mu Z_2'. \end{aligned} \tag{21}$$

(Symbols with an upper comma represent the corresponding first derivative with respect to φ_1 and φ_2, respectively; μ denotes a factor of proportionality.) After seperating into component parts we obtain:

$$\begin{aligned} X_{01}\cos t - Y_{01}\sin t &= X_{02}\cos T + Y_{02}\sin T, \\ X_{01}\sin t + Y_{01}\cos t &= a - X_{02}\sin T + Y_{02}\cos T, \\ X_{01}'\cos t - Y_{01}'\cos t &= \mu(X_{02}'\cos T + Y_{02}'\sin T), \\ X_{01}'\sin t + Y_{01}'\cos t &= \mu(-X_{02}'\sin T + Y_{02}'\cos T). \end{aligned} \tag{22}$$

The 4th equation of (22) will be divided by the 3rd:

$$\frac{X_{01}'\sin t + Y_{01}'\cos t}{X_{01}'\cos t - Y_{01}'\sin t} = \frac{-X_{02}'\sin T + Y_{02}'\cos T}{X_{02}'\cos T + Y_{02}'\sin T},$$

with

$$X_{01}'\cos t - Y_{01}'\sin t \neq 0$$

and

$$X_{02}'\cos T + Y_{02}'\sin T \neq 0.$$

There follows the operation of simultaneous division, namely, numerator and denominator at the left side will be divided by $\cos t$, and the same has to be done by $\cos T$ at the right side, where $\cos t \neq 0$, and $\cos T \neq 0$:

$$\frac{X_{01}'\tan t + Y_{01}'}{X_{01}' - Y_{01}'\tan t} = \frac{-X_{02}'\tan T + Y_{02}'}{X_{02}' + Y_{02}'\tan T},$$

and rearranged:

$$\begin{aligned} &X_{01}'X_{02}'\tan t + X_{01}'Y_{02}'\tan t\cdot\tan T + X_{02}'Y_{01}' + Y_{01}'Y_{02}'\tan T = \\ &= -X_{01}'X_{02}'\tan T + X_{01}'Y_{02}' + X_{02}'Y_{01}'\tan t\tan T - Y_{01}'Y_{02}'\tan t; \end{aligned}$$

viz.

$$\begin{aligned} &\tan T[\tan t\,(X_{01}'Y_{02}' - X_{02}'Y_{01}') + X_{01}'X_{02}' + Y_{01}'Y_{02}'] = \\ &= X_{01}'X_{02}' - X_{02}'Y_{01}' - \tan t\,(X_{01}'X_{02}' + Y_{01}'Y_{02}'), \end{aligned}$$

where from:

$$\tan T = \frac{(X_{01}'Y_{02}' - X_{02}'Y_{01}') - \tan t\,(X_{01}'X_{02}' + Y_{01}'Y_{02}')}{\tan t\,(X_{01}'Y_{02}' - X_{02}'Y_{01}') + (X_{01}'X_{02}' + Y_{01}'Y_{02}')}.$$

By uniting the system of equations (22) and the above formula for (tan T) we obtain:

$$X_{01}\cos t - Y_{01}\sin t = X_{02}\cos T + Y_{02}\sin T,$$
$$X_{01}\sin t + Y_{01}\cos t = a - X_{02}\sin T + Y_{02}\cos T, \tag{23}$$

$$\tan T = \frac{(X'_{01}Y'_{02} - X'_{02}Y'_{01}) - (X'_{01}X'_{02} + Y'_{01}Y'_{02})\tan t}{(X'_{01}Y'_{02} - X'_{02}Y'_{01})\tan t + (X'_{01}X'_{02} + Y'_{01}Y'_{02})},$$

a system that gives a solution for the problem in question.

When the parameters φ_1 and φ_2 are cancelled, and by due rearrangement, the quantity T will appear as a function of t, then the gear ratio $i(t)$ can already be expressed in an explicit form, namely:

$$T = \int_0^t \omega_2(t)\,dt,$$
$$\frac{d}{dt}\int_0^t \omega_2(t) = T'(t),$$
$$\omega_2(t) = T'(t),$$

and finally

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{T'(t)}.$$

Of course, the nature of the profile function is decisive as far as the solution of the equations may become difficult or easy. In some given case the method for finding a solution is highly intricate. Cases may occur where the transcendental expressions can not be solved in a closed form. An issue is possible by finding some approximation, generally, by applying some iterative method of estimating, often by means of an electronic computer.

Considering the methods known at present, the difficulty can be described as follows: By means of suitably chosen parameters, and for profile curves in contact at the initial position, generally, with a theoretically correct centre distance, the respective equation is rather simple.

In the case of a varied centre distance (e.g. when it increases), one of the gears has to be rotated through a very small angle in order to create a new mating position. For further calculation, such a new configuration represents the initial position. In such a position, the new equation that describes the profile curve, after revolution through a small angle, may assume a rather complicated form.

Our calculation can be simplified when we rely on the usual equation co-ordinated to the initial position with an exact theoretic centre distance.

In this way we shall investigate angle λ_1 (for the pinion) and angle λ_2 (for the gear) through which the respective revolution should be performed for the purpose that equations (21) relating to the common profile point and to the parallelity of the tangent lines should hold true.

For the calculation of the gear ratio i the system (23) of equations is quite adequate; only instead of term t it is angle λ_1, and instead of T it is angle λ_2 that should be substituted in all three equations of system (23). In concreto, angle value λ_1 of the pinion revolution is taken as a given datum, by means of which the parameter values φ_1 and φ_2, and the angle λ_2 have to be calculated.

When once the gear revolution angle λ_2 is obtained, it is obvious that in this position the profile points defined by φ_1 and φ_2 are in mating contact. With the values λ_1 and φ_1, the equation of the normal to the profile can be set down, this line being the common normal. Then the momentaneous pitch point C'' is found as the intersection point of the said normal and the central line O_1O_2.

The quotient

$$\frac{\overline{C''O_2}}{\overline{C''O_1}} \tag{24}$$

equals the momentaneous value of the gear ratio. By iterating this calculation for various values of λ_1, a series of pairs of co-ordinated values λ_1 and i are obtained.

Besides, this method of calculation is well suited for finding the gear ratio of a cam type gearing, too, when the cam profile is a given curve.

5. The relative sliding velocity of teeth

In order to get the value of the relative tooth' sliding velocity, the actual peripheral velocity values generated by the revolution around the centres O_1 and O_2 should be calculated. Inasmuch as the profile curves comply with the condition as postulated for the common normal, the images of the respective vectors projected onto the common normal are equal to each other. In this sense, the vectorial difference of the two peripheral velocities is parallel to the common tangent line and already equals the relative sliding velocity (Fig. 9). Let us suppose a positive angular velocity ω_1 around the centre O_1 for the pinion, and of course, a resulting negative angular velocity $\omega_2 = \omega_1/i$ around the centre O_2 for the gear. Let point P be the locus of the mating contact. To this point, vector Z_1 drawn from origin O_1, and vector Z_2 drawn from origin O_2 are co-ordinated. Thus, we obtain as the value of the peripheral velocity $|v_1|$ in point P around centre O_1

$$|v_1| = |Z_1|\,\omega_1 \text{ (with } v_1 \text{ as a complex number);}$$

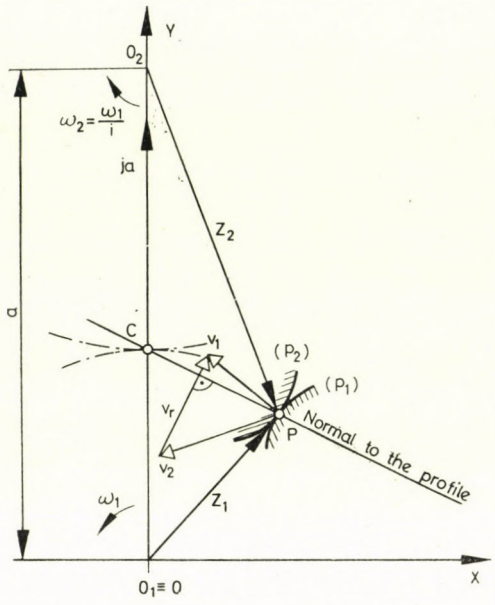


Fig. 9

v_1, being perpendicular to Z_1, represents the velocity vector in this form:

$$v_1 = |Z_1|\,\omega_1 \cdot j\,\frac{Z_1}{|Z_1|}\,,$$

when $j\,Z_1/|\,Z_1\,|$ represents the unity vector which is perpendicular to vector Z_1. Consequently,

$$v_1 = j\omega_1\,Z_1\,. \tag{25}$$

In much the same way (for point P revolving around centre O_2)

$$|\,v_2\,| = |Z_2|\,\omega_2 = |Z_2|\,\frac{\omega_1}{i}\,,$$

this v_2 being a complex number, too.

Now, v_2 being perpendicular to vector Z_2 at a direction determined by a revolution through (—90°), we obtain:

$$v_2 = |Z_2|\,\frac{\omega_1}{i}\left(-j\,\frac{Z_2}{|Z_2|}\right),$$

$$v_2 = -j\,\frac{\omega_1}{i}\,Z_2\,. \tag{26}$$

At every mating point we have:

$$ja + Z_2 = Z_1 ,$$

or

$$Z_2 = Z_1 - ja,$$

that will be substituted in to (26):

$$v_2 = -j\frac{\omega_1}{i}(Z_1 - ja) = -\frac{a\omega_1}{i} - j\frac{\omega_1}{i}Z_1. \tag{27}$$

The relative sliding velocity v_r is obtained as the difference between vectors (25) and (27):

$$v_r = v_1 - v_2 = j\omega_1 Z_1 + \frac{a\omega_1}{i} + j\frac{\omega_1}{i}Z_1 = \frac{a\omega_1}{i} + j\left(\omega_1 Z_1 + \frac{\omega_1}{i}Z_1\right),$$

or

$$v_r = \omega_1\left(\frac{a}{i} + j\frac{1+i}{i}Z_1\right). \tag{28}$$

Of course, Z_1 is co-ordinated to the line of action; in other words, for vector $Z_1(\varphi_1; t)$ the term $t = t(\varphi_1)$ is understood in accordance with equation (13).

For common practice, in general, the magnitude of the relative sliding velocity is required. We calculate the absolute value of vector v_r as defined by formula (28) as follows:
since

$$Z_1 = [X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}\sin\omega_1 t] + \\ + j\,[X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t],$$

therefore

$$v_r = \left\{\left[\frac{a}{i} - \frac{1+i}{i}(X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t)\right] + \right. \\ \left. + j\left[\frac{1+i}{i}(X_{01}\cos\omega_1 t - Y_{01}\sin\omega_1 t)\right]\right\}\omega_1 ,$$

and

$$|v_r|^2 = \frac{\omega_1^2}{i^2}\left[a^2 - 2a(1+i)(X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t) + (1+i)^2(X_{01}^2 + Y_{01}^2)\right],$$

or

$$|v_r| = \frac{\omega_1}{i}\sqrt{a^2 - 2a(1+i)(X_{01}\sin\omega_1 t + Y_{01}\cos\omega_1 t) + (1+i)^2(X_{01}^2 + Y_{01}^2)} \tag{29}$$

and $t = t(\varphi_1)$ according to Eq. (13).

In some papers (e.g. [3] and [4]) dealing with frictional losses of gears we find the statement according to which it can be inferred from experiments with circular discs, that the friction ratio is a function of disc radii and velocity values. When these results should be taken into consideration in dealing with toothed gears, the friction losses can only be found when the various radii at the mating periods of the profile curvatures are taken into account. Now, with a given centre distance a and a given gear ratio i, the gear profile is univocally defined by the assumed pinion profile; consequently, with already known values of the angular velocity, the relative slip velocity depends on the geometric formation of the profiles — thus, a certain univocal relationship between the relative sliding velocity and the curvature radius at the mating point is an irrefutable consequence.

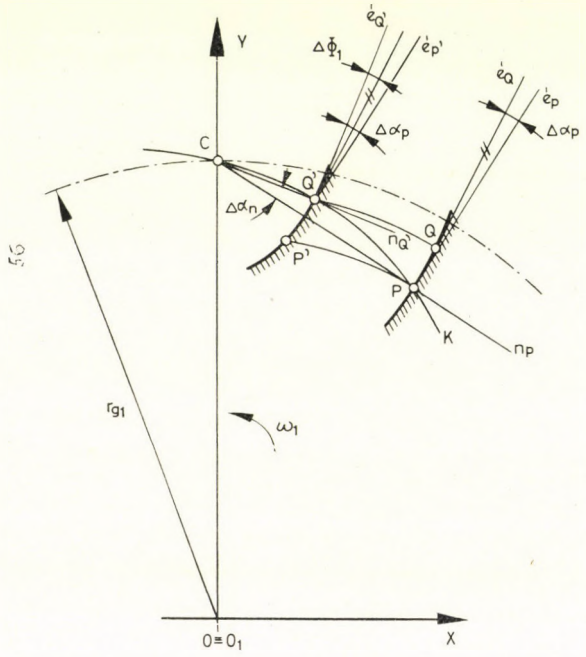


Fig. 10

Let the centre O_1 of the pinion, the centre distance a and the gear ratio i be given. By these data, the form of the line of action (k) is defined (Fig. 10).

Let point P be the contact point of the two profiles at a point of time t; at the same time, the tangent line ($\dot{e}_p$) at point P is perpendicular to the common normal (n_p) at the pitch point. When the elementary period of time Δt has elapsed, it is in point Q where the mating contact takes place. During this, in consequence of a revolution through angle $\Delta\Phi_1$, point P moves to P'; and Q moves to Q'.

The tangent line ($\acute{e}_{Q'}$) at point Q' is perpendicular to the profile normal ($n_{Q'}$). The angle between the two normals (n_p and $n_{Q'}$) will be denoted as $\Delta\alpha_n$.

The angle between the tangent lines at P and Q, as well as that between the tangent lines at P' an Q' is invariably $\Delta\alpha_p$.

Since at the initial position tangent ($\acute{e}_p$) is perpendicular to the normal (n_p), and after a time Δt elapsed the tangent ($\acute{e}_{Q'}$) will be perpendicular to the normal ($n_{Q'}$), so we have:

$$\sphericalangle\,(\acute{e}_p;\ \acute{e}_{Q'}) = \Delta\alpha_n\,. \tag{30}$$

On the other hand, the angle between ($\acute{e}_p$) and ($\acute{e}_{Q'}$) can be conceived as the sum of $\Delta\alpha_p$ and $\Delta\Phi_1$ because $\Delta\alpha_p$ is the angle between the tangents at P and Q in the initial position, and the tangent ($\acute{e}_Q$) reaches the position ($\acute{e}_{Q'}$) after a revolution through the angle $\Delta\Phi_1$; consequently

$$\sphericalangle\ (\acute{e}_p;\ \acute{e}_{Q'}) = \Delta\alpha_p + \Delta\Phi_1\,. \tag{31}$$

From (30) and (31) we have

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_n &= \Delta\alpha_p + \Delta\Phi_1\,, \\ \Delta\alpha_p &= \Delta\alpha_n - \Delta\Phi_1\,. \end{aligned} \tag{32}$$

We denote the length of the profile arc $\widehat{PQ}$ as Δs_1. The mating point moves, during the time Δt along the arc Δs_1; thus, the average velocity of the mating point between P and Q amounts to

$$v_{1av} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t}\,.$$

Dividing both numerator and denominator by $\Delta\alpha_p$:

$$v_{1av} = \frac{\Delta s_1/\Delta\alpha_p}{\Delta t/\Delta\alpha_p} = \frac{\Delta s_1}{\Delta\alpha_p}\cdot\frac{\Delta\alpha_p}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1}{\Delta\alpha_p}\cdot\frac{\Delta\alpha_n - \Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1}{\Delta\alpha_p}\left(\frac{\Delta\alpha_n}{\Delta t} - \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t}\right). \tag{33}$$

Assuming a trend to the limit $\Delta t \to 0$ the angle $\Delta\alpha_p$ will similarly trend to $\Delta\alpha_p \to 0$.

In this sense

$$\lim_{\Delta\alpha_p \to 0}\left(\frac{\Delta_{s1}}{\Delta\alpha_p}\right) = \lim_{\Delta\alpha_p \to 0}\frac{1}{\Delta\alpha_p/\Delta s_1} = \frac{1}{g_1}$$

where, in conformity with its definition, g_1 denotes the curvature of the profile at point P.

Thus, the angular velocity of the normal to the profile revolving around point C is found to be:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha_n}{\Delta t} = \omega_n ,$$

and the angular velocity of the pinion's

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = \omega_1 .$$

Since the average velocity v_{rav} [at the left-hand side of Eq. (33)] assumes, when the limit $\Delta t \to 0$ is reached, the value v_{1t} which represents the momentaneous tangential velocity of the pinion in point P, we obtain:

$$v_{1t} = \frac{1}{g_1} (\omega_n - \omega_1) .$$

Instead of the reciprocal of curvature, the radius of curvature (ϱ_1 in point P) can be substituted, namely:

$$v_{1t} = \varrho_1 (\omega_n - \omega_1) . \tag{34}$$

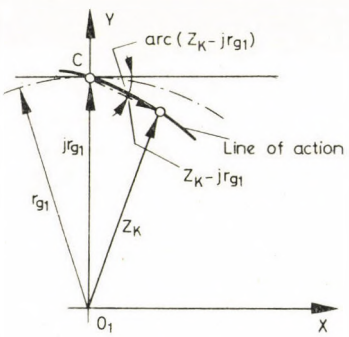


Fig. 11

According to a similar reasoning the tangential velocity of the gear at the mating point is found to be equal to:

$$v_{2t} = \varrho_2 (\omega_n - \omega_2) \tag{35}$$

where ϱ_2 is the radius of curvature of the gear profile at P.

Thus, we find the relative sliding velocity to be expressed as:

$$v_r = | v_{1t} - v_{2t} | = | \varrho_1 (\omega_n - \omega_1) - \varrho_2 (\omega_n - \omega_2) | ,$$

and reaaranged:

$$v_r = | (\varrho_1 - \varrho_2) \omega_n - (\varrho_1 \omega_1 - \varrho_2 \omega_2) | . \tag{36}$$

For this expression, the angular velocity ω_n will be calculated as follows:

The direction of a profile normal co-ordinated to an arbitrary mating point is defined by the vector (Fig. 11)

$$Z_k - jr_{g1}\,.$$

Taking into consideration the angle between this vector and the axis x, and forming the first derivative of this arc with respect to time, we obtain the angular velocity in question:

$$\omega_n = \frac{d}{dt}\,\mathrm{arc}\,(Z_k - jr_{g1}).$$

The vector Z_k, which describes the line of action, is a function of the pinion-parameter φ_1. According to the chain rule we have:

$$\omega_n = \frac{d}{d\varphi_1}\,\mathrm{arc}\,(Z_k - jr_{g1})\,\frac{d\varphi_1}{dt}\,. \tag{37}$$

By using the known function $Z_k(\varphi_1)$ and by making the following transformation

$$\mathrm{arc}\,(Z_k - jr_{g1}) = \mathrm{arc}\,(X_k + jY_k - jr_{g1}) = \mathrm{arc}\,[X_k + j(Y_k - r_{g1})] =$$

$$= \mathrm{arc\,tan}\,\frac{Y_k - r_{g1}}{X_k}\,,$$

the derivative of the latter with respect to φ_1 can be directly deduced, the differential quotient $d\varphi_1/dt$ can be calculated from the function $V(\varphi_1; t) = 0$ according to Eq. (11).

6. The tooth force in normal direction

Suppose that — by neglecting the frictional force — the pinion is rotated by a constant moment M_1: Contact point of the profiles is the point P on the line of action (Fig. 12). Then, the tooth force acting in the normal direction is expressed:

$$F_n = \frac{M_1}{k}$$

with k being the lever arm of the force F_n. This k is found, when, considering the local vector co-ordinated to the mating point P, we draw its projection onto the direction of the tangent vector ${}_kZ_1'$ co-ordinated to point P. (The left-hand index indicates the co-ordination of this vector Z_1' to the line of action.)

In conformity with the geometric explanation of Eq. (14), we have:

$$k = \frac{X_1 X_1' + Y_1 Y_1'}{\sqrt{X_1'^2 + Y_1'^2}} \tag{38}$$

$$t = t(\varphi_1).$$

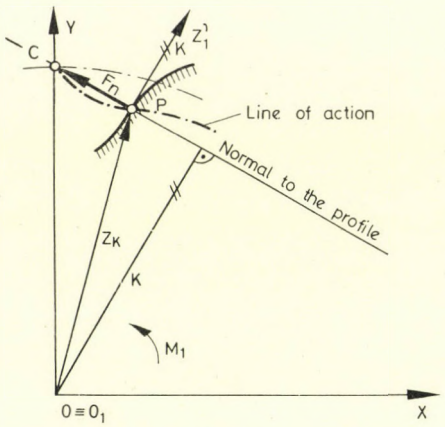


Fig. 12

Applying Eq. (2) by which the vector $Z_1 = Z_1(\varphi_1; t)$ is described, the numerator in (38) can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} X_1 X_1' + Y_1 Y_1' = \\ = [X_{01}(\varphi_1) \cos \omega_1 t(\varphi_1) - Y_{01}(\varphi_1) \sin \omega_1 t(\varphi_1)] \cdot \\ \cdot [X_{01}'(\varphi_1) \cos \omega_1 t(\varphi_1) - Y_{01}'(\varphi_1) \sin \omega_1 t(\varphi_1)] + \\ + [X_{01}(\varphi_1) \sin \omega_1 t(\varphi_1) + Y_{01}(\varphi_1) \cos \omega_1 t(\varphi_1)] \cdot \\ \cdot [X_{01}'(\varphi_1) \sin \omega_1 t(\varphi_1) + Y_{01}'(\varphi_1) \cos \omega_1 t(\varphi_1)] = \\ = X_{01}(\varphi_1) X_{01}'(\varphi_1) + Y_{01}(\varphi_1) Y_{01}'(\varphi_1) . \end{aligned}$$

The denominator is expressed:

$$\sqrt{X_{01}'^2(\varphi_1) + Y_{01}'^2(\varphi_1)} .$$

As can be seen, neither the numerator nor the denominator of k is a function of t. Without referring to the dependence on φ_1 we can write:

$$k = \frac{X_{01} X_{01}' + Y_{01} Y_{01}'}{\sqrt{X_{01}'^2 + Y_{01}'^2}} . \tag{39}$$

Should the numerator equal zero, the rotating moment would vanish. Again, according to Eq. (17), the numerator cannot be equal to zero, neither can the denominator be equal to zero [in compliance with Eq. (16)].

Considering the profiles in question, the quantity k can never be equal to zero. Thus, with Eq. (39), the normal tooth force is expressed by:

$$F_n = M_1 \frac{\sqrt{X_{01}'^2 + Y_{01}'^2}}{X_{01} X_{01}' + Y_{01} Y_{01}'} . \tag{40}$$

7. Applications

We shall demonstrate, in point 7.1, a certain application of the relations as shown in chapters 1 . . . 6 especially for the case of a pair of gears consisting of a toothed wheel having cycloidal profiles and of another gear having rectilinear profiles. This special example can be taken as being useful because the results as well as the manner of their deduction by means of elementary notions are well known.

In point 7.2, a special case is dealt with.

7.1 *Pair of gears having a rectilinear and a cycloidal toothing, respectively*

With reference to Fig. 13, the toothed wheel (1) has epicycloidal profiles. This profile is generated by a circle having a radius c and revolving along the pitch circle. In the initial position of the profile, the revolving circle touches the pitch circle of gear (1) at the pitch point C. Now, the angle between the axis y and the line connecting centre O_1 with the centre of the rolling

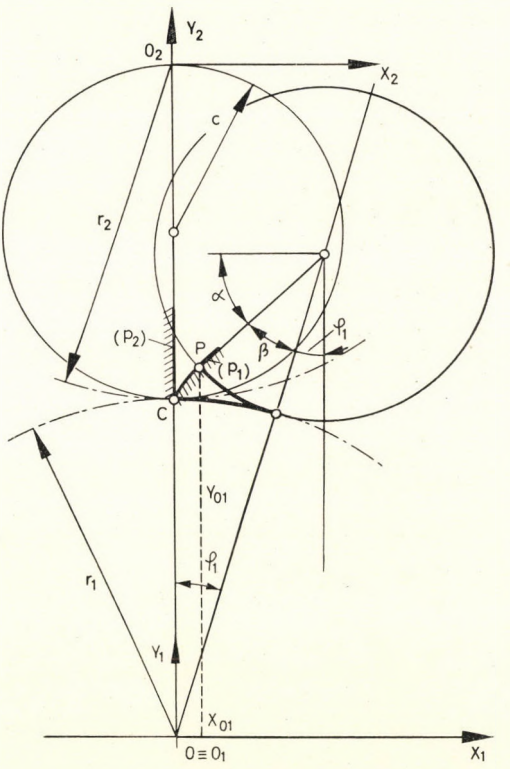


Fig. 13

circle should be chosen as the desired parameter φ_1. When the rolling circle rotates around its centre through the angle β, we have, with a pure rolling motion (without any sliding):

$$r_1 \varphi_1 = c\beta,$$

$$\beta = \frac{r_1}{c} \varphi_1. \tag{41}$$

The profile is delineated by a point of the rolling circle, the initial position of which lies at the pitch point C. In accordance with Fig. 13, the co-ordinates of the cycloidal point P are expressed:

$$X_{01} = (r_1 + c) \sin \varphi_1 - c \cos \alpha$$
$$Y_{01} = (r_1 + c) \cos \varphi_1 - c \sin \alpha.$$

In view of

$$\alpha = 90° - (\beta + \varphi_1),$$

or

$$\alpha + \beta + \varphi_1 = 90°,$$

we can write:

$$\begin{aligned} X_{01} &= (r_1 + c) \sin \varphi_1 - c \cos [90° - (\beta + \varphi_1)] = \\ &= (r_1 + c) \sin \varphi_1 - c \sin (\beta + \varphi_1) \\ Y_{01} &= (r_1 + c) \cos \varphi_1 - c \sin [90° - (\beta + \varphi_1)] = \\ &= (r_1 + c) \cos \varphi_1 - c \cos (\beta + \varphi_1) \end{aligned}$$

and combined with Eq. (41) we obtain:

$$\begin{aligned} X_{01} &= (r_1 + c) \sin \varphi_1 - c \sin \left(\frac{r_1}{c} + 1 \right) \varphi_1, \\ Y_{01} &= (r_1 + c) \cos \varphi_1 - c \cos \left(\frac{r_1}{c} + 1 \right) \varphi_1. \end{aligned} \tag{42}$$

For our numeric example we shall count with the concrete values:

$$r_1 = r_2 = 2, \quad c = 1$$

from where

$$a = 4, \quad i = 1.$$

With these data, we can write:

$$\begin{aligned} X_{01} &= 3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1, \\ Y_{01} &= 3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1, \end{aligned} \tag{43}$$

and for the profile (p_1) in initial position, with reference to Eq. (1) we obtain:

$$Z_{01} = (3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) + j(3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1). \tag{7/1}$$

Let the gear (1) rotate in a positive sense at an angular velocity $\omega_1 = 1$, then the vector by which the rotating profile (p_1) is described can be expressed, with reference to Eq. (2), as follows:

$$Z_1 = [(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \cos t - (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \sin t] + \\ + j\,[(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \sin t + (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \cos t]. \qquad (7/2)$$

In order to find the *formulae for profile* (2), Eq. (8) serves as basis; first, we will express the concrete formulae of the respective derivatives:

$$X'_{01} = 3 \cos \varphi_1 - 3 \cos 3\varphi_1 = 3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1);$$

and

$$Y'_{01} = -3 \sin \varphi_1 + 3 \sin 3\varphi_1 = 3(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1).$$

Thus, the Eq. (8) takes the form:

$$2\,[(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \cdot 3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) + (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \cdot 3(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1)] - \\ - 4\,[3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi) \sin \psi + 3(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1) \cos \psi] = 0. \qquad (44)$$

Now, in order to *express the variable* ψ as a function of φ_1, we first shall divide the expression (44) by the product $2 \cdot 3$; this results in the form:

$$(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1)(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) + \\ + (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1)(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1) = \\ = 2\,[(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \sin \psi + (-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1) \cos \psi]. \qquad (44a)$$

After performing the operations at the *left-hand side* in (44a), we obtain the expression:

$$4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 .$$

After division and multiplication of the right-hand side in (44a), by the following member:

$$\sqrt{(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1)^2 + (-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1)^2} = 2 \sin \varphi_1;$$

the right-hand side will take the form:

$$2 \cdot 2 \sin \varphi_1 \left[\frac{\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1}{2 \sin \varphi_1} \sin \psi + \frac{\sin 3\varphi_1 - \sin \varphi_1}{2 \sin \varphi_1} \cos \psi \right] .$$

After transforming the members within the square brackets, by using the relation

$$\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1 = 4 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 ,$$

the first fraction can be written as follows:

$$\frac{4 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1}{2 \sin \varphi_1} = 2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 = \sin 2\varphi_1 ,$$

and similarly, by using the relation

$$\sin 3\varphi_1 - \sin \varphi_1 = 2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1 ,$$

the second fraction is written:

$$\frac{2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1}{2 \sin \varphi_1} = \cos 2\varphi_1 .$$

With these simplified members, Eq. (44a) takes the form:

$$4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = 4 \sin \varphi_1 [\sin \psi \sin 2\varphi_1 + \cos \psi \cos 2\varphi_1],$$

and

$$\cos\varphi_1 = \cos(2\varphi_1 - \psi)$$

or

$$\varphi_1 = 2\varphi_1 - \psi,$$

viz.

$$\psi = \varphi_1 . \tag{45}$$

The expression of profile (p_2) is obtained, when the relation (45) is substituted into Eq. (3):

$$Z_S[\varphi_1;\ \psi(\varphi_1)] = Z_S(\varphi_1) = Z_{02} =$$
$$= [(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\cos 2\varphi_1 - (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\sin 2\varphi_1 + 4\sin\varphi_1] +$$
$$+ j\,[(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\sin 2\varphi_1 + (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\cos 2\varphi_1 - 4\cos\varphi_1].$$

The real part of vector Z_{02} can be written as:

$$X_{02} = 3\sin\varphi_1\cos 2\varphi_1 - \sin 3\varphi_1\cos 2\varphi_1 - 3\cos\varphi_1\sin 2\varphi_1 + \cos 3\varphi_1\sin 2\varphi_1 + 4\sin\varphi_1 =$$
$$= -3\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_1 = 0,$$

and the imaginary part is:

$$Y_{02} = 3\sin\varphi_1\sin 2\varphi_1 - \sin 3\varphi_1\sin 2\varphi_1 + 3\cos\varphi_1\cos 2\varphi_1 - \cos 3\varphi_1\cos 2\varphi_1 - 4\cos\varphi_1 =$$
$$= 3\cos\varphi_1 - \cos\varphi_1 - 4\cos\varphi_1 = -2\cos\varphi_1 .$$

Thus, the profile (p_2) is expressed in the system of co-ordinates $(x_2; y_2)$ as follows:

$$X_{02} = 0$$
$$Y_{02} = 2\cos\varphi. \tag{46}$$

This represents, in words, a straight line that coincides with the axis y. This result could be expected, undoubtedly, since the rolling circle has a radius $c = 1$, viz. half as large as the radius $r_2 = 2$ of the pitch circle within which the rolling motion takes place.

In this way the problem as set up in point 1 is solved.

