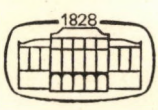
ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 69
FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1970

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
LÉVAI ANDRÁS

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 16.00.

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Benedek, Z.: An Investigation of the Effective Wake Fraction of Geosims — Untersuchung der effektiven Mitstromziffern der Modellfamilien — *Бенедек, З.:* Анализ эффективного коэффициента течения семейств моделей 181

Bogárdi, J. L.—Szücs, E.: Balance Equations of Suspended Sediment Transportation — Bilanzgleichungen der Schwebestoffführung — *Богарди, Я. Л.—Сюч. Э.:* Балансовые уравнения движения потока взвешенных материалов 3

Bosznay, Á.: Dynamics of a Model of Stick-Slip — Dynamik eines Modells des Stick-Slip-Vorganges — *Боснаи, А.:* Динамика одной модели неплавного (с перебоями) скольжения: 39

Cser, Gy.: Untersuchung des Saugvorganges von Viertakt-Dieselmotoren mit direkter Einspritzung — Analysis of the Suction Process in a Direct Injection Type 4-Stroke Dieselengine — *Чер, Д.:* Исследование процессов всасывания четырехтактного дизельного двигателя с непосредственным впрыскиванием 275

Csonka, P.: Analogy between the Stress States of Spherical Shells and Paraboloidal Shells of Revolution — Analogie bestehend zwischen dem Kräftespiel von Kugelschalen und den ihnen zugeordneten Rotationsparaboloidschalen — *Чонка, П.:* Аналогия существующая между работой сил сферических оболочек и оболочек в виде параболоида вращение 195

Domokos, M.: Estimations of Distribution and Density Functions and their Applications in the Management of Water Resources 381

Fazakas, B.: Ergänzungen zur genaueren Berechnung des durch Fräsen erhaltenen Spanquerschnittes — Contribution to a More Precise Method of Finding the Cross-Section Area of a Chip Milling — *Фазакаш, Б.:* Дополенния к уточнению расчета сечения стружки, получаемой при фрезеровании 367

Ferencz, Cs.—Tarcsai, Gy.: Theoretical Explanation of the Solar Red-Shift Limb effect 223

Goschy, B.: Analysis of the Torsional Equation of Box Girders being in the State of Complex Torsion — Analyse der Torsionsgleichung von Kastenträgern bei komplexer Drillung — *Гоши, Б.:* Анализ уравнений кручения коробообразных балок, находящихся в состоянии сложного кручения 325

Gulyás, J.—Frau Z. Szarka: Warmverformungsversuche mit einer homogenen Messinglegierung — Warmforming Experiments with a Homogeneous Brass Alloy — *Гуяш, Й.—Сарка, З.:* Исследование явлений горячей деформации гомогенного латунного сплава 137

Kaszap, I.: Über die Möglichkeiten der Verminderung des harten Ganges bei Dieselmotoren mit direkter Einspritzung — Study on the Possibility to Eliminate the Hard Running of Direct Injection Diesel Engines — *Касап, И.:* О возможностях уменьшения жесткости хода дизельных двигателей с непосредственным впрыскиванием 225

Kézdi, Á.: Spannungen in Zweiphasensystemen — Stresses in a Two-Phase Medium — *Кезди, А.:* Напряжения в двухфазной системе 29

Kollár, L.—Gárdonyi, Z.—Holnapy, D.: Bending Analysis of a Symmetrically or Antimetrically Loaded Straight-Edge Shell with Surfaces of Fourth Order — Berechnung einer gebogener symmetrisch und antimetrisch belasteten Schalenfläche vierter Ordnung mit geraden Rändern — *Коллар, Л.—Гардони, З.—Хольнапи, Д.:* Расчет на симметричную и антиметричную нагрузки гнутых оболочек с прямым краем и с поверхностью четвертой степени 105

Kollár, L.—Szőts, M.: Edge Disturbances of the Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shell Bounded by four Generatrices — Randstörungen der windschiefviereckförmigen flachen hyperbolischen Paraboloidschale — *Коллар, Л.—Сёч, М.:* Краевые возмущения плоской гиперболической параболоидной оболочки в виде искаженного четырехугольника 67

Lévai, I.: Über verzahnte Räder, die eine veränderliche Bewegungsübertragung zwischen sich kreuzenden Achsen verwirklichen und durch ein geradschneidiges Werkzeug abwälzbar sind — Variable-Ratio Gears with Crossed Axes, Generated with Straight-Edged Tools — *Леваи, И.:* Обработка зубчатых колес, выполняющих передачу переменного движения между разнонаправленными соями, с помощью инструмента с прямой режущей кромкой 149

Madhav, M. R.: Side Friction in Consolidation Tests — Seitenwandreibung in den Bodenbefestigungsversuchen — *Мадхав, М. Р.:* Трение откоса при опытах по упрочнению грунта 467

Nyíri, A.: Determination of the Theoretical Characteristics of Hydraulic Machines, Based on Potential Theory — Berechnung der theoretischen Charakteristik von hydraulischen Maschinen auf Grund der Potential-Theorie — *Нири, А.:* Определение теоретических характеристик гидродинамических машин на основе потенциальной теории 243

Pápai, L.: Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse bei lotrechter pneumatischer Förderung — Velocity and Pressure in Vertical Pneumatic Conveying — *Папаи, Л.:* Режим скоростей и давлений, формирующихся в процессе вертикального пневматического транспорта 83

Pethő, Sz.: Experimentale Vorbedingungen der Wichtemessung an festen Körpern — Experimental Conditions for Measuring the Specific Weight of Solid Probes — *Петe, С.:* О точности определения удельного веса 341

Ray, D. R.: Mechanical Response in a Composite Piezoelectric Transducer under Polarisation Gradient — Das Verhalten des komplexen piezoelektrischen Transduktors gegenüber mechanischer Einwirkung bei einem Polarisationsgradienten — *Рей, Д. Р.:* Поведение сплошного пьезоэлектрического преобразователя в случае механического воздействия в присутствии поляризационного градиента 415

Sitkei, Gy.: Einige Probleme der Bereifung von Ackerschleppern, insbesondere an leichten Böden — Certain Problems of the Tyre-Outfit of Agricultural Tractors with Special Respect of Loose Soils — *Ситкеи, Д.:* Некоторые проблемы ошиновки тракторов, уделяя при этом особое внимание неплотным почвам 351

Schäffner, H.-J.: Viskosität und Lagerungsdichte vibrierender Kornhaufwerke — Viscosity and Relative Density of Vibrated Granular Waste Rock Piles — *Шеффнер, Х. И.:* Вязкость и относительная плотнотьс породных отвалов зернистой структуры, подверженных действию вибрации 425

Soare, M.: The Cylindrical Bending of Double-Layer Diagonal Square Mesh Grids — Zylindrische Biegung von zweilagigen, zweiläufigen diagonalen Stabrosten — *Шор, М.:* Цилиндрический изгиб пространственных пластинообразных сеток с квадратной решеткой 433

Sziklavári, J.: Accelerated Reduction of a Smolten Charge of High FeO-Content by Means of Carbon Solved in Iron — Beschleunigung der Reduktion von FeO-reichen Schmelzen mit in Eisen gelöstem Kohlenstoff — *Сиклавари, Й.:* Ускорение восстановления богатых FeO расплавов растворенным в железе углеродом 171

Vamadevan, V. K.: Estimation of Evapotranspiration of Rice by Indirect Methods — Schätzung der Evapotranspiration des Reises mit Hilfe von indirekten Methoden — *Вамадеван, В. К.:* Косвенный метод оценки поверхностного испарения и испарения растений на рисовых плантациях 477

BOOK REVIEWS — BUCHBESPRECHUNG

Falk, S.: Lehrbuch der technischen Mechanik (Barta J.) 219

Franz, G.: Beton-Kalender 1970 (Csonka P.) 219

Rühle, H.: Räumliche Dachtragwerke. Konstruktion und Ausführung (Csonka, P.) 220

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 69

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1970

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 3—27 (1970)

BALANCE EQUATIONS OF SUSPENDED SEDIMENT TRANSPORTATION

J. L. BOGÁRDI*

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

and

E. SZÜCS**

CANDIDATE OF TECHN. SCIENCES

[Manuscript received: 24 March 1970]

A requirement common to every field of engineering is to derive the expressions intended for practical computations free of arbitrary constraints, and to introduce assumptions which are clearly defined and consistent with the laws of Nature. Failing to do this, the validity ranges of individual expressions become obscured. A possibility for the methodical, uniform approach to engineering problems is offered by the transport theory, which is founded on the most general laws of physics, namely the conservation theorems. It is demonstrated that by this approach the general set of balance equations of sediment transportation can be formulated. The basic equations of some of the sediment transportation theories will be derived from the general set of balance equations. In this connexion it will be illustrated which of the 10 possible assumptions are used in individual theories.

1. The general transport-theory

Many theories involving a wide variety of assumptions have been published in the relevant literature for describing the movement of suspended sediment. This movement is a highly complex physical phenomenon to which the methods of mathematical logics cannot be applied, unless simplifying assumptions can be introduced. The assumptions are manifold and exceedingly different in nature, making any direct comparison between the different theories very difficult.

The transport theory introduced long ago in thermodynamics is founded on firm, well established principles. It appeared logical to describe the movement of suspended sediment with the aid of basic equations resembling those applied in the general transport theory.

From the existence of a similar set of equations it logically follows that the individual theories may be regarded as different combinations of the basic equations, which depend on the particular assumptions introduced.

It is deemed advisable to review the general transport theory in brief to thus facilitate its application to the movement of suspended sediment.

* BOGÁRDI, J. L. Professor of Hydraulic Engineering, Technical University, Budapest, Műegyetem rkp. 3, *Budapest XI.*, (Hungary)

** SZÜCS, E. Senior Scientific Advisor, ÉTI Research Institute for Building Sciences, Diószegi u. 7, *Budapest, XI.*, (Hungary)

When considering technical processes, two basic principles are preferably adopted as starting fundamentals, the validity of which has been verified beyond doubt [14].

According to the first principle the state of any system can be described uniquely with the aid of a finite number of "state parameters".

The second principle involves adherence to the laws of conservation, which are valid in every field of technical science. All considerations and consequences rely on these laws.

In mechanics the state of any object is positively defined by its energy, mass and volume. If this object (system) is divided into several parts then its energy, mass and volume are also divided accordingly. If the distribution is uniform and considering $1/c$-th part of volume V, then this part will carry $1/c$-th parts of energy E and mass m:

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{m}{\Delta m} = \frac{V}{\Delta V} = c. \tag{1}$$

In other words, there exists a homogeneous, primary relationship between E, m and V. (Increasing any of the three quantities c-fold, the remaining two will also increase to c-fold of the original value.) As will be recalled *these physical quantities are referred to as extensive quantities.*

The first principle may be formulated also in the following manner: the state of any particular system is uniquely determined by a finite number (in the present case 3) *relevant extensive quantities.* It is important to note the term "*relevant*", since, theoretically, the number of extensive quantities may be infinitely large, whereas here those defining state, are to be considered [2].

Cocerning the three above relevant extensive quantities the second principle implies that in closed systems energy, mass and volume remain unchanged. Naturally the principle retains its validity when two systems interact, but they are closed, i.e., isolated from their environment. Two such systems may be e.g. two gases separated from each other within the same cylinder by a moving piston permitting mechanical interaction to take place only. The piston will be displaced towards the space where a lower pressure prevails, as long as the pressures on the two sides become balanced.

Interaction may also take place if one of the systems is formed by a fluid, separated by its own surface from the vapours above. In similar cases (considering closed vessels) the total mass remains constant, but molecules may pass from the fluid into the vapour phase and vice versa.

To each interaction an extensive quantity may be assigned, the change of which is proportionate to the change in energy accompanying the particular interaction. The corresponding "proportionality factors" may be given a twofold physical interpretation. On the one hand these indicate the energy,

represented by a unit change of the corresponding extensive quantity, on the other they are quantities tending towards equalizations. In other words, during an interaction energy is transferred from one system into the other, as long as the characteristic quantities are equal. These quantities may be termed stresses, or potentials (examples for which are the mechanical stress p — the negative of pressure —, the chemical potential μ, or the electrostatic potential U).

In contrast to the extensive quantities, the common feature of all relevant quantities tending towards equalization and of potential character is that they are unaffected by size. If a balanced system is subdivided, then e.g. temperature T, stress p, chemical potential μ of the individual parts will have the same value as in the original system. Expressed in another form this means that these quantities, which tend towards equalization, are zero-order, homogeneous functions of the extensive quantities. *Physical quantities of this nature are termed intensive quantities.*

Intensive quantities may have an infinite number of different types. Intensive quantities are e.g. the energy per unit volume $e = E/V$, or in other words the energy density, further the mass density $\varrho = m/V$, or the relative concentration $c_1 = m_i/\sum_i m_i$ of the i-th component. Moreover, *any quantity that can be formed as the ratio of two extensive quantities, may be intensive.*

No detailed explanation is necessary for the homogeneous relationship between the zero-order. E.g. in the case of mass density, the relationship

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{cm}{cV} \tag{2}$$

is trivial.

It should be noted, however, that in case of T, p, μ the quantities are not, in general, intensive ones, but are *relevant* intensive quantities. The term relevant here implies the role which these quantities play in individual interactions. At each interaction a flow of energy occurs, the direction of which is controlled by the gradient of *the relevant intensive quantities.* These latter *are always the partial derivatives of energy according to the relevant extensive quantity.*

An extensive relevant quantity and a relevant intensive quantity may thus be assigned to each interaction. The change in energy resulting from the interaction is proportionate to the change in the relevant extensive quantity, the factor of proportionality being the relevant intensive quantity.

The equalizing trend of the relevant intensive quantities plays a decisive role during the interactions. If the barrier between the two systems is removed, the extensive quantities will flow from one system into the other, as long as the relevant intensive quantities assume equal magnitudes. Thereafter, the two systems will be balanced. Two related systems are not balanced, unless

the relevant intensive quantities are uniformly distributed. Therefore, *the necessary and adequate condition of equilibrium is the homogeneous distribution of the relevant intensive quantities* [13].

The significance of the distinction according to extensive and intensive quantities is not only a formal one. The possibility of describing with their aid the interaction between two (or more) systems ("objects") is far more substantial.

Consider a volume element interacting with its environment.

The state of the elementary volume can be described by a finite number of extensive quantities x_i.

Within the elementary volume a change in the magnitude of an extensive quantity x_i may be due to one of two causes: a) there is a source Q_i within the volume, and b) there is outflow I_i across the surface bordering the volume.*

For the extensive quantity x_i the following balance equation can be written:

$$\frac{dx_i}{dt} = Q_i - I_i \tag{3}$$

where Q_i and I_i are the source and current, respectively.

The quantities involved in the equation apply to the entire volume element. When considering technical processes it is, however, required also to know local values, particular points within the volume. *The changeover to local values is possible by considering the values related to unit volume, the densities, of extensive quantities involved in the balance equation.* The extensive quantity of x_i within volume V equals the volume integral of its density v_i:

$$x_i = \int_V v_i \, dV . \tag{4}$$

All sources within the volume are

$$Q_i = \int_V q_i \, dV \tag{5}$$

where q_i is the source density.

The surface current density related to the particular extensive quantity should be denoted as $\mathbf{J}_i$. The total quantity flowing across the surface equals the surface integral of surface current density over the surface F (closed) bordering volume V:

$$I_i = \oint_F (\mathbf{J}_i, \mathbf{df}) . \tag{6}$$

Introducing the density values into the balance equation:

$$\frac{d}{dt} \int_V v_i \, dV = \int_V q_i \, dV - \oint_F (\mathbf{J}_i, \mathbf{df}) . \tag{7}$$

* By agreement outflow is considered a current of positive, while inflow as one of negative sign.

The balance for the i-th extensive quantity is expressed by the above equation (still applying to the entire volume !). The second term on the right-hand side is a surface integral, which can be transformed into a volume integral by applying the *Gauss—Ostrogradskii* theorem:

$$\oint_F(\mathbf{J}_i, d\mathbf{f}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J}_i \, dV . \tag{8}$$

Combining and transferring the differentiation with respect to time under the integral sign:

$$\int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i - q_i \right) dV = 0 . \tag{9}$$

Regardless of the limits of integration, the integral cannot assume zero value' unless the integrand itself is zero.*

The general balance equation is thus obtained as

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = q_i \tag{10}$$

where the only restriction with respect to v_i, that it is the density of any extensive quantity. It may denote e.g. energy density e, mass density ϱ, etc.

The current density of extensive quantities (within systems, the mass center of which is at rest) is defined by the inhomogeneity of the intensive quantities.

It has been recognized since a long time that various physical processes varying with time are described by laws taking the form

$$\frac{dx}{dt} = L(y - y_0) \tag{11}$$

where the left-hand side represents the variation of an extensive quantity with time, whereas the right-hand side is the difference between the corresponding intensive quantity multiplied by a suitable coefficient, the so-called *conductivity-*, or *transfer coefficient.*

Examples for these are *Newton's cooling law*, *Ohm's law*, *the Fick law*, which relate to internal energy, electric charge and mass current, respectively. The seepage law of Darcy is familiar, expressing the volume flow of fluid in terms of the differential head. In each of these cases the equalization of an intensive quantity (temperature, electric tension, chemical potential, pressure) is considered, which always involves the flow of an extensive quantity (internal energy, electric charge, mass, volume).

* Disregarding the so-called O-dimension multitudes.

About the middle of the 19-th century physical phenomena have been recognized, in which the flow of an extensive quantity is not exclusively caused by the inhomogeneity of the corresponding relevant intensive quantity. (An example for this is thermal diffusion, *where differential temperature results in mass current.)*

With due allowance for the so-called cross-effects (thermo-mechanical, thermo-electric, electro-kinetic, etc. phenomena), the fully generalized definition of current density was formulated by L. Onsager, Nobel-prize winner, in his papers published in 1930 and 1931 [1], according to which *current density is controlled not only by the inhomogeneity of the "pertinent" but by the inhomogeneity of all intensive quantities.*

The degree of inhomogeneity is indicated by the nabla operator. As long as the relevant intensive quantity is a scalar physical quantity, the nabla operator denotes the gradient thereof:

$$\nabla y_l = \operatorname{grad} y_l \,. \tag{12}$$

It was stated by ONSAGER that the current density of the i-th extensive quantity can be expressed as the summarized product of the gradient of the individual intensive quantities y_l and the *corresponding conductivities* L_{il}:

$$\mathbf{J}_i = \sum_{l=1}^{m} L_{il} \operatorname{grad} y_l \,. \tag{13}$$

The conductivities L_{il} depend on the material properties of the medium. Materials which are poor conductors for the current of certain extensive quantities, i.e., for which the corresponding conductivities are low, act as insulators for the particular extensive quantity.

The density of the so-called conductive current of individual extensive quantities is defined by the Onsager relationship. In cases, where the mass center of the system is also displaced (macroscopic movement also occurs), the extensive quantities (that are the material properties) also follow this movement and is termed convective current. *Convective current densities* can be expressed in a very simple form. If at any point the density of the i-th extensive quantity is v_i and the velocity of this point is $\mathbf{v}$, then the density of convective current is $v_i \mathbf{v}$. The total current density (the sum of convective and conductive current densities) is thus

$$\mathbf{J}_i = v_i \mathbf{v} + \sum_{l=1}^{m} L_{il} \operatorname{grad} y_l \,. \tag{14}$$

Introducing the total current density into the general balance equation — Eq. (10)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(v_i \mathbf{v} + \sum_{l=1}^{m} L_{il} \operatorname{grad} y_l\right) = q_i \,. \tag{15}$$

No expression of general validity, comparable to that of current density exists for describing the source density q_i involved in the above equation. Concerning source density no more can be said than that it is the rate per unit time and unit volume at which the particular extensive quantity is increased (or decreased). The problem in various branches of technical science is to clarify for particular processes

1) which are the relevant extensive and relevant intensive quantities,
2) the numerical value of conductivities, and
3) the actual shape of source densities.

With the available information the basic equations governing individual processes can be formulated [14].

For describing particular processes, besides the balance equations the so-called *unambiguity equations* must also be specified. These may be listed as follows:

1°. *The domain of interpretation* — the interval within which the variables (including the geometric variables) involved in the equations may assume values. Concerning geometric variables this is equivalent to the definition of the perimeter of the system under consideration, i.e., for the description (most frequently in the form of a drawing) of the geometrical shape bordering the system under consideration within its environment.

2°. *Boundary conditions* — specification of the interaction between the system and its environment. The function of the boundary conditions is to express the potential interactions across the boundary of the system between the system and its environment within the period considered.

3°. *Initial conditions* — definition of the state in which the system is at the instant selected for starting considerations. When considering steady processes (suffering no variation in time), no initial conditions exist.

4°. *Condition equations* — specification of the physical properties for the "operating medium" of the system.

All these conditions can be formulated accurately for particular problems only. It is for this reason that these are termed unambiguity criteria. *Mathematically* these are the prerequisites for the unique solution of the set of differential equations describing the phenomenon, while *physically*, the criteria for the unambiguous description of the particular system.

The skeleton of the transport theory has been outlined above. For a detailed treatment thereof reference is made to the work of I. FÉNYES [13] who made valuable contributions to the development of the theory itself.

2. Balance equations of suspended sediment transportation*

The general balance equation of suspended sediment transportation must be derived first. Remembering the foregoing considerations *this should present no undue difficulties, once the relevant extensive and intensive quantities are determined and the actual shape of source densities is found.*

Considerations being concerned with water it is logical that the *mass, momentum, kinetic* and *internal energy of water* are the most important parameters to be introduced. The same extensive quantities apply to the sediment as well, but the composition of the latter is not uniform, the individual particles being of different size. (Allowance for differences in material properties would make even the general treatment too complicated. For this reason the multitude of particles having the same material properties, but of different size will be understood under the term sediment.) Individual fractions will be denoted by the subscript k.

The extensive quantities required to be taken into consideration are:

m	the mass of the fluid,
$m\mathbf{v}$	the momentum of the fluid,
$(1/2)m\mathbf{v}^2$	the kinetic energy of the fluid,
$c_v mT$	the internal energy of the fluid (c_v is specific heat, T the temperature),
m_k	the mass of sediment particle "k",
$m_k \mathbf{v}_k$	the momentum carried by the sediment particle "k",
$(1/2)\, m_k \mathbf{v}_k^2$	the kinetic energy of the sediment particle "k",
$c_k\, m_k\, T_k$	the internal energy of the sediment particle "k".

The corresponding relevant intensive quantities are the velocity of flow $\mathbf{v}$, the hydrostatic pressure p and temperature T. Using these the current densities can already be written in the familiar form

$$\mathbf{J}_i = \nu_i \mathbf{v} + \sum_{l=1}^{m} L_{il} \operatorname{grad} y_l . \tag{16}$$

In the mass balance, conductive current (diffusion) will be neglected in comparison to the convective counterpart.** Introducing the values ϱ and ϱ_k for the mass density of fluid and sediment, respectively, the corresponding current densities become

$$\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v}, \quad \text{and} \quad \mathbf{J}_k = \varrho_k \mathbf{v}_k . \tag{17}$$

In the momentum balance, the convective current is the diadic product of the vectors of momentum density and flow velocity:

$$\mathbf{J}_{\text{conv}} = \varrho\, \mathbf{v} \circ \mathbf{v} . \tag{18}$$

* Similar equations have been derived for the flow of gas-dust mixtures by HORVÁTH and SZÜCS [15].

** The chemical potential has been omitted from among the relevant intensive quantities, since diffusion has been neglected.

The conductive current is a stress tensor, which — in turbulent flow — is the mean value with respect to time of the diadic product of pulsation velocity:

$$\mathbf{J}_{\text{cond}} = \overline{\varrho\, \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}. \tag{19}$$

The components thereof are the so-called *Reynolds stresses.*

The current density of kinetic energy is obtained directly from the current density of momentum, by applying the scalar multiplicator (1/2) v to the vector of momentum density.

It is further required to define the *source densities.* The mass of fluid has no source and sediment considered as a whole is likewise source-free. However, the mass of individual (the k-th) fractions suffers a change q_k by impact, the number of larger particles decreasing, that of smaller ones increasing as a result of comminution. The disintegration of particles is caused by the impact forces (i.e., momentum exchange). This implies at the same time that in connexion with the source density of momentum it is insufficient to consider the gravitational field $\varrho\, \mathbf{g}$ alone. The collision of individual particles (between the i-th and k-th) is always accompanied by the exchange of momentum $\mathbf{E}_{ik}$, which must be taken into consideration as a momentum source (or sink), even if it does not result in comminution [15].

The effect of fluid on sediment should also be allowed for, this being responsible for the conveyance of the particles. The momentum exchange between water and the k-th sediment particles is $\mathbf{E}_k$, during which the momentum gained by the sediment particle is equal to the momentum lost by the fluid. Consequently, the momentum exchange between water and sediment should be entered into the equation relating to water as a negative source, while as a positive source in the equation relating to sediment.

The source terms relating to the interaction between water and sediment, as well as between sediment and sediment should be entered into the balance equations of kinetic energy in a similar manner. Naturally, some kinetic energy is converted into internal energy as a consequence of friction (i.e., dissipation occurs). Concerning kinetic energy this represents a negative source, while a positive one for internal energy.

Subsequent considerations will be restricted to isothermal conditions, i.e., *the dissipation of kinetic energy will be regarded as negligibly small.* It will be readily perceived that under such conditions the balance equations of both internal and kinetic energy become superfluous. In fact, in the absence of dissipation the full kinetic energy of the entire system is conserved and any exchange of kinetic energy between the individual components always occurs in combination with an exchange of momentum. Consequently the balance equations of kinetic energy and momentum are interrelated.

Let us now introduce the corresponding terms into the balance equations, assuming that the number of particles in the k-th fraction is N_k, while the total number of particles is

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N.$$

Considering the mass balance:
for water

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0\,, \tag{20}$$

for the k-th sediment fraction:

$$\frac{\partial \varrho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_k \mathbf{v}_k = q_k\,. \tag{21}$$

The balance equations for the momentum (including different sources and assuming turbulent flow) are

for water

$$\frac{\partial \varrho \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \overline{\mathbf{v}} \circ \overline{\mathbf{v}} + \overline{\rho \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) = \varrho \mathbf{g} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k \frac{N_k}{N}; \tag{22}$$

for the k-th sediment fraction:

$$\frac{\partial \varrho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho_k \mathbf{v}_k \circ \mathbf{v}_k + \overline{\rho_k \mathbf{v}_k' \circ \mathbf{v}_k'}) = \varrho_k \mathbf{g} + \mathbf{E}_k + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} \mathbf{E}_{ik} \frac{N_i}{N}\,. \tag{23}$$

The term $\mathbf{E}_k$ on the right-hand side of the equations is the source density of momentum due to momentum exchange between the component of mass m_k and water, while $\mathbf{E}_{ik}$ denotes the source density of momentum due to momentum exchange between particles of mass m_k and all other particles.

The relevant intensive quantity of momentum exchange is velocity. The change in momentum is proportionate to the difference of velocities. *For the interaction between water and sediment:*

$$\mathbf{E}_k = L_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v})\,, \tag{24}$$

while for the interaction between two sediment particles of different mass:

$$\mathbf{E}_{ik} = L_{ik} (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)\,, \tag{25}$$

where L_k and L_{ik} are the corresponding proportionality factors (the determination of which will be dealt with in more detail subsequently), while $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_i$

and $\mathbf{v}$ are the velocities of sediment fractions k and i, as well as water, respectively.

Considering the condition of equilibrium. Quite obviously, no particle is in equilibrium, unless the resultant of forces to which it is subjected is zero. The forces acting on the particle are gravity and the change of momentum per unit time, resulting from collisions with other particles. These are the terms involved in the right-hand side of the momentum-balance equation — Eq. (23) — written for the sediment. In case of equilibrium these become zero, so that

$$\varrho_k \mathbf{g} = -\mathbf{E}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} \mathbf{E}_{ik} \frac{N_i}{N} = -L_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}) - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \frac{N_i}{N}, \quad (i \neq k) \quad (26)$$

The term $\mathbf{E}_{ik}$ is omitted if particles of the same kind (of mass m_k) are only present in the water. In such cases the manner in which the combined momentum of all particles changes is of interest only. Collisions between particles of the same mass, but of different velocity involves, naturally, an exchange of momentum, but leaves the total momentum of the particles unaffected.

Consequently, for water in which only particles of mass m_k are present and which is at rest, i.e., $\mathbf{v} = 0$, in case of equilibrium, it follows from Eq. (26) that

$$\varrho_k g = \gamma_k = -L_k v_k = -L_k \omega_k. \quad (27)$$

Here v_k is the velocity of a particle (of mass m_k and specific gravity γ_k) which is in equilibrium in a fluid at rest. This has been defined as the settling velocity ω_k. *The conductivity of the momentum source is thus*

$$L_k = -\frac{\gamma_k}{\omega_k}, \quad (28)$$

the negative value of the ratio of specific gravity and settling velocity. In the physical sense L_k denotes the proportionality factor indicating the momentum received by the particles moving at the velocity v_k from the fluid flowing at velocity $\mathbf{v}$ during unit time and per unit volume [15].

The equations relating to the entire sediment are obtained by adding the equations written for the k-th fraction. For simplicity's sake, the sediment will be considered in the manner outlined above, as a multitude consisting of discrete fractions. (In case of a uniform distribution the summation must be replaced by integration.) The different fractions are denoted by a numerical subscript $(1, 2, \ldots, k, \ldots, n)$. The fractions of mass $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$ consist of particles, the number of which is $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, N_n$.

The total number of particles is $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_k + \ldots + N_n$. With this in mind the equation for the entire sediment is obtained from the momentum-balance equation of an individual fraction. The combined momentum density is expressed as the weighted sum of the momentum densities of individual fractions. With ϱ_1 denoting the weighted density of sediment fractions and $\mathbf{v}_h$ the velocity thereof,

$$\varrho_1 \mathbf{v}_h = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} N_i \varrho_i \mathbf{v}_i . \tag{29}$$

The right-hand side of the momentum balance should be summed up accordingly and it should be assumed, as before, that the force exerted by the fluid on all particles is proportionate to the difference of the average velocity $\mathbf{v}_h$ of the particles and the velocity $\mathbf{v}$ of the fluid:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} \varrho_i \mathbf{g} + \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} \mathbf{E}_i = \varrho_1 \mathbf{g} + L(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) , \tag{30}$$

where ϱ_1 is the mean density of the particles and L is a factor of proportionality.

The term $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{ik}$ is eliminated from the summation, since the momentum of the entire sediment is unaffected by the momentum exchange occurring during collisions between individual particles. The momentum of the entire sediment is regarded as an internal force.

Considering equilibrium conditions again (where the gravitational force equals the momentum exchange of fluid-particle interaction) and the fluid is at rest, i.e., $\mathbf{v} = 0$, then Eqs (26) and (27) for the entire sediment become

$$\varrho_1 g = \gamma_1 = -L v_h = -L \bar{\omega}, \tag{31}$$

where γ_1 is the weighted specific gravity of the entire sediment in equilibrium and v_h is the velocity of the latter in a fluid at rest. *This has been defined as the resultant settling velocity $\bar{\omega}$ of the sediment.* The factor of proportionality is thus

$$-L = \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} . \tag{32}$$

From the foregoing it will be recalled that $\mathbf{E}_i = L_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$, and for $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{E}_i = -L_i \omega_i$, so that

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} \mathbf{E}_i \right| = L\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} L_i \omega_i \tag{33}$$

$\overline{\omega}$ being the mean of ω_k velocities, i.e., the settling velocity of the mass center of the entire sediment

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} L_i \tag{34}$$

whence

$$-L = \frac{N_i}{N} \frac{\gamma_i}{\omega_i} = \frac{\gamma_1}{\overline{\omega}} . \tag{35}$$

This expression is an especially striking illustration of the relationship between the settling velocities, if we are justified in assuming that all particles have the same specific gravity, i.e., that $\gamma_i = \gamma_1 =$ constant. In this case

$$\frac{1}{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} \frac{1}{\omega_i}, \quad \text{or} \quad \frac{N}{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{\omega_i} . \tag{36}$$

The source density of interaction between the fluid and sediment, on the right-hand side of the momentum balance can be specified in two different ways: either the resultant settling velocity and the resultant specific gravity of the entire sediment mass must be known, or the values relating to the component particles of the mass and the relative number of particles must be available.

The comminution process resulting from the collisions between particles has been neglected so far. If the process of comminution is also taken into consideration, then the source densities q_k related to the individual fractions assume values other than zero. An attempt at the exact description of the process was made by Gy. FÁY and B. ZSELEV [10], who followed the approach of KOLMOGOROV. The theory appears to be still far from complete, so that the process of comminution will still further remain disregarded.

The transfer of internal energy has also been neglected, or in other words, *sediment transportation has been regarded an isothermal process*, in which the dissipation of kinetic energy can be disregarded.

Before summarizing the general set of equations describing the regularities controlling the movement of suspended sediment, the following remarks should be attached to the mass-balance equations relating to water and to the entire sediment.

In turbulent flow the instantaneous values of individual physical quantities vary in an irregular manner and consequently, instead of the instantaneous values the mean values thereof with respect to time and the mean values with respect to time of the product of pulsation terms (correlations) must be entered into the computations. In general, the mean value over the time of mass current density $\varrho \mathbf{v}$ is formed

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}\overline{\rho} + \overline{\rho' \mathbf{v}'} .$$

The first term on the right-hand side of the above equation represents the convective mass current density, the second term being the so-called turbulent diffusion. In analogy to molecular diffusion the latter may be expressed as the product of conductivity ε and gradient of mass density:

$$\overline{\rho' \mathbf{v}'} = -\varepsilon \operatorname{grad} \varrho .$$

As far as the mass balance is concerned this applies to both water and sediment. For this reason, in the general set of equations this will be indicated in the mass-balance equation relating to the entire sediment. However, in the mass balance equation of water this will be omitted, the gradient of water density being regarded as zero, as far as sediment transportation is concerned.

The general set of equations describing the regularities of suspended sediment transportation is in a summarized form:

For water:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\rho \mathbf{v}} = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho \bar{\mathbf{v}} \circ \bar{\mathbf{v}} + \overline{\varrho \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) = \bar{\varrho} \mathbf{g} + \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} (\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}) . \tag{38}$$

For the k-th sediment fraction, in the case of collision without commination, i.e., if $q_k = 0$:

$$\frac{\partial \varrho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_k \mathbf{v}_k = 0 , \tag{39}$$

$$\frac{\partial \varrho_k \bar{\mathbf{v}}_k}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho_k \bar{\mathbf{v}}_k \circ \bar{\mathbf{v}}_k + \rho_k \overline{\mathbf{v}_k' \circ \mathbf{v}_k'}) = \varrho_k \mathbf{g} - \frac{\gamma_k}{\omega_k} (\bar{\mathbf{v}}_k - \bar{\mathbf{v}}) + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} \mathbf{E}_{ik} \frac{N_i}{N} . \tag{40}$$

For the entire sediment:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho_1 \bar{\mathbf{v}}_h - \varepsilon \operatorname{grad} \varrho_1) = 0 , \tag{41}$$

$$\frac{\partial \varrho_1 \mathbf{v}_h}{\partial t} + \operatorname{Div} (\varrho_1 \bar{\mathbf{v}}_h \circ \bar{\mathbf{v}}_h + \rho_1 \overline{\mathbf{v}_h' \circ \mathbf{v}_h'}) = \varrho_1 \mathbf{g} - \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} (\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}) . \tag{42}$$

In the above set of equations the conservation of the mass of fluid — Eq. (37) — the individual sediment fractions — Eq. (39) — and the entire sediment — Eq. (41) — as well as of the total momentum of the fluid-sediment system — Eqs (38), (40) and (42) — are expressed.

The source of momentum is represented, besides the gravity field, by the momentum exchange of magnitude

$$\frac{\gamma_1}{\bar{\omega}} (\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}) \tag{43}$$

between the fluid and the entire sediment, and by the momentum exchange taking place for individual sediment fractions as a result of collision with sediment particles of "other size". The sum of these is obviously zero when related to the *entire water-sediment system*, since these are "internal forces" [15].

The set of equations written above is an expression for one of the firmest theorems in physics, namely, the law of conservation of mass and momentum. For this reason *we are justified in regarding it as the most general relationship of sediment movement.* Naturally, in this form it is unsuitable for practical computations.

Various fundamental equations commonly used in hydraulics are in general, derived, by introducing certain assumptions. A clear definition of these assumptions is made possible by the above set of equations, permitting at the same time to review and to arrange methodically the different theories and the (explicit, or implicit) assumptions underlying them.

3. Development of the different sediment transportation theories from the balance equations

In every attempt for the description of sediment transportation the process has been assumed to be a steady one. It follows therefrom that the first term in Eqs (37) to (42), namely the derivative with respect to time of the density of extensive quantities, is zero. Consequently, the concentration-distribution of sediment is assumed to be constant in time.

When considering the transportation of suspended sediment in natural watercourses it is commonly assumed further that concentration C undergoes no changes in the main direction x of flow ($\partial C/\partial x = 0$, or with the notations used in the balance equations, $\partial \varrho_1/\partial x = 0$).

The basic objective of the theories concerning the transportation of suspended sediment is the estimation of concentration-distribution. For simplifying the solution in all known theories the stream is assumed to be infinitely wide. Variations across width (in the plane perpendicular to the direction of flow) are neglected and the problem is thus reduced to a single dimension. Still the number of variables involved in the resulting equations is greater than the number of equations available.

A closed set of equations can be obtained by two different approaches:

1. The relationships existing between individual parameters are determined experimentally;

2. Assumptions are introduced concerning the relationship between the unknown and known quantities.

The assumptions introduced offer a convenient means for differentiating between the different theories.

A fundamental drawback of all "sediment transportation equations" is that the differences in particle size are neglected therein. When ever the simplifying assumption is introduced, the particle size distribution of the sediment, i.e., the mechanical composition would be essential for the use of the balance equations derived [4]. This would be unavoidable even if the average, or mean particle size would be considered. In fact, different grain size distributions can pertain to the same characteristic size (even if it were disregarded that different "mean" sizes result when considering numbers, surfaces, or volumes) [10], and therefore, the results of different experiments may show appreciable differences.

It should further be noted that in contrast to investigations concerned with the transportation of suspended sediment in natural watercourses, it is only the variation in time that can be regarded as zero, when considering the process of the settling of suspended sediment, while the changes in the main direction of flow differ from zero. The only simplification, which may be permissible is to assume a constant rate of change.

The fundamental equations of some of the more familiar theories will be derived subsequently, without any attempt at completeness, rather in order to illustrate the method applied.

It is proposed to demonstrate at the same time that each of the various theories represents no more than a particular case of the general balance equations. In fact, depending on the terms of the equation — neglected as small in comparison with the others — the fundamental equations of the different theories are obtained.

The following simplifying assumptions are of interest:

1. The process is a steady one

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0\,, \tag{44}$$

i.e., the variation with respect to time of the density of extensive quantities is assumed to be zero.

2. The process is a two-dimensional one, i.e., in a horizontal plane, variations in the direction z perpendicular to the main direction x of flow are assumed to be negligible:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0\,. \tag{45}$$

3. The concentration of sediment (or its mass density) remains unchanged in the main direction x of flow

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = 0\,. \tag{46}$$

4. The size of the sediment suffers no changes by collision. In other words: the mass balance of individual sediment fractions is source-free (the mass of each of the sediment fractions is conserved):

$$q_k = 0. \tag{47}$$

5. The sediment is mono-disperse, i.e., it consists of particles of uniform size, or the effect of differences in particle size is negligibly small. In this manner Eqs (39) and (40) related to the different size fractions can be omitted.

6. The equation of the energy balance is source-free, the dissipation of energy can be neglected. Consequently the process may be regarded as isothermal, the balance equation of internal energy and thus the balance equation of kinetic energy are superfluous (being in this case related to the momentum balance). Although in some cases the process is regarded as an isothermal one, the balance equation of kinetic energy is still introduced besides the momentum balance. In the course of derivation the latter is — logically — eliminated.

7. The flow pattern is not related to the sediment, i.e., the energy- and momentum exchange between water and sediment is negligible for the energy and momentum of *water*. This implies, in other words, that the term

$$\frac{\gamma_1}{\omega}(\overline{\mathbf{v}}_h - \overline{\mathbf{v}})$$

in Eq. (38) is much smaller than the other terms in the equation. It follows further that since $\gamma_1 > \overline{\rho} g$ (the specific gravity of sediment is greater than that of water), the ratio $(\overline{\mathbf{v}}_h - \overline{\mathbf{v}})/\omega$ must be assumed to be smaller by orders of magnitude than $\overline{\rho}\,\mathbf{g}$. This is impossible unless $\overline{\mathbf{v}}_h \cong \overline{\mathbf{v}}$, i.e., the velocity of sediment movement is approximately equal to the flow velocity of water (the inertia of sediment is negligible!). A formulation frequently encountered for this assumption is that the velocity components in the main direction x of flow are taken to be equal

$$v_{hx} = v_x, \tag{48}$$

while the vertical components in the direction y differ from each other by the settling velocity:

$$v_{hy} = v_y - \omega. \tag{49}$$

8. Instead of correlating the pulsation terms (in accordance with the conduction laws) the current densities resulting from turbulent movement can be expressed as the product of a turbulent conductivity coefficient and the gradient of the corresponding intensive quantity. E.g. for the density of

mass current:

$$\overline{\rho' \mathbf{v}'} = -\varepsilon_h \operatorname{grad} \bar{\rho}\,, \tag{50}$$

and for the density of momentum current:

$$\overline{\rho \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'} = -\varepsilon_m \operatorname{Grad} \bar{\mathbf{v}}. \tag{51}$$

9. The density of conductive momentum current due to turbulent pulsation (the turbulent shear) is much smaller than the density of convective momentum current and thus the former can be neglected:

$$\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'} \ll \bar{\mathbf{v}} \circ \bar{\mathbf{v}}. \tag{52}$$

10. The vertical component of the flow velocity of water (considering its mean value with respect to time) is much smaller than the settling velocity and is thus negligible in comparison with the latter:

$$\bar{v}_y \ll \omega. \tag{53}$$

Naturally, not all assumptions are included in the individual theories. The arrangement of these assumptions into a methodological system is all the more of great interest, as this offers the only possibility for determining the range of validity of formulae derived by the different theories and for deciding in what cases they can be used, what differences are to be expected between theoretical and experimental results.

Let us first consider the theory of turbulent sediment transportation (frequently referred to the diffusion theory) [4, 5, 7, 11].

The theory is founded exclusively on the mass transport equation of sediment, and from among the assumptions listed before the following are introduced:

1. The process is a steady one.
2. The process is a two-dimensional one.
3. The concentration of sediment suffers no change in the x direction.
4. Collision between sediment particles does not result in comminution.
5. The sediment can be described uniquely by the mean concentration, i.e., it may be regarded as a mono-disperse system.
7. The inertia of the sediment is small enough to be neglected.
10. The velocity component v_y of water is negligibly small in comparison with the settling velocity ω.

With these assumptions Eq. (41) leads directly to the expression:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_h \frac{\partial C}{\partial y} + \omega C\right) = 0 \tag{54}$$

which upon integration yields

$$C = C_a \exp\left(-\frac{\omega}{\varrho}\int_a^y \frac{dy}{\varepsilon'_h}\right), \tag{55}$$

the familiar concentration-distribution equation of O'BRIEN—CHRISTIANSEN [4, 5, 11].

The gravitational theory [4, 9] is based on the momentum- and energy-balance equations. The following assumptions are introduced:

1. The process is a steady one.
2. The process is a two-dimensional one.
3. The concentration of the sediment suffers no changes in the x direction.
4. Collision between sediment particles does not result in comminution.
5. The sediment may be regarded as a mono-disperse system.
6. No energy is dissipated. (However, the balance equations of kinetic energy are taken into consideration separately — in addition to the momentum-balance equation of the combined system — pointing out at the same time that only two of the three balance equations are independent!)
9. The density of convective current due to turbulent pulsation is negligibly small in comparison with the density of conductive momentum current (turbulent shear). (This assumption, which is exactly the opposite of Eq. (52) is permissible, if the process is considered in a system of coordinates moving together with water!)

The resultant density is used by WELIKHANOV for describing the mass of the disperse system:

$$\bar{\varrho} = \varrho(1-C_v)+\varrho_1 C_v = \varrho(1+aC_v), \tag{56}$$

where $a = \dfrac{\varrho_1-\varrho}{\varrho}$.

With these assumptions the momentum equations — Eqs. (38) and (42) — directly yield *equation III of* WELIKHANOV:

$$\frac{d}{dy}[(1+a\bar{C}_v)\,\overline{v'u'}] = gS(1+a\bar{C}_v), \tag{57}$$

where the left-hand side is the divergence of the momentum current density, whereas the right-hand side is the density of the momentum source.

Equations I and II of WELIKHANOV are the balance equations of kinetic energy, which can be derived from Eqs (37) and (41) — through scalar multiplication by the flow velocity:

$$\varrho\frac{d}{dy}[(1-\bar{C}_v)\,\overline{(v'u')}\bar{v}] = \varrho gS(1-\bar{C}_v)\bar{v} - (\varrho_1-\varrho)g\omega\bar{C}_v(1-\bar{C}_v), \tag{58}$$

$$\varrho_1 \frac{d}{dy}(\bar{C}_v \overline{v'u'v'}) = \varrho_1 g S \bar{C}_v \bar{v} + (\varrho_1 - \varrho)\,\omega g \bar{C}_v (1 - \bar{C}_v). \tag{59}$$

In these equations the left-hand side represents the current density of kinetic energy, while the work forming the source of kinetic energy is entered on the right-hand side. In fact, the first term on the right-hand side of Eq. (58) is the work performed by the gravitational field in water (the "work of fall"), the second term being the work expended for keeping the sediment in suspension (which is an energy loss for water). Naturally, the latter is encountered as a gain in energy with an opposite sign on the right-hand side of Eq. (59), where it is the second term. The first term on the right-hand side of Eq. (59) being the work performed by the gravitational field on the sediment, represents a source for the kinetic energy of sediment.

The considerations of A. K. ANANYIAN [8] are also based on the mass balance equation of sediment. The assumptions introduced are as follows:

1. The process is a steady one.
4. The dimensions of the particles remain unchanged during collisions.
5. The sediment may be regarded as a mono-disperse system.
6. No dissipation of energy occurs.
7. The flow pattern of water is unaffected by the presence of sediment.

The vertical velocity of sediment differs from the velocity of water by the settling velocity only.

With these assumptions *the fundamental equation of Ananyian* is obtained *in a vectorial form* from Eq. (41):

$$(\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,C) = \mathrm{div}\,(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,C) + \omega \frac{\partial C}{\partial y}. \tag{60}$$

The fundamental equation of sediment transportation was derived by BARENBLATT taking into consideration the balance equation of pulsation energy [3]. *His significant contribution was that he succeeded in formulating the complex mathematical model of suspended sediment transportation in a completely generalized form.*

The assumptions introduced are as follows:

1. The process is a steady one.
2. The process is a two-dimensional one.
3. The concentration of the sediment suffers no change in the x direction.
4. Collision between the sediment particles results in no comminution.
5. The sediment may be regarded as a mono-disperse system.
7. The velocity component in the direction x of the sediment is identical with the corresponding velocity component of water, while the component in

the direction y is smaller by the settling velocity than the velocity component in the direction y of water.

8. In accordance with the correlation terms, the conductivity laws can be replaced by the following expressions:

a) the correlation of the pulsation velocities (conductive momentum current)

$$\overline{v_i' v_j'} = \frac{2}{3} b\delta_{ij} - \nu_1 \varepsilon_{ij}, \tag{61}$$

where b is the pulsational energy gain related to the unit mass of the inhomogeneous fluid, δ_{ij} is the *Kronecker* symbol (for $i = j$ it is 1, for $i \neq j$ it is zero);

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \tag{62}$$

i.e. the symmetrical part of the tensor of the velocity gradient.

b) The temporal mean value of pulsational energy current is proportionate to the gradient of b:

$$\frac{1}{2}(\overline{v'^2 \mathbf{v}'}) = -\nu_2 \operatorname{grad} b\,. \tag{63}$$

c) The temporal-mean value of the pulsational mass current density (the turbulent diffusion current) is proportionate to the gradient of concentration:

$$\overline{C' \mathbf{v}'} = -\lambda \operatorname{grad} C. \tag{64}$$

The conductivities ν_1, ν_2 and λ involved in Eqs (61), (62) and (63) are expressed with the aid of b and the parameters l having the dimension of length as

$$\lambda = \nu_1 = \nu_2 = l\sqrt{b}.$$

With these assumptions *equation I of Barenblatt* is obtained directly from the mass balance equation (41)

$$\omega\overline{C} + l\sqrt{b}\frac{d\overline{C}}{dy} = 0. \tag{65}$$

The equation of the momentum balance — Eq. (38) — is simplified to the form

$$\overline{v}_y \frac{d\overline{v}}{dy} + \frac{d}{dy}\overline{(v_x' v_y')} = 0 \tag{66}$$

whence *equation II of Barenblatt* is obtained:

$$l\sqrt{b}\,\frac{dv_x}{dy} = W^2 - Cx_3\,, \tag{67}$$

where W is a constant having the dimension of velocity.

Equation III of Barenblatt is worth considering separately, since the dissipation of pulsational energy is also allowed for therein. (However, the balance equation of internal energy is left unwritten!) This implies that Eq. (38) of the momentum balance must first be multiplied scalar by the flow velocity v, then the interaction term on the right-hand side must be replaced by dissipation Q:

$$\bar{\mathbf{v}}\,\frac{\partial\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}\,\mathrm{Div}\,(\overline{\rho\mathbf{v}}\mathrm{o}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\mathrm{o}\mathbf{v}'}) = \overline{\rho\mathbf{v}}\mathbf{g} + Q\,. \tag{68}$$

Besides the above substitutions allowance must be made also for the assumption of *Barenblatt*, that Q can be expressed in terms of a universal constant C_1, b and l:

$$Q = C_1\varrho\,\frac{b^{3/2}}{l}\,. \tag{69}$$

Introducing for relative density the notation

$$a = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho}\,,$$

we have

$$\frac{d}{dy}\left(l\sqrt{b}\,\frac{db}{dy}\right) + l\sqrt{b}\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 = aC\omega g + C_1\,\frac{b^{3/2}}{l} \tag{70}$$

which is identical with the fundamental energy equation of *Barenblatt*.

The assumption of steadiness has been omitted by FRANKL [6] in deriving his set of equations. The set of equations derived by him differs from the one written by us in certain notations only.

The relationship between *Frankl's equations* and the general balance equations is evident. Eqs (37) and (41) directly yield the *Frankl* equations if the relative concentration (density) $\overline{C}$ is introduced for the densities ϱ and ϱ_1 of water and sediment respectively:

$$\overline{C} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho}\,. \tag{71}$$

Dividing by $(\varrho_1 + \varrho)$ the mass balance equations, Eq. (37) yields therewith:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1+\varrho}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1+\varrho}\mathbf{v}\right) = 0\,,$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\overline{C}) + \operatorname{div}[(1-\overline{C})\,\mathbf{v}] = 0\,. \tag{72}$$

From Eq. (41) in a similar manner:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{C}\overline{\mathbf{v}}_h - \varepsilon \operatorname{grad} \overline{C}) = 0\,. \tag{73}$$

The density of conductive current ε grad $\overline{C}$ is neglected by *Frankl*. Eqs (72) and (73) are identical with *equations I and II of Frankl.*

Eqs (38) and (42) are the counterparts of *Frankl's equations III and IV*, if the following notations are introduced:

1°. fluid density is denoted by $\varrho(1 - \overline{C})$,

2°. sediment density by $\varrho_1\overline{C}$,

3°. the conductive momentum current $\overline{\varrho\, \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}$ by the stress tensor $\mathbf{\Pi}$,

4°. the density of the external force field by $\mathbf{X}$,

5°. the interaction force between fluid and sediment force by $\mathbf{R}$.

Equations V and VI of Frankl are the equations of energy balance which — as has already been pointed out — differ in the absence of dissipation from the momentum balance only in that each term is a multiplied scalar by the flow velocity $\mathbf{v}$.

The balance equations of pulsational energy are obtained from the energy balance equations written for instantaneous values, by separating after having averaged over time the correlation terms containing average values and those formed from the products of pulsation terms.

The equations adopted as a starting basis for the considerations of *Frankl* thus differ essentially in their notations only from the general balance equations. The set of equations derived by him include however, that the mass- and momentum balance equations are of the sediment only. All equations were required merely for determining the interaction force involved in the latter. According to *Frankl:*

$$\mathbf{R} = B\,[\mathbf{v}\,(1-C) - b \operatorname{grad}(\ln C)]\,, \tag{74}$$

where $B = g\,\mu^2/2r^2$ is the shape factor involving gravitational acceleration, the viscosity μ and the characteristic dimension r. The first term in angular brackets is the convective mass current of water, while the second is the con-

ductive mass current of sediment. The interaction force is thus taken as proportionate to the difference of two currents by *Frankl.* (According to our investigations the interaction force is proportionate to the difference of velocities, rather than currents!)

The two Frankl-equations obtained eventually are in vectorial form:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(C\,\mathbf{v}_h) = 0, \tag{75}$$

$$\frac{\partial \varrho_1 \mathbf{v}_h}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho_1 \mathbf{v}_h \circ \mathbf{v}_h) = -\operatorname{grad} p + \mathbf{R} + \varrho_1 \mathbf{X} \tag{76}$$

which — with the above reservations — are the counterparts of Eqs (41) and (42), respectively.

Disregarding the obligatory simplifications pointed out above, *Frankl succeeded in contributing considerably to the theory of suspended sediment transportation, by formulating a set of equations, which include the continuity-, momentum- and energy equations of both mean- and pulsating flow.*

The relationship between the general set of balance equations and some of the theories on sediment transportation could be dealt with in a very abridged form only. For a more detailed treatment the reader is referred to the literature cited in the references. Nevertheless we believe to have succeed in demonstrating that the set of general balance equations — which indicates in a clear pattern, invariably on the left-hand side the variation of the density of various extensive quantities, i.e., the divergence of current densities, with the corresponding source densities on the right-hand side — is suitable for arranging the theories on sediment transportation in a systematic manner.

REFERENCES

1. ONSAGER, L.: Reciprocal Relation in Irreversible Process. I., II. *Phys. Rev.* **37.** (1931), 405. **38** (1931), 2265
2. FÉNYES, I.: Ergänzungen zur axiomatischen Begründung der Thermodynamik. *Zeitschrift für Physik.* **134** (1952), 95
3. BARENBLATT, G. I.: O dvischenii vzveshennih chastiz v turbulentnom potoke. (Movement of Suspended Sediment in Turbulent Flow.) *Prikl. Mat. i. Mech.* **17** (1953)
4. BOGÁRDI, J.: A hordalékmozgás elmélete. (The Theory of Sediment Transportation.) Akadémiai Kiadó, Budapest 1955
5. CHRISTIANSEN, J. E.: Distribution of Silt in Open Channels. *Transactions AGU Sixteenth Annual Meeting* (1955)
6. FRANKL, F. I.: K teorii dvishenia vzveshennih nasosov v nieravnomernom potoke. (On the Theory of Suspended Sediment Movement in Non Uniform Flow.) *Dokl. A. N. SSSR.* **102** (1955)
7. MAKKAVEJEV, V. M.: K teorii turbulentnogo reshima i vzveschiwania nanosov. (On the Theory of Suspended Sediment in Turbulent Flow.) *Izv. G. G. I. Leningrad* **32** (1931)
8. SANOYAN, W. G.—ANANYAN, A. K.: K voprosu o dvishenii nanosov v turbulentnom potoke. (On the Theory of Sediment Moving in Turbulent Flow.) *A. N. SSSR. Sov.* po probl. vodn. hos. Moscow (1960)

9. VELIKANOV, M. A.: Dinamika ruslovih potokov. (The Dnyamics of Watercourses.) Moscow 1962
10. FÁY, GY.—ZSELEV, B.: Die Matematischen Grundlagen der Körnungsanalyse von gemahlenen Kornmengen. *Acta Techn. Hung.* **44** (1963), 237
11. O'BRIEN: Review of Theory of Turbulent Flow and its Relation to Sediment Transportation. *AGU.* 1963
12. BOGÁRDI, J.: Discussion (closure) of European Concepts of Sediment Transportation. *Proc. of the ASCE* Vol. 93, HYG, 1967
13. FÉNYES, I.: Termosztatika és termodinamika. (Thermostatics and Thermodynamics.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970
14. SZÜCS, E.: Dialógusok a műszaki tudományokról. (Dialogues on Technical Sciences.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968
15. HORVÁTH, F.—SZÜCS, E.: Similarity Criteria of Dust-Fluid Flow. *Acta Techn. Hung.* **66** (1969), 39
16. BOGÁRDI, H.: A vízfolyások hordalékszállítása. (Sediment Transportation in Rivers.) Akadémiai Kiadó, Budapest (in print)

Bilanzgleichungen der Schwebestofführung. Auf jedem Gebiete der Technik ist es erforderlich, daß die Ableitungen der zu den praktischen Berechnungen geeigneten mathematischen Abhängigkeiten von allen Willkürlichkeiten befreit, die angewandten Annahmen klar konzipiert werden und mit den Naturgesetzen übereinstimmen. Ohne dies kann man keine Auskünfte vom Geltungsbereich der einzelnen Beziehungen erhalten. Zur systematisierten und auf einheitlichen Gründen beruhenden Behandlung der technischen Probleme ist die auf die Erhaltungslehrsätze gegründete sog. Transporttheorie geeignet. Es wird nachgewiesen, daß mit Hilfe dieser Theorie das allgemeine Bilanzgleichungssystem des Geschiebeschleppens angesetzt werden kann. Auch einige Grundformeln der Geschiebetransporttheorie können vom allgemeinen System der Bilanzgleichungen abgeleitet werden. Dadurch wird dargestellt, welche von den 10 möglichen Fällen im Zusammenhang mit den einzelnen Theorien angewandt werden.

Балансовые уравнения движения потока взвешенных материалов *(Я. Л. Богарди).* В каждой области техники требуется, чтобы выводы подходящих для практических расчетов математических зависимостей освободить от всевозможных произвольностей, далее примененные данные были ясно определены и совпадали с законами природы. Без сказанных выше нельзя получить сведения об области действительности отдельных зависимостей. Для систематизированного и основывающегося на единой основе рассмотрения технических проблем подходит т. н. транспортная теория, основывающаяся на законе сохранения. Доказывается, что с помощью этой теории можно вывести общую систему балансовых уравнений движения потока материалов. Кроме того, можно вывести некоторые основные формулы теории транспорта взвешенных материалов, исходя из общей системы балансовых уравнений. Этим показано, что которые из 10 возможных случаев можно применить в связи с отдельными теориями.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 29—37 (1970)

SPANNUNGEN IN ZWEIPHASENSYSTEMEN

Á. KÉZDI*

KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 21. November 1969]

Nach der Begriffserklärung der in zwei- und dreiphasigen Systemen auftretenden Spannungen veröffentlicht der Autor in der vorliegenden Abhandlung ein Verfahren zur anschaulichen Darstellung des Spannungszustandes. Im weiteren wird die allgemein übliche Annahme, daß die neutralen Spannungen in einem dispersen System im ganzen Querschnitt wirken, fallen gelassen, und die allgemeine Grundgleichung der Festigkeitslehre in bezug auf elastische, homogene, isotrope, poröse und durchlässige Medien abgeleitet.

Sowohl die Untersuchungen der Elastizitätslehre, als auch die der Plastizitätslehre setzen ein Kontinuum voraus. Auf Grund dieser Annahme kann die Infinitesimalrechnung angewendet und anhand dieser die Untersuchung der auf den elementaren Körper wirkenden Kräfte vorgenommen werden. Die Begriffe »Spannung« und »bezogene Formänderung« selbst können überhaupt nur bei einem Kontinuum Anwendung finden. Sofern diese Kontinuität im *makroskopischen* Sinne besteht, wie z. B. bei Metallen, Steinen, Beton, ist diese Voraussetzung annehmbar und praktisch brauchbar. Viele in der Ingenieurpraxis vorkommende Medien genügen aber auch makroskopisch gesehen nicht den Anforderungen der Kontinuität. So sind z. B. die Böden *disperse Systeme*, die aus Körnern bestehen, wo die Kraftübertragung in einem ebenen Schnitt nie in Form gleichmäßig verteilter Spannungen erfolgt. Wenn man den einfachsten Fall annimmt und den Spannungszustand einer vollkommen trockenen Sand- oder Kiesmenge untersucht, wo die in den Poren anwesende Luft nur unter dem atmosphärischen Druck steht, so findet man, daß eine Belastung an den Berührungspunkten der Körner große Spannungen auslöst, während die Größe der zusätzlichen Spannung in den Poren gleich Null ist. Wenn auch manche Forscher in ihren neuesten Untersuchungen die Bestimmung dieser Berührungsspannungen anstreben, ja sogar die Spannungsverteilung auf den Berührungsflächen zu ermitteln suchen, muß man zur Lösung praktischer Aufgaben ein *Kontinuum* annehmen. Die auf dieser Grundlage errechnete »Spannung« ist daher eine fiktive Größe und dem die Spannungsspitzen ausgleichenden Mittelwert gleich. Die einzelnen Körner sind den ver-

* Prof. Dr. Kézdi Á., Technische Universität; Műegyetem rkp. 3, *Budapest XI.* (Ungarn).

schiedensten einfachen und zusammengesetzten Beanspruchungen (Druck, Zug, Schub, Biegung) ausgesetzt, doch können deren Wirkung und Rolle im Rahmen der Untersuchungen nicht berücksichtigt werden. Es muß aber unbedingt in Betracht gezogen werden, daß die zwischen den einzelnen Körnern befindlichen Poren *Wasser* und *Gas* enthalten, eine Tatsache, die in bezug auf die Festigkeit und Zusammendrückbarkeit des Bodens von entscheidender Bedeutung ist. Die auf die Kornmenge übertragene Belastung wird von allen drei Phasen gemeinsam getragen.

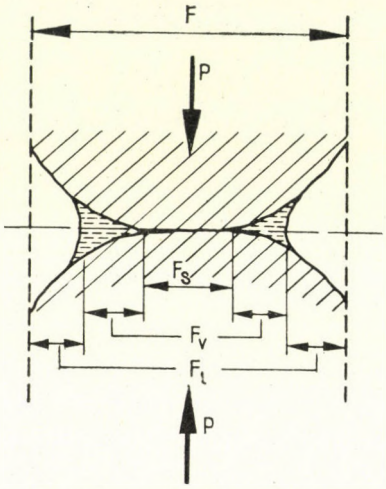


Bild 1. Spannungen in den, den Boden bildenden Medien verschiedenen Aggregatzustandes

Nimmt man einen ebenen Schnitt (Bild 1) durch eine derartige Kornmenge an, so schneidet die Schnittebene feste Körner, Wasserteilchen und luftgefüllte Poren. Im Bild sind diese Teilflächen vereinigt, die Kornmenge durch zwei Körner ersetzt, zwischen welchen das Wasser als Porenwinkelwasser und die Luft als Porenluft erscheinen. Es sei angenommen, daß die Körner groß genug sind, um die molekularen Oberflächenkräfte elektrischer Herkunft vernachlässigen zu dürfen. Die beiden einander berührenden Körner drückt die Kraft P gegeneinander. Es sei ferner angenommen, daß die Kraft keine tangentielle Komponente besitzt. Die Fläche, auf welcher die Kraft P wirkt, sei F. Diese besteht aus drei Teilen, u. zw. aus der Berührungsfläche F_s der festen Körner und aus den Flächen F_v bzw. F_l der Wasser- bzw. Luftphase.

Die innerhalb der Fläche F in den drei Medien verschiedenen Aggregatzustandes auftretenden Spannungen seien p_s, p_v und p_l.

Der Gleichgewichtszustand erfordert die Befriedigung der Gleichung

$$P = p_s F_s + p_v F_v + p_l F_l. \tag{1}$$

Nach Einführung der Verhältniszahlen

$$\varphi_s = F_s/F,\ \varphi_v = F_v/F,\ \varphi_l = F_l/F \tag{a}$$

erhält man die sog. *totale* Spannung aus der Beziehung

$$\sigma = P/F = p_s \varphi_s + p_v \varphi_v + p_l \varphi_l \,. \tag{2}$$

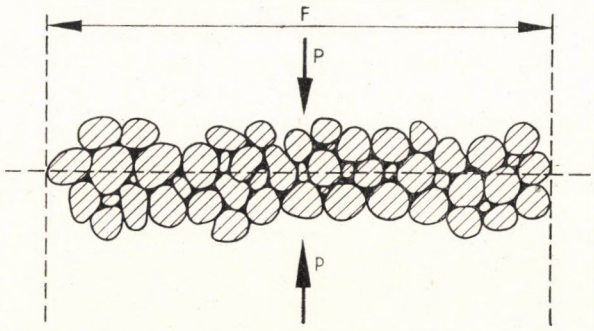


Bild 2. Im körnigen Medium angenommener ebener Schnitt

Wenn der Boden gesättigt ist, sind $\varphi_l = 0$ und $p = 0$, folglich ist

$$\varphi_v = 1 - \varphi_s \tag{b}$$

und daher

$$\sigma = p_s \varphi_s + (1 - \varphi_s)\, p_v \,. \tag{2a}$$

Wenn man den Querschnitt, wie in der Bodenmechanik üblich, so annimmt, daß die Körner nicht geschnitten werden, der Schnitt an ihren Oberflächen dabei aber möglichst eben geführt wird (Bild 2) und so die Gesamtheit der kleinen Berührungsflächen der Körner die Fläche F_s bildet, ist $\varphi_s = F_s/F$ sehr klein, weshalb die Größe $1 - \varphi_s$ nur wenig von der Einheit abweicht. Der Wert p_s ist dagegen sehr bedeutend und dürfte der Fließgrenze der festen Körner gleich sein. Das Produkt $p_s \varphi_s$ ist daher nicht gleich Null, sondern eine endliche Größe. Diesen Wert nennt man in der Bodenmechanik die *wirksame Spannung* und bezeichnet sie mit $\bar{\sigma}$. Die Gleichung (2a) kann daher in der Form

$$\sigma = \bar{\sigma} + p_v \tag{3}$$

angeschrieben werden. Der im Porenwasser auftretende hydrostatische Druck setzt sich aus zwei Teilen, namentlich aus dem im konsolidierten Zustand der Spannungen auftretenden und aus dem durch die äußere Belastung oder durch

sonstige Einwirkungen erweckten zusätzlichen Porenwasserüberdruck zusammen. Diese im Porenwasser auftretende Spannung heißt *neutrale Spannung*.

In einem Dreiphasensystem wirkt auf der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser die Oberflächenspannung. Die Differenz der Spannungen p_v und $p_l(p_l - p_v)$ steht im Zusammenhang mit der Oberflächenspannung und kann in der Gleichung (2) berücksichtigt werden. Man kann daher die Gleichung wie folgt aufschreiben:

$$\sigma = \varphi_s p_s + (1-\varphi_s) p_v + (1-\varphi_s-\varphi_v)(p_l - p_v) . \tag{2b}$$

Wenn man den Wert φ_v ändert, kann auch die Oberflächenspannung in die Berechnung einbezogen werden. Hier ist aber φ_v nicht mehr eine einfache Verhältniszahl der Oberfläche.

Bisher wurden in bezug auf die Eigenschaften des Mediums keine Annahmen gemacht, es wurde nur der Begriff der Spannung definiert. Es kann aber angenommen werden, daß zwischen den Formänderungen und Spannungen ein Zusammenhang besteht, nur müssen die Formänderungen immer mit den *wirksamen* Spannungen in Verbindung gebracht werden.

Im allgemeinen treten alle drei Spannungskomponenten auf. Nur die *wirksame* Spannung ($\bar{\sigma} = p_s \varphi_s$) befähigt das System, Schubspannungen aufzunehmen. Der allgemeine Spannungszustand kann in einem Dreieckdiagramm sehr anschaulich dargestellt werden (Bild 3), u. zw. in der Form

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{u}{\sigma} + \frac{p_l}{\sigma} = 1 , \tag{4}$$

wo

$$\sigma = \bar{\sigma} + u + p_l \tag{5}$$

die *totale* Spannung bedeutet. Das Diagramm eignet sich auch zur Darstellung der Änderungen im Spannungszustand. Wenn z. B. σ = konst. ist, erfolgt der Ausgleich des Porenwasser- bzw. -luftüberdruckes von einem Anfangszustand (σ, u, p_l) ausgehend (Punkt P) nach der Geraden Pb bis zum Eintritt des Zustandes $u = p_l = 0$. Wenn die Randbedingungen zeitlich nicht konstant sind, kann die Änderung mit einer krummen Linie dargestellt werden.

Die Teilung der vollen Spannung in wirksame und neutrale Spannung, genauer ausgedrückt, die Größe der durch einen gegebenen allgemeinen Spannungszuwachs verursachten Änderung der neutralen Spannungen ist vom Verhältnis der Zusammendrückbarkeit der Medien — Wasser bzw. Skelett — abhängig. Durch Annahme von Vereinfachungen kann man diesen Zuwachs mit Hilfe von die Bodeneigenschaften kennzeichnenden Konstanten bestimmen und den praktisch sehr wichtigen Wert der neutralen Spannung errechnen [2].

Auf Grund der im obigen definierten Begriffe können die Spannungen und Formänderungen von Zweiphasensystemen genau so berechnet werden,

wie die der Kontinua. Die totalen Spannungen können aus den Formeln der Elastizitätslehre ermittelt werden. Die neutralen Anfangsspannungen kann man entweder auf Grund des hydrostatischen Druckes oder eines Strömungsbildes ermitteln; in Kenntnis dieser können auch die wirksamen Spannungen bestimmt werden. Zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes sind noch sonstige Annahmen erforderlich.

Im folgenden wird ein anderer Fall der mit Wasser gesättigten — also zweiphasigen — Systeme behandelt, wobei die frühere Annahme, die zur Bezie-

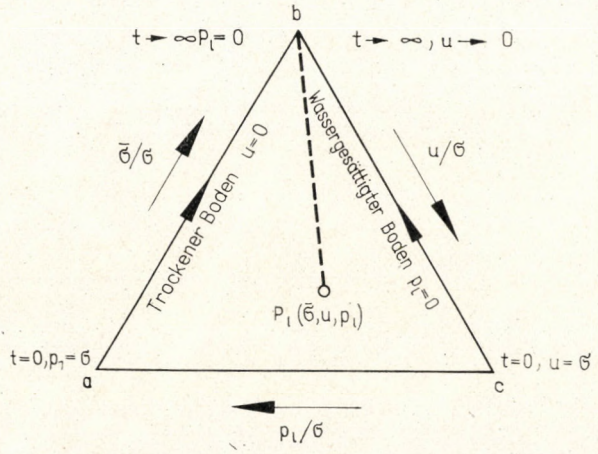


Bild 3. Darstellung des allgemeinen Spannungszustandes im Dreiecksnetz
1 trockener Boden; *2* wassergesättigter Boden

hung (3) führte, nicht angewendet wird. Es wird dagegen angenommen, daß das Medium *elastisch*, *homogen*, *isotrop*, *porös* und *durchlässig* ist. Die letztere Eigenschaft bedeutet, daß die Poren miteinander zusammenhängen. Das System ist mit Wasser gesättigt.

Die *totale* Spannung bedeutet auch hier die auf die Flächeneinheit des Querschnitts entfallende Kraft, doch bleibt bei der Berechnung der neutralen Spannung der Umstand nicht unberücksichtigt, daß der ebene Schnitt auch das feste Medium schneidet und die neutralen Spannungen nur in einem Teil des Querschnitts auftreten können. Diesen Umstand muß man auch bei der Spannungsberechnung berücksichtigen. Es besteht daher zwischen der totalen und der neutralen Spannung folgende Beziehung

$$\sigma = u\,(1 - n), \tag{c}$$

wo n den Porenanteil des porösen Mediums bedeutet. Die Größe der im Skelett auftretenden wirksamen Spannung ergibt sich aus der Formel

$$\bar{\sigma} = \sigma - u = -un\,, \tag{d}$$

d. h. Zug im Falle eines positiven u-Wertes (Druck).

Wenn man unter der Grenzfläche des porösen Mediums nicht nur die Grenzfläche des Körpers, sondern auch die Innenflächen des zusammenhängenden Porennetzes versteht und eine konstante Spannung p auf den Körper und auf die inneren Porenflächen wirken läßt, ergibt sich im ganzen System eine konstante und nach jeder Richtung gleich große neutrale Spannung:

$$u = -p.$$

Die durch diese Spannung verursachten Formänderungen sind von den elastischen Eigenschaften des die Poren füllenden Stoffes — Wasser — abhängig. Wenn man den Elastizitätsmodul und die Poissonsche Zahl des Wassers mit E_w bzw. μ_w bezeichnet, kann man die infolge der hydrostatischen Spannung u auftretende und nach jeder Richtung gleiche Formänderung aus der Gleichung

$$\varepsilon' = \frac{1-2\,\mu_w}{E_w}\,u = -\frac{1-2\,\mu_w}{E_w}\,p \tag{6}$$

bestimmen [1].

Der zweite Teil der Spannung hängt mit den elastischen Konstanten des porösen Stoffes zusammen. Es seien die entsprechenden Komponenten σ_x'', σ_y'', σ_z'' und ε_x'', ε_y'', ε_z''. Im Sinne des Hookeschen Gesetzes besteht zwischen diesen der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x'' &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x'' - \mu\,(\sigma_y'' + \sigma_z'')\right], \\
\varepsilon_y'' &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y'' - \mu\,(\sigma_x'' + \sigma_z'')\right], \\
\varepsilon_z'' &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z'' - \mu\,(\sigma_x'' + \sigma_y'')\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

In der Formel bedeuten E und μ den auf das gesamte Medium bezogenen Elastizitätsmodul. Die volle spezifische Formänderung ergibt sich aus den folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x'' + \varepsilon' = \frac{1}{E}\left[\sigma_x'' - \mu\,(\sigma_y'' + \sigma_z'')\right] + \frac{1-2\,\mu_w}{E_w}\,u, \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y'' + \varepsilon' = \frac{1}{E}\left[\sigma_y'' - \mu\,(\sigma_z'' + \sigma_x'')\right] + \frac{1-2\,\mu_w}{E_w}\,u, \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_z'' + \varepsilon' = \frac{1}{E}\left[\sigma_z'' - \mu\,(\sigma_x'' + \sigma_y'')\right] + \frac{1-2\,\mu_w}{E_w}\,u.
\end{aligned} \tag{8}$$

Bei der Summierung ist zu berücksichtigen, daß σ' die neutrale Spannung, σ_x'', σ_y'' und σ_z'' aber die Komponenten der vollen Spannung bedeuten.

Im Sinne obiger Ausführungen ist die neutrale Spannung σ' der totalen Spannung $\sigma'(1-n)$ gleichwertig. Es sind daher

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma''_x+(1-n)\,\sigma',\\ \sigma_y &= \sigma''_y+(1-n)\,\sigma',\\ \sigma_z &= \sigma''_z+(1-n)\,\sigma'.\end{aligned} \tag{9}$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\sigma' = u$ ist, erhält man aus den Gleichungen (8) und (9) die Werte

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\,[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]-\frac{1-2\,\mu}{E}\,(1-\alpha-n)\,u,\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\,[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]-\frac{1-2\,\mu}{E}\,(1-\alpha-n)\,u,\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\,[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]-\frac{1-2\,\mu}{E}\,(1-\alpha-n)\,u.\end{aligned} \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{\dfrac{E}{(1-2\,\mu)}}{\dfrac{E_w}{(1-2\,\mu_x)}}; \tag{11}$$

d. h. das Verhältnis der Zusammendrückbarkeit des porösen Skeletts und des die Poren füllenden Stoffes. Wenn die Poren mit Wasser gefüllt sind, ist α immer sehr klein, weil die Zusammendrückbarkeit des Bodenskeletts immer viel kleiner ist als die des Wassers. Wenn hingegen die Poren mit Luft und Wasser gefüllt sind, ist ihre Zusammendrückbarkeit ganz bedeutend, und da E_w infolgedessen klein ist, nimmt der Wert von α zu. Sofern es sich um große Druckänderungen handelt, ist auch zu berücksichtigen, daß sich die im Wasser verteilte freie Luft in diesem löst [2].

Der Zusammenhang der Schubspannungen und der Scherverformungen wird vom Porenwasserdruck nicht beeinflußt, da dieser im isotropen Stoff keine Winkelverzerrung verursacht.

Gegebenenfalls muß auch der Strömungsdruck berücksichtigt werden. Diese Kraft ist, ebenso wie das Gewicht, eine Massenkraft, deren Komponenten im vorliegenden Fall dem Produkt aus dem in der gegebenen Richtung geltenden Druckgradienten und dem Porenanteil ist. Es ist daher

$$X = -\,n\frac{\partial p}{\partial x};\quad Y = -\,n\frac{\partial p}{\partial x};\quad Z = -\,n\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{12}$$

In Kenntnis der Randbedingungen und der wirkenden Massenkräfte können die Spannungen und Formänderungen ermittelt werden.

Bei der Festsetzung der Randbedingungen ist zu berücksichtigen, daß die Grenzflächen der porösen Masse wasserdurchlässig oder wasserundurchlässig sein können. Wenn in einem Punkt der *durchlässigen* Grenzfläche die Spannung gleich p ist, dann erfordert die Randbedingung, daß die zur Grenzfläche senkrechte Komponente der neutralen Spannung gleich $-p$ sei. Die entsprechende Komponente der vollen Spannung ist daher $-(1-n)\,p$. In bezug auf die Randbedingungen wirkt die auf der Grenzfläche auftretende Spannung p wie eine auf der Fläche gleichmäßig verteilte Kraft, deren auf die Flächeneinheit entfallende Komponenten sich aus den folgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [-(1-n)\,p]\,\bar{l}\,, \\ \bar{Y} &= [-(1-n)\,p]\,\bar{m}\,, \\ \bar{Z} &= [-(1-n)\,p]\,\bar{n}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Hier bedeuten $\bar{l}$, $\bar{m}$ und $\bar{n}$ die Richtungskosinus der Flächennormale.

Wenn es sich dagegen um eine *undurchlässige* Grenzfläche handelt und die Spannung in einem Punkt p_c beträgt, dann erfordert die Randbedingung, daß die zur Grenzfläche senkrechte Komponente der totalen Spannung gleich $-p_c$ sei. Wenn außer der außerhalb der wasserundurchlässigen Fläche wirkenden Spannung p_c innerhalb der Grenzfläche noch eine Spannung p wirkt, sind die Richtungen der Kräfte p und p_c einander entgegengesetzt. Die Porenspannung p wirkt nur auf einem Bruchteil n, der Fläche p_c dagegen auf der ganzen Fläche.

Die Randbedingung erfordert daher, daß die senkrechte Komponente der vollen Spannung dem Wert $np - p_c$ gleich sei, und es können in jedem Punkt der Fläche für die entsprechenden Spannungskomponenten die den Gleichungen (13) entsprechenden Beziehungen angeschrieben werden.

Die im obigen behandelten Zusammenhänge können vor allem in der Gesteinsmechanik Anwendung finden. Die Formeln ermöglichen die Bestimmung der in poröse oder zusammenhängende Poren enthaltenden festen Gesteinen auftretenden Spannungen und Formänderungen. Zugleich weisen sie auch darauf hin, daß die neutralen Spannungen nicht nur in den Festigkeits- und Formänderungsproblemen der körnigen Böden eine wichtige Rolle spielen, sondern sich auch weitgehend auf die Festigkeit der aus einem festen Skelett bestehenden, in ihren Hohlräumen und Poren aber Wasser enthaltenden Gesteine auswirken. Die neutralen Spannungen gewinnen in solchen Medien auch deshalb an Bedeutung, weil sie bereits infolge kleiner Formänderungen stark zunehmen.

LITERATUR

1. Timoshenko, S.—Goodier, J. N.: Theory of Elasticity (2nd ed.). McGraw Hill Book Co., New York—London 1951. Engineering Monograph Serie.
2. Kézdi, Á.: Handbuch der Bodenmechanik (Bd. 1: Bodenphysik). Akadémiai Kiadó — VEB Verlag für Bauwesen, Budapest 1969
3. Scott, P. P., Jr., Bearden, Wm. G., Howard, G. C.: A Multiple-Fracturing Process for Increasing the Productivity of Wells. Drilling and Production Practice. *Am. Petroleum Inst.* (1952), 104—107.
4. Lubinski, A.: The Theory of Elasticity for Porous Bodies Displaying a Strong Pore Structure. *A.I.M.E.* Dallas, Texas (1953).
5. Scott, R. F.: Principles of Soil Mechanics. Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading (Mass.) 1963

Stresses in a Two-Phase Medium. Paper gives first the concept of stresses acting in two-and three-phases systems, then presents an instructive method for their graphical representation. In the second part, the fundamental equations for stresses acting in elastic, homogeneous, porous and permeable systems are derived; without the usual assumptions that neutral stresses in disperse systems act on the total cross section.

Напряжнения в двухфазных системах *(А. Кезди)*. После выяснения понятия о напряжениях, возникавших в двух- и трехфазных системах в стати показывается метод наглядного изображения напряженного состояния. В следующих, отклонив обычное предположение о возникновении нейтральных напряжений по целому поперечному сечению дисперсной системы, автор выводит общие основные уравнения статики для упругого, однородного, изотропического, пористого и водопроницаемого средства.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 39—65 (1970)

DYNAMICS OF A MODEL OF STICK-SLIP

Á. BOSZNAY*
CAND. OF TECHN. SC.

[Manuscript received May 20, 1969]

Dedicated to Prof. Ádám Muttnyánszky on the occasion of his 80th birthday by his onetime student with his grateful respect.

The problem referring to the title in the paper is solved by analysing the phase diagrams. The possible types of movements are discussed and clearly explained. According to the investigations the occurrence of the stick-slip cannot be entirely avoided on the model taken as a basis, only, at most, the period of the slip might be shortened within a cycle.

I. Introduction

By the expression "*stick-slip*" the way of sliding is commonly meant at which in the frictional travel of an element driven in a guide interruptions occur, that is, the element comes to a standstill for short periods differing from zero. This phenomenon occurs in practice, for example, with the slides of machine-tools guided in an alignment and is detrimental in several respects, therefore, it is to be eliminated.

Several authors treated this problem both from theoretical and practical aspects. Lately, G. ARZ wrote a comprehensive study of this problem [1]. It was B. SZŐKE who called the attention of the writer to this problem.

This paper is intended to analyse the dynamics of the model used by B. SZŐKE for the simulation of the stick-slip of the slides of machine-tools.

The writer expresses his thanks to B. SZŐKE for putting at his disposal the first draft of his paper dealing with the problem in question.

II. Szőke's model and its equation of motion

This model is shown in Fig. 1. The slide guided in alignment is simulated by the prism of a mass denoted by m. The distributed load system acted on by the guides on the prism is substituted by the concentrated frictional force F_S and by the normal force N. The active forces applied on the slide are replaced by a single constant concentrated force Q normal to the guides.

This is the way in which the frictional force is simulated.

* Prof. DR. BOSZNAY Á.; Győri út 12, *Budapest XII* (Hungary)

If the speed of the slide equals zero, during a period different from zero, the frictional force is of adhesive character, and thus we have

$$|F_S| \leqq \mu_0 |N| = S_0 , \tag{1}$$

wherein μ_0 is the adhesive friction coefficient of the contact materials considered as being constant. S_0 is introduced as a notation.

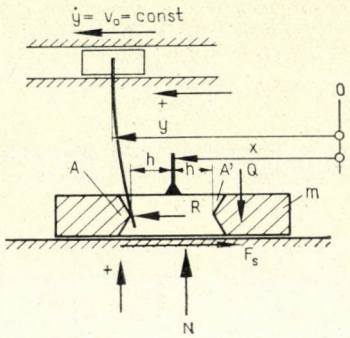


Fig. 1. The SZŐKE model of the stick-slip

If the speed of the slide becomes zero at any moment, it does not necessarily remain zero in the subsequent period Δt differing from zero. This only happens if the value of the component in the x-direction of the resultant vector of the forces acting on the slide is higher than S_0 during this Δt-period.

If the speed of the slide differs from zero, the frictional force acts opposite to the speed, and its value is

$$|F_S| = \mu |N| = S , \tag{2}$$

independent of the speed, where μ is the friction coefficient in motion of the contact materials, and is constant; $\mu_0 > \mu \cdot S$ is introduced as a notation.

Though the speed of the slide is equal to zero, at any moment however, the component in the x-direction of the resultant vector of the active forces applied to the slide is, during the period differing from zero and immediately following this moment, greater than S_0, also in this case we assume the value of the frictional force according to (2). We assume its sense to be opposite to that of the component in the x-direction of the resultant vector of the active forces.

The driving member attached to the slide is simulated by a prismatic bar considered to be without mass and linearly elastic. The lower extremity of the bar can be displaced either freely in the slot of the prism having a width of $2h$, or it can be supported by the prism at the point A or A'. The lower extremity of the bar applies a force R on the prism simulating the slide.

The upper end of the bar is fixed in a prism guided in alignment. This prism is driven by a constant speed $v_0 > 0$.

The position of the slide is defined by the coordinate x, that of the latter prism by y. The origin and positive direction of the two axes of the system of coordinates are the same. Accordingly $\dot{y} = v_0$.

Owing to what has been said above the component-equation of the theorem of momentum relating to the body simulating the slide, established in the direction normal to the guide, coplanar with the drawing, is

$$O = N - Q, \tag{3}$$

and the component equation in the direction of the guide

$$m\ddot{x} = F_S + R. \tag{4}$$

In consequence of the slack due to the slot of a width of $2h$

$$R = 0, \quad \text{if} \quad -h \leqq (y-x) \leqq h. \tag{5a}$$

Denoting the spring constant of the drive-bar associated with the given load by c, from the properties of the model it follows that

$$R = \frac{1}{c}[y-(x+h)], \quad \text{if} \quad (y-x) \geqq h \tag{5b}$$

and

$$R = \frac{1}{c}[y-(x-h)], \quad \text{if} \quad (y-x) \leqq h. \tag{5c}$$

The force R corresponding to the foregoing is shown in Fig. 2 depending on $y - x$.

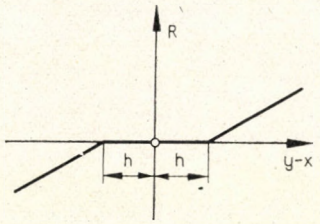


Fig. 2. Characteristic curve of the spring force of the model

According to the assumption made in connection with the frictional force

$$F_S = -\operatorname{sign}\dot{x} \cdot S, \quad \text{if} \quad \dot{x} \neq 0; \tag{6a}$$

$$F_S = -\operatorname{sign} R \cdot S, \quad \text{if} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{and} \quad |R| > S_0; \tag{6b}$$

$$F_S + R = 0, \quad \text{if} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{and} \quad |R| \leqq S_0. \tag{6c}$$

For the case $\dot{x} \neq 0$, Fig. 3 shows F_S given above as a function of $\dot{x}$. In case of $\dot{x} = 0$, as is to be seen from (6b) and (6c), F_S is given as a function of $(y - x)$; its diagram is illustrated in Fig. 4 (in full line). To $|R| = S_0$ corre-

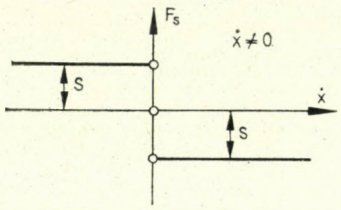


Fig. 3. Model of the frictional force in the case if $\dot{x} \neq 0$

sponds $|y - x| = H$; the region of the definition of the independent variable here is determined by the inequality

$$|y - x| \leq H.$$

In Fig. 4 also R is represented (by a dashed line).

The differential equation (4) is heteronomous, because y involved in the expressions (5b) and (5c) of R is, in consequence of $\dot{y} = v_0$ a prescribed function

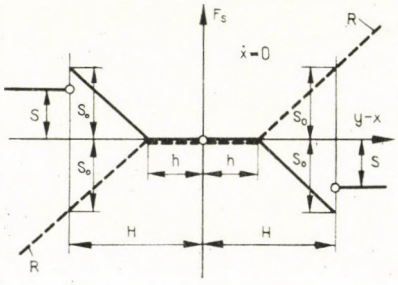


Fig. 4. Model of the frictional force in the case if $\dot{x} = 0$

of time. In the following section we shall see that by applying an appropriate system of coordinates we can make the differential equation autonomous. This is substantial, because the method making use of the phase plane, in this case yields a simple solution.

In connection with what was said in Section I, we can state that sticking in the slip is characterized in that the value of $\dot{x}$ during periods differing from zero, equals zero.

III. Equation of motion of the model in a system of coordinates travelling with a speed v_0

In this system of coordinates fixed to the "upper" prism, the problem may be analysed by means of an autonomous equation. The position of the prism simulating the slide, can now be defined by the coordinate z (Fig. 5).

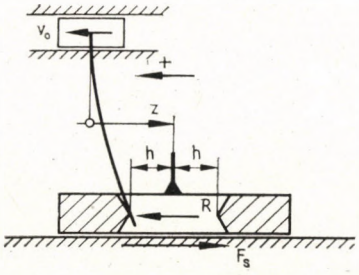


Fig. 5. Introduction of the coordinate z

Since the relative system of coordinates is translated by a constant speed, fictious forces need not be taken into account, thus, the equation corresponding to (4) will be

$$m\ddot{z} = F_S + R. \tag{7}$$

By comparing Figs 1 and 5, and considering the positive sense assigned to x, y and z, we may read that

$$z = x - y. \tag{8}$$

By making use of (8), R may be expressed by z as

$$R = 0, \quad \text{if} \quad -h \leqq z \leqq h; \tag{9a}$$

$$R = -\frac{1}{c}(z+h), \quad \text{if} \quad z \leqq -h; \tag{9b}$$

and

$$R = -\frac{1}{c}(z-h), \quad \text{if} \quad z \geqq h. \tag{9c}$$

According to (6a), (6b), (6c) and (8) in respect to the frictional force it is true that

$$F_S = -\operatorname{sign}(\dot{z}+v_0)\, S, \quad \text{if} \quad \dot{z}+v_0 \neq 0; \tag{10a}$$

$$F_S = -\operatorname{sign} R \cdot S, \quad \text{if} \quad \dot{z}+v_0 = 0, \quad \text{and} \quad |R| > S_0. \tag{10b}$$

Further

$$F_S + R = 0, \quad \text{if} \quad \dot{z}+v_0 = 0 \quad \text{and} \quad |R| \leqq S_0. \tag{10c}$$

By taking Fig. 4 and Eq. (8) into account, the equality-inequality (10b) and (10c) may be expressed as follows

$$|z| > H \quad \text{or} \quad |z| \leq H. \tag{10d}$$

Sticking occurring in the coordinate x expressed by z manifests itself in $\dot{z} + v_0 = 0$ on several occasions during periods differing from zero.

It is to be seen that the equation of motion now obtained is autonomous, because neither F_S nor R are depending on time explicitly.

IV. Another interpretation of the equations of motion established in the foregoing

We can explain the problem defined by Eqs (7), (9a), (9b), (9c), (10a), (10b) and (10c) in another mechanical sense differing somewhat from the first basic principle used above.

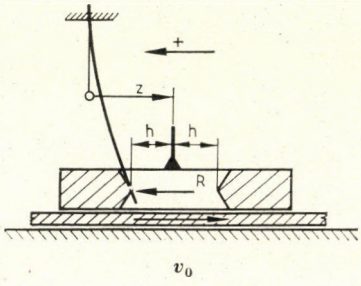


Fig. 6. Another interpretation of the model of Fig. 1

Let us consider from this aspect the mechanical model shown in Fig. 6 This differs from that treated as yet, partly in that the upper extremity of the elastic bar is restrained in an unmovable body, partly that the prism simulating the slide is not directly supported by an unmovable surface but by a moving one with a speed $-v_0$ directed towards the negative sense of the z-s.

The force produced by the elastic bar is correctly expressed by the relations (9a), (9b) and (9c) also by this model. Now, it is the speed of the prism relating to the moving support surface which becomes significant in the expression of the frictional force. This relative speed is

$$\dot{z} + v_0 .$$

(For example, in case of $\dot{z} = 0$, the relative speed of the prism becomes v_0; this is easy to see at a glance.)

From the foregoing it follows that in case of the model shown in Fig. 6 the form of F_S will be the same as in Fig. 1 in regard to the system of

coordinates travelling at a speed v_0, that is, as in the case represented in Fig. 5.

This recognition may be expressed in other words as follows: the analysis of the model shown in Fig. 6 is equivalent to the analysis of that represented in Fig. 5. Further: the results obtained from the model of Fig. 6 may easily be transposed to the original model seen in Fig. 1. Namely, if we denote by $z(t)$ a law of motion of the model of Fig. 6, then the corresponding law of motion $x(t)$ of the model given in Fig. 1, may be calculated according to (8) as follows

$$x(t) = z(t) + y(t)\,, \tag{11a}$$

wherein

$$y(t) = y_0 + v_0 t\,. \tag{11b}$$

Here, y_0 is the initial value of the coordinate y.

In the following, in solving the problem in question we shall keep in mind the definition of the model according to Fig. 6.

V. Preparing the solution of the equation of motion

According to the foregoing the equation of motion (7) should be analysed by considering the expressions (9a), (9b), (9c), (10a), (10b) and (10c). However, attention should also be paid to the conditions under which stick-slip occurs.

The analysis may be made particularly clear by plotting the phase diagram, that is, the curve $v \equiv \dot{z} \equiv f(z)$ (see, for example, [3]).

By taking into account

$$m\ddot{z} = m\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = m\frac{dv}{dz}v$$

and introducing the new function $v = \dot{z}$, the differential equation (7) may also be written in the form

$$m\frac{dv}{dz}v = F_S + R\,. \tag{7a}$$

Since the functions F_S and R contained in the differential equation are given in the different intervals of their independent variables by various analytic expressions, several possible combinations may be taken into consideration.

a) $R = 0$ and $F_S = \mp S$. The upper sign holds for the case of sign $(\dot{z} + v_0) = 1$, the lower one for that of sign $(\dot{z} + v_0) = -1$. In this case, the

differential equation (7a) can be separated and directly integrated:

$$\int_{v_1}^{v} v\,dv = \mp \int_{z_1}^{z} \frac{S}{m}\,dz\,,$$

that is,

$$v^2 = v_1^2 \mp \frac{2S}{m}(z - z_1). \tag{12a}$$

Herein, v_1 and z_1 are the coherent initial values of the speed and of the coordinate of location.

(12a) is a second-degree parabola lying in the phase plane v, z, passing through the point (v_1, z_1) its axis coinciding with axis z. The coordinate of its vertex is

$$z_1 \pm \frac{m}{2S} v_1^2.$$

b) $F_S + R = 0$. The solution of (7a) is, in case of $v \not\equiv 0$, $v(z) =$ $=$ constant. According to (10c), $F_S + R$ is only equal to zero if $z + v_0 = 0$, so that this constant may only be $-v_0$; thus, the solution is now

$$v \equiv \dot{z} = -\,v_0\,. \tag{12b}$$

This solution yields a straight line lying in the phase plane, parallel to the z-axis, passing through the point $v = v_0$.

According to the foregoing, the repeated appearance of this type of motion analysed corresponds to the stick-slip.

c) $R = \dfrac{-1}{c}(z \pm h)$, $F_S = \mp S$. In the expression of R the upper sign corresponds to the case (9*b*), the lower one to the case (9c). It should be decided with the aid of (10a) or (10b) respectively, which of the signs is the right one in the expression of F_S. The differential equation which can be written as

$$v\frac{dv}{dz} = \frac{\mp cS \mp h - z}{mc}$$

can also now be separated and directly integrated. By integration we obtain

$$v^2 - v_1^2 = \frac{2}{mc}\left[\mp (cS \pm h)(z - z_1) - \frac{1}{2}(z^2 - z_1^2)\right]. \tag{12c}$$

This is the equation of an ellipse containing the point (v_1, z_1). The centre of the ellipse lies on the z-axis, and its coordinate is

$$z_0 = \mp cS \mp h\,. \tag{13}$$

One of the axes of the ellipse coincides with the z-axis. By relocating from the coordinates v, z to the coordinates

$$v, \zeta = \frac{1}{\sqrt{mc}} z$$

we obtain a circle in place of an ellipse.

Since the curves of solution corresponding to the subcases *a)* and *b)*, are as simple in the system of coordinates v, ζ as in that of v, z, in the following we shall always use the system of coordinates v, ζ.

VI. Construction and discussion of the solutions valid in the different regions of the phase plane

The possible solutions may be summed up the most easily with the aid of the phase plane v, ζ.

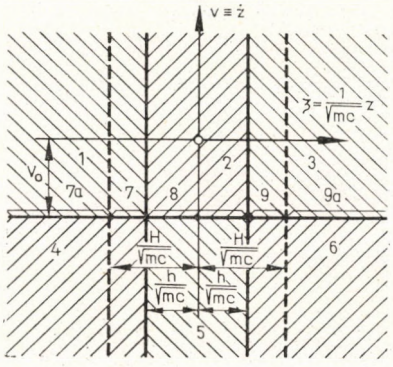


Fig. 7. Characteristic regions of the phase plane

The phase plane (Fig. 7) is bisected by the straight line $v = -v_0$ to two half-planes, and by the straight lines

$$\zeta = \mp \frac{h}{\sqrt{mc}}$$

and

$$\zeta = \mp \frac{H}{\sqrt{mc}}$$

to two half-planes and to three bands. The regions which could be interesting from the viewpoint of the problem in question are marked with encircled numbers. In plotting the straight lines

$$\zeta = \mp \frac{1}{\sqrt{mc}} \mathrm{H}$$

we have taken into account that

$$H > h\,.$$

Depending on the different regions of the phase plane wherein the point representing the motion — in short: phase point — lies, different types of motion take place from among the possible ones. Table I shows the various possible cases.

In the following the progress of the first two stages of the motion of the phase point in the cases of various characteristic initial conditions should be examined. A stage of motion is the part of motion within the phase point is situated only in one of the regions from among those shown in Fig. 7. The initial conditions taken as specified in advance may be considered as a stage developed as a result of a previous motion; in this way, we may obtain an information from the possible types of motion.

First initial condition: $\zeta = 0, v = 0$. At the moment of starting the phase point is situated in region 2. According to Table I here we have to do with the subcase *a)*. In this region sign $(\dot{z} + v_0) = 1$, therefore, in the equation of the phase diagram it is the upper sign which is valid. The equation will be written with the coordinate ζ in place of z and we shall immediately introduce the initial values $v_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$:

$$v^2 = -\frac{2S}{m}\sqrt{mc}\,\zeta\,.$$

The vertex of this parabola is in the origo, and its concavity is directed towards the negative sense of the ζ-s.

Either from a well known general property of the phase diagrams or from the physical meaning of Fig. 6 it immediately follows that the speed starting from zero becomes ever more negative in this stage of motion. Therefore, the phase point moves along the segment of negative ordinate of the parabola in the direction marked with a small arrow.

In Fig. 8 the form of the parabola corresponding to three different values of $(2S/m)\sqrt{mc}$ is to be seen. The form marked with γ is characterized by its going through the point A_1, that is,

$$(-v_0)^2 = -\frac{2S}{m}\sqrt{mc}\left(-\frac{h}{\sqrt{mc}}\right) = \frac{2Sh}{m}\,.$$

In the case marked with β

$$v_0^2 > \frac{2Sh}{m}\,,$$

Table I

Characteristic regions of the phase plane

Definition of the region	Sign of the region	Expression of R	Expression of F_S	Corresponding subcase of Section V
$\zeta \gtrless -\frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v > -v_0$	*1*	$-\frac{1}{c}(z+h)$	$-S$	*c)*
$-\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta \gtrless \frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v > -v_0$	*2*	0	$-S$	*a)*
$\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta$ $v > -v_0$	*3*	$-\frac{1}{c}(z-h)$	$-S$	*c)*
$\zeta \gtrless -\frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v < -v_0$	*4*	$-\frac{1}{c}(z+h)$	$+S$	*c)*
$-\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta \gtrless \frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v < -v_0$	*5*	0	$+S$	*a)*
$\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta$ $v < -v_0$	*6*	$-\frac{1}{c}(z-h)$	$+S$	*c)*
$-\frac{H}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta \gtrless -\frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v = -v_0$	*7*	$-\frac{1}{c}(z+h)$	$\frac{1}{c}(z+h)$	*b)*
$\zeta < -\frac{H}{\sqrt{mc}}$ $v = -v_0$	*7a*	$-\frac{1}{c}(z+h)$	$-S$	*c)*
$-\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta \gtrless \frac{h}{\sqrt{mc}}$ $v = -v_0$	*8*	0	0	*b)*
$\frac{h}{\sqrt{mc}} \gtrless \zeta \gtrless \frac{H}{\sqrt{mc}}$ $v = -v_0$	*9*	$-\frac{1}{c}(z-h)$	$\frac{1}{c}(z-h)$	*b)*
$\frac{H}{\sqrt{mc}} < \zeta$ $v = -v_0$	*9a*	$-\frac{1}{c}(z-h)$	$+S$	*c)*

and in the case marked with δ

$$v_0^2 < \frac{2Sh}{m}.$$

In the cases of γ and δ the speed becomes equal to v_0, until $|\zeta| < H/\sqrt{mc}$. Thus from the region *2* we come to the common point of the regions *7* and *8*, or into the region *8*. This means, according to Table I that the following stage

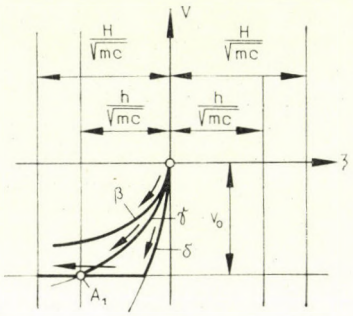


Fig. 8. Initial segments of the phase diagram corresponding to the first initial condition

of the motion takes place according to the subcase *b)*, that is, the phase point travels along the straight line $v = v_0$ in this stage. Both from the physical representation and from the general property of the phase diagrams it follows that the phase point travels along this straight line in the direction of the negative ζ-s.

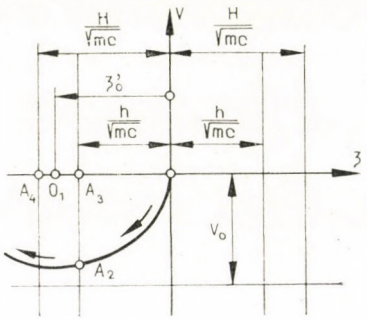


Fig. 9. Part of the phase diagram corresponding to the case β of the first initial condition

In case of β the phase point in moving in the region *2* arrives to the border of the regions *2* and *1* (Fig. 9; point A_2). Herefrom, the phase point travels along a circular line, this in this case is the second stage of the motion. The coordinate ζ of the centre of the circle with the aid of (13) is:

$$\zeta_0' = \frac{z_0}{\sqrt{mc}} = -\frac{1}{\sqrt{mc}}(cS+h). \tag{13a}$$

The location of the centre may easily be found. Namely, from Fig. 4 it can immediately be read that

$$\frac{1}{c}(H-h) = S_0$$

and from (1) and (2) follows — considering the condition $\mu < \mu_0$ that is $S < S_0$. Whence,

$$H - h > cS\,,$$

that is,

$$cS + h < H$$

and this, on account of (13a) is equivalent to

$$-\frac{H}{\sqrt{mc}} < \zeta_0'.$$

The inequality obtained above may be complemented with another one which follows from the fact that c, S and h are non-negative, and thus the place of the centre is determined by

$$-\frac{H}{\sqrt{mc}} < \zeta_0' < -\frac{h}{\sqrt{mc}}\,. \tag{14}$$

Accordingly, the centre is situated between the points A_3 and A_4 of Fig. 9.

In the figure the segment of the circular arc of the centre 0_1 starting from the point A_2 is represented.

Second initial condition: The starting point is a point of arbitrary location in region *2*. If the ordinate of the initial point in the phase plane is equal to zero or has a negative sign, then cases having the same character may occur as in case of the second initial condition. If this ordinate is positive, the first segment of the phase diagram is, in accordance with the foregoing, a parabola, also defined by Equ. (12a), its concavity extending in the direction of the negative ζ-s, but now, the motion of the phase point starts on the segment of the positive ordinate.

In the case when the vertex of the parabola is situated in the point A_5 or at the left-hand side of this, then the phase point remaining in the region *2* passes over to the segment of the parabola having negative ordinates, and again we have to do with a case of the same type which has already been discussed in connection with the analysis of the first initial condition.

The behaviour is different in the case when the vertex of the parabola lies at the right-hand side of the point A_5 (Fig. 10). The first stage of the

motion will be closed at the point of intersection of the parabola and the straight line

$$\zeta = \frac{h}{\sqrt{mc}}$$

representing the border of the region *2* (point A_6).

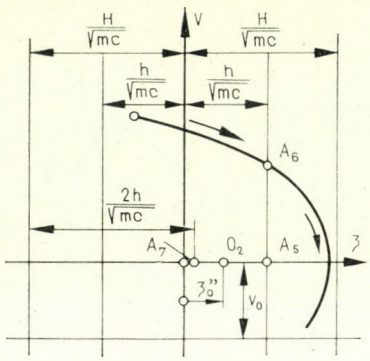


Fig. 10. Initial segments of the phase diagram corresponding to the second initial condition

The second stage of the motion takes place in region *3*. Here, the phase point travels along a circular arc. According to (13) the abscissa of its centre is:

$$\zeta_0'' = \frac{z_0}{\sqrt{mc}} = \frac{1}{\sqrt{mc}}(-cS+h). \tag{13b}$$

This centre lies, in comparison with that defined by (13a) farther towards the left by $2h$ and it can easily be seen that now

$$\frac{h}{\sqrt{mc}} > \zeta_0'' > \frac{-H+2h}{\sqrt{mc}}. \tag{15}$$

Thus this centre must now be situated between the points A_5 and A_7.

In Fig. 10 also a segment of the circular arc of the centre 0_2, starting from the point A_6 is represented.

Third initial condition: The point corresponding to the starting one is in the region *3* of the phase plane. In the first stage of the motion it travels, in accordance with the foregoing, along a circle of a centre of the abscissa ζ''.

If this circle intersects the straight line $v = -v_0$ in a point A_8 of the abscissa

$$\zeta \leqq \frac{H}{\sqrt{mc}},$$

then the phase point gets into the region *9*, and therefore, in the second stage of the motion the phase point travels along the straight line $v = -v_0$ (Fig. 11).

Contrarywise, if the abscissa in the A_8 is larger than $H/\sqrt{mc}$, the phase point is situated here already in region *9a*. According to Table I the force pattern is the same as in region *6*. Consequently, the phase point travels

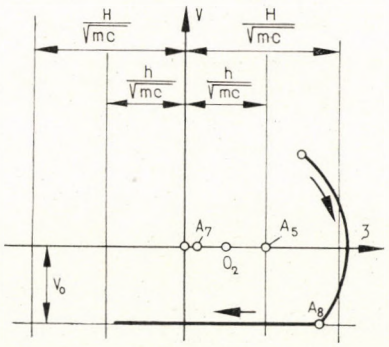


Fig. 11. Initial segments of the phase diagram corresponding to the third initial condition

also hereafter along a circle, but the centre of which, according to (10), will now have the abscissa

$$\zeta_0''' = \frac{1}{\sqrt{mc}}(cS+h). \tag{13c}$$

Since $\zeta_0''' = -\zeta_0$, from the location (12) of ζ_0' it is immediately evident that the centre of the circle just treated may only be situated between the point A_5 and A_9 (Fig. 12).

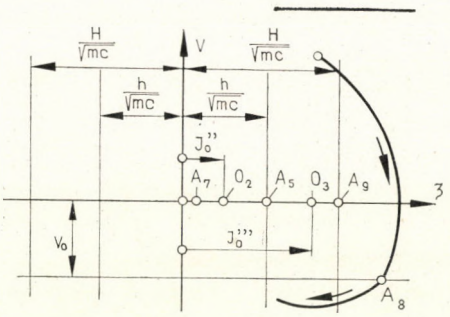


Fig. 12. Initial segments of the phase diagram corresponding to the third initial condition in the case of another position of the point A_8

Fourth initial condition: Starting takes place at a point of the regions 7, 8 or 9. According to Table I the first segment of the phase diagram is a segment of the straight line $v = -v_0$. The phase point leaves the region *7* at

point A_{10}. From the general property of the phase diagram already several times mentioned and, as a matter of course also from the physical appearance, it follows that after leaving the point A_{10}, the speed cannot become more negative than $-v_0$.

This statement may be deduced on the basis of the physical appearance in the following way. Up to the point A_{10} the speed of the prism is constant having a value of $v = -v_0$, because during this period the component in the direction of the course of the resultant vector of the forces acting on the prism

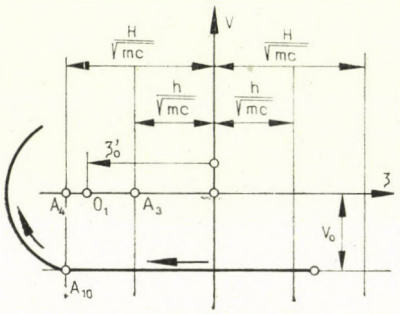


Fig. 13. Initial segments of the phase diagram corresponding to the fourth initial condition

is identically equal to zero. The speed of the prism could become later on more negative only in the case if the component along the course mentioned would become negative. In the neighbourhood of the locus $z = -H$ the spring force can only be positive and only the frictional force could provide a component in the negative direction. The frictional force can now only be adhesive in nature, because the relative speed of the prism and the moving surface is zero during a period which differs from zero. Contrarily, the frictional force due to the adhesion, as is to be seen in Fig. 4, can by no means be larger than the spring force corresponding to the locus $z = -H$. In our model no other forces are acting, thus the foregoing are also justified on the basis of the physical figuring in our proposition.

In accordance with the above mentioned, the phase point can only arrive from point A_{10} into the regions *7a* or *1*. The force distribution is, according to Table I, the same in both of these regions, and the solution of the differential equation representing the phase diagram corresponds in this case to the subcase *c)*. The phase point travels on along the circle of the centre (Fig. 13) and Equ. (13a):

$$\zeta_0' = -\frac{1}{\sqrt{mc}}(cS+h).$$

Fifth initial condition: Starting takes place in a point of arbitrary location in the regions *1* or *7a*. In accordance with that said above a segment of

the circle having a centre defined by the abscissa ζ_0' corresponds to the first stage of the motion (Fig. 14).

Fig. 14 represents a case where this circle is not tangential to the straight line $v = -v_0$, or does not intersect it. In this case the first stage of motion is completed at the point A_{11}.

The second stage of motion takes place in the region *2*, accordingly, here, the phase diagram becomes a second-degree parabola with a character several times mentioned above.

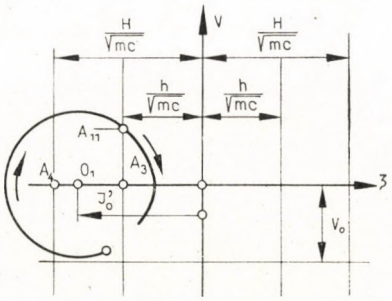


Fig. 14. Initial segments of the phase diagram corresponding to the fifth initial condition

Sixth initial condition: The point corresponding to the starting is to be found in the region *9a* or *6*. As it has already been seen on the discussion of Fig. 12 and the third initial condition, the first segment of the phase diagram is a segment of the circular arc with a centre abscissa ζ_0'' (Fig. 15).

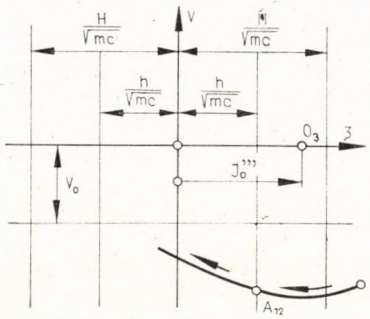


Fig. 15. Initial segments of the phase diagram corresponding to the sixth initial condition

The phase point arrives at the point A_{12} to the border of the region 5. Herefrom, it travels along the parabola corresponding to the subcase *a)*. The concavity of the parabola is now directed towards the positive ζ-axis.

Seventh initial condition: The point of starting is the point of the region 5. According to the above-said the phase diagram is, in the first stage, a parabola corresponding to the subcase *b)*.

In the case represented in Fig. 16 the phase diagram arrives to the region 8 at the point A_{13}. On the basis of Table I, in the second stage of the motion

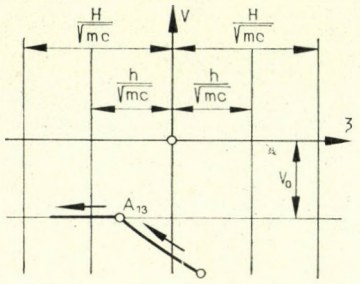


Fig. 16. Initial segments of the phase diagram corresponding to the seventh initial condition

the phase point travels along the straight line $v = -v_0$. The same happens if the first stage of the phase diagram intersects the straight line $v = -v_0$ in region 7.

In the case shown in Fig. 17 the phase point arrives to the border of the region 4 at the point A_{14}. In this region the phase diagram is, according

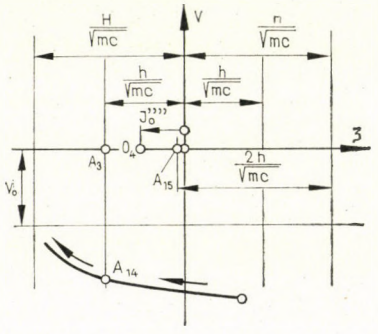


Fig. 17. Initial segments of the phase diagram corresponding to the seventh initial condition for another case

to Table I a circle. On the basis of (13) the abscissa of its centre is

$$\zeta_0'''' = \frac{1}{\sqrt{mc}}(cS - h). \tag{13d}$$

After determining the localization of ζ_0'' (15), we obtain immediately also the limits of ζ_0''''. Consequently, the centre O_4 must be situated between the

points A_3 and A_{15}. Therefore, the second segment of the phase diagram is now a circular arc of the centre O_4.

Eighth initial condition: The starting point is a point in the region 4. The first segment of the phase diagram is a circular arc with the centre O_4.

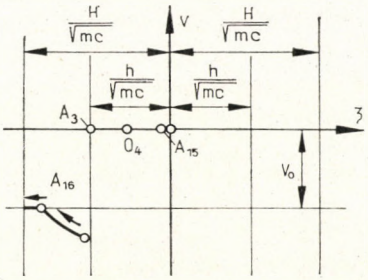


Fig. 18. Initial segments of the phase diagram corresponding to the eighth initial condition

If the circular arc intersects the straight line $v = -v_0$ in the region 7, then in the second stage of the motion the phase point travels along the straight line $v = -v_0$ (Fig. 18).

In Fig. 19 a variant is shown at which the circle with the centre O_4 intersects the straight line $v = -v_0$ in the region *7a*. According to Table I

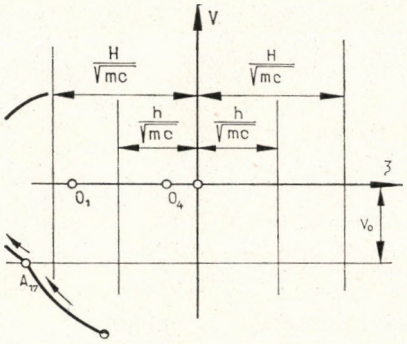


Fig. 19. Initial segments of the phase diagram corresponding to the eighth initial condition for another case

the stress patterns are the same in both regions *7a* and *1*, and the circle with the centre O_1 is the corresponding phase diagram.

Nineth initial condition: The starting point is point O_1. At this point the force acting on the slide is, considering (13a) and introducing the notation $z_0' = \sqrt{mc}\,\zeta_0$:

$$-\frac{1}{c}(z_0'+h)-S=-\frac{1}{c}\left[-\frac{\sqrt{mc}}{\sqrt{mc}}(cS+h)+h\right]-S=0.$$

The initial speed is here equal to zero, thus, the slide may remain at permanent rest. Therefore, this point is the so-called stationary point.

Its existence may be recognized by way of physical viewing, namely, in Fig. 6 it is easy to see that there must exist a negative z of a higher absolute value than h at which the spring force directed to the left, this just equalizes the friction force directed to the right produced by the moving surface.

By summing up the results of our investigations carried out so far, it can already be seen that besides point O_1, no other stationary points exist.

VII. Recapitulation of the possible solutions of the problem

On the basis of the discussions of the preceding section it is possible to size up all of the possible solutions of the problem on the whole of the phase plane.

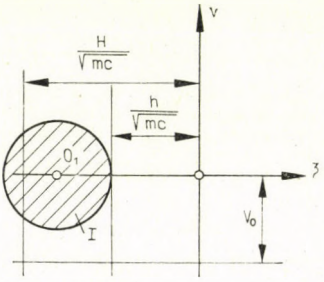


Fig. 20. If the starting point is situated in this closed region, the phase diagram is a circle with the centre O_1

The solution at which the entire phase diagram shrank up to the point O_1, is hardly significant practically. This is the case of the permanent rest analysed in the nineth initial condition of the preceding Section VI.

We arrive to another set of solutions in the case where the starting point is situated at a sufficiently close neighbourhood of the point O_1. The meaning of the expression "sufficiently close" is as follows: the distance between the starting point and point O_1 should be at most so large that the circle drawn from the centre O_1 should at most be tangential to that from among the straight lines $v = -v_0$ and $\zeta = -1/\sqrt{mc}$ which is closer to the point O_1. This region is closed if the bordering circle is not tangential to the straight line $v = -v_0$; otherwise it is open.

In Fig. 20 the close circular neighbourhood of the point O_1 sufficiently small, defined above, is encircled by a dashed line. This region obtains the sign I. The figure shows a case where the circle is tangential to the straight line, and only to the straight line $\zeta = -h/\sqrt{mc}$.

If the starting point is situated in this region, the phase diagram of the entire motion is a circle drawn around the centre O_1; thus point O_1 is a common interior point of a closed set of curves, that is, a so-called vortex point. Accordingly, this motion is periodic, besides, it takes place in time according to a sinusoidal regularity. This proposition may be justified by direct physical viewing, because in this region a restoring force is acting on the slide model depending on the coordinate in a homogeneous linear way, above this, only a frictional force of constant magnitude and direction is applied; this latter can only displace the mid-position of the oscillation.

During the oscillation just investigated, the sum of the mechanical energy of the system does not change. Therefore, this type of oscillation is conservative in nature, and cannot be considered as a self-excited oscillation.

Besides, it can be determined that if the starting point approaches the point O_1, then the arisen motions also tend towards the permanent resting stage corresponding to the point O_1. Consequently, the stationary point O_1 defines a position of stable equilibrium.

By making use of the results obtained in the above section, it is easy to see that, if the circle surrounding the area defined above, is not tangential to the straight line $v = -v_0$, then, in the phase plane such an open region may be determined which can be characterized as follows. If the starting point is situated in this region, the motion will be conservative in nature and periodic, even in this case, but not necessarily sinusoidal in function of time. This region will be marked with *II*.

The bordering curve of this region may be obtained by drawing a circle around the centre O_1 this being tangential to the straight line $v = -v_0$ (Fig. 21a and 21b), then, by assuming the point A_{19} of the circle which may be as near as possible to the point A_{18} in the direction of the motion, but may not coincide with this latter, to be a starting point, constructing the phase diagram according to that said in section 6. The phase diagram consists either, only of a segment of the circle with the centre O_1 and of a segment of the parabola lying in the region *2*, or, in addition, of a further circular arc having the centre O_2. This latter possibility is shown in Fig. 21b. It should be noted that the point of tangency A_{18} cannot coincide with the point A_{10}, because O_1 cannot coincide with the point A_4 (see Fig. 9).

It should be emphasized that the region marked with *II* is open, accordingly the limiting curve does not belong to the region.

This limiting curve shown in Fig. 21 has a characteristic role. Namely, if the starting point is a point of this curve, then the phase point travels only along this curve till it arrives to the tangent point A_{18} of the curve and straight line $v = -v_0$. From here, it slides over onto the straight line and moves on up to the point marked with A_{10} in Fig. 13, then, depending on the relative values of the parameters, follows one or the other of the phase diagrams shown

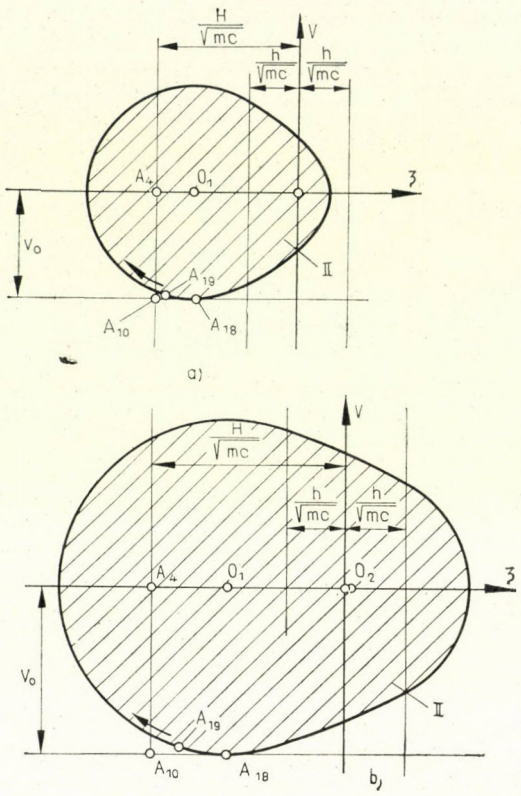


Fig. 21. If the limiting circle of the region I is not tangential to the straight line $v = -v_0$, then this region marked with II contains the starting points leading to oscillation of a conservative nature (*a*), and configuration of the region II in another case (*b*)

in Fig. 22a and 22b. In the theory of the self-excited oscillations, this latter is referred to as a collecting curve.

The motion along the collecting curve may be considered as a self-excited oscillation. This is the case of the so-called hard self-excitation, because the system must be removed from the stationary point O_1 to a finite extent, in order to develop this type of oscillation.

It is possible that the bordering circle of the region I is tangential to the straight line $v = -v_0$. In this case, the region II coincides with region I.

In the following we shall investigate the nature of the motion to be expected in the case if the starting point is situated outside region II and its limiting curve. With this view we should consider the special role of the points of the straight line $v = -v_0$ as starting points, taking into account those mentioned in section 6. From the figures of this section it is clear that in the case when the phase point arrives to the segments of the straight line $v = -v_0$

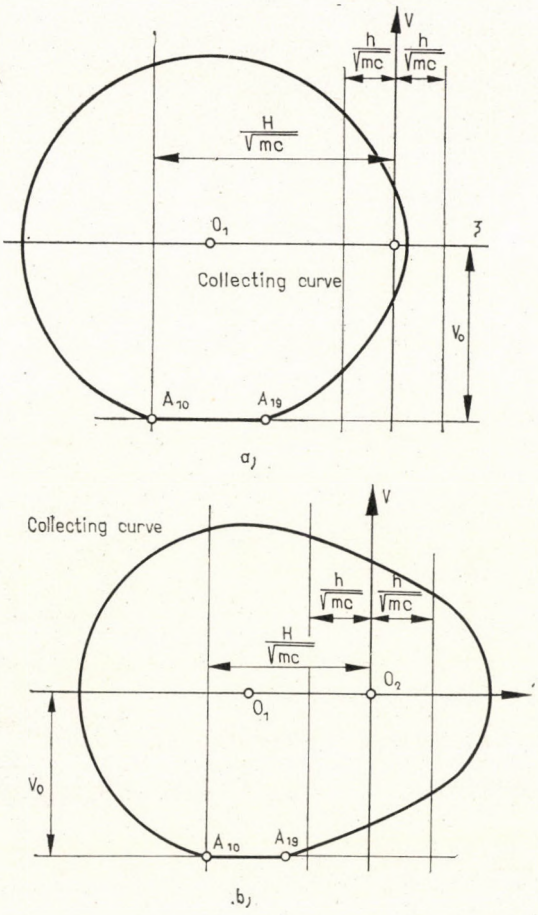


Fig. 22. A possible shape of the collecting curve (*a*) and another possible shape of the collecting curve (*b*)

marked in Table I with *7*, *8* or *9* and closed at the places $\zeta = \pm H/\sqrt{mc}$, this straight line "attracts" the phase point which remains on it, up to the point A_{10}. If the phase point passes over to the segment *7a* or *9a* of the straight line $v = -v_0$, then the slope of the tangent of the phase diagram here also has a rupture, but the phase point does not slip over onto the straight line $v = -v_0$.

Let us now consider the segments of the phase diagrams intersecting the straight line $v = -v_0$ in the segments *7a* or *9a* situated in the neighbourhood of the point of intersection. If the point of intersection is to be found in the segment *9a*, then with the travelling of the points of intersection in the direction of the motion the radius of the phase diagram cannot increase (Fig. 12). The same statement may be established by making use of Fig. 19 in the case where the point of intersection is situated in the segment *7a*.

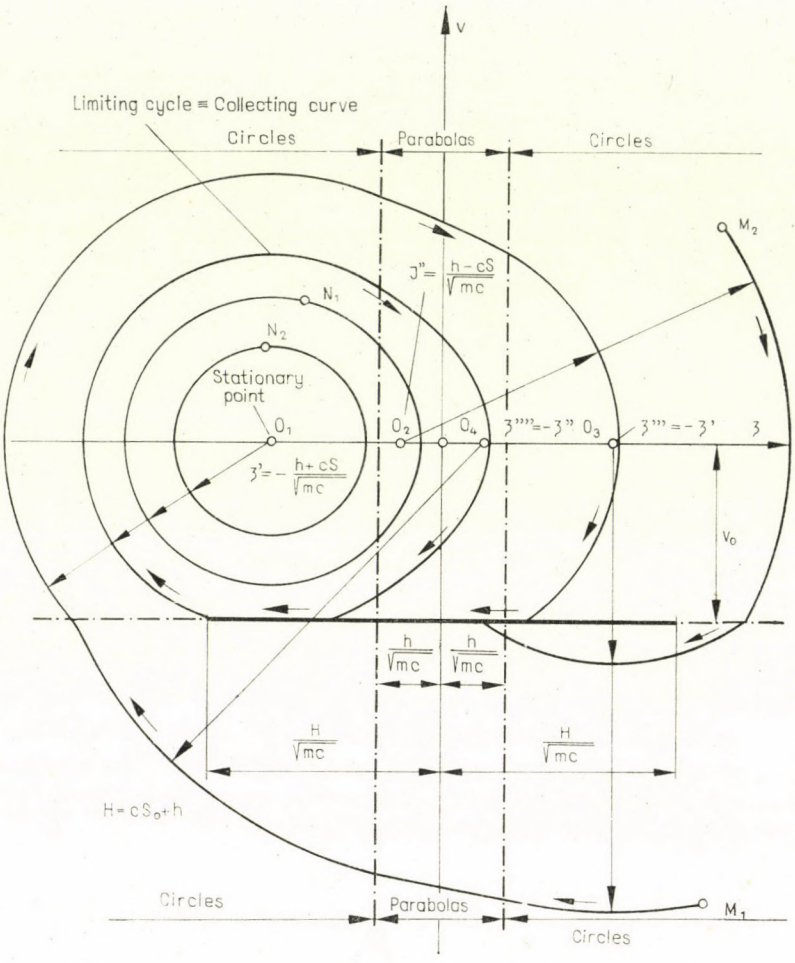


Fig. 23. The different possible phase diagrams

Contrarily, in passing through the regions *2* and *5*, the phase point monotonously approaches the ζ-axis. From that, it may be concluded, that if the starting point is situated outside region *II*, after running over more or less cycles, must pass over onto the attracting segment of the straight line $v = -v_0$. The consequence of this is that after a sufficiently long time (which may practically be "short") after the starting outside the region *II*, the phase point runs onto the closed phase diagram corresponding to Figs 22. And, if it runs onto this phase diagram, thus, according to what has been said above, it also remains on it.

Accordingly, the phase diagram of Figs 22 is the limiting cycle, known from the theory of self-excited oscillations. The so-called attractive region of

the limiting cycle is, in our case, the entire region of the phase plane outside the limiting cycle. In our case, the limiting cycle and the collecting curve coincide.

In Fig. 23 the various types of the phase diagrams are to be seen at the same time. In the subcase $h = 0$ the phase diagrams do not possess parabolic segments, further $O_1 \equiv O_2$ and $O_3 \equiv O_4$. Consequently the limiting cycle only consists of the segment of the straight line $v = -v_0$ and of a circular arc with the centre $O_1 \equiv O_2$. The segments of the phase diagrams lying in the region $\dot{z} < -v_0$, is an arc of a circle with the centre $O_3 \equiv O_4$.

VIII. Occurrence possibilities of the stick-slip

According to what has been mentioned at the end of Section III, stick-slip takes place if $\dot{z} + v_0$ equals several times zero, during a period differing from zero. Thus, when stick-slip occurs, the phase point moves along the straight line $\dot{z} = -v_0$ during periods differing from zero.

In regard to the characteristic phase diagrams in Fig. 23 and summing up the considerations of Section VII, it can be seen that such startings may exist at any values of h, H, v_0, c and m different from zero which result in stick-slip (for example, startings at points M_1 or M_2) and also such wherewith this phenomenon may be avoided (for example, in case of startings at points N_1 or N_2). However, in the mechanical-engineering application corresponding to our model in the normal operation, the starting conditions are just such as would result in stick-slip. Namely, in a normal case, we can assume the initial conditions $x = 0$, $\dot{x} = 0$. From the static force pattern shown in Fig. 1 it follows that with the $x = 0$ and $\dot{x} = 0$ at the moment of starting ($t = 0$), $|y|_{t=0} \leqq H$ may be in accord. Thus, the initial conditions expressed by the variable z, are

$$|z|_{t=0} = |x_{t=0} - y_{t=0}| \leqq H ,$$

further

$$\dot{z} = 0 - v_0 .$$

From this, and also considering Fig. 23, it follows that the initial conditions associated with the normal operation by all means lead the phase point onto the limiting cycle, accordingly stick-slip necessarily takes place.

Consequently, from the properties of the model analysed it follows that the stick-slip cannot be avoided by the selection of the parameters. The same statement were made by HÄUSSLER and WONKA [2] who calculated with a different model than the one discussed here, but not using the method of the phase plane.

Let us now examine how we could reduce the period of the stick-slip in comparison with the period needed for the entire passage of the stable limiting cycle.

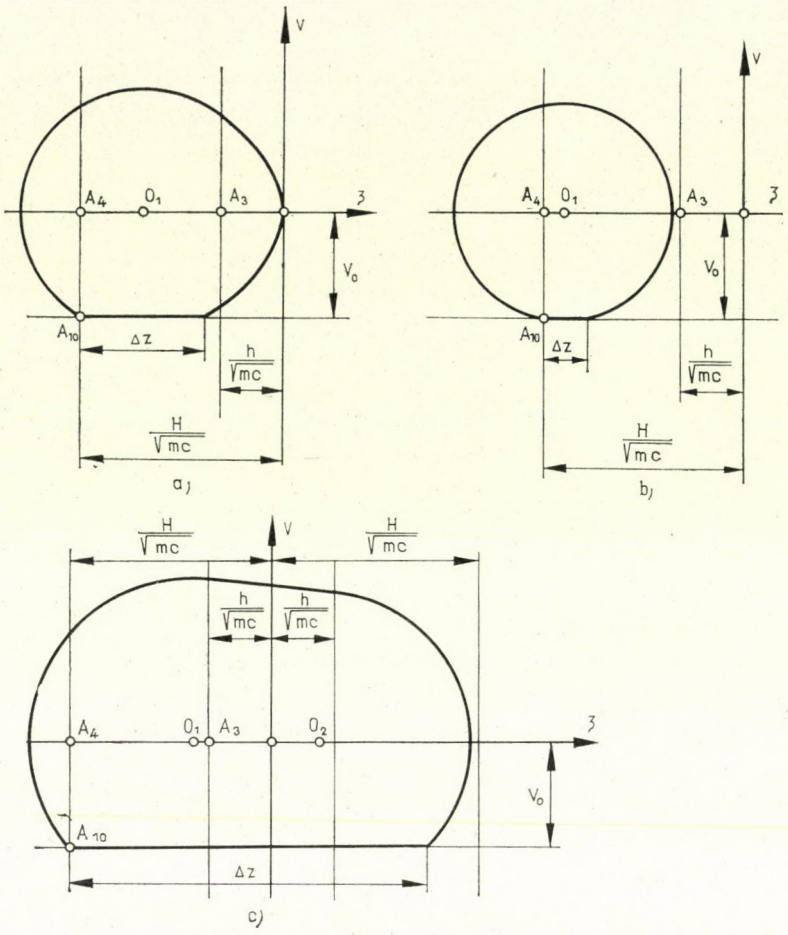


Fig. 24. The calculation of the slip travel in case of three limiting cycles (*a*, *b*, *c*)

First of all let us consider the simpler problem, how could we reduce the period of the stick-slip within a single cycle in itself, that is, not relating to another characteristic period. The duration Δt of the stick-slip within a single cycle may be easily calculated, for, during the slip $|\dot{z}| = v_0 = constant$. Let us denote by Δz the way covered by slipping, then $\Delta t = \Delta z / v_0$.

The value of Δt might be reduced by reducing Δz and/or by increasing v_0. The investigation of the possibility in increasing the value of v_0 goes beyond the scope of this paper. Only the possibility of reduction of Δz will be discussed.

In Figs 24a, 24b and 24c three limiting cycles are shown. In all the three cases the same values of the parameters h, H and v_0 are valid; they only differ in the location of the point O_1. The row of figures clearly shows

that the nearer the point to A_4, the lower is the value of Δz. By making use of the reasoning applied in deriving the inequality (12), we find that

$$\overline{O_1 A_4} = H - (cS + h) = H - h - cS = c(S_0 - S) = cN(\mu_0 - \mu).$$

Accordingly, Δz may be reduced by reducing the values c, N, and $\mu_0 - \mu$.

If the value of z is sufficiently low, then the whole limiting cycle may approximately be considered to be a circle and, by that, the process of oscillation may be taken as sinusoidal with a period of oscillation of $T = 2\pi\sqrt{mc}$ and thus, $\Delta z = 2\,\overline{O_1 A_4}$. Accordingly, the quotient of the period of the stick-slip and that of the whole cycle is

$$\frac{\dfrac{\Delta z}{v_0}}{T} = \frac{2\,\overline{O_1 A_4}}{v_0\, 2\pi\sqrt{mc}} = \frac{2\,cN(\mu_0 - \mu)}{v_0\, 2\pi\sqrt{mc}}.$$

From this relation the conclusion may be drawn in respect to the possibilities in reduction of the period of the stick-slip in comparison with the period of the whole cycle.