We shall find the equation of the line of action. The concept of the function $V(\varphi_1; t)$ according to Eq. (11) is of a similar form as is the relation in Eq. (8) that served to define the envelope curve. The difference consists in substitution $\omega_1 t$ (as argument of the trigonometric functions) instead of $i\psi$. As far as the form of the line of action is concerned, the value of the angular velocity has no importance. For the sake of simplicity we assume $\omega_1 = 1$. When according to Eq. (8) the envelope curve was examined (with a gear ratio $i = 1$), we obtained

$$i\psi = \varphi = \varphi_1$$

[see Eq. (45)], and in the present case, we find in an analogous way, that

$$\omega_1 t = t = \varphi_1 . \tag{47}$$

Putting this expression into Eq. (2) of profile (p_1), the vector that describes the line of action is found to be:

$$Z_k = [(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\cos\varphi_1 - (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\sin\varphi_1] +$$
$$+ j\,[(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\sin\varphi_1 + (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\cos\varphi_1]. \tag{7/12}$$

The *real* part is expressed by:

$$X_k = (3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\cos\varphi_1 - (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\sin\varphi_1 =$$
$$= -(\sin 3\varphi_1\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1\sin\varphi_1) = -\sin(3\varphi_1 - \varphi_1) = -\sin 2\varphi_1 ,$$

and the *imaginary* part by:

$$Y_k = (3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \sin \varphi_1 + (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \cos \varphi_1 =$$
$$= 3 - (\cos 3\varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin 3\varphi_1 \sin \varphi_1) = 3 - \cos (3\varphi_1 - \varphi_1) =$$
$$= 3 - \cos 2\varphi_1 .$$

Thus, the parametric equations of the line of action go as follows:

$$X_k = -\sin 2\varphi_1 , \qquad Y_k = 3 - \cos 2\varphi_1 . \tag{48}$$

The parameter φ_1 can be cancelled in the following way:

$$X_k = -\sin 2\varphi_1 , \qquad Y_k - 3 = -\cos 2\varphi_1 .$$

By taking the squares and adding them, we obtain:

$$X_k^2 + (Y_k - 3)^2 = 1.$$

Consequently, the line of action represents an arc as a portion of a circle as shown in Fig. 14. This is quite underst-andable, because of the following relationship: when profile (p_2) moves around centre O_2, we find a right-angled triangle formed by the hypotenuse O_2C and the sides PC and O_2P where PC represents a portion of the normal to the profile coordinated to point P, and O_2P is the radius. Consequently, point P representing the right-angle corner moves along a circular arc.

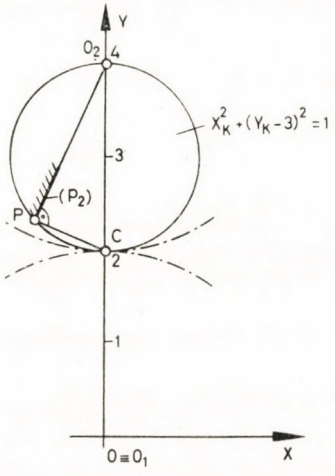


Fig. 14

The gear ratio variation which occurs when the original centre distance a gets altered should be examined; e.g. we allow the value a_0 to be decreased to $a = a_0 - \Delta a$. In Fig. 15 the dash curves represent the initial position of the mating profiles when distance a is kept unchanged and ratio i remains constant. (In this position, C represents the mating contact point.)

The centre distance a should be modified inasmuch as centre O_1 remains in the original position, whereas centre O_2 comes nearer to O_1 by the decrement Δa, and reaches the new position O_2^*.

When the two gears have performed some revolution through the angles λ_1 and λ_2 respectively (measured from the initial position), the new mating point is at P^*. In this position, the normal to the profile at the new pitch point will not produce the same division ratio of the centre distance a as was with the original distance a_0; thus the gear ratio i is also subjected to some change, characterized by the new dividing point C^*. Now, we return to Eqs (23) by which the mating conditions are established, but we substitute λ_1 instead of t, and λ_2 instead of T.

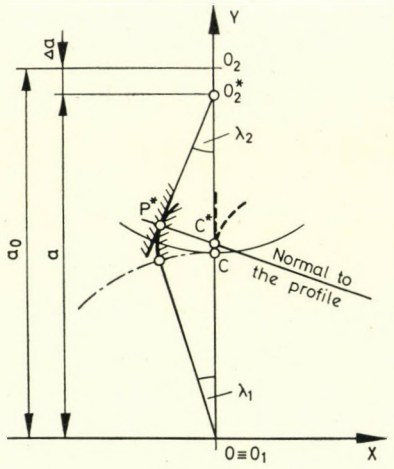


Fig. 15

For this purpose, we apply:

$$X_{01} = 3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1 , \qquad X_{02} = 0,$$
$$Y_{01} = 3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1 , \qquad Y_{02} = -2 \cos \varphi_1 ,$$

and

$$X'_{01} = 3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1), \qquad X'_{02} = 0,$$
$$Y'_{01} = 3(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1), \qquad Y'_{02} = 2 \sin \varphi_1 .$$

Thus, Eqs (23) are rewritten:

$$(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \cos \lambda_1 - (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \sin \lambda_1 = -2 \cos \varphi_1 \sin \lambda_2 ,$$
$$(3 \sin \varphi_1 - \sin 3\varphi_1) \sin \lambda_1 + (3 \cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1) \cos \lambda_1 = a - 2 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 , \qquad (7/23)$$
$$\tan \lambda_2 = \frac{3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\, 2 \sin \varphi_1 - 3\,(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1)\, 2 \sin \varphi_1 \tan \lambda_1}{3(\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\, 2 \sin \varphi_1 \tan \lambda_1 + 3(-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1)\, 2 \sin \varphi_1} .$$

Some kind of simplification seems to be possible on account of the parameter φ_1 being the same for both profiles. The 3rd equation among Eqs (7/23) can be rearranged. There is a simplification by 6 and by $\sin \varphi_1$ possible, and the known relations

$$\cos \varphi_1 - \cos 3\varphi_1 = 4 \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 = 2 \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1 ,$$
$$-\sin \varphi_1 + \sin 3\varphi_1 = 2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1$$

can be applied:

$$\tan \lambda_2 = \frac{2 \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1 - 2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1 \tan \lambda_1}{2 \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1 \tan \lambda_1 + 2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1} .$$

Both numerator and denominator can be divided by

$$2 \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1$$

to obtain:

$$\tan \lambda_2 = \frac{\tan 2\varphi_1 - \tan \lambda_1}{\tan 2\varphi_1 \tan \lambda_1 + 1} = \tan (2\varphi_1 - \lambda_1) ,$$

$$\lambda_2 = 2\varphi_1 - \lambda_1 , \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 2\varphi_1 . \qquad (49)$$

We are able to transform the 1st and the 2nd formulae among Eqs (7/23):

$$3 \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 - \sin 3\varphi_1 \cos \lambda_1 - 3 \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 + \cos 3\varphi_1 \sin \lambda_1 = -2 \cos \varphi_1 \sin \lambda_2 ,$$

$$3 \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 - \sin 3\varphi_1 \sin \lambda_1 + 3 \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 - \cos 3\varphi_1 \cos \lambda_1 = a - 2 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 ,$$

$$3 \sin (\varphi_1 - \lambda_1) - \sin (3\varphi_1 - \lambda_1) = -2 \cos \varphi_1 \sin \lambda_2 ,$$

$$3 \cos (\varphi_1 - \lambda_1) - \cos (3\varphi_1 - \lambda_1) = a - 2 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 .$$

We form the square of both sides and add them together

$$10 - 6 \cos 2\varphi_1 = 4 \cos^2 \varphi_1 - 4a \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 + a^2,$$

or

$$\cos \lambda_2 = \frac{2 \cos^2 \varphi_1 + 6 \cos 2\varphi_1 + a^2 - 10}{4a \cos \varphi_1} . \tag{50}$$

In a numerical example, we put

$$\Delta a = -0{,}1, \quad \text{viz. } a = 3{,}9,$$

thus,

$$\cos \lambda_2 = \frac{4 \cos^2 \varphi_1 - 6 \cos 2\varphi_1 + 5{,}21}{15{,}6 \cos \varphi_1} . \tag{51}$$

With various values of φ_1 and by using Eq. (49) the angles λ_1 or, by Eq. (51), the angles λ_2 are calculated. The resulting values (φ_1, λ_1, λ_2) give us every required point of contact, at the same time being the mating point in a position when gear (2) revolved through angle λ_2. The actual normal to the profile passes through the resulting point P^* (X^*, Y^*), and its equation goes as follows:

$$Y - Y^* = m (X - X^*),$$

where

$$X^* = -2 \cos \varphi_1 \sin \lambda_2 ,$$

$$Y^* = 3{,}9 - 2 \cos \varphi_1 \cos \lambda_2 ,$$

$$m = -\tan \lambda_2 .$$

Now we find the co-ordinates of point C^* which represents the intersection point of the normal to the profile with the centre line O_1O_2 : ($X^* = 0$),

$$Y_{C^*} = Y^* + \tan \lambda_2 X^* = O_1C^*, \tag{52}$$

and

$$i = \frac{\overline{O_2^*C^*}}{\overline{O_1C^*}} \tag{53}$$

represents the momentaneous value of the gear ratio. Our numerical results are shown in the following Table:

φ_1	λv_2	λ_1	X^*	Y^*	O_1C^*	O_2C^*	i
0°	−12°50′10″	12°50′10″	−0,444	1,950	1,849	2,051	1,109
1°	−12°52′50″	14°52′50″	−0,446	1,951	1,850	2,050	1,108

and so forth.

For calculating the relative sliding velocity we shall return to Eq. (29).

Let the given centre distance a equal 4 and the angular velocity ω_1 equal 1; thus, the expression as exposed under the square root sign in (29), of course, with $t = \varphi_1$ [accord-

ing to (47)] has to be written as:

$$|v_r|^2 = 4^2 - 2 \cdot 4\,(1+1)\,[(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\sin\varphi_1 + (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\cos\varphi_1 + \\ + (1+1)^2\,[(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)^2 + (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)^2] = \frac{16\,(1-\cos 2\varphi_1)}{2},$$

or

$$|v_r| = \sqrt{\frac{16\,(1-\cos 2\varphi_1)}{2}} = 4\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi_1}{2}} = 4\sin\varphi_1\,. \qquad (7/29)$$

Calculation of the normal tooth force according to to Eq. (40):

$$F_n = M_1 \frac{\sqrt{[3\,(\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)]^2 + [3\,(-\sin\varphi_1 + \sin 3\varphi_1)]^2}}{(3\sin\varphi_1 - \sin 3\varphi_1)\,3\,(\cos 3\varphi_1 - \cos 3\varphi_1) + (3\cos\varphi_1 - \cos 3\varphi_1)\,3(-\sin\varphi_1 + \sin 3\varphi_1)}$$

where the expression under the square root sign is reduced to:

$$36\sin^2\varphi_1\,,$$

thus, the numerator equals $= 6\sin\varphi_1$ and the denominator is reduced to

$$12\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,,$$

and consequently:

$$F_n = M_1 \frac{6\sin\varphi_1}{12\sin\varphi_1\cos\varphi_1} = M_1 \frac{1}{2\cos\varphi_1}\,. \qquad (7/40)$$

7.2 *Case of a special application*

7.2.1. *Example of a cam profile*

This case is shown in Fig. 16. Here, the profile of member (1) is characterized as a straight line passing through centre O_1, and the profile of member (2) represents a circle having the radius r which swings, with a connecting lever of the length m, around centre O_2; the possibility that this circle can, at the same time rotate, around centre M has no mechanical significance. The mechanism as shown in Fig. 16, assumes its initial position. For profile (1), the equation in the system of co-ordinates x_1y_1 can be written as:

$$\begin{aligned} X_{01} &= \varphi_1\cos\alpha & X'_{01} &= \cos\alpha \\ Y_{01} &= \varphi_1\sin\alpha & Y'_{01} &= \sin\alpha \end{aligned} \qquad (54)$$

Further, φ_1 represents the distance of the moving point of profile (1) from centre O_1 and the position of this straight profile is characterized by

$$\cos\alpha = \frac{r}{a-m}\,, \qquad (55)$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{(a-m)^2}} = \frac{\sqrt{(a-m)^2 - r^2}}{a-m}\,.$$

As for the profile (2), expressed in the system of co-ordinates x_2y_2, we can write:

$$\begin{aligned} X_{02} &= r\cos\varphi_2\,, & X'_{02} &= -r\sin\varphi_2\,, \\ Y_{02} &= (m + r\sin\varphi_2), & Y'_{02} &= -r\cos\varphi_2 \end{aligned} \qquad (56)$$

where angle φ_2 is to be understood in accordance with Fig. 16.

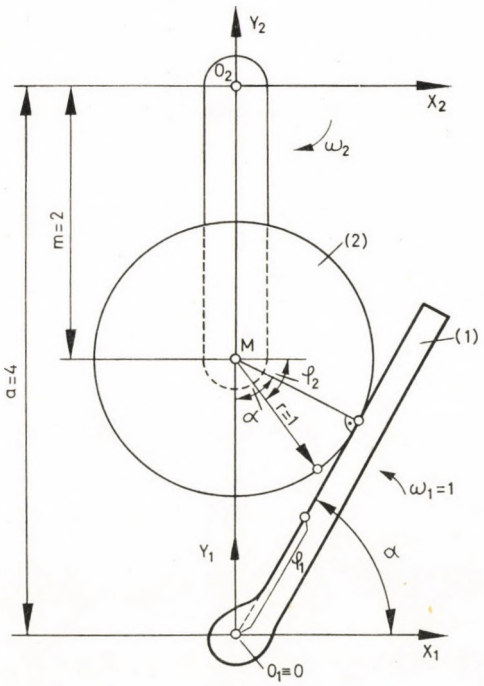


Fig. 16

Suppose that member (1) rotates around centre O_1 in the positive sense at the angular velocity $\omega_1 = 1$.

What is required, is to know the gear ratio $\omega_1/\omega_2 = i$:

Recurring to Eqs (23) we can write

$$\varphi_1 \cos\alpha \cos t - \varphi_1 \sin\alpha \sin t = r \cos\varphi_2 \cos T - (m + r \sin\varphi_2) \sin T$$

$$\varphi_1 \cos\alpha \sin t + \varphi_1 \sin\alpha \cos t = a - r \cos\varphi_2 \sin T - (m + r \sin\varphi_2) \cos T$$

$$\tan T = \frac{(-\cos\alpha\, r \cos\varphi_2 - r \sin\varphi_2 \sin\alpha) - (-r \cos\alpha \sin\varphi_2 - r \sin\alpha \cos\varphi_2) \tan t}{(-\cos\alpha\, r \cos\varphi_2 + r \sin\varphi_2 \sin\alpha) \tan t + (-r \cos\alpha \sin\varphi_2 - r \sin\alpha \cos\varphi_2)} . \quad (57)$$

After simplification and rearrangement:

$$\varphi_1 \cos(\alpha + t) = r \cos(\varphi_2 + T) - m \sin T,$$

$$\varphi_1 \sin(\alpha + t) = a - r \sin(\varphi_2 + T) - m \cos T, \quad (58)$$

$$\tan T = \frac{\sin(\varphi_2 + \alpha) \tan t - \cos(\varphi_2 + \alpha)}{-\sin(\varphi_2 + \alpha) - \cos(\varphi_2 + \alpha) \tan t} .$$

In the latter equation an amplification by -1 seems to be suitable:

$$\tan T = \frac{\cos(\varphi_2 + \alpha) - \sin(\varphi_2 + \alpha) \tan t}{\sin(\varphi_2 + \alpha) + \cos(\varphi_2 + \alpha) \tan t} ,$$

and after a second amplification by $1/\cos(\varphi_2 + \alpha)$, we obtain

$$\tan T = \frac{1 - \tan(\varphi_2 + \alpha) \tan t}{\tan(\varphi_2 + \alpha) + \tan t} = \frac{1}{\tan[(\varphi_2 + \alpha) + t]} =$$

$$= \cot[(\varphi_2 + \alpha) + t] = \tan\{90° - [(\varphi_2 + \alpha) + t]\},$$

or

$$T = 90° - [(\varphi_2 + \alpha) + t] = 90° - \varphi_2 - \alpha - t$$
$$\varphi_2 + T = 90° - \alpha - t. \tag{59}$$

By substituting this formula into the 1st and 2nd Eqs (58) we obtain:

$$\varphi_1 \cos(\alpha + t) = r \cos[90° - (\alpha + t)] - m \sin T,$$
$$\varphi_1 \sin(\alpha + t) = a - r \sin[90° - (\alpha + t)] - m \cos T,$$

or

$$\varphi_1 \cos(\alpha + t) = r \sin(\alpha + t) - m \sin T, \tag{60}$$
$$\varphi_1 \sin(\alpha + t) = a - r \cos(\alpha + t) - m \cos T.$$

Dividing the latter equation by the former we have:

$$\tan(\alpha + t) = \frac{a - r \cos(\alpha + t) - m \cos T}{r \sin(\alpha + t) - m \sin T}$$

that sets down a relation between t and T. After cancellation of the fractions and rearrangement, we can write:

$$\frac{r - m \sin(\alpha + t) \sin T}{\cos(\alpha + t)} - a = -m \sqrt{1 - \sin^2 T},$$
$$r - m \sin(\alpha + t) \sin T - a \cos(\alpha + t) = -m \cos(\alpha + t) \sqrt{1 - \sin^2 T}.$$

Forming the squares of both sides:

$$r^2 + m^2 \sin^2(\alpha + t) \sin^2 T + a^2 \cos^2(\alpha + t) - 2rm \sin(\alpha + t) \sin T -$$
$$- 2ar \cos(\alpha + t) + 2am \sin(\alpha + t) \cos(\alpha + t) \sin T =$$
$$= m^2 \cos^2(\alpha + t) - m^2 \cos^2(\alpha + t) \sin^2 T$$

and rearranged:

$$m^2 \sin^2 T + 2m \sin(\alpha + t)[a \cos(\alpha + t) - r] \sin T + \{[r - a \cos(\alpha + t)]^2 - m^2 \cos^2(\alpha + t)\} = 0.$$

By using the root-formula of a second-degree equation, $\sin T$ can be calculated.

First, the discriminant should be expanded:

$$4m^2 \sin^2(\alpha + t)[a \cos(\alpha + t) - r]^2 - 4m^2 \{[a \cos(\alpha + t) - r]^2 - m^2 \cos^2(\alpha + t)\} =$$
$$= 4m^2 \cos^2(\alpha + t) \{m^2 - [a \cos(\alpha + t) - r]^2\},$$

and consequently

$$\sin T = \frac{[r - a \cos(\alpha + t)] \sin(\alpha + t) + \cos(\alpha + t) \sqrt{m^2 - [a \cos(\alpha + t) - r]^2}}{m} \tag{61}$$

of course, we apply the positive root.

With the numeric data:

$$a = 4, \quad r = 1, \quad m = 2$$

we have:

$$\alpha = \arccos \frac{r}{a - m} = \arccos \frac{1}{4 - 2} = \arccos \frac{1}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3},$$

and

$$\sin T = \frac{[1 - 4 \cos(t + \pi/3)] \sin(t + \pi/3) + \cos(t + \pi/3) \sqrt{4 - [4 \cos(t + \pi/3) - 1]^2}}{2}. \tag{62}$$

From this we obtain the angular revolution of the gear member (2) through the time t:

$$T = \text{arc sin}\ \frac{[1 - 4\cos(t + \pi/3)]\sin(t + \pi/3) + \cos(t + \pi/3)\sqrt{4 - [4\cos(t + \pi/3) - 1]^2}}{2}$$

and with

$$\omega_2 = T' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{\frac{[1 - 4\cos(t + \pi/3)]\sin(t + \pi/3) + \cos(t + \pi/3)\sqrt{4 - [\cos(t + \pi/3) - 1]^2}}{2}\right\}^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2}\left\{4\sin^2(t + \pi/3) + [1 - 4\cos(t + \pi/3)]\cos(t + \pi/3) - \right.$$

$$- \sin(t + \pi/3)\sqrt{4 - [4\cos(t + \pi/3) - 1]^2} +$$

$$\left. + \cos(t + \pi/3)\frac{2[4\cos(t + \pi/3) - 1]\,4\sin(t + \pi/3)}{2\sqrt{4 - [4\cos(t + \pi/3) - 1]^2}}\right\}.$$

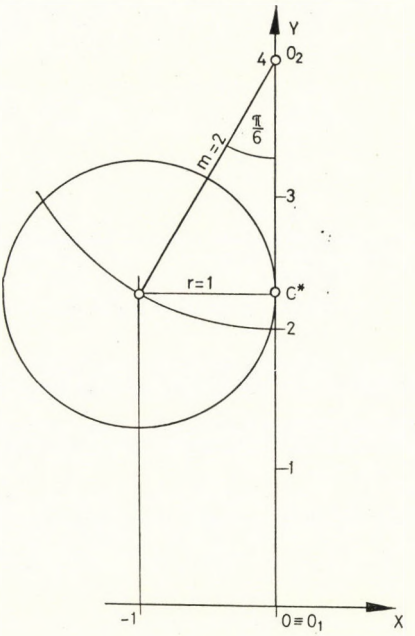


Fig. 17

Instead of a general reduction of this equation, we may confine ourselves to the determination of the gear ratio at a certain point of time, say at $t = \pi/6$.

Thus,

$$\omega_2(\pi/6) = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

and

$$i = \frac{1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} \approx 0{,}76.$$

The same result can be obtained by using Eqs (62). First we can state that after a revolution through angle $t = \pi/6$ in which position the edge of member (1) comes into coincidence with axis y, we obtain

$$\sin T = 1/2,$$

$$T = \text{arc sin } 1/2 = \pi/6,$$

in words, the member (2) likewise performed a revolution through an angle $T = \pi/6$. In this position, the profile normal passes through point C^*. As can be seen from Fig. 17, this portion is characterized by the relation:

$$\overline{O_2C^*} = 2 \cos \pi/6 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\overline{O_1C^*} = 4 - \sqrt{3},$$

and the momentaneous value of the gear ratio:

$$i = \frac{\overline{O_2C^*}}{\overline{O_1C^*}} = \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} \approx 0{,}76$$

in conformity with our first result.

REFERENCES

1. HUSZTHY, L.: Síkbeli mechanizmusokra vonatkozó néhány tétel bizonyítása a komplex számsíkon. (The Use of the Plane of Complex Numbers for the Purpose to Prove Some theorems Relating to Planar Mechanisms.) *Magyar Tudomány* **42** (1970), 279—303
2. HUSZTHY, L.: Profilgörbék meghatározása számítással. (Definition of Profile Curves by Calculation.) *Gép* (1959), 70—74
3. Lubrication of Industrial Gears *(Shell*, London 1964)
4. NIEMANN, G.: Schneckengetrieb mit flüssiger Reibung. *VDI Forschungsheft*, Ausg. B. Bd. 13. (1942).
5. NIEMANN, G.: Novikow-Verzahnung und andere Sonderverzahnungen für hohe Tragfähigkeit. VDI-Vertagung Essen, *VDI-Berichte*, No. 47 (1961).

Komplexe Schreibweise im Entwerfen von Zahnrädern. Hier wollen wir mit besonderer Rücksicht auf Grundfragen des Entwerfens einige geometrische und mechanische Eigenschaften von geradverzahnten zylindrischen Räderpaaren besprechen, u. zw.: Bestimmung des Gegenprofils zu einem gegebenen; Untersuchung der Eingriffslinie; Analyse der geometrischen und mechanischen Bedingungen des Eingriffs; Untersuchung der infolge eines Achsenabstandfehlers entstandenen Übersetzungsänderung; Berechnung der relativen Gleitgeschwindigkeit der Zähne; Berechnung der momentanen, normalen Zahnkraft. Bei gegebenem Profil eines der beiden Zahnräder (und dies ist gewöhnlich das kleine Rad) erscheint die Eingriffslinie eindeutig bestimmt, und dasselbe gilt für das Profil des großen Rades. Die hier bekanntgemachten Rechnungsmethoden sind — nebst der komplexen Ausdrucksweise — dadurch gekennzeichnet, daß die Ergebnisse allgemein mit Hilfe von den, das Profil des kleineren Rades bestimmenden Funktionen ausgedrückt werden.

Комплексное представление зубчатых колес при их проектировании Данная работа занимается такими геометрическими и механическими свойствами пар прямозубых зубчатых колес с параллельными осями, которые при проектировании зубьев играют основную роль, а именно: определение контрпрофиля, соответствующего данному профилю; анализ контактной линии; анализ геометрических и механических условий контакта (зацепления); анализ изменения соотношения передачи, возникающего вследствие погрешности расстояния между осями; вычисление относительной скорости скольжения зубьев и мгновенного значения усилия зубьев в нормальном направлении. Принимая заданной профиль одного колеса (обычно меньшего), это однозначно определяет форму контактной линии, а эта форма же определяет форму контпрофиля; одним из характерных черт описываемых в дальнейшем методик расчета наряду с комплексным представлением является то, что результаты вообще выражают с помощью данных функций, описывающих профиль малого колеса.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 401—411 (1972)

NUMERICAL ANALYSIS OF CIRCULAR ORTHOTROPIC PLATES

M. A. MUSPRATT*

[Manuscript received February 3, 1971]

Lower bound plastic analysis techniques are described for orthotropic axisymmetric plates and slabs. The procedures involve a numerical optimisation by mathematical programming of either linear or nonlinear systems.

Orthotropy in plane continuous structures may be produced either by an orthotropic continuum or by arrangement of isotropic material such that the structure has direction-dependent properties, e.g. by reinforcing or by provision of ribs. These types of orthotropy are usually referred to as *physical* (crystalline) and *technical* (geometric) respectively. In lower bound plasticity, the difference between physical and technical orthotropy appears in the equations of the yield surfaces — the former requires a simple geometric reproportioning of the yield surface, while the latter involves a more tedious strain mapping procedure (ref. 1, 2, 3).

Strain mapping procedures will not be considered in this paper. In addition, as physical orthotropy is not common for steel plates, most solutions derived apply to reinforced concrete slabs which are assumed homogeneous enough to display physical orthotropy.

To simplify the system definition, only axisymmetric problems will be considered — thus the torsional moment is absent, reinforcement is orthogonal to yield lines, and the simple rectangular yield criterion may be invoked [4, 5].

1. Plastic analysis

The problem is to find the maximum lower bound to the collapse load of the six slabs whose reinforcing patterns are shown in Fig. 1. These spatial configurations were chosen because the author had previously conducted destructive tests on these slabs [6] and so a comparison of theory with experiment was possible. Slabs were loaded with a concentrated load. The footing slabs were subject to a uniformly distributed subgrade reaction, while the simply-supported slabs had simple edge supports.

* M. A. Muspratt, Research Associate, Department of Civil Engineering, McGill University, Montreal, P. Q., Canada.

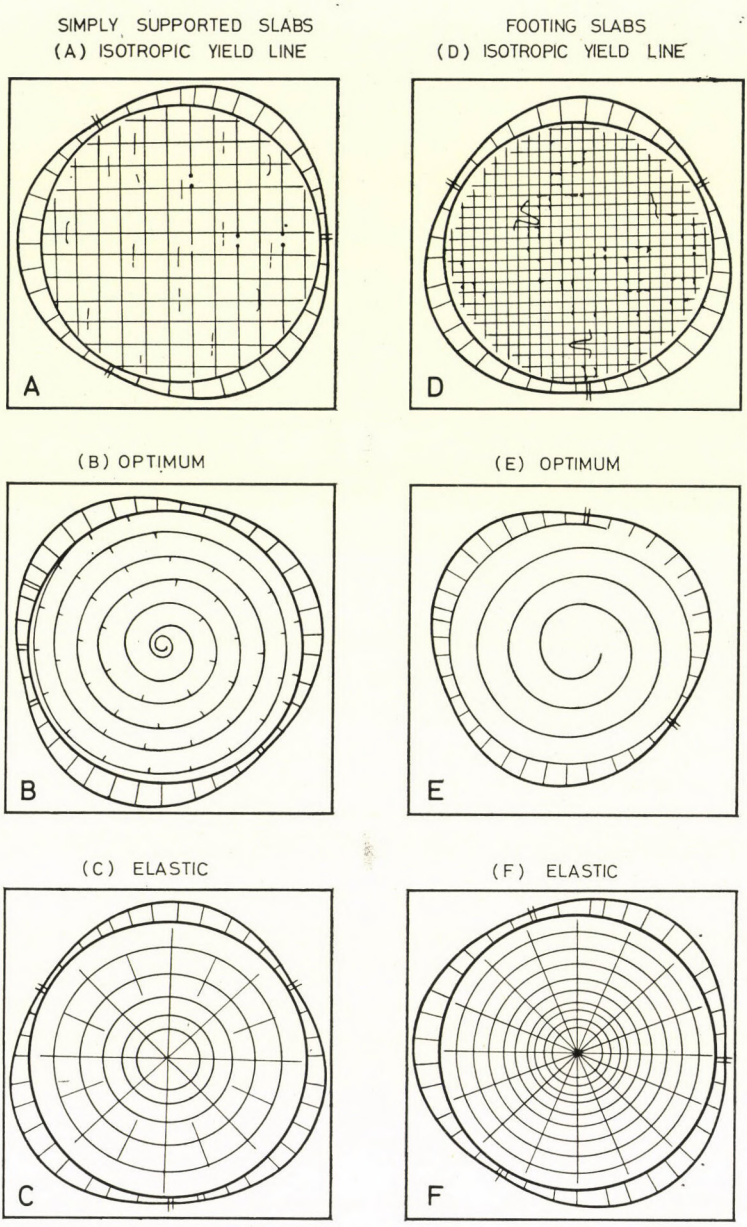


Fig. 1

The moment fields for the yield-line slabs are isotropic — the solution method is developed for these slabs and subsequently extended to the orthotropic moment fields for the optimum and elastic solutions. The material is assumed rigid plastic and obeys the cylindrically isotropic square yield criterion. No negative reinforcing was provided.

1.1 *Footing slab*

1.1.1 *Yield line solution*

The method used is to replace the continuum with a discretised form — i.e. the differential equation of equilibrium is replaced by finite differences. A statically admissible moment field is obtained if these finite equations are solved subject to yield constraints on the moments [7].

The solution in standard form becomes —

1. objective function $= -p$
2. constraints

(a) equality:
— six equilibrium equations

$$\frac{p}{2}[R^2-(S\delta)^2]+\frac{S}{2}(m_r^{s+1}-m_r^{s-1})+m_r^s-m_\theta^s=0$$

— two boundary conditions

$$m_r^0=m_\theta^0.$$

$$m_r^5=0.$$

(b) inequality:
— six of each of the following

$m_r^s \leqslant 1$
$m_\theta^s \leqslant 1$
} Letting the specific plastic capacity per unit width in flexure of the yield line slabs with reinforcing bars spaced at 3 in. centres be unity [6].

where, S = number of mesh point — taken as 0, 1, 2, . . . , 5,
δ = grid size — taken as 0,2,
m_r = specific dimensionless radial moment,
m_θ = specific dimensionless circumferential moment,
p = specific distributed load,
R = specific footing radius = 1,0.

Thus we have a system composed of

13 real variables,
24 slack variables, and
20 constraints

The object is to maximise the load on the slab subject to the above equality and inequality constraints; and because this underdetermined system is completely linear, by far the most efficient method of solution is by linear programming using the revised Simplex method [8].

1.1.2 *Optimum solution*

In this problem, the yield constraints were modified as follows to accommodate absence of radial reinforcement:

$$m_r^s \Big|_{s=1}^{5} = 0 .$$

As the spacing (D) of the circumferential reinforcement is variable, and the yield capacity is linearly proportional to this spacing, the following approximate quantities hold for a 12 in. diameter base plate.

Table I

$S\delta$	m_r	D_Θ (in)	m_Θ
0,16	0,0	3	1,0
0,2	0,0	3	1,0
0,4	0,0	4	0,75
0,6	0,0	5	0,6
0,8	0,0	6	0,5
1,0	0,0	7	0,43

Thus for $S\delta = 0.8$, the yield criterion is

$$0 \leqslant m_\theta \leqslant 0{,}5$$

where m_θ is the specific yield capacity again with respect to a 3 in. bar spacing.

1.1.3 *Elastic solution*

The reinforcing pattern for the elastic solution almost conforms to that of a polar net. The analytical approach to this problem of lower bound analysis [9] is quite cumbersome but the numerical approach using mathematical programming is almost trivial. The problem may be treated exactly as above except in this case both the radial and circumferential specific yield capacities vary with the radius. The moments at the singularity in the centre of the slab are not equal but are proportional to the density of radial and circumferential reinforcement.

1.2 *Simply-supported slab*

Expressions are as above except that the dimensionless form of the equation of equilibrium is:

$$\frac{S}{2}(m_r^{s+1} - m_r^{s-1}) + m_r^s - m_\theta^s = \frac{P}{2\pi}$$

where $P = p/m_0$, m_0 is the specific yield capacity of the slab,
p = concentrated load.

Here the shear term is independent of radius. Note that for the optimum solution —

$$m_r^s\Big|_{s=1}^{5} = 0\,; \quad m_\theta^s\Big|_{s=1}^{5} = m_0$$

where m_0 is the yield capacity with 6 in. spacing of reinforcing bars.

Plots of the moment diagrams obtained from the mathematical programming solutions are shown in Fig. 2.

It should be noted that generally the radial steel takes an insignificant portion of the load even in the elastic solutions. This agrees well with Roz-

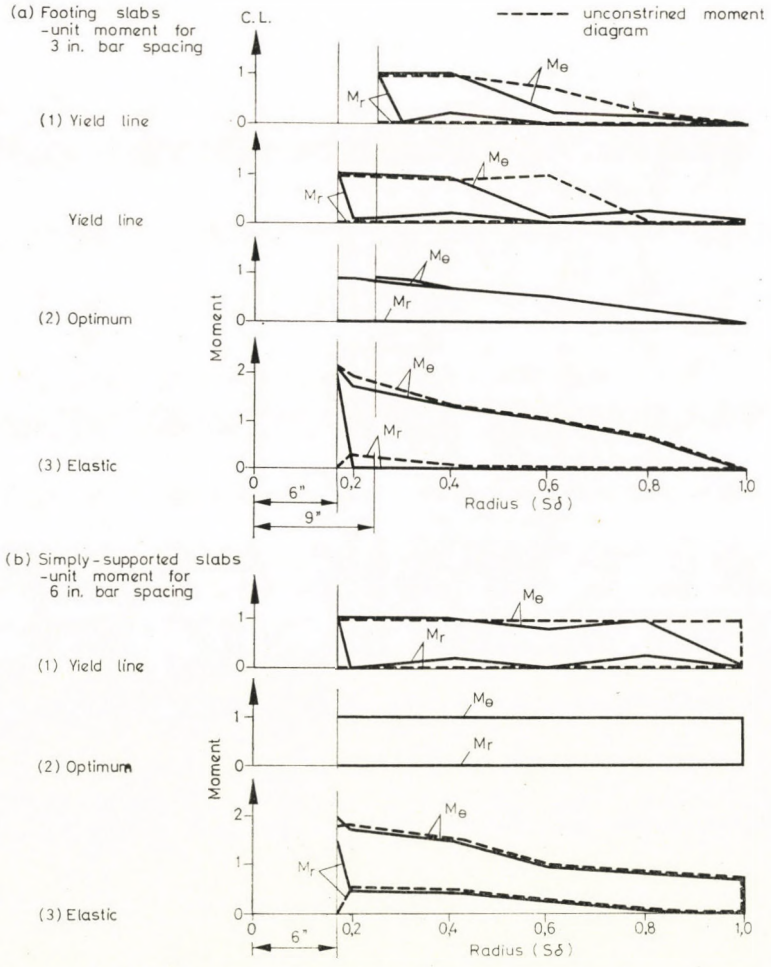


Fig. 2

vany's hypothesis [10]; in fact, the results for the simply-supported case agree exactly.

Some discrepancy occurs at the centre singularity of the slab and the assumed boundary conditions there. If a true singularity is assumed to occur at the edge of the load distribution plate, an incorrect indication of yield load is obtained because of the relatively coarse finite difference mesh size chosen. A singularity does occur, but the radial moment falls to zero very rapidly with radius, so that the area under the radial moment diagram is small, and little load capacity is generated from it. Thus if the singularity constraint is relaxed the true conditions of effectively zero radial moment at the centre of the slab are realised, and the propogation of the singularity moment in the radial direction because of the coarse grid size is avoided. The more exact unconstrained moment diagrams are also shown in Fig. 2.

The effect of relaxing the singularity constraint in the programming approach compared with the constrained values (in brackets) is shown in Table II. The former approach achieves greater load carrying capacity in all cases, with the radial reinforcement less well developed at yield (see Fig. 2, also).

Table II

Summary of results

Solution	Slab capacity (kips) at yield					
	Footing slab			Simply-supported slab		
	Design	Programming	Experimental	Design	Programming	Experimental
Yield line	13,1	9,3 (7,3)	11,0	4,48	4,5 (3,5)	5,0
Optimum	13,1	8,0	9,0	4,48	4,5	4,8
Elastic	13,1	11,9 (10,7)	14,0	4,48	5,8 (5,7)	5,0

The high yield loads obtained by programming analysis for the elastic slab compared with the other slabs is a direct result of reinforcement curtailment and bond length required in prior design. These considerations are peculiar to elastic solution for the spatial cases considered.

The above analyses are approximate because of system simplification by neglect of secondary effects such as shear and membrane stresses, deflections, time-dependence, material heterogeneity, etc. Thus, the use of suboptimal analysis seems desirable — these analyses have a reserve capacity to absorb overload or abuse and are immediately available for performance upgrading which is a standard part of some industries.

2. Transverse orthotropy

WASTI [11] has obtained an analytical value of the collapse load of a simply-supported, transversely orthotropic plate subject to uniformly distributed load. The Tresca yield criterion for this material is

$$m_r,\ m_\theta \leqslant \pm k,$$
$$m_r - m_\theta \leqslant \pm 1{,}0.$$

k = coefficient of orthotropy in the transverse direction.

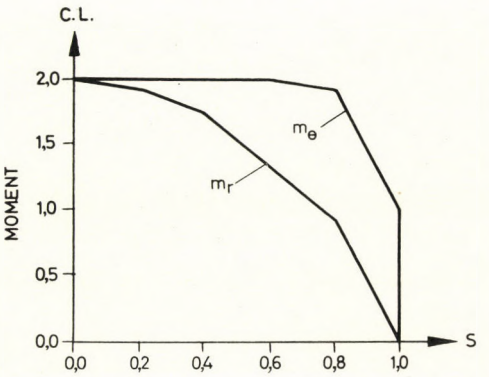


Fig. 3

This yield criterion may be substituted for the square yield criterion in the system definition for plastic analysis (Section 1).

As an example, for $k = 2$, the analytic and numerical solutions are $6 \times 1{,}876 = 11{,}25$ and 11,06 respectively. The moment distribution from the numerical solution is shown in Fig. 3.

3. Nonlinear systems

In all previous examples, linear and piecewise linear objective functions and constraints have been used. However, if say von Mises's instead of Tresca's yield criterion is used, nonlinear yield constraints appear in the system definition. The solution method involves invoking nonlinear programming algorithms — the particular algorithm used subsequently is the sequential unconstrained minimisation technique (S.U.M.T.) and is described in more detail in [6].

3.1 *Analysis*

For the purpose of illustration, lower bound plastic analysis of steel plates with material conforming to both von Mises and Tresca's yield criteria are obtained. Simply supported plates under both distributed and concentrated load and footing plates are all considered. As a check on accuracy, analytic values are also quoted for the first case.

System definition is as described previously in the section on plastic analysis, except that the yield constraints become

$$m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2 \leqslant 1{,}0$$

at each node.

For the plate spatial configurations used, no negative moments appear — thus the Tresca and square yield criteria give identical results.

Results are shown in Fig. 4, while values given below are for the simply-supported plate under distributed load [7].

Table III

s	Tresca				von Mises	
	Analytical		Numerical			
	M_r	M_Θ	M_r	M_Θ	M_r	M_Θ
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,99	0,99
0,2	0,96	1,0	0,95	1,0	0,96	1,03
0,4	0,84	1,0	0,85	1,0	0,87	1,08
0,6	0,64	1,0	0,63	1,0	0,66	1,15
0,8	0,36	1,0	0,38	1,0	0,44	1,14
1,0	0,00	1,0	0,00	1,0	0,00	0,99
P	6,00		5,88		6,33	

The use of composite materials is increasing rapidly [12], especially in the aerospace industries where concurrent application of weight optimisation techniques is mandatory. The yield criterion for transversely anisotropic material has already been discussed. It is now proposed to include Hill's yield criterion for composite orthotropic material in the plastic analysis procedure.

For the two-dimensional case, Hill's criterion degenerates into the von Mises criterion for a coefficient of orthotropy of one, and to a circle

$$m_r^2 + m_\theta^2 \leqslant 1$$

for a coefficient of orthotropy of infinity.

The solution for the latter yield criterion is shown in Fig. 4.

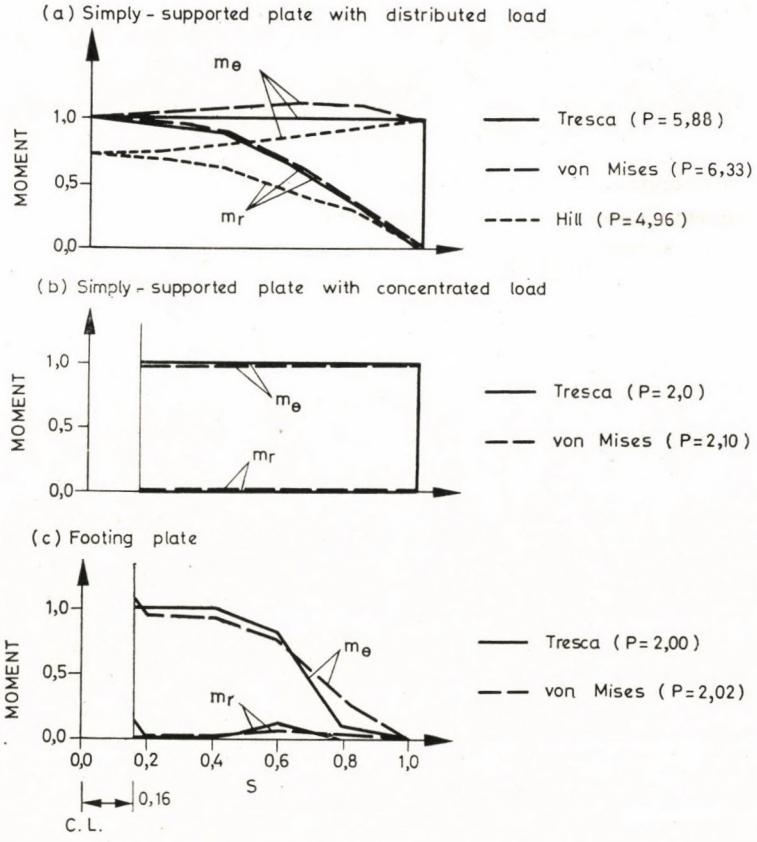


Fig. 4

3.2 *Extensions*

Extensions of the previous methods for orthotropic and nonlinear systems to include shakedown as well as limit conditions, to include stochastic as well as deterministic variables, and to include discrete as well as continuously valued variables have been described elsewhere [7, 13] — powerful numerical methods invoking the mathematical programming optimisation algorithms are further utilised to illustrate the tremendous potential application horizons.

Piecewise linearisation of the equilibrium equations and integrals by finite differences may be inaccurate because of discontinuities of first and second derivatives at node points. BIRON et al. [14] have used quadratic splining to ensure continuity of first derivatives — however with the development of sophisticated nonlinear programming algorithms, the use of cubic splines to ensure continuity of second derivatives is advantageous [15].

Piecewise curvilinear representation of moment fields with collocation points only at nodes to ensure the yield criterion, if not violated, may lead to unsafe analyses and designs due to yield violation between nodes, especially if nodes are widely spaced.

With two parameter systems involving both radial and circumferential moments, cubic spline representation of say the equilibrium equation is quite tedious; but as the circumferential moment field is always present and usually dominant for axisymmetric slabs [7], representation of this field only in spline form may be considered.

Description of structural ensembles in terms of stiffness matrices instead of equilibrium equations could add to flexibility of system definition and permit inclusion of asymmetries of geometry and loading.

4. Conclusions

The inclusion of orthotropy and nonlinearities in lower bound plastic analysis may be easily achieved, provided numerical optimisation procedures using mathematical programming are invoked.

Acknowledgements

The author is indebted to Prof. J. O. McCutcheon of McGill University for encouragement, to the National Research Council of Canada for financial support, and to Miss R. Vincent for help in preparation of the manuscript.

REFERENCES

1. Kwiecinski, M.: Yield Condition for Orthotropically Reinforced Slab. *Arch. Mech. Stos.*, **18** (1966), 615—625
2. Biron, A.—Sawczuk, A.: Plastic Analysis of Rib Reinforced Cylindrical Shells. *A.S.M.E., J. App. Mechs.*, **34** (1957), 37—42
3. Sawczuk, A.: Some Problems of Load Carrying Capacities of Orthotropic and Non-homogeneous Slabs. *Arch. Mech. Stos.*, **8** (1956), 549—563
4. Wood, R.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates. Thames & Hudson, Lond. 1967, 344 p.
5. Kwiecinski, M.: Yield Criterion for an Orthotropically Reinforced Slab. *Int. J. Sol. Struct.*, **1** (1965), 439—450
6. Muspratt, M.: Behaviour of Concrete Slabs, Ph. D. Thesis, Monash University, Melbourne 1969.
7. Muspratt, M.: Behaviour of Footing Slabs. *Build. Sci.* (Permagon), **4** (1969), 109—118
8. Pierre, D.: Optimisation Theory with Applications, J. Wiley & Sons, N. Y. 1969, 612 p.
9. Zawidzki, J.—Sawczuk, A.: Plastic Analysis of Fibre-Reinforced Plates under Rotationally Symmetric Conditions. *Int. J. Sol. Struct.*, **3** (1967)
10. Rozvany, G.: Optimal Design of Axisymmetric Slabs. Paper No. 2418, I. E. Aust., Conference, Brisbane, April 1968.
11. Wasti, S.: The Plastic Bending of Transversely Anisotropic Circular Plates. *Int. J. Mech. Sci.*, **12** (1970), 109—112
12. Ashton, J.—Halpin, J.—Petit, P.: Primer on Composite Materials. Technomic, Stanford, Conn., 1969, 124 p.
13. Muspratt, M.: Plastic Analysis and Optimal Design using Mathematical Programming, to be published

14. Biron, A.—Hodge, P.: Nonlinear Programming Method for Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells. *Int. J. Nonlinear Mechs.*, **3** (1968), 201—213
15. Rau, T.—Markos, A.: A Use of Spline Data Technique with Optimisation Programs. *A.I.A.A. J.*, **8** (1970), 181—182

Rechnerische Analyse von kreisförmigen orthotropen Platten. Es werden auf der Plastizitätstheorie beruhende Verfahren für die Analyse von orthotropen, achsensymmetrischen Platten unter Ermittelung des unteren Grenzwertes der Bruchlast behandelt. Unter den Verfahren befindet sich eine numerische Optimierung von entlinearen und nichtlinearen Systemen durch mathematische Programmierung.

Числовой анализ круглых ортотропных пластин. Описание методов исследования ортотропных осесимметричных пластин, основывающихся на теории излома, с целью определения нижнего предела разрушающей нагрузки. Среди методовфи гурирует метод числового определения оптимума линейных и нелинейных систем с помощью математического программирования.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 413—431 (1972)

STATISCHE UNTERSUCHUNG EINER LÄNGSVERSTEIFTEN TONNENSCHALE MIT GELENKIGEM KREISRAND DURCH ANWENDUNG FOURIERSCHER REIHEN

F. SEBŐK*

[Eingegangen am 15. März 1971]

Die durch axiale Rippen versteifte Kreiszylinderschale ist als optimale Form eines thermisch beanspruchten Spannbetondruckbehälters anzusehen. Zu ihrer Anwendung mußte zunächst eine geeignete Berechnungsmethode entwickelt werden, da das Problem in der einschlägigen Fachliteratur noch nicht behandelt bzw. für unlösbar gehalten worden ist. Der hier besprochene Rechengang fußt auf dem herkömmlichen Kraftgrößenverfahren. Alle statischen- und Verformungsgrößen werden in trigonometrische Reihen entwickelt. Als Hauptsysteme wurden dabei unbestimmte Tragwerke, die niedrige Zylinderschale sowie der auf der Ringwicklung elastisch aufliegende Balken gewählt. Das (unbekannte) Kontakt-Kräftesystem wurde aufgrund der Verträglichkeitsbedingung bestimmt. In Kenntnis seiner radialen und axialen Komponenten konnten die wahren Schnitt- und Verformungsgrößen ermittelt werden. Die Methode gestattet auch die sekundären Einflüsse in die Berechnung einzubeziehen, was mit Rücksicht auf die unter Betriebsumständen erfolgende Erwärmung der Bauteile von großer Bedeutung ist.

1. Einleitung

Die Idee, Druckbehälter aus Spannbeton zu bauen, hat sich in den sechziger Jahren durchgesetzt. Es wurde damit eine neue Art von Ingenieurkonstruktionen geschaffen, deren Verwirklichungsformen sich einstweilen in Entwicklung befinden.

Die heute üblichen Gestaltungsformen sind durch eine dicke Wand gekennzeichnet. Dieses Konstruktionsprinzip wird damit begründet, daß auf dieser Weise auch die Festigkeit des Abschirmbetons ausgenützt werden kann. Diese Auffassung, so logisch sie auch klingen mag, ist aber nur zum Teil richtig. Der Umstand, daß die (insbesondere durch Temperaturgefälle bedingten) Betriebslasten auf Konstruktionsteile beachtlicher Steifheit einwirken, hat erhöhte Beanspruchungen zur Folge. Es sind somit Schnittkräfte aufzunehmen, die überhaupt nicht auftreten würden, hätte man dem Beton nicht eine statische Rolle beimessen wollen.

Die hohen Temperaturlasten können natürlich durch Heranziehung künstlicher Mittel (z. B. Wärmeisolierung, dauerhafte Innenkühlung) verringert werden. Wir vertreten jedoch die Ansicht, daß die Kernfrage der Weiterentwicklung von Druckgefäßen darin besteht, Durchbildungsmöglichkeiten zu finden, welche die erforderliche Biegesteifigkeit sichern können ohne dabei den Behälter zum Tragen großer Temperaturlasten zu zwingen.

* Sebők F., Marczibányi tér 9/b Budapest II. Ungarn

Diese Zielsetzung kann, unserer Meinung nach, durch »aufgelöste« Konstruktionen erreicht werden.

Eine Behälterform dieser Art entsteht dadurch, daß man die dicke Wand in mehrere Schichten aufteilt. Die Innenräume zwischen den tragenden Bauelementen sind mit einem Füllstoff von erwünschten wärme- bzw. strahlenschützenden Eigenschaften (z. B. Glaßperlen, Sand oder Wasser) auszufüllen. Damit entfällt auch das Problem der auftretenden Risse [1]. Die Lösung wurde in einer früheren Arbeit [2] beschrieben, und seitdem in manchen Zügen in Form eines Modells von der Firma Krupp verwirklicht [3]. Hier wird durch den Einbau einer kostspieligen Vorrichtung für die Verteilung des Innendruckes unter den einzelnen Schichten gesorgt. Sinnvoll wäre es auch eine andere Wirkungsweise anzustreben, wo die Konstruktionselemente nicht voneinander getrennt, sondern in Form einer Sandwichschale zusammenarbeiten.

Eine grundsätzlich andere Alternative zur Verringerung von Temperaturspannungen bildet das berippte Tragwerk (das selbstverständlich gleichfalls mehrschichtig ausgeführt werden kann). Hier kommt die Verdrängung des massiven Betons durch einen losen und billigen Abschirmstoff der Wirtschaftlichkeit und der Sicherheit ebenfalls zugute. Ein ganz besonderes Augenmerk sei aber auf den Umstand gerichtet, daß bei dieser Konstruktionsform alle Durchführungen, Instrumente und selbst die Vorspannkabel leicht zugänglich und ihre Überprüfung, das Nachspannen und gegebenfalls sogar der Austausch sehr einfach sind.

Das Zerlegen dicker Betonbehälter in dünnwandige Kreiszylinderschalen bzw. stabartige Rippen ist auch in Hinblick der Zuverlässigkeit der statischen Berechnung zu befürworten. Wie allgemein bekannt, hat die moderne Rechentechnik eine Reihe numerischer Methoden entwickelt, die die Erfassung des Kräftespiels im dreidimensionalen Raum gestatten. Man verliert dagegen manchmal vor Augen, daß einige physikalischen Grundkenntnisse, worauf die entwickelten Rechenverfahren fußen, nicht einmal in zwei Dimensionen immer standhalten. Als solche ist zum Beispiel die augenblickliche Feuchtigkeit des porösen Materials zu nennen, die nicht nur auf die Temperaturverteilung und somit auf die thermischen Lasten auswirkt, sondern unter anderen den wirklichen Wert des Elastizitätsmoduls, des Schwindens und Kriechens bestimmt.

Die hier besprochene Konstruktionsform findet auf vielen Fachgebieten der Ingenieurwissenschaften in zunehmendem Maße Anwendung. Die Bautechnik ist dabei etwas in Hintergrund geraten. Dieser Umstand kann wahrscheinlich darauf zurückgeführt werden, daß zur Berücksichtigung der Anisotropie nur entweder in die Praxis schwer umsetzbare mathematische Theorien oder ziemlich unzuverlässige Näherungsmethoden zur Verfügung stehen. Aus diesem Grunde mußten parallel zur Ausarbeitung der neuzeitlichen Behälterkonstruktion Untersuchungen zum Entwickeln eines geeigneten Rechenverfahrens durchgeführt werden.

2. Statisches Modell

Die vorliegende Konstruktion besteht aus flachen Abschlußdeckeln und der Seitenwand. Die Erstgenannten sind im statischen Sinne Kreisringplatten, die hier einfachheitshalber als unendlich steif angenommen werden. Die Untersuchung beschränkt sich somit auf die Wand. Wenn im folgenden über Behälter bzw. Gefäß gesprochen wird, so ist unter dieser Benennung die Seitenkonstruktion zu verstehen.

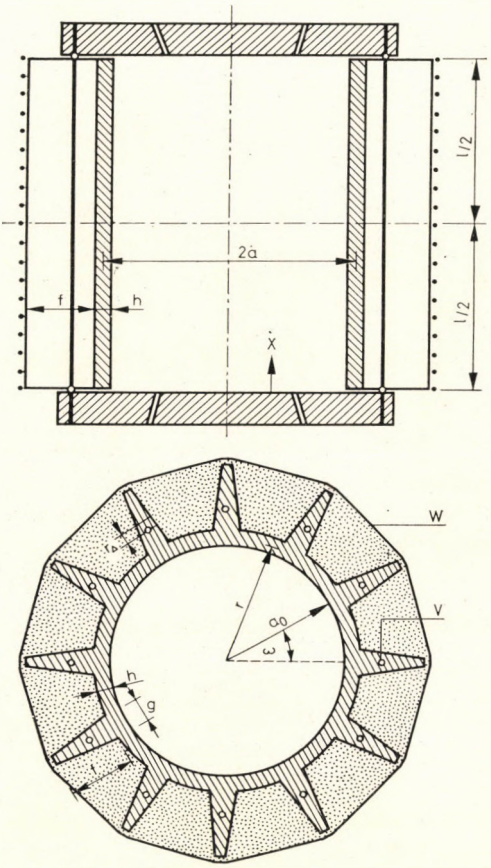


Bild. 1

Den Abschlußdeckel und die Seitenwand wollen wir gelenkig, d. h. entlang eines Gelenkringes miteinander verbunden annehmen. Die gewissermaßen neuartige Lösung könnte ähnlich wie in [4] verwirklicht werden. Sie hat den Vorteil, daß der Spannungszustand in den auf dieser Weise von den Längsmomenten befreiten Randzonen klarer überblickt werden kann. Die dadurch bedingt erhöhte Mantelverformung trägt zur sinnvollen Ausnützung der in Ringrichtung aufgewickelten Litzen bei.

Die genaue Stelle, wo sich das Gelenk ausbildet, ist das Ende des Kabelrohres in dem die senkrechten Litzen untergebracht sind. Aus dieser Anordnung folgend wird die Kreiszylinderschale eigentlich ausmittig gelagert. Wir betrachten jedoch diesen Einfluß als nicht sehr bedeutend und nach dem allgemeinen Berechnungsverfahren der Schalen mit Randträgern wollen wir uns hier mit der dadurch bedingten Korrektur nicht näher befassen.

Die Behälterwand besteht somit aus zwei Elementen, und zwar aus einer kreisrunden Zylinderschale sowie aus axialen Rippen, die in gleichmäßigen Abständen an der äußeren Schalenoberfläche gebildet sind. Alle Rippen besitzen im Schnitt die gleiche, theoretisch gleichschenkelige, Dreieckform. Es sei hier angenommen, daß alle Abmessungen entlang der Behälterhöhe unverändert bleiben.

Die Vorspannung kann am zweckmäßigsten durch zwei getrennte Systeme erfolgen. Die senkrechten Litzen werden in Röhrchen (ohne nachträglichen Verbund) mit der eingeplanten (und eventuell auch veränderlichen) Ausmittigkeit $r_{\triangle}$ in den Rippen geführt und an den Randringen der Deckelplatten verankert. Die waagerechte Wickelung liegt an den Rippenkanten auf. Diese Anordnung gewährt dem Spannstahl den größtmöglichen Schutz vor Einwirkung der Temperatur sowie der Neutronenstrahlung.

Das statische Modell wird durch die Skizze veranschaulicht, von welcher auch die wichtigsten Bezeichnungen der geometrischen Daten abzulesen sind. Mit Rücksicht auf die zugehörige Konstruktionsstärke weist der Index h auf den Zylinder, der Index f dagegen auf die Rippe hin.

3. Lastannahmen

Die auf die Konstruktionen einwirkenden Nutzlasten bzw. die einzelnen Belastungszustände wurden in Tafel I übersichtlich zusammengestellt.

Tafel I

Übersicht der Lastfälle

Zeitpunkt	Belastungsfall	Nutzlasten $(p + T)$	Vorspannung	Betonzustand	
				Feucht.	Schw. + Kr.
0	Bauzustand	0	max.	normal	0
	Probebelastung	wie vorgeschr.	normal	normal	0
	Betriebszustand	Betriebslast	normal	normal	0
∞	Betriebszustand	Betriebslast	min.	ausgetrocknet	max.
	Betriebspause	0	min.	ausgetrocknet	max.
Katastrophenfall*		Katastrophenlast	min.	ausgetrocknet	max.

* Im Katastrophenfall darf die Berechnung nach der Plastizitätstheorie durchgeführt werden.

Aufgrund der sich aus Erwärmung des Innenraumes sowie aus der durch Strahlenabsorption entwickelten Wärme in der Wand zusammensetzenden Temperaturbelastung ist zunächst die entsprechende Temperaturverteilung in den Bauelementen zu ermitteln. Rechnerisch ruft ihr gleichmäßiger Teil (T_0) eine Normalkraft, der ungleichmäßige ($T_\triangle$) Biegemomente hervor.

4. Grundzüge des Rechenganges

Unsere Berechnungsmethode beruht auf dem Kraftgrößenverfahren. Zum Hauptsystem wurden unbestimmte Träger gewählt, und zwar ein (niedriger) Kreiszylinder und ein, auf der Ringwickelung elastisch aufliegender, in Längsrichtung vorgespannter Balken. Behandelt man die einzelnen Elemente rechnerisch getrennt voneinander, so erleiden sie unter den Betriebslasten unterschiedliche Verformungen. Ihre Gleichheit wird, der Verträglichkeitsbedingung entsprechend, durch ein zu bestimmendes, verteiltes Kontakt-Kräftesystem hergestellt, das in die radiale Komponente q und die axiale Komponente t zerlegt wird. Die Ausmittigkeit von t zur Schwerlinie des Schalen- bzw. zum Schwerpunkt des Rippenquerschnittes wird hier vernachlässigt.

Kennzeichnend für die Methode ist die Darstellung aller Belastungen, statischer und Verformungsgrößen in trigonometrischen Reihen. Die Entwicklung erfolgt als Funktion von ηx, wobei

$$\eta = i\pi \frac{a}{l}$$

und $i = 1, 3, 5, \ldots$ sind.

Um die allgemein übliche Schreibweise beizubehalten, wird die Längskoordinate x vom unteren Zylinderrand gemessen; die axiale Verschiebung u geben wir dagegen aus Symmetriegründen von der Konstruktionshalbhöhe an.

5. Einfluß von Betriebslasten

5.1 *Kreiszylinder-Hauptsystem*

5.1.1 *Verschiebungen in radialer Richtung*

Die bekannte Gleichung der Kreiszylinderschale wird in der Form

$$\frac{d^4 w_{(h)}}{dx^4} + 4\lambda^{*4} w_{(h)} = p^* \tag{1}$$

aufgeschrieben, wo die Störfunktion p^* eine gleichmäßig verteilte Last, die Biegefestigkeit miteinbezogen darstellt. Die radiale Verschiebung wird mit w bezeichnet.

Die Differentialgleichung kann durch die trigonometrische Reihe

$$w_{(h)} = \sum_i \Gamma_i \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{2}$$

befriedigt werden, wo die Beiwerte sich durch die Formel

$$\Gamma_i = \frac{4}{\pi i} \frac{p^*}{\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^4 + 4\lambda^{*4}} \tag{3}$$

ermitteln lassen und p^* hier ebenfalls in eine Fouriersche Reihe entwickelt wird. Die Randbedingungen an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ lauten (dem gelenkigen Verbund entsprechend)

$$w_{(h)} = 0$$

und

$$M_{x(h)} = - K_h \frac{d^2 w_{(h)}}{dx^2} = 0 ,$$

und werden durch die Sinusfunktion erfüllt.

Im Fall eines Druckbehälters kann die Last p^* von verschiedenen Gründen herrühren, und zwar vom Innendruck (p)

$$p_p^* = \frac{a - \frac{h}{2}}{aK_h} p ; \tag{4}$$

von der gleichmäßigen Erwärmung (N_T)

$$p_{T_0}^* = \frac{1 - \mu}{aK_h} N_{T(h)} ; \tag{5}$$

vom Temperaturgefälle (M_T)

$$p_{T\Delta_i}^* = \frac{\left(\frac{a}{\eta_i}\right)^2 \left[\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^4 + 4\lambda^{*4}\right]}{K_h} M_{T(h)} , \tag{6}$$

wo wegen der einheitlichen Behandlung, auch das thermische Moment in Form einer Störfunktion ausgedrückt wird.

5.1.2 *Verschiebungen in axialer Richtung*

Die axialen Verschiebungen werden am Hauptsystem unter Einwirkung von Betriebslasten nur durch Längskräfte hervorgerufen. Entwickelt man sie

gleichfalls in eine Sinusreihe, so kann die Verschiebung mit der Formel

$$u_{(h)} = \frac{1}{D_h}\int N_x\,dx = \frac{4l}{\pi^2 D_h} N_x \sum_i \frac{1}{i^2}\cos\eta_i\frac{x}{a} \tag{7}$$

ermittelt werden; u wird hier von der halben Höhe des Behälters gemessen.

Für die einzelnen Lastarten können die Längskräfte aufgrund folgender Überlegungen angenommen werden:

— der Innendruck übt auf den Abschlußdeckel eine Kraft aus, welche die Wand auf Zug beansprucht. Im Verhältnis der Schalen- bzw. Rippensteifigkeiten fällt davon

$$N_{p(h)} = \frac{D_h}{2a\pi D_h + kD_f}\,\frac{\left(a-\frac{h}{2}\right)^2}{2a}\,p \tag{8}$$

der Umfangseinheit zu,

— die durch ungleichmäßige Erwärmung hervorgerufene thermische Normalkraft ist vorgegeben,

— die ungleichmäßige Erwärmung verursacht keine Längskraft und somit auch keine axiale Verschiebung.

5.1.3 *Schnittkräfte*

In Kenntnis der Verformungen können die Schnittkräfte ermittelt werden. Die entsprechenden Ausdrücke lauten für das axiale Moment

$$M_{x(h)} = \frac{K_h}{a^2}\sum_i \Gamma_i\,\eta_i^2\sin\eta_i\frac{x}{a}, \tag{9}$$

für das in Ringrichtung wirkende Moment

$$M_{\varphi(h)} = \mu M_{x(h)}, \tag{10}$$

für die (zur Bestimmung der Randkraft dienende) Schubkraft:

$$Q_{(h)} = \frac{K_h}{a^2}\sum_i \Gamma_i\,\eta_i^3\cos\eta_i\frac{x}{a}. \tag{11}$$

Die Normalkräfte sind in axialer Richtung nach Punkt 6.1.2, in Ringrichtung durch die Formel

$$N_{\varphi(h)} = \frac{D_h}{a}\,w_h = \frac{D_h}{a}\sum_i \Gamma_i\sin\eta_i\frac{x}{a} \tag{12}$$

zu berechnen.