REFERENCES

1. Arz, G.: Theoretical Relations of the Stick-slip (in Hungarian). *Gép* **18** (1966), 464—470.
2. Häussler, F. W.—Wonka, A.: Zur Berechnung des Stick-Slip-Vorganges. *Maschinenbautechnik* **8** (1959), 45—53.
3. Magnus, K.: Schwingungen. B. G. Teubner, Stuttgart 1961.

Dynamik eines Modells des Stick-Slip-Vorganges. Die angegebene Aufgabe wird mit Hilfe der Analyse der Phasendiagramme gelöst. Die möglichen Bewegungsarten werden vorgestellt and anschaulich erörtert. Das Auftreten des Stick-Slip-Vorganges kann — gemäß den Untersuchungen — nicht völlig vermieden, sondern höchstens dessen Dauer innerhalb eines Ziklus reduziert werden.

Динамика одной модели неплавного (с перебоями) скольжения *(А. Боснаи)*. Указанную в заглавии задачу работа решает с помощью анализа фазовых диаграмм. Указываются возможные типы движения и доступно рассматриваются возможности анализа. Согласно проведенным исследованиям в случае взятой за основу модели нельзя полностью избежать возникновения скольжения с перебоями, и в лучшем случае можно уменьшить в пределах одного периода время скольжения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 67—81 (1970)

EDGE DISTURBANCES OF THE SHALLOW HYPERBOLIC PARABOLOIDAL SHELL BOUNDED BY FOUR GENERATRICES

L. KOLLÁR*
DR, OF TECHN. SC.
and
M. SZŐTS**

[Manuscript received 11 Febr. 1969]

The hyperbolic paraboloid shell bounded by four generatrices subjected at one of its edges to bending moments is investigated with the aid of the elastic bending theory of shallow shells. Inside the shell the decreasing curve of the bending moment is determined. The result is compared on the one hand with that of the Bleich-Salvadori solution, and on the other, with the decreasing curve of the bending moment of the plain plate.

1. Introduction

The doubly curved shell structures bear the distributed loads by membrane forces, provided the supports are able to resist the membrane forces arising at the edges. Thus, the bending moments acting in these types of shells are not necessary for ensuring the equilibrium. They arise from the deformation incompatibilities occurring at the edges, and are rapidly dying out with an increasing distance from the edges.

This decrease of the edge disturbances has been investigated for barrel-vaults, elliptic paraboloid and saddle-shaped hyperbolic paraboloid shells (translational surfaces) [2], [5], [4]. However, the decrease of the edge disturbances of the hyperbolic paraboloid shells bounded by four generatrices is not yet clarified. As far as the author's knowledge goes, up to the present it was only DUDDECK [3] who treated a similar problem: he determined the stress pattern of a hyperbolic paraboloid simply supported at the straight edges and subjected to an uniformly distributed load. The edge disturbances themselves have been analysed by BLEICH and SALVADORI [1] on the basis of approximate assumptions. Their results will be compared with those of the present solution.

The aim of this paper is to establish the decreasing bending moment diagram of a hyperbolic paraboloid (hypar), loaded by bending moments along a straight edge, and to determine the distance beyond which it may practically be taken to be equal to zero. Namely, this type of load may be considered as a basic case, on the base of which one can form a notion of the decrease of other types of edge disturbances and can estimate the width of the strip to be reinforced.

* Dr. KOLLÁR L., Karap u. 9., *Budapest* XII., (Hungary)
** SZŐTS M., Felvinci u. 10., *Budapest* II., (Hungary)

2. Notations

(See also Fig. 1)

x, y	orthogonal coordinetes;
$z\,(x, y)$	ordinate of the shell surface;
r, s, t	second order partial derivatives of the shell surface;
n_x, n_y, n_{xy}	membrane forces;
q_x, q_y	flexural shearing forces;
p_z	load component parallel to z;
m_x, m_y, m_{xy}	bending and twisting moments;
u, v	displacements parallel to x and y, respectively;
w	displacement normal to the surface;
$E, G = E/[2(1+\nu)]$	moduli of elasticity in tension and shear, respectively;
ν	Poisson's ratio (in the deductions: $\nu = 0$);
h	thickness of the shell;
a, b	side lengths of the plan projection of the hyperbolic paraboloid;
f	height of the corner of the hypar above the xy plane;
$\alpha^n = n\pi/a$	$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Differentiation with respect to x is denoted by prime, differentiation with respect to y is denoted by dot.

3. Deduction of the governing equations

The investigations will be made on the base of the theory of shallow shells [4], [7], the calculations thus being simpler and the differential equations have constant coefficients.

The general equilibrium equations of the shallow shells consist of three projection and two moment equations [4]:

$$n_x' + n_{xy}^{\cdot} = 0\,, \tag{1a}$$

$$n_{xy}' + n_y^{\cdot} = 0\,, \tag{1b}$$

$$rn_x + 2\,sn_{xy} + tn_y + q_x' + q_y^{\cdot} + p_z = 0\,, \tag{1c}$$

$$m_x' + m_{xy}^{\cdot} - q_x = 0\,, \tag{1d}$$

$$m_{xy}' + m_y^{\cdot} - q_y = 0\,. \tag{1e}$$

(The third moment equation becomes meaningless for the case of shallow shells; the reason for it is explained in [4].)

In these equations it is implied that the load has only a vertical component, p_z, parallel to the z-axis.

The internal forces are connected to the displacement components by Hooke's law as follows:

$$n_x = Eh(u' - rw) \tag{2a}$$

$$n_y = Eh(v^{\cdot} + tw)\,, \tag{2b}$$

$$n_{xy} = \frac{Eh}{2}\,(u^{\cdot} + v' - 2sw)\,, \tag{2c}$$

$$m_x = -\frac{Eh^3}{12} w'', \tag{2d}$$

$$m_y = -\frac{Eh^3}{12} \ddot{w}, \tag{2e}$$

$$m_{xy} = -\frac{Eh^3}{12} w'. \tag{2f}$$

Substituting the set of equations (2) into (1), and eliminating the shear forces q_x, q_y from (1c) with the aid of (1d) and (1e), we arrive at three differential equations of the displacement components u, v, w:

$$2u'' + \dot{u}' + v' - 2rw' - 2s\dot{w} = 0, \tag{3a}$$

$$u' + v'' + 2\dot{v} - 2t\dot{w} - 2sw' = 0, \tag{3b}$$

$$ru' + s(\dot{u} + v') + t\dot{v} - (r^2 + 2s^2 + t^2)w - \frac{h^2}{12}(w^{IV} + 2\ddot{w}'' + \ddot{w}) + p_z = 0. \tag{3c}$$

These three equations together with the boundary conditions fully determine the three displacement functions u, v and w.

We can also arrive to a different set of equations equivalent to the group of Eq. (3) in such a way that we consider the internal forces n_x, n_y, n_{xy} as second derivatives of a stress function $F(x, y)$:

$$n_x = \ddot{F}, \tag{4a}$$

$$n_y = F'', \tag{4b}$$

$$n_{xy} = -F'', \tag{4c}$$

whereby the equilibrium equations (1a, 1b) are automatically satisfied. There still remains Eq. (1c) which after substituting Eqs (1d, 1e) and (2d to 2f) contains only two unknown functions, $F(x, y)$ and $w(x, y)$:

$$\frac{Eh^3}{12}(w^{IV} + 2\ddot{w}'' + \ddot{w}) - (tF'' - 2sF'' + r\ddot{F}) = p_z. \tag{5a}$$

However, we must still deduce from Eqs (2a to 2c) a *compatibility equation* starting out from the equality of the mixed second derivatives, expressing that the three displacements (u, v, w) are continuous functions, that is, the shell surface gets neither torn, nor crumpled:

$$(F^{IV} + 2F'' + \ddot{F}) + Eh(tw'' - 2s\dot{w}' + r\ddot{w}) = 0. \tag{5b}$$

Thus we obtained for F and w two partial differential equations of the fourth order [4], [7].

Advantage of the set of Eqs (5a, 5b) is that it contains only two unknown functions. It has the disadvantage, however, that only the statical boundary conditions and the displacement boundary conditions in terms of w may be easily applied in connection with them. If the displacement boundary conditions also include constraints in terms of the displacements u or v, then it is commonly prefarable to use the set of Eqs (3a to 3c). In this paper it will also be started from the set of Eqs (3), and the three displacement functions u, v, w should be determined.

In the following, the load component p_z will be omitted from the equations because for the case of the edge disturbance at hand the shell is regarded as unloaded.

4. Application of the equations to the hypar shell

The boundary conditions to be considered

The equation of the shell surface illustrated in Fig. 1 is:

$$z = \frac{f}{ab} xy. \tag{6}$$

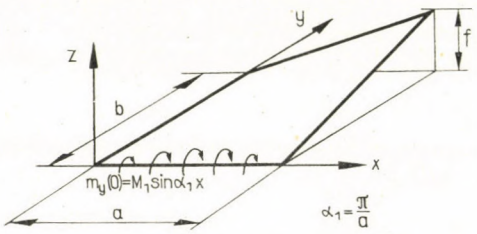


Fig. 1. Hypar shell

The second derivatives of the surface are:

$$r = 0\,, \tag{6a}$$

$$s = \frac{f}{ab}\,, \tag{6b}$$

$$t = 0 \tag{6c}$$

whereby the set of Eqs (3) will have the following simpler form:

$$2u'' + u'' + v'' - \frac{2f}{ab} w' = 0\,, \tag{7a}$$

$$u''+v''+2\,v''' - \frac{2f}{ab}w' = 0\,, \tag{7b}$$

$$u'+v' - \frac{2f}{ab}w - \frac{h^2\,ab}{12f}(w^{IV}+2\,w''''+w'') = 0\,. \tag{7c}$$

We assume a simple support at every edge which allows free rotation and precludes lateral thrust. The edge $y = 0$ will be subjected to the effect of a bending moment with a law of distribution $m_y = M_1 \sin \pi x/a = M_1 \cdot \sin \alpha_1 x$. Therefore, deflection, bending moment normal to the edge, and lateral thrust must be equal to zero along all edges. This involves the following boundary conditions:

At the edge $y = 0$:

$$w = 0\,, \tag{8a}$$

$$w'' = \frac{12}{Eh^3} M_1 \sin \frac{\pi}{a} x\,, \tag{8b}$$

$$n_y = 0\,, \text{ that is, } v' = 0\,. \tag{8c}$$

At the edges $x = 0$ and $x = a$:

$$w = 0 \tag{8d}$$

$$m_x = 0, \text{ that is, } w'' = 0\,, \tag{8e}$$

$$n_x = 0, \text{ that is, } u' = 0\,. \tag{8f}$$

We do not consider the conditions of the edge opposite the external bending moment because we assume that the disturbance dies out before reaching the other edge. This assumption is subsequently justified by the moment diagrams obtained as solutions, see Fig. 2.

5. Solution of the set of equations

The equations will be solved with the aid of the usual method of the theory of edge disturbances: we establish product functions for u, v, w in such a way that for the terms depending on x we choose trigonometric functions which, after substituting them into Eqs (7), all yield sine or cosine. These trigonometric terms can thus be omitted, whereby we obtain for the terms depending on y a common set of differential equations. The trigonometric functions depending on x should be selected in such a way as to satisfy — as far as possible — the boundary conditions along the edges $x = 0$ and $x = a$.

In comparison with the bending theory of cylindrical shells [4] the calculation now becomes more intricate, for, contrary to the cylindrical shell, now we cannot find trigonometric functions which, besides the equilibrium equations, also automatically satisfy every boundary condition along $x = 0$ and $x = a$. Some of these boundary conditions can only be satisfied — approximately — by collocation (equalizing in selected points), the more correctly, the greater the number of terms (and edge points) considered.

The three product functions will be chosen as follows:

$$u = \sum_n u_n(y) \sin \alpha_n x\,, \tag{9a}$$

$$v = \sum_n v_n(y) \cos \alpha_n x\,, \tag{9b}$$

$$w = \sum_n w_n(y) \sin \alpha x\,. \tag{9c}$$

In these expressions

$$\alpha_n = n\pi/a \tag{10}$$

and in the Fourier series we consider as many terms as are needed for the degree of accuracy required.

Substituting the nth term of the expressions (9) into the set of Eqs (7), and simplifying with the trigonometric expressions, we arrive at the following three differential equations:

$$-2\alpha_n^2 u_n + \ddot{u_n} - \alpha_n \dot{v_n} - \frac{2f}{ab} \dot{w_n} = 0, \tag{11a}$$

$$\alpha_n \dot{u_n} - \alpha_n^2 v_n + 2\ddot{v_n} - \frac{2f}{ab} \alpha_n w_n = 0\,, \tag{11b}$$

$$\dot{u_n} - \alpha_n v_n - \frac{2f}{ab} w_n - \frac{h^2 ab}{12f} (\alpha_n^4 w_n - 2\alpha_n^2 \ddot{w_n} + \ddot{\ddot{w_n}}) = 0\,. \tag{11c}$$

The solution of this set of homogeneous, linear equations may be written as

$$u_n(y) = U_n e^{\beta_n y}, \tag{12a}$$

$$v_n(y) = V_n e^{\beta_n y}, \tag{12b}$$

$$w_n(y) = W_n e^{\beta_n y}, \tag{12c}$$

where U_n, V_n and W_n are, for the moment, unknown constants.

Placing the functions (12) into the group of equations (11) yields the following set of homogeneous, linear equations for the unknowns U_n, V_n and W_n:

$$(-2\alpha_n^2 + \beta_n^2) U_n - \alpha_n \beta_n V_n - \frac{2f}{ab} \beta_n W_n = 0\,, \tag{13a}$$

$$\alpha_n \beta_n U_n + (-\alpha_n^2 + 2\beta_n^2) V_n - \frac{2f}{ab} \alpha_n W_n = 0 , \tag{13b}$$

$$\beta_n U_n - \alpha_n V_n - \left[\frac{2f}{ab} - \frac{h^2 ab}{12f} (\alpha_n^2 - \beta_n^2)^2 \right] W_n = 0 . \tag{13c}$$

This set of equations has a system of nontrivial solutions only in case when its determinant equals zero. Thus β_n, hitherto unknown, should be defined by this condition (from the so-called characteristic equation). This determinant represents an equation of the fourth order in respect to β_n^2, therefore, each n is associated with four β_{nj}^2 values ($j = 1, 2, 3, 4$). From these we only consider those four β_{nj}-s which give decreasing curves with an increasing distance from the edge $y = 0$, that is only those, the real part of which are *negative*. Two of these four roots (β_{n1} and β_{n2}) are real, and two of them are conjugated complex values:

$$\beta_{n3} = \gamma_n + i \cdot \delta_n \tag{14a}$$

$$\beta_{n4} = \gamma_n - i \cdot \delta_n . \tag{14b}$$

We take over the values of β_{n1}, β_{n2}, γ_n and δ_n referring to a hyperbolic paraboloid of a *square base* ($a = b$) and to two characteristic ratios of f/h from [3]. In Table I the values of these four quantities, multiplied by the side-length a (thus becoming nondimensional) are given for four or five n terms, respectively.

Table I

$f/h = 12{,}5$

$n =$	1	3	5	7
$a \cdot \beta_{n1} =$	—7,400	—13,99	—20,30	—26,62
$a \cdot \beta_{n2} =$	—0,349	— 5,00	—11,12	—17,35
$a \cdot \gamma_n =$	—3,875	— 9,50	—15,71	—21,99
$a \cdot \delta_n =$	+4,765	+ 4,76	+ 4,69	+ 4,63

$f/h = 50$

n	1	3	5	7	9
$a \cdot \beta_{n1} =$	—10,90	—18,23	—24,77	—31,17	—37,50
$a \cdot \beta_{n2} =$	— 0,0892	— 2,165	— 7,09	—12,98	—19,15
$a \cdot \gamma_n =$	— 5,495	—10,20	—15,93	—22,08	—28,32
$a \cdot \delta_n =$	+ 8,36	+ 9,78	+ 9,61	+ 9,51	+ 9,45

It is worth while to observe that in case of $n = 1$, $\beta_{n2} < 1$ which means that the stresses diminish but slowly with the increasing distance from the edge, and the more slowly, the greater the ratio f/h is, that is, the greater is the membrane stiffness in comparison to its bending rigidity. (Had the bending rigidity been equal to zero, so it would also be β_{n2}, and we should arrive at the case of the membrane forces propagating undiminished along the straight generatrices.)

As a matter of course, every β_{nj} is associated with different U_{nj}, V_{nj} and W_{nj}. Thus, because of $j = 1,2,3,4$, we shall have $4 \cdot 3n = 12n$ unknown constants if we consider n number of terms in the Fourier series (9) in the x-direction.

The displacement functions (9a to 9c) obtain then the following forms:

$$u = \sum_n \left(\sum_{j=1}^{4} U_{nj} e^{\beta_{nj} y} \right) \sin \alpha_n x, \tag{15a}$$

$$v = \sum_n \left(\sum_{j=1}^{4} V_{nj} e^{\beta_{nj} y} \right) \cos \alpha_n x, \tag{15b}$$

$$w = \sum_n \left(\sum_{j=1}^{4} W_{nj} e^{\beta_{nj} y} \right) \sin \alpha_n x . \tag{15c}$$

The unknown values, $12n$ in number, are related to each other by the equilibrium Eqs (13) in such a way that from every three values U_{ni}, V_{ni} and W_{ni} only one remains free. Therefore, only $4n$ of the boundary conditions may be satisfied.

From the boundary conditions (8a to 8f) given in section 4 the assumed functions (9) automatically satisfy the conditions (8d) and (8e). Therefore, the remaining four boundary conditions are just enough for the determination of the four unknowns associated with every n.

Had the boundary condition (8f) not existed, we could satisfy the boundary conditions separately for every n, that is, the distribution of the external moment (8b) considered (Fig. 1) would only require the consideration of the term $n = 1$. The boundary condition (8f), however, can only "forcedly", in separate points, be imposed upon the u_n-functions having the form of (9a), and only in case if we consider several n terms. This is why four or five n terms should be considered, though the higher n terms yield bending moments which are dying out more rapidly.

In the following, the functions (12) will be rewritten in pure real forms wherein the U_{n3}, U_{n4}; V_{n3}, V_{n4} and W_{n3}, W_{n4} are conjugated complex constant values. On the basis of the known complex relation

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{16}$$

($i = \sqrt{-1}$) we can, for example, write down that

$$\begin{aligned} & U_{n3} \cdot e^{\beta_{n3}} + U_{n4}\, e^{\beta_{n4} y} = \\ & = e^{\gamma_n y}\left[(U_{n3}+U_{n4}) \cos \delta_n y + (U_{n3}-U_{n4})\, i \sin \delta_n y\right] = \\ & = U_{n5}\, e^{\gamma_n y} \cos \delta_n y + U_{n6}\, e^{\gamma_n y} \sin \delta_n y . \end{aligned} \tag{17}$$

Therefore, the new real constants are:

$$U_{n5} = U_{n3} + U_{n4}\,, \tag{18a}$$

$$U_{n6} = i(U_{n3} - U_{n4}) \tag{18b}$$

and in the same way

$$V_{n5} = V_{n3} + V_{n4}\,, \tag{18c}$$

$$V_{n6} = i(V_{n3} - V_{n4})\,, \tag{18d}$$

$$W_{n5} = W_{n3} + W_{n4}\,, \tag{18e}$$

$$W_{n6} = i(W_{n3} - W_{n4})\,. \tag{18f}$$

From the set of the homogeneous equilibrium equations (13a to 13c) we use the first two equations because they have a simpler form. For the cases $j = 3$ and $j = 4$ also these have to be rewritten into real form. For example for $j = 3$, substituting the new real constants by making use of (18a to 18f) and writing down also the root β_{n3} according to (14a), Eq. (13) takes the form

$$\begin{aligned} & (-2\alpha_n^2 + \gamma_n^2 + 2i\gamma_n \delta_n - \delta_n^2)\, \frac{U_{n5} - iU_{n6}}{2} - \\ & - \alpha_n(\gamma_n + i\delta_n)\, \frac{V_{n5} - iV_{n6}}{2} - \\ & - \frac{2f}{ab}(\gamma_n + i\delta_n)\, \frac{W_{n5} - iW_{n6}}{2} = 0\,. \end{aligned} \tag{19a}$$

The equations associated with $j = 4$ may be rewritten in the same way, and once adding and once subtracting them, we arrive at two real equations.

Finally we shall have four boundary conditions:

(8a): $$W_{n1} + W_{n2} + W_{n3} + W_{n4} = 0\,,$$

that is, in a real form, making use of (18e):

$$W_{n1} + W_{n2} + W_{n5} = 0\,. \tag{20a}$$

(8b):

$$\text{if } n = 1\text{: } \beta_{11}^2 W_{11} + \beta_{12}^2 W_{22} + \beta_{13}^2 W_{13} + \beta_{14}^2 W_{14} = \frac{12}{Eh^2} M_1\,.$$

That is, in a real form:

$$\beta_{11}^2 W_{11}+\beta_{12}^2 W_{12}+(\gamma_1^2+2i\gamma_1\delta_1-\delta_1^2)\frac{W_{15}-W_{16}}{2}+$$
$$+(\gamma_1^2-2i\gamma_1\delta_1-\delta_1^2)\frac{W_{15}+iW_{16}}{2}=\frac{12}{Eh^3}M_1. \tag{20b}$$

It is to be seen that the imaginary terms have dropped out.

For the case $n<1$, γ_n and δ_n should be written instead of γ_1 and δ_1, and zero at the right-hand side.

(8c):

$$\beta_{n1}V_{n1}+\beta_{n2}V_{n2}+\beta_{n3}V_{n3}+\beta_{n4}V_{n4}=0$$

and rewritten to the real form:

$$\beta_{n1}V_{n1}+\beta_{n2}V_{n2}+(\gamma_n+i\delta_n)\frac{V_{n5}-iV_{n6}}{2}+(\gamma_n-i\delta_n)\frac{V_{n5}+iV_{n6}}{2}=0. \tag{20c}$$

The boundary condition (8f) cannot be written down for the whole edge line, only to n points of it, that is, to the points

$$y_k=(k-1)\frac{b}{n} \tag{21}$$

where

$$k=1, 2, \ldots n. \tag{22}$$

Thus the equation

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{4}U_{nj}\,e^{\beta_{nj}y_k}\right)\alpha_n=0 \tag{22a}$$

must be valid for every k. This, expanded and rewritten in a real form, becomes for every k:

$$\sum_{n=1}^{n}\left\{\left[U_{n1}\cdot e^{\beta_{n1}y_k}+U_{n2}\cdot e^{\beta_{n2}y_k}+\right.\right.$$
$$+\frac{U_{n5}-iU_{n6}}{2}e^{\gamma_n y_k}(\cos\delta_n y_k+i\sin\delta_n y_k)+ \tag{23}$$
$$\left.\left.+\frac{U_{n5}+iU_{n6}}{2}e^{\gamma_n y_k}(\cos\delta_n y_k-i\sin\delta_n y_k)\right]\alpha_n\right\}=0$$

from which the imaginary terms also fall out.

On the basis of what has been said above, the equilibrium Eqs (13a, 13b) must be rewritten for all of the n-s and j-s in the real form corresponding to (19a), as well as the boundary conditions (20a to 20c) for all of the n-s, and finally the boundary condition (23) for all of the k-s. Thus we obtain exactly the $12n$ equations for the determination of the $12n$ unknown constants.

6. Numerical results

We can solve the set of equations obtained in the foregoing section by making use of the β-roots given to the hyperbolic paraboloid of a *square base* ($a = b$) by DUDDECK [3], reproduced in Table I for two values of the ratio f/h by considering four or five n terms, respectively. This leads to a set of

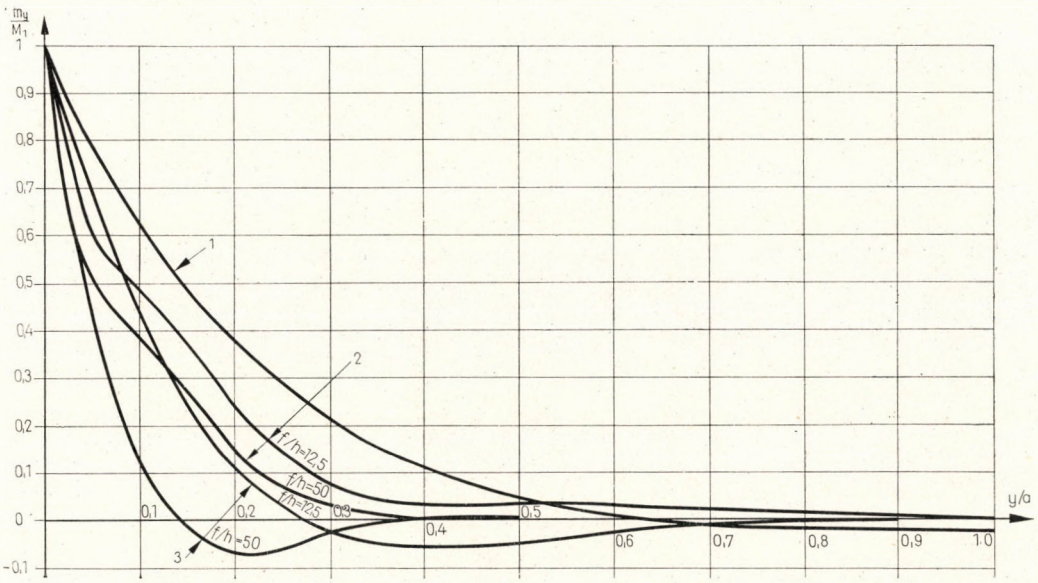


Fig. 2

equations with 48 or 60 unknowns, respectively. The numerical calculations were carried out at the Centre of Computation of the Ministry of Heavy Industry with the aid of the computer National Elliot 803 B.

In the equations, besides the ratio f/h, also the ratio f/a is included. But carrying out the computation with several values of f/a, it was found that every f/a-ratio associated with the same value of f/h, resulted in the very same moment diagram.

Since we are interested first of all in the decrease of the edge moment inside the shell, we only plotted the diagram of the bending moment m_y

versus y, along the section $x = a/2$ (Fig. 2). The formula of this moment is

$$m_y = E\frac{h^3}{12}w'' = E\frac{h^3}{12}\sum_n \{\beta_{n1}^2 W_{n1}\cdot e^{\beta_{n1}y} + \beta_{n2}^2 W_{n2}\, e^{\beta_{n2}y} + \\ + e^{\gamma_n y}[(\gamma_n^2-\delta_n^2)W_{n5} + 2\gamma_n\delta_n W_{n6}]\cos\delta_n y + \\ + e^{\gamma_n y}[(\gamma_n^2-\delta_n^2)W_{n6} - 2\gamma_n\delta_n W_{n5}]\sin\delta_n y\}\sin\alpha_n x. \tag{24}$$

7. Approximate calculation of the edge disturbances

According to the suggestion of [1], by neglecting the displacement components in the plane of the shell ($u = v = 0$), we can obtain a simple *approximate solution* for the calculation of the edge disturbances.

Our presented solution permits to check the accuracy of this approximate method. From the equations of equilibrium (7a to 7c) we omit the first two equations retaining only the third one, leaving out the terms containing u and v. Thereby Eq. (7c) becomes

$$24\left(\frac{f}{ab}\right)^2\frac{1}{h^2}w + w^{IV} + 2w'''' + w'''' = 0. \tag{25}$$

We take again for w a series of product functions of the form

$$w = \sum_n W_n e^{\beta_n y}\sin\alpha_n x. \tag{26}$$

After substituting it into Eq. (25) we obtain for β_n the following characteristic equation

$$\varepsilon^4 + (\alpha_n^2 - \beta_n^2)^2 = 0. \tag{27}$$

Here we will introduce the abbreviation:

$$\varepsilon^4 = 24\left(\frac{f}{ab}\right)^2\frac{1}{h^2}. \tag{28}$$

From Eq. (27) we obtain four β_{nj}-s ($j = 1, 2, 3, 4$):

$$\beta_{nj} = \alpha_n[\pm(A+iB)\pm(A-iB)] \tag{29}$$

where

$$A = +\sqrt{0.5\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon^4}{\alpha_n^4}}+1\right)} \tag{30a}$$

and

$$B = +\sqrt{0.5\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon^4}{\alpha_n^4}}-1\right)}. \tag{30b}$$

From the four β_{nj}-s we only retain the two roots which give a decreasing bending moment with increasing y, and rewrite w to the real form

$$w = \sum_n \left(W_{n1}\, e^{-(A+iB)\alpha_n y} + W_{n2}\, e^{-(A-iB)\alpha_n y}\right) \sin \alpha_n x = \tag{31}$$

$$= \sum_n e^{-A\alpha_n y} \left(W_{n3} \cos B\alpha_n y + W_{n4} \sin B\alpha_n y\right) \sin \alpha_n x .$$

The explanation of the new constants W_{n3} and W_{n4} is

$$W_{n3} = W_{n1} + W_{n2} , \tag{32a}$$

$$W_{n4} = i(W_{n1} - W_{n2}) \tag{32b}$$

and W_{n1} and W_{n2} are the complex constants associated with β_{n1} and β_{n2}, respectively.

To the two constants (W_{n3}, W_{n4}) two equations of boundary conditions are needed. As a matter of course, they can now be expressed only by w. Thus, from the boundary conditions (8) used earlier, the following should be satisfied (Fig. 1):

$$y = 0 ; \; w = 0 , \tag{33a}$$

$$w'' = \frac{M_1 \sin \alpha_1 x}{E(h^3/12)} . \tag{33b}$$

Since we do not need to take into account the boundary conditions $x = 0$ and $x = a$, it is sufficient to consider from the series of w (31) merely the term $n = 1$, corresponding to the external moment. Therefore, from the boundary condition (33a) we obtain

$$W_{13} = 0. \tag{34}$$

To the boundary condition (33b) the second derivative of w with respect to y is needed:

$$w'' = W_{14}\, e^{-A\alpha_1 y} \left[(A^2 - B^2)\, \alpha_1^2 \sin B\alpha_1 y - 2AB\alpha_1^2 \cos B\alpha_1 y\right] \sin \alpha_1 x . \tag{35}$$

Substituting this into (33b) yields

$$W_{14} = -\frac{M_1}{2AB\alpha_1^2 E(h^3/12)} . \tag{36}$$

Now we can write down the expression of the bending moment in the y-direction which is the most significant from our viewpoint

$$m_y = E\frac{h^3}{12}w'' = M_1 \sin \alpha_1 x \left[\left(-\frac{A}{2B}+\frac{B}{2A}\right)\sin B\alpha_1 y + \cos B\alpha_1 y\right]e^{-A\alpha_1 y}. \quad (37)$$

The variation of m_y versus y is also represented in Fig. 2.

8. Decrease of the edge moment of the plain plate

For comparison, the decrease of the edge moment in a plate, freely supported at three edges and infinitely long in the fourth direction (Fig. 3)

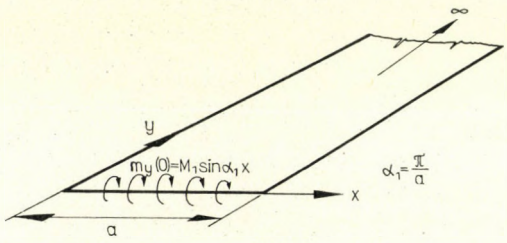


Fig. 3. Plain plate

should be established on the basis of [6]. Omitting the deduction, here only the expression of the m_y should be given:

$$m_y = M_1 \sin \alpha_1 x \left(\frac{\alpha_1}{2}y - 1\right)e^{-\alpha_1 y}. \quad (38)$$

The corresponding moment diagram is also represented in Fig. 2.

9. Comparison and evaluation

Analysing Fig. 2, the following could be established.

The diagrams clearly show that the higher the corner point of the shell (f) lies in comparison to its thickness h, the more rapidly the edge moment diminishes. The extreme case, $f = 0$, is realized by the plain plate. However, as was mentioned above, the ratio f/a is indifferent, therefore, in a steeper and thicker shell the moment can diminish in the same way as in a flatter and thinner one, provided their f/h-ratio should be the same.

From Fig. 2 we can establish by interpolation, practically for all of the hypars of any geometric ratio, the width of the zone of the edge disturbance, that is, the width to be reinforced.

The moment diagrams calculated both with $f/h = 12{,}5$ and $f/h = 50$ follow a somewhat irregular trace. This could be corrected by considering some more terms in the series of the deformation functions. In the author's opinion, however, we should not profit at all thereby, because the rate of the diminution of the moment would remain the same, even in case of a greater number of terms considered and, in turn, the amount of the computation work would considerably increase.

The moment diagram gives negligibly small moment values even in case of plates in a distance equal to a. Thus the assumption is justified that the effect of the edge opposite to the disturbance on the internal forces might be neglected in a shell of a square base.

Finally, it is clearly to be seen that the moment diagram obtainable by the approximate assumption $u = v = 0$ shows a much more rapid decrease than the more exact computation. The reason for this might be that the assumption $u = v = 0$ represents a much stronger constraint on the shell than the real boundary conditions (especially $n_x = 0$, being valid for the edges $x = 0$ and $x = a$). As a result, the shell will be, so to say, more rigid, and we obtain an unreal rapid decrease of the moment. Therefore, the application of the above approximation cannot be recommended.

REFERENCES

1. Bleich, H. H.—Salvadori, M. G.: Bending Moments on Shell Boundaries. *Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, Journal of the Structural Division, Vol. 85, No. St 8, Oct. 1969, (91—102).
2. Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs. ASCE Manuals of Engineering Practice No. 31. ASCE, New York, 1952.
3. Duddeck, H.: Die Biegetheorie der flachen hyperbolischen Paraboloidenschale $z = cxy$. *Ingenieur-Archiv*, Bd. 31. (1962), H. 1. 44—78.
4. Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Aufl. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1962.
5. Hruban, K.: Die Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau. *Acta Techn. Hung.* 7 (1954), 425—464.
6. Timoshenko, S.—Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1959.
7. Wlassow, W. S.: Allgemeine Theorie der Schalen und ihre Anwendung in der Technik. Akademieverlag, Berlin 1958.

Randstörungen der windschiefviereckförmigen flachen hyperbolischen Paraboloidschale. Es wird die an einem Rand durch Biegemoment beanspruchte, windschiefviereckförmige hyperbolische Paraboloidschale aufgrund der elastischen Biegetheorie der flachen Schalen untersucht, und die Abklingungskurve des den Rand belastenden Moments ermittelt. Das Ergebnis wird einerseits der Bleich-Salvadorischen Näherungslösung, andererseits der Momentenabklingungskurve der ebenen Platte gegenübergestellt.

Краевые возмущения плоской гиперболической параболоидной оболочки в виде искаженного четырехугольника *(Л. Коллар, М. Сетч).* В работе исследуется нагруженная на одном краю изгибающим моментом гиперболическая параболоидная оболочка в виде искаженного четырехугольника на основе теории упругого изгиба плоских оболочек. Определяется кривая затухания момента, нагружающего край, внутри самой оболочки. Полученный результат сравнивается, с одной стороны, с приближенным решением Блейха — Сальвадора, а с другой стороны, с кривой затухания момента плоской пластины.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 83—104 (1970)

GESCHWINDIGKEITS- UND DRUCKVERHÄLTNISSE BEI LOTRECHTER PNEUMATISCHER FÖRDERUNG

L. PÁPAI*

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 12. März 1969]

Der bei der pneumatischen Förderung auftretende zusätzliche Druckabfall kann aus den auf die geförderten Körnchen wirkenden Kräften errechnet werden. Im Falle lotrechter, stationärer Förderung setzt sich der zusätzliche Druckabfall aus dem Druckabfall infolge des Hebens des Gewichtes des Fördergutes und dem Druckabfall infolge der Zurückhaltungskräfte zusammen. Der Wert der Zurückhaltungskräfte kann mit keiner einheitlichen Formel angegeben werden, da er von der Förderungsform abhängig ist. Die durchschnittliche Fördergutgeschwindigkeit kann aus den auf die Körnchen wirkenden Kräften ermittelt werden. Die der Bestimmung der Fördergutgeschwindigkeit dienende Formel nimmt je nach der Form der Förderung (Dünnstromförderung, Dichtstromförderung) und der Körnchenart des Fördergutes unterschiedliche Formen an.

Bezeichnungen

$A = D^2\pi/4$	Querschnitt des Förderrohres [m²];
$A_0 = d^2\pi/4$	Kornquerschnitt [m²];
a	Beschleunigung [m/s²];
B, B'	Konstanten;
C_e	aerodynamischer Widerstandsfaktor;
D	Innendurchmesser des Förderrohres [m];
d_0	Korndurchmesser, bei nicht kugelförmigen Körnchen ein mit der Kugel gleichwertiger Durchmesser [m];
F	Kraft [kp];
F_1	auf ein Körnchen wirkende aerodynamische Kraft, Triebkraft [kp];
F_d	Beschleunigungskraft [kp];
G_1	Gewicht eines Körnchens [kp];
g	Schwerebeschleunigung [m/s²];
k	Proportionalitätsfaktor (verweist auf die Reibungskraft);
$K = w_c^2/2g$	abgekürzte Bezeichnung [m];
l, L, l_i	Rohrlänge [m];
$m = q_a/q_g$	Gewichtsverhältnis; Gewichtsverhältnis des im Rohr gleichzeitig anwesenden Fördergutes and Gases;
$m_1 = G_1/g$	Masse eines Körnchens [kps²/m];
$n = lq_a/G_1 = lQ_a/v_aG_1$	Anzahl der im Rohr gleichzeitig anwesenden Körnchen [Stück];
p	Druck [kp/m²];
Δp	Druckabfall [kp/m²];
Δp_0	Druckabfall bei Leerlauf [kp/m²];
Δp_a	Beschleunigungsdruckabfall [kp/m²];
Δp_f	Druckabfall bei lotrechter, stationärer Förderung [kp/m²];
Δp_G	Druckabfall aus dem Hub des Fördergutes [kp/m²];
Δp_z	zusätzlicher Druckabfall bei Förderung [kp/m²];
Δp_s	Druckabfall infolge der die Bewegung hemmenden Kräfte (Zurückhaltungskräfte) [kp/m²];

* Dr. PÁPAI L.; Szarvas G. út 51, *Budapest XII* (Ungarn)

Q_a	Fördergutmenge, Förderleistung [kp/s];
$Q_g = V_g \gamma_g$	Gasmenge (Gewichtsdurchsatz) [kp/s];
$q_a = Q_a/v_a$	Gewicht des Fördergutes je lfm [kp/m];
$q_g = Q_g/v_g$	Gewicht des Gases je lfm [kp/m];
$Re_0 = d_0 w/\nu_g$	Reynoldssche Zahl auf das Körnchen bezogen;
S_1	auf ein Körnchen wirkende Zurückhaltungskraft (Widerstand) [kp];
$s = w/v_g$	Slip, relatives Zurückbleiben;
t	Zeit [s];
V_g	Volumdurchsatz des Gases [m³/s];
v_a	Querschnittsmittelwert der Fördergutgeschwindigkeit [m/s];
v_g	Querschnittsmittelwert der Gasgeschwindigkeit [m/s];
$w = v_g - v_a$	relative Geschwindigkeit [m/s];
w_0	Fallgeschwindigkeit, Schwebegeschwindigkeit [m/s];
γ_a	spezifisches Gewicht des Förderguts [kp/m³];
γ_g	spezifisches Gewicht des Gases [kp/m³];
$\eta_g = \nu_g \gamma_g/g$	dynamische Viskosität [kps/m²];
λ	Rohrreibungsfaktor;
λ^*_z	Förderungsfaktor;
$\mu = Q_a/Q_g$	Mischungsverhältnis, Gutbeladung;
$\mu^* = \mu v_g/v_a$	örtliche Konzentration des Förderguts im Förderrohr;
ν_g	kinematische Viskosität [m²/s];
ξ	Beiwert für die Berechnung der Abnahme der kinetischen Energie infolge von Stößen [m^{-1}];
τ_s	Reibungsschubspannung der Materialförderung [kp/m²];
i (Index)	bezieht sich auf die Beschleunigungsstrecke.

I. Einleitung

Im Rahmen der Fördereinrichtungen für staubförmige und körnige Stoffe begegnet man immer häufiger den sog. pneumatischen Förderanlagen, das sind Fördereinrichtungen, die mit Gas- oder Luftströmung betrieben werden. Zum Entwurf pneumatischer Förderanlagen ist die Kenntnis der während der Förderung auftretenden Druckverhältnisse erforderlich, zu deren Bestimmung aber die Kenntnis der Fördergutgeschwindigkeit unerläßlich notwendig ist.

Die an pneumatischen Förderanlagen vorgenommenen Messungen sowie theoretische Erwägungen haben erwiesen, daß zwischen den während der Förderung auftretenden Druckabfällen und den Geschwindigkeitsverhältnissen des Festkörper-Gas-Gemisches ein enger Zusammenhang besteht. Anhand eingehender Untersuchungen wurde nachgewiesen, daß die Beziehung die zwischen den während der pneumatischen Förderung auftretenden Druckabfällen und der Geschwindigkeit des Festkörper-Gas-Gemisches besteht, nicht mit einer einzigen Formel ausgedrückt werden kann, weil diese Größen einerseits von der Förderungsform abhängen (im Falle von Dünnstromförderung prallen die sich mit großer Geschwindigkeit fortbewegenden Körnchen gegen die Rohrwand, im Falle von Dichtstromförderung gleiten die Körnchen mit kleiner Geschwindigkeit entlang der Rohrwand; die beiden Förderungsformen können auch gemischt auftreten), andererseits aber auch von der Art des Fördergutes (d. h. von der Ausgestaltung der auf das Körnchen wirkenden aerodynamischen Kraftwirkung) abhängig sind.

Im folgenden werden die Druckabfälle und Geschwindigkeitsverhältnisse geprüft, die in einem lotrechten geraden Rohr während der pneumatischen Förderung auftreten. Die Untersuchungen erstrecken sich auf einen kurzen Rohrabschnitt, in welchem die Expansion des Gases vernachlässigt werden kann.

II. Druckverhältnisse während der pneumatischen Förderung

Der Druckabfall (Δp) ist bei gleicher Gasgeschwindigkeit während der Förderung von Festkörpern im pneumatischen Förderrohr größer als der Druckabfall bei Leerlauf (Δp_0). Im Bild 1 sind die Änderungen des Druckes

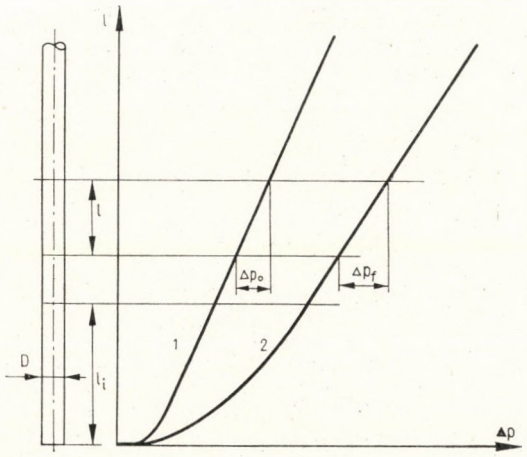


Bild 1. Druckabfall längs des lotrechten pneumatischen Förderrohrs bei Leerlauf und Förderung: die Gasgeschwindigkeit ist in beiden Fällen gleich (*1* Leerlauf, *2* Förderung)

in einem lotrechten Rohr bei Leerlauf und bei Förderung von Festkörpern dargestellt.

Die Untersuchung der physikalischen Grundlagen der mit der pneumatischen Fürderung zusammenhängenden Erscheinungen haben gezeigt, daß der bei der Materialförderung auftretende Druckabfall gleich der Summe des Druckabfalles bei Leerlauf (Δp_0) und eines bei der Förderung auftretenden zusätzlichen Druckabfalles (Δp_z) ist

$$\Delta p = \Delta p_0 + \Delta p_z \,. \tag{1}$$

Die Erhöhung des Druckabfalles verursachen jene Kräfte, die im untersuchten Rohrabschnitt auf die Stoffkörnchen wirken. Diese Kräfte bewirken einen zusätzlichen Druckabfall, der sich mit dem durch die Rohrreibung verursachten Druckabfall bei Leerlauf summiert.

Diese Erscheinung kann z. B. mit Versuchen im Windkanal leicht nachgewiesen werden. Wenn im Windkanal zur Herstellung einer Luftstromgeschwindigkeit v_g zwischen den beiden Kanalenden eine Druckdifferenz Δp_0 erforderlich ist (diese entspricht dem Reibungsverlust, der durch die Reibung des Luftstromes an der Rohwand entsteht) und man in den Windkanal einen

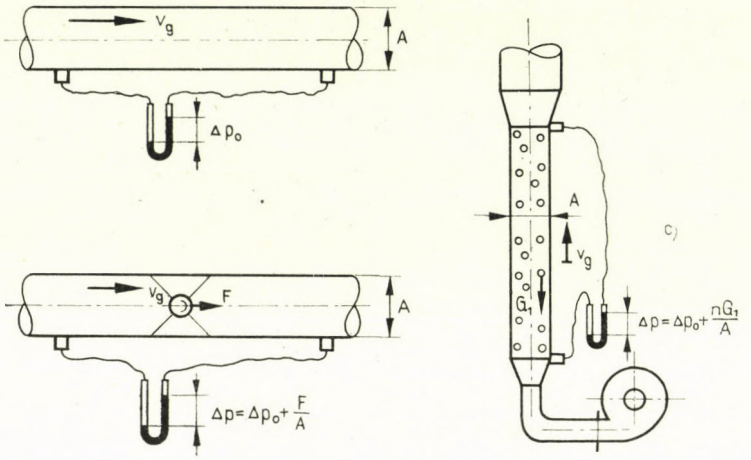


Bild 2. Druckabfall im Windkanal bei Leerlauf (*a*); bei befestigter Kugel (*b*); bei schwebendem Gut (*c*)

Körper (z. B. eine Kugel) einbringt (Bild 2a), steigt bei gleichbleibender Strömungsgeschwindigkeit der Luft der Druckabfall (Bild 2b). Wenn man nun die auf den im Windkanal befindlichen Körper wirkende aerodynamische Kraft F z. B. mit einer aerodynamischen Wage mißt, kann der zusätzliche Druckabfall als Quotient aus der gemessenen Kraft und dem Rohrquerschnitt leicht errechnet werden (F/A). Beim Messen des Luftwiderstandes des Körpers erscheint der zwischen den beiden Kanalenden auftretende Druckabfall als die Summe zweier Druckabfälle

$$\Delta p = \Delta p_0 + \frac{F}{A} \,. \tag{2a}$$

Einer ähnlichen Erscheinung begegnet man auch bei der sog. Schwebanlage (Bild 2c). Der im lotrechten Rohr durch die Rohrreibung der mit einer Geschwindigkeit v_g strömenden Luft verursachte Druckabfall (Δp_0) erhöht sich um einen zusätzlichen Druckabfall, wenn man im Rohr Körnchen schweben läßt. Der bei der Schwebung auftretende, zusätzliche Druckabfall ist dem Quotienten aus dem Gewicht der schwebenden Körnchen und dem Quer-

schnitt der Schwebanlage gleich. Wenn sich daher in der Schwebanlage n Körnchen mit einem Einzelgewicht G_1 befinden, beträgt der Druckabfall:

$$\Delta p = \Delta p_0 + \frac{nG_1}{A} .$$

Aus den beiden Beispielen geht hervor, daß, wenn sich in einem Rohr Körper befinden und das strömende Gas auf diese eine Kraftwirkung ausübt,

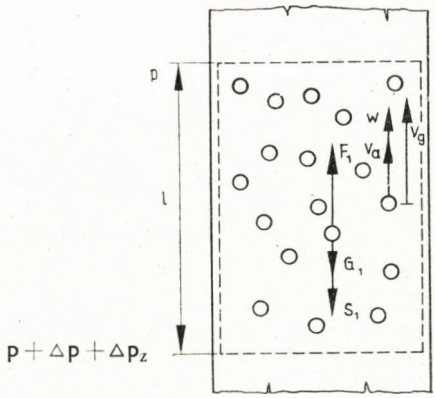


Bild 3. Verlauf des zusätzlichen Druckabfalls

infolge der Wirkung der aerodynamischen Kräfte, außer dem Druckabfall bei Leerlauf noch ein zusätzlicher Druckabfall entsteht, der unabhängig von der Art jener Kraft ist, die der aerodynamischen Kraft das Gleichgewicht hält. (Im Falle des Windkanals hielten die Seilkräfte der Waage, im Falle der Schwebanlage hielt das Gewicht der aerodynamischen Kraft das Gleichgewicht.) Der zusätzliche Druckabfall kann immer als Quotient aus der Summe der auf die Körper wirkenden aerodynamischen Kräfte (ΣF_1) und dem Rohrquerschnitt bestimmt werden:

$$\Delta p_z = \frac{\Sigma F_1}{A} . \qquad (2)$$

Ähnlich verhält es sich im Falle einer pneumatischen Förderung. Bild 3 zeigt ein lotrechtes Förderrohr, in welchem sich die Körnchen bereits mit der dem stationären Betrieb entsprechenden Geschwindigkeit v_a bewegen. Im untersuchten Rohrabschnitt befinden sich n Körnchen. Auf jedes einzelne Körnchen wirkt die aerodynamische Kraft F_1. Diese hält der Summe aus dem Gewicht des Korns und aus der auf das Körnchen wirkenden Zurückhaltungskraft das Gleichgewicht ($G_1 + S_1$).

Der Druckabfall in einem lotrechten Rohr der Länge l beträgt daher während der Materialförderung

$$\Delta p_f = \Delta p_0 + \Delta p_z \,. \tag{3}$$

Aus den im obigen entwickelten physikalischen Grundlagen des Druckverlaufes folgt, daß die Berechnung des zusätzlichen Druckabfalls auf Grund der Untersuchung der auf die Körnchen wirkenden Kräfte vorgenommen werden kann.

III. Ausgestaltung des Druckverlaufes in einem lotrechten Förderrohr bei stationärer Förderung

Die bei lotrechter, stationärer pneumatischer Förderung auf die im Rohr befindlichen einzelnen Körnchen wirkenden Kräfte veranschaulicht das Bild 3. Der zwischen den beiden Enden eines Rohres der Länge l auftretende Druckabfall kann unter Berücksichtigung der Kraftwirkungen aus der Formel (3) errechnet werden.

Der Druckabfall bei Leerlauf (Δp_0) ergibt sich aus der bekannten Beziehung:

$$\Delta p_0 = \lambda \frac{l}{D} \frac{v_g^2}{2g} \gamma_g \,. \tag{4}$$

Der zusätzliche Druckabfall kann aus den auf die einzelnen Körnchen wirkenden dynamischen Kräften ermittelt werden. Wenn sich im Rohr der Länge l gleichzeitig n Körnchen befinden, ist

$$\Delta p_z = \frac{n F_1}{A} \,. \tag{2a}$$

Bei stationärer Förderung folgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte:

$$F_1 = G_1 + S_1 \,. \tag{5}$$

Dementsprechend setzt sich der zusätzliche Druckabfall aus zwei Teilen zusammen:

$$\Delta p_z = \Delta p_G + \Delta p_s \,, \tag{6}$$

wo

$$\Delta p_G = \frac{n G_1}{A}$$

den Druckabfall aus dem Hub des Förderguts und

$$\Delta p_S = \frac{nS_1}{A}$$

den Druckabfall aus den, auf die Körnchen wirkenden Zurückhaltungskräften bedeutet. Die auf die Körnchen wirkende Zurückhaltungskraft (S_1) kann vom Anprall der Körnchen an die Rohrwand (Dünnstromförderung), von der Reibung der Körnchen an der Rohrwand (Dichtstromförderung) oder von beiden gleichzeitig auftretenden Kraftwirkungen (gemischte Förderung) herrühren.

a) Druckabfall durch den Hub der Körnchen (Δp_G) entsteht aus der Wirkung des Gewichtes des im Rohr der Länge l gleichzeitig anwesenden Gutes (nG_1). Die Größe dieser Wirkung kann sowohl aus dem Laufmetergewicht des Fördergutes ($nG_1 = lq_a$), als auch aus der Fördergutmenge berechnet werden

$$\Delta p_G = l\frac{q_a}{A} = l\frac{Q_a}{v_a A} . \tag{7}$$

Zur Bestimmung von Δp_G muß man die Fördergeschwindigkeit v_a kennen.

b) Der durch die Zurückhaltungskräfte verursachte Druckabfall kann nicht aus einer einzigen Formel berechnet werden, weil die Zurückhaltungskraft das Ergebnis verschiedener, sich der jeweiligen Förderungsform anpassender Wirkungen ist.

Die die Bewegung des Körnchens hindernde Kraft (Zurückhaltungskraft) kann durch den Anprall des Körnchens an die Rohrwand verursacht werden (Dünnstromförderung). Die beim Anprall eintretende Verminderung der kinetischen Energie kann durch die Arbeit ersetzt werden, die die ständig wirkende Kraft S_1 auf dem Weg l leistet. Das Körnchen prallt in den Abständen l an die Rohrwand und verliert bei jedem Anprall einen Teil $l\,\xi$ seiner Bewegungsenergie, wo ξ einen Beiwert für die Berechnung der Abnahme der kinetischen Energie infolge von Stößen je lm bedeutet. (Die Maßeinheit dieses Beiwertes ist m^{-1}.) Dieser Energieverlust ist der Arbeit gleich, die die als ständig wirkend gedachte Zurückhaltungskraft leistet:

$$l\xi\frac{m_1 v_a^2}{2} = lS_1 .$$

Hieraus ergibt sich die durch den Anprall erweckte und als ständig wirkend gedachte Zurückhaltungskraft zu

$$S_1 = \xi\frac{m_1 v_a^2}{2} . \tag{8}$$

Im Falle von durch den Anprall verursachter Zurückhaltungskraft kann der auftretende Druckabfall durch Einsetzung von nS_1/A aus der Formel

$$\Delta p_S = l\xi \frac{Q_a v_a}{2g A} \tag{9}$$

und der Beiwert ξ [m^{-1}] aus dem bei der Förderung auftretenden Druckabfall bestimmt werden. Letzterer ist ein Stoffwert. Messungen haben erwiesen, daß die Größe ξ, solange sich das Förderungsbild (Dünnstromförderung) nicht

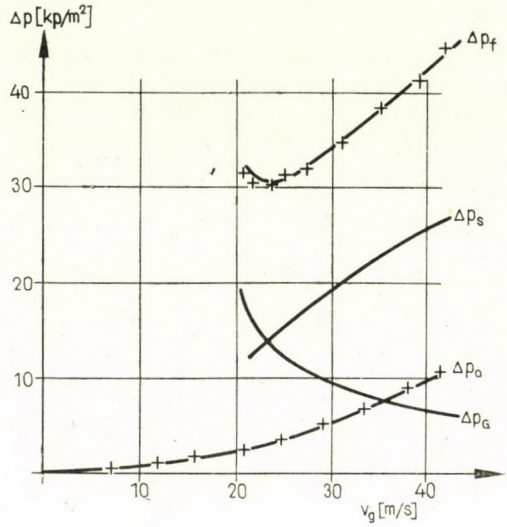


Bild 4. Druckabfälle bei der lotrechten stationären Förderung von Weizen ($Q_a = 1{,}9$ *kp/s* $D = 130$ mm, $l = 1{,}0$ m)

ändert, von den technischen Kennwerten der Förderung (μ, Froude-Zahl usw.) unabhängig ist.

Die Ergebnisse der bei der pneumatischen Förderung von Weizen vorgenommenen Druckmessungen sind im Bild 4 bzw. 5 dargestellt. Außer dem durch Messungen bei stationärer Förderung festgestellten Druckabfall (Δp_f) und dem Druckabfall bei Leerlauf (Δp_0) sind auch die — in Kenntnis der Fördergutgeschwindigkeit bestimmten — Druckabfälle Δp_G und Δp_S veranschaulicht. Das Bild 6 zeigt den Verlauf der Druckabfälle Δp_S als Funktion der Fördergutgeschwindigkeit, wie sie sich aus weiteren Versuchen der pneumatischen Weizenförderung ergaben. Der für die lotrechte Förderung des Weizens zur Berechnung der Abnahme der kinetischen Energie kennzeichnende Bewert ist:

$$\xi = 0{,}185 \text{ m}^{-1}.$$

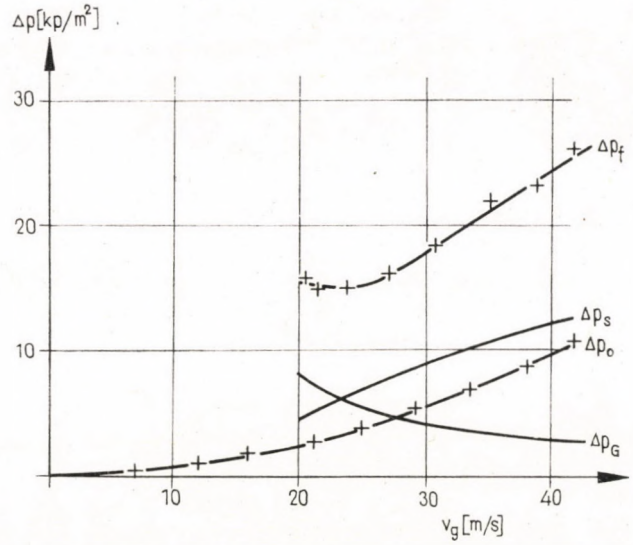


Bild 5. Druckabfälle bei der lotrechten, stationären Förderung von Weizen ($Q_a = 0{,}83$ kp/s, $D = 130$ mm, $l = 1{,}0$ m)

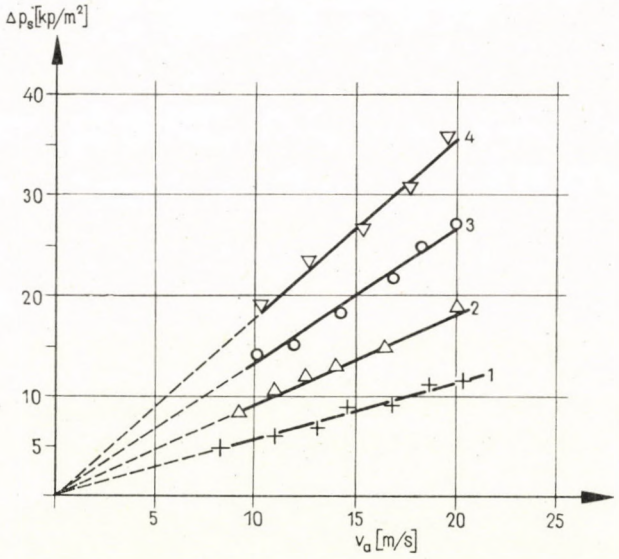


Bild 6. Der durch Stöße der Körnchen verursachte Druckabfall als Funktion der Fördergutgeschwindigkeit bei der Förderung von Weizen ($l = 1$ m, $D = 130$ mm und bei Kurve *1*: $Q_a = 0{,}83$ kp/s; bei Kurve *2*: $Q_a = 1{,}3$ kp/s; bei Kurve *3*: $Q_a = 1{,}9$ kp/s; bei Kurve *4*: $Q_a = 2{,}5$ kp/s)

Dieser Wert ist, wie dies Versuche mit Rohren verschiedener Abmessungen ergaben, unabhängig vom Rohrdurchmesser, doch spielt er, wie dies aus den späteren Ausführungen hervorgeht, im Zusammenhang mit der Festkörper-Gasgeschwindigkeit eine bedeutende Rolle.

Die Zurückhaltungskraft kann auch vom Gleiten der Körnchen entlang der Rohrwand, d. h. von der Reibung herrühren (Dichtstromförderung). Erfahrungsgemäß ist in diesem Falle die Zurückhaltungskraft dem Gewicht des Körnchens proportional

$$S_1 = kG_1 . \tag{10}$$

Der infolge der durch die Reibung verursachten Zurückhaltungskraft auftretende Druckabfall ergibt sich durch Einsetzung von nS_1/A aus der Formel

$$\Delta p_S = lk \frac{Q_a}{Av_a} . \tag{11}$$

Der Proportionalitätsfaktor k kann aus der Größe des während der Förderung auftretenden Druckabfalls bestimmt werden [12].

Die Zurückhaltungskraft kann durch die gleichzeitige Wirkung von Reibung und Stoß (Übergangs- oder gemischter Förderungszustand) ausgelöst *werden.* In solchen Fällen ergibt sich der Druckabfall als die Summe von (9) und (10):

$$\Delta p_S = l\xi \frac{Q_a v_a}{2gA} + lk \frac{Q_a}{Av_a} . \tag{12}$$

Sonstige, die Bewegung des Körnchens hindernde Wirkungen, wie z. B. die Wirkung der durch den Zusammenstoß der Körnchen verursachten Deformation, können vernachlässigt, bzw. mit den im obigen errechneten Druckabfällen berücksichtigt werden. So wird z. B. die Reibung der Körnchen aneinander in Form der Wandreibung auf die Rohrwand übertragen.

Aus obigem folgt, daß der von den Stößen der Körnchen an die Rohrwand (oder von der Reibung verursachte) Druckabfall nicht mit der sog. Reibungsschubspannung ausgedrückt werden kann, wie sie BARTH [2] analog der bei der Strömung von Gas an den Rohrwänden auftretenden Gleitspannung mit der Formel

$$\tau_S = \mu^* \gamma_g \frac{v_a^2}{2g} \frac{\lambda_z^*}{4} \tag{13}$$

angeschrieben hat. Dies würde bedeuten, daß die von Stößen (oder von der Reibung) der in einem Rohr der Länge l befindlichen Körnchen verursachte Kraftwirkung (F_S) auch vom Rohrdurchmesser abhängig wäre:

$$F_S = D \pi l \tau_s , \tag{14}$$

was aber unvorstellbar ist.

Die in den Meßergebnissen beobachteten Widersprüche wurden dadurch eliminiert, daß die Größe λ_z^* als veränderlich angenommen und die Veränderung als Funktion der Froude-Zahl angegeben wurde. Der Froudesche Ausdruck wurde mit dem Rohrdurchmesser in der Form $Fr = v_g/\sqrt{gD}$ aufgeschrieben.

IV. Geschwindigkeitsverhältnisse bei stationärer Förderung im lotrechten Förderrohr

Wie aus obigen ersichtlich, ist zur Bestimmung des zusätzlichen Druckabfalles auch die Kenntnis der Fördergutgeschwindigkeit notwendig. Die Fördergutgeschwindigkeit kann aus der Untersuchung der auf das Körnchen wirkenden Kräfte ermittelt werden. Es wirken auf das Körnchen, außer der Schwerkraft, die aerodynamische Kraft (Triebkraft) F_1 und die Zurückhaltungskraft S_1. In Kenntnis dieser kann die Fördergutgeschwindigkeit errechnet werden.

Da die aerodynamische Kraft und die Zurückhaltungskraft von der Förderungsart und der Art des Körnchens abhängig sind, hängt die Größe der Fördergutgeschwindigkeit nicht nur von den betriebstechnischen Kennwerten der Förderung (z. B. von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases) ab. Die auf ein Körnchen wirkende aerodynamische Kraft

$$F_1 = \frac{\gamma_g}{2g} A_0 C_e w^2 \tag{15}$$

kann mit dem konstanten Widerstandsfaktor C_e berechnet werden, wenn die dem Körnchen entsprechende Reynoldssche Zahl

$$Re_0 = \frac{d_0 w}{\nu_g}, \tag{16}$$

$$10^3 < Re_0 < 2 \cdot 10^5$$

ist.

Wenn die dem Körnchen entsprechende Reynoldssche Zahl $Re_0 < 1$ ist, kann man die aerodynamische Kraft aus der Formel

$$F_1 = 3\,\pi\eta_g\, d_0 w \tag{17}$$

bestimmen.

Wenn die dem Körnchen entsprechende Reynoldssche Zahl $1 < Re_0 < 10^3$ ist, ist die Anwendung der Beziehung (15) gebräuchlich, doch muß die der Reynoldsschen Zahl entsprechende Änderung des Widerstandsfaktors in Betracht gezogen werden.

Die die Bewegung des Körnchens hemmende Kraft (Zurückhaltungskraft) kann von Stößen herrühren, dann ist laut (8)

$$S_1 = \xi \frac{m_1 v_a^2}{2},$$

oder durch Reibung verursacht werden, dann ist laut (10)

$$S_1 = kG_1,$$

oder durch beide, gleichzeitig wirkenden Kräfte ausgelöst werden.

Die bei der Förderung auftretende Fördergutgeschwindigkeit, folglich auch die zu ihrer Berechnung notwendige Beziehung, hängt auch von der Art der auf das Körnchen wirkenden Trieb- und Zurückhaltungskraft ab.

Im folgenden werden die typischen Fälle behandelt.

a) Die Triebkraft ist dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit proportional (15), die Zurückhaltungskraft verursacht Stöße (8). Dieser Fall tritt bei der mit großer Geschwindigkeit vorgenommenen Förderung von großkörnigem Material (z. B. Getreide) auf.

Die Beziehung der Fördergutgeschwindigkeit und der relativen Geschwindigkeit zur Gasgeschwindigkeit kann aus dem Gleichgewicht der Kräfte bestimmt werden:

$$nF_1 = lq_a + A \Delta p_s.$$

Da aber

$$n = l\frac{q_a}{G_1} = l\frac{Q_a}{v_a G_1} \quad \text{und} \quad q_a = \frac{Q_a}{v_a}$$

sind, ergibt sich durch Anwendung der Beziehungen (9) und (15), ferner durch Einführung der sog. Fallgeschwindigkeit (oder Schwebegeschwindigkeit):

$$w_0 = \sqrt{\frac{2g\,G_1}{A_0\,C_e\,\gamma_g}} \tag{18}$$

für den Zusammenhang zwischen mittlerer relativer Geschwindigkeit und mittlerer Fördergutgeschwindigkeit die Beziehung:

$$w = w_0 \sqrt{1 + \frac{\xi v_a^2}{2g}}. \tag{19}$$

Setzt man nun den Ausdruck

$$w = v_g - v_a \tag{20}$$

ein, so erhält man die mit der Gasgeschwindigkeit ausgedrückten und zum unmittelbaren Gebrauch geeigneten Formeln

$$w = -\frac{K}{1-K} v_g + \sqrt{\frac{K^2}{(1-K)^2} v_g^2 + \frac{w_0^2 + K v_g^2}{1-K}} \tag{19a}$$

und

$$v_a = \frac{v_g}{1-K} - \sqrt{\frac{v_g^2}{(1-K)^2} - \frac{v_g^2 - w_0^2}{1-K}} \tag{19b}$$

($K = \xi w_0^2/2g$ ist eine abgekürzte Bezeichung).

Aus den obigen Ableitungen geht hervor, daß die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten vom Rohrdurchmesser und von der Menge des Fördergutes unabhängig sind.

Bild 7a zeigt die auf Grund der Formeln (19), (19a) und (19b) berechneten Geschwindigkeitsverhältnisse ($w_0 = 9{,}5$ m/s; $\xi = 0{,}185$/m), im Falle stationärer, lotrechter Förderung von Weizen. Zum Entwurf der Förderungslage kann das Bild 7b unmittelbar gebraucht werden. Die hier dargestellte Linie $v_g - w_0$ beweist, daß die Fördergutgeschwindigkeit nur mit grober Annäherung als Differenz der Gasgeschwindigkeit und der Schwebegeschwindigkeit berechnet werden kann. Die beiden im Bild bezeichneten Punkte sind Ergebnisse der von AHLAND [18] im Rahmen von Weizenförderung vorgenommenen Messungen.

In der pneumatischen Dünnstromförderung hat VOLLHEIM mit Glaskugeln unterschiedlicher Durchmesser Fördergutgeschwindigkeiten gemessen [11]. Die im Bild 8 dargestellten Punkte zeigen die von Vollheim in Förderröhren von 64 mm, 82,5 mm und 101 mm Durchmesser gewonnenen Meßergebnisse. Die eingezeichneten Kurven wurden auf Grund obiger Geschwindigkeitsberechnungen bestimmt. Die mit Hilfe des obigen Berechnungsverfahrens

Tafel I

d_0 [mm]	ξ [m^{-1}]	w_0 [m/s]	C_e
1,1	0,348	9,0	0,44
1,9	0,324	11,0	0,44
4,5	0,356	17,0	0,44

errechneten Kurven stimmen mit den Meßpunkten gut überein. Im Laufe der Berechnung ergaben sich die in der Tafel I angeführten Werte für den Beiwert ξ, für die Schwebegeschwindigkeit w_0 und für den aerodynamischen Widerstandsfaktor C_e, dessen Wert sich dem Saugförderungszustand ent-

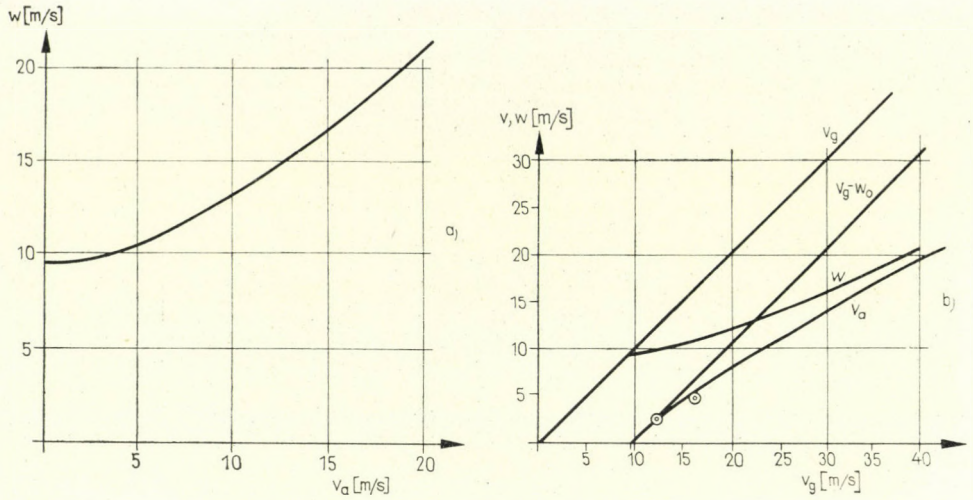


Bild 7. Beziehungen der Geschwindigkeiten bei der lotrechten, stationären Förderung von Weizen: die relative Geschwindigkeit als Funktion der Fördergutgeschwindigkeit (*a*); die Fördergutgeschwindigkeit und die relative Geschwindigkeit als Funktion der Gasgeschwindigkeit (*b*)

sprechend bei Annahme des spezifischen Gewichtes der Luft mit $\gamma_g = 1{,}15$ kp/m^3 ergab.

Die nahezu konstante Größe des Beiwertes ξ für die Berechnung der Abnahme der kinetischen Energie infolge von Stößen weist darauf hin, daß dieser Faktor als Stoffwert gebraucht werden kann. Das zur Geschwindigkeitsberechnung gebrauchte Verfahren zeigt, daß *die auftretenden Geschwindig-*

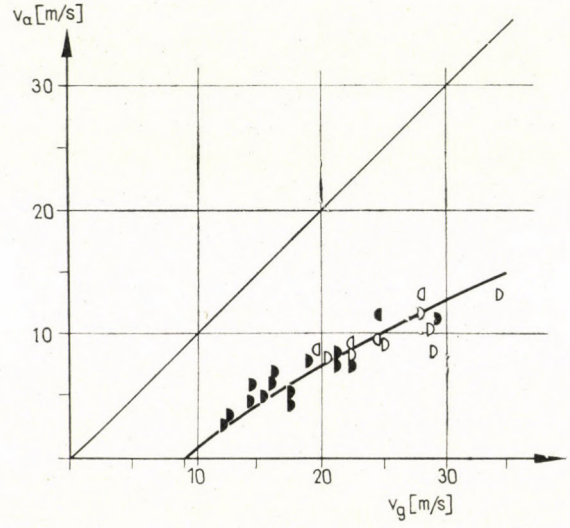


Bild 8a

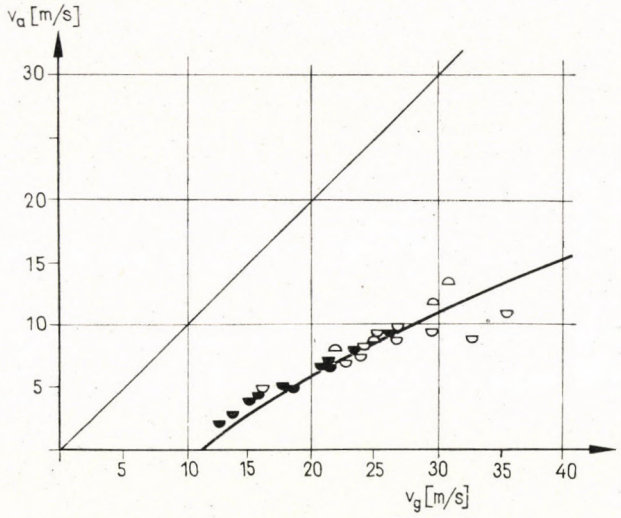


Bild 8b

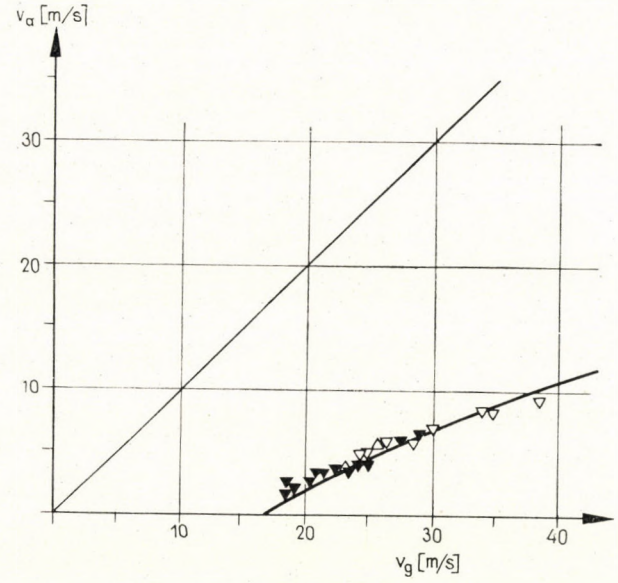


Bild 8c

Bild 8. Die gemessenen [11] und errechneten (fette Kurve) Werte der Fördergutgeschwindigkeit bei der lotrechten, stationären Förderung einer Glaskugel vom Durchmesser d_o = = 1,1 mm (*a*), 1,9 mm (*b*) und 4,5 mm (*c*); der Rohrdurchmesser D ist bei Meßpunkt ○ □ ▽ 64 mm, ◐ ◡ △ 82,5 mm und ◗ ▬ ▼ 101 mm

keitsverhältnisse von der Förderleistung, vom Mischungsverhältnis (Gutbeladung) und vom Durchmesser des Förderrohres unabhängig sind, was auch die Meßergebnisse Vollheims bestätigen.

Die während der Förderung auftretende *relative Geschwindigkeit ist immer größer als die Schwebegeschwindigkeit.* Diese »erhöhte« relative Geschwindigkeit liefert während der Förderung die Förderkraft, die naturgemäß größer als das Gewicht des Fördergutes sein muß ($F_1 > G_1$).

b) Die Triebkraft ist der relativen Geschwindigkeit proportional (17), *die die Bewegung hemmende Kraft (Zurückhaltungskraft) wird durch Stöße* (8) *verursacht.* Dieser Fall tritt bei der Förderung feinkörniger Stoffe ($d_0 < 80$ μm) ein, wenn die Körnchen hart und elastisch sind und sich im Förderrohr während der Förderung an die Rohrwand prallend und nicht längs dieser gleitend fortbewegen (Dünnstromförderung).

Die *Beziehungen der Gasgeschwindigkeiten* können aus dem Gleichgewicht der Kräfte ermittelt werden:

$$F_1 = G_1 + S_1 .$$

Die Beziehungen (17) und (8) eingesetzt und das Gewicht eines Körnchens durch die Schwebegeschwindigkeit $G_1 = 3\,\pi\eta_g\, d_0 w_0$ ausgedrückt, erhält man den Ausdruck:

$$3\pi\eta_g d_0 w = 3\,\pi\eta_g d_0\, w_0 + \xi\,\frac{G_1\, v_a^2}{2g} ,$$

und hieraus ist

$$w = w_0 + \xi\,\frac{w_0}{2g}\, v_a^2 .$$

Die Fördergutgeschwindigkeit kann auch mit Hilfe der Gasgeschwindigkeit (20) ausgedrückt werden

$$v_a = \sqrt{\frac{g^2}{\xi^2 w_0^2} + \frac{2g}{\xi w_0}(v_g - w_0)} - \frac{g}{\xi w_0} . \tag{21}$$

Die Geschwindigkeitsänderungen sind für diesen Fall in den Bildern 9a und 9b dargestellt. Das Bild stellt die Beziehungen der Geschwindigkeiten $w(v_a)$ und $v_a(v_g)$ sowie $w(v_g)$ für Mehlkörnchen mit einem Durchmesser $d_0 = 80$ μm (spezifisches Gewicht $\gamma_a = 1300$ kp/m^3, Schwebegeschwindigkeit $w_0 = 0{,}25$ m/s und Beiwert $\xi = 0{,}2$ m^{-1}) dar.

Wie aus dem Bild ersichtlich, ist im Falle der pneumatischen Förderung feinkörniger Stoffe die relative Geschwindigkeit wesentlich größer als die Schwebegeschwindigkeit.

c) Die Triebkraft ist dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit proportional (15), *die Zurückhaltungskraft wird durch die Reibung ausgelöst (10).* Dieser Fall tritt bei der Förderung großkörniger ($d_0 > 1$ mm), weicher Stoffe auf.

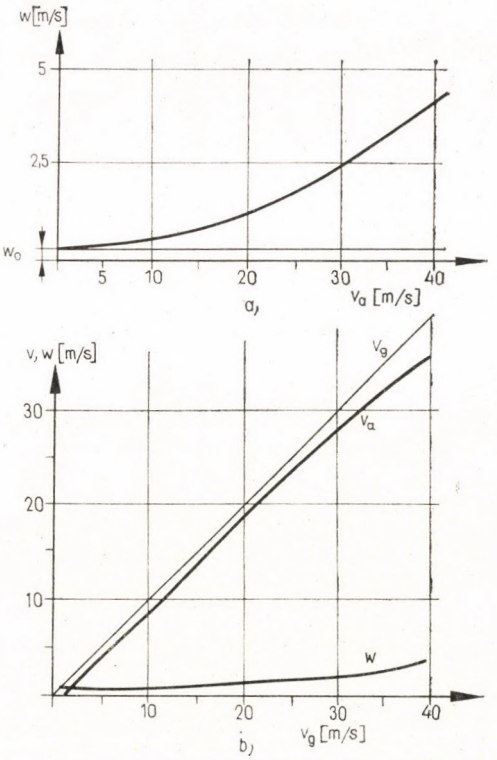


Bild. 9. Beziehungen der Geschwindigkeiten bei der Förderung von Mehl ($d_o = 80\ \mu m$, $\gamma_a = 1300$ kp/m³, $w_o = 0{,}25$ m/s, $\xi = 0{,}2$ m^{-1}): die relative Geschwindigkeit als Funktion der Fördergutgeschwindigkeit (*a*), die Fördergutgeschwindigkeit und die relative Geschwindigkeit als Funktion der Gasgeschwindigkeit (*b*)

Ähnliche Beobachtungen kann man auch bei Förderungen mit großer Gutbeladung machen, wo sich auch die elastischen Körnchen wegen der Dichtstromförderung von der Rohrwand nicht entfernen können und gezwungen sind, entlang dieser zu gleiten.

Die Beziehungen der Geschwindigkeiten können aus dem Gleichgewicht der Kräfte bestimmt werden:

$$F_1 = G_1 + S_1 .$$

Die Beziehungen (15) und (10) eingesetzt und G_1 mit der Schwebegeschwindigkeit nach (18) ausgedrückt, erhält man

$$w = w_0 \sqrt{1+k} = \text{konstant} \tag{22}$$

und die Fördergutgeschwindigkeit

$$v_a = v_g - w_0 \sqrt{1+k} . \tag{23}$$

Die Geschwindigkeitsänderungen nach den Formeln (22) und (23) veranschaulicht das Bild 10, wo die Daten bezüglich der Förderung von Grobschrot (Halbprodukt der Müllerei) angegeben sind. Hier sind der Berechnung die Werte $d_0 = 1{,}5$ mm, $w_0 = 3{,}3$ m/s und $k = 0{,}8$ zugrunde gelegt.

d) Die Triebkraft ist der relativen Geschwindigkeit proportional (17), *die Zurückhaltungskraft entsteht aus der Reibung* (10). Dies ist hauptsächlich dann der Fall, wenn feinkörniger Stoff mit großer Gutbeladung gefördert wird.

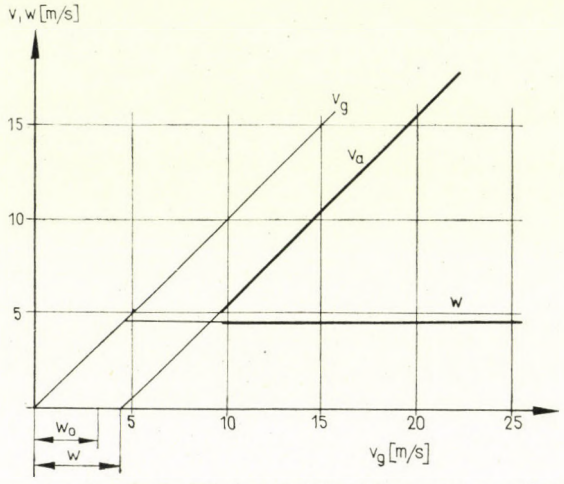


Bild 10. Beziehungen der Geschwindigkeiten bei der Förderung von Grobschrot (Halbprodukt der Müllerei); $d_o = 1{,}5$ mm, $\gamma_a = 1300$ kp/m³, $w_o = 3{,}3$ m/s, $k = 0{,}8$)

Die Geschwindigkeitsverhältnisse können auch hier aus dem Gleichgewicht der Kräfte ermittelt werden:

$$F_1 = G_1 + S_1 .$$

Setzt man nun für das Gewicht eines Körnchens $G_1 = 3\,\pi\eta_g\, d_0 w_0$ und die Ausdrücke (10) und (17) ein, so erhält man den Ausdruck:

$$3\,\pi\eta_g\, d_0 w = (1 + k)\, 3\,\pi\eta_g\, d_0 w_0 .$$

Nach Kürzung gelangt man zum Ergebnis

$$w = (1 + k)\, w_0 = \text{konstant} . \tag{24}$$

Die Fördergutgeschwindigkeit liefert die Beziehung

$$v_a = v_g - (1 + k)\, w_0 . \tag{25}$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse weisen auch hier den aus Bild 10 ersichtlichen Charakter auf.

V. Druckverhältnisse längs der lotrechten Beschleunigungsstrecke

In dem der Zuführung der Körnchen folgenden Rohrabschnitt, längs der sog. Beschleunigungsstrecke erfolgt die Beschleunigung der geförderten Körnchen. Ihre Geschwindigkeit wird in diesem Abschnitt von der praktisch $v_{ai} = 0$ Geschwindigkeit auf die stationäre Betriebsgeschwindigkeit v_a erhöht. (Die momentane Fördergutgeschwindigkeit beträgt längs der Beschleunigungs-

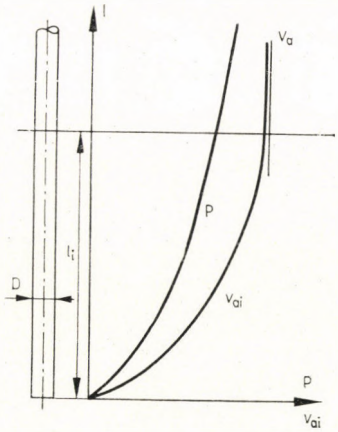


Bild 11. Änderung der Fördergutgeschwindigkeit und des Drucks längs der Beschleunigungsstrecke

strecke v_{ai}.) Die Druckänderung dp/dl entlang des Rohres ist infolge der Beschleunigung der Körnchen größer als die im Abschnitt der stationären Förderung.

Die Änderungen der Fördergutgeschwindigkeit und des Druckabfalles sind im Bild 11 veranschaulicht. Die eingehende Prüfung der Beschleunigungsstrecke [7] zeigt, daß sich die Fördergutgeschwindigkeit asymptotisch der Fördergutgeschwindigkeit des stationären Zustandes nähert, weshalb die Beschleunigungsstrecke als unendlich lang angenommen werden kann. Die Beschleunigung der Körnchen kann man aber als beendet betrachten, wenn die Fördergutgeschwindigkeit die des stationären Abschnitts mit einer Abweichung von etwa 5% erreicht hat. Die so gedeutete Strecke heißt Beschleunigungsstrecke l_i und die zur Zurücklegung dieser Strecke erforderliche Zeitdauer ist die Beschleunigungszeit (t_i).

Die bei der Förderung von Stoffen längs der Beschleunigungsstrecke auftretenden zusätzlichen Druckabfälle sind wesentlich größer als die im stationären Förderungszustand. Die Berechnung kann auf Grund der auf die Körnchen wirkenden Kräfte vorgenommen werden.

Laut Bild 12 befinden sich in einem elementaren Rohrabschnitt der Länge *dl n* Körnchen. In diesem Rohrabschnitt beträgt der elementare Druckabfall

$$\Delta p_{zi} = \frac{nF_1}{A} = \frac{n}{\ldots}(F_d + G_1 + S_1) ,$$

wo $F_d = F_1 - (G_1 + S_1)$ ist und die auf das Körnchen wirkende Beschleunigungskraft bedeutet.

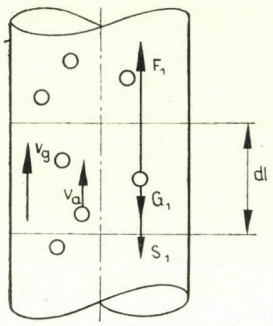


Bild 12. Die auf ein Körnchen wirkenden Kräfte längs der Beschleunigungsstrecke

Den drei Kraftwirkungen entsprechend kann der längs der Beschleunigungsstrecke auftretende zusätzliche Druckabfall aus drei Teilen errechnet werden:

$$\Delta p_{zi} = \Delta p_a + \Delta p_{Gi} + \Delta p_{Si} . \tag{26}$$

Hier bedeuten

Δp_a Druckabfall aus der Beschleunigung,
Δp_{Gi} Druckabfall aus dem Stoffgewicht,
Δp_{Si} Druckabfall aus den Zurückhaltunsgkräften.

a) Der Druckabfall aus der Beschleunigung (Δp_a) liefert die zur Beschleunigung der Körnchen erforderliche Kraft (bei $l = 0$ ist $v_{ai} = 0$):

$$\Delta p_a = \int_0^{l_i} a \frac{q_{ai}}{gA} dl = \int_0^{l_i} \frac{Q_a}{v_{ai}} \frac{a}{gA} dl = \frac{Q_a}{gA} \int_0^{v_a} dv_{ai} = \frac{Q_a v_a}{gA} . \tag{27}$$

b) Der zum Hub der Körnchen notwendige Druckabfall (Δp_{Gi}) ist in der Beschleunigungsstrecke größer als der Druckabfall, der zum Hub der Körnchen in einem Rohrabschnitt des stationären Förderbereichs erforderlich ist. Dies findet seinen Grund darin, daß sich in der Beschleunigungsstrecke infolge der kleineren Fördergutgeschwindigkeit mehr Körnchen befinden als in einem gleich langen Rohrabschnitt des stationären Förderungsbereiches. Längs der Beschleunigungsstrecke ändert sich das Fördergutgewicht je lfm

(q_{ai}) in Funktion des Ortes und im umgekehrten Verhältnis zur Fördergutgeschwindigkeit.

Der zum Hub der Körnchen benötigte Druckabfall:

$$\Delta p_{Gi} = \int_0^{l_i} \frac{q_{ai}}{A} dl = \frac{Q_a}{A} \int_0^{l_i} \frac{1}{v_{ai}} dl = \frac{Q_a}{A} \int_0^{t_i} dt = \frac{Q_a}{A} t_i. \tag{28}$$

Zur Bestimmung des Druckabfalles Δp_{Gi} muß man daher entweder die Funktion Fördergutgeschwindigkeit-Rohrlänge $v_{ai}(l)$ oder die sog. Beschleunigungszeit (t_i) — die zur Beschleunigung der Körnchen erforderliche Zeitdauer — kennen. Die Funktionen $v_{ai}(l)$ und t_i hängen auch von der Art der auf das Körnchen wirkenden Zurückhaltungskraft ab. Für den Fall, wo die Zurückhaltungskraft von Stößen herrührt, können Lösungen dem Schrifttum [7] entnommen werden.

c) Der durch die Zurückhaltungskräfte verursachte Druckabfall (Δp_{Si}) nimmt auch längs der Beschleunigungsstrecke, den unterschiedlichen Arten der Zurückhaltungskräfte entsprechend, verschiedene Formen an. Die Berechnung kann nach Kapitel III vorgenommen werden.

SCHRIFTTUM

1. Gasterstädt, J.: Die experimentelle Unteruchung des pneumatischen Fördervorganges. *VDI Forsch. Arb.* (1924), 265.
2. Barth, W.: Strömungsvorgänge beim Transport von Festteilchen und Flüssigkeitsteilchen in Gasen. *Chemie-Ing.-Techn.* (1958), 30.
3. Segler, G.: Pneumatic Grain Conveying; Braunschweig 1951.
4. Успенски, В. А.: Пневматический транспорт; Москва 1952.
5. Pattantyus, Á. G.: Pneumatic Conveying. *Acta Techn. Hung.* 8 (1954).
6. Pápai, L.: Pneumatikus gabonaszállítás (Pneumatische Getreideförderung). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* **12** (1954).
7. Pápai, L.: Examination of the Starting Section in Pneumatic Grain Conveying. *Acta Techn. Hung.* **14** (1956).
8. Uematu-Morikawa, Y.: Experimentelle Untersuchungen über die Teilchenbewegung und über die Geschwindigkeitsverteilung der Förderluft in einer pneumatischen Förderleitung. *Bulletin of JSME* (1961), 4.
9. Vollheim, R.: Elementarvorgänge und Energieaufwand bei der Förderung von Festkörper-Luft-Gemischen in senkrechten Rohren. Diss. Techn. Universität; Dresden 1963.
10. Kovács, L.: Berechnung des Druckabfalls in 90° horizontal eingebauten Krümmern pneumatischer Getreideförderleitungen *Periodica Polytechnica* **8** (1964).
11. Vollheim, R.: Die Förderung von Festkörper-Luft-Gemisch in Rohren. *Maschinenbautechnik* (1965), 14.
12. Pápai, L.—Sebestyén, Gy.: Fluidisationsförderung von Zement. *Periodica Polytechnica* **9** (1965).
13. Kovács, L.: Berechnung des Druckabfalles in Krümmern pneumatischer Förderleitungen bei Einbau in lotrechter Ebene. *Periodica Polytechnica* **10** (1966).
14. Buhrke, M.: Teilchengeschwindigkeit bei der pneumatischen Förderung in waagrechten Rohren. *Hebezeuge und Fördermittel* (1966), 6.
15. Ривкин, М. Б.: Применение теории двухфазного псевдоощищния к пневмотранспорту в плотной фазес. *Инженерно физический журнал* (1966), 11.
16. Pápai, L.: Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse bei waagrechter pneumatischer Förderung. *Periodica Polytechnica* **10** (1966).

17. PÁPAI, L.: Fluidizációs szállítás (Fluidisationsförderung). Wissenschaftliche Tagung der Technischen Universität Budapest 1967; Band II.
18. AHLAND, E. O.: Strömungsvorgänge im vertikalen, feststoffbeladenen Förderrohr mit austretendem Freistrahl. Dissertation T. H.; Aachen 1966.

Velocity and Pressure in Vertical Pneumatic Conveying. The additional pressure drop at pneumatic conveying can be calculated from the forces acting on the transported particles. For uniform vertical transport the additional pressure drop (Δp_z) results from the weight-lifting pressure drop (Δp_G) and the pressure drop of the retaining forces (Δp_S). The pressure drop Δp_S cannot be calculated with one formula, because it depends on the form of conveying. The mean velocity of the material, developing during the uniform vertical transport can be determined from the forces acting on the particle. The formula suitable for determining material velocity is of different shape according to the kind of transportation (thin-flow conveying, dense-flow conveying) and to the kind of the transported particle.

Режим скоростей и давлений, формирующийся в процессе вертикального пневматического транспорта *(Л. Папаи)*. Дополнительное падение давления, имеющее место при пневматическом транспорте, можно вычислить на основе сил, действующих на транспортируемые зерна. Дополнительное падение давления в случае вертикального равномерного транспорта слагается из падения давления от подъема груза и падения давления от тормозящих усилий. Вычисление падения давления нельзя выполнить при помощи единой формулы, так как то зависит от формы транспорта. Средняя скорость материала, формирующаяся при вертикальном равномерном транспорте, может быть вычислена на основе действующих на зерна сил. Формула, пригодная для определения скорости материала, является различной и зависит от формы транспорта (транспорт в неплотном потоке, транспорт в плотном потоке) и от вида транспортируемых зерен.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 105—135 (1970)

BENDING ANALYSIS OF SYMMETRICALLY OR ANTIMETRICALLY LOADED STRAIGHT-EDGE SHELLS WITH SURFACES OF FOURTH ORDER

L. KOLLÁR*
DR. OF TECHN. SC.
and
Z. GÁRDONYI** — D. HOLNAPY***

[Manuscript received 17 Oct. 1969]

Shells with mediane surfaces of higher than second order will have equations with variable coefficients. There exists a special analytical method to face the arising difficulties, otherwise the method of finite differences has to be applied. These two methods will be presented in detail first for general cases, and then on data of an erected shell structure checked by a model test. Both methods will be numerically compared and theoretically evaluated.

1. Introduction

Often it is advantageous both from architectural and structural aspects for a shell to have at least two opposite rectilinear edges. Among easy to calculate surfaces of second order, this condition is only met with by cylindrical shells. Since, however, this has a one-way curvature, great bending moments arise in case of large spans, requiring great wall thicknesses for the sake of stability. Thus, it is advisable to apply doubly curved shells. In these cases, however, straight edges belong only to at least fourth-order surfaces.

Fig. 1 shows three alternatives of shells with mediane surface

$$z = Ax^2 + By^2 + Cx^2y^2. \tag{1}$$

Conveniently assuming constants A, B and C, hyperbolic or elliptic surfaces can be developed with two opposite rectilinear edges (Fig. 1*a* and *b*, resp.), and even all four can be made to be straight (Fig. 1*c*).

Forces arising in these shells cannot be described by the membrane theory, because important moments are likely to arise in their flattening extreme regions. It is theoretically impossible, indeed, to ensure equilibrium by mere membrane forces. On the other hand, however, these shells can be considered fairly accurately as shallow — just because their edges flatten. So, they can be treated according to the bending theory of shallow shells.

* Dr. KOLLÁR L., Karap u. 9, *Budapest XII.*, (Hungary)
** GÁRDONYI Z., Ormódi u. 15/a., *Budapest XII.*, (Hungary)
*** HOLNAPY D., Öv u. 150., *Budapest XIV.*, (Hungary)

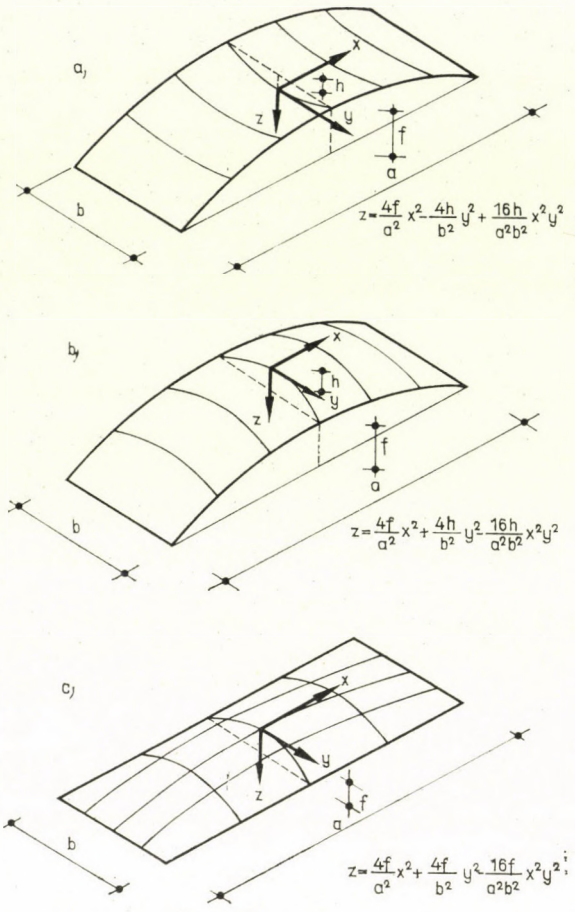


Fig. 1

A solution will be presented for two kinds of load: total and antimetric (Fig. 2), uniformly distributed loads. (One-sided load can be obtained as a sum of both.)

Assumptions on edge supporting conditions are:

The shell is hinged at the edges, hence both deflection w and bending moment normally to the edge are zero:

$$w = 0 \tag{2a}$$

and

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \tag{2b}$$

where w = deflection
n = direction normal to the edge.

Edges do not resist any horizontal force, hence the membrane compression normally to the edges is zero:

$$n_n = 0\,. \tag{2c}$$

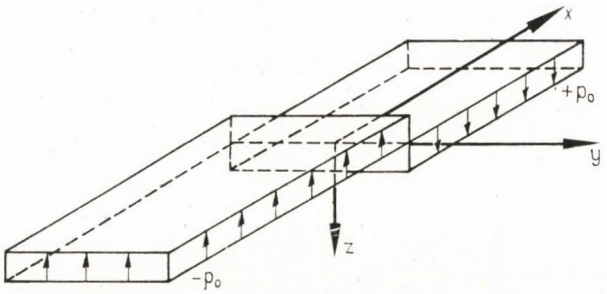


Fig. 2

Finally: the shell edge is prevented from displacement tangentially to the edge beam. Hence, the strain and consequently the membrane compression along the edge is zero:

$$n_s = 0\,. \tag{2d}$$

where s=direction parallel to the edge.

Thus, edges support only vertical and tangential forces. For the shell the first is a bending shear, and the second a membrane shear.

2. Kinds of solution

The first solution to be presented is an analytical one, thereafter application of finite difference equations will be described. Finally, accuracy and convergence of both methods will be examined on data obtained on the shell structure referred to in [4] and compared to model test results, leading to practical conclusions on the applicability of each method.

3. Solution by the analytical method

The analytical solution is based on the differential equations of bent shallow shells. Neglecting the transverse contraction ($\nu = 0$) and taking into account only vertical loads, the compatibility and equilibrium equation of shallow shells will assume the form (see e.g. [1]):

$$\Delta\Delta\, F + D \cdot Lw = 0\,, \tag{3a}$$

$$K \cdot \Delta\Delta\, w - LF = p\,, \tag{3b}$$

where $F(x, y)$ membrane stress function,
$w(x, y)$ vertical displacement of the shell surface,
$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ the Laplace operator,
$L = \partial^2 z/\partial x^2 \; \partial^2/\partial y^2 - 2\partial^2 z/\partial x \partial y \; \partial^2/\partial x \partial y + \partial^2 z/\partial y^2 \; \partial^2/\partial x^2$ the Pucher operator,
$D = Et$ tensile stiffness of the shell,
$K = Et^3/12$ bending stiffness of the shell,
t shell thickness,
p vertical load.

Assumed boundary conditions are most easily met by expanding both F and w into double Fourier series (Navier solution).

3,1 *Solution for a symmetric load*

In case of symmetric loads, the Navier solution will be:

$$F = \sum_m \sum_n F_{mn} \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \,, \tag{4}$$

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos w_m x \cdot \cos \omega_n y, \tag{5}$$

where

$$\omega_m = m \frac{\pi}{a} \,, \tag{6a}$$

$$\omega_n = n \frac{\pi}{b} \,, \tag{6b}$$

and $m, n = 1, 3, 5 \ldots$

Assuming a constant load, it will be expanded into double Fourier series:

$$p = \sum_m \sum_n p_{mn} \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \,. \tag{7a}$$

Substitution of Eqs (4), (5), (6) into Eqs (3a, b), needs an even number of differentiations with respect to x or y, thereby recovering terms $\cos \omega_m x \cos \omega_n y$ unaltered, possibly multiplied by even functions of x or y. Besides, a mixed derivative with respect to x and y has to be developed, leading to terms $\sin \omega_m x \sin \omega_n y$, to be multiplied by a term $(x \cdot y)$. Thereby, with respect to either x or y, a product of two odd functions will result, leading again to an even function in both directions.

Thus, the equations will include only even functions, but some trigonometric terms will have variable coefficients. This difficulty was faced by SZMODITS [6] by again expanding these terms with variable coefficients into Fourier series. Thereby, variable coefficients vanish, and all terms will contain trigonometric functions of the form $\cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y$, permitting a simplification, leading to a simple linear equation system for coefficients F_{mn} and w_{mn}.

This is what SZMODITS did for a symmetric load in [6]. Essentials of his solution will be presented here, partly for the sake of completeness, and partly to unify treatment.

For the constant load intensity (p_0), coefficients p_{mn} (7a) will take the form:

$$p_{mn} = \frac{16\,p_0}{\pi^2_{mn}}\,(-1)^{(m+n-2)/2}. \tag{7b}$$

Applying operator L to formula (4) of F:

$$L\cdot F = -\,2\sum_{\mu}\sum_{\varrho} F_{\mu\varrho}\left\{\left[(A+Cy^2)\,\omega^2_{\varrho}+(B+Cx^2)\,\omega^2_{\mu}\right]\cdot\cos\omega_{\mu}x\cdot\cos\omega_{\varrho}y + \right.$$
$$\left. +\,4\,Cxy\,\omega_{\mu}\,\omega_{\varrho}\cdot\sin\omega_{\mu}x\cdot\sin\omega_{\varrho}y\right\}, \tag{8}$$

where $\mu = 1, 3, 5\ldots$, and $\varrho = 1, 3, 5\ldots$ (μ, ϱ replacing subscripts m, n for the sake of later calculations).

Trigonometric terms within clamped brackets multiplied by x^2, y^2 and xy will again be expanded into Fourier-series of the form $\cos\omega_m x\cdot\cos\omega_n y$ requiring integrations:

For $\mu \neq m$ and $\varrho \neq n$:

$$I_1 = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2\cdot\cos\omega_{\mu}x\cdot\cos\omega_m x\cdot dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,a}{(\omega_{\mu}-\omega_m)^2}\,(-1)^{(\mu+m+2)/2}+\frac{2\,a}{(\omega_{\mu}+\omega_m)^2}\,(-1)^{(\mu+m)/2}\right] \tag{9}$$

$$I_2 = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2\cdot\cos\omega_{\varrho}y\cdot\cos\omega_n y\cdot dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,b}{(\omega_{\varrho}-\omega_n)^2}\,(-1)^{(\varrho+n+2)/2}+\frac{2\,b}{(\omega_{\varrho}+\omega_n)^2}\,(-1)^{(\varrho+n)/2}\right] \tag{10}$$

$$I_3 = \int_{-a/2}^{+a/2} x\cdot\sin\omega_{\mu}x\cdot\cos\omega_m x\cdot dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{a}{\omega_{\mu}-\omega_m}\,(-1)^{(\mu+m+2)/2}-\frac{a}{\omega_{\mu}+\omega_m}\,(-1)^{(\mu+m)/2}\right] \tag{11}$$

$$I_4 = \int_{-b/2}^{+b/2} y\cdot\sin\omega_{\varrho}y\cdot\cos\omega_n y\cdot dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{b}{\omega_{\varrho}-\omega_n}\,(-1)^{(\varrho+n+2)/2}-\frac{b}{\omega_{\varrho}+\omega_n}\,(-1)^{(\varrho+n)/2}\right]. \tag{12}$$

And for $\mu = m$ and $\varrho = n$:

$$I_5 = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \cos \omega_m x \cdot dx = \frac{a^3}{24} - \frac{a}{4\,\omega_m^2} \tag{13}$$

$$I_6 = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot \cos \omega_\varrho y \cdot \cos \omega_n y \cdot dy = \frac{b^3}{24} - \frac{b}{4\,\omega_n^2} \tag{14}$$

$$I_7 = \int_{-a/2}^{+a/2} x \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \cos\, \omega_m x \cdot dx = \frac{a}{4\,\omega_m} \tag{15}$$

$$I_8 = \int_{-b/2}^{+b/2} y \cdot \sin\, \omega_\varrho y \cdot \cos\, \omega_n y \cdot dy = \frac{b}{4\,\omega_n}\,. \tag{16}$$

Applying the above integrals, the repeatedly expanded form of (8) will be:

$$L \cdot F = -\sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{17}$$

with coefficients $E_{mn}^{\mu\varrho}$:

$$\mu \neq m,\ \varrho \neq n\text{:}\quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 32\,C\omega_m\,\omega_\mu\,\omega_n\,\omega_\varrho\,(-1)^{(m+\mu+n+\varrho)/2}\,\frac{1}{\omega_m^2-\omega_\mu^2}\,\frac{1}{\omega_n^2-\omega_\varrho^2}\,, \tag{18}$$

$$\mu = m,\ \varrho = n\text{:}\quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 2\,(A\omega_\varrho^2+B\omega_\mu^2) + \frac{\mathrm{C}}{6}\,(b^2\,\omega_\varrho^2+a^2\,\omega_\mu^2)\,, \tag{19}$$

$$\mu \neq m,\ \varrho = n\text{:}\quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\,C\omega_m\,\omega_\mu\,(-1)^{(m+\mu+2)/2}\,\frac{\omega_m^2+\omega_\mu^2}{(\omega_m^2-\omega_\mu^2)^2}\,, \tag{20}$$

$$\mu = m,\ \varrho \neq n\text{:}\quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 8\,C\omega_n\,\omega_\varrho\,(-1)^{(n+\varrho+2)/2}\,\frac{\omega_n^2+\omega_\varrho^2}{(\omega_n^2-\omega_\varrho^2)^2}\,. \tag{21}$$

The same operation on the w series leads to:

$$L \cdot w = -\sum_\mu \sum_\varrho w_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{22}$$

where $E_{mn}^{\mu\varrho}$ can again be obtained from Eqs (18) through (21).

Now, making use of (17) and (22) and substituting (4) and (5) into Eqs (3a, b), the equations decompose for different m and n values. Simplification by expression ($\cos \omega_m x \cdot \cos \omega_n y$) occurring in each term results in a linear equation system for coefficients F_{mn} and w_{mn}.

For a pair of values (m, n) this takes the form:

$$F_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2-D\sum_{\mu}\sum_{\varrho} w_{\mu\varrho}E_{mn}^{\mu\varrho}=0, \tag{23}$$

$$K\cdot w_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2+\sum_{\mu}\sum_{\varrho} F_{\mu\varrho}E_{mn}^{\mu\varrho}=\frac{16\,p_0}{\pi^2 mn}(-1)^{(m+n-2)/2}. \tag{24}$$

If an equal number of terms will be considered from expansions with respect to both μ, ϱ and m, n, then as many equations result as there are unknowns, thus the equation system can be solved.

Thereafter, internal forces can be obtained from the known formulae:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{25a-c}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ m_y &= -K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ m_{xy} &= -K\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{25d-f}$$

Their positive interpretation is seen in Fig. 3. (A positive bending moment causes tension in the bottom fibre.)

Formulae for internal forces in particular are:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\sum_m\sum_n F_{mn}\,\omega_n^2\cdot\cos\omega_m x\cdot\cos\omega_n y\\ n_y &= -\sum_m\sum_n F_{mn}\,\omega_m^2\cdot\cos\omega_m x\cdot\cos\omega_n y\\ n_{xy} &= -\sum_m\sum_n F_{mn}\,\omega_m\omega_n\sin\omega_m x\cdot\sin\omega_n y\end{aligned}\right\} \tag{26a-c}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x &= +K\sum_m\sum_n w_{mn}\,\omega_m^2\cos\omega_m x\cdot\cos\omega_n y\\ m_y &= +K\sum_m\sum_n w_{mn}\,\omega_n^2\cos\omega_m x\cdot\cos\omega_n y\\ m_{xy} &= -K\sum_m\sum_n w_{mn}\,\omega_m\omega_n\sin\omega_m x\cdot\sin\omega_n y\end{aligned}\right\} \tag{26d-f}$$

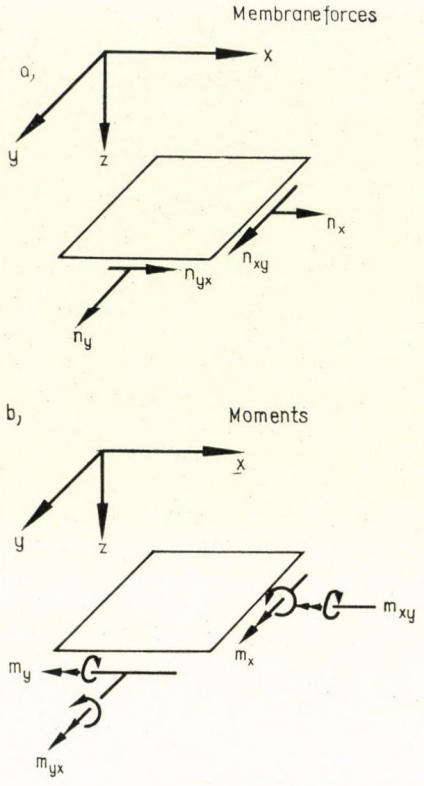


Fig. 3

3,2 *Solution for antimetric loads*

For shell structures (or their edge arches) in Fig. 1 the uniform load antimetric in x may also be critical (Fig. 2). This problem can also be solved according to the method presented in item 3,1. The load will now be expanded into the series

$$p = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{27}$$

with $m = 2, 4, 6 \ldots$, and $n = 1, 3, 5 \ldots$

$$p_{mn} = \frac{32\, p_0}{\pi^2 mn} (-1)^{(n-1)/2} \tag{28a}$$

for $m = 2, 6, 10, 14 \ldots$ and

$$p_{mn} = 0 \tag{28b}$$

for $m = 4, 8, 12 \ldots$

Due to antimetry, Fourier-series

$$F = \sum_m \sum_n F_{mn} \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{29}$$

and

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y \tag{30}$$

will be assumed as stress and deflection functions. Application of operator L needed for their substitution into Eqs (2) and (3) leads to

$$\begin{aligned} L \cdot F = -2 \sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} \{ & [(A+Cy^2)\,\omega_\varrho^2 + (B+Cx^2)\,\omega_\mu^2] \cdot \\ & \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_\varrho y - 4\,Cxy\,\omega_\varrho\,\omega_\mu \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_\varrho y \} \end{aligned} \tag{31}$$

where $\mu = 2, 4, 6 \ldots$ and
$\varrho = 1, 3, 5 \ldots$

Integrals needed for the expansion of the term in brackets into Fourier series of form $\sin \omega_\mu x \cdot \cos \omega_\varrho y$ are:

For $\mu \neq m$ and $\varrho \neq n$:

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_0^{a/2} x^2 \sin \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{(\omega_\mu - \omega_m)^2} (-1)^{(\mu+m)/2} - \frac{a}{(\omega_\mu + \omega_m)^2} (-1)^{(\mu+m)/2} \right] \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_0^{a/2} x \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2(\omega_\mu - \omega_m)} (-1)^{(\mu+m)/2} - \frac{a}{2(\omega_\mu + \omega_m)} (-1)^{(\mu+m)/2} \right] \end{aligned} \tag{33}$$

and for $\mu = m$ and $\varrho = n$:

$$I_{11} = \int_0^{a/2} x^2 \cdot \sin \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = \frac{a^3}{48} - \frac{a}{8\,\omega_m^2} \tag{34}$$

$$I_{12} = \int_0^{a/2} x \cdot \cos \omega_\mu x \cdot \sin \omega_m x \cdot dx = -\frac{a}{8\,\omega_m} \tag{35}$$

Besides, also integrals (10), (12), (14) and (16) have to be applied, leading to the following, repeatedly expanded form of (31):

$$L \cdot F = -\sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \sin \omega_m x \cdot \cos \omega_n y . \tag{36}$$

Formulae for coefficients $E_{mn}^{\mu\varrho}$ are:

$$\mu \neq m, \varrho \neq n: \quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 32C\,\omega_m\,\omega_\mu\,\omega_n\,\omega_\varrho(-1)^{(m+\mu+n+\varrho+2)/2} \cdot \frac{1}{\omega_m^2-\omega_\mu^2} \cdot \frac{1}{\omega_n^2-\omega_\varrho^2}, \tag{37}$$

$$\mu = m, \varrho = n: \quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 2(A\omega_\varrho^2+B\omega_\mu^2)+\frac{C}{6}(b^2\,\omega_\varrho^2+a^2\,\omega_\mu^2)\,, \tag{38}$$

$$\mu \neq m, \varrho = n: \quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 8C\,\omega_m\,\omega_\mu(-1)^{(m+\mu)/2} \cdot \frac{\omega_m^2+\omega_\mu^2}{(\omega_m^2-\omega_\mu^2)^2}\,, \tag{39}$$

$$\mu = m, \varrho \neq n: \quad E_{mn}^{\mu\varrho} = 8C\,\omega_n\,\omega_\varrho(-1)^{(n+\varrho+2)/2} \cdot \frac{\omega_n^2+\omega_\varrho^2}{(\omega_n^2-\omega_\varrho^2)^2}\,. \tag{40}$$

Application of operator L to deflection function w leads, with the same coefficients, to

$$L \cdot w = -\sum_\mu \sum_\varrho w_{\mu\varrho} \sum_m \sum_n E_{mn}^{\mu\varrho} \cdot \sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y\,. \tag{41}$$

This all replaced into Eqs (3a, b), separating terms corresponding to different (m, n) and simplifying by $(\sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y)$ leads to the following linear equation system for coefficients F_{mn} and w_{mn}:

$$F_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2 - D\sum_\mu \sum_\varrho w_{\mu\varrho} E_{mn}^{\mu\varrho} = 0\,, \tag{42}$$

$$K \cdot w_{mn}(\omega_m^2+\omega_n^2)^2 + \sum_\mu \sum_\varrho F_{\mu\varrho} E_{mn}^{\mu\varrho} = p_{mn}\,, \tag{43}$$

where p_{mn} is defined by (28a—b).

Again, as many equations result as there are unknowns, if the number of terms μ and ϱ is chosen equal to that of terms m and n, respectively. Internal forces follow invariably from (25) and (26), in particular:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= -\sum_m \sum_n F_{mn}\,\omega_n^2 \cdot \sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y\,, \\ n_y &= -\sum_m \sum_n F_{mn}\,\omega_m^2 \cdot \sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y\,, \\ n_{xy} &= +\sum_m \sum_n F_{mn} \cdot \omega_m\omega_n \cdot \cos\omega_m x \cdot \sin\omega_n y, \end{aligned}\right\} \tag{44a–c}$$

$$\left.\begin{aligned} m_x &= +K\sum_m \sum_n w_{mn}\,\omega_m^2 \cdot \sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y\,, \\ m_y &= +K\sum_m \sum_n w_{mn}\,\omega_n^2 \cdot \sin\omega_m x \cdot \cos\omega_n y\,, \\ m_{xy} &= +K\sum_m \sum_n w_{mn}\omega_m\omega_n \cdot \cos\omega_m x \cdot \sin\omega_n y\,. \end{aligned}\right\} \tag{44d–f}$$

4. Numerical solution

The numerical solution is based on the method of common finite differences (e.g. in [5]). To this effect, F and w values along the edge and in a (fictitious) row of points beyond the edge have to be determined.

According to boundary conditions for w (2a) and (2b), w assumes values

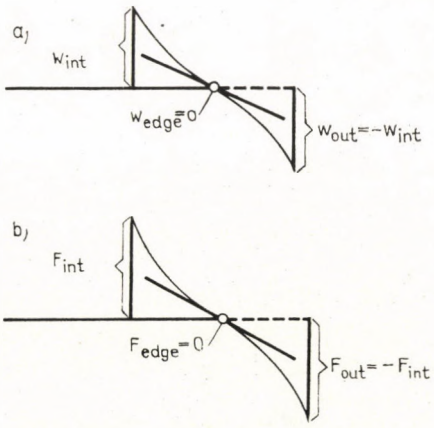


Fig. 4

along the edge and in the two neighbouring row of points in conformity with Fig. 4a (even for non-zero ν).

Stress function F is restricted by boundary conditions (2c) and (2d). The first of these stipulates $\partial^2 F/\partial s^2 = 0$, hence F can at most linearly vary along the edge. Since, however, from the aspect of membrane internal forces the constant and linear part of F is unimportant, F will be zeroed for the sake of simplicity along the whole edge.

Boundary condition (2d) is equivalent to $\partial^2 F/\partial n^2 = 0$ defining F values corresponding to Fig. 4b in the fictitious row of points adjacent to the edge.

According to all these, F and w are only unknown at points within the edges. To write equations, F and w values valid along the edges and in the fictitious row of points outside the edge are needed, these, however, are not new unknowns. For instance, dividing the domain into 6 by 6 parts, we obtain 25 internal points, i.e. 50 unknowns equivalent to a linear equation system with a 50 by 50 coefficient matrix.

Matrix $\mathbf{A}$ of the equation system will be of the structure [cf. Eqs (3a, b)]:

$$\underset{50\times 50}{[\mathbf{A}]} \cdot \underset{50\times 1}{\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}} \equiv \begin{bmatrix} \underset{25\times 25}{\mathbf{P}} & \underset{25\times 25}{\mathbf{Q}} \\ \underset{25\times 25}{\mathbf{R}} & \underset{25\times 25}{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{25\times 1}{\mathbf{F}} \\ \underset{25\times 1}{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{25\times 1}{\mathbf{0}} \\ \underset{25\times 1}{\mathbf{p}} \end{bmatrix}, \tag{45}$$

Here, the first and the second 25 rows represent the compatibility equation for the internal points (3a) and the equilibrium differential equation (3b), respectively.

Thus, matrices $\mathbf{P}$ and $-\mathbf{R}$ contain biharmonic difference operators and difference operators corresponding to the Pucher operator, respectively. Consequently:

$$\underset{25\times 25}{\mathbf{Q}} = D\underset{25\times 25}{\mathbf{R}} \quad \text{and} \quad \underset{25\times 25}{\mathbf{S}} = K\underset{25\times 25}{\mathbf{P}}.$$

This partitioned matrix will be inverted by the Frobenius method [3], its essential steps being:

Write the inverse matrix in the partitioned form

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{bmatrix}. \tag{46}$$

According to the definition of reciprocal matrices, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ equals the unity matrix $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$.

In particular:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{PY}+\mathbf{QU} & \mathbf{PZ}+\mathbf{QV} \\ \mathbf{RY}+\mathbf{SU} & \mathbf{RZ}+\mathbf{SV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

i.e.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{PY}+\mathbf{QU} &= \mathbf{E}, \\ \mathbf{PZ}+\mathbf{QV} &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{RY}+\mathbf{SU} &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{RZ}+\mathbf{SV} &= \mathbf{E}. \end{aligned}\right\} \tag{48a-d}$$

Multiplying (48b) from the left by $(-\mathbf{RP}^{-1})$ and adding to (48d):

$$(\mathbf{S}-\mathbf{RP}^{-1}\mathbf{Q})\,\mathbf{V} = \mathbf{E},$$

i.e.

$$\mathbf{V} = (\mathbf{S}-\mathbf{RP}^{-1}\mathbf{Q})^{-1}. \tag{49}$$

From (48b)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P}^{-1}(-\mathbf{QV}). \tag{50}$$

In fact, thereby the problem becomes solved. Namely, $\mathbf{Y}$ and $\mathbf{U}$ are unnecessary, the sought for vectors F and w being obtained from the operation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{51}$$

where $\mathbf{Y}$ and $\mathbf{U}$ should be multiplied throughout by $\mathbf{0}$.

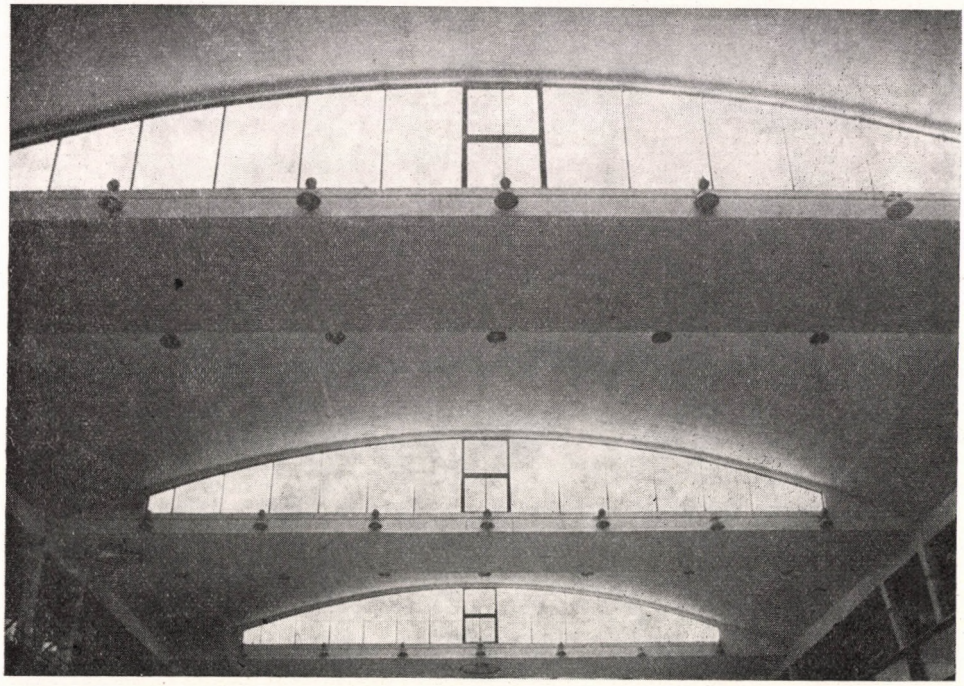


Fig. 5

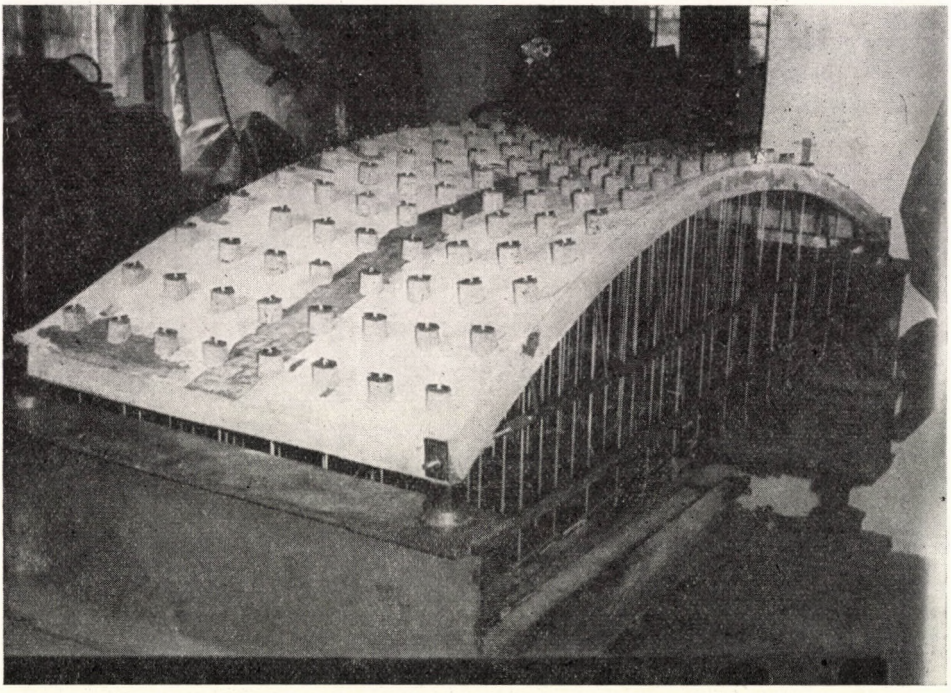


Fig. 6

Thereby it is unnecessary to invert matrix **A** of the whole equation system but a few operations with partial matrices, each making up one quarter of **A** and their inversion will do it, since right-hand sides of compatibility equations are always 0.

Thereafter, the solution of the equation system will be checked by resubstitution. (Results may be further improved by the Southwell block relaxation [2], this procedure cannot be proved, however, to be convergent in every case.)

From the obtained F and w values, internal forces for each point can be computed by difference expressions corresponding to formulae (25) and (26).

5. Determination of forces arising in the existing shell structure

For the sake of illustration, internal forces determined by the presented methods of the existing shell structure (Fig. 5 and [4]) will be compared to each other and to test data obtained on a 1 : 15 scale model of the structure

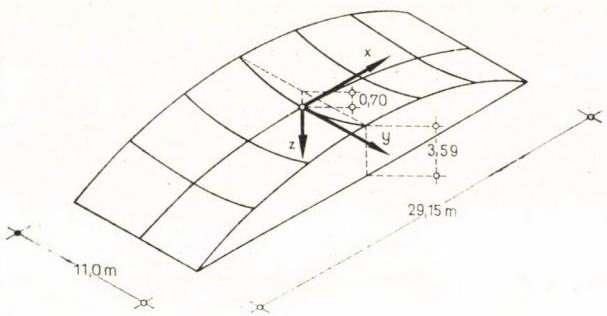


Fig. 7

(Fig. 6). (Tests were directed by A. SZITTNER in the Laboratory of the Department of Steel Structures of the Budapest Technical University.)

The main sizes of the structure are those shown in Fig. 7. For the sake of simplicity, internal forces are referred to a load of 0,100 Mp/sq.m, uniformly distributed in horizontal projection.

Six internal forces of the shell (n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}) at 16 points indicated on the ground plan, Fig. 8, have been calculated, partly by the analytical method (item 3), taking into account $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$ and $5 + 5$ terms of the double Fourier series for F and w, and then by the finite difference method of item 4, dividing the shell in the ground plan into 6 by 6 fields.

Results for symmetrical and antimetrical (Fig. 2) loads are compiled in Tables S. 1 through S. 16 and A. 1 through A. 16, respectively, numbered according to the 16 points shown in Fig. 8.

For a better illustration, the distribution of internal forces obtained by the finite difference method (considered as exact), as well as values of deflection function w and stress function F have been plotted in diagrams,

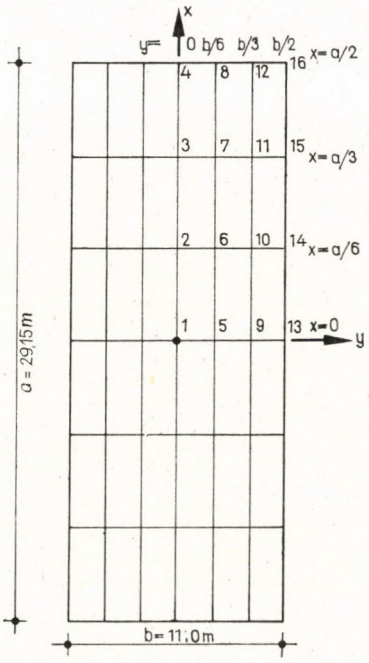


Fig. 8

namely, in Figs 9 through 16 and in Figs 17 through 24 for symmetrical (total) and antimetrical loads, respectively.

During the model test, bending moments m_x and m_y have only been determined in the shell middleline (along the x axis), for symmetrical (total) and unilateral loads (because of the difficulty to produce antimetrical loads). Hence, the model test results were confronted in m_x and m_y diagrams plotted in a longitudinal section along axis x to those of the finite difference method and to the moments obtained with 2 + 2 and 5 + 5 terms from the analytical method (Figs 25 through 28). Model test data were connected by straight lines, while calculated diagrams were indicated by curved lines — similarly as in Figs 9 through 24.

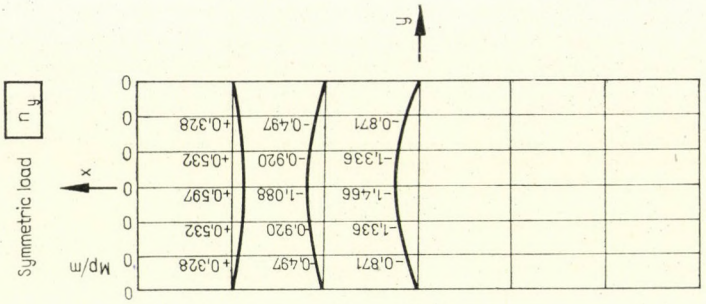


Fig. 9

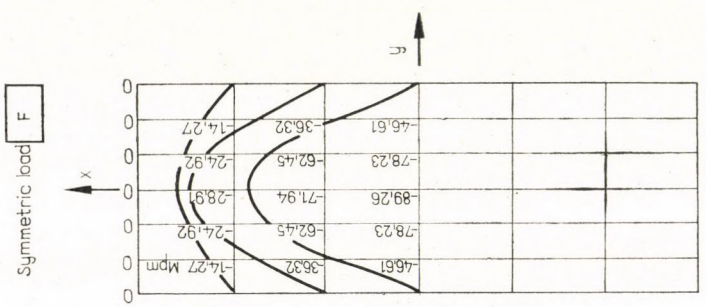


Fig. 10

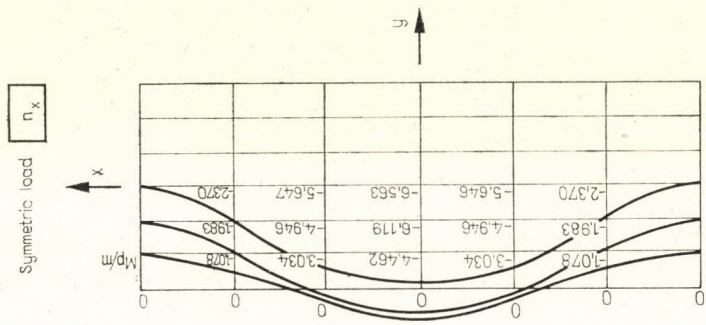


Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 16

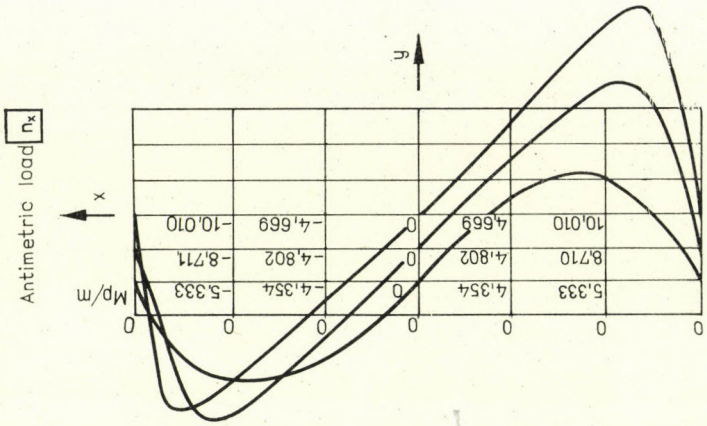


Fig. 19

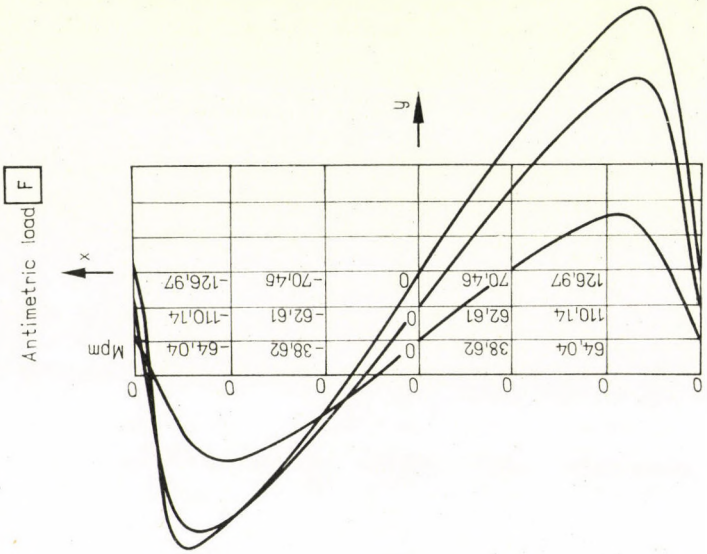


Fig. 18

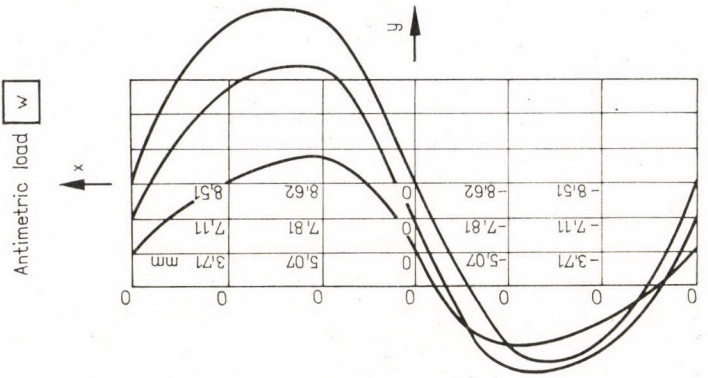


Fig. 17

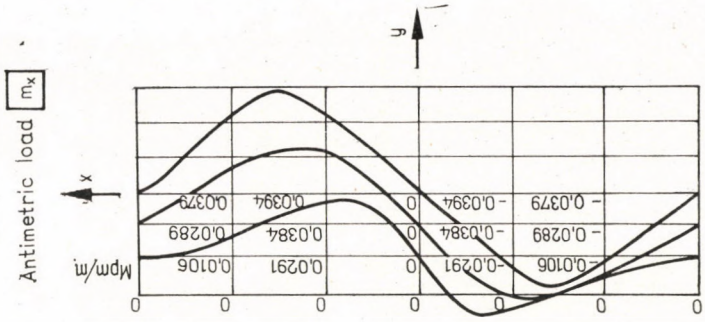


Fig. 22

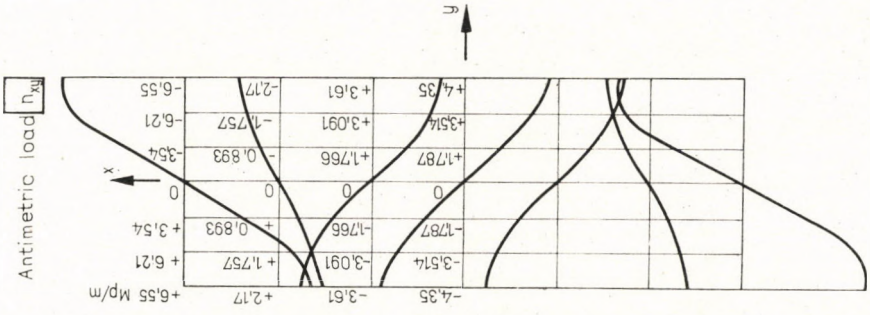


Fig. 21

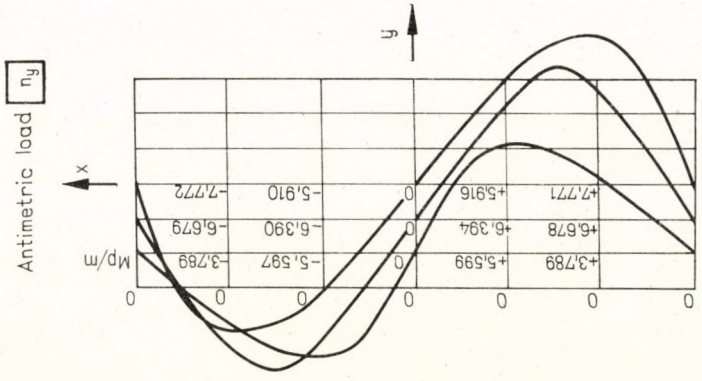


Fig. 20

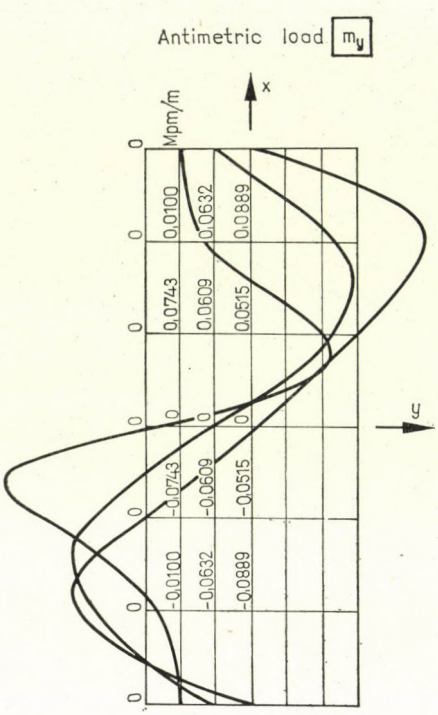


Fig. 23

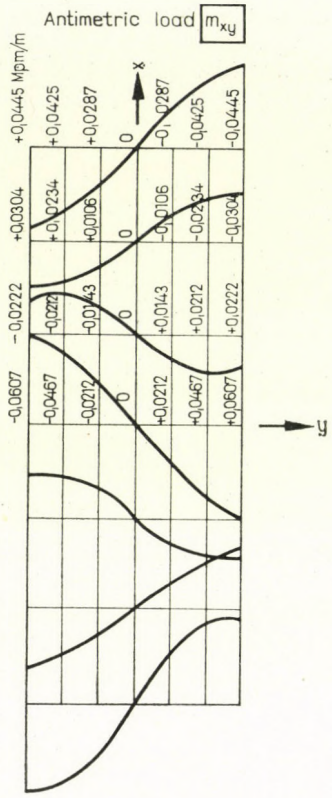


Fig. 24

In what follows, the finite difference method will be accepted as "exact solution" to which the analytical method will be referred. Results lead to the following conclusions, on advantages and disadvantages of each method:

The finite difference method is disadvantageous because of its high computer time demand (2 to 3 hours in our example).