5.2 *Balken-Hauptsystem*

5.2.1 *Verschiebungen in radialer Richtung*

Bei der Ermittlung der Verformung der stabartigen Rippen senkrecht zu ihrer Achse sind folgende Einflüsse zu berücksichtigen:

— die ungleichmäßige Temperaturverteilung entlang der Rippenhöhe hat das thermische Biegemoment M_T zur Folge, woraus die radiale Verschiebung durch trigonometrische Reihenentwicklung sich zu

$$w_{T\Delta(f)} = \frac{4l^2}{\pi^3} \frac{M_{T(f)}}{K_f} \sum \frac{1}{i^3} \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{13}$$

ergibt;

— die vertikale Vorspannkraft V wirkt durch die Ausmittigkeit r_Δ zur Rippenachse, was einem Vorspannmoment der Größe

$$M_{v(f)} = -Vr_\Delta \tag{14}$$

entspricht. Die zugehörige Verschiebung kann nach (13) berechnet werden,

— die aus der Umwickelung stammende waagerechte Vorspannkraft W je Längeneinheit übt den gleichmäßig verteilten Druck

$$s = 2W \sin \frac{\omega}{2} \tag{15}$$

auf die Rippenkante aus, womit die Verschiebung sich durch vierfache Integration

$$w_{w(f)} = \frac{4l^4}{\pi^5} \frac{s}{K_f} \sum_i \frac{1}{i^5} \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{16}$$

bestimmen läßt.

5.2.2 *Verschiebungen in axialer Richtung*

Die axialen Verschiebungen können wie unter Punkt 5.1.2 bestimmt werden. Es sind dabei folgende Lasten zu berücksichtigen:

— der Innendruck, der die Rippe durch den »Deckelzug« in Anspruch nimmt (vgl. Formel 8)

$$N_{p(f)} = \frac{D_f}{2a\pi D_h + kD_f} \frac{\left(a - \frac{h}{2}\right)^2}{2a} p\,; \tag{17}$$

— die aus gleichmäßiger Erwärmung stammende Normalkraft N_T

— die vertikale Vorspannkraft V, die nach Punkt 5.2.1 als zentrisch angenommen werden kann.

5.2.3 *Schnittkräfte*

Bei Ermittlung der Verformungen sind die statischen Größen schon bekannt. Ermittelt werden muß noch zusätzlich die jeweilige Schubkraft, die sich durch Differenzieren zu

$$Q_{(f)} = \frac{4}{l} M_{(f)} \sum_i \cos \eta_i \frac{x}{a} \tag{18}$$

ergibt.

Es treten in der Rippe natürlich keine Schnittkräfte in Umfangsrichtung auf.

6. Einfluß der Kontaktkräfte

6.1 *Kreiszylinder-Hauptsystem*

6.1.1 *Auflösung der Grundgleichung*

Es sei zunächst der Einfluß einer einzigen Rippe untersucht, der mit dem Kontakt-Kräftesystem (q, t) entlang der Erzeugenden $\varphi = 0$ simuliert wird. In diesem Fall verschwindet die Kreissymmetrie und bei der mathematischen Behandlung ist von der allgemeinen Donnel—Kármán—Jenkins'schen Differentialgleichung [5]

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^4 w_{(h)} + 4\lambda^4 a^4 \frac{\partial^4 w_{(h)}}{\partial x^4} = 0 \tag{19}$$

auszugehen. Ihre Auflösung wird in der Form

$$w_{(h)} = \sum_i A e^{m\varphi} \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{20}$$

gesucht, die sowohl die Gleichung, als auch die Rendbedingungen erfüllt. Zunächst sei nur ein einziges Glied der Fourierschen Reihe behandelt.

Für die charakteristische Gleichung kann

$$(m^2 - \eta^2)^4 + 4\lambda^4 \eta^4 = 0 \tag{21}$$

geschrieben werden, wo die komplexen Wurzeln

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 + i\beta_1 & m_5 &= -m_1 \\ m_2 &= \alpha_1 - i\beta_1 & m_6 &= -m_2 \\ m_3 &= \alpha_2 + i\beta_2 & m_7 &= -m_3 \\ m_4 &= \alpha_2 - i\beta_2 & m_8 &= -m_4 \end{aligned}$$

sind.

Die Beiwerte α und β stellen reelle, positive Größen dar und sind aus den Zusammenhängen

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\eta\lambda}{2}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\eta}{\lambda}\right)^2+1}+\left(1+\frac{\eta}{\lambda}\right)\right]}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\eta\lambda}{2} \tag{22}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\eta\lambda}{2}\left[\sqrt{\left(1-\frac{\eta}{\lambda}\right)^2+1}-\left(1-\frac{\eta}{\lambda}\right)\right]}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\eta\lambda}{2} \tag{23}$$

zu ermitteln. Es folgt aus der Ableitung der DKJ-Differentialgleichung, daß für den Dämpfungsbeiwert

$$\lambda = \sqrt{\frac{a}{h}}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)} = a\lambda^* \tag{24}$$

anzusetzen ist.

Nach Weglassen der Glieder mit Potenzen positiven Vorzeichens, erhält man schließlich durch mathematische Umformung für die radialen Verschiebungen:

$$w_{(h)} = [A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\cos\beta_1\varphi + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\sin\beta_1\varphi + A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\cos\beta_2\varphi + A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\sin\beta_2\varphi]\sin\eta\frac{x}{a}. \tag{25}$$

6.1.2 *Verformungsgrößen*

Die Bestimmungsgleichung für die axiale Verschiebung lautet

$$\frac{\partial^3 u_{(h)}}{\partial x^3} = -\frac{1}{4\lambda^4 a^3}\left(a^4\frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial^4 x\,\partial^2\varphi} + 2a^2\frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial^2 x\,\partial^4\varphi} + \frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial\varphi^6}\right) \tag{26}$$

und führt zur Formel

$$\begin{aligned} u_{(h)} = \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{ & A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\cos\beta_1\varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\sin\beta_1\varphi\right] + \\ & + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\cos\beta_1\varphi + \sin\beta_1\varphi\right] - \\ & - A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\cos\beta_2\varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\sin\beta_2\varphi\right] - \\ & - A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\cos\beta_2\varphi + \sin\beta_2\varphi\right]\Bigg\}\cos\eta\frac{x}{a}. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Verschiebung in Umfangsrichtung kann mit Hilfe des Zusammenhanges

$$\frac{\partial^4 v_{(h)}}{\partial x^4} = \frac{1}{4\lambda^4 a^4}\left(\frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial \varphi^7} + 4a^2 \frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^2 \partial \varphi^5} + 5a^4 \frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^4 \partial \varphi^3} + 2a^6 \frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^6 \partial \varphi}\right) \tag{28}$$

ermittelt werden und ergibt:

$$\begin{aligned} v_{(h)} = \frac{1}{2\eta\lambda}\Bigg[\Bigg[& A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[\alpha_1 - \beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right)\right]\cos\beta_1\varphi + \left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right) + \beta_1\right]\sin\beta_1\varphi\right\} + \\ & + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[-\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right) - \beta_1\right]\cos\beta_1\varphi + \left[\alpha_1 - \beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1\right)\right]\sin\beta_1\varphi\right\} - \\ & - A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[\alpha_2 - \beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1\right)\right]\cos\beta_2\varphi + \left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1\right) + \beta_2\right]\sin\beta_2\varphi\right\} - \\ & - A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[-\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1\right) - \beta_2\right]\cos\beta_2\varphi + \left[\alpha_2 - \beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1\right)\right]\sin\beta_2\varphi\right\}\Bigg]\Bigg]\sin\eta\frac{x}{a}. \end{aligned} \tag{29}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten wird schließlich auch der Ausdruck für die Verdrehung in Umfangsrichtung benötigt, der nach Differenzieren

$$\begin{aligned} \varkappa = \frac{\partial w_{(h)}}{\partial \varphi} = \Big[& - A_1 e^{-\alpha_1\varphi}(\alpha_1\cos\beta_1\varphi + \beta_1\sin\beta_1\varphi) + \\ & + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}(\beta_1\cos\beta_1\varphi - \alpha_1\sin\beta_1\varphi) - \\ & - A_3 e^{-\alpha_2\varphi}(\alpha_2\cos\beta_2\varphi + \beta_2\sin\beta_2\varphi) + \\ & + A_4 e^{-\alpha_2\varphi}(\beta_2\cos\beta_2\varphi - \alpha_2\sin\beta_2\varphi)\Big]\sin\eta\frac{x}{a} \end{aligned} \tag{30}$$

ergibt.

6.1.3 *Schnittkräfte*

Die allgemeinen Formeln für die Schnittkräfte unter Einwirkung von einem Glied der entlang einer Erzeugenden in trigonometrische Reihe entwickelten Kontaktlast lauten für das axiale Moment

$$\begin{aligned} M_{x(h)} = - K_h \frac{\partial^2 w_{(h)}}{\partial x^2} = i^2\pi^2\frac{K_h}{l^2}(A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\cos\beta_1\varphi + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\sin\beta_1\varphi + \\ + A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\cos\beta_2\varphi + A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\sin\beta_2\varphi)\sin\eta\frac{x}{a}, \end{aligned} \tag{31}$$

für das Moment in Ringrichtung

$$M_{\varphi(h)} = -\frac{K_h}{a^2}\eta\lambda\left\{A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\cos\beta_1\varphi+\sin\beta_1\varphi\right]+\right.$$
$$+A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left[-\cos\beta_1\varphi+\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\sin\beta_1\varphi\right]+$$
$$+A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\cos\beta_2\varphi+\sin\beta_2\varphi\right]+$$
$$\left.+A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left[-\cos\beta_2\varphi+\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\sin\beta_2\varphi\right]\right\}\sin\eta\frac{x}{a}, \tag{32}$$

für die axiale Normalkraft

$$N_{x(h)} = \frac{D_h}{2a}\frac{\eta}{\lambda}\left\{-A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\cos\beta_1\varphi-\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\sin\beta_1\varphi\right]-\right.$$
$$-A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\cos\beta_1\varphi+\sin\beta_1\varphi\right]+$$
$$+A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\cos\beta_2\varphi-\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\sin\beta_2\varphi\right]+$$
$$\left.+A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\cos\beta_2\varphi+\sin\beta_2\varphi\right]\right\}\sin\eta\frac{x}{a}, \tag{33}$$

sowie für die in Ringrichtung wirkende Normalkraft

$$N_{\varphi(h)} = \frac{D_h}{2a}\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2\left[-A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\sin\beta_1\varphi+A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\cos\beta_1\varphi+\right.$$
$$\left.+A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\sin\beta_2\varphi-A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\cos\beta_2\varphi\right]\sin\eta\frac{x}{a}. \tag{34}$$

Schließlich ist die Formel für die Schubkraft

$$Q_{\varphi(h)} = \frac{K_h}{a^3}\left(\frac{\partial^3 w_{(h)}}{\partial\varphi^3}+2a^2\frac{\partial^3 w_{(h)}}{\partial x^2\,\partial\varphi}\right) =$$
$$= \frac{K_h}{a^3}\eta\lambda\left[\left[A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)+\beta_1\right]\cos\beta_1\varphi+\left[-\alpha_1+\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]\sin\beta_1\varphi\right\}+\right.\right.$$
$$+A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[\alpha_1-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]\cos\beta_1\varphi+\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)+\beta_1\right]\sin\beta_1\varphi\right\}+ \tag{35}$$
$$+A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]\cos\beta_2\varphi+\left[-\alpha_2+\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]\sin\beta_2\varphi\right\}+$$
$$\left.\left.+A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[\alpha_2-\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]\cos\beta_2\varphi+\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]\sin\beta_2\varphi\right\}\right]\right]\cdot\sin\eta\frac{x}{a}.$$

6.1.4 *Ermittlung der Integrationskonstanten*

Die Integrationskonstanten A_1, A_2, A_3 und A_4 gestatten die Erfüllung von vier Randbedingungen entlang der Erzeugenden. Am einfachsten sind folgende wirklichkeitsnahen Anforderungen zu stellen:

— Die Kontaktlasten und die Schnittkräfte bilden ein Gleichgewichtssystem. Die Aussage kann in radialer Richtung als

$$-q \sin \eta \frac{x}{a} = 2Q_{\varphi(h)}, \tag{36}$$

in axialer Richtung als

$$-t \sin \eta \frac{x}{a} = 2N_{x(h)} \tag{37}$$

formuliert werden. Die Verdoppelung der Schnittkräfte wird dadurch bedingt, daß sich die angreifende Kontaktlast auf zwei Schalenhälften verteilt.

— Die Kontinuität der Schalenfläche in Umfangsrichtung muß verhalten bleiben, demzufolge

$$v_{(h)} = 0 \tag{38}$$

ist.

— Die Zylinderschale verformt sich symmetrisch zur Angriffslinie der Kontaktlast. Es dürfen damit hier keine Verzerrungen erfolgen

$$\frac{\partial u_{(h)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_{(h)}}{\partial x} = 0\,, \tag{39}$$

da aber $v_{(h)} = 0$ ist, reduziert sich die Randbedingung zu

$$\frac{\partial u_{(h)}}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{40}$$

— Es folgt gleichfalls aus den Symmetrierverhältnissen, daß die Eindrückung der Zylinderschale entlang der untersuchten Erzeugenden mit keiner Ringverdrehung verbunden ist

$$\varkappa = 0. \tag{41}$$

Die angeführten Randbedingungen können in ein lineares Gleichungssystem zusammengefaßt werden, dessen Lösung die Integrationskonstanten für den Fall q bzw. t ergibt.

1. a.
$$A_1\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)+\beta_1\right]+A_2\left[\alpha_1-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]+$$
$$+A_3\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]+A_4\left[\alpha_2-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]=-\frac{a^3}{2K_h\eta\lambda},$$

1. b.
$$-A_1-A_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+A_3+A_4\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)=-\frac{a}{D_h}\frac{\lambda}{\eta},$$

2.
$$A_1\left[\alpha_1-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]+A_2\left[-\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)-\beta_1\right]+$$
$$+A_3\left[-\alpha_2+\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]+A_4\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]=0,$$

3.
$$-A_1\left[\alpha_1+\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]-A_2\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)-\beta_1\right]+$$
$$+A_3\left[\alpha_2+\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]+A_4\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)-\beta_2\right]=0,$$

4.
$$-A_1\alpha_1+A_2\beta_1-A_3\alpha_2+A_4\beta_2=0.$$

Die Gleichung 1.a bezieht sich auf die radiale Kontaktlast q, 1.b dagegen auf die axiale Kontaktlastkomponente t.

Die Gleichungen 2, 3 und 4 sind in beiden Fällen identisch.

Es sei nachdrücklich betont, daß die ermittelten Werte Funktionen von η bzw. i sind und so für jedes Glied der Fourierschen Reihe neu bestimmt werden müssen.

6.1.5 *Berücksichtigung aller Rippen*

Übersichtshalber wurde bislang nur die von der Erzeugenden $\varphi = 0$ ausgehende Störung betrachtet. Die somit gewonnenen Ergebnisse bedürfen aber Korrekturen in zweifachem Sinne.

Erstens darf man nicht vergessen, daß von der Angriffslinie der Kontaktlast zwei Störungen ausgehen: die eine in positiver, die andere in negativer Umfangsrichtung. Die beiden Einflüsse überlagern sich.

Zweitens ist dem Umstand Rechnung zu tragen, daß aus der Symmetrie der Durchbildung folgend, alle Rippen in gleichem Maße belastet sind und auf die untersuchte Stelle einwirken. Die Summierung kann sinngemäß durch Anwendung des Maxwellschen Satzes erfolgen.

6.2 *Balken-Hauptsystem*

6.2.1 *Ermittlung der Bettungsziffer*

Unter Einwirkung einer nach außen gerichteten Kontaktlast wird die Rippe gegen die nachgiebige Ringwickelung gedrückt. Sind die Abstände zwischen den einzelnen Rippen gering, so kann die Verformung nach der Membrantheorie (Kesselformel) berechnet werden. Bei einer spezifischen Spannstahlfläche F_w beträgt die Formänderung

$$\varepsilon_w = \frac{a - \frac{h}{2}}{E_w F_w} p \,, \tag{42}$$

was einer Schwerpunktverschiebung von

$$w_{(f)} = \varepsilon_w \left(a - \frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right) \tag{43}$$

entspricht. Die Bettungsziffer kann somit definitionsgemäß als

$$c = \frac{E_w F_w}{\left(a - \frac{h}{2} \right) \left(a + \frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right)} \tag{44}$$

angegeben werden.

6.2.2 *Differentialgleichung des gekrümmten Balkens*

Bei dem zum Hauptsystem gewählten Balken erfolgt unter Einwirkung der Betriebslasten (insbesondere infolge der Temperaturgefälle sowie der Ausmittigkeit der axialen Vorspannung) eine Durchbiegung. Wird die Untersuchung nun mit Rücksicht auf die Kontaktlasten durchgeführt, so ist dem Umstand Rechnung zu tragen, daß der Träger schon über die Anfangskrümmung ϱ verfügt.

Ohne uns hier mit der mathematischen Ableitung [6] auseinanderzusetzen, geben wir die entsprechende Gleichung als

$$\frac{d^4 w_{(f)}}{dx^4} + \frac{2}{\varrho^2} \frac{d^2 w_{(f)}}{dx^2} + c^* w_{(f)} = \frac{q}{K_f} \sin \eta \frac{x}{a} \tag{45}$$

an, wo unter $K_f = E_f J_f$ verstanden wird und die »erweiterte« Bettungsziffer

$$c^* = \frac{c}{K_f} + \frac{1}{\varrho^4} \tag{46}$$

darstellt. Im folgenden verfährt man ähnlich dem Punkt 5.1.1 und sucht die Auflösung mit dem Ansatz

$$w_{(f)} = \sum_i q_i \Omega_i \sin \eta_i \frac{x}{a} . \tag{47}$$

Der Faktor Ω_i wird durch Substituieren ermittelt und ist

$$\Omega_i = \frac{1}{K_f \left[\left(\frac{\eta_i}{a} \right)^4 - \frac{2}{\varrho^2} \left(\frac{\eta_i}{a} \right)^2 + c^* \right]} . \tag{48}$$

Die Sinusfunktion entspricht den dem gelenkigen Verbund entsprechenden Randbedingungen.

6.2.3 *Schnittgrößen aus der radialen Verschiebung*

Wegen der einfachen Schreibweise empfiehlt es sich die Hilfsfunktion

$$\Omega_i^* = K_f \left[\left(\frac{\eta_i}{a} \right)^2 - \frac{1}{\varrho^2} \right] \Omega_i \tag{49}$$

einzuführen. Damit können die Schnittkräfte in folgender Form geschrieben werden:

$$M_{(f)} = - K_f \left(\frac{d^2 w_{(f)}}{dx^2} + \frac{w_{(f)}}{\varrho^2} \right) = \sum_i q_i \Omega_i^* \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{50}$$

und

$$Q_{(f)} = \frac{\pi}{l} \sum_i i q_i \Omega^* \cos \eta_i \frac{x}{a} . \tag{51}$$

6.2.4 *Einfluß der axialen Kontaktlast*

Unter Einwirkung einer Längskraft kommt die besondere Art der Lagerung nicht zur Geltung. Die Untersuchung kann gleich Punkt 5.2.2 durchgeführt werden.

Die axiale Verschiebung $u_{(f)}$ wird durch Integration der in eine Sinusreihe entwickelten Kontaktlast berechnet.

7. Ermittlung der wirklichen Kontaktlastgrößen

Die Verschiebungen der zwei Hauptsysteme wurden in der Tafel II übersichtlich zusammengestellt. Die hier angeführten Werte sind durch die einwirkenden Betriebslasten bzw. Kontaktlastkomponenten q und t der Größe 1 bedingt.

Tafel II

Übersicht der Trägerverformungen

Einfluß		Hauptsystem			
		Zylinderschale		Balken	
		radial	axial	radial	axial
Betriebslasten	Innendruck (p)	$w_{p(h)}$	$u_{p(h)}$	0	$u_{p(f)}$
	gleichmäßige Erwärmung (T_0)	$w_{T0(h)}$	$u_{T0(h)}$	0	$u_{T0(f)}$
	ungleichmäßige Erwärmung ($T_\triangle$)	$w_{T\triangle(h)}$	0	$w_{T\Delta(f)}$	0
Kontaktlasten	radiale Komponente ($q = 1$)	$\Sigma\Sigma w_{q(h)}$	$\Sigma\Sigma u_{q(h)}$	$w_{q(f)}$	0
	axiale Komponente ($t = 1$)	$\Sigma\Sigma w_{t(h)}$	$\Sigma\Sigma u_{t(h)}$	0	$u_{t(f)}$
Vorspannkräfte	axiale Vorspannung (V)	0	0	$w_{v(f)}$	$u_{v(f)}$
	tangentiale Umwickelung (W)	0	0	$w_{w(f)}$	0

Alle Angaben beziehen sich auf das Glied i der trigonometrischen Reihenentwicklung.

Die tatsächlichen Werte der Kontaktlast können aufgrund der Verträglichkeitsbedingung bestimmt werden. Die Kontinuität des Tragwerkes erfordert nämlich, daß die Verformungen der beiden Bauteile sowohl in axialer, als auch in radialer Richtung übereinstimmen. Die Überlegung führt zu einem System linearer Bestimmungsgleichungen:

$$w_{p(h)_i}+w_{T_0(h)_i}+w_{T\Delta(h)_i}+q_i\,\Sigma\Sigma\,w_{q(h)_i}+t_i\,\Sigma\Sigma\,w_{t(h)_i}= \\ =w_{T\Delta(f)_i}+q_i\,w_{q(f)_i}+w_{v(f)_i}+w_{w(f)_i}, \tag{52}$$

$$u_{p(h)_i}+u_{T_0(h)_i}+q_i\,\Sigma\Sigma\,u_{q(h)_i}+t_i\,\Sigma\Sigma\,u_{t(h)_i}= \\ =u_{p(f)_i}+u_{T_0(f)_i}+t_i\,u_{t(f)_i}+u_{v(f)_i}, \tag{53}$$

die durch Einführung der Hilfswerte

$$R_i=\Phi_f\,[w_{T\Delta(f)_i}+w_{v(f)_i}+w_{w(f)_i}]-\Phi_h[w_{p(h)_i}+w_{T_0(h)_i}+w_{T\Delta(h)_i}] \tag{54}$$

$$R_{qi}=\Sigma\,\Sigma\,w_{q(h)_i}-w_{q(f)_i}, \tag{55}$$

$$R_{t_i}=\Sigma\,\Sigma\,w_{t(h)_i}, \tag{56}$$

bzw.

$$X_i=\Phi_f\,[u_{p(f)_i}+u_{T_0(f)_i}+u_{v(f)_i}]-\Phi_h\,[u_{p(h)_i}+u_{T_0(h)_i}], \tag{57}$$

$$X_{q_i}=\Sigma\,\Sigma\,u_{q(h)_i}, \tag{58}$$

$$X_{t_i}=\Sigma\,\Sigma\,u_{t(h)_i}-u_{t(f)_i} \tag{59}$$

für die Kontaktlastkomponenten

$$q_i = \frac{R_i X_{ti} - X_i R_{ti}}{R_{qi} X_{ti} - X_{qi} R_{ti}} \tag{60}$$

und

$$t_i = \frac{X_i R_{qi} - R_i X_{qi}}{X_{ti} R_{qi} - R_{ti} X_{qi}} \tag{61}$$

ergeben. Mit dem Faktor Φ_h bzw. Φ_f wird nach der Theorie von Dischinger der Endwert von Schwinden und Kriechen berechnet. Ihr Einfluß ist in die Berechnung unbedingt einzubeziehen, da wegen der unterschiedlichen Temperaturzustände der Bauteile auch daraus Zwangskräfte entstehen.

In Kenntnis von q und t können die wirklichen Schnittkräfte aufgrund des Überlagerungsprinzips berechnet werden. Da alle statischen und Verformungsgrößen in trigonometrischen Reihen angegeben sind, muß der Rechengang selbstverständlich für jede Periode, d. h. für jedes Glied wiederholt werden. Dieser Umstand hat einen beachtlichen Mehraufwand an Rechenarbeit zur Folge, obwohl dank der guten Konvergenz schon der Beitrag des vierten Gliedes ($i = 7$) erfahrungsgemäß unwesentlich ist.

8. Ermittlung der wirksamen Vorspannkraft

Abschließend müssen wir uns nochmals mit den Werten der Vorspannkräfte V und W befassen, die bislang als Ausgangsdaten galten. Diese Annahme trifft aber nur in erster Näherung zu. In Wirklichkeit erleiden nämlich die eingetragenen Vorspannkräfte infolge der Wärmeausdehnung der Litzen eine Spannungsabnahme, die mit Rücksicht auf die örtlichenTemperaturänderungen eindeutig berechnet werden kann.

Viel schwieriger ist dem Umstand Rechnung zu tragen, daß sich der Behälter unter Betriebsumständen vergrößert. Die Erscheinung ruft ein zusätzliches Nachspannen der Stähle hervor, was, wie in [7] eingehend behandelt worden ist, eine grundsätzliche Umlagerung der Kräfte zur Folge hat. Um den sekundären Vorgang rechnerisch zu erfassen, sind daher die Vorspannkräfte nach den Formeln

$$V = -\left[V^* + E_v F_v \Phi_f \left(2\frac{u_{(f)x=0}}{l} - \alpha T_v\right)\right], \tag{62}$$

bzw.

$$W = -\left[W^* + E_w F_w \Phi_f \left(\frac{w_{(f)\,x=\frac{l}{2}}}{a + \frac{h}{2} + f} - \alpha T_w\right)\right] \tag{63}$$

zu ermitteln. Die Größen w und u sind am Anfang des Rechenganges unbekannt. Das Endergebnis kann somit nur durch sukzessive Approximation erzielt werden.

*

Die obigen Untersuchungen wurden am Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen der TU Budapest durchgeführt. Der Verfasser ist für die vielfachen Anregungen und ständige Unterstützung den Herren Prof. Dr.-Ing. E. Bölcskei sowie Dr.-Ing. J. Szalai zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

SCHRIFTTUM

1. Sebők, F.: Beitrag zur Abschirmwirkung gerissener Betonschilde. Kerntechnik, (1970), 11.
2. Sebők, F.: Beitrag zur Berechnung kreiszylindrischer Behälter unter Einwirkung von Gamma- und Neutronenstrahlung. *Bautechnik* (1965), 5.
3. Bremer, F.: Multi-layer Pressure Vessel. *Krupp Technische Mitteilungen* (1967), 12.
4. Sebők, F.—Stein, B.: Gedanken zur Weiterentwicklung von Sicherheitsbehältern aus Fertigteilen. *Bautechnik*, (1971).
5. Ramaswamy, G. S.: Design and Construction of Concrete Shell Roofs. McGraw-Hill, New York 1968.
6. Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Springer, Berlin 1921.
7. Sebők, F.—Tassi, G.: Auswirkungen der Vorspannung auf die Rißbeschränkung bei thermisch beanspruchten dickwandigen Gefäßen. 6. *FIP-Kongreß*, Prag 1970.

Design Analysis for a Hinged Circular Cylinder with Axial Ribs by the Fourier Series Method. Research carried out at the Chair for Reinforced Concrete Structures of the Budapest Technical University has led to the conclusion that thickwalled prestressed concrete vessels not only involve difficulties in calculating but are basically uneconomical, since large dimensions entrain increased thermal stresses. Solution is sought for by applying disengaged structures, exempt from significant thermal gradients and though of sufficient rigidity. Research work is focused on circular cylindrical shells with axial ribs. Rib interstices are filled out with a good shielding and heat insulating material without inherent strength. Prestress is due to axial wires led in ducts in the ribs and tangential ones wound around rib crests. A structural analysis has been worked out for the vessel basing on the conventional energy method. As primary members the hinged short circular cylindrical shell and the beam supported elastically on the tangential prestressing wires, are chosen. All loads are expanded in Fourier series. Equality of displacements yield for each wave period a system of linear equations.

Статическое исследование цилиндрической оболочки с продольной жесткостью и с шарнирным круговым краем, применяя ряды Фурье. Укрепленная аксиальными ребрами круговая цилиндрическая оболочка является оптимальной формой напорного резервуара из напряженного бетона, работающего под тепловой нагрузкой. Для ее применения сначала необходимо было разработать подходящую для этой цели методику расчета, так как эта проблема в литературе по данной теме еще не рассматривалась, или же считалась нерешимой. Рассматриваемая в данной статье методика расчета исходит из существующих методов расчета соотношений усилий. Все статические и деформационные данные разлагаются в тригонометрические ряды. В качестве основной системы выбраны при этом неопределенные несущие конструкции, низкие цилиндрические оболочки, а также эластично прилегающие к кольцевой оболочке балки. Система контактных усилий (неизвестная) была определена на основе условий совместимости. Исходя из данных радиальных и аксиальных компонентов, можно определить действительные размеры поперечных сечений и деформаций. Методика позволяет учитывать также первичные воздействия при расчетах, а это имеет большое значение, если учитывать, что при рабочих условиях имеет место нагрев конструкционных частей резервуара.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3–4), pp. 433–439 (1972)

ON THE DETERMINATION OF THE CONSTANTS OF A CONSOLIDATING MEDIUM

R. DZIĘCIELAK*

[Manuscript received: August 12 1971]

In this paper the method of calculation for the determination of the elastic coefficients of the theory of consolidation formulated by BIOT is described. It is shown that to these calculations the known physical properties of solid are sufficient.

1. Introduction

The basis of our considerations is the theory of the deformation of a porous elastic solid containing a viscous compressible fluid formulated by M. A. BIOT [1]. The physical relations for the isotropic case are

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + (A\varepsilon + Q\Theta)\,\delta_{ij}\,, \tag{1.1}$$

$$\sigma = Q\varepsilon + R\Theta, \tag{1.2}$$

in which the σ_{ij} are components of the stress tensor carried by the elastic skeleton, ε_{ij} are components of the skeleton strain tensor, $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$ is the skeleton dilatation, Θ is the fluid dilatation, and $\sigma = -pf$ is the reduced pressure of the fluid (p is the pressure in the fluid and f the porosity of the medium). A, N, Q and R are constants of the medium. Thus, we have to know four material constants for the determination of the stress-strain relations.

2. Analysis of the constants of the medium

The physical interpretation of the constants of the consolidating medium is given by BIOT and WILLIS [2]. This paper is the basis of our own considerations. In this paper the authors proposed to calculate the constants of the medium from the following formulae:

* Dr. ing. R. Dzięcielak, ul. Rogalińskiego 7, Poznań, Poland.

$$N = \mu,$$

$$A = \frac{\gamma/\varkappa + f^2 + (1-2f)(1-\delta/\varkappa)}{\gamma+\delta-\delta^2/\varkappa} - \frac{2}{3}\mu,$$

$$Q = \frac{f(1-f-\delta/\varkappa)}{\gamma+\delta-\delta^2/\varkappa}, \tag{2.1}$$

$$R = \frac{f^2}{\gamma+\delta-\delta^2/\varkappa}.$$

From the first of the relations it is to be seen (2.1) that the constant N is the equivalent of shear modulus μ of the bulk material which therefore can be obtained directly. The remaining constants A, Q, R are calculated from the three measured parameters:

— coefficient of jacketed compressibility $\varkappa$;
— coefficient of unjacketed compressibility δ;
— coefficient of fluid content γ for an unjacketed compressibility test.

The above-mentioned measured parameters and the shear modulus (modulus of elasticity and Poisson's ratio) should be determined by experiments.

We shall assume, that the next properties of the medium (solid) are known:

1) the modulus of elasticity E and Poisson's ratio ν;
2) the modulus of volume elasticity K_g of the grains of solid;
3) the compressibility c of the fluid filling the pores of the solid.

These properties of the consolidating medium will be used to calculate the measured parameters $\varkappa$, δ, γ.

2.1 *The coefficient of jacketed compressibility* [2]

This coefficient is defined by

$$\varkappa = -\frac{\varepsilon}{p}, \tag{2.2}$$

where p is the outside hydrostatic pressure acting on the jacketed sample connected to the atmosphere through a tube. From the definition (2.2) one can see that

$$\varkappa = \frac{1}{K}, \tag{2.3}$$

where

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2.4}$$

is the modulus of volume elasticity of the solid. By substituting formula (2.4) into formula (2.3) we obtain

$$\varkappa = \frac{3\,(1-2\nu)}{E}\,. \tag{2.5}$$

The modulus of elasticity in formula (2.5) is connected with the oedometer modulus of elasticity E_e by relation [8],

$$E = \frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu}\,E_e\,. \tag{2.6}$$

One can determine the coefficient $\varkappa$ by measuring the volume change ΔV for a sample under the action of hydrostatic pressure. In this case the dilatation of a sample is

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}\,, \tag{2.7}$$

where V is the initial volume of the sample. This test can be make in a triaxial apparatus where the measuring of the volume change of the sample is possible (for details see [3]).

The coefficient $\varkappa$ in an oedometer can also be determined. In this case the deformation of the sample is one-dimensional, therefore, the strains are

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3)]\,,\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\,[\sigma_2 - \nu(\sigma_1+\sigma_3)] = 0\,,\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\,[\sigma_3 - \nu(\sigma+\sigma_2)] = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

From Eqs (2.8) we obtain the relative volume change as

$$\vartheta_1 = \varepsilon_1 = \frac{p}{E}\cdot\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu}\,, \tag{2.9}$$

where p is the surface load. In the triaxial apparatus the relative volume change is

$$\vartheta_0 = 3(1-2\nu)\cdot\frac{p}{E}\,, \tag{2.10}$$

where p is the hydrostatic pressure. If we know the strain ε_1 of the sample in the oedometer, we can determine dilatation ε. From the formulae (2.9) and (2.10) we find

$$\varepsilon = \vartheta_0 = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu}\varepsilon_1 \tag{2.11}$$

and from the definition (2.2) one can calculate the coefficient $\varkappa$.

2.2 *The coefficient of unjacketed compressibility* [2]

This coefficient is defined by

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{p} . \tag{2.12}$$

"In the unjacketed compressibility test, a sample of the material is immersed in a fluid to which is applied a pressure p. When the fluid pressure has completely penetrated the pores, the dilatation of the sample is then measured" [2]. In this case the volume change of a sample is derived by the compressibility of grains of a solid only. Thus this indicates that the coefficient is the equivalent of the compressibility of grains of a solid skeleton. The coefficient of unjacketed compressibility was determined by FATT [6] for a sandstone ($\delta = 3{,}1 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg). The author used high pressure (140.8 and 493.0 at) and stated that this compressibility is the possible measurable minimum. It is clear that in a common laboratory of soil mechanics it is not possible to make this test.

If we know the mineral composition of the soil and the compressibility of grains, we can determine the coefficient of unjacketed compressibility. If the solid contains two kinds of grains with compressibility C_1 and C_2, the coefficient

$$\delta = a_1 C_1 + a_2 C_2 , \tag{2.13}$$

where a_1 and a_2 are the grain contents [5]. Since $a_2 = 1 - a_1$

$$\delta = a_1 (C_1 - C_2) + C_2 .$$

If the solid contains several kinds of grains with compressibility $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$, one can write the volume change as

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i ,$$

where

$$\Delta V_i = \frac{p}{K_i} V_i ,$$

and

$$\Delta V = p \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{K_i},$$

or

$$\frac{\Delta V}{pV} = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{V} \frac{1}{K_i},$$

where

$$\frac{V_i}{V} = a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \frac{1}{K_i} = C_i, \frac{\Delta V}{pV} = \delta,$$

and we obtain

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} a_i C_i. \tag{2.14}$$

The compressibility of grains is known and it is given in the literature by many authors. For example FLORIN [7] gives the compressibility of grains of the solid as 10^{-5} cm²/kg, BISHOP and HENKEL [3] — $(1{,}42 + 2{,}85) \cdot 10^{-6}$ cm²/kg. FATT [5] gives the compressibility of the quartz, feldspars, and rock fragments as $2{,}28 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg.

2.3 *The coefficient of fluid content for an unjacketed compressibility test* [2]

This coefficient is defined by

$$\gamma = \frac{f(\varepsilon - \Theta)}{p}. \tag{2.15}$$

When the material of porous matrix is homogeneous and isotropic and the fluid completely saturates the pores, the coefficient of fluid content γ can be determined from the relation

$$\gamma = f(c - \delta), \tag{2.16}$$

where c is the fluid compressibility. The relation (2.16) results from definition (2.15). FATT [6] used the formula (2.16) for the determination of coefficient γ for sandstone.

The material constants are determined by formulae (2.1) and they depend on the measured parameters. These formulae result from the analysis of the physical relations for the individual tests (for details see [2]).

3. Calculation of the constants of consolidating medium

Conclusions

The material constants of the sandy silt and flour of sand are calculated in this part of the paper. We assume the oedometer modulus of elasticity to be $E_e = 200$ kg/cm^2, the Poisson ratio as $\nu = 0{,}3$ (see WILUN [8]), and the compressibility of water as $c = 5 \cdot 10^{-5}$ cm^2/kg (see [3], [4], [7]). The modulus of elasticity was calculated from the formula (2.6): $E = 148$ kg/cm^2. From these data can be obtained: shear modulus $N = \mu = 57$ kg/cm^2 and the coefficient of jacketed compressibility $\varkappa = 8{,}3 \cdot 10^{-3}$ cm^2/kg (from formula [2.5]). The material constants A, Q, R were calculated for the different values of the coefficient of unjacketed compressibility δ. The results are shown in Fig. 1.

Table I

The modulus of volume elasticity of grains $K_g \times 10^-$ kg/cm^2		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\delta \times 10^6$ cm^2/kg		10.0	6,7	5,0	4,0	3,3	2,9	2,5	2,2	2,0
$\gamma \times 10^6$ cm^2/kg		8.0	8,7	9,0	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,6
A	kg/cm^2	35 500	41 450	45 750	48 500	50 860	52 060	53 060	53 360	55 25
Q	kg/cm^2	8 890	10 400	11 420	12 110	12 700	13 000	13 330	13 560	13 800
R	kg/cm^2	2 220	2 600	2 860	3 030	3 170	3 250	3 330	3 390	3 450

The values of the constants of a consolidating medium only are shown in Fig. 1 for orientation. In all cases these constants should be calculated from formulae (2.1) after the determination of the measured parameters $\varkappa$, δ, γ in the way presented in this paper or from experiments (if possible).

REFERENCES

1. BIOT, M. A.: Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics* **26** (1955), 182—185
2. BIOT, M. A.—WILLIS, D. G.: The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. *Journal of Applied Mechanics* **24** (1957), 594—601
3. BISHOP, A. W.—HENKEL, D. J.: The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test. London 1957, LTD.
4. TSYTOVICH, N. A.: Soil Mechanics, 4th ed. Gosstroyizdat, 1963 (in Russian)
5. FATT, I.: Compressibility of Sandstones at Low to Moderate Pressure. *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists* **42** (1958), 1924—1957
6. FATT, I.: The Biot—Willis Elastic Coefficients for a Sandstone. *Journal of Applied Mechanics* **26**, Ser. E (1959), 296—297
7. FLORIN, V. A.: Foundamentals of Soil Mechanics. Vol. II, Leningrad, Moscow 1961 (in Russian)
8. WILUN, Z.: Wyznaczanie dopuszczalnych obciażeń gruntów. "Arkady", Warszawa 1958.

Über die Ermittelung der Festwerte eines Befestigungsstoffes. Eine Methode zur rechnerischen Ermittelung der Elastizitätskoeffizienten der von Biot ausgearbeiteten Festigungstheorie wird behandelt. Es wird nachgewiesen, daß für diese Berechnungen die Kenntnis der physischen Eigenschaften des Körpers genügt.

Определение постоянных некоторого усилителя. Излагается методика расчета, служащая для определения постоянных упругости теории прочности Biot, далее дается доказательство того, что для данных расчетов достаточно знать физические свойства рассматриваемого вещества.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 441—451 (1972)

THERMAL STRESSES IN A FINITE TRANSVERSELY ISOTROPIC HOLLOW CIRCULAR CYLINDER HEATED ON THE OUTER CURVED SURFACE AND WITH ENDS IN CONTACT WITH SMOOTH INSULATING PLATES

D. K. DEY* and A. K. DAS**

[Manuscript received June 4, 1971]

In this paper thermal stress has been obtained in the case of a finite transversely isotropic hollow cylinder heated symmetrically on a part of the outer curved surface of the cylinder, while on the inner surface radiation takes place. All stresses and displacements are obtained in series form.

1. Introduction

The thermal stress problem of a hollow cylinder of finite length with prescribed temperature on the curved surface was considered by MELAN and PARKUS [1]. The solution obtained by them was in approximate manner only. DAS [2] (1962) obtained the solution of the thermo-elastic problem of a circular cylinder with constant temperature on the plane ends while the curved surface was enclosed in a smooth rigid core impervious to heat. Recently CHATTOPADHYA [3] (1966) has considered the thermo-elastic problem of solid isotropic cylinder under prescribed temperature on the curved surface and the plane ends in contact with smooth insulating plates. He has shown that all the boundary conditions are satisfied exactly. The object of this paper is to find the exact solution of the thermo-elastic problem of a circular hollow transversely isotropic cylinder having the temperature prescribed on the outer curved surface, the ends being in contact with smooth insulating plates.

2. Method of solution

Assuming the axis of the cylinder as the axis of z, in the cylinderical polar co-ordinates (r, θ, z), the displacement vector will have components (u, o, w) and the non-vanishing components of the stress tensor will be σ_r, σ_θ, σ_z and τ_{rz}.

* D. K. Dey, Department of Mathematics, Rourkela Science College, Rourkela — 2., India.

** A. K. Das, Department of Mathematics, Regional Engineering College, Rourkela — 8., India.

The stress-strain relation in such a transversely isotropic solid subjected to a steady temperature field may be written as

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= c_{11}\, e_{rr} + c_{12}\, e_{\theta\theta} + c_{13}\, e_{zz} - b_1\, T, \\
\sigma_\theta &= c_{12}\, e_{rr} + c_{11}\, e_{\theta\theta} + c_{13}\, e_{zz} - b_1\, T, \\
\sigma_z &= c_{13}\,(e_{rr} + e_{\theta\theta}) + c_{33}\, e_{zz} - b_2\, T, \\
\tau_{rz} &= c_{44}\, e_{rz}
\end{aligned} \tag{1}$$

where

$$b_1 = (c_{11} + c_{12})\,\alpha_1 + c_{13}\,\alpha_2\,, \qquad b_2 = 2c_{13}\,\alpha_1 + c_{33}\,\alpha_2 \tag{2}$$

and $c_{11}, c_{12} \ldots$ are elastic constants, T is the change in temperature of the solid from the state of zero stress and strain and α_1, α_2 are the coefficients of linear expansions of the solid in this co-ordinate system.

The strain components in terms of displacements are

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}\,, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}\,, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\,, \quad e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\,. \tag{3}$$

The equations of equilibrium reduce to

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}) + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0\,, \\
&\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z) + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Substituting the values of the stress components in the two equations of (4) and using (3) we get

$$\begin{aligned}
&c_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z} = b_1\frac{\partial T}{\partial r}\,, \\
&c_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{r}\right) = b_2\frac{\partial T}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Let us assume

$$u = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \mu_1\,\psi)\,, \quad w = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\varphi + \mu_2\,\psi) \tag{6}$$

where φ and ψ are functions of r and z; λ, μ_1, μ_2 are some constants. Equations (5) are satisfied if

$$\begin{aligned}
&c_{11}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + [c_{44} + \lambda(c_{13} + c_{44})]\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0\,, \\
&\mu_1 c_{11}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + [\mu_1 c_{44} + \mu_2(c_{13} + c_{44})]\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = b_1\, T,
\end{aligned} \tag{7}$$

and

$$(c_{13}+c_{44}+\lambda c_{44})\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\lambda c_{33}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\,,$$
$$[\mu_1(c_{13}+c_{44})+\mu_2 c_{44}]\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\mu_2 c_{33}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=b_2 T\,. \tag{8}$$

3. Temperature distribution

In the steady state, the temperature $T = T(r, z)$ at any point (r, θ, z) satisfies the heat conducting equation

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\beta^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{9}$$

where β is a constant depending on the ratio of the coefficients of thermal conductivity of the solid.

We have to find the solution of (9) satisfying the boundary conditions

(e) $$T=\begin{cases}T_0 & \text{for} \quad |z|\leqslant c\,, \quad \text{for} \quad r=b\\ 0 & \text{for} \quad |z|>c\,, \quad \text{for} \quad r=b\end{cases}$$

(f) $$\frac{\partial T}{\partial r}+hT=0\,, \qquad \text{for} \quad r=a \tag{10}$$

and

(g) $$\frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{for} \quad z=\pm 1 \ (l \text{ is the length of the cylinder})$$

where a, b are the inner and outer radii respectively, and h is the ratio of the emissivity of the surface and the thermal conductivity of the material of the cylinder. As a solution of (9) we can take

$$T(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}[A_k I_0(\alpha_k\beta r)+B_k K_0(\alpha_k\beta r)]\cos\alpha_k z \tag{11}$$

where $\alpha_k = k\pi/l$, and A_k, B_k are arbitrary functions of α_k; I_0, K_0 are modified Bessel functions of order zero, first and second kinds, respectively.

4. Expressions of displacements and stresses

For the particular integral of the second equations of (7) and (8) we can assume

$$\psi=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2\beta^2}[A_k I_0(\alpha_k\beta r)+B_k K_0(\alpha_k\beta r)]\cos\alpha_k z\,. \tag{12}$$

Inserting the values of T and ψ in the second equations of (7) and (8) we get

$$\mu_1 (C_{11}\beta^2 - C_{44}) - \mu_2 (C_{13} + C_{44}) = b_1 \beta^2,$$

and

$$\mu_1 (C_{13} + C_{44})\beta^2 + \mu_2 (\beta^2 C_{44} - C_{33}) = b_2 \beta^2 \tag{13}$$

which are satisfied if

$$\mu_1 = \frac{\beta^2 [b_1(\beta^2 C_{44} - C_{33}) + b_2(C_{13}+C_{44})]}{C_{11} C_{44}\beta^4 - C_{33} C_{11} \beta^2 + C_{33} C_{44} + C_{13}^2 \beta^2 + 2C_{13} C_{44} \beta^2}, \tag{13a}$$

$$\mu_2 = \frac{\beta^2 [b_2(C_{11}\beta^2 - C_{44}) - b_1 \beta^2 (C_{13}+C_{44})]}{C_{11} C_{44}\beta^4 - C_{33} C_{11} \beta^2 + C_{33} C_{44} + C_{13}^2 \beta^2 + C_{13} C_{44} \beta^2}. \tag{13b}$$

The solutions of equations of equilibrium are obtained in terms of two stress functions φ_1, φ_2 and the expressions for stresses and displacements can be written as

$$\sigma_r = \left(C_{11}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(\varphi_1+\varphi_2+\mu_1\psi) + C_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\mu_2\psi) - b_1 T, \tag{14}$$

$$\sigma_\theta = \left(C_{12}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + C_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(\varphi_1+\varphi_2+\mu_1\psi) + C_{13}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\mu_2\psi) - b_1 T, \tag{15}$$

$$\sigma_z = C_{13}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(\varphi_1+\varphi_2+\mu_1\psi) + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\mu_2\psi) - b_2 T, \tag{16}$$

$$\tau_{rz} = C_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}[(1+\lambda_1)\varphi_1 + (1+\lambda_2)\varphi_2 + (\mu_1+\mu_2)\psi], \tag{17}$$

and

$$u = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1+\varphi_2+\mu_1\psi), \tag{18a}$$

$$w = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\mu_2\psi). \tag{18b}$$

The first equations of (7) and (8) will give non-zero solutions if they are identical and this happens if

$$\frac{\lambda(C_{13}+C_{44})+C_{44}}{C_{11}} = \frac{\lambda C_{33}}{\lambda C_{44}+C_{13}+C_{44}} = m^2 \text{ (say)} \tag{19}$$

or

$$C_{11} C_{44} m^4 + (C_{13}^2 + 2C_{13} C_{44} - C_{13} C_{33}) m^2 + C_{33} C_{44} = 0. \tag{20}$$

Then φ_1, φ_2 are the solutions of

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + m_i^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{21}$$

where m_i^2 are the roots of equation (20) and λ_1, λ_2 are the two values of λ corresponding to m_1^2 and m_2^2, respectively.

For the solution of (21) we can take

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 m_1^2} [C_k I_0(\alpha_k m_1 r) + D_k K_0(\alpha_k m_1 r)] \cos \alpha_k z , \tag{22a}$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2 m_2^2} [E_k I_0(\alpha_k m_2 r) + F_k K_0(\alpha_k m_2 r)] \cos \alpha_k z , \tag{22b}$$

where C_k, D_k, E_k, F_k are constants and are chosen in such a way that the boundary conditions

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \quad \text{for} \quad r = a, \quad r = \mathrm{b} \\ \tau_{rz} &= 0 \quad \text{for} \quad r = a, \quad r = b \end{aligned} \tag{23}$$

are satisfied.

At $z = \pm 1$ conditions $\tau_{rz} = 0 = w$ and $\partial T/\partial z = 0$ are satisfied automatically. By 10(e) we have

$$T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_0(\alpha_k \beta b) + B_k K_0(\alpha_k \beta b)] \cos \alpha_k z , \quad \text{for} \quad |z| \leqslant c, \; r = b .$$

Hence,

$$A_k I_0(\alpha_k \beta b) + B_k K_0(\alpha_k \beta b) = \frac{2 T_0 l}{ck\pi} \sin \alpha_k c , \quad \text{where} \quad \alpha_k = \frac{K\pi}{l}$$

and from 10(f) we have

$$A_k [\alpha_k \beta I_1(\alpha_k \beta a) + h I_0(\alpha_k \beta a)] + B_k [h K_0(\alpha_k \beta a) - \alpha_k \beta K_1(\alpha_k \beta a)] = 0.$$

From these two relations we have

$$A_k = \frac{2 T_0 l}{ck\pi} \sin \alpha_k c \cdot \frac{[h k_0(\alpha_k \beta a) - \alpha_k \beta K_1(\alpha_k \beta a)]}{h R_1 - \alpha_k \beta R_2}, \tag{24}$$

$$B_k = \frac{2 T_0 l}{ck\pi} \sin \alpha_k c \cdot \frac{[\alpha_k \beta I_1(\alpha_k \beta a) + h I_0(\alpha_k \beta a)]}{\alpha_k \beta R_2 - h R_1}, \tag{25}$$

where

$$R_1 = I_0(\alpha_k \beta b) K_0(\alpha_k \beta a) - I_0(\alpha_k \beta a) K_0(\alpha_k \beta b), \tag{26a}$$

$$R_2 = I_1(\alpha_k \beta a) K_0(\alpha_k \beta b) + I_0(\alpha_k \beta b) K_1(\alpha_k \beta a). \tag{26b}$$

With the aid of (22a), (22b), (13a) and (13b) we get the displacement components from (18a) and (18b) as

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[\frac{1}{\alpha_k m_1} \{C_k I_1(\alpha_k m_1 r) - D_k K_1(\alpha_k m_1 r)\} + \\ + \frac{1}{\alpha_k m_2} \{E_k I_1(\alpha_k m_2 r) - F_k K_1(\alpha_k m_2 r)\} + \\ + \frac{\mu_1}{\alpha_k \beta} \{A_k I_1(\alpha_k \beta r) - B_k K_1(\alpha_k \beta r)\} \Bigg] \cos \alpha_k z , \tag{27}$$

$$w = -\sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[\frac{\lambda_1}{\alpha_k m_1^2} \{C_k I_0(\alpha_k m_1 r) + D_k K_0(\alpha_k m_1 r)\} + \\ + \frac{\lambda_2}{\alpha_k m_2^2} \{E_k I_0(\alpha_k m_2 r) + F_k K_0(\alpha_k m_2 r)\} + \\ + \frac{\mu_2}{\alpha_k \beta^2} \{A_k I_0(\alpha_k \beta r) + B_k K_0(\alpha_k \beta r)\} \Bigg] \sin \alpha_k z , \tag{28}$$

where μ_1, μ_2 are given by (13a) and (13b).

Inserting the values of φ_1, φ_2, ψ and T from (22a), (22b), (12) and (11) in equations (14) to (17) we have,

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^{\infty}{}' C_k \Big[C_{11} I_0(\alpha_k m_1 r) - \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 r) + \\ + \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} I_0(\alpha_k m_1 r) \Big] \cos \alpha_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}{}' D_k \Big[C_{11} K_0(\alpha_k m_1 r) + \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 r) - \\ - \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} K_0(\alpha_k m_1 r) \Big] \cos \alpha_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}{}' E_k \Big[C_{11} I_0(\alpha_k m_2 r) - \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_2 r) + \\ + \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} I_1(\alpha_k m_2 r) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} I_0(\alpha_k m_2 r) \Big] \cos \alpha_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}{}' F_k \Big[C_{11} K_0(\alpha_k m_2 r) + \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 r) - \\ - \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 r) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} K_0(\alpha_k m_2 r) \Big] \cos \alpha_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}{}' A_k \Big[\mu_1 C_{11} I_0(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_1 C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta r) + \\ + \frac{\mu_1 C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} I_0(\alpha_k \beta r) - b_1 I_0(\alpha_k \beta r) \Big] \cos \alpha_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}{}' B_k \Big[\mu_1 C_{11} K_0(\alpha_k \beta r) + \frac{\mu_1 C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta r) - \\ - \frac{\mu_1 C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} K_0(\alpha_k \beta r) - b_1 K_0(\alpha_k \beta r) \Big] \cos \alpha_k z , \tag{29}$$

$$\sigma_\theta = \sum_{k=1}^{\infty}{}' C_k \left[C_{12} I_0(\alpha_k m_1 r) - \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 r) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} I_0(\alpha_k m_1 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' D_k \left[C_{12} K_0(\alpha_k m_1 r) + \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 r) - \right.$$

$$\left. - \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} K_0(\alpha_k m_1 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' E_k \left[C_{12} I_0(\alpha_k m_2 r) - \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} I_1(\alpha_k m_2 r) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} I_1(\alpha_k m_2 r) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} I_0(\alpha_k m_2 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' F_k \left[C_{12} K_0(\alpha_k m_2 r) + \frac{C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 r) - \right.$$

$$\left. - \frac{C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 r) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} K_0(\alpha_k m_2 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' A_k \left[\mu_1 C_{12} I_0(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_1 C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta r) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_1 C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} I_0(\alpha_k \beta r) - b_1 I_0(\alpha_k \beta r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' B_k \left[\mu_1 C_{12} K_0(\alpha_k \beta r) + \frac{\mu_1 C_{12}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta r) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_1 C_{11}}{r} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} K_0(\alpha_k \beta r) - b_1 K_0(\alpha_k \beta r) \right] \cos \alpha_k z. \quad (30)$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^{\infty}{}' C_k \left[C_{13} I_0(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{33}}{m_1^2} I_0(\alpha_k m_1 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' D_k \left[C_{13} K_0(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_1 C_{33}}{m_1^2} K_0(\alpha_k m_1 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' E_k \left[C_{13} I_0(\alpha_k m_1 r) - \frac{\lambda_2 C_{33}}{m_2^2} I_0(\alpha_k m_2 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' F_k \left[C_{13} K_0(\alpha_k m_2 r) - \frac{\lambda_2 C_{33}}{m_2^2} K_0(\alpha_k m_2 r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' A_k \left[\mu_1 C_{13} I_0(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{33}}{\beta^2} I_0(\alpha_k \beta r) - b_2 I_0(\alpha_k \beta r) \right] \cos \alpha_k z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}{}' B_k \left[\mu_1 C_{13} K_0(\alpha_k \beta r) - \frac{\mu_2 C_{33}}{\beta^2} K_0(\alpha_k \beta r) - b_2 K_0(\alpha_k \beta r) \right] \cos \alpha_k z ,$$

$$\tau_{rz} = -C_{44}(1 + \lambda_1) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m_1} \left[C_k I_1(\alpha_k m_1 r) - D_k K_1(\alpha_k m_1 r) \right] \sin \alpha_k z - \quad (31)$$

$$- C_{44}(1 + \lambda_2) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m_2} \left[E_k I_1(\alpha_k m_2 r) - F_k K_1(\alpha_k m_2 r) \right] \sin \alpha_k z -$$

$$- C_{44}(\mu_1 + \mu_2) \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\beta} \left[A_k I_1(\alpha_k \beta r) - B_k K_1(\alpha_k \beta r) \right] \sin \alpha_k z . \quad (32)$$

From (23) we have,

$$\sigma_r = 0 \quad \text{for} \quad r = a, \quad r = b,$$
$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{for} \quad r = a, \quad r = b.$$

Employing these in (29) and (32), respectively, we get,

$$\begin{aligned} &C_k L_0 + D_k M_0 + E_k N_0 + F_k P_0 = A_k X_0 + B_k Y_0 , \\ &C_k L_0' + D_k M_0' + E_k N_0' + F_k P_0' = A_k X_0' + B_k Y_0' , \\ &C_k L_1 - D_k M_1 + E_k N_1 - F_k P_1 = -A_k X_1 + B_k Y_1 , \\ &C_k L_1' - D_k M_1' + E_k N_1' - F_k P_1' = -A_k X_1' + B_k Y_1' \end{aligned} \tag{33}$$

where

$$L_0 = C_{11} I_0(\alpha_k m_1 a) - \frac{C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 a) +$$
$$+ \frac{C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 a) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} I_0(\alpha_k m_1 a) ,$$

$$M_0 = C_{11} K_0(\alpha_k m_1 a) + \frac{C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 a) -$$
$$- \frac{C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_1} K_1(\alpha_k m_1 a) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} K_0(\alpha_k m_1 a) ,$$

$$N_0 = C_{11} I_0(\alpha_k m_2 a) - \frac{C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_2} I_1(\alpha_k m_2 a) +$$
$$+ \frac{C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_2} I_1(\alpha_k m_2 a) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} I_0(\alpha_k m_2 a) ,$$

$$P_0 = C_{11} K_0(\alpha_k m_2 a) + \frac{C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 a) -$$
$$- \frac{C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k m_2} K_1(\alpha_k m_2 a) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2} K_0(\alpha_k m_2 a) ,$$

$$X_0 = \frac{\mu_1 C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta a) + \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} I_0(\alpha_k \beta a) + b_1 I_0(\alpha_k \beta a) -$$
$$- \mu_1 C_{11} I_0(\alpha_k \beta a) - \frac{\mu_1 C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k \beta} I_1(\alpha_k \beta a) ,$$

$$Y_0 = \frac{\mu_1 C_{12}}{a} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta a) + \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2} K_0(\alpha_k \beta a) + b_1 K_0(\alpha_k \beta a) -$$
$$- \mu_1 C_{11} K_0(\alpha_k \beta a) - \frac{\mu_1 C_{11}}{a} \frac{1}{\alpha_k \beta} K_1(\alpha_k \beta a) ,$$

$$L_0' = C_{11} I_0(\alpha_k m_1 b) - \frac{C_{11}}{b} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 b) +$$
$$+ \frac{C_{12}}{b} \frac{1}{\alpha_k m_1} I_1(\alpha_k m_1 b) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2} I_0(\alpha_k m_1 b) ,$$

$$M_0' = C_{11}\, K_0(\alpha_k m_1 b) + \frac{C_{11}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_1}\, K_1(\alpha_k m_1 b) -$$

$$- \frac{C_{12}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_1}\, K_1(\alpha_k m_1 b) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_1^2}\, K_0(\alpha_k m_1 b)\ ,$$

$$N_0' = C_{11}\, I_0(\alpha_k m_2 b) - \frac{C_{11}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_2}\, I_1(\alpha_k m_2 b) +$$

$$+ \frac{C_{12}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_2}\, I_1(\alpha_k m_2 b) - \frac{\lambda_2 C_{13}}{m_2^2}\, I_0(\alpha_k m_2 b)\ ,$$

$$P_0' = C_{11}\, K_0(\alpha_k m_2 b) + \frac{C_{11}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_2}\, K_1(\alpha_k m_2 b) -$$

$$- \frac{C_{12}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k m_2}\, K_1(\alpha_k m_2 b) - \frac{\lambda_1 C_{13}}{m_2^2}\, K_0(\alpha_k m_2 b)\ ,$$

$$X_0' = \frac{\mu_1 C_{11}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k \beta}\, I_1(\alpha_k \beta b) + \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2}\, I_0(\alpha_k \beta b) +$$

$$+ b_1\, I_0(\alpha_k \beta b) - \mu_1 C_{11}\, I_0(\alpha_k \beta b) + \frac{\mu_1 C_{12}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k \beta}\, I_1(\alpha_k \beta b)\ ,$$

$$Y_0' = \frac{\mu_1 C_{12}}{b}\,\frac{1}{\alpha_k \beta}\, K_1(\alpha_k \beta b) + \frac{\mu_2 C_{13}}{\beta^2}\, K_0(\alpha_k \beta b) + b_1 K_0(\alpha_k \beta b) -$$

$$- \mu_1 C_{11}\, K_0(\alpha_k \beta b) - \frac{\mu_1 C_{11}}{b}\cdot\frac{1}{\alpha_k \beta}\, K_1(\alpha_k \beta b)\ .$$

$$L_1 = \frac{1+\lambda_1}{m_1}\, I_1(\alpha_k m_1 a)\ , \qquad L_1' = \frac{1+\lambda_1}{m_1}\, I_1(\alpha_k m_1 b)\ ,$$

$$M_1 = \frac{1+\lambda_1}{m_1}\, K_1(\alpha_k m_1 a)\ , \qquad M_1' = \frac{1+\lambda_1}{m_1}\, K_1(\alpha_k m_1 b)\ ,$$

$$N_1 = \frac{1+\lambda_2}{m_2}\, I_1(\alpha_k m_2 a)\ , \qquad N_1' = \frac{1+\lambda_2}{m_2}\, I_1(\alpha_k m_2 b)\ ,$$

$$P_1 = \frac{1+\lambda_2}{m_2}\, K_1(\alpha_k m_2 a)\ , \qquad P_1' = \frac{1+\lambda_2}{m_2}\, K_1(\alpha_k m_2 b)\ ,$$

$$X_1 = \frac{\mu_1+\mu_2}{\beta}\, I_1(\alpha_k \beta a)\ , \qquad X_1' = \frac{\mu_1+\mu_2}{\beta}\, I_1(\alpha_k \beta b)\ ,$$

$$Y_1 = \frac{\mu_1+\mu_2}{\beta}\, K_1(\alpha_k \beta a)\ . \qquad Y_1' = \frac{\mu_1+\mu_2}{\beta}\, K_1(\alpha_k \beta b)\ .$$

Solving (33) we get,

$$C_k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_k X_0 + B_k Y_0 & M_0 & N_0 & P_0 \\ A_k X_0' + B_k Y_0' & M_0' & N_0' & P_0' \\ -A_k X_1 + B_k Y_1 & -M_1 & N_1 & -P_1 \\ -A_k X_1' + B_k Y_1' & -M_1' & N_1' & -P_1' \end{vmatrix}\ ;$$

$$D_k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_0 & A_k X_0 + B_k Y_0 & N_0 & P_0 \\ L_0' & A_k X_0' + B_k Y_0' & N_0' & P_0' \\ L_1 & -A_k X_0 + B_k Y_1 & N_1 & -P_1' \\ L_1' & -A_k X_1' + B_k Y_1' & N_1' & -P_1' \end{vmatrix}\ ;$$

$$E_k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_0 & M_0 & A_k X_0 + B_k Y_0 & P_0 \\ L_0' & M_0' & A_k X_0' + B_k Y_0' & P_0' \\ L_1 & -M_1 & -A_k X_1 + B_k Y_1 & -P_1 \\ L_1' & -M_1' & -A_k X_1' + B_k Y_1' & -P_1' \end{vmatrix};$$

$$F_k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_0 & M_0 & N_0 & A_k X_0 + B_k Y_0 \\ L_0' & M_0' & N_0' & A_k X_0' + B_k Y_0' \\ L_1 & -M_1 & N_1 & -A_k X_1 + B_k Y_1 \\ L_1' & -M_1' & N_1' & -A_k X_1' + B_k Y_1' \end{vmatrix}.$$

where

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_0 & M_0 & N_0 & P_0 \\ L_0' & M_0' & N_0' & P_0' \\ L_1 & -M_1 & N_1 & -P_1 \\ L_1' & -M_1' & N_1' & -P_1' \end{vmatrix}.$$

5. Numerical results

Let us consider the case of magnesium for which the roots of the equation (20) are real. The elastic constants are

$C_{11} = 0{,}565 \times 10^{12}$ dyn/cm^2, $C_{12} = 0{,}232 \times 10_7^2$ dyn/cm^2,
$C_{13} = 0{,}181 \times 10^{12}$ dyn/cm^2, $C_{33} = 0{,}587 \times 10^{12}$ dyn/cm^2,
$C_{44} = 0{,}168 \times 10^{12}$ dyn/cm^2.