The analytical method is less exact. Nevertheless, a solution involving $2 + 2$ terms yields a fair approximation, expecially for maximum stress values. Increasing the number of terms increases the accuracy but only slowly. Deviation maxima are found in n_y values of Tables A.2, A.6 and A.10, as well as in n_{xy} values of Tables A.15 and A.16, partly attributable to the fact that these spots are not maxima but here the curve ascends from 0 to the apex. Hence, the respective curve sections obtained by the two methods are likely to be shifted horizontally. On the other hand, here it appears what was said on the convergence of the analytical method, namely, that no exact values can be obtained even with $5 + 5$ terms, or at least not at all points. Various comparative calculations showed results to be considered really "exact" to

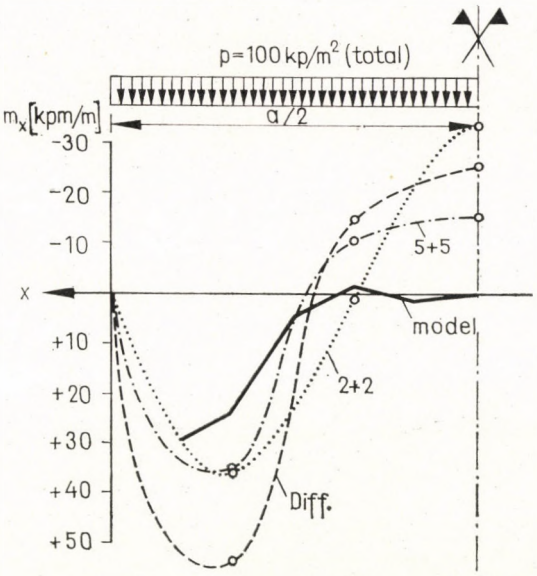

p=100 kp/m² (total)
a/2
mx [kpm/m]
-30
-20
-10
x
+10
+20
+30
+40
+50
5+5
model
2+2
Diff.

Fig. 25

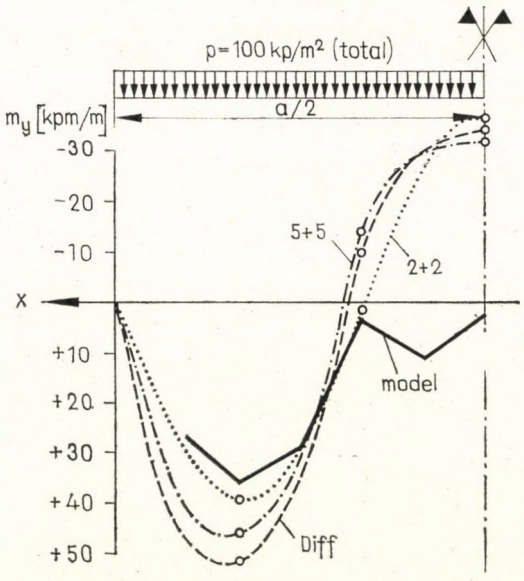

p=100 kp/m² (total)
a/2
my [kpm/m]
-30
-20
-10
x
+10
+20
+30
+40
+50
5+5
2+2
model
Diff

Fig. 26

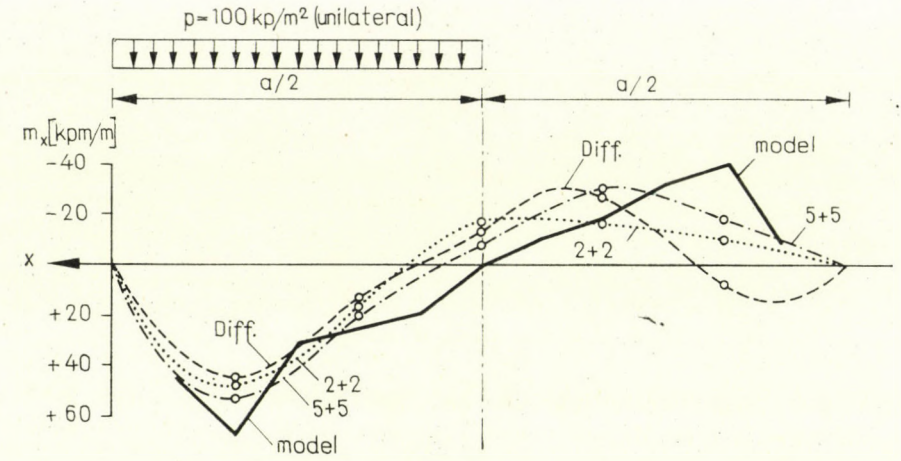


Fig. 27

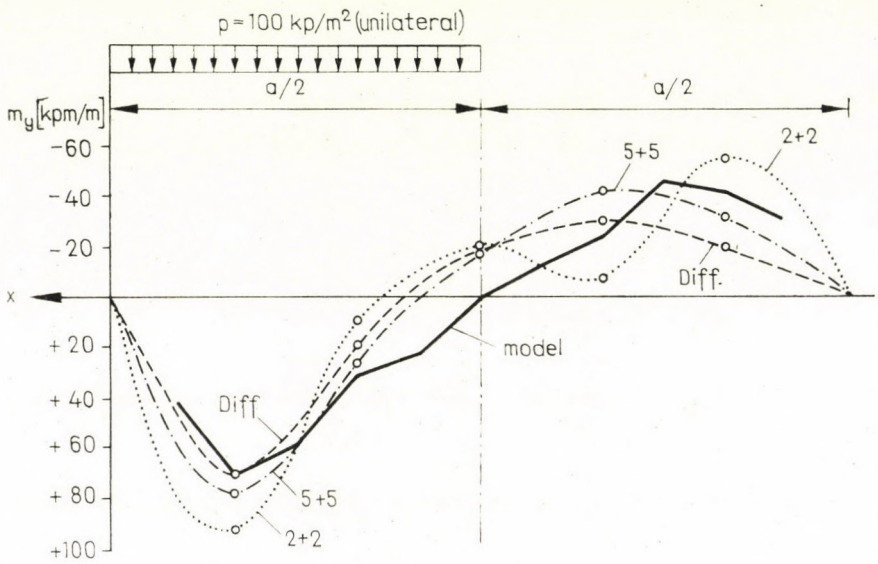


Fig. 28

require about 12 to 15 terms in each direction. The computer time demand in our example:

For 2 + 2 terms	3	to	4 min.
3 + 3 terms	6	to	8 min.
4 + 4 terms	30	to	40 min.
5 + 5 terms	90	to	125 min., i. e. nearly that of the finite difference method.

The main advantage of the analytical method was seen to consist in the slight computer time demand (with 2 + 2 terms) to yield fair approximations. Thus, it is suggested to be used for preliminary, approximative calculations.

Numerical values for internal forces obtained by different methods at points indicated in Fig. 8.

Legend:

2 + 2	Number of terms taken into consideration from the Fourier-
3 + 3	series of the analytical solution
etc.	
Diff.	Solution by the finite difference method
n_x, n_y, n_{xy}	in Mp/m
m_x, m_y, m_{xy}	in Mpm/m

Tables S.1 through S.16

Internal forces for 100 kp/sq. m symmetric total load

Table S.1

$x = 0,\ y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—7,115	—2,186	0	—0,0337	—0,0363	0
3 + 3	—6,000	—1,044	0	—0,0054	—0,0289	0
4 + 4	—6,216	—1,272	0	—0,0344	—0,0351	0
5 +5	—5,972	—1,249	0	—0,0151	—0,0312	0
Diff.	—6,563	—1,466	0	—0,0250	—0,0338	0

Table S.2

$x = a/6,\ y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—5,485	—0,814	0	+0,0011	+0,0016	0
5 + 5	—5,406	—1,001	0	—0,0101	—0,0132	0
Diff.	—5,647	—1,088	0	—0,0147	—0,0091	0

Table S.3

$x = a/3,\ y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—2,386	+0,775	0	+0,0357	+0,0391	0
3 + 3	—2,723	+0,571	0	+0,0736	+0,0554	0
4 + 4	—3,235	—0,012	0	+0,0576	+0,0504	0
5 + 5	—3,388	+0,219	0	+0,0346	+0,0459	0
Diff.	—2,370	+0,597	0	+0,0530	+0,0512	0

Table S.4

$x = a/2,\ y = 0$

All internal forces are zero

Table S.5

$x = 0,\ y = b/6$

	n_x	n	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—6,611	—1,924	0	—0,0276	—0,0138	0
5 + 5	—5,776	—1,255	0	—0,0134	—0,0218	0
Diff.	—6,119	—1,336	0	—0,0215	—0,0243	0

Table S.6

$x = a/6,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—4,978	—0,709	—1,090	+0,0011	+0,0075	+0,0189
5 + 5	—4,871	—0,967	—0,593	—0,0083	—0,0035	+0,0147
Diff.	—4,946	—0,920	—0,785	—0,0121	—0,0033	+0,0142

Table S.7

$x = a/3,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—2,012	+0,696	—1,051	+0,0294	+0,0268	—0,0007
5 + 5	—2,489	+0,526	—1,356	+0,0300	+0,0351	+0,0232
Diff.	—1,983	+0,532	—0,999	+0,0451	+0,0419	+0,0011

Table S.8

$x = a/2,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—0,732	0	0	—0,0202
5 + 5	0	0	—0,623	0	0	—0,0539
Diff.	0	0	—0,740	0	0	—0,0176

Table S.9

$x = 0,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—4,335	—1,146	0	—0,0141	+0,0123	0
5 + 5	—4,556	—0,991	0	—0,0092	+0,0048	0
Diff.	—4,462	—0,871	0	—0,0120	+0,0010	0

Table S.10

$x = a/6,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—3,137	—0,413	—2,061	+0,0007	+0,0114	+0,0238
5 + 5	—3,133	—0,690	—1,359	—0,0049	+0,0148	+0,0264
Diff.	—3,034	—0,497	—1,495	—0,0061	+0,0100	+0,0223

Table S.11

$x = a/3,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—1,098	+0,430	—1,878	+0,0153	+0,0074	—0,0028
5 + 5	—0,894	+0,780	—1,749	+0,0197	+0,0191	+0,0260
Diff.	—1,078	+0,328	—1,752	+0,0247	+0,0204	+0,0005

Table S.12

$x = a/2,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—1,193	0	0	—0,0287
5 + 5	0	0	—1,968	0	0	—0,0758
Diff.	0	0	—1,400	0	0	—0,0294

Table S.13

$x = 0,\ y = b/2$

All internal forces are zero

Table S.14

$x = a/6,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—2,480	0	0	+0,0224
5 + 5	0	0	—1,844	0	0	+0,0243
Diff.	0	0	—1,840	0	0	+0,0242

Table S.15

$x = a/3,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—2,202	0	0	—0,0042
5 + 5	0	0	—1,246	0	0	+0,0163
Diff.	0	0	—2,040	0	0	+0,0004

Table S.16

$x = a/2,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—1,334	0	0	—0,0296
3 + 3	0	0	—1,916	0	0	—0,0596
4 + 4	0	0	—2,887	0	0	—0,0676
5 + 5	0	0	—3,508	0	0	—0,0663
Diff.	0	0	—1,610	0	0	—0,0330

Tables A.1 through A.16

Internal forces for 100 *kp/sq.m antimetric load* (Fig. 2).

Table A.1

$x = 0,\ y = 0$

All internal forces are zero

Table A.2

$x = a/6,\ y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—3,920	+0,830	0	+0,0364	+0,0142	0
5 + 5	—4,010	—0,186	0	+0,0498	+0,0679	0
Diff.	—4,669	—5,910	0	+0,0394	+0,0515	0

Table A.3

$x = a/3,\ y = 0$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—10,429	—10,049	0	+0,0587	+0,1464	0
3 + 3	—10,307	—10,051	0	+0,0451	+0,1168	0
4 + 4	— 9,496	— 7,957	0	+0,0580	+0,1116	0
5 + 5	— 9,727	— 7,581	0	+0,0717	+0,1089	0
Diff.	—10,010	— 7,772	0	+0,0379	+0,0889	0

Table A.4

$x = a/2,\ y = 0$

All internal forces are zero

Table A.5

$x = 0,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	+0,723	0	0	—0,0021
5 + 5	0	0	+1,118	0	0	+0,0317
Diff.	0	0	+1,787	0	0	+0,0212

Table A.6

$x = a/6,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—5,134	+0,448	+2,915	+0,0468	+0,0750	+0,0366
5 + 5	—4,488	—0,269	+2,084	+0,0481	+0,0795	+0,0253
Diff.	—4,802	—6,390	+1,766	+0,0384	+0,0609	+0,0143

Table A.7

$x = a/3,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—9,082	—8,546	—0,362	+0,0359	+0,0702	+0,0010
5 + 5	—7,995	—6,419	+0,741	+0,0777	+0,0841	+0,0107
Diff.	—8,711	—6,679	—0,893	+0,0289	+0,0632	—0,0106

Table A.8

$x = a/2,\ y = b/6$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—5,829	0	0	—0,0731
5 + 5	0	0	—6,767	0	0	—0,1037
Diff.	0	0	—3,540	0	0	—0,0287

Table A.9

$x = 0,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	+2,754	0	0	+0,0675
5 + 5	0	0	+2,893	0	0	+0,0751
Diff.	0	0	+3,514	0	0	+0,0467

Table A.10

$x = a/6,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—4,973	—0,054	+4,817	+0,0447	+0,1158	+0,0296
5 + 5	—4,653	—0,358	+4,014	+0,0370	+0,1017	+0,0368
Diff.	—4,354	—5,597	+3,091	+0,0291	+0,0743	+0,0212

Table A.11

$x = a/3,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	—5,301	—4,752	—1,377	+0,0035	—0,0247	—0,0337
5 + 5	—5,830	—4,077	+0,249	+0,0695	+0,0156	—0,0520
Diff.	—5,333	—3,789	—1,757	+0,0106	+0,0100	—0,0234

Table A.12

$x = a/2,\ y = b/3$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	— 9,634	0	0	—0,0591
5 + 5	0	0	—11,419	0	0	—0,0448
Diff.	0	0	— 6,210	0	0	—0,0425

Table A.13

$x = 0,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	+4,047	0	0	+0,1189
5 + 5	0	0	+3,636	0	0	+0,1146
Diff.	0	0	+4,350	0	0	+0,0607

Table A.14

$x = a/6,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	+5,429	0	0	+0,0147
5 + 5	0	0	+4,690	0	0	+0,0309
Diff.	0	0	+3,610	0	0	+0,0222

Table A.15

$x = a/3,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—2,024	0	0	—0,0595
5 + 5	0	0	—0,619	0	0	—0,1456
Diff.	0	0	—2,17	0	0	—0,0304

Table A.16.

$x = a/2,\ y = b/2$

	n_x	n_y	n_{xy}	m_x	m_y	m_{xy}
2 + 2	0	0	—10,858	0	0	—0,0293
3 + 3	0	0	—11,782	0	0	+0,0280
4 + 4	0	0	—12,164	0	0	+0,0856
5 + 5	0	0	—11,778	0	0	+0,1147
Diff.	0	0	— 6,550	0	0	—0,0445

REFERENCES

1. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen (3. Aufl.) Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
2. HOLNAPY, D.: A Generalization of the Grid Point Method, of Engineering Importance.* *Mélyépítéstudományi Szemle*, **17** (1967), 273—274
3. KIS, O.: Calculation Methods I.* Felsőoktatási Jegyzetellátó, Budapest 1965
4. KOLLÁR, L.: Design and Erection of a Shell with a Surface of Fourth Order. In: Large-span Shells, (*Proc. IASS-Congr. Leningrad*, 1966). Tsinis, Moscow, 1968. Vol. I. p. 255.
Shell Structures Built during the Second Phase of Expansion of the Székesfehérvár Light Metal Works.* *Mélyépítéstudományi Szemle*, 1969, 541—545
5. SOARE, M.: Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis, Pergamon Press, London — Academy of Roumania, Bucharest 1967
6. SZMODITS, K.: Analysis of Shallow Shells of General Shape. *Proceedings of the IASS-Symposium on Shell Structures in Engineering Practice, Budapest* 1965. Építéstudományi Intézet, 1966 Vol. 2. 419—429.

* In Hungarian.

Berechnung gebogener symmetrisch und antimetrisch belasteter Schalenflächen vierter Ordnung mit geraden Rändern. Die Gleichungen von Schalen, die mit einer Oberfläche von höherer als zweiter Ordnung ausgebildet sind, haben veränderliche Koeffizienten. Die daraus enstehenden Schwierigkeiten können entweder mit Hilfe einer speziellen analitischen Methode oder der Differenzenrechnung bewältigt werden. Die Verfasser führen diese zwei Verfahren vor, und zwar erstens im allgemeinen Gebrauch und dann mit den konkreten Angaben einer schon ausgeführten Schalenkonstruktion, die auch mit einem Modellversuch kontrolliert wurde. Außer der numerischen Gegenüberstellung wurden die zwei Methoden auch theoretisch ausgewertet.

Расчет на симметричную и антиметричную нагрузки гнутых оболочек с прямым краем и с поверхностью четвертой степени *(Л. Коллар, З. Гардони* и *Д. Хольнапи)*. Уравнения оболочек, оформленных с поверхностью, имеющей степень выше второй, будут иметь переменные коэффициенты. Вытекающие из этого затруднения можно преодолеть с помощью специального аналитического метода, или же необходимо воспользоваться методом разностного вычисления. В работе детально демонстрируются эти два метода, а именно сначала в общих чертах, а затем при помощи конкретных данных одной возведенной оболочечной конструкции, проверенной также модельными испытаниями. Кроме числового сравнения дается также теоретическая оценка этих двух методов.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 137—148 (1970)

WARMVERFORMUNGSVERSUCHE MIT EINER HOMOGENEN MESSINGLEGIERUNG

J. GULYÁS und Frau Z. SZARKA

[Eingegangen am 12. November 1968]

In dieser Abhandlung werden die Vorgänge besprochen, die bei der Warmverformung einer homogenen Messinglegierung der Phase α beobachtet werden können, wenn die Verformungsgeschwinditkeit $\dot{\varepsilon} = 4{,}55\ \text{sec}^{-1}$ beträgt. Es werden die im Laufe der Versuche aufgenommenen Verfestigungskurven und die im Innern der Probestücke auftretenden Gleitlinien analysiert. Hieraus kann man darauf folgern, daß der Mechanismus einer Warmverformung mit gesteigerter Geschwindigkeit jenem einer Kaltverformung ähnlich ist. Die Wirkung der thermischen Erholung ist sowohl in der Gestaltung der Härtewerte wie auch in dem Gleitmechanismus klar erkennbar.

I. Einleitung

Nicht unbedeutend ist die Zahl der Forscher, die sich mit den Kaltverformungserscheinungen verschiedener technisch wichtiger Metalle (Verfestigung, Texturbildung) und mit den in den metallischen Stoffen während der Kaltverformung verlaufenden Vorgängen befassen. Demgegenüber finden wir Abhandlungen über Warmverformungsvorgänge nur in der Literatur der letzten zehn Jahre [1—7]. In diesen werden vor allem experimentelle Resultate samt Wertung von Warmverformungsvorgängen [1—5] bekanntgegeben, wobei die Aufstellung eines theoretisch wegweisenden Modells nur in den letzten Jahren versucht wurde [6, 7].

Aufgrund der angeführten Arbeiten wird heute allgemein als grundlegendes Prinzip der Satz akzeptiert, daß die Warmverformung sich von der Kaltverformung in auszeichnender Weise durch eine thermische Erholung unterscheiden läßt. Nun kann man die Auswirkung einer thermischen Erholung im Laufe der Warmverformung durch Steigerung der Formänderungsgeschwindigkeit bedeutend abschwächen; auf diese Weise erhält man auch bei einer Warmverformung eine Funktionskurve »Verformungsfestigkeit — relative Formänderung«, die der entsprechenden Kurve einer Kaltverformung ähnlich verläuft (Bild 1).

In diesem Bilde sind die Verfestigungskurven der Warmverformung bzw. der Kaltverformung eines polykrystallinischen Kupfers dargestellt [4, 5]. Die Verfestigungskurven der Warmverformung des Kupfers bezeichnen zwei Spannungswerte aufgenommen bei gleicher (500 °C) Formungstemperatur, bezogen

auf zwei in Größenordnung voneinander unterschiedliche Verformungsgeschwindigkeitswerte. Der Vergleich der aufgenommenen Kurven zeigt, daß der Charakter des Verlaufes der Verfestigungskurven der Warmverformung von der Formänderungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ abhängig ist. Die Kurve der Warmverformung bei höherer Verformungsgeschwindigkeit verläuft mit großer

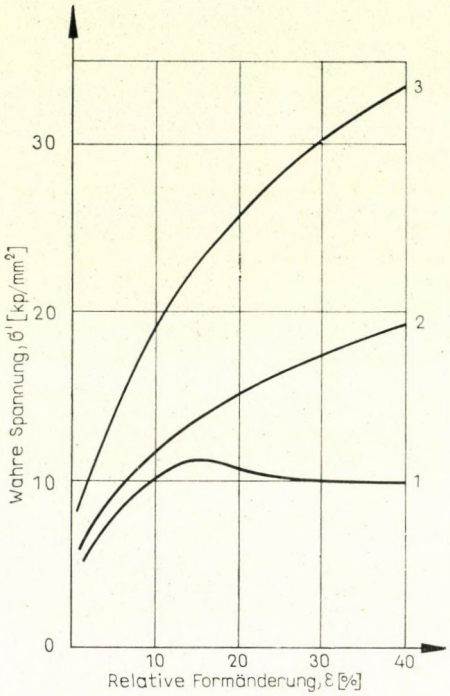


Bild 1. Verfestigungskurven der Warmverformung bzw. der Kaltverformung eines polykristallinischen Kupfers (Kurve *1:* 500 °C und $\dot{\varepsilon} = 0{,}01$ sec^{-1}; Kurve *2:* 500 °C und $\dot{\varepsilon} = 162$ sec^{-1}; Kurve *3:* 20 °C und $\varepsilon = 0{,}25$ sec^{-1})

Ähnlichkeit dem Verlaufe der Kurve der Kaltverformung, wobei die Kurve der Warmverformung bei minderer Geschwindigkeit eine solche Ähnlichkeit nicht zeigt. Es ist also die Annahme gerechtfertigt, daß bei der Warmverformung — abgesehen von der thermischen Erholung — der Formungsmechanismus eine Gesetzmäßigkeit aufweist, die jener der Kaltverformung höchst ähnlich ist. Wenn diese Annahme als bestehendes Prinzip sich nachweisen läßt, so wird bereits die Aufstellung eines einheitlichen, theoretisch begründeten Modells ermöglicht.

Bekannterweise [8—10] beruht der Verlauf der Kaltverformung der Metalle grundsätzlich auf einer Bewegung der Dislokationen in den Gleitebenen und deren verschiedentlichen Reaktionen. Nun ist die für den plastischen Zustand charakteristische Verformungsfestigkeit σ_0 vor allem von den physi-

kalischen Eigenheiten und der Kennzahl der Elastizität abhängig. Die Verfestigung des Metalls, d. h. die Steigerung der Festigkeit in Abhängigkeit von der Formänderung wird eben durch Aufstauungen der Dislokationen bzw. durch das verschiedene Maß der Auflösung der Aufstauungen hervorgerufen. Die sogenannten aktiven Dislokationen, durch die die Formänderung hervorgerufen wird, bewegen sich in den Gleitebenen. In den mikroskopischen Strukturbildern sieht man die Gleitlinien als Spurlinien dieser Gleitebenen. Diese Gleitlinien verdanken ihre Sichtbarkeit in der mikroskopischen Schnittebene dem Umstand, daß entlang dieser Linien die Spannung von jener der Umgebung abweicht, wodurch hier eine aktivere Reaktion mit dem Ätzmittel erfolgt. Das Spannungsfeld (der Spannungsraum) wird voraussetzungsgemäß von in den Ebenen sich bewegenden bzw. blockierten Dislokationsgruppen gebildet. Die Gleitlinien, für die kaum ein Spannungsfeld (Spannungsraum) existiert — konventionell *leichte Gleitlinien* (easy glide) genannt — sind für die Anfangsperiode der Kaltverformung charakteristisch [10]. Diese Gleitlinien liegen dicht nebeneinander, sie können also mit einem üblichen Ätzverfahren nur unter Zuhilfenahme einer besonders starken Vergrößerung sichtbar gemacht werden. Diese Art von Gleitlinien bilden eine höchst charakteristische Begleiterscheinung des Kaltverformungsmechanismus.

Mit dieser Abhandlung haben wir uns zum Ziele gesetzt, zwischen den im Laufe der Warmverformung der Metalle auftretenden effektiven Spannungen einerseits, und den für die Kaltverformung charakteristischen Gleitlinien andererseits einen gewissen Zusammenhang ausfindig zu machen, um dadurch zu einem besseren Verständnis der Warmverformungsvorgänge zu gelangen.

II. Beschreibung der Versuche

Wir haben zweckmäßigerweise zum Gegenstand unserer Versuche eine Legierung gewählt, in welcher die Gleitlinien ziemlich weit voneinander verlaufen, um den Abstand leicht abmessen zu können. Diesem Zwecke entsprach am besten die Kupfer-Zink-Legierung Marke *Sr 85* (nach der ungarischen Normbezeichnung); nämlich, der Feststellung anderer Autoren [9] gemäß, wird durch das Zink die Stapelfehlerenergie stark herabgesetzt, d. h., man erhält Gleitlamellen von größerer Dicke.

Ferner bildet diese Legierungsmarke eine homogene, feste Einphasenlösung, d. h., sie zeichnet sich — anderen Legierungen gegenüber — dadurch aus, daß sie im großen und ganzen Eigenschaften aufweist, welche denen anderer technischer Reinmetalle nahekommen. Wir haben in unseren Versuchen eine Verformungsgeschwindigkeit gewählt, mittels welcher es gelang, eine genügende Verfestigung und zugleich eine entsprechende thermische Erholung zu erreichen, wodurch die gleichzeitige Auswirkung beider Prozesse analysiert werden konnte. Auf Grund von Erfahrungen, die sich im Laufe bereits früher erfolgter

Experimente mit Kupfer ergaben [5], war es ratsam, für unsere neueren Versuche eine Formänderungsgeschwindigkeit zu $\dot{\varepsilon} = 4{,}55\ \text{sec}^{-1}$ als die vorteilhafteste einzustellen. Die angewendete Temperatur für die Probestücke der ausgeführten Kalt- und Warmverformungsversuche war: 20 °C bzw. 600 °C, 700 °C und 800 °C, wobei ein Plastometer gleichzeitig zur Aufrechterhaltung einer konstanten Formänderungsgeschwindigkeit diente [5].

Wir haben zylindrische Probestücke mit den Dimensionen 15×30 mm verwendet. Wir haben dafür gesorgt, daß durch eine streng definierte Technologie sowohl die mechanischen wie auch die strukturellen Charakteristiken der Probestücke möglichst dieselben seien. Vor der Verformung war die Korngröße der Struktur 0,07—0,15 mm. Als Verformung galt ein Stauchen verschiedenen Grades ($\varepsilon = 10\%$, 20%, 30% und 40%). Um den Stauchungsendzustand unverändert festzuhalten, wurde jedes Probestück in dem Moment des ausgeführten Prozesses mit Hilfe einer Feder mit großer Geschwindigkeit in eine Salzwasserlösung hineingeschossen. Auf diese Weise konnte erreicht werden, daß die Zeitspanne nach beendigtem Stauchen bis zur Abkühlung auf eine Temperatur von 180 °C sogar bei einer Stücktemperatur von 800 °C nicht länger war als 1,2 sec. Ein Registriermeßinstrument zeichnete die Kraftkurve als Funktion des Verformungsweges auf. Für Zwecke einer mikroskopischen Untersuchung haben wir axiale Schnittflächen feingeschliffen.

III. Bewertung der Resultate

Auf Grund der aufgenommenen *Kraft-Weg-Diagramme* haben wir für jeden einzelnen Fall der verschiedenen Temperaturen die Kurven $\sigma' - \varepsilon$ konstruiert (Bild 2). Mit Hilfe einer lichtmikroskopischen Untersuchung der Endstruktur der Probestücke haben wir gewisse Rekristallisierungserscheinungen beobachtet. Im Bild 2 haben wir diese beobachteten Punkte an den einzelnen Kurven mittels einer schraffiert gestrichelten Linie miteinander verbunden. Aus diesem Diagramm kann festgestellt werden, daß bei den jeweils angewendeten Formänderungsgeschwindigkeiten und bei den gewählten Temperaturen vor Beginn der Rekristallisierung das Maß der erfolgten Verfestigung genau meßbar war. Wenn wir nun die Verfestigungswerte, welche die effektiven Spannungskurven bei den einzelnen Temperaturen kennzeichnen, miteinander vergleichen wollen, so ist es unerläßlich, aus dem beobachteten Parameter die temperaturbedingte Änderung der Elastizitätskonstante auszuschalten. Zu diesem Behufe soll der Verfestigungskoeffizient $\Theta = \partial\sigma'/d\varepsilon$ durch den zur betreffenden Temperatur gehörigen Elastizitätsmodul (E) dividiert werden. Der so erhaltene Wert der relativen Verhärtung ist zur Kennzeichnung des Verformungsvorganges bei der jeweils angewendeten Temperatur geeignet (Bild 3). Hieraus sehen wir, daß die Werte der relativen Verfestigung im Gebiete der geringeren Formveränderung konvergieren. Diese Feststellung

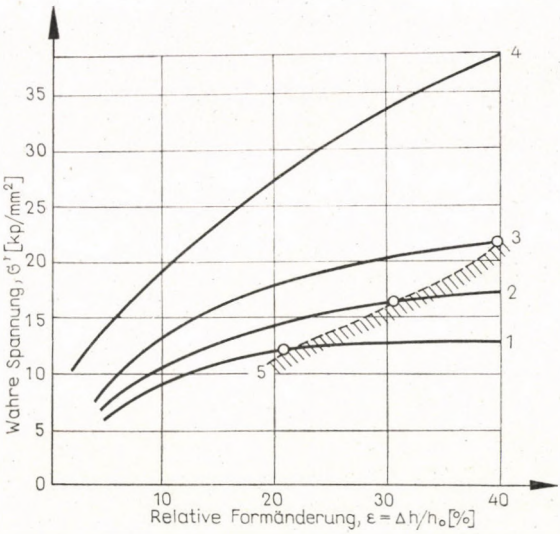


Bild 2. $\sigma - \varepsilon$ Kurven für eine Legierung Marke *Sr 85* (ungarische Norm) und $\dot{\varepsilon} = 445\%\ \text{sec}^{-1}$ (Kurve *1:* 800 °C, Kurve *2:* 700 °C, Kurve *3:* 600 °C und Kurve *4:* 20 °C)

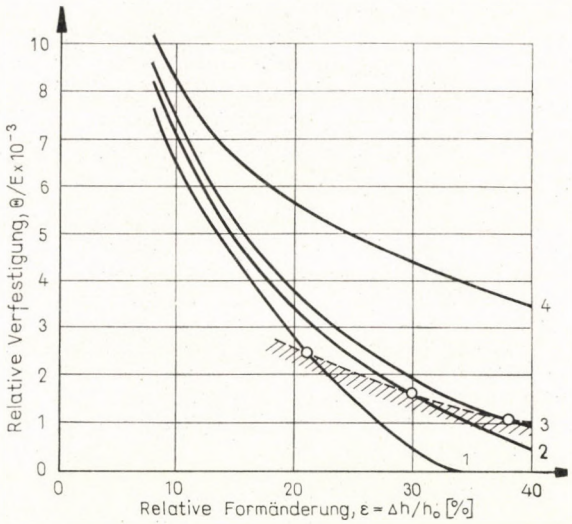


Bild 3. Relative Verhärtungskurven für eine Legierung Marke *Sr 85* (ungarische Norm) und $\dot{\varepsilon} = 445\%\ \text{sec}^{-1}$ (Kurve *1:* 800 °C, Kurve *2:* 700 °C, Kurve *3:* 600 °C, Kurve *4:* 20 °C, *schraffiert gestrichelte* Kurve: Anfang der Rekristallisierung)

stimmt mit den Versuchsergebnissen, welche von SEEGER für einen Monokristall gefunden wurden, überein [10].

Mittels elektronenmikroskopischer Aufnahmen der Struktur der verformten Proben gelang es uns, in den Verformungsmechanismus einen tieferen

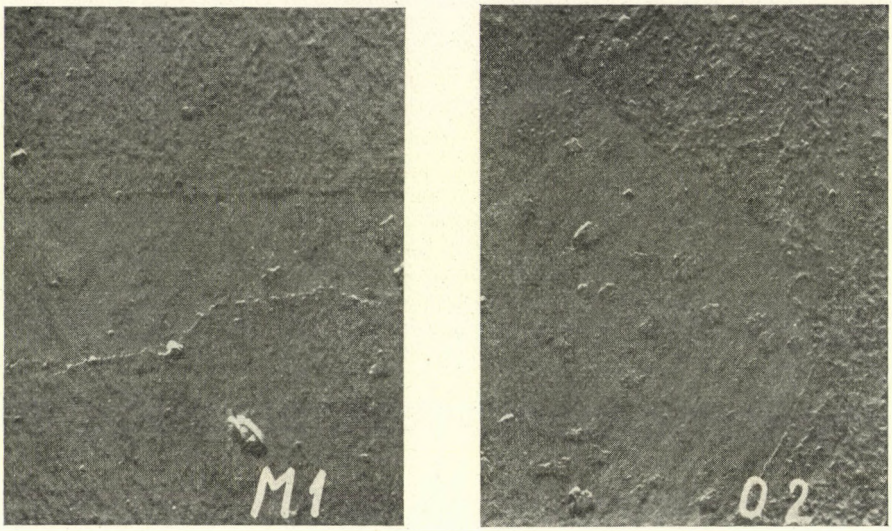


Bild 4. Probestücke vor der Verformung bei der Erhitzungstemperatur 600 °C (*a*) und 800 °C (*b*)

Bild 5. Gestauchte Probestücke, bei 600 °C und $\varepsilon = 40\%$

Einblick zu gewinnen. Die Aufnahmen wurden als zweistufige Abdrücke einer 3500fachen bzw. 8000fachen Vergrößerung gefertigt. Die Bilder von Probestücken vor der Verformung zeigten auch bei abweichenden Temperaturen eine volle Übereinstimmung, ganz unabhängig von der Erhitzungstemperatur (Bild 4).

Demgegenüber zeigen die Bilder der gestauchten Stücke gewissermaßen verschiedene Strukturformen. Es zeigen sich in den einzelnen Kristalliten

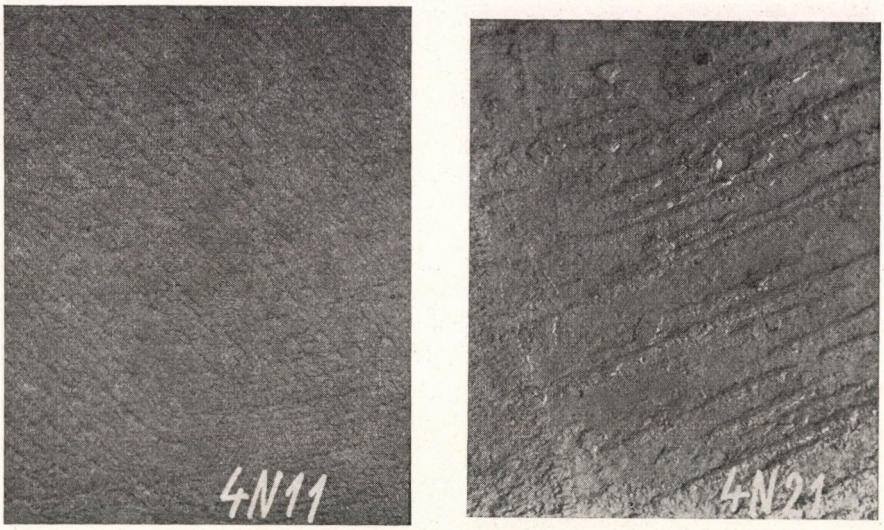


Bild 6. Gestauchte Probestücke, bei 700 °C und $\varepsilon = 10\%$ (*a*) bzw. $\varepsilon = 40\%$ (*b*)

Bild 7. Gestauchte Probestücke, bei 800 °C und $\varepsilon = 10\%$

dicht verlaufende Gleitlinien, die bis zur Grenze des Kristallits reichen (Bild 5). Bei steigender Verformungstemperatur läßt sich ein größer werdender Abstand beobachten (Bild 6). Bild 6a läßt die Spuren von Querverschiebungen erblikken. An den Schliffbildern der Probestücke, die auf 800 °C erhitzt worden sind, gibt es noch immer erkennbare Gleitlinien, jedoch in größeren Abständen, also in einer gelichteten Verteilung (Bild 7).

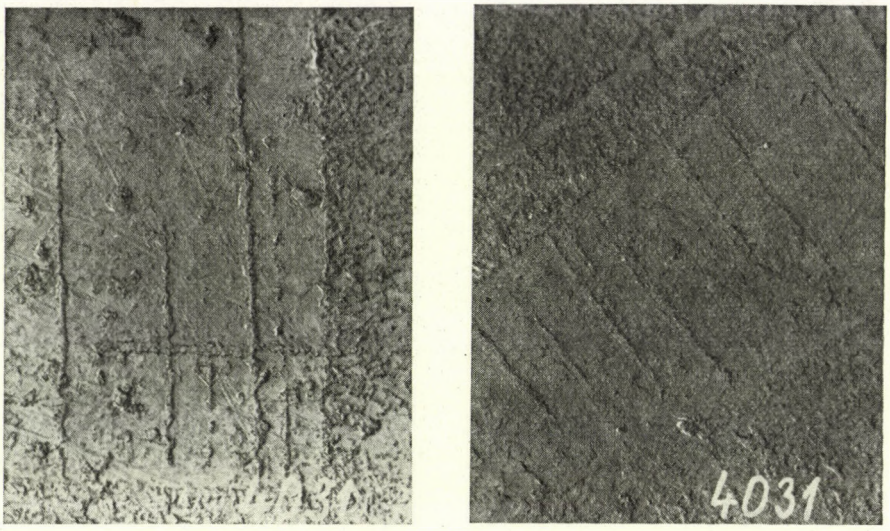


Bild 8. Gestauchte Probestücke, bei 800 °C und $\varepsilon = 30\%$ mit deutlich erkennbaren Gleitlinien

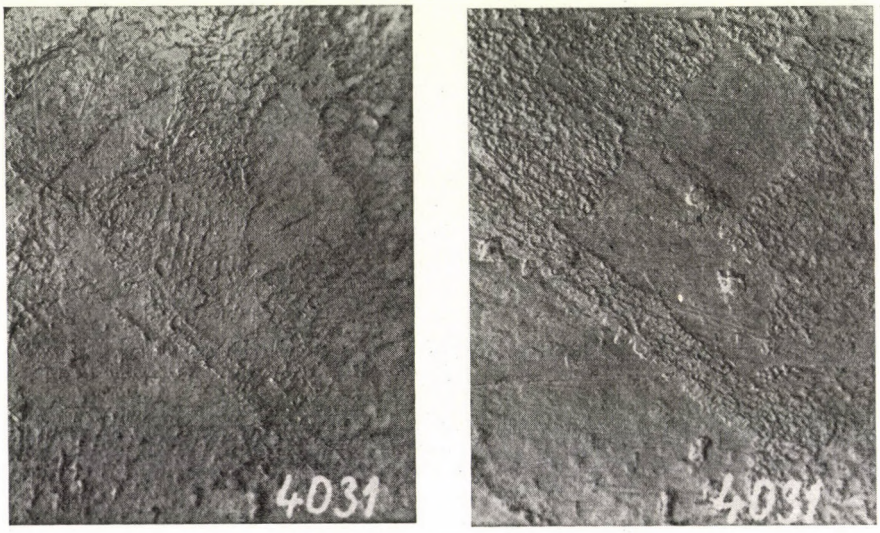


Bild 9. Gestauchte Probestücke, bei 800 °C und $\varepsilon = 30\%$ mit winzigen, anders orientierten Kristallteichen

An den auf 800 °C erhitzten Probestücken fanden wir bei einem Verformungsgrad zu 30% noch Kristallite, in denen sich die Gleitlinien deutlich erkennen lassen (Bild 8a und 8b). Zugleich aber konnte man an denselben Proben (bei demselben Verformungsgrad) Kristallite beobachten, welche einige winzige, anders orientierte Kristallteilchen umfaßten (Bild 9a und 9b). Also

war die Durchschnittsgröße der Grundkristalle $75 \div 150\ \mu$, und jene der feinen Körner $1{,}5 \div 4{,}5\ \mu$.

Auf Grund der unzähligen elektronenmikroskopischen Aufnahmen konnten wir den Abstand zwischen den Gleitebenen statistisch auswerten. Wenn nur wenige Messungen zur Verfügung stehen, läßt sich kein verläßlicher Durchschnittswert der Lamellendicke ermitteln, da der Winkel zwischen der Gleit-

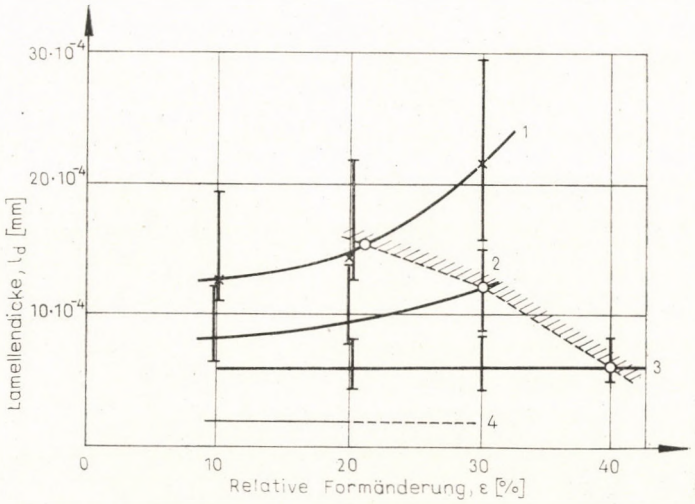


Bild 10. Dicke der Gleitlamelle als Funktion der Verformungstemperatur und der Formänderung (Kurve *1:* 800 °C, Kurve *2:* 700 °C, Kurve *3:* 600 °C, *schraffiert gestrichelte* Kurve: Anfang der Rekristallisierung)

ebene und der mikroskopischen Bildebene zwischen weiten Grenzen veränderlich sein kann. Wenn man aber zumindest über 30 bis 40 Meßresultate verfügt, so kann man gemäß SWAN und NUTTING [11] aus dem Mittelwert des Gleitlinienabstandes ($\overline{X}_m$) die Lammelendicke (l_d) in einfacher Weise errechnen, nämlich:

$$l_d = 0{,}707 \cdot \overline{X}_m .$$

So haben wir aus den Meßergebnissen die Änderungen der Dicke der Gleitlamellen als Funktion der Verformungstemperatur und der Formänderung in Kurven dargestellt (Bild 10).

IV. Schlußfolgerungen

Die aus den Experimenten bzw. den Ergebnissen gezogenen Folgerungen sind geeignet, einige Zusammenhänge zwischen gewissen Erscheinungen während der Warmverformung näher zu beleuchten. Der Umstand, daß Gleitlamellen sich auch bei einer Warmformung bilden lassen, zeugt dafür,

daß die Mechanismen der Warm- bzw. der Kaltverformung einander ähnlich sind. Nun aber kann man aus der beobachteten Steigerung der Lamellendicke darauf folgern, daß im Laufe einer Warmverformung die Auflösung der Dislokationsgruppen, durch welche das Spannungsfeld (der Spannungsraum) der Gleitebenen hervorgerufen werden, derart verläuft, daß sie mit der Temperatur und der Formänderung proportional erachtet werden kann.

Die freigewordenen Dislokationen bewegen sich voraussetzungsweise den neu entstehenden Gleitebenen entlang. In diesen neuen Gleitebenen sind die Hindernisse spärlich, also gibt es hier kein entsprechendes Spannungsfeld. Aus diesem Grunde kann man diese letzteren Gleitebenen mittels der gegenwärtig üblichen Ätzmethode und der derzeit normalen Vergrößerung nicht sichtbar machen.

Die Auflösung der in den Gleitebenen angehäuften Dislokationen zeugt deutlich für eine, die Verformungsverfestigung auflösende thermische Erholung. Bei einer Kaltverformung aber ist ein solcher Vorgang nicht vorhanden, also sind Gleitlinien, angefangen von einer relativen Formänderung zu 20%, nicht mehr zu erkennen, da die in hohem Maße aufgetürmten Dislokationsgruppen aneinandergeraten und ein dichtes Gefüge bilden (Versetzungsknäueln) [8]. Dagegen ist bei einer Warmverformung die Aufstauung der Dislokationen infolge der thermischen Diffusion bedeutend geringer, also erscheinen die Gleitlinien auch bei einer höheren relativen Formänderung.

Das Ausmaß der thermischen Erholung läßt sich auch auf Grund der Veränderung des relativen Verfestigungskoeffizienten Θ/E bestimmen. Wenn wir voraussetzen, daß die im kalten Zustand meßbare relative Verfestigung von keiner thermischen Erholung beeinflußt wird — da die Diffusion in der Umgebung von 20 °C nur unbedeutend ist — so ist es erlaubt, die Differenz zwischen den beiden Verfestigungskoeffizienten, nämlich dem der Kaltverformung und jenem der Warmverformung als Maß der thermischen Erholung zu betrachten:

$$\varkappa_t = \left(\frac{\Theta}{E}\right)_{20\,\mathrm{C}^\circ} - \left(\frac{\Theta}{E}\right)_{t\,\mathrm{C}^\circ}.$$

Im Bilde 11 erkennen wir das Maß der thermischen Erholung als Funktion der Formänderung und der Verformungstemperatur dargestellt. Aus einem Vergleich der Bilder 10 und 11 ist der enge Zusammenhang zwischen dem Auflösungsvorgang der mit Hindernissen beladenen Gleitebenen und der thermischen Erholung deutlich erkennbar.

Diese Erkenntnis läßt darauf schließen, daß der Dislokationsmechanismus, welcher bei der Warmverformung die Verfestigung hervorruft, von dem Mechanismus der Kaltverformung nicht abweicht.

Die bei der Warmverformung auftretende Verringerung der Verfestigung wird nun von irgendeinem, die aufgetürmten Dislokationen auflösenden Mecha-

nismus hervorgerufen. Heute kann es als höchst wahrscheinlich angenommen werden, daß man diesen Mechanismus in den Reaktionen zwischen den leeren Gitterstellen und den Dislokationen erblicken kann, wobei die Geschwindigkeit des Vorganges eine Funktion des thermischen Diffusionsprozesses der Dislokationen bzw. der leeren Gitterstellen ist [6]. Die Größe des thermischen Erholungskoeffizienten $\varkappa_t$ hängt also von einem Diffusionsprozeß ab, woraus nun

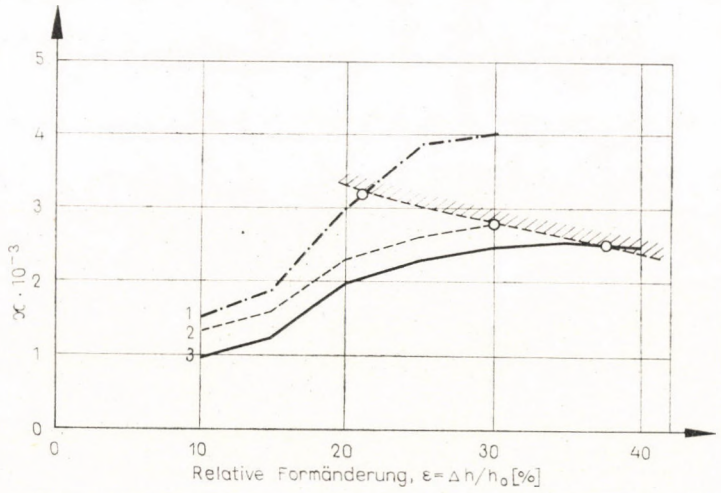


Bild 11. Das Maß der thermischen Neugestaltung als Funktion der Formänderung und der Verformungstemperatur (Kurve *1:* 800 °C, Kurve *2:* 700 °C, *schraffiert gestrichelte* Kurve: Anfang der Rekristallisierung)

auch die beträchtliche Abhängigkeit der Verformungsfestigkeit von der Geschwindigkeit während der Warmverformung sich erklären läßt [1, 3, 5].

Gestützt auf obige Ausführungen, kann man ruhig gelten lassen, daß die relative Verfestigung bei der Kaltverformung als eine Komponente der Verfestigung betrachtet zugleich als Ausgangsbasis zur Beschreibung des Modells einer Warmverformung der Metalle angewendet werden soll. Als eine andere Komponente der Warmverformung kann die durch die Erholung hervorgerufene Verringerung der Festigkeit gelten, die zugleich von der Formungstemperatur und der Verformungsgeschwindigkeit abhängt.

SCHRIFTTUM

1. Alder, I. F.—Phillips, V. A.: The Effect of Strain Rate and Temperature on the Resistance of Aluminium, Copper and Steel to Compression. *Journal of the Institute of Metals* (1954), XI.
2. Zlotin, L. B.—Berman, Sz. I.: Protnostnie charakteristiki medji pri dinamitscheskich ispitanijach w oblasti sarekristallisazionnich temperatur. *Zwetnie Metalli* (1961), XI.
3. Hardwich, D.—Tegart, Mc. G.—Rossard, C.—Blain, P.: Observation sur la déformation de l'aluminium et du cuivre par torsion aux temperatures élévées. Institut des Recherches de la Sidérurgie, Saint-Germain en-Laye 1961.

4. BELLA, E.: Warmstauchversuche mit Kupfer bei kleiner Formänderungsgeschwindigkeit. *Acta Techn. Hung.* **32** (1961), 221.
5. BELLA, E.—GULYÁS, J.—JUHÁSZ, S.: Der Vorgang der Warmverformung des Kupfers bei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten. *Acta Techn. Hung.* **57** (1967), 397—414.
6. STÜWE, H. P.—DRUBE, B.: Metallkundliche Grundlagen zur Warmverformung. *Zeitschrift für Metallkunde* **58** (1967), 499—504.
7. DRUBE, B.—STÜWE, H. P.: Das Gefüge kubisch flächenzentrierter Metalle bei der Warmverformung. *Zeitschrift für Metallkunde* **58** (1967), 799—804.
8. MACHERAUCH, E.: Die plastische Verformung von Vielkristallen. *Zeitschrift für Metallkunde* **55** (1964), 60—83.
9. KÖSTER, W.—SPEIDEL, M. O.: Der Einfluß der Temperatur und der Korngröße auf die ausgeprägte Streckgrenze von Kupferlegierungen. *Zeitschrift für Metallkunde* **56** (1965), IX.
10. SEEGER, A.: The Mechanism of Glide and Work-Hardening in Face-Centred Cubic and Hexagonal Close-Packed Metals. John Wiley, New York 1957, 243.
11. SWANN, L. R.—NUTTING, J.: *Journal of the Institute of Metals* **90** (1961—1962), 133.

Warmforming Experiments with a Homogeneous Brass Alloy. In this paper, the warmforming process carried out on a homogeneous brass alloy is dealt with, when the applied speed of operation $\bar{\varepsilon}$ amounted to 4,55 sec^{-1}. The examination refers to plotting the curves that show the development of getting harder and to analysing the slide lines that present themselves within the material of the test pieces. Finally, the authors explain how far the mechanism of warmprocessing at a higher speed of operation can be assumed to be like the mechanism of coldforming. Effects exerted by the thermal new-development are clearly observable on the curves of getting harder and of the sliding process.

Исследование явлений горячей деформации гомогенного латунного сплава *(Й. Гуяш и З. Сарка).* В данной работе рассматриваются явления горячей деформации гомогенного латунного сплава фазы а при скорости изменения формы $\bar{\varepsilon} = 4{,}55$ *сек*$^{-1}$. На основе анализа кривых твердения, снятых в процессе опытов, и линий сдвига, наблюдаемых внутри образцов, можно сделать вывод, что горячая деформация, имеющая большую скорость, происходит с аналогичным механизмом, как и холодная деформация. Но как по величинам твердения, так и по механизму сдвига можно хорошо наблюдать действие термической регенерации.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 149—170 (1970)

ÜBER VERZAHNTE RÄDER, DIE EINE VERÄNDERLICHE BEWEGUNGS-ÜBERTRAGUNG ZWISCHEN SICH KREUZENDEN ACHSEN VERWIRKLICHEN UND DURCH EIN GERADSCHNEIDIGES WERKZEUG ABWÄLZBAR SIND

I. LÉVAI*
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 24. Januar 1969]

Im Aufsatz werden die Gesetzmäßigkeiten des Eingriffes und der Fertigung der unrunden Zahnräder untersucht, die bei sich kreuzenden Achsen eine Bewegungsübertragung mit einer gegebenen Übersetzungsfunktion verwirklichen. Das Thema wird kinematisch behandelt. Der Begriff des Fertigungsaxoides wird eingeführt und die Gesetzmäßigkeiten des Eingriffes werden auch auf die Fertigungsaxoide ausgedehnt. Der Aufsatz befaßt sich nur mit Fällen, wo die Fertigungsaxoide abwickelbare Regelflächen bilden. Die Differentialgleichung der Richtlinie eines Fertigungsaxoides wird aufgeschrieben. An einem Beispiel wird gezeigt, daß die Folge der Analyse der Differentialgleichung eine Vereinfachung der Fertigung sein kann.

I. Eingriff von zwei starren Körpern

Die Relativbewegung von zwei starren Körpern besteht im allgemeinsten aus einer Verdrehung um eine Achse und der Verschiebung in Richtung dieser Achse. Diese aufeinanderfolgenden Augenblickschraubenachsen bilden in einem ortsfesten Koordinatensystem, aus dem wir die Bewegung der starren Körper betrachten, eine Regelfläche. Diese Fläche wird *ortsfestes Axoid* genannt.

An jeden der sich bewegenden starren Körper können wir je ein Koordinatensystem anschließen. Wenn wir die Lagen der aufeinanderfolgenden Momentanschraubachsen in einem sich den bewegenden starren Körpern anschließenden Koordinatensystem beschreiben, bekommen wir auch dann Regelflächen. Die so erhaltenen Regelflächen nennt man *bewegende Axoide*. Die Axoide sind im allgemeinen windschiefe, nicht abwickelbare Regelflächen. Im Falle von Planbewegungen bilden die Axoide einen Normalschnitt, der Zylindererzeuger gibt ein *Zentroid* oder eine *Polkurve*.

Bei den Zahnrädern nennt man die durch das Drehen der zwei Räder ausgestalteten bewegenden Axoide *Antriebsaxoide*.

Bei gegebenen, sich kreuzenden Achsen *1* und *2* (Kreuzungswinkel: $\Sigma \leq \pi/2$; der minimale Achsenabstand: a) und bei einer gegebenen Über-

* Prof. Dr. LÉVAI I.; Nehézipari Műszaki Egyetem Szállítóberendezések Tanszék, *Miskolc-Egyetemváros* (Ungarn).

setzungsfunktion $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = f(\varphi_1)$ kann man die Momentanschraubenachse d der Relativbewegung aufgrund des Bildes 1 folgenderweise bestimmen:

Zwischen den die Lage der Schraubenachse d ergebenden vier Parametern $(a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2)$ bestehen folgende Beziehungen:

$$a_1 + a_2 = a$$

und (1)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \Sigma,$$

sowie

$$\omega_1 \sin \sigma_1 = \omega_2 \sin \sigma_2$$

und (2)

$$a_1 \omega_1 \cos \sigma_1 = a_2 \omega_2 \cos \sigma_2 .$$

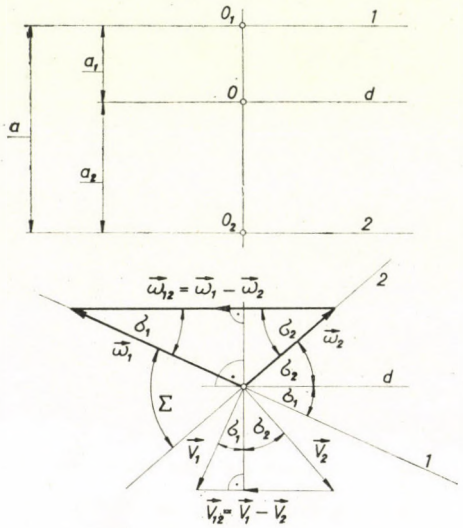


Bild 1

Aufgrund von (2)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_1}$$

und (3)

$$a_1 \cot \sigma_1 = a_2 \cot \sigma_2 .$$

Was den Parameter der Schraubung betrifft:

$$p = \frac{v_{12}}{\omega_{12}},$$

wo

$$v_{12} = a_1 \omega_1 \sin \sigma_1 + a_2 \omega_2 \sin \sigma_2$$

und

$$\omega_{12} = \omega_1 \cos \sigma_1 + \omega_2 \cos \sigma_2 .$$

Nach Einsetzungen und Umformungen ergibt sich:

$$p = \frac{a_1 \omega_1 \sin \sigma_1 + a_2 \omega_2 \sin \sigma_2}{\omega_1 \cos \sigma_1 + \omega_2 \cos \sigma_2} = \frac{a_1 + a_2}{\cot \sigma_1 + \cot \sigma_2} .$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$p = a_1 \tan \sigma_2 = a_2 \tan \sigma_1 . \tag{4}$$

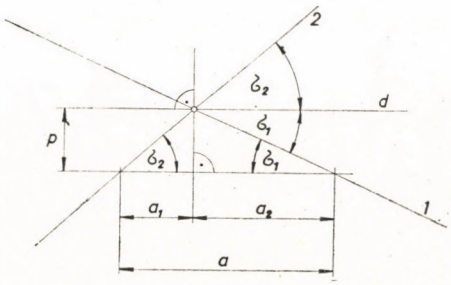


Bild 2

Den Parameter der Schraubung kann man auch aufgrund des Bildes 2 konstruieren. Anhand von (1) und (3) wird noch geschrieben:

$$\tan \sigma_1 = \frac{\sin \Sigma}{i_{12} + \cos \Sigma} \tag{5}$$

und

$$\tan \sigma_2 = \frac{\sin \Sigma}{1/i_{12} + \cos \Sigma} ,$$

sowie

$$a_1 = \frac{1 + i_{12} \cos \Sigma}{1 + 2\, i_{12} \cos \Sigma + i_{12}^2}\, a . \tag{6}$$

Durch diese Beziehungen werden die Antriebsaxoide aus den Ausgangsdaten bestimmt.

Im Falle von Zahnrädern können die *Fertigungsaxoide* (die aus den während der Fertigung stattgefundenen kinematischen Verbindungen sich ergebenden Räderaxoide) von den Antriebsaxoiden der Räder abweichen. Während die Antriebsaxoide im allgemeinen windschiefe Regeflächen sind (z. B. ein einschaliges Hyperboloid), können die Fertigungsaxoide der Räder auch abwickelbare Regelflächen (z. B. Zylinder, Kegel usw.) sein.

Unser Aufsatz befaßt sich mit jenem Falle, bei welchem die Verzahnung der unrunden Räder mit einem geradschneidigen Werkzeug durchgeführt

wird. Die Fertigungsaxoide sind diesmal — weil das Werkzeugaxoid eben ist — abwickelbare Regelflächen. Wir führen unsere Berechnungen für jenen Fall durch, bei welchem die Fertigungsaxoide der Räder auf der Normaltransversale der sich kreuzenden Achsen eingreifen.

II. Die Eingriffsgesetze für Zahnräder auf Grund des kinematischen Prinzips

Beim Eingriff von zwei Oberflächen müssen die Geschwindigkeitsvektoren der Relativbewegung in den Berührungspunkten der Oberflächen liegen. In den Berührungspunkten fallen die Flächennormalen in die gleiche Gerade, die zur relativen Geschwindigkeit in diesem Punkte senkrecht ist:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 . \tag{7}$$

Wenn wir ausdrücken, daß dieser Zusammenhang in einem bestimmten C Punkte besteht, dann ist

$$\mathbf{n}_C \, \mathbf{v}_C = 0 .$$

Im Geschwindigkeitskraftfeld der Vektorschraube $\mathbf{v}_{12}$, $\boldsymbol{\omega}_{12}$ benennen wir die auf den zum Punkte C gehörenden Geschwindigkeitsvektor senkrechte Ebene als die zum Polpunkte C gehörende *Polarebene* und bezeichnen sie mit P. Die Summe der in der Polarebene im Polpunkt C durchgehenden Geraden, d. h. Strahlenbüschel, benennen wir als *Nullsystem*. Die Elemente des Nullsystems bilden die *Nullgeraden*.

Das System $\mathbf{v}_{12}$, $\boldsymbol{\omega}_{12}$ kann man mit gleichwertigen Systemen substituieren, z. B. mit dem Vektorenpaar von Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_1'$ und $\boldsymbol{\omega}_2'$ (Bild 3). Nimmt man die Wirkungslinie (p_1') eines von diesem Winkelgeschwindigkeitsvektorpaar durch den Polpunkt C auf (sie darf aber keine Nullgerade sein!), so liegt die Wirkungslinie p_1'' des anderen der Winkelgeschwindigkeitspaare in der zu dem Polarpunkt C gehörenden Polarebene P. Die Geraden p_1' und p_1'' nennen wir »*konjugierte Polaren*«.

Die Eigenschaften des Schraubenraumes können wir zur Prüfung der Eingriffsgesetzmäßigkeiten der Zahnräder anwenden. Gemäß (7) ergibt die relative Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen zur Zahnoberfläche: Null. Dies bedeutet, daß ein Punkt einer gegebenen Oberfläche nur dann eingreifen kann, wenn die zu diesem Punkt gehörende Oberflächennormale als Nullgerade im Geschwindigkeitskraftfeld der relativen Schraubung des Getriebes vorkommt.

Im Geschwindigkeitskraftfeld werden die konjugierten Polaren dadurch charakterisiert, daß jede von ihren gemeinsamen Transversalen als Nullgerade zu betrachten ist. Die gemeinsamen Normalen der eingreifenden Zahnflanken im Geschwindigkeitskraftfeld der relativen Schraubung des Getriebes sind

daher unter den gemeinsamen Transversalen der geeignet ausgewählten konjugierten Polaren zu suchen. Beim Eingriff der Zahnräder werden solche konjugierte Polaren bevorzugt, die von den Koordinaten der momentanen Eingriffspunkte unabhängig sind. Diese Polarachsenpaare sind nämlich während des ganzen Eingriffsvorganges stetig.

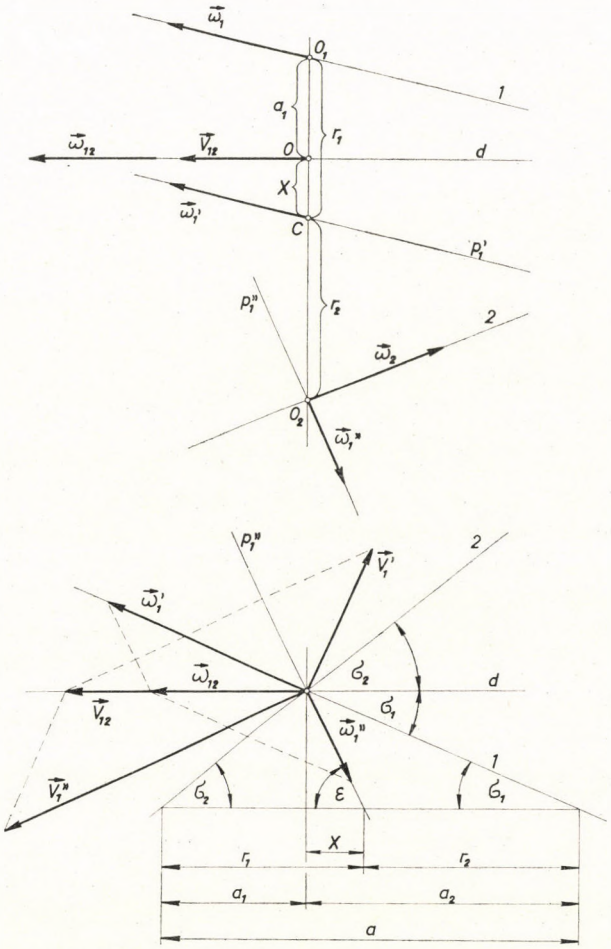


Bild 3

Bei den Zahnrädern ist es leicht, eine von diesen Achsen zu bestimmen. Z. B. bei den mit ebener Abwälzmethode verfertigten Rädern wird die momentane relative Drehachse immer durch die Zahnflankennormale geschnitten. Die mit einem Drehkörper gefrästen geschliffenen Räder haben ebenfalls so eine Werkzeugsdrehachse. Es gibt Oberflächen, bei denen man auch unabhängig von der Bearbeitung solche Achsen findet.

Wenn eine der Polarachsen bekannt ist, kann man durch die relative Schraubung des Getriebes die andere auffinden. Im Aufsatz bildet die Achse P_1 (Bild 3) eine Erzeugungslinie der momentanen relativen Drehachse, d. h. die des Fertigungsaxoids. Das Auffinden ihres konjugierten Gegenstückes (p_1'') zeigt die Abbildung durch die relative Schraubung des Getriebes. Der Grund des

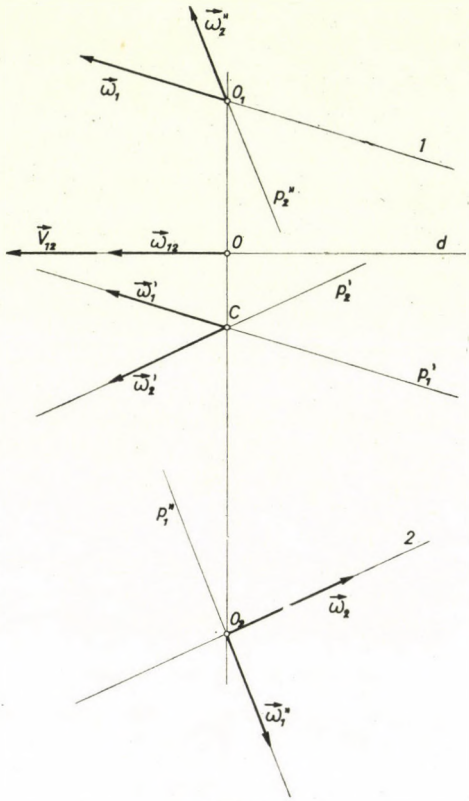


Bild 4

Konstruierens ist der, daß der Parameter der Schraubung bei gleichwertigen Systemen der gleiche ist, also

$$p = a_1 \tan \sigma_2 = a_2 \tan \sigma_1 = X \tan \varepsilon \,. \tag{8}$$

Hier ist zu erwähnen, daß wir den Punkt C als gemeinsamen Punkt des Fertigungsaxoids der Räder (Bild 4) auf der Normaltransversale der sich kreuzenden Achsen beliebig aufgenommen haben. Desgleichen können wir auch das Polarachsenpaar des Rades *2* auffinden, wie es Bild 4 zeigt.

Diese kinematischen Verhältnisse ergeben die Möglichkeit, die Eingriffseigenschaften der mit einem geradschneidigen Werkzeug abgewälzten Zahnflanken verhältnismäßig einfach zu untersuchen:

Beide Räder wurden mit der Abwälzmethode verfertigt. Der Momentanpol des Antriebes ist Punkt C (vorläufig nach Belieben aufgenommen), deswegen liegen p_1'' und p_2'' in einer gemeinsamen Polarebene. So ergeben sich die gemeinsamen Transversalen der Polarachsen $(p_1'', , p_1'p_2', p_2'')$ als die in der Polarebene P den Polpunkt C durchquerenden Nullgeraden. Wenn wir

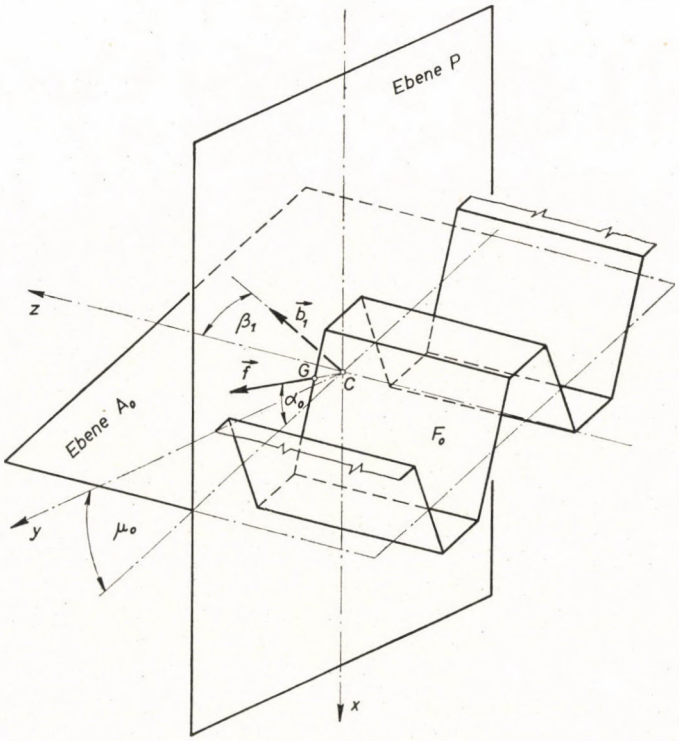


Bild 5

wollen, daß die Räder eingreifen sollen, dann müssen wir die gemeinsamen Normalen der Eingriffsflächen unter den in der Polarebene P liegenden Nullgeraden suchen.

Dies kann nur so möglich sein, wenn die Zahnflanke des Werkzeugs (F_0) beim Abwälzen zur Polarebene P senkrecht ist (Bild 5).

Von den Nullgeraden ist nur ein solcher Strahl auffindbar, der zur Zahnflanke senkrecht ist, deshalb kann sich unter solchen Umständen nur ein punktförmiger Eingriff ausbilden.

III. Fertigungsaxoide von unrunden Rädern

Es ergibt sich aus den Eigenschaften des geradschneidigen Werkzeugs, daß auch die Ebene der Werkzeugaxoide (A_0) senkrecht zur Polarebene ist, sich aber gleichzeitig an Punkt C anpaßt. Daraus folgt, daß die Stoßrichtung des Werkzeugs mit dem Geschwindigkeitsvektor v_C in Punkt C

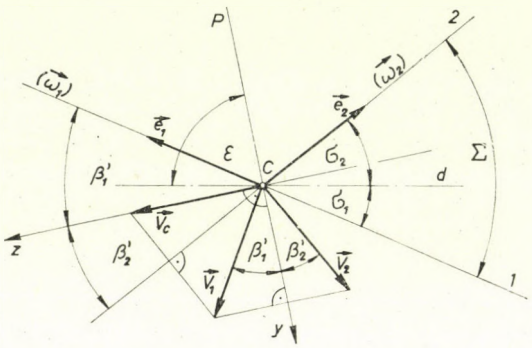


Bild 6

der relativen Schraubung des Getriebes zusammenfällt. Die in die Polarebene P fallenden Komponenten der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in Punkt C der Räder sind also gleich Null (Bild 6):

$$v_1 \cos \beta_1' = v_2 \cos \beta_2' \,. \tag{9}$$

Da $v_1 = r_1 \omega_1$ und $v_2 = r_2 \omega_2$ ist, folgt daraus, daß die Gleichung (9) in anderer Form geschrieben

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\cos \beta_2'}{\cos \beta_1'} \tag{10}$$

ergibt, wo $\beta_1' + \beta_2' = \Sigma$ der Kreuzungswinkel ist. β_2' bzw. β_1' hängen von der Lage des Punktes C, also von X ab. Die Lage der Polarebene wird durch β' bzw. β_2' angegeben, deren Wert

$$\beta_1' = \pi/2 - (\varepsilon - \sigma_1) \tag{11}$$

beträgt. In Kenntnis von X kann ε aus (8) errechnet werden.

Aus dem Bisherigen wissen wir soviel, daß die Werkzeugaxoidebene A_0 sich dem Polpunkt C anpaßt und senkrecht zur Polarebene ist. Wir wissen aber noch nicht, einen wie großen Winkel μ_0 sie mit der Achse y einschließt. Dazu muß man sich mit einigen Eigenschaften der abwickelbaren Regelflächen beschäftigen.

Wir erwähnten bereits, daß die als Abwälzung der Werkzeugaxoidebene entstandenen Fertigungsaxoide abwickelbare Regelflächen sind. Abwickelbare Regelflächen geben wir auf den Oberflächen mit einer Richtlinie und in Punkten der Richtlinie mit Richtvektoren der Erzeugenden an.

Die Richtlinie ergibt eine ebene Kurve, wenn wir sie so auswählen, daß sie die geometrische Lage der Polpunkte C in dem an die Räder gebundenen

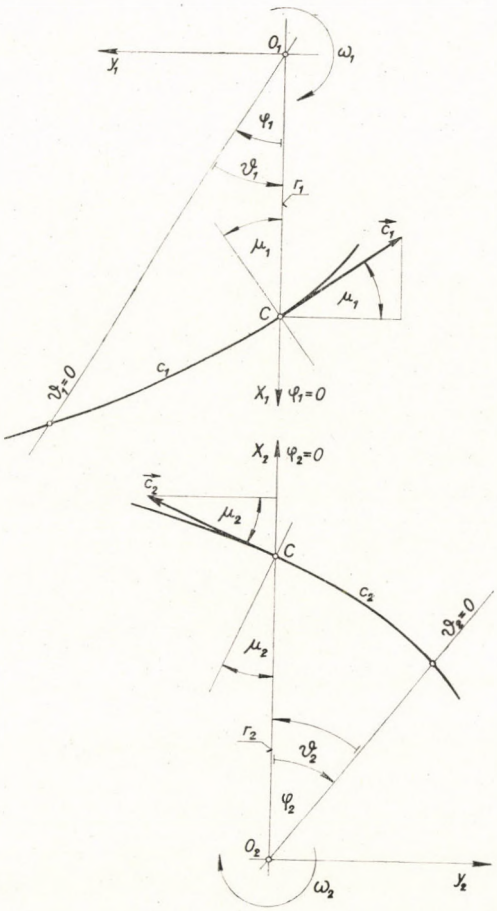


Bild 7

Koordinatensystem darstellen soll. Diese ebene Kurve bzw. Richtlinie wird durch den Radiusvektor r und den Polarwinkel ϑ in Polarkoordinaten charakterisiert. Zwischen dem Radiusvektor und dem durch die Normale der Kurve eingeschlossenen Winkel μ besteht der Zusammenhang (Bild 7):

$$dr_1 = r_1 \, d\vartheta_1 \tan \mu_1$$

und (12)

$$dr_2 = r_2\, d\vartheta_2 \tan \mu_2 .$$

Daraus erfolgt, daß

$$\frac{\tan \mu_2}{\tan \mu_1} = i_{12} \frac{r_1}{r_2}, \tag{13}$$

$dr_1 = dr_2$ ist nämlich wegen der Stabilität des Achsenabstandes konstant sowie $d\vartheta_1/d\vartheta_2 = i_{12}$.

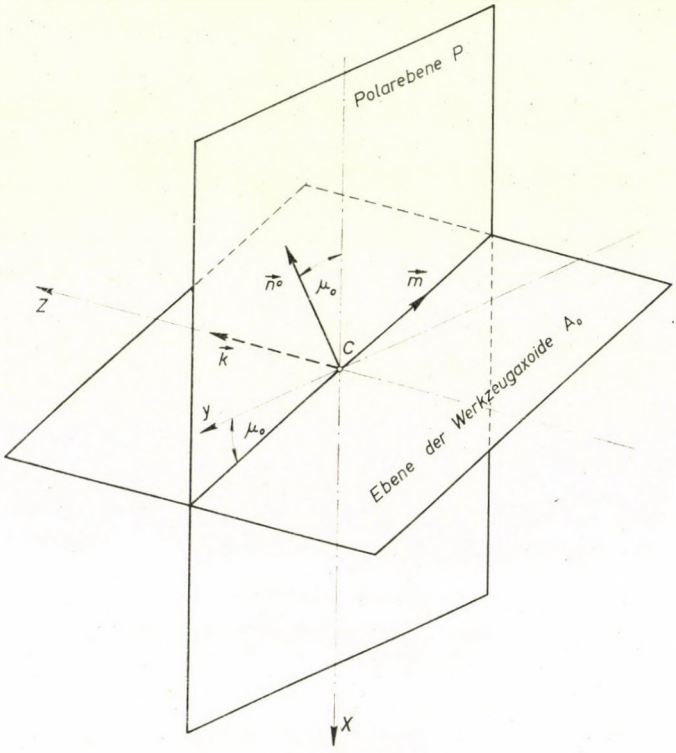


Bild 8

Aus dem Vergleich von (10) und (13) folgt:

$$\frac{\tan \mu_1}{\tan \mu_2} = \frac{\cos \beta_1'}{\cos \beta_2'} . \tag{14}$$

Es ist erweisbar, daß um (14) zu erfüllen, die ebene Normale ($\mathbf{n}^0$) der Werkzeugaxoide mit der Normaltransversale der sich kreuzenden Achsen einen Winkel μ_0 einschließen muß (Bild 8), wo

$$\tan \mu_0 = \frac{\tan \mu_1}{\tan \beta_1'} = \frac{\tan \mu_2}{\cos \beta_2'} \tag{15}$$

ist.

Die Beziehungen (10) und (15) werden *Eingriffssatz der Fertigungsaxoide* genannt. Bisher war nur einer von diesen bekannt, als β_1' und β_2' zugleich die Schrägungswinkel am Wälzkreis bedeuteten. Die Gleichung (15) konnten wir aus der Annahme des Eingriffs von Fertigungsaxoiden der unrunden Räder ableiten. (15) bedeutet, daß die Werkzeugaxoidebene die gemeinsame Berührungsebene im Punkt C der Richtlinien der Räder bildet.

IV. Die Zahnschrägungswinkel

Den durch die Werkzeugstoßrichtung und die auf der Werkzeugaxoidebene angenommenen senkrechten Projektionen der Radachsen eingeschlossenen Winkel nennt man Zahnschrägungswinkel. Im Bild 5 ist es der zwischen dem Vektor $\mathbf{b}_1$ und der Achse z eingeschlossene Winkel. Bezeichnen wir den Richtvektor der sich kreuzenden Achse *1* mit $\mathbf{e}_1$, den Normalvektor der Werkzeugaxoidebene mit n^0, dann bekommen wir:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{n}^0 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}^0).$$

Ähnlich können wir auch den Vektor $\mathbf{b}_2$ aufschreiben. In Kenntnis der Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ ergibt sich in Hinsicht der Schrägungswinkel, daß

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \cos \mu_1 \cdot \sin \beta_1' \\ \text{und} \qquad \sin \beta_2 &= \cos \mu_2 \cdot \sin \beta_2' \end{aligned} \tag{16}$$

ist.

Es ist bekannt, daß $\beta_1' + \beta_2' = \Sigma$ der Kreuzungswinkel ist. Aus (16) folgt, daß die Summe der Schrägungswinkel

$$\beta_1 + \beta_2 < \Sigma,$$

wenn $\mu_1 \lesseqgtr 0$, bzw. $\mu_2 \lesseqgtr 0$.

Falls $\mu_1 = \mu_2 = 0$, also die Richtlinie einen Kreis ergibt, dann ist

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_1' + \beta_2' = \Sigma.$$

V. Die durch die Achsen der unrunden Räder und die Werkzeugaxoidebene eingeschlossenen Winkel

Wir haben bereits gesehen, daß die Werkzeugaxoidebene zu den sich kreuzenden Achsen nicht parallel ist, sondern mit diesen einen Winkel einschleißt. Bezeichnen wir den mit der sich kreuzenden Achse *1* eingeschlossenen

Winkel mit δ_1 und den mit der sich kreuzenden Achse *2* eingeschlossenen mit δ_2. Diese Winkel können wir leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \sin \delta_1 &= -\,\mathbf{e}_1 \mathbf{n}^0 = \sin \mu_0 \cdot \sin \beta_1' , \\ \sin \delta_2 &= -\,\mathbf{e}_2 \mathbf{n}^0 = \sin \mu_0 \cdot \sin \beta_2' . \end{aligned} \tag{17}$$

Der Ausdruck (17) ist auch folgenderweise aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} \sin \delta_1 &= \tan \mu_1 \cdot \tan \beta_1 , \\ \sin \delta_2 &= \tan \mu_2 \cdot \tan \beta_2 . \end{aligned} \tag{18}$$

(18) stellt dar, daß die Fertigungsaxoide der unrunden Räder — beim Eingriff zwischen sich kreuzenden Achsen — im allgemeinen nicht zylindrisch sein können.

Die Momentanwerte der gesamten in den bisher aufgeschriebenen Ausdrücken vorkommenden Winkel hängt von dem Drehwinkel φ_1 ab ($\varphi_1 = -\vartheta_1$).

Aus den Bestimmungen (16) und (18) geht also hervor, daß die Herstellung der unrunden Räder von ebenen Eingriff durchführenden Maschinen nicht ohne weiteres für die Abwälzung der unrunden Räder von räumlichem Eingriff anwendbar sind. Diese Maschinen benötigen eine Ergänzung. Man muß für einen solchen Ergänzungsmechanismus sorgen, der während der Fertigung sowohl den Schrägungs- (β) wie auch den Neigungswinkel der Werkzeugaxoidebene (δ) laut eines bestimmten Gesetzes verändert.

VI. Gesichtspunkte für die Planung von Fertigungsaxoiden

Zur geometrischen Planung der Räder stehen die Ausgangsdaten: Übersetzungsfunktion $i_{12} = f(\varphi_1)$, der Kreuzungswinkel Σ und der Achsenabstand a zur Verfügung. Der Geschwindigkeitsvektor des relativen Schraubraumes des Getriebes in den Eingriffspunkten C:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 ,$$

wo

$$r_1 + r_2 = a . \tag{19}$$

Daraus folgt, daß die Richtlinie des einen der Räder, z. B. $r_1 = r_1(\vartheta_1)$ beliebig aufgenommen werden kann. [Bei ebenem Eingriff gilt dies nicht, weil wir in Hinsicht der Axoide einen schlupffreien Eingriff: $v_e = 0$ vorschreiben, deswegen ergibt sich hier $r_1 = r_1(\vartheta_1)$.]

Wenn wir von dem Grundsatz des Eingriffs von Fertigungsaxoiden ausgehen, kann man unter Beachtung von (10), (15), (16) bzw. (18) und aus den Ausgangsdaten die Differentialgleichung der Richtlinie des Rades *1* aufschreiben:

$$[A(\vartheta_1)\, r_1^2 + B(\vartheta_1)\, r_1 + C(\vartheta_1)]\, r_1^2 + [D(\vartheta_1)\, r_1^2 + E(\vartheta_1)\, r_1 + F(\vartheta_1)] \left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\vartheta_1}\right)^2 = 0\,; \quad (20)$$

wo

$$\begin{aligned}
A(\vartheta_1) &= (1 + 2\, i_{12} \cos \Sigma + i_{12}^2) \cos^2 \beta_1 - \sin^2 \Sigma\,, \\
B(\vartheta_1) &= -2\, a\, (1 + i_{12} \cos \Sigma) \cos^2 \beta_1 + 2\, a \sin^2 \Sigma\,, \\
C(\vartheta_1) &= a^2 (\cos^2 \beta_1 - \sin^2 \Sigma)\,, \\
D(\vartheta_1) &= -(1 + 2\, i_{12} \cos \Sigma + i_{12}^2) \sin^2 \beta_1\,, \\
E(\vartheta_1) &= 2\, a\, (1 + i_{12} \cos \Sigma) \sin^2 \beta_1\,, \\
F(\vartheta_1) &= -a^2 \sin^2 \beta_1
\end{aligned}$$

von ϑ_1 bzw. φ_1 abhängige bekannte Funktionen sind.

Die letzte ist eine allgemeine zweistufige Differentialgleichung vierten Grades, deren Lösung in elementarer Form gemäß E. KAMKE: »Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen« (7. Auflage, Leipzig 1961) nicht zu erwarten ist.

Als wir von der beliebigen Aufnahme einer der Richtlinien, z. B. r_1 absehen, ergibt sich die Möglichkeit einiger Vereinfachungen. Die fehlende Bedingung wird durch Fertigungsvorschriften ersetzt. Eine solche Bedingung ist es, wenn wir erklären, daß der Zahnschrägungswinkel während der Fertigung stetig sein soll. Dann wird die Differentialgleichung (20) durch die Annahme von $\beta_1 = \text{konst.}$ eindeutig lösbar.

Der stetige Schrägungswinkel des Rades *1* kann auch so gedeutet werden, daß $\beta_1 = 0$ ist. So ergibt die Richtlinie:

$$r_1 = \frac{\cos \Sigma}{i_{12} + \cos \Sigma}\, a, \quad (21)$$

wozu wir entweder nach Lösung der Gleichung (20) oder direkt von (10) aus gelangen ($\beta_2' = \Sigma$).

Aus der Voraussetzung $\beta_1 = 0$ folgt, daß das Rad *1* in diesem speziellen Fall zylindrisch ist: gemäß (18) ergiebt sich $\delta_1 = 0$. Diese Voraussetzung ist aber von begrenzter Gültigkeit, weil z. B. $\Sigma = \pi/2$ für $r_1 = 0$ ist, also können wir (21) in diesem Falle nicht anwenden.

Die Differentialgleichung (20) ist elementarerweise zu lösen, als neben $\beta_1 = \text{const.}$, in Hinsicht der Radiusvektoren von Richtlinien auch die Voraussetzung $i_{12} = r_2/r_1$ vorgeschrieben wird. In diesem Falle ergibt sich die

allgemeine Lösung der Differentialgleichung wie folgt:

$$r_1 = k_1 \exp(\vartheta_1 \tan \mu_1),$$

d. h., die Richtlinie stellt eine logarithmische Spirale dar. Wenn $\mu_1 = 0$ ist, kommen wir zu runden Rädern ($r_1 = k_1 =$ konst.).

VII. Zahlenbeispiel

Ein Zahnradpaar wird geplant, bei welchem die Richtlinie des Fertigungsaxoides eine logarithmische Spirale darstellt:

$$r_1 = k_1 \exp(\vartheta_1 \tan \mu_1).$$

Die Übersetzungsfunktion:

$$i_{12} = (a - r_1)/r_1 = a/k_1 . \exp(\varphi_1 \tan \mu_1) - 1.$$

Es sei der zu verwirklichende stetige Achsenabstand: $a = 181$ mm. Wir nehmen die zum Werte $\vartheta_1 = 0$ gehörenden Daten von $r_1 = k_1 = 70$ mm und $r_2(\vartheta_1 = 0) = 111$ mm an.

Zum Funktioneren der Räder ist ein rechteckiger Segmentabschnitt genügend, d. h., die größte Verdrehung des Rades:

$$\varphi_{1\,\max} = \pi/2 .$$

Aufgrund dieser Gl. bestimmen wir den Wert $\tan \mu_1$ in der Gleichung der logarithmischen Spirale, wie folgt:

$$\tan \mu_1 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{111}{70} = 0{,}2935.$$

Da ergibt sich als Kreuzungswinkel durch Annahme des Wertes des Schrägungswinkels $\beta_1 = 22{,}5°$ und gemäß (16) berechnet für $\Sigma \approx 47°$.

Nötig ist noch auch der von der Radachse und der Werkzeugaxoidebene eingeschlossene Winkel, der auf Grund (18) $\delta_1 = 6° 59'$ ist. Da die Richtlinie des Fertigungsaxoides eine logarithmische Spirale ist, gehören zu einem stetigen Kreuzungswinkel Σ ein stetiger Schrägungswinkel β_1 und ein stetiger Neigungswinkel δ_1 der Werkzeugaxoidebene.

Die Tatsache, daß die Räder aus rechteckigen Segmenten bestehen, bedeutet eine Fertigungsvereinfachung, weil wir anstatt der Fertigung von Rädern mit offener Zentroidenkurve — vier rechteckige Segmente zusammengedreht — eine geschlossene Zentroidenkurve bekommen. Die hergestellten Räder werden nach Verzahnung gemäß Bild 9 zerschnitten.

Die Fertigung ist aus dem Mittelpunkt der zusammengedrehten Segmente durchzuführen, deswegen müssen wir die Koordinaten des Mittelpunktes O_0 bestimmen.

Bezugnehmend auf den Satz, wonach bei ebener Verzahnung die Fertigungsache von der Funktionierungsache der Räder abweichen kann, wird die Fertigungsachse geeignet, aber frei gewählt [12—14].

Auf Grund des Bildes 9 und 10 folgt

$$r_1(\vartheta_1 = 0) = r_A$$

und

$$r_1(\vartheta_1 = \pi/2) = r_2(\vartheta_2 = 0) = r_B.$$

Wir können schreiben, daß

$$r_A^2 + r_B^2 = a^2 + b^2,$$

sowie

$$\frac{b}{a} = \tan(\psi_1 - \mu_1),$$

wo

$$\tan \psi_1 = \frac{r_B}{r_A} .$$

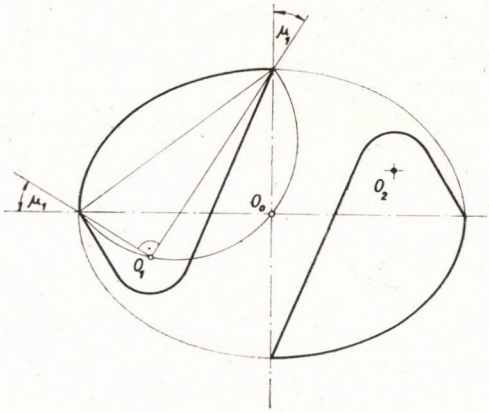


Bild 9

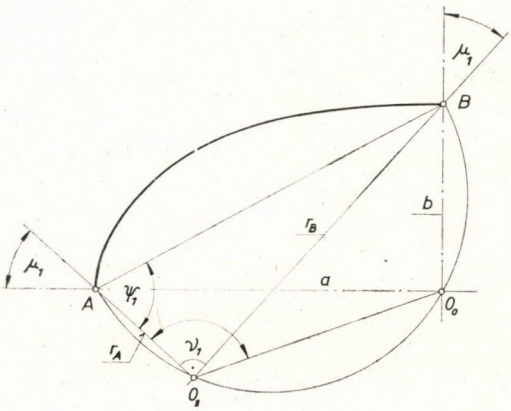


Bild 10

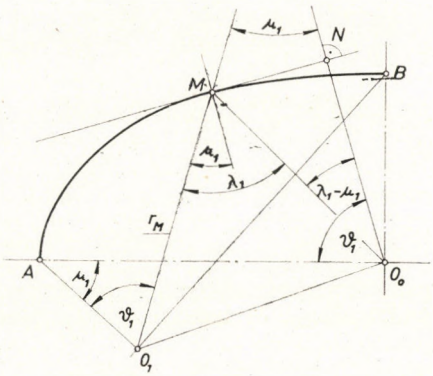


Bild 11

Auf Grund dieser Gleichungen können wir a und b berechnen. (In diesen Beziehungen bedeutet a keinen Achsenabstand, sondern den im Bild 10 und 11 sichtbaren Abstand $\overline{AO_0}$.) Die Lösung lautet:

$$a = 99{,}50 \text{ mm und } b = 85{,}57 \text{ mm}.$$

Dem Bild 10 gemäß ist die Entfernung $\overline{O_1O_0}$:

$$\overline{O_1O_0} = \sqrt{r_A^2 + a^2 - 2r_A\, a \cos \mu_1} = 38{,}50 \text{ mm}.$$

Bei Verzahnung zum schlupffreien Abwälzen ist es nötig, den Abstand vom Punkt O_0 der zu irgendeinem Punkt M gehörenden Tangente der Zentroide zu kennen, bzw. die Kenntnis des Fußpunktes der aus dem Punkt O_0 auf die Tangente gestellten Senkrechten.

Diese sind auf Grund des Bildes 10 und 11 folgenderweise zu bestimmen:

Aus dem Dreieck O_1O_0A ergibt sich:

$$\sin \nu_1 = \frac{a}{\overline{O_1O_0}} \sin \mu_1 ;$$

aus dem Dreieck O_1O_0M, auf Grund des Kosinus-Satzes:

$$\overline{O_0M} = \sqrt{r_M^2 + \overline{O_1O_0^2} - 2r_M\,\overline{O_1O_0}\cos(\nu_1 - \vartheta_1)}.$$

In Kenntnis von $\overline{O_0M}$, ergibt sich aus demselben Dreieck auf Grund des Sinus-Satzes:

$$\sin\lambda_1 = \frac{\overline{O_1O_0}}{\overline{O_0M}}\sin(\nu_1 - \vartheta_1);$$

endlich ist

$$\overline{MN} = \overline{O_0M}\sin(\lambda_1 - \mu_1).$$

Des weiteron bemerken wir, daß auf Grund ähnlicher Dreiecke im Bild 11 $AO_1M\sphericalangle = AO_0N\sphericalangle = \vartheta_1$.

Während also die aus vier Segmenten zusammengelegte Zentroide sich um die in O_0 gestellte Achse mit dem Winkel ϑ_1 verdreht, muß in derselben Zeit die in der Teillinie des Werkzeugs durchgeführte relative Versetzung des Zentroidenpunktes O_0 dem Wert

$$\int_A^N ds$$

gleich sein. Dieser Weg wird folgendermaßen aufgeschrieben:

$$\int_A^N ds = R\vartheta_{1M} + \int_0^{\vartheta_{1M}} \sqrt{r_1^2 + \dot{r}_1^2}\, d\vartheta_1 + \overline{MN} - R\vartheta_{M1}. \tag{22}$$

Abgesondert errechnet:

$$\int_0^{\vartheta_{1M}} \sqrt{r_1^2 + \dot{r}_1^2}\, d\vartheta_1 = \int_0^{\vartheta_{1M}} r_A \exp(\tan\mu_1\,\vartheta_1)\sqrt{1+\tan^2\mu_1}\, d\vartheta_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\tan^2\mu_1}}{\tan\mu_1}\left[r_A\exp(\tan\mu_1\cdot\vartheta_1)\right]_0^{\vartheta_{1M}} = \frac{r_{1M}-r_A}{\sin\mu_1}.$$

Wird dieser Wert in (22) wieder eingesetzt, so ergibt sich:

$$\int_A^N ds = R\vartheta_{1M} + \frac{r_{1M}-r_A}{\sin\mu_1} + \overline{MN} - R\vartheta_{1M}.$$

Das erste Glied der rechten Seite, die Verdrehung $R\vartheta_{1M}$ ist auf der Verzahnmaschine unmittelbar durchzuführen. Zu dieser Verschiebung muß man noch die durch das zweite, dritte und vierte Glied der Rechtsseite beschriebene Zusatzbewegung zugeben. Diese schiebt die zu verzahnende Scheibe in die Richtung der Werkzeugsteillinie und deren Größe ist:

$$\frac{r_{1M}-r_A}{\sin\mu_1} + \overline{MN} - R\vartheta_{1M}. \tag{23}$$

Diese Zusatzbewegung wird bei Verzahnung durch Verwendung einer Nockenscheibe zustandegebracht (Bild 12).

Zum Abwälzen der Zentroide — über die tangentiale Bewegung des Punktes O_0 — ist auch nötig, daß der Punkt O_0 von der Teillinie des Werkzeugs aus in einem der Winkelverdrehung ϑ_1 entsprechenden Abstand sei.

Diese zur Abwälzbewegung erforderlichen Aufgaben wurden mit Hilfe des im Bilde 12 ersichtlichen Mechanismus gelöst. Die prinzipielle Funktion des Mechanismus ist die folgende:

Zu der der Werkzeugsteillinie entsprechenden Leiste Q wird eine mit der Zentroide des verzahnten Rades kongruente sog. Führungsscheibe gedrückt. Diese ist an die mit dem zu verzahnenden Rad gemeinsame Achse angekeilt. Auf dieselbe Achse ist jene Nockenscheibe gekeilt, mit welcher die Zusatzbewegung von tangentialer Richtung so ausgeführt wird, daß sie zur Leiste W angestützt ist. Die zusätzliche Versetzung und die Übertragung der stetigen

Winkelgeschwindigkeit des Tisches wurde durch Anwendung einer zwischen dem Tisch und dem Mechanismus eingegliederten *Oldham-Kupplung q* gelöst.

Die im Bild 12 bezeichnete Kraft F sorgt für die Stemmwirkung. Es ist zweckmäßig, bei der Planung der Nockenscheibe einige bestimmte Gesichtspunkte vor Augen zu halten.

Der Ausdruck (23) stellt die Wegkurve der Nockenscheibe dar. Wenn wir wollen, daß die Nockenscheibe eine in sich zurückkehrende Linie sei, dann muß man die Konstante so wählen, daß

$$2R\Pi = 4\frac{r_B - r_A}{\sin \mu_1}$$

sei.

Da aber $2R\pi$ eben den Umfang der Zentroide beträgt, können wir die Bewegung des Maschinentisches so einstellen, als ob wir eine Kreisscheibe von Halbmesser R und mit einem dem Umfang der Zentroide übereinstimmenden Umfang verzähnen würden. Dies bedeutet auch,

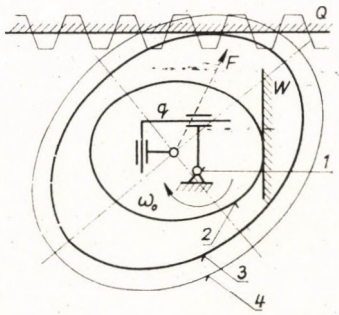


Bild 12

daß — wegen des Zusammenhanges zwischen der Teilung des Werkzeugs und seinem Modul R — nur ein bestimmter Wert aufgenommen werden kann. Dies hat einen weiteren Einfluß in Hinsicht der Radabmessungen.

Die Konstruktion (Bild 12) ist einfach lösbar, wenn die Nockenscheibe von einer geraden Leiste (W) geführt wird. Deshalb muß man die Abmessungen der Nockenscheibe so wählen, daß sie allerorts gewölbt (konvex) sei.

VIII. Die technische Beschreibung der Verzahnvorrichtung

Die Verzahnung solcher Räder, die unter sich kreuzenden Achsen ein veränderliches Bewegungsübertragen verwirklichen, ist mit Hilfe eines zum Abwälzen von gemeinsamen zylindrischen Rädern dienenden Zahnhobels oder Abwälzfräsers durchführbar.

Die im Bild 13 vorgelegte Verzahnvorrichtung wurde zur Abwälzfräsmaschine *Komsomoletz 5D32* konstruiert. Die zu verzahnende Scheibe *a* wird auf die Welle *b* fixiert. Auf dieselbe Welle wurde die Führungsscheibe *c* und die Nockenscheibe *d* befestigt. Diese beiden verwirklichen das Abwälzen gemeinsam. Die Abmessungen sind so festgestellt, daß nur die Richtlinie (Zentroide) in der Mittelebene der zu verzahnenden Scheibe ohne Gleiten abwälzt. In den Teilen über und unter der Mittelebene besteht also eine Werkzeugversetzung, d. h. es entsteht eine Verzahnung mit Profilverschiebung.

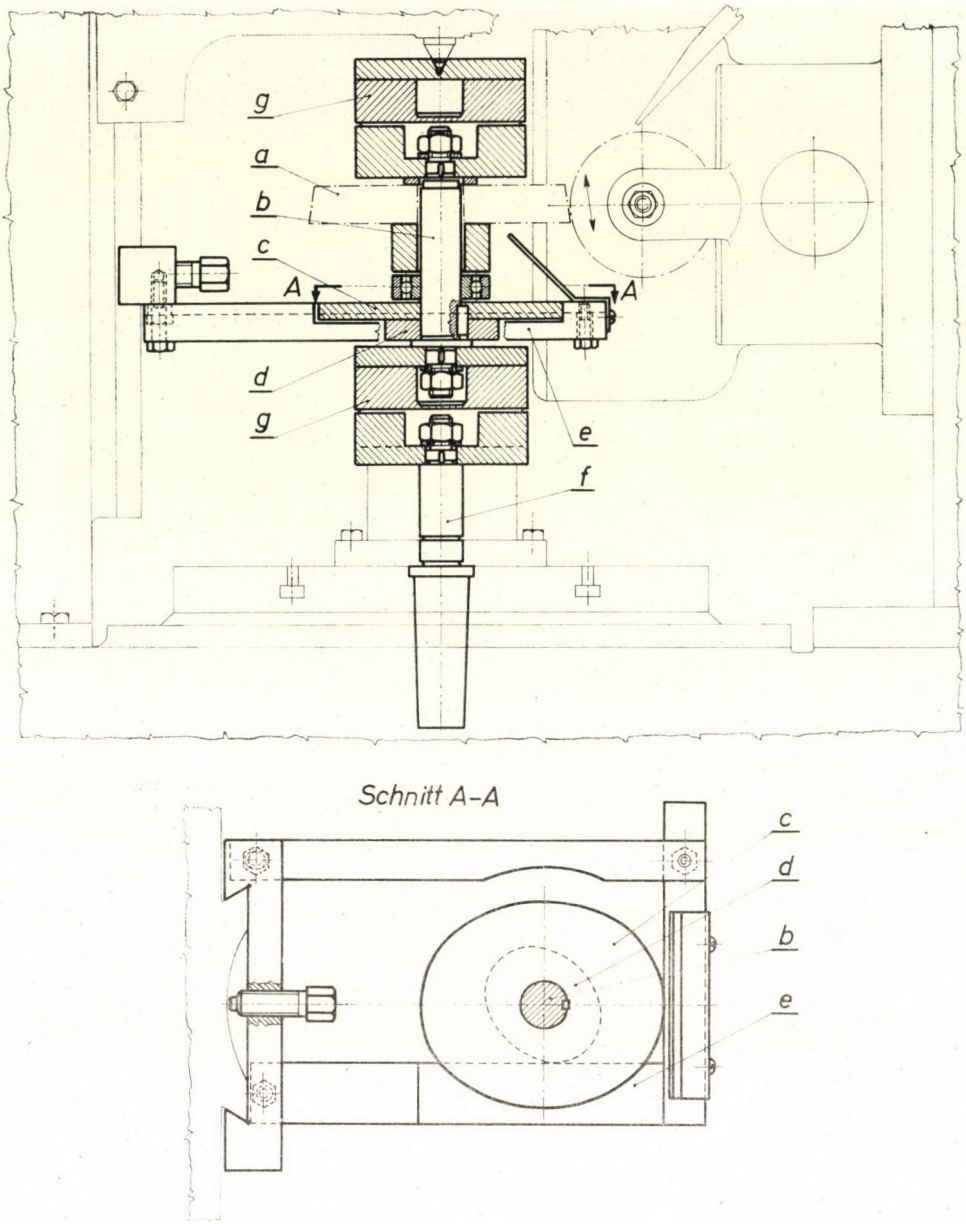


Bild 13

Diese Tatsache spielt in der Bestimmung der Grenzen von Verzahnungen eine Rolle, z. B. die Grenzwerte des Winkels δ betreffend.

Die Führungsscheibe und die Nockenscheibe lehnen sich ständig an den Bügel *e* an, die eine an die eine Seite, die andere an die andere Seite. Beide

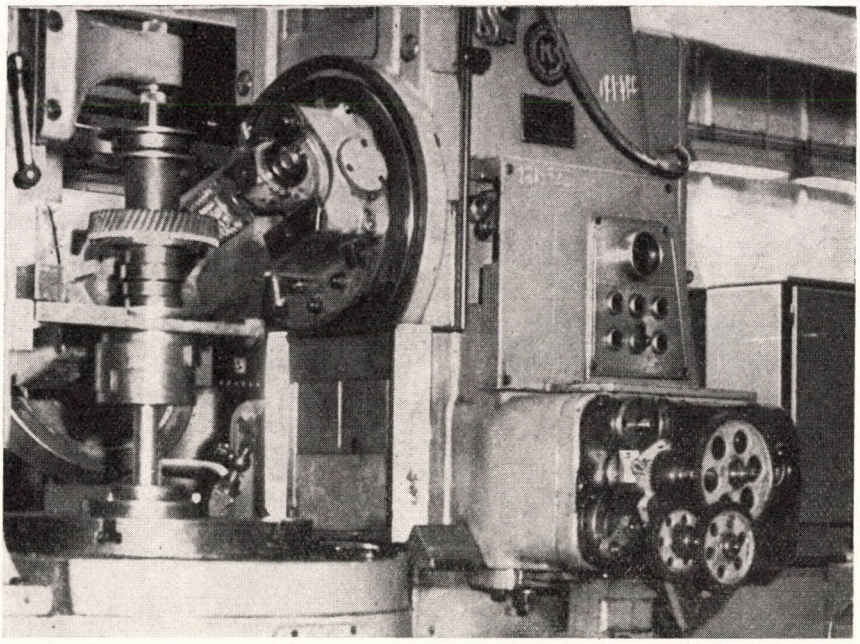


Bild 14

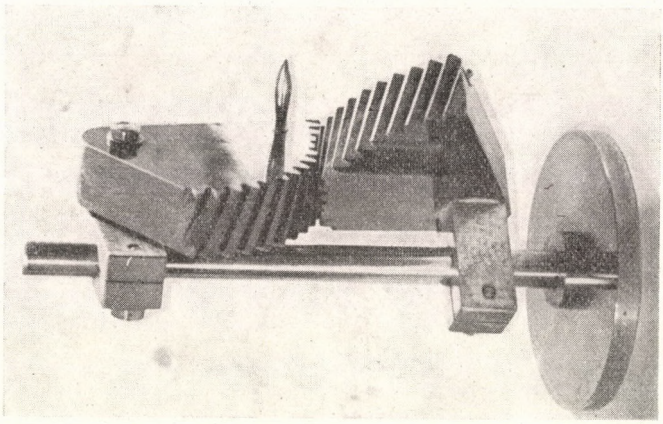


Bild 15

Seiten stehen senkrecht aufeinander im Zusammenhang mit der Rolle der im Bild 12 ersichtlichen Leisten Q und W.

Die ständige Zustemmung wird durch das über dem Kugellager geführte Drahtseil und das daran gelegte Gewicht gesichert.

Der konische Dorn *f* in der Welle der zu verzahnenden Scheibe *b* wird durch die *Oldham*sche *Kupplung g* in Verbindung gebracht. Diese Kupplung trägt die gleichmäßige Winkelbewegung des Tisches und das zum Überwinden der Schneidkräfte erforderliche Moment und ermöglicht gleichzeitig die Führung der Welle *b* durch die Scheiben *c* und *d*, wie es das Bewegungsgesetz des Abwälzens der zu verzahnenden Räder vorschreibt.

Zwecks besserer Führung der Welle *b* und ihrer Zubehöre ist auf dem oberen Teil der Welle eine eingebaute *Oldham*sche *Kupplung* sichtbar. Im Laufe der technischen Ausführung erschien es zweckmäßiger, diese mit der in der Photoabbildung sichtbaren Lösung zu vertauschen. Dies ist ein Scheibenkugellager, bei welchem der halbseitige Führungsteller nach Entfernung einer der Scheiben eine Ebene ist. Bei Verzahnung mit dieser Methode waren die Schwingungserscheinungen günstig.

In diesem Beispiel ist der Schrägungswinkel β und der Neigungswinkel δ der Werkzeugaxoidebene beständig, deshalb konnte man von der Einstellung von Mechanismen, die die Veränderung dieser Winkel ermöglichen, absehen.

Zur Verwirklichung einer dem Winkel δ entsprechenden »konischen« Verzahnung war es erforderlich, den senkrechten und waagerechten Vorschub des Werkzeuges in Einklang zu bringen. Da die Kinematik der Maschine dies nicht möglich machte, war es nötig, ein Anzapfen durchzuführen. Die eingesetzte Schere ist in der Photoabbildung sichtbar (Bild 14). Eine weitere Photoabbildung führt das ausgeführte Modell vor (Bild 15). Der Modul des Verzahnungswerkzeugs beträgt 3 mm. Die Vorrichtung ist zur Verzahnung irgendeiner nicht kreisförmigen Scheibe von konvexer Abwälzkurve geeignet, wenn die Führungs- und Nockenscheiben dementsprechend gewählt werden.

SCHRIFTTUM

1. Beaudet, E. C.: Non-circular gears generated automatically. *Iron Age* (1953); VIII, 122—123.
2. Blazek, J.—Kalivoda, P.: Výroba neokrouhlých hrubených kol. *Strojirenská Výroba* (1957); XII, 560—562.
3. Bloomfield, B.: Design guide when You need noncircular gears. *Product Engineering* (1960); XI, 59—66.
4. Grodzinski, P.: Applications of eccentric gear mechanisms for obtaining variable angular velocities. *Machinery*, London (1951); 207—210.
5. Grodzinski, P.: An investigation of eccentric gear mechanisms. *Machinery*, London (1951); 289—290.
6. Grodzinski, P.: Planetary gear mechanisms with eccentric gears. *Machinery*, London (1954); 645—649.
7. Groth, N.: Elliptische Zahnräder. *Energie und Technik* (1951); III, 17—18.
8. Gunningham, F. W.: Designing and using noncircular gears to generate mathematical functions. *Machine Design* (1959); IV, 161—164.
9. Hannula, F. W.: Designing noncircular surface for pure rolling contact. *Machine Design* (1951); VII, 111—114, 190—192.
10. Kienbacher, J.: Nichtzylindrische Stirnräder. *Maschinenwelt und Elektrotechnik* (1962); I, 22—24.

11. LÉVAI, I.: Ellipszis gördülőhengerű fogaskerekek elmélete és gyártása (Theorie und Fertigung der elliptischen Zahnräder). *A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **1** (1957), 201—213.
12. LÉVAI, I.: Nem köralakú hengeres kerekek fogazásgeometriájának és gyártásának alapelve (Egyetemi doktori disszertáció). Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc 1958; 36. *A Nehézipari Műszaki Egyetem Idegennyelvű Közleményei* (1962); XXII, 331—341.
13. Леваи, И.: Профили зубцоб и эволута профилей некруглых цилиндрических зубчатых колес, неразвемых инструменталной рейкой. *A Nehézipari Műszaki Egyetem Idegennyelvű Közleményei* (1962); XXII, 331—341.
14. LÉVAI, I.: Herstellung von Stirnradgetrieben mit elliptischem Wälzzylinder. *Acta Techn. Hung.* **39** (1962), 95—100.
15. Литвин, Ф. Л.: Некруглые зубчатые колеса. Машгиз, Москва—Ленинград 1956; 311.
16. Литвин, Ф. Л.: Теория зубчатых зацеплений. Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1960.
17. Литвин, Ф. Л.: Аналитический метод исследования червячного заплацения с переменных передаточным числом и переменным межосевым расстоянием (Труды ЛПИ). Машгиз, Москва 1954; III.
18. Литвин, Ф. Л.—Павлов, Г. Г.: Реконструкция зувофрезерного станка для нарезания некруглых зубчатых колес. *Станки и Инструменты* (1953); III, 28—30.
19. Литвин, Ф. Л.—Павлов, Г. Г.: Приспособление для нарезания некруглых колес. *Станки и Инструменты* (1954); II, 26—29.
20. Литвин, Ф. Л.: Некруглые зубчатые колеса. *Станки и Инструменты* (1956); IX, 16—19.
21. LOCKENWITZ, A. E.—OLIPHINT, J. B.—WILDE, W. C.: Noncircular cams and gears for transmitting motion at a continuously varying velocity ratio. *Machine Design* (1952); V, 141—145.
22. LUDWIG, F.: Verwendung eines Koppelgetriebes zur Herstellung wälzverzahnter Ellipsenräder. *Konstruktion* **7** (1955); XII, 459.
23. MERRITT, H. E.: Gears (2. ed.) Pitman London 1953; 527.
24. MEYER, W.: Die elliptischen Zahnräder und die elliptischen Schleifen. *Feinwerktechnik* (1958); V. 168—170.
25. MEYER, W.: Die elliptischen Zahnräder und die Kurbelschleife. *Werkstatt und Betrieb* (1958); I, 41—45.
26. OLSSON, U.: Noncircular cylindrical gears. Acta Polytechnica. *Mechanical Engineering Series* Stockholm (1953); X, 1—216.
27. OLSSON, U.: Non-circular bevel gears. Acta Polytechnica Scandinavica. *Mechanical Engineering Series* (1959); V, 1—203.
28. Острецов, Г. В.: Модернизация зубофрезерного станка для нарезания некруглых колес. *Станки и Инструменты* (1953); III, 30—31.
29. PEYREBRUNE, H. E.: Application and design of noncircular gears. *Machine Design* (1952); XII, 185—193.
30. RAIKUNOWA, L. M.: Erhöhung der Drehzahl von Automatenwebstühlen durch Antrieb. *Textil-Praxis* (1963); IV, 234—339.
31. SCHIEBEL, A.—LINDNER, W.: Zahnräder (1. Bd. »Stirn- und Kugelräder mit geraden Zähnen«; 4. Aufl.). Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954; 133.
32. SCHLEGEL, O.: Elliptische Stirnradgetriebe. *Werkstatt und Betrieb* (1952); X, 539—540.
33. SCHLEGEL, O.: Elliptische Stirnradgetriebe. *Werkstatt und Betrieb* (1953); III, 126.
34. SCHLEGEL, O.: Elliptische Stirnradgetriebe. *Werkstatt und Betrieb* (1954); I, 18.
35. SHEPPARD, W. H.: Design of non-circular gears. *Mechanical World and Engineering Record* (1957); VII, 300—303.
36. SHEPPARD, W. H.: Rolling curves and non-circular gears. *Mechanical World and Engineering Record* (1960); I, 6—11.
37. THOMAS, A. K.: Grundzüge der Verzahnung. Hanser, München 1957; 272.
38. TRBOJEVICH, N.: New method simplifies construction of elliptic involutes. *American Machinist* (1949); XIX, 102—103.
39. VÖRÖS, I.: A fogaskerekekre vonatkozó legújabb kutatások és különleges gyártási eljárások (Neuere Forschungen und spezielle Fertigungsverfahren von Zahnrädern). Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest 1955.
40. ZILLES, A.: Der Ovalradzähler, seine Ausführungsformen und seine Anwendungsgebiete. *Technika* (1960); XXII, 1387—1389.
41. ALTMANN, F. G.: Bestimmung des Zahnflankeneingriffs bei allgemeinen Schraubgetrieben. *VDI* (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens). (1937); V, 209—225.
42. CAPELL, J.: Théorie et calcul des engrenages hypoïds. Dunod, Paris 1949; 74.
43. CRAIN, R.: Schraubenräder mit geradlinigen Eingriffsflächen. *Werkstattstechnik* **1** (1907), 88.

44. DISTELI, M.: Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder. *Z. Math. u. Phys.* **53** (1905), 51.
45. DISTELI, M.: Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff. *Z. Math. u. Phys.* **60** (1911), 244.
46. DRAHOS, I.: A Widlhaber-Novikov fogazás általánosítása forgási körgyűrű felülettel lefejtett fogfelületek esetére (Die Verallgemeinerung der Wildhaber-Novikov Verzahnung). Dissertation-Manuskript, Miskolc 1964, 51.
47. Гохманн, Х. И.: Теория заплацений обобщенная и развития путем аналцза; Одесса 1886.
48. HUSZTHY, L.: Fogprofilok meghatározása számítással (Bestimmung der Zahnprofile mit Berechnung). Doktor-Dissertation, Miskolc 1960.
49. MAGYAR, J.: A síkbeli foggörbék és a csavarfelületű elemek kapcsolódásának néhány kérdése (Einige Fragen des Eingreifens von ebenen Zahnkurven und Schraubflächen-Elementen). *Gép* **16** (1964); XI, 437—445.
50. MAROS, D.: A fogazás legáltalánosabb alaptörvénye (Das allgemeine Grundgesetz der Verzahnung). III. Internationale Tagung für Mechanismen und Antriebe, Miskolc 1963.
51. OLIVIER, T.: Théorie géometrique des engrenages; Paris 1842.
52. SÁLYI, I.: Műszaki mechanika — A kinematika elemei (Technische Mechanik — Die Elemente der Kinematik). Tankönyvkiadó, Budapest 1960; 238.
53. SÁLYI, I.: Mechanika (Mechanik). Tankönyvkiadó, Budapest 1963; 263.
54. SÁLYI, I. jr.: Mechanizmusok analízise (Analyse der Mechanismen). Tankönyvkiadó, Budapest 1961; 223.
55. SCHIEBEL, A. Zahnräder, Teil I und II; Berlin 1930.
56. SZÉKELY, I.: Dependenta elementelor rotii dintate, prelucrate cu cutit pieptene, de caracterul miscarii relative dintre scula si semifabricat (Lucrari Stiintifice). Intreprinderea Poligrafica, Cluj 1960; 229—235.
57. TERPLÁN, Z.: Mechanizmusok (Mechanismen). Tankönyvkiadó, Budapest 1959; 292.
58. TERPLAN, Z.—LÉVAI, I.: Gépelemek — IV. Fogaskerekek (Maschinenelemente — IV. Zahnräder). Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest 1957.
59. VÖRÖS, I.: Gépelemek — III. Fogaskerekek (Maschinenelemente — III. Zahnräder). Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest 1956.
60. BOTKA, I.: Egységes magyar homlokkerék fogazatrendszer (Das einheitliche ungarische Stirnradverzahnungs-System). Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1953.
61. ERNEY, GY.: Grenzen des Betriebseingriffwinkels für schrägverzahnte Stirnräderpaare. *Konstruktion* **10** (1058); II, 55—61.
62. SZENICZEI, L.: Az általános fogazás (Die allgemeine Verzahnung). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1957; 272.

Variable-Ratio Gears with Crossed Axes, Generated with Straight-Edged Tools. The paper deals with the laws of the meshing and production of non-round gears materializing a given transmission function. For the investigation the author uses a kinematic method. The laws governing the meshing are extended to the so-called generating axoids. The author deals only with the cases when the generating axoids are developable ruled surfaces and establishes the differential equation for the directrix of the generating axoids. An example proves that the analysis of the differential equation simplifies production.

Обработка зубчатых колес, выполняющих передачу переменного движения между разнонаправленными осями, с помощью инструмента с прямой режущей кромкой *(И. Леваи)*. Работа занимается закономерностями сцепления и изготовления некруглых зубчатых колес, выполняющих работу по заданной функции передачи между разнонаправленными осями. При исследовании применяется кинематический метод. Закономерности сцепления распространяются автором на т. н. изготовляющие аксиоиды. Рассматриваются только те случаи, при которых изготовляющие аксиоиды представляют собою развертываемые прямолинейные поверхности. Выводится дифференциальное уравнение направляющей линии изготовляющих аксоидов. Примером доказывается, что анализ дифференциального уравнения может дать упрощение процесса изготовления.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 171–179 (1970)

ACCELERATED REDUCTION OF A SMOLTEN CHARGE OF HIGH FeO-CONTENT BY MEANS OF CARBON SOLVED IN IRON

J. SZIKLAVÁRI*

CAND. OF TECHC. SC.

[Manuscript received January 28, 1969]

Through research work carried out under normal operating conditions it was found that the reduction of a molten charge of high FeO content becomes faster by pouring it into an iron bath of high C-content, because this C-content also acts as an active agent. Under the testing conditions, the velocity constant of this method was three times as high as the velocity constant observed when additional coke was used as a reducing agent. The reduction of the molten charge proved to be a reaction of first order apparently.

I. Introduction

When during the blast furnace process, iron is made of ores, or of metallurgical products and slags containing ironoxides, the reducing process is mostly carried out on oxides in a solid state.

The method of reducing the molten mass is the most promising for the purposes of some selective reduction. This possibility is based on the relationship according to which a nearly complete equilibrium of the distribution between metal and slag can be reached with most of the metallic elements that may occur in iron metallurgy. Also, this balanced distribution can easily be reproduced in a continuous operation, and therefore, such a method is suitable for application when such ores should be processed that contain more than one kind of metal.

Should this process be developed in order to fulfil requirements of a better economy needed in respect of energetics or/and of a greater specific output, it would be advantageous for application as a direct method of steelmaking by leaving out the pig-iron stage.

In the present literature studies are but seldom found papers that deal with a reducing process of molten iron ores and slags. This can be ascribed to the lack of any routine method in this field. Again, these kinds of laboratory tests are hardly imaginable as yet, just because we badly need measuring instruments suitable for high temperatures.

Anyhow, some kind of physico-chemical relationship can already be outlined by partly basing on some scarcely published observations partly on some thermodynamic principles which refer to the reducing process carried

* Dr. SZIKLAVÁRI J.; Lenin Kohászati Művek, *Miskolc-Diósgyőrvasgyár* (Hungary)

out on molten iron ores and slags having a higher iron (II) oxide content by means of an iron with a higher solid carbon content as an agent.

For example's sake, may we quote the following findings:

a) An acceleration of the reducing process carried out by means of solid carbon takes place at a higher temperature.

b) The researchers KONDAKOV and RYZHONKOV [1], also YERSHOV and POPOVA [2] succeeded in proving that reduction becomes faster with a slag of higher basicity.

c) Former experiments of KONDAKOV [3] showed that under favourable physico-chemical conditions the reducing process carried out in the molten slag by contact with a carbon which is in a solution in iron, becomes faster than when the molten mass contacts but a solid carbon.

d) Tests carried out by DANCY [4] showed that, at a higher temperature, the carbon dissolved in iron bath and helped to a higher reduction speed too.

Briefly, according to the reports on the respective laboratory tests, the most favourable results were obtained when the melts contacted the carbon solved in iron bath.

According to the report of laboratory test in this subject the reduction carried out with carbon solved in iron has given the most advantegeous kinetic results. Nevertheless, the question remains how the results of measurements by microweighing (in several decimals of a gram) may reproduced in practice. To clear up this problem, it seemed more correct to analyse the kinetic characteristics of this process on a semi-plant scale.

II. Collecting-method of test results

These test results were collected by carrying out a special phase of a combined processing of lateritic nickel-chromium iron-ore, namely, by reducing the residual molten slag obtained after selective reduction of nickel. This research work was made, first of all, in order to find the rate of the acceleration of reduction with molten slag by pouring it into the iron bath of high C-content, in comparison to the other reducing process at which the molten slag floats above an already reduced molten iron bath.

This reduction was processed in an electric-arc oven destined for steel-making by using a 1000 kVa transformator. Our two methods applied so far were the following:

a) A charge of 500 kg molten ferro-nickel-slag was poured into the main molten iron charge of 1000 kg having 2% C-content. Reduction took place partly by means of the carbon solved in the iron, and partly by adding a portion of coke thrown there on.

b) 500 kg of molten charge of ferro-nickel-slag was poured into an empty, preheated oven. As reducing agent, coke was added.

Table I

Experimental results obtained at a reducing temperature of 1650 °C under routine work conditions when a charge of 500 kg molten ferro-nickel-slag was poured into an iron bath of 1000 kg having 2% C-content, by adding 9% coke

1	2	3	4	5	6
Period of time elapsed from the moment of coke addition up to the moment of sampling [min]	Mass of the slag [kg]	Iron content in the slag calculated as iron (II) oxide [%]	Calculated mass of the iron (II) oxide content in the slag, q_{FeO_9} $q_{FeO_9}-q_{FeO}$ [kg]	Mass of the reduced iron (II) oxide during 10 minutes preceding the moment of sampling $\Delta q_{FeO}/\Delta t$ [kg/10 min]	Total mass of the reduced iron (II) oxide, $_{FeO}$ [kg]
0	500,00	55,40	277,00	—	—
10	430,75	48,40	207,75	69,25	69,25
20	375,35	40,60	152,35	55,40	124,65
30	325,49	31,50	102,49	49,86	174,51
40	286,71	22,20	63,71	38,78	213,29
50	264,55	15,75	41,55	22,16	235,45
60	249,32	10,60	26,32	15,23	250,68
70	242,39	8,00	19,39	6,93	257,61

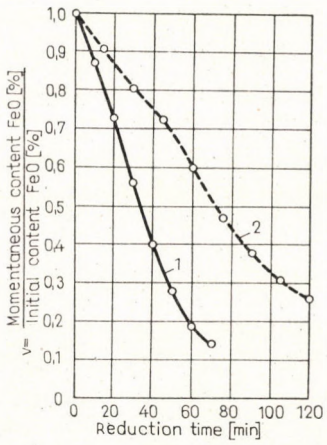


Fig. 1. Curves showing the change of the ratio v viz. the momentaneous percentual value of the FeO-content in the slag per initial value of the same content in the ferronickel-slag during a reducing process carried out at a temperature of 1650 °C (*curve 1:* over an iron bath containing abt. 2% of Carbon, with additional coke of 9%; *curve 2:* without iron-bath, with addition of 15% of coke)

Results of the first method (*a*) are shown in Table I.

The results of the second method (*b*) are shown in Table II.

For comparison's sake, the curves in Fig. 1 are plotted by using the data given in both tables. As can be seen, the reduction velocity of curve 1 is three times as high as that of curve 2.

Table II

Experimental results obtained at a reducing temperature of 1650 °C under routine operating conditions when a 500 kg charge of molten ferro-nickel-slag was reduced by means of 15% additional coke without charging of iron

1	2	3	4	5	6
				Mass of the reduced iron (II) oxide during 15 minutes preceding the moment of sampling, $\Delta q_{FeO}/\Delta t$ [kg/15 minutes]	
0	500,00	55,20	271,00	—	—
15	451,22	49,00	222,22	48,78	48,78
30	405,15	43,60	176,15	46,07	94,85
45	371,28	39,40	142,28	33,87	128,72
60	331,98	32,50	102,98	39,30	168,02
75	307,59	25,50	78,59	24,39	192,41
90	288,62	20,60	59,62	18,97	211,38
105	275,07	16,75	46,07	13,55	224,93
120	266,94	14,20	37,94	8,13	233,06

III. Processes of the winning of metal

As far as the winning of metal is concerned, in both methods several reaction processes were simultaneously run for which the formulae quoted herebelow can be taken as valid:

a) Reduction by means of the carbon content which is solved in the iron bath and acting upon the iron(II)oxide solved in the molten charge:

$$[FeO] + [C] = Fe_l + CO. \tag{1}$$

Notably, this main reaction is preceeded by the following one:

$$(FeO) \rightarrow [Fe]. \tag{2}$$

b) Reaction between the molten slag and the additional coke (including the action exerted by the carbon material of the electrode):

$$(FeO) + C = Fe_l + CO. \tag{3}$$

Taking into account some statements to be found in literary sources, the actual process probably corresponds to

$$CO_2 + C = 2\,CO. \tag{4}$$

Hereafter the following reaction takes place:

$$(FeO) + CO = Fe_l + CO_2 . \tag{5}$$

c) Probably, the gas of carbonmonoxid arising according to reaction (1) and becoming free, out of the bath, joins the reactive process according to Equ. (5).

The reactive processes as described under *a)* and *c)* form a more prominent part in the method carried out with the charge poured into the molten iron bath, as compared to the other method without iron bath.

In that better method, the reaction according to *b)* appears in fact as the main process.

May be, when asking which of the two methods should be preferable, the comparison of energy efficiency or/and the output might be suitable.

Nevertheless, we adhered to the analysis of the kinetic conditions. Namely, in this way, we succeeded in finding several aspects that proved useful for practical purposes.

When examining the process according to Equ. (3), viz. the method in which the reaction of solid carbon takes place, the order of reaction and the velocity-constant are defined as follows:

$$\frac{\partial q_{FeO}}{\partial t} = k_1'' \cdot F_1 \cdot a_{FeO}^{\alpha} \cdot a_C^{\beta} - k_2'' \cdot F_2 \, a_{Fe_l}^{\gamma} \cdot a_{CO}^{\delta}, \tag{6}$$

where

q_{FeO}	already reduced mass of the iron(II) oxide [kg];
$\partial q_{FeO}/\partial t$	velocity rate of reaction, viz. the mass fo the iron(II)oxide as reduced in the time unit (kg · min^{-1}]. In view of the fact that the value of q_{FeO} increases with time, its differential quotient is always positive;
k_1'', k_2''	velocity-constants referring to processes running in the opposite direction;
F_1	contact area between the slag and the reducing medium [cm^2];
F_2	contact area between the iron and the carbon-monoxide [cm^2];
a_{FeO}, a_C	momentaneous activity of the initial materials in the reactive zone;
a_{Fe_l}, a_{CO}	momentaneous activity of the reaction products in the reactive zone;
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	order (exponent) of reaction of the initial material and the reaction products, respectively.

The reaction according to Equ. (1) carried out by means of the carbon which is solved in the iron bath is described as follows:

$$\frac{\partial q_{FeO}}{\partial t} = k_1 \cdot a_{FeO}^{\alpha} \cdot a_{[C]}^{\beta} - k_2''' \cdot a_{Fe_l}^{\gamma} \cdot a_{Fe_l}^{\gamma} \cdot a_{CO}^{\delta}, \tag{7}$$

where most of the expressions correspond to those in Equ. (6) and $a_{[C]}$ is the activity of the carbon which is present in the iron bath.

Both kinetic Equs (6) and (7) can be transformed into the same new formula:

$$\frac{\partial q_{FeO}}{\partial t} = k\,(q_{FeO_0} - q_{FeO})^{\alpha}, \tag{8}$$

where q_{FeO_0} is the initial ironoxide content of the molten slag [%]. This Equ. (8) can be obtained by making some simplifications and by basing on the argumentations exposed herebelow:

Since the carbonmonoxide that is produced by a process directed to the right side of Equ. (6) moves away from the reactive zone or/and comes into action in another reactive step, the reverse action according to Equ. (3) is negligible. Thus, we are able to carry out some other simplification in Equ. (6).

According to our experiments, a further increase of the added coke over 15% did not result in increasing the velocity of the process. Therefore, the carbon concentration and likewise the activity of the carbon can duly be considered as constant, and both can be included into the equilibrium-constant. In addition, the area F_1, can also be included into the same constant, since the grain size of the coke is practically uniform during the tests, and so is the area of the molten slag covered with coke too. Altogether we obtain in a simplified form:

$$\frac{\partial q_{FeO}}{\partial t} = k_1' \cdot a_{FeO}^{\alpha}. \tag{6a}$$

The differential equation can be solved when both the function

$$a_{FeO} = \varphi(q_{FeO})$$

and the exponent α are known.

According to experimental results, a proportionality was observed within a rather short interval of concentration, between the FeO activity in the molten slag and the mass of the FeO not yet reduced. Consequently, we shall write $(q_{FeO_0} - q_{FeO})$ instead of a_{FeO}, and the factor φ will serve as a correction factor to the velocity constant.

As a final result, Equ. (7) corresponding to the reaction (1) can also be substituted by Equ. (8), namely, when, the activity of the carbon content is kept constant during the test. This can be reached by means of reiterated carbonization at a value of about 2%.

Now, with the known value of the exponent α, the differential Equ. (8) can be solved. Further, the velocity-constant k can be calculated by substituting the correlating time data and the obtained numerical test-results.

α is the expression for the order of the actual reaction that characterizes the given test-conditions. This value can be found when we take into account

that the constant k does not depend on the period of time. — when the temperature is kept unchanged. — Consequently, in solving the differential equation, the assumed value α can be considered as correct, when the plotted curve takes the form of a straight line, which then is characterized by a tangent value k.

To this end, we carry out the integration of Equ. (8) by making use of the alternative values of $\alpha = 1$, and $\alpha = 2$ respectively. Doing this, we should make use of the equations

$$\log \frac{q_{FeO_0}}{q_{FeO_0} - q_{FeO}} = k_1 t$$

and

$$\frac{1}{q_{FeO_0} - q_{FeO}} - \frac{1}{q_{FeO_0}} = k_2 t$$

respectively. By substituting the obtained experimental results, the corresponding curves have to be plotted in a diagram.

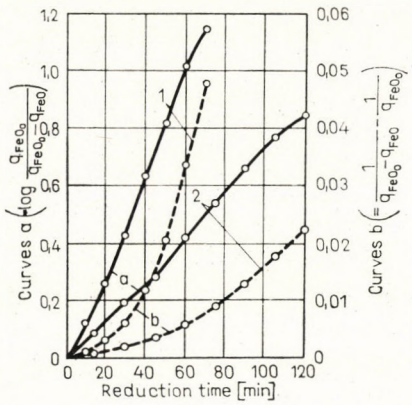


Fig. 2. Curves relating to the reduction of the molten ferro-nickel-slag carried out at a temperature of 1650 °C *(curves 1:* reduction over an iron bath containing abt. 2% Carbon, with 9% additional coke; *curves 2:* reduction without an iron bath, with addition of 15% coke)

In this way, we obtain Fig. 2, in which the abscissa represents the reduction-time in minutes, and on the ordinate axes, at left and at right, the above values of $k_1 t$ and $k_2 t$ are represented.