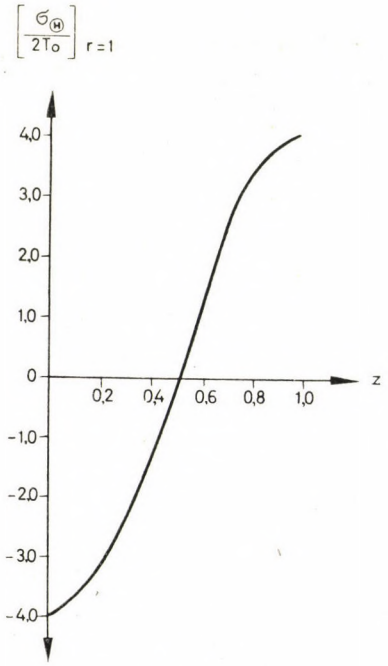


Fig. 1

The coefficients of linear thermal expansion along and perpendicular to the z axis are

$$\alpha_1 = 27{,}7 \times 10^{-6}/°\text{C}, \qquad \alpha_2 = 26{,}6 \times 10^{-6}/°\text{C}.$$

Taking $\beta = 1$, the roots of the equation (20) are

$$m_1^2 = 1{,}986, \qquad m_2^2 = 0{,}524.$$

With $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, $c = 0{,}1$ cm, $l = 10$ cm and $h = 0{,}393$ we get the following

$$b_1 = 26{,}82 \text{ dyn/cm}^2, \qquad b_2 = 25{,}64 \text{ dyn/cm}^2,$$
$$\lambda_1 = 2{,}733, \qquad \lambda_2 = 0{,}367, \qquad \mu_1 = -1{,}4551/°\text{C}, \quad \mu_2 = 0{,}58586/°\text{C}.$$

With these values of constants we have calculated the stress $(\sigma_\theta)_{r=1}$ for different values of z. The variation of $(\sigma_\theta)_{r=1}$ for different values of z is shown in Fig. 1. It is clearly observed that $(\sigma_\theta)_{r=1}$ takes its maximum value at the ends of the cylinder and vanishes approximately at the middle point of the cylinder. For z greater than 0,5 the stress is tensile, and for z less than 0,5 it is compressive. Near the point 0,5 it is zero.

REFERENCES

1. MELAN—PARKUS: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien 1953.
2. DAS—BIKASRANJAN: Thermal Stresses in a Circular Cylinder with a Smooth Insulating Cover on the Curved Surface. *Appl. Phy. Quarterly*, **8** (1962), No. 1.
3. CHATTOPADHYA—NETAI CHAND: Thermal Stresses Due to Prescribed Temperature on the Curved Lateral Surface of a Finite Cylinder with Ends in Contact With Smooth Insulating Plates. *Ind. Jour. of Pure and Appl. Physic.* **4** (1966), No. 1.
4. NOWACKI, W.: Thermoelasticity. Addison Wesley Publishing Company, Inc. 1962, p. 134.

Wärmespannungen in einem endlichen, in der Querrichtung isotropen, an flache Wärmeisolierungsplatten anstoßenden und an der gekrümmten Außenfläche erwärmten leeren Kreiszylinder. Es werden die in einem endlichen, in Querrichtung isotropen, leeren Zylinder unter Einwirkung einer an einem Teil der gekrümmten Oberfläche desselben unter Einwirkung einer symmetrischen Erwärmung auftretenden Wärmespannungen für den Fall errechnet, daß an der inneren Fläche des Zylinders eine Strahlung auftritt. Alle Spannungen und Verschiebungen werden in Zeilenform erhalten.

Термические напряжения в некотором конечном изотропном по поперечному сечению полом круглом цилиндре, нагреваемом на его внешней кривой поверхности и соприкасающемся на его концах с плоскими термоизоляционными пластинами. Расчет тепловых напряжений на некотором конечном и в трансверсальном направлении изотропном полом цилиндре в случае симметричного нагрева, возникающего на одной части его изогнутой поверхности, если во внутренней части цилиндра возникает излучение. Все напряжения и смещения получаются в форме рядов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 453—467 (1972)

REFLEXIONSMESSUNG IM INFRAROTEN ZUR KENNZEICHNUNG VON DIFFUNDIERTEN SCHICHTEN

ELISABETH BARTA*

[Eingegangen am 20. Dezember 1971]

Es wird gezeigt, daß durch die zusätzliche Angabe der Lage des infraroten Reflexionsminimums einer diffundierten Schicht entschieden werden kann, ob der Dotierungsverlauf der Schicht der theoretisch erwarteten komplementären Fehlerfunktion entspricht oder nicht. Es wird die Notwendigkeit einer solchen Entscheidung bei der Bestimmung der Oberflächenkonzentration betont.

1. Einleitung

Die zwei wichtigsten Kenngrößen einer durch Diffusion hergestellten dünnen Schicht sind die Oberflächenkonzentration N_s und die Eindringtiefe der Diffusion, x_j. Die Bestimmung der Eindringtiefe geschieht durch die Sichtbarmachung des $p-n$ Überganges an einem Querschliff. Die Oberflächenkonzentration wird in Kenntnis des durch die Vierspitzenmethode bestimmten spezifischen Flächenwiderstandes R_s und der Eindringtiefe anhand von IRWINS [1] Kurvenscharen berechnet.

Bei der Berechnung wird vorausgesetzt, daß die Verteilungsfunktion der diffundierten Verunreinigung entweder durch eine komplementäre Fehlerfunktion oder durch eine Gausssche Verteilung in guter Näherung ersetzt werden kann. Die Oberflächenkonzentration (d. h. die Konzentration der freien Ladungsträger in einer dünnen Oberflächenschicht) kann jedoch auch durch die Untersuchung der optischen Eigenschaften bestimmt werden, da die diese beschreibenden optischen Konstanten in dem Wellenlängenbereich $\lambda > \lambda_{gap}$ (im Fall des Siliziums $\lambda_{gap} = 1{,}2\ \mu$) von der Wechselwirkung zwischen den freien Ladungsträgern und der elektromagnetischen Strahlung abhängen [2]:

$$n^2 - k^2 = n_0^2 - \frac{4\pi N e^2}{m^*(\omega^2 + \tau^{-2})}, \tag{1}$$

$$2nk = \frac{1}{\omega\tau} \frac{2\pi N e^2}{m^*(\omega^2 + \tau^{-2})}. \tag{2}$$

* Elisabeth Barta, Honvéd u. 22–24, Budapest V., Ungarn

n: Brechungsindex, wellenlängenabhängig;

$k = \lambda\alpha/(4\pi)$: Extinktionskoeffizient;

α: Absorptionskoeffizient;

n_0: Brechungsindex der reinen Substanz, wellenlängenunabhängig in dem untersuchten Wellenlängenbereich ($n_0 = 3{,}42$ für Silizium);

N: freie Ladungsträgerdichte;

m^*: effektive Masse der freien Ladungsträger;

ω: Kreisfrequenz der untersuchten Strahlung;

τ: Relaxationszeit.

(1) und (2) sind in CGS-Einheiten angegeben. Die optischen Konstanten des n-leitenden Siliziums sind als Funktion der Wellenlänge und der Verunreinigungsdichte in der Arbeit von SATO et al. [3] enthalten.

Die Reflexion, die an der Grenzfläche Luft–Substanz bei senkrechtem Einfall erfolgt, wird durch die oben angegebenen optischen Konstanten, wie folgt, bestimmt [4]:

$$R = \frac{(n-1)^2+k^2}{(n+1)^2+k^2} . \tag{3}$$

Das Reflexionsspektrum entarteter Halbleitersubstanzen weist ein Minimum auf, aus dessen Lage anhand des Zusammenhanges (4) die freie Ladungsträgerdichte bestimmt werden kann [5, 6]:

$$N = \frac{m^* \omega_{\min}^2 (n_0^2-1)}{4\pi e^2} . \tag{4}$$

Dieser Zusammenhang gilt unter der Voraussetzung, daß $\omega^2 \tau^2 \gg 1$ und $n \gg k$ ist. Diese Voraussetzung wird jedoch im Fall des entarteten Siliziums nicht erfüllt [3, 7].

Um die Bestimmung der freien Ladungsträgerdichte aus der Lage des Reflexionsminimums trotzdem zu ermöglichen, wurden anhand von zahlreichen Messungen empirische Eichkurven aufgenommen (Bild 1 und 2).

Aus Bild 1 bzw. 2 ist ersichtlich, daß eine Trägerkonzentration von $4{,}5 \times 10^{18} \leq N_n \leq 6 \times 10^{21}$ cm^{-3} bei n-leitendem Si, bzw. $4{,}5 \times 10^{18} \leq N_p \leq 8 \times 10^{20}$ cm^{-3} bei p-leitendem Si im Wellenlängenbereich 2—25 μ bestimmt werden kann.

Zunächst wurde die optische Bestimmung der freien Ladungsträgerdichte nur an solchen Einkristallen vorgenommen, in denen die Verunreinigung homogen verteilt war [9—11]. 1965 schlugen PHILLIPS und Mitarbeiter vor, die Oberflächenkonzentration auch diffundierter Schichten aus dem Minimum des Reflexionsspektrums zu bestimmen [12]. Diesem Vorschlag folgte eine Reihe von Versuchen auch anderer Autoren [13—15], die bei der Bestimmung der Oberflächenkonzentration der diffundierten Schichten die Eichkurven für Einkristalle homogener Verunreinigungsverteilung zuhilfe

nahmen. Daß ihre Ergebnisse trotzdem richtig waren, kann darauf zurückgeführt werden, daß die Eindringtiefen der von ihnen untersuchten Dünnschichten in der Größenordnung von etwa 100 μ lagen.

Erst 1968 lenkten ABE und NISHI [16] die Aufmerksamkeit darauf, daß die Lage des Reflexionsminimums nicht allein von der Oberflächenkonzentration, sondern auch von der Diffusionsverteilung abhängt (Bild 3).

Sie folgerten daraus, daß die Oberflächenkonzentration nur dann eindeutig aus der Lage des Reflexionsminimums, λ_{min}, bestimmt werden kann,

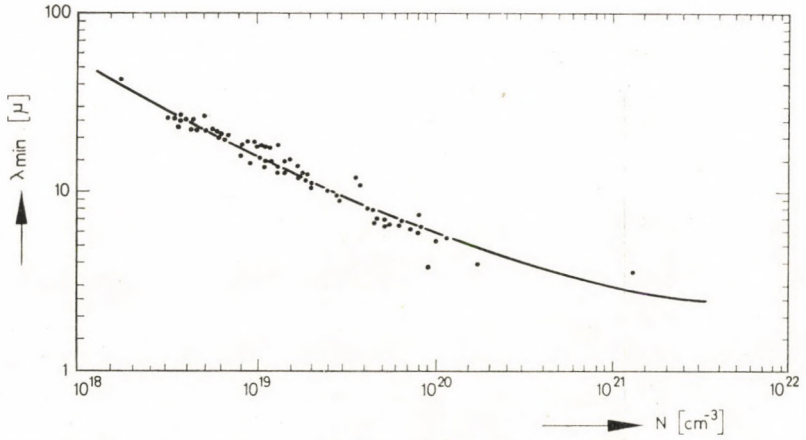


Bild 1. λ_{min} in Abhängigkeit von der freien Ladungsträgerdichte im Falle des *n*-leitenden Siliziums nach SCHUMANN [8]

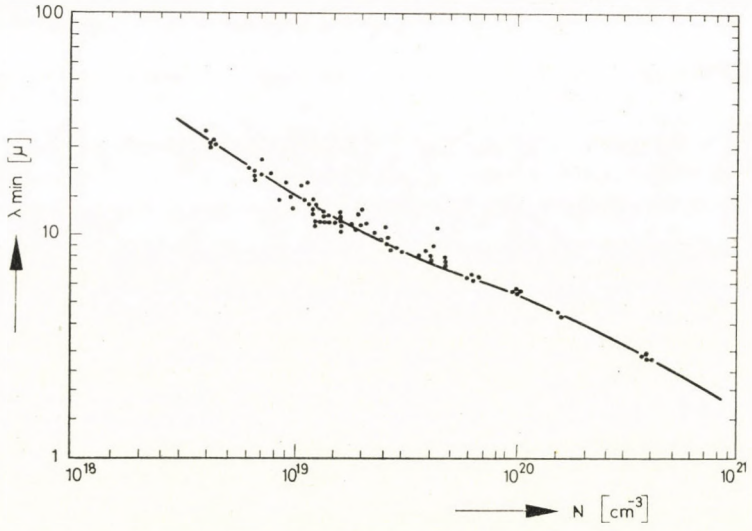


Bild 2. λ_{min} in Abhängigkeit von der freien Ladungsträgerdichte im Falle des *p*-leitenden Siliziums nach SCHUMANN [8]

falls sich die freie Ladungsträgerdichte innerhalb der Eindringtiefe der infraroten Strahlung der Wellenlänge λ_{min} nicht wesentlich ändert. ABE und NISHI berechneten die Wellenlängenabhängigkeit des Reflexionsvermögens diffundierter Schichten unter der Voraussetzung eines durch eine Fehlerfunktion bzw. eines durch eine Gausssche Verteilung beschreibbaren Dotierungsverlaufes. Aus dem Vergleich ihrer Berechnungen mit den Ergebnissen von IRWIN erhielten sie die im Bild 4 dargestellten Kurvenscharen, anhand derer einem gemessenen Wertepaar (R_s-, λ_{min}) das gesuchte Wertepaar (N_s-, x_j) eindeutig zugeordnet werden kann, falls die von den Autoren genannten Bedingungen erfüllt werden.

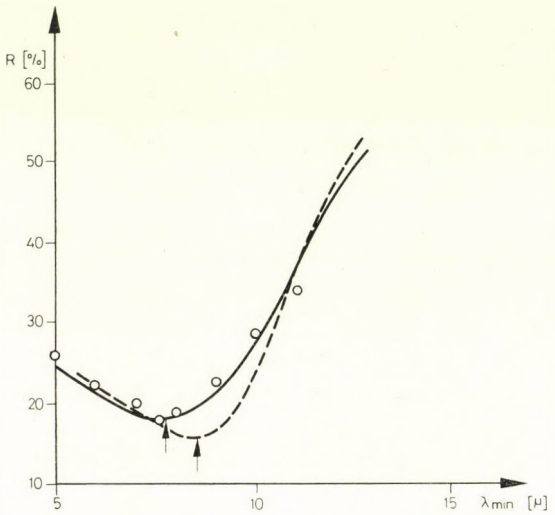


Bild 3. Reflexionsspektrum einer Si-Probe homogener Verunreinigungsverteilung (gestrichelte Kurve) und einer diffundierten Probe (ausgezogene Kurve). Obwohl die Oberflächenkonzentration der diffundierten Probe gleich der freien Ladungsträgerdichte der homogenen Probe ist, tritt in der Lage des λ_{min} eine Verschiebung auf

In unserem Laboratorium wurden Si-Proben untersucht, in die eine As- bzw. P-Diffusion unter konstantem äußerem Angebot vorgenommen wurde. Bei an solchen Schichten ausgeführten Berechnungen wird immer vorausgesetzt, daß der Dotierungsverlauf mit einer komplementären Fehlerfunktion angenähert werden kann. Die an diesen Schichten ausgeführten R_s-, x_j- und λ_{min}-Messungen widersprachen jedoch den nach [16] erwarteten Ergebnissen, indem das von uns gemessene Reflexionsminimum immer bei längeren Wellenlängen auftrat als aufgrund des gemessenen Wertepaares (R_s-, x_j) und der obengenannten Berechnungen erwartet wurde [17]. Es wurde angenommen, daß dieser Widerspruch durch die Abweichung des tatsächlichen Dotierungsverlaufes von der vorausgesetzten Form einer komplementären Fehlerfunktion verursacht wird.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, diese Annahme und ihre Auswirkungen zu überprüfen. Weiterhin soll untersucht werden, welche zusätzliche Informationen aus dem infraroten Reflexionsspektrum bzgl. diffundierter Schichten gewonnen werden können.

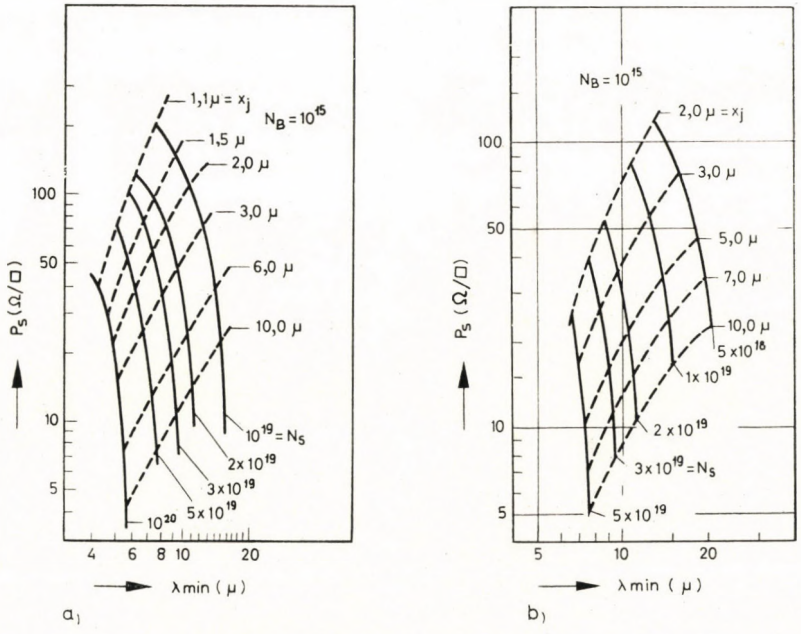


Bild 4. $R_S - \lambda_{min} - x_j - N_S$-Relationen nach ABE und NISHI [16] im Falle eines Dotierungsverlaufes, der durch eine *a)* komplementäre Fehlerfunktion, *b)* Gausssche Glockenkurve ersetzt werden kann

2. Experimentelles

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wurden in unserem Laboratorium solche As- bzw. P-diffundierte Schichten untersucht, bei denen anhand der Diffusionsverhältnisse ein durch eine Fehlerfunktion beschreibbarer Dotierungsverlauf erwartet wurde.

Der spezifische Flächenwiderstand der Schichten wurde mit der Vierspitzenmethode bestimmt. Der *p–n*-Übergang wurde an einem Querschliff von 2,5° mittels chemischer Ätzung sichtbar gemacht. Die Eindringtiefe wurde anschließend unter einem Interferenzmikroskop gemessen.

Die Reflexionsspektren wurden mit Hilfe eines Zeiss-UR 10 — Infrarot — Spektrophotometers an einem von Zeiss gelieferten Reflexionsaufsatz aufgenommen.

Der Dotierungsverlauf wurde nach einer von TANNENBAUM [18] angegebenen Methode aufgenommen. Durch chemisches Ätzen (55 g $CuSO_4$ +

+ 65 ml HF + 937 ml H^2O [19]) wurden dünne Schichten der untersuchten Probe abgetragen, deren Dicke durch Interferenzmessungen bestimmt wurde. Nach jeder Abtragung wurde die Vierspitzenmessung durchgeführt, um den Flächenwiderstand zu ermitteln [20]:

$$R_s(x) = \frac{u}{I} \frac{\pi}{\ln 2} = \frac{U}{I} 4{,}53. \tag{5}$$

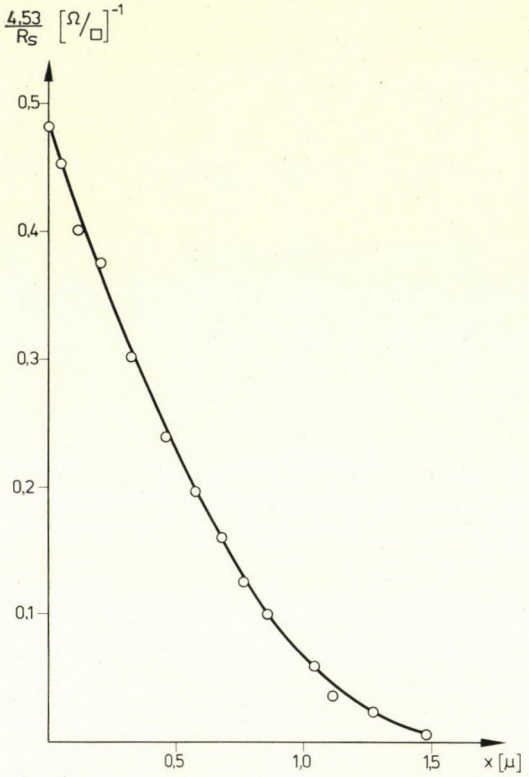


Bild 5. $4{,}53/R_s$ als Funktion der von der Oberfläche gerechneten Entfernung x im Falle der Probe 201/2

$4{,}53/R_s$ wurde in Abhängigkeit der von der Oberfläche gemessenen Entfernung x dargestellt (Bilder 5, 6 und 7) und graphisch differenziert. Nach einer Division durch 4,53 erhielten wir:

$$\frac{dR_s^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{x_j} \sigma(x)\, dx = \sigma(x) = N(x)\, e\mu, \tag{6}$$

wo $\sigma(x)$ die spezifische Leitfähigkeit in der Entfernung x von der Oberfläche bedeutet. Aus IRWINS Darstellungen $(\sigma)^{-1} = f(N)$ für Si-Proben homogener Dotierungsverteilung konnte die freie Ladungsträgerdichte $N(x)$ für jede Entfernung x bestimmt werden.

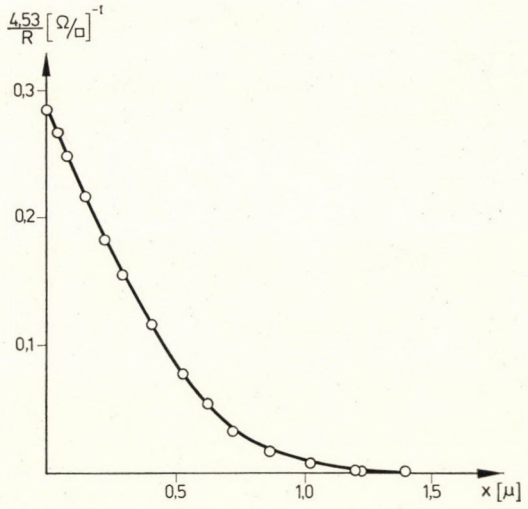


Bild 6. $4{,}53/R_S$ als Funktion der von der Oberfläche gerechneten Entfernung x im Falle der Probe 256

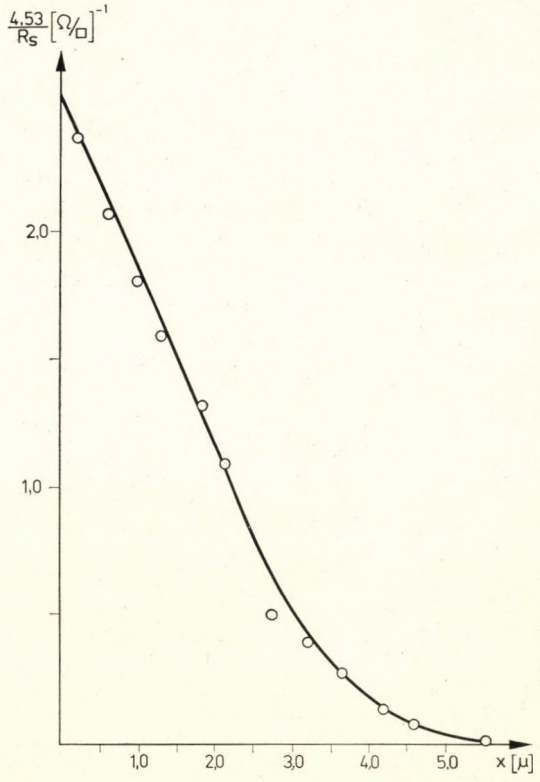


Bild 7. $4{,}53/R_S$ als Funktion der von der Oberfläche gerechneten Entfernung x im Falle der Probe BE 12

3. Meßergebnisse

Die Bilder 8 und 9 stellen einige der an den diffundierten Schichten aufgenommenen Reflexionsspektren dar. Diesen Bildern kann entnommen werden, daß die Minima wohldefiniert sind und ihre Lage daher mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 2\%$ bestimmt werden kann.

Diese λ_{min}-Werte wurden mit den Werten verglichen, die sich durch das Einsetzen des Wertepaares (R_s, x_j) in die von ABE und NISHI berechnete Kurvenschar ergaben. Aus Bild 10 bzw. Tafel I kann das Ergebnis dieses Vergleiches entnommen werden: Das experimentell bestimmte Wertepaar (R_s, λ_{min}) widerspricht dem theoretisch erwarteten Wertepaar, indem $\lambda_{min\ exp} > \lambda_{min\ theor}$ ist.

Tafel I

Probe	Diff. Verunreinigung	$R_s[\Omega/\square]$	x_j [μ]	Erwartungswert nach [16] λ_{min} [μ]	exp. best. λ_{min} [μ]
BE 11	P	1,56	6,15	$2 \leq \lambda \leq 3$	4,3
BE 12	P	1,55	6,15	$2 \leq \lambda \leq 3$	$4{,}4 \pm 0{,}2$
BE 13	P	1,41	6,15	$2 \leq \lambda \leq 3$	—
BE 14*	P	9,90	1,62	$3 \leq \lambda \leq 4$	$4{,}4 \pm 0{,}1$
BE 15*	P	10,91	—	—	—
BE 16*	P	11,05	1,89	$3 \leq \lambda \leq 4$	$5{,}1 \pm 0{,}1$
P 108	P	3,00	4,00	$2 \leq \lambda \leq 3$	$4{,}6 \pm 0{,}1$
199/2	As	9,75	1,64	3	$4{,}8 \pm 0{,}1$
200/2	As	9,90	1,64	3	$4{,}5 \pm 0{,}1$
201/2	As	9,40	1,78	3	$5{,}0 \pm 0{,}1$
256	As	17,00	1,37	3,5	$4{,}9 \pm 0{,}1$
257/1	As	18,80	1,10	3,5	
258/1	As	18,80	1,23	3,5	$5{,}95 \pm 0{,}05$
258/3	As	24,10	1,37	4	$5{,}95 \pm 0{,}05$

* Die so gekennzeichneten Proben wiesen eine Inhomogenität von 10% in R_s auf.

Die an der als 201/2 bezeichneten As-diffundierten Probe vorgenommenen Messungen ergaben $R_s = 9{,}4\ \Omega/\square$ und $x_j = 1{,}78\ \mu$. Das Wertepaar (R_s, x_j) ergibt anhand von IRWINS Kurvenscharen eine Oberflächenkonzentration von $N_s = 4{,}2 \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$, falls die im Bild 11 dargestellte Fehlerfunktion (gestrichelte Kurve) als Dotierungsverlauf vorausgesetzt wird. (Die Fehlerfunktion wird durch die Oberflächenkonzentration und die für den p—n-Übergang charakteristische Ladungsträgerdichte N_B, die bei all den untersuchten Schichten $10^{15}\ \mathrm{cm}^{-3}$ betrug, bestimmt.) Das Reflexionsminimum

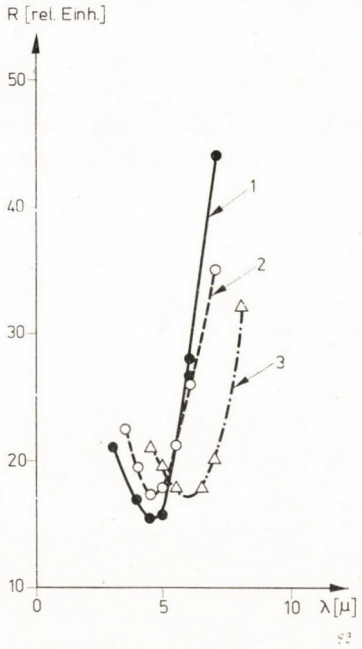


Bild 8. Reflexionsspektren einiger As-Diffusion enthaltenden Proben
1 : 199/2; 2 : 200/2; 3 : 258/3

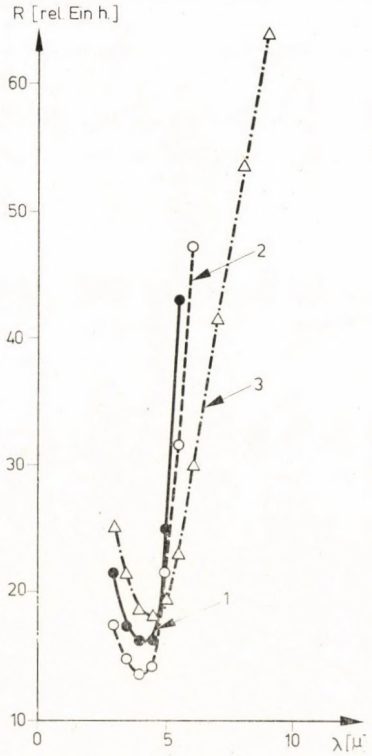


Bild 9. Reflexionsspektren einiger P-Diffusion enthaltenden Proben
1 : BE 11; 2 : BE 12; 3 : BE 14

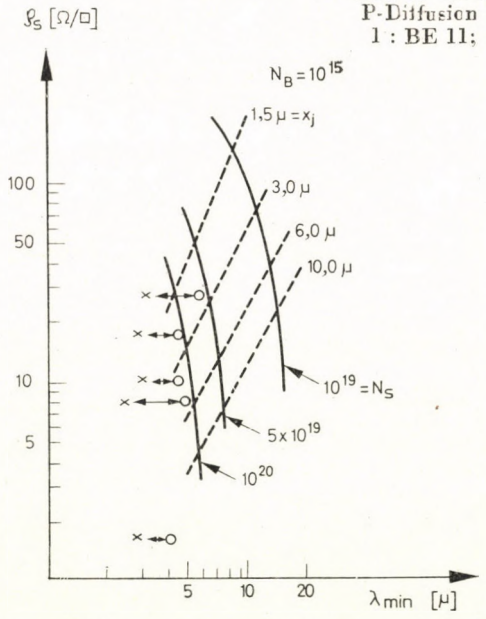


Bild 10. Bild 4*a* mit eigenen Meßwerten erweitert. × Die nach [16] erwarteten (R_S, λ_{min})-Werte, ○ die von uns gemessenen (R_S, λ_{min})-Werte

einer solchen Schicht sollte nach den Bedingungen von [16] bei $\lambda \simeq 3\ \mu$ auftreten. Demgegenüber wurde ein $\lambda_{min} = 5{,}0\ \mu$ gemessen. Der als Ergebnis der graphischen Differentiation der im Bild 6 dargestellten Funktion erhaltene wahre Dotierungsverlauf (o — o im Bild 11) bekräftigt unsere, bereits in der Einleitung erwähnte Annahme, nach der der zwischen dem erwarteten und dem gemessenen R_s, λ_{min} bestehende Widerspruch auf eine Abweichung des wahren Dotierungsverlaufes von der theoretisch erwarteten Verteilungsfunktion beruht.