That curve which comes nearest to the form of a straight line, should be accepted as a base to the real order of the reaction process.

As can be seen from Fig. 2, the best curves are those which correspond to the assumed value of $\alpha = 1$ (curves *a*).

This observation refers equally to the reduction processes, both the one with the solid carbon and that with the carbon solved in the iron bath. In other

words, both can be declared as first order processes. It is evident, that the reaction velocity depends on the phenomenon of diffusion, viz. the velocity can be increased by a continuous mixing of the bath. This is proved by the break point appeared in Fig. 1, which point corresponds to the time point of 45 minutes. (The mixing took place from the 45th min up to the 60th min.)

For both kinds of processes (viz. with, and without an iron bath) the entire period can be subdivided into three portions respecting the velocity constant initial portion, middle portion, final portion.

Correspondingly, we obtained the following velocity values, as tangents of the portions:

For the process *with an iron bath* is

$$k^1_{\text{initial}} = 0{,}013 \ \text{min}^{-1},$$
$$k^1_{\text{middle}} = 0{,}019 \ \text{min}^{-1},$$
$$k^1_{\text{final}} = 0{,}013 \ \text{min}^{-1}.$$

The initial portion (abt. 20—25 min) is characterized by a temperature of the molten slag not yet being below the prescribed level of 1650 °C. Thus, the reduction velocity is somewhat less than the optimum. During the middle portion (from the 25th up to the 60th min) the constancy of the temperature and the repeated carbonization are responsible for a dependable uniformity of conditions. A rather slight decrease of the velocity during the last 10 min of the final portion can probably be ascribed to some diminution of concentration accompanied by a minute change of slag viscosity.

For the process *without an iron bath* is

$$k^2_{\text{initial}} = 0{,}0062 \ \text{min}^{-1},$$
$$k^2_{\text{middle}} = 0{,}0078 \ \text{min}^{-1},$$
$$k^2_{\text{final}} = 0{,}0056 \ \text{min}^{-1}.$$

Obviously, the nearly uniform velocity during the first portion (30 minutes) proves that the temperature has already become stabilized in the first minutes.

During the middle portion (from the 30th up to the 105th min) the higher velocity can probably be ascribed to the fact that the carbon content of the iron bath is a highly reductive agent.

In trying to confront the two groups of the above constant values, it is reasonable to compare the middle portion of the first method with the initial portion of the second one (k^1_{middle} and k^2_{initial}), since these portions surely belong to the same temperature interval, and further because we might assume that during the initial portion of the 2nd method, the carbon content of the

reduced iron probably played only a still negligible role. By this recommended comparison we obtain the following ratio:

$$\frac{k^1_{\text{middle}}}{k^2_{\text{initial}}} = \frac{0{,}01906}{0{,}00623} = 3{,}059.$$

In other words, the reduction velocity of the molten ferro-nickel-slag for the first method is three times higher than during the second method.

When a charge of 500 kg is considered as the basic unit of the testing process, and with regard to the final value of 0,261 of the iron(II)oxide content at the end of the process carried out without an iron bath, we obtain the ratio of the useful period of time for these methods [Equs (1) and (6)]:

$$\frac{52\,\text{min}}{120\,\text{min}} = 0{,}434.$$

After all, taking into consideration the same level of reduction, the time needed for the first process is only the 0,434 part of the time necessary for the second process.

REFERENCES

1. *Кондаков, В. В. — Рыжонков, Д. И.:* Влияние основности на скорости восстановления железа из шлавовых расплавов твердым углеродом. *Известия В. У. З, Чорная Металлургия* (1963); I, 17.
2. *Ершов, Г. С. — Попова, Э. А.:* Восстановление железа и кремния из шлаковых расплавов углеродом. *Известия Академии Наук СССР Металлургия и Горное Дело* (1964); I, 32.
3. *Кондаков, В. В. — Рыжонков, Д. И. — Голенко, Д. М.:* Исследование кинетики восстановления закиси железе твердым углеродом при температуре выше 1400°. *Известия В. Ч. З. Черная Металлургия* (1960); IV, 23.
4. Dancy, T. E.: The Kinetics of the Reduction of Iron Oxide above 1400 °C. *Journal of the Iron and Steel Institute* (1951); IX, 17.

Beschleunigung der Reduktion von FeO-reichen Schmelzen mit in Eisen gelöstem Kohlenstoff. Mittels Betriebsversuchen wurde nachgewiesen, daß eine eisenoxydreiche Schmelze schneller reduziert werden kann, wenn sie durch Gießen auf kohlenstoffreiches Eisen reduziert wird, weil dann der in Eisen gelöste Kohlenstoff ebenfalls an der Reduktion teilnimmt. Die Geschwindigkeitskonstante der Reduktion, die auch mit in Eisen gelöstem Kohlenstoff verläuft, war unter den Versuchsbedingungen dreimal so groß wie die Geschwindigkeitskonstante der Reduktion mit bloß auf die Schmelze gestreutem Koks. Die Reduktion der eisenoxydreichen Schmelze war unter den Versuchsbedingungen scheinbar eine Reaktion erster Ordnung.

Ускорение восстановления богатых FeO расплавов растворенным в железе углеродом *(Й. Сиклавари).* Проведенные производственные опыты доказали, что богатый окисью железа расплав восстанавливается быстрее, если восстанавливается путем отливки его на высокоуглеродистое железо, так как в таком случае растворенный в железе углерод также участвует в восстановлении. Постоянная скорости восстановления, протекающая также с растворенным в железе углеродом, при опытных условиях была в три раза выше, чем постоянная скорости восстановления, происходящего только с посеянным на расплав коксом. Восстановление богатых окисью железа расплавов при опытных условиях казалось реакцией первого порядка.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 181—194 (1970)

AN INVESTIGATION OF THE EFFECTIVE WAKE FRACTIONS OF GEOSIMS

Z. BENEDEK*

[Manuscript received May 28, 1969]

To eliminate the scale effect on the effective wake fraction the ratio of two velocities (nominal relative velocities in the propeller race in open water and behind condition of propeller) can be used instead of the common wake fraction. This ratio is a linear function of a coefficient k. According to these the effective wake fraction of any ship can be determined by a linear extrapolation of the measured values of two different models, if the empirical formula is not taken into consideration. If so, the wake fraction can be determined by testing a single model of a ship.

Symbols

A	propeller disc area [m²];
$C = T/0{,}5\varrho V^2 A$	propeller load coefficient;
C_F	specific frictional resistance coefficient;
$C_{FT}=T_F/0{,}5\varrho V^2 A$	the viscous part of thrust coefficient;
D	diameter of the propeller [m];
F_D	tow rope force in propulsion test [kp];
R	total resistance [kp];
R_F	frictional resistance [kp];
$R_R = R_T - R_F$	residuary resistance [kp];
S	wetted surface of ship [m²];
T	propeller thrust [kp];
$T_F = T - R_R$	the "viscous" part of propeller thrust [kp];
V	ship speed [kn, ms^{-1}];
V_A	propeller advance speed [ms^{-1}];
V_0, V_1, V_2	relative velocities in the race of propeller [ms^{-1}];
a, b, d, n	constants;
$k = C_{FT}/(1 + C)$	the "viscous" part of propeller thrust coefficient;
k_T	thrust coefficient (in open water cond.);
m	subscript for the values of models;
n	number of revolution [sec^{-1}];
s	subscript for the values of ships;
w	Taylor wake fraction determined by thrust identity;
λ	model scale;
ϱ	mass density of water [kps^2m^{-4}].

I. Results of earlier investigations

On designing a ship propeller in general, the effective wake fraction defined by Taylor is used:

$$w = \frac{V - V_A}{V} \,. \tag{1}$$

* BENEDEK Z.: Budapesti Műszaki Egyetem Vízgépek Tanszéke, *Budapest XI* (Hungary).

The value of the effective wake fraction of any ship can be determined only by model tests according to the thrust identity: V_A is the propeller advance speed in open water condition (the model propeller is tested without a ship model), V is the ship speed at the propulsion tests of the ship model when the thrust coefficient

$$k_T = \frac{T}{\varrho \cdot n^2 \cdot D^4} \tag{2}$$

has the same value as in open water condition of propeller.

However the investigations of several model families indicated that models of a ship made in different scales give different effective wake fractions. E.g. the biggest model of the *Victory B* geosim has a value of 0,285 and the smallest model has a value of 0,430 at the same corresponding ship speed. Similar great scale effect occurs at other geosims, too (see Tables I, II, III).

For the *IX. ITTC* a method is proposed to take into consideration the scale effect [1]. According to this the wake fraction of a ship can be calculated by the equation

$$w_S = w_m \frac{C_{Fs}}{C_{Fm}}, \tag{3}$$

where the subscript s is for the values of the ship and the subscript m is for the values of the model. But according to Fig. 1 the values of C_F/w are not constants at a geosim. If it were assumed that the *Victory* model made in scale 18 is the model of the motorship *D. C. Endert* ($\lambda = 6$) and calculated with

$$\frac{C_F}{w} = 0{,}009 = \text{const.}$$

a value of 0,244 could be obtained for the wake fraction of the motor boat instead of the real value 0,285. The error of this calculation is 14 per cent. If calculated with the measured results of model made in scale $\lambda = 40$; $C_F/w = 0{,}010$ the error made would be of about 25 per cent.

For the *Victory* geosims another extrapolation method is obtained [2]: If a linear function of $C_F/w = f(C_F)$ is used (see in Fig. 1) the wake fractions would be given with less errors (2—6 per cent) than by the former method. But for other geosims this method gives greater errors too.

According to the method described in [3] the following formula can be used

$$(1 - w)\, w = a\, C_F + \text{const.} \tag{4}$$

The authors of the mentioned paper proposed 0,18 for the value of a constant in the case of *Victory A* geosim (Fig. 2). This method gives very good results at the *Strinda* and *Meteor* geosims [4] (see Fig. 3 and 4). But at these

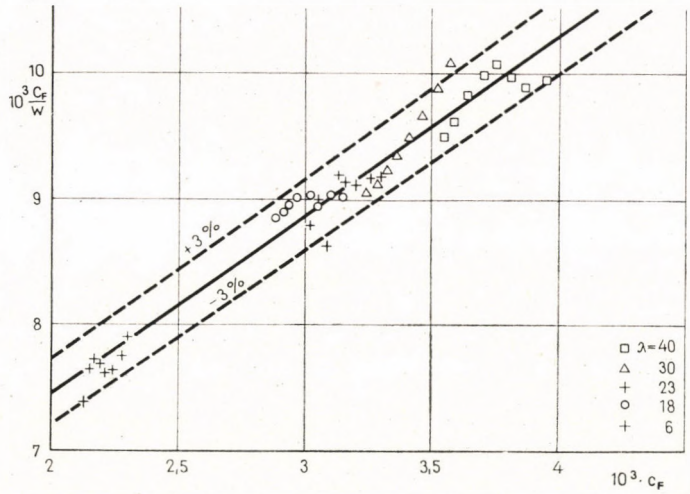


Fig. 1. Values of C_F/w for the geosim *Victory B* $(1/w = 1{,}43 + 4{,}58/10^3\, C_F)$

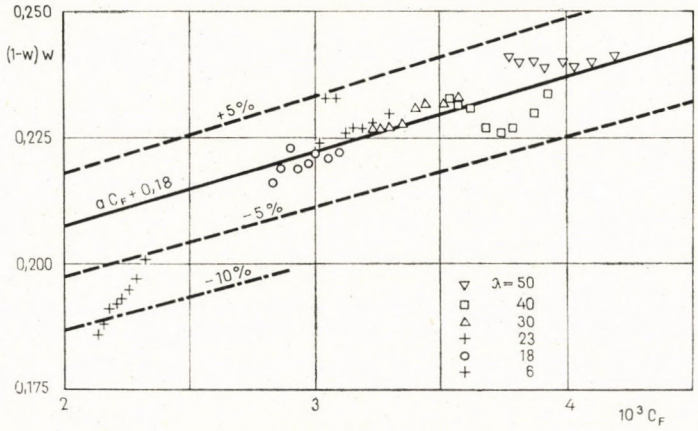


Fig. 2. Values of $(1 - w)w$ for the geosim *Victory A*

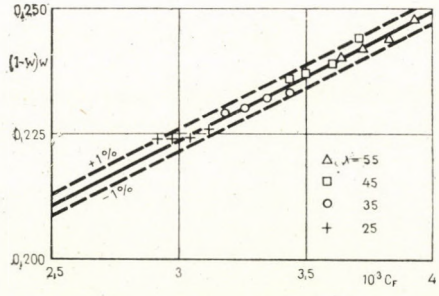


Fig. 3. Values of $(1 - w)w$ for the *Strinda* family, if $(1 - t)T_m = R_m$

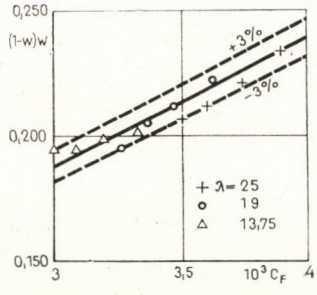


Fig. 4. Values of $(1 - w)w$ for the *Meteor* family, if $(1 - t)T_m = R_m$

geosims the investigated range of the C_F is very short ($C_F = 3 - 4 \cdot 10^{-3}$). According to Figs 2 and 4 *(Victory* and *Meteor)* it can be assumed that the values of $(1 - w)\, w$ is not a linear function of the C_F at a longer range, and at the *Victory* geosim the linear extrapolation gives about 10 per cent errors for the $(1 - w)\, w$ values of the model made in scale 6.

II. Investigation of the relative velocities in the propeller race

The purpose of using the effective wake fraction is to get a connection between the relative velocities at the open water condition of the propeller and the relative velocities at the behind condition of the propeller.

In the open water condition of the propeller the theorem of momentum is in a perfect fluid:

$$T = \frac{1}{2} \varrho A (V_1 + V_A)(V_1 - V_A), \tag{5}$$

where V_A is the advance speed and V_1 is a nominal relative velocity behind the propeller in the propeller race. This value of the thrust is roughly equal to the thrust in real fluid. The difference is only a few per cent of T.

If the propeller is acting behind the ship model, the water is accelerated from the ship speed (V) to the relative velocity in the propeller race behind the propeller (V_2). The water going through the propeller has an energy decrease along the ship hull. This energy loss is on account of the friction and because of the changing of the wave system at the stern. In the behind condition of the propeller the difference between the ideal and real values of the thrust cannot be neglected. Therefore, we have to calculate with this energy loss. In the theorem of momentum the energy loss can be taken into consideration by a resistance force (F) acting on the water

$$T = \frac{1}{2} \varrho A \, (V_2 + V) \, (V_2 - V) + F \, . \tag{6}$$

If it is assumed that this resistance force is equal to the resistance augmentation of the ship hull

$$F = T - R$$

the theorem of momentum on a self-propelled ship will be the following

$$R = \frac{1}{2} \varrho A \, (V_2 + V) \, (V_2 - V). \tag{7}$$

This means that a nominal velocity can be calculated in the propeller race behind the propeller in a self-propelled condition:

$$V_2^2 = \frac{R}{1/2 \cdot \varrho \cdot A} + V^2 . \tag{8}$$

In open water condition, according to equation (5):

$$V_1^2 = \frac{T}{1/2\, \varrho A} + V_A^2 . \tag{9}$$

For the calculation of the wake fraction the rations of the velocities V_A/V are determined at the thrust identity. From Equs (5) and (6) the thrust identity is

$$\frac{1}{2} \varrho A \,(V_1^2 - V_A^2) = \frac{1}{2} \varrho A \,(V_2^2 - V^2) + F . \tag{10}$$

This F force is a part of the "viscous" component of the thrust (T_F)

$$F = n \cdot T_F = n \frac{1}{2} \varrho V^2 S C_{FT} . \tag{11}$$

According to Equ. (23) described in [5] is

$$C_{FT} = (1 + C)\, k ,$$

thus

$$F = n \frac{1}{2} \varrho V^2 S \,(1+C)\, k$$

and

$$\frac{1}{2} \varrho A \,(V_1^2 - V_A^2) = \frac{1}{2} \varrho A \,(V_2^2 - V^2) + n \frac{1}{2} \varrho V^2 S \,(1+C)\, k , \tag{12}$$

or

$$\left(\frac{V_1}{V}\right)^2 - \left(\frac{V_A}{V}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V}\right)^2 + 1 = n \frac{S}{A} (1+C)\, k . \tag{13}$$

According to Equ. (21) in paper [5] is

$$1 + C = \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 ,$$

where V_0 is the relative velocity behind the propeller in an ideal stream. Thus it can be said that equation (13)

$$V^2 - V_A^2 + V_1^2 - V_2^2 = n \frac{S}{A} k V_0^2 \tag{14}$$

contribute between the different velocities in the function of k.

If the measured values of T, R, V and V_A are known, the values of V_1 and V_2 can be calculated. Thus the ratio V_2/V_1 can also be used instead of the $V_A/V = 1 - w$ for the comparison of the open water and behind conditions of the ship propeller. The velocities in the propeller race (V_1 and V_2) contain the influences of the forces more (thrust and resistance) than the advance speeds (V and V_A), therefore, there is a bigger scale effect on the effective wake fraction than on the ratio of V_2/V_1.

It has been seen in [5] that using the coefficient k a good method is given for the determination of the resistance augmentation. According to Equ. (12) the relative velocities in propeller race are the functions of k. Therefore, the ratio of velocities will be investigated in the function of k values.

III. Results of model tests

By means of the measured results of the *Victory A* and *B*, the *Meteor* and the *Strinda* geosims [6—8] the values of the different velocities in propeller race are calculated. The values of the wake fractions (determined from thrust identity) and the values of the ratio of V_2/V_1 are given in Tables I, II, III.

Table I

The values of effective wake fractions and the V_2/V_1 values of Victory families

Model scale	Ship speed [knots]	50		40		30		23		18		6	
		$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1
Draught *A* (loaded condition)	10	404	1,153	376	1,161	370	1,168	360	1,153	333	1,146	291	1,108
	11	403	1,149	358	1,148	364	1,159	352	1,149	329	1,147	269	1,100
	12	398	1,146	349	1,140	366	1,154	350	1,149	333	1,150	266	1,101
	13	400	1,149	346	1,138	361	1,146	349	1,147	328	1,139	262	1,102
	14	396	1,151	351	1,136	353	1,141	347	1,140	324	1,129	259	1,095
	15	400	1,153	362	1,140	347	1,134	346	1,139	325	1,131	256	1,089
	16	402	1,153	367	1,140	348	1,124	346	1,130	324	1,133	251	1,086
	17	403	1,134	369	1,130	349	1,121	339	1,119	315	1,125	247	1,083
Draught *B* (light condition)	10	429	1,196	397	1,179	354	1,199	359	1,179	349	1,187	291	1,139
	11	431	1,195	391	1,174	356	1,162	355	1,176	343	1,157	294	1,139
	12	430	1,194	382	1,167	358	1,174	350	1,173	341	1,174	293	1,136
	13	427	1,187	372	1,162	359	1,173	345	1,170	334	1,185	290	1,143
	14	427	1,183	370	1,162	359	1,168	340	1,159	328	1,162	285	1,128
	15	426	1,178	370	1,166	359	1,166	358	1,166	327	1,161	281	1,121
	16	429	1,183	373	1,163	359	1,162	339	1,157	326	1,161	281	1,117
	17	430	1,175	373	1,157	357	1,155	343	1,152	325	1,149	288	1,117

Table II

The values of effective wake fractions and the V_2/V_1 values of Meteor family

Sign of the towing conditions	Ship speed [knots]	Model scale					
		25		19		13,75	
		$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1
a) (self propelled condition)	8	370	1,127	395	1,162	384	1,192
	10	331	1,110	340	1,132	336	1,162
	12	302	1,143	312	1,166	307	1,197
	14	290	1,127	293	1,132	298	1,164
b)	8	334	1,127	330	1,154	320	1,183
	10	304	1,119	300	1,123	298	1,159
	12	288	1,157	281	1,176	279	1,198
	14	266	1,088	269	1,095	272	1,105
c)	8	280	1,125	278	1,141	271	1,152
	10	274	1,114	266	1,126	270	1,135
	12	263	1,100	262	1,100	270	1,120
	14	264	1,085	268	1,088	274	1,099

Table III

The values of effective wake fractions and the V_2/V_1 values of Strinda family

Sign of the towing conditions	Ship speed [knots]	Model scale							
		55		45		35		25	
		$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1	$10^3 \cdot w$	V_2/V_1
a) (self propelled condition)	12	467	1,170	423	1,159	370	1,133	346	1,133
	14	426	1,149	396	1,146	368	1,127	340	1,119
	16	408	1,129	384	1,124	359	1,116	340	1,116
	18	400	1,105	381	1,107	356	1,099	340	1,099
b)	12	480	1,216	418	1,210	374	1,169	346	1,156
	14	434	1,176	397	1,163	370	1,156	342	1,150
	15	421	1,152	388	1,145	365	1,139	342	1,136
	18	419	1,138	384	1,124	360	1,121	340	1,114
c)	12	498	1,287	422	1,249	383	1,217	347	1,196
	14	448	1,230	404	1,208	372	1,196	342	1,181
	16	431	1,198	395	1,185	372	1,176	345	1,164
	18	426	1,153	393	1,151	364	1,143	343	1,137

Table IV

Differences of the values of w and V_2/V_1 at the biggest and smallest models

Geosims type	λ	w	V_2/V_1
Victory A	50	0,400	1,153
	6	0,256	1,109
Difference [%]		36,0	4,2
Victory B	50	0,427	1,178
	6	0,281	1,121
Difference [%]		34,2	5,0
Meteor family	25	0,302	1,143
	13,75	0,263	1,100
Difference [%]		12,9	3,8
Strinda family	55	0,408	1,129
	25	0,340	1,116
Difference [%]		16,7	1,0

It can be seen that the values of V_2/V_1 are not so different at the biggest and smallest models as the values of the effective wake fraction. E.g. the values of w and V_2/V_1 are given in Table IV for *Victory* geosims at 15 knots corresponding ship speed, for the *Meteor* family at 12 knots corresponding ship speed and for *Strinda* family at 16 knots corresponding ship speed.

Figures 5, 6, 7, 8, 9 and 10 show the functions of $V_2/V_1 = f(k)$. The values determine straight lines for all geosims with a very good approximation:

$$\frac{V_2}{V_1} = ak + b. \tag{15}$$

The values of a and b are given in Table V.

Table V

Values of a and b

Geosims type	a	b
Victory A (Fig. 5)	117,5	0,8620
Victory B (Fig. 6)	95,0	0,9250
Strinda (for all three different model conditions Fig. 7, 8 and 9)	182,0	0,7715
Meteor (for all three different model conditions Fig. 10)	152,0	0,7780

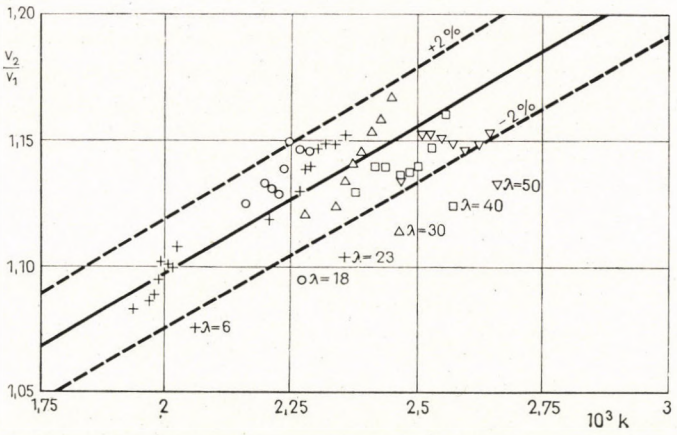


Fig. 5. Values of V_2/V_1 for the geosim *Victory A:* $V_2/V_1 = 117{,}5\,k + 0{,}862$

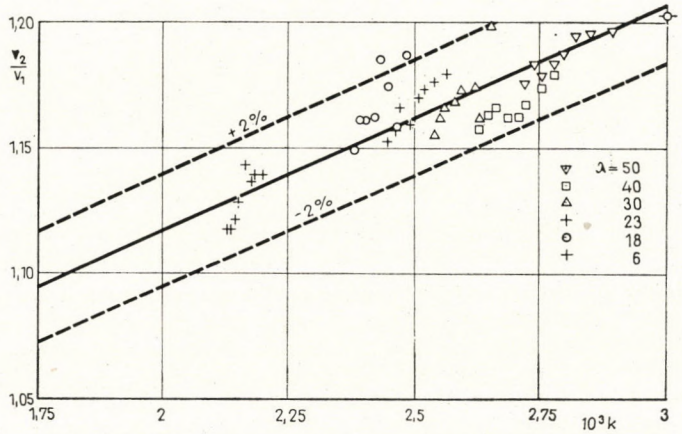


Fig. 6. Values of V_2/V_1 for the geosim *Victory B:* $V_2/V_1 = 90\,k + 0{,}936$

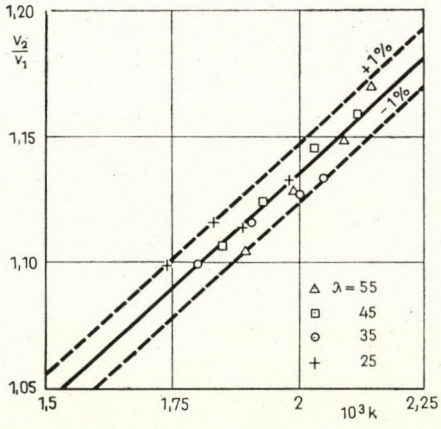


Fig. 7. Values of V_2/V_1 for the *Strinda* family: $(V_2/V_1 = 182\,k + 0{,}7715)$ if $(1-t)T_m = R_m$

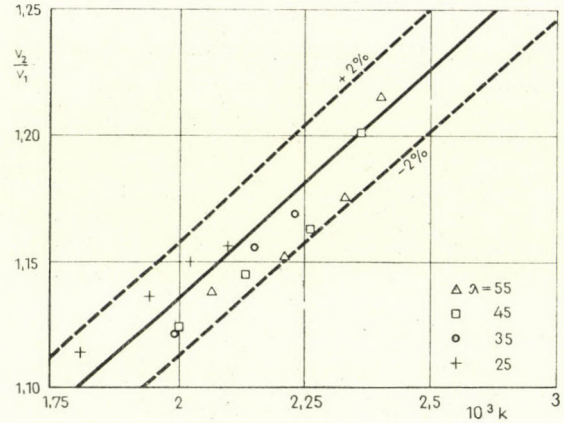


Fig. 8. Values of V_2/V_1 for the *Strinda* family: $(V_2/V_1 = 182\,k + 0{,}7715)$ if $(1 - t)T_m = R_m - 0{,}5\,F_D$

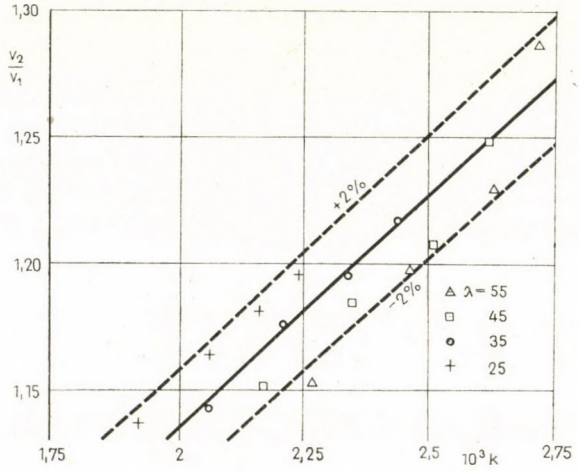


Fig. 9. Values of V_2/V_1 for the *Strinda* family: $(V_2/V_1 = 182\,k + 0{,}7715)$ if $(1 - t)T_m = R_m - F_D$

According to these results the values of a can be determined by the following empirical formula

$$a = 1{,}17\frac{S}{A} - d\,, \tag{16}$$

where the value of d is 78 in the cases of the common stern construction (at families *Victory A, B and Strinda)* and 61 in the case of the *Meteor* geosim.

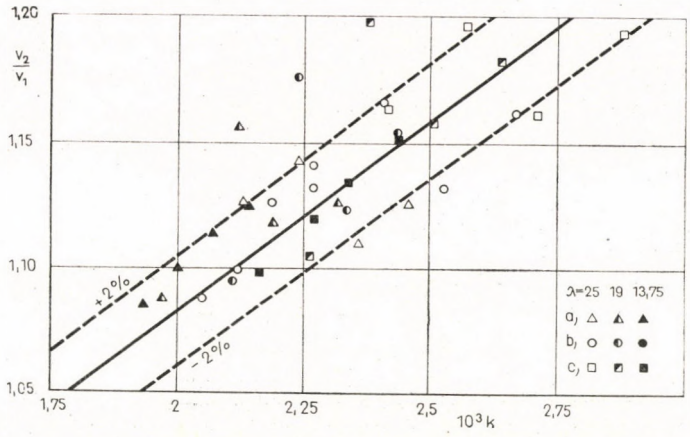


Fig. 10. Values of V_2/V_1 for the *Meteor* family: $V_2/V_1 = 152\,k + 0{,}778$. $(1-t)T_m = R_m$ (*a*); $(1-t)T_m = R_m - 0{,}5\ F_D$ (*b*); $(1-t)T_m = R_m - F_D$ (*c*)

We can see that these straight lines give the values of the V_2/V_1 ratio in the function of k with very small errors. The values of the greatest difference per cents are at

Victory A	2,0 per cent,
Victory B	2,4 per cent,
Strinda	2,0 per cent,
Meteor	2,5 per cent

(if in the latest case three very different points are not taken into consideration).

IV. Numerical example

Let us assume that the *Victory A* model made in scale 50 is the model of the *D. C. Endert* motor boat. (In this case the scale of the model is 50/6 = 8,33.) At 14 knots corresponding ship speed according to the measured results of model we obtain $R = 0{,}372$ kp, $T = 0{,}463$ kp, $V = 1{,}019$ m/sec, $V_A = 0{,}615$ m/sec, $w = 0{,}396$.

a) If calculating with a constant effective wake fraction, the propeller advance speed of motor ship is

$$V_A = (1-w)\ V = (1-0{,}396)\cdot 2{,}943 = 1{,}770\ \ m/sec,$$

where V is the speed of motor boat at 14 knots corresponding ship speed.

b) If we assume that the V_2/V_1 ratio is constant at the motor ship and at her model we can obtain for the model [see Equs (8) and (9)]:

$$V_2^2 = \frac{R}{0{,}5\,\varrho A} + V^2 = \frac{0{,}372}{0{,}5\cdot 105\cdot 0{,}0088} + 1{,}019^2 = 1{,}867\,,$$

$$V_1^2 = \frac{T}{0{,}5\,\varrho A} + V_A^2 = \frac{0{,}463}{0{,}5\cdot 102\cdot 0{,}0088} + 0{,}615^2 = 1{,}409\,;$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1{,}867}{1{,}409}} = 1{,}151\,.$$

For the *motor boat* at $V = 2{,}943$ m/sec, $R = 144{,}2$ kp (from resistance tests), $T = 197$ kp (extrapolated by the method described in [5]):

$$V_2^2 = \frac{R}{0{,}5\,\varrho A} + V^2 = \frac{144{,}2}{0{,}5 \cdot 102 \cdot 0{,}611} + 2{,}943^2 = 13{,}274.$$

By means of V_2/V_1 ratio obtained from model tests we obtain

$$V_1 = V_2 \frac{V_1}{V_2} = \frac{3{,}641}{1{,}151} = 3{,}166 \text{ m/sec},$$

and

$$V_A = \sqrt{V_1^2 - \frac{T}{0{,}5\,\varrho A}} = \sqrt{3{,}166^2 - \frac{197}{0{,}5\ 102\ 0{,}611}} = \underline{2{,}380 \text{ m/sec.}}$$

c) If we test another model too, or we use only the results of the model made in scale 50 and Equ. (16) the straight line of $V_2/V_1 = f(k)$ can be determined.

The value of k of motor boat at 14 knots corresponding ship speed is $1{,}98 \cdot 10^{-3}$ [5]. At this value according to the straight line (Fig. 5):

$$\frac{V_2}{V_1} = 1{,}095.$$

is obtained and thus

$$V_1 = V_2 \frac{A_1}{V_2} = \frac{3{,}641}{1{,}095} = 3{,}325 \text{ m/sec.}$$

and

$$V_A = \sqrt{3{,}325^2 - \frac{197}{0{,}5 \cdot 102 \cdot 0{,}611}} = \underline{2{,}17 \text{ m/sec.}}$$

d) According to the results of the test of *D. C. Endert* the exact value of V_A is 2,18 m/sec.

For the comparison of the used three methods the obtained values of V_A and its percentage differences from the exact value are given in Table VI.

Table VI

Comparison of the three methods used

Method	V_A [ms^{-1}]	Differences [%]
Method of $w = \text{const.}$	1,770	—18,8
Method of $V_2/V_1 = \text{const.}$	2,380	+ 9,2
Method of $V_2/V_1 = ak + b$	2,170	— 0,5
Exact value	2,180	—

V. Conclusion

The investigation of the measured results of four geosims show that the effective wake fractions of different models are very different at the same corresponding ship speed. If it is used the effective wake fraction obtained from only one model test an error of about $15 \div 40$ per cent can be made on calculating the propeller advance speed.

Using the $V_2/V_1 = \text{const.}$ ratio instead of w (effective wake fraction) gives only 5—15 per cent error. But the ratios of V_2/V_1 give a straight line in the function of the k factor. If the model experiments of any ship are made by *two* different models (two models made on different scales) or *one* model with two different rough surfaces, the $V_2/V_1 = f(k)$ linear function can be obtained. By means of this linear function the calculation of the propeller advance speed has only 1—3 per cent error. These errors have practically the same values as the errors of testing.

In the equation of the

$$\frac{V_2}{V_1} = ak + b\,, \tag{15}$$

the value of a can be determined by

$$a = 1{,}17\,\frac{S}{A} - d\,, \tag{16}$$

where the value of d is the function of the stern construction of ship. The values of b and d are constant for the same ship form at all propeller conditions (self propelled condition and the usualy model conditions too).

If some approximative methods can be obtained for the determination of value d, the propeller advance speed of a ship can be calculated by means of the testing of a single model.

REFERENCES

1. Tsakonas, S.—Jacobs, W.—Breslin, J.: Wake Fraction and Thrust Deduction Scale Effect. IX. ITTC Paris.
2. Benedek, Z.: The Wake Fraction of a Geosim. *Periodica Polytechnica* **10** (1966).
3. Lindgreen, H.—Johnson, C. A.: The Correlation of Ship Power and Revolutions with Model Results. Meddalangen fran Statens Skeppsprovningsanstalt, Göteborg 1960; Nr. 46.
4. Grothues, Spork, H.: On Geosim Tests for the Research Vessel Meteor and a Tanker. *Transactions of the Institute of Mariae Engineers* (1965).
5. Benedek, Z.: A New Method for the Prediction of Propeller Thrust. Acta Techn. Hung. (in press).
6. Lap, A. J. W.—van Manen, J. D.: Scale Effect Experiments of Victory Ship and Models; Part III and IV. Trina 1962.
7. Modellfamilienversuche for das Forschungschiff Meteor. *VWS Bericht* (1965), Nr. 321.
8. Modellfamilienversuche für einen 20 000 tdw Tanker. *VWS Bericht* (1964), Nr. 280.

Untersuchung der effektiven Mitstromziffern der Modellfamilien. Zur Beseitigung des sich im Wert der effektiven Mistromziffer zeigenden Maßstabeffektes ist es zweckmäßiger — anstatt der Mitstromziffer — das Verhältnis zweier nomineller Geschwindigkeiten zu gebrauchen:nominelle relative Geschwindigkeiten in dem sich hinter dem Propeller herausbildenden Wasserstrahl bei dem Propellerfreifahrversuch und im Zustand hinter dem Schiffskörper. Dieses Verhältnis ist eine lineare Funktion des Koeffizienten k. Auf dieser Grundlage kann der Wert der effektiven Mitstromziffer eines Schiffes laut der Versuchsergebnisse zwei verschiedener Modelle ohne Maßtabeffekt ermittelt werden. Mit der Anwendung der empirischen Formeln geben die Versuchsergebnisse auch eines einzigen Modells die Möglichkeit, den Wert der effektiven Mitstromziffer genau zu bestimmen.

Анализ эффективного коэффициента течения семейств моделей *(З. Бенедек)*. Чтобы избежать воздействия масштабного эффекта, наблюдающегося в значении эффективного коэффициента течения, вместо коэффициента течения целесообразнее использовать отношение двух номинальных скоростей: номинальную относительную скорость в струе воды, формирующейся позади винта, в состояниях на свободной водной поверхности и позади корпуса судна. Это отношение есть линейная функция коэффициента κ. На основе сказанного выше значение эффективного коэффициента течения некоторого судна можно определить без воздействия масштабного эффекта на основе результатов исследования двух различных его моделей, если не принимать во внимание упомянутую выше эмпирическую формулу. Используя эмпирические формулы, становится возможным точно определить значение эффективного коэффициента течения при применении результатов измерения одной единственной модели.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (1—2), pp. 195—218 (1970)

ANALOGY BETWEEN THE STRESS STATES OF SPHERICAL SHELLS AND PARABOLOIDAL SHELLS OF REVOLUTION

P. CSONKA*
DOCTOR OF TECHN. SC.

[Manuscript received July 9, 1970]

Present paper establishes a correlation between spherical shells and paraboloid shells of revolution coordinated to the former. The axis of revolution of the paraboloid shell passes through the centre point of the spherical shell. The radius of curvature of the paraboloid shell's meridian at its axis point is the twofold of the radius of the middle surface of the spherical shell. The stereographical projection of the points lying on the middle surface of the spherical shell, corresponds to those points of the paraboloid shell, the ground-plan projection of which coincides with the stereographically projected points of the spherical shell. The centre of the stereographic projection is the point at which the axis of the paraboloid shell intersects the middle surface of the spherical shell. The relationship existing between the stress and loading state of these two kinds of shells may be expediently used for the solution of certain statical problems.

1. Introduction

This paper establishes a correlation between the outher and inner forces of a spherical shell and a paraboloid shell of revolution (called *paraboloid shell* in the following), both coordinated to each other. This correlation may be of use in solving certain problems of either kind of shells, provided that the solution of an analogous problem of the reversed kind of shells is known.

2. Data concerning spherical shells

For locating the points lying on the middle surface of the spherical shell a spherical coordinate system $0(\vartheta, \omega)$ is introduced, the origin 0 of which coincides with the centre point of the sphere (Fig. 1.). The axis $\omega = 0$ of this system of coordinates is vertical. Its upper point of intersection with the middle surface of the spherical shell is called *zenith point* Z, its lower point of intersection *nadir point* N. The lines $\vartheta = \text{const}$ of the shell's middle surface will be denoted as *meridians*, the circles $\omega = \text{const}$ as *parallels*. The distance between the points on the middle surface of the shell and axis line $\omega = 0$ are symbolized by r, the radius of the sphere is denoted by R.

The points on the middle surface of the spherical shell should be projected from point N to the tangential plane of the spherical shell at point Z. This kind of projection is known as a *stereographical projection*. For instance:

* Prof. P. Csonka; Bartók B. út 31, *Budapest, XI* (Hungary)

the stereographical projection of point A lying on the middle surface of the spherical shell is A' (Fig. 2).

In order to locate the points lying in the projection plane the polar coordinate system $Z(r', \vartheta)$ is introduced.

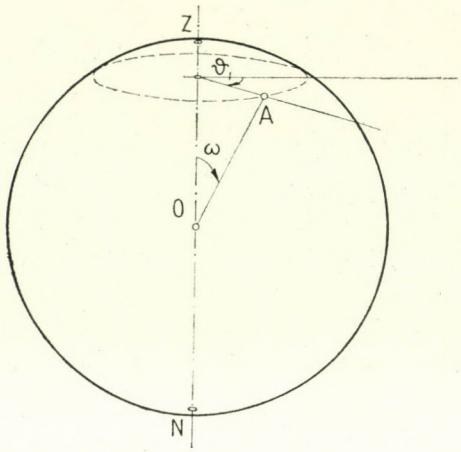


Fig. 1. Spherical coordinate system $0\ (\vartheta, \omega)$

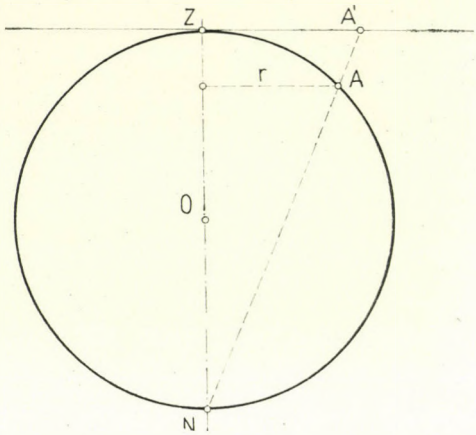


Fig. 2. Point A and its stereographic projection

The loads, to which the shell is subjected, are given by their components acting in the direction of the meridians, parallel circles and normals of the shell's middle surface. The specific value of these forces related to the unit area of the middle surface is characterized by the load functions

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(\vartheta, \omega), \\ p_2 &= p_2(\vartheta, \omega), \\ p_3 &= p_3(\vartheta, \omega). \end{aligned} \tag{1}$$

3. Data concerning paraboloid shells

The axis of revolution of the paraboloid shell to be investigated should coincide with the axis ZN of the spherical shell.

In order to describe the location of the points lying on the middle surface of the paraboloid shell the cylindrical coordinate system $Z''(r', \vartheta, z)$ should be introduced. The axis line z of the latter is identical with the axis line $\omega = 0$ of the spherical coordinate system $0(\vartheta, \omega)$ and its positive branch is directed downwards. In this coordinate system the equation of the middle surface of the paraboloid shell correlated to the spherical shell is

$$z = \frac{1}{4R} r'^2 . \tag{2}$$

The radius of curvature of the middle surface of the paraboloid shell at point $r' = 0$ is equal to $2R$, that is, twice as long as the radius of the middle surface of the spherical shell.

The point of the middle surface of the paraboloid shell which corresponds

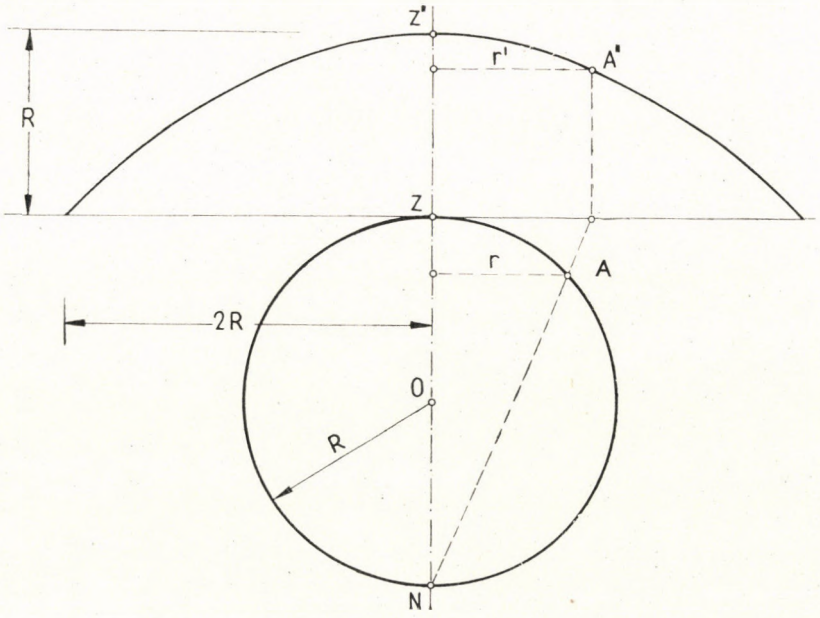


Fig. 3. Correlated points of the middle surfaces of the spherical and the paraboloid shell

to point A of the middle surface of the spherical shell is marked by A'' (Fig. 3). The ground-plan projection of point A'' is identical with the stereographical projection of point A.

The load system $p' = p'(r', \vartheta)$ to which the spherical shell is subjected, will be brought into correlation with the load system acting upon the paraboloid shell. The components acting in directions of the radii, the parallels and the verticals should be characterised by load functions

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1'(r', \vartheta), \\ p_2' &= p_2'(r', \vartheta), \\ p_3' &= p_3'(r', \vartheta). \end{aligned} \tag{3}$$

The specific value of all these components are related to the surface unit of the *ground-plan*.

4. Geometrical correlations

As is known, the stereographical projection of spherical surfaces is conform, i.e. the angles keep their original size. Consequently, the relation between the actual length of the surface line elements passing through a given point A

of the sphere and the length of their stereographical projection is independent of the direction of these line elements. This relation, only depending on the distance as measured from axis z and expressing the quotient of real and projectional lengths, should be marked by the symbol ds/ds'.

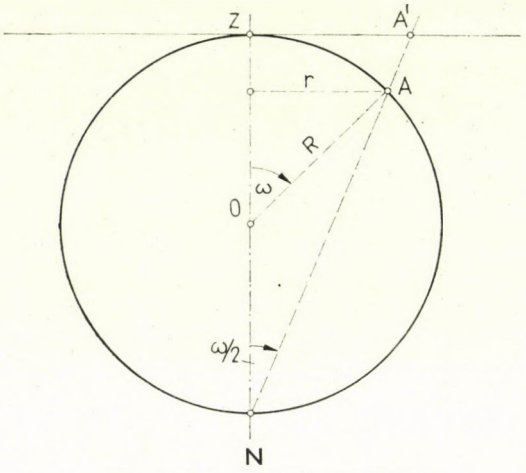


Fig. 4. Geometrical correlations

Obviously, ratio ds/ds' is identical with the ratio of the circumference of circles with radii r and r' (Fig. 4), that is

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{2\pi r}{2\pi r'} = \frac{r}{r'} .$$

However,

$$r : r' = (R + R\cos\omega) : 2R ,$$

which means that

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{1+\cos\omega}{2} \tag{4}$$

holds.

To determine the value of $\cos\omega$ figuring in the above formula we have to start out from relation

$$\tan\frac{\omega}{2} = \frac{r'}{2R}$$

to be read from Fig. 4. Accordingly

$$\tan\omega = \frac{2\tan\dfrac{\omega}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\omega}{2}} = \frac{2\dfrac{r'}{2R}}{1-\dfrac{r'^2}{4R^2}} = \frac{4Rr'}{4R^2-r'^2} , \tag{5}$$

and so

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16\,R^2\,r'^2}{(4\,R^2-r'^2)^2}}} = \frac{4\,R^2-r'^2}{\sqrt{16\,R^4+8\,R^2\,r'^2+r'^4}},$$

that is, after simplification

$$\cos\omega = \frac{4\,R^2-r'^2}{4\,R^2+r'^2}. \tag{6}$$

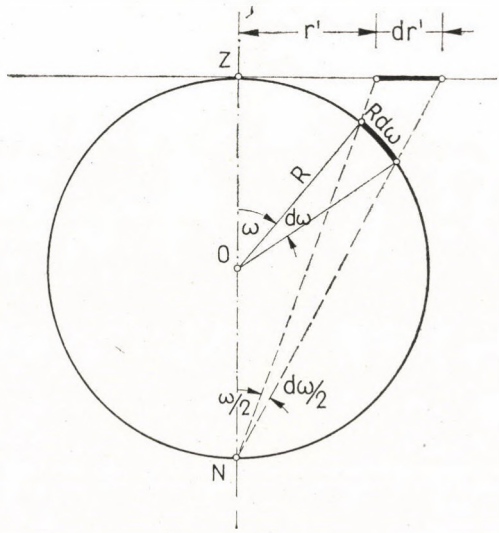


Fig. 5. Geometrical correlations

At the same time

$$\sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{4\,Rr'}{4\,R^2+r'^2}, \tag{7}$$

and so

$$r = R\sin\omega = \frac{4\,R^2\,r'}{4\,R^2+r'^2}. \tag{8}$$

In the possession of formula (5) the ratio ds/ds′ sought for may be expressed by

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{4\,R^2}{4\,R^2+r'^2}.$$

It is obvious that the same ratio will express the relationship existing between the meridian-directed line element $R \cdot d\,\omega$ and the increase of radius marked in Fig. 5 by dr', that is

$$\frac{R\cdot d\omega}{dr'} = \frac{4\,R^2}{4\,R^2+r'^2}.$$

Thus

$$\frac{dr'}{d\omega} = \frac{4R^2 + r'^2}{4R} \,. \tag{9}$$

5. Equilibrium conditions of spherical shells

Let us mark a point A on the middle surface of the spherical shell and cut out from its immediate vicinity an elementary part of the shell, the middle surface of which is limited by meridian arches ϑ and $\vartheta + d\vartheta$, further by parallel circles ω and $\omega + d\omega$ (Fig. 6).

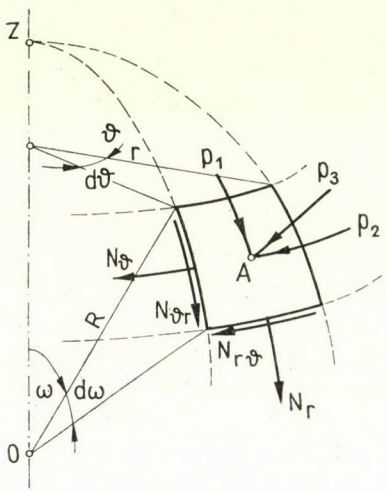


Fig. 6. Inner forces N_r, $N_{r\vartheta}$, $N_{\vartheta r}$, N_ϑ of the spherical shell

The value of the inner forces acting upon the mentioned element of the sphere should be marked with

$$N_r, N_{r\vartheta}, N_{\vartheta r}, N_\vartheta \,.$$

These terms are referred to the unit length of the sides of the investigated sphere element. From among these

$$N_{\vartheta r} = N_{r\vartheta} \,.$$

The equilibrium of forces acting upon the sphere element can be expressed by three differential equations in conformity with the direction of the meridians, the parallel circles and the normals of the shell.

5.1. *Equilibrium in direction of the meridians*

The force components acting in meridional direction are: the increment

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(N_r\, r \cdot d\vartheta)\, d\omega$$

of the meridian force $N_r\, r \cdot d\vartheta$; the increment

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(N_{\vartheta r}\, R \cdot d\omega)\, d\vartheta$$

of shearing force $N_{\vartheta r} R \cdot d\omega$; the meridian-directed component

$$-N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \cos\omega$$

of the resultant $N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta$ of the bilateral forces $N_\vartheta R \cdot d\omega$; and finally the meridian directed component

$$p_1 r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega$$

of the external force to which the sphere element is subjected. Accordingly, the equilibrium equation in question is

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(N_r\, r \cdot d\vartheta)\, d\omega + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(N_{\vartheta r}\, R \cdot d\omega)\, d\vartheta - $$

$$- N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \cos\omega + p_1\, r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega = 0\,.$$

Taking into consideration relation (10) and simplifying the former equation by $R \cdot d\vartheta \cdot d\omega$, the following equilibrium condition will be arrived at:

$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \omega}(rN_r) + \frac{\partial N_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - N_\vartheta \cos\omega + rp_1 = 0\,. \tag{11}$$

5.2. *Equilibrium in direction of the parallels*

The force components acting in the direction of the parallels are: the increment

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(N_\vartheta\, R \cdot d\omega)\, d\vartheta$$

of the normal forces $N_\vartheta R \cdot d\omega$; the increment

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(N_{r\vartheta} r \cdot d\vartheta)\, d\omega$$

of the shearing forces $N_{r\vartheta} r \cdot d\vartheta$; the resultant

$$N_{\vartheta r} R \cdot d\omega \cdot \cos\omega \cdot d\vartheta$$

of the horizontal projection of bilateral forces $N_{\vartheta r} R \cdot d\omega$; as well as the component

$$p_2 r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega$$

acting in direction of the parallels of the external force to which the sphere element is subjected. Thus, the equilibrium equation in question is

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(N_\vartheta R \cdot d\omega)\, d\vartheta + \frac{\partial}{\partial \omega}(N_{r\vartheta} r \cdot d\vartheta)\, d\omega + \\ + N_{\vartheta r} R \cdot d\omega \cdot \cos\omega \cdot d\vartheta + p_2 r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega = 0.$$

Taking into consideration relation (10) and simplifying the equation in question by $R \cdot d\vartheta \cdot d\omega$, the following equilibrium condition will be arrived at:

$$\frac{\partial N_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \omega}(rN_{r\vartheta}) + N_{r\vartheta} \cos\omega + rp_2 = 0. \tag{12}$$

5.3. *Equilibrium in direction normal to the shell*

The force components acting in the direction normal to the shell are: the resultant

$$N_r r \cdot d\vartheta \cdot d\omega$$

of the bilateral normal forces $N_r r \cdot d\vartheta$; the normal component

$$N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin\omega$$

of the resultant $N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta$ of the bilateral horizontal forces $N_\vartheta R \cdot d\omega$; as well as the normal component

$$p_3 r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega$$

of the external force to which the shell element is subjected. Accordingly, the equilibrium condition in question is

$$N_r r \cdot d\vartheta \cdot d\omega + N_\vartheta R \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin\omega + p_3 r \cdot d\vartheta \cdot R \cdot d\omega = 0 ,$$

respectively, after simplification by $d\vartheta \cdot d\omega$

$$rN_r + RN_\vartheta \sin\omega + R\, r p_3 = 0 .$$

However,

$$R \sin\omega = r ,$$

thus, the equilibrium condition in question may be modified as

$$\frac{1}{R}(N_r + N_\vartheta) + p_3 = 0 . \tag{13}$$

6. Equilibrium conditions of paraboloid shells

Passing on to the investigation of paraboloid shells, the points brought into correspondance with point A of the middle surface of the spherical shell are: A' lying on the projection plane and A'' lying on the middle surface of the paraboloid shell (Fig. 7).

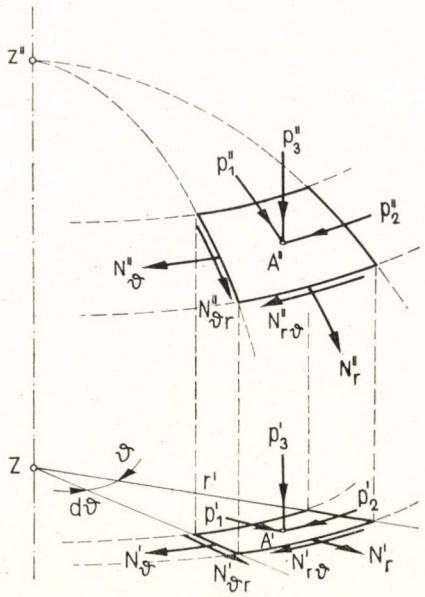


Fig. 7. Forces acting upon the paraboloid shell

Let us cut out from the vicinity of point A'' a shell element, the middle surface of which is limited by meridians ϑ and $\vartheta + d\vartheta$, further by parallel circles r' and $r' + dr'$. To the middle surface of this shell element an elementary circular ring sector corresponds, the area of which is $r' \cdot d\vartheta \cdot dr'$. Since we are dealing with a stereographical projection, the shape of this circular sectorial element is similar to the middle surface of the investigated element of the spherical shell.

The inner forces acting upon the mentioned element of the paraboloid shell — the so called *real inner forces* — should be denoted by

$$N''_r, N''_{r\vartheta}, N''_{\vartheta r}, N''_{\vartheta}.$$

These terms are referred to the unit length of the sides of the shell element under investigation. From among these

$$N''_{\vartheta r} = N''_{r\vartheta}. \tag{14}$$

The ground-plan projection of inner forces — the socalled *reduced inner forces* — should be marked by

$$N'_r, N'_{r\vartheta}, N'_{\vartheta r}, N'_{\vartheta}$$

and referred to the unit length of the ground-plan projection of the sides of the shell element. Taking into consideration the relations under (2), the real inner forces are in connection with the reduced forces as follows:

$$\begin{aligned} N''_r &= \sqrt{1+(dz/dr')^{2'}} \cdot N'_r = \frac{\sqrt{4R^2+r'^2}}{2R} N'_r, \\ N''_{r\vartheta} &= N'_{r\vartheta}, \\ N''_{\vartheta r} &= N'_{\vartheta r}, \\ N''_{\vartheta} &= \frac{1}{\sqrt{1+(dz/dr')^2}} N'_{\vartheta} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2+r'^2}} N'_{\vartheta}. \end{aligned} \tag{15}$$

Of course,

$$N'_{\vartheta r} = N'_{r\vartheta}. \tag{16}$$

The equilibrium of the forces acting upon the element cut out from the shell will be expressed with the aid of the reduced inner forces. Similarly to the former, this procedure will lead to three differential equations corresponding to the the directions of the radii, parallels and verticals.

6.1. *Equilibrium in direction of the radii*

The condition of equilibrium of the force components in radial direction is:

$$\frac{\partial}{\partial r'}(N'_r r' \cdot d\vartheta)\, dr' + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(N'_{\vartheta r} \cdot dr')\, d\vartheta - \\ - N_\vartheta \cdot dr' \cdot d\vartheta + p'_1 r' \cdot d\vartheta \cdot dr' = 0.$$

Taking into consideration relation (16), simplifying the equation by $d\vartheta \cdot dr'$ and carrying out a partial derivation, the equilibrium condition is:

$$r' \cdot \frac{\partial N'_r}{\partial r'} + N'_r + \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - N'_\vartheta + p'_1 r' = 0. \tag{17}$$

6.2. *Equilibrium in direction of the parallels*

The condition of equilibrium of the force components in the direction of the parallels is:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}(N'_\vartheta \cdot dr')\, d\vartheta + \frac{\partial}{\partial r'}(N'_{r\vartheta} r' \cdot d\vartheta)\, dr' + \\ + N'_{\vartheta r} \cdot dr' \cdot d\vartheta + p'_2 r' \cdot d\vartheta \cdot dr' = 0.$$

After substitution of (16), further, after partial derivation and simplification, this equation becomes:

$$\frac{\partial N'_\vartheta}{\partial \vartheta} + r' \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial r'} + 2 N'_{r\vartheta} + p'_2 r' = 0. \tag{18}$$

6.3. *Equilibrium in vertical direction*

The condition of equilibrium of the vertical force components is:

$$\frac{\partial}{\partial r'}\left(N'_r r' \cdot d\vartheta \cdot \frac{dz}{dr'}\right) dr' + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(N'_{\vartheta r} \cdot dr' \cdot \frac{dz}{dr'}\right) d\vartheta + p'_3 r' \cdot d\vartheta \cdot dr'_3 = 0.$$

Taking into consideration relation (16) and simplifying by $d\vartheta \cdot dr'$, this equation takes the form:

$$\frac{1}{2R} \cdot \frac{\partial}{\partial r'}(N'_r r'^2) + \frac{r'}{2R} \cdot \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + p'_3 r'_3 = 0.$$

After derivation and division by r', the equation

$$\frac{1}{2R}\left(r' \cdot \frac{\partial N'_r}{\partial r'} + 2\,N'_r + \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial \vartheta}\right) + p'_3 = 0$$

is obtained. Finally, substituting into this the expression

$$\frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} = -\,r' \frac{\partial N'_r}{\partial r'} - N'_r + N'_\vartheta - p'_1\, r'$$

following from (17), the condition of equilibrium sought for will appear as:

$$(N'_r + N'_\vartheta) - p'_1\, r' + 2\,R\; p'_3 = 0\,. \tag{19}$$

7. Loads acting upon the spherical shell

In the following a correlation should be established between the loading forces to which the spherical and the correlated paraboloid shell are subjected. This correlation should be set up with the assumption that the *real* inner forces of the spherical shell are connected to the *reduced* inner forces of the paraboloid shell as follows:

$$\begin{aligned} N_r &= f(r') \cdot N'_r\,, \\ N_{r\vartheta} &= f(r') \cdot N'_{r\vartheta}\,, \\ N_\vartheta &= f(r') \cdot N'_\vartheta\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Function $f(r')$ figuring in the above formula should be regarded as unknown and determined with the requirement that conditions (11)—(13) and (17)—(19) of equilibrium have to be simultaneously satisfied.

Our aim is the determination of components p_1, p_2, p_3 of load system p acting upon the spherical shell starting out from the fact that the components p'_1, p'_2, p'_3 of the load system p' acting upon the paraboloid shell are given.

Corresponding to the three load components the necessary calculations is to be made in three steps.

7.1. *Load component* p_2

Let us start out from the differential equation (12) and pass on to derivation according to r' instead of the one according to ω:

$$\frac{\partial N_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dr'}{d\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial r'}(rN_{r\vartheta}) + N_{r\vartheta} \cdot \cos\omega + rp_2 = 0\,.$$

Substituting formulae (6), (8) and (9), relation

$$\frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{4R^2+r'^2}{4R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{4R^2 r'}{4R^2+r'^2} N_{r\vartheta} \right) + \\ + \frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2} N_{r\vartheta} + \frac{4R^2 r'}{4R^2+r'^2} p_2 = 0$$

is obtained. After partial derivation and simplification this leads to

$$\frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + r' \frac{\partial N_{r\vartheta}}{\partial r'} + 2 \frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2} N_{r\vartheta} + \frac{4R^2 r'}{4R^2+r'^2} p_2 = 0,$$

which after substitution of relation (20) gives:

$$f(r') \frac{\partial N'_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + r' \frac{\partial}{\partial r'} [f(r') \cdot N'_{r\vartheta}] + \\ + 2 \frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2} f(r') N'_{r\vartheta} + \frac{4R^2 r'}{4R^2+r'^2} p_2 = 0.$$

Repeated partial derivation results in

$$f(r') \frac{\partial N'_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + r' \frac{df(r')}{dr'} N'_{r\vartheta} + r' f(r') \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial r'} + \\ + 2 \frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2} f(r') \cdot N'_{r\vartheta} + \frac{4R^2 r'}{4R^2+r'^2} p_2 = 0. \tag{21}$$

However, according to equation (18):

$$r' \frac{\partial N'_{r\vartheta}}{\partial r'} = - \frac{\partial N'_{\vartheta}}{\partial \vartheta} - 2 N'_{r\vartheta} - p'_2 r'.$$

Substituting this value into equation (21), it is found after simplification that

$$\left[\frac{df(r')}{dr'} - \frac{4r'}{4R^2+r'^2} f(r') \right] N'_{r\vartheta} + \left[\frac{4R^2}{4R^2+r'^2} p_2 - f(r') p'_2 \right] = 0. \tag{22}$$

In order that this equation should be satisfied in case of any finite value of N'_r it is necessary that values in square brackets should be equal to zero, that is

$$\frac{df(r')}{dr'} - \frac{4r'}{4R^2+r'^2} f(r') = 0, \tag{23}$$

$$\frac{4R^2}{4R^2+r'^2} p_2 - f(r') p'_2 = 0. \tag{24}$$

The first of the above expressions is an ordinary linear differential equation, the solution of which is

$$f(r') = \frac{(4R^2+r'^2)^2}{K},$$

where K is an integration constant. Attributing value

$$K = 16R^4$$

to the latter, the following formula will be obtained for the function $f(r')$ undetermined up to now:

$$f(r') = \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2. \tag{25}$$

Using the substitution (25), equation (24) takes the form:

$$\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}p_2 - \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 p_2' = 0.$$

Eventually the condition sought for will be:

$$p_2 = \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^3 p_2'. \tag{26}$$

7.2. *Load component* p_3

Let us substitute into differential equation (13) the relationships (20) and (25):

$$\frac{1}{R}\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 (N_r'+N_\vartheta')+p_3 = 0\ . \tag{27}$$

Considering, that according to (19) the formula

$$N_r'+N_\vartheta' = r'p_1'-2Rp_3' = 0 \tag{28}$$

holds, equations (27) can be also written as:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 (r'p_1'-2Rp_3') + p_3 = 0\ .$$

Thus, the condition sought for is:

$$p_3 = \frac{1}{R}\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2(-r'p_1'+2Rp_3'). \tag{29}$$

7.3. *Load component* p_1

Let us take differential equation (11) and pass from derivation according to ω to the one according to r'. By doing so equation

$$\frac{1}{R}\frac{dr'}{d\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}(rN_r)+\frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial\vartheta}-N_{\vartheta}\cos\omega+rp_1=0 \tag{29a}$$

is obtained. Substituting (6), (8) and (9) into (29a), the result will be:

$$\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{4R^2r'}{4R^2+r'^2}N_r\right)+\frac{\partial N_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}-$$

$$-\frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2}N_{\vartheta}+\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}r'p_1=0.$$

From this, after partial derivation and simplification the equation

$$\frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2}(N_r-N_{\vartheta})+r'\frac{\partial N_r}{\partial r'}+\frac{\partial N_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}r'p_1=0$$

is arrived at. If considering equation (20), this can be written as:

$$\frac{(4R^2+r'^2)(4R^2-r'^2)}{16R^4}(N_r'-N_{\vartheta}')+\frac{r'}{16R^4}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}[(4R^2+r'^2)N_r']+$$

$$+\frac{(4R^2+r'^2)^2}{16R^4}\cdot\frac{\partial N_{r\vartheta}'}{\partial\vartheta}+\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}r'p_1=0.$$

After repeated partial derivation the former equation takes the form:

$$\frac{(4R^2+r'^2)(4R^2-r'^2)}{16R^4}(N_r'-N_{\vartheta}')+\frac{4r'^2(4R^2+r'^2)}{16R^4}N_r'+$$

$$+\frac{(4R^2+r'^2)^2}{16R^4}r'\frac{\partial N_r'}{\partial r'}+\frac{(4R^2+r'^2)^2}{16R^4}\cdot\frac{\partial N_{r\vartheta}'}{\partial\vartheta}+\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}r'p_1=0. \tag{30}$$

However, according to (17) the relation

$$\frac{\partial N_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} = N'_{\vartheta} - N'_r - r' \frac{\partial N'_r}{\partial r'} - r' p'_1$$

holds. If substituting this value into equation (31), after simplification the result will be:

$$\frac{4R^2+r'^2}{8R^4} r'(N'_r+N'_{\vartheta}) - \frac{(4R^2+r'^2)^2}{16R^4} p'_1 + \frac{4R^2}{4R^2+r'^2} p_1 = 0.$$

Owing to (28) it follows

$$\frac{4R^2}{4R^2+r'^2} p_1 - \frac{(4R^2+r'^2)(4R^2-r'^2)}{16R^4} p'_1 - \frac{4R^2+r'^2}{16R^4} \cdot \frac{r'}{4R} p'_3 = 0,$$

and thus, the condition sought for is:

$$p_1 = \frac{(4R^2+r'^2)^2}{64R^6} \left[(4R^2-r'^2) p'_1 + 4R r' p'_3\right]. \tag{31}$$

8. Loads acting upon the paraboloidal shell

In the forgoing load components p_1, p_2, p_3 acting upon the spherical shell were determined with the assumption that load components p'_1, p'_2, p'_3 acting upon the paraboloid shell were known. As a result of the respective calculations it was found that

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4R^2} \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 \left[(4R^2-r'^2) p'_1 + 4R r' p'_3\right], \\ p_2 &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^3 p'_2, \\ p_3 &= \frac{1}{R} \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 (-r' p'_1 + 2R p'_3). \end{aligned} \tag{32}$$

Regarding the problem from the opposite side, let as now assume that load components p_1, p_2, p_3 acting upon the spherical shell are given, and it is load components p'_1, p'_2, p'_3 acting upon the paraboloid shell which are sought

for. For this purpose, equations (32) have to be solved in view of p_1', p_2', p_3'. Result of the calculations is:

$$p_1' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \left(p_1 - \frac{r'}{2R} p_3\right),$$

$$p_2' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 p_2, \tag{33}$$

$$p_3' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \left(\frac{r'}{2R} p_1 + \frac{4R^2-r'^2}{8R^2} p_3\right).$$

9. Special cases

In possession of the equation groups (34) and (35), respectively, some special loading cases will be shown in the following. The respective formulae can be appropriately used for the solution of certain practical problems.

9.1. *The spherical shell is subjected to none but vertical loads*

If the spherical shell is only subjected to vertical loads of intensity $p = p(\vartheta, \omega)$, that is, if $p_1 = p \sin \omega$, $p_2 = 0$, $p_3 = p \cos \omega$, then, according to formulae (33), the relations

$$p_1' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \frac{4Rr'}{4R^2+r'^2} p,$$

$$p_2' = 0, \tag{34}$$

$$p_3' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \frac{4R^2-r'^2}{4R^2+r'^2} p$$

hold. In this case, considering formula (5), the relation

$$\frac{p_1'}{p_3'} = \frac{4Rr'}{4R^2-r'^2} = \tan \omega \tag{35}$$

is valid. Thus, in the mentioned case the line of action of load $p' = p'(r', \vartheta)$ acting upon the paraboloid shell forms an angle with the vertical direction, which is identical with the angle between the line of action of load $p = p(\vartheta, \omega)$ acting upon the spherical shell and the normal of the shell (Fig. 8).

The specific value of force p' acting upon the paraboloid shell, as related to the area of the ground-plan is

$$p' = \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 p. \tag{36}$$

9.2. *The paraboloid shell is subjected to none but vertical loads*

If the paraboloid shell is only subjected to vertical loads of intensity $p' = p'(r', \vartheta)$, that is, if $p_1' = p_2' = 0$, $p_3' = p'$, then, according to formulae (32), the load components acting upon the spherical shell will be:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 \frac{r'}{R} p', \\ p_2 &= 0, \\ p_3 &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 \cdot 2p'. \end{aligned} \tag{37}$$

In this case, taking into account Fig. 9, the relation

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{r'}{2R} = \tan\frac{\omega}{2}, \tag{38}$$

is valid. This means that the resultant $p = p(\vartheta, \omega)$ of load components p_1 and p_3 passes through the nadir point N. Thus, the direction of the resultant is parallel to the normal in paraboloid point A''.

The specific value of load p acting upon the spherical shell, related to the surface unit of the shell's middle surface is:

$$p = 2\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^{5/2} p'. \tag{39}$$

9.3. *The spherical shell is subjected to none but perpendicular forces*

If the spherical shell is only subjected to perpendicular loads of intensity $p = p(\vartheta, \omega)$, that is, if $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p_1$, then according to formulae (35) the load components acting upon the paraboloid shell will be:

$$\begin{aligned} p_1' &= \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \left(-\frac{r'}{2R} p_3\right), \\ p_2 &= 0, \\ p_3' &= \left(\frac{4R^2}{4R^2+r'^2}\right)^3 \frac{4R^2-r'^2}{8R^2} p_3. \end{aligned} \tag{40}$$

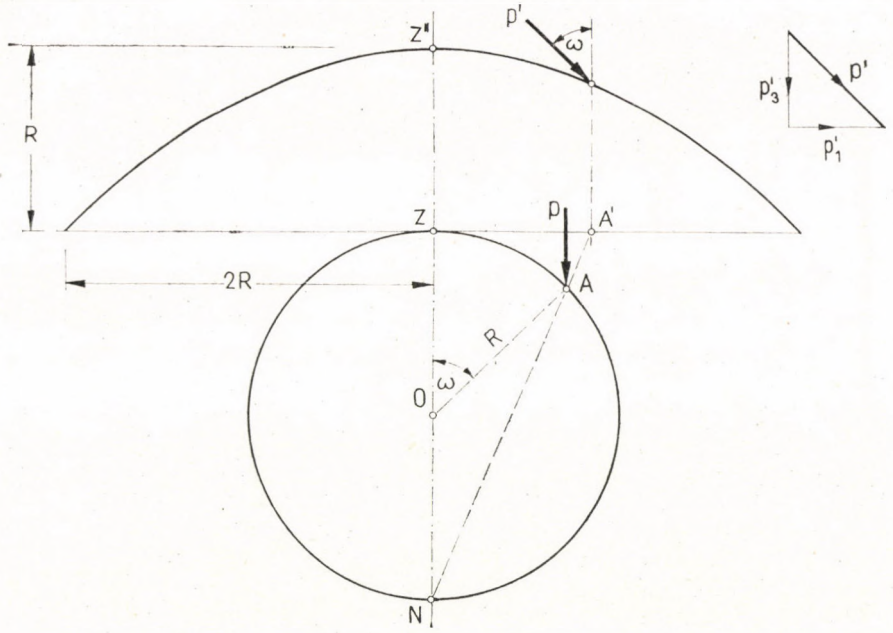


Fig. 8. The spherical shell is subjected to none but a vertical force

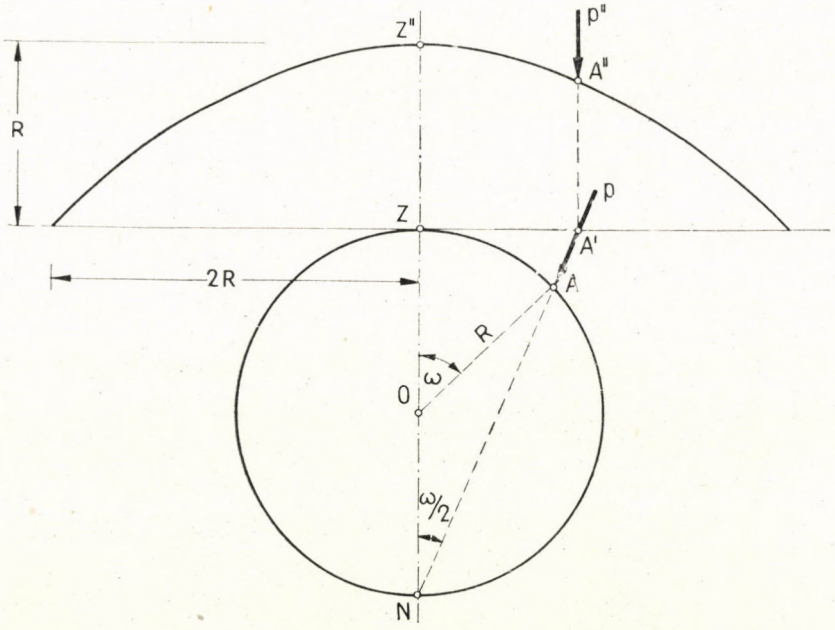


Fig. 9. The paraboloid shell is subjected to none but a vertical force

In this case, taking into account formula (5), the relation

$$\frac{p_1'}{p_3'} = -\frac{4Rr'}{4R^2 - r'^2} = -\tan\omega. \tag{41}$$

holds. This means that the line of action of load $p' = p'(r', \vartheta)$ acting upon the paraboloid shell is parallel to the line of action of load p acting upon the spherical shell (Fig. 10).

The specific value of load p' acting upon the paraboloid shell, related to the area of the ground-plan is:

$$p' = \left(\frac{4R^2}{4R^2 + r'^2}\right)^3 p. \tag{42}$$

9.4. *The spherical shell is subjected to none but forces of meridian direction*

If the spherical shell is only subjected to forces of meridian direction of intensity $p = p(\vartheta, \omega)$, that is, if $p_1 = p$, $p_2 = p_3 = 0$, then according to formulae (33) the load components acting upon the paraboloid shell will be:

$$\begin{aligned} p_1' &= \left(\frac{4R^2}{4R^2 + r'^2}\right)^3 p, \\ p_2' &= 0, \\ p_3' &= \left(\frac{4R^2}{4R^2 + r'^2}\right)^3 \frac{r'}{2R} p. \end{aligned} \tag{43}$$

In this case according to Fig. 9 the relation

$$\frac{p_1'}{p_3'} = \frac{r'}{2R} = \tan\frac{\omega}{2} \tag{44}$$

holds. This means that the resultant $p' = p'(r', \vartheta)$ of load components p_1' and p_3' forms an angle of $\omega/2$ with the vertical direction (Fig. 11).

The specific value of load p' acting upon the paraboloid shell, related to the area of the ground-plan is:

$$p' = \left(\frac{4R^2}{4R^2 + r'^2}\right)^{7/2} p. \tag{45}$$

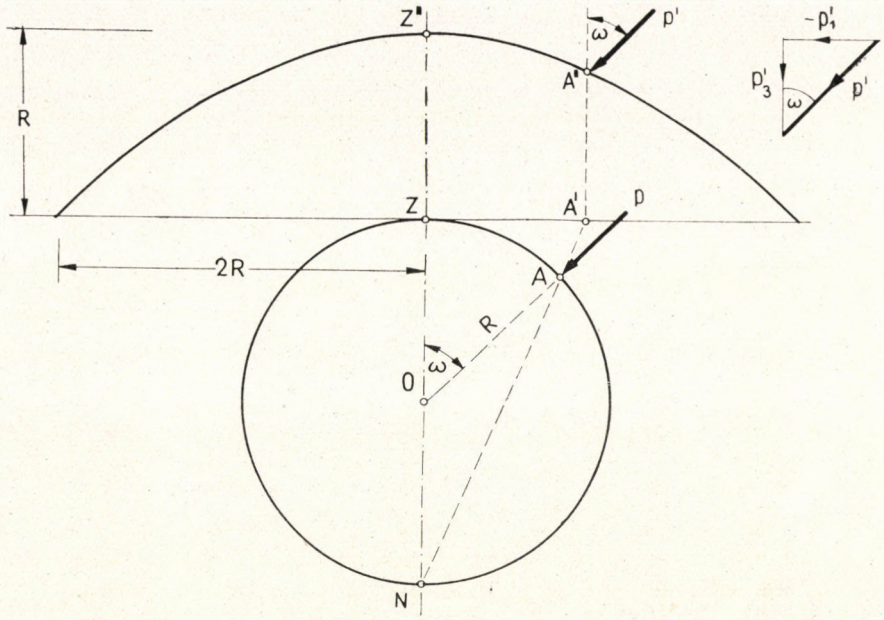


Fig. 10. The spherical shell is subjected to none but a perpendicular force

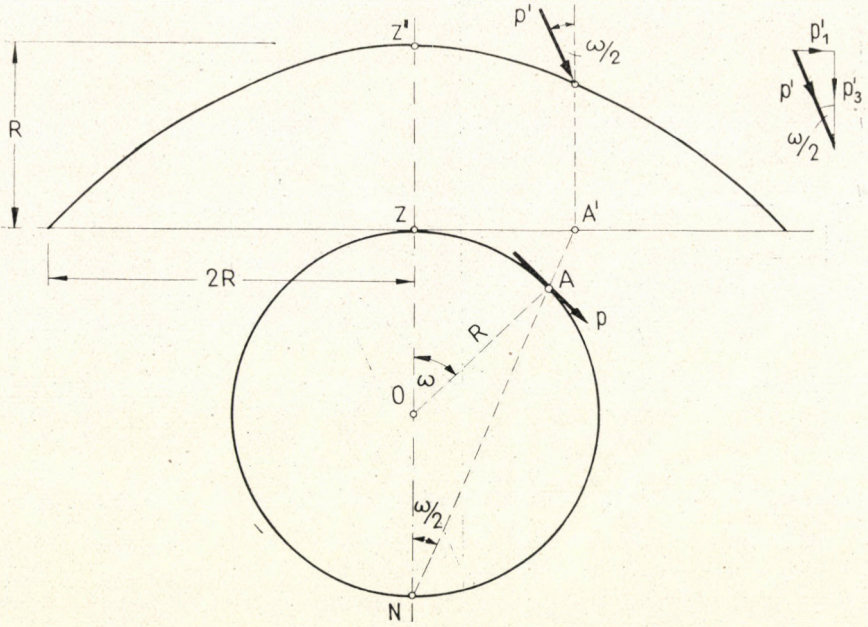


Fig. 11. The spherical shell is subjected to none but a force of meridian direction

9.5. *The paraboloid shell is subjected to none but horizontal forces of radial direction*

If the paraboloid shell is only subjected to horizontal radial forces of intensity $p' = p'(r', \vartheta)$, that is, if $p'_1 = p'$, $p'_2 = p'_3 = 0$, then according to formulae (32) the load components acting upon the spherical shell will be:

$$p_1 = \frac{1}{4R^2}\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 (4R^2-r'^2)\,p',$$

$$p_2 = 0\,, \tag{46}$$

$$p_3 = \frac{1}{R}\left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 (-r')\,p'.$$

In this case, taking formula (5) into account, the relation

$$\frac{p_1}{p_3} = -\frac{4R^2-r'^2}{4Rr'} = -\cot\omega \tag{47}$$

holds. This means that the line of action of load $p = p(\vartheta, \omega)$ is horizontal and passes through the axis line of the paraboloid shell (Fig. 12).

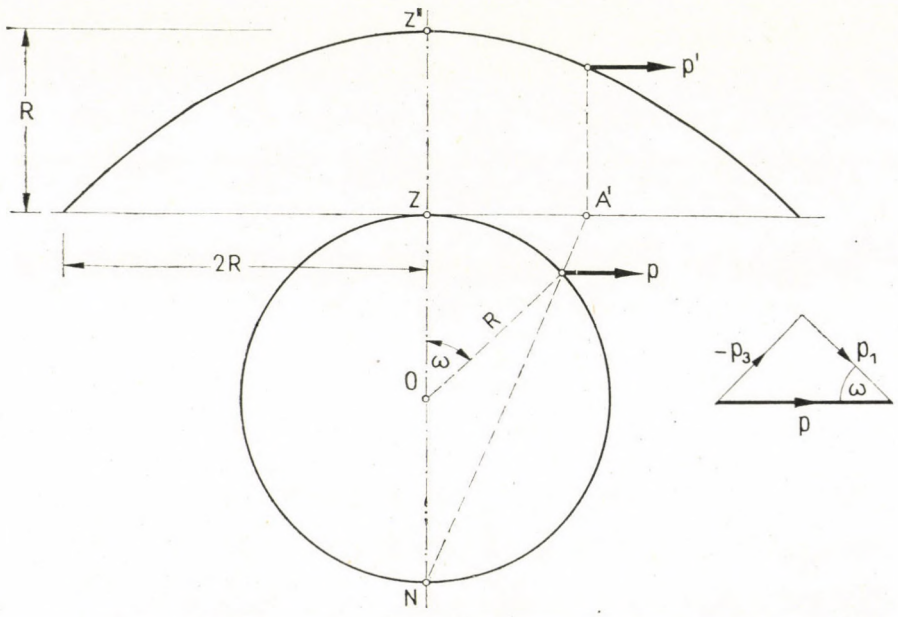


Fig. 12. The paraboloid shell is subjected to none but a force perpendicular to the axis of revolution

The specific value of load p acting upon the spherical shell related to the surface unit of the middle surface of the spherical shell is:

$$p = \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^3 p' . \tag{48}$$

10. Remarks

The results and the conclusions to be drawn from the analogy built up between the spherical and the paraboloid shell may be summarized as follows.

1. The middle surface of the spherical shell and the ground-plan projection of the correlated paraboloid shell are *conform configurations.*

2. To the *reduced* inner forces N'_r, $N'_{r\vartheta}$, N'_ϑ of the *paraboloid shell* the following *real* inner forces correspond,

a) acting upon the *paraboloid shell:*

$$\begin{aligned} N''_r &= \frac{N'_r}{2R}\sqrt{4R^2+r'^2}, \\ N''_{r\vartheta} &= N'_{r\vartheta}, \\ N''_\vartheta &= N'_\vartheta \frac{2R}{\sqrt{4R^2+r'^2}}; \end{aligned} \tag{49}$$

b) acting upon the *spherical shell:*

$$\begin{aligned} N_r &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 N'_r, \\ N_{r\vartheta} &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 N'_{r\vartheta}, \\ N_\vartheta &= \left(\frac{4R^2+r'^2}{4R^2}\right)^2 N'_\vartheta. \end{aligned} \tag{50}$$

3. In consequence of equations (32), the relation

$$N_r : N_{r\vartheta} : N_\vartheta = N'_r : N'_{r\vartheta} : N'_\vartheta \tag{51}$$

holds, thus the *real* inner forces of the spherical shell and the *reduced* inner forces of the paraboloid shell make up a *conform system.*

4. Since circles $r = \text{const}$ of the spherical shell and load components figuring in formulae (34) and (35) are independent of ϑ, circular symmetrical load systems acting upon the spherical shell correspond to circular symmetrical load systems acting upon the paraboloid shell.

5. In accordance with the existing conformity as stated in 9,1 and 9,4, some boundary conditions, satisfied in the system of the spherical shell, will be equally satisfied in the system of the paraboloid shell. This circumstance offers the possibility for the complete or partial solution of certain boundary value problems if the solution of the corresponding problem in the analogous system is known.

6. Part of the expounded relationships is also valid for configurations produced from them by affine transformation.

Analogie bestehend zwischen dem Kräftespiel von Kugelschalen und den ihnen zugeordneten Rotationsparaboloidschalen. Der Aufsatz beschreibt eine Beziehung zwischen dem Kräftespiel von Kugelschalen und von den ihnen zugeordneten Rotationsparaboloidschalen. Die Drehachse der Paraboloidschale läuft durch den Mittelpunkt der Kugelschale. Der Krümmungshalbmesser der Paraboloidschale ist im Achsenpunkt der Mittelfläche doppelt so groß wie der Halbmesser der Kugelschalenmittelfläche. Der stereographischen Projektion der Punkte an der Mittelfläche der Kugelschale enstprechen jene Punkte der Mittelfläche der Paraboloidschale, deren Grundrißprojektion mit der stereographischen Projektion der erwähnten Punkte der Kugelschale übereinstimmt. Der Mittelpunkt der stereographischen Projizierung liegt im Schnittpunkt der Kugelschalenmittelfläche und der Paraboloidachse. Die Beziehung zwischen den Spannungs- und Belastungszuständen der beiden Schalenarten kann bei der Lösung gewisser Randwertprobleme zweckgemäß angewendet werden.

Аналогия, существующая между работой сил сферических оболочек и оболокек в виде параболоида вращение *(П. Чонка)*. В данной работе определена связь между мембранными усилиями сферической оболочки и приданной ей оболочки в виде параболоида вращения, приданная сферической оболочке, проходит через центр сферической оболочки и радиус кривизны в точке оси центральной поверхности в два раза больше радиуса центральной поверхности сферической оболочки. Стереографической проекции точек, лежащих на центральной поверхности сферической оболочки, соответствуют те точки центральной поверхности оболочки в виде параболоида вращения, осевая проекция которых совпадает со стереографической проекцией точек сферы. Стереографическая проекция производится из точкъ сечения центральной поверхности сферы с осью оболочки в виде параболоида вращения. Связь, существующая между условиями напряжения и нагрузки сопоставленных между собой двух различных видов оболочек, может быть использована при решении некоторых окружных задач.

RECENSIONES

Falk, S.:

LEHRBUCH DER TECHNISCHEN MECHANIK

1. BAND: MECHANIK DES PUNKTES. 2. BAND: MECHANIK DES STARREN KÖRPERS. 3. BAND: MECHANIK DES ELASTISCHEN KÖRPERS

Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York. 1. Band: 1967, 196 S.; 2. Band: 1968, 307 S.; 3. Band: 1969, 321 S.

Die vorliegenden drei Bände sind Lehrbrücher, die die Kapitel der technischen Mechanik enthalten, die in den ersten und zweiten Jahrgängen in den Maschinen- und Bauingenieurabteilungen der Universitäten zumeist vorgetragen werden. Der Verfasser ist bestrebt, den Lehrbuchcharakter des Buches überall zu bewahren. Die Grundbegriffe (Ruhezustand des Körpers, Gleichgewicht der Kräfte, Schnittkräfte, Formänderung, Durchbiegung, usw.) werden in präziser Weise definiert, oder wenigstens begrifflich versinnbildlicht. Als das Verdienst des Verfassers soll erwähnt werden, daß er sich mit der mathematischen Formulierung der Gesetze der Statik, Kinematik, Kinetik und Elastizitätslehre nicht begnügt, sondern auch die Anwendung dieser Gesetze auf verschiedene praktisch vorkommende Konstruktionen und Konstruktionsbestandteile vorführt.

Um diese Lehrbücher verstehen zu können, braucht der Leser nur die unteren Stufen der mathematischen Analysis zu kennen. Diese didaktische Einschränkung rührt daher, daß der Mechaniklehrgang zeitlich mit dem Mathematiklehrgang in Einklang stehen muß. Einige Themen der technischen Mechanik, die ebenfalls zum üblichen Stoff des ersten und zweiten Jahrganges gehören, sollen noch in einem weiteren Band behandelt werden. Solche Themen sind z. B. die Bewegung in beschleunigten Systemen, der Begriff der Corioliskraft und der Spannungstensor.

Etwa die Hälfte jedes Bandes enthält die theoretischen Erörterungen. Es sind einige Abschnitte darin, die, auch wenn sie korrekt zu sein scheinen, für den Anfänger etwas zu schwer verständlich sein werden, z. B. im Band I die veränderliche Masse, in Abschnitt 9,6, im Band II die Formel (4) auf Seite 190, die Anwendbarkeit der synthetischen und analytischen Methode in den Abschitten 16,4 und 24,4, der Begriff der Wirkungslosigkeit auf Seite 134, im Band III der Abschnitt 33,5. Doch wird jeder dieser Abschnitte ein nützlicher Leitfaden zur Lehrtätigkeit der Dozenten des Lehrstuhles.

Die andere Hälfte jedes Bandes ist den sehr lehrreichen, methodisch ausgearbeiteten Beispielen gewidmet. Diese Beispielsammlung gewährleistet den wahren Wert dieses dreibändigen Lehrbuches.

J. Barta

G. Franz (Schriftleiter):

BETON-KALENDER 1970

TASCHENBUCH FÜR BETON- UND STAHLBETONBAU UND DIE VERWANDTEN FÄCHER

Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1970. I. Teil: 1180 Seiten; II. Teil: 676 Seiten

Der Beton-Kalender, dieses überall auf der Welt bekannte Handbuch, steht nun bereits in seiner 59. Auflage den Beton-Fachkreisen zur Verfügung. Dieses Manual ist auch diesmal, wie auch sonst seit vielen Jahren, in zwei Teilen (d. h. zwei Bänden) erschienen.

Der *erste Teil* zeigt nur unbedeutende Abweichungen von der Auflage des vorigen Jahres. Seine Hauptabschnitte sind auch diesmal: mathematische Tafeln, Geometrie, Stahl im Bauwesen, Bauholz und Holzwerkstoffe, Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten, Festigkeitslehre, Statik der Stabtragwerke, Bemessung der Stahlbetonbauteile, Bemessung von Spannbetonbauteilen und Bestimmungen. Neue Abschnitte behan-

deln die Bewehrung von vier- und dreiseitig gelagerten Rechteckplatten, die elektronische statische Berechnung von Stabtragwerken. Der Abschnitt Baugrund und Gründungen wurde vollkommen umgearbeitet.

Der *zweite Teil* enthält im allgemeinen neue, in vorangehenden Ausgaben nicht vorhandene Abschnitte. Erwähnenswert ist der Abschnitt über die Bauausführung von Stahlbetonbauten. Hier kommen, unter anderen, Fragen der Organisation, der Betontechnologie, der Bauleitung, der Frühfestmachung des Betons und der Installationstechnik zur Behandlung, unter besonderer Berücksichtigung der Baustelleneinrichtung und Baumaschinen sowie der zweckmäßigen Methoden für Schalung und Rüstung.

Von den neuen Abschnitten ist besonders das von den Professoren H. RÜSCH und H. KUPFER verfaßte Kapitel hervorzuheben, das sich mit den verschiedenen Spannverfahren, den Zielen der Vorspannung und den Anwendungsgebieten des Spannbetons befaßt. Im Rahmen dieses Kapitels sind die Absätze besonders beachtenswert, die durch die Vorspannung erreichbare Vorteile (Abbau der Zugspannungen, Verringerung der Querschnittsabmessungen, Vermeidung von Rissen, Regelung der Spannungszustände, Verringerung der Verformung von tragenden Teilen) in klarer, überzeugender Weise erklären. Von hohem Wert sind auch jene Teile, die über Bauverfahren berichten, welche erst durch Anwendung der Spannverfahren ermöglicht werden. (Verbindung von Fertigteilen durch Vorspannung, Freivorbau auf Grundlage der Vorspannung, Anwendung der Vorspannung zur nachträglichen Verstärkung von Bauten usw.)

Der Anhang des zweiten Bandes ist ebenfalls glücklich geraten. Er enthält den Auszug der Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Stahlbetonbauwerken des Europäischen Beton-Komitees (C.E.B.) Diese Empfehlungen sind richtunggebend für die Fassung der zukünftigen Vorschriften für Stahlbeton und bezwecken die Vereinheitlichung der verschiedenen Vorschriften der einzelnen Länder. In ihrer Abfassung haben die bedeutendsten Fachmänner von West und Ost und Übersee kollaboriert und so verdienen sie es wahrhaftig, daß sämtliche Betonfachleute über sie orientiert werden.

Im allgemeinen darf berechtigterweise behauptet werden, daß die gegenwärtige Ausgabe des *Beton-Kalenders* die sich auf die neuesten Feststellungen der Theorie und Praxis des Stahlbetonbaus stützt und die zeitgemäßen Fragen des Stahlbetonbaus übersichtlich und zuverläßlich erörtert, ebenso wie ihre Vorgänger, tatsächlich für das Leben geschaffen wurde und seinen unermüdlichen Schriftleiter, den Altmeister des Betonbaus, Professor Gotthard FRANZ lobt.

P. Csonka

H. Rühle:

RÄUMLICHE DACHTRAGWERKE. KONSTRUKTION UND AUSFÜHRUNG

BAND I.: BETON, HOLZ, KERAMIK

VEB-Verlag für Bauwesen. Berlin 1969, 320 Seiten (A4), 357 Bilder, 57 Tafeln.

Die ausgedehnte und stets zunehmende Schalenliteratur befaßte sich bis jetzt sozusagen ausschließlich mit der Theorie und den verschiedenen Berechnungsverfahren der Schalen. Nur in geringem Maße hat sie die Konstruktionsprinzipien und Ausführungstechnik der Schalen beachtet. Das unter der Führung des namhaften Verfassers arbeitende Kollektiv bemüht sich nun, diese Lücke auszufüllen, indem es den Schalenkonstruktionen schaffenden Ingenieuren, Architekten und Konstrukteuren ein zweibändiges Werk zur Verfügung stellt, welches das Hauptgewicht auf die Klärung der bisher wenig beachteten praktischen Fragen der Schalenarchitektur legt.

Das Geleitwort zum Buch wurde von A. M. HAAS, dem illustren Vorsitzenden der IASS geschrieben.

Der vorliegende Band des Werkes befaßt sich mit den Konstruktionsprinzipien von Schalen und Falten aus Beton, Keramik und Holz. Es werden behandelt: Zylinder- und Wellenschalen, Falten und Faltwerke, Schalen- und Faltenbögen, Shedschalen, Konoid- und konoidähnliche Schalen, Rotationschalen und hyperbolische Paraboloide, schließlich Schalen besonderer Gestalt, sowie Schalen und Falten aus Armozement. Ein bedeutendes Kapitel befaßt sich mit Fertigungs- und Ausführungsfragen von Schalen und Falten aus Beton. Die besonderen Probleme der an Ort und Stelle hergestellten, sowie der aus vorgefertigten Elementen errichteten Schalen, weiters die Spezialfragen betreffend der Fertigung von Armozementschalen und Falten werden hier behandelt. Die Ausführungen werden durch Kapitel über Schalen aus Keramik bzw. Holz ergänzt.

Es ist ein Hauptverdienst des Buches, daß es die Fragen der Gestaltung, Konstruktion, Kräftespiel und Ausführungstechnik der Schalen in strenger Einheit mit Gesichtspunkten der Wirtschaftlichkeit und der Qualitätsansprüche behandelt. Hierbei nimmt es besondere Rücksicht auf die Probleme neuartiger Konstruktionen und deren spezielle Bauweise. Es mißt den ganz besonderen Möglichkeiten von weitgespannter Raumüberdachung durch Schalendächer die nötige Bedeutung bei und zeigt die verschiedenen Vor- und Nachteile dieser Bauweise auf.

Die die geschichtliche Entwicklung der Schalenarchitektur darstellenden Tafeln, die Entwicklungsrichtungen erhellenden Zusammenstellungen, die den Materialbedarf aufzeigenden Ausweise und vor allem aber das überaus reiche und instruktive Bild- und Fotomaterial geben dem Buch eine besonders wertvolle Ergänzung. Das Bild- und Fotomaterial stellt nicht nur die Ausmaße, Grundrißanordnung und den Aufriß der in Rede stehenden Bauten dar, sondern zeigt auch ihren Bau- und Fertigzustand mit besonderer Rücksicht auf die charakteristischen Einzelheiten der Konstruktion und Ausführung.

Eine Übersicht des reichen Inhalts des Buches beweist, daß das Verfasserkollektiv durch Zusammenstellung dieses Werkes und durch die kritische Bewertung des in der Weltliteratur aufzufindenden Informationsmaterials eine bedeutende, lückenfüllende Arbeit geleistet hat. Zur Abfassung dieses Werkes waren ausdauernder Fleiß, gründliche Fachkenntnis, kritische Fähigkeit und große Übersicht nötig, Eigenschaften, die im Führer des Verfasserkollektivs Dr.-Ing. H. RÜHLE, Mitglied des Arbeitskomitees der IASS, glücklich vereint sind.

P. Csonka

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1970. VII. 10. — Terjedelem: 19,50 (A/5) ív, 126 ábra

70.70072 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

Bogárdi, J. L.—Szücs, E.: Balance Equations of Suspended Sediment Transportation — Bilanzgleichungen der Schwebestofführung — *Богарди, Я. Л.—Сюч. Э.:* Балансовые уравнения движения потока взвешенных материалов 3

Kézdi, Á.: Spannungen in Zweiphasensystemen — Stresses in a Two-Phase Medium *Кезди, А.:* Напряжения в двухфазной системе 29

Bosznay, Á.: Dynamics of a Model of Stick-Slip — Dynamik eines Modells des Stick-Slip-Vorganges — *Боснаи, А.:* Динамика одной модели неплавного (с перебоями) скольжения 39

Kollár, L.—Szőts, M.: Edge Disturbances of the Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shell Bounded by four Generatrices — Randstörungen der windschief-viereckförmigen Flächen einer hyperbolischen Paraboloidschale—*Коллар, Л.—Сёч, М.:* Краевые возмущения плоской гиперболической параболоидной оболочки в виде искаженного четырехугольника 67

Pápai, L.: Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse bei lotrechter pneumatischer Förderung — Velocity and Pressure in Vertical Pneumatic Conveying — *Папаи, Л.:* Режим скоростей и давлений, формирующихся в процессе вертикального пневматического транспорта 83

Kollár, L.—Gárdonyi, Z.—Holnapy, D.: Bending Analysis of Symmetrically or Antimetrically Loaded Straight-Edge Shells with Surfaces of Fourth Order — Berechnung gebogener symmetrisch und antimetrisch belasteter Schalenflächen vierter Ordnung mit geraden Rändern—*Коллар, Л.—Гардони, З.—Хольнапи, Д.:* Расчет на симметричную и антиметричную нагрузки гнутых оболочек с прямым краем и с поверхностью четвертой степени 105

Gulyás, J.—Frau Z. Szarka: Warmverformungsversuche mit einer homogenen Messinglegierung—Warmforming Experiments with a Homogeneous Brass Alloy—*Гуяш, Й. — Сарка, З.:* Исследование явлений горячей деформации гомогенного латунного сплава 137

Lévai, I.: Über verzahnte Räder, die eine veränderliche Bewegungsübertragung zwischen sich kreuzenden Achsen verwirklichen und durch ein geradschneidiges Werkzeug abwälzbar sind — Variable-Ratio Gears with Crossed Axes, Generated with Straight-Edged Tools — *Левай, И.:* Обработка зубчатых колес, выполняющих передачу переменного движения между разнонаправленными осями, с помощью инструмента с прямой режущей кромкой 149

Sziklavári, J.: Accelerated Reduction of a Smolten Charge of High FeO-Content by Means of Carbon Solved in Iron — Beschleunigung der Reduktion von FeO-reichen Schmelzen mit in Eisen gelöstem Kohlenstoff — *Сиклавари, Й.:* Ускорение восстановления богатых FeO расплавов растворенным в железе углеродом 171

Benedek, Z.: An Investigation of the Effective Wake Fractions of Geosims — Untersuchung der effektiven Mitstromziffern der Modellfamilien — *Бенедек, З.:* Анализ эффективного коэффициента течения семейств моделей 181

Csonka, P.: Analogy between the Stress States of Spherical Shells and Paraboloidal Shells of Revolution — Analogie bestehend zwischen dem Kräftespiel von Kugelschalen und den ihnen zugeordneten Rotationsparaboloidschalen — *Чонка, П.:* Аналогия, существующая между работой сил сферических оболочек и оболочек в виде параболоида вращение 195

RECENSIONES

Falk, S.: Lehrbuch der technischen Mechanik (Barta, J.) 219

Franz, G.: Beton-Kalender 1970 (Csonka, P.) 219

Rühle, H.: Räumliche Dachtragwerke. Konstruktion und Ausführung (Csonka, P.) 220

THERMISCHE METALLÜBERZÜGE

by P. CSOKÁN and E. NÁDASI

In German · Approx. 230 pages · 17 × 25 cm · Cloth

A joint edition — distributed in the socialist countries by Kultura, in all other countries by Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin

■

PNEUMATISCHE LOGIKELEMENTE

by L. HELM and J. MARTON

In German · Approx. 130 pages · 14 × 21 cm · Cloth

A joint edition — distributed in the socialist countries by Kultura, in all other countries by Oldenbourg-Verlag, München

■

PROCEEDINGS OF THE FOURTH COLLOQUIUM ON MICROWAVE COMMUNICATION

in five volumes

Chairman of the Editorial Board: G. BOGNÁR

Papers in English and Russian · Together 1546 pages · 17 × 25 cm · Paperback

■

THE ART OF TUNNELLING

by K. SZÉCHY

In English · Second impression · 891 pages · 547 figures · 39 tables · 17 × 25 cm Cloth

■

DEHNUNGSMEßVERFAHREN

by F. THAMM, GY. LUDVIG, I. HUSZÁR und I. SZÁNTÓ

In German · Approx. 320 pages · 14 × 21 cm · Cloth

A joint edition — distributed in the socialist countries by Kultura, in all other countries by Wilhelm Ernst und Sohn Verlag, Berlin

1828

AKADÉMIAI KIADÓ

PUBLISHING HOUSE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 3—27

BOGÁRDI, J. L.—SZÜCS, E.: *Balance Equations of Suspended Sediment Transportation*

A requirement common to every field of engineering is to derive the expressions intended for practical computations free of arbitrary constraints, and to introduce assumptions which are clearly defined and consistent with the laws of Nature. Failing to do this the validity ranges of individual expressions become obscured. A possibility for the methodical, uniform approach to engineering problems is offered by the transport theory, which is founded on the most general laws of physics, namely the conservation theorems. It is demonstrated that by this approach the general set of balance equations of sediment transportation can be formulated. The basic equations of some of the sediment transportation theories will be derived from the general set of balance equations. In this connexion it will be illustrated wihch of the 10 possible assumptions are used in individual theories.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 29—37

KÉZDI, Á.: *Stresses in a Two-Phase Medium*

The concept of stresses induced in two-phase or three-phase mediums is described and further a method of representation of the stress pattern is presented. Then by dismissing the usual assumption according to which in the disperse system the neutral stresses act on the whole cross-section, the general governing strength equations are established for elastic, homogeneous isotropic, porous and permeable mediums.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 39—66

BOSZNAY, Á.: *Dynamics of a Model of Stick-Slip*

The problem referring to the title in the paper is solved by analysing the phase diagrams. The possible types of movements are discussed and clearly explained. According to the investigations the occurrence of the stick-slip cannot be entirely avoided in the model taken as a basis, only, at most, the period of the slip might be shortened within a cycle.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 67—71

KOLLÁR, L.—SZÜCS, E.: *Edge Disturbances of the Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shell Bounded by four Generatrices*

The hyperbolic paraboloid shell bounded by four generatrices subjected at one of its edges to bending moments is investigated with the aid of the elastic bending theory of shallow shells. Inside the shell the decreasing curve of the bending moment is determined. The result is compared on the one hand with that of the Bleich-Salvadori solution, and on the other, with the decreasing curve of the bending moment of the plain plate.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 83—104

PÁPAI, L.: *Velocity and Pressure in Vertical Pneumatic Conveying*

The additional pressure drop at pneumatic conveying can be calculated from the forces acting on the transported particles. For uniform vertical transport the additional pressure drop p_j results from the weight-lifting pressure drop P_G and the pressure drop of the retaining forces p_s. The pressure drop p_S cannot be calculated with one formula, because it depends on the form of conveying. The mean velocity of the material, developing during the uniform vertical transport can be determined from the forces acting on the particle. The formula suitable for determining material velocity is of different shape according to the kind of transportation (thin-flow conveying, dense-flow conveying) and to the kind of transported particle.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 105—135

KOLLÁR, L.—GÁRDONYI, Z.—HOLNAPY, D.: *Bending Analysis of Symmetrically or Antimetrically Loaded Straight Edge Shells with Surfaces of Fourth Order*

Shells with mediane surfaces of higher than second order will have equations with variable coefficients. There exists a special analytical method to face the arising difficulties, otherwise the method of finite differences has to be applied. These two methods will be presented in detail, first for general cases, and then on data of an erected shell structure, checked by a model test. Both methods will be numerically compared and theoretically evaluated.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 137—148

GULYÁS, J.—MRS. Z. SZARKA: *Warmforming Experiments with a Homogeneous Brass Alloy*

In this paper, the warmforming process carried out on a homogeneous brass alloy is dealt with, when the applied speed of operation amounted to 4.55 sec^{-1}. The examination refers to plotting the curves that show the development of getting harder and to analysing the slide lines that present themselves within the material of the test pieces. Finally, the authors explain how far the mechanism of warmprocessing at a higher speed of operation can be assumed to be like the mechanism of coldforming.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 149—170

LÉVAI, I.: *Variable-Ratio Gears with Crossed Axes, Generated with Straight-Edged Tools*

The paper deals with the laws of the meshing and production of non-round gears materializing a given transmission function. For the investigation the author uses a kinematic method. The laws governing the meshing are extended to the so-called generating axoids. The author deals only with the cases when the generating axoids are developable ruled surfaces and established the differential equation for the directrix of the generating axoids. An example proves that the analysis of the differential equation simplifies production.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 171—180

SZIKLAVÁRI, J.: *Accelerated Reduction of a Smolten Charge in High FeO-content by Means of Carbon Solved in Iron*

Through research work carried out under normal operating conditions it was found that the reduction of a molten charge of high FeO content becomes faster by pouring it into an iron bath of high C-content, because this C-content also acts as an active agent. Under the testing conditions, the velocity constant of this method was three times as high as the velocity constant observed when additional coke was used as a reducing agent. The reduction of the molten charge proved to be a reaction of first order apparently.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 181—194

BENEDEK, Z.: *An Investigation of the Effective Wake Fractions of Geosims*

To eliminate the scale effect on the effective wake fraction the ratio of two velocities (nominal relative velocities in the propeller race in open water and behind condition of propeller) can be used instead of the common wake fraction. This ratio is a linear function of a coefficient k. According to these the effective wake fraction of any ship can be determined by a linear extrapolation of the measured values of two different models, if the empirical formula is not taken into consideration. If so, the wake fraction can be determined by testing a single model of a ship.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 16.00 a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 16.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, английском, французском и немецком языках.

«*Acta Technica*» выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 16.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA

Drejtorija Qändrone e Pärhapjes
dhe Propagandimit tä Librit
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

Globus
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

Hemus
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
Slovart A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation
et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import
Department
Denington Estate
Wellingsborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4—5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND

Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41—43
Oslo 1

POLAND

Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucureşti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31. East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

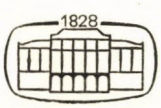
20. XII. 1970 **Index: 26.025**

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

REDIGIT: M. MAJOR

TOMUS 69
FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1970

ACTA TECHNICA

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
LÉVAI ANDRÁS

Az *Acta Technica* angol, francia, német és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az *Acta Technica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die *Acta Technica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die *Acta Technica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Vier Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten. Abonnementspreis pro Band: $ 16.00.

Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 223 (1970)

THEORETICAL EXPLANATION OF THE SOLAR RED-SHIFT LIMB EFFECT

CS. FERENCZ and GY. TARCSAI

(Preliminary abstract)

The general theory of relativity predicts a wavelength shift of the lines in the solar spectrum with respect to corresponding terrestrial lines by an amount of $2{,}12 \times 10^{-6}$. However, it is an established fact that at the extreme solar limb (at radial distances greater than about 95 per cent of the radius of the disk) the Fraunhofer lines exhibit a red-shift substantially exceeding the shift required by the relativity theory (the phenomenon will be referred to as limb effect).

On the basis of the general theory of wave propagation in inhomogeneous moving media it is shown that the extreme red-shift values observed at the solar limb are produced by radial currents in the solar atmosphere due to an effect different from the familiar one which is responsible for the wavelength shifts observed at the inner parts of the solar disk. The red-shift of the solar lines for the whole solar disk can be given as

$$\Delta f^{[\mathrm{km/s}]} = \Delta f_{\mathrm{grav}}^{[\mathrm{km/s}]} - \Delta f_{\mathrm{str}}^{[\mathrm{km/s}]} + \frac{v}{c} \sin \Theta \, p(n) \left[1 - \exp \left(- \sigma_0 \int_L N \, dl \right) \right]^{[\mathrm{km/s}]},$$

where Δf_{grav} is the gravitational red-shift (0,636 km/s), Δf_{str} is a known frequency shift appearing due to the direct motion in the model of solar streaming pattern, v is the velocity of outward radial streaming, Θ is the angle between the Sun–Earth line and the radius connecting the observed point on the solar surface and the centre of the Sun, σ_0 is the effective cross-section of absorption, N is the density of the medium, L is the ray path. It can be shown that in the present investigations the order of magnitude of $p(n)$ is about 1.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 225—241 (1970)

ÜBER DIE MÖGLICHKEITEN DER VERMINDERUNG DES HARTEN GANGES BEI DIESELMOTOREN MIT DIREKTER EINSPRITZUNG

I. KASZAP*

[Eingegangen am 26. August 1968]

Der harte Gang von Dieselmotoren mit direkter Einspritzung ist die Folge einer intensiven Entflammung, wofür der Differentialquotient $(dp/d\varphi)_{max}$ als maßgebende Kennzahl gilt. Man kann eine Entflammung von günstigerer Intensität erzielen, wenn man die folgenden Größen verringert: den dynamischen Faktor σ, den Zündverzug, die anfängliche Verdampfungsgeschwindigkeit oder die Zahl der Herdstellen der Entflammung. Aus einem Überblick der bezüglichen Fachliteratur und aus den Ergebnissen unserer Versuche geht hervor, daß man zur Dämpfung des harten Ganges nicht unbedingt irgend ein neues Verfahren einzuführen hat, vielmehr kann dies durch entsprechende Gestaltung der Gemischbildung bei gleichzeitiger, passender Wahl der Parameter der Entflammung erzielt werden.

I. Einleitung

Im Laufe einer Weiterentwicklung des Dieselmotors gelangte das Modell mit direkter Einspritzung in den Mittelpunkt der Bestrebungen, vor allem deshalb, weil bei Anwendung eines solchen Verbrennungsraumes die Gemischbildung den kleinsten Energieaufwand erfordert und zugleich den geringsten spezifischen Brennstoffverbrauch sichert [1].

Diese Vorteile gehen aber Hand in Hand mit einer nicht vorteilhaften Erscheinung: dem harten Gang. Dies zu bekämpfen sind die Fachleute überall in der Welt seit langer Zeit bestrebt. Bei den Dieselmotoren mit herkömmlichem Gemischbildungsverfahren (abgeteiltem Verbrennungsraum) kann die Geschwindigkeit des Druckanstieges verringert werden, doch ist damit auch ein Herabsinken des Mitteldruckes verbunden, also kann die rechtzeitige und vollkommene Verbrennung des Brennstoffes nicht erreicht werden.

Daraus folgt die Notwendigkeit, irgendein Verfahren zu schaffen, mittels dessen ein weicher Gang sowie die Erhöhung des Mitteldruckes gleichzeitig erzielt werden kann. Seinerzeit war das bekannte *MAN-M* Verfahren dadurch gekennzeichnet, daß beide oben genannten Forderungen erfüllt worden waren. Im Bild 1 sehen wir das Indikatordiagramm eines herkömmlichen Dieselmotors und ein anderes, welches einem durch weichen Gang charakterisierten Dieselmotor entspricht. Diese zwei Indikatorkurven unterscheiden sich von-

* Technische Universität; *Budapest XI.* (UNGARN).

einander durch die verschiedene Art der Gemischbildung und die unterschiedliche Verbrennungsdynamik.

Dem Vorhergehenden zufolge fanden wir es zeitgemäß, die Gemischbildung und den Verbrennungsvorgang von Dieselmotoren mit direkter Einspritzung zu überprüfen, eben mit dem Ziele, den harten Gang verringern und den Mitteldruck steigern zu können.

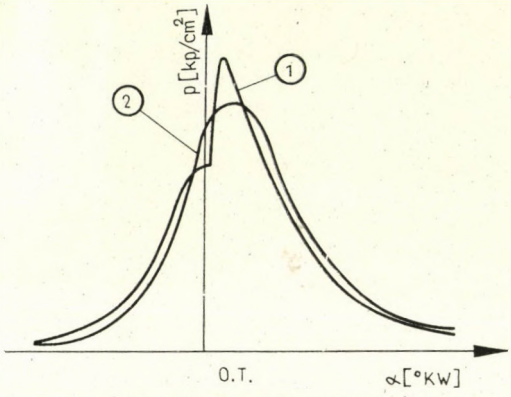


Bild 1. Indikator-Diagramme: Kurve eines herkömmlichen Dieselmotors *(1)*, und Kurve bei weichem Motorgang *(2)*

II. Prinzipielles über die Verringerung des harten Ganges von Dieselmotoren

Man konnte feststellen, daß für die Selbstzündung in Dieselmotoren mit direkter Einspritzung folgende Eigenheiten kennzeichnend sind:

Große Zahl der Herdstellen [2] (siehe Bild 2a);

mehrphasiger Verlauf [3], also räumliche Entflammung (siehe Bild 2b).

Die Verbrennung ist allgemein diffusionsartig, verursacht durch die folgenden Umstände: Brennstoffzerstäubung in der Luft, die anschließende Verdampfung und Gemischbildung, kinetische Eigenschaften der Entflammung und Verbrennung. Der Mehrphasenverlauf der Entflammung wird von einer Neigung des Brennstoffes zu Oxydation, vom Kompressionsdruck und von der Kompressionstemperatur hervorgerufen. Die hohe Zetanzahl und die verhältnismäßig langsame Konzentrationsänderung wirken zugleich in Richtung einer diffusionsmäßigen Verbrennung.

Gontschar und Milkin [4] hatten durch Wertung der Indikatordiagramme mit Hilfe von Computern *(URAL-2)* den Zusammenhang zwischen der Verbrennungsgeschwindigkeit und der Drucksteigerungsgeschwindigkeit bestimmt (siehe Bild 3a und 3b).

Im Bild 3a finden wir den Tangentenwert ($\tan \alpha$) der Druckkurve in dem Zeitpunkt des Beginns der Reaktion und im Bild 3b die Änderung des Tangentenwertes dargestellt. Aus diesen Diagrammen kann festgestellt werden,

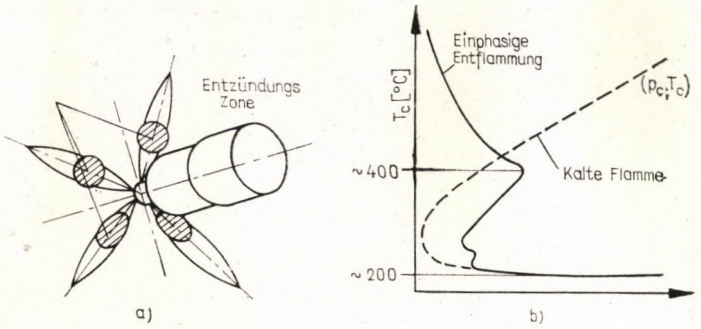


Bild 2. Entstehung der Entflammungsherdstellen (*a*) und die Entflammungscharakteristik bei p_c und T_c (*b*)

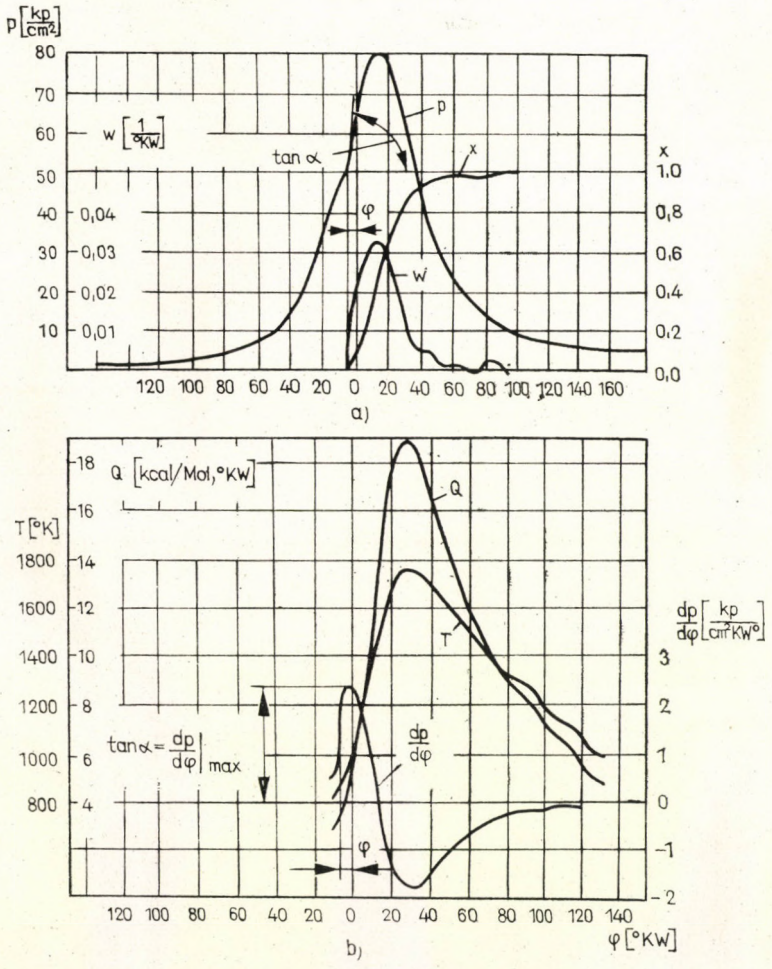


Bild 3. Verschiedene Charakteristiken der Entflammung

daß der Anfang des Verbrennungsprozesses bzw. die Intensität der Entflammung vor allem durch die maximale Drucksteigerung, bezogen auf die Verdrehung der Kurbelwelle im Grad $(dp/d\varphi)_{max}$ gekennzeichnet wird. TOLSTOW [5] hatte Experimente durchgeführt (Bild 4) und wies auf die Möglichkeit hin, in welcher Weise der Wert $(dp/d\varphi)_{max}$ beeinflußt werden kann.

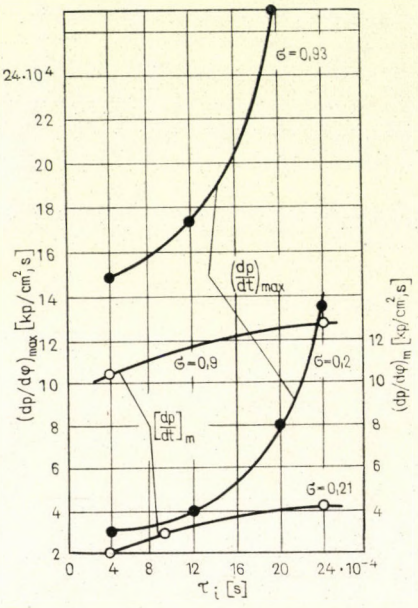


Bild 4. Zusammenhang zwischen der mittleren bzw. maximalen Drucksteigerungsgeschwindigkeit und dem Zündverzug bei verschiedenen Werten des Koeffizienten σ

Alles in allem steht fest, daß der harte Gang von einer intensiven Entflammung verursacht wird, gekennzeichnet durch den Differentialquotienten $(dp/d\varphi)_{max}$. Die Geschwindigkeit der Drucksteigerung ist eine Charakteristik eines in der Zeit und im Raum verlaufenden Prozesses, also soll die Regelung ebenfalls in Zeit und Raum stattfinden.

Um die Möglichkeit einer Regelung in der Zeit verständlich zu machen, verlassen wir uns auf den dynamischen Koeffizienten σ, im Sinne der Darstellung von TOLSTOW [5]. Es heißt nämlich:

$$\sigma = \frac{q_\tau}{q_\Sigma} \cong \frac{\tau_i}{\Theta} = \frac{w_\tau}{x}$$

wobei

q_τ die Menge des während des Zündverzuges eingespritzten Brennstoffes;
q_Σ die je Zyklus eingespritzte Menge [mm³];
τ_i Zündverzug [°KW];
Θ Einspritzdauer [°KW];
w verdampfte Brennstoffmenge während der Zeitspanne τ_i [mm³];
x $= \zeta q_\Sigma$ effektiv verbrannte Menge der Zyklusdosierung [mm³].

In Worten ausgedrückt, kann man die Regelung des dynamischen Koeffizienten σ in der Zeit durch folgende Maßnahmen erzielen:

Änderung des Einspritzvorganges;
Verringerung des Zündverzugs; und
Herabsetzung der verdampften Menge.

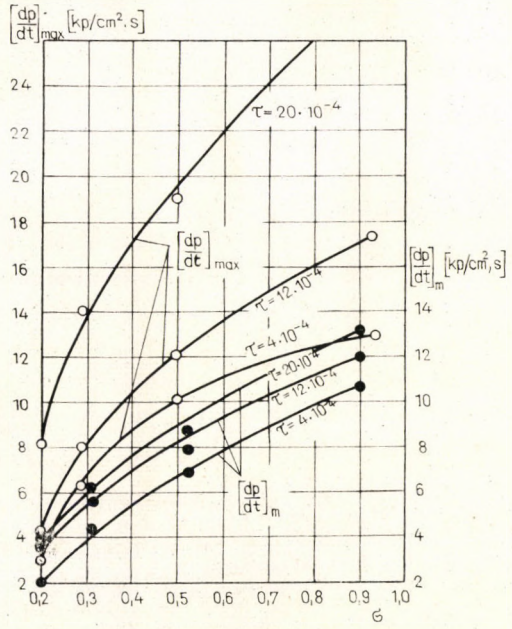


Bild 5. Auswirkung des Koeffizienten σ auf die Drucksteigerungsgeschwindigkeit

Im Bild 5 ist die erreichbare Druckänderungsverminderung dargestellt, die man durch Änderung des Koeffizienten σ bei gegebenem Zündverzug erzielen kann.

Durch die Technik des Schnellphotographierens ist eine Untersuchung der Regelbarkeit im Raum ermöglicht worden [2]. Diese Aufnahmen haben gezeigt, daß im Verbrennungsraum (in dem herkömmlichen Verbrennungsraum direkter Einspritzung) mehrere Verbrennungszonen entstehen. Die Entstehungsumstände dieser Zonen sind nahezu dieselben, also ist der Zeitpunkt der Entflammung naturgemäß derselbe, infolgedessen ist am Anfang die Verbrennungsmassengeschwindigkeit groß, und die Kennzahl $(dp/d\varphi)_{\max}$ hat ebenfalls einen hohen Wert. Soll also die Drucksteigerungsgeschwindigkeit herabgesetzt werden, so sollte man die Zahl der Zündungsherde vermindern und die Gleichzeitigkeit der Entflammungen verhindern.

Zusammenfassend verlangt die Verringerung des harten Ganges das Durchführen einer doppelten Aufgabe, bestehend aus der Verminderung der Entflammung und der Herabsetzung der Anzahl der Herdstellen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die spezifische Literleistung im Wege eines gesicherten weichen Ganges nur erzielt werden dürfte, wenn zugleich für die rechtzeitige und vollkommene Verbrennung des Brennstoffes gesorgt wird. Daraus folgt die Notwendigkeit, auch die Geschwindigkeit der Gemischbildung regeln zu können, da man hier mit einer Diffusionsverbrennung zu rechnen hat.

Die Gemischbildung kann beschleunigt werden, wenn man für eine größere Geschwindigkeit des Mischungsvorganges sorgen kann. Dies besteht darin, daß man die Komponenten des Gemisches (Brennstoff und Luft) in eine intensive und geregelte Bewegung bringt, wobei man hauptsächlich danach trachtet, die intensive und geregelte Mischung in der dem Zündverzug nachfolgenden Periode zu verwirklichen.

Die Methoden zum Hervorrufen einer vorteilhafteren Zyklusdynamik weisen gewissermaßen Überdeckungen auf. Dies kommt daher, daß durch den Regelvorgang zugleich mehrere Parameter beeinflußt werden. Um dies zu berücksichtigen, sind wir veranlaßt, die Möglichkeiten der Regelung der Entflammungsintensität auf Grund der höchstwirkenden Erscheinung oder des höchstcharakteristischen Koeffizienten zu einem brauchbaren System zusammenzustellen.

III. Methoden und Resultate

Nach einer ausführlichen Analyse aller experimentellen Ergebnisse können wir über die nachstehende Methoden und Resultate berichten.

1. Modifizierung der Einspritzungscharakteristik, Doppel-Einspritzung [6]

Im Bild 6a und 6b sieht man die Ausführung des zweifach wirkenden Nockens und die Charakteristik der damit erzielten Doppel-Einspritzung. Die zwei Stufen der Einspritzung bewirken in der ersten Stufe eine Dosierung von 25%, in der zweiten Stufe eine weitere von 75%, als Teile der Zyklusdosierung.

Im Bild 7 ist das Indikatordiagramm, das bei der eben beschriebenen Methode entsteht, dargestellt. Daraus ist zu ersehen, daß die Ausbildung der Einspritzpumpe und der Zerstäubungsdüse den harten Gang zu mildern vermag, doch verblieb das Problem der mehrstelligen Herdverteilung ungelöst. Überhaupt begegnen wir dem Nachteil, daß eine derartige Modifikation nur für Motoren mit kleiner Umdrehungszahl geeignet ist.

2. Abkürzung der Zündverzugsperiode

a) Das sogenannte Mikro-fog- und Benzo-Diesel-Verfahren [7, 8]. Das »Mikro-fog«-Verfahren, von SCHWEITZER [7] angewendet, besteht darin, daß man zum Zerstäuben des Hilfsbrennstoffes vor dem Saugrohr des Dieselmotors

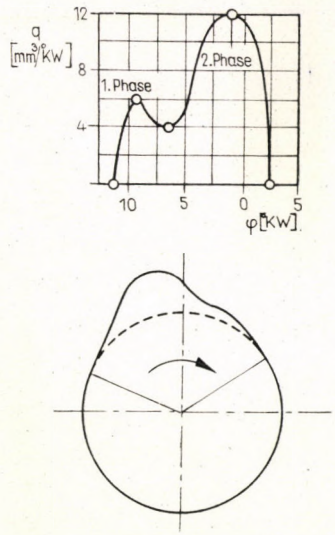


Bild 6. Form des Doppel-Nockens und dessen Einspritz-Charakteristik

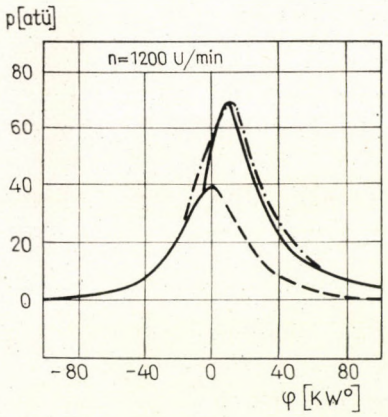


Bild 7. Indikatordiagramme bei Doppel- und bei normaler Einspritzung

einen Hochdruckapparat zur Erzeugung einer Nebelbildung einbaute. Als Hilfsbrennstoff hatte man unter anderen auch Gasöl verwendet. Die Ergebnisse dieses Verfahrens sind im Bild 8a und 8b dargestellt. Man sieht, der Motorgang ist bereits weich. Dies kann man mit dem Umstand erklären, daß der nebelförmige Hilfsbrennstoff während der Verdichtung im Zylinder eine chemische Zersetzung erfährt, und zugleich durch den abgekürzten Zündverzug nur ein Bruchteil der eingespritzten Brennstoffmenge an der Entflammung teilnimmt.

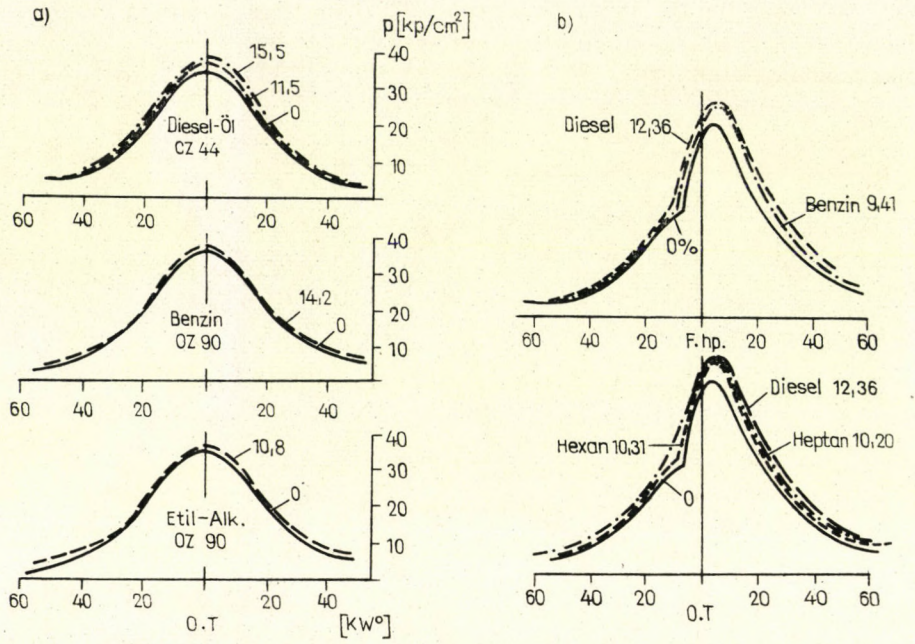


Bild 8. Einfluß der verschiedenen Brennstoffe: Kompressionskurven (*a*) und Arbeitszyklen (*b*)

Aus den Experimenten konnte festgestellt werden, daß die chemische Umwandlung während der Verdichtung von der Zetanzahl des Hilfsbrennstoffes beeinflußt wird. Ein Vorteil, daß man hier einen Diesel-Brennstoff als Hilfsbrennstoff verwenden kann. Doch ist es nachteilig, daß die nebelbildende Apparatur kostspielig ist. Eine rentable Anwendung ist nur für Motoren hoher Leistung denkbar.

Nun ist das Benzo-Diesel-Verfahren dadurch gekennzeichnet, daß man den Hilfsbrennstoff in das Saugrohr durch Karburierung zuführt. Für diese Methode wurden Hilfsbrennstoffe mit niedrigem Siedepunkt verwendet; wie dies in Tafel I zu sehen ist, eignen sich hierzu Hilfsbrennstoffe, deren Oktanzahl bzw. Zetanzahl binnen weiten Grenzen variieren kann [8]. Die Angaben dieser

Tafel I

Art des Brennstoffes	Spezifisches Gewicht [kg/l]	Siedepunkt [°C]	*OZ*	*CZ*	Hu $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right]$	Chemische Zusammensetzung [%]			
						C	H	S	O
n-Heptan	0,6837	98,5	0	60	10 720	84,0	16,0	—	—
Iso-Oktan	0,6918	99,3	100	10	10 520	84,2	15,8	—	—
Benzol	0,8700	80,1	100	10	9 520	92,3	7,7	—	—
Benzin	0,6950	43—140	56	32	10 460	85,4	14,2	0,1	0,3

Tabelle zeugen dafür, daß eine Gruppe der angeführten Brennstoffe durch große Entzündbarkeit, die andere Gruppe durch große Kompressionsverträglichkeit gekennzeichnet ist.

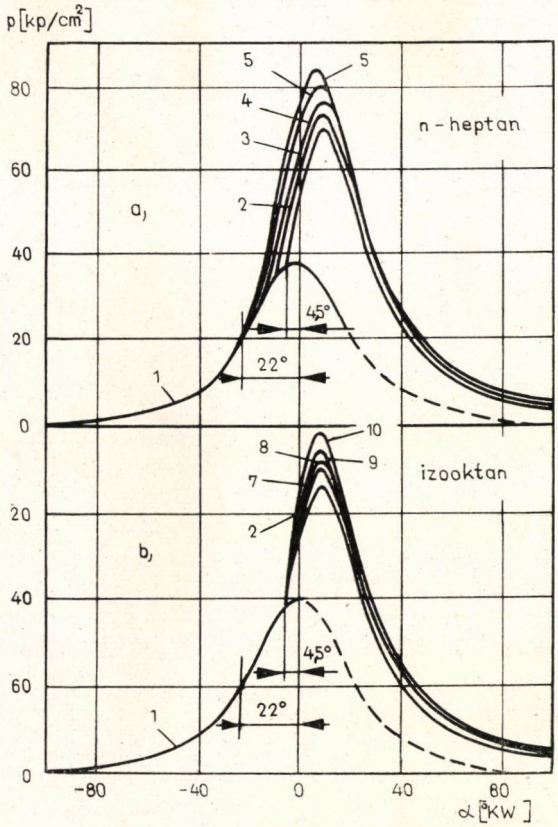


Bild 9. Einfluß der zusätzlichen Brennstoffmenge auf das Indikatordiagramm mit n-Heptan (*a*) und mit Isooktan (*b*)

Die Untersuchungsergebnisse der Experimente von SACHAROW sind im Bild 9a, 9b und 10 dargestellt. Aus Bild 9a ist es ersichtlich, daß durch Erhöhung der Quantität des n-Heptans die Menge des verbrennbaren Brennstoffes in einem Zyklus größer wird. Dies findet seine Erklärung darin, daß das n-Heptan eine große Oxidationsneigung ($CZ = 60$) und einen niedrigen Siedepunkt aufweist, infolgedessen nimmt die chemische Umwandlung des Brennstoffes unter der Einwirkung der Kompressionstemperatur ihren Anfang. Also ensteht hier, bis zum Beginn der Einspritzung, ein aktives, an Radikalen reiches, dünnes Gemisch. Durch das aktive Gemisch wird die Oxydation des eingespritzten Brennstoffes beschleunigt, zugleich der Zündverzug abgekürzt.

Im Bild 9b sind die Ergebnisse der Versuche mit Isooktan dargestellt. Man ersieht daraus, daß diese Hilfsbrennstoffart keinesfalls vorteilhaft ist, da hierdurch der harte Gang nur ärger wird. Das Isooktan besitzt nämlich eine hohe Kompressionsverträglichkeit ($OZ = 100$), also kann vor der Einspritzung kaum eine Oxydation auftreten.

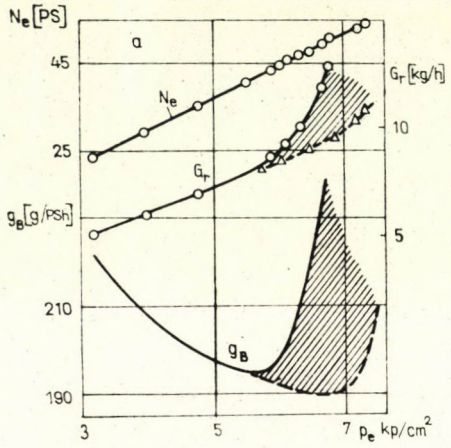


Bild 10. Motorbelastungscharakteristik, mit n-Heptan als Zusatz-Brennstoff

Im Bild 10 ist die Auswirkung des n-Heptans auf die Belastungscharakteristik des Motors dargestellt. Man sieht, daß der Motormitteldruck bedeutend erhöht werden kann.

Durch die richtige Wahl des Hilfsbrennstoffs kann man die Beschleunigung der die Entflammung einleitenden chemischen Prozesse, ferner die Verringerung des Zündverzuges erzielen: hierdurch kommt nur ein Bruchteil der Brennstoffmenge zur Entflammung und werden auch die dynamischen Eigenschaften des Zyklus günstiger. Auch kann man annehmen, daß das Fortpflanzen der Flamme in einem chemisch aktiven Medium unter vorteilhafteren Umständen verläuft, also kann der Mitteldruck gesteigert werden. Nachteilig ist es aber, daß ein Hilfsbrennstoff unentbehrlich und auch die Einrichtung einer besonderen Apparatur unumgänglich ist, wonach man mit höheren Motorkosten zu rechnen hat. Indessen dürfte dieses Verfahren zum Dämpfen des Motorgeräusches bei gegebenem Motor nützlich und sogar ökonomisch sein.

b) Einspritzung an Stellen verschiedentlicher Temperatur [9]. Ein Verbrennungsraum, der diesem Vorsatz entspricht, ist im Bild 11 dargestellt. Dieser Raum wurde von BÖTTGER [9] im Rahmen der Untersuchung des *MAN-M* Verfahrens ausgearbeitet. Im wesentlichen handelt es sich hier um eine exzentrische Lage der Einspritzdüse, wodurch es möglich gemacht wurde — für eine gegebene Kolbenkammer — die freie Länge des Brennstoffstrahls,

den Treffwinkel* und die Wandtemperatur der Berührungsflächen beliebig zu variieren. Hiedurch kann man erreichen, daß die Brennstoffstrahlen sich jeweils anders verhalten, sowohl in der Gemischbildung wie auch in der Entflammung. Auf diese Weise wird eine räumliche Regelung der Intensität der Entflammung ermöglicht.

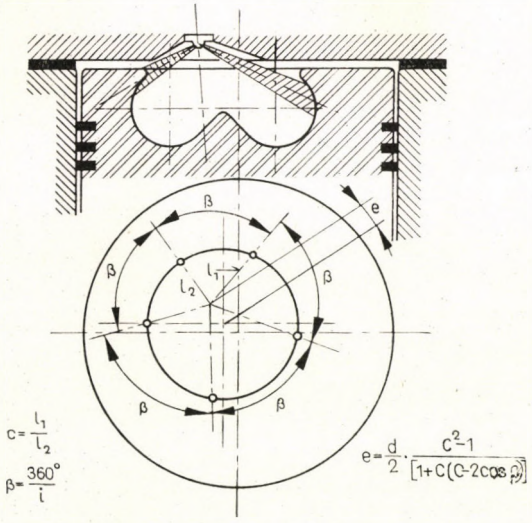


Bild 11. Versuchs-Verbrennungsraum im Motor Typ *Tatra*

Wir haben ähnliche Versuche ausgeführt. Zwar war die freie Länge der Strahlen identisch, aber wir konnten den Treffwinkel und die Temperatur der Wandstellen variieren. Die Ergebnisse dieser Versuche sind im Bild 12 dargestellt.

In unseren Versuchen wurde eine toroidale Kolbenkammer verwendet; man konnte konstatieren, daß durch entsprechende Senkung der Lage der Düse (bis zum Werte $l_{krit.}$) der Treffwinkel sowie die Temperatur der Wandstelle kleiner war, also entstand ein abgekürzter Zündverzug und ein weicherer Gang.

Die Abkürzung des Zündverzuges kann dadurch erklärt werden, daß die nahezu normale Richtung des Aufspritzens ein starkes Aufschlagen hervorrief.** Der aufgeschlagene Brennstoff läßt sich rascher erhitzen als der auf die Wandfläche gelangte Brennstoff. So kann der Frühoxydierungsvorgang rascher losgehen, und die Periode τ_i wird auch kürzer. Dadurch wird auch eine Verringerung der entflammenden Gemischmenge hervorgerufen.

* Der Treffwinkel wird von der Normalen der Wandfläche und von der Achsrichtung des Strahles gebildet.

** Wir bezeichnen mit dem Maße $l_{krit.}$ jene Lage, in welcher der Brennstoffstrahl durch den Krümmungsmittelpunkt der Kammerwand hindurchgeht.

Wenn man die Düse weiter (tiefer als das Maß $l_{krit.}$) sinken läßt, so wird der Zündverzug länger und auch der Wert des Differentialquotienten $(dp/d\varphi)_{max}$ größer. Das Größerwerden des Zündverzuges und der Drucksteigerung kann mit dem größeren Treffwinkel und der niedrigeren Wandtemperatur erklärt werden. Durch den größeren Treffwinkel ist das Aufschlagen geringer, die auf die Wand aufgetragene Menge größer; diese Erscheinungen, kombiniert mit

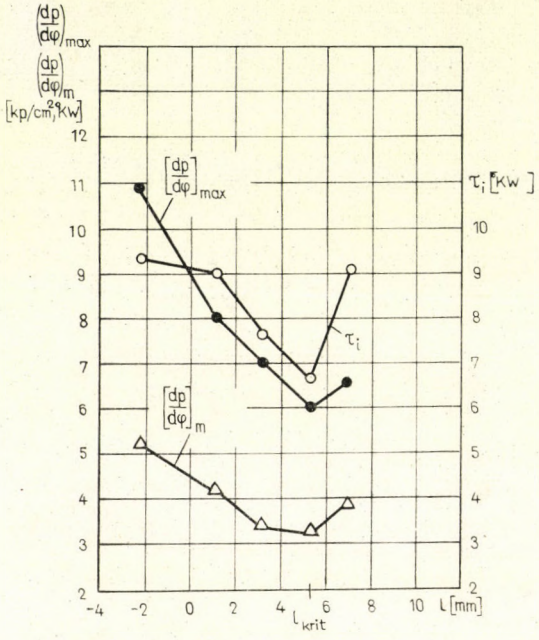


Bild 12. Kurven zur Darstellung der Wirkung einer gesenkten Lage der Düse: *a)* auf den Zündverzug; *b)* auf die maximale Druckanstieggeschwindigkeit $(dp/d\varphi)_{max}$; *c)* auf die mittlere Druckanstieggeschwindigkeit $(dp/d\varphi)_m$

dem angedeuteten Sinken der Wandtemperatur, tragen zur schlechteren Gestaltung der dynamischen Eigenschaften des Zyklus bei.

Aus den angeführten Erscheinungen sieht man, daß es durch die exzentrische Lage der Düse, die Variierung der Gestaltung der Kolbenkammer und durch entsprechendes Herabsinken der Düse möglich ist, den harten Gang weicher zu gestalten. Immerhin beweisen die Experimente den Umstand, daß die Möglichkeiten eng begrenzt sind.

c) Neigungswinkel der Düse [1]. Die günstigste Lage der Düse wird bei Motoren mit direkter Einspritzung allenfalls durch die Methode der Gemischbildung und die Gestaltung der Kammer bestimmt.

So z. B. ist es ratsam, zu einer ellipsoiden Kammer die Düse in einen Winkel zu 45° zu verstellen, wie dies durch die Experimente von SITKEI [1] erwiesen worden ist (Bild 13). Die Verkürzung des Zündverzuges läßt sich

damit erklären, daß infolge einer vergrößerten Aufschlagfläche der Brennstoffstrahl in der Kammermulde leichter von einer intensiven Luftbewegung zerlegt wird. Also ist die Lage mit einem Neigungswinkel von ung. 45° eine optimale.

Die Verringerung der mittleren Drucksteigerungsgeschwindigkeit findet ihre Erklärung darin, daß die Charakteristik der Einspritzung bei verkürzten Zündverzug unverändert bleibt, also wird während der Zündverzugsperiode die dem Zylinder zugeführte Brennstoffmenge kleiner, und damit sinkt auch die Intensität des Entflammens.

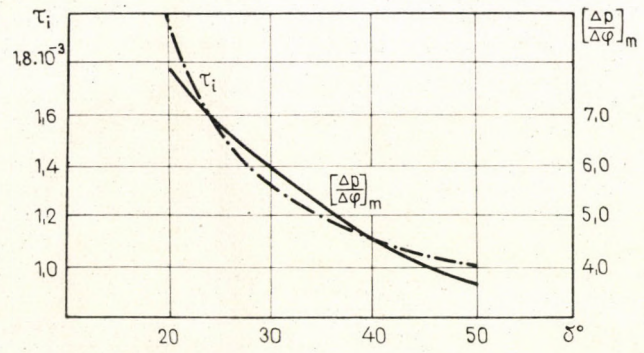


Bild 13. Einfluß des Neigungswinkels einer Zapfendüse: *a)* auf den Zündverzug; *b)* auf die mittlere Druckanstieggeschwindigkeit $(dp/d\varphi)_m$

3. Verringerung der verdampften Menge

a) Das MAN-M Verfahren [10]. Im Bild 14 ist die Bauart des Verbrennungsraumes dargestellt. Hier ist die Kolbenkammer dadurch gekennzeichnet, daß die Muldenöffnung dem größten Kammerquerschnitt nahezu gleichkommt, und infolgedessen die Bewegung des Kolbens keine bedeutende Luftbewegung in der Kammer hervorruft. Die zur Gemischbildung benötigte Luftströmung (Luftwirbel) wird durch die spezielle Ausbildung des Saugkanals erzielt. Daraus, daß die Düse eine exzentrische Lage einnimmt, und daß die Strahlen des zerstäubten Brennstoffes tangentiell gerichtet sind, kann man darauf schließen, daß eine großer Teil der Zyklusdosierung als ein Flüssigkeitsfilm verdampft wird.

Im Bild 15a sehen wir den zeitlichen Verlauf der Einspritzung und der Verdampfung beim herkömmlichen Verfahren (d. h. bei einer Zerstäubung in die Luft); auch erkennen wir in diesem Bilde die zur Entflammung geratene Gemischmenge.

Es soll bemerkt werden, daß in der Periode nach der Entflammung das Verdampfen von der Wandfläche unter Einfluß der Flammenstrahlung intensiver wird; dies läßt sich aus der höheren Temperatur der Luft- und der

Oxydation erklären. Auf diese Weise entsteht die entsprechende Durchmischung und die stufenweise Verbrennung unter Wirkung der wirbelnden Luftbewegung und des thermischen Mischvorganges. Aus dem vorhergehenden geht es klar hervor, daß hier alle Vorbedingungen eines weichen Ganges erfüllt sind.

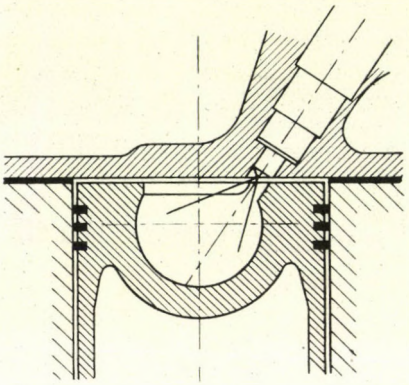


Bild 14. Verbrennungsraum des Motors Typ *MAN-M*

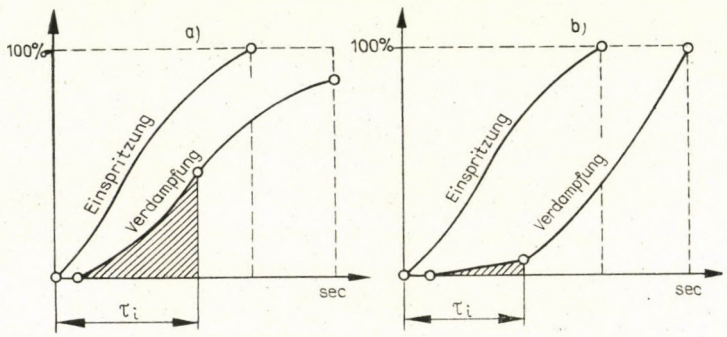


Bild 15. Verlauf der Verdampfung in der Zeit im herkömmlichen Dieselmotor *(a)* und in dem Motor Typ *MAN-M (b)*

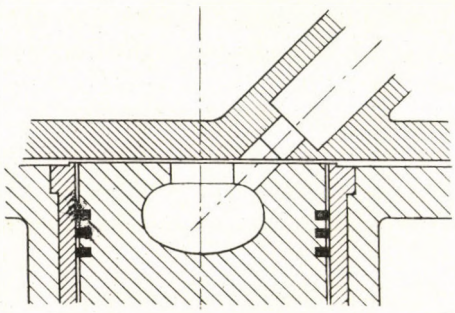


Bild 16. Verbrennungsraum der Motoren Typ *MIB-D* und *D-14*

Infolge der Verringerung des volumetrischen Wirkungsgrades bei gleichzeitigem Ansteigen der Reibungsverluste wird im Falle einer erhöhten Umdrehungszahl die Luftzirkulation und die Intensität der thermischen Durchmischung relativ verringert, woraus eine Verlängerung der Verbrennungsperiode entstehen dürfte.

b) Zerstäubungsdruck [1]. SITKEI [1] hatte Experimente mit Motoren Typ *MIB-D* und *D-14* ausgeführt. Der Verbrennungsraum ist im Bild 16 und die Veränderungen einiger Parameter sind im Bild 17 dargestellt. Aus

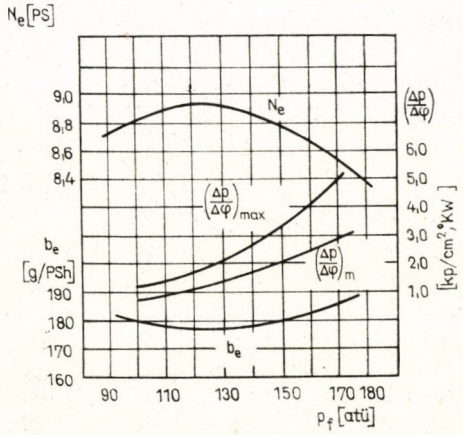


Bild 17. Veränderungen einiger Parameter als Funktion des Einspritzdruckes

diesen Diagrammen ersieht man, daß durch Ansteigen des Zerstäubungsdruckes die Intensität $(dp/d\varphi)_{max}$ des Entflammens auch größer wird. Dies läßt sich dadurch erklären, daß die Mikrostruktur infolge des erhöhten Zerstäubungdruckes feiner wird, also wird die Menge des am Anfang verdampften Brennstoffes größer. Dabei wird der Zündverzug nicht kürzer, sondern länger, da die Annäherung zu einem homogenen Gemisch mit Rücksicht auf die Vorgänge der Voroxydation unvorteilhaft ist. Dies alles deutet darauf, daß die Charakteristik der Zerstäubung bzw. die Arbeit der Düse den harten Gang des Motors beeinflußt, und dies nicht vernachlässigt werden darf.

c) Neigungswinkel der Düse. Bei unseren Versuchen haben wir einen toroidalen Verbrennungsraum mit Mehrlochdüse benutzt, wobei der Neigungswinkel der Düse variiert wurde. Die Ergebnisse dieser Versuche sind auf Bild 18 dargestellt.

Wenn man den Neigungswinkel von 10 Grad auf 18 Grad erhöhte, wurde der Druckanstieg verringert und der Zündverzug verlängert. Diese Verlängerung kann der zunehmenden Bildung des Flüssigkeitsfilmes zugeschrieben werden, die wiederum dem größeren Treffwinkel und der Kürzung der freien Strahlenlänge zu verdanken ist.

Die Verringerung des Druckanstieges kann mit der Verringerung der Menge des entflammenden Gemisches bzw. indirekt mit der Verdampfung des Filmes niedriger Temperatur erklärt werden.

Bezüglich der Entflammung war die Auswirkung einer weiteren Erhöhung des Neigungswinkels von 18 auf 24 Grad eine umgekehrte. Der Druckanstieg wurde größer, und auch der Zündverzug wurde länger. Diese Ausdehnung des Zündverzuges läßt sich einer gesteigerten Filmwirkung zuschreiben.

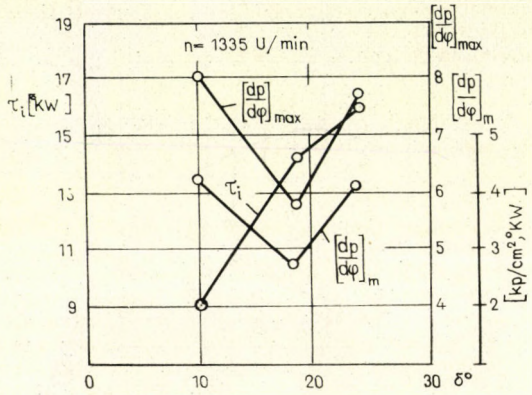


Bild 18. Einfluß des Neigungswinkels der Mehrlochdüse auf den Mittelwert ($dp/d\varphi$) und den Maximalwert $(dp/d\varphi)_{max}$ der Druckanstieggeschwindigkeit

Gewissermaßen kann man aber die Ursache des Druckanstieges in einem gewissen störenden Umstand erblicken. Es konnte nämlich beobachtet werden, daß der Brennstoffstrahl hier und da gegen den Rand der Kammermulde aufstößt (Überspritzen). Hieraus entstand eine störende Wirkung dadurch, daß die in der Kammer herrschende intensive Luftbewegung den aufgeschlagenen Brennstoff in die Kolbenkammer hineinjagt, wodurch sich die luftverteilte Brennstoffmenge erhöht. Hier nun wird die Entflammung nur noch intensiver, da die entflammte Gemischmenge größer geworden ist.

Schließlich folgt die Feststellung, daß man zwar den harten Gang durch eine Abänderung des Düsenwinkels mäßigen kann, aber nur innerhalb gewisser, ziemlich enger Grenzen.

SCHRIFTTUM

1. Sitkei, G.: Kraftstoffaufbereitung und Verbrennung bei Dieselmotoren. Springer, Berlin 1964.
2. Alcock, J. F.—Watts, R.: The Combustion Process in High-Speed Diesel Engines. CIMAC Colloquium, Wiesbaden 1959.
3. *Соколик, А. С.:* Кинетическая интерпретация М-процесса. Академия наук СССР, Москва 1960.
4. *Гончар, Б. М., — Милкин, Д. М.:* Анализ индикаторных диаграмм (Сборник Двигатели внутреннего сгорания); Москва 1965.

5. *Толстов, А.:* Труды «НИЛД» вып. 1, 1955.
6. Jurek, A.: Belsőégésű motorok (Verbrennungsmotoren); Budapest 1955.
7. Schweitzer, P. H.—Grunder, L. J.: Hybrid Engines. *SAE Transaction* (1963).
8. *Сахаров, А. Г.:* Эффективность применения углеводородов для обогащения поступающего в дизель воздуха. Механизация и электрификация ССХ, Москва 1966.
9. *Бетгер, И. И.:* Анализ безщумного горения в дизелях. Академия наук СССР, Москва 1960.
10. Mühlberg, E.: Über die Entwicklung des geräuscharmen und kraftstoffunempfindlichen MAN-M Motors. *MTZ* (1958), X.

Study on the Possibility to Eliminate the Hard Running of Direct Injection Diesel Engines. When examining the hard running of direct injection Diesel engines, the characteristic feature is always the intense inflammation, represented by the index $(dp/d\varphi)_{max}$. Intensity of inflammation can be rendered more favourable by diminishing of some parameters, such as the dynamic factor σ, the delay of ignition, the velocity of the initial evaporation, the number of the foci of inflammation. The survey of the relevant literary sources shows that the search of a more smooth running does not need a special processing; it claims a satisfactory choice the parameter values influencing the mixture and inflammation.

О возможностях уменьшения жесткости хода дизельных двигателей с непосредственным впрыскиванием *(И. Касап).* Жескость хода дизельных двигателей непосредственного впрыскивания вызвана интенсивным самовоспламенением, что характеризуется $(dp/d\varphi)_{max}$: Интенсивность самовоспламенения может быть более выгодной при уменьшении динамического фактора б, а также снижение запаздывания воспламенения, начальной скорости испарения и числа очагов воспаменения. Как литературный обзор, так и проведенные нами испытания доказывают, что снижение жеткости хода не является в обязательном порядке новым методом, а требует соответствующего согласования параметров образования смеси и самовоспламенения.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 243—273 (1970)

DETERMINATION OF THE THEORETICAL CHARACTERISTICS OF HYDRAULIC MACHINES, BASED ON POTENTIAL THEORY

A. NYIRI*

CAND. OF TECHN. Sc.

[Manuscript received December 16, 1968]

In the paper the author deduces an integral equation for the relative flow around the profile lattice on the mean surface of a part-channel, sliced out of the runner of a hydraulic machine by two surfaces of rotation. The machine is working with an incompressible, frictionless fluid. Through the dependency of the solution on the direction of the approaching flow the theoretical characteristics of the runner as well as the characteristics for the inception of cavitation are determined.

Symbols

1. Notations

a, b, a_0, a_1, A, B	constants;
$b\,(\sigma)$	width of the part-channel;
c	velocity in the stationary system;
$\bar{c} = c_x - i\,c_y$	conjugate complex velocity in the image plane;
D	diameter;
Δh	suction capacity of the turbine;
H	head;
(K)	contour of the profile;
$\mathfrak{K}(z, z')$	$= R(z, z') + iJ(z, z')$, kernel function;
n	speed (r. p. m.), normal direction;
n_{11}, Q_{11}	unit runner speed and flow;
n_q	$= nQ^{1/2}H^{-3/4}$ specific speed;
N	number of blades;
$NPSH$	net positive suction head;
p	pressure;
Q	flow rate;
(r, φ)	polar coordinates;
s	arc length of the profile contour;
t	pitch of blades in the image plane;
T	planar region;
u	peripheral velocity;
w	relative velocity;
z	$= x + iy$, points of the complex plane;
(x_1, x_2, x_3)	spatial rectangular coordinates;
(x, y)	planar rectangular coordinates;
α	angle between vectors of absolute and of peripheral velocity;
β	angle included by the vectors of relative and of peripheral velocity;
γ	specific weight;
Γ	circulation
ζ	$= \xi + i\eta$, complex coordinates of the points of the profile contour;
λ	stagger angle of the cascade;
σ	arc length coordinate in the meridian plane;
Φ_P	$= -c_{R2\sigma}/u_{R2}$ flow coefficient for pumps;

* Róbert Károly krt. 14/b, *Budapest XIII.* (HUNGARY).

Φ_T $= c_{R1\sigma}/u_{R1}$ flow coefficient for turbines;
$\Phi(x, y)$ velocity potential function;
χ angle included by a direction with the x-axis;
ψ_P $= -2gH/u^2_{R2}$ pressure coefficient for pumps;
ψ_T $= 2gH/u^2_{R1}$ pressure coefficient for turbines;
ψ_S suction coefficient;
ω angular velocity.

2. Subscripts

n normal direction;
P pump;
R value of the mean flow surface of the part-channel;
s tangential direction;
T turbine;
x, y component in the direction of the coordinate axis of the image plane;
φ, σ circumferential and meridian component.

I. Introduction

Hydraulic machines are in general operating under variable conditions; it is therefore necessary to know their characteristic curves. The characteristics, however, can be determined only by test measurements, as no exact method for determining the hydraulic losses arising in the machines has been elaborated. For the no-loss case too, only the characteristics for the so-called infinite blade number case is known.

In this paper the characteristics of a hydraulic machine with finite number of blades, working with an ideal, incompressible fluid will be determined, i.e. the variation of the delivery head (for pumps) or the head (for turbines), and also the minimum pressure on the blade. This latter will be called cavitation characteristics.

For the examination of fluid losses it is indispensable to know the theoretical characteristics. The section of the characteristics around the best efficiency point of the machine can be well estimated with the aid of simple assumptions for the variations of losses.

The runner is assumed to be composed of part-channels [1]. The flow in the part-channels is mapped in a well-known manner into a flow through a plane cascade of varying width. First the differential equation of the flow will be briefly deduced on the basis of [2].

II. Flow in the part-channel of the rotor

1. The differential equation of the flow on the surface of rotation

The surfaces of rotation of flow, which are coaxial with the axis of the machine, cut out a part-channel of varying width. The flow developing on the flow surface (F) of this part-channel is mapped into the field of velocities of a suitably chosen plane cascade flow (Fig. 1).

On the surface of rotation the equation of continuity is:

$$\frac{\partial c_{R\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b}\frac{db}{d\sigma}\right) c_{R\sigma} = 0. \tag{1}$$

The relation expressing that the absolute flow is irrotational is:

$$\frac{\partial c_{R\varphi}}{\partial \sigma} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial c_{R\sigma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} c_{R\varphi} = 0. \tag{2}$$

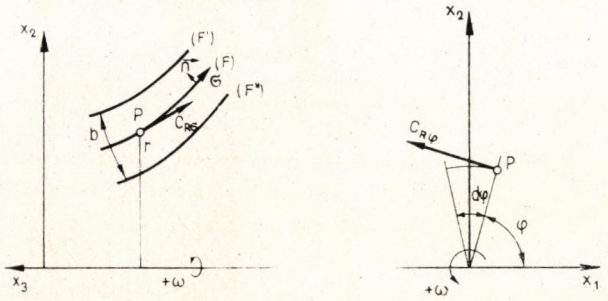


Fig. 1

In the impeller rotating at angular velocity ω the absolute and the relative velocities are connected by the peripheral velocity $\vec{u}_R = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{c}_R = \vec{u}_R + \vec{w}_R. \tag{3}$$

It follows from the irrotational character of the absolute flow that

$$\text{rot}\, \vec{w}_R = -\,\text{rot}\, \vec{u}_R = -\,2\omega\vec{k}.$$

The component of the vortex vector of the relative velocity in the direction of the normal to the surface (F) is

$$(\text{rot}\, \vec{w})_n = -\,2\omega\frac{dr}{d\sigma}. \tag{4}$$

With these Equs (1) and (2) can be written also by the components of the relative velocity:

$$\frac{\partial w_{R\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b}\frac{db}{d\sigma}\right) w_{R\sigma} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_{R\varphi}}{\partial \sigma} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_{R\sigma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} w_{R\varphi} = -\,2\omega\frac{dr}{d\sigma}. \tag{6}$$

2. *Transformation to the plane*

The flow surface (F) of the part-channel is conformally transformed (Fig. 2) to the plane (x, y) by Equs

$$x = \frac{Nt}{2\pi}\left[-\frac{a_L}{2} + \int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{r}\right] = l\cos\lambda\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{a_L}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{r}\right], \tag{7}$$

$$y = \frac{Nt}{2\pi}\varphi = l\cos\lambda\,\frac{\varphi}{a_L}\ ;$$

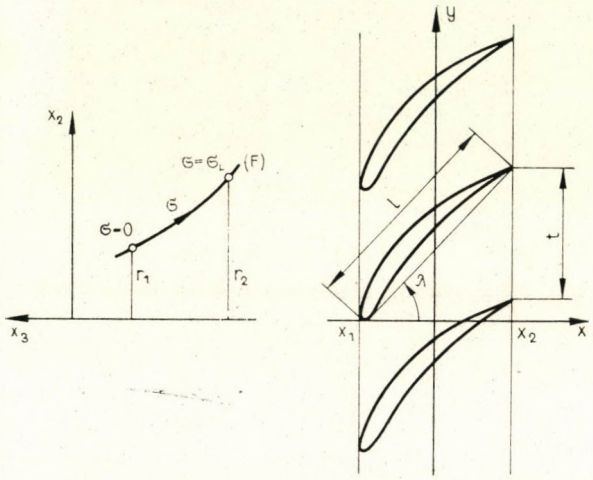


Fig. 2

where

$$a_L = \int_0^{\sigma_L}\frac{d\sigma}{r}\ .$$

To the velocity c_R on the surface of rotation corresponds in the plane the velocity

$$c = \frac{2\pi}{Nt}\,rc_R. \tag{8}$$

The set of curves cut out from the blades by the surface of rotation map in the plane into a blade lattice stretching into infinite.

By using the transformation functions, the forms of the differential equations describing the flow around the planar blade cascade are determined.

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = -\frac{1}{b}\,\frac{db}{dx}\,c_x \equiv B(x)\,c_x\,,$$
$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0\,. \tag{9}$$

The boundary conditions of the differential equations are given by the velocity components ahead of and after the cascade:

$$\begin{aligned} x &= -\infty \quad c_x(-\infty) = c_{1x}, \quad c_y(-\infty) = c_{1y}; \\ x &= \quad \infty \quad c_x(\infty) = c_{2x}, \quad c_y(\infty) = c_{2y}. \end{aligned} \tag{10}$$

The d.e. system for the components in the plane of the relative velocities is obtained in a similar way as for the absolute velocities:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{1}{b}\frac{db}{dx} w_x, \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -2u\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}. \end{aligned} \tag{11}$$

3. *Solution of the system of differential equations*

For solving the system of differential equations of the flow around the cascade of blades, use is made of the fact that the absolute velocity can be deduced from a potential:

$$c_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad c_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{12}$$

For the velocity potential instead of the system of differential Equs (9)

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = B(x)\, c_x \tag{13}$$

is obtained. The boundary conditions for the velocity potential are:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=-\infty} &= c_{1x}, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{x=-\infty} = c_{1y}; \\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{y=\infty} &= c_{2x}, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{x=\infty} = c_{2y}. \end{aligned} \tag{14}$$

The solution of the d.e. (13) satisfying the boundary conditions is determined by Green's integral theorem. In the inner point (P) of a (T) simply connected, bounded region (Fig. 3) this is

$$\left.\begin{matrix} P \in T & 2\pi\Phi(P) \\ P \notin T & 0 \end{matrix}\right\} = \iint_{(T)} \ln d\, \Delta\Phi\, dA + \oint_{(C)} \ln d\, \frac{\partial \Phi}{\partial n'}\, ds' - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} (\ln d)\, ds'. \tag{15}$$

For a point outside the region the above is valid with the left side equal to zero. d is the distance between the point P under consideration and the running point of the integration, dA is the element of surface, (C) is the closed boundary curve of the region (T), $\partial / \partial n$ signifies differentiation along the inward normal to the curve (C).

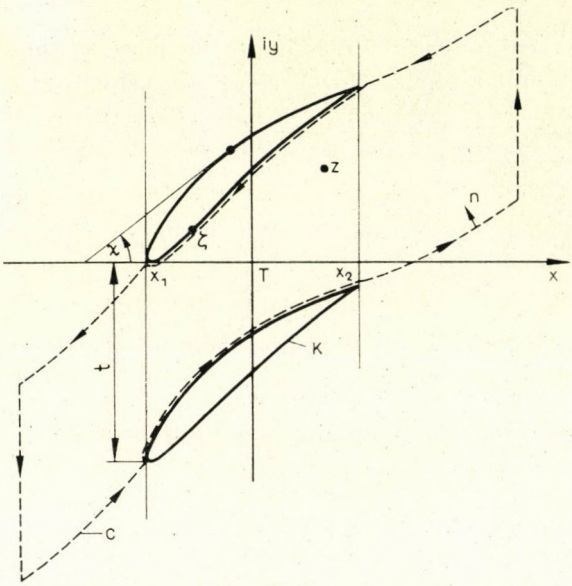


Fig. 3

Let us differentiate (15) with respect first to x, then to y:

$$\left.\begin{matrix} 2\pi c_x(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \iint_{(T)} \frac{x-x'}{d^2} \Delta\Phi dA + \oint_{(C)} \frac{x-x'}{d^2} \frac{d\Phi}{\partial n'} ds' -$$

$$- \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{x-x'}{d^2} \right) ds',$$

$$\left.\begin{matrix} 2\pi c_y(P) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \iint_{(T)} \frac{y-y'}{d^2} \Delta\Phi dA + \oint_{(C)} \frac{y-y'}{d^2} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} ds' -$$

$$- \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{y-y'}{d^2} \right) ds'.$$

The complex coordinate of point P in the plane (x, y) is $z = x + iy$, the coordinate of the running point of the integration is $z' = x' + iy'$, and with the derivatives of the velocity potential the conjugate complex velocity is

$$\bar{c}(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i \frac{\partial\Phi}{\partial y} = c_x - ic_y,$$

$$\left.\begin{matrix} 2\pi\bar{c}(z) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \iint_{(T)} \Delta\Phi \frac{dA}{z-z'} + \oint_{(C)} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} \frac{ds'}{z-\zeta'} - \oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{z-\zeta'}\right) ds',$$

ζ' is the value of the running point assumed on the boundary.

On the boundary the normal is directed towards the interior of the region, thus for (C) there is with the sense of circumscription according to Fig. 3 and for a differentiable function:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n} = -i \frac{\partial}{\partial n}$$

and with this

$$\frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{z-\zeta'} = i \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{z-\zeta'} = i \frac{1}{(z-\zeta')^2} \frac{d\zeta'}{ds'}.$$

In the expression for $\bar{c}(z)$ the third integral is converted:

$$\oint_{(C)} \Phi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{z-\zeta'}\right) ds' = i \oint_{(C)} \frac{\Phi}{(z-\zeta')^2} \frac{d\zeta'}{ds'} ds' =$$

$$= i\left[\frac{\Phi}{z-\zeta'}\right]_{s=0}^{L} - i \oint_{(C)} \frac{\partial\Phi}{\partial s'} \frac{ds'}{z-\zeta'}$$

where L is the length of curve (C). The closed curve (C) is bounding the simply-connected bounded region (T), where Φ is single-valued, thus the first right-hand side integral is zero:

$$\left.\begin{matrix} 2\pi\bar{c}(z) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \iint_{(T)} \Delta\Phi \frac{dA}{z-z'} + \oint_{(C)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n'} + i \frac{\partial\Phi}{\partial s'}\right) \frac{ds'}{z-\zeta'}.$$

On the boundary

$$\bar{c}(\zeta) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s} - i \frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) e^{-i\chi}$$

and furthermore

$$d\zeta = e^{i\chi} ds,$$

hence

$$\iint_{(T)} \Delta\Phi \frac{dA}{z-z'} + i \oint_{(C)} \bar{c}(\zeta') \frac{d\zeta'}{z-\zeta'} = \begin{cases} 2\pi\bar{c}(z), & \text{if } z \in T \\ 0, & \text{if } z \notin T \end{cases}. \tag{16}$$

The blade cascade may be considered as an infinite series of the profiles enclosed by a series of regions T_μ congruent with the region T (Fig. 4). In these regions the flow configurations are congruent, hence the potential functions and their derivatives must be periodical functions with the periodicity *it*.

In order to eliminate the integration of the curve (C) on the sections in common with the neighbouring regions we write for point $z \in T$

$$0 = \iint_{(T_\mu)} \Delta\Phi \frac{dA}{z - z'_\mu} + i \oint_{(C_\mu)} \bar{c}(\zeta'_\mu) \frac{d\zeta'_\mu}{z - \zeta'_\mu} \quad (\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

there being $z \notin T_\mu$.

Adding the above integrals for all μ-s and adding them to (16), we get:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \iint_{(T_\mu)} \Delta\Phi \frac{dA}{z - z'_\mu} + i \oint_{(C_\mu)} \bar{c}(\zeta'_\mu) \frac{d\zeta'_\mu}{z - \zeta'_\mu} \right\} = \begin{cases} 2\pi\bar{c}(z), & z \in T \\ 0 \quad , & z \notin T \end{cases}.$$

where T belongs to the value $\mu = 0$.

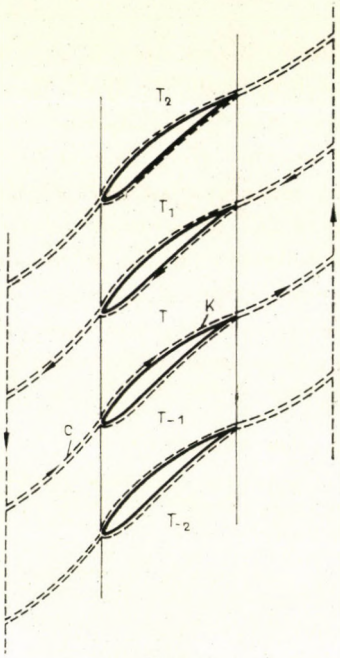


Fig. 4

After carrying out the addition, — considering the periodicity of the function Φ and the boundary conditions — finally the following expression is obtained for the complex conjugate of the velocity:

$$\pi(\bar{c}_1 + \bar{c}_2) + \frac{\pi}{t} \iint_{(T)} \Delta\Phi \coth \frac{\pi}{t}(z - z')\, dA + i \frac{\pi}{t} \oint_{(K)} \bar{c}(\zeta') \coth \frac{\pi}{t}(z - \zeta')\, d\zeta' = \begin{cases} 2\pi\bar{c}(z), & z \in T \\ 0 \quad , & z \notin T \end{cases}. \tag{17}$$

Introducing also the symbols

$$\bar{c}_\infty = \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2} \tag{18}$$

and

$$\mathcal{K}(z, z') = \frac{\pi}{t} \coth \frac{\pi}{t}(z - z') \tag{19}$$

the above formula becomes

$$\left.\begin{matrix} z \in T & \bar{c}(z) \\ z \notin T & 0 \end{matrix}\right\} = \bar{c}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(K)} \bar{c}(\zeta') \, \mathcal{K}(\zeta, 'z) \, d\zeta' + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} B(x') \, c_x(z') \, \mathcal{K}(z, z') \, dA \,. \tag{20}$$

The expression (20) is the integral form of the solution of d.e. (13). In the case of constant channel width the velocity of the flow field around the cascade can be determined from the velocity distribution around the profile contour. The surface integral expresses the effect caused by the variation of channel width. The surface integral contains also the velocity component normal to the cascade corresponding to the meridional velocity — as a factor of the source intensity, hence the solution can be found only by iteration.

Let us examine what connections the solution contains between the components of velocities c_1 and c_2 meaning the boundary conditions. The limit values of the kernel $\mathcal{K}(z, z')$ at great distance from the lattice are:

$$\lim_{x \to \mp \infty} \mathcal{K}(z, z') = \pm \frac{\pi}{t} \,.$$

Using these limit values

$$\bar{c}_{1,2} = \bar{c}_\infty \mp \frac{i}{2t} \oint_{(K)} \bar{c}(\zeta') \, d\zeta' \pm \frac{1}{2t} \iint_{(T)} B(x') \, c_x(z') \, dA \,,$$

from which

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 = 2\bar{c}_\infty$$

and

$$\bar{c}_1 - \bar{c}_2 = -\frac{i}{t} \oint_{(K)} \bar{c}(\zeta') \, d\zeta' + \frac{1}{t} \iint_{(T)} B(x') \, c_x(z') \, dA \,. \tag{21}$$

According to Fig. 5 the velocity is expressed by the components tangential and normal to the profile contour

$$\bar{c}(\zeta) = (c_s - i c_n) \, e^{-i\chi};$$

using further that

$$d\zeta = e^{i\chi}\, ds$$

we may write down that the integral of the velocity along the contour is

$$\oint_{(K)} \bar{c}\, d\zeta = \oint_{(K)} c_s\, ds - i \oint_{(K)} c_n\, ds .$$

The integral of the *tangential component* of the velocity along the contour gives the circulation:

$$\Gamma_c = \oint_{(K)} c_s\, ds . \tag{22}$$

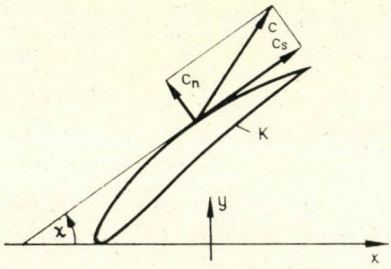


Fig. 5

The line integral of the *normal component* is zero, as it is proved in the appendix. Using these in the expression (21)

$$\bar{c}_1 - \bar{c}_2 = c_{1x} - ic_{1y} - c_{2x} + ic_{2y} = -\frac{i}{t}\Gamma_c + \frac{1}{t}\iint_{(T)} B(x')\, c_x(z')\, dA .$$

The sought relations are hence:

$$c_{1y} - c_{2y} = \frac{\Gamma_c}{t} , \tag{23}$$

$$c_{1x} - c_{2x} = \frac{1}{t}\iint_{(T)} B(x')\, c_x(z')\, dA . \tag{24}$$

III. Integral equation for the contour velocity

In the case of a profile cascade of given geometry the velocity distribution along the profile contour is unknown. From the integral representation of the conjugate velocity an integral equation may be obtained for the distribution of the relative velocity along the contour — subject to the condition that the profile contour is a flow line, i.e. that there is no flow across it, con-

sequently, the relative velocity can be only tangential along the contour of the profile.

By virtue of Plemelj's formula it is possible to write that for $z \to \zeta \in K$, while $z \in T$, then $\bar{c}(z) \to \bar{c}^{+}(\zeta)$ and

$$\bar{c}^{+}(\zeta) = \bar{c}_{\infty} + \frac{1}{2}\bar{c}\,(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(K)} \bar{c}(\zeta')\,\mathcal{K}(\zeta', \zeta)\,d\zeta' + \frac{1}{2\pi}\iint_{(T)} B(x')\,c_x(z')\,\mathcal{K}(\zeta, z')\,dA \tag{25}$$

when on the contrary $z \to \zeta \in K$, but $z \notin T$, then $\bar{c}(z) \to \bar{c}^{-}(\zeta)$, the value of which is:

$$\bar{c}^{-}(\zeta) = \bar{c}_{\infty} - \frac{1}{2}\bar{c}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(K)} \bar{c}(\zeta')\,\mathcal{K}(\zeta', \zeta)\,d\zeta' + \frac{1}{2\pi}\iint_{(T)} B(x')\,c_x(z')\,\mathcal{K}(\zeta, z')\,dA\,. \tag{26}$$

The difference between the limit values on the two sides of the contour is:

$$\bar{c}^{+} - \bar{c}^{-} = \bar{c}(\zeta),$$

but as according to (20) in the points outside (T) the conjugate velocity is zero, $\bar{c}^{-}(\zeta) = 0$, therefore $\bar{c}^{+}(\zeta) = \bar{c}(\zeta)$. Consequently for the absolute velocity along the profile contour it can be written:

$$\bar{c}(\zeta) = 2\bar{c}_{\infty} + \frac{1}{\pi i}\oint_{(K)} \bar{c}(\zeta')\,\mathcal{K}(\zeta', \zeta)\,d\zeta' + \frac{1}{\pi}\iint_{(T)} B(x')\,c_x(z')\,\mathcal{K}(\zeta, z')\,dA\,. \tag{27}$$

The conjugate of the absolute velocity along the contour can be expressed by the tangential and normal components of the velocity

$$\bar{c} = (c_s - ic_n)\,e^{-i\chi}. \tag{28}$$

The components of the absolute velocity can be substituted by the corresponding components of the peripheral velocity and of the relative velocity according to Equ. (3)

$$c_s = u_s + w_s \quad \text{and} \quad c_n = u_n, \tag{29}$$

the profile contour being a flow line, w_n must be zero.

From Equ. (27) the integral equation sought for can now be obtained in two ways. The first possibility:

$$Im(\bar{c}e^{i\chi}) = -c_n = -u_n\,. \tag{30}$$

In this case the integral equation has a singular kernel. The other possibility is furnished by the relation:

$$\mathrm{Re}\,(\bar{c}e^{i\chi}) = c_s = u_s + w_s\,. \tag{31}$$

The latter leads to a Fredholm-type integral equation.

Let us resolve the kernel function $\mathfrak{K}(z, z')$ into a real and an imaginary part

$$\mathfrak{K}(z, z') = R(z, z') + iJ(z, z')\,,$$

where

$$R(z, z') = \frac{\pi}{t}\,\frac{\sinh\dfrac{2\pi}{t}(x-x')}{\cosh\dfrac{2\pi}{t}(x-x') - \cos\dfrac{2\pi}{t}(y-y')}$$

and

$$J(z, z') = -\frac{\pi}{t}\,\frac{\sin\dfrac{2\pi}{t}(y-y')}{\cosh\dfrac{2\pi}{t}(x-x') - \cos\dfrac{2\pi}{t}(y-y')}\,. \tag{32}$$

The product $\bar{c}e^{i\chi}$ should be calculated in order to substitute its real part into Equ. (31):

$$\begin{aligned}
\bar{c}(\zeta)\,e^{i\chi} = {} & 2(c_{\infty x}\cos\chi + c_{\infty y}\sin\chi) - \frac{1}{\pi}\oint_{(K)} u_y(\zeta')\,[R(\zeta', \zeta)\cos(\chi'+\chi) - \\
& - J(\zeta', \zeta)\sin(\chi'+\chi)]\,ds' + \frac{1}{\pi}\oint_{(K)} w_s(\zeta')\,[R(\zeta', \zeta)\sin\chi + \\
& + J(\zeta', \zeta)\cos\chi]\,ds' + \frac{1}{\pi}\iint_{(T)} B(x')\,w_x(z')\,[R(\zeta, z')\cos\chi - \\
& - J(\zeta, z')\sin\chi]\,dA + i\Big\{2\,(c_{\infty x}\sin\chi - c_{\infty y}\cos\chi) - \\
& - \frac{1}{\pi}\oint_{(K)} u_y(\zeta')\,[R(\zeta', \zeta)\sin(\chi'+\chi) + J(\zeta', \zeta)\cos(\chi'+\chi)]\,ds' - \\
& - \frac{1}{\pi}\oint_{(K)} w_s(\zeta')\,[R(\zeta', \zeta)\cos\chi - J(\zeta', \zeta)\sin\chi]\,ds' + \\
& + \frac{1}{\pi}\iint_{(T)} B(x')\,w_x(z')\,[R(\zeta, z')\sin\chi + J(\zeta, z')\cos\chi]\,dA\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

Here the circumstance has been made use of that due to the choice of the system of co-ordinates, the peripheral velocity has no component in direc-

tion y, and thus the components in direction x of the absolute and the relative velocities are equal. According to Equ. (31)

$$w_s(\zeta) - \frac{1}{\pi} \oint_{(K)} w_s(\zeta') \left[R(\zeta', \zeta) \sin \chi + J(\zeta', \zeta) \cos \chi \right] ds' =$$

$$= 2\, c_{\infty x} \cos \chi + 2 c_{\infty y} \sin \chi - u_y(\zeta) \sin \chi -$$

$$- \frac{1}{\pi} \oint_{(K)} u_y(\zeta') \left[R(\zeta', \zeta) \cos (\chi' + \chi) - J(\zeta', \zeta) \sin (\chi' + \chi) \right] ds' +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iint_{(T)} B(x')\, w_x(z') \left[R(\zeta, z') \cos \chi - J(\zeta, z') \sin \chi \right] dA\,. \tag{34}$$

This is not yet a suitable form, as the velocity c_∞ contains also the velocity after the cascade. In order to eliminate the velocity c_2, the equality of the volumes arriving at and leaving the cascade is utilized $c_{1x} b_1 = c_{2x} b_2$ and so:

$$c_{\infty x} = (c_{1x} + c_{2x}) : 2 = \frac{b_1 + b_2}{2\, b_2}\, c_{1x}\,.$$

Further on the basis of (23):

$$c_{2y} = c_{1y} - \frac{\Gamma_c}{t}\,.$$

The line integral of the absolute velocity can be expressed also by the relative velocity:

$$\Gamma_c = \Gamma_u + \Gamma_w = \oint_{(K)} c_s\, ds = \oint_{(K)} u_s\, ds + \oint_{(K)} w_s\, ds\,. \tag{35}$$

In the appendix it is proved that the line integral of the peripheral velocity is

$$\Gamma_u = - \varkappa_2^2\, u_{2y}\, t\,, \tag{36}$$

where $\varkappa_2^2 = N A_{\mathrm{Pax}} / r_2^2 \pi$ is a number depending on the thickness of the profile. Hence

$$c_{2y} = c_{1y} - \frac{1}{t} \oint_{(K)} w_s\, ds + \varkappa_2^2\, u_{2y}$$

and thus

$$c_{\infty y} = \frac{c_{1y} + c_{2y}}{2} = u_{1y} + w_{1y} - \frac{1}{2t} \oint_{(K)} w_s\, ds + \frac{\varkappa_2^2}{2}\, u_{2y}\,.$$

If the Equ. (10) is divided by $2 w_{1x} \sin \chi$ and as according to Fig. 6

$$\frac{w_{1y}}{w_{1x}} = \tan \chi_1\,,$$

the following integral equation will be obtained:

$$\frac{1}{2}\,\frac{w_s(\zeta)}{w_{1x}\sin\chi}-\frac{1}{2\pi}\oint_{(K)}\frac{w_s(\zeta')}{w_{1x}}\left[R(\zeta',\zeta)+J(\zeta',\zeta)\cot\chi-\frac{\pi}{t}\right]ds'=$$

$$=\tan\chi_1+\frac{u_{1y}}{w_{1x}}+\frac{\varkappa_2^2}{2}\,\frac{u_{2y}}{w_{1x}}+\frac{b_1+b_2}{2\,b_2}\cot\chi-\frac{1}{2}\,\frac{u_y(\zeta)}{w_{1x}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{(K)}\frac{u_y(\zeta')}{w_{1x}}\,\frac{R(\zeta',\zeta)\cos(\chi'+\chi)-J(\zeta',\zeta)\sin(\chi'+\chi)}{\sin\chi}\,ds'+ \tag{37}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(T)}B(x')\,\frac{w_x(z')}{w_{1x}}\,[R(\zeta,z')\cot\chi-J(\zeta,z')]\,dA\,.$$

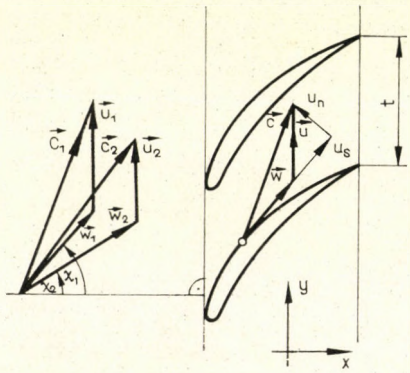


Fig. 6

The kernel of the integral equation is everywhere limited (for $\zeta' = \zeta$ its value is determined in appendix No. 2) it can be integrated quadratically, therefore (37) is a Fredholmian equation of the second kind. The solution of the integral equation can be attained only by iterative way, because of the velocity component w_x included in the double integral on the right side.

The solution of the integral equation (37) will give the sought relative velocity distribution along the profile contour. On this basis the changing of the absolute velocity along the contour can also be determined, and subsequently, by means of Equ. (20), the velocity of the flow around the cascade can be calculated everywhere.

In order to prove the connection between the solutions of Equ. (37) belonging to the various angles of attack χ_1 the equation is abbreviated as follows:

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{(K)}\frac{w_s}{w_{1x}}\,M\,ds=t_1-\frac{1}{2}\,\frac{w_s}{w_{1x}\sin\chi}+f\left(\frac{u_y}{w_{1x}},\chi\right)+\frac{1}{2\pi}\iint_{(T)}\frac{w_x}{w_{1x}}\,N\,dA \tag{38}$$

where

$$t_1 = \tan \chi_1 \quad \text{and} \quad M, N, f\left(\frac{u_y}{w_{1x}}, \chi\right)$$

results from the comparison with (37).

Let there be w_s^*/w_{1x} the solution of the integral equation for $t_1^* = \tan \chi_1^*$ and the solution w_s°/w_{1x} shall belong to the angle of approach $t_1^\circ = \tan \chi^\circ$. Statement: the function

$$\frac{w(z)}{w_{1x}} = \frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w^*(z)}{w_{1x}} + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w^\circ(z)}{w_{1x}} \tag{39}$$

describes the velocity field around the cascade belonging to the direction of approach $t_1 = \tan \chi_1$. Then

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{(K)} \frac{w_s}{w_{1x}} M ds = -\frac{1}{2\pi} \frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} \oint_{(K)} \frac{w_s^*}{w_{1x}} M ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} \oint_{(K)} \frac{w_s^\circ}{w_{1x}} M ds =$$

and as w_s^*/w_{1x} and w_s°/w_{1x} satisfy the integral equation, it can be written further that this expression is equal to

$$= \frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} t_1^* + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} t_1^\circ - \frac{1}{2 \sin \chi} \left(\frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w_s^*}{w_{1x}} + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w_s^\circ}{w_{1x}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} \right) f\left(\frac{u_y}{w_{1x}}, \chi\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} \left(\frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w_x^*}{w_{1x}} + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ} \frac{w_x^\circ}{w_{1x}} \right) N dA =$$

$$= t_1 - \frac{1}{2} \frac{w_s}{w_{1x} \sin \chi} + f\left(\frac{u_y}{w_{1x}}, \chi\right) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} \frac{w_x}{w_{1x}} N dA ,$$

the expression in the first brackets being precisely w_s/w_{1x}, the value of the second being 1, and the bracket in the double integral denoting the value w_x/w_{1x}.

This property of the solutions means that from the solutions of a cascade of varying width for two different approaching flows, the solution for an arbitrary direction of approach can be calculated by their linear combination. Hence, if in a point of the profile contour the velocities for two different directions of approach are known, the value of the relative velocity related to the inlet velocity component normal to the cascade will be a linear function of the tangent of the angle of attack (Fig. 7).

For the integral of the relative velocity along the contour therefore

$$\frac{\Gamma_w}{w_{1x}} = \oint_{(K)} \frac{w_s}{w_{1x}}\, ds = \frac{t_1 - t_1^\circ}{t_1^* - t_1^\circ}\,\frac{\Gamma_w^*}{w_{1x}} + \frac{t_1^* - t_1}{t_1^* - t_1^\circ}\,\frac{\Gamma_w^\circ}{w_{1x}} = a \tan \chi_1 + b\,. \qquad (40)$$

The variation of the circulation of the absolute velocity in function of the afflux is:

$$\frac{\Gamma_c}{t w_{1x}} = \frac{\Gamma_u}{t w_{1x}} + \frac{\Gamma_w}{t w_{1x}} = -\varkappa_2^2 \frac{u_{2y}}{w_{1x}} + A \tan \chi_1 + B\,, \qquad (41)$$

where $A = a/t$ and $B = b/t$.

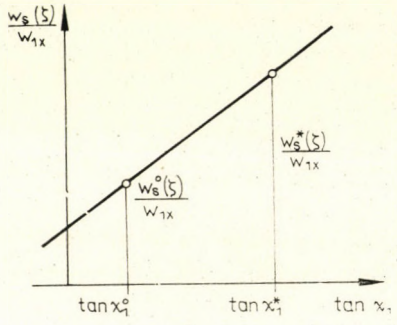


Fig. 7

IV. The characteristics of the runner

From the variation of the circulation of the velocity around the blade in function of the direction of approach a relation can be deduced connecting the outlet direction with the inlet direction.

Combining (23) with (41) shows that

$$\frac{\Gamma_c}{t w_{1x}} = \frac{c_{1y} - c_{2y}}{w_{1x}} = A \tan \chi_1 + B - \varkappa_2^2 \frac{u_{2y}}{w_{1x}}\,. \qquad (42)$$

Let us express the right-hand side of the equation by the corresponding values of the relative velocity, taking into consideration that $\tan \chi_2 = w_{2y}/w_{2x}$, which gives for the latter the expression

$$\tan \chi_2 = \frac{w_{1x}}{w_{2x}} (1 - A) \tan \chi_1 - \frac{w_{1x}}{w_{2x}} B + \frac{u_{1y} - u_{2y}(1 - \varkappa_2^2)}{w_{2x}}\,, \qquad (43)$$

where

$$\varkappa_2^2 = \frac{N A_{pax}}{r_2^2 \pi} \qquad (44)$$

denotes the relative value of the axial projection of the area of the blade profiles (Fig. A1).

With the aid of Equ. (8), which is a relation between the velocities in the plane and the velocities on the surface of rotation, this latter equation is rearranged so that it puts into evidence the variation of a deflection produced by a cascade of varying width as a function of angular velocity and the velocity $c_{R2\sigma}$ characterizing the through-flow.

$$\tan \chi_2 = \frac{b_2}{b_1}(1 - A)\tan \chi_1 - \frac{b_2}{b_1} B + \frac{\omega[r_1^2 - r_2^2(1 - \varkappa_2^2)]}{r^2 c_{R2\sigma}} . \tag{45}$$

It is also possible to express the circulation by the circumferential components of the absolute velocity:

$$\Gamma_c = t(c_{1y} - c_{2y}) = \frac{2\pi}{N}(r_1 c_{R1\varphi} - r_2 c_{R2\varphi}) . \tag{46}$$

Euler's turbine equation, derived from the impulse momentum theorem, connects the variation of the moment of momentum of the fluid flowing through the runner with the delivery head (for turbines, with the head):

$$\frac{gH}{\omega} = r_1 c_{R1\varphi} - r_2 c_{R2\varphi} \tag{47}$$

and thus the necessary relations are at disposal for determining the theoretical characteristics.

1. Theoretical characteristics of pumps and fans

In the case of a decelerating cascade, in the assumed system of coordinates the angular velocity, the absolute velocity in direction φ and the delivery head are negative, therefore the usual flow and pressure coefficients, in order to get positive values, are defined by

$$\begin{aligned} \Phi_P &= -\frac{c_{R2\sigma}}{u_{R2}} = -\frac{w_{2x}}{w_{2y}} , \\ \psi_p &= -\frac{2gH}{u_{R2}^2} = -\frac{2\Gamma_c}{t u_{2y}} . \end{aligned} \tag{48}$$

With these quantities the left-hand side of (42) is

$$\frac{\Gamma_c}{t w_{1x}} = -\frac{2\Gamma_c}{t u_{2y}} \frac{1}{2} \frac{w_{2x}}{w_{1x}} \left(-\frac{u_{2y}}{w_{2x}}\right) = \frac{\psi_P}{2\Phi_P} \frac{b_1}{b_2}$$

and its right-hand side is

$$A \tan \chi_1 + B + \varkappa_2^2 \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{\Phi_p},$$

hence

$$\psi_p = 2 \frac{b_2}{b_1} (A \tan \chi_1 + B) \Phi_p + 2 \varkappa_2^2.$$

With the notation $\beta = 90° - \chi$ usual for pumps (Fig. 8) it is possible to write that

$$\psi_p = 2 \frac{b_2}{b_1} (A \cot \beta_1 + B) \Phi_p + 2 \varkappa_2^2. \tag{49}$$

From the inlet velocity triangle there is

$$\cot \alpha_1 + \cot \beta_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{\Phi_p} \tag{50}$$

and with this

$$\psi_p = 2 \frac{b_2}{b_1} (B - A \cot \alpha_1) \Phi_p + 2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A + 2 \varkappa_2^2. \tag{51}$$

The theoretical characteristics — assuming a constant direction of the absolute inlet velocity — is linear (Fig. 9).

Expressing the relative outlet velocity direction by the direction of the relative inlet velocity, the expression corresponding to (45) is for pumps

$$\cot \beta_2 = \frac{b_2}{b_1} [(1 - A) \cot \beta_1 - B] + \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \varkappa_2^2}{\Phi_p}. \tag{52}$$

2. The theoretical characteristics of turbines

In the case of a turbine the blade cascade has an accelerating character. The head, the circumferential component of the absolute velocity and the angular velocity are positive quantities, accordingly the definitions of the pressure coefficient ψ_T and the flow coefficient Φ_T are:

$$\psi_T = \frac{2gH}{u_{R1}^2} = \frac{2\,\Gamma_c}{t u_{1y}}, \quad \Phi_T = \frac{c_{R1\sigma}}{u_{R1}} = \frac{w_{1x}}{u_{1y}}. \tag{53}$$

In the case of a turbine it is usual to non-dimensionalize the equations with the peripheral velocity belonging to the inlet radius. For the same reason

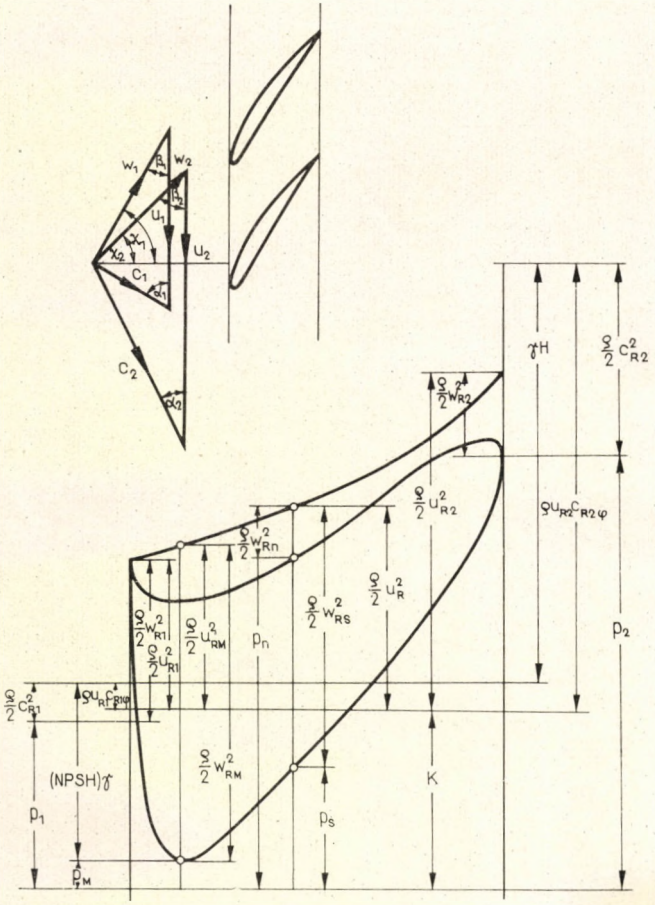


Fig. 8

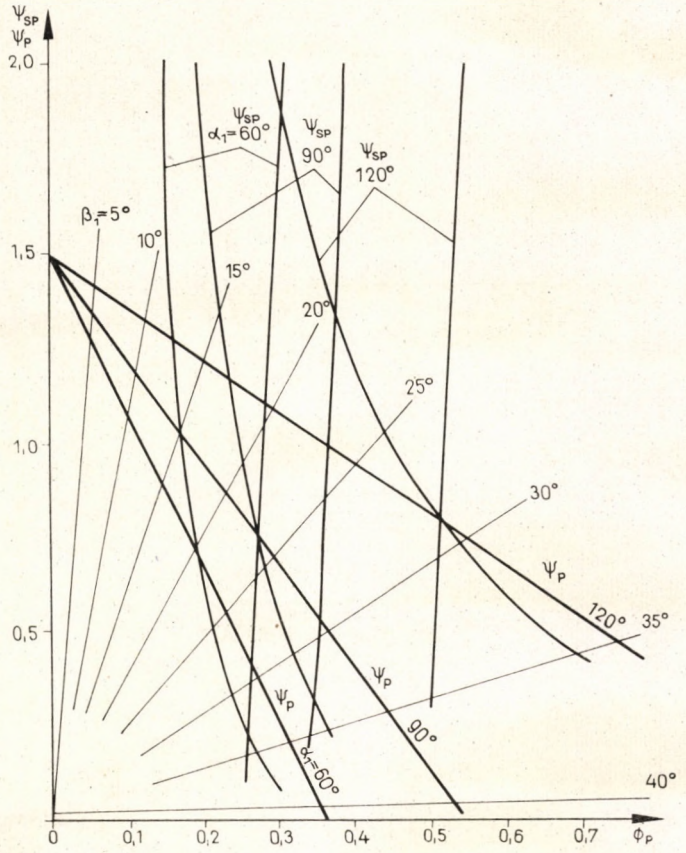


Fig. 9

Characteristic values: $A = 1,329$; $B = -1,537$; $r_1/r_2 = 0,744$; $b_1/b_2 = 1,125$; $\varkappa_2^2 = 0,010$

$$\varkappa_1^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2}\varkappa_2^2 = \frac{NA_{Pax}}{r_1^2\pi} \,. \tag{54}$$

In the way shown for pumps the equation of the specific characteristics is obtained, taking into account that the angle β has been chosen according to Fig. 10 $\beta = \pi/2 + \chi$ and with this

$$\psi_T = 2(B - A\cot\beta_1)\Phi_T - 2\varkappa_1^2. \tag{55}$$

The angles of the absolute and the relative velocity are given by the relation

$$\cot\alpha_1 + \cot\beta_1 = \frac{1}{\Phi_T}, \tag{56}$$

therefore

$$\psi_T = 2(B + A\cot\alpha_1)\Phi_T - 2A - 2\varkappa_1^2. \tag{5}$$

Equ. (45), expressed by the angles of the relative velocity becomes

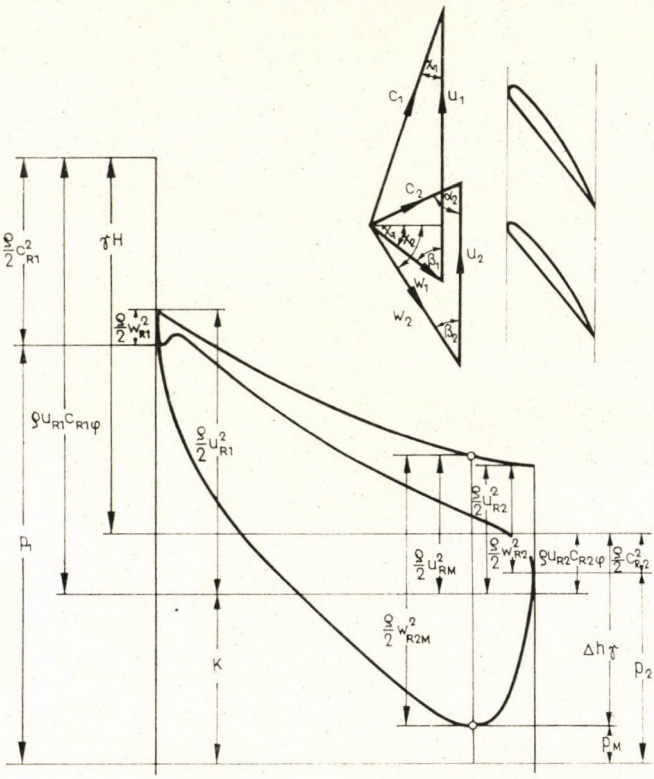


Fig. 10

$$\cot \beta_2 = \frac{b_2}{b_1}\left[(1-A)\cot \beta_1 + B\right] - \frac{b_2}{b_1}\frac{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \varkappa_1^2}{\Phi_T} . \tag{58}$$

The equation of the characteristics may be rewritten with the values

$$n_{11} = \frac{nD}{\sqrt{H}}, \quad Q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H}} \tag{59}$$

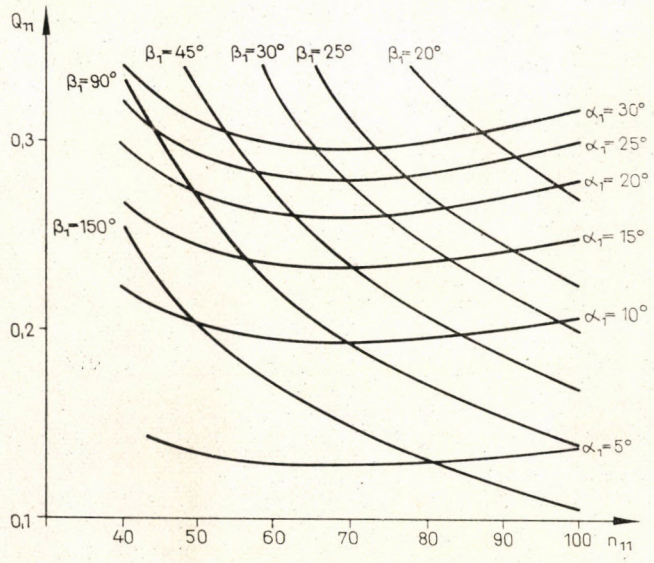


Fig. 11

Characteristic values: $A = 0.750$; $B = 4.250$; $r_2/r_1 = 0.550$; $b_2/b_1 = 1.667$; $\varkappa_1^2 = 0.020$; $b_1/D = 0.095$

of the unit speed and flow ($D = 2r_1$) and on the basis of the equations

$$\Phi_T = \frac{60}{\pi^2}\frac{D}{b_1}\frac{Q_{11}}{n_{11}}, \quad \psi_T = \frac{2g\,60^2}{\pi^2}\frac{1}{n_{11}^2} \tag{60}$$

in the following form:

$$Q_{11} = \frac{b_1}{D}\frac{60g}{B - A\cot\beta_1}\left(\frac{1}{n_{11}} + \frac{\varkappa_1^2\pi^2}{60^2 g}n_{11}\right) \tag{61}$$

and

$$Q_{11} = \frac{b_1}{D}\frac{60g}{B + A\cot\alpha_1}\left(\frac{1}{n_{11}} + \frac{(A+\varkappa_1^2)\pi^2}{60^2 g}n_{11}\right) . \tag{62}$$

On Fig. 11 a theoretical characteristic has been traced.

From the theoretical characteristics deduced for the part-channels of the runner the characteristics of the complete runner will be obtained in the case of a turbine and of a pump as well, by assuming the part-channels to be machines connected in parallel, and by plotting the resultant characteristics accordingly. On the $\Phi - \psi$ plane this means the addition of straight lines, thus it can be stated that the theoretical characteristic of the runner is linear.

3. The cavitation characteristics of pumps

If, in the case of machines working with liquid fluids, somewhere on the surface of the blades the pressure drops to the saturated steam pressure belonging to the actual temperature, steam formation starts in that point. This state marks the inceptinn of cavitation. This initial value of the appearance of cavitation can be determined in function of other characteristics of the machine, when the velocity distribution around the blade section is known. The relation between the velocity on the blade contour and the pressure is furnished by Bernoulli's theorem applied to the rotating system:

$$p + \frac{\varrho}{2} c_R^2 - \varrho u_R c_{R\varphi} = K \tag{63}$$

or, expressed by the relative velocity

$$p + \frac{\varrho}{2} w_R^2 - \frac{\varrho}{2} u_R^2 = K. \tag{64}$$

The value of the constant in Bernoulli's theorem is

$$K = p_1 + \frac{\varrho}{2} c_{R1}^2 - \varrho u_{R1} c_{R1\varphi} = p_1 + \frac{\varrho}{2} w_{R1}^2 - \frac{\varrho}{2} u_{R1}^2. \tag{65}$$

If the value of the difference between the local pressure and the pressure p_1 ahead of the blade, relative to the dynamic pressure calculated with the relative inlet velocity, is introduced, the pressure factor is

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\varrho/2\ w_{R1}^2} = 1 - \left(\frac{w_R}{w_{R1}}\right)^2 + \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{u_{R1}}{w_{R1}}\right)^2. \tag{66}$$

The pressure associated to the inception of cavitation is denoted p_M in Fig. 8. The pressure drop compared to the total inlet pressure is usually called *NPSH*, its value is

$$(NPSH)\,\gamma = \frac{\varrho}{2} c_{R1}^2 + p_1 - p_M = \frac{\varrho}{2} c_{R1}^2 + \lambda_w \frac{\varrho}{2} w_{R1}^2. \tag{67}$$

Here λ_w denotes the absolute value of the minimum of pressure factor $\bar{p}$:

$$-\lambda_w = \bar{p}_M = \frac{p_M - p_1}{\varrho/2\ w_{R1}^2} = 1 - \left(\frac{w_{RM}}{w_{R1}}\right)^2 + \left[\left(\frac{r_M}{r_1}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{u_{R1}}{w_{R1}}\right)^2. \qquad (68)$$

It is to be seen that the blade depression depends on the maximum relative velocity. According to the statements proven at the end of Chapter II it is known that with knowledge of velocity distributions along the contour

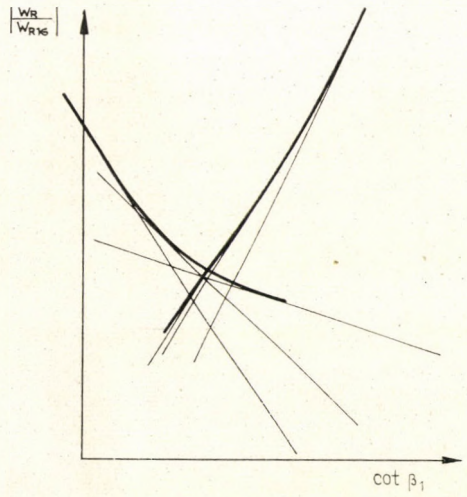


Fig. 12

belonging to two directions of approach the value of the velocity can be plotted in each point of the contour for any arbitrary direction of approach. The envelope of the straight lines

$$\frac{w_R(P_i)}{w_{R1\sigma}} = C_i \cot \beta_1 + D_i$$

belonging to individual profile points P_i furnishes the change of the maximum velocity $|w_{RM}/w_{R1\sigma}|$ in function of the inlet direction (Fig. 12). As

$$\frac{w_{RM}}{w_{R1}} = \frac{w_{RM}}{w_{R1\sigma}} \sin \beta_1,$$

it can be said that the maximum velocity and with it the value of λ_w depend only on the angle β_1.

For the determination of the cavitation characteristics the suction coefficient is defined:

$$\psi_{sp} = \frac{2g\,(NPSH)}{u_{R2}^2}\,. \tag{69}$$

The suction coefficient may be expressed, based on (67), as follows:

$$\psi_{sp} = \left(\frac{c_{R1}}{u_{R2}}\right)^2 + \lambda_w \left(\frac{w_{R1}}{u_{R2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\lambda_w}{\sin^2\beta_1}\right)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \Phi_p^2\,. \tag{70}$$

The direction of the inlet absolute velocity will be eliminated by means of (50), and thus

$$\psi_{sp} = \left(\frac{r_2\,b_2}{r_1\,b_1}\right)^2 \frac{1+\lambda_w}{\sin^2\beta_1}\,\Phi_p^2 - 2\,\frac{b_2}{b_1}\cot\beta_1\,\Phi_p + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2, \tag{71}$$

which means that with a constant relative inlet velocity direction the suction coefficient is a quadratic function of the flow coefficient. The head vs. water capacity characteristics, on the other hand, is characterized by the constant angle α_1. In order to define the associated suction coefficient, form (71) β_1 is eliminated with the aid of (50)

$$\psi_{sp} = \lambda_w\left[\left(\frac{r_2\,b_2}{r_1\,b_1}\right)^2 \frac{\Phi_p^2}{\sin^2\alpha_1} - 2\,\frac{b_2}{b_1}\cot\alpha_1\,\Phi_p + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \left(\frac{r_2\,b_2}{r_1\,b_1}\right)^2 \frac{\Phi_p^2}{\sin^2\alpha_1}\,. \tag{72}$$

In the case of a fixed α_1, β_1 depends only on the flow coefficient, and so does λ_w, hence, the suction coefficient is a function having the shape $\psi_{SP} = \psi_{SP}(\Phi_P)$.

With this latter cavitation characteristics ψ_{SP} is not an explicit function of Φ_P. A clearer relation can be obtained at the expense of some neglection. Cavitation usually starts in the immediate vicinity of the inlet edge of the blade, therefore in (68) the approximation $r_M = r_1$ may be used. Further, as supported by experimental results, the function $|\,w_{RM}/w_{R1\sigma}\,|$ may be assumed on the suction side as well as on the pressure side to be of the shape

$$\left|\frac{w_{RM}}{w_{R1\sigma}}\right| = \frac{a_0 + a_1\cot\beta_1}{\sin\beta_1}\,. \tag{73}$$

Employing this approximation

$$\begin{aligned} 1+\lambda_w &= \left(\frac{w_{RM}}{w_{R1}}\right)^2 = (a_0 + a_1\cot\beta_1)^2 = \\ &= \left[a_0 + a_1\left(\frac{r_1^2\,b_1}{r_2^2\,b_2}\,\frac{1}{\Phi_p} - \cot\alpha_1\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{74}$$

with which the equation of the approximate characteristics of the suction coefficient, corresponding to (72), is

$$\psi_{sp} = \left(\frac{r_2 b_2}{r_1 b_1}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{b_1}{b_2} - \Phi_p \cot \alpha_1}{\Phi_p}\right)^2\right] \times \tag{75}$$

$$\times \left[a_0 \Phi_p + a_1 \left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{b_1}{b_2} - \Phi_p \cot \alpha_1\right)\right]^2 + 2 \frac{b_2}{b_1} \Phi_p \cot \alpha_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

In the case of $\alpha_1 = 90°$ when there is no prerotation, hence

$$\psi_{sp} = \left(\frac{r_2 b_2}{r_1 b_1}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \frac{1}{\Phi_p^2}\right] \left[a_0 \Phi_p + a_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{b_1}{b_2}\right]^2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \tag{76}$$

The validity of the obtained formulae has been controlled by tests carried out on four pumps with different specific speeds. The inception of the cavitation was recorded on the basis of measuring the noise accompanying the occurrence of cavitation. Formula (74) shows that, according to the assumed approximation, $\sqrt{1+\lambda_w}$ is the linear function of the reciprocal of the flow coefficient, or cot β_1. On the basis of Fig. 13, the concordance with the measurements may be qualified as being good. That means that the formula for the characteristics of the inception of cavitation, obtained by assuming an ideal flow, practically covers reality. It must be noted that in the course of the measurements, change of speed had no detectable effect on the characteristics $\psi_{sp}(\Phi_p)$ signifying the onset of cavitation.

Notation	Type	Symbol	n_q	D_2 [mm]	b_2 [mm]
×	Radial	*BKJ 5*	18	370	18
△	Double-suction	*DAF 250*	35	310	32
+	Mixed-flow	*JO 350*	140	254	80
O	Axial	*CPT 350*	135	350	60

4. The cavitation characteristics of turbines

For determining the cavitation characteristics of water turbines Bernoulli's equation used for the determination of the cavitation characteristics of pumps, and the pressure coefficient defined there may be taken as starting

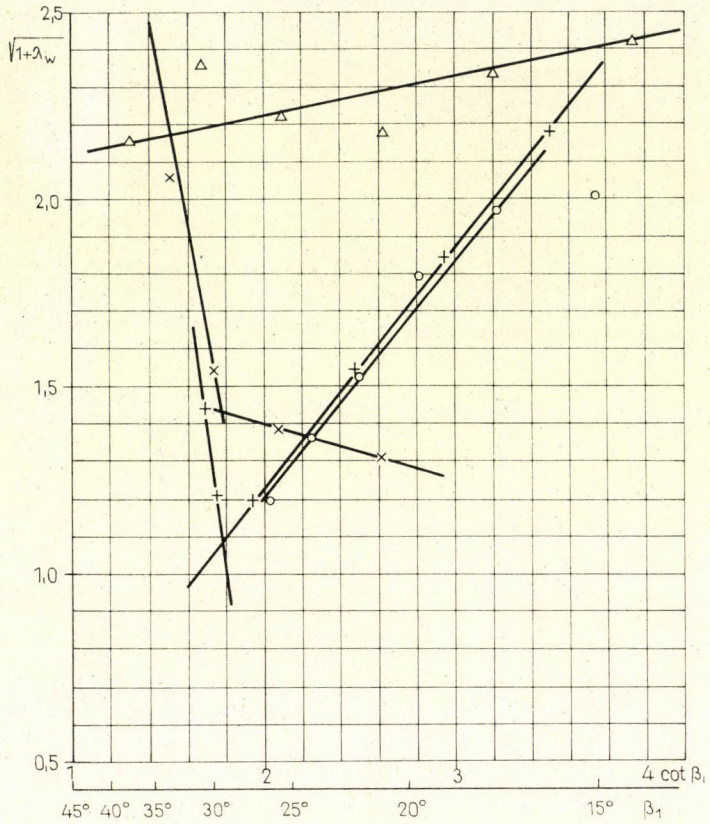


Fig. 13

point. The blade depression corresponding to the NSPH has been marked by Δh, its value is expressed according to Fig. 10 by the following equation:

$$\Delta h = \frac{c_{R2}^2}{2g} + \frac{p_2 - p_M}{\gamma} . \tag{77}$$

The difference between the pressure heads before and after the runner of the turbine is

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H - \frac{c_{R1}^2 - c_{R2}^2}{2g} . \tag{78}$$

Here H is the head. With its aid the second member of the right-hand side of (77) is calculated

$$\frac{p_2-p_M}{\gamma}=-\frac{p_M-p_1+p_1-p_2}{\gamma}=\left(-\frac{p_M-p_1}{\varrho/2\ w_{R1}^2}-\frac{2gH}{w_{R1}^2}+\frac{c_{R1}^2-c_{R2}^2}{w_{R1}^2}\right)\frac{w_{R1}^2}{2g}=$$

$$=\left[-\bar{p}_M-\psi_T\left(\frac{u_{R1}}{w_{R1}}\right)^2+\frac{c_{R1}^2-c_{R2}^2}{w_{R1}^2}\right]\frac{w_{R1}^2}{2g}\,.$$

The suction coefficient can be defined in a way analogous to (69):

$$\psi_{ST}=\frac{2g\,\Delta h}{u_{R1}^2}\,. \tag{79}$$

If the absolute value of the minimum of the pressure factor is again marked by λ_w, according to the above

$$\psi_{ST}=\left(\frac{c_{R1}}{u_{R1}}\right)^2+\lambda_w\left(\frac{w_{R1}}{u_{R1}}\right)^2-\psi_T=\left(\frac{1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{\lambda_w}{\sin^2\beta_1}\right)\Phi_T^2-\psi_T\,. \tag{80}$$

Now the remarkable difference as compared to formula (70) is that in the case of turbines Ψ_T also appears in the expression for the suction coefficient. If the direction angle of the absolute inlet velocity is eliminated by means of (56)

$$\psi_{ST}=\frac{1+\lambda_w}{\sin^2\beta_1}\Phi_T^2-2\cot\beta_1+1-\psi_T \tag{81}$$

will be obtained, or by using only α_1, the value of the suction coefficient will be:

$$\psi_{ST}=\lambda_w\left[\frac{\Phi_T^2}{\sin^2\alpha_1}-2\cot\alpha_1\,\Phi_T+1\right]+\frac{\Phi_T^2}{\sin^2\alpha_1}-\psi_T\,. \tag{82}$$

These latter two relations are the formulae corresponding to (71) and (72) for the case of turbines.

A similar approximation is made use of when calculating λ_w, as done earlier, with the difference that in (68) the value of r_M has been taken as equal to r_2, i.e. it is assumed that cavitation occurs at the outlet edge:

$$1+\lambda_w=(a_0+a_1\cot\beta_1)^2+\left[1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]\frac{\sin^2\beta_1}{\Phi_T^2}\,. \tag{83}$$

This latter is a somewhat more complicated relation in comparison to that obtained for pumps. The pair of values a_0, a_1 depends on whether the occurrence of cavitation on the suction side or on the pressure side is described.

Using the approximation made for the coefficient λ_w in formulae (81) and (82), two relations are obtained for the inception of cavitation in water turbines:

$$\psi_{ST}=\left(\frac{a_0+a_1\cot\beta_1}{\sin\beta_1}\right)^2\Phi_T^2-2\cot\beta_1\,\Phi_T+2-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-\psi_T \tag{84}$$

expressed by the angle of the relative inlet velocity and

$$\psi_{ST}=\left[1+\left(\frac{1-\cot\alpha_1\,\Phi_T}{\Phi_T}\right)^2\right][a_0\,\Phi_T+a_1\,(1-\cot\alpha_1\,\Phi_T)]^2+ \\ +2\cot\alpha_1\,\Phi_T-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-\psi_T \tag{85}$$

expressed by the angle of the absolute inlet velocity.

APPENDIX 1

In Equs (23) and (24), as well as in (36) it has been assumed that the integral along the contour of the normal component of the absolute velocity is zero. The complex conjugate of the absolute velocity is $\bar{c}=(c_s-i\,c_n)\,e^{-i\chi}$ and hence

$$\oint_{(C)}\bar{c}d\zeta=\oint_{(C)}(c_s-ic_n)\,e^{-i\chi}\,e^{i\chi}\,ds=\oint_{(C)}c_s\,ds-i\oint_{(C)}c_n\,ds\,. \tag{A1}$$

In the sense of Stokes' theorem 6

$$\oint_{(C)}c_s\,ds=\iint_{(T)}\mathrm{rot}\,\vec{c}\cdot d\vec{A}=0, \tag{A2}$$

as it is assumed of the absolute velocity that its rotation is zero. According to Gauss' theorem

$$\oint_{(C)}c_n\,ds=\iint_{(T)}\mathrm{div}\,\vec{c}\,dA\,.$$

In the plane $(x;y)$ the divergence of the absolute velocity is according to (9)

$$\mathrm{div}\,\vec{c}=-\frac{b'(x)}{b(x)}\,c_x\,(x,y)\,,$$

and so

$$\oint_{(C)}c_n\,ds=-\iint_{(T)}\frac{b'(x)}{b(x)}\,c_x\,(x,y)\,dA\,. \tag{A3}$$

On the other hand

$$\oint_{C)}\bar{c}d\zeta=-c_{1y}\,t-ic_{1x}\,t+c_{2y}\,t+ic_{2x}\,t+\oint_{(K)}c_s\,ds-i\oint_{(K)}c_n\,ds\,. \tag{A4}$$

Here use was made of $\bar{c}(z)=\bar{c}(z+it)$.

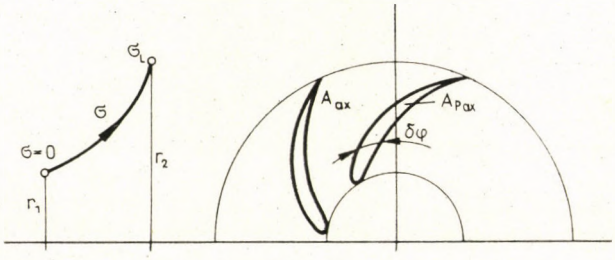


Fig. A1

Comparing the results of the two integrations along (C)

$$\oint_{(K)} c_s \, ds = t(c_{1y} - c_{2y}) , \tag{A5}$$

$$\oint_{(K)} c_n \, ds = t(c_{2x} - c_{1x}) - \iint_{(T)} \frac{b'(x)}{b(x)} c_x(x, y) \, dA . \tag{A6}$$

For the peripheral velocity it is possible to proceed in a similar way as when calculating the integral of the absolute velocity along the curve (C). As $u_x = 0$:

$$u = iu_y \quad \text{and} \quad \bar{u} = -iu_y , \tag{A7}$$

$$\oint_{(C)} \bar{u} d\zeta = \oint_{(C)} u_s \, ds - i \oint_{(C)} u_n \, ds = \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{u} d\vec{A} - i \iint_{(T)} \operatorname{div} \vec{u} dA = \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{u} d\vec{A} \tag{A8}$$

as div $\vec{u} = 0$. The rotation of the peripheral velocity is

$$|\operatorname{rot} \vec{u}| = 2\omega \frac{dr}{dx} r \frac{2\pi}{Nt} . \tag{A9}$$

Employing the transformation equations (7)

$$\begin{aligned} \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{u} d\vec{A} &= 2\omega \iint_{(T)} \frac{dr}{dx} r \frac{2\pi}{Nt} \, dx \, dy = 2\omega \frac{2\pi}{Nt} \iint_{(T)} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx} r dx \, dy = \\ &= 2\omega \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi/N - \delta_\varphi} r dr \, d\varphi = 2\omega A_{ax} . \end{aligned} \tag{A10}$$

On the basis of Fig. A1

$$A_{ax} = \frac{\pi}{N} (r_2^2 - r_1^2) - A_{Pax} . \tag{A11}$$

Introducing the expression

$$\varkappa_2^2 = \frac{N A_{Pax}}{r_2^2 \pi} ,$$

$$A_{ax} = \frac{\pi}{N} r_2^2 (1 - \varkappa_2^2) - \frac{\pi}{N} r_1^2$$

and as

$$u_y = \frac{2\pi}{Nt} r \, u_R = \frac{2\pi}{Nt} r^2 \omega ,$$

therefore $2\omega A_{ax} = u_{2y}(1 - \varkappa_2^2) t - u_{1y} t$. (A12)

Now it can already be written that

$$\oint_{(C)} \bar{u} \, d\zeta = 2\omega A_{ax} . \tag{A13}$$

On the other hand

$$\oint_{(C)} \bar{u} \, d\zeta = - t u_{1y} + t u_{2y} + \oint_{(K)} u_s \, ds - i \oint_{(K)} u_n \, ds , \tag{A14}$$

comparing the two

$$\oint_{(K)} u_n \, ds = 0 \tag{A15}$$

and

$$\oint_{(K)} u_s \, ds = - \varkappa_2^2 u_{2y} t . \tag{A16}$$

When calculating the integral of the relative velocity along curve (C), one may proceed in exactly the same manner as above.

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} \bar{w} d\zeta &= \oint_{(C)} w_s \, ds - i \oint_{(C)} w_n \, ds = \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{w} \, d\vec{A} - i \iint_{(T)} \operatorname{div} \vec{w} \, dA = \\ &= - \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{u} \, d\vec{A} - i \iint_{(T)} \operatorname{div} \vec{c} \, dA = - 2\omega A_{ax} + i \iint_{(T)} \frac{b'(x)}{b(x)} c_x \, dA . \end{aligned} \tag{A17}$$

On the other hand

$$\oint_{(C)} \overline{w} d\zeta = - w_{1y} t - i w_{1x} t + w_{2y} t + i w_{2x} t + \oint_{(K)} w_s \, ds - i \oint_{(K)} w_n \, ds. \tag{A18}$$

The relative velocity along the periphery can be only tangential and hence the integral of w_n along the contour is zero.

$$\oint_{(K)} w_n \, ds = 0 \tag{A19}$$

and

$$\oint_{(K)} w_s \, ds = - 2\omega A_{ax} + (w_{1y} - w_{2y}) t \, . \tag{A20}$$

Using the relation between the absolute and the relative velocity:

$$\oint_{(K)} c_n \, ds = \oint_{(K)} u_n \, ds + \oint_{(K)} w_n \, ds \, .$$

Employing further the relations (A6), (A15) and (A19) it is seen that

$$\oint_{(K)} c_n \, ds = 0 \tag{A21}$$

and simultaneously also the earlier relation:

$$c_{1x} - c_{2x} = \frac{1}{t} \iint_{(T)} \left(- \frac{1}{b(x)} \right) \frac{db(x)}{dx} c_x(x, y) \, dA \tag{A22}$$

is obtained.

APPENDIX 2

The kernel of the integral equation (37) is

$$\mathcal{K}(\zeta', \zeta) = R(\zeta', \zeta) + \cot \chi \, J(\zeta', \zeta) - \frac{\pi}{t} \, . \tag{A23}$$

Let us find the limit of this function, when the running point $\zeta' = \xi' + i\eta'$ tends to the point $\zeta = \xi + i\eta$.

$$\lim_{\zeta' \to \zeta} \left\{ \mathcal{K}(\zeta', \zeta) + \frac{\pi}{t} \right\} =$$

$$= \lim_{\zeta' \to \zeta} \frac{\pi}{t} \, \frac{\sinh \dfrac{2\pi}{t} (\xi' - \xi) - \cot \chi \sin \dfrac{2\pi}{t} (\eta' - \eta)}{\cosh \dfrac{2\pi}{t} (\xi' - \xi) - \cos \dfrac{2\pi}{t} (\eta' - \eta)} =$$

$$= \lim_{\substack{\xi' \to \xi \\ \eta' \to \eta}} \frac{\pi}{t} \, \frac{\dfrac{2\pi}{t} (\xi' - \xi) - \cot \chi \dfrac{2\pi}{t} (\eta' - \eta)}{1 + \left(\dfrac{2\pi}{t} \right)^2 \dfrac{(\xi' - \xi)^2}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{2\pi}{t} \right)^2 \dfrac{(\eta' - \eta)^2}{2} \right]} =$$

$$= \lim_{\substack{\xi' \to \xi \\ \eta' \to \eta}} \frac{\xi' - \xi - \cot \chi (\eta' - \eta)}{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2} = \lim_{\substack{\xi' \to \xi \\ \eta' \to \xi}} \frac{1 - \dfrac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \cot \chi}{\left[1 + \left(\dfrac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \right)^2 \right] (\xi' - \xi)} \, .$$

The points of the profile contour being in question:

$$\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} = \tan \chi + \frac{1}{2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} (\xi' - \xi)$$

therefore

$$\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \cot \chi = 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} (\xi' - \xi) \cot \chi \, .$$

Making use of this

$$\lim_{\zeta' \to \zeta} \left\{ \mathfrak{H}(\zeta', \zeta) + \frac{\pi}{t} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\cot \chi}{1+\tan^2 \chi} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \tag{A24}$$

Acknowledgements

I take pleasure in expressing my thanks to the directors of the *GANZ—MÁVAG Locomotive and Railway Carriage Manufactures, Mechanical Engineers*, and especially to the leaders of their *Central Hydraulic Machines Designing Office*, for their kind support offered to me by putting the employed measuring data at my disposal when writing this paper.

I am indebted to Dr. T. Czibere, professor at the Technical University of Heavy Industry in Miskolc, for his precious advice in the course of my work, further to Professor Dr. J. Varga, head of the Hydraulic Machines Department at the Technical University in Budapest and to Assistant Professor Dr. O. Füzy, for the opportunity to discuss a part of the paper.

REFERENCES

1. Nyiri, A.: Calculating Cascades of Blades of Mixed-Flow Hydraulic Machines. I. A. H. R. 10th Congress, London 1963.
2. Czibere, T.: A hidrodinamikai rácselmélet két főfeladatának potenciálelméleti megoldása (Solution of the two Main Problems of the Hydrodynamic Cascade Theory by the Theory of Potentials). Thesis for the D. Sc., Miskolc 1965.
3. Varga, J.—Sebestyén, Gy.: Das Geräuschspektrum der Kavitation und der Kavitationserosion. IInd Hydraulic Machines Conference, Budapest 1966.
4. Gruber, J.: Radiális átömlésű, végtelen vékony, hátrahajló lapátozású forgó lapátrácsok számítása (Calculation of radial-flow, infinitely thin, backward-bent rotating Cascades of Blades). Thesis for D. Sc., Budapest 1963.
5. Traupel, W.: Thermische Turbomaschinen, Springer 1966.
6. Woods, L. C.: The Theory of Subsonic Plane Flow. Cambridge University Press 1961.
7. Martensen, E.: Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung. *Arch. Ration. Mech. Analysis* **3** (1959).
8. Isay, W. H.: Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. *ZAMM* **33** (1953).
9. Popa, O.: Theoretische Beiträge zur Berechnung der im Wasserkraftmaschinenbau verwendeten Schaufelgitter. *Mitteilungen der Konferenz für Wasserkraftmaschinen (Timisoara)* (1964).
10. Myles, D. J.: A Design Method for Mixed-Flow Fans and Pumps. *NEL Report* (1965), No. 177.

Berechnung der theoretischen Charakteristik von hydraulischen Maschinen auf Grun der Potentialtheorie. In der Arbeit wird eine Integralgleichung für die relative Strömung um das Profilgitter in der mittleren Stromfläche eines Teilkanals abgeleitet, der aus dem Laufrad einer hydraulischen Maschine durch zwei Umdrehungsflächen herausgeschnitten wird. Die Flüssigkeit wird als inkompressibel und reibungsfrei betrachtet. Auf Grund der Abhängigkeit der Lösung von der Einströmrichtung können die theoretische Kennlinie des Laufrads und die Kennlinie des Kavitationsbeginns bestimmt werden.

Определение теоретических характеристик гидродинамических машин на основе потенциальной теории *(А. Нири)*. В работе для релятивного движения потока вокруг профильной решетки, — находящейся в средней части поверхности потока частного канала, высеченного двумя поверхностями вращения из рабочего колеса гидродинамической машины, работающей на несжимаемой и свободной от трения жидкости, — выведено интегральное уравнение. На основе зависимости решения от направления втока можно определить теоретическую характеристику рабочего колеса и характеристику, действительную для начала кавитации.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 275—324 (1970)

UNTERSUCHUNG DES SAUGVORGANGES VON VIERTAKT-DIESELMOTOREN MIT DIREKTER EINSPRITZUNG

GY. CSER*

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 21. Februar 1969]

Die Arbeit behandelt einige Gesetzmäßigkeiten des Saugvorganges von Viertakt-Dieselmotoren mit direkter Einspritzung, wobei der instationäre Charakter der Strömung der kompressiblen Luft berücksichtigt wird. Bei der Bestimmung des Aufgabenkreises der Untersuchung geht der Verfasser von der Feststellung aus, daß der Strömungsvorgang, der sich in der Saugleitung vollzieht, einen wesentlichen Einfluß auf den Füllungsgrad des Motorzylinders, auf die tangentielle Bewegung der im Zylinderraum vorhandenen Luftfüllung und dadurch auf die Güte des Verbrennungsvorganges, ferner auf die von dem Kolben ausgeführte Saugarbeit hat, die wiederum die Verluste des Motors beeinflußt. Daher untersucht vorliegende Arbeit über die genannten Faktoren hinausgehend auch die Verwirklichungsmöglichkeiten ihres Gesamt-Optimums. Um die Forschungsergebnisse verallgemeinern zu können, werden sie als Funktion der Kriterien behandelt, welche die Ähnlichkeit der Saugvorgänge bestimmen. Diese Ähnlichkeitsbedingungen, ferner die verwendeten und in einigen Einzelheiten neuartigen Meßmethoden wurden anhand der Analyse des im ersten Teil der Arbeit dargestellten mathematischen Modells ausgearbeitet. Im zweiten Teil werden die Ergebnisse der Untersuchung mitgeteilt.

Bezeichnungen

x	vom offenen Rohrende gemessene momentane Entfernung [m];
r	Radius [m];
r_0	die Entfernung der Mittellinie des Saugventils von der Mittellinie des Zylinders [m];
L	Länge der Saugleitung, gemessen vom offenen Rohrende bis zum Saugventil [m];
l	Länge des Saugkanals [m];
h	Ventilhub [m, mm];
s	Kolbenhub [m, mm];
f	Querschnitt im allgemeinen, ferner Querschnitt der Saugleitung [m², cm²];
F	Kolbenquerschnitt [m²];
$f_{\min}$	der kleinste Querschnitt des Saugkanals [m², cm²];
V	Volumen [m³, cm³];
t	Zeit [s];
w	Geschwindigkeit [m/s];
w_h	an der Wand des Verbrennungsraumes herrschende tangentielle Geschwindigkeit [m/s];
a	Schallgeschwindigkeit [m/s];
n	Drehzahl, Motordrehzahl [1/min];
c	Kolbengeschwindigkeit [m/s];
c_m	mittlere Kolbengeschwindigkeit [m/s];
g	Gravitationsbeschleunigung [m/s²];
p	Druck im allgemeinen [kp/cm²];
p_e	effektiver Mitteldruck [kp/cm²];
p_v	Mitteldruck der Reibung, bzw. der Verluste [kp/cm²];

* Szerémi u. 10, *Budapest XI.* (UNGARN).

M	Moment, Impulsmoment der in den Zylinder eintretenden Luft [kpm, kpcm];
$M_{id.}$	Impulsmoment der in den Zylinder eintretenden Luft im Idealfall [kpm];
t	Temperatur [°C];
T	absolute Temperatur [°K];
t_{dr}	Drahttemperatur [°C];
α	Winkel, eingeschlossen durch die Skelettkurve des Saugkanals und der Zylinderkopfebene [grad];
β	Winkel, eingeschlossen durch die Projektion der Skelettkurve des Saugkanals und der Tangentialrichtung [grad];
φ°	Drehwinkel der Kurbelwelle [°KW];
φ^*	Winkel des Wellenlaufes [°KW];
G	Gewicht, Gasgewicht [kp];
G^*	Gewicht der in der Zeiteinheit durchströmenden Luft, oder der Gasmenge [kp/s, p/s];
$G^*_{\text{theor.}}$	Gewicht der in der Zeiteinheit theoretisch durchströmenden Luftmenge [kp/s];
γ	Wichte [kp/m^3];
ϱ	Dichte [kps^2/m^4];
i	Enthalpie [kcal];
Q	Wärmemenge [kcal];
L	durch die Gase verrichtete mechanische Arbeit [mkp];
Ls	vom Kolben aufgewendete Saugarbeit [mkp];
A	Wärmeäquivalent der mechanischen Arbeit [kcal/mkp];
R	Gaskonstante [m/grad];
c_p, c_v	spezifische Wärme [kcal/kp. grad];
A'', A', A; B'', B', B	experimentell ermittelbare Konstanten, welche die Tätigkeit des Hitzdraht-Anemometers kennzeichnen;
U	Kompensierungsspannung [V];
C	von den geometrischen Abmessungen des Saugkanals abhängige Konstante;
a/C	Drallfaktor, auch die geometrischen Abmessungen des Saugkanals enthaltend;
K, D	Konstanten, abhängig von den Abmessungen und Form des Verbrennungs- und des Kompressionsraumes;
$120(a_0/nL)$	die dynamische Ähnlichkeit der Saugvorgänge kennzeichnende Strouhal-Zahl;
$(c_m/\overline{u\Sigma})/a_0$	Ähnlichkeitsbedingung der Aufladung des Zylinders;
$\Pi_3 = \overline{\mu\sigma}\varphi$,	Ähnlichkeitsbedingung der Wellenzurückwerfung am ventilseitigen Rohrende;
A	Anteil der durch den Zylinder eingesaugten Luftmenge, bezogen auf 1 °Kw [l/°KW];
ν	Selbstschwingungszahl der im Saugrohr vorhandenen Luftsäule [Hz];
f	Saugfrequenz [Hz];
i	$= \nu/f$, Ordnungszahl der Erregerharmonischen.
η_i	indizierter Wirkungsgrad;
α	Luftüberschußzahl (Luftverhältnis);
λ	Liefergrad;
η_m	mechanischer Wirkungsgrad;
$\varkappa$	Exponent der adiabatischen Zustandsänderung;
μ	Durchflußzahl;
σ	$= f_e/f_s$, relativer Ventilquerschnitt, bezogen auf den Querschnitt des Einlaßventilsitzes;
$\mu\sigma$	$= G^*_s/G^*_{\text{S.theor.}}$, Durchflußzahl, bezogen auf den Querschnitt des Einlaßventilsitzes;
Σ	$= f_e/F = \sigma f_s/F$, relativer Ventilquerschnitt, bezogen auf den Kolbenquerschnitt;
$\overline{\mu\Sigma}$	Durchflußzahl, bezogen auf den Kolbenquerschnitt;
φ	$= f_s/f$, Verhältnis zwischen dem Querschnitt des Einlaßventilsitzes und dem Querschnitt der Saugleitung;
$\overline{\mu\sigma}$	mittlere Durchflußzahl, bezogen auf den Querschnitt des Einlaßventilsitzes und den Saughub;
$\mu\Sigma$	mittlere Durchflußzahl, bezogen auf den Kolbenquerschnitt und den Saughub;
W	$= w/a_0$, relative Mediumgeschwindigkeit, bezogen auf die atmosphärische Schallgeschwindigkeit;
A	$= a/a_0$, relative örtliche Schallgeschwindigkeit, bezogen auf die atmosphärische Schallgeschwindigkeit;
T	Erwärmungsfaktor;
e	$= M/M_{id}$ theoretischer Drallfaktor;
a	effektiver Drallfaktor.

Indizes

0	Atmosphäre der Umgebung;
1	offenes Ende der Saugleitung auf der atmosphärischen Seite;
2	geschlossenes Ende der Saugleitung auf der Zylinderseite;
e	Querschnitt des Einlaßventils;
s	Querschnitt des Einlaßventilsitzes;
ein	die in den Motorzylinder eintretenden Mengen;
aus	die aus dem Motorzylinder austretenden Mengen;
z	Zylinder;
c	Kompressionsraum;
k	Brennraum;
r	Restgas;
ö	Öffnen des Ventils;
sch	Schließen des Ventils;
$(\bar{\ })$	Zeichen des Mittelwertes.

I. Einleitung

Eine der Hauptaufgaben der auch heute erkenntlichen ununterbrochenen Entwicklung von Brennmaschinen — und in dieser Weise auch von Dieselmotoren — besteht in der Erhöhung der spezifischen Leistung. Zwecks Erhöhung der spezifischen Leistung benötigt man einerseits die Steigerung der Belastungsfähigkeit der im Motorenbau verwendeten Baustoffe, andererseits die ständige Vervollkommnung der im Motor sich abspielenden Vorgänge.

Es ist bekannt, daß die spezifische Leistung der Viertakt-Brennmotoren durch die Erhöhung der Drehzahl, oder des effektiven Mitteldruckes vergrößert werden kann. Von den zwei Möglichkeiten — besonders bei den bereits in der Fertigung befindlichen Motorenkonstruktionen — ist in den meisten Fällen die letztere Lösung die wirtschaftliche. Bei den Saugmotoren gibt für die Erhöhungsmöglichkeiten des effektiven Mitteldrucks der nachfolgende, allgemein bekannte Ausdruck einen Hinweis:

$$p_e = \text{konst.} \frac{\eta_i}{\alpha} \lambda \eta_m \,. \tag{1}$$

Das konstante Glied der Formel enthält die vom Motorbetrieb unabhängigen Faktoren, daher kann vom Standpunkt der im Motor sich abspielenden Vorgänge die Aufgabe einer Erhöhung des effektiven Mitteldruckes in drei Hauptgruppen zerlegt werden:

Der indizierte Wirkungsgrad η_i hängt in erster Linie von der Güte der Gemischbildung und des Brennvorganges ab. Der Faktor $1/\alpha$ — welcher den reziproken Wert des Luftverhältnisses (Luftüberschusses) bedeutet — zeigt das Maß der Ausnützung der im Zylinder zur Verfügung stehenden Luftladung; daher kennzeichnet er gleichzeitig die in die gegebene Luftmenge maximal einspritzbare Brennstoffmenge. Da der Wert des Faktors $1/\alpha$ ebenfalls grundlegend von der Güte der Gemischbildung und des Brennvorganges abhängig ist, so können wir sagen, daß das Glied η_i/α der Formel (1) in erster Linie die Funk-

tion der Gemischbildung und des Brennvorganges des Motors darstellt und kann daher durch ihre Verbesserung vergrößert werden.

Der Liefergrad λ zeigt, in welcher Weise der Arbeitsraum des Motors — sein Hubvolumen — mit der atmosphärischen Luft aufgefüllt werden kann. Seine Wirkung auf die Mitteldruckerhöhung ist offensichtlich, denn dieser Faktor bestimmt das Gewicht der zur Gemischbildung zur Verfügung stehenden Luftladung, in dieser Weise auch die bei identischem Luftverhältnis — α — in den Zylinder einspritzbare Brennstoffmenge.

Der mechanische Wirkungsgrad η_m kennzeichnet am Ende der Hauptwelle das Maß der Verwertung der Arbeit, welche von den Gasen dem Kolbendeckel übermittelt wird:

$$\eta_m = \frac{p_e}{p_e + p_v},$$

wo p_v den Mitteldruck bedeutet, der die Motorverluste durch Reibung und die anderer mechanischer Quellen ersetzt. Dieser Mitteldruck charakterisiert ferner die zum Antrieb der Hilfseinrichtungen des Motors aufgewendete Energie und — mit gewisser Auslegung — auch die vom Motor für den Ladungswechsel verbrauchte Arbeit. Bei dieser Interpretation kann auch die Größe des Reibungs- oder Verlustmitteldruckes und in dieser Weise der Wert des mechanischen Wirkungsgrades durch die Größe der Saugarbeit beeinflußt werden.

Im Sinne der vorigen Ausführungen — wenn man den Einfluß der Saugleitung des Viertakt-Dieselmotors mit direkter Einspritzung auf die Motorparameter und so auf den effektiven Mitteldruck untersucht — muß man jede einzelne der drei Hauptgruppen beachten.

Dieselmotoren mit direkter Einspritzung erzeugen das zum Brennen erforderliche Brennstoff-Luftgemisch in dem sogenannten offenen Brennraum des Motors. Bei diesem Vorgang verwenden sie — neben anderen Faktoren — die tangentielle Bewegung der Luftladung, mit anderen Worten, auch den im Zylinderraum entstandenen tangentiellen Luftwirbel. Die Bedeutung des letzteren wurde von den Ergebnissen der in den vergangenen Jahren von verschiedenen Forschern durchgeführten Versuche bestätigt. Der genannte Luftwirbel entsteht als Folge von zwei Wirkungen. Während im Motor der Saugtakt stattfindet, erhält die in den Zylinder einströmende Luft durch die geeignete Ausbildung des Saugsystems — und innerhalb dieses Systems, im allgemeinen des Saugkanals — ein tangentielles Impulsmoment. Der während des Einströmens entstandene Drall bleibt, wenn auch in einem durch die Verluste verminderten Maß, auch im Verlauf des Kompressionstaktes bestehen. Diesen Drall benützt der offene Brennraum des Motors zur Ausbildung der zur Gemischbildung erforderlichen Luftbewegung bzw. des Luftwirbels.

Mit Rücksicht darauf, daß die Saugleitung des Motors bei der Schaffung des Luftwirbels eine entscheidende Rolle spielt, kann dadurch die Wirksam-

keit der Gemischbildung bzw. auch die des Brennens, d. h. der Faktor η_i/α wesentlich beeinflußt werden.

Selbstverständlich hat die Saugleitung des Motors auch noch eine andere Aufgabe, denn sie muß die Versorgung der Zylinder mit Luft sichern. Sehr viele Forschungsarbeiten und zahlreiche ausgeführte Konstruktionen bestätigten, daß die effektive Ausgestaltung der Saugleitung den Füllungsgrad des Motors wesentlich beeinflussen kann.

Durch die geeignete Ausgestaltung der Saugleitung kann man sogar Wirkungen erzielen, mit denen der Liefergrad des Motors wesentlich gesteigert werden kann. Diese Verfahren werden als »akustische«, »inertielle«, Rohr- usw. Aufladungen bezeichnet. In den weiteren Ausführungen wird die Bezeichnung »dynamische« Aufladung verwendet, womit ein Hinweis auf die Erscheinungen erfolgt, welche diese Wirkung erzielen.

Zur Verwirklichung der genannten Aufgaben benützt die Saugleitung des Motors die von dem Kolben ausgeübte Saugarbeit. Damit beeinflußt sie ebenfalls die Motorparameter, wie es aus der Beziehung (1) gleichfalls zu ersehen ist.

Die obigen Ausführungen zusammenfassend, kann man feststellen, daß die Saugleitung der Dieselmotoren mit direkter Einspritzung vom Standpunkt der Verbesserung der Motorparameter eine dreifache Aufgabe zu erfüllen hat. Zur Gemischbildung und für die Verbrennung muß ein erforderlicher Drall geschaffen, ein guter Füllungsfaktor des Zylinders gesichert werden, und diese sollen nach Möglichkeit durch einen minimalen Aufwand an Saugarbeit erreicht werden. Mit Rücksicht darauf, daß die genannten Forderungen meistens einander entgegengesetzt sind, muß die Saugleitung die genannten drei Bedingungen in der Weise erfüllen, daß sie gemeinsam den größtmöglichen Mitteldruck ergeben. Dieser Fall tritt jedoch dann ein, wenn

$$\frac{\eta_i}{\alpha}\lambda\eta_{lm} = \left(\frac{\eta_i}{\alpha}\lambda\eta_{lm}\right)_{\text{opt.}},$$

Mit anderen Worten, die Saugleitung hat nicht die eine oder andere Aufgabe gut zu erfüllen, sondern sie muß das gemeinsame Optimum der drei Faktoren-Gruppen sichern, welche den Mitteldruck des Motors beeinflussen.

Wegen der genannten Gründe muß man bei der Untersuchung des Saugvorganges auf jede einzelne der dreifachen Aufgabe der Saugleitung eingehen.

II. Beschreibung der während des Saugens sich abspielenden Strömungsvorgänge

Auf Bild 1 wird das Schema eines Motorzylinders und der dazugehörenden Saugleitung gezeigt. Es ist zu ersehen, daß die Länge der Saugleitung mit L, und der Querschnitt — der als konstant angenommen wird — mit f bezeichnet ist. Die Saugleitung saugt unmittelbar aus der mit O bezeichneten Atmosphäre,

(Diese Annahme hielten wir auch im Verlauf unserer Versuche aufrecht, um einerseits die gestellte Aufgabe zu vereinfachen, und andererseits um die Gesetzmäßigkeiten besser zu erkennen.)

Den Saugvorgang beschreibt ein zweiteiliges Gleichungssystem, bei dem der eine Teil die in der Saugleitung, der andere Teil dagegen die im Motorzylinder auftretenden Verhältnisse kennzeichnet.

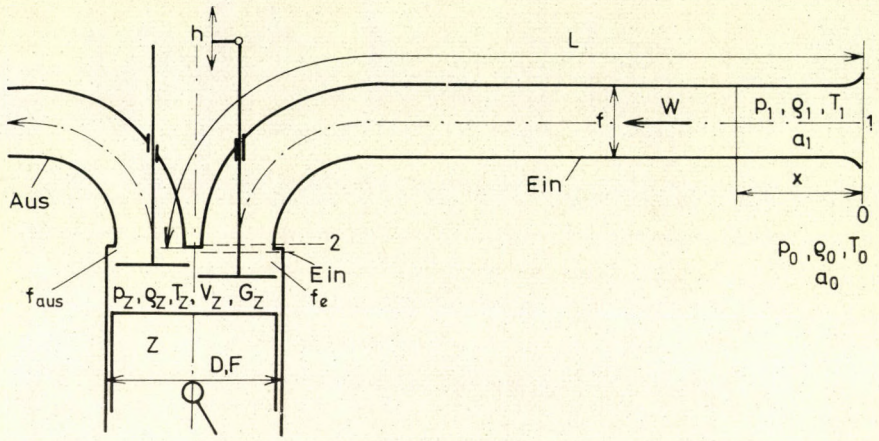


Bild 1. Prinzipschema der Saugleitung (*0* Atmosphäre, *1* offenes Rohrende, *2* ventilseitiges Rohrende, *z* Zylinder)

Mit Rücksicht darauf, daß die Strömung in der Saugleitung absatzweise vor sich geht, muß man zu ihrer mathematischen Beschreibung die allgemeinen Zusammenhänge der instationären Gasdynamik anwenden. Bei diesem Vorgang wird die Strömung im Rohr als eindimensional angesehen, und es wird vom Wärmeaustausch, der an den Wänden der Saugleitung stattfindet, abgesehen. Die Wirkung der Wärmezufuhr durch die Rohrwand wird in der Weise berücksichtigt, als ob der Motor aus einer Atmosphäre von entsprechend höherer Temperatur saugen würde. (Das effektive Maß der Lufterwärmung wird experimentell festgestellt.) Durch Einführung eines geeigneten Faktors wird die Erwärmung der Luft an der warmen Zylinderwand ebenfalls berücksichtigt. Als weitere Vereinfachung wird angenommen, daß die Einströmung in das Rohr von der atmosphärischen Seite aus verlustlos erfolgt. Mit dem Strömungswiderstand der Rohrwand wird der Ventilwiderstand vergrößert, und dadurch wird auch von den Strömungsverlusten im Rohr abgesehen.

Sämtliche Strömungsverluste der Saugleitung werden mit der Durchflußzahl $\mu\sigma$ gekennzeichnet, deren effektive Werte nach der folgenden Beziehung versuchsmäßig festgestellt wurden:

$$\mu\sigma = \frac{G_s^*}{G_{s\,\mathrm{theor.}}^*} .$$

Mit den genannten Bedingungen wird die Kontinuitätsgleichung der eindimensionalen isentropischen Strömung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + w\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \,. \tag{2}$$

Die Euler-Gleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \,. \tag{3}$$

Da die Strömung isentropisch ist, kann auch die Poissonsche Gleichung Anwendung finden:

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \text{konst.} \tag{4}$$

So wird die im Medium herrschende lokale Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\varkappa g RT} = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}} \,. \tag{5}$$

Mittels Anwendung der Gleichungen (2)—(5) und nach ihrer entsprechenden Umformung kann man die allgemeinen Gleichungen der entlang des Rohres auftretenden Strömung erhalten. Diese Gleichungen kennzeichnen ein quasilineares, hyperbolisches partielles Differentialgleichungssystem mit zwei Veränderlichen. Ihre Näherungslösung, ist, wie bekannt, mit Hilfe der Charakteristik-Methode möglich. Diese Methode ist von mehreren Verfassern angewandt worden, z. B. [1, 2], und zwar zur Berechnung der Strömungsvorgänge, welche sich im Saug- bzw. Auspuffsystem der Fahrzeugmotoren abspielen, daher wird auf ihre eingehende Erläuterung hier verzichtet.

Zur Beschreibung konkreter Strömungen ist es noch erforderlich, die für die Rohrenden gültigen Gleichungen mit effektiven Flanschbedingungen anzuschreiben.

Im letzteren Fall kann dies für das offene Rohrende in Form der Energiegleichung (das Integral der Eulerschen Gleichung) angeschrieben werden.

Beim verlustlosen Eintritt wird nämlich:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\varkappa - 1} = \frac{a_0^2}{\varkappa - 1} \tag{6}$$

oder nach Umformung, in dimensionsloser Gestalt:

$$W_1^2 = \frac{2}{\varkappa - 1}(1 - A_1^2). \tag{7}$$

Für das ventilseitige Rohrende kann man ebenfalls anhand der Energiegleichung die Flanschbedingung der Strömung erhalten. Die Energiegleichung wird für den Querschnitt der Rohrleitung vor dem Ventil (mit der Bezeichnung 2), ferner für den Einlagventilquerschnitt (mit e bezeichnet) angeschrieben.

$$\frac{w_2^2}{2}+\frac{a_2^2}{\varkappa-1}=\frac{w_e^2}{2}+\frac{a_e^2}{\varkappa-1}\,. \tag{8}$$

Hier hat man jedoch — entsprechend den Ausgangsbedingungen — auch die Strömungsverluste der Rohrleitung und des Einlagventils zu berücksichtigen, und daher wird die Kontinuitätsgleichung:

$$\varrho_2 w_2=\mu\sigma\varphi\varrho_e w_e\,. \tag{9}$$

Mit Rücksicht darauf, daß im Ventilquerschnitt der Druck mit dem im Zylinder herrschenden übereinstimmt ($p_e=p_z$), kann die ventilseitige Gleichung der Flanschbedingung nach entsprechender Umformung der Ausdrücke (8) und (9) in der nachfolgenden Form angeschrieben werden:

$$W_2=A_2\sqrt{\frac{2}{\varkappa-1}\left[\left(\frac{p_z}{p_2}\right)^{2/\varkappa}-\left(\frac{p_z}{p_2}\right)^{(\varkappa+1)/\varkappa}\right]}\sqrt{\frac{(\mu\sigma)^2\varphi^2}{1-(\mu\sigma)^2\varphi^2\left(\frac{p_z}{p_2}\right)^{2/\varkappa}}}\,. \tag{10}$$

Anhand der Gleichungen (7) und (10) kann man die Bedingungen der Wellenzurückwerfung berechnen, sowohl am offenen als auch am ventilseitigen Rohrende.

Man sieht jedoch, daß man zur Lösung der Gleichung (10) außer den Kennwerten der im Rohr entstehenden Strömung auch noch den Zylinderdruck p_z und die Größe $\mu\sigma\varphi$ kennen muß. Letztere wird bereits von der Konstruktion und Ausführung der Saugleitung, ferner von den Daten der Ventilsteuerung bestimmt, zur Kenntnis der Änderung des Zylinderdruckes ist jedoch noch die Gleichung der Zylinderladung erforderlich. Sie wird nach dem allgemein üblichen Verfahren, z. B. [3] — aus der für den Zylinder angeschriebenen vollen Energiegleichung erhalten:

$$di_{\text{ein}}-di_{\text{aus}}+dQ=dU+AdL\,. \tag{11}$$

Im weiteren Verlauf kann man die allgemeine Gasgleichung anwenden:

$$p_z V_z=G_z R T_z\,,$$

beziehungsweise in ihrer Differentialform:

$$\frac{dG_z}{G_z} = \frac{dp_z}{p_z} + \frac{dV_z}{V_z} - \frac{dT_z}{T_z} . \tag{12}$$

Gleichzeitig ist:

$$dG_z = dG_{\text{ein}} - dG_{\text{aus}} . \tag{13}$$

Anhand der Gleichungen (11)—(13) kommt man nach entsprechender Umformung zu folgendem Ergebnis:

$$\frac{dp_z}{p_z} = \frac{\varkappa}{V_z}\left[\frac{RT_{\text{ein}}}{p_z} dG_{\text{ein}} - \frac{RT_z}{p_z} dG_{\text{aus}} - dV_z + \frac{dQR}{\varkappa p_z c_v}\right]. \tag{14}$$

Das die Wärmezufuhr enthaltende Glied wird mit einem Faktor τ berücksichtigt, der die Temperatur der eintretenden Luft T_{ein} proportional der aufgenommenen Wärmemenge erhöht [4]. In dieser Weise erhält man die vereinfachte Form der Gleichung (14), welche nun den Ladungwechsel des Motorzylinders angibt.

$$\frac{dp_z}{p_z} = \frac{\varkappa}{V_z}\left[\frac{T_{\text{ein}}}{p_z} RTdG_{\text{ein}} - \frac{RT_z}{p_z} dG_{\text{aus}} - dV_z\right]. \tag{15}$$

Bei Dieselmotoren mit direkter Einspritzung entsteht der Drall der Luftladung während des Saugvorganges. Die in den Zylinder strömende Luft verfügt — wie bekannt — auch über eine Tangentialkomponente, deren Impulsmoment die im Zylinder befindliche Luft beschleunigt und in eine Drehbewegung versetzt. Zur Sicherung des Impulsmomentes dient im allgemeinen die entsprechende Ausgestaltung bzw. Anordnung des Saugkanals oder des Saugventils. Im Rahmen unserer Untersuchungen beschäftigten wir uns lediglich mit den sog. »tangentialen« Saugkanälen, deren Schema dem Bild 2 zu entnehmen ist.

In der vereinfachten Ausführung verfügt der Saugkanal — in der Nähe des Ventils — über gerade Skelettlinie und Mantellinien, welche zum Ventilsitz auslaufen. Die Mittellinie des Saugkanals schließt mit der Ebene des Zylinderkopfes den Winkel α ein. Die Entfernung zwischen Ventil- und Zylinderachse beträgt r_0. In der Zylinderebene, wie das auf Bild 2 zu sehen ist, wurde der Winkel, der von der Projektion der Mittellinie des Saugkanals und der Tangente eingeschlossen wird, mit β bezeichnet. Der kleinste Querschnitt des Saugkanals ist f_{min} und seine Länge l.

Im Idealfall würde das Saugventil die Strömung nicht ablenken, und wäre letztere verlustfrei, so würde die eintretende Luft in Richtung der Skelettlinie des Saugkanals über ein Impulsmoment M_{id} verfügen, wobei

$$M_{id.}\,dt = \frac{dG_{ein}}{g}\, w_e\, r_0 \cos\alpha \cos\beta\,,$$

oder

$$M_{id.}\,dt = \frac{r_0 \cos\alpha \cos\beta}{g}\, w_e\, G^*\, dt\,. \tag{16}$$

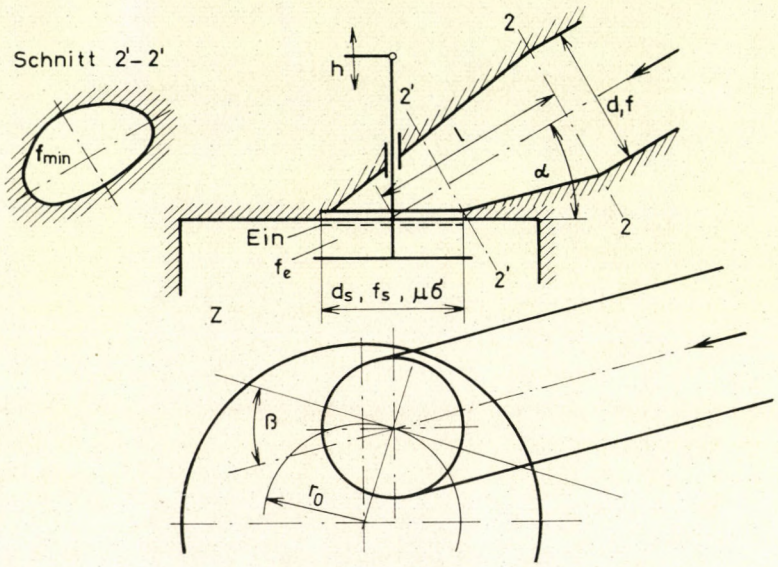


Bild 2. Grundsatzschema des tangentialen Saugkanals

In der Regel tritt der Fall ein, daß die wirkliche Gestalt des Saugkanals, ferner das Saugventil eine erhebliche Störung für die Strömung bedeuten, bzw. sie aus der ursprünglichen Richtung ablenken. Daher entsteht gegenüber dem Idealfall ein wesentlich kleineres Impulsmoment, das infolge der im Zylinder auftretenden Mischungs- und anderer Verluste sich hier noch weiter vermindert.

Wenn die genannten Verluste durch einen dimensionslosen Faktor e berücksichtigt werden, so kann man für das wirkliche Impulsmoment M anschreiben

$$M = eM_{id.}$$

Verwendet man noch die Gleichungen (5) und (9), so erhält man:

$$Mdt = \frac{r_0 \cos\alpha \cos\beta}{gf} \frac{e(G^*)^2}{\gamma_2 \left(\frac{p_z}{p_2}\right)^{1/\varkappa} \mu\sigma\varphi}\, dt\,. \tag{17}$$

Mit Rücksicht darauf, daß bei den einzelnen, gegebenen Saugsystemen die Größen $\mu\sigma\varphi$ und G^* bereits das Druckverhältnis p_z/p_2 bestimmen, suchten wir den Drallfaktor der Einfachheit halber in der Form

$$a = \frac{e}{\left(\frac{p_z}{p_2}\right)^{1/\varkappa}} .$$

In dieser Weise wird das ganze, während des Einströmens in den Zylinder entstehende Impulsmoment — Π —

$$\Pi = \int_{(\text{ein})} M dt = \frac{r_0 \cos\alpha \cos\beta}{gf'} \int_{(\text{ein})} \frac{a(G^*)^2}{\gamma_2 \mu\sigma\varphi} dt. \tag{18}$$

Die in der Beziehung (18) vorkommenden Größen — mit Ausnahme des Drallfaktors a — können einerseits anhand der bisherigen Gleichungen berechnet werden, andererseits sind sie bereits aus den Konstruktionsdaten des Saugkanals bekannt. Aus diesem Grund ist die einzige weitere Bedingung für die Berechenbarkeit vom Drall Π der Luftladung die Kenntnis des Faktors a. Dieser letztere wurde im Verlauf der Versuche experimentell festgestellt, wobei auf diese Methode später noch eingegangen werden soll. Hier wird lediglich erwähnt, daß bei einer stationären Strömung der Drallfaktor anhand folgender Formel bestimmt werden kann:

$$a = C\gamma_2 \mu\sigma \frac{M}{(G^*)^2}$$

oder

$$\frac{a}{C} = \gamma_2 \mu\sigma \frac{M}{(G^*)^2}, \tag{19}$$

wo

$$C = \frac{gf\varphi}{r_0 \cos\alpha \cos\beta} = \text{konst.}$$

Unsere Berechnungs- und die noch später zu erläuternde Meßmethode bestimmen die Größe des in der Saugleitung geschaffenen Dralls nur bis zum Ende des Saugtaktes, im Grunde genommen klären sie also die Wirkung der Saugleitung. In der Praxis ist es jedoch üblich, die im Brennraum erzeugte Luftbewegung durch die an der Wand des Brennraums entstehende tangentiale Geschwindigkeit zu kennzeichnen. Sofern der während der Kompression auftretende Drallverlust, ferner die Geschwindigkeitsverteilung des Luftwirbels bekannt sind, können aus unseren Daten die Werte der tangentialen Geschwindigkeiten berechnet werden.

Im Zusammenhang mit der Geschwindigkeitsverteilung von Luftwirbeln, welche im Zylinder von Dieselmotoren mit direkter Einspritzung und toroidalem Brennraum entstehen, haben — neben anderen Verfassern — V. N. IVANOV [5] und B. N. DAVIDKOV [6] mit abweichenden Methoden Messungen durchgeführt. Das gemeinsame Kennzeichen ihrer Verfahren bestand jedoch darin, daß beide trägheitsfreie elektronische Einrichtung benützt haben, deren Fühler die Strömung nicht gestört haben. Nach ihren übereinstimmenden Meßergebnissen dreht sich die Luft am Ende des Kompressionshubes als steifer Körper in Brennräumen, welche den von uns untersuchten ähneln, außerhalb des Brennraumdurchmessers entsteht dagegen ein Potentialwirbel.

Obzwar während der Ausführung eigener Versuche der Drallverlust während des Kompressionshubes nicht bekannt war, kann anhand obiger Ausführungen die entlang der Brennraumwand, im oberen Totpunkt auftretende tangentiale Luftgeschwindigkeit näherungsweise berechnet werden:

$$w_k = \frac{V_c\, r_k\, r_0 \cos\alpha \cos\beta}{2\pi K f} \frac{\int_{(\text{ein})} \frac{a(G^*)^2}{\gamma_2\, \mu\sigma\varphi}\, dt}{\int_{(\text{ein})} G^*\, dt + Gr}, \tag{20}$$

wobei K konstant ist, und der Wert dieser Konstanten wird von Form und Abmessung des Brennraums bestimmt.

Die mittels Gleichung (20) bestimmbare tangentiale Geschwindigkeit w_k ist — da die während der Kompression auftretenden Strömungsverluste nicht berücksichtigt wurden — größer als in Wirklichkeit. Ihr Wert ist jedoch für Vergleichszwecke durchaus geeignet.

Die analytische Lösung des Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen (2)—(20), ist nicht bekannt. Mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine kann die Näherungslösung eines beliebigen Strömungsfalles ermittelt werden, aber auch durch Versuche, mittels Messungen, kann das Gleichungssystem gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die letztere Methode gewählt. Die gemeinsame Eigenschaft beider Möglichkeiten besteht darin, daß die erhaltenen Ergebnisse ausschließlich für den gegebenen untersuchten Fall gültig und schwer zu verallgemeinern sind. Aus diesem Grunde — im Interesse der Verallgemeinerung unserer Ergebnisse — wurden die wichtigeren Kriterien der Ähnlichkeit von Saugvorgängen ausgearbeitet, und unsere Ergebnisse haben wir als ihre Funktion dargestellt. Derartige Bemühungen sind in diesem Themenkreis auch anderweitig zu beobachten [7, 8].

Bei der Feststellung der Kriterien wurde aus den allgemeinen Bedingungen der Ähnlichkeit von physikalischen Vorgängen ausgegangen. Nach ihnen besteht eine physikalische Ähnlichkeit zwischen zwei gleichartigen physikalischen Vorgängen, welche sich in geometrisch ähnlichen Systemen abspielen,

wenn die Größen, welche die Vorgänge bestimmen, in den beiden Systemen, an den einander entsprechenden Stellen verhältnisgleich sind. Daraus folgt die von GUCHMANN und N. V. KIRPICSOV [9] eingeführte Definition, wonach die erforderliche und ausreichende Bedingung für die Ähnlichkeit zweier Vorgänge darin besteht, daß alle dimenslose Kriterien der beiden Vorgänge einander gleich sind, auch die aus den Anfangs- und Grenzbedingungen abgeleiteten Kriterien inbegriffen. Bei anderer Formulierung des letzten Satzes kann man auch sagen, daß die dimenslosen Grenzbedingungen numerisch identisch sein müssen.

Die Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit verlangt — wie bekannt — identische prinzipielle Ausgestaltung, und darüber hinaus eine Proportionalität der linearen Abmessungen und die Gleichheit der entsprechenden Winkel. Die völlige geometrische Ähnlichkeit kann im allgemeinen — neben Einhalten anderer Ähnlichkeitsbedingungen — nicht verwirklicht werden. Daher müssen wir uns meistens mit der teilweisen geometrischen Ähnlichkeit begnügen, was in diesem Fall die Identität der Ventilsteuerungswinkel, eventuell die Proportionalität einiger kennzeichnender linearer Abmessungen bedeutet. Die Proportionalität der wichtigeren linearen Abmessungen ist jedoch durch die übrigen zu erläuternden Kriterien bereits determiniert.

Die Ähnlichkeit der Strömung, welche sich in der Saugleitung abspielt und durch die Gleichungen (2)—(5) beschrieben ist, hat — außer der Bedingung $\varkappa = \text{konst.}$ — noch zwei weitere Bedingungen, welche aus der Gleichung (3) abgeleitet werden können.

Eine dieser Bedingungen ist die Strouhal-Zahl Sh, welche die dynamische Ähnlichkeit kennzeichnet und welche im allgemeinen folgendermaßen lautet:

$$Sh = \frac{wt}{x} = \text{konst.},$$

wobei w eine kennzeichnende Geschwindigkeit des Systems;
t die Periodenzeit der Wiederholung;
x eine kennzeichnende Längenabmessung ist.

Wenn man als Bezugsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit a_0 der Umgebung wählt, so kann das Strouhalsche Kriterium für einen Zylinder eines Viertaktmotors in folgender Form angeschrieben werden:

$$\Pi_1 = Sh = 120 \frac{a_0}{nL} = \text{konst.} \tag{21}$$

Aus der Gleichung (3) erhält man, als die andere Bedingung, die Mach-Zahl:

$$M = \frac{w}{a} = \text{konst.}$$

Weitere Ähnlichkeitsbedingungen können aus der Gleichung (15) abgeleitet werden, welche die Aufladung des Motorzylinders beschreibt. Außer den Wärmeähnlichkeitbedingungen — auf die hier nicht eingegangen werden soll — ist für den Fall des Einströmens die Erfüllung folgender Bedingung erforderlich:

$$\mu\sigma f_s \frac{w}{V_z 6n} = \text{konst}. \tag{22}$$

Sofern die Bedingung (22) durch die Mach-Zahl dividiert wird, erhält man nach einigen Umformungen das Ähnlichkeitskriterium der Zylinderaufladung:

$$\Pi_2 = \frac{\text{cm}/\overline{\mu\Sigma}}{a_0} = \text{konst}, \tag{23}$$

wo

$$\overline{\mu\Sigma} = \frac{1}{180^\circ} \int_{\varphi_{e..\ddot{o}}}^{\varphi_{e.sch.}} \mu\Sigma \, d\varphi^0$$

die mittlere Durchflußzahl des Einlagventils und des Saugkanals ist, bezogen auf den Kolbenquerschnitt und Saughub.

Die Ähnlichkeitsbedingung Π_2 ist also im wesentlichen eine der Mach-Zahl ähnliche Größe, welche die Verhältnisse des Einströmens in den Zylinder und dessen Verluste kennzeichnet.

Die numerische Konstanz der dimenslosen Grenzbedingungen, angeschrieben für die beiden Enden der Saugleitung ist — wie bereits früher erwähnt wurde — eine weitere Bedingung der Ähnlichkeit. Von diesen Grenzbedingungsgleichungen ordnet die Gleichung (7), angeschrieben für das offene Rohrende, im Fall von $\varkappa = \text{konst.}$ für jeden Wert von A_1 einen, und lediglich einen Wert von W_1 zu, daher ist daraus keine weitere Ähnlichkeitsbedingung zu erhalten. Demgebenüber wird die numerische Identität der Grenzbedingungsgleichung (10), gültig für das ventilseitige »geschlossene« Rohrende, bei einem beliebigen Wert A_2 nur dann erfüllt, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$p_z/p_2 = \text{konst.}$$

und

$$\mu\sigma\varphi = \text{konst.} \tag{24}$$

Mit Rücksicht darauf, daß bei ähnlichen Strömungen die Bedingung p_z/p_2 automatisch erfüllt ist, ist das dritte Ähnlichkeitskriterium, welches gleichzeitig am ventilseitigen Rohrende die Ähnlichkeitsbedingung des Wellenrückwerfens bedeutet:

$$\Pi_3 = \overline{\mu\sigma}\,\varphi = \text{konst}, \tag{25}$$

$$\overline{\mu\sigma} = \frac{1}{180^\circ} \int_{\varphi_{e.\ddot{o}.}}^{\varphi_{e.sch.}} \mu\sigma \, d\varphi^0$$

die mittlere Durchflußzahl des Einlaßventils und des Saugkanals ist, bezogen auf den Querschnitt des Einlaßventilsitzes und Saughub.

Somit sind die Ähnlichkeitsbedingungen der Strömung, welche dem vorher erläuterten mathematischen Modell entspricht, bestimmt. Selbstverständlich muß man auch mit weiteren Bedingungen der Ähnlichkeit von Vorgängen rechnen (z. B. mit der Reynolds-Zahl), wenn das Modell der Wirklichkeit besser angenähert ist. Die eigenen Versuche bezeugen jedoch, daß die Bedingungen Π_1, Π_2 und Π_3, ferner die Kriterien der geometrischen und Wärmeähnlichkeit mit ausreichender Genauigkeit die Ähnlichkeit der Saugvorgänge von Dieselmotoren kennzeichnen.

III. Meß- und Untersuchungsmethoden

Zur Bestimmung des Aufladevorgangs vom Zylinder, ferner der Luftwirbelentstehung benötigt man in erster Linie die Kenntnis der Luftmenge, welche in der Zeiteinheit durch das Einlaßventil in den Zylinder einströmt. Hierfür wurde ein Meßverfahren ausgearbeitet; als dessen Grundlage diente ein Hitzdrahtanemometer von »konstanter Temperatur«. Dieses Instrument eignet sich — wie bekannt — zur trägheitsfreien Messung von schnell wechselnden Flüssigkeits- bzw. Gasströmungen. Die Funktion des Gerätes beruht auf dem auftretenden Wärmeaustausch zwischen dem strömenden Medium und dem elektrisch beheizten dünnen Draht, der in die Strömung eingesetzt wird und meistens einen Durchmesser von $0{,}005 \div 0{,}009$ mm und eine Länge von 1—2 mm besitzt, wobei die von L. V. KING [10] ausgearbeitete Beziehung gültig ist:

$$Q = (A'' + B'' \sqrt{\varrho w})\,(t_{dr} - t). \tag{26}$$

Hierbei bedeuten A'' und B'' von den Kennzeichen des beheizten Drahtes und des strömenden Mediums abhängige und unter bestimmten Bedingungen konstante Größen, t_{dr} ist dagegen die Temperatur des Drahtes und t die des strömenden Mediums.

Das bei den Versuchen verwendete Gerät, *DISA 55 A 01* Typ *Konstant-Temperatur-Anemometer*, veränderte automatisch den Heizstrom des Fühlerdrahtes in der Weise, daß dessen Temperatur t_{dr} und daher auch dessen Widerstand auf dem vorher eingestellten Wert verblieb, unabhängig von dem augenblicklich auftretenden Wärmeaustausch. Demzufolge besteht eine eindeutige Beziehung zwischen der Spannung U des Heiz- oder Kompensationsstromes und in den Draht elektrisch eingeführter, ferner dem strömenden Medium übergebener Wärmemenge, und die Beziehung des Wärmeaustausches (26) kann wie folgt angeschrieben werden:

$$U^2 = (A' + B' \sqrt{\varrho w})\,(t_{dr} - t). \tag{27}$$

Die Feststellung des Wärmeaustausches, bzw. die der momentanen Strömungsgeschwindigkeit w kann durch die kontinuierliche Registrierung der Kompensationsspannung U erfolgen. Aus der Beziehung (27) ist jedoch zu ersehen, daß die Messungen in dem Fall günstig durchgeführt werden können, wenn sich Temperatur und Druck des strömenden Mediums nicht ändern, denn in diesem Fall ist $t = \text{konst.}$ und $\varrho = \text{konst.}$, d. h. die Kompensationsspannung ist eine eindeutige Funktion von der Geschwindigkeit w des Mediums. Bedauerlicherweise kann in der Saugleitung von Verbrennungsmotoren weder die Lufttemperatur, noch der Luftdruck als konstant angesehen werden, denn der Saugvorgang geht unter nicht vernachlässigbaren Druckschwingungen vor sich. Will man daher in dieser Weise die in der Saugleitung entstehenden Luftgeschwindigkeiten bestimmen, so ist außer der Kompensationsspannung auch noch die gleichzeitige Messung des Momentanwertes von Druck und Temperatur der Luft erforderlich. In der Mehrzahl der Fälle jedoch — wie dies auch bei der vorliegenden Aufgabe der Fall ist — benötigt man nicht die Geschwindigkeit, die in einem einzigen Punkt der Saugleitung gemessen ist, sondern die Luftmenge, welche durch einen gegebenen Querschnitt während der Zeiteinheit durchfließt. Die Lösungsmöglichkeiten dieses Problems wurden experimentell untersucht, und über die erhaltenen Ergebnisse wurde bereits früher eingehend berichtet [11]. Daher werden sie hier lediglich mit einigen Worten erwähnt.

Es ist bekannt, daß in Fällen, in denen im gegebenen Querschnitt einer Saugleitung, neben verschiedenen Luftgeschwindigkeiten das spezifische Geschwindigkeitsprofil sich überhaupt nicht oder nur in vernachlässigbarem Maß verändert, die lokal gemessene Geschwindigkeit w die auf den ganzen Querschnitt bezogene mittlere Geschwindigkeit w kennzeichnet, d. h. $w/\bar{w} = \text{konst.}$ Diesen Umständen entsprechend wurde in der Saugleitung nahe dem Ventil der mit 2 bezeichnete Meßquerschnitt gewählt und auch der Rohrstutzen angefertigt (3 auf Bild 3), in dem auch der Fühler des Hitzdraht-Anemometers (6 auf Bild 3) untergebracht ist.

Aus der Beziehung (27) geht auch hervor, daß die Kompensationsspannung des Anemometers dem momentanen Produkt ϱw proportional ist. Sofern

$$w/\bar{w} = \text{konst.}$$

ferner der Querschnitt f_2 des Meßstutzens bei dem Eichen und während der Messung streng identisch ist, wird das Gewicht der durch den Querschnitt während der Zeiteinheit strömenden Luftmenge dem lokal gemessenen Produkt ϱw immer proportional sein, d. h.

$$\frac{f_2 \varrho_2 \bar{w}_2}{\varrho w} = \text{konst.} \tag{28}$$

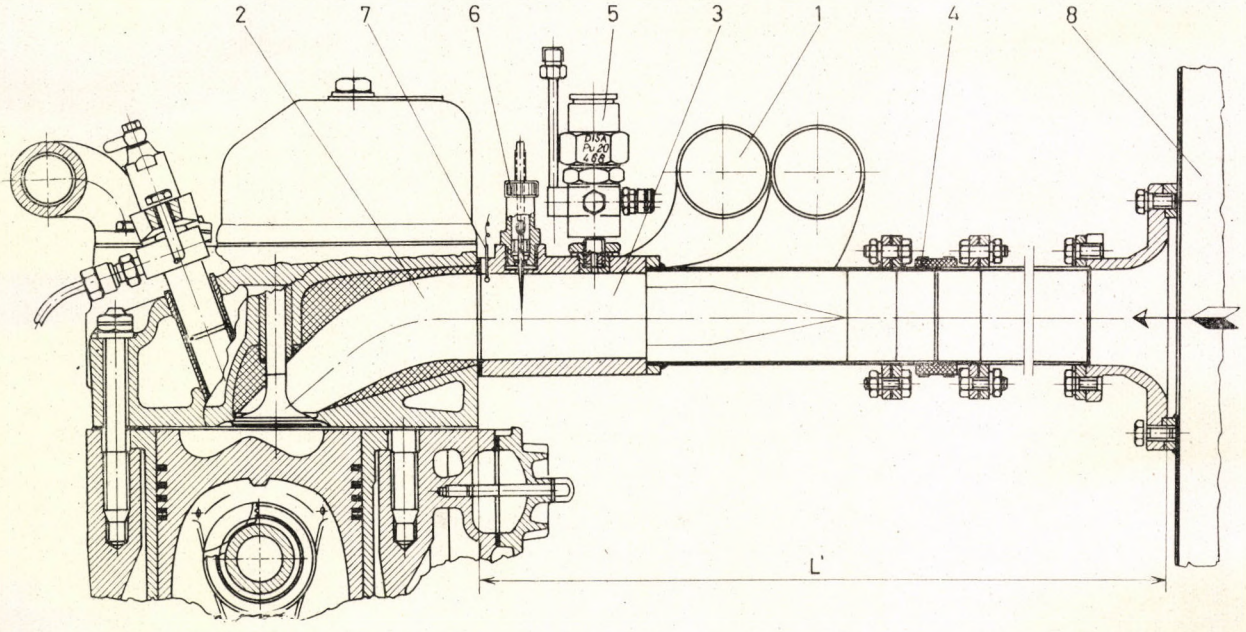


Bild 3. Zylindereinheit und Saugleitung des Versuchsmotors (*1* Auspuffrohr, *2* Saugkanal, *3* Meßrohrstutzen, *4* Saugrohr, *5* Druckfühler, *6* Fühler des Hitzdraht-Anemometers, *7* Thermistor für Temperaturmessung, *8* Ausgleichsbehälter)

wo

$$f_2 \varrho_2 \bar{w}_2 = G^*.$$

In dieser Weise kann die Kompensationsspannung des Hitzdraht-Anemometers in Zusammenhang gebracht werden mit der Luftmenge G^*, welche durch einen gegebenen Querschnitt der Saugleitung durchströmt. Diese Folgerung wurde auch mit Hilfe einer Reihe von statischen Eichungen kontrolliert; im Verlauf dieser Eichungen wurden auch die Zustandsgrößen der Luft verändert.

Die veränderliche Temperatur des Luftstromes wurde im Verlauf der am Motor ausgeführten Messungen in der Weise berücksichtigt, daß mit einem aus Heißleiter gefertigten Thermometer die sog. »Staupunkt-Temperatur« $\bar{t}_2$, d. h. die mittlere Lufttemperatur in einem gegebenen Querschnitt gemessen wurde; mit dieser Temperatur konnte auch der mittlere Wärmeaustausch zwischen Rohrwand und Luft verfolgt werden. Die momentane Lufttemperatur wurde aus der Durchschnittstemperatur, ferner aus der in der Saugleitung sich abspielenden Druckänderung berechnet, unter der Voraussetzung, daß infolge der Schwingungen zwischen Luft und Rohrwand kein weiterer zusätzlicher Wärmeaustausch stattfindet. In dieser Weise entspricht die aus den Druckschwingungen folgende Temperaturänderung den adiabatischen Zusammenhängen. In diesem Fall ist die momentane Lufttemperatur t_2 in dem mit 2 bezeichneten Meßquerschnitt:

$$t_2 = (\bar{t}_2 + 273) \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{(\varkappa - 1)/\varkappa} - 273\ ^\circ C. \tag{29}$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (27)—(29) kann man folgende Beziehung, die als Grundlage der genannten Messungen dient, erhalten:

$$U^2 = (A + B \sqrt{G^*}) \left[t_{dr} - (\bar{t} + 273) \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{(\varkappa - 1)/\varkappa} + 273 \right]. \tag{30}$$

Sowohl die Werte der Konstanten A und B, welche in der Beziehung (30) vorkommen als auch die Drahttemperatur t_{dr} wurden bestimmt, indem die Daten von statischen Eichungen, durchgeführt an einem Luftstrom von verschiedenem Druck und Temperatur, auf einer elektronischen Rechenmaschine statistisch aufgearbeitet wurden. Ein Beispiel für ein derartiges Eichprogramm ist auf Bild 4 dargestellt. Hierbei wurden bei verschiedenen Lufttemperaturen vier statisch gemessene Punktreihen ermittelt, aus ihnen die mittleren Werte von A, B und t_r bestimmt und mit diesen ein Geradenbündel berechnet und auf die Punktreihe gelegt. Aus dem Bild ist gut zu ersehen, daß die Funktion

des in den Meßstutzen eingebauten Fühlers, ferner die des Anemometers sehr gut den erläuterten Beziehungen folgt.

Während der am Motor durchgeführten Messungen wurde die Kompensationsspannung U auf den Bildschirm eines Oszilloskops übertragen und mit einem Photorekorder registriert. Gleichzeitig damit wurde mit Hilfe eines kapazitiven Druckgebers von hoher Empfindlichkeit sowohl die im Querschnitt 2 der Saugleitung auftretende Druckänderung p_2 als auch der Zylinderdruck p_z während des Saughubs gemessen. Bild 5 zeigt ein Beispiel dieser Oszilloskop-

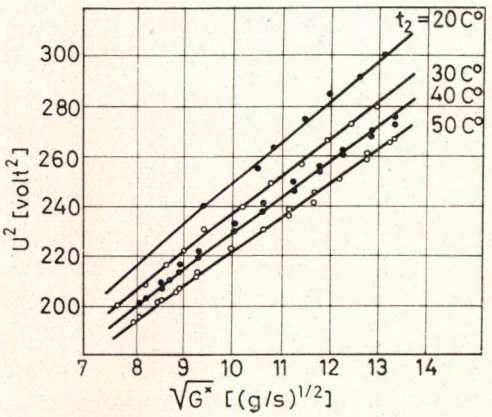


Bild 4. Charakteristische Eichkurven des Hitzdraht-Anemometers (Kurve *1:* $t_2 = 20°C$; Kurve *2:* $t_2 = 30°C$; Kurve *3:* $t_2 = 40°C$; Kurve *4:* $t_2 = 50°C$)

Aufnahmen. Die obere Kurve in dem Bild veranschaulicht die Änderung des Saugrohrdruckes p_2, während die untere Kurve den Verlauf der Kompensationsspannung U darstellt.

Über das erläuterte Verfahren hinausgehend, und gleichzeitig damit, wurde mittels Meßblende auch die vom gegebenen Motorzylinder angesaugte Luftmenge gemessen. Dies schuf auch die Möglichkeit für die ständige Kontrolle der vorher genannten Methode. Nach Angaben der systematischen Kontrolle verblieb während der mit dem Hitzdraht-Anemometer ausgeführten Messungen der Fehler im Verlauf der Untersuchungen innerhalb der Grenze $-6\% < \Delta < +2\%$. Zwecks Bestimmung der Intensität des im Zylinder entstehenden Luftwirbels wurde — wie bereits früher erwähnt — von den Beziehungen (18) oder (20) ausgegangen. Mit Rücksicht darauf, daß mit Hilfe der bereits weiter oben erläuterten Meßverfahren die Funktionen $G^* = f(\varphi^\circ)$, $p_2 = f(\varphi^\circ)$, $\gamma_2 = f(\varphi^\circ)$ und $p_z = f(\varphi^\circ)$ bestimmt werden konnten, beschränkte sich die Aufgabe auf die experimentelle Bestimmung der in den Beziehungen (18) bzw. (20) enthaltenen Faktoren $\mu\sigma$ und a. Zu diesem Zweck wurde eine stationäre Meßeinrichtung verwendet; in ihr konnten die Menge und die Zustandsgrößen der durch den Saugkanal bzw. durch den Zylinder strömenden Luft

voneinander unabhängig verändert und gemessen werden. Die Durchflußzahl $\mu\sigma$ wurde nach einer Methode gemessen, die in der Praxis bekannt und an zahlreichen Stellen verwendet wird, wogegen zur Bestimmung des Drallfaktors a eine auf Bild 6 dargestellte Drall-Meßeinrichtung angefertigt wurde.

Die Drall-Meßeinrichtung besteht im Grunde genommen aus einem in geeigneter Weise gewählten axialen Schaufelgitter *1*, welches in den Modellzylinder eingesetzt ist. Die Anordnung und die Abmessungen des Schaufelgitters *1* ermöglichen es, daß der Luftstrom, welcher in den Zylinder eintritt,

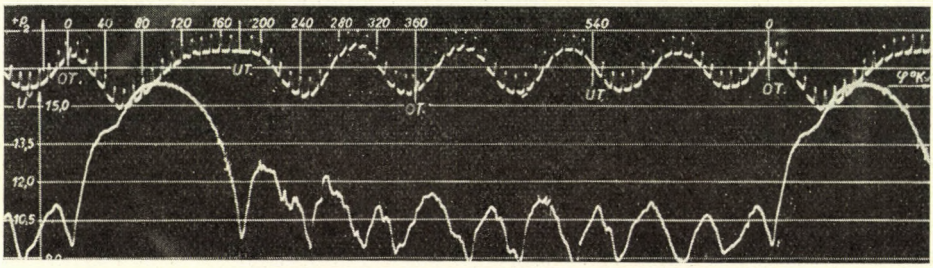


Bild 5. Oszilloskopische Aufnahme (U[V] Spannung des Kompensierungsstroms, p_2 Druck vor dem Saugventil)

und hier eine Drehbewegung ausführt, den Zylinder ausschließlich mit einer axialen Geschwindigkeit verlasse. In diesem Fall belastet das ganze Impulsmoment M des Luftwirbels, als Reaktionsmoment, das Schaufelgitter. Diese Tatsache besteht — im Sinne des Impulssatzes — auch dann, wenn die Luft auf das Schaufelgitter stößt oder dort eine Ablösung erleidet, vorausgesetzt, daß der Austritt aus dem Flügelgitter von streng axialer Richtung ist.

Das Schaufelgitter *1* wurde auf der Achse *3* fixiert und kann sich mit ihr zusammen in den Lagern *6* verdrehen. Das Moment wurde am anderen, mit *8* bezeichneten Ende der Welle *3* auf eine Archimedes-Spiralfeder übertragen. Durch diese Anordnung kann das Schaufelgitter im Vergleich zur Spiralfeder sich um einen gegebenen Winkel verdrehen. Der Drehwinkel — welcher mittels eines Zeigers *9* auf der Skalenteilung, angeordnet am äußeren Mantel des Schaufelgitters, abgelesen wird — kennzeichnet eindeutig das Impulsmoment und kann nach vorheriger Eichung zur Messung des Momentes verwendet werden.

Ein besonderer Vorteil der Einrichtung besteht darin, daß sie das volle Impulsmoment der durch den Zylinder strömenden Luft mißt, unabhängig von der dort entstehenden Geschwindigkeitsverteilung. Als ein weiterer Vorteil wird empfunden, daß — im Gegensatz zu den Anemometern mit Flügelgitter — das Schaufelgitter keine rotierende Bewegung ausführt, sondern sich lediglich verdreht, und so ist es den möglichen Reibungsverlusten gegenüber wesentlich weniger empfindlich. (An dieser Stelle sei erwähnt, daß der Gedanke, mit

ähnlichen Schaufelgittern zu messen, zuerst im Forschungsinstitut *NAMI*, in Moskau, aufgetaucht ist.)

In der beschriebenen Weise, unter stationären Verhältnissen wurden sämtliche, in der Gleichung (19) enthaltenen Größen gemessen, einschließlich

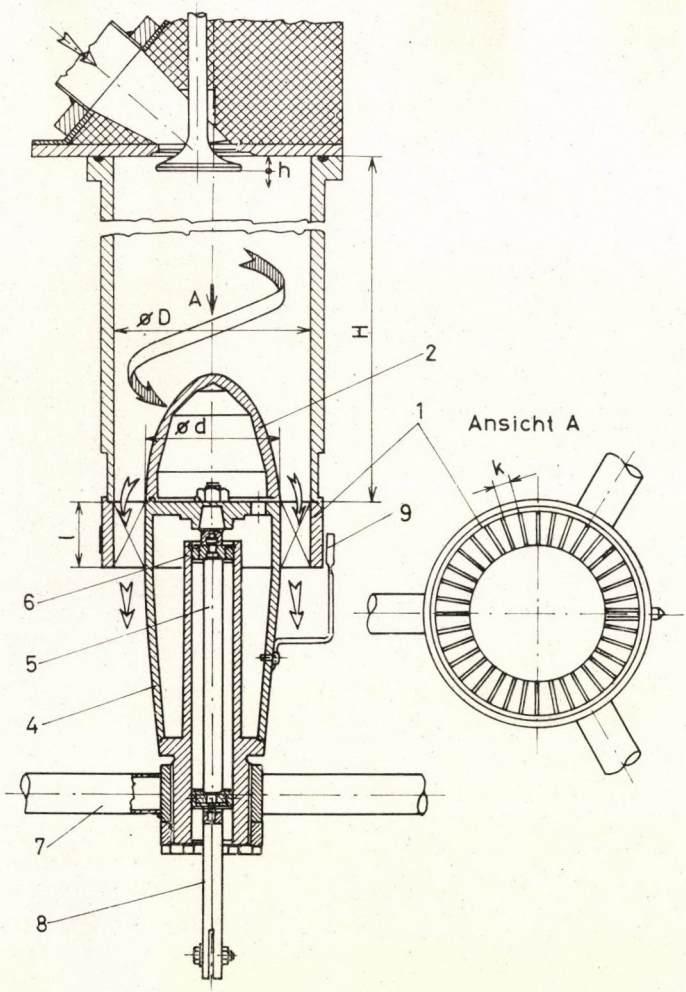


Bild 6. Meßgitter, das zur Messung des Impulsmomentes eines im Zylinder entfachten Luftwirbels dient (*1* Schaufelgitter, *2* Hut, *3* Welle, *4* Verkleidung, *5* Welle, *6* Lager, *7* Ständer, *8* Momentenabgang, *9* Zeiger oder Verdrehungsfühler)

auch das Impulsmoment M des Luftstromes. Dadurch ergab sich die Möglichkeit, den Drallfaktor a oder den mit ihm verhältnisgleichen Faktor a/C zu bestimmen.

Anhand einer großen Anzahl von Versuchen fand man die Bestätigung dafür, daß bei einem gegebenen Saugkanal und einer gegebenen Zylinder-

anordnung der auf Grund der Beziehung (19) unter stationären Verhältnissen bestimmte Drallfaktor a im wesentlichen nur eine Funktion des Ventilhubes h darstellt und praktisch von den Kennzeichen der Strömung unabhängig ist. Dafür wird auch ein Beispiel auf Bild 7 gezeigt. Auf Bild 7a sieht man die Werte des Drallfaktors a, gemessen bei den Drücken p_2 und p_z, ferner bei dem spezifischen Gewicht γ_2, mit den Parametern des Ventilhubes h. Es kann festgestellt

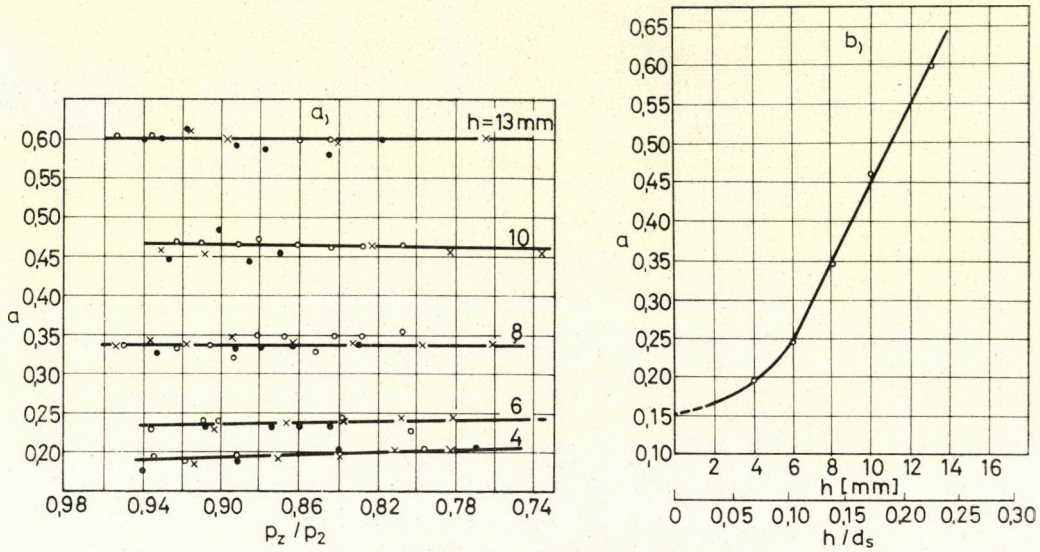


Bild 7. Werte des Drallfaktors bei tangentialem Saugkanal als Funktion des Druckverhältnisses $p_z/p_2(a)$ und als Funktion der Ventilerhebung (b)

Bezeichnungen: ○ $p_1/p_2 = 0{,}8$; × $0{,}9 < p_1/p_2 < 1$; ● $p_1/p_2 = 1{,}2$.

werden, daß bei einer Ventilöffnung h, die Werte von a, welche bei Messungen mit einer Luft von verschiedenen Zuständen und Mengen erhalten wurden, praktisch konstant sind.

Auf Bild 7b sind die Änderungen des Drallfaktors in einem Saugkanal als Funktion des Ventilhubes h dargestellt. (An der Stelle $h = 0$ ist a undefiniert.)

Bei der Bestimmung des Drallfaktors durch die erläuterte Methode — wie auch aus der Art der Meßeinrichtung hervorgeht — werden sämtliche möglichen Verluste des Luftwirbels berücksichtigt, welche in je einem herausgegriffenen Augenblick des Saugvorgangs auftreten. Die während des Kompressionhubes auftretenden Verluste wurden dagegen nicht berücksichtigt, daher sind die anhand der vorgeschlagenen Methode erzielten Ergebnisse — wie bereits erwähnt — lediglich bis zum Ende des Saughubes gültig. (Eine tatsächlich auftretende unstationäre Abbremsung vermindert selbst beim Saughub die Intensität des Luftwirbels einigermaßen.) Im Verlauf der Darstellung unserer Versuchsergebnisse arbeiten wir dennoch mit der tangentialen Geschwindig-

keit w_k, welche anhand der Beziehung (20) errechnet wurde, da dieser Meßwert anschaulicher und besser zu vergleichen ist. Hier muß man jedoch — auf Grund der obigen Ausführungen — berücksichtigen, daß die zur Darstellung gelangenden Werte w_k größer sind als in Wirklichkeit.

Vor Zusammenfassung der gewonnenen Versuchsergebnisse wird auf Bild 8 ein Diagramm gezeigt — welches mit Hilfe der erläuterten Meßmethode

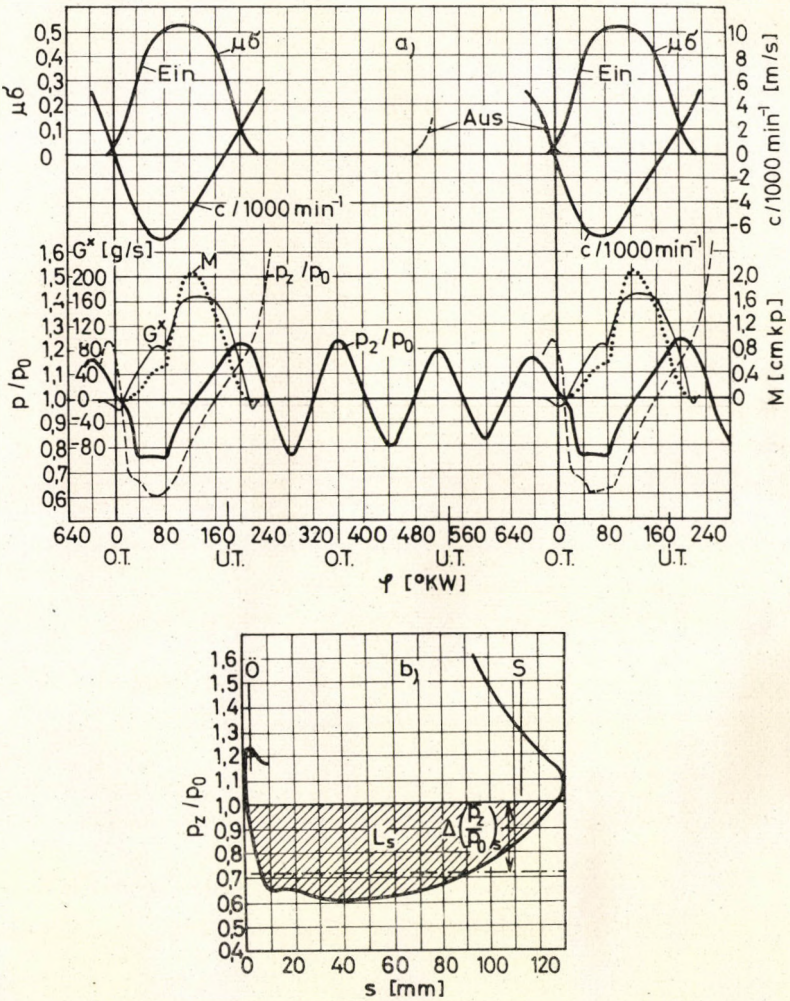


Bild 8. Charakteristischer Saugvorgang des dynamisch aufgeladenen Viertakt-Dieselmotors mit direkter Einspritzung (*a*) und der relative Zylinderdruck p_z/p_0 als Funktion des Hubes (p_2/p_0 relativer Druck vor dem Saugventil; p_z/p_0 relativer Druck im Zylinder; $\Delta(p_z/p_0)_s$ mittlerer Saugdruck; G^* in der Zeiteinheit in den Zylinder einströmende Luftmenge; M Impulsmoment der in den Zylinder einströmenden Luft; $\mu\sigma$ Durchflußzahl des Saug- bzw. des Auspuffventils; $C/1000$ [1/min] Kolbengeschwindigkeit bezogen auf $n = 1000$ 1/min; *Ö* Einlaßventil öffnet, *S* Einlaßventil schließt)

gewonnen und anhand der Eichdaten ausgearbeitet wurde und das die Luftbewegung veranschaulicht, welche in der Saugleitung des Motors, in dem mit *2* bezeichneten Querschnitt, ferner im Zylinderraum entsteht. Auf Bild 8a werden in Funktion des Drehwinkels $\varphi°$, die relativen Drücke p_2/p_0 und p_z/p_0, die während der Zeiteinheit einströmende Luftmenge G^*, das damit eingeführte Impulsmoment M, die Werte $\mu\sigma$ zur Kennzeichnung der Ventilöffnung und die Kolbengeschwindigkeit c, bezogen auf 1000 U/min, aufgetragen.

Auf Bild 8b ist der relative Zylinderdruck p_z/p_0 in Abhängigkeit vom Kolbenhub s dargestellt. Schraffiert wurde dabei die Fläche der Saugarbeit L_s und angezeigt wurde auch ihre Substitution bzw. ihre Kennzeichnung durch den sog. relativen Saugmitteldruck $\Delta(\overline{p_z/p_0})$. Im weiteren Verlauf soll hier mit diesem Wert die Arbeit charakterisiert werden, die vom Motor beim Ansaugen der Luft geleistet wird.

Die gezeigten Bilder veranschaulichen deutlich, daß dieses ausgearbeitete Untersuchungsverfahren zur Erforschung des Saugvorganges des Motors in seiner Gesamtheit oder in den Einzelheiten des Vorgangs geeignet ist.

IV. Meßergebnisse

Die Messungen wurden an vierzylindrigen Viertakt-Fahrzeugmotoren mit direkter Einspritzung durchgeführt. Zu einigen besonderen Messungen, zu Eichungen wurde auch die im Kapitel III beschriebene stationäre Modelleinrichtung verwendet. Der Vierzylindermotor, dessen Schnitt auf Bild 3 gezeigt wurde, kann durch folgende wichtigere Daten gekennzeichnet werden:

Bohrung, $D = 125$ mm;
Hub, $s = 130$ mm;
Zylinderzahl, $i = 4$;
gesamter Hubraum, $V_H = 6{,}38$ Liter;
Brennraum, ungeteilt, toroidal;
Außendurchmesser des Brennraums, $d_k = 88$ mm;
Kompressionsverhältnis, $\varepsilon = 16$;
Nenndrehzahl, $n = 2400$ U/min;
Zahl der Ventile: ein Einlaß- und ein Auslaßventil;
Einlaßventil: Durchmesser $d_h = 50{,}6$ mm; öffnet $\varphi° = 10$ °KW vor O. T.; schließt $\varphi° = 50$ °KW nach U. T.;
Auslaßventil: Durchmesser 46,6 mm; öffnet 40 °KW vor U. T.; schließt 10 °KW nach O. T.;
Einspritzpumpe *BOSCH PE4A* mit tangentialen Nocken;
Druckrohr — $\varnothing$ $6 \times 2/620$ mm;
Einspritzdüse — zentral angeordnet, von der Mittellinie des Brennraumes etwas abgerückt.

Im Verlauf der Versuche haben wir tangentiale Saugkanäle von verschiedener Form und Abmessungen verwendet, welche beim Einlaßventil des Motors immer an den gleichen Ventilsitz angeschlossen waren. Das gemeinsame Kennzeichen der auf Bild 9 dargestellten Saugkanäle bestand darin, daß

ihre Mittellinien in der Nähe des Ventilsitz-Querschnittes — ebenso wie die Erzeugenden der Kanalflächen — Geraden waren. Diesen Teil verband ein relativ wenig gekrümmter Bogen mit der ebenfalls immer identischen Eintrittsöffnung des Saugkanals. Aus einer derartigen Formgebung der Saug-

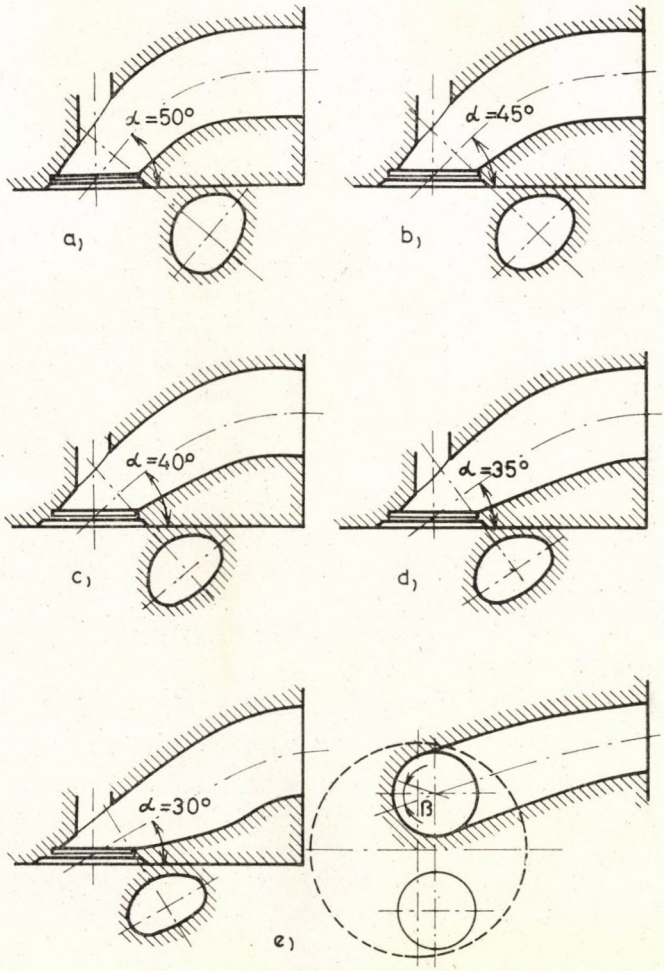


Bild 9. Versuchssaugkanäle

kanäle ergab sich der Vorteil, daß sie geometrisch einfach zu definieren waren, ferner, daß ein entsprechend langer gerader Teil vor dem Ventil eine geordnete Strömung gewährte.

Die Saugkanäle wurden voneinander durch den Winkel α unterschieden, der von ihren Mittellinien und der Zylinderkopfebene eingeschlossen wurde, und dessen Wert zwischen 30° und 50° veränderlich war. Deshalb wurden bei

der Aufarbeitung der Ergebnisse mit diesen Winkelwerten die einzelnen Varianten des Saugkanals bezeichnet. Die relative Anordnung der Saugkanäle und des Motorzylinders zueinander ist ebenfalls aus dem Bild zu ersehen. Die Projektion der Mittellinie der Saugkanäle schloß mit der tangentialen Richtung einheitlich $\beta = 30°$ ein — wie dies auch aus der Abbildung hervorgeht — und dieser Wert bedeutete das Kennzeichen der gegebenen Motorkonstruktion.

Die Änderung vom Richtungswinkel α der Saugkanäle führte gleichzeitig zur Änderung mehrerer Faktoren. In erster Linie änderte sich dadurch der Kanalquerschnitt, andererseits die Richtung des Lufteintritts in den Zylinder. Demzufolge konnten verschiedene Werte des Luftwiderstandes und des Dralls erreicht werden. Die gemessenen Durchflußzahlen $\mu\sigma$ sind auf Bild 10 dargestellt. Das Bild 10a veranschaulicht die Änderung der Werte $\mu\sigma$ in Abhängigkeit von der Ventilerhebung h, wogegen auf Bild 10b diese als Funktion des Kurbelwinkels $\varphi°$ dargestellt sind. Bild 11 zeigt die Werte der Drallfaktoren a und a/C die mit denselben Varianten des Saugkanals gemessen wurden.

Die Werte von $\mu\sigma$ und a/C ergaben sich — wie auch aus dem Bild ersichtlich — den Erwartungen entsprechend, denn die steileren, also mit größeren Winkeln α gekennzeichneten Saugkanäle verfügen über eine bessere Durchflußzahl, dagegen über einen kleineren Drallfaktor. Mit Vergrößerung der Ventilöffnung erhöhen sich die $\mu\sigma$-Werte der Saugkanäle immer weniger; die $\mu\sigma$-Kurven gehören bei jedem einzelnen Kanal zu je einem Grenzwert, der, wie bekannt, dann erreicht wird, wenn der durch das Ventil eröffnete Querschnitt bereits größer ist als der kleinste Querschnitt $f_{\min}$ des Saugkanals. Die Diagramme der Drallfaktoren geben zu gleicher Zeit noch lineare Beziehungen im Bereich der größeren Ventilöffnungen. Dieser Umstand kann damit erklärt werden, daß sich die Wirksamkeit der Drallerregung von Saugkanälen verbessert, wenn der Ventilteller — bei größeren Erhebungen — immer mehr außerhalb des Luftstrahls gelangt. Selbstverständlich haben auch die a- bzw. a/C-Kurven einen Grenzwert, diese treten jedoch bei den praktisch verwendeten Ventilöffnungen noch nicht auf. Die obigen Ausführungen bestätigen die durch Vergrößerung der Ventilöffnung erreichbare Drallerhöhung, andererseits erklären sie den Charakter der Bilder 10b und 11c.

Die Durchschnittswerte von $\overline{\mu\sigma}$, $\overline{\mu\Sigma}$ und $\overline{(a/C)}$, welche die Saugkanäle kennzeichnen und sich auf den Saughub beziehen, und welche anhand der Diagramme der Bilder 10 und 11 nach der im Kapitel II erläuterten Methode bestimmt wurden, sind in der Tafel I zusammengestellt.

Im Verlauf der an laufenden Motoren durchgeführten Messungen haben die zu den einzelnen Zylindern gehörenden Saugleitungen — wie bereits erwähnt wurde — unmittelbar aus der freien Atmosphäre bzw. aus dem großen Ausgleichbehälter gesaugt, wobei dieser Behälter die freie Atmosphäre ersetzte. Auf Bild 12 werden Werte dargestellt, welche mit verschiedenen Saugkanälen gemessen wurden, wobei die Saugleitungen einheitlich eine Länge von

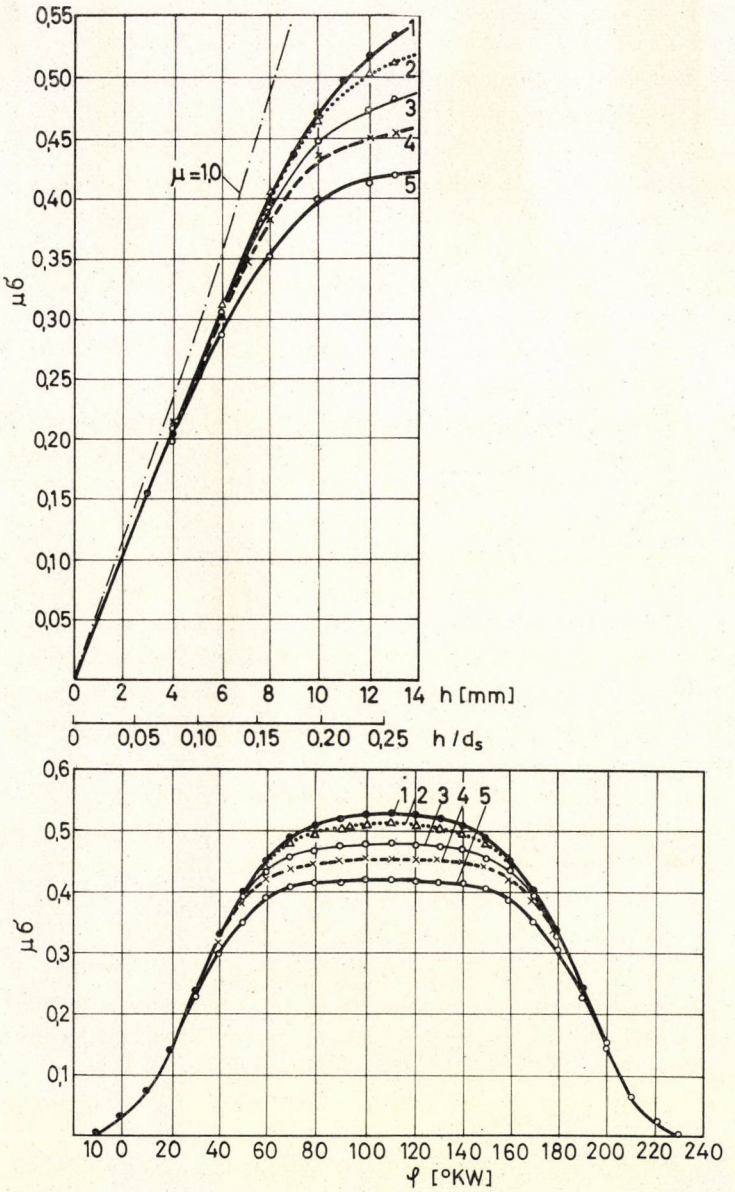


Bild 10. Durchflußzahlen der Versuchssaugkanäle (Kurve *1:* $\alpha = 50°$; Kurve *2:* $\alpha = 45°$; Kurve *3:* $\alpha = 60°$; Kurve *4:* $\alpha = 35°$; Kurve *5:* $\alpha = 30°$)

$L = 1{,}15$ m und einen Querschnitt von $f = 25{,}5$ cm² ($\varphi = 0{,}888$) besaßen. Die untere Kurvenschar des Bildes veranschaulicht die Werte des Liefergrades λ in Abhängigkeit von der Motor-Drehzahl n; die in der Mitte aufgetragene Kurvenschar zeigt die tangentiale Geschwindigkeit w_k, und oben

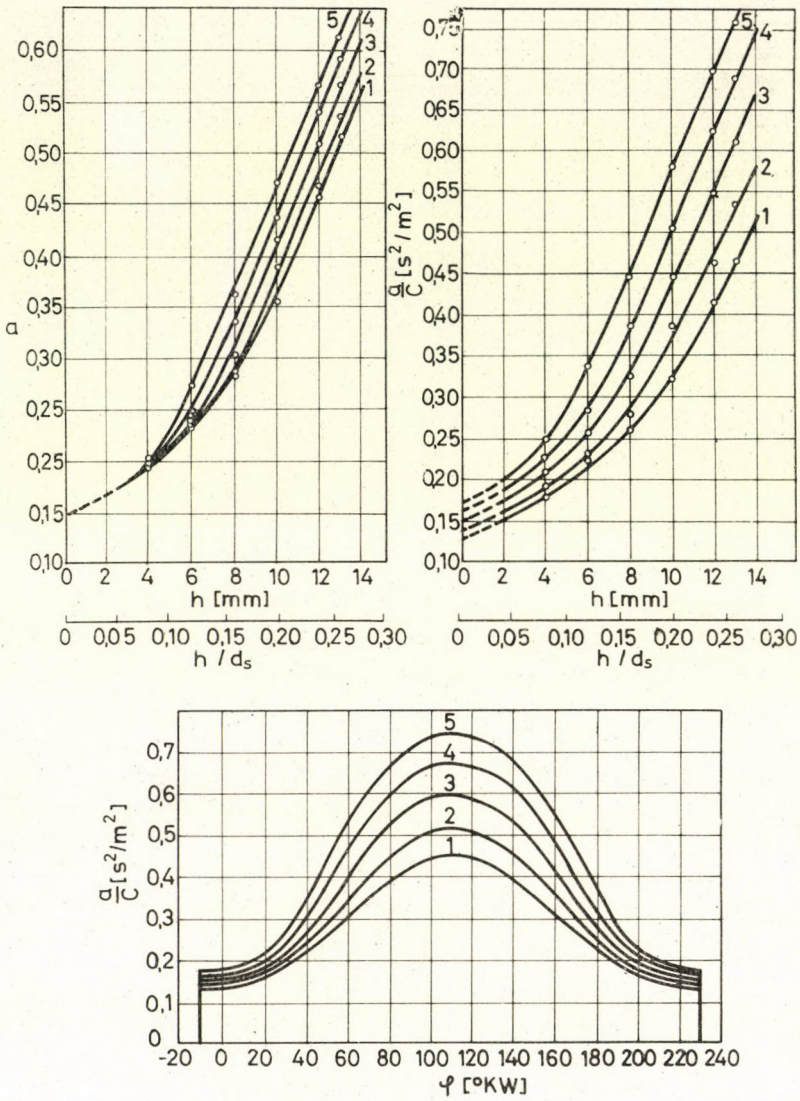


Bild 11. Drallfaktoren der Versuchssaugkanäle (Kurve *1:* $\alpha = 50°$; Kurve *2:* $\alpha = 45°$; Kurve *3:* $\alpha = 40°$; Kurve *4:* $\alpha = 35°$; Kurve *5:* $\alpha = 30°$)

sieht man den für die Saugarbeit kennzeichnenden relativen Saug-Mitteldruck $\Delta(p_z/p_0)$. An den auf dem Bild gezeigten Kurven sieht man auf den ersten Blick, daß keine der drei kennzeichnenden Größen eine monotone Funktion darstellt, sondern an den Kurven kommen abwechselnd lokale Maxima und Minima vor. Dieser Umstand weist selbstverständlich auf dynamische Erscheinungen, Schwingungen hin, welche den Saugvorgang begleiten. Es ist zu ersehen, daß bei dynamisch aufgeladenen Motoren mit der in der Praxis

Tafel I

Kennzeichnende Daten der Versuchs-Saugkanäle

Winkel des Saugkanals, $\alpha°$	$\frac{f_{min}}{f_s}$	$\overline{\mu\sigma}$	$\overline{\mu\Sigma}$	$\overline{\left(\frac{a}{C}\right)}$
30	0,549	0,375	0,0615	0,598
35	0,628	0,402	0,0659	0,532
40	0,671	0,416	0,0683	0,471
45	0,716	0,431	0,0708	0,412
50	0,764	0,440	0,0721	0,367

beobachteten Schwankung des Füllungsfaktors auch die periodische Schwankung der Saugarbeit und die Intensität des im Zylinderraum erzeugten Luftwirbels Hand in Hand geht. Die örtlichen Spitzen- bzw. Tiefpunkte der Kurven verschiedener Art (z. B. λ und w_k) erscheinen jedoch nicht zwangläufig bei gleichen Drehzahlen.

Die mit Saugkanälen mit verschiedenen α-Winkeln erhaltenen Werte stimmen sinngemäß gut mit den Ergebnissen von stationären Messungen überein (s. Tafel I); mit den Varianten, welche größere Durchflußzahlen besitzen, kann man bei geringerer Saugarbeit einen besseren Füllungsfaktor, aber geringeren Luftwirbel erreichen.

Ähnlich den geschilderten Vorgängen erhält man periodische Zusammenhänge für jedes der untersuchten Kennzeichen, wenn man nicht mit identischen, sondern mit verschiedenen Längen L der Saugleitungen den Vergleich durchführt, wie aus dem Bild 13 hervorgeht. Auf diesem Bild sind Meßergebnisse aufgetragen, welche bei $\alpha = 30°$, d. h. mit dem engsten Saugkanal und mit einigen Saugleitungen von verschiedener Länge erhalten wurden. Die mit Saugleitungen von verschiedener Länge erhaltenen Kennzeichen ergeben nun kein so einheitliches Bild; hier ist auch die Art der Kurven wesentlich verschieden. Die Situation wird jedoch sofort übersichtlicher, wenn die Änderung der genannten Kennzeichen in Funktion des Strouhalschen Kriteriums dargestellt wird, wie es auf den Bildern 14 und 15 zu sehen ist.

Auf den Bildern 14 und 15 wurde gleichzeitig mit der Strouhal- Zahl (Sh) auf der Abszisse das Verhältnis der Selbstschwingungszahl ν der in der Saugleitung befindlichen Luftsäule zur Zahl f der Saugperioden, ν/f, d. h. die Ordnungszahl der Erregerharmonischen dargestellt.

Daraus kann als erste Konsequenz gezogen werden, daß das Strouhalsche Kriterium in der Tat die Bedingung der Ähnlichkeit von Saugvorgängen ist, denn die unter verschiedenen Verhältnissen gemessenen Kurven sind in ihrer Art nicht weit voneinander entfernt. (Hier wird in erster Linie an die periodischen Änderungen der Gipfelpunkte bzw. der Minima der Kurven gedacht.)

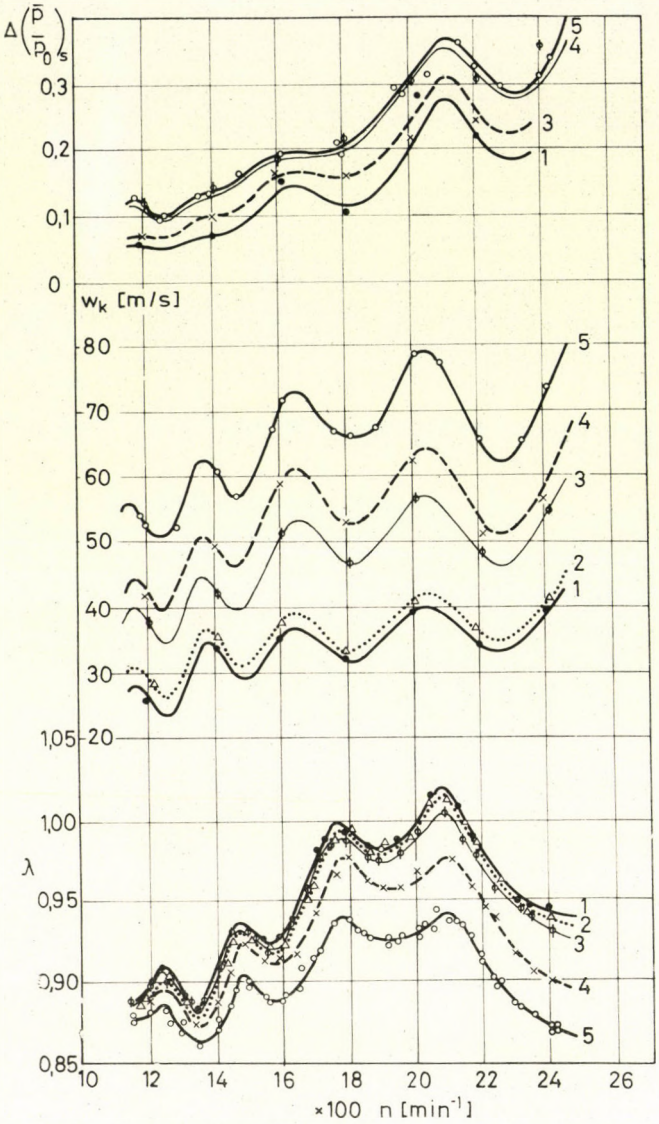


Bild 12. Kennwerte des Saugvorganges bei verschiedenen Saugkanälen in Abhängigkeit von der Drehzahl; Länge der Saugleitung $L = 1{,}15$ m (Kurve *1*: $\alpha = 50°$; Kurve *2*: $\alpha = 45°$; Kurve *3*: $\alpha = 40°$; Kurve *4*: $\alpha = 35°$; Kurve *5*: $\alpha = 30°$)

Gleichzeitig kann man sehen, daß für die vollkommene Ähnlichkeit auch noch weitere Bedingungen vorliegen, denn die entsprechenden Kurven in absoluten Werten bei Sh = konstant sind keineswegs mehr identisch. Zur weiteren Analyse bzw. Erklärung dieser Erscheinung werden jedoch auch die die Einzelheiten des Saugvorgangs erschließenden und im Bild 16 dargestellten Messungs-Diagramme herangezogen.

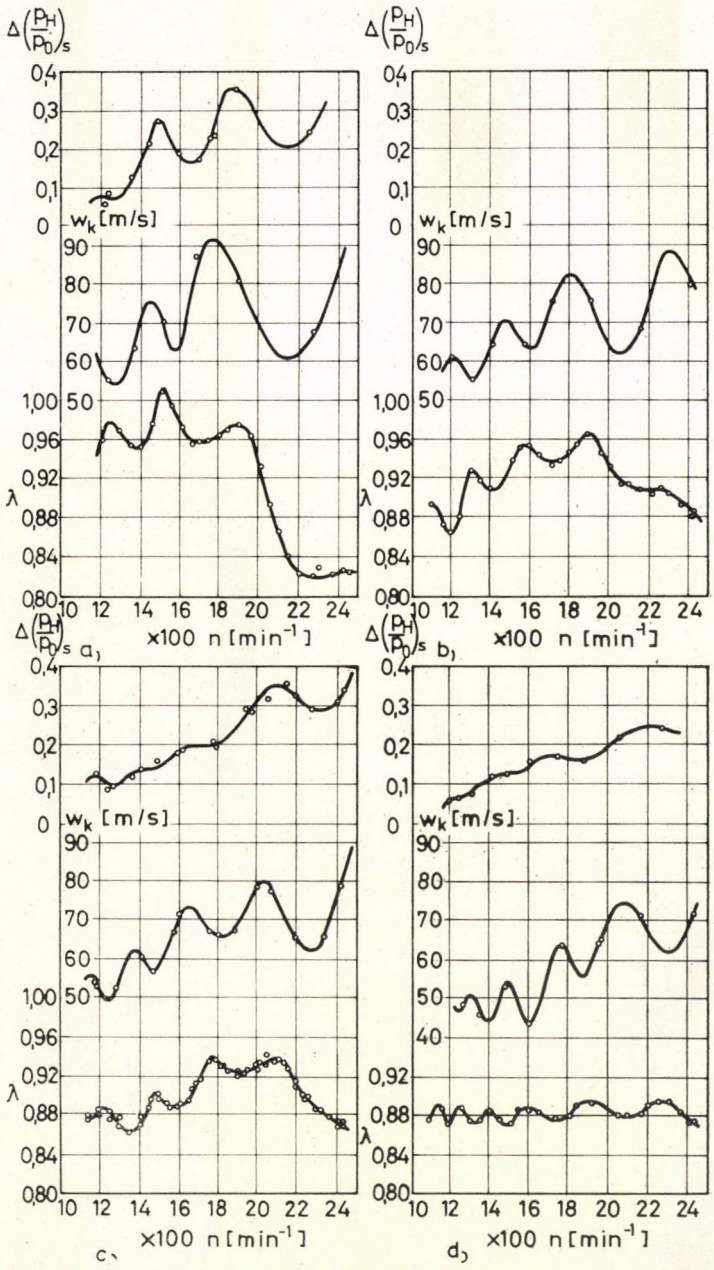


Bild 13. Kennwerte des Saugvorganges bei Saugleitungen von verschiedener Länge in Abhängigkeit von der Drehzahl; für den Saugkanal ist: $\alpha = 30°$ (*a*: $L = 1{,}65$ m; *b*: $L = 1{,}30$ m; *c*) $L = 1{,}15$ m; *d*) $L = 0{,}90$ m)

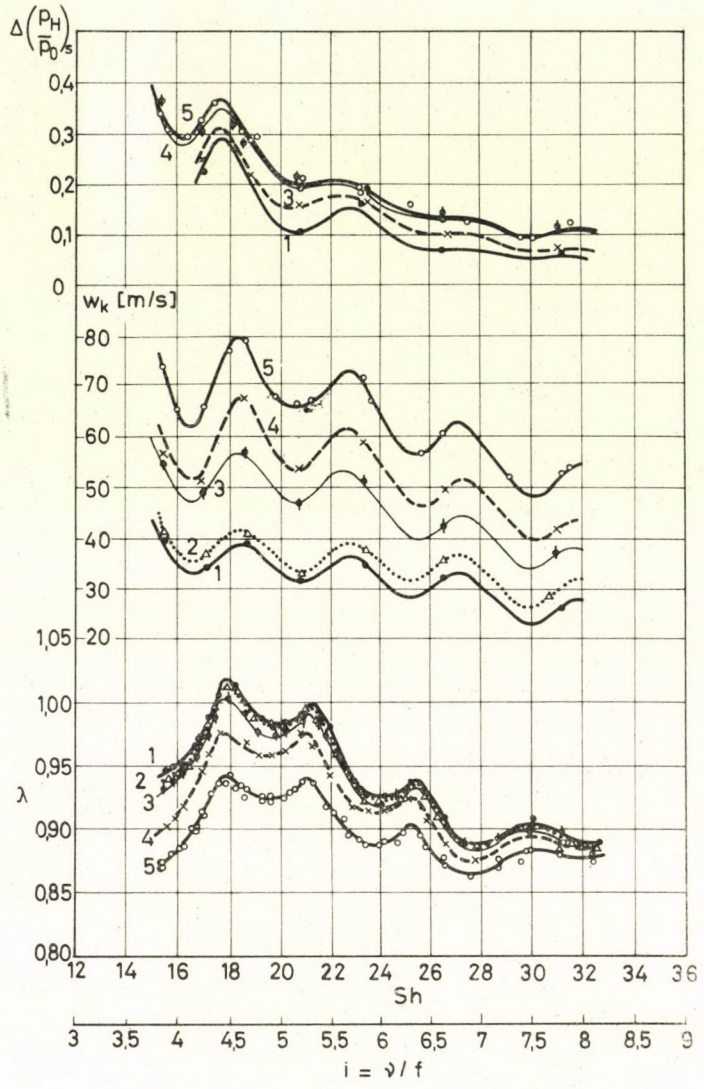


Bild 14. Kennwerte des Saugvorganges bei verschiedenen Saugkanälen als Funktion des Strouhalschen Kriteriums; Länge der Saugleitung: $L = 1{,}15$ m (Kurve *1:* $\alpha = 50°$; Kurve *2:* $\alpha = 45°$; Kurve *3:* $\alpha = 40°$; Kurve *4:* $\alpha = 35°$; Kurve *5:* $\alpha = 30°$)

Auf Bild 16 sind einige kennzeichnende Beispiele aufgezeichnet, welche die in dem mit 2 bezeichneten Querschnitt vor dem Saugventil und die in dem Zylinder auftretenden Verhältnisse bei Strömungen veranschaulichen, welche durch verschiedene Strouhal-Zahlen charakterisiert sind. Auf dem Bild sieht man in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Kurbelwelle das Druckverhältnis p_2/p_0, das Impulsmoment M und die dimensionslose Luftmenge A.

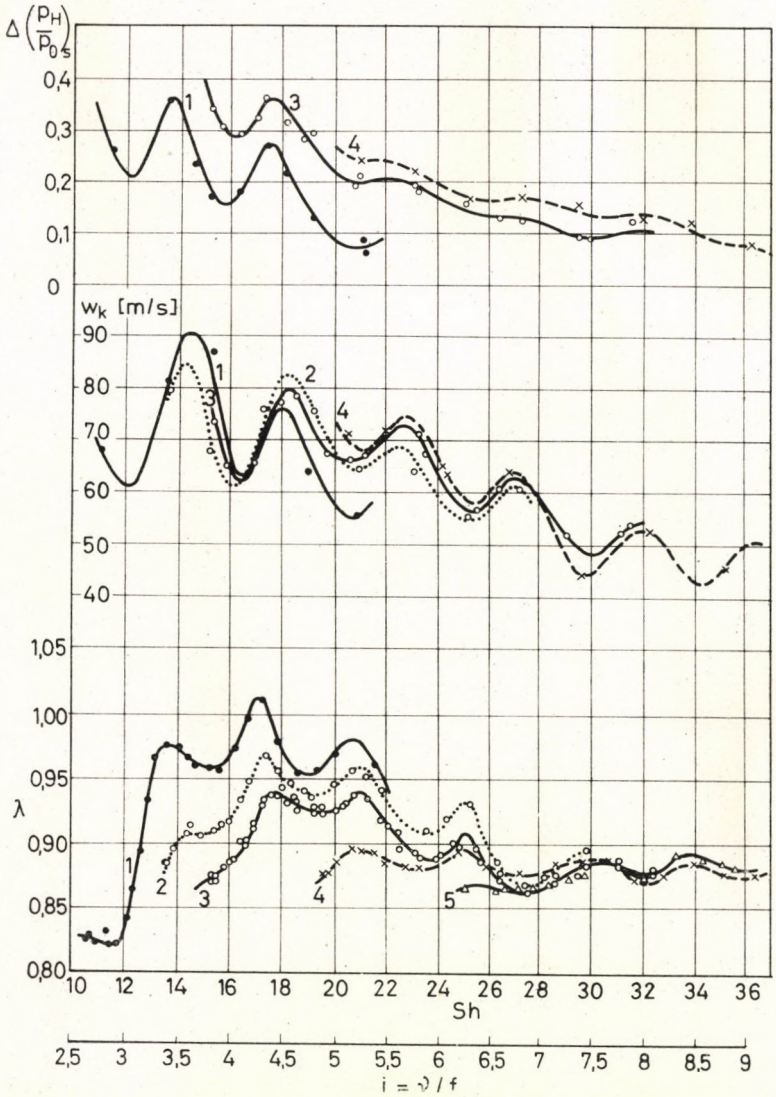


Bild 15. Kennwerte des Saugvorganges bei Saugleitungen von verschiedener Länge in Abhängigkeit von dem Strouhalschen Kriterium; für den Saugkanal ist: $\alpha = 30°$ (Kurve *1:* $L = 1{,}65$ m; Kurve *2:* $L = 1{,}30$ m; Kurve *3:* $L = 1{,}15$ m; Kurve *4:* $L = 0{,}90$ m; Kurve *5:* $L = 0{,}70$ m)

Letztere Bezeichnung wurde zwecks Übersichtlichkeit eingeführt. Ihre Interpretation ist folgende:

$$\Lambda = \frac{G^*}{6n \int_{t_{e.ö.}}^{t_{e,\,sch.}} G^* \, dt} \, [1/°\mathrm{KW}], \tag{31}$$

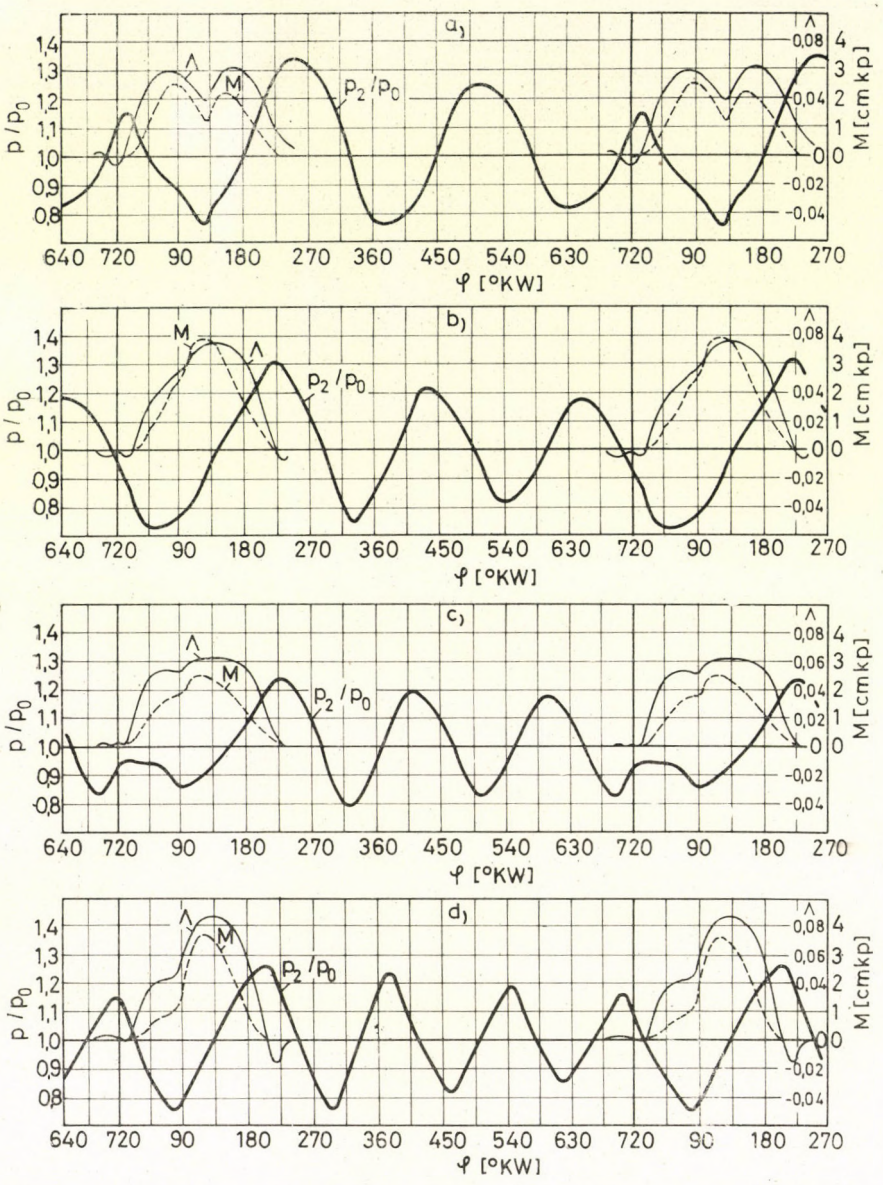
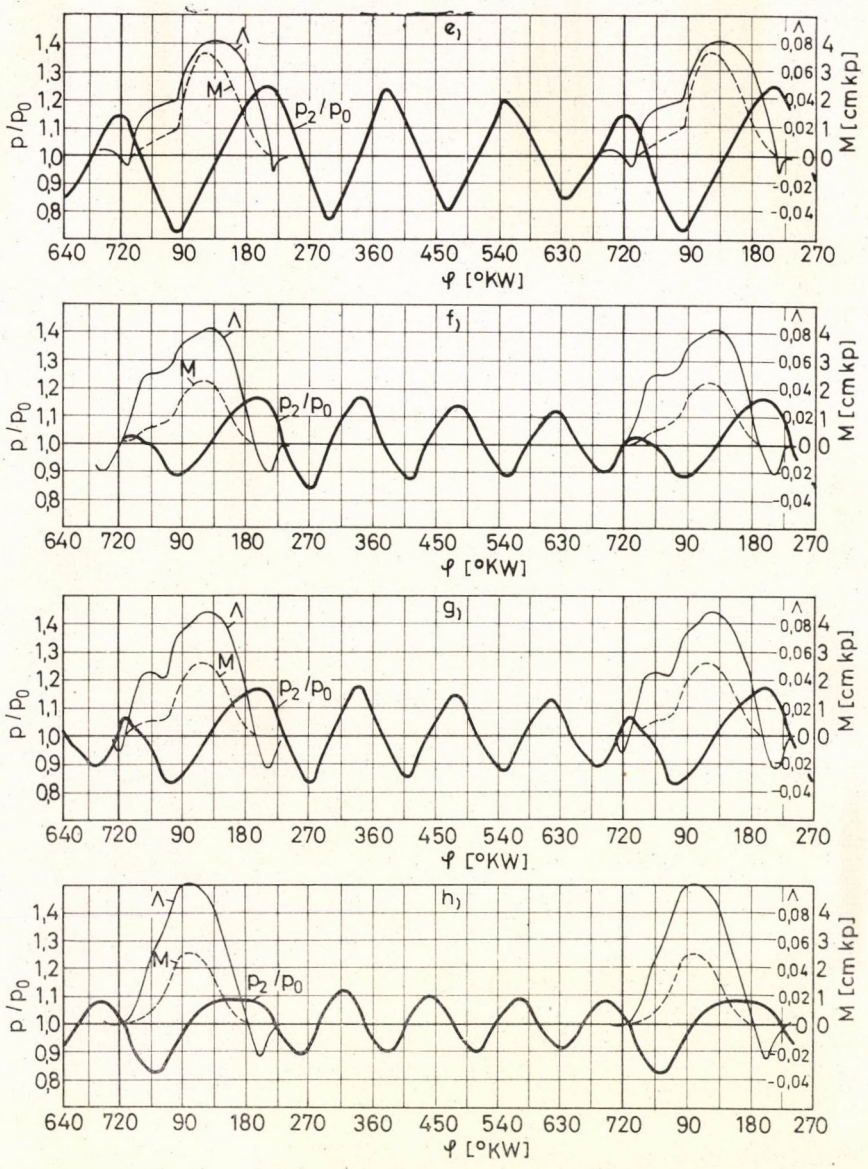


Bild 16. Einige charakteristische Saugvorgänge bei verschiedenen Werten des Strouhalschen Kriteriums (Saugkanal $\alpha = 30°$), wenn *a)* $Sh = 11{,}32$, $n = 2280$ 1/min, $L = 1{,}65$ m; *b)* $Sh = 13{,}56$, $n = 2415$ 1/min, $L = 1{,}30$ m; *c)* $Sh = 15{,}86$, $n = 2335$ 1/min, $L = 1{,}15$

d. h. die Meßzahl A zeigt den einströmenden Anteil der ganzen Luftfüllung während 1° KW. (Die Integration der A-Kurven nach der Winkeldauer des Ventilöffnens ergibt selbstverständlich 1, und in dieser Weise ist die Fläche unter den Kurven immer identisch und gleich der Einheit.)



d) $Sh = 17{,}14$, $n = 1507$ 1/min, $L = 1{,}65$ m; *e)* $Sh = 17{,}16$, $n = 1910$ 1/min, $L = 1{,}30$ m; *f)* $Sh = 20{,}78$, $n = 1241$ 1/min, $L = 1{,}65$ m; *g)* $Sh = 20{,}78$, $n = 1578$ 1/min, $L = 1{,}30$ m; *h)* $Sh = 23{,}00$, $n = 1427$ 1/min, $L = 1{,}30$ m

Auch durch den Wert von Λ kann man die bereits vorher interpretierte tangentiale Geschwindigkeit w_k ausdrücken, denn durch den Vergleich der Ausdrücke (20) und (31) erhält man folgende Gleichung:

$$w_k = D\lambda n \frac{\int_{(\text{ein})} \frac{a}{C} \frac{A^2}{\gamma_2 \mu\sigma} d\varphi^0}{\int_{(\text{ein})} A d\varphi^0 + \frac{G_r}{\gamma_0 V_n \lambda}}, \tag{32}$$

wo D eine Konstante ist, welche die Motordaten und weitere von dessen Betrieb unabhängige Faktoren enthält.

Vor einer eingehenden Analyse sei noch die Beziehung aufgezeigt, welche zwischen der Strouhal-Zahl und der in der Saugleitung entstehenden Winkeldauer des Wellenlaufs besteht. Sofern die Selbstschwingungszahl der in der Saugleitung vorhandenen Luftsäule

$$\nu = \frac{a_c}{4L}$$

beträgt, ist die Zahl der auf eine volle Saugperiode entfallenden Schwingungen:

$$i = \frac{\nu}{f} = \frac{\nu}{\frac{n}{120}} = \frac{1}{4} Sh.$$

Die Winkeldauer des mit der Geschwindigkeit a_0 fortschreitenden Wellenlaufs beträgt dagegen:

$$\varphi^* = 6n \frac{L}{a_0} = \frac{720}{Sh}.$$

Einige von den auf Bild 16 dargestellten Strömungsfällen (z. B. *d* und *c*, ferner *f* und *g*) können mit der gleichen Strouhal-Zahl charakterisiert werden. Den Kurven ist leicht anzusehen, daß die in diesen Fällen sich abspielenden Vorgänge eine erhebliche Ähnlichkeit aufweisen, trotz der beobachteten Verschiedenheiten hinsichtlich der Motordrehzahl und der Länge des Saugrohres. Vollkommene Übereinstimmung findet man z. B. hinsichtlich der Winkeldauer von Selbstschwingungen der nach dem Ventilschließen sich selbst überlassenen Luftsäule, des Ablaufs der Druckschwingungen; außerdem besteht auch noch eine große Ähnlichkeit in der Form der A-Kurven während des Ventilöffnens. Im wesentlichen ist hierauf die bereits früher erwähnte Abhängigkeit der λ-, w_k- und $\overline{A(p_z/p_0)}$- Kurven vom Strouhal-Kriterium zurückzuführen.

Auf Bild 16a sieht man Vorgänge, die sich bei $Sh = 11{,}32$ abspielen. Bereits aus dem Bild ging hervor, daß bei dieser Strouhalschen Zahl sowohl die λ-Kurve als auch die w_k-Kurve ein Minimum aufweist. Hier kann man daher das gemeinsame Entstehen eines relativ kleinen Füllungsfaktors und einer

kleinen tangentialen Geschwindigkeit beobachten. Dem Bild 16a entsprechend erreicht der Druck p_2/p_0 seinen Maximalwert vor dem Saugventil, nach dem Schließen des Saugventils, bei einer Stellung der Kurbelwelle $\varphi^\circ = 250$ °KW. An dem geschlossenen Saugventil tritt eine volle Reflexion auf, und die in der Saugleitung in keiner Gleichgewichtslage befindliche Luftsäule beginnt, sich selbst überlassen, zu schwingen. Die volle Schwingungsperiode beträgt: $4\varphi^* = 4(720/Sh) = 254$ °KW, in guter Übereinstimmung mit der Abbildung. Dementsprechend erreicht die im Rohr freie Schwingungen ausführende Luftsäule ihr letztes Druckminimum bei einer Kurbelwellenstellung von 631°, d. h. bei 89° vor dem oberen Totpunkt des nächsten Saugtaktes. Von dieser Stellung ausgehend erhöht sich erneut der Druck in der Saugleitung; dieser Umstand beweist, daß aus der freien Atmosphäre kommend, die Luft immer stärker beschleunigt das Rohr auffüllt. Diese Aufladungsperiode hält bis zu $2\varphi^* = 127°$ vor, d. h. um 38° nach dem oberen Totpunkt erreicht bereits die Reihe der druck- und geschwindigkeitsvermindernden Wellen den Zylinder. Nach der kurzzeitigen Rückströmung, welche dem Ventilöffnen folgt (10 ° kW vor dem oberen Totpunkt), wobei die Rückströmung als Folge des größeren Druckes der im Zylinder zurückgebliebenen Gase auftritt, beginnt, entsprechend den obigen Ausführungen, die Aufladung des Zylinders proportional der Ventilerhebung bzw. der Vergrößerung des Wertes von $\mu\sigma$ — wie dies aus der Kurve A ersichtlich ist. Obzwar bei dieser Stellung der Kurbelwelle die Werte von $\mu\sigma$ noch immer anwachsen, vermindert sich wegen der genannten Gründe die Steilheit der Kurve A bereits vom 38° Kurbelwinkel an, und später auch ihr absoluter Wert.

Die Bewegung des Kolbens nach der oberen Totlage erhöht das Volumen des Zylinders und erzeugt darin eine relative Druckverminderung; damit wird eine Reihe von druckvermindernden Wellen in Richtung des freien Rohrendes gestartet. Von hier wird — wie bekannt — eine Reihe von druck- und geschwindigkeitsvergrößernden Wellen zurückgeworfen, welche den Zylinder nach der oberen Totlage, mit Beginn bei $2\varphi^* = 127°$ erreicht. Dieser Augenblick ist an den Kurven des Bildes 16a gut zu sehen, da von diesem Beginn an der Druck p_2/p_0 und auch die Werte von A rapid zunehmen. Die Druckerhöhung dauert bis zum vollkommenen Abbremsen der Luftsäule, das Einströmen wird dagegen von den sich immer mehr vermindernden $\mu\sigma$-Werten beschränkt, wobei diese Verminderung von dem sich schließenden Ventil verursacht wird. Demzufolge entsteht bei dieser Strouhal-Zahl die interessante Situation, daß wegen des großen Verzögerungswinkels des Wellenlaufs die vom Kolben gestarteten Wellen nur mehr zu spät, mit kleiner Ventilöffnung reflektiert werden, wogegen die im Saugrohr zurückbleibenden Schwingungen die Einströmung bei noch wenig geöffnetem Ventil zu früh auslösen. Im Bereich der größeren Ventilöffnungen, bei 100—120° Kurbelwinkel, ist daher die Geschwindigkeit des Einströmens sehr niedrig.

Als eine natürliche Folge obiger Ausführungen tritt ein außerordentlich kleiner Füllungsfaktor auf. Die entstandenen Impulsmomente und die tangentiale Geschwindigkeit sind ebenfalls nicht groß, denn bei den günstigsten Werten von a/C ist der A Wert sehr klein, und dies vermindert, nach dem Ausdruck (32), quadratisch den Wert von w_k. Das im Bild 15 festgestellte örtliche Minimum an der w_k-Kurve entsteht gerade bei der Strouhal-Zahl, bei der das Minimum der A-Kurve genau mit dem maximalen Wert von a/C zusammenfällt, d. h. mit dem 110-ten Winkelgrad der Kurbelwellendrehung.

Bei diesem Strömungsfall ist auch die Saugarbeit relativ klein, denn infolge der anfänglichen bedeutenden Einströmung kann im Zylinderraum keine große Depression auftreten.

Bei Strouhal-Zahlen, die kleiner sind als die dargestellten, wird der Verzögerungswinkel immer größer. In dieser Weise kann auch der Fall eintreten, daß die vom Kolben gestarteten Wellen erst nach dem Schließen des Ventils den Zylinder erreichen. In diesen Fällen wird die vom Kolben geleistete Arbeit lediglich für die Erregung des Schwingungszustandes der im Saugrohr befindlichen Luftsäule verwandt, und lediglich die während der Schwingungen in der Luftsäule gespeicherte kinetische Energie kann den Zylinder aufladen. Dieser Vorgang besitzt jedoch einen sehr schlechten Wirkungsgrad, daher ist der $Sh < 12$-Bereich — den man als den Bereich der langen Verzögerungszeiten bezeichnen kann — für den Betrieb von Viertakt-Verbrennungsmotoren ungünstig.

Die Bilder 16a bis 16g illustrieren anhand einiger Beispiele jenen Bereich von Strömungsfällen, deren Grenzen bei $12 < Sh < 21$ liegen. Dieser Bereich kann Übergangszone genannt werden. Infolge der Werte der Verzögerungswinkel erreichen die vom Kolben gestarteten Wellen den Zylinder noch vor der größten Ventilöffnung, gleichzeitig kommt jedoch das zweite Rückwerfen der Wellen vom offenen Rohrende erst erheblich nach der maximalen Ventilöffnung an.

Auch bei der Analyse der Bilder 16b bis 16g kann man dem vorangehenden Beispiel folgen. Der Vorgang des Einströmens kann auch hier als Resultante zweier Effekte erreicht werden, von denen der eine aus dem Rückwerfen der vom Kolben gestarteten Wollen besteht, der andere dagegen aus dem Schwingungsbild der sich selbst überlassenen Luftsäule, welche beim Öffnen des Saugventils die im Rohr herrschenden Verhältnisse bestimmt.

Der auf Bild 16b gezeigte Fall spielt sich bei einem Wert von $Sh = 13{,}56$ ab, wo der Füllungsfaktor einen maximalen Wert annimmt. Aus dem Bild ist deutlich zu ersehen, daß in diesem Fall die infolge der beiden genannten Effekte entstehende Einströmungswelle den Zylinder im Bereich der größten Ventilöffnungen erreicht, und so kann dieser erheblich aufgeladen werden. Das örtliche Maximum der Geschwindigkeit w_k ergibt sich bei einer etwas größeren Strouhal-Zahl, wenn infolge der noch kleineren Verzögerungswinkel der

Gipfel der Kurve A sich in Richtung der größeren Ventilöffnungen bzw. der a/C-Werte verschiebt. Mit Rücksicht darauf, daß in dem dargestellten Fall die Luft zu Beginn des Saugtaktes aus dem Saugrohr in Richtung des offenen Rohrendes strömt, muß der Kolben sie zuerst abbremsen, dann in Richtung des Zylinders wieder beschleunigen, daher entsteht sowohl in der Saugleitung als auch im Zylinder eine erhebliche Depression, welche auch eine große Saugarbeit zur Folge hat.

Das Bild 16c zeigt den Strömungsfall, den bei einem $Sh = 15{,}86$ entstehender niedriger Füllungsfaktor kennzeichnet. Diese Erscheinung weist eine Ähnlichkeit mit der auf Bild 16a erläuterten Strömung, mit dem Unterschied, daß infolge der kürzeren Dauer des Verzögerungswinkels die Luftsäule zwischen zwei Saugtakten zwei volle Schwingungen ausführen kann, und auch die durch den Kolben gestarteten Wellen relativ früher ankommen. Die genannten zwei Effekte schwächen sich jedoch gegenseitig ab, wobei der beobachtete schlechte Füllungsfaktor entsteht.

Die Bilder 16d und 16e, ferner die mit 16f und 16g bezeichneten Abbildungen veranschaulichen Strömungen, welche durch einen guten Füllungsfaktor gekennzeichnet sind. Bei Verminderung der Winkeldauer des Wellenlaufes führt die Luftsäule immer mehr Schwingungen aus, und — wie ersichtlich — kann vor dem Schließen des Ventils, am Ende des Saugtaktes, eine immer stärkere Rückströmung beobachtet werden. Das Erscheinen und Stärkerwerden der Rückströmung bringt ein neues Element in den bisherigen Aspekt. Bei einem Wert von $Sh = 20{,}78$ sind nämlich (Bild 16f und 16g) die von den Schwingungen verursachten und vom Kolben unmittelbar ausgelösten Effekte voneinander fast um eine halbe Periode verschoben, demzufolge schwächen sie gegenseitig ihre Wirkung ab. Zu Beginn des Saugtaktes entsteht durch die Schwingungen ein bedeutendes Einströmen, wodurch im Zylinder die Depression vermindert wird. Demzufolge ergibt sich im vollen Saugtakt eine relativ ausgeglichene Einströmung ohne eine Rückströmung, und das bringt, bei kleiner Saugarbeit, einen guten Füllungsfaktor mit sich. Bei $Sh = 23$ — wofür ein Beispiel auf Bild 16h zu sehen ist — erscheinen beide Effekte gleichzeitig. Fast im selben Augenblick kommt beim Zylinder die vom Kolben und von den Schwingungen verursachte Druckwelle an, demzufolge entsteht bei den größeren Ventilöffnungen ein kräftiges Einströmen, das auch von einem besonders hohen A-Wert bekennzeichnet ist. Infolge der kleinen Wellenlaufwinkel kommt jedoch bald das zweite Rückwerfen in Form von druck- und geschwindigkeitsvermindernden Wellen an, und in dieser Weise wird die Luftsäule noch vor der unteren Totlage abgebremst. Demzufolge beginnt aus dem aufgeladenen Zylinder eine bedeutende Rückströmung. Das Einströmen erfolgt bei großer Geschwindigkeit und gerade bei den besten a/C-Werten, daher erhält man im Zylinder einen intensiven Luftwirbel. Infolge der Rückströmung, die nicht zu vernachlässigen ist, kann man dagegen in diesen Fällen an der

Kurve des Füllungsfaktors (Bild 15) einen Tiefpunkt entdecken. Die zu Beginn des Saugens beginnende Depression erhöht selbstverständlich auch die Saugarbeit, was auch aus dem Bild 15 zu ersehen ist.

Der Bereich $Sh > 21$ — der als der Bereich von Strömungen mit kleinen Verzögerungswinkeln bezeichnet werden kann — ergibt daher dann einen guten Füllungsgrad trotz der intensiven Rückströmung, welche am Ende des Saugtaktes auftritt, wenn der Zylinder relativ gleichmäßig aufgeladen wird, und wenn im Brennraum die kleinste Geschwindigkeit w_k entsteht. Die große tangentiale Geschwindigkeit ist jedoch mit einem schlechteren Füllungsfaktor und einer größeren Saugarbeit verbunden.

Bisher wurde die Wirkung des Strouhalschen Kriteriums auf den Saugvorgang untersucht und ein Überblick über jene Faktoren gegeben, welche hiervon in erster Linie abhängen. Die folgenden Ausführungen werden sich mit weiteren Bedingungen der Ähnlichkeit beschäftigen.

Im Zusammenhang mit dem Bild 15 wurde bereits erwähnt, daß die absoluten Werte der einzelnen λ-Kurven selbst bei Werten von $Sh =$ konstant voneinander abweichen, was mit der Verschiedenheit der weiteren Ähnlichkeitsbedingungen erklärlich ist. Darüber hinaus kann anhand des Bildes 15 auch noch festgestellt werden, daß einzelne charakteristische Punkte der λ-Kurven bei streng gleichen Strouhal-Zahlen ebenfalls nicht erscheinen. So verschieben sich zum Beispiel die Gipfelwerte der Füllungsfaktoren bei $Sh \approx 14$, ferner bei $Sh \approx 17$ immer mehr in Richtung der größeren Strouhalschen Zahlen, so wie sich die Länge der Saugleitung L verkürzt. Dies weist darauf hin, daß die Charakteristik der Kurven ebenfalls nicht ausschließlich von dem Strouhalschen Kriterium abhängig ist.

Die im Bild 15 dargestellten und durch die λ-Kurven gekennzeichneten Fälle erfüllen die Bedingung $Sh =$ konstant zwar bei den gleichen Werten von $\overline{\mu\sigma}$ und φ, also bei $\Pi_3 = \overline{\mu\sigma}\varphi =$ konstant, jedoch bei stets abweichenden Rohrlängen L. Folglich ist auch in den auf die gleiche Vertikale fallenden Punkten die Motordrehzahl n bzw. die mittlere Kolbengeschwindigkeit c_m ebenfalls verschieden. Demzufolge ändert sich auch der Wert des Π_2-Kriteriums, und zwar in der Weise, daß bei kürzeren Saugrohren Π_2 größer ist. Das bedeutet, daß die mittlere Einströmungsgeschwindigkeit wächst, und dieser Umstand bedingt auch das Anwachsen der im Zylinder entstehenden Depression. Die Änderung des Π_2-Kriteriums in der genannten Weise verändert demnach neben der Verminderung des absoluten Wertes der Füllungsfaktoren auch noch die Bedingungen der Wellenreflexion auf der Ventilseite, und zwar so, daß die Luftsäule später gedämpft wird [s. Beziehung (10)]. Damit ist der Umstand verbunden, daß auch naturgemäß die freien Schwingungen im Saugrohr später starten, wie dies z. B. aus dem Vergleich der Bilder 16d und 16e hervorgeht. (Im Bild 16d ist $n = 1507$ U/min. und dabei ist im Bild 16e $n = 1910$ U/min.) Die Winkeldauer wird jedoch dadurch nicht verändert, denn sie hängt ledig-

lich von der Strouhal-Zahl ab. Daher wird sich zu Beginn des nächsten Saugzyklus der in der Saugleitung befindliche Saugzustand in einem Phasenrückstand befinden. Dieser Phasenrückstand kann jedoch dann kompensiert werden, wenn sich die Winkeldauer der Schwingungen vermindert, das heißt, wenn sich die Strouhal-Zahl erhöht. Zuallerletzt liegt hier die Ursache für die Verschiebung der charakteristischen Punkte der λ-Kurven in Richtung der größeren Strouhal-Zahlen.

Eine ähnliche Erscheinung tritt auch dann auf, wenn man das Kriterium Π_3 verändert. Auch in diesem Fall verändern sich die Bedingungen der Reflexion, und zwar vermindert sich mit Erhöhung von Π_3 das Maß der Reflexion. (Bei geschlossenem Ventil, wenn $\overline{\mu\sigma}\varphi = 0$ ist, tritt nämlich eine volle Reflexion auf.) Die Abschwächung der Reflexion führt erneut zur späteren Dämpfung, es entsteht also tatsächlich der vorher erwähnte Fall. Über diese Ausführungen kann man sich bis zu einem gewissen Grad auch anhand des Bildes 14 überzeugen, wo eben die abweichenden Werte $\overline{\mu\sigma}$ der Saugkanäle die Π_3-Bedingung verändern. Ein wesentlich größerer Unterschied ist auf dem Bild 17 zu sehen, wobei gezeigt wird, daß mit Hilfe von Saugrohren mit verschiedenen Querschnitten f verschiedene Π_3-Kriterien hergestellt werden konnten. (Bei den Kurven im Bild waren übrigens die Saugkanäle identisch, die für die zwei verschiedenen Kurvenscharen gültigen Rohrlängen L werden im Bilde veranschaulicht.) Die Kurven liefern einen eindeutigen Beweis für unsere Behauptung mit der Ergänzung, daß die Bedingung Π_3 auch auf die Bildung des absoluten Wertes der Füllungsfaktoren von Einfluß ist.

Die Ausführungen über die Ähnlichkeitsbedingungen Π_1 und Π_3 werfen auch noch eine Frage des Aspektes auf. Anhand der gegebenen Darstellung erscheint die frühere, aus dem Schrifttum bekannte Behandlungsweise unzutreffend, wonach die dynamische Aufladung, oder der Saugvorgang mit Hilfe des Verhältnisses der Selbstschwingungszahl der Luftsäule und der Periodizität des Saugens bzw. durch die mechanisch verstandene Analyse der Erregerharmonischen behandelt werden kann. Die angeführten Beispiele beweisen, daß die Gipfelwerte der Füllungsfaktoren oder ihre Minima nicht zwangläufig mit irgendeiner bestimmter Ordnungszahl der Erregerharmonischen zusammenfallen. Eine weitere bedeutende Abweichung kann dann festgestellt werden, wenn auch die Bedingung der geometrischen Ähnlichkeit verändert wird, worüber bereits früher berichtet wurde [11]. Daher können die Gesetzmäßigkeiten der dynamischen Aufladung lediglich durch Anwendung der Ähnlichkeitsbedingungen behandelt werden. Obzwar wir über die für die exakte Beschreibung erforderlichen Daten zur Zeit nicht verfügen, können anhand des folgenden Bildes 18 einige weitere, als nützlich erscheinende Folgerungen gezogen werden.

Auf Bild 18 wird bei einigen charakteristischen Werten des Strouhalschen Kriteriums das Verhältnis des Füllungsfaktors und der Ähnlichkeitsbedingung

Π_2, bzw. Π_3 gezeigt. Auf dem Bilde wurden die Werte der Füllungsfaktoren λ in Abhängigkeit des Kriteriums Π_2 dargestellt, wobei der Parameter der einzelnen Kurven $\Pi_3 = \overline{\mu\sigma} \cdot \varphi =$ konst. Bedingung ist. Im Bild geht aus der

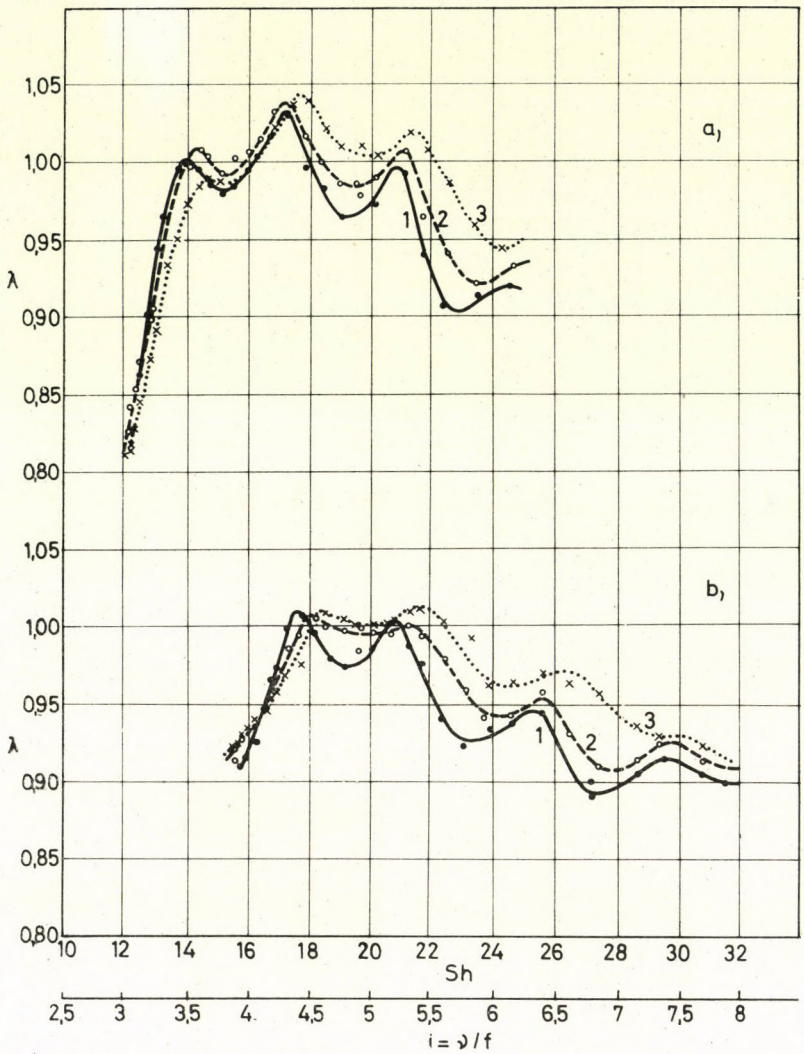


Bild 17. Werte von Füllungsfaktoren bei Saugleitungen mit verschiedenen Querschnitten, wenn *a)* $L = 1{,}45$ m und *b)* $L = 1{,}15$ m (Kurve *1*: $\Pi_3 = \mu\sigma\varphi = 0{,}3278$; Kurve *2*: $\Pi_3 = \mu\sigma\varphi = 0{,}3800$; Kurve *3*: $\Pi_3 = \mu\sigma\varphi = 0{,}4820$

mit ausgezogener Linie dargestellten Kurve *I* ($\Pi_3 = 0{,}2950$) hervor, daß der Wert der Bedingung Π_2 den Füllungsfaktor des Motors erheblich beeinflußt. Diese Wirkung ist jedoch bei den verschiedenen Strouhal- Zahlen nicht gleichlautend. Bei den kleineren Werten dieser Zahlen verschlechtert sich λ wesent-

lich mit dem Anwachsen von Π_2, wogegen bei $Sh = 30$ eine Verschlechterung praktisch kaum mehr auftritt. Als Erklärung dieser Erscheinung dienen die im Verlauf der dynamischen Aufladung auftretenden Vorgänge. Die aufladende

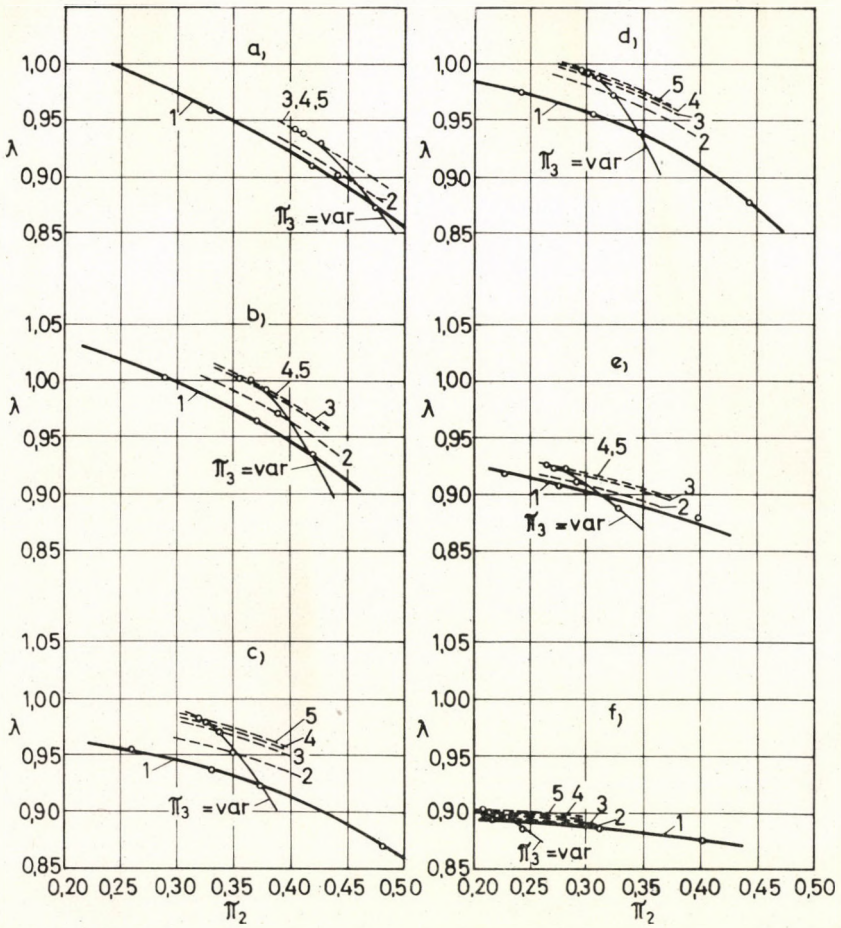


Bild 18. Wirkung der Änderung der Ähnlichkeitskriterien Π_2 und Π_3 auf den Wert des Füllungsfaktors, wenn *a)* $Sh = 15{,}5$; *b)* $Sh = 17{,}5$; *c)* $Sh = 19{,}5$; *d)* $Sh = 21{,}2$; *e)* $Sh = 23{,}5$; *f)* $Sh = 30{,}0$ Kurve *1:* $\Pi_3 = 0{,}2950$; Kurve *2:* $\Pi_3 = 0{,}3162$; Kurve *3:* $\Pi_3 = 0{,}3278$; Kurve *4:* $\Pi_3 = 0{,}3395$; Kurve *5:* $\Pi_3 = 0{,}3462$

Wirkung entsteht nämlich in der Weise, daß die Saugarbeit des Kolbens zuerst der Beschleunigung der Luftsäule, also der Erhöhung ihrer kinetischen Energie dient; dann kann mit Hilfe dieser Energie der Zylinder aufgeladen werden. Sofern das Einströmen bei einem großen Wert von Π_2, d. h. bei einer großen Mittelgeschwindigkeit erfolgt, verbrauchen die gasdynamischen Verluste des Einströmens einen bedeutenden Teil der kinetischen Energie. Die größeren dynamischen Wirkungen treten jedoch gerade im Bereich der kleinen Strouhal-

Zahlen auf, daher werden gerade dort die wesentlicheren kinetischen Energien in der Luftsäule aufgespeichert. Dadurch ist dieser Strömungsfall gegenüber den möglichen Strömungsverlusten auch empfindlicher. Bei den größeren Strouhal-Zahlen — wie z. B. bei $Sh = 30$ — handelt es sich um lediglich ganz geringe dynamische Wirkungen, demzufolge kann kein besonders guter Füllungsfaktor erreicht werden. Demgegenüber ist der Vorgang gegenüber Verlusten unempfindlich.

Die Wirkung des Kriteriums Π_3 weist jedoch nicht mehr nur in eine Richtung. Die vorliegenden Daten reichen nicht aus, um die mit *II—IV* bezeichneten Kurven im ganzen untersuchten Bereich zu konstruieren, daher konnte nur ihre wahrscheinliche Richtung mit gestrichelter Linie angedeutet werden. Anhand der zur Verfügung stehenden Punkte kann man bereits feststellen, daß die Bedingungen Π_3 ein bestimmtes Optimum besitzen und der optimale Wert bei verschiedenen Strouhal-Zahlen jeweils ein anderer ist. Bei der Strouhal-Zahl 15,5 fallen die mit *III*, *IV* und *V* bezeichneten Kurven praktisch zusammen und deuten somit an, daß durch Erhöhung des Π_3-Wertes λ nicht weiter verbessert werden kann, in Richtung der größeren Strouhal-Zahlen dagegen separieren sich die Kurven erneut. Hierfür liefern ebenfalls die Größe der kinetischen Energie, ferner die Verhältnisse der ventilseitigen Wellenreflexion eine Erklärung. Bei kleinen Strouhal-Zahlen treten genügend große dynamische Wirkungen auf. Eine weitere Steigerung des Niveaus der am Vorgang teilnehmenden kinetischen Energie durch die Erhöhung der Meßzahlen des Π_3-Kriteriums, oder was damit äquivalent ist — durch die relative Verminderung des Querschnittes f des Saugrohres, verbessert weniger den Füllungsfaktor als die Verschlechterung, welche durch die Dehnung des Einströmens bzw. durch die entlang der Saugleitung entstehenden Mehrverluste der Strömung auftritt. In Richtung der größeren Strouhal-Zahlen vermindern sich jedoch die dynamischen Wirkungen äußerst schnell. Ihre Vergrößerung in irgendeiner Weise, ferner die Verminderung des Rückstroms — erzeugt durch die gedehnter werdende Charakteristik des Einströmens infolge der schwächeren Reflexion — verbessern den Füllungsfaktor des Motors. Selbstverständlich gibt es auch hier irgendeinen optimalen Wert des Π_3-Kriteriums, der jedoch im Bereich der relativ größeren Π_3 Werte liegt. Bei den ganz großen Strouhal-Zahlen — wie z. B. bei $Sh = 30$ — beeinflußt auch das Π_3-Kriterium die Gestaltung des Füllungsfaktors nicht wesentlich.

Die Ähnlichkeitsbedingungen Π_2 und Π_3 sind ebenfalls von Einfluß auf die Saugarbeit. Aus der Analyse des Bildes 14 und 15 geht hervor, daß in erster Linie — wie beobachtet werden konnte — die Erhöhung von Π_2, neben einer gleichzeitigen Verminderung des Füllungsfaktors, zur Vergrößerung der Saugarbeit führt.

Im Zusammenhang mit der tangentialen Geschwindigkeit w_k, welche im Brennraum des Motors entsteht, wurde bereits vorher dargelegt, daß

die Beziehung (32) bzw. die darin enthaltenen Größen ihren Wert bestimmen. Es wurde auch erwähnt, daß hierbei die größte Bedeutung der Größe

$$\frac{a}{C}\,\frac{A^2}{\gamma_2\,\mu\sigma}$$

zukommt, denn hier kommt A in der zweiten Potenz vor. Die Einströmungs-Charakteristik A, welche den zeitlichen Verlauf des Einströmens kennzeichnet, ist dagegen die Funktion von allen drei Ähnlichkeitsbedingungen. Daraus folgt, daß auch die tangentiale Geschwindigkeit w_k eine Funktion der Ähnlichkeitsbedingungen ist. Die periodische Schwankung von w_k wird in erster Linie von der Veränderung des Strouhalschen Kriteriums verursacht, für ihre zahlenmäßige Größe sind jedoch auch die Bedingungen Π_2 und Π_3 von Einfluß.

Aus der Beziehung (32) ist zu ersehen, daß der Drallfaktor a/C des Saugkanals bzw. das Verhältnis $(a/C)\mu\sigma$ bestimmend dafür sind, in welcher Weise bzw. bis zu welchem Grad die in den Zylinder strömende Luftmenge für die tangentiale Geschwindigkeit nutzbar gemacht werden kann. Dieser Ausdruck bleibt jedoch für die jeweilige Variante des Saugkanals, in den verschiedenen Fällen der Einströmung gleich. Wenn die Einström-Charakteristik A in den verschiedenen Fällen unverändert bliebe, so würde die tangentiale Geschwindigkeit w_k — wie dies aus der Beziehung (32) folgt — mit der Motordrehzahl linear anwachsen. Ein derartiger Zusammenhang wurde im Schrifttum von verschiedenen Autoren angenommen. Die eigenen Versuche widerlegen jedoch diese Annahmen. Zur Veranschaulichung dieser Frage werden im Bild 19 einige w_k-Kurven in Abhängigkeit von der Motordrehzahl dargestellt. Die obere Kurvenschar veranschaulicht Meßergebnisse, welche mit Saugleitungen von gleicher Länge $L = 1{,}15$ m, aber mit Saugkanälen von verschiedenen Winkeln α vermessen wurden, wogegen die untere Kurvenschar die tangentialen Geschwindigkeiten kennzeichnet, welche mit einem Saugkanal von $\alpha = 30°$ und mit einigen abweichenden Rohrlängen erhalten wurden. Sämtliche Kurven auf dem Bilde bestätigen, daß die Geschwindigkeit w_k in Abhängigkeit von der Drehzahl des Motors eine Änderung nicht nur nicht-linear, auch nicht monoton, sondern periodisch erfährt, wobei die Ursache hierfür bereits früher erläutert wurde.

Sofern man versucht, die durchschnittliche Mittellinie der w_k-Kurven aufzuzeichnen, so wird man sehen, daß sie keine Geraden ergeben können, denn sonst würde sich das Paradoxon ergeben, daß bei der Motordrehzahl $n = 0$ eine tangentiale Geschwindigkeit von endlicher Größe im Brennraum des Motors vorhanden ist. Die Durchschnittswerte der tangentialen Geschwindigkeit w_k finden jedoch eine Annäherung durch je einen parabolischen Wurzelausdruck von entsprechender Steigung, wie aus dem Bild 19 hervorgeht, gemäß folgender Beziehung:

$$\overline{w}_k = k\sqrt{n}\,,$$

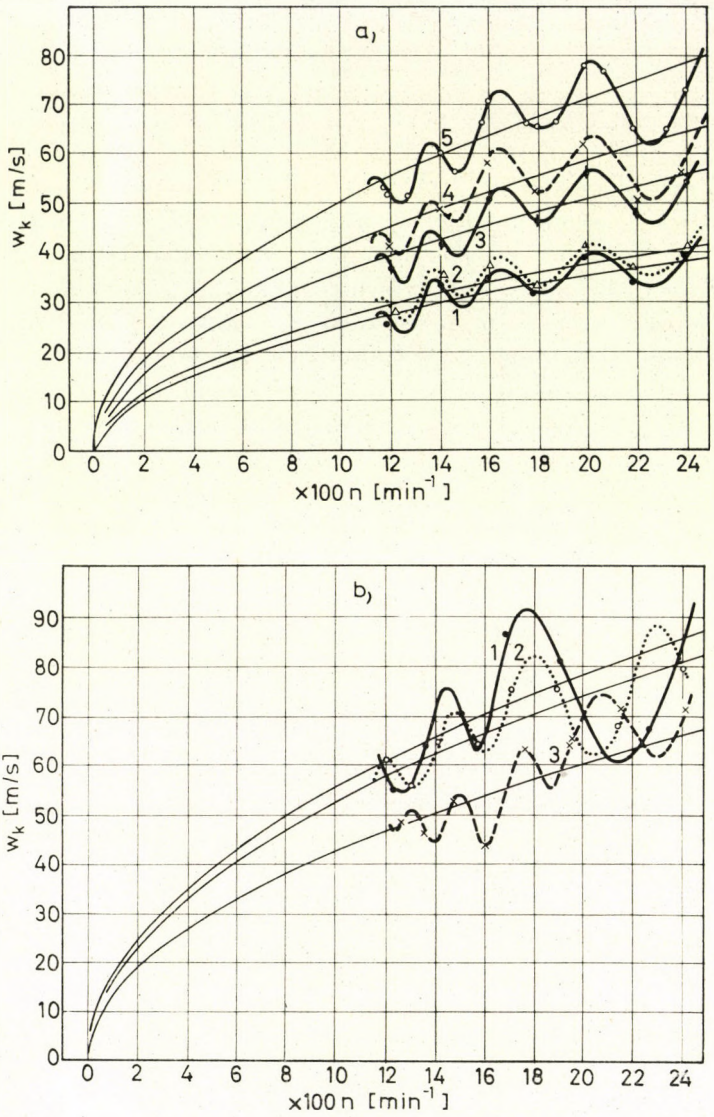


Bild 19. Wirkliche Werte und Mittelwerte der im Brennraum auftretenden tangentialen Geschwindigkeiten, wenn *a)* $L = 1{,}15$ m und Kurve *1* $\alpha = 50°$, Kurve *2* $\alpha = 45°$, Kurve *3:* $\alpha = 90°$, Kurve *4:* $\alpha = 35°$, Kurve *5:* $\alpha = 30°$; *b)* $\alpha = 30°$ und Kurve *1* $L = 1{,}65$ m, Kurve *2* $L = 1{,}15$ m, Kurve *c)* $L = 0{,}90$ m

wo k eine für die Steigung der gegebener Parabel charakteristische Konstante ist. An dieser Stelle sei erwähnt, daß ein derartiger Zusammenhang bereits von mehreren Forschern, z. B. von dem unter [5] angegebenen, als Ergebnis von mit anderen Methoden durchgeführten Geschwindigkeitsmessungen beobachtet wurde.

Als Erklärung für diese Erscheinung dienen der instationäre Charakter des Saugvorganges, ferner die Wirkung der Kriterien Π_2 und Π_3. Mit ihrer Erhöhung wird — wie bereits früher eingehend erläutert wurde — die ventilseitige Wellenreflexion schwächer, und die Einströmungs-Charakteristik gedehnt, womit natürlich auch der Umstand verbunden ist, daß die maximalen Werte von A sich vermindern. Dies führt aber zur quadratischen Verminderung der w_k-Werte, wie man dies aus der Beziehung (32) ersehen kann.

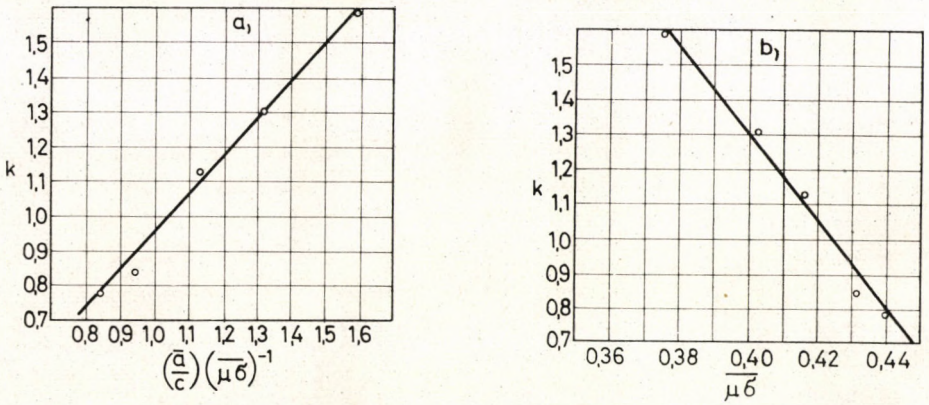


Bild 20. Beziehung zwischen dem Beiwert k, der für die mittlere tangentiale Geschwindigkei charakteristisch ist, und den Kennwerten des Saugkanals (L = 1,15 m)

Der Parabelbeiwert k kann auch mit den Größen $(a/C)/\mu\sigma$, welche für den Saugkanal kennzeichnend sind in Zusammenhang gebracht werden, und dieser Zusammenhang kann nach dem Bild 20a bei einer gegebenen Rohrlänge L durch eine Gerade charakterisiert werden. Zwischen dem Beiwert k und der mittleren Durchflußzahl $\overline{\mu\sigma}$ der Saugkanäle kann ebenfalls eine Beziehung gefunden werden (Bild 20b). Nach dieser Darstellung vermindern sich die mittleren Werte der tangentiellen Geschwindigkeiten fast linear mit der Vergrößerung von $\overline{\mu\sigma}$. Dies bedeutet auch, daß bei nach einheitlichen geometrischen Grundsätzen aufgebauten Saugkanälen die Intensitätserhöhung der Luftbewegung mit der Verminderung des Füllungsfaktors und der Erhöhung der Saugarbeit verbunden ist. Im Bild 20c wird noch eine weitere Relation gezeigt. Da ist bei gleichem Saugkanal die Änderung des Beiwertes k in Abhängigkeit von der Länge L der Saugleitung dargestellt. Es ist gut zu erkennen, daß mit der Vergrößerung der Rohrlänge L der Beiwert k sich — wenn auch in stets abnehmendem Maße — vergrößert. Die Ursache hierfür liefert die größere Einströmgeschwindigkeit, welche bei den größeren Rohrlängen, bei kleineren Strouhal-Zahlen entsteht.

V. Zusammenfassung

a) Anhand der theoretischen Untersuchung von Strömungsvorgängen, welche sich in der Saugleitung von Viertakt-Dieselmotoren abspielen, wurden die wichtigsten Ähnlichkeitsbedingungen des Saugvorganges am Motor aufgezeigt und ihr Vorhandensein auch experimentell nachgewiesen. Ebenfalls versuchsmäßig wurde der Effekt untersucht, der durch die Änderung der Ähnlichkeitsbedingungen auf den Saugvorgang ausgeübt wird.

b) Es wurde festgestellt, daß vom Standpunkt des Liefergrads diejenige Saugleitung die günstigste ist, für welche die Bedingung $12 < Sh < 21$ erfüllt ist. In diesem Bereich der Strouhal-Zahl üben auch die Ähnlichkeitsbedingungen Π_2 und Π_3 einen großen Einfluß auf den Saugvorgang aus. Mit Erhöhung des Kriteriums Π_2, welches die mittlere Einströmgeschwindigkeit kennzeichnet vermindert sich bei einer Erhöhung der Saugarbeit der Füllungsfaktor in stets wachsendem Maß. Vom Standpunkt des Liefergrads besitzt das Kriterium Π_3 ein Optimum. Der optimale Wert von Π_3 hängt auch von der Strouhal-Zahl ab.

c) Zur Verwirklichung des Brennvorganges von Verbrennungsmotoren mit direkter Einspritzung benötigt man im Brennraum eine intensive tangentiale Luftbewegung. Dieser Luftwirbel wird vom Brennraum mit Hilfe des Impulsmomentes hergestellt, welches durch den Saugkanal gebildet wird. Die Bildung des Impulsmomentes zieht die Verminderung der mittleren Durchflußzahl $\overline{\mu\sigma}$ des Saugkanals nach sich, womit sich wiederum der Wert des Kriteriums Π_2 erhöht. Deswegen wird eine gewisse Verminderung des Füllungfaktors unvermeidlich. Im Interesse der günstigsten Gestaltung der Saugleitung ist es zweckmäßig, den Brennraum so zu gestalten, daß dieser das zur Verfügung stehende Impulsmoment in maximaler Weise als tangentiale Geschwindigkeit nutzbar mache. Es ist ferner zweckmäßig, die Wahl des Richtungswinkels β des Saugkanals und seine übrigen Kennzeichen, ferner des maximalen Ventilhubs h so zu treffen, daß sie bei einem gegebenen Wert von $\mu\sigma$ den besten Drallfaktor a/C ergeben.

d) Mit diesen Bedingungen kann das günstigste Ergebnis mit einer Saugleitung erzielt werden, bei welcher mit der Nenndrehzahl des Motors, bei einem $\Pi_2 < 0{,}30$, die Bedingung $Sh \approx 14$ erfüllt wird.

Wenn der Drallbedarf des Motors so groß ist, daß bei der Nenndrehzahl der Wert von Π_2 zwischen den Grenzen $0{,}30 < \pi_2 < 0{,}35$ gehalten werden kann, so wird das beste Ergebnis von einer Saugleitung erhalten, welche die Bedingung $Sh \approx 15$ erfüllt. Damit wird der Liefergrad zwar um etwas geringer werden, dies wird jedoch durch die gleichzeitige Verminderung der Saugarbeit weitgehend kompensiert.

Bei Dieselmotoren, wo bei der Nenndrehzahl lediglich $0{,}35 < \Pi_2 < 0{,}40$ gehalten werden kann, ist es zweckmäßig, die Saugleitung für $Sh \approx 17{,}5$ zu

projektieren. In diesem Fall wird zwar die Momentenelastizität des Motors bereits genügend ungünstig sein, aber mit der Nenndrehzahl wird man noch eine große spezifische Leistung erreichen können.

Im Fall von $\Pi_2 > 0{,}40$ kommt lediglich eine Saugleitung in Frage, bei der $Sh > 26$. Hier hängt der Füllungsfaktor nur wenig vom Wert Π_2 ab, daher kann ein sehr großer Drall gesichert werden.

Der zweckmäßige Wert des Kriteriums Π_3 bewegt sich zwischen den Grenzen $0{,}40 < \Pi_3 < 0{,}50$, in Abhängigkeit von den wirklichen Werten Sh und Π_2. Es empfiehlt sich, den Wert von Π_3 aus den größeren Strouhal-Zahlen und den relativ kleineren Π_2-Werten zu wählen.

e) Die Größe der tangentialen Geschwindigkeiten hängt von den Meßzahlen der Ähnlichkeitsbedingungen des Saugvorganges, ferner auch von den Ausdrücken a/C und $\mu\sigma$ ab. Daher kann die Funktion $w_k = f(n)$ im allgemeinen nicht durch irgendeine einfache Kurve gekennzeichnet werden. Die mittleren $\bar{w}_k$-Werte der tangentialen Geschwindigkeiten, welche als Funktion der Drehzahl aufgezeichnet sind, können jedoch angenähert werden durch einen parabolischen Wurzelausdruck folgender Form: $\bar{w}_k = k\sqrt{n}$. Als Erklärung dieser Erscheinung dient der Umstand, daß sich der Saugvorgang bzw. die Einströmungscharakteristik A mit Erhöhung der Drehzahl bzw. der Kriterien Π_2 und Π_3 relativ dehnen, was den Wert von w_k quadratisch vermindert.

f) Mit Hilfe der erhaltenen Forschungsergebnisse konnte an einem Versuchsmotor im *Budapester Institut für Fahrzeugentwicklung* — auch bei einem relativ niedrigen indizierten Wirkungsgrad η_i — ein höherer effektiver Mitteldruck als $p_e = 9$ kp/cm^2 erreicht werden, und dieser Umstand bestätigt ebenfalls die im Zusammenhang mit der Wirkung der Saugleitung gemachten Ausführungen.

SCHRIFTTUM

1. Seifert, H.: Instationäre Strömungsvorgänge in Rohrleitungen an Verbrennungskraftmaschinen. Springer-Verlag, Berlin 1962.
2. Benson, R. S.—Garg, R. D.—Woollatt, D.: A Numerical Solution of Unsteady Flow Problems. *Int. J. Mech. Sci.* (1964), VI.
3. *М. С. Ховах:* Расчет процесса впуска в четырехтактном дизеле. *Труди Нами* (1965), выпуск № 75.
4. List, H.: Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine. Springer-Verlag, Wien 1952.
5. *Иванов, В. Н.:* Некоторые результаты измерений скорости движения воздуха в камере сгорания дизеля. *Тракторы и сельхозмашины* (1964), I.
6. *Давыдов, Б. Н.:* Исследование воздушных потоков в камерах сгорания дизелей с непосредственным впрыском топлива. *Тракторы и сельсхозмашины* (1964), VII.
7. Brandstetter, W.: Ähnlichkeitsgesetze des Viertaktmorors. *MTZ* (1967), IX.
8. *Чер, Д.:* Влияние впускного тракта на рабочие показатели дизеля с непосредственным смесеобразованием. Диссертация, Москва 1967.
9. *Кирпичов, Н. В.:* Теория подобия. *АН СССР* 1963.
10. King, L. V.: On the Convention of Heat from Small Cylinders in a Stream of Fluid. *Phil. Trans.* **214** (1914), 373/432.
11. Cser, Gy.—Jánosdeák, E.: Über einigen Fragen der dynamischen Aufladung von Dieselmotoren. *Acta Techn. Hung.* (1967).

Analysis of the Suction Process in a Direct Injection Type 4-stroke Dieselengine. Taking into account the compressibility of air and its non-stationary flow conditions this paper deals with some regularities of the suction process as observed in a direct injection type 4-stroke Dieselengine. Author starts out from the assumption that the suction process, i.e. the flow conditions in the intake conduct exert a decisive influence on the filling-up factor of the motor-cylinder, on the tangential motion of the air taken-in, and consequently on the efficiency of the burning process, further on the suction work performed by the piston viz. on the loss involved. Of course, after having analyzed these details, author extends the investigation to the total effect in order to find some optimum combination of all the influencing factors. For the sake of a simplified generalization, author tries to treat experimental results as functions of some criteria which may serve to determine the similitude of various suction effects. It is the mathematical model as developed in the first chapter, the analysis of which proves suitable for finding the pre-conditions of similitude, and for the elaboration of measuring methods which even show some new features. In the second part of this paper the experimental results will be discussed.

Исследование процессов всасывания четырехтактного дизельного двигателя с непосредственным впрыскиванием *(Д.Чер)*. В работе рассматриваются отдельные закономерности процессов всасывания четырехтактных дизельных двигателей с непосредственным впрыскиванием, учитывая при этом нестационарный характер движения потока сжимаемого воздуха. Автор при определении круга задач исследования исходил из того определения, что процесс тока, происходящий во всасывающей трубе, оказывает значительное воздействие на коэффициент заполнения цилиндра двигателя, далее на движение по касательной заряда воздуха в объеме цилиндра, а вследствие этого на добротность процесса горения, а также на работу всасывания, выполняемую двигателем, а это, в свою очередь, воздействует на потери двигателя. Именно поэтому в данной работе сверх упомянутых выше факторов исследуются также возможности достижения их совместного оптимума. В интересах обобщимости, результаты исследования рассматриваются в функции критериев, определяющих схожесть процессов всасывания. Упомянутые выше условия схожести, а также примененные и являющиеся в отдельных деталях новыми — методы измерения были разработаны на основе анализа математической модели, показанной в первой части работы. Во второй части будут опубликованы результаты исследований.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 69 (3—4), pp. 325—339 (1970)

ANALYSIS OF THE TORSIONAL EQUATION OF BOX GIRDERS BEING IN THE STATE OF COMPLEX TORSION

B. GOSCHY*

CAND. OF TECHN. SC.

[Manuscript received February 17, 1970]

As can be seen from a survey of the technical literature, the torsional equation of beams in closed or box section, has been several times derived. The results, however, in spite of the identity as to their form, are different in meaning. The author evaluates the torsional equations based upon different assumptions, and compares them with the method of calculation proposed in the paper. From the results of the numerical analyses, it is obvious that the equations established on the basis of different assumptions, differ only in respect with the displacements, however, the internal forces are the same. The greatest inaccuracy is the consequence of ignoring shear deformations, therefore taking into account shear deformations in designing closed sections is of great significance.

1. Introduction

In this work we give a detailed analysis of box girders in combined torsion (pure torsion + warping), comparing the best known methods of calculation.

Although the equations of torsion for closed sections derived by several authors are similar in form, a certain contradiction can be observed in the interpretation of the angle of twist, the torsional- and warping-rigidity, respectively. The equation of the combined torsion is a nonhomogeneous differential equation of third order, with constant coefficients, which can be written in the most general form as

$$Af''' - Bf' + M_T = 0 \tag{1}$$

where

f is the angle of twist,
A is the warping rigidity,
B is the torsional rigidity,
M_T is the moment of twist.

Primes denote differentiation with respect to z in the length of the girder.

* Dr. GOSCHY BÉLA, Bástya u. 10; *Budapest V.* (HUNGARY).

By further differentiation of Eq. (1) and writing

$$M'_T = \frac{dM_T}{dz} = -m_T \tag{2}$$

we may obtain

$$Af^{IV} - Bf'' - m_T = 0 . \tag{1/a}$$

The aim of this paper is to give a correct interpretation of the phenomena related to the combined torsion and to show the physical meaning of the symbols A, B and f.

2. Assumption

1. The cross-section is stiffened with diaphragms or stiffening members so that distorsion cannot occur.

2. The flanges of the cross-section are co-acting on full width.

3. The deformations caused by the shear flow (t') are taken into account.

4. The deformations and stresses are calculated on the basis of the theory of elasticity.

5. The cross-sectional characteristics of the structure and its modulus of elasticity are constant throughout the whole length.

6. The angle of twist is positive if the rotation is facing clock-wise from the positive side towards the origin of the co-ordinate system.

3. Solution of the problem of a twisted box girder

For the sake of convenience we will hereby give the analysis of a box section in torsion which is symmetric with respect to the axis y. As shown in Fig. 1 the external anti-symmetric loads are acting over the webs.

The distribution of the load is given by the function

$$p = p(z) ,$$

hence the distributed torque is

$$m_T = p(z)a . \tag{3}$$

The sense of the moment is positive, the cross-section being twisted clock-wise.

The method applied in this study is the well-known force method [7], [8], [9]. The box section in a combined torsion is an internally hyperstatic structure which may be converted into two determined structures by the

introduction of one vertical cut. The resulting release system consists of two I shaped girders (Fig. 2). We will now add the self-equilibrating load-pairs to re-establish continuity at the cut, which are:

q_a and q_b = upper and lower vertical shear force,
t = normal force.

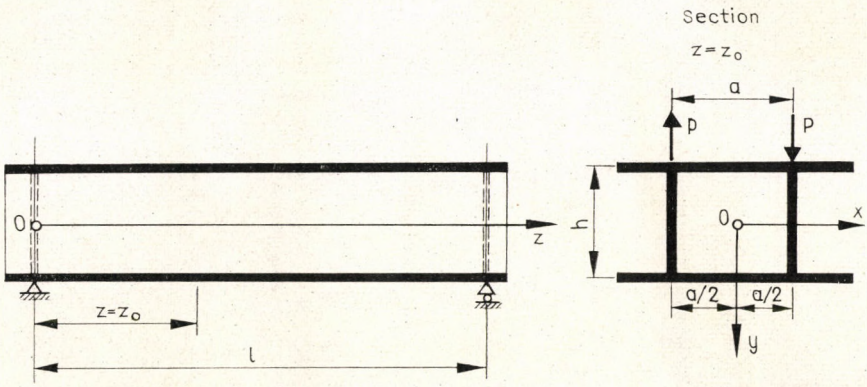


Fig. 1

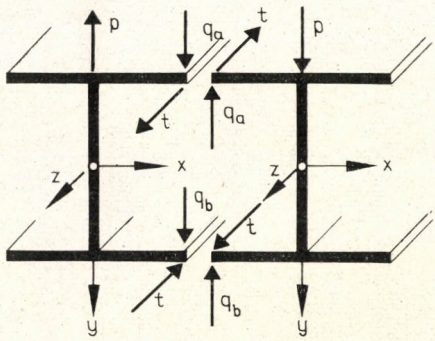


Fig. 2

The equations of torsion of an I profile subjected to the loads q_a, q_b, t can be derived from the horizontal displacement of the flanges. In order to examine the equation of torsion let us cut the I profile into two parts at the mid-height of the web (Fig. 3).

We introduce into the release system a pair of horizontal forces (q) and moments (m) to cancel discontinuity.

Under the action of external and internal forces the upper and lower half of the cross-section in I will suffer a torsion described by the angle of

twist as follows

$$\varphi_a'' = -\frac{q_a \frac{a}{2} - q\frac{h}{2} + m}{GI_{Ta}}, \qquad \varphi_b'' = -\frac{q_b \frac{a}{2} - q\frac{h}{2} - m}{GI_{Tb}}. \tag{4}$$

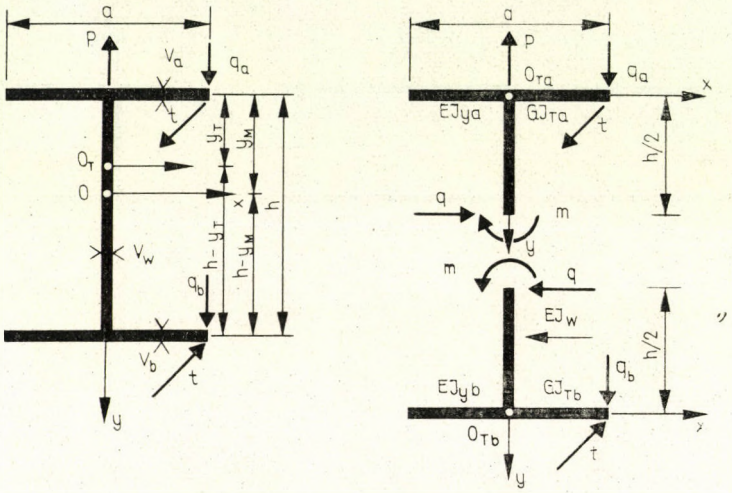


Fig. 3

Here I_{Ta} and I_{Tb} denote the torsional moment of inertia of the upper and lower T shaped half sections; G is the shear modulus.

The condition of continuity at the mid-height of the web is given by the equality of horizontal displacements and the equality of rotations formulated as

$$\xi_a^{IV} = \xi_b^{IV} \text{ and } \varphi_a'' = \varphi_b'' = \varphi'', \tag{5}$$

hence

$$-\frac{t'a}{2}\left(\frac{1}{EI_{ya}} + \frac{1}{EI_{yb}}\right) + q\left(\frac{1}{EI_{ya}} + \frac{1}{EI_{yb}}\right) - 2\varphi^{IV}\frac{h}{2} = 0 \tag{6}$$

and

$$-\left(\frac{q_a a}{2GI_{Ta}} - \frac{q_b a}{2GI_{Tb}}\right) + q\frac{h}{2}\left(\frac{1}{GI_{Ta}} - \frac{1}{GI_{Tb}}\right) - m\left(\frac{1}{GI_{Ta}} + \frac{1}{GI_{Tb}}\right) = 0, \tag{7}$$

where I_{ya} and I_{yb} are the moments of inertia of the upper and lower flanges; E is Young's modulus.

By multiplying Eq. (6) throughout by h we may then write

$$-t' ah+2qh-2\varphi^{IV} h^2 \frac{EI_{ya} I_{yb}}{I_y} = 0 \tag{6/a}$$

with $I_y = I_{ya} + I_{yb}$ which is the moment of inertia of the I profile with respect to the axis y.

From Eqs (5) and (7) we may derive the expression

$$(q_a + q_b)\, a - 2qh = -2G\, \varphi''(I_{Ta} + I_{Tb}) = -2GI_T\, \varphi''. \tag{8}$$

The equality of vertical displacements of the right- and left-hand I girders at their connection gives as result

$$\eta_a^{IV} \doteq -\frac{p-(q_a+q_b)-t' h}{EI_x} + \varphi^{IV} \frac{a}{2} = 0 \tag{9}$$

which may be transformed into

$$(q_a+q_b)\, a+t' ah+\varphi^{IV} \frac{a^2}{2} EI_x = pa. \tag{9/a}$$

Here I_x is the moment of inertia of the I profile with respect to x.

The third condition of continuity requires that longitudinal specific deformations (elongations in the direction z) at the flanges should be equal at both I profiles. This condition can be set-up as:

$$\varepsilon_a'' \doteq \frac{p-(q_a+q_b)-t' h}{EI_x}(-y_M) - \frac{q}{EI_{ya}}\left(+\frac{a}{2}\right) + \frac{t' a}{2EI_{ya}}\left(+\frac{a}{2}\right) + \\ + \frac{t'''}{Gv_w}(-y_T) - \frac{t'''}{Gv_a}\left(+\frac{a}{2}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\varepsilon_b'' \doteq \frac{p-(q_a+q_b)-t' h}{EI_x}(h-y_M) + \frac{q}{EI_{yb}}\left(+\frac{a}{2}\right) - \frac{t' a}{2EI_{yb}}\left(+\frac{a}{2}\right) + \\ + \frac{t'''}{Gv_w}(h-y_T) + \frac{t'''}{Gv_b}\left(+\frac{a}{2}\right) = 0. \tag{11}$$

where

y_T = the distance of the center of torsion from the midline of the upper flange,
y_M = the distance of the neutral axis from the mid-line of the upper flange.

By subtracting these two equations and using Eq. (5) we can obtain

$$\frac{t'''}{2G} \oint_{(s)} \frac{ds}{v} + \varphi^{IV} ah = 0, \tag{12}$$

where

$$\oint_{(s)} \frac{ds}{v} = \frac{a}{v_a} + \frac{a}{v_b} + \frac{2h}{v_w}$$

with

$$GI_{T0} = G \frac{4a^2 h^2}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}}$$

called the torsional rigidity of the box section, Eq. (12) yields

$$2\, t'''\, ah = -GI_{T0}\, \varphi^{IV} \tag{13}$$

or

$$2\, t'\ ah = -GI_{T0}\, \varphi^{II} \tag{13/a}$$

It should be noted that the addition of Eqs (10) and (11) gives

$$\frac{p-(q_a+q_b)-t'h}{EI_x}(h-y_M)+q\frac{a}{2}\left(\frac{1}{EI_{ya}}-\frac{1}{EI_{yb}}\right)+ \\ +\frac{t'a^2}{4}\left(\frac{1}{EI_{ya}}-\frac{1}{EI_{yb}}\right)+\frac{t'''}{G}\left(\frac{h}{v_w}-\frac{a}{2v_a}+\frac{a}{2v_b}\right)=\frac{2y_T}{v_w}\frac{t'''}{G} \tag{14}$$

from which the center of torsion can easily be determined.

We can make further simplifications by subtracting Eq. (6/a) from Eq. (9/a) and writing

$$2t'ah-2qh+(q_a+q_b)\,a+E\left(\frac{a^2}{2}I_x+2h^2\frac{I_{ya}I_{yb}}{I_y}\right)=pa. \tag{15}$$

With

$$-2\,qh = -2\,GI_T\,\varphi'' - (q_a+q_b)\,a \quad \text{from Eq. (5)}$$

and

$$2\,t'ah = -GI_{T0}\,\varphi'' \quad \text{from Eq. (13/a)}$$

Eq. (15) yields

$$E\left(\frac{a^2}{2}I_x+2h^2\frac{I_{ya}I_{yb}}{I_y}\right)\varphi^{IV}-G(I_{T0}+2I_T)\,\varphi''-pa=0, \tag{16}$$

where

$E\left(\frac{a^2}{2}I_x+2h^2\frac{I_{ya}I_{yb}}{I_y}\right) = A$ is the warping rigidity,

$G\,(I_{T0}+2\,I_T) \quad = B$ is the torsional rigidity.