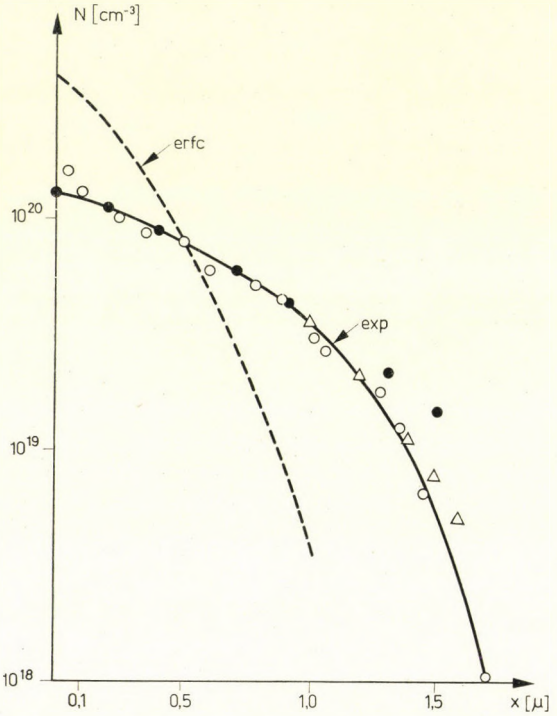


Bild 11. Experimentell bestimmter Dotierungsverlauf der Probe 201/2 (im Text ausführlich erklärt)

Beim Einsetzen des Wertepaares (R_s, λ_{min}) in die von ABE und NISHI berechnete Kurvenschar finden wir, daß diesem Wertepaar eine durch $N_s = 1{,}3 \times 10^{20}$ cm^{-3} und $x_j = 4{,}2\ \mu$ charakterisierte Fehlerfunktion entspricht (Bild 4*a*). Die Berechnung dieser Funktion aus Tafelwerten [21] ergab den im Bild 11 durch volle Kreise gekennzeichneten Kurvenverlauf, der sich bis zu einer Tiefe von etwa $0{,}9\ \mu$ als gute Näherung an den wahren Dotierungsverlauf erwies. Das in dieser Entfernung gemessene Wertepaar ($R_s = 50{,}1\ \Omega/\square$, $\lambda_{min} = 5{,}9\ \mu$) weist beim Einsetzen in die auf Bild 4*a* dargestellten Kurvenschar auf eine durch $N_s = 5{,}3 \times 10^{19}$ cm^{-3} und $x_j = 2{,}0\ \mu$ charakteri-

sierte Fehlerfunktion hin. Diese Funktion wurde im Bild 11 durch Dreiecke gekennzeichnet und erwies sich ebenfalls als gute Näherung an den wahren Dotierungsverlauf.

Die an der Probe 256, in die ebenfalls As diffundiert wurde, ausgeführten Messungen ergaben folgende Resultate: Aus dem gemessenen Wertepaar ($R_s = 17{,}0\ \Omega/\square$, $x_j = 1{,}37\ \mu$) wurde unter Voraussetzung der im Bild 12 als gestrichelte Kurve dargestellten Fehlerfunktion die Oberflächenkonzentration zu $N_s = 2{,}2 \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$ berechnet. Dies ist ein höherer Wert als $N_{s\,\mathrm{exp}} = 1 \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$, der durch die Extrapolation der graphischen Differentiation der auf Bild 7 dargestellten Funktion erhalten wurde. Aus Bild 12 kann das

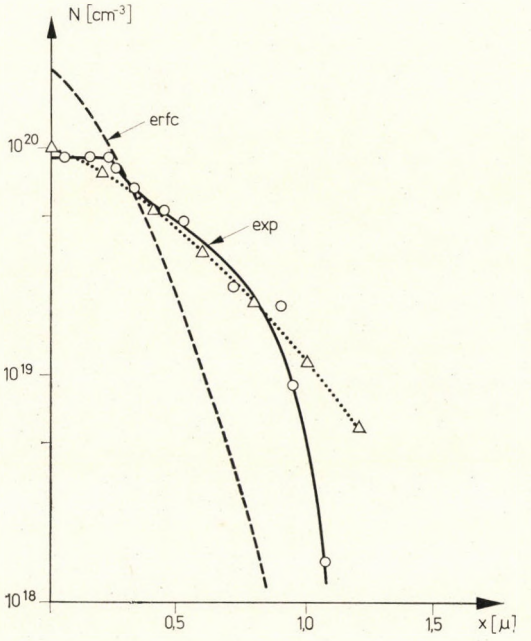


Bild 12. Experimentell bestimmter Dotierungsverlauf der Probe 256 (im Text ausführlich erklärt)

Maß der Abweichung des wahren Dotierungsverlaufes (o — o) von der, den Berechnungen i. a. zugrundegelegten, Fehlerfunktion entnommen werden. Der durch Dreiecke gekennzeichnete Verlauf ist eine durch $N_s = 1 \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und $x_j = 2{,}8\ \mu$ gekennzeichnete Fehlerfunktion, die durch das Einsetzen des gemessenen Wertepaares (R_s, $\lambda_{\min}$) in die von [16] berechnete Kurvenschar erhalten wird und die bis zur etwaigen Eindringtiefe der infraroten Strahlung der Wellenlänge $\lambda_{\min}$ eine gute Näherung an den wahren Dotierungsverlauf darstellt.

Aus den Ergebnissen dieser beiden Proben kann geschlußfolgert werden, daß der zwischen dem anhand des Wertepaares (R_s, x_j) berechneten Wert der Oberflächenkonzentration einerseits und dem durch die Extrapolation der graphischen Differentiation der spezifischen Leitfähigkeitsverteilung erhaltenen Wert andererseits bestehende Unterschied durch die Abweichung des wahren Dotierungsverlaufes von der bei den Berechnungen i. a. angenommenen Fehlerfunktion verursacht wird. Auf die Existenz einer solchen

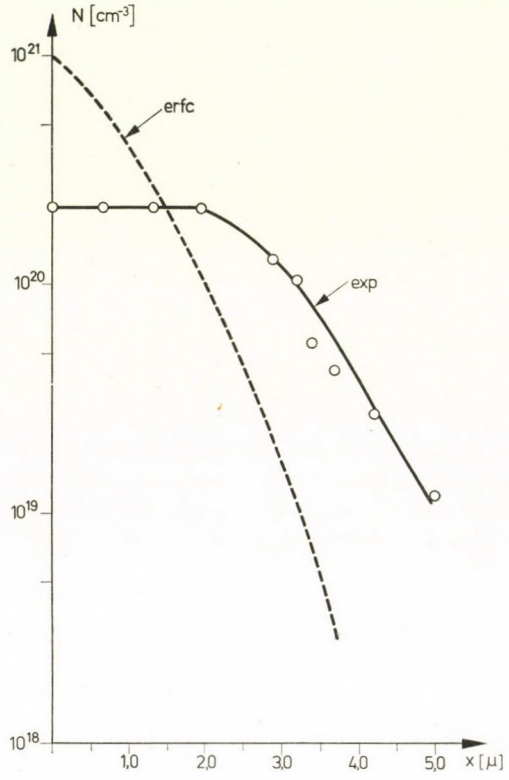


Bild 13. Experimentell bestimmter Dotierungsverlauf der Probe BE 12 (im Text ausführlich erklärt)

Abweichung wird durch den scheinbaren Widerspruch zwischen dem gemessenen und dem von ABE und NISHI berechneten Wert (R_s, λ_{min}) hingewiesen. Unsere Untersuchungen ergaben weiterhin, daß dieser Vergleich auch einen Hinweis auf die Parameter einer Fehlerfunktion gibt, falls irgendein Abschnitt des wahren Dotierungsverlaufes durch eine solche näherungsweise beschrieben werden kann.

Bild 13 dient zur Veranschaulichung unserer, an P-diffundierten Schichten erhaltenen Ergebnisse. Die anhand der an der Probe BE12 gemessenen

$R_s = 1{,}62\ \Omega/\square$ und $x_j = 6{,}15\ \mu$ nach IRWIN berechnete Oberflächenkonzentration ergab sich zu $N_s = 1 \times 10^{21}\ \mathrm{cm}^{-3}$. Die bei der Berechnung vorausgesetzte Fehlerfunktion ist im Bild 13 durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Aus dem gemessenen (R_S, x_j) ergibt sich $\lambda_{\min} \simeq 3\ \mu$ nach ABE und NISHI. Demgegenüber wurde $\lambda_{\min} = 4{,}2\ \mu$ gemessen. Aus Bild 13 geht die Abweichung des wahren Dotierungsverlaufes (o — o) von der angenommenen Fehlerfunktion hervor. Die wahre Verteilungsfunktion weist einen etwa 2,0 μ langen Abschnitt auf, der durch eine konstante freie Ladungsträgerdichte gekennzeichnet ist. Dies stimmt mit den Erfahrungen anderer Autoren bzgl. der P-Diffusion überein [18, 22]. Da der Absorptionskoeffizient α des n-leitenden Siliziums dieser Verunreinigungskonzentration für die Wellenlänge des Minimums etwa $2{,}5 \times 10^4\ \mathrm{cm}^{-1}$ beträgt [23], ist die Eindringtiefe, $d = \alpha^{-1}$, dieser Strahlung etwa 0,4 μ. Falls die diffundierte Probe einen Dotierungsverlauf mit konstantem Anfangsabschnitt der Länge $x > d$ aufweist, kann die Oberflächenkonzentration unmittelbar aus der Lage des Reflexionsminimums bestimmt werden, da sich die Probe in diesem Fall der infraroten Strahlung gegenüber wie eine Schicht homogener Verunreinigungsverteilung verhält. In Tafel II sind einige Werte von d in Abhängigkeit der freien Ladungsträgerdichte dargestellt.

Im Falle der Probe BE12 stimmte die aus dem $\lambda_{\min} = 4{,}2\ \mu$ zu $N_s = (2{,}7 \pm 0{,}3) \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$ ermittelte Oberflächenkonzentration innerhalb der Meßgenauigkeit mit dem Wert von $(2{,}2 \pm 0{,}3) \times 10^{20}\ \mathrm{cm}^{-3}$ überein, der aus der auf Bild 8 dargestellten Funktion erhalten wurde.

Tafel II

$N_s\ [\mathrm{cm}^{-3}]$	$\lambda_{\min}\ [\mu]$ homogene Verteilung	$d\ [\mu]$
1×10^{21}	3,0	0,20
5×10^{20}	3,5	0,43
1×10^{20}	6,0	0,70
5×10^{19}	7,9	1,30
1×10^{19}	16,0	1,60

4. Schlußfolgerungen

Es wurde gezeigt, daß häufig erhebliche Differenzen zwischen den aus den R_s- und x_j- Werten anhand von IRWINS Daten berechneten Werten der Oberflächenkonzentration einerseits, und der aus der Extrapolation des wahren Dotierungsverlaufes gewonnenen Oberflächenkonzentration anderseits, bestehen. Das Auftreten dieser Unterschiede wird auf die oft beobachtete

[18, 24—28] Abweichung des wahren Dotierungsverlaufes von der theoretisch erwarteten Fehlerfunktion zurückgeführt. Die aus den R_s-und x_j-Werten bestimmte Oberflächenkonzentration wird im Fall einer solchen Abweichung zu einer puren Zahl ohne physikalischen Inhalt. Daher muß entschieden werden, ob der Dotierungsverlauf der untersuchten Probe mit der theoretisch erwarteten Fehlerfunktion übereinstimmt oder nicht. Diese Entscheidung kann unter Zuhilfenahme der Lage des Reflexionsminimums getroffen werden, da die gemessenen R_s-, x_j-und $\lambda_{\min}$-Werte nur dann in Übereinstimmung mit der Kurvenschar von ABE und NISHI gebracht werden können, wenn der wahre Dotierungsverlauf mit einer Fehlerfunktion beschrieben werden kann. Somit kann also durch eine optische Messung, die keine weitere Zerstörung der Probe verursacht, entschieden werden, ob der auf herkömmliche Weise berechnete Wert der Oberflächenkonzentration den Tatsachen entspricht oder nicht.

Weiterhin wurde festgestellt, daß die Oberflächenkonzentration im Falle der P-Diffusionen, bei denen der Anfangsabschnitt des Dotierungsverlaufes häufig durch $N_s = \text{const.}$ gekennzeichnet ist, unmittelbar aus der Lage des Reflexionsminimums bestimmt werden kann.

Daraus ergibt sich die Schlußfolgerung, daß die Kennzeichnung der diffundierten Schichten durch N_s und x_j allein nicht genügt, da auch die Lage des Reflexionsminimums zur Charakterisierung solcher Schichten herangezogen werden muß.

Mein Dank gilt Frau J. RÓNAI und Herrn Dr. J. SCHANDA für ihre wertvollen Diskussionsbeiträge, weiterhin Frl. M. FERENCZ und Frau K. SIMON für ihre Hilfsbereitschaft bei der Ausführung der Messungen.

SCHRIFTTUM

1. IRWIN, J. C.: *Bell Syst. Techn. J.* **41** (1962), 387
2. MOSS, T. S. et al.: *Proc. Phys. Soc.*, Ser. 2, **1** (1968), 1435
3. SATO, K. et al.: *Sol. St. Electr.* **9**/8 (1966), 771
4. BORN, M.—WOLF, E.: Principles of Optics; Pergamon, London 1959.
5. SPITZER, W. G.—FAN, H. Y.: *Phys. Rev.* **106** (1957), 882
6. HOWARTH, L. E.—GILBERT, J. F.: *J. Appl. Phys.* **34** (1963), 236
7. MURRAY, L. A. et al.: *J. Appl. Phys.* **27** (1966), 4743
8. SCHUMANN, P. A., Jr.: *Sol. St. Techn.* **13**/1 (1970), 50
9. EDWARDS, D. F.—MAKER, P. D.: *J. Appl. Phys.* **33** (1962), 2466
10. KUDMAN, I.: *J. Appl. Phys.* **34**/6 (1963), 1826
11. SPITZER, W. G. et al.: *J. Appl. Phys.* **35**/1 (1964), 206
12. PHILLIPS, R. P.—SCHUMANN, P. A., Jr.: Abstract 90, Meeting of the Elchem. Soc., May 1965. San Francisco
13. GARDNER, E. E. et al.: *Appl. Phys. Letters* **9**/12 (1966), 432
14. RICCIUS, H. D.—ULBRICHT, G.: *Z. f. angew. Phys.* **19**/3 (1965), 203
15. MURRAY, L. A. et al.: Abstract 194, Meeting of El. chem. Soc., Oct. 1966. Philadelphia
16. ABE, T.—NISHI, Y.: *Jap. J. Appl. Phys.* **7**/4 (1968), 397
17. BARTA, E.: *Híradástechnika* **21**/11 (1970), 343
18. TANNENBAUM, E.: *Sol. St. Electr.* **2** (1961), 123
19. KLEIN, D. L.: US Pat. 32 24 904; 18. 3. 1963.

20. SMITS, F. M.: *Bell Syst. Techn. J.*, 1958. May
21. CARSLAW, H. S.—JAEGER, J. C.: Conduction of Heat in Solids, Oxford Univ. Press, 1959.
22. JOSHI, M. L.—DASH, S.: *IBM J.*, (1966), 446—454.
23. BALKANSKI, M. et al.: *Phys. Stat. Sol.* **31** (1969), 323
24. MAEKAWA, S.: *J. Phys. Soc. Jap.* **17** (1962), 1592
25. KOOI, E.: *J. El. chem. Soc.* **111** (1964), 1383
26. DUFFY, M. C. et al.: *J. El. chem. Soc.* **115** (1968), 84
27. SUBASHIEV, V. K. et al.: *Sov. Phys. Sol. St.* **2** (1961), 2406
28. NICHOLAS, K. H.: *Sol. St. Electr.* **9** (1966), 35—47

Infrared Reflectivity Characterizing Diffused Layers. The determination of the wavelength of the minimum occurring in the infrared reflection spectrum of a diffused layer enables to decide whether the diffusion profile follows the theoretically expected complementary error function or not and thus to proof the validity of the surface concentration data obtained from 4-point measurements.

Измерение рефлексии в ИК-спектре для характеристики диффундированных слоев. Показано, что путем дополнительного указания положения инфракрасного рефлексионного минимума некоторого диффундировавшегося слоя можно установить, что процесс дотации слоя соответствует или не соответствует ли теоретически ожидаемой комплементарной функции ошибки. Подчеркивается необходимость такого установления при определении поверхностной концентрации.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 73 (3—4), pp. 469—477 (1972)

ФОТОИОНИЗАЦИЯ ВНЕ ТЕРМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ДЫМОВЫХ ГАЗОВ С КАЛИЕМ

К. Г. АНТАЛ* и И. Ф. БОЛЛА**

(Поступило 8. XII. 1971 г.)

Рассматривается возможность поддержания требуемой степени ионизации рабочего газа после его адиабатического расширения в МГД канале с помощью фотоионизационного действия раскаленных угольных частиц, одновременно введенных в канал МГД. По уравнениям ионизационного и энергетического балансов получены критические температуры для раскаленных угольных частиц и их необходимое весовое количество, при широких значениях параметров.

1. Введение

Известно, что в среде дымовые газы — калий, подогретой в камере сгорания до соответствующей температуры, достигается удовлетворительная степень ионизации [1]. При адиабатическом расширении, газ с высокой скоростью попадает в канал МГД, причем температура его резко падает. Таким образом, в упомянутой рабочей среде образуется значительная объемная рекомбинация электрон-ионов, что можно выразить следующим уравнением:

$$\frac{dn_e}{dt}(\text{объемная рекомбинация}) = -\alpha n_e^2. \tag{1}$$

где n_e — плотность электронов;
t — время;
α — коэффициент (объемной рекомбинации).

В соответствии с предложением [1] замедление (вернее компенсация) процесса рекомбинации достигается за счет ввода в канал раскаленных частиц угля. Частицы угля развивают замедляющее действие за счет фотоионизации, вызванной радиацией. Для возможности применения предложенного процесса необходимо обеспечить следующие условия:

1. Частицы угля необходимо раскалить до такой температуры, при которой термическая радиация способна осуществить ионизацию атомов калия — и этим компенсируются потери от рекомбинации.

2. Окислительная тепловая энергия, накопленная в частицах угля, должна быть достаточной для поддержания ионизационного энергобаланса на время, пока рабочая среда находится в МГД канале.

* Antal K. G., Vécsei uti ltp. 4. Budapest XX.
** Bolla I. F., Kertész u. 43. Budapest VII.

2. Определение критической температуры угольных частиц

По первому условию рассмотрим термическую радиацию частиц угля, вызывающую фотоионизацию. Предположим, что радиацию можно характеризировать излучением абсолютно черного тела, т. е. зависимостью Планка. В общем виде скорость фотоионизации получается по следующей зависимости:

$$\frac{dn_e}{dt}\,(\text{фотоионизация}) = \sum_i n_i Q_i \Phi_i \Omega_i\,, \tag{2}$$

где n_i — концентрация ионизируемых атомов;
Q_i — эффективное сечение фотоионизации;
Φ_i — фотонный поток (количество ионизирующих фотонов, падающих в стерадной единице на единицу площади);
Ω_i — стерад (пространственный угол).

Исходя из спектральной плотности энергии абсолютно черного тела, имеем:

$$dE_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\gamma/kT}}\,d\nu\,, \tag{3}$$

где h — постоянная Планка;
c — скорость света;
ν — частота;
T — абсолютная температура;
k — постоянная Больцмана.

Вернее, написав спектральную интенсивность

$$dJ_\nu = \frac{c}{4\pi}\,dE_\nu, \tag{4}$$

при условии, что $kT \ll h\nu_0$, фотонный поток для частот $\nu \geqslant \nu_0$ можно записать в следующем виде:

$$\Phi = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{dJ_\nu}{h\nu} = \frac{2}{c^2}\int_{\nu_0}^{\infty} e^{-h\nu/kT}\,\nu^2\,d\nu\,, \tag{5}$$

где ν_0 — частота, соответствующая ионизационной энергии.

Если примем эффективное сечение зависимым от энергии (длины волны) и его запишем в следующем общем виде:

$$Q = Q(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + \bar{b}\lambda + \bar{c}\,, \tag{6}$$

где λ — длина волны;

тогда мы должны его учесть под интегралом, вместе с фотонным потоком. Значит, для записи уравнения (2) следует подвергнуть детальному анализу нижеследующее выражение:

$$\langle Q\Phi\rangle = 2\int_{\nu_0}^{\infty} e^{-h\nu/kT}\,\frac{Q(\lambda)}{\lambda^2}\,d\nu\,. \tag{7}$$

Решение интеграла можно представить в следующем виде (при решении задачи мы пока не пользовались пренебрежениями):

$$\langle Q\Phi\rangle = 2\nu_0\,\frac{e^{-x_0}}{x_0}\left[\Theta - \frac{1}{x_0}\,\lambda_0\,\frac{d\Theta}{d\lambda_0} + \frac{1}{x_0^2}\,\frac{d}{d\lambda_0}\,\lambda_0^2\,\frac{d\Theta}{d\lambda_0}\right], \tag{8}$$

где x_0 — безразмерный «большой» параметр, характеризирующий отношение температуры абсолютно черного тела к ионизационной энергии $x_0 = \frac{\varepsilon_i}{kT}$;

ε_i — ионизационная энергия;

Θ — безразмерный параметр $\Theta = \frac{Q(\lambda_0)}{\lambda_0^2}$;

Q — ионизационное сечение при величине $\lambda = \lambda_0$;

λ_0 — длина волны, соответствующая ионизационным потенциалам;

c — скорость света.

В дальнейшем исходим из предположения, что температура угольных частиц за время нахождения их в МГД канале не меняется, значит, они будут сгорать беспрерывно. Таким образом, с учетом вышеизложенных, баланс, характеризирующий процессы ионизации и рекомбинации, можно записать в следующей форме:

$$\frac{dn_e}{dt}\,(\text{ионизация}) = (\text{фотоион.}) + (\text{ступенчатая ион.}) + (\text{тепловая ион.}) \tag{9}$$

$$\frac{dn_e}{dt}\,(\text{рокомбинация}) = (\text{объемн.рек.}) + (\text{поверхностн. рек.}) \tag{10}$$

Фотоионизацию можно характеризовать зависимостью (2). Начнется взаимодействие фотонов со всеми компонентами рабочей среды, из которых, однако, учитывается нами только ионизация (в данном слуае) калия. Процессы диссоциации и возбуждения, вызванные фотонами, дают в результате потери фотонов, а ионизация прочих компонентов рабочего газа — прибыток электронов. Однако, влиянием этих явлений можем пренебрегать.

В зависимости (9) также пренебрегаем влиянием ступенчатой ионизации — однако, в результате получается дальнейший прибыток, т. е. повышение эффективности ионизации. Ионизация теплового характера, в связи с относительно низкими температурами, существующими в канале после рас-

ширения, не вызывает значительных добавочных явлений. В зависимости (10) объемная рекомбинация рассматривается в смысле зависимости (1). Как известно, поверхностная рекомбинация состоит из дувх составляющих. Из поверхностной рекомбинации, образующейся на изоляционной стенке генератора и «стеновой» рекомбинации, образующейся на поверхности угольных частиц, введенных для пополнения ионизационных потерь. Ввиду того, что нашей целью является исследование возможностей фотоионизации при помощи угольных частиц, мы здесь не занимаемся исследованием первой составляющей, а последней рекомбинационной возможностью, ввиду с большой работой выхода угля, в первомприближении можно пренебречь. Таким образом, в смысле вышеизложенных, уравнение, характерное для ионизационного баланса получает следующую форму:

$$n_i \langle Q\Phi \rangle \Omega = \alpha n_e^2. \tag{11}$$

Величина стерада зависит от размеров и распределения введенных угольных частиц. Точная величина его должна быть конкретно проверена для каждой отдельной задачи. По литературным данным она может меняться в пределах от 0,1 до полного значения, т. е. до 4π.

Записанный в такой форме ионизационный баланс, определяет критическую температуру частиц угля. При определении температуры можно ввести дальнейшую поправку на разность тепловой радиации угольной частицы и абсолютно черного тела, которая может быть охарактеризована фактором излучения.

Уравнение (8) рассматривается в дувх конкретных случаях:

а) С учетом экспериментальной зависимости эффективного сечения Q от энергии, изложенной в труде [2], из (3) получаем приближенное выражение:

$$\begin{aligned} &Q(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + b\lambda + \bar{c}\,, \\ &[Q] = \mathrm{cm}^2\,;\ [\lambda] = \mathrm{cm}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\bar{a} = 1{,}504 \cdot 10^{-9}$;
$\bar{b} = -8{,}37 \cdot 10^{-14}$ см;
$\bar{c} = 1{,}173 \cdot 10^{-18}$ см².

С учетом вышеизложенных для x_0 можем получить следующее трансцедентное уравение:

$$e^{x_0} = \frac{2\nu_0 n_i \Omega}{\alpha n_e^2} \frac{1}{x_0} \left[\bar{a} + \frac{\bar{b}}{\lambda_0} + \frac{\bar{c}}{\lambda_0} + \frac{1}{x_0} \left(\frac{\bar{b}}{\lambda_0} + \frac{2\bar{c}}{\lambda_0^2} \right) + \frac{1}{x_0^2} \frac{2\bar{c}}{\lambda_0^2} \right]. \tag{13}$$

Результаты, полученные нами при помощи итерационного метода при различных величинах α, n_e, n_i, Ω, сведены в табл. I.

б) Принимая эффективное сечение независимым от энергии, т.е. постоянным, трансцедентное уравнение для x_0 можно записать в следующем виде:

$$e^{x_0} = \frac{2v_0 n_i \Omega Q}{\alpha n_e^2 \lambda_0^2} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{2}{x_0^2} + \frac{2}{x_0^3} \right]. \tag{14}$$

Решения, полученные также итерационным методом при различных величинах α, n_e, n_i, Ω, Q, дают в результате табл. II.

3. Определение необходимого количества угольных частиц

Для удовлетворения 2-го условия проверим содержание энергии введенных угольных частиц; на основе чего можно определить количество угольных частиц, необходимое для возможного поддерживания ионизационного равновесия.

Предиоложим, что масса одной угольной частицы составляет:

$$m = \frac{\pi d^3}{6} \varrho,$$

где d — диаметр частицы;
ϱ — плотность угля, и

при сжигании 1 *кг* угля в воздухе при давлении p и температуре T образуются дымовые газы обемом V. Если количество угольных частиц

$$n = \frac{M}{m},$$

тогда объем на одну частицу составляет

$$V' = \frac{V}{n}.$$

В изложенном в предыдущем пункте смысле в течение 1 *сек* в объеме 1 *см*^{3} рабочего газа осуществляется рекомбинация αn_e^2 электронных-ионно пар. Значит, нам необходимо позаботиться о пополнении указанной потери энергии. Проанализируем, сколько энергии требуется для пополнения рекомбинационных потерь в элементарном объеме, приведенном на одну угольную частицу, за время нахождения рабочего газа в канале:

$$E = \alpha n_e^2 V' \tau \varepsilon_i, \tag{15}$$

где: τ — время нахождения среды в канале

$$\tau = \frac{L}{v};$$

L — длина канала;
v — скорость потока среды.

При полном сжигании угольной частицы массой m образуется следующее количество тепла

$$E_{eff} = m\varkappa\eta, \tag{15'}$$

которое можно использовать для ионизации,

где: $\varkappa$ — удельная теплота угля;
η — коэффициент полезного действия.

В зависимости (15') η характеризирует реализацию температурной радиации в ионизационной энергии; величину его определим ниже. Энергетический баланс, — приведенный к элементарному объему в системе координат, движущейся вместе с рабочей средой, — будет иметь следующий вид:

$$\alpha n_e^2 V \frac{m}{M} \varepsilon_i \tau = m\varkappa\eta. \tag{16}$$

На основе энергетического баланса можно определить небходимое количество угольных частиц в расчете на 1 *кг* угольного топлива:

$$M = \frac{\alpha n_e^2 \tau \varepsilon_i}{\varkappa\eta} V. \tag{17}$$

Вернемся к определению коэффициента η. Предполагая, что частицы осуществляют излучение в виде черного тела, необходимо проинтегрировать зависимость (3) от 0 до ∞, и получаем следующее выражение:

$$E = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4. \tag{18}$$

А это представляет собою полный энергоспектр черного тела, излучаемый при температуре Т. С точки зрения ионизации калия интересная для нас область находится в пределах от ε_i до ∞. Итак, полезная с точки зрения ионизации доля полной радиационной энергии составляет:

$$\eta = \frac{\int_{x_0}^\infty x^3 e^{-x} dx}{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}. \tag{19}$$

После вычисления двух интегралов и проведения соответствующих пре-

образований для η можем получить следующее окончательное выражение:

$$\eta = \frac{15}{\pi^4} e^{-x_0}(x_0^3 + 3x_0^2 + 6x_0 + 6). \tag{20}$$

4. Численные результаты расчетов

Ниже, прибегая к подстановке некоторых литературных данных, произведем числовой анализ полученных выражений.

а) В выражении (13) эффективное сечение фотоионизации атомов калия учитываем на основе цифровых данных, приведенных в (12). Величины, или же пределы величин прочих параметров для калия:

ν_0	$= 1.04935 \times 10^{15}$	$сек^{-1}$
λ_0	$= 2.85694 \times 10^{-5}$	$см$
n_e	$= 10^{12}$	$см^{-3}$
n_i	$= 10^{19} - 10^{16}$	$см^{-3}$
α	$= 10^{-9} - 10^{-8}$	$см^3\ сек^{-1}$
Ω	$= 4\pi - 10^{-2} \times 4\pi$	—

Подставляя приведенные выше цифровые данные, результаты, полученные на основе итерационного метода, обобщены в табл. 1. Параметр γ, приведенный в первой строчке таблицы, является целочисленным показателем степени десятичного фактора, который можно записать на левую сторону итерационного выражения, и правильным выбором его величины можно воспроизвести любую комбинацию параметров, приведенных в ряде исходных данных. Случаю $\gamma = 0$ отвечает подстановка цифровых данных, записанных в первую колонку ряда данных.

Таблица I

γ	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
x_0	19,2	17,1	15,1	13,1	11,2	9,3	7,6
T	2620	2950	3340	3850	4490	5420	6630
η	$5{,}8 \times 10^{-6}$	$3{,}4 \times 10^{-5}$	$1{,}8 \times 10^{-4}$	$8{,}9 \times 10^{-3}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$	$1{,}5 \times 10^{-2}$	$5{,}1 \times 10^{-2}$

Примечание: Температуры, фигурирующие в таблице, даны в °K, а итерационные шаги выполнены с точностью до $\pm$ 5 °K. По величинам x_0 и η произведено округление до третьей или четвертой цифры.

а) Если предполагать, что эффективное сечение фотоионизации атома калия является постоянным, необходимо применять итерационное выражение (14) и тогда ряд данных дополняется величиной

$$Q = 10^{-17} - 10^{-19}\ см^2.$$

Параметр γ и в этом случае служит для лучшей и простейшей наглядности всех комбинационных возможностей.

Таблица II

γ	0	−1	−2	−3	−4
x_0	25,6	23,4	21,2	19,0	16,9
T	1960	2150	2380	2650	2980
η	$2{,}2 \times 10^{-8}$	$1{,}5 \times 10^{-7}$	$1{,}1 \times 10^{-6}$	$6{,}9 \times 10^{-6}$	$4{,}1 \times 10^{-5}$

в) На основе выражения (17) можно вычислить общий вес угольных частиц, вводимых в канал МГД для обеспечения фотоионизационного эффекта, с пересчетом на 1 *кг* угля, введенного в камеру сгорания. Для оценки этого, в качестве примера подставляем следующие цифровые величины, взаимствованные из литературы [1]:

α	$= 10^{-9}$	*см*^{3} *сек*$^{-1}$
n_e	$= 10^{12}$	*см*$^{-3}$
τ	$= 5\times10^{-2}$	*сек*
ε_i	$= 4{,}34$	*эв*
$\varkappa$	$= 8{,}1$	*ккал г*$^{-1}$
V	$= 19{,}6$	*м*^{3} (объем дымовых газов, образующихся при сжигании 1 *кг* угля при давлении 1 *ат* и температуре 600° К)
η	$= 2{,}5\times10^{-3}$	(при Т = 3430° К)

учитывая нижеследующие отношения между единицами измерения:

$$1\,\text{eV} = 1{,}6\times10^{-12}\ \textit{эрг}; \qquad 1\ \text{ккал} = 4{,}187\times10^{10}\ \textit{эрг}.$$

Закончив вычисление по выражению (17), получаем общую массу

$$M = 51{,}6\ \textit{г},$$

что соответствует примерно 0,41 весовому проценту, так как при сжигании 1 *кг* угля в воздухе, образуется 12,49 *кг* дымовых газов.

5. Заключение

Окончательно необходимо отметить, что при вышеупомянутых пренебрежениях, предложенный в литературе [1] метод для замедления, вернее компенсации рекомбинационного процесса, происходящего в МГД канале, может быть осуществлен в относительно узком диапазоне параметров, характерных для генератора МГД.

Указанные параметры можно определить на основе балансовых выражений, приведенных в настоящей работе, и этим станет возможным определить оптимальный режим.