When the cross-section is doubly symmetric, warping rigidity becomes

$$A = E\left(\frac{a^2}{2} I_x + \frac{b^2}{2} I_y\right) = E\bar{I}_\omega \,. \tag{17}$$

Thus Eq. (16) describes the combined torsion and warping phenomena in terms of the functional variable

$$\varphi(z) = f(z)$$

as given in general form by Eq. (1/a).

4. Comparative analysis of other theories

In the technical literature we can find a gread amount of works dealing with the torsional problem of box sections. Although the differential equations are generally similar in shape, the coefficients are different in form and meaning, due to different interpretations of the phenomena of warping. In this chapter we try to re-establish the most known theories of torsion giving a comparative analysis of them.

For the sake of convenience we will consider only doubly symmetric sections (Fig. 4.).

1. PONOMARIOV's *theory* [3] starts out from the assumption that the deformation in direction z — called warping — is given by

$$\bar{w} = f\bar{\omega} \,.$$

By differentiating with respect to the cross-sectional direction s, calculated from $ds^2 = dx^2 + dy^2$, we may write

$$\frac{d\bar{w}}{ds} = f\frac{d\bar{\omega}}{ds} \,,$$

where $\bar{\omega}$ is the unit warping (sectional area) reduced by the shear deformations.

The specific warping may be determined by

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds} = r - \frac{2\,ah}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}} \frac{1}{v_i} \,, \tag{18}$$

where r is the normal distance from the centre of torsion to the structural element.

We can now write the unit warping of the web in the form

$$d\bar{\omega} = \frac{a}{2}\, ds\left(1 - \frac{4h}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}} \frac{1}{v_w}\right) = d\omega\left(\frac{2a}{v_a} - \frac{2h}{v_w}\right) \frac{1}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}} = C d\omega. \quad (19)$$

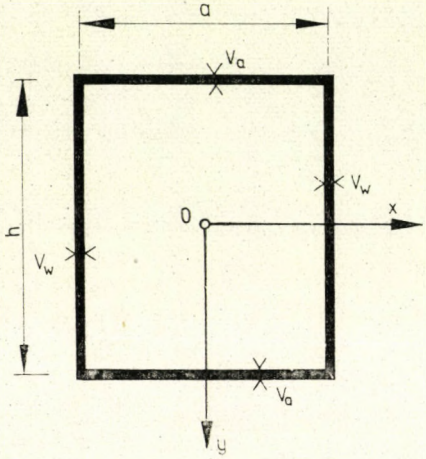


Fig. 4

By integrating Eq. (19) with respect to s it follows that

$$\bar{\omega} = C\omega\,, \quad (20)$$

where:

ω is the specific warping of open profiles disregarding shear deformations,

$C = \left(\frac{2a}{v_a} - \frac{2h}{v_\omega}\right) \frac{1}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}}$ is the reductional factor if shear deformations are considered.

The equations of torsion derived by Ponomariov in terms of the specific angle of twist ($\vartheta = \varphi'$) and angle of warping (f) are as follows

$$-EI_\omega f'' + G(I_P - I_{T0})\, f - G(I_P - I_{T0})\, \vartheta = 0 \quad (21)$$

and

$$-G(I_P - I_{T0})\, f + GI_P\, \vartheta = M_T \quad (22)$$

which may be written in a more condensed form

$$-EI_\omega \frac{1}{C^2} f'' + GI_{T0}\, f = M_T\,. \quad (23)$$

The characteristics of the cross-section are given by the formulae:
— the warping (sectorial) moment of inertia

$$I_{\bar{w}} = \int_{(F)} \bar{\omega}^2 \, dF = C^2 \int_{(F)} \omega^2 \, dF = C^2 \left(\frac{a^2}{2} I_x + \frac{h^2}{2} I_y \right) = \\ = \frac{(av_w - hv_a)^2 (hv_w + av_a)}{(av_w + hv_a)^2} \cdot \frac{a^2 h^2}{24} = C^2 \bar{I}_\omega ; \tag{24}$$

— the polar moment of inertia

$$I_P = \int_{(F)} r^2 \, dF = \frac{a^2}{2} F_x + \frac{h^2}{2} F_y = \frac{a^2}{2} hv_w + \frac{h^2}{2} av_a , \tag{25}$$

— the torsional moment of inertia

$$I_{T0} = \frac{4a^2 h^2}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}} ;$$

further

$$C^2 = 1 - \frac{I_{T0}}{I_P} = \frac{\left(\frac{2a}{v_a} - \frac{2h}{v_w} \right)^2}{\left(\oint_{(s)} \frac{ds}{v} \right)^2} = \left(\frac{av_w - hv_a}{av_w + hv_a} \right)^2 \tag{26}$$

Assuming that $m_T = \text{const.}$ and by setting

$$f = \left(\varphi' - \frac{M_T}{GI_P} \right) \frac{1}{C^2} ; \quad f' = \left(\varphi'' + \frac{m_T}{GI_P} \right) \frac{1}{C^2} ; \quad f'' = \frac{\varphi'''}{C^2}$$

from Eq. (22) into Eq. (21) we may deduce the following relation

$$E\bar{I}_\omega \varphi^{IV} - GI_{T0} \varphi'' - m_T = 0 \tag{27}$$

which is identical with Eq. (16) if $I_{ya} = I_{yb}$ and $GI_T = 0$.

2. The equations of twist deduced by URBAN [4] are

$$EI_{\bar{\omega}} \beta^{IV} - GI_{T0} \varphi'' - m_T = 0 \tag{28}$$

and

$$\varphi'' = - \frac{m_T}{GI_P} + C^2 \beta'' . \tag{29}$$

We may convert Eq. (28) into the general form by differentiating Eq. (29) twice with respect to z ($m_T = \text{const}$)

$$\varphi^{IV} = C^2 \beta^{IV}$$

and introducing this value into the Eq. (28), we may write

$$EI_{\bar{\omega}} \frac{1}{C^2} \varphi^{\text{IV}} - GI_{T0} \varphi'' - m_T = 0\,, \tag{30}$$

or

$$E\bar{I}_{\omega} \varphi^{\text{IV}} - GI_{T0} \varphi'' - m_T = 0\,. \tag{30/a}$$

3. The technical literature very often cites the work of WLASSOW [5] in which he describes combined torsion with

$$EJ_{\omega} \frac{f^{\text{IV}}}{C} - GJ_{T0} \frac{f^{\text{II}}}{C} + m_T = 0\,. \tag{31}$$

Hence, it follows automatically that

$$\frac{f''}{C} = -\varphi''\,; \qquad \frac{f^{\text{IV}}}{C} = -\varphi^{\text{IV}}\,.$$

4. OSTENFELD in his paper [1] defines the warping rigidity as

$$A_1 = -E\left(\frac{h^2}{2} I_y - \frac{a^2}{2} I_x\right)$$

deriving his formula from the theory of folded plates and neglecting shear deformations.

5. Some of the theories (STÜSSI [2], SCHLECHTE [6]) derive the equation of torsion from pure torsion (Saint Venant's torsion) correcting the results in a second step by the effect of warping. In this case the torque is divided into two parts

$$m_{T1} + m_{T2} = m_T\,, \tag{32}$$

where

$m_{T1} = -GI_{T0} \varphi''$ is the pure torsion,

$m_{T2} = EI^{*}_{\bar{\omega}} f^{\text{IV}}$ is the warping.

The relationship between the rotations is given by the formulae

$$f = \varphi + \varkappa \frac{EI_{\bar{\omega}}}{GI_{T0}} f'' \tag{33}$$

and

$$f'' = \varphi'' + \varkappa \frac{EI_{\bar{\omega}}}{GI_{T0}} f^{IV} . \tag{34}$$

By substituting for φ'' from Eq. (34) we may write

$$EI_{\bar{\omega}}(1 + \varkappa) f^{IV} - GI_{T0} f'' - m_T = 0 , \tag{35}$$

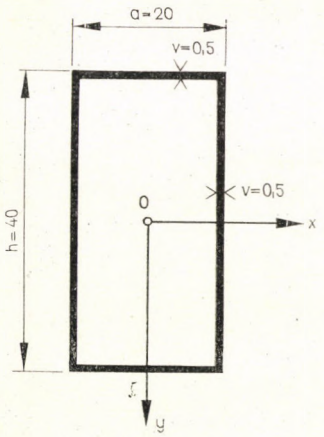


Fig. 5

for more briefly

$$EI_{\bar{\omega}}^{x} f^{IV} - GI_{T0} f'' - m_T = 0 . \tag{36}$$

The corrected value of the warping rigidity

$$EI_{\bar{\omega}}^{x} = E(1 + \varkappa) I_{\bar{\omega}} < EI_{\bar{\omega}} \tag{37}$$

is higher than the proposed one. The difference may be estimated at 15÷20 per cents.

In STÜSSI's paper [2] we can also find that the torsional rigidity is equal to

$$B = GI_P .$$

This formula is only valid for square, doubly symmetric sections with constant wall thickness ($a = h$ and $v_a = v_w$).

In this particular case the condition

$$I_{T0} = I_P$$

is satisfied.

5. Solution of the differential equation of torsion

The combined torsion of a box-girder subjected to a distributed torque is described in terms of the angle of twist ($f = \varphi$) by the differential-equation (1/a).

The general solution of the nonhomogeneous differential equations of forth order leads to

$$f(z) = C_1 \sinh \alpha z + C_2 \cosh \alpha z + C_3 z + C_4 + \bar{f}(z), \tag{38}$$

where

$\bar{f}$ is a particular solution of the complete equation (1/a).
C_1, C_2, C_3, C_4 are the constants of integration calculated from boundary conditions,
$\alpha^2 = B/A$ is the rigidity relation of the cross-section.

The particular solution for uniformally distributed torque is

$$\bar{f}(z) = \frac{m_T}{B} \frac{z^2}{z},$$

for concentrated moments of torsion (M_T) is

$$\bar{f}(z) = 0.$$

The boundary condition in different cases may be set up in the following way.

Case I: at both ends simply supported girder (Fig. 1)

$$f = f'' = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } z = l;$$

Case II: at both ends rigidly embedded girder

$$f = f' = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } z = l;$$

Case III: canteliver girder, rigidly embedded at the end $z = 0$

$$f = f' = 0 \text{ at } z = 0,$$
$$f'' = f''' = 0 \text{ at } z = l.$$

6. Numerical results

The comparison of the results derived from different theories may be estimated by carrying out a numerical example on a simply supported box girder in torsion.

For convenience sake let us consider that the torque is uniformally distributed all along the length of the beam, so that

$$m_T = \text{const.}$$

Thus, the solution of the differencial equation of the combined torque leads to:

$$f(z) = \frac{m_T}{B}\left[\frac{z(l-z)}{2} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\cosh\alpha\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\cosh\frac{\alpha l}{2}} - \frac{1}{\alpha^2}\right]. \tag{39}$$

By differentiating twice Eq. (52) we obtain

$$f'(z) = \frac{m_T}{B}\left[\left(\frac{l}{2}-z\right) - \frac{1}{\alpha}\frac{\sinh\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\cosh\frac{\alpha l}{2}}\right], \tag{40}$$

$$f''(z) = \frac{m_T}{B}\left[\frac{\cosh\alpha\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\cosh\frac{\alpha l}{2}} - 1\right]. \tag{41}$$

Taking the mid-span ($z = l/2$) we may write

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{m_T}{B}\left[\frac{l^2}{8} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\cosh\,\alpha l/2} - 1\right)\right] \tag{39/a}$$

$$f'\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \tag{40/a}$$

$$f''\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{m_T}{B}\left[\frac{1}{\cosh\,\alpha l/2} - 1\right]. \tag{41/a}$$

The dimensions of the box section being investigated are (Fig. 5):

$$v_a = v_w = 0{,}5 \text{ cm}; \; a = 20 \text{ cm}; \; h = 40 \text{ cm}$$

Hence the cross-sectional characteristics:

— cross-sectional area

$$F_x = 0{,}5 \cdot 40 = 20 \text{ cm}^2; \; F_y = 0{,}5 \cdot 20 = 10 \text{ cm}^2;$$

— flexural moments of inertia

$$I_x = 0{,}5 \cdot 40^3/12 = 2666 \text{ cm}^4; \; I_y = 0{,}5 \cdot 20^3/12 = 333 \text{ cm}^4;$$

— warping moments of inertia

$$J_{\bar{\omega}} = \frac{a^2}{2} Ix + \frac{h^2}{2} Iy = \frac{20^2}{2} 2666 + \frac{40^2}{2} 333 =$$

$$= 533333 + 266667 = 800000 \text{ cm}^6,$$

$$I_{\bar{\omega}} = C^2 I_{\bar{\omega}} = 88888{,}9 \text{ cm}^6,$$

$$I^*_{\bar{\omega}} = (1+\varkappa) I_{\bar{\omega}} = (1+10{,}4)\, 88888{,}9 = 1013333{,}4 \text{ cm}^6;$$

— torsional moments of inertia

$$I_{T0} = \frac{4a^2 h^2}{\oint_{(s)} \frac{ds}{v}} = 10666{,}1 \text{ cm}^4,$$

$$I_T = \frac{2}{3} (v_a^3 a + v_w^3 h) = \frac{2}{3} (0{,}5^3 \cdot 20 + 0{,}5^3 \cdot 40) = 5 \text{ cm}^4,$$

$$I_P = \frac{a^2}{2} Fx + \frac{h^2}{2} Fy = \frac{20^2}{2}, 20 + \frac{40^2}{2} \cdot 10 = 12\,000 \text{ cm}^4;$$

— dimensionless factor

$$C^2 = 1 - \frac{I_{T0}}{I_P} = 1 - \frac{10666{,}7}{12000} = 0{,}1112.$$

The elasticity characteristics of the material are given by:

$$E = 2100 \text{ Mp/cm}^2; \quad G = 810 \text{ Mp/cm}^2.$$

The span of the girder: $l = 5{,}0$ m.
The value of

$$\frac{1}{\cosh(\alpha l/2)} \to 0$$

from Eqs (39/a), (40/a), (41/a), thus,

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{m_T}{B}.$$

Table I. shows the numerical values of the torsional and warping rigidities deduced from different theories and their influence on the magnitude of the angle of twist (f).

Table I

No.	Theory	Transformed rigidity			$\alpha^2 = B/A$	α	$f\ (l/2)$
		Torsion B	Warping A	Eq.			
		Mpcm^2	Mpcm^4		cm^{-2}	cm^{-1}	—
1.	Author	8644 077	1680,10^6	(16)	0,00512	0,0715	$31055\, m_T/B$
2.	Ponomariov Urban Wlassow	8639 928	1680,10^6	(27) (30/a) (31)	0,00513	0,0715	$31056\, m_T/B$
3.	Ostenfeld	—	5600,10^5	(41)	—	—	—
4.	Schlechte	8639 928	2128,10^6	(50)	0,00406	0,0637	$31005\, m_T/B$

7. Conclusions

From the above comparative results it can be concluded that all the theories of combined torsion may be converted by some sort of transformation to a general form.

Although there are some unimportant differences in the value of the angle of twist and displacements, respectively, the calculated normal stress is equal for all the methods. A very striking difference is only due to the neglection of the shear deformations which is consequently incorrect in case of box or hollow sections.

REFERENCES

1. Ostenfeld, A.: Verdrehung eingespannter Stäbe, Verschiedene Arbeiten, 1931. Laboratorium für Baustatik der Technischen Hochschule, Kopenhagen, Mitteilungen No. 6.
2. Stüssi, F.: Der dünnwandige schlanke Stahlstab mit Kastenquerschnitt. *Mémoires IV. BH.* Volume XI., Zürich 1951.
3. Ponomariov, S. D.: Strength of Materials (in Hungarian) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964.
4. Urban, I. V.: Theory of Structures in Thin Wall. (in Russian), Moskow 1955.
5. Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
6. Schlechte, E.: Festigkeitslehre für Bauingenieure. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1967.
7. Goschy, B.: Der Kastenträger ohne Querschotte, Berechnung auf Torsion. *Die Bautechnik* (1966), No. 5.
8. Goschy, B.: Torsion des poutres-caissons. *Acier—Stahl—Steel* (1967), No. 2.
9. Goschy, B.: The Torsion of Skew-Cable Suspension Bridges. Space Structures, Scientific Publications, Oxford 1967.

Analyse der Torsionsgleichung von Kastenträgern bei komplexer Drillung. Nach einem Überblick der Fachliteratur kann festgestellt werden, daß die Torsionsgleichung der geschlossenen Träger oder Kastenträger schon von mehreren Forschern abgeleitet wurde. Die Ergebnisse sind jedoch trotz ihrer formalen Identität, inhaltlich verschieden. In der Abhandlung werden die auf verschiedene Annahmen gegründeten Torsionsgleichungen ausgewertet, und dem vom Verfasser vorgeschlagenen Berechnungsverfahren gegenübergestellt. Aus den numerischen Untersuchungen geht hervor, daß die aufgrund von verschiedenen Erwägungen aufgestellten Torsionsgleichungen voneinander nur in Hinschicht der Bewegungen abweichen, die inneren Kräfte aber identisch sind. Die größte Ungenauigkeit rührt von der Vernachlässigung der Schubverformungen her, deshalb kann die Berücksichtigung der Schubverformungen bei geschlossenen Profilen als eine der wichtigsten Anforderungen betrachtet werden.

Анализ уравнений кручения коробчатых балок в состоянии сложного кручения *(Б. Гоши)*. На основе изучения технической литературы установлено, что уравнение кручения закрытых или коробчатых балок выведено многими авторами. Результаты несмотря на идентичность их по форме являются различными по своей трактовке. В работе дается оценка уравнений кручения, основывающихся на различных предположениях, и сравнение с методом, предлагаемым автором. Из результатов числового анализа вытекает, что уравнения кручения, выведенные на основе различных соображений, отклоняются друг от друга только в отношении смещений, а внутренние усилия же являются идентичными. Наибольшая степень неточности вытекает от пренебрежения деформациями среза, вследствие этого в случае закрытых профилей учет деформаций среза необходимо считать в качестве первостепенной задачи.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 341—349 (1970)

EXPERIMENTELLE VORBEDINGUNGEN DER WICHTEMESSUNG AN FESTEN KÖRPERN

SZ. PETHŐ*

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 3. März 1969]

Auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, in diesem Falle auf den bekannten Zusammenhang einer pyknometrischen Messung angewendet, wird hier eine mit den praktischen Ergebnissen übereinstimmende Formel des Meßfehlers der Wichtemessung abgeleitet. In Kenntnis der konkreten Meßresultate erlaubt uns diese Formel, zur Durchführung der Wichtemessung einige praktische Folgerungen zu ziehen. Wenn der Fehler der Messung im voraus bekannt oder festgesetzt ist, so haben wir einen sicheren Hinweis auf die Wahl der Meßmethode, die im gegebenen Fall anzuwenden ist.

Bekannt is das folgende Verfahren einer pyknometrischen Wichtemessung von festen Proben: wir stellen fest: das Gewicht des leeren Pyknometers ($G_1 = P$), das Gesamtgewicht des Pyknometers und des festen Probekörpers ($G_2 = P + S$), das Gesamtgewicht des aufgefüllten Pyknometers und des festen Körpers ($G_3 = P + S + M_2$), endlich das Gesamtgewicht des aufgefüllten Pyknometers ($G_4 = P + M_1$). Aus diesen Werten und in Kenntnis der Wichte der Meßflüssigkeit (γ) erhalten wir die Wichte des festen Körpers:

$$\delta = \frac{G_2 - G_1}{(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)}\,\gamma = \frac{S}{M_1 - M_2}\,\gamma = \frac{S}{V}, \tag{1}$$

wo wir mit V das Volumen des in das Pyknometer gelegten festen Probekörpers bezeichnen.

Zufällige Fehler einer Wichtemessung entstehen beim Abwägen und bei dem Auffüllen des Pyknometers mit der Meßflüssigkeit. Insbesondere geht die genaue Auffüllung mit einer stark verdampfenden Flüssigkeit schwer vor sich, und so ist auch die Bestimmung der Gewichtswerte G_3 und G_4 ziemlich unsicher. Ein zufälliger Fehler mag noch durch Änderung des Mikroklimas während der Messung entstehen, und es besteht noch eine Abhängigkeit von der Genauigkeit der Waage und auch von der Routine der messenden Person. Ein systematischer Fehler entsteht meistens bei der Bestimmung des Gewichtswertes G_3. Wenn Luftbläschen an den im Pyknometer eingelegten festen Probekörper haften bleiben, so ergibt sich ein unrichtiges Volumen V', und die errechnete Wichte wird kleiner als der wahre Wert. Umgekehrt, falls Teile

*Technische Universität für Schwerindustrie; *Miskolc* (UNGARN).

eines innerlich porösen Körpers in der Meßflüssigkeit dispergiert werden, so verursacht das unrichtige Volumen eine größere Wichte als der genaue Wert.

Die Größe des zufälligen Fehlers der Wichtemessung läßt sich aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen. Auf die Funktion (1) angewendet, lautet dieser Satz wie folgt:

$$\mu_\delta^2 = \left(\frac{\partial\delta}{\partial G_1}\right)^2 \mu_{G_1}^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial G_2}\right)^2 \mu_{G_2}^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial G_3}\right)^2 \mu_{G_3}^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial G_4}\right)^2 \mu_{G_4}^2 . \tag{2}$$

Nun lassen sich die in Formel (2) angeführten Differentialquotienten folgenderweise anschreiben:

$$\frac{\gamma\delta}{\partial G_1} = \frac{G_3 - G_4}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^2}\,\gamma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial G_2} = -\frac{G_3 - G_4}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^2}\,\gamma, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial G_3} = \frac{G_2 - G_1}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^2}\,\gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial G_4} = -\frac{G_2 - G_1}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^2}\,\gamma . \tag{6}$$

Allgemein sind die Fehler beim Abwägen von G_1 und G_2 dieselben, d. h.

$$\mu_{G_1} = \mu_{G_2} = \mu_{s_1} ,$$

und wir können für die zufälligen Fehler beim Abwägen von G_3 und G_4 dieselbe Übereinstimmung annehmen:

$$\mu_{G_3} = \mu_{G_4} = \mu_{s_2} ;$$

folglich kann man durch Einsetzen der Ausdrücke (3), (4), (5) und (6) in die Formel (2) folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\mu_\delta^2 &= 2\,\frac{(G_3 - G_4)^2}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^4}\,\gamma^2 \mu_{s_1}^2 + \\
&= 2\,\frac{(G_2 - G_1)^2}{[(G_4 - G_1) - (G_3 - G_2)]^4}\,\gamma^2 \mu_{s_2}^2 = \\
&= \frac{2\gamma^2}{V^4}\,[(M_2 - M_1 + S)^2 \mu_{s_1}^2 + S^2 \mu_{s_2}^2] = \\
&= \frac{2\gamma^2}{V^4}\,[V\delta - V)^2 \mu_{s_1}^2 + (V\delta)^2 \mu_{s_2}^2] = \\
&= 2\left(\frac{\gamma}{V}\right)^2 [(\delta - 1)^2 \mu_{s_1}^2 + \delta^2 \mu_{s_2}^2]
\end{aligned} \tag{7}$$

und

$$\mu_\delta = \pm \sqrt{2}\,\frac{\gamma}{V}\,[(\delta-1)^2\,\mu_{s_1}^2+\delta^2\,\mu_{s_2}^2]^{1/2}\,. \tag{8}$$

Die abgeleitete Gleichung ist stichhaltig, falls wir den Wert der Wichte der Meßflüssigkeit kennen, und die Meßfehler beim Abwägen von G_1 und G_2, weiter von G_3 und G_4 identisch sind. Ferner geht aus Gleichung (8) der folgende Zusammenhang hervor: Abgesehen von den Fehlerwerten μ_{s_1} und μ_{s_2}, ist die Genauigkeit der Wichtebestimmung um so größer, je kleiner die Dichte der Meßflüssigkeit, je größer die Masse des Probekörpers, bzw. je kleiner die Wichte desselben ist.

Wenn wir die Gleichung (8) durch die Wichte dividieren, erhalten wir den relativen Fehler r:

$$r = \pm \sqrt{2}\,\frac{\gamma}{V}\left[\left(1-\frac{1}{\delta}\right)^2\mu_{s_1}^2+\mu_{s_2}^2\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) ist die Abhängigkeit der absoluten und der relativen Fehlerwerte von der Wichte (γ) der Meßflüssigkeit und dem Volumen V des im Pyknometer gelegten Körpers klar ersichtlich. Um die Abhängigkeit des Fehlers von der Wichte des zu messenden Körpers deutlicher zu machen, wollen wir die Fehlerwerte μ_{s_1} und μ_{s_2} als miteinander gleich annehmen, und zugleich die Extremwerte der Funktionen (8) und (9) errechnen.

Bemerkung: Die Fehlerwerte μ_{s1} und μ_{s2} sind einander nur gleich, falls wir Waagen minderer Empfindlichkeit benützen.

Nach Entwicklung der Extremformeln finden wir, daß das Minimum des absoluten Fehlers bei $\delta = 1/2$, und jenes des relativen Fehlers bei $\delta = 1$ zu finden ist. Zur näheren Information wurden auf Bild 1 die folgenden Kurven konstruiert:

$$\mu' = [(\delta-1)^2+\delta^2]^{1/2} \tag{10}$$

und

$$r_\delta' = \left[\left(1-\frac{1}{\delta}\right)^2+1\right]^{1/2} \tag{11}$$

und zwar für den Wichtebereich des zu prüfenden Stoffes

$$\delta = 0 \text{ und } \delta = 15.$$

Das vereinigte Diagramm zeigt uns, daß der mögliche Fehler bei einem Material größerer Wichte (z. B. Ferrosilizium) größer ist als bei solchen minderer Wichte (z. B. Quarz). Bei einer Wichte von 5 und aufwärts kann das Ansteigen des absoluten Fehlers als linear (mit der Wichte) angenommen

werden: für Wichtewerte über 5 läßt sich nämlich die Formel (10) wie folgt vereinfachen:

$$\mu'_\delta \approx \sqrt{2}\,\delta - 1 \tag{12}$$

und an Stelle der Formel (11) schreibt man:

$$r'_s \approx \sqrt{2} - \frac{1}{\delta}\,. \tag{13}$$

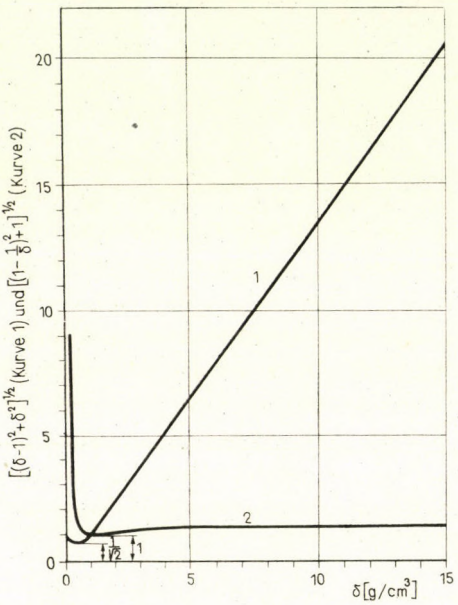


Bild 1

Auf Tafel I finden wir gewisse Angaben über die Gestaltung der Meßfehler beim Abwägen. Die Messungen wurden teils durch einen ungeübten, teils durch einen geübten Laboranten mit einem Pyknometer aus Glas zu 50 cm³ durchgeführt. Als Füllflüssigkeit wurde abwechselnd Wasser bzw. denaturierter Alkohol angewendet: zwischen den Messungen einmal mit Wasser und dann mit Alkohol wurde das Pyknometer in einer Trockenkammer aufbewahrt. Als Abwägeinstrument diente teils eine analytische, teils eine Schnellwaage (mit einer Empfindlichkeit von 0,01 g). Jede Messung wurde 30mal wiederholt; hierbei hatte man die Fehlerwerte μ_{s_1} und μ_{s_2} mit Hilfe der bekannten Formel für die korrigierte empirische Streuung aus den Meßresultaten berechnet. Mit auf Zimmertemperatur gehaltenen Meßflüssigkeiten dauerten die Meßversuche 3 Tage.

Es wurde aber festgestellt, daß die Empfindlichkeit der Waage nicht den Abwägefehlern entsprach, nicht einmal für das Abwägen des leeren

Tafel I

Gewichtsmeßfehler beim Abwägen des leeren Pyknometers (μ_{S_1}), des mit Wasser gefüllten Pyknometers ($\mu_{S_{2v}}$) und des mit Alkohol gefüllten Pyknometers ($\mu_{S_{2a}}$)

Die die Messungen durchführende Person	Die benützte Waage	Gewichtsmeßfehler		
		am leeren Pyknometer, μ_{S_1} [g]	am mit Wasser gefüllten Pyknometer, $\mu_{S_{2v}}$	am mit Alkohol gefüllten Pyknometer, $\mu_{S_{1a}}$
1	2	3	4	5
a) Wenig geübter	Analytische Waage	0,000275	0,00678	0,0115
Laborant	Schnellwaage	0,00838	0,00677	0,0117
b) Ziemlich gut geübter	Analytische Waage	0,000145	0,00197	0,00947
Laborant	Schnellwaage	0,00133	0,00552	0,0129

Pyknometers; vielmehr enthielten die Gewichtsmeßfehler auch den Einfluß der Änderung des Mikroklimas und der Geübtheit oder Ungeübtheit des messenden Laboranten. Bei Anwendung von Alkohol als rasch verdampfender Füllflüssigkeit war der konstatierte Meßfehler (d. h. der Wert $\mu_{S_{2a}}$ laut Tafel) um eine Größenordnung größer als bei Anwendung von Wasser (s. den Tafelwert $\mu_{S_{2v}}$). Folglich soll Alkohol nur angewendet werden, falls das zu messende Material sich schwer netzen läßt, wobei die Anwendung einer analytischen Waage überflüssig ist. (Ein genaueres Meßergebnis kann erwartet werden, falls man an Stelle von Alkohol eine wässerige Lösung eines intensiver netzenden Reagens verwendet.)

Der *weniger geübte Laborant* beging beim Abwägen des gefüllten Pyknometers denselben Fehler, unabhängig von der Empfindlichkeit der Waage. Der *geübte Laborant* konnte die bessere Empfindlichkeit einer analytischen Waage nur mit Wasserfüllung ausnützen; beim Füllen mit Alkohol war auch er nicht im Stande, die Meßgenauigkeit zu erhöhen (Fehlerwerte 0,00197 und 0,00522). Wie man aus den Angaben der Tafel entnehmen kann, ergab die Anwendung einer analytischen Waage einen μ_{S_2}-Wert, der im Vergleich mit $\mu_{S_{2v}}$ und sogar mit $\mu_{S_{2a}}$ bedeutend niedriger ist; numerisch gesprochen läßt sich konstatieren, daß gemäß der Formel (8) der Wert $(\delta - 1)^2 \mu_{S_1}^2$ nur ein Hunderstel bzw. ein Tausendstel des Wertes $\delta^2 \mu_{S_2}^2$ beträgt. Wenn wir also aus dieser Formel das Glied $(\delta - 1)^2 \mu_{S_1}^2$ fortlassen, so erhalten wir:

$$\mu_\delta \approx \pm \sqrt{2}\, \frac{\gamma}{V}\, \delta \mu_{S_2} = \pm \sqrt{2}\, \frac{\gamma}{S}\, \delta^2 \mu_{S_2}. \tag{14}$$

Ferner ist der Wert des relativen Fehlers annähernd:

$$r_\delta \approx \pm \sqrt{2}\, \frac{\gamma}{V}\, \mu_{S_2} = \pm \sqrt{2}\, \frac{\gamma}{S}\, \delta \mu_{S_2}. \tag{15}$$

Nun haben wir zum Zwecke, den oben abgeleiteten, teils von den Parametern des zu messenden festen Körpers (Volumen und Wichte), teils von der Abwägegenauigkeit auf die Meßergebnisse ausgeübten Einfluß strenger nachzuweisen, folgende Experimente durchgeführt: es wurden insgesamt 90 Messungen vorgenommen, nämlich je 15 Messungen von Ferrosilizium (Wichte 5,888) und von Kalksteinstaub (Wichte 2,685) uzw. an je drei Probestücken zu 0,1; 1 und 10 g Stückgewicht ($2 \cdot 3 \cdot 15 = 90$). Die Meßergebnisse mit den Ferrosilizium-Proben sind in Tafel II, jene mit dem Kalksteinstaub in Tafel III zusammengefaßt. Beide Stoffe bestanden aus homogenen Körnern kleiner als 0,1 mm, also kann man von Fehlern der Probenahme gar nicht sprechen.

In der dritten Kolonne beider Tafeln finden wir die korrigierten empirischen Streuungen, berechnet aus den Meßangaben. Hierzu diente die Formel:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\right]^{1/2},$$

Tafel II

Ergebnisse der Wichtemessung an Ferrosilizium

Durchschnittsgewicht des Probestückes [g]	Durchschnittswert der Wichte [g/cm³]	Streuung der Wichte aus den Meßwerten [g/cm³]	Streuung der Wichte, berechnet aus Gl. (8) [g/cm³]	Der Wert μs_{2v} aus den Meßwerten [g]	Der Wert μs_{2v} aus Gl. (16) berechnet [g]
1	2	3	4	5	6
0,1	4,699	1,299	3,431	0,0053	000,42
1,0	5,688	0,525	0,343	0,0060	0,0115
10,0	5,921	0,043	0,034	0,0078	0,0087
—	5,888	—	—	—	—

Tafel III

Ergebnisse der Wichtemessung an Kalksteinstaub

Durchschnittsgewicht des Probestückes [g]	Durchschnittswert der Wichte [g/cm³]	Streuung der Wichte aus den Meßwerten [g/cm³]	Streuung der Wichte, berechnet aus Gl. (8) [g/cm³]	Der Wert μs_{2v} aus den Meßwerten [g]	Der Wert μs_{2v} aus Gl. (16) berechnet [g]
1	2	3	4	5	6
0,1	2,512	0,203	0,204	0,0025	0,0023
1,0	2,748	0,046	0,020	0,0041	0,0043
10,0	2,680	0,003	0,002	0,0017	0,0030
—	2,685	—	—	—	—

wobei $n = 15$ ist. Es ist ratsam, diese Streuungswerte mit den Fehlerwerten in Kolonne 4 zu vergleichen, die nämlich aus der Formel (8) berechnet wurden. Die Messungen an Ferrosilizium wurden von dem weniger geübten Laboranten durchgeführt; mit Rücksicht darauf, daß bei diesen Versuchen Wasser als Meßflüssigkeit verwendet worden war, haben wir angenommen, daß die gemäß Tafel I erhaltenen Werte $\mu_{S_1} = 0{,}0003$ und $\mu_{S_2} = 0{,}007$ den in Formel (8) vorkommenden Gewichtsmeßfehlern entsprechen. Die Wichtemessungen des Kalksteinstaubes wurden von dem geübteren Laboranten durchgeführt, also wurden die Werte in der Kolonne 4 der Tafel III mit den Fehlerwerten $\mu_{S_1} = 0{,}0002$ und $\mu_{S_{2v}} = 0{,}002$ berechnet. Beide Laboranten arbeiteten mit einem und demselben Pyknometer, und es wurden jeweils alle vier (G_1, G_2, G_3 und G_4) Gewichtswerte bestimmt. Nun haben wir die Werte $\mu_{S_2 v}$, d. h. die Gewichtsmeßfehler von G_4 (d. h. $P + M_1$, Masse des wassergefüllten Pyknometers) laut der Formel der korrigierten empirischen Streuung nochmals berechnet und diese in Kolonne 5 der Tafeln mitgeteilt. Es ist ratsam, die Werte der Kolonnen 5 und 6 miteinander zu vergleichen. Die Zahlenwerte der Kolonne 6 entsprechen nämlich der Formel (14) im Sinne der folgenden Gleichung:

$$\mu_{S_2} = \pm \frac{V}{\sqrt{2\gamma\delta}} \mu_\delta = \pm \frac{S}{\sqrt{2\gamma\delta^2}} \mu_\delta . \tag{16}$$

Die in Gleichung angeführten konkreten Werte sind: $\gamma = 1$ und die Werte S, δ und $\pm\mu_\delta$ lassen sich aus den entsprechenden Tafelzeilen entnehmen. Eine bemerkenswerte Eigenheit der berechneten Gewichtsmeßfehler ist der Umstand, daß diesen Fehlerwerten auch die bei der Abwägung des Gewichtes G_3 verübten Fehler anhaften. ($G_3 = P + S + M_2$, d. h. Pyknometer + Stoff + Flüssigkeit.)

Wenn man die Wichtemessungsangaben der Tafeln II und III näher studiert, so kann man feststellen, daß diese Werte mit den Ergebnissen der abgeleiteten Relationen, also mit den in Tafel I angeführten beobachteten Angaben gut übereinstimmen. Die Kolonnenwerte 3 und 4 sind von derselben Größenordnung; indessen läßt sich die abweichende Größenordnung der Streuungswerte in Tafeln II und III [übrigens der Formel (8) entsprechend] mit der Verschiedenheit der Wichte und den abweichenden Gewichtsmeßfehler erklären. Die Gewichtsmeßfehler in Kolonne 5 entsprechen betreffs der Größenordnung einigermaßen den bezüglichen Angaben der Tafel I sowie den Werten der Kolonne 6. Der letztere Umstand läßt die Folgerung zu, daß die zufälligen Fehler bei der Bestimmung des Gewichtes G_3 annähernd denen gleich sind, die bei der Bestimmung des Wertes G_4 begangen worden sind.

Die Angaben der Tafel IV geben uns eine Übersicht über Fehler der pyknometrischen Meßmethode für den Fall, daß alle Versuche von einer wohl geübten Person durchgeführt worden sind. Formel (8) diente zur Berech-

nung der Fehler von Messungen mittels der analytischen und Formel (14) zur Fehlerberechnung der Meßversuche mittels einer Schnellwaage. Die entsprechenden Gewichtsmeßfehler stammen aus Tafel I, und der Wert von δ wurde als 7,5 angenommen. Die Wichtemessungsfehler in der ersten Tabellenzeile entsprechen einem Volumen $V = 1$ cm³. In den folgenden Tabellenzeilen befinden sich die Angaben aus Versuchen mit Pyknometern von einem Gesamtrauminhalt zu je 25, 50, 100 und 1000 cm³, wobei man voraussetzt, daß das Volumen des festen Materials in losem Zustand ein Drittel, also effektiv ein

Tafel IV

Einige weitere Angaben betreffs der Fehler bei Wichtemessungen

Rauminhalt des Pyknometers [cm³]	Nützlicher Rauminhalt des Pyknometers [cm³]	Fehler der Wichtemessungen, $\pm \mu$		
		an der Schnellwaage bei einer Skalenablesung von 0,01 g	an der analytischen Waage	
			mit Wasser [g/cm³]	mit Alkohol [g/cm³]
1	2	3	4	5
—	1,0	0,08	0,02	0,08
25	6,0	0,013	0,0033	0,013
50	12,0	0,0065	0,0017	0,0065
100	25,0	0,0032	0,0008	0,0032
1000	250,0	0,0003	—	—

Viertel des Pyknometerrauminhaltes ausmacht. Wenn wir eine rasch verdampfende Flüssigkeit verwenden und eine analytische Waage benützen, so ist die Meßgenauigkeit nicht größer als wenn man mit Wasser als Füllflüssigkeit eine Schnellwaage von einer Ablesegenauigkeit zu 0,001 g benützt. Wenn die Stoffprobe zu klein ist, so ist es sehr wahrscheinlich, daß wir grobe Fehler verüben. Folglich sollte man die Benützung eines kleinen Pyknometers (zu 25 cm³) möglichst vermeiden. Wenn wir die Meßwerte zwischen den Grenzen von $\delta + 2\mu_\delta$ und $\delta - 2\mu_\delta$ als Werte annahmen, die mit zufälligen Fehlern belastet sind, so sollten wir bei zwei parallelen Messungen Werte, die voneinander stärker abweichen als das Vierfache der Streuung (die Werte in Tafel IV), nicht als meritorisch erachten.

Alles zusammenfassend, was wir aus den abgeleiteten Relationen und den Versuchsergebnissen folgern dürfen, sind wir berechtigt, für die praktische Ausführung von pyknometrischen Wichtemessungen folgende Weisungen als nützlich zu erachten:

a) Wenn nur eine kleine Menge, also weniger als 1—2 g von dem zu prüfenden Material vorhanden ist, gleichfalls wenn die verwendete Meßflüssigkeit allzuleicht verdampft, kann man nur ziemlich ungenaue Meßergebnisse erzielen.

Ferner ist es nicht ratsam, ein Pyknometer von minderem Rauminhalt, z. B. von 25 cm^3 zu benützen. Läßt sich das Prüfmaterial nur schwer benetzen, so ist es angezeigt, an Stelle von reinem Alkohol eine Lösung von wenigen Gramm Alkohol pro Liter als Meßflüssigkeit zu verwenden.

b) Für eine Reihe von Messungen soll in jedem einzelnen Fall die Bestimmung der Gewichte G_1 und G_4 stattfinden, uzw. unter Inrechnungstellung des arithmetischen Mittelwertes der wiederholten Einzelmessungen bei Benützung eines und desselben Pyknometers, um einen möglichst kleinen Gesamtfehler zu sichern.

c) Wenn man die Wichtemessung am selben Material mehrmals vornimmt, so ergibt sich der höchstwahrscheinliche Wert als ein nach dem Quadrat der eingesetzten Stoffprobenmassen gewogener Durchschnittswert. Die entsprechenden »Gewichte« sind nämlich umgekehrt proportional den Quadraten der laut Gl. (8) berechenbaren Fehler, d. h. sie sind direkt proportional dem Quadrat der entsprechenden Volumina bzw. der Massen.

Experimental Conditions for Measuring the Specific Weight of Solid Probes. On the basis of the law of error propagation applied on the known relationship that prevails for pycnometric measurements, a further formula for error determination is derived that proved practically useful since it is conform to results obtained by tests. This new formula combined with actual measuring results helps us to infer some further important consequences. Namely, when a measuring error is predetermined, we have a strict directive rule at hand how to choose the adequate measuring method to be applied.

О точности определения удельного веса *(С. Пете)*. Применяя закон распространения ошибки для известной зависимости, используемой при пикнометрическом методе измерения удельного веса, выведена зависимость, хорошо применимая для погрешности измерения удельного веса и дающая идентичные с практическими результатами значения. Располагая этой зависимостью и результатами опытов, выполненных соответствующим образом, сделаны важные выводы, касающиеся выполнения измерения удельного веса. Если известна погрешность измерения удельного веса или же она фиксируется заранее, тогда в отношении выбора необходимого метода измерения можно также найти соответствующее указание.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 351—365 (1970)

EINIGE PROBLEME DER BEREIFUNG VON ACKERSCHLEPPERN, INSBESONDERE AUF LEICHTEN BÖDEN

G. SITKEI*

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 27. Oktober 1969]

Die Sand- und frischgepflügten Böden haben eine geringere Tragfähigkeit und daher wäre es wünschenswert, in solchen Fällen großvolumige Reifen mit kleinem mittlerem Druck in der Berührungsfläche zu benutzen. Es wurde eine neue Methode entwickelt, mit der man auf Grund von Boden- und Reifenkennwerten die Einsinkung des Reifens und den mittleren Druck in der Berührungsfläche bestimmen kann. Letzteres ist für die Bodenverdichtung in der Spur kennzeichnend. Die Brauchbarkeit der Saakjanschen Druckeinsinkungs-Formel ist nachgewiesen, und die in dieser Formel vorkommende Konstante dient als Bodenkennwert. Die Schlupf-Einsinkung bei angetriebenen Rädern hängt in erster Annäherung von der in der Spur zurückbleibenden Tragfähigkeit des Bodens ab. Da der Sand beim Überfahren nur in geringem Maße verdichtet wird, wird die Schlupf-Einsinkung hier viel größer als auf bindigen Böden — auch in gelockertem Zustand. Für Sand wurde ein allgemeingültiger Zusammenhang zur Bestimmung der Schlupf-Einsinkung aufgestellt.

I. Einleitung

Die gummibereiften Räder spielen in der heutigen Landwirtschaft eine sehr wichtige Rolle. Die Ackerschlepper, die Transportwagen (Anhänger, Ladewagen usw.) und die größeren Landmaschinen sind fast ausschließlich mit Reifen ausgerüstet. Die Gummibereifung gibt der Maschine eine vielseitigere Anwendungsmöglichkeit und verringert den Rollwiderstand erheblich.

Der landwirtschaftliche Schlepper bewegt sich am meisten auf weichem Boden mit erheblicher Einsinkung. Von der Einsinkung hängt die Reifeneindrückung, die Berührungsfläche, der Rollwiderstand und schließlich auch die Zugfähigkeit ab.

Heute kann eine ständige Erhöhung der Schlepperleistung und damit der Reifengrößen beobachtet werden. Um eine richtige Bereifung zu erreichen, ist eine vielseitige Überlegung notwendig. Die Reifen sollen im allgemeinen ein bestimmtes Gewicht tragen, möglichst hohe Umfangskraft entwickeln und eine bestimmte relative Einsinkung nicht überschreiten. Dazu ist es notwendig zu wissen, wie die verschiedenen Einflußgrößen (Boden- und Reifendeformation, Berührungsfläche, Belastung usw.) miteinander zusammenhängen und wie sie auf die Zugfähigkeit auswirken.

* Lehrstuhl für Landmaschinenbau der Technischen Universität Budapest; Műegyetem rkp. 3, *Budapest XI.* (UNGARN).]

Im Rahmen dieser Arbeit wurde versucht, auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen allgemeingültige Zusammenhänge für Reifen heranzuziehen und mit Hilfe von Bodenkennwerten die relative Einsinkung des Reifens zu bestimmen.

II. Reifenkennwerte

In früheren Arbeiten [1—4] wurde schon über unsere Reifenuntersuchungen ausführlich berichtet. Hier sollen nur die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchungen erwähnt werden. Eine ausführliche Untersuchung der Reifenangaben zeigte, daß die Tragfähigkeit vor allem von dem Reifenvolumen V und dem Innendruck p_i abhängt. Das Reifenvolumen kann durch Durchmesser, Breite und Querschnittshöhe des Reifens geändert werden.

Durch die Erhöhung des Reifendurchmessers nimmt das Reifenvolumen relativ wenig zu, infolgedessen erhöht sich auch die Tragfähigkeit nur in geringem Maße. Die Reifenbreite ist dagegen ein wirksameres Mittel zur Erhöhung der Tragfähigkeit. Die *Tragfähigkeit* läßt sich für normal *AS* Reifen folgendermaßen aufschreiben:

$$T_k = 15\, V^{0,8} \cdot p_i^{0,56},$$

wo V das Luftvolumen des Reifens [dm³]:
p_i den Innendruck des Reifens [atü]

bedeutet. Ein allgemeingültiger Zusammenhang kann mit Hilfe von dimensionslosen Zahlen erzielt werden.

Für feste Fahrbahn gilt die Funktion

$$\frac{f}{H} = \varphi\left(\frac{p_i V}{QH}\right), \tag{1}$$

während auf weichem Boden noch der Einfluß der relativen Einsinkung zu berücksichtigen ist:

$$\frac{f}{H} = \varphi\left(\frac{p_i V}{QH}, \frac{z}{R}\right), \tag{2}$$

wobei f die Eindrückung des Reifens;
H die Querschnittshöhe des Reifens;
Q die Belastung des Reifens;
z die Einsinkung (Spurtiefe) des Reifens;
R den Radius des Reifens

bedeutet. Die Gleichungen (1) und (2) sind im Bild 1 und 2 graphisch dargestellt.

Die *Berührungsfläche* zwischen Reifen und Boden ist ein wichtiger Parameter zur Kennzeichnung der Zugfähigkeit. Je größer und länger die Berührungsfläche, um so größer ist die übertragbare Umfangskraft. Für die Bestimmung der Berührungsfläche kann — ähnlich wie Gl. (2) — ein dimensionsloser Zusammenhang aufgeschrieben werden, der folgendermaßen aussieht:

$$\frac{F}{DB} = f\left(\frac{p_i V}{QH}, \frac{z}{D}\right), \tag{3}$$

wo D den Reifendurchmesser,
B die Reifenbreite

bedeutet.

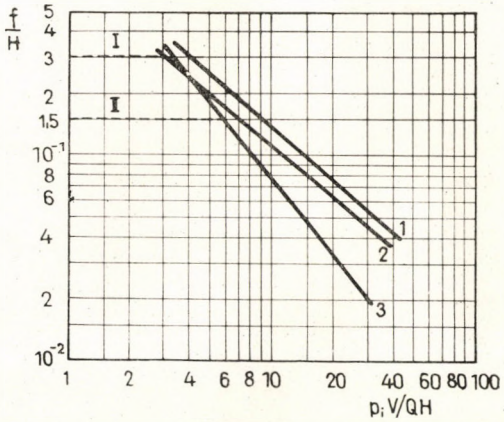


Bild 1. Dimensionslose Darstellung der Reifeneindrückung für Gürtel-Reifen *(1)*, Normal-Reifen *(2)* und Terra-Reifen *(3)*; *I* bedeutet Nennbelastung für Terra-Reifen, *II* Nennbelastung für Normal-Reifen

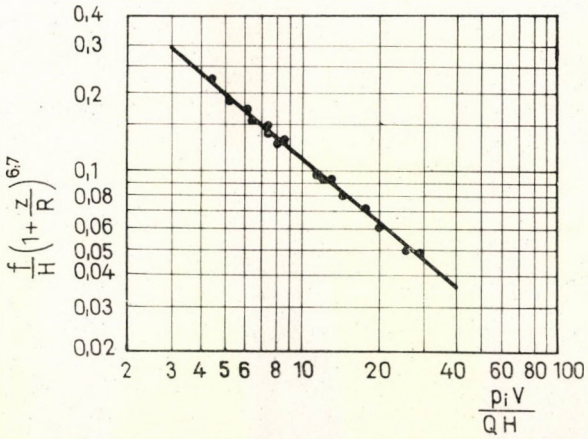


Bild 2. Dimensionslose Darstellung der Reifeneindrückung unter Berücksichtigung der Einsinkung

Auf Grund der Meßergebnisse ist Gl. (3) für verschiedene relative Einsinkungen im Bild 3 dargestellt. Wie man sieht, hat die relative Einsinkung des Reifens auf die relative Berührungsfläche einen großen Einfluß. Der Einfluß des Innendruckes und der Belastung durch den Wert $p_i V/QH$ nimmt mit der Erhöhung der Einsinkung bedeutend ab. Wenn also die relative Ein-

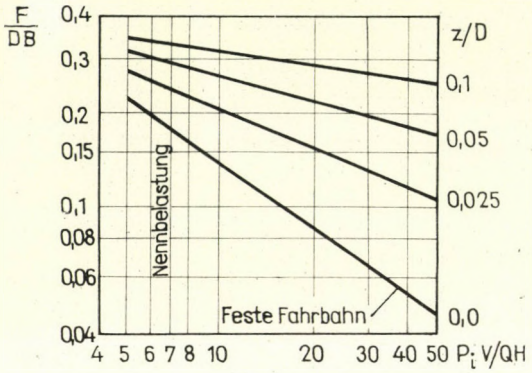


Bild 3. Dimensionslose Darstellung der Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden

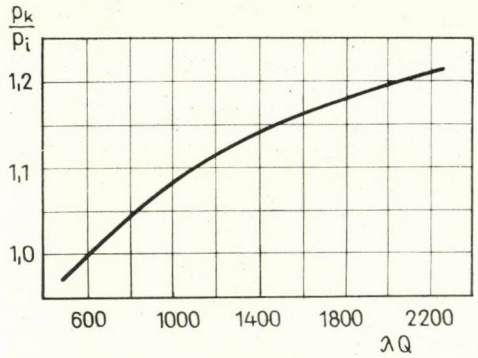


Bild 4. Mittlerer Druck in der Berührungsfläche auf fester Fahrbahn für verschiedene Reifen, abhängig von der Nennbelastung ($\lambda = Q_0^1/Q$, wobei Q_0^1 die Nennbelastung bei 1 atü Innendruck bedeutet)

sinkung sowieso groß ist, verursacht die Senkung des Innendruckes keine wesentliche Änderung in der Größe der Berührungsfläche.

Der mittlere Druck in der Berührungsfläche hat einen wesentlichen Einfluß auf die Einsinkung des Reifens. Auch in agrotechnischer Hinsicht sollte der mittlere Druck nicht allzu groß sein, da die Verdichtung des Bodens in vielen Fällen schädlich sein kann.

Aus dem Bild 3 kann man die Änderung der relativen Berührungsfläche in Abhängigkeit von der relativen Einsinkung auftragen. Wenn der mittlere Druck auf fester Fahrbahn bekannt ist (s. Bild 4), kann die Änderung

des mittleren Druckes abhängig von der relativen Einsinkung konstruiert werden. Eine solche Darstellung ist im Bild 5 zu sehen. Der Nennbelastung entspricht der Wert von $p_i V/QH = 7$. Wie man sieht, nimmt der mittlere Druck in der Berührungsfläche mit der Einsinkung des Reifens wesentlich ab. Eine weitere erhebliche Senkung des mittleren Druckes wird durch die Verringerung der Belastung ($p_i V/QH = 15$ entspricht ungefähr einer halben Belastung des Reifens) erreicht.

Es ist hier noch zu bemerken, daß der mittlere Druck in der Berührungsfläche auf fester Fahrbahn für Reifen verschiedener Abmessungen nicht

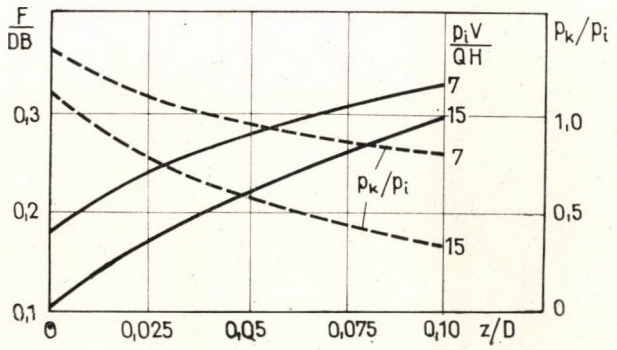


Bild 5. Berührungsfläche und mittlerer Druck, abhängig von der relativen Einsinkung ($- - - p_i V/QH$, ——— p_k/p_i)

gleich ist. Mit Erhöhung der Reifenabmessungen wird der mittlere Druck etwas größer (s. Bild 4). Diese Abweichung kann aber in einfacher Weise in Rechnung gezogen werden.

III. Druck-Einsinkung-Kurve unter Stempel und Reifen

Zur Berechnung der Einsinkung des Rades haben wir immer die Voraussetzung, daß die Druck-Stempel-Kurven mit den Druck-Einsinkung-Kurven unter dem Rad übereinstimmen. Die aus den Druck-Stempel-Kurven entnommenen Bodenkennwerte werden dann zur Bestimmung der Einsinkung des Rades benutzt. Die obige Voraussetzung erfüllt sich — leider — sehr selten.

Unsere Untersuchungen auf Sandboden zeigten, daß die einfache Saakjansche Formel ziemlich gut benutzt werden kann. Im weiteren wurden auch auf Lehmboden weitere Untersuchungen mit verschiedenen Stempeln durchgeführt und die Meßergebnisse in der Form

$$p = k\left(\frac{z}{b}\right)^n$$

bearbeitet, wobei b die Breite des Rechteckstempels oder den Radius des Rundstempels bedeutet. Die obige Formel ist relativ einfach, im Gegensatz zu der Reeceschen Formel, und man braucht keine Bodenkenngröße, wie z. B. die Kohäsion, vorher zu ermitteln. Die Auswertung der Versuchsergebnisse nach der Saakjanschen Formel hat gezeigt, daß sich diese Methode auch für den Lehmboden gut eignet.

Bei unseren Druckverteilungsmessungen an Reifen wurden die Einsinkung, die Reifeneindrückung, der Druck in der Berührungsfläche und

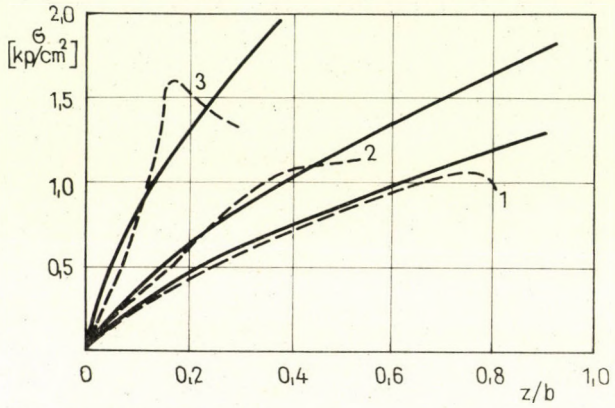


Bild 6. Druck-Einsinkungskurven unter dem Reifen und Stempel (——— Stempel, — — — unter Reifen)

gleichzeitig Druck-Stempel-Diagramme aufgenommen. Aus der Reifeneinsinkung und dem zugehörigen Druck wurde die Druck-Einsinkung-Kurve für den Reifen konstruiert und zugleich mit dem Druck-Stempel-Diagramm dargestellt (Bild 6). Um die beiden Druck-Einsinkung-Kurven vergleichen zu können, wurde auf der horizontale Achse z/b aufgetragen, wobei b bei Stempeln den Radius oder die Breite des Rechteckstempels mit 4:1 Seitenverhältnis und bei Reifen die halbe Spurbreite bedeutet.

Aus den obigen Versuchsergebnissen geht hervor, daß die in der Saakjanschen Formel vorkommende Konstante k bei normalen Bodenzuständen als brauchbarer Bodenkennwert zur Bestimmung der Einsinkung eines Rades dienen kann.

IV. Einsinkung des Reifens

Die Einsinkung eines Reifens kann mit verschiedenen Näherungsmethoden berechnet werden [5, 6]. Die Bekkersche Methode ist ziemlich einfach, wenn die Bodenkenngröße k_φ und k_c bekannt sind. Die rechnerischen und experimentellen Ergebnisse weichen aber in vielen Fällen erheblich voneinander ab. Die Ursache liegt wahrscheinlich darin, daß sowohl die benutzte Druck-Einsinkungs-Formel wie die eigentliche Rechnungsmethode

solche Annahmen und Voraussetzungen enthalten, die sich in der Wirklichkeit nicht erfüllen.

REECE und seine Mitarbeiter haben eine neue aber viel kompliziertere Methode entwickelt. Zur Beurteilung dieser Methode liegen noch keine genügende Versuchsergebnisse vor. Ein großes Problem für alle Rechnungsmethode ist die Berücksichtigung der Schlupf-Einsinkung bei angetriebenen Rädern.

Im Laufe unserer Reifenuntersuchungen haben wir empirisch gefunden, daß die relative Einsinkung für gezogene Reifen in folgender Form aufgeschrieben werden kann:

$$\frac{z}{D} = \text{konst.} \left(\frac{p_k}{k}\right)^n,$$

wo p_k der mittlere Druck in der Berührungsfläche und
k die Konstante der Saakjanschen Formel ist.

Unsere Meßergebnisse auf Lehmboden in der Bodenrinne sind im Bild 7 gezeigt. Wie man sieht, hängt die relative Einsinkung des Reifens in geringem Maße auch vom dem Belastungsgrad ab. Der mehr belastete Reifen hat eine größere Abplattung und damit eine gleichmäßigere Druckverteilung, infolgedessen eine etwas kleinere relative Einsinkung. Zu den Rechnungen benutzt man die Bilder 7 und 5 zusammen mit einem Iterationsverfahren.

Eine andere Darstellung (Bild 8) zeigt, daß die relative Einsinkung des Reifens bei aufgelockerten Böden ($k = 1{,}0 \div 2{,}0$ kp/cm^2) durch Verminderung der Belastung erheblich verringert werden kann.

Bei angetriebenen Rädern muß auch die Schlupf-Einsinkung, insbesondere auf leichten Böden, berücksichtigt werden. Auf Grund von Untersuchungen auf Sandboden ist der Verfasser der Meinung, daß die Einsinkung unter Berücksichtigung des Schlupfes in der Form

$$\frac{z}{D} = C_1 \left(\frac{p_k}{k}\right)^n \cdot \left[1 + C_2 \left(\frac{p_k}{k}\right) S^m\right]$$

dargestellt werden kann, wobei S der Schlupf, C_1 und C_2 bestimmte Konstanten sind. Unsere Meßergebnisse auf Sandboden sind im Bild 9 gezeigt. Auf der vertikalen Achse wurde die mit dem Schlupfanteil korrigierte relative Einsinkung aufgetragen.

Der hier gezeigte Zusammenhang sollte eigentlich auch für andere Böden gelten. Dazu müssen wir aber die Bodenkonstante k richtig interpretieren. Es zeigte sich nämlich, daß die Schlupf-Einsinkung viel mehr durch die in der Spur zurückbleibende Tragfähigkeit als durch die ursprüngliche Tragfähigkeit bestimmt ist. Beim Überfahren auf Sandboden ändert sich die Tragfähigkeit sehr wenig, während ein lehmiger, ganz aufgelockerter Boden erheblich verdichtet werden kann. Dadurch erklärt sich, daß ein

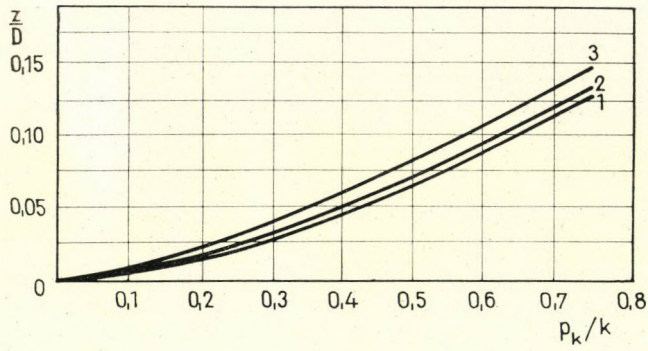


Bild 7. Relative Einsinkung der Reifen als Funktion der dimensionslosen Zahl p_k/k [$p_i V/QH = 6{,}5$ *(1)*, 8,5 *(2)* und 12,7 *(3)*]

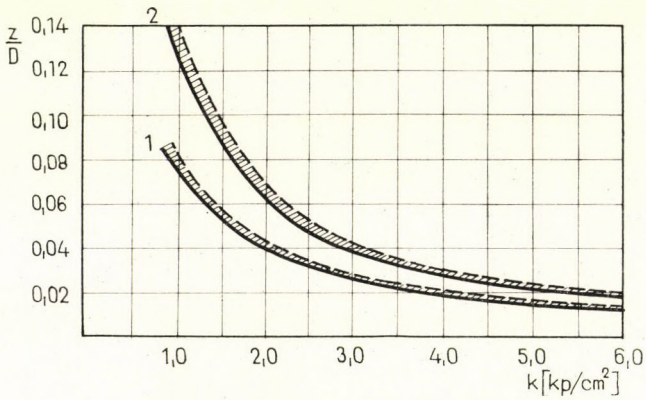


Bild 8. Relative Einsinkung der Reifen unter Berücksichtigung der Bodenkennzahl k ($p_i = 1{,}0$ atü, *1* halbe Belastung, *2* volle Belastung)

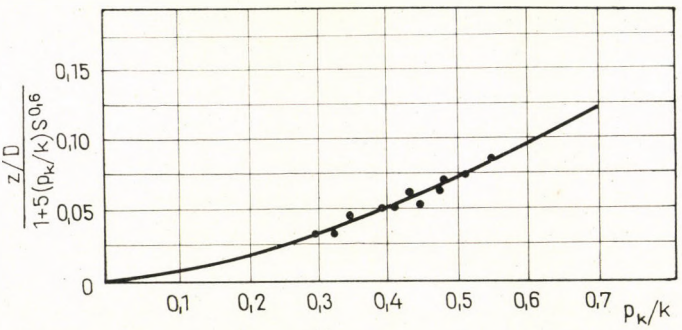


Bild 9. Relative Einsinkung der Reifen unter Berücksichtigung der Schlupf-Einsinkung be Sandboden

aufgelockerter lehmiger Boden eine kleinere Schlupf-Einsinkung aufweist als ein Sandboden mit größerer Tragfähigkeit im Anfangszustand.

Die Meßergebnisse von HOLM [7] bestätigen unsere Beobachtungen. Die von HOLM gemessenen Schlupf-Einsinkungsanteile auf aufgelockertem Lehmboden sind nämlich beinahe die selben für das erste und die weiteren Überfahren. Die Ursache liegt hier darin, daß der Boden bei dem ersten Überfahren stark verdichtet wurde und die weiteren Überfahren nur geringere zusätzliche Verdichtung zur Folge haben.

V. Zugfähigkeit der Reifen

Der wichtigste Parameter der Reifen ist ihre Zugfähigkeit. Die Zugfähigkeit eines Reifens bei der Nennbelastung und bei einem bestimmten Schlupf hängt von dem Reifendurchmesser und der Reifenbreite ab. Wenn die Reifen mehr oder weniger ähnlich sind, können die Variablen Durchmesser und Breite durch die Berührungsfläche ersetzt werden.

Der *mittlere Druck* in der Berührungsfläche (definiert als $p_k = Q/F$) für die einzelnen Reifen nimmt abhängig von der Tragfähigkeit etwas zu, wie es aus dem Bilde 4 ersichtlich ist. Der *Kraftschlußbeiwert* eines Reifens ist die Funktion der folgenden Einflußgrößen:

$$\varkappa = f\left(\frac{\tau}{\sigma}, \varrho\right),$$

wobei sich $\varkappa$ mit Änderung des Reifendurchmessers und der Breite nicht gleichartig ändert.

Nach VANDENBERG [8] ist das Verhältnis der Tangential- und Normalspannungen eine Funktion der relativen horizontalen Deformation:

$$\frac{\tau}{\sigma} = f\left(\frac{j}{\sigma}\right),$$

während der Rollwiderstandsbeiwert ϱ in erster Annäherung von der relativen Einsinkung abhängt:

$$\varrho = f\left(\frac{z}{D}\right),$$

d.h.

$$\varkappa = f\left[\frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{j}{\sigma}\right), \varrho\left(\frac{z}{D}\right)\right].$$

Mit Erhöhung des Reifendurchmessers nimmt die horizontale Bodendeformation j bei gleichbleibendem Schlupf zu, während die relative Einsinkung abnimmt. Demzufolge nimmt auch der Kraftschlußbeiwert eindeutig zu. Mit Erhöhung der Breite, wenn σ konstant bleibt, bleibt j/σ und z/D und

folglich auch $\varkappa$ unverändert. Nach Bild 4 nimmt aber σ bei den größeren Reifen wenig zu, und daher nimmt $\varkappa$ etwas ab. Bei Anwendung von größeren Reifen erhöht sich sowohl der Durchmesser als auch die Breite und damit erhöht sich auch der Kraftschlußbeiwert.

Die Aufarbeitung von Zugfähigkeitsmessungen auf Stoppelfeld [9] zeigte, daß der Kraftschlußbeiwert von der Berührungsfläche unter Berücksichtigung eines Streubereiches mit guter Annäherung linear abhängt (Bild 10). Eine Abweichung davon ergibt sich für Reifen, die verhältnismäßig großen Durchmesser haben (z. B. 9—40 oder 11—38). Diese Reifen weisen eine bessere Zugfähigkeit auf als aus Bild 10 folgt. Die im Bild 10 gezeigte lineare Abhängigkeit des Kraftschlußbeiwertes gilt nur in diesem Bereich. Mit der weiteren Erhöhung des Durchmessers wird die Zunahme des Kraftschluß beiwertes immer geringer.

Es ist hier noch zu bemerken, daß der im Bild 10 gezeigte Zusammenhang nur bei geringer Reifeneinsinkung ($z/D \simeq 0{,}02$) gilt. Auf weichen Böden tritt eine erhebliche Einsinkung auf, und demzufolge nimmt der Rollwiderstand zu und die Zugfähigkeit der Reifen ab.

Wir haben die Ergebnisse der vorhandenen Rollwiderstandsmessungen bearbeitet und den Rollwiderstandsbeiwert in Abhängigkeit von der relativen Reifeneinsinkung dargestellt (Bild 11). Wie man sieht, weichen die ϱ-Werte für Sand- und Lehmboden in geringem Maße voneinander ab. Die Ursache liegt darin, daß der Sandboden bei dem Überfahren nicht nur in vertikaler Richtung verdichtet (compaction), sondern auch in horizontaler Richtung verschoben wird. Die gezogenen Reifen haben bei größeren Einsinkungen ($z/D > 0{,}07$) wegen der Aufbauchung des Bodens einen größeren Rollwiderstand (Bulldozing Widerstand). Der Bulldozing Widerstand hängt erheblich von der relativen Radbreite ab; die hier eingeführten ϱ Werte gelten für AS Reifen mit relativen Breiten von $0{,}25 \div 0{,}30$.

Mit Berücksichtigung der Zunahme des Rollwiderstandes abhängig von der relativen Einsinkung kann auch die Verringerung des Kraftschlußbeiwertes vorausgesagt werden. Hier ist noch in Betracht zu ziehen, daß bei größeren Einsinkungen ein Teil des Scherspannungsfeldes nicht in der horizontalen Ebene liegt. Bild 12 zeigt die Änderung des Kraftschlußbeiwertes für verschiedene relative Einsinkungen in Abhängigkeit von der Berührungsfläche. Die Werte für größere Einsinkungen gelten nur im Falle, wenn der von dem Rad verdichtete Boden normale innere Reibung und noch eine bestimmte Kohäsion hat, d. h. wenn der Boden nicht allzu naß ist. In anderen Fällen wird der Kraftschlußbeiwert noch kleiner.

Beim Allradantrieb spielt das Verhalten von Reifen beim mehrmaligen Überfahren einer Spur (Multi-Pass) eine wichtige Rolle. Zur letzten Zeit wurden interessante Versuche bei verschiedenen Bodenzuständen von HOLM [7] durchgeführt.

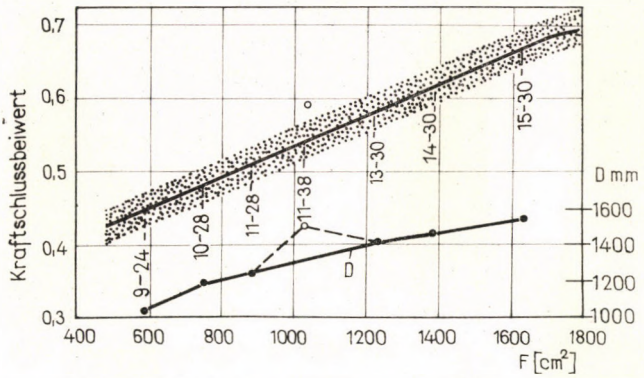


Bild 10. Der Kraftschlußbeiwert von AS-Reifen auf Stoppelfeld (Schlupf 20%, $p_i = 1{,}0$ atü)

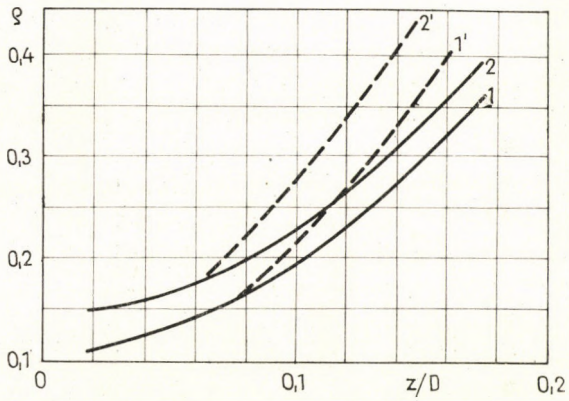


Bild 11. Rollwiderstandsbeiwert abhängig von der relativen Einsinkung (*1* angetriebener Reifen bei Lehm, *1'* gezogener Reifen, *2* angetriebener Reifen bei Sand, *2'* gezogener Reifen)

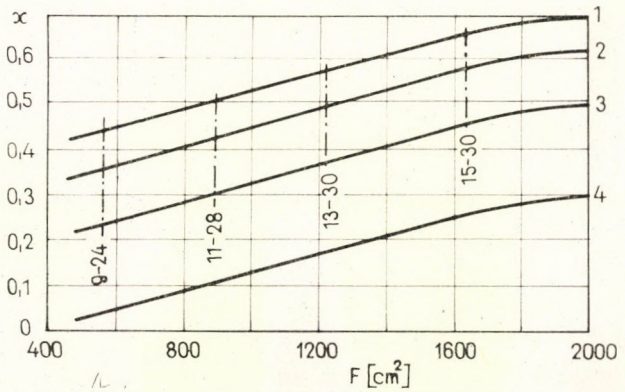


Bild 12. Kraftschlußbeiwert von AS-Reifen bei verschiedenen relativen Radeinsinkungen [$p_i = 1{,}0$ atü; $z/D = 0{,}025$ *(1)*, 0,1 *(2)*, 0,15 *(3)*, 0,2 *(4)*]

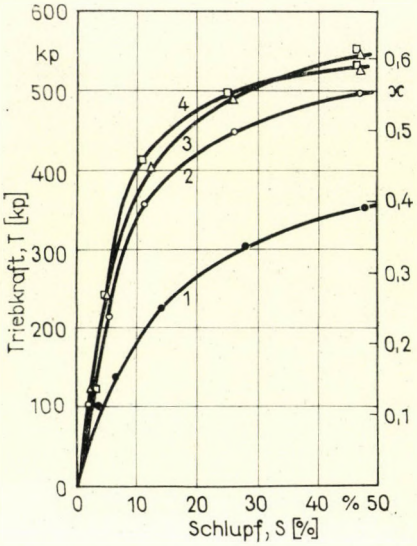


Bild 13. Triebkraft in Abhängigkeit vom Schlupf beim mehrmaligen Überfahren einer Spur, wenn $G = 900$ kp, Boden gewalzt und Feuchtigkeit 16,5% (*1*, *2*, *3*, *4* Spur angetrieben) [7]

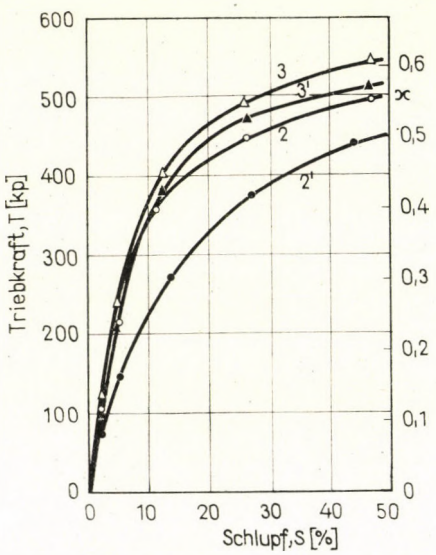


Bild 14. Triebkraft eines angetriebenen Rades, das in der Spur eines gezogenen oder angetriebenen ersten Rades läuft, wenn $G = 900$ kp, Boden gewalzt, und Feuchtigkeit 16,5% (o △ *2*, *3* Spur, *1 S* angetrieben; ● ▲ *2'*, *3'* Spur, *1 S* gezogen) [7]

Bild 13 zeigt die Änderung der Triebkraft über den Schlupf beim ersten bis vierten Überrollen. Zwischen den Triebkräften in der ersten und zweiten Spur besteht immer ein sehr beträchtlicher Unterschied, falls der Boden locker ist. Der Rollwiderstand ändert sich in entgegengesetztem Sinne. Aus Bild 14 ist

zu ersehen, daß die Triebkraft der zweiten Spur sehr davon abhängt, ob der Reifen bei der ersten Spur gezogen oder angetrieben wurde. Bei angetriebenen Rädern verdichtet sich der Boden unter dem Reifen besser als bei gezogenen Rädern. Das sieht man auf Bild 15, wo die Bodenwichte in den vier Spuren für verschiedene Schlupfwerte gemessen dargestellt ist.

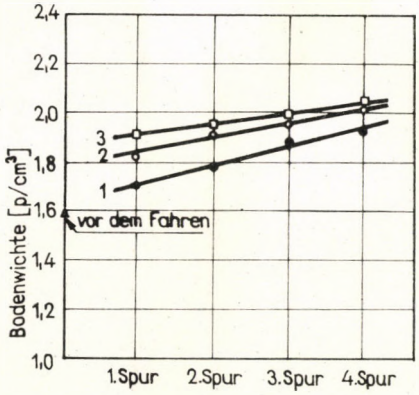


Bild 15. Bodenwichte, gemessen in den vier Spuren, wenn $G = 900$ kp, Boden gewalzt, und Feuchtigkeit 16,5% (*1* gezogen; *2* 15% Schlupf, *3* 50% Schlupf) [7]

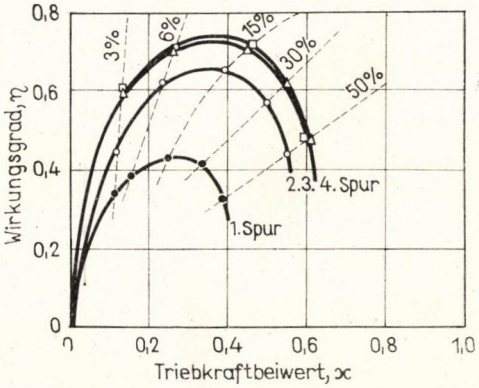


Bild 16. Wirkungsgrad der Kraftübertragung in Abhängigkeit vom Kraftschlußbeiwert beim mehrmaligen Überfahren einer Spur ($G = 900$ kp, Boden gewalzt, Feuchtigkeit 16,5%) [7]

Der Wirkungsgrad der Kraftübertragung in Abhängigkeit vom Kraftschlußbeiwert und Spur ist im Bild 16 dargestellt. Der Wirkungsgrad der ersten Spur ist verhältnismäßig schlecht, in dem verdichteten Boden ist er aber erheblich besser. Aus dem Bilde läßt sich weiterhin erkennen, daß das Maximum des Wirkungsgrades in der ersten Spur bei höheren Schlupfwerten liegt als in den weiteren Spuren. Daraus folgt, daß es vorteilhaft ist die vorderen Räder mit etwas größerem Schlupf laufen zu lassen als die hinteren Räder.

VI. Schlußfolgerungen

Für die optimale Bereifung eines Schleppers sollen die folgenden Anforderungen in Betracht gezogen werden.

a) Die *Tragfähigkeit* des Reifens muß auch bei 1 atü Innendruck genügend groß sein. Hier müssen nicht nur das Eigengewicht, sondern auch die möglichen Zusatzgewichte und Kraftüberlagerungen in Rechnung gezogen werden.

b) Die *Zugfähigkeit* des Reifens soll unter den gegebenen Bodenverhältnissen die geplante Zugkraft sichern. Ein Voraussagen kann mit Hilfe der Bilder 7 und 12 vorgenommen werden.

c) Die vom Reifen verursachte *Bodenverdichtung* soll nicht so hoch sein, daß diese sich auf das Pflanzenwachstum schädlich auswirken könnte. Hier sind auch größere Spurtiefen zu vermeiden. Zur Lösung dieser Probleme können die Bilder 5, 7 und 9 behilflich sein.

d) Die *Abmessungen* des Reifens sollen den agrotechnischen Anforderungen (Furchenbreite, Saatweite, Bodenfreiheit, Hang usw.) entsprechen. Dabei können hier solche Anforderungen auftreten, die mit den unter *a)* *b)* und *c)* genannten Anforderungen nicht übereinstimmen. Insbesondere hat die Hangarbeit spezielle Anforderungen, die hier eingehend nicht besprochen werden sollen.

Wie es aus den obengesagten hervorgeht, können die verschiedenen Anforderungen der Landwirtschaft durch Benutzung eines Reifentyps kaum erfüllt werden.

SCHRIFTTUM

1. Sitkei, Gy.: Traktor-gumikerekek jellemzői és az abroncsozás. *Járművek* (1969), II.
2. Sitkei, Gy.—Söhne, W.: Beziehungen zwischen den Kenngrößen von AS-Reifen auf fester Fahrbahn. *Grundlagen der Landtechnik* (1969), II.
3. Sitkei, Gy.: Das Verhalten von Ackerschlepperreifen auf nachgiebigem Boden. *Grundlagen der Landtechnik* (1969), II.
4. Sitkei, Gy.: Die Kennzahlen von AS-Reifen und die Probleme der Bereifung. *Proceedings of Third International Conference of the ISTVS in Essen* **3** (1969), 23—43.
5. Bekker, M.: Theory of Land Locomotion; Ann Arbor 1956.
6. Reece, A.—Jo-Yung Wong: Prediction of Rigid Wheel Performance Based on the Analysis of Soil-Wheel Stresses. *Journal of Terramechanics* (1967); I, II.
7. Holm, C.: Das Verhalten von Reifen beim mehrmaligen Überfahren einer Spur. *Proceedings of Third International Conference of the ISTVS in Essen* **2** (1969), 96—123.
8. Vandenberg, G.—Taylor, J.: The Role of Displacement in a Simple Traction System. *Journal of Terramechanics* (1969), I.
9. *NATI Bericht:* Die Zugfähigkeit von Radschleppern. NATI, Moskau 1961; No. 130.

Some Problems of the Tyre-Outfit of Agricultural Tractors with Special Reference to Loose Soils. The bearing capacity of sands and freshly-tilled soils is pretty low, and therefore, it would be desirable to use tyres of large volume that cause low surface pressure. A new method has been established for the determination of the sinkage of the tyre into the soil and of the mean pressure coming on the contact surface, provided that the properties of the soil and the tyre are known. The mean value of the contact pressure characterizes the degree of compaction of the soil. The applicability of Saakjan's pressure-sinkage relationship has

been confirmed, and the constant k may be employed as the characteristic of the soil. In the case of driven-wheels the slip-sinkage depends, in the first place, on the load-carrying capacity of the soil remaining in the rut of the wheel. Just because sand is only slightly compacted under the load of the rolling wheel, the slip-sinkage under these conditions is significantly higher than in soils with more cohesion and which had been loosened freshly.

Некоторые вопросы подбора тракторных шин, особенно на рыхлых почвах *(Д. Шиткеи)*. Грузоподъемность песчаных и свеже вспаханных почв ялявется малой, вследствие этого в таких случаях целесообразно использовать шины с развитой поверхностью, оказывающие небольшое поверхностное давление на почву. Разработан новый метод, с помощью которого можно определить погружение шины в грунт и среднее давление, возникающее на поверхности контакта, если известны параметры почвы и шины. Среднее давление, возникающее на поверхности контакта, является характерным для уплотнения почвы. Применимость зависимости давления и погружения Саакяна подтверждена, и фигурирующая в зависимости постоянная κ может быть использована в качестве параметра почвы. Погружение вследствие буксования в случае ведущух колес зависит в первую очередь от грузоподъемности почвы, остающейся в колее. Вследствие того факта, что песок при качении колеса уплотняется только незначительно, то явление погружение вследствие буксования в данном случае проявляется сильнее, чем в случае более связанных по структуре, но полностью разрыхленных почв.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 367—380 (1970)

ERGÄNZUNGEN ZUR GENAUEREN BERECHNUNG DES DURCH FRÄSEN ERHALTENEN SPANQUERSCHNITTES

B. FAZAKAS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 4. Mai 1969]

In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Berechnung des Spanquerschnittes. Nach einem gemeinsamen Prinzip wird die Bestimmung von konstanten und veränderlichen Spanquerschnitten, ferner von Spanquerschnitten mit einfacher und komplexer Form behandelt. Es wird besonders auf das Gebiet der genauen Berechnungsmethode eingegangen, bzw. es wird untersucht, in welchem Fall man die Berechnung mit Vernachlässigungen durchführen kann. Im Rahmen der Spangestaltung beim Fräsen werden Rechenmethoden für die Spanlänge besonders analysiert und ihr Anwendungsgebiet bestimmt. Am Schluß der Arbeit zeigt der Verfasser die Berechnung der Größe des Spanquerschnittes, der beim schiefkantigen Mantelfräsen entsteht, als die allgemeinste Bestimmung des Spanquerschnittes.

I. Einleitung

Eines der wichtigsten Parameter beim Spanen bedeutet der Spanquerschnitt. Außer der Größe des Spanquerschnittes ist auch seine Gestalt und seine Änderung ausschlaggebend. Die Änderung von Größe und Form des Spanquerschnittes entlang der Spanlänge trifft man zum Beispiel beim Fräsen an.

Zur Einleitung sei der Verlauf von drei kennzeichnenden Spanquerschnitten und Größencharakteristiken des Drehens bei konstantem Spanquerschnitt untersucht (Bild 1). In allen drei Fällen ist die Größe des Querschnittes des abgetrennten Spans identisch, lediglich die Form ist verschieden. Daher ergibt sich die Frage, ob es bei der Behandlung der Spanungsverhältnisse zweckmäßig ist, die für die Berechnung der Größe der drei Querschnitte gleicherweise geeigneten Kennzeichen: »*Vorschub (e)*« und »*Schnittiefe (f)*« zu verwenden, oder ob es zweckdienlicher ist, für die Beschreibung der Erscheinungen andere Querschnitt-Parameter zu gebrauchen.

Bei der Untersuchung weiterer Parameter der Zerspanung findet man, daß zur Beschreibung der auftretenden Erscheinungen die »*Spanungsbreite (l)*« und die »*Spanungsdicke (h)*« geeigneter sind, denn sie sind für die Span-

* Technische Universität für Schwerindustrie, Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen; *Miskolc* (UNGARN).

formung charakteristischer als die vorher genannten Größen, welche eher Parameter der Einstellung von Werkzeugmaschinen bedeuten. Die Einführung der Begriffe von Spanungsbreite und Spanungsdicke gestattet auch die Bildung eines geeigneteren Zerspanungsmodells.

Für die weiteren Ausführungen sei vereinbart, daß unter dem Begriff *Spanungsbreite (l)* die Spanabmessung verstanden wird, welche unmittelbar entlang der Werkzeugschneide entsteht. Ihre Größe und Form wird auf die Zerspanungs-Grundebene bezogen. Wie das Bild 1 veranschaulicht, kann die Schneidenform auch gekrümmt sein, somit ist auch die Spanungsbreite nicht notwendigerweise eine Gerade.

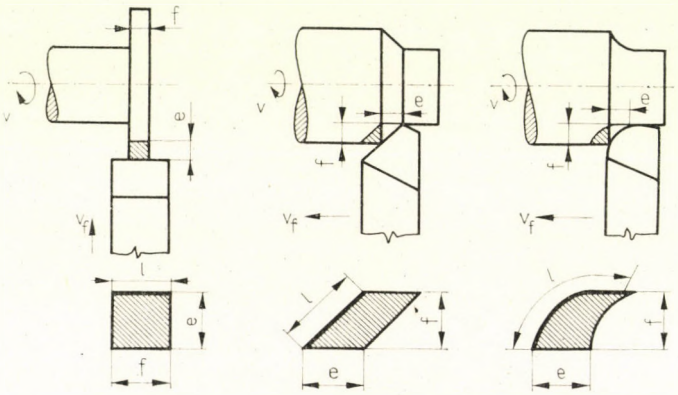


Bild 1. Spanquerschnitte von verschiedener Form

Eine andere Abmessung, welche sich zur Kennzeichnung der Querschnittgröße eignet, sei die *Spanungsdicke (h)*. Wie aus dem Bild 1 hervorgeht, kann die Spanungsdicke entlang der Spanungsbreite von konstantem oder veränderlichem Wert sein.

Zur Überbrückung der in jedem Punkt der Spanungsbreite meßbaren veränderlichen Spanungsdicke sei der Begriff einer »*mittleren Spanungsdicke* (h_k)« eingeführt, der durch folgende Beziehung definiert werden kann:

$$h_k = \frac{q}{l} .$$

Der »*theoretische Spanquerschnitt q*« kann im allgemeinen aus technologischen Parametern oder aus Parametern der Werkzeugmaschineneinstellung bestimmt werden.

II. Untersuchung der Berechnungsmethoden

Nun untersuche man die Gestaltung der Kennzahlen im Fall eines Spanquerschnittes, wie er auf Bild 2 dargestellt ist. Nach Bild 2 setzt sich die Spanungsbreite aus den Teilen

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

zusammen. Die Größe dieser Spanungsbreite kann unter Verwendung der Werkzeug- und der technologischen Kennwerte bestimmt werden (Bedingung $f > r - r\cos\varkappa$)

$$l_1 = \frac{f - r(1-\cos\varkappa)}{\sin\varkappa}\,\frac{f}{\sin\varkappa} - r\tan\frac{\varkappa}{2},$$

$$l_2 = r\,\varkappa,$$

$$l_3 = r\,\tau,$$

$$l_4 = \frac{e\sin\varkappa}{\sin(\varkappa+\tau)} - r\tan\frac{\varkappa+\tau}{2}.$$

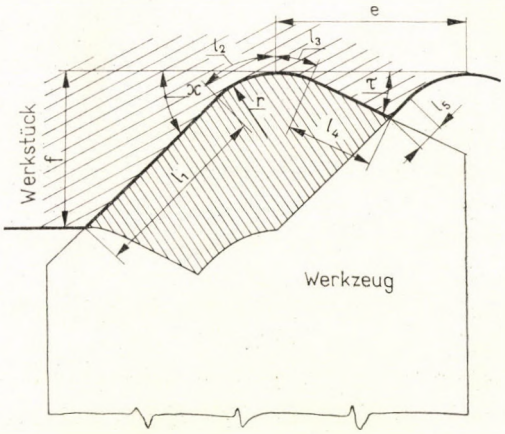


Bild 2. Berechnung der Spanungsbreite

Aus dem Bild 2 können die Werte von l_1, l_2 und l_3 unmittelbar bestimmt werden, wogegen der Wert l_4 sich indirekt, unter Verwendung von l_5 ergibt.

In einigen Fällen taucht die Frage auf, ob es notwendig ist, den Wert der Spanungsbreite bzw. der Spanungsdicke mit dieser zusammengesetzten Formel zu berechnen, oder ob man Vereinfachungen einführen kann. Für den Fall des Schruppens sei hier Tafel I vorgeführt.

Es ist ersichtlich, daß die Abweichungen veränderlich sind. In der Zerspanungpraxis kann man Abweichungen von 15—20% noch zulassen, denn die Bestimmung der übrigen Parameter, z. B. der Stoffkennwerte kann ebenfalls nicht genauer erfolgen. Bei Versuchen bzw. bei Forschungsarbeiten kann man naturgemäß Vereinfachungen nur in geringerem Maß einführen.

Bisher wurde die Änderung der Spanungsdicke entlang der Spanungsbreite behandelt, und die Untersuchung wurde im leichter übersichtlichen

Tafel I

Vereinfachungen für den Fall des Schruppens

	$l = \Sigma l_1$ [mm]	$l' = \frac{f}{\sin \varkappa}$ [mm]	$\frac{l-l'}{l} 100$ [%]	$h_k = \frac{e \cdot f}{l}$ [mm]	$h_k' = \frac{e \cdot f}{l'}$ [mm]	$\frac{h_k - h_k'}{h_k} 100$ [%]
$f_1 = 5$ mm $e_1 = 1{,}2$ mm/U	8,62	7,07	+18	0,695	0,849	−22,2
$f_2 = 1$ mm $e_1 = 1{,}2$ mm/U	2,96	1,51	+52,4	0,405	0,849	−109,2
$f_1 = 5$ mm $e_2 = 0{,}12$ mm/U	7,87	7,07	+10,15	0,0762	0,0849	−11,4

Bemerkung: $r = 2$ mm, $\varkappa = 45°$, $\tau = 15°$.

Fall des Drehens durchgeführt. In der Einleitung wurde bereits festgestellt, daß beim Fräsen auch entlang der Spanlänge (während sich der Fräser dreht) die Spanungsdicke, eventuell auch die Spanungsbreite, sich verändert. Im Interesse der Übersichtlichkeit wird bei der Untersuchung der Fall beobachtet, bei dem mit einem Walzenfräser sog. Walzenfräsen ausgeführt wird. Einen für diesen Fall charakteristischen Span sieht man auf Bild 3. Die zerspanende Hauptbewegung des Werkzeugs ist eine Drehbewegung, die Kante $\overline{AC}$ des Spanes ist also die Spanlänge, der Spanquerschnitt ist also senkrecht zur Kante $\overline{AC}$. Beim Walzenfräsen beginnt das Werkzeug mit dem Spanabheben entlang der Geraden $\overline{AB}$. Hierbei ist der Spanquerschnitt

$$q_A = b \cdot h_A = 0 ,$$

denn die Spanungsdicke ist am Anfang gleich Null. Die Schneide des Fräsers bewegt sich dem Bogen $\overline{AC}$ entlang. Die Zunahme der Spanungsdicke ist links oben im Bild 3 deutlich zu sehen. Ihre Größe ist mit guter Annäherung

$$h_x = l_1 \sin \varphi_n .$$

Zur Untersuchung der Verhältnisse benötigt man im allgemeinen eine mittlere Spanungsdicke. Diese kann anhand des Bildes 3 aus der Beziehung

$$e_1 \cdot f = h_k \cdot i$$

bestimmt werden. Diese mittlere Spanungsdicke bedeutet einen Durchschnitt entlang der Spanlänge, wogegen der Fall, der im Zusammenhang mit einem Beispiel aus dem Gebiet des Drehens behandelt wurde, auf die Änderung

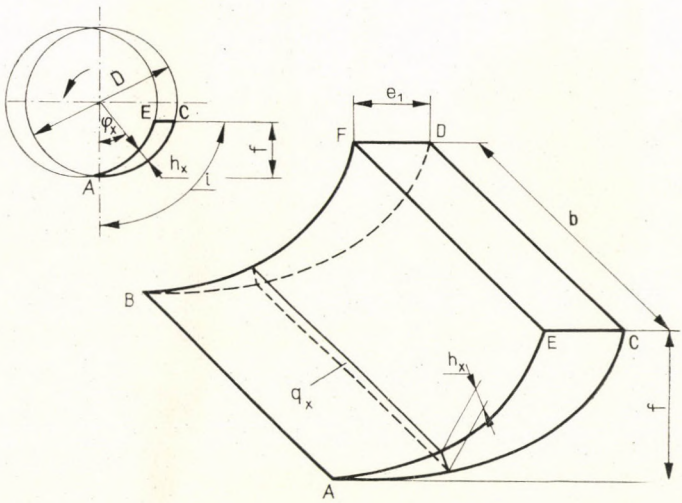


Bild 3. Spanbildung beim Fräsen

entlang der Spanungsbreite hinweist. Bei der Bearbeitung mit einem Profilfräser oder einem schiefkantigen Fräser sind beide Erscheinungen zu gleicher Zeit vorhanden.

Aus der vorigen Beziehung wird daher die mittlere Spanungsdicke entlang der Spanlänge

$$h_k = \frac{e_1 \cdot f}{i} .$$

Beim Fräsen ergibt sich die Spanlänge aus der Bewegung der Schneidkante auf einer zykloidalen Bahn. Die zur Berechnung erforderliche Bogenlänge (Bild 4) beträgt

$$i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi ,$$

wo die Parametergleichung der Kurve

$$x = a\varphi + c \sin \varphi ,$$

$$y = c - c \cos \varphi$$

ist. Setzt man die Kurvengleichung ein, so erhält man

$$i = 2(a+c) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{4ac}{(a+c)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi .$$

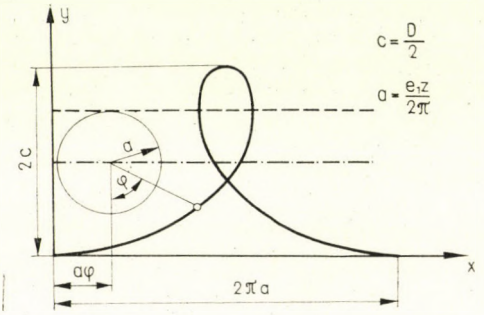


Bild 4. Berechnung der Fräsbogenlänge

Ersetzt man die zykloidalen Parameter der Kurve durch die Parameter des Fräsens (s. Bild 4), so erhält man folgenden Ausdruck:

$$i = \left(D + \frac{e_1 z}{\pi}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{4\pi D e_1 z}{(D\pi + e_1 z)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\,\frac{\varphi}{2} .$$

Dieses Integral ist ein elliptisches Integral zweiten Grades, denn der Multiplikator von $\sin^2 \varphi/2$ fällt zwischen die Grenzen

$$0 < \frac{4\pi D e_1 z}{(D\pi + e_1 z)^2} \leq 1 .$$

Die Bogenlänge kann daher berechnet werden:

a) mit Hilfe einer elliptischen Integrale enthaltende Tabelle;

b) nach $\sqrt{1-x^2}$ entwickelt und gliedweise integriert; oder unter gegebenen Verhältnissen;

c) die Kurve wird durch ihren Schmiegungskreis ersetzt, wobei dessen Bogenlänge mit Hilfe der Elementargeometrie gefunden wird.

Die Berechnung sei erneut für einen konkreten Fall durchgeführt, wenn z.B. $D = 50$ mm; $z = 12$; $e_1 = 0{,}05$ mm/Zahn; $\varphi_0 = 0$; $\varphi = 30°$. Im ersten Fall ergibt sich der Wert der Bogenlänge aus Tafel I zu

$$i = 13{,}140 \text{ mm};$$

es ist nämlich

$$k^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}05 \cdot 12}{(50 \cdot \pi + 0{,}05 \cdot 12)^2} = 1{,}53 \cdot 10^{-2}.$$

Im zweiten Fall mittels Reihenentwicklung ist

$$i = \left(D + \frac{e_1 z}{\pi}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[1 - \frac{1}{1} \frac{k^2 \sin^2(\varphi/2)}{2} - \frac{1}{1.2} \frac{k^4 \sin^4(\varphi/2)}{4} - \right.$$
$$\left. - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4} \frac{k^6 \sin^6(\varphi/2)}{6} = \ldots \right] d\frac{\varphi}{2}$$

und gliedweise integriert:

$$i = \left(D + \frac{e_1 z}{\pi}\right) \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi\right) - \frac{k^4}{8}\left(\frac{6}{32}\varphi - \right.\right.$$
$$- \frac{8}{32}\sin\varphi + \frac{1}{32}\sin 2\varphi\Big) - \frac{k^6}{16}\left(\frac{30}{192}\varphi - \frac{45}{192}\sin\varphi + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{9}{192}\sin 2\varphi - \frac{1}{192}\sin 3\varphi\right) - \ldots\right]_{\varphi_0}^{\varphi}.$$

Da $k^2 \ll 1$, wird die Reihe schnell konvergent. Es kann nachgewiesen werden, daß man für Berechnungen bei der Zerspanung noch ausreichende Genauigkeit erhält, wenn ein Glied oder höchstens zwei Glieder berücksichtigt werden. Im gegebenen Fall ist die Bogenlänge

$$i_2 = 13{,}139 \text{ mm}$$

und zuletzt, wenn man die Zykloide durch ihren Schmiegungskreis — d.h. mit dem Schmiegungskreis des Fräsers — ersetzt, so wird

$$i_3 = \frac{50 \cdot \pi}{12} = 13{,}089 \text{ mm}.$$

Aus den drei Endergebnissen ist zu ersehen, daß es in der Zerspanungspraxis ausreicht, wenn die Zykloide durch ihren Schmiegungskreis ersetzt wird. Auch in dem Fall ergibt die Substitution durch den Schmiegungskreis des Fräsers eine ausreichende Genauigkeit, wenn der Spanwinkel 180° beträgt.

In Kenntnis der Bogenlänge beim Fräsern ergibt sich die mittlere Spannungsdicke zu

$$h_{k1} = \frac{e_1 f}{i} = \frac{2 \cdot e_1 \cdot f \cdot 180^\circ}{D \cdot \varphi^\circ \cdot \pi}$$

oder anhand der angenäherten geometrischen Beziehung gemäß Bild 5 ist die Änderung der Spanungsdicke:

$$h_x = e_1 \sin \varphi_x = 2 e_1 \sqrt{\frac{f_x}{D} - \frac{f_x^2}{D^2}} .$$

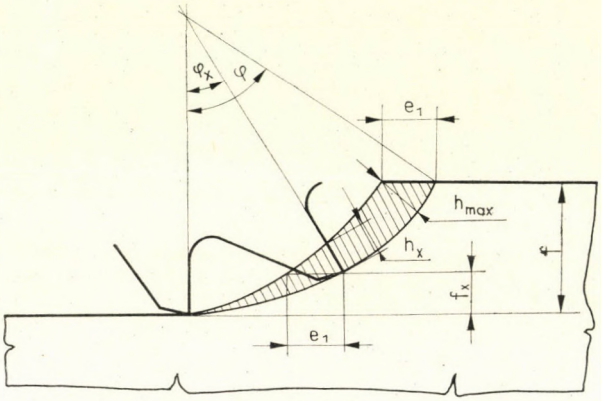


Bild 5. Änderung der Spanungsdicke beim Fräsen

Die maximale Spanungsdicke ist bei $f_x = f$

$$h_{\max} = 2 e_1 \sqrt{\frac{f}{D} - \frac{f^2}{D^2}} ,$$

und nimmt man an, daß die mittlere Spanungsdicke die Hälfte der maximalen Dicke ausmacht, dann ist

$$h_{k2} = \frac{h_{\max}}{2} = e_1 \sqrt{\frac{f}{D} - \frac{f^2}{D^2}} .$$

Wenn in der Zerspanungspraxis $D \gg f$ ist, so kann man die Näherungsbeziehung

$$\frac{\varphi}{2} \doteq \sin \frac{\varphi}{2}$$

anwenden. So wird

$$h_{k3} = \frac{e_1 \sin \varphi}{2} \doteq e_1 \sin \frac{\varphi}{2} = e_1 \sqrt{\frac{f}{D}} .$$

Die Änderung der mittleren Spanungsdicke, welche mittels der drei Methoden berechnet werden kann — im Fall des Einheitsvorschubes — ist im Funktions-Bild 6 und 7 zu sehen. Auf Bild 6 kommt die Änderung der mittleren Spanungsdicke in der Funktion f/D vor, wogegen im Bild 7 als unabhängige Variable φ gewählt wurde. Auf Bild 8, bzw. 9 sieht man die Abweichung im Verhältnis zu h_{k1} .

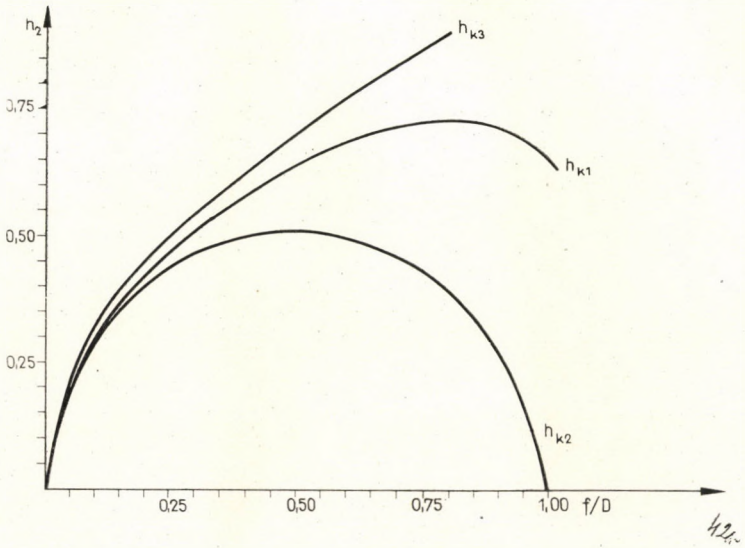


Bild 6. Vergleich der nach verschiedenen Methoden berechneten Spanungsdicke in Abhängigkeit von f/D

Wenn man bei der Berechnung von h_k im Vergleich zu h_{k1} eine Abweichung von 5% zuläßt, so kann man bei der Beziehung von h_{k2} bis $\varphi \approx 45°$, bzw. mit $f/D \approx 0{,}15$, wogegen bei der Beziehung h_{k3} bis $\varphi \approx 60°$, bzw. mit $f/D \approx 0{,}25$ Verhältnis rechnen.

Anhand der obigen Ausführungen wird beim Fräsen mit einem geradzahnigen Fräser an der Stelle x der durch einen Zahn abgetrennte Spanquerschnitt:

$$q_x = b \cdot h_x = b \cdot e_1 \sin \varphi_x .$$

Die Größe des mittleren Spanquerschnittes kann man aus der Beziehung:

$$q_{\text{mittl.}} = b \cdot h_k = b \cdot e_1 \sin \varphi_k$$

bestimmen, wogegen der maximale, durch einen Zahn abgetrennte Spanquerschnitt sich zu

$$q_{\max} = b \cdot h_{\max} = b \cdot e_1 (\sin \varphi)_{\max}$$

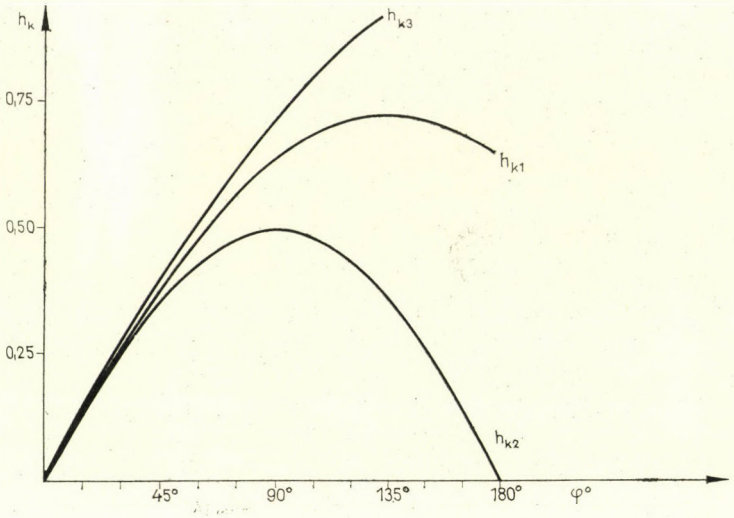


Bild 7. Vergleich der nach verschiedenen Methoden berechneten Spanungsdicke in Abhängigkeit von φ

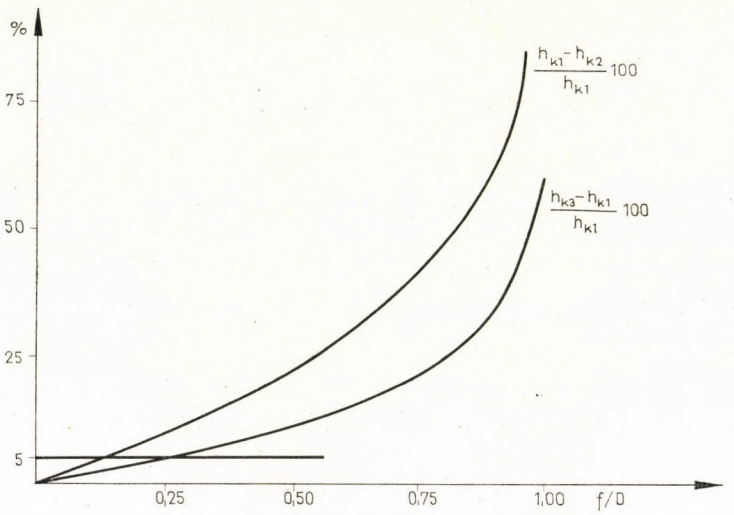


Bild 8. Abweichung der nach verschiedenen Methoden berechneten Spanungsdicken in Abhängigkeit von f/D

ergibt. Wenn gleichzeitig mehrere Zähne zerspanen, so ist

$$q_{\text{ges.}} = \sum_{i=1}^{\psi} q_i = \sum_{i=1}^{\psi} b \cdot e_1 \cdot \sin \varphi_i \,.$$

Bei der Summierung bedeutet die Verbindungszahl ψ die Anzahl der an der Bogenlänge des Fräsens (entlang der Spanlänge) im Mittel gleichzeitig arbeitenden Zähne, d.h.

$$\psi = \frac{i}{t_{0k}} = \frac{\frac{D}{2} \cdot \varphi}{\frac{D}{2} \cdot \delta} = \frac{\varphi}{\delta},$$

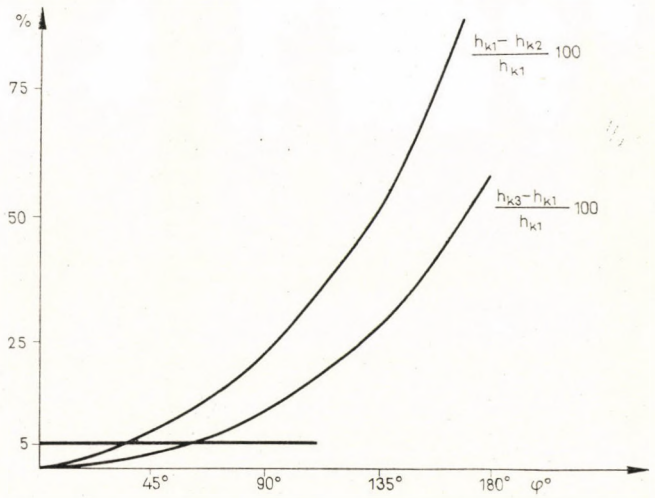


Bild 9. Abweichung der nach verschiedenen Methoden berechneten Spanungsdicken in Abhängigkeit von φ

wo i die Fräs-Bogenlänge,
t die Zahnteilung am Fräserumfang,
φ der Fräs-Bogenwinkel,
δ die Zahnteilung des Fräsers

bedeuten.

Es soll z.B. mit einem Fräser von $D = 50$ mm und mit der Zähnezahl $z = 12$, bei einer Zugabe von 5 mm, und mit einem Vorschub pro Zahn $e_1 = 0{,}05$ mm/Zahn zerspant werden. Fräsbreite sei $b = 60$ mm. Die Frage lautet, wie groß ist der maximale Spanquerschnitt?

Der maximale Winkel der Spanabtrennung ist

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{D - 2f}{D} = \frac{50 - 2 \cdot 5}{50} = 8{,}0$$

und

$$\varphi_{\max} = 37°.$$

Die Zahnteilung des Fräsers beträgt

$$\delta = \frac{360}{} = \frac{360}{12} = 30°.$$

Beim Fräsen ist das durchschnittliche Eingriffverhältnis

$$\psi_{\text{mittl.}} = \frac{37}{30} = 1{,}23$$

beziehungsweise die größte Zahl ist

$$\psi = 2 .$$

Bei der Bearbeitung ist die maximale Grenzstellung der Zähne

$$\varphi_1 = 37°$$

bezw.

$$\varphi_2 = 7° .$$

Der zur gleichen Zeit zum Abtrennen gelangende Spanungsquerschnitt:

$$q_{\text{ges. max}} = b \cdot e_1 \sum_{i=1}^{\psi} (\sin \varphi_i)_{\max} = 60 \cdot 0{,}05(0{,}603+0{,}122) = 2{,}175 \text{ mm}^2 .$$

Beim schrägverzahnten Fräser ändert sich die vorher behandelte Spanabtrennung; im vorigen Fall ist nämlich die Spanungslage der Schneide in voller Breite des Fräsers identisch, beim schräggezahnten Fräser ist sie dagegen entlang der Schneide in jedem Punkt verschieden. Diesem Umstand Rechnung tragend, ist auf Bild 10, unter Berücksichtigung der Schneidkante, die Darstellung erfolgt; in der Draufsicht ist der Bogen abgewickelt zu sehen.

Jeder Punkt des zerspanenden Fräserzahns muß im Verlauf der Bearbeitung eine Drehung von $\varphi_{\max}$ ausführen. Im gegebenen Fall wird die Lage des Fräszahnes von den Winkeln φ_{ein} und φ_{aus} bestimmt. Die an der Zerspanung teilnehmende Schneidkante arbeitet über eine Bogenlänge, welche dem Drehwinkel

$$\varphi' = \varphi_{\text{aus}} - \varphi_{\text{ein}}$$

entspricht. Die im Eingriff stehende volle Schneidenlänge beträgt

$$l = \frac{D}{2 \cdot \sin \lambda} \varphi' .$$

Der zur Elementarlänge der Schneide gehörende Spanquerschnitt, in Abhängigkeit von φ, ist

$$dq = dl \cdot h_{\varphi} = \frac{D}{2 \sin \lambda} d\varphi \cdot e_1 \sin \varphi \cos \lambda = \frac{D \cdot e_1}{2 \tan \lambda} \sin \varphi \, d\varphi .$$

Nach q bzw. φ integriert erhält man den augenblicklichen, durch eine Schneide abgetrennten Spanquerschnitt:

$$q = \frac{D \cdot e_1}{2 \tan \lambda} \int_{\varphi_{\text{ein}}}^{\varphi_{\text{aus}}} \sin \varphi \cdot d\psi = \frac{D \cdot e_1}{2 \tan \lambda} (\cos \varphi_{\text{ein}} - \cos \varphi_{\text{aus}}) .$$

Wenn zu gleicher Zeit nicht ein Zahn, sondern mehrere Zähne im Eingriff stehen, dann ist

$$q_{\text{ges.}} = \frac{D \cdot e_1}{2 \tan \lambda} \sum_{i=1}^{\varphi} (\cos \varphi_{i\,\text{ein}} - \cos \varphi_{i\,\text{aus}}) .$$

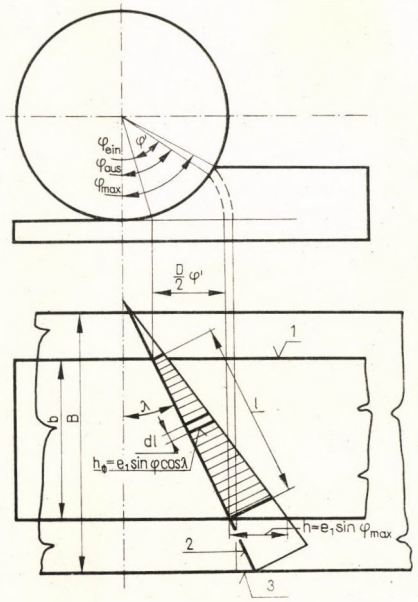


Bild 10. Berechnung des Spanungsquerschnitts beim spiralverzahnten Walzenfräser (*1* abgewickeltes Werkstück, *2* Schneidkante, *3* abgewickelter Mantel des Fräsers)

Beim Fräsen mit einem schrägverzahnten Fräser hat man das Eingriffverhältnis sinngemäß zu deuten, die Berührungsfläche vergrößert sich nämlich und nimmt den Wert

$$D/2\,\varphi + b \tan \lambda$$

an, wie dies aus Bild 10 zu entnehmen ist. Demnach beträgt das Eingriffverhältnis

$$\psi = \frac{\frac{D}{2}\varphi + b \tan \lambda}{\frac{D}{2}\delta} = \frac{\frac{D}{2}\varphi}{\frac{D}{2}\delta} + \frac{b \tan \lambda}{D\frac{\pi}{z}} = \frac{\varphi}{\delta} + \frac{b \cdot z \cdot \tan \lambda}{D \cdot \pi} .$$

Damit kamen wir bei einer Spansorte an, welche als die allgemeinste anzusehen ist, und die bei der Anwendung eines schrägverzahnten Walzenfräsers entsteht. Ohne einen zahlenmäßigen Nachweis kann man feststellen, daß

man in der Zerspanungspraxis bei der Berechnung des Spanquerschnittes gewisse Annäherungen verwenden kann, denn im Endergebnis befindet sich die Abweichung in jedem Fall innerhalb der beim Zerspannen zulässigen Fehlergrenze.

SCHRIFTTUM

1. KRONENBERG, U.: Grundzüge der Spanungslehre II. Springer Verlag, Berlin 1963; 430.
2. *Вульф, А. М.:* Резание металлов. Машгиз, Москва 1963; 128.
3. FAZAKAS, B.—HORNYIK, L.: A forgácsolás elmélete (Theorie des Zerspanens). Tankönyvkiadó, Budapest 1965; 400 (Manuskript).

Contribution to a More Precise Method of Finding the Cross-Section Area of a Chip Milling. Author deals with a method for computing the cross-section area of chips. For the determination of this area a common principle is applied, whether the cross-section is constant or changing with time, be it a simple or a complex one. The question of precise calculation is equally analyzed and the investigation is extended to cases when some neglection might be judged to be justified. In examining chip formation during milling special care is given to expound methods for calculating the length of chips and to state the limits of application. Finally, a general example is presented by showing how to determine the cross-section area of chips obtained by means of a slabbing cutter having spiral edges.

Дополнения к уточнению расчета сечения стружки, получаемой при фрезеровании *(Б. Фазакаш).* В данной работе автор занимается расчетом сечения стружки. На основе общего принципа рассматривается определение простого и сложного по форме сечения стружки, неизменной и переменной во времени. Особое внимание уделяется вопросу применения точной методики расчета, а также исследуется, в каких сулчаях расчет можно производить с пренебрежениями. В области формирования стружки при фрезеровании анализируются методики расчета длины стружки и определяются области их применения. В заключение автор показывает расчет размера сечения стружки, образующейся при цилиндрическом фрезеровании, как наиболее общий вариант определения сечения стружки.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 381—413 (1970)

ESTIMATIONS OF DISTRIBUTION AND DENSITY FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS IN THE MANAGEMENT OF WATER RESOURCES

M. DOMOKOS*

[Manuscript received: March, 20 1969

Owing to the widespread adoption of the management of water resources, the hydrological applications of the characterizations of the probability distribution has suddenly grown in significance. Consequently knowledge is required for the basic concepts and theorems of the theory of probability concerning the estimates of the distribution and density functions wich in short are expounded in this study. The motives for the application of the fitting distribution functions are examined and the experiences to be utilized in this field are reported. In the scope of the study made at the Research Institute for Water Resources Development, Budapest, the parameters of the normal, lognormal and gamma distribution functions of the daily discharges of 15 observation profiles are calculated for every month with maximum likelihood estimation and with the aid of a computer.

1. Significance of the characterization of distributions in the management of water resources

It is well known that the water requirement of mankind — first of all owing to the rapid industrialization, the more and more intensive agricultural economy and urbanization — rapidly increased, but at the same time the pollution of the water resources also showed an upward tendency. This process is still continuing in our days, and according to technical-economic estimations, it will steadily progress also in the future. Water is no longer a free commodity: systematic management of water resources is of vital significance. That is why a new scope of activity developed: management of water resources.

The management of water resources is a branch function of water conservancy: it includes those scientific, technical, economic and managerial problems the purposes of which are:

1. accounting,
2. comparison in a water economy balance and
3. coordination

of the water resources and water supply of the human society. The coordination is realized partly by modifying the natural time and areal distribution of

* Research Institute for Water Resources Development, Department of Water Resources Management, Kerékgyártó u. 97, *Budapest XIV.* (HUNGARY).

water resources and protection of their quality, partly by systematically controlling the water requirements [18].

The general adoption of the systematic management of water resources is necessary in regions where satisfying water requirements, if only temporarily, encounters great difficulties. Also Hungary is counted among these territories [17].

The principal means of the realization of the rational management of water resources is the water economy balance or shortly: *water balance*. This is the accounting and comparising in some system of the quantitative indices of the water resources (utilizable in a given period) of a water development unit[1] as well as of the water demands of human society on this resources. Accounting and balancing the quantity indices are referred to as quantity side, and those of the quality indices as quality side of the water balance. In general, only the two sides together constitute a water balance of full value.

The general mathematical model of the quantity side of the water balance is the function [1]:

$$\gamma = \gamma\big(\xi_1(E,t), \xi_2(E,t), \ldots, \xi_i(E,t), \ldots, \xi_n(E,t)\big) = \gamma(E,t)\,, \quad (E\in\mathcal{E},\ t\in T) \qquad (1)$$

where γ = index-number of the water balance;
ξi $(i = 1, 2, \ldots, n)$ = water balance element;
E = unit of water conservancy;
$\mathcal{E}$ = specified system of the unit of water conservancy;
t = time, and finally
T = period of reference of the water balance which may be a specified term or an ideal period considered as representative from the viewpoint of the management of water resources.

The definition of *water balance elements* ξ_i is more or less arbitrary; their selection depends mostly on the purpose and system of the given water balance. In the Hungarian practice of the management of water resources one of the preferred elements of the water balance is always the natural water resources, that is, in the given unit of water conservancy the water supply furnished by the natural terrestrial circulation of water per unit of time which we well denote in the following by $\xi_1 = Q$. Besides, one usually distinguishes the following elements of the water balance ξ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$: water reserve to be left in the bed, surplus reserve in storage reservoir, surplus water reserve gained from the sewage and used waters, water supply yielded to other units of water conservancy and received from them, finally, water demands of various water consumer groups (water supply of the inhabitants, industry, irrigation, pisciculture, etc.).

Grouping the water balance elements ξ_i into two categories and appropriately combining them we obtain the *water balance arms:* the functions of

[1] The water development unit is a part of the surface or the crust of the earth suitably confined from the point of view of water resource management.

the utilizable water resources $K = K(E, t)$ and water demands $I = I(E, t)$. ξ_1 is thus meaning always the element of the utilizable water resources, conversely, the proper place for the rest of the water balance elements is not so definite. Therefore, it can be written down as:

$$K(E,t) = K\big(\xi_1(E,t), \xi_{i1}(E,t), \xi_{i2}(E,t), \ldots, \xi_{ik}(E,t)\big)$$
$$I(E,t) = I\big(\xi_{j21}(E,t), \xi_{j2}(E,t) \ldots, \xi_{jl}(E,t)\big), \qquad (k+l = n-1) \tag{2}$$

wherein by $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{i_k}$ the components of non-natural origin of the utilizable water resources and by $\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{j_l}$ the components of water demand are denoted. Using them, the quantity side of the water balance may be written as

$$\gamma(E,t) = \gamma\big(K(E,t), I(E,t)\big), \qquad (E \in \mathcal{E}, t \in T). \tag{3}$$

One of the water balance indices being defined by itself, is the function

$$\gamma_1(E,t) = K(E,t) - I\,(E,t), \qquad (E \in \mathcal{E}, t \in T) \tag{4}$$

which, where positive, is referred to as free water resources, where negative, as water shortage.

The result of the water balance is a judgement called *qualification of the water balance*. This is a statement declaring whether the water balance is active, passive or in equilibrium.

The meaning of this qualification will not be detailed here; simply said, the water balance is active if the utilizable water resources of the unit of water conservancy has, to a certain probability, a larger free part than a specified quantity. The water balance is passive, if the water demand of the unit of water conservancy may be satisfied with a certain probability in a smaller extent than a certain quantity. The water balance is in equilibrium, if a water shortage quantity which is to be expected with a certain probability or the free water reserve are smaller than a specified quantity.

The qualification made on the basis of the water balance is followed by the decision of the planning of management of water resources, that is, measures of the operative management of water resources. Their purpose is the suitable utilization of the free water resources in case of an active water balance, the economic elimination of the water shortage in case of a passive water balance, finally, the stabilization of the equilibrium in case of an equilibrium in the water balance.

The equation describing the general water balance should be solved with the aid of simulation [25]. The solution will not be detailed here, partly, because is was not yet used in Hungary.

In every day practice of the management of water resources, from the general model described by [1] different water balances will be produced by certain *simplifications*. These simplifications consist in that the first or the second of E or t or both of them will be fixed.

One of the simplest and therefore the most frequently applied variation of the water balance is as follows: Be $\mathfrak{S} \equiv E_0$ the drainage basin ordinated to a given profile of a water course and T such a period, wherein with the exception of the natural water supply $\xi_1 = Q$ all the water balance elements ξ_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$, further the resulting tolerance of water shortage ϑ[2] of the consumers in the drainage basin E_0, may with a tolerable neglection be considered as constant, that is, $\xi_i(t) = \xi_i = \text{constant}$ $(i = 2, 3, \ldots, n,\ t \in T)$ and $\vartheta(t) = \vartheta = \text{constant}$ $(t \in T)$.

This neglection is permissible because the time function $\vartheta(t)$ has also theoretically a trendlike, a periodical and a random component. As a matter of course, this latter component — being a characteristic determined by economical decisions — will be ignored. The value of the trend-like component concomitant with the development of the management of water resources is always prepared for a particular situation, wherefrom we assume that it (theoretically) lasts for an infinite length of time, thus neither does ϑ change its value in a trendlike way during this period. Finally the remaining periodical function $\vartheta(t)$ will be replaced by a periodical step function when the reference period T may be selected as the combination of equal parts of periods recurring (annually), not directly adjoining, wherein the value of the tolerance of water shortage ϑ is constant.

Let us denote the distribution function of the water balance element $\xi_1 = Q$ relating to T, by $F(x)$, that is,

$$F(x) = P\big(\xi_1(t) < x\big) \tag{5}$$

and assuming that we know the estimation

$$d(x) \sim 1 - F(x) = P\big(\xi_1(t) \geq x\big) \tag{6}$$

of the function $1 - F(x)$. Let us name the symbol d durability [2] and denote the value x associated with the ordinate d in the function $d(x)$ with $\xi_1^{(d)}$.

Then, the water-balance index according to (4) relating to the unit of management of water resources E_0 and to the period T_0 may be written as

$$\gamma_1^{(1-\vartheta)} = K^{(1-\vartheta)}(\xi_1, \xi_{i1}, \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) - I\,(\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jl}), \qquad (k + \quad = n - 1),$$

[2] The tolerance of water shortage of a water user related to a period T is the number ϑ $(0 \leq \vartheta \leq 1)$ which defines that the user — in an average of a great number of repetitions of the period T — at most in what part of the whole period may tolerate a water supply less than his water demand in such a way that his functional and economic operation may still be continued [18]. It is assumed that the tolerance in water shortage of the users of a unit of management of water resources has one and the same resulting value.

which can also be written in the form

$$\gamma_1^{(1-\vartheta)} = K(\xi_1^{(1-\vartheta)}, \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{ik}) - I(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{jl}), \qquad (k+l=n-1), \quad (7)$$

because we assumed that the water balance elements are at T_0 constant.

The other plausible definition of the water-balance index is as follows in a particular case:

Let the water-balance now be built up as

$$K(\xi_1, \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{ik}) = \xi_1 + \xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \ldots + \xi_{ik}$$

and similarly

$$I(\xi_1, \xi_{j2} + \ldots, \xi_{jl}) = +\xi_{j_1} \ldots, \xi_{j_2} + \xi_{jjt}.$$

Let further be

$$d(y) \sim P\big(K(\xi_1, \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k}) \geq y\big) = P\big(\xi_1 \geq y - (\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \ldots + \xi_{i_k})\big).$$

Let finally be d' and d'' two numbers, chosen according to the practical viewpoints of the management of water resources in respect to which it is true that

$$0 < d' \leq 1 - \vartheta \leq d'' \leq 1.$$

The index of the water-balance is

$$\gamma_2 = d(y)|_{y=\xi_{j_1}+\xi_{j_2}+\ldots+\xi_{jl}}.$$

The qualification of the water-balance is active if

$$\gamma_2 > d'',$$

is in equilibrium if

$$d' \leq \gamma_2 \leq d''$$

and passive if

$$\gamma_2 < d'.$$

In connection with the principal means of work, the water-balance, by the preceding considerations it has only been attempted to prove that with the necessary development and generalization of the water resources management the *significance of hydrological application of the probability characterization of the distribution rapidly increased*. Therefore, for civil engineers engaged in hydrology and management of water resources it is time to thoroughly recognize the probability bases of the description of distribution, to revise some of the concepts and methods more or less perfunctorily borrowed from the mathematical statistics applied often fetishized in a routinish way in hydrology.

This paper is, with regard to the preceding considerations, intended to summarize the basic knowledges, theorems and significance relating to the

distribution and density functions playing an important role in the management of water resources as well as an expression of some connecting ideas and experiences. First of all the most important basic knowledges of the theory of probability, indispensable in the treating of distribution and density functions will be discussed. In the next chapter some problems connected with the estimation of the distribution and density functions will be dealt with. Finally, the reasons and conditions of the application of the so-called fitting distribution functions will be discussed.

2. Elements of the theory of probability

In this chapter the most important of the theory of probability (and those of mathematical statistics) applied in Chapter 3 and 4 will be shortly recapitulated [6], [7].

A) Probability field

In the Kolmogorov's axiomatic structure of the theory of probability we assume to be a given *σ-algebra* isomorph with a Boolean σ-algebra of events. On this σ-algebra a normed measure is defined which we refer to as probability.

Thus, the Kolmogorov-structure of the theory of probability is based on the following axioms.

I. A non-empty set Ω, the space of events is given. The elements of Ω are called elementary events and denoted with ω: $\omega \in \Omega$.

II. An algebra $\mathfrak{A}$ of the subsets of Ω is defined; the sets A belonging to $\mathfrak{A}$ are called events.

III. $\mathfrak{A}$ is σ-algebra, that is, if

$$A_k \in \mathfrak{A}\ (k = 1, 2, \ldots), \quad \text{then} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}.$$

IV. To each of the elements of $\mathfrak{A}$ a number $0 \leq P(A) \leq 1$ is coordinated which is called the probability of the event A.

V. $P(\Omega) = 1$.

VI. If $A_1, A_2, \ldots$ is a pairwise disjoint, finite or countably infinite series of sets belonging to $\mathfrak{A}$, then

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

If on the $\mathfrak{A}$ σ-algebra of the subsets of a set $\mathfrak{A}$ a set-function $P(A)$ is defined and the axioms I—VI are fulfilled, then we have to deal with *Kolmogorov's* field of probability, the designation of which is: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

B) Random variable

A real function of the form $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ defined on Ω, all the niveau sets of which are the elements of $\mathcal{A}$, is called random variable. (By niveau sets of $\xi = \xi(\omega)$ the A_x sets, defined by the inequality $\xi(\omega) < x$ is meant, where x is an arbitrary real number.)

The random variables ξ and η are *independent* if for every real number x and y if it is true that

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)\, P(\eta < y).$$

The random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi s$ are independent if

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1)\, P(\xi_2 < x_2), \ldots, P(\xi_n < x_n) \quad (8)$$

is fulfilled.

C) Distribution function

The function $F(x) = P(A_x) = P(\xi < x)$ is referred to as the ***distribution function*** of the random variable ξ. It is evident that the distribution function defined in this way, is nondecreasing, from the left-hand side continuous function, the limit value of which in $-\infty$ is zero, and in $+\infty$ is 1. The distribution function $F(x)$ can often be written in the more usual form $F(x; \vartheta)$ where $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$ is the so-called parameter vector and $\vartheta \in R^k$ where R^k is the space of k-dimension of the parameters.

The concept of the distribution function may also be generalized to the random vector-variables. By a random vector-variable $\eta_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ of n-dimensions such a vector of n-dimensions is meant, all the components of which are random variables defined on the same probability field $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. The joint distribution function of the vector variable η_n, or in other words the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ is

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n).$$

D) Density function

In the theorems to be discussed later on, the ***absolutely continuous distribution function*** obtains a significant role.[3] If $F(x)$ is absolutely continuous, then

[3] The function $F(x)$ is called absolutely continuous if to an arbitrary positive number ε a number $\delta > 0$ can be found so that for every disjoint interval system (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n;\ a_k < b_k)$ for which

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

let $f(x) = F'(x)$. If $F'(x)$ does not exist at a point, then $f(x)$ will not be defined there; however, these points make up a set of zero measure. The function $f(x)$ is called the density function of ξ. From the properties of the distribution function follows that $f(x) \geq 0$ and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

E) Mean value

If the distribution function of the random variable ξ is $F(x)$, then its *mean value* $M(\xi)$ is defined by the Lebesgue—Stieltjes integral

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x),$$

provided it exists.

Similarly, the mean value of a function $\alpha\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ of the random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ is

$$M[\alpha(\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x_1, x_1, \ldots, x_n)\,dF(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

where $F\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is the joint distribution function.

If $F(x)$ is absolutely continuous and we denote the density function of ξ by $f(x)$, then

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

F) Variance

The *variance* $D^2(\xi)$ of the random variable ξ will be defined as

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 dF(x).$$

If $F(x)$ is absolutely continuous and $F'(x) = f(x)$, then

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x)\,dx.$$

---

will be fulfilled, the inequality

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

is true. Every absolutely continuous function can almost everywhere be differentiated and is equal with the integral taken from $-\infty$ to x of its derivated function [6].

G) Statistic sample

By *statistic sample* (shortly: sample) the result of observations (tests, measurements) relating to a random variable is meant. The sample elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ are random variables. A substantial requirement is that each of the observations should really relate to the random variable in question, i.e., the sample should be representative.

H) Statistics

A measurable function[4] of the sample elements is called *statistics*. Consequently statistics itself is a random variable.

One of the statistics often used, taken in a more generalized sense, which also plays a significant part in this paper, is the *empirical distribution function* $F_n(x)$, the definition of which is: If the elements of a sample are $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, then the empirical distribution function of the sample is

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi_k < x \\ 1 \leq k \leq n}} 1 . \tag{9}$$

This function is a monotonous nondecreasing, from the left-hand side continuous step function, the step points of which are at the values of the sample elements ξ_k.

It can easily be recognized that if the elements of a set are independent random variables of the same distribution pattern, then the durability curve $d_n(x)$ [2] plotted from the elements of the set in a manner developed in practice in the hydrology and management of water resources, and the empirical distribution function $F(x)$ established of the elements of the set are connected by the relation

$$F_n(x) = 1 - d_n(x) .$$

On the other hand, defining a statistics called "*empirical density function*" is not such a simple and consistent problem. Since the empirical distribution function is a step function, no such statistics exists which would be in the same relation with the empirical distribution function as the (theoretical) density function is with the theoretical distribution function. In connection with the theorem 3.3 in Chapter 3, after Parzen, we shall define a class of the statistics, the elements of which possess certain properties demanded from the empirical density function.

[4] In the theorems detailed in Chapter 4 we assume, in general, the existence of the Borel-measurability of statistics. The function $g(x)$ is Borel-measurable if the set defined by the inequality $g(x) < c$ is in respect of every real c a Borel-set. Thus, for example, every continuous function is Borel-measurable, because in case if $g(x)$ is continuous, $g(x) < c$ is an open set.

I) Estimation

Assuming that in order to estimate the unknown parameter vector $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$ of a distribution function having the form $F(x; \vartheta)$ $(\vartheta \in R^{(k)})$ of a random variable ξ, we use the sample of n elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ relating to ξ. By estimating ϑ the establishment of such a statistic vector of k-dimensions

$$\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}), \quad \left(\alpha^{(j)} = \alpha^{(j)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \; j = 1, 2, \ldots, k\right)$$

is meant for all the components which satisfying particular requirements, may replace the correspondent component of ϑ that may be symbolized as follows: $\alpha^{(j)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \sim \vartheta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Similarly, by generalizing the concept of estimation, we may speak of the estimation of the distribution function $F(x)$ (or the density function $f(x)$) of a random variable by a function $F_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ (or $f_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$) on the whole scale of numbers in a sense that the function $F_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (or $f_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$) is almost at every value of x the estimation satisfying the above mentioned requirements of correspondent ordinate of $F(x)$ (or $f(x)$). (As a matter of course, the estimation of the complete distribution and density functions may have also an other interpretation, the discussion of which, however, must here be omitted.)

It has been mentioned that in connection with the estimations some specified requirements should be satisfied. In general, these requirements are as follows.

1. Let the statistics $\alpha_n = \alpha_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ be the unbiased estimation of the parameter ϑ. This means in the case of the estimation of parameters that in respect to every $\vartheta \in R^{(k)}$ it should be true that

$$M_\vartheta(\alpha_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dF\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \vartheta\right) = \vartheta\,,$$

where $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \vartheta)$ is the common distribution function of the sample elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. If by $g(x)$ a distribution or density function is denoted, and $\alpha_n = g_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ is its estimation from the sample $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ of n elements in the meaning above defined, that the requirement of the unbiased estimation may be drafted as follows. Let for almost every x be

$$M\left[g_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\right] = g(x)\,.$$

A more moderate requirement than the unbiased estimation is the requirement of the asymptotically unbiased estimation. This, by using the

above notation, means the requirement a condition that

$$\lim_{n\to\infty} M[g_n(x\,;\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)] = g(x)$$

should for almost every x be fulfilled.

2. Dispersion of the estimation $D(\alpha_n)$ should be the smallest possible.

3. Let α_n be a *consistent* estimation, i.e., it should tend towards the real value with the increase of n in some sense. In case of an estimation of distribution and density functions as defined above, for example, the following interpretation of the requirement of consistence is plausible: If $g(x)$ denotes a distribution or density function, and $\alpha_n = g_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ is the estimation of $g(x)$ from the sample $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ of n elements, then for almost every x

$$\lim_{n\to\infty} D^2(g_n) = \lim_{n\to\infty} M\,[g_n(x; \xi_1, x_2, \ldots, \xi_n) - g(x)]^2 = 0\,.$$

Then $g(x)$ is referred to as the *consistent* estimation *in the mean square value of* $g(x)$.

4. Should α_n be sufficient statistics, i.e., it should comprise in respect to ϑ most of the informations to be obtained from the sample elements.

J) Methods of estimating parameters

For the estimation by statistics of unknown parameters of the distribution function of a random variable two basic methods have been developed in practice.

1. The essence of the momentum method is as follows. Let the unknown distribution function be $F(x) = F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$, and the required parameters: $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$. We assume that the first k empirical moments calculated from the sample elements ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are successively equal to the corresponding moments of the theoretical distribution function $F(x)$, i.e.,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, dF\,(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)\,, \quad r = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Solving this system of equations for $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$, we obtain the estimations of the required parameters.

The momentum method is relatively easy to treat and to perceive from the engineering aspect. It has the shortcoming that its application is associated with substantial loss of informations [20].

2. The outlines of the basic idea of the estimation of parameters based on the principle of the *maximum likelihood* are as follows. We prescribe that

the sampling result $\{\xi_i = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ should fall with a maximal probability in the n-dimension space just in the neighbourhood of the point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. The solutions of the system of equations obtained from this assumption are the estimations of the parameters $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$.

The principle of the maximum likelihood also leads — under sufficiently general conditions — to "good" (asymptotically consistent) estimations [7], therefore, it is more efficient than the momentum method [20]. Its disadvantage is that also in the case of types of distribution being the most general in the practice of hydrology and management of water resources (for example, in the case of a lognormal and gamma-distribution) it yields an implicit system of equations which can only be solved with the aid of approximating methods. On the other hand, for the estimation of the parameters of other types of distribution (for example, Halphen-distribution) no maximum likelihood equations have been worked out so far [20].

In the techniques of hydrology and management of water resources many (in Section 4.12/B it will be exposed that unfortunately too many) types of distribution functions are used. From among these, mainly for demonstrating those mentioned above of the estimation of parameters, the formulas of the lognormal and the gamma-distribution will presented together with the equations serving for the estimation of their parameters of the sample $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ consisting of n elements, satisfying the corresponding conditions.

a) Lognormal distribution

The equation of the lognormal distribution is as follows:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t - x_0} e^{-\frac{[\log (t - x_0) - m]^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad x_0 \leq x \leq \infty.$$

The parameters are: x_0, m and σ.

The system of equations for the estimation of the parameters with the aid of the *maximum likelihood* method is:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log (\xi_i - x_0),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\log (\xi_i - x_0) - m]^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i - x_0} \left[1 + \frac{\log (\xi_i - x_0) - m}{\sigma^2} \right] = 0.$$

b) Gamma-distribution (Pearson's III distribution)

The distribution function is

$$F(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_{x_0}^{x} (t-x)^{k-1} \cdot e^{-\lambda(t-x_0)}\, dt, \qquad x_0 \leq x < \infty.$$

The parameters are x_0, k and λ.

The system of equations for the estimation of the parameters with the aid of the *maximum likelihood* method is

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_0),$$

$$\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log' [\lambda(\xi_i - x_0)],$$

$$\frac{\lambda}{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i - x_0}.$$

Equations of the estimation of parameters with the aid of the momentum method, by introducting the notation [4]:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

$$m_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ([\xi_i - m_1)^2,$$

$$m_3^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - m_1)^3$$

are as follows

$$x_0 = m_1 - 2 \frac{(m_2^*)^2}{m_3^*},$$

$$\lambda = 2 \frac{m_2^*}{m_3^*},$$

$$k = 4 \frac{m_2^*}{m_3^*}.$$

3. Estimating the distribution and density functions

This chapter is, first of all, concerned with the basic theorem of the mathematical statistics established by GLIVENKO. The possibility of estimation for the distribution functions of basic significance is declared in respect to the

management of water resources (see Chapter 1), therefore some remarks should be made in connexion with its applicability to hydrology and management of water resources. Subsequently, some theorems will be presented relating to the estimation of density functions, this being interesting from the viewpoint of the application in the management of water resources.

3.1. Glivenko's theorem

Let the random variables be $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ the elements of a sample taken from a statistical population of equally-distributed, independent random variables; their common distribution function being $F(x)$. The empirical distribution function of the sample should be denoted by $F_n(x)$.

Then, we have

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1.$$

The theorem is, for example, verified by RÉNYI [6].

Remark. Glivenko's theorem which is justly considered as the basic theorem of mathematical statistics declares that from a sufficiently great sample an exhaustive information might be obtained with probability 1 for the distribution function $F(x)$. Namely, the empirical distribution function $F_n(x)$ produced from the sample $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ uniformly converges on the whole scale of numbers towards the theoretical distribution function $F(x)$ if n, the number of the elements of the sample tends towards the infinite.

As a matter of fact, also in the hydrology and economy in water resources, Glivenko's theorem is applied — more or less deliberately — when the probability $P(\xi \geq x) = 1$ is estimated by the value

$$P(\xi \geq x) = 1 - F(x) \sim 1 - F_n(x) = d_n(x),$$

where $d_n(x)$ is the ordinate of the durability curve at the place x. It is a different question, to what extent the sample elements — for example, the daily (mean) discharges — satisfy the condition of Glivenko's theorem.

The uniformity of the elements of the sample is only an object, it is aimed at to assure a really uniform distribution of the elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ of the sample. This, in practice, may commonly to a sufficient extent be assured by the hydrological analysis of the sample elements. Lately, the uniformity of the sample elements is also checked by mathematical-statistical methods (for example, with the Kolmogorov—Smirnov-test) [4], [8].

The independence of the discharge data used as sample cannot be assured, in principle, in the management of water resources, owing to the following two reasons:

a) The (mean) discharges of the consecutively longer or shorter periods are commonly not independent.

To explain this statement the following should be submitted for measuring the independence of the statistical sample elements.

Let be the statistical sample $\{\xi(\Delta t_i)\}_{i=1}^{n}$ where $\xi(\Delta t_i)$ is the observed value of the random variable ξ of the i-th of the consecutive periods Δt_1, Δt_2,. . . . . , Δt_n of specified length. If ξ is of normal distribution, then for measuring the independence of the sample elements $\xi(\Delta t_i)$ the autocorrelation coefficient

$$r = \frac{\sum_{i=2}^{n} [\xi(\Delta t_i) - M(\xi)]\,[\xi(\Delta t_{i-1}) - M(\xi)]}{\sum_{i=2}^{n} [\xi(\Delta t_{i-1}) - M(\xi)]^2}, \quad (|r| \leq 1)$$

is used [21]. If $r = 0$, than the sample elements $\xi_i = \xi(\Delta t_i)$ are non-correlated, and if ξ is of normal distribution, then, at the same time, they also are independent, i.e., satisfying the condition (8). In the case of other distribution patterns, commonly, from the non-correlatedness does not follow the independence [7], nevertheless, it provides certain informations.

The mean discharges $Q(\Delta t_i)$ of a water course of consecutive Δt_i periods are, according to experiences, non-correlated neither in case [20] if we choose $\Delta t_i = 1$ year. (The autocorrelation coefficient of the mean discharges of the consecutive years falls, in general, in the region $0{,}2 \leq r \leq 0{,}4$.) With the decrease of the length of Δt_i, as a matter of course, the value of r continues to increase. But, from the viewpoint of the management in water resources the assumption of a longer period than $\Delta t_i = 5$ to 10 days may not be permitted owing to the concomitant loss of information.

To sum up data mentioned in the foregoing: practically, it is impossible to take a sample of independent elements relating to the discharges, because

— the mean discharges of the longest periods Δt_i permissible in the management of water resources are strongly correlated,

— neither in case if the above discharges were practically non-correlated, the independence would be assured because, in general, the discharges aren't of normal distribution.

This difficulty could be overcome by such a generalization of Glivenko's theorem which instead of the demand of full independence of the sample elements would allow a certain *reduced dependence* which condition would, practically, already be satisfied by the discharge data. For example, in the case of such time series of discharges which can be described with an ergodic stationary stochastic process — since, in connection with such processes the strong law of large numbers used in proving Glivenko's theorem is also true

[24] — the aforementioned difficulty relating to the estimation of the distribution function of discharges does not exist any longer.

b) The fact that the random nature of sampling is excluded, this theoretically seems to be an insurmountable impediment. We should like to approach such a theoretical distribution function $F(x)$ which describes the discharge distribution in a period $T_1 = (t_1, \infty)$. However, at the same time, sampling is taking place from discharges observed in the limited period $T_2 = (t_1, t_2)$ $(t_2 < \infty)$. Commonly, we need the distribution function $F(x)$ for the prediction of the discharge distribution to be expected in the future. We should know that for establishing such a function $F(x)$, considered to be true for T_1, takes place, as a matter of course, in two steps: 1. we produce the $\tilde{F}(x)$ distribution function from the sample taken in the period T_2; 2. on the basis of certain theoretical and empirical considerations we assume a relation between $F(x)$ and $\tilde{F}(x)$, and we produce $F(x)$ from $\tilde{F}(x)$ on the basis of this assumption. (In practice, for lack of anything better, in most of the cases such an assumption as $F(x) = \tilde{F}(x)$ is to be adopted.)

After exposing Glivenko's theorem of great importance in estimating the distribution function we shall discuss the theorems concerning the estimations of the density functions. The following general theorem was established by ROSENBLATT.

Theorem 3.2: A continuous density function has no unbiased estimation

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be independent and equally distributed random variables; let their common density function $f(y)$ be continuous. Let the Borel-measurable function $f_n(y; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leq 0$ be an estimation of $f(y)$. $f_n(y; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ that cannot be the unbiased estimation of $f(y)$ [9].

Remark. The above theorem is also true in respect to such estimations $f_n(y; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ of the density function from which we do not wish to be non-negative. For example, the assumption

$$\int_a^b M\left[f_n(y; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\right] dy < \infty$$

would lead to the same conclusion, in respect to arbitrary values of a, b $(a < b)$, i.e., to the conclusion that $f(y)$ has no such unbiased $f_n(y; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ estimation which would satisfy this condition.

According to the theorem 3.2 the common density function $f(y)$ of the independent random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ of equal distribution has no unbiased estimation, i.e., on selecting the estimation of the density function to be applied our requirement should be more restrained. Before detailing this problem the way followed in the practice of data-processing of the *hydrology*

and the management of water resources concerning the estimation of the density functions of discharges should be revised.

The discharge is a non-negative random variable: $\xi \geq 0$, therefore, it is sufficient to define the so-called empirical density function to the half-scale $[0, +\infty)$. Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be a sample of n elements relating to the random variable ξ. We take in a suitable way such a system of intervals $\{E_i\}_{i=1}^m$, the elements $E_i = [a_{i-1}, a_i)$ of which, for example, are disjoint intervals, closed from the lefthand side and open from the right-hand side and the combination of which yields the half scale of numbers $[0, +\infty)$:

$$\bigcup_{i=1}^{m} E_i = (0, +\infty), \tag{10}$$

further, they satisfy the condition

$$0 < \mu(E_i),$$

where $\mu(E_i) = a_i - a_{i-1}$ is the length of the interval E_i.

Let us denote by k_i the number of the elements of the sample from which $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fall into the interval E_i:

$$k_i = \sum_{\substack{a_{i-1} \leq \xi_k < a_i \\ 1 \leq k \leq n}} 1,$$

Let further $\delta_{E_i}(x)$ be the characteristic function of the interval E_i:

$$\delta_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in E_i \\ 0, & \text{if } x \notin E_i. \end{cases}$$

Then, the empirical density function of the random variable ξ produced from the sample $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ is

$$f_n(x) = f_n^{\{E_i\}}(x; \xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{\mu(E_i)} \delta_{E_i}(x). \tag{11}$$

The function $f_n(x)$ defined above is a non-negative step function which also possesses the other known property of the (theoretical) density function:

$$\int_0^{+\infty} f_n^{\{E_i\}}(x; \xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{\mu(E_i)} \delta_{E_i}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} \frac{k_i}{\mu(E_i)} \delta_{E_i}(x)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\mu(E_i)} \int_0^{+\infty} \delta_{E_i}(x)\, dx = 1.$$

The disadvantage of the above estimation of the density function, a very plausible form from the practical viewpoint, is that it also *closely depends on the manner of distribution* defined by

$$\{E_i\}_{i=1}^{m}.$$

Anyhow, in the practice of the dataprocessing in hydrology — for lack of something better — this estimation of the density function is applied almost exclusively. Moreover, usually neither the empirical distribution function is strictly interpreted according to the definition (9), but according to the formula

$$F_n(x) = \int_0^x f_n^{\{E_i\}}(y;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,dy\,.$$

(Evidently, also the function $F_n(x)$ defined in this way, is a pure step function; only its steps are not at the points of the sample elements ξ_k, but at the limit points a_i of the intervals E_i. It is also obvious, though this statement is of heuristic character, that the more refined the division

$$\{E_i\}_{i=1}^{m}$$

of the scale of numbers, the more the function $F_n(x)$ defined in the above manner approaches the empirical distribution function, and the more the statement of Glivenko's theorem is true for itself, too.)

In the following another class of estimations of the distribution function more appropriate for the mathematical analysis, after E. PARZEN [10] should be discussed. Since the theorem 3.2 excluded the possibility of the unbiased estimation, it seems to be advisable to find such estimations $f_n(x) = f_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ which satisfy the requirement of the asymptotical unbiasedness, i.e., for which

$$\lim_{n\to\infty} M[f_n(x)] = \mathrm{f}(x)$$

is true.

Let for this purpose $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be equally distributed independent random variables, the common distribution function of which

$$F(x) = P(\xi_i < x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

is absolutely continuous. Therefore, they also possess a density function $f(x)$, in respect of which, by definition, the condition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

will be fulfilled.

One of the plausible estimations of $f(x)$ could be

$$f_n(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h}, \tag{12}$$

where $F_n(x)$ is the empirical distribution function of the sample, and h is an appropriately selected positive number depending on n. It is also self-evident that $h = h(n)$ should be selected in such a way that

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$$

should be fulfilled. The rapidity of the convergence ought to be defined too.

On the other hand, it is recommandable to analyse a much more general class than that under (12) of the estimations of $f(x)$. For the generalization we introduce the weight function $K(y)$:

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{if} \quad |y| \leq 1, \\ 0, & \text{if} \quad |y| > 1. \end{cases} \tag{13}$$

By making use of this, the function $f_n(x)$ according to (12) may be written as

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-y}{h}\right) dF_n(y) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x-\xi_j}{h}\right). \tag{14}$$

Now we find the above mentioned generalized class of the asymptotically unbiased estimations in the way that in the definition (14) we write in spite of the function (13) another appropriate $K(y)$ weight function. In the following we shall investigate how to choose the functions $h = h(n)$ and $K(y)$ included in the definition (14) that the function $f_n(x)$, by definition, should be the asymptotically unbiased estimation of the density function $f(x)$.

Theorem 3.3: A class of the asymptotically unbiased estimation of the density function

The common distribution function $F(x)$ of the equally distributed independent random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ is absolutely continuous, their density function is $f(x)$. The notation of the empirical distribution function produced from the sample of n elements serving for the estimation of $F(x)$ be $F_n(x)$.

Let $h = h(n)$ be such a series of positive constants for which

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = 0 \tag{15}$$

is fulfilled.

Let $K(y)$ finally be a function for which the following four conditions should be fulfilled

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |K(y)| < \infty, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(y)|\, dy < \infty, \tag{17}$$

$$\lim_{y\to\infty} |yK(y)| = 0, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\, dy = 1. \tag{19}$$

Then, the function

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h(n)} K\left(\frac{x-y}{h(n)}\right) dF_n(y)$$

is an asymptotically unbiased estimation of $f(x)$ at its points of continuity, i.e., for all of the points of x of continuity holds that

$$\lim_{n\to\infty} M[f_n(x)] = f(x).$$

This is, in essence, the simple consequence of a theorem established by BOCHNER [11].

The weight functions satisfying the conditions (16), (17), (18) and (19) may easily be produced. Such are — besides those defined under (13) — for example,

$$K(y) = 2\sqrt{\pi}\exp(-|y|);$$

$$K(y) = \frac{1}{2}\exp(-|y^2/2|) \text{ etc.}$$

The following theorem provides conditions for the consistency of the estimations (14) [10].

Theorem 3.4: On the consistency of the estimations of density functions

By using the notation of theorem 3.3, and taking into account its conditions, further, if the series of the constants $h = h(n)$ also satisfies the condition

$$\lim_{n\to\infty} nh(n) = \infty, \tag{20}$$

then the function $f_h(x)$ according to (14) is in the mean square value a consistent estimation of the density function $f(x)$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} M\,[f_n(x) - f(x)]^2 = 0\,.$$

4. Fitting distribution functions

It is questionable whether from the viewpoint of the management of water resources the establishment of the $F_n(x)$ functions associated with the profile of water courses or the equivalent durability functions, i.e., the close approximation of the theoretical distribution functions $F(x)$ characterizing the distribution of the profile discharge might be considered as a real purpose for characterizing the distribution of water resources. The answer must be negative because

a) commonly, the $F_n(x)$ functions cannot be defined by easily treatable formulas. Therefore, their consideration is difficult, even in the case of a single profile;

b) the theoretical or approximate distribution functions, even if they are of similar nature, are essentially different, and therefore, they are not appropriate to serve directly as basis for conclusions of such distribution functions in connection of which we have no or only a few data.

Our purpose is to find groups of distribution functions as large as possible, produced from observation results — for example, to the distribution function of profiles of water courses associated with a certain hydrological order of magnitude of a geographical unit of a region — *such types of easily treatable functions depending only on a few parameters which, in case of a suitable selection of the parameters, are well fitting to all of the empirical distribution functions* pertaining to the group. These so-called *fitting distribution functions*[5] — which in the following will be denoted by $F_n^*(x)$, are the estimations of the respective theoretical distribution functions $F(x)$, just as the corresponding empirical distribution functions $F_n(x)$ approximated or compensated by them, if only they appropriately adjust themselves to these latter. As a matter of course, the goodness of the approximation also depends on the osculation of the fitting distribution functions with the corresponding empirical distribution functions.

In this chapter, first of all, the necessity of the application of the fitting distribution functions will be examined. Then, a proposition will be made for

[5] This distinctive name is suggested by the author. The purpose of the introduction of this name is the elimination of the misleading usage accepted in the hydrology which identified the fitting distribution function with the theoretical distribution function.

the unification of the terminology related to the application of the distribution functions. Finally some ideas and experiences will be shown in connection with the practical establishment of the fitting distribution functions.

4.1. Necessity of the application of fitting distribution functions

In the Hungarian management of water resources, and also frequently in the practice of hydrology, the distribution of the discharges were characterized almost absolutely by durability configurations [2]. Let us now see those arguments on the basis of which the general introduction of fitting distribution functions in spite of the durability curves has been suggested. In the following three groups of such arguments, the most frequently occuring will be treated. In all the three groups the arguments themselves are presented under the character A), while the author's opinion is given under B).

4.11. Mathematical treatability. Geographical generalization

A) The empirical distribution function — contrary to the fitting distribution functions — cannot be given analytically, therefore, neither their classification into certain types, nor their definition by parameters is possible, they cannot be generalized by the change of the parameters according to geographical regions.

The great advantage of the fitting distribution function in comparison with the durability curves is that they can be given analytically (by a formula or tables) according to their types and with the aid of certain parameters; they can be generalized, by the change of the parameters according to geographical regions, thus they can replace lacking data [3].

B) The most powerful reason for the introduction of the fitting distribution functions is what has been said above. Namely, we need not justify that in the practice what an advantage may be assured if, for example, the distribution of the discharges of the profile of a water course could be given with the aid of a few parameters. This advantage has been utilized with great success so far by a number of technical branches of water economy, as flood control, exploitation of hydraulic power. It would be useful indeed if also the *management of water resources would make the best of this possibility.*

4.12. Comparison with foreign investigations

A) In foreign countries — in Europe perhaps with the exception of the two Germanies [20] — only the fitting distribution functions are generally used, while the empirical functions, or the durability curves are, in general, not applied. This partly shows that in foreign countries the characterization

by the fitting distribution functions is considered to be a more up-to-date method. On the other hand, independently of the correctness of this opinion, in order to compare the results of the investigations found in Hungary with those obtained in foreign countries, it would be desirable to characterize the distributions by the fitting distribution functions.

B) It is hardly contestable that *in order to allow for a comparison* between the Hungarian and foreign data, in certain fields, it would be convenient to introduce the characterization by the fitting distribution function.

However, the comparability is made more difficult if values read from the fitting distribution functions of *different types* (i.e., constructed with the aid of different, arbitrarily selected conditions) have to be compared. Unfortunately, it cannot be stated that the foreign practice is uniform either in the selection of the subsets to be processed or in respect to the types of the fitting distribution functions. This refers to that that there is no practice developed which could be directly adopted. On the other hand, one could perhaps conclude that the most advantageous ways of distribution of the discharges are also changing according to the units of geographical regions. *Accordingly, in this case one cannot expect a substantial improvement of the comparability from the adoption of the fitting distribution functions in our country either.*

4.13. Extension of the definition region of the distribution function

A) According to certain opinions, while the empirical distribution function depends on the set of informations serving as basis (for example, from the discharge data of the period processed), the fitting distribution function independently of the processed set of information approaches the distribution function of the data being characteristic, in principle, for an infinitely long period. Further characterization of the distribution by empirical distribution functions is primitive, it has no theoretical justification. This is also shown by the fact that according to the empirical distribution function the probability of occurrence of values lower than the minimum and higher than the maximum having been observed so far, is equal to zero, however, this is inconsistent with the practice, it spoils the accuracy of the prediction. Further: if, for example, we consider such a subset of the original set of data which contains the minimum or the maximum element, and we construct a durability curve as well as an empirical distribution function for the original set and for the subset, the durability of the minimum (or maximum) element will be different in these two sets. This disadvantage may be removed by the application of the fitting distribution functions.

B) The fitting distribution functions are curves constructed on the basis of given conditions straightening the empirical distribution functions forcing into types, fitting to the formers. A fitting distribution function can be all those

curves which satisfy the above conditions. The fitting distribution function is developed from the empirical distribution function by compensating them with some neglections.

However, in any case, the statement that the fitting distribution functions are theoretically more justified and result in a more reasonable approximation of the theoretical distribution functions than the corresponding empirical distribution functions, is erroneous. *It cannot be stated, in general, that the fitting distribution functions give a more accurate approximation.* The main advantage of the fitting distribution functions by no means consists in the possibility of a more reasonable approximation, but in their easier workability, in being easily standardizable, parametrizable and permitting definite extrapolation [3].

The basis of the objections related to the stiffening of the characterization of the distribution, first of all, of the fact that the segment of the empirical distribu tion function belonging to the neighbourhood of the ordinates $F = 0$ and $F = 1$ of the empirical dist ribution function is the most indistinct one. Namely, in general, it cannot be stated that a higher or lower than the maximum or minimum observed in the basic period (i.e., that, associated with the ordinates 0 or 1, on the empirical distribution function) cannot at all be expected in the future.

This idea also was apparent to those who applied the empirical distribution functions or the equivalent durability curves, and they treated the segment belonging to the region of the ordinates 0 and 1 of the durability curves, incidentally, in certain applications they deliberately deformed them (for example, they predicted a lower value for the minimum discharge than that readable from the durability curve).

However, the correction of the empirical distribution function being indispensable also in our opinion, in the region of the ordinates 0 and 1, may be frequently arbitrary, as it happened to be, as mentioned above in the instinctive practice.

But the values read from the empirical distribution functions differently biased, cannot be compared. The solution is: if the empirical distribution function must be biased, and this can only be done arbitrarily, we should apply some uniform method in order to be able to compare the results.

Further, if we change the two extreme segments of the empirical distribution function, it is advisable to replace the whole empirical distribution function difficult to treat mathematically by a continuous easily treatable curve which

a) fits to the durability curve as well as possible;

b) has a larger region of definition than the durability curve.

Now, here again we meet the idea of the necessity of the introduction of the fitting distribution functions but, by no means on the basis of consider-

ations on the exact theory of probability, but simply by way of practical, i.e., formal requirements and heuristic considerations (namely, with the help of a curve which is easy to treat, and by enlarging its region of definition in some way and to some extent).

4.2. Terminology

In Hydrology we refer to the ordinates of the durability curve $d_n(x)$ as *durability* and at the same time the F-ordinates of the functions $F_n^*(x)$ fitting to the empirical distribution functions $F_n(x)$, are usually called *probability*.

It is apparent that in the case of an identical set of observed data the values $F_n(x_0)$ and $d_n(x_0)$ associated with the same x_0 — equivalent to one another — are the approximate values of the ordinate $F(x_0)$ of the theoretical distribution function and of the number $1 - F_n(x_0)$, respectively. $F_n^*(x_0)$ is also an approximation of $F(x_0)$, from which *one could not say by any means that it is a more accurate approximation* or that it provides a more authentic information from the occurrence of x_0 than the value $F_n(x_0)$.

Therefore, it would be advisable to designate the ordinates of the curves $F_n(x)$ and $F_n^*(x)$ with the same expression to which — if necessary — we could add as an attribute the approximate function (i.e., the empirical distribution function, or its fitting function of a specified type) of the theoretical distribution function, the value of which is under discussion. There only remains the question: what this common name should be.

In the theory of probability the ordinates of the distribution functions are usually called probability; no distinctive designation exists. Therefore, it might be suggested that in hydrology and management of water resources, where the expression "durability" has a particular meaning, the *ordinates of all types of the distribution functions should be called durability*. The attribute of the expression "durability" would refer to the *type* of the distribution function. The ordinates of the theoretical distribution function $F(x)$ could be referred to as theoretical durability, and the ordinates of the empirical distribution function $F_n(x)$ as empirical durability (or simply: durability), finally, the ordinates of the fitting distribution function of gamma-type as gamma-durability.

However, this usage of expressions could not yet be definite, for, by its introduction, the value $d_n(x)$ by its traditional designation durability (Überschreitungsdauer) and the value $F_n(x)$ completing the former to 1 (Unterschreitungsdauer) would have the same name. Therefore, author suggests that, in order to eliminate the confusing divergence from the theory of probability, the traditional definition of $d_n(x)$ *should be dropped and, from now on, the word "durability" should only be used for the designation of the ordinates*

of the functions $F_n(x)$ *and* $F_n^*(x)$. This usage, as was noted in the foregoing [1], would also have advantages in the management of water resources, independently of the theory of probability, its adoption would simplify a great number of calculations. It is sufficient, for example, to consider the conclusion of this suggestion that in case of its adoption, in Eq. (7) of Chapter 1, in spite of $\xi_1^{(1-\vartheta)}$ it would have to be calculated with $\xi_1^{(\vartheta)}$.

4.3. Pratical establishment of the fitting distribution functions

4.3.1. Exposition of the problem

Let us assume that we know the empirical distribution functions $F_n(x)$ of the discharges of a geographical region considered as a water management unit (country, district, drainage basin etc.) relating to a certain number of profiles of water courses (having a given length of a series of data) and for a given period (for the whole year, for a month, decade). Our aim is to find such a type (or such types) of fitting distribution functions by replacing into the general formula of which the corresponding parameters computed from the set of informations resulting in $F_n(x)$ functions, yields the $F_n^*(x)$ functions reasonably fitting into the corresponding $F_n(x)$ functions, further, their set of values is, to a certain extent, larger than that of the former.

A possibility of simplification yields, if we have to find fitting distribution functions for a section of a shorter interval, for example, in case of the characterization of the supply of a low stage for an interval of $0 \leq F \leq F_1$, (where $F_1 < 1$) in spite of the section of the functions $F_n(x)$ relating to the whole interval $0 \leq F \leq 1$, i.e., only that it is desired that the fitting distribution functions should fit well into the empirical distribution functions only in the interval $0 \leq F \leq F_1$.

If we succeeded in finding such a type of fitting distribution functions $F_n^*(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$ which, by replacing the corresponding parameters $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ in all the profiles of a water course satisfying certain conditions — belonging to a certain hydrological order of magnitude or having a series of informations of a sufficient length — reasonably fits into the specified section $0 \leq F \leq F_1$ of the empirical distribution function of the discharges, the following should be the result of our investigations:

a) the general equation of the fitting distribution function and its region of validity (hydrological order of magnitude, the value of F_1, etc.),

b) the parameters $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ of each of the profiles.

Under favourable conditions, on the geographical map of the water management unit in question, the changes of the parameters $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ can be represented by *isometric lines* and thereby we succeed in the estimation-like establishment of the unit hardly observed or not observed at all, or with other words: a possibility is opened for the replacement of lacking data [5, 12].

4.3.2. Difficulties in the application in the management of water resources

It should be noted that, although any of the sections of the distribution functions can theoretically be produced, just the section of the low stage being of interest in the management of water resources frequently runs into special technical difficulties. The reasons for these are:

— The data of the discharges are commonly just in the range of the low stage *the least precise*, because in consequence of the changes in the stream bed and in its displacement, the low stage segment of the rate curve $Q = Q(H)$ serving as basis for the determination of the discharge data undergoes changes the most frequently;

— in the range of the low stage the *effect of the non-natural intervention* is the most significant, therefore, the natural and non-natural, or random and non-random components of the observed discharges may be separated with the greatest difficulties in this range;

— it is the fitting distribution function of the range of the low stage itself which depends substantially on the — by all means arbitrary — decision as *to what extent do we enlarge* the definition region of the observed data towards the zero discharge.

4.3.3. Practical results

A number of papers have dealt with the hydrological application of fitting distribution functions, for example [12, 13, 14, 15]. However, neither of these are intended to provide results directly applicable without further investigations to satisfy the special requirements of the Hungarian management of water resources. The reasons are:

— a part of the works are general and theoretical in nature,

— some of them do not treat the distribution of discharges but of precipitations,

— also those discussing discharges, are mostly concerned with the characterization of flood discharges [14, 15]; they do not treat the *especially natural low stages*, i.e., they deal with the characteristic discharges of periods shorter than a year, finally,

— the works of foreign authors, even in the case, when they solve factual problems similar to that at hand, these are, rather due to *different geographical conditions*, which is only of methodological value.

A) Markovic's results. MARKOVIC [13] sought for the best fitting distribution functions of the total precipitation and discharge per year on the basis of the data of 2500 observing stations for precipitation and discharges selected in the Western part of the U.S.A. and in the South-West region of Canada. He co-ordinated to each of the empirical distribution functions *fitting distri-*

bution functions of five different types. He selected the fitting distribution functions the most promising for the experiment, from the set of curves [16] obtained by the solutions of Pearson's general differential equation. The functions selected are: the normal, lognormal functions with two and three parameters, further the gamma distribution with two and three parameters.[6]

In these investigations carried out on a computer, concerning the osculations, he found that the *five fitting distribution functions* practically tried out were equivalent, in general, none of the five types fits the corresponding empirical distribution functions better than the other ones.

This result draws the attention to the fact that if we intend to select the appropriate type of function, then we should start from the analysis of the corresponding density functions, instead of the fitting ones frequently fitting also well to one another.

Fig. 1 shows the empirical distribution and density functions of the daily discharges of three observatory stations for discharge. (By empirical density function here a function, is meant which is defined by the formula (11) of Section 3.2.) In the example $\mu(E_i) = 50$ m^3/sec $(i = 1, 2, \ldots, n,)$ and $\mu(E_m) = \infty$. The figure clearly shows that while the distribution functions are rather similar, the forms of the density functions strikingly resemble one another.

B) Goda's results. Goda's study [12] is concerned with the distribution functions of the maxima of the precipitations in Hungary. He analysed the following three fitting distribution functions: the two-parameter gamma-distribution, the three-parameter gamma-distribution and the generalization of this latter according to KRICKIJ—MENKELJ.

His principal statements are: The *three-parameter gamma-distribution function* fits well with the empirical distribution functions in the region $0 \leq F \leq 0{,}5$, he suggests its application. The *two-parameter gamma-distribution function* commonly fits badly; its application is not suggested. In his opinion, the *form of the gamma-distribution function generalized by* KRICKIJ *and* MENKELJ is the more general among the three types of functions, however, its application is cumbersome and, therefore, it is only advisable in the region $0{,}5 \leq F \leq 1$ and only in the case when the three-parameter gamma-curve is not appropriate here.

C) Lazzari's and Lauterbach's results. From the practical point of view it is a remarkable result that LAZZARI [14] and LAUTERBACH [15], after the processing of a great number of data relating to the water courses of Sardinia

[6] The lognormal and gamma-distribution functions with two parameters are the special alternatives of the general distribution functions (with three parameters) obtained in case of $x_0 = 0$, presented in Section 2/J.

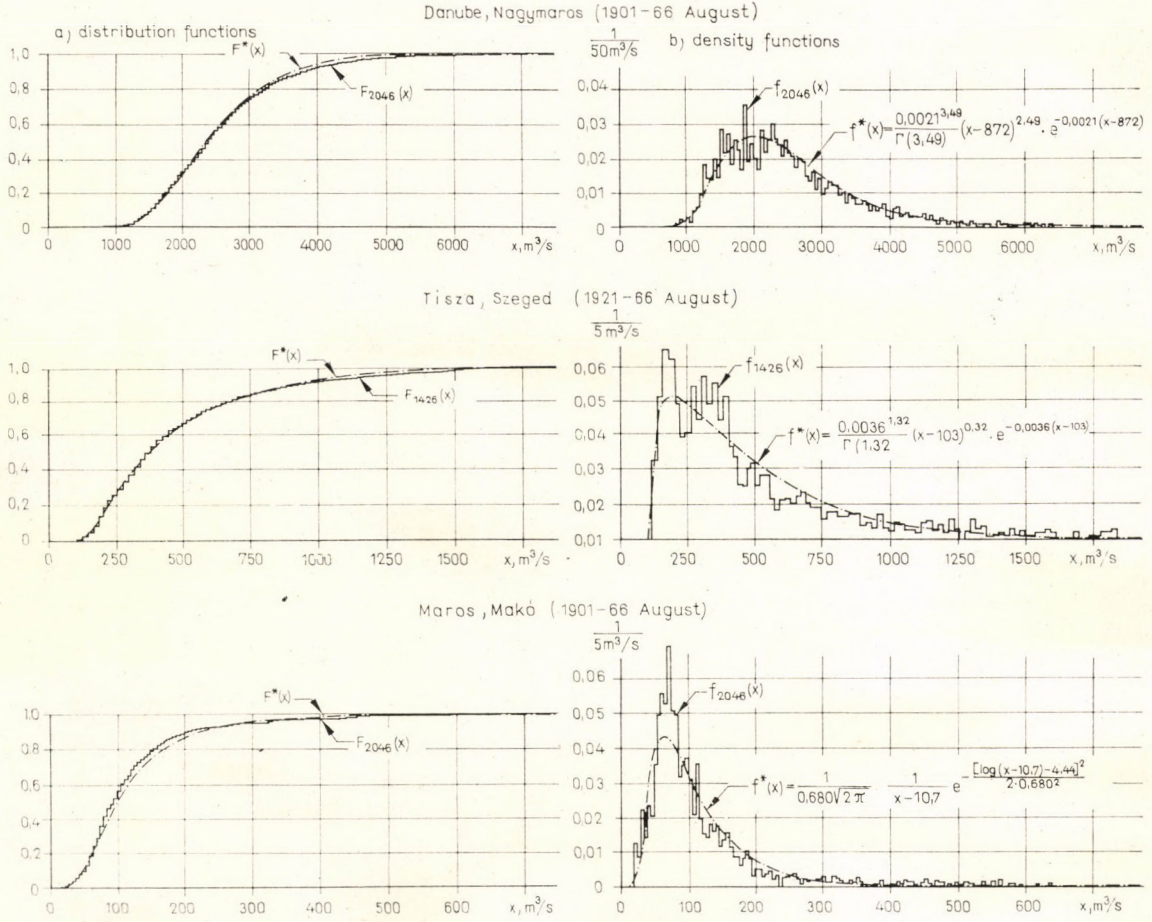


Fig. 1. Empirical and fitting distribution and density functions of daily discharges with the equations of the fitting distribution functions

and the German Democratic Republic obtained data in accordance with each other, however, contrary to SZIGYÁRTÓ's suggestion [4], the result is that with the empirical distribution functions of the *flood discharges* — more precisely, the maximum discharges observed in certain years, — the distribution functions of lognormal type fit the best.

This result is surprising, because it is well known [22, 23] that most of all the Fischer—Tippet's functions, and from them Gumbel's and Weibull's distribution functions can be applied as fitting distribution functions of the extreme values.

D) Studies in Hungary. In Hungary in recent years it is the Department of Water Management of the *Research Institute for Water Resources Development* which treats the establishment of the fitting distribution functions of discharges by processing a great number of data. The aim of the study is

a) to select the type of distribution functions uniformly applicable to the water courses of Hungary (or at least to some regions of Hungary);

b) to analyse the geographical dependence of the parameters of the distribution functions pertaining to the type selected, according to GODA's work [12].

Greater part of the beds of larger water courses made under statistical analysis, commonly never dry out, that is, the discharge is significantly larger than zero, a lower one, practically, can be expected only with a probability of zero. Therefore, it is evident that for characterizing the distribution of the *discharges*, in general, only such types of distribution functions are advisable to apply to the region of definition which is limited from below ($F(x_0) = 0$ and x_0 is a positive lower limit of the data observed so far) for the very reason because by this a fitting might be realized, by all means better than by the function starting rigidly from the origo. Therefore, we have made during our investigations — after MARKOVIC [12] — the three-parameter lognormal and gamma-functions, as well as the normal distribution function closely approaching the latter one in the case of $k > 15$.

A computer program has been drawn up [19] which from certain sets of informations produces the following values:

— the parameters of the normal, the three-parameter lognormal and gamma fitting distribution functions estimated with the aid of the maximum likelihood method, as well as their normal values,

— the result of the analysis of fitting of the three types of the distribution functions carried out by the χ^2 test, finally,

— the ordinates associated with the abscissas of appropriate density of the type of fitting distribution and density functions considered as the most favourable on the basis of the analysis of fitting. (In *Fig.* 1 we plotted the distribution and density functions fitting the best according to the

analysis of fitting by making use of the data obtained from a computer, and we wrote down their equation by introducing the actual values of the parameters.)

The program has been separately applied to the daily discharges of 15 gauge profiles every month (i.e., altogether to 180 sets of data) having a suitable length of series on informations of discharges. Though the first rough data-processing is completed, the work is *being continued* in order to refine the program. On the basis of the results obtained so far, it seems to be advisable to complement the program with the following:

a) investigation of the *stability* of each of the types of distribution functions in respect to the variation of the different parameters;

b) comparison between the results obtained with the maximum-likelihood method so far applied at the computer calculations and those found by using the momentum method, much more suitable for practical hand calculations.

5. Summary

Owing to the necessary development and general adoption of the management of water resources, the importance of the hydrological application on the characterization of the probability distribution has been significantly increased. This paper is intended to describe the basic knowledge and theorems relating to the distribution and density functions having a substantial role in the management of water resources, and their estimation, as well as to summarize the ideas and experiences relating to the practical establishment of the distribution functions.

Chapter 2 shortly outlines the most substantial basic principles of the theory of probability (the field of probability, the random variable, the statistic sample, statistics, estimation, methods of estimating parameters).

Chapter 3 exposes, by making use of different works of references, first of all [9] and [10], the theorems concerning the estimation on distribution and density functions. Among them Glivenko's theorem of the mathematical statistics is the first one declaring the possibility of estimation of the distribution functions of fundamental significance in the management of water resources. This is followed by remarks relating to the applicability of this theorem to the hydrology and management of water resources. The estimation of the distribution functions is dealt with by the following three theorems: The continuous density function has no unbiased estimation. A class of the asymptotically unbiased estimation of density functions can be determined. The functions pertaining to this class are, at the same time, in case of fulfilment of certain conditions, also consistent estimations.

In Chapter 4 the problems of practical application of the fitting distribution functions are treated. The *reasons for the application* are investigated.

Mathematically they are easy to treat; advantageous in comparing Hungarian and foreign data of water resources; they permit the extension of the region of definition of the empirical distribution function. With the introduction of fitting distribution functions also questions of *terminology* are connected: in order to standardize the usage of expressions it is suggested to name the ordinates of any types (theoretical, empirical and fitting) of the distribution functions "durability".

In connection with the practical estimation of the fitting distribution functions the problem and the difficulties in the application of the management of water resources, the experiences and suggestions [12, 13, 14, 15] utilizable in this field, as well as a report from the work carried out in the Research Institute for Water Resources Development are exposed. Within the scope of this work [19] the normal, lognormal and gamma-distribution functions of the daily discharges of 15 oservation profiles are caculated for every month with maximum likelihood estimation and with the aid of a computer.

REFERENCES

1. Domokos, M.: Index-Numbers of the Water Balance. *Vízügyi Közlemények* (1967), 3
2. Domokos, M.: Characterization of the Distribution of Discharges by means of Duration Configurations. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* (1967), 2
3. Szesztay, K.: Statistical Methods in Engineering Hydrology. *Vízügyi Közlemények* (1953), 1
4. Szigyártó, Z.: Estimation of the Probability of Events in Hydrology by means of Distribution Functions. *Vízügyi Közlemények* (1966) 4
5. Domokos, M.—Szász, D.: Application of Distribution Functions in the Management of Water Resources. *Hidrológiai Közlöny* (1968), 10
6. Rényi, A.: Theory of Probability. Tankönyvkiadó. Budapest 1967.
7. Vincze, I.: Mathematical Statistics and its Application in the Industry. Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1968.
8. Csoma, J.: Investigation of the Uniformity of Stage Data. *Hidrológiai Közlöny* (1966), 10
9. Rosenblatt, M.: Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function. *Annals of Mathematical Statistics.* Vl. 27
10. Parzen, E.: On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *Annals of Mathematical Statistics.* Vol. **33.** No. 3
11. Bochner, S.: Harmonic Analysis and Theory of Probability. University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1955.
12. Goda, L.: Statistical Investigation of Copious Precipitations of Several Day's Duration. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények.* (1965), 3 and 4
13. Markovic, R. D.: Probability Functions of Best Fit to Distributions of Annual Precipitation and Runoff. *Hydrology Papers* No. 8. Colorado State University, Fort Collins, Col. 1965 August.
14. Lazzari, E.: Esame di alcune leggi probabilistiche usate per la previsione delle portate di piena. *L'Acqua* (1967), nov-dic.
15. Lauterbach, D.: Betrachtungen zur Wahl von Verteilungsfunktionen für die Berechnung von Hochwasserdurchflüssen. *Wasserwirtschaft–Wassertechnik* (1968), 1
16. Prékopa, A.: Theory of Probability and its Technical Applications. Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1962
17. Csermák, B.—Domokos, M.: Wasserwirtschaftsbilanzen in Ungarn. *Das Gas- und Wasserfach* (108) No. 4. (January 1967)
18. *Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet (VITUKI)* (Research Institute for Water Resources Development) Explanatory Dictionary on Water Resources Management (Draft), Budapest 1968.

19. Domokos, M.—Szász, D.: Generation on Fitting Probability Distribution Functions of Discharges by Electronic Computer. *IASH Publication* No. 80, Vol. II. Symposium of Tucson (U.S.A.), December, 1968
20. Dyck, S.—Schramm, M.: Stochastische Methoden der Speicherwirtschaft. *Mitteilungen des Institutes für Wasserwirtschaft*, **28** (1968) VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1968
21. Mistéth, E.: Structural Calculation of Engineering Constructions on the Basis of the Theory of Probability. *Mélyépítéstudományi Szemle* (1967), Nos 4—5, 6 and 7
22. Chow, Ven Te: Handbook of Applied Hydrology. McGraw-Hall Book Co, 1964
23. Usai, E.: Indeterminatezze nella previsione probabilistica delle portate di piena. *L'Acqua* (1968), 2
24. Doob, L. I.: Stochastic Processes. John Wiley and Sons, 1953
25. Filipkowski, A.: Current Problems of Water Balance in Poland. *Vízügyi Közlemények*, (1969), 1

Abschätzungen der Verteilungs- und Dichtefunktionen und deren Anwendung in der Wasserwirtschaft. Infolge der allgemeinen Einführung der Wasservorratswirtschaft haben die hydrologischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsabschätzungen der Verteilungen sprunghaft zugenommen. In diesem Zusammenhang werden die nötigen Grundbegriffe und Theoreme der Wahrscheinlichkeitstheorie hinsichtlich der Abschätzungen der Verteilungs- und Dichtefunktionen kurz zusammengefaßt. Die Gründe der Anwendung der schmiegenden Verteilungsfunktionen werden untersucht und die auf diesem Gebiet verwendbaren Erfahrungen dargelegt. Im Rahmen der in der Budapester Forschungsanstalt für Wasserwirtschaft im Gange befindlichen Forschungsarbeit werden die Parameter der Verteilungsfunktionen normalen, lognormalen und gamma-Typs der täglichen Abflußmengen in 15 Durchfluß-Beobachtungsprofilen und monatlich durch »maximum likelihood«-Abschätzungen mit Hilfe einer programmgesteuerten Rechenanlage berechnet.

Оценка функций распределения и плотности и применение их в водном хозяйстве *М. Домокош).* Вследствие того, что вопросы водного хозяйства стали подведомственны государственным органам, возросло значение гидрологического применения характеристик вероятности распределения. В работе кратко обобщаются необходимые основные понятия теории вероятности, после чего излагаются теоремы по теории вероятности, касающиеся оценки функций распределения и плотности. Анализируются мотивы применения прилегающих функций распределения и учитывается применимый в данной области опыт. В рамках работы, проводимой в будапештском Научно-исследовательском институте водного хозяйства, на 15 учетных разрезах расхода и ежемесячно оценкой maximum likelihood при помощи электронной вычислительной машины вычисляют параметры нормального, логарифмического и гамма функций распределения суточного расхода.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 415—424 (1970)

MECHANICAL RESPONSE IN A COMPOSITE PIEZOELECTRIC TRANSDUCER UNDER POLARISATION GRADIENT

D. R. RAY*

[Manuscript received July 21, 1969]

This is an attempt to investigate the mechanical response in a composite piezoelectric transducer partly subjected to a flow of current in the semi-conducting boundary layer under a polarisation gradient. The equations of electricity, the constitutive equations in piezoelectrical material are made use of to solve the problem. Laplace transform serves effectively as an operational technique for its solution.

I. Introduction

The piezoelectric transducer is an effective device for the conversion of inputs (mechanical or electrical) to responses as the case may be. Investigations on responses provide situations in which we can study the interaction of electric and mechanic fields. The scope of study on responses in a piezoelectrical material in the line initiated by REDWOOD [1], subsequently followed by SINHA [2—5], GIRI [6], DAS [7], ROY [8] may be further widened and made more interesting, taking into account the interaction of current in the semiconducting boundary layer under a polarisation gradient. Thus it is worthwhile to refer to the recent paper of KALISKI [9] and the problem as stated above being composite in nature a reference to the paper of TOULIS [10] is worth mentioning. Accordingly, the electromechanical problem of determining mechanical response in a composite piezoelectric transducer partly subjected to a flow of current in the semiconducting boundary layer under a polarisation gradient has been solved making use of the Laplace transform.

II. Problem, fundamental equations and boundary conditions

The extremities $x = 0$ and $x = x$ of a piezoelectric transducer in its thickness direction are rigidly backed and the portion of the transducer from $x = 0$ to $x = l$ is subjected to a flow of current in the semiconducting layer under a polarisation gradient. Across the transducer from $x = 0$ to $x = l$ ($< x$)

* Department of Mathematics Hindu College, *Gobardanga* (INDIA).

an electrical voltage step V (given by

$$V = V_0', \qquad \text{for } t > 0 ;$$

$$V = 0, \qquad \text{for } t \leq 0$$

is considered. Here the problem is to investigate mechanical response when the transducer is excited electrically. With the choice of the origin at one extremity, the x-axis is taken along the thickness direction, z-axis along normal to the surface in the upward direction and y-axis, along normal to xz plane.

The constitutive equations in a piezoelectrical material are

$$T = c_{11} S + e_{11} E , \tag{1}$$

$$P = e_{11} S + k_{11} E \tag{2}$$

in which

$$D = P + E \tag{3}$$

and

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = P_0 e^{-\alpha' t},$$

where

S normal strain $\partial\xi/\partial x$, ξ being the displacement in the thickness direction;
T normal stress in the thickness direction;
E electrical field strength in the thickness direction;
P dielectric polarisation in the thickness direction;
c_{11} elastic stress coefficient;
k_{11} electromechanical coupling factor;
α' time decaying constant;
e_{11} piezoelectric stress constant;
D the electric flux density in the thickness direction.

The equation of longitudinal vibration is

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4}$$

where ϱ is the material density.

As in [9] the current in the semiconducting boundary layer is expressed as

$$J = q_{nc} \mu E_c + q D_n n_{c,1} \tag{5}$$

where

J electron current density;
n_c total number of electrons in the conducting band;
E_c total electric field in the semiconductor:

q electron charge (absolute value);
μ mobility of electrons;
D_n diffusion constant.

The interaction constant between the perturbed electric field $\tilde{E}^s$ in the semiconductor and that $\tilde{E}$ in the transducer is defined as

$$\frac{\tilde{E}^s}{\tilde{E}} = \alpha \,. \tag{6}$$

Then the total field in the semiconductor is expressed by the equation

$$E_c = E_0 + \Delta E \,, \tag{7}$$

where

E_0 constant outer field;
ΔE perturbed field.

Thus

$$\Delta E = E^s - \alpha \tilde{E} \,. \tag{8}$$

Writing $q_{nc} = \varrho_{ec}$, the electric density in the semiconductor, the velocity of the electron stream can be related to the electric field by the equation

$$-\varrho_{cc} v_c = \mu \varrho_{ec} E_c \tag{9}$$

Now, as in KALISKI [9]

$$-v = \mu \Delta E = \mu (E^s - \alpha \tilde{E}) \,. \tag{10}$$

The continuity condition of the charges in the semi-conductor is

$$\operatorname{div} j - \dot{\varrho}_{ec} = 0 \tag{11}$$

which, after linearisation, assumes the form

$$\dot{\varrho}_e + f V_0 \varrho_{e,1} + \varrho_{0ev,1} - f D_n \varrho_{e,11} = 0 \,. \tag{12}$$

The divergence condition in the transducer is

$$\operatorname{div} D = \epsilon \tilde{E}_{,1} \,, \tag{13}$$

where $\tilde{E}$ is the sourceless field of action on the transducer of the electron stream in the semiconductor.

Then from (3) and (13) it follows that

$$E_{,1} = \epsilon \tilde{E}_{,1} + P_0 e^{-\alpha' t} \,. \tag{14}$$

Next, from the condition of continuity of the tangential component of E in the transducer and the semiconductor we find that

$$\epsilon\tilde{E}+P_0\,\varkappa e^{-\alpha' t}=E^s-\alpha\tilde{E}$$

whence

$$\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\varkappa}=-\frac{1}{\alpha+\epsilon}\,(E^s_{,1}-P_0e^{-\alpha' t}). \tag{15}$$

Again, the divergence condition in the semiconductor is

$$\epsilon_s E^s_{,1}=-\varrho_e\,. \tag{16}$$

Now by (1), (15) and (16) we obtain

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{c_{11}}{\varrho}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial\varkappa^2}-\frac{\varrho_e e_{11}\epsilon\eta}{\varrho\epsilon_s(\alpha+\epsilon)}+\frac{\alpha e_{11}P_0\,e^{-\alpha' t}}{\varrho\,(\alpha+\epsilon)} \tag{17}$$

where η is the ratio of the cross sectional area of the semiconducting layer to that of the transducer.

By (10), (11), (12) and (15) we obtain

$$\dot{\varrho}_e+fV_0\,\varrho_{e,1}+\frac{\varrho_{0e}\epsilon\,\varrho_{0e}\,\mu\eta}{\epsilon_s(\alpha+\epsilon)}-\frac{\alpha\mu P_0\,\varrho_{0e}\,e^{-\alpha' t}}{\alpha+\epsilon}-fD_n\,\varrho_{e,11}=0\,; \tag{18}$$

now eliminating ϱ_e between (17) and (18) we get

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+fV_0\,\frac{\partial}{\partial\varkappa}+\frac{\varrho_{0e}\epsilon\,\mu\eta}{\epsilon_s\,(\alpha+\epsilon)}-fD_n\,\frac{\partial^2}{\partial\varkappa^2}\right)\left(\ddot{\xi}-a^2\,\xi_{,11}-\frac{\alpha e_{11}P_0\,e^{-\alpha' t}}{\varrho\,(\alpha+\epsilon)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha+\epsilon}\right)^2\frac{\alpha\mu\epsilon\eta\,e_{11}\,\varrho_{0e}P_0\,e^{-\alpha' t}}{\varrho\,\epsilon_s}=0\,,$$

where

$$a^2=\frac{c_{11}}{\varrho}\,. \tag{19}$$

Again, for the portion of the transducer not subjected to the flow of current in the semiconducting boundary layer, proceeding as in REDWOOD [1],

$$\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2}=v'^2\,\frac{\partial^2\xi'}{\partial\varkappa^2}\,,$$

where

$$v'^2=\frac{1}{\varrho}\left(c_{11}-\frac{e_{11}^2}{1+\varkappa_{11}}\right). \tag{20}$$

The mechanical boundary conditions are the usual conditions of continuity of displacement and force at the extremities and at $x = l$. These will be set up mathematically in the next section.

III. Solution of the problem

Let us introduce the Laplace transform $\bar{f}(p)$ of $f(t)$ given by

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt\,.$$

Then from (19) and (20) we obtain

$$\left(p + fV_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varrho_{0e} \in \mu\eta}{\epsilon_s(\alpha+\in)} - fD_n \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[p^2 \bar{\xi} - a^2 \bar{\xi}_{,11} - \frac{\alpha e_{11} P_0}{\varrho(\alpha+\in)(\alpha'+p)}\right] + \\ + \frac{1}{(\alpha+\in)^2} \frac{\alpha\mu \in \eta\, e_{11}\, \varrho'_{0e} P_0}{\varrho\, \epsilon_s(\alpha'+p)} = 0 \tag{21}$$

and

$$p^2 \bar{\xi}' = v'^2 \bar{\xi}'_{,11}\,. \tag{22}$$

Let $\bar{\xi} = e^{mx}$ be a trial solution of the reduced equation to (21). Then

$$\left[p + fV_0 m + \frac{\varrho_{0e} \in \mu\eta}{\epsilon_s(\alpha+\in)} - fD_n m^2\right](p^2 - a^2 m^2) = 0\,. \tag{23}$$

Let us restrict our discussion for the sake of simplicity to small values of t so that $1/p$ is small, in which case (23) reduced to

$$m^2 fD_n - fV_0 m - \left[p + \frac{\varrho_{0e} \in \mu\eta}{\epsilon_s(\alpha+\in)}\right] = 0\,. \tag{24}$$

Accordingly, the general solutions for (21) and (22) are

$$\bar{\xi} = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} + \frac{\alpha e_{11} P_0}{\varrho\,(\alpha+\in)\, p\,(\alpha'+p)\left(p + \dfrac{\varrho_{0e}\, \mu\eta \in}{\epsilon_s(\alpha+\in)}\right)}, \qquad \text{for} \quad 0 < x < l;$$

$$\bar{\xi}' = A'\, e^{-(p/v')x} + B'\, e^{(p/v')x}\,, \qquad \text{for} \quad l < x < x \tag{25}$$

where m_1 and m_2 are the roots of (24). By (1), (2) and (3)

$$T = \left(c_{11} - \frac{e_{11}^2}{1 + k_{11}}\right)\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial_x} + \frac{\bar{D} e_{11}}{1 + k_{11}}\,. \tag{26}$$

Gauss' Law applied to the surface of area yz of the transducer, shows that

$$\bar{D} = \frac{Q}{yz} \quad \text{and} \quad \bar{F} = \bar{T}yz$$

where $\bar{F}$ is the force applied on the area yz normal to $\varkappa$. Q, the total charge on yz. Thus

$$\bar{F} = yz\left(c_{11} - \frac{e_{11}\,2}{1+k_{11}}\right)\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varkappa} + \frac{\bar{Q}e_{11}}{1+k_{11}} \,. \tag{27}$$

Voltage across the transducer from $x = 0$ to $x = l$ is obtained as

$$\int_0^l \bar{E}\,dx = -\left[(\bar{V})_l - (\bar{V})_0\right] = \bar{V} \,.$$

Thus

$$\bar{V} = -\frac{e_{11}}{1+k_{11}}\left[(\bar{\xi})_l - (\bar{\xi})_0\right] + \frac{\bar{Q}l}{yz\,(1+k_{11})} \,. \tag{28}$$

As in REDWOOD [1], we denote the constants and entities for the mechanical system attached to the transducer at $x = 0$ and $x = x$ by the symbols *1* and *2*, respectively. The conditions of continuity of force and displacement at the extremities at $x = 0$ and $x = x$ as well as $x = l$ when formulated, yield at

$$\left.\begin{aligned} \varkappa = 0 \qquad & (\bar{F}_1)_0 = (\bar{F})_0 \\ & (\bar{\xi}_1)_0 \;\; = (\bar{\xi})_0 \end{aligned}\right\},$$

at

$$\left.\begin{aligned} \varkappa = l \qquad & (\bar{F})_l = (\bar{F}')_l \\ & (\bar{\xi})_l \;\; = (\bar{\xi}')_l \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

and at

$$\left.\begin{aligned} \varkappa = x \qquad & (\bar{F}')_x = (\bar{F}_2)_x \\ & (\bar{\xi}')_x = (\bar{\xi}_2)_x \end{aligned}\right\}.$$

Now assuming a voltage step function

$$V = V_0' \qquad \text{for} \qquad t > 0 \,, \qquad \left(\bar{V} = \frac{V_0'}{p}\right)$$

and with $A_1 = A_2 = B_2 = 0$ as the transducer is rigidly backed, we obtain by the boundary conditions in (29)

$$B_1 = (A+B) + \frac{k}{\varrho} \,.$$

$$k = \frac{\varkappa e_{11} P_0}{(\varkappa+\epsilon)\,p(\varkappa'+p)\left(p + \dfrac{\varrho_{0e}\,\mu\eta\,\epsilon}{\epsilon_s\,(\varkappa+\epsilon)}\right)} \,.$$

where

$$k_1 m_2 B_1 = k_1 (m_1 A + m_2 B) + \frac{e_{11} \bar{Q}}{1+k_{11}},$$

$$k_1 = yz \left(c_{11} - \frac{e_{11}}{1+k_{11}} \right);$$

$$A e^{m_1 l} + B e^{m_2 l} + \frac{k}{\varrho} = A' e^{-(p/v')l} + B' e^{(p/v')l},$$

$$A m_1 e^{m_1 l} + B m_2 e^{m_2 l} = \frac{p}{v'} (- A' e^{-(p/v')l} + B' e^{(p/v')l}), \tag{30}$$

$$A' e^{-(p/v')x} + B' e^{(p/v')x} = 0;$$

$$\bar{V} = -\frac{e_{11}}{1+k_{11}} [(A+B) - (A e^{m_1 l} + B e^{m_2 l})] + \frac{Ql}{yz(1+k_{11})}$$

whence

$$B' = - A' e^{-(2p/v')x}.$$

Eliminating A' between third and fourth equations in (30) we get

$$A \left[\left(m_1 B + \frac{p\alpha_1}{v'} \right) e^{m_1 l} \right] + B \left[\left(m_2 \beta + \frac{p\alpha_1}{v'} \right) e^{m_2 l} \right] + \frac{k}{\varrho} \frac{P\alpha_1}{v'} = 0. \tag{31}$$

Also eliminating $\bar{Q}$ between second and sixth equations in (30) we obtain

$$A \left[(m_1 - m_2) k_1 - \frac{yz}{l} \frac{e_{11}^2}{1+k_{11}} (1 - e^{m_1 l}) \right] - B \frac{yz}{l} \frac{e_{11}^2}{1+k_{11}} (1 - e^{m_2 l}) + \\ + \bar{V} \frac{yz\, e_{11}}{l} - \frac{k k_1 m_2}{\varrho} = 0, \tag{32}$$

where

$$\alpha_1 = e^{-(2pl/v')} + e^{-(2px/v')},$$

$$\beta = e^{-(2pl/v')} - e^{-(2px/v')}.$$

Solving (31) and (32) for A and B we obtain from the first solution in (25)

$$(\bar{\xi})_0 = A + B + \frac{k}{\varrho} =$$

$$= \left\{ \left(\bar{V} \frac{yz}{l} e_{11} - \frac{k k_1 m_2}{\varrho} \right) \left[\left(m_2 \beta + \frac{p\alpha_1}{v'} \right) - \left(m_1 \beta + \frac{p\alpha_1}{v'} \right) e^{-l(m_2 - m_1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{\varrho} \frac{p\alpha_1}{v'} \left[k_1 (m_2 - m_1) e^{-m_2 l} + \frac{yz}{l} \frac{e_{11}^2}{1+k_{11}} (1 - e^{-l(m_2 - m_1)}) \right] \right\} \times \tag{33}$$

$$\times \left\{ k_1 (m_2 - m_1) \left(m_2 \beta + \frac{p\alpha_1}{v'} \right) + \frac{yz}{l} \frac{e_{11}^2}{1+k_{11}} \left[\left(\frac{p\alpha_1}{v'} + \beta m_2 \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(\frac{p\alpha_1}{v'} + \beta m_1 \right) e^{-l(m_2 - m_1)} - \beta (m_2 - m_1) e^{l m_1} \right] \right\}^{-1} + \frac{k}{\varrho}.$$

Now substituting the values of m_1, m_2, α_1 and β we proceed as in REDWOOD [1] to obtain its inverse transform. We then have, as a first approximation

$$(\bar{\xi})_0 \approx \frac{\dfrac{V_0 e_{11}\sqrt{fD_n}}{2l\left(c_{11}-\dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)}}{p\left[\sqrt{p+a'}+\dfrac{\sqrt{fD_n}\,e_{11}^2}{2l(1+k_{11})\left(c_{11}-\dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)}\right]} -$$

$$-\frac{\alpha e_{11}P_0\left(\sqrt{p+a'}+\dfrac{fV_0}{2\sqrt{fD_n}}\right)}{2\varrho(\alpha+\epsilon)\,p(\alpha'+p)(p+b)\left[\sqrt{p+a'}+\dfrac{\sqrt{fD_n}(e_{11}^2)}{2l(1+k_{11})\left(c_{11}-\dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)}\right]} -$$

$$-\alpha e_{11}^3 P_0 fD_n\left\{(1+k_{11})\,2l\,v'\,\varrho\,(\alpha+\epsilon)\left(c_{11}-\frac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)(\alpha'+p)(p+b)\times\right. \tag{34}$$

$$\left.\times\left[\frac{p\sqrt{fD_n}}{v'}+\frac{V_0\sqrt{fD_n}}{2D_n}+\sqrt{p+a'}\right]\left[\sqrt{p+a'}+\frac{\sqrt{fD_n}\,e_{11}^2}{2l(1+k_{11})\left(c_{11}-\dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)}\right]\right\}^{-1}+$$

$$+\frac{\alpha e_{11}P_0}{\varrho(\alpha+\epsilon)\,p(\alpha'+p)(p+b)}\,,$$

where

$$a'=\frac{V_0 f}{4D_n}+b\,,\quad b=\frac{\varrho_{0e}\mu\eta\epsilon}{\epsilon_s(\alpha+\epsilon)}\,;$$

therefore

$$(\xi)_0 \approx A''e^{-a't}\int_0^t e^{a'u}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}}-d\,e^{d^2(t-u)}\,erfc\,(\alpha\sqrt{t-u})\right]du+ \tag{35}$$

$$+e^{-a't}\frac{\alpha e_{11}P_0\left(d-\dfrac{fV_0}{2\sqrt{fD_n}}\right)}{2\varrho(\alpha+\epsilon)}\int_0^t e^{a'u}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}}-de^{d^2(t-u)}\,erfc(d\sqrt{t-u}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha'b}-\frac{1}{(b-\alpha')}\left(\frac{e^{-\alpha' u}}{\alpha'}-\frac{e^{-bu}}{b}\right)\right]du-$$

$$-\frac{\alpha e_{11}^3 P_0 fD_n v'}{(1+k_{11})\,2lv'\,\varrho(\alpha+\epsilon)\left(c_{11}-\dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)\sqrt{fD_n}\,(\alpha_2-\alpha_3)}\times$$

$$\times \int_0^t e^{-a'u} \left[\alpha_2 e^{\alpha_2^2 u} \, erfc\,(\alpha_2 \sqrt{u}) - \alpha_3 e^{\alpha_3^2 u} \, erfc\,(\alpha_3 \sqrt{u})\right] F(t-u)\, du + \tag{35}$$

$$+ \frac{\alpha e_{11} P_0}{2\varrho(\alpha+\epsilon)} \left[\frac{1}{\alpha' b} - \frac{1}{(b-\alpha')}\left(\frac{e^{-\alpha' t}}{\alpha'} - \frac{e^{-bt}}{b}\right)\right],$$

where

$$A'' = \frac{V_0 e_{11} \sqrt{f D_n}}{2l\left(c_{11} - \dfrac{e_{11}^2}{1+k_{11}}\right)},$$

$$d = -\frac{\sqrt{f D_n}\, e_{11}^2}{2l(1+k_{11})\left(c_{11} - \dfrac{e_{11}}{1+k_{11}}\right)},$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{v'}{\sqrt{f D_n}},$$

$$\alpha_2 \alpha_3 = \left(\frac{V_0 v'}{2 D_n} - a'\right),$$

$$F(t) = \frac{e^{-a't}}{(b-\alpha')} \int_0^t \left[(e^{-\alpha' u} - e^{-bu}) \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(t-u)}} - de^{\,d^2(t-u)}\, erfc\,(d\sqrt{(t-u)})\right\}\right] e^{a'u}\, du.$$

This shows that the mechanical response emitted by the transducer exhibits some transient characteristics, owing to an electrical voltage input step.

Finally I am grateful to DR. D. K. SINHA of the *Jadavpur University* for his active guidance throughout the preparation of this paper.

REFERENCES

1. REDWOOD, M.: Transient Performance of a Piezoelectric Transducer. *Jour. Acoust. Soc. Amer.* **33** (1961), 527.
2. SINHA, D. K.: Note on Electrical and Mechanical Response with Ramp-Type Input Signal in Piezoelectric Plate Transducer. *Ind. Jour. Theo. Phys.* **93** (1963).
3. SINHA, D. K.: A Note on Mechanical Response of a Piezoelectric (Monoclinic) Plate Characterised by a Time-Decaying Polarisation Gradient. *Bull. Cal. Math. Soc.* **58** (1966); II, 15.
4. SINHA, D. K.: A Note on Mechanical Response in a Piezoelectric Transducer owing to an Impulsive Voltage Input. *Proc. Natl. Inst. Scs. A* **33** (1965), 396.
5. SINHA, D. K.: Note on the Transient Performance of a Piezoelectric Bar of Polarised Ceramic with Heat Influx at One End. *Ind. Jour. Mechs and Maths* **11** (1964), 10.
6. GIRI, R. R.: Note on the Mechanical Response of a Composite Piezoelectric Transducer Subjected to a Constant Heat Flow and to a Time Dependent Electrical Voltage. *Proc. Natl. Inst. Scs. A* **33** (1967), 325.
7. DAS, N. C.: Note on Electrical Response in a Prescribed Transducer with a Prescribed Input. *Ind. Jour. Phys.* **41** (1967); VIII, 611.
8. ROY, P.: Mechanical Response in a Piezoelectric Plate Transducer. *Ind. Jour. Pur. App. Phys.* **5** (1967), 152.
9. KALISKI, S.: Amplification of Longitudinal Ultrasonic Wave in Piezoquartz by a Current Flowing in the Semi-Conducting Boundary Layer. *Proc. Vibr. Probm.* **4** (1965), 6.
10. TOULIS, W. J.: Electromechanical Coupling and Composite Transducers. *Jour. Acoust. Soc. Amer.* **35** (1963), 74.

Das Verhalten des komplexen piezoelektrischen Transduktors gegenüber mechanischer Einwirkung bei einem Polarisationsgradienten. Das Ziel der Experimente ist festzustellen, wie sich ein komplexer piezoelektrischer Transduktor mechanischer Einwirkung gegenüber in der halbleitenden Grenzschicht desselben, infolge des Polarisationsgradienten verhält. Die Aufgabe wird mit Hilfe der — für das piezoelektrische Material charakteristischen — elektrischen und konstitutionellen Gleichungen gelöst. Die Lösung wird durch die wirksame Anwendung der Laplace-Transformationen vollzogen.

Поведение сплошного пьезоэлектрического преобразователя в случае механического воздействия в присутствии поляризационного градиента *(Д. Р. Рей)*. Исследованиями охвачен вопрос определения поведения сплошного пьезоэлектрического преобразователя в случае механического воздействия, у которого ток течет в полупроводниковом пограничном слое вследствие поляризационного градиента. Дается решение задачи с помощью электрических и основных уравнений для пьезоэлетрических материалов. Метод решения основан на эффективном применении преобразования Лапласа.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 425—432 (1970)

VISKOSITÄT UND LAGERUNGSDICHTE VIBRIERENDER KORNHAUFWERKE

H.-J. SCHÄFFNER*

Experimentelle Untersuchungen erbrachten den Nachweis, daß die Viskosität eines durch Vibration im Bereich $b > 1$ g (g-Erdbeschleunigung) aufgelockerten Kornhaufwerks in ähnlicher Weise wie bei Suspensionen von der Partikelkonzentration abhängt. Die mathematische Form des ermittelten Zusammenhanges entspricht im Prinzip der Mooney-Gleichung, wobei jedoch zusätzlich das Nicht-Newtonsche Fließverhalten berücksichtigt wurde. Ein Vergleich mit Literaturangaben ergibt, daß Kornhaufwerke, die durch aufströmende Gase oder Flüssigkeiten im Fließbette fluidisiert werden, ähnliche Eigenschaften besitzen. Das Fließverhalten eines Kornhaufwerkes wird somit unabhängig von der Art der Energiezufuhr im wesentlichen von der Partikelkonzentration bestimmt. Auflockerung und zugeführte Energiemenge verhalten sich sowohl beim Vibrieren als auch beim Fluidisieren über einen größeren Bereich direkt proportional. Die gewonnenen Ergebnisse zeigen, daß eine »Neue Bodenphysik« im Sinne von KÉZDI [2], die von einer energetischen Konzeption ausgeht, besonders geeignet ist, um komplizierte dynamische Prozesse in Kornhaufwerken zu deuten und im Rahmen größerer Zusammenhänge einzuordnen.

1. Einleitung

Kornhaufwerke, die durch Schwingungen angeregt und dabei aufgelockert werden, zeigen ein charakteristisches Verhalten, das sich mit der Erweichung und dem Sieden einer zähen Flüssigkeit durch Wärmezufuhr vergleichen läßt.

Ein ähnlicher Effekt wird erzielt, wenn ein Kornhaufwerk bzw. Schüttgut in einem offenen Fließbettsystem durch aufströmende Gase oder Flüssigkeiten fluidisiert wird.

Kennzeichnend für die genannten Vorgänge ist in jedem Fall eine durch die Energiezufuhr bewirkte Abnahme der Viskosität, die mit der Abnahme der Partikelkonzentration bzw. der Lagerungsdichte gesetzmäßig verknüpft ist.

Unser Ziel ist es, diesen Zusammenhang zwischen Viskosität und Konzentration für ein vibrierendes Kornhaufwerk auf experimentellem Wege zu ermitteln. Eine Grundlage dazu wurde bereits in einer früheren Arbeit [9] geschaffen, in der die Abhängigkeit der Viskosität eines vibrierenden Kornhaufwerkes von der Schwinggeschwindigkeit untersucht wurde. In der vor-

* Dr. rer. nat. Hans-Joachim *Schäffner*, Wiss. Mitarbeiter der Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau. 1017 *Berlin*, Alt-Stralau 44/45 (DDR).

liegenden Studie werden diese Versuche durch Messungen der Partikelkonzentration als Funktion der Schwinggeschwindigkeit ergänzt.

Damit wird es möglich, eine Beziehung zwischen Viskosität und Konzentration aufzustellen, die eine Gegenüberstellung mit den vorhandenen Formeln für die Konzentrationsabhängigkeit der Viskosität disperser Systeme erlaubt.

2. Messungen der Partielkonzentration schwingender Kornhaufwerke

Die Abhängigkeit der Auflockerung eines schwingenden Kornhaufwerkes von der Intensität der anregenden Schwingung wurde bereits von KUTZNER [3] untersucht.

Als Ergebnis fand Kutzner, daß das Volumen einer schwingenden Glaskugelpackung in einem zylindrischen Gefäß bei konstant gehaltener Schwingungsfrequenz linear mit der Schwingamplitude wächst.

Über den Einfluß der Schwingungsfrequenz liegen keine Angaben vor.

Unsere Versuche wurden deshalb mit der Zielsetzung durchgeführt, die Abhängigkeit der Volumvergrößerung eines schwingenden Kornhaufwerkes von beiden Variabeln — Frequenz und Amplitude — analytisch zu fixieren.

Als Versuchsapparat diente ein Schwingtisch vom GRW — Teltow, der durch einen Tieftongenerator gespeist wurde.

Die Schwingbeschleunigungen am Rüttelgefäß wurden mit piezoelektrischen Wandlern vom Typ KD 2 a aufgenommen und an einem Vibrationsmeßgerät VM II abgelesen. Die Sinusform der Schwingungen wurde auf einem Oszillographenschirm kontrolliert. Nähere Angaben über die Eichung der Apparatur enthält [7] und [8].

Der Versuchsaufbau bestand aus einem zylindrischen Vinidurbehälter (Innendurchmesser 20 cm; Höhe 20 cm), der mit der Schwingtischplatte fest verschraubt war. Als Versuchsmaterial diente trockener Feinsand wie in [9]. (Ungleichförmigkeitsgrad $U = 1{,}9$, wirks. Korndurchmesser $d_w = 0{,}09$ mm).

Die Einbauhöhe h_0 des Sandes betrug nach Herstellung der dichtesten Lagerung ($\varepsilon_d = 0{,}48$) durch Vibration bei $b = 1\text{g}$ $h_0 = 10$ cm. Zur Markierung der freien Oberfläche des vibrierenden Sandes benutzten wir ein Blatt Seidenpapier, das von den emporspringenden Partikeln in der Schwebe gehalten wurde. Die Hebung dieses Blattes lieferte die Meßgröße Δh, aus der sich die Partikelkonzentration c

$$c = 1 - n = \frac{G}{\gamma_s (h_0 + \Delta h)\, \pi r^2}$$

($G = 5{,}6$ kp — Gewicht der Sandschüttung, $\gamma_s = 2{,}65$ p/cm^3 — spezifisches Gewicht der Sandkörner, $r = 10$ cm — Behälterradius, n = Porosität).

berechnen läßt. Untersucht wurde die Abhängigkeit der Partikelkonzentration von der Schwingbeschleunigung b bei einer Reihe von Festfrequenzen im Bereich $12{,}5 \leq f \leq 120$ Hz. Dabei ergab sich im gesamten Frequenzbereich erwartungsgemäß $\Delta h = 0$ für $b \leq 1\ g$ und $\Delta h > 0$ für $b > 1\ g$. (g — Erdbeschleunigung).

Die Auftragung der gemessenen Hebungen Δh in Abhängigkeit von der Schwinggeschwindigkeit v erfolgte deshalb zweckmäßig in der Form

$$\Delta h = F(v - v_1) \tag{2}$$

mit

$$v = b/2\,\pi f\,,$$

$$v_1 = v(b = 1g) = \frac{1{,}6 \cdot 10^2}{f}\,, \tag{3}$$

(v [cm/s], f [1/s]).

Speziell wurde der Ansatz

$$\Delta h = A\,(v - v_1)^n \tag{4}$$

auf seine Brauchbarkeit untersucht.

Für die graphische Auswertung benutzten wir die Geradendarstellung

$$Y = M + N\,X \tag{5}$$

mit

$$Y = \lg\ \Delta h$$

$$M = \lg\ A\,,$$

$$N = n\,,$$

$$X = \lg\ (v - v_1)$$

Die doppeltlogarithmische Darstellung in Bild 1 beweist die Verträglichkeit des Ansatzes (4) mit den Meßergebnissen und liefert zugleich die Konstanten

$$A = 4{,}8 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{s}] \text{ und } n = 1.$$

Um die Abhängigkeit der Partikelkonzentration von der Schwinggeschwindigkeit darzustellen, kombinieren wir (1) und (4). Als Ergebnis folgt

$$c = \frac{D}{E + v} \tag{6}$$

mit

$$D = \frac{G}{A \cdot \gamma_s \cdot \pi r^2}\,,$$

$$E = \frac{h_0}{A} - v_1\,.$$

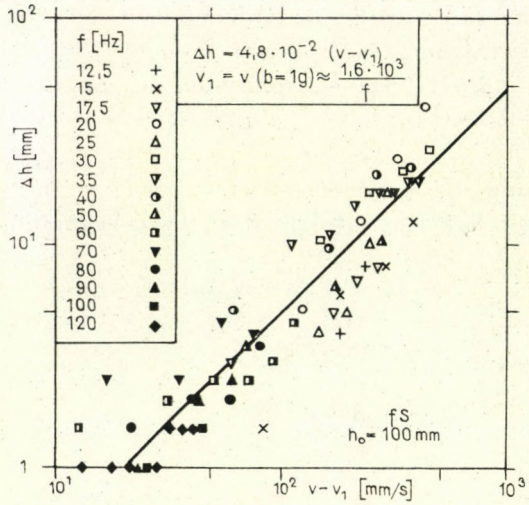


Bild 1

3. Partikelkonzentration und Viskosität

Viskositätsmessungen an schwingenden Kornhaufwerken sind in [9] beschrieben. Danach läßt sich die Viskosität η eines schwingenden trockenen Feinsandes in Abhängigkeit von der Schwinggeschwindigkeit und dem Schergefälle $\dot{\gamma}$ durch die Beziehung

$$\eta = \frac{H}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \exp \frac{K}{V} \tag{7}$$

mit

$$H = 80\ [P \cdot s^{1/2}], \quad K = 5{,}5\ [\mathrm{cm/s}]$$

darstellen (η [P], v[cm/s], $\dot{\gamma}$ [1/s]). Die Abhängigkeit der Viskosität vom Schergefälle resultiert aus den Nicht-Newtonschen Fließverhalten des Sandes. Die Versuchsanordnung zur Vibrationsanregung in [9] entspricht unserer in Abschnitt **2** beschriebenen Anordnung. Da auch der gleiche Feinsand als Versuchsmaterial verwandt wurde, ergibt sich so die Möglichkeit, aus der Kombination der Ergebnisse aus [9] und Abschnitt **2** quantitative Aussagen über die Abhängigkeit der Viskosität von der Partikelkonzentration des untersuchten Materials zu machen.

Wir verknüpfen zu diesem Zweck (6) mit (7) und erhalten zunächst

$$\eta = \frac{H}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \exp \left(\frac{\frac{K}{D} c}{1 - \frac{E}{D} c} \right), \tag{8}$$

oder ausführlicher

$$\eta = \frac{H}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \exp \frac{KA\,\gamma_s \pi r^2 c/G}{1-[(h_0 - v_1 A)\,\gamma_s \pi r^2 c/G]} \,. \tag{9}$$

Im untersuchten Frequenzbereich $f = 12{,}5 \div 120$ Hz folgt wegen (3) $v_1 = 12{,}8 \div 1{,}33$ cm/s, und es wird das Produkt $v_1 A = 0{,}62 \div 0{,}06$ cm praktisch vernachlässigbar klein im Vergleich zu $h_0 = 10$ cm, sodaß nach Einsetzen der Zahlenwerte mit guter Näherung

$$\eta \approx \frac{80}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \exp\left(\frac{0{,}039\,c}{1-1{,}48\,c}\right) \tag{10}$$

gesetzt werden kann.

4. Vergleiche und Analogien zu Angaben aus der Literatur

Die Zahl der aus der Literatur bekannten Gleichungen, die zur Beschreibung der Beziehung zwischen der relativen Viskosität disperser Systeme und der Konzentration der dispergierten Phase benutzt werden, ist sehr groß.

In einer 1962 erschienenen zusammenfassenden Studie [6] werden bereits ca. 100 Formeln tabellarisch erfaßt und in 10 Gruppen gegliedert. Die Gegenüberstellung der verschiedenen Formeltypen und ihre Diskussion führt in [6] zu dem Schluß:

»daß der Gleichungstyp mit einem Term $k \cdot c/(1 - s \cdot c)$ speziell in der Formulierung von Mooney

$$\eta_r = \exp\left(\frac{kc}{1-sc}\right) \tag{11}$$

gute Übereinstimmung für Kugeln liefert.

Derselbe Gleichungstyp wird auch für einige andere Arten disperser Systeme angewandt. Weitere Möglichkeiten, ihn für verschiedene andere Systeme anzupassen, deuten sich an.«

Eine solche Möglichkeit ergibt sich nach [6], wenn man für die der Mooney-Gleichung entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$q_r = \exp(kx) \tag{12}$$

mit

$$x = \frac{1}{1-sc}$$

den allgemeineren Ausdruck

$$q_r = k_2 \cdot \exp(k_1 x)^n \tag{13}$$

einführt.

Die erweiterte Mooney-Gleichung lautet dann

$$\eta_r = k_2 \cdot \exp\left(\frac{k_1 c}{1 - sc}\right)^n \tag{14}$$

und entspricht für den Spezialfall $n = 1$ unserer empirisch gefundenen Viskositäts-Konzentrations-Gleichung (10).

Diese Übereinstimmung im Viskositätsverhalten disperser Systeme verschiedener Konzentration und vibrierender Kornhaufwerken, die durch die dynamische Anregung verschieden stark aufgelockert werden, erscheint bemerkenswert.

Eine weitere bedeutungsvolle Analogie ergibt sich, wenn wir davon ausgehen, daß die Gleichung (7) der von Cornelissen und Mitarbeiter aufgestellten Viskositäts-Temperatur-Beziehung entspricht, wenn man die Schwinggeschwindigkeit durch die absolute Temperatur ersetzt.

Daraus folgt, daß die u. a. von WINTERKORN [13] und KÉZDI [2] vertretene Konzeption, das Verhalten eines Kornhaufwerkes mit Hilfe der Gesetze der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten darzustellen, für das schwingende Kornhaufwerk besonders sinnfällig erscheint.

Dabei wurde allerdings in unserer Arbeit der umgekehrte Weg wie bei KÉZDI [2] beschritten.

Die sogenannte Zustandsgleichung der makrometrischen Flüssigkeit, die die Volumänderung als Funktion der zugeführten Energie beschreibt, folgt bei uns unmittelbar aus den Messungen und wird durch (6) repräsentiert, während KÉZDI seine Zustandsgleichung durch das Gleichsetzen zweier theoretischer Ausdrücke für die Viskosität ähnlich (7) und (8) gewinnt.

Bei dem von KÉZDI beschrittenen Weg bleibt daher die Frage offen, ob die unter den vielen bekannten Beziehungen Viskosität-Konzentration und Viskosität-Temperatur getroffene Auswahl genügt, um verschiedenartige experimentelle Ergebnisse in jedem Fall befriedigend zu erklären. In der Einleitung wurde bereits vermerkt, daß ein Kornhaufwerk auch durch aufströmende Gase oder Flüssigkeiten in einem sogenannten Fließbett über die in der Bodenmechanik definierte »lockerste Lagerung« hinaus aufgelockert werden kann.

Ein Vergleich entsprechender experimenteller Arbeiten [1], [4], [11] mit unseren Untersuchungen ergibt, daß die Ausdehnung Δh eines durch Fluidisierung im Fließbett aufgelockerten Kornhaufwerkes ähnlich wie in (4) über einen größeren Bereich in der Form

$$\Delta h = \text{const}\,(u - u_1) \tag{15}$$

als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit u des Gases dargestellt werden kann. (u_1 — Strömungsgeschwindigkeit des Gases im Wirbelpunkt).

Für die Abhängigkeit der Viskosität η von der Strömungsgeschwindigkeit werden von den einzelnen Autoren Beziehungen angegeben, die sich sehr stark unterscheiden, sodaß eine Analogie zu unserer experimentell gefundenen Beziehung (7) nicht ohne weiteres feststellbar ist.

Eine genauere Untersuchung einzelner aus den Viskositätsmessungen im Fließbett abgeleiteter Funktionen $\eta(u)$ zeigt dann allerdings, daß nicht alle Autoren die aus dem Nicht-Newtonschen Fließverhalten resultierenden mathematischen Konsequenzen genügend berücksichtigen.

So werden z. B. in [11] die Fließkurven durch die Funktion

$$\omega = A' \sinh (B' \tau) \tag{16}$$

beschrieben, und als Reibungsgesetz wird daraus

$$\dot{\gamma}(\tau) = A \sinh (B \tau) \tag{17}$$

abgeleitet.

Bei mathematisch exakter Betrachtung ergibt sich jedoch nach [10], wenn man die Gültigkeit von (17) voraussetzt, daß in (16) der Hyperbelsinus durch den Integralhyperbelsinus Sh zu ersetzen ist.

Andere Autoren wie z.B. in (5) oder (12) lassen das Nicht-Newtonsche Fließverhalten völlig unberücksichtigt und bestimmen die Viskosität wie bei einer Newtonschen Flüssigkeit im Rotationsviskosimeter mit fester Drehzahl.

LITERATUR

1. Ergun, S.—Orning, A. A.: Fluid Flow through Randomly Packed Columns and Fluidized Beds. *Ind. Engg. Chem.* **41** (1949), 1179—1184.
2. Kézdi, Á.: Grundlagen einer allgemeinen Bodenphysik. *VDI—Z* **108** (1966), 161—166.
3. Kutzner, Ch.: Über die Vorgänge in körnigen Schüttungen bei der Rüttelverdichtung. Diss. T. H. Karlsruhe 1962.
4. Lewis, W. K.—Giuiland, E. R.—Bauer, W. C.: Characteristics of Fluidized Particles. *Ind. Engg. Chem.* **41** (1949), 1104—1117.
5. Matheson, G. L.—Herbst, W. A.—Holt, P. H.: Charakteristics of Fluid—Solid Systems. *Ind. Engg. Chem.* **41** (1949), 1099—1104.
6. Rutgers, R.: Relative Viscosity and Concentration. *Rheologica Acta* **2** (1962), 305—348.
7. Schäffner, H. J.: Abnahme des Böschungswinkels und Setzungen von Kornhaufwerken bei dynamischer Anregung in Abhängigkeit von den Korn- und Gefügeeigenschaften. *Mitteilungen Forschungsanstalt Schiffahrt Berlin*, Reihe Wasser- und Grundbau, Heft 15 (1965).
8. Schäffner, H. J.: Das Umlagerungsverhalten von Kornhaufwerken bei Vibration. *Gerlands Beiträge z. Geophysik* **74** (1965), 496—508.
9. Schäffner, H. J.: Rheologisches Verhalten von vibrierendem Sand im Rotationsviskosimeter. *Acta Techn. Hung.* **60** (1968), 247—256.
10. Schäffner, H. J.: Vergleichende Untersuchungen der Strömungsprofile und des Fließverhaltens Nicht-Newtonscher Flüssigkeiten im Rotationsviskosimeter. *Ingenieur-Archiv* **38** (1969), 153—160.
11. Schügerl, K.—Merz, M.—Fetting, F.: Rheologische Eigenschaften von gasdurchströmten Fließbettsystemen. *Chem. Engg. Sci.* **15** (1961), 1 und 2.
12. Ting, A. P.—Luebbers, R. H.: Viscosity of Suspensions of Spherical and other Isodimensional Particles in Liquids. *A. I. Ch. E. Journal* **3** (1957), 111—116.
13. Winterkorn, H. F.: Macrometric Liquids. In: Symposium on Dynamic Testing of Soils. *ASTM Spec. Tech. Publ.* No. 159 (1954), 77—89.

Viscosity and Relative Density of Vibrated Granular Soil Column. Experimental researches verified that the viscosity of granular soil column loosened by vibration in the range $b > 1g$ (g being the acceleration due to gravity) depends, in the same way as in the case of suspensions, on the grade of concentration of the particles. The mathematical form of the established relationship corresponds theoretically to the Mooney-equation, however, in the former one also the non-Newtonic flow behaviour has been taken into consideration. A comparison with the data published in the literature shows that the soil column of granular structure fluidized by upstreaming gases or liquids in the stream bed has analogical properties. Accordingly, the flow behaviour of a soil column of granular structure is essentially determined, independently of the energy input, only by the concentration of the particles. Loosening and energy input behave in the same way in the cases of both vibration and fluidization directly proportional through a major range. The results obtained show that a "New Soil Physics" according to KÉZDI [2] which starts from an energetic conception, is particularly suitable for interpreting complicated dynamic processes taking place in the granular waste rock piles, and to range them in the frame of a major system of relationships.

Вязкость и относительная плотность породных отвалов зернистой структуры, подверженных действию вибрации. (*Х. И. Шеффнер*). Экспериментальными исследованиями доказано, что вязкость разрыхленного вибрацией породного отвала зернистой структуры в области $b > 1g$ (где g — ускорение силы тяжести) таким же образом зависит от концентрации частиц, как и в случае суспензий. Математический вид выведенной зависимости принципиально соответствует уравнению Mooney, но с тем лишь дополнением, что это уравнение учитывает также поведение движения потока неньютоновского характера. Сравнение с приведенными в литературе данными указывает на тот факт, что породные отвалы зернистой структуры, которые от движущихся вверх потоков газов или жидкостей превращаются в русле движения потока в жидкость, обладают схожими свойствами. Таким образом, поведение движения течения некоторого породного отвала зернистой структуры независимо от введения энергии определяется концентрацией частиц. Разрыхление и количество введенной энергии как в случае вибрации, так и флюидизации в большом интервале между собой находятся в прямой зависимости. На основе полученных результатов по трактовке Кезди [2] «Новая механика грунтов», которая исходит из энергетической основы, особенно хорошо подходит для объяснения сложных динамических процессов в породных отвалах зернистой структуры и включения в рамки крупной системы зависимостей.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 433—466 (1970)

THE CYLINDRICAL BENDING OF DOUBLE-LAYER DIAGONAL SQUARE MESH GRIDS

M. SOARE*

DOCTOR OF TECHN. SC.

[Manuscript received: March 23, 1970]

A new type of double-layer square mesh grid is studied, characterised by the different configuration of the two parallel layers. For the general case, the deformation method is applied, being established the set of finite difference equations satisfied by the nine unknown displacements and corresponding to the three typical joints of the space structure. To continue, the cylindrical bending is studied, detailed solutions are given for the case of equal nodal forces and the space grid is assimilated, at the limit, with an analogous continuous medium whose elastic properties are determined.

1. Introduction

The advantages of space grids are well known by keeping in mind the tendency in modern structural engineering to use lighter, and thus more economical structures.

Most of them are formed from a repeated pattern of identical units so that the resulting structure has a high degree of regularity. Among these space structures, a special type of space grids is of particular interest, namely: double-layer parallel grids. They consist of two layers of bars each arranged to form regular meshes; the top layer and the bottom layers are linked by bracing members which ensure the geometrical indeformability of the whole system.

The particular geometry of double-layer parallel grids enable us to work out special methods of analysis.

In two previous studies [3], [4] author has treated the case of a double-layer parallel square mesh grid. Another type may also offer technical and economical advantages, due to its special geometry.

The double-layer diagonal square mesh grid we are dealing with in the present paper offers the peculiarity that the square meshes in the two layers are different; assuming that the boundary has a rectangular planform, the bars of the bottom layer are parallel to the edges, while the bars of the top layer are oriented at 45° to the same edges. Thus, each upper joint is projected

* Dr. MIRCEA SOARE, Str. Pictor Bancila 22, *Bucureşti* 66, Sector 6 (RUMANIA).

onto the middle of a lower bar. The bracing members linking the two layers are contained in vertical planes which also contain the lower members (Fig. 1).

It will be assumed further, that all members are connected together by universal ball joints and that the supporting takes place in the nodes of the top layer.

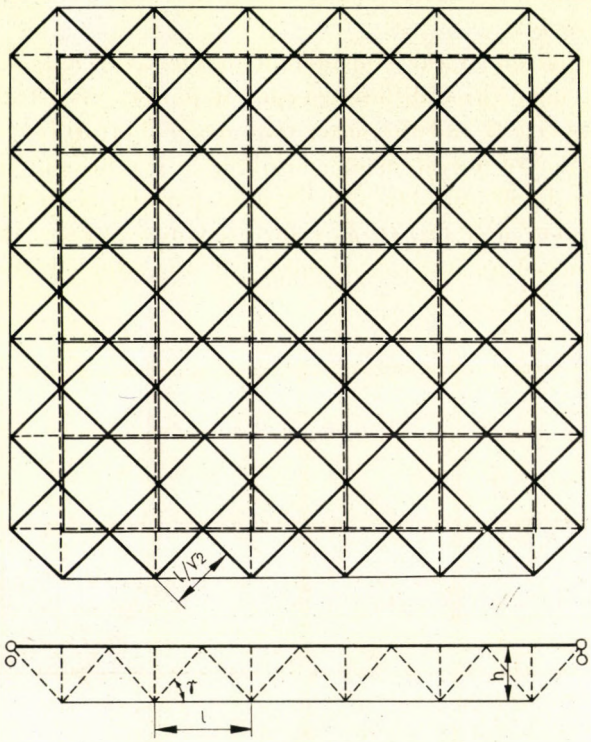


Fig. 1. Geometry of the double-layer diagonal square mesh grid

The symbols adopted for use in this paper are defined where they first appear and are arranged alphabetically in the Appendix.

If we denote by

l length of the members in the bottom layer (mesh size),

γ angle between bracing members and the planes of the two layers,

h height of the structure (vertical separation between the two layers),

the lenths of the upper bars and the bracing members respectively, are

$$l_s = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad l_d = \frac{l}{2\cos\gamma} = \frac{h}{\sin\gamma} \quad \left(\cot\gamma = \frac{l}{2h}\right). \tag{1.1}$$

In what follows the deformation method will be used for the general case; a system of nine partial finite difference equations is thus obtained. The general case is then particularised for the cylindrical bending.

2. Basic relations in the deformation method

In a previous paper [3] the principles of the application of the deformation method to space trusses were exposed. We shall assume that the bars of each layer are identical, with the axial stiffness k_i and k_s for the bottom layer and the top layer, respectively, and analogously the bracing members have an axial stiffness k_d.

The examination of the considered double-layer diagonal square mesh grid shows that only three different types of joints exist, from which one is in the bottom layer (A) and the other two are in the top layer (B and C) [2].

With relation to a system of co-ordinates xyz having the origin in the plane of the top layer, the Ox and Oy-axes parallel with the bars situated in the bottom layer and the Oz-axis directed downwards, the three typical joints will be denoted by $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ and $C_{x,y}$; the adjacent joints are denoted as in Fig. 2.

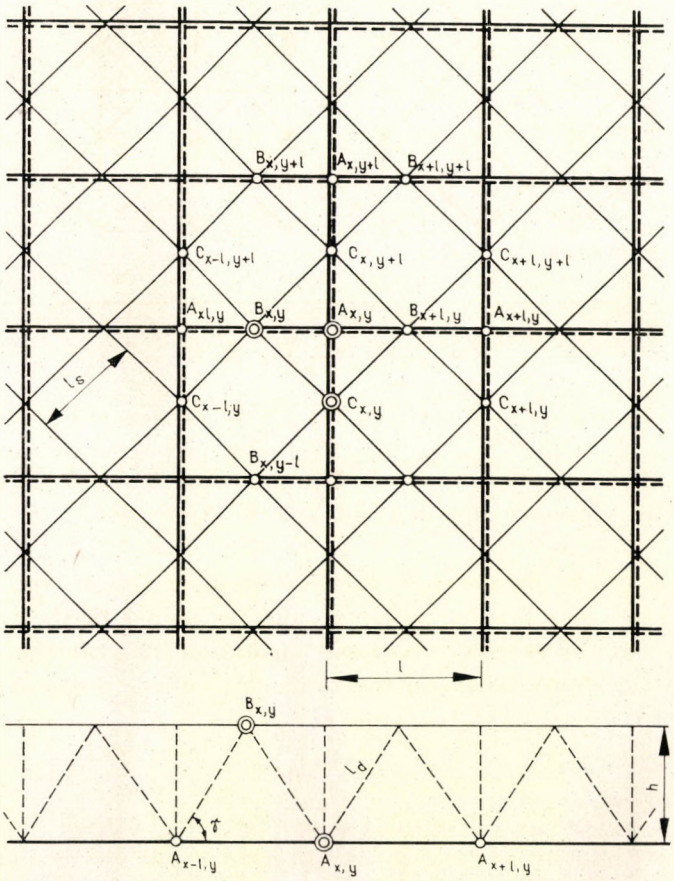


Fig. 2. Joints of type A, B, C and the adjacent joints

It is worth-while pointing out that the difference between the joints of type B and C only holds from the analytical point of view, the bars of the bottom layer and the corresponding bracing members being oriented in the sense of the x and y-axis, respectively.

The bars which meet at the three joints and the corresponding director cosines are listed in Table I.

Table I

Bar	$\cos\gamma_x$	$\cos\gamma_y$	$\cos\gamma_z$
$A_{x,y}-B_{x,y}$	$-\cos\gamma$	0	$-\sin\gamma$
$A_{x,y}-B_{x+l,y}$	$+\cos\gamma$	0	$-\sin\gamma$
$A_{x,y}-C_{x,y}$	0	$-\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y}-C_{x,y+l}$	0	$+\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y}-A_{x-l,y}$	-1	0	0
$A_{x,y}-A_{x+l,y}$	$+1$	0	0
$A_{x,y}-A_{x,y+l}$	0	$+1$	0
$B_{x,y}-A_{x,y}$	$+\cos\gamma$	0	$+\sin\gamma$
$B_{x,y}-A_{x-l,y}$	$-\cos\gamma$	0	$+\sin\gamma$
$B_{x,y}-C_{x,y}$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y}-C_{x,y+l}$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y}-C_{x-l,y+l}$	$-1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y}-C_{x-l,y}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y}-A_{x,y}$	0	$+\cos\gamma$	$+\sin\gamma$
$C_{x,y}-A_{x,y-l}$	0	$-\cos\gamma$	$+\sin\gamma$
$C_{x,y}-B_{x+l,y}$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y}-B_{x,y}$	$-1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y}-B_{x,y-}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y}-B_{x+l,y-l}$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0

We should remember that for a bar 1—2 whose ends have the elastic displacements u_1, v_1, w_1 and u_2, v_2, w_2 respectively, the bar force N_{1-2} considered as acting in joint 1, may be evaluated by means of the relation

$$N_{1-2} = k\,[(u_2-u_1)\cos\gamma_x+(v_2-v_1)\cos\gamma_y+(w_2-w_1)\cos\gamma_z]\,, \qquad (2.1a)$$

where $\cos\gamma_x$, $\cos\gamma_y$, $\cos\gamma_z$ represent the director cosines of the line 1—2.

The projections of the bar force N_{1-2} on the three axes of co-ordinates are, respectively,

$$X_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_x, \quad Y_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_y, \quad Z_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_z. \qquad (2.1b)$$

Let us show the manner for establishing the equilibrium equations, choosing for example, the condition $\Sigma X_A = 0$.

This equation contains the forces in the bars

$$A_{x,y}-A_{x-l,y}\,; \quad A_{x,y}-A_{x+l,y}\,; \quad A_{x,y}-B_{x,y} \quad \text{and} \quad A_{x,y}-B_{x+l,y}\,.$$

The projections of these forces on the Ox-axis (respectively in the succession of their preceding enumeration) are*

$$\begin{aligned}
&k_i\,(u^A_{x-l,y}+u^A_{x,y})\,,\\
&k_i\,(u^A_{x+l,y}-u^A_{x,y})\,,\\
&k_d\,[(u^B_{x,y}-u^A_{x,y})\cos^2\gamma+(w^B_{x,y}-w^A_{x,y})\sin\gamma\cdot\cos\gamma]\,,\\
&k_d\,[(u^B_{x+l,y}-u^A_{x,y})\cos^2\gamma-(w^B_{x+l,y}-w^A_{x,y})\sin\gamma\cdot\cos\gamma]\,.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Summing up the previous terms and also considering the component of the applied load F_{Ax}, the equation of projection is written as:

$$\begin{aligned}
k_i(u^A_{x+l,y}-2\,u^A_{x,y}+u^A_{x-l,y})+k_d\,[(u^B_{x+l,y}+u^B_{x,y}-2\,u^A_{x,y})\cos^2\gamma\,-\\
-\,(w^B_{x+l,y}-w^B_{x,y})\sin\gamma\cdot\cos\gamma]+F_{Ax}=0\,.
\end{aligned}$$

Further, we divide by $k_d\cos^2\gamma$ and put

$$\Psi_i=\frac{k_i}{k_d\cos^2\gamma} \tag{2.3a}$$

and analogously

$$\Psi_s=\frac{k_s}{k_d\cos^2\gamma}\,; \tag{2.3b}$$

introducing still the finite difference operators

$$u^A_{x,y}=u_A\,, \quad u^A_{x+l,y}=E_x\,u_A\,, \quad u^A_{x-l,y}=E_x^{-1}\,u_A\,, \text{ etc.} \tag{2.4}$$

the equilibrium equation will be written in its final form:

$$\begin{aligned}
-[\psi_i(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})+2]\,u_A+(1+E_x)\,u_B\,+\\
+\tan\gamma\cdot(1-E_x)\,w_B=-\frac{F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma}\,.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

* Superscripts A and B are introduced for the sake of simplicity.

Table II

	u_A	u_B	u_C	v_A
Ax	$-\psi_t(1-E_x)(1-E_x^{-1})-2$	$1+E_x$	.	.
Bx	$1+E_x^{-1}$	$-2(1+\psi_s)$	$\psi_s(1+E_x^{-1})(1+E_y)$	.
Cx	.	$\psi_s(1+E_x)(1+E_y^{-1})$	$-2\psi_s$	.
Ay	.	.	.	$-\psi_t(1-E_y)(1-E_y^{-1})-2$
By	.	.	$-\psi_s t(1-E_x^{-1})(1-E_y)$	.
Cy	.	$\psi_s(1-E_x)(1-E_y^{-1})$	.	$1+E_y^{-1}$
Az	.	$1-E_x$	.	.
Bz	$1-E_x^{-1}$	.	.	.
Cz	.	.	.	$1-E_y^{-1}$

In an analogous manner the other equilibrium equations may be written and are namely $\Sigma Y_A = 0$, $\Sigma Z_A = 0$, $\Sigma X_B = 0$, $\Sigma Y_B = 0$, $\Sigma Z_B = 0$, $\Sigma X_C = 0$, $\Sigma Y_C = 0$ and $\Sigma Z_C = 0$.

For the sake of simplicity, the following notation for the free terms are introduced:

$$\begin{aligned}
&\frac{F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{Ax}, \quad \frac{F_{Ay}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{Ay}, \quad \frac{F_{Az}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}=\mathfrak{F}_{Az},\\
&\frac{F_{Bx}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{Bx}, \quad \frac{F_{By}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{By}, \quad \frac{F_{Bz}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}=\mathfrak{F}_{Bz}, \qquad (2.6)\\
&\frac{F_{Cx}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{Cx}, \quad \frac{F_{Cy}}{k_d\cos^2\gamma}=\mathfrak{F}_{Cy}, \quad \frac{F_{Cz}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}=\mathfrak{F}_{Cz}.
\end{aligned}$$

The terms $\mathfrak{F}$ have the dimension of linear displacements.

Nine equilibrium equations can therefore be established. They represent a set of partial difference equations whose matrix has been listed in Table II.

v_B	v_C	w_A	w_B	w_C	= Free term
.	.	.	$\tan\gamma(1-E_x)$	.	$-\mathfrak{F}_{AX}$
.	$-\psi_s(1-E_x^{-1})$ $(1-E_y)$	$\tan\gamma(1-E_x^{-1})$	.	.	$-\mathfrak{F}_{BX}$
$\psi_s(1-E_x)$ $(1-E_y^{-1})$	.	.	.	.	$-\mathfrak{F}_{CX}$
$1+E_y$	.	.	.	$\tan\gamma(1-E_y)$	$-\mathfrak{F}_{AY}$
$-2\psi_s$	$\psi_s(1+E_x^{-1})$ $(1+E_y)$	.	.	.	$-\mathfrak{F}_{BY}$
$\psi_s(1+E_x)$ $(1+E_y^{-1})$	$-2(1+\psi_s)$	$\tan\gamma(1-E_y^{-1})$	.	.	$-\mathfrak{F}_{CY}$
$1-E_y$	.	$-4\tan\gamma\tan\gamma$	$(1+E_x)$	$\tan\gamma(1+E_y)$	$-\mathfrak{F}_{AZ}$
.	.	$\tan\gamma(1+E_x^{-1})$	$-2\tan\gamma$	.	$-\mathfrak{F}_{BZ}$
.	.	$\tan\gamma(1+E_y^{-1})$	.	$-2\tan\gamma$	$-\mathfrak{F}_{CZ}$

The examination of these equations shows that some of them may be deduced from the others by the permutation of symbols and subscripts; for example, equation (Cy) is deduced from Eq. (Bx) by interchanging the subscripts x and y, analogously for Eqs (Ax) and (Ay) a. s. o.

Similarly, if the displacements w multiplied by the factor $\tan\gamma$ are considered as new unknowns and the finite difference operators to the right (E_x, E_y) and to the left (E_x^{-1}, E_y^{-1}) are interchanged, the system matrix becomes symmetrical with respect to the main diagonal.

Using different notations, the system of difference equations listed in Table II was previously established by J. D. RENTON [2].

A solution by means of double trigonometric series can be obtained if the double-layer diagonal square mesh grid covers a rectangular planform and is simply supported along the boundary, as shown in another paper [3], in the case of simple square mesh grids.

In section 4 it will be shown that these equations simplify in the case of cylindrical bending and the corresponding solution will be established.

3. Cylindrical bending of the space grid

In the following we shall deal with a remarkable case of state of stress and deformation of the space grid, namely the cylindrical bending. This situation occurs when in the planform one of the spans is much greater than the second one a. By analogy with the cylindrical bending of plates, one can assume that the space grid spans in one direction (y) to infinity and works only in the direction of the x-axis, over a span a.

The analytical study can be approached either directly, by establishing the equilibrium equations of the forces in the members around the joints of type A, B, C and by associating the deformation equations, or by particularising the general equations given by the deformation method, as established in section 2.

In the present section we shall briefly treat the equilibrium and deformation equations which constitute the mixed method, together with the boundary conditions to be associated for the determination of the constants of integration which occur at the integration of the finite difference equations.

3.1. *Equilibrium equations*

The cylindrical bending of the double-layer space grid is characterised by the fact that the state of stress and deformation is independent of one of the coordinates, say y; in other words, in sections $y =$ multiple of l (mesh size) appear the same forces and displacements.

The position of the joints can therefore be fixed by a single subscript, say $m = 0, 1, 2, \ldots p$ in the top layer and correspondingly, $m' = m + 1/2$ in the bottom layer.

For the sake of simplicity, we shall confine ourselves in what follows to vertical nodal applied loads P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm}.

The forces which meet at the three typical joints are represented in Figs. 3a, b, c.

The following equilibrium equations can be written:

— for the joint A

$$(\Sigma X) \qquad I_m - I_{m-1} + (D_m - D'_m)\cos\gamma = 0, \tag{3.1a}$$

$$(\Sigma Z) \qquad (D_m + D'_m + 2\bar{D}_m)\sin\gamma - P_{Am} = 0; \tag{3.1b}$$

— for the joint B

$$(\Sigma X) \qquad (S_m - S_{m-1})\sqrt{2} + (D'_m - D_{m-1})\cos\gamma = 0, \tag{3.2a}$$

$$(\Sigma Z) \qquad (D'_m + D_{m-1})\sin\gamma + P_{Bm} = 0; \tag{3.2b}$$

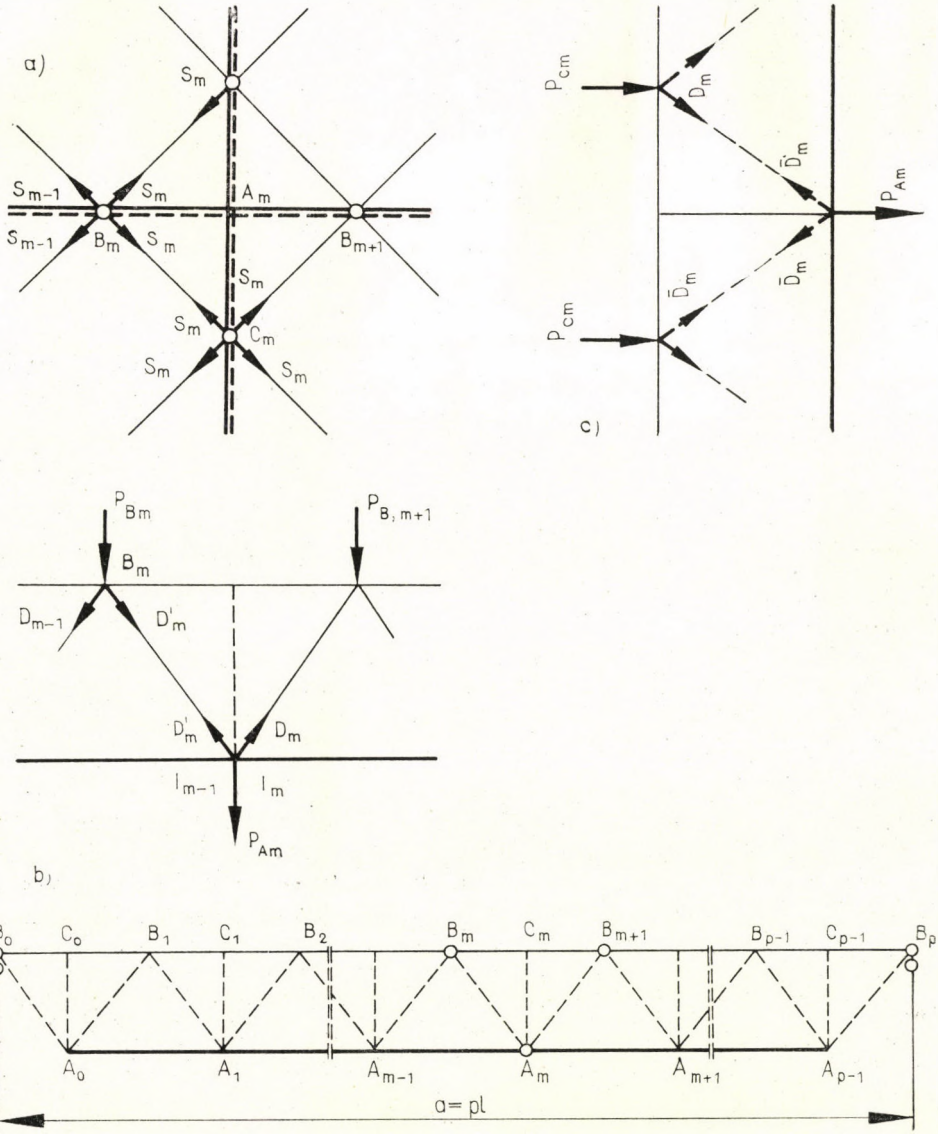


Fig. 3. Numbering of the joints and the bar forces in the cylindrical bending: *a)* plane; *b)* vertical section along the *x*-axis; *c)* cross-section

— for the joint C

$$(\Sigma Z) \qquad 2\bar{D}_m \sin\gamma + P_{Cm} = 0\,. \tag{3.3}$$

The other equations of projection are identically satisfied. From (3.3) there

results directly

$$\bar{D}_m = -\frac{P_{Cm}}{2\sin\gamma}\,. \tag{3.4}$$

The elimination of $\bar{D}_m$ and D'_m between (3.1b), (3.2b) and (3.3) leads to

$$D_m - D_{m-1} = \frac{P_{Am}+P_{Bm}+P_{Cm}}{\sin\gamma} \tag{3.5}$$

which constitutes a finite difference equation with respect to D_m.

The force in the other bracing member results from one of the relations (3.2), (3.4), for example

$$D'_m = -\frac{P_{Bm}}{\sin\gamma} - D_{m-1}\,. \tag{3.6}$$

Keeping $(I_m - I_{m-1})$ and $(S_m - S_{m-1})$ in the left hand side of Eqs (3.1) and (3.3), new finite difference equations are obtained for the bar forces in the two layers:

$$I_m - I_{m-1} = -(D_m - D'_m)\cos\gamma\,, \tag{3.7a}$$

$$S_m - S_{m-1} = -(D'_m - D_{m-1})\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}\,, \tag{3.7b}$$

where the forces in the bracing members which occur in the right hand sides are assumed as being known from the integration of Eq. (3.5).

The solutions of the previous finite difference equations can be obtained once the applied loads P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm} are given. For example, when these nodal forces are constant ($P_{Am} = P_A$, $P_{Bm} = P_B$, $P_{Cm} = P_C$), one obtains:

$$D_m = \frac{1}{\sin\gamma}\left[(P_A+P_B+P_C)\,m + C_1\right], \tag{3.8a}$$

$$D'_m = \frac{1}{\sin\gamma}\left[-(P_A+P_B+P_C)\,m + P_A+P_C-C_1\right], \tag{3.8b}$$

$$I_m = \cot\gamma\left[-(P_A+P_B+P_C)\,m^2 - (C_3+2\,C_1)\,m + C_2\right], \tag{3.8c}$$

$$S_m = \frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\left[(P+P_B+P_C)\,m^2 - (P_A+P_C-2C_1)\,m + C_3\right], \tag{3.8d}$$

where C_1, C_2, C_3 represent constants of integration; in point 3.3 it will be shown that the constants C_2 and C_3 are not independent of each other.

3.2. *Deformation equations*

In the particular case under consideration, the displacements of the joints in the Oy-axis direction are zero, i.e. $v_A = v_B = v_C = 0$. From the particularisation of Eq. (2.17), applied successively to the bars with forces I_m, S_m, D_m and D'_m, there results:

$$I_m = k_i(u_{A,m+1} - u_{A,m}), \tag{3.9a}$$

$$S_m = \frac{k_s}{\sqrt{2}}(u_{C,m} - u_{B,m}), \tag{3.9b}$$

$$D_m = k_d \cos\gamma\,[u_{B,m+1} - u_{A,m} - (w_{B,m+1} - w_{A,m})\tan\gamma], \tag{3.9c}$$

$$D'_m = k_d \cos\gamma\,[u_{A,m} - u_{B,m} + (w_{A\cdot m} - w_{B,m})\tan\gamma]. \tag{3.9d}$$

From simple geometrical considerations, we obtain:

$$u_{C,m} = \frac{1}{2}(u_{B,m+1} + u_{B,m}). \tag{3.10a}$$

The deflection of joint C_m results from the deflection of joint A_m to which is added the shortening of the bracing members D_m under the action of the nodal forces P_{Cm}

$$w_{C,m} = w_{A,m} + \frac{P_{Cm}}{2\,k_d \sin^2\gamma}. \tag{3.10b}$$

From (3.9a) there results

$$u_{A,m+1} - u_{A,m} = \frac{I_m}{k_i}. \tag{3.11a}$$

The elimination of $u_{C,m}$ between (3.9b) and (3.10a) leads to

$$u_{B,m+1} - u_{B,m} = \frac{2\sqrt{2}\,S_m}{k_s}. \tag{3.11b}$$

By subtraction of relation (3.9a) from (3.9d) and then after the convenient grouping of the terms, we obtain

$$w_{B,m+1} - w_{B,m} = \frac{u_{B\,m+1} + u_{B,m} - 2u_{A,m}}{\tan\gamma} + \frac{D'_m - D_m}{k_d \sin\gamma}. \tag{3.11c}$$

Relations (3.11a)—(3.11c) constitute finite difference equations with respect to the displacements u_A, u_B, w_A if we assume that the right hand members of these relations are known. Their integration introduces three new constants of integration C_4, C_5, C_6.

The deflections w_A follow directly from one of the relations (3.9c) or (3.9d), for example

$$w_{A,m} = w_{B,m} + \frac{u_{B,m} - u_{A,m}}{\tan \gamma} + \frac{D'_m}{k_d \sin \gamma} . \tag{3.11d}$$

Thus all joint displacements can be completely determined. It should be observed that forces and displacements are established in two successive steps.

3.3. *Boundary conditions*

The constants of integration are determined from boundary conditions. We shall limit ourselves to exemplify the statically determinated case when the double-layer space grid is simply supported at the upper edge joints and carries uniform loads.

If p denotes the number of intervals in the top layer (the supporting points being 0 and p), the reaction has a value

$$V_0 = (P_A + P_C) \frac{p}{2} + P_B \frac{p-1}{2} . \tag{3.12}$$

From the method of joints applied to 0 and 0′ (Fig. 4), we obtain

$$\begin{aligned} D'_0 &= \frac{V_0}{\sin \gamma} , \\ D_0 &= - \frac{V_0 - P_A - P_C}{\sin \gamma} , \\ S_0 &= - V_0 \frac{\cot \gamma}{\sqrt{2}} , \\ I_0 &= (2V_0 - P_A - P_C) \cot \gamma . \end{aligned} \tag{3.13}$$

If in (3.8) we consider $m = 0$ and the resulting values are equal to expressions (3.13), we obtain for the constants of integration the values

$$\begin{aligned} C_1 &= - (P_A + P_B) \frac{p-2}{2} - P_B \frac{p-1}{2} , \\ C_2 &= (P_A + P_B + P_C)(p-1) , \\ C_3 &= - (P_A + P_C) \frac{p}{2} - P_B \frac{p-1}{2} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

From the elimination of V_0 between the expressions of S_0 and I_0 we obtain

$$2\sqrt{2}\,S_0 + I_0 + (P_A + P_C)\cot\gamma = 0\,.$$

If this relation is expressed in terms of the constants of integration, we obtain

$$C_2 + 2\,C_3 = -(P_A + P_C)\,,$$

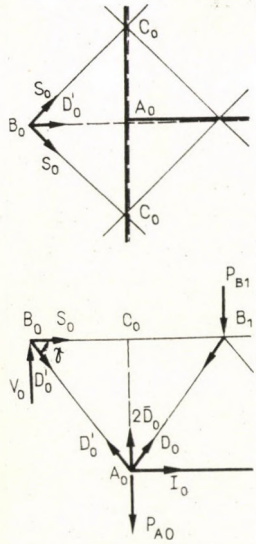


Fig. 4. Equilibrium of the joints 0 and 0′: *a)* plane; *b)* vertical section along the x-axis

wherefrom we deduce that the two constants of integration C_2 and C_3 are not linearly independent.

Both expressions (3.8) and (3.14) show that the nodal loads P_A and P_C intervene in the bar force expressions only by their sum. This is very easily explained from the statical point of view by the fact that nodal loads P_C are transmitted to the joints A directly through the bracing members, since the horizontal members which link the joints C are free of charge. Thus, by the reduction of forces, at the joints A the final force $(P_A + P_C)$ acts.

The force expressions will be given more extensively in Section 4.

For the displacements one can state that, in the symmetry axis, the horizontal displacements should vanish, i.e.

$$- \text{ for } m = \frac{p}{2} \quad \rightarrow u_B = 0\,,$$

$$- \text{ for } m = \frac{p-1}{2} \rightarrow u_A = 0\,.$$

If at one end, for example $m = 0$, the space grid is pin-connected, the boundary condition will consequently be modified, a fact which does not change the state of stress.

A third condition concerns the deflections w_B, namely

$$w_{B,0} = 0 \text{ for } m = 0 .$$

As a consequence of the symmetry, the condition of vanishing deflection at the second end will identically be fulfilled. The explicit determination of the displacements follows in the next section.

4. Application of the deformation method

To continue, we shall again consider the problem of the cylindrical bending, based on the systematic application of the deformation method; for this purpose, we shall start from the partial finite difference equations listed in Table II.

4.1. *The set of finite difference equations*

Keeping in mind that $v_A = v_B = v_C = 0$, the set of equations is simplified; first of all, the equations of projection on the Oy-axis vanish (Ay, By and Cy).

Further from Eq. (Cx), the displacement u_C is rendered explicit in terms of u_B; in this manner relation (3.10a) is obtained, by means of which displacement u_C is eliminated.

An analogous procedure is followed for the deflections w_C. From Eq. (Cz) w_C is expressed in terms of w_A; the previously established relation (3.11d) is thus obtained.

After carrying out all these eliminations, there results a set of four finite difference equations, the matrix of which is listed in Table III.

Table III

u_A	u_B	w_A	w_B	= Free term
$-\psi_t(1-E_x)$ $(1-E_x^{-1})-2$	$1+E_x$	.	$+\tan\gamma\,(1-E_x)$	0
$1+E_x^{-1}$	$-\bar{\psi}_s(1-E_x)$ $(1-E_x^{-1})-2$	$+\tan\gamma\,(1-E_x^{-1})$	.	0
.	$1-E_x$	$-2\tan\gamma$	$+\tan\gamma\,(1+E_x)$	$-\dfrac{F_{Az}+F_{Cz}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}$
$1-E_x^{-1}$	.	$+\tan\gamma(1+E_x^{-1})$	$-2\tan\gamma$	$=\dfrac{F_{Lz}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}$

For the sake of symmetry, we denote

$$\overline{\psi}_s = \frac{1}{2}\,\psi_s = \frac{k_s}{2\,k_d \cos^2 \gamma}\,, \tag{4.1}$$

and in accordance with our previous assumption in section 3, we limit ourselves to the action of vertically applied loads.

4.2. *Introduction of a displacement function*

A unitary procedure for obtaining the solution consists in reducing the set of four finite difference equations to a single equation with respect to a displacement function, from which the displacements and bar forces are then derived.

To obtain this displacement function, the progress analysis can be systematized as follows.

Let the system be

$$\begin{aligned}
L_{11}u_A + L_{12}u_B + L_{13}w_A + L_{14}w_B &= 0,\\
L_{21}u_A + L_{22}u_B + L_{23}w_A + L_{24}w_B &= 0,\\
L_{31}u_A + L_{32}u_B + L_{33}w_A + L_{34}w_B &= 0,\\
L_{41}u_A + L_{42}u_B + L_{43}w_A + L_{44}w_B &= L_{04}\,,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

where the coefficients L_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ are finite difference operators, the expression of which result from the comparison to the set of equations of Table III. For the free terms, the principle of superposition will be applied. In the preceding system (4.2), the case of loads applied at the top layer (F_{Bz}) was considered.

The displacement function Φ_B satisfies a partial difference equation which is obtained by equating the main determinant of the system (4.2) to the free term.

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_B = L_{04}\,. \tag{4.3}$$

The unknowns u_A, u_B, w_A are obtained by applying to the displacement function Φ_B an operator which results by replacing in the main determinant the column of the corresponding unknown by the free term column, in which

$L_{04} = 1$ is taken. With this procedure the results are:

$$u_A = -\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B, \quad u_B = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B,$$

$$w_A = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B, \quad w_B = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \Phi_B. \tag{4.4}$$

Introduction of solutions (4.4) in the last equation (4.2) leads to the relation (4.3), in which the determinant was developed according to the terms of the last line.

We shall proceed in a similar manner for the nodal forces $(F_{Az} + F_{Cz})$ and namely in system (4.2) the free term L_{03} in the third equation will be considered.

The displacement function Φ_A satisfies a partial difference equation whose matrix is the same main determinant and the free term of which is L_{03}. The unknowns u_A, u_B, w_A, w_B follow from the relations

$$u_A = +\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A, \quad u_B = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{23} & L_{24} \\ L_{41} & L_{13} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A,$$

$$w_A = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{24} \\ L_{41} & L_{42} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A, \quad w_B = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} \end{vmatrix} \Phi_A. \tag{4.5}$$

Once the displacements are determined, the bar forces are deduced from relations (3.9).

4.3. *Case of the applied loads* P_B

We shall apply the previous expressions to the case of loading of joints B. Starting out from the matrix of the set of finite difference equations listed in Table III, the expression of the displacement u_A from (4.4) is written as:

$$u_A = -\begin{vmatrix} 1+E_x & 0 & \tan\gamma\,(1+E_x) \\ -\bar{\psi}_s(1-E_x)\,(1-E_x^{-1}) - 2 & \tan\gamma(1-E_x^{-1}) & 0 \\ 1-E_x & -2\tan\gamma & \tan\gamma\,(1+E_x) \end{vmatrix} \Phi_B =$$

$$= -2\,\bar{\psi}_s \tan^2\gamma\,(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})\,\Phi_B\,.$$

In a completely similar manner we obtain

$$u_B = -\psi_i \tan^2\gamma\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})^2\,(1+E_x)\,\Phi_B\,,$$

$$w_A = -\tan\gamma\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,[\psi_i\,\bar{\psi}_s(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\times \times(1+E_x)+2\,(\psi_i+\bar{\psi}_s)\,(1+E_x)]\,\Phi_B\,,$$

$$w_B = -\tan\gamma\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,[2\,\psi_i\,\bar{\psi}_s\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})+ + \psi_i\,(1+E_x)\,(1+E_x^{-1})+4\,\bar{\psi}_s]\,\Phi_B\,,$$

$$\tan^2\gamma\cdot\psi_i\,\bar{\psi}_s(1-E_x)^3\,(1-E_x^{-1})^3\,\Phi_B = -\frac{F_{Bz}}{k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}\,.$$

It is important to observe that the operator $(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})$ intervenes in all the preceding expressions. Therefore, simpler expressions will be obtained if we choose the new displacement function according to the relation

$$-\tan^2\gamma(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,\Phi_B = F_B\,. \tag{4.6}$$

The new displacement function F_B satisfies the finite difference equation of fourth order

$$(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})^2\,F_B = \frac{F_{Bz}}{\psi_i\,\bar{\psi}_s\,k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma} \tag{4.7}$$

and the displacements obtain their final expressions:

$$u_A = 2\,\bar{\psi}_s\,(1-E_x)\,F_B\,, \tag{4.8a}$$

$$u_B = \psi_i\,(1-E_x^{-1})\,(1+E_x)\,F_B\,, \tag{4.8b}$$

$$w_A = \cot\gamma\,[\psi_i\,\bar{\psi}_s\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,(1+E_x)+ + 2\,(\psi_i+\bar{\psi}_s)\,(1+E_x)]\,F_B\,, \tag{4.8c}$$

$$w_B = \cot\gamma\,[2\,\psi_i\,\bar{\psi}_s\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})+ + \psi_i\,(1+E_x)\,(1+E_x^{-1})+4\,\bar{\psi}_s]\,F_B\,. \tag{4.8d}$$

For the determination of the bar forces, one starts out from the relations (3.9) and (3.11b), respectively, in which the operators E_x and E_x^{-1} are first introduced

$$I = k_i\,(E_x\,u_A - u_A) = -k_i(1-E_x)\,u_A = -2k_i\,\bar{\psi}_s(1-E_x)^2\,F_B, \tag{4.9a}$$

$$S = \frac{k_s}{2\sqrt{2}}\,(E_x\,u_B - u_B) = -\frac{k_s}{2\sqrt{2}}\,(1-E_x)\,u_B = = -\frac{k_s\,\psi_i}{2\sqrt{2}}\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,(1+E_x)\,F_B\,, \tag{4.9b}$$

$$D = k_d \cos\gamma\,[E_x u_B - u_A - (E_x w_B - w_A)\tan\gamma] = \\ = \cos\gamma \cdot k_d\,\psi_i\,\overline{\psi}_s\,(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})\,F_B\,, \tag{4.9c}$$

$$D' = k_d \cos\gamma\,[u_A - u_B + (w_A - w_B)\tan\gamma] = \\ = -\cos\gamma \cdot k_d\,\psi_i\,\overline{\psi}_s\,(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})\,F_B = -D\,. \tag{4.9d}$$

Returning from the difference operators E_x and E_x^{-1} to the values of the functions in joint m and the adjacent joints and denoting $P_{Bz} = P_{Bm}$, the previous relations are written*

$$F_{m+2} - 4F_{m+1} + 6F_m - 4F_{m-1}F_{m-2} = \frac{P_{Bm}}{\psi_i\,\overline{\psi}_s\,k_d \sin\gamma \cdot \cos\gamma}\,, \tag{4.10a}$$

$$\begin{aligned} u_{A,m} &= 2\,\overline{\psi}_s\,(F_m - F_{m+1})\,, \\ u_{B,m} &= \psi_i\,(F_{m+1} - F_{m-1})\,, \\ w_{A,m} &= \cot\gamma\,[-\psi_i\,\overline{\psi}_s\,(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1}) + \\ &\quad + 2\,(\psi_i + \overline{\psi}_s)\,(F_{m+1} + F_m)]\,, \\ w_{B,m} &= \cot\gamma\,[-2\,\psi_i\,\overline{\psi}_s\,(F_{m+1} - 2F_m + F_{m-1}) + \\ &\quad + \psi_i\,(F_{m+1} + 2F_m + F_{m-1}) + 4\,\overline{\psi}_s\,F_m]\,, \\ I_m &= -2\,k_i\,\overline{\psi}_s\,(F_{m+2} - 2F_{m+1} + F_m)\,, \end{aligned} \tag{4.10b}$$

$$S_m = +\frac{1}{2\sqrt{2}}\,k_s\,\psi_i\,(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1})\,, \tag{4.10c}$$

$$D_m = -D'_m = \cos\gamma \cdot k_d\,\psi_i\,\overline{\psi}_s\,(F_{m+2} - 3F_{m+1} + 3F_m - F_{m-1})\,.$$

The solution of Eq. (4.10a) will be sought for according to the procedure shown in a previous paper [4], for the case of the double-layer simple square mesh grid.

For the case of equal nodal forces ($F_{Bm} = P_B$), the following solution is obtained:

$$F_m = \frac{P_B}{\psi_i\,\overline{\psi}_s\,k_d \sin\gamma \cdot \cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}\,m^4 + \frac{C_3}{3!}\,m^3 + \frac{C_2}{2!}\,m^2 + C_1 m + C_0\right), \tag{4.11}$$

where C_0, C_1, C_2, C_3 represent constants of integration (different from those introduced in Section 3.3).

Replacing in (4.11) m by $(m-1)$, $(m+1)$ and $(m+2)$, we obtain the expressions of F_{m-1}, F_{m+1} and F_{m+2}, which are not reproduced here.

* For the sake of simplicity, the subscript B which characterizes the position of the nodal forces is cancelled.

With these relations, the expressions of the bar forces and displacements become:

$$
\begin{aligned}
I_m &= -P_B \cot\gamma \left[m^2 + 2(C_3+1)m + 2C_3 + 2C_2 + \frac{7}{6} \right], \\
S_m &= P_B \frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}} \left[m^2 + (2C_3+1)m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3} \right], \\
D_m &= -D'_m = \frac{P_B}{\sin\gamma} \left(m + C_3 + \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{A,m} &= -\frac{P_B}{k_i} \cot\gamma \left[\frac{1}{3} m^3 + \left(C_9 + \frac{1}{2} \right) m^3 + \right. \\
&\quad \left. + \left(C_3 + 2C_2 + \frac{1}{3} \right) m + \frac{1}{3} C_3 + C_2 + 2C_1 + \frac{1}{12} \right], \\
u_{B,m} &= \frac{2P_B}{k_s} \cot\gamma \left[\frac{1}{3} m^3 + C_3 m^2 + \left(2C_2 + \frac{1}{3} \right) m + \frac{1}{3} C_3 + 2C_1 \right], \\
w_{A,m} &= P_B \cot^2\gamma \left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s} \right) \left[\frac{1}{6} m^4 + \frac{2C_3+1}{3} m^3 + \left(C_3 + 2C_2 + \frac{1}{2} \right) m^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(C_3 + 2C_2 + 4C_1 + \frac{1}{3} \right) m + \frac{1}{3} C_3 + C_2 + 2C_1 + 2C_0 + \frac{1}{12} \right] - \\
&\quad - \frac{P_B}{k_d \sin^2\gamma} \left[(2C_3+1)m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3} \right], \\
w_{B,m} &= P_B \cot^2\gamma \left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s} \right) \left(\frac{1}{6} m^4 + \frac{2}{3} C_3 m^3 + 2C_2 m^2 + 4C_1 m + 4C_0 \right) + \\
&\quad + P_B \left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s} - \frac{1}{k_d \sin^2\gamma} \right) \left(m^2 + 2C_3 m + 2C_2 + \frac{1}{6} \right).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Since due to its geometrical configuration the studied double-layer space grid has a favourable statical behaviour when it covers a single bay, we shall limit ourselves to this situation, considering the simple support at both ends.

The boundary conditions were examined first in Section 3.3; they can be briefly expressed as follows:

$$
\left.
\begin{aligned}
D_0 &= -\frac{V_0}{\sin\gamma} = -\frac{P_B}{\sin\gamma} \cdot \frac{p-1}{2}, \\
S_0 &= -V_0 \frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}} = -P_B \frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p-1}{2}, \\
w_{B,0} &= 0,
\end{aligned}
\right\} \text{for } m = 0,
\tag{4.14}
$$

$$
w_{B,p} = 0 \qquad \text{for } m = p .
$$

With the previous conditions, the following values of the constants are obtained:

$$C_0 = 0\,,\ C_1 = \frac{p^3+p}{24}\,,\ C_2 = -\frac{1}{12}\,,\ C_3 = -\frac{p}{2}\,. \tag{4.15}$$

Introducing these values into (4.12) and (4.13), we get the final expressions of the bar forces and joint