В заключение авторы выражают благодарность члену корреспонденту АН Венгрии д-р Карой Сенди за предложение темы и за ряд ценных замечаний.

Авторы также выражают истинную благодарность д-р техн. наук Яношу Бито за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халас, Д.—Сенди, К.: Фотоионизация в МГД генераторах. (рукопись АН Венгрии).
2. Bates, D. R.: *Proc. Roy. Soc. A.* **188** (1947), 350
3. Сабо, Й.: Изменение проводимости рабочего газа МГД генераторов с помощью BaO—K. (рукопись АН Венгрии).
4. Rosa, R. J.: *Proc. IEEE* (1963), 774

Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium. The paper analyses the possibility of maintaining the required ionization degree of the working gas in the channel of the MHD generator after the adiabatic expansion, by injection of incandescent coal grains. On the basis of the ionization equation and the energy balance, the authors state for different possible MHD-parameters the critical temperature and the quantity of the incandescent coal grains necessary for maintaining the ionization.

Photoionisation außerhalb des termischen Gleichgewichts in Rauchgas-Kalium Arbeitsmedien. Die Verfasser untersuchen die Möglichkeit für die Aufrechterhaltung des notwendigen Ionisationsgrades des Arbeitsgases im Kanal des MHD-Generators durch Zugabe von glühenden Kohlekörnern. Auf Grund der Ionisationsgleichung und der Energiebilanz werden die kritische Temperatur und die zur Aufrechterhaltung der Ionisation notwendige Menge der glühenden Kohlekörner bei verschiedenen möglichen MHD-Parametern angegeben.

RECENSIONES

J. Szabó—B. Roller

THEORIE UND BERECHNUNG DER STABKONSTRUKTIONEN

[RÚDSZERKEZETEK ELMÉLETE ÉS SZÁMÍTÁSA]

Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971, 268 Seiten, 85 Bilder

Den Bedürfnissen der Praxis entsprechend, veranlaßt durch die Schönheit der Theorie und den von der elektronischen Datenverarbeitung gebotenen Möglichkeiten, erschienen und erscheinen zahlreiche Werke, die die Matrix-Methoden der Theorie der Konstruktionen behandeln. Das vorliegende Werk setzte sich — wie auch aus dessen Titel ersichtlich ist — die derartige Analyse der Stabkonstruktionen zum Ziel. Die konkreten Erörterungen des Werkes beziehen sich auf die einfachsten, aus dem Hookeschen Gesetz folgenden prismatischen Stäben erbauten Modelle, doch kann auf diese Weise auch das Verhalten von aus gekrümmten oder aus Stäben mit veränderlichem Querschnitt bestehenden Konstruktionen annähernd ermittelt werden. Die allgemein gültigen Feststellungen des Werkes können auch auf Konstruktionen bezogen werden, die aus beliebigen, elastischen Elementen bestehen, sie können also auch als eine Theorie der Methode endlicher Elemente erachtet werden.

Das erste der vier Kapitel des Buches faßt die, im folgenden angewendeten Sätze und einzelne numerische Verfahren der Matrixalgebra in einer leicht verständlichen Weise zusammen. Im nächsten Kapitel wird diese Theorie in bezug auf die Kleinbewegungen, einschließlich einer Theorie der gedämpften und ungedämpften Schwingungen, entwickelt. Den Gegenstand des dritten Kapitels bilden die Analyse der auf der bisherigen Grundlage beruhenden Theorien zweiter und dritter Ordnung, sowie die Darstellung jenes numerischen Verfahrens, das ihre Anwendung in der Statik ermöglicht. Im letzten Kapitel wird der Stabilitätsverlust (genauer das Verzweigungsproblem) in irgendeinem Zustand der Stabkonstruktion auf Grund jener Definition der Stabilität untersucht, die besagt, daß der Gleichgewichtszustand dann stabil ist, wenn, bei unveränderten Lasten, durch die Variation der Verschiebungen und der mit diesen verträglichen inneren Kräfte, in der Nähe des untersuchten Zustandes kein »benachbarter« Zustand geschaffen werden kann, in welchem sich die Konstruktion ebenfalls im Gleichgewichtszustand befinden würde.

Den oben skizzierten Stoff fassen die Autoren in einen einheitlichen Rahmen zusammen, indem sie das Matrix—Differentialgleichungssystem der Zustandsänderung des Stabsystems aufstellen. Dieses Gleichungssystem enthält alle mechanischen (statischen, kinematischen, die Festigkeit betreffenden) und geometrischen Gesetzmäßigkeiten.

Alle weiteren, im Buch behandelten allgemeinen oder Einzelheiten betreffenden Untersuchungen werden als Einzelfälle des obenerwähnten Differentialgleichungssystems (das in einfacheren Fällen zu einem algebraischen entartet) dargestellt. Auch in anderen Werken der Fachliteratur sind solche Bestrebungen nach Vereinheitlichung vorzufinden. Das vorliegende Werk zeichnet sich durch die Ausbreitung seines Gültigkeitsbereiches sowie dadurch aus, daß es in der Weise eine Synthese schafft, bei der die aus physisch verschieden erachteten Quellen herrührenden Gesetzmäßigkeiten nicht untrennbar miteinander verschmolzen werden. Dies ermöglicht in bezug auf die verschiedensten Verfahren der Analyse von Stabkonstruktionen fast sofort nachzuweisen, daß sie in dem von den Verfassern entwickelten allgemeinen Gleichungssystem der Zustandsänderung enthalten sind.

Bei der Anwendung des allgemeinen Verfahrens auf konkrete Fälle ist natürlich die statische bzw. kinematische Bestimmtheit, Unbestimmtheit oder Überbestimmtheit zu berücksichtigen. Aus der allgemeinen Theorie können auch die allgemein bekannten Arbeitssätze leicht abgeleitet werden. Die fünf Blockdiagramme auf Bild 4 veranschaulichen deutlich jene Partitionen der Matrizen der allgemeinen Matrixgleichung, die bei der Lösung von statisch bestimmten Konstruktionen oder bei der Erörterung statisch unbestimmter Konstruktionen auf Grund des Verschiebungsverfahrens, des verallgemeinerten Verschiebungsverfahrens, der Kraftmethode oder des Verfahrens des unbestimmten Hauptsystems anzuwenden sind.

Im Werk wird auch die Anwendung des allgemeinen Verfahrens in bezug auf mehrere, praktisch bedeutende Konstruktionstypen, wie unverschiebbare und verschiebbare Rahmenkonstruktionen, einige Arten von elastisch unterstützten Trägern, Trägerroste, ebene Stabketten, hängende Stabnetze und rechtwinklige Seilnetze, eingehend behandelt.

Das Erscheinen des Buches ist, sowohl wegen der Schönheit der darin entwickelten Theorie, als auch wegen seiner Brauchbarkeit in der Praxis, mit Freude zu begrüßen. Der anspruchsvolle Konstrukteur und der Theoretiker dieses Fachgebietes dürften das vorliegende Werk kaum entbehren können.

Á. Bosznay

I. Sályi

TECHNISCHE MECHANIK

[MŰSZAKI MECHANIKA I.]

BAND I. ELEMENTE DER KINEMATIK

Dritte, verbesserte Ausgabe, Tankönyvkiadó, Budapest 1970, 331 Seiten, 306 Bilder

Das erste Kapitel des Buches bietet einen entsprechend bemessenen geschichtlichen Überblick und lenkt sodann die Aufmerksamkeit des Lesers auf einige allgemeine Grundbegriffe.

Das zweite Kapitel behandelt die Kinematik des Punktes in der gewohnten Reihenfolge: Bewegungsgesetz, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Die Untersuchung der Bewegungen erfolgt erst in einem rechtwinkligen, dann in einem besonderen zylindrischen Koordinatensystem. Im folgenden werden die Verfahren zur Bestimmung der Bewegungen anhand der verschiedenen kinematischen Kennwerte behandelt. Im Zusammenhang mit diesen sind die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Bewegungstypen eingehend dargestellt.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit der Bewegung der starren Körper und erörtert in allen Einzelheiten den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des Körpers. Ein sorgfältig bearbeiteter Teil des Werkes behandelt die Bewegungsmerkmale in sich im Verhältnis zueinander bewegenden Koordinatensystemen. Abschließend werden die Bewegungen des Körpers in Gruppen eingeteilt und einige wichtigere Bewegungstypen erörtert.

Der Anhang faßt die Elemente der Vektor- und Tensorrechnung zusammen. Der Vektor- und Tensoralgebra folgt die Behandlung der Vektor–Skalar- und Tensor–Skalar-Funktionen.

Kennzeichnend für das Lehrbuch ist die besondere Gabe des Verfassers, den Stoff in leicht verständlicher Weise zu erklären. Die glücklich gewählten Beispiele ermöglichen auch die Erlangung einer entsprechenden Übung in der Anwendung des gelernten Stoffes. Auch das Prinzip der Progression kommt in der Behandlung des Stoffes zur Geltung, indem der Leser von den einfachsten Problemen ausgehend, zu den zusammengesetzteren gelangt. Außer der leichtverständlichen Abfassung zeichnet sich das Werk besonders durch die mathematische Präzision aus, die vornehmlich für Ingenieure von besonderer Wichtigkeit ist, in manchen Werken aber bedauerlicherweise fehlt. Hier vereinigt aber die Person des Verfassers die Qualitäten des Mathematikers mit jenen des Wissenschaftlers auf dem Gebiet der Mechanik, was notgedrungen die mathematische Präzision zur Folge hat.

Im Zusammenhang mit dem Lehrbuch kann man höchstens die Frage stellen, ob der umfangreiche, die Zusammenfassung der Vektor- und Tensorrechnung beinhaltende Anhang auch heute noch — wie noch vor einigen Jahrzehnten — notwendig ist. An den technischen Universitäten bilden heute diese Themenkreise ebenso grundlegende Teile des Mathematikunterrichtes, wie z. B. die Differential- und Integralrechnung usw. Diese Fragen können zweifellos nur anhand der beim Unterricht gesammelten Erfahrungen beantwortet werden, die jedoch seitens der zuständigen Fachleute gelegentlich der Annahme der Thematik des Werkes, sicher auch richtig erwogen wurden.

Schließlich kann zusammenfassend festgestellt werden, daß das Werk auch in seiner dritten Ausgabe seinen wesentlichen Charakter beibehalten hat und eines der hervorragendsten ungarischen Universitätslehrbücher ist.

T. Cholnoky

J. L. Bogárdi

SEDIMENT TRANSPORTATION IN ALLUVIAL STREAMS

[VÍZFOLYÁSOK HORDALÉKSZÁLLÍTÁSA]

Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest 1971, 837 pages

It may be regarded as a direct consequence of specialisation in various branches of science, that whereas a few decades age the art and scientific background of hydraulic engineering could be reviewed in detail within the scopes of a single handbook, today separate volumes would be necessary for any detailed treatment of particular expectations thereof. A striking example of such work is the comprehensive volume on sediment transportation in alluvial streams, where inspite of the ample spaces of 837 pages the author was compelled to restrict the subject treated in order to conway due comprehensive and thorough information on the most important problems. It is for this reason that a general review is only presented on the relations between sediment transportation and river regulation, further on the silting of reservoirs, as well as on scouring in the vicinity of structures and the measurement of sediment.

The subject matter of the book "The theory of sediment transportation" written by the author in 1954—55 is in this sence somewhat restricted in the new volume, but this is more than emply offset by the sorroughness of treatment which reflects the advances achieved in the intervening period in this field. A considerable merit of the book is that the individual approache developed by the author on the basis of his original investigations and studies could be successfully amalgamated with the wealth of information gained from the relevant international literature, submitting at the same time the latter to sound criticism and analysis as a result of which often apparently conflicting theories could be reconciled into a uniform picture. The bases underlying this approach is the exact physical description to which the author adheres consequently.

The significance of the present book exceeds the domain of sediment transportation by the application of the general transport equations a model example being given for the successfull application of advances in another branch of science to sediment transportation and at the same time to other hydraulic phenomena as well.

The discussion of numerous results attained abroad, together with the relevant references and bibliography contribute to making the book a fundamental source of information for those interested in particular problems not only in Hungary, but all over the world. Broad international practice and personal contacts plaid an important role in the carefull selection of the works mentioned in this volume the discussion of which is all the more valuable by the personal discussions which the author had opportunity to carry out either personally or by correspondence with the corresponding authors.

It should be emphasized as a special merit of this book — particularly for the scientists and investigators dealing with sediment transportation problems — that the questions associated with hydraulic similarity are analysed from a new approach. Of great significance is the summary presented on the model laws relating to alluvial streams, including distorted models, in which the author could rely on his personal achievements. The novel application of the transport equations should be received with interest by the international expert public.

The author does not restrict himself to the general description and discussion of the methods but based on the results of sediment measurements iniciated by him in Hungary and arrived at in the laboratory of the Research Institute For Water Resources Development, proceeds to present a detailed picture on sediment transportation in Hungarian water courses mentioning also the relevant figures.

The contents of the book can be classified into three main parts, namely those on the theory of sediment transportation, the inter-relations existing between sediment and the water course, finally on the discussion of sediment transportation studies in Hungary. Of these the first part is the widest, covering 460 pages, the second and third extending to 220 and 100 pages, respectively. The detailed bibliography covers additional 20 pages.

Within the first main part the fundamentals of investigations related to the sediment and the movement thereof, the theories concerned with the movement of bed-load, and suspended sediment are described. In connection with bed-load transportation specially mention must be made of the variable critical tractive forces and the laws of variable critical velocities, which are the results of recent investigations by the author. The general transport equations have been applied first by the author to the study of suspended sediment transportation.

The second main part is devoted to the empirical relationships, to the hydraulic parameters of sediment and the water-cource, to regime theory, to the interrelations of sediment movement and river regulation, as well as to the laws governing hydraulic similarity in sediment transportation. From the theoretical viewpoint this discussion of similarity may be regarded as of basic importance in that the expressions derived from the balance equations for the condition equations ensuring the similarity of alluvial streams are discussed here for the first time in the relevant international literature.

A historical review of sediment measurements and research in Hungary is presented in the third main part listing also the achievements thereof. Sediment transportation in the rivers in Hungary is illustrated through measurement data, the processing, analysis and representation of the data obtained giving thus simultaneously an example for such work. Attention is here focussed mainly on the Danube and the Tisza rivers, but references are made also to sediment transportation in the Rába, Zala, Szamos, Sajó, Hernád, Fekete-Körös, Sebes-Körös, Berettyó and Maros rivers as well. This main part would form an independent volume alone. It should be received with great interest primarily by designers and hydraulic engineers engaged in river regulation, but it should be significant also for readers abroad since the data published on sediment transportation may be compared with those on rivers elsewhere, permitting thus valuable parallels to be drawn and checks to be made on methodology. In this manner it may contribute to the generalisation of regularities observed.

Interesting new results in one of the conventional fields of Hungarian scientific activity, mainly the study of alluvial channels are presented in this book on sediment transportation, contributing thus to the general advencement of this branch of science.

The present book makes prove to be of benefit beyond the circle of hydraulic engineers engaged in river regulation also to those dealing with waterthreatment, further to geologists and geographers as well as to those performing hydraulic model tests.

The Publishing House of the Academy is to be congratulated for the great care and taste it has devoted to the external appearence of this book.

Ö. Starosolszky

BETON-KALENDER 1971

TASCHENBUCH FÜR BETON-U. STAHLBETONBAU UND DIE VERWANDTEN FÄCHER

Verlag Wilhelm u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf,

60. Jahrgang, I. Teil: 1312 S., II. Teil: 816 S.

Seit nunmehr 60 Jahren ist der *Beton-Kalender* das Standardhandbuch des Beton- und Stahlbetonfaches. Sein Schriftleiter ist Dr.-Ing. G. FRANZ, Professor der Technischen Universität Karlsruhe, ein weltbekannter hervorragender Fachmann des Beton- und Stahlbetonbaues. Die Verfasser der einzelnen Kapitel sind erstrangige Gelehrte des Faches.

Der auf dem Gebiet des Beton- und Stahlbetonbaues tätige Fachmann wird in diesem Buche all jene Angaben und Regeln vorfinden, die er im Laufe seiner alltäglichen Arbeit benötigt. Besonders wichtig ist es, daß all dies in allgemein verständlichem Vortrag mit den erwünschten Erklärungen vorgetragen wird. Es ist hervorzuheben, daß in dem Buche alle Angaben den neuesten Feststellungen der stets fortschreitenden Wissenschaft angepaßt sind.

Im *ersten Teil* des Buches ist das Kapitel Festigkeitslehre (Verfasser: Prof. W. DIMITROV, Karlsruhe) neu. Es behandelt die Fragen der Festigkeitslehre, besonders des Stahlbetonbaues in moderner Auffassung und viel ausführlicher als es im früheren Jahrgang der Fall war. An gleicher Stelle behandelt das Kapitel, das sich mit der Bemessung von Stahlbetonkonstruktionselementen befaßt (Verfasser Dr.-Ing. E. GRASSER, München, sowie Prof. Dr.-Ing. K. KORDINA und Dr.-Ing. V. QUAST, Braunschweig) die *n*-freie Querschnittsberechnung sowie die Frage der Knicksicherheit. Dieses reichillustriertes Kapitel machen mit den neuen, auf wirklichkeitsnahen Annahmen beruhenden Berechnungsverfahren bekannt und zwar anhand zahlreicher Erklärungen und Beispiele.

Der *Anhang des ersten Teiles* bedeutet einen besonders wertvollen Behelf für das Stahlbetonfach, da er den Entwurf der neuen deutschen Stahlbeton-Bestimmungen (DIN 1045) enthält. Diese Bestimmungen machen gegenüber den alten Bestimmungen einen bedeutenden Schritt nach vorwärts in der Richtung rationeller Bemessung. Selbstverständlich macht

die Einführung des neuen *n*-freien Bemessungsverfahrens die Umwertung zahlreicher Begriffe und Regeln des alten Verfahrens notwendig. Das Handbuch paßt sich auch in dieser Hinsicht treu den veränderten Ansprüchen an.

Im *zweiten Teil* des Buches kann das Kapitel (Verfasser: Prof. Dr.-Ing. F. LEONHARDT, Stuttgart) über die Bewehrung der Stahlbetonkonstruktionen auf allgemeines Interesse Anspruch erheben. Von reichlichem Bildmaterial begleitet und auf ausgedehnte praktische Erfahrungen gestützt faßt dieses Kapitel die Regeln richtiger Bewehrung von Stahlbetonkonstruktionen und die Folgen unrichtiger Bewehrung zusammen.

Der *Anhang des zweiten Teiles* macht mit den Stahlbetonbestimmungen der Vereinigten Staaten bekannt, und zwar mit Angaben die auf kg und cm umgerechnet sind, was die richtige Behandlung dieser Bestimmungen sehr erleichtert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß der *Jahrgang* 1971 *des Beton-Kalenders* ein, seinem alten Ruf würdiges, ausgezeichnetes Handbuch ist, das mit seinem reichen Angaben- und Wissensmaterial zur Lösung verschiedener Probleme des Entwurfes, der Bemessung und Ausführung wertvolle Hilfe gewährt. Als solches kann es auf weltweites, lebhaftes Interesse Anspruch erheben.

P. Csonka

INDEX

Geszti, P. O.—Patkó, J.: Overhead Lines with Insulated Phase Conductors — Freileitungen mit isolierten Phasenleitern — *Гести, П. О., Патко, Я.:* Линия воздушной электропередачи с изолированными фазовыми проводами 265

Prohászka, J.: Determination of the Stereographic Pole Figures of Hexagonal Crystals without Plotting — Bestimmung der stereographischen Polbilder von hexagonalen Kristallen ohne Zeichnen — *Прохаска, Й.:* Определение без черчения стереографической конфигурации гексагональных кристаллов 279

Erdélyi, E. A.: Magnetic Fields in Nonlinear Heteropolar Rotating Machines — Magnetische Felder in nichtlinearen, heteropolaren Drehmaschinen — *Эрдеи, Э.:* Магнитные поля в нелинейных гетерополярных вращающихся машинах 293

Falk, S.: Ein einfaches Iterationsverfahren zur Bestimmung der Eigenwerte eines Hermiteschen (reellsymmetrischen) Matrizenpaares — A Simplified Successive Approximation Method for Determination of the Eigenvalues of Hermite's (Real Symmetric) Pair of Matrices — *Фальк, Ш.:* Простой итерационный метод определения собственных значений матричной пары ГЕРМИТЕ (вещественной симметричной) 327

Michelberger, P.: Berechnung der durch die Fertigungsungenauigkeiten des Fahrgestells hervorgerufenen Montagespannungen mit Hilfe des Matrizen-Kraftgrößen-Verfahrens — Calculation of Mounting Stresses Induced by Inaccurate Manufacturing of Vehicle Frameworks with the Aid of the Matrix Force Methods — *Михельбергер, П.:* Расчет напряжений, образующихся при сборке от неточного изготовления конструкций транспортных средств 335

Mrs. K. Pásztor-Varga: On Some Minimizing Algorithms of Boolean Functions — Über einige Algorithmen für die Minimierung von Booleschen Funktionen — *Пастор, Э.:* О некоторых минимализирующих алгоритмах функций Буля 349

Huszthy, L.: Gear Calculation by Using Complex Expressions — Komplexe Schreibweise im Entwerfen von Zahnrädern — *Хусти, Л.:* Комплексное представление зубчатых колес при их проектировании 363

Muspratt, M. A.: Numerical Analysis of Circular Orthotropic Plates — Numerische Analyse von kreisförmigen orthotropen Platten — *Муспрат, М. А.:* Числовой анализ круглых ортотропных пластин 401

Sebők, F.: Statische Untersuchung einer längsversteiften Tonnenschale mit gelenkigem Kreisrand durch Anwendung Fourierscher Reihen — Design Analysis for a Hinged Circular Cylinder with Axial Ribs by the Fourier Series Method — *Шебек, Ф.:* Статическое исследование цилиндрической оболочки с продольной жесткостью и с шарнирным круговым краем, применяя ряды Фурье 413

Dzięcielak, R.: On the Determination of the Constants of a Consolidating Medium — Über die Ermittelung der Festwerte eines Befestigungsstoffes — *Дзицилак, Р.:* Определение постоянных некоторого усилителя 433

Dey, D. K.—Das, A. K.: Thermal Stresses in a Finite Transversely Isotropic Hollow Circular Cylinder Heated on the Outer Curved Surface and with Ends in Contact with Smooth Insulating Plates — Wärmespannungen in einem endlichen, in der Querrichtung isotopen, an flache Wärmeisolierungsplatten anstoßenden und an der gekrümmten Außenfläche erwärmten leeren Kreiszylinder — *Дей, Д. К., Даш, А. К.:* Термические напряжение в некотором конечном изотропном по поперечному сечению полом круглом цилиндре, нагреваемом на его внешней кривой поверхности и соприкасающемся на его концах с плоскими термоизоляционными пластинами 441

Barta, E.: Reflexionsmessung im Infraroten zur Kennzeichnung von diffundierten Schichten — Infrared Reflectometry for Characterizing Diffused Layers — *Барта, Э.:* Измерение рефлексии в ИК спектре для характеристики диффундированных слоев 453

Antal, K.—Bolla, I.: Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium — Photoionisation außerhalb des termischen Leichtgewichts in Rauchgas–Kalium-Arbeitsmedien — *Антал, К., Болла, И.:* Фотоионизация вне термического равновесия в магнитогидродинамической среде дымовых газав с калием 469

Recensiones

Szabó, J.—Roller, B.: Theorie und Berechnung der Stabkonstruktionen (Bosznay, Á.) 479

Sályi, I.: Technische Mechanik Band 1. Elemente der Kinematik (Cholnoky, T.) 480

Bogárdi, J. L.: Sediment Transportation in Alluvial Streams (Starosolszky, Ö.) 481

Beton-Kalender 1971, Taschenbuch für Beton- u. Stahlbetonbau und die verwandten Fächer (Csonka, P.) 482

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Zacsik Annamária

A kézirat nyomdába érkezett: 1972. V. 30. — Terjedelem: 21,5 (A/5) ív, 91 ábra

72.73665 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 265—277

GESZTI, P. O.—PATKÓ, J.: *Overhead Lines with Insulated Phase Conductors*

In the steady-state operation of high-voltage overhead transmussuin lines, the dielectric strength of the air may break down partially causing thus corona effects; during transient states short-circuits may occur between a phase conductor and the earth or between phase conductors mainly due to the switching overvoltages. For eliminating or reducing these effect the authors propose to coat the phase conductiors with a thin, smooth, self-cleaning insulation layer. The thermal load capacity of the line would not change at all, or only insignificantly. The results of measures showed that the critical voltage (and the corona loss too) are considerably reduced by the insulting layer covering the surface of the cable, and the resistance against switching overvoltages is consideragly improved as well.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 278—290

PROHÁSZKA, J.: *Determination of the Stereographic Pole Figures of Hexagonal Crystals without Plotting*

The paper describes a method for the simple determination of the pole diagrams of cubic and hexagonal crystals. Instead of the usual draftin technique, determination of the individual pole positions is by two point co-ordinates that can be measured in the basic plane. For the determination of these co-ordinates simple relations are introduced whose computerized solution greatly simplifies the construction of the pole diagram. Finally, a method is described whereby a pole diagram of any axis ratio can be simply replotted from the 0001 pole diagram of a given c/a ratio hexagonal crystal.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 291—324

ERDÉLYI, E. A.: *Magnetic Fields in Nonlinear Heteropolar Rotating Machines*

When the non-linearities caused by iron saturation are considered, the usual linear theories for the determination of the performance characteristic of rotating electrical machines cannot be used. In this paper methods are developed by the author for solving the boundary value problem of the non-linear two-dimensional vector potential. The transformation of the partial differential equations into difference equations is explained and numerical methods developed to obtain solutions. The procedure is illustrated by applications to heteropolar salient rotating machines.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 325—332

FALK, S.: *A simplified successive Approximation Method for Determination of the Eigenvalues of Hermite's (Real Symmetric) Pair of Matrices*

A Hermite-type pair of matrices — i.e. Hermite's quadric matrices A and B nth order, from which B is a positive or negative definite — is assumed to be given, and the eigenvalues of the pair of matrices should be determined. The method of successive approximation based upon Ritz's procedure is presented which permits ;the determination with a reasonable calculation work the minimum eigenvalues in an increasing sequence, and the maximum eigenvalues in a decreasing sequence.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 346—359

Mrs. PÁSZTOR-VARGA, K.: *On Some Minimizing Algorithms of Boolean Functions*

The paper presents algorithms for calculating the disjunctive norm form containing a minimum number of variables of completely and incompletely determined Boolean functions, which algorithms are more efficient, from an electrical design engineer's point of view, than the existing ones. — The algorithm called the algebraic method uses certain basic elements of the Quine algorithm and of the consensus method. The basic idea of the trial method can be traced to a paper by GAVRILOV. — The methods presented here do not assume that the full disjunctive normal form of the Boolean function which is to be minimized is given, but an arbitrary disjunctive normal form of the function can be given. The algorithms utilize the special possibilities inherent in the given disjunctive normal form, thus the number of steps and the memory requirement are greatly reduced. — The algorithm yields the enumeration of all prime implicants of the function and of its essential prime implicants; and the covering table for the non-essential prime implicants and for the function pointst not yet covered by the essential prime implicants.

Acta Technica Hung. **73** (1972) 360—396

HUSZTHY, L.: *Gear Calculation by Using Complex Expressions*

In this paper, some geometric and mechanical properties of pairs of spur gears, characterized by straight teeth and parallel axes, are treated. The main points are: definition of the mating profile of a given one; analysis of the line of action; analysis of the geometric and mechanical conditions of mating; investigation of the gear ratio modification motivated by some deviation of the interaxis; calculation of the relative tooth-sliding velocity; calculation of the momentaneous normal tooth-force. One of the mating profiles, usually the pinion profile, is considered as given; by this datum the ine of actions is determined and so is the other mating profile. A rem-, arkable feature of the calculation method as described below, besides the usage of complex expressions, is the derivation of the results from given functions by which the profile of the pinion is determined.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 397—407

MUSPRATT, M. A.: *Numerical Analysis of Circular Orthotropic Plates*

Lower bound pastic analysis techniques are described for orthotropic axisymmetric plates and slabs. The procedures involve a numerical optimisation by mathematical programming of either linear or nonlinear systems.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 408—426

SEBŐK, *F.*: *Design Analysis for a Hinged Circulár Cylinder with Axial Ribs by the Fourier Series Method*

Research carried out at the Chair for Reinforced Concrete Structures of the Budapest Technical University has led to the conclusion that thick-walled prestressed concrete vessels not only involve difficulties in calculating but are basically uneconomical, since large dimensions entrain increased thermal stresses. Solutions is sought for by applying disengaged structures, exempt from significant thermal gradients and though of sufficient rigidity. Research work is focused on circular cylindrical shells with axial ribs. Rib interestices are filled out with a good shielding and heat insulating material without inherent strength. Prestress is due to axial wires led in ducts in the ribs and tangential ones wound around rib crests. A structural analysis has been worked out for the vessel basing on the conventional energy method. As primary members the hinged short circular cylindrical shell and the beam supported elastically on the tangential prestressing wires, are chosen. All loads are expanded in Fourier series. Equality of displacements yield for each wave period a system of linear equations.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 434—444

DEY, D. K.—DAS, A. K.: *Thermal Stresses in a Finite Transversely Isotropic Hollow Circular Cylinder Heated on the Outer Curved Surface and with Ends in Contact with Smooth Insulating Plates*

In this paper thermal stress has been obtained in the case of a finite transversely isotropic hollow cylinder heated symmetrically on a part of the outer curved surface of the cylinder while on the inner surface radiation takes place. All stresses and displacements re obtained in series form.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 427—433

DZIECIELAK, R.: *On the Determination of the Constant of a Consolidating Medium*

In this paper the method of calculation for the determination of the elastic coefficients of the theory of consolidation formulated by BIOT is described. It is shown that to these calculations the known physical properties of solid are sufficient.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 445—459

BARTA ELISABETH: *Infrared Reflectivity Characterizing Diffused Layers*

The determination of the wavelength of the minimum occurring in the infrared reflection spectrum of a diffused layer enables to decide whether the diffusion profile follows the theoretically expected complementary error function or not and thus to proof the validity of the surface concentration data obtained from 4-point measurements.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 460—468

ANTAL, K. G.—BOLLA, I. F.: *Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium*

The paper analyses the possibility of maintaining the required ionization degree of the working gas in the channel of the MHD generator after thg adiabatic expansion, by injection of incandescent coal grains. On the basis of the ionization equation and the energy balance the authors state for differet possible MHD parameters the critical temperature and the quantity of the incandescent coal grains necessary for maintaining the ionization.

Acta Techn. Hung. **73** (1972) 333—345

MICHELBERGER, P.: *Calculation of Mounting Stresses Induced by Inaccurate Manufacturing of Vehicle Frameworks with the Aid of the Matrix Force Methods*

For the calculation of the mounting stresses of vehicles structures, or in the case of specification of the permissible stress values, by simplifying the static model, difference equations may successfully be applied. For the determination of the permissible fabrication tolerances, simple, closed formulas may be derived. In the case of irregular structures which cannot be simulated with satisfactory accuracy by a simplified model, it is convenient to analyse the kinematic loads with the aid of matrix calculation. Here, the inverse of the coefficient matrix of the compatibility equation being anyway available, might be used. The size tolerance (i.e. the permissible inaccuracy in fabrication) to be prescribed by the technological instructions may, in such cases, be determined from a matrix unequality instead of a single unequality (in the limiting case: equality).

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 16.00 a volume. Orders may be placed with „Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en fraçais, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 16.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском немецком, английском и французском языках.

«*Acta Technica*» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 16.00 за том. Заказы принимает предприятие по внейшней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA

Drejtorija Qändrone e Pärhapjes dhe Propagandimit të Libri
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

GLOBUS
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
162, rue du vidi 5, Place St. Jean
100 Bruxelles

BULGARIA

HEMUS
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
SLOVART A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay-Lussac
Paris 5e

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import Department
Dennington Estate
Wellingsborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4—5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND

Swetz & Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze
Techna
Via Cesi 16
40135 Bologna

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41—43
Oslo 1

POLAND

RUCH
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucureşti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almquist & Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood, Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31 East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

22. I. 1973 **Index: 26.025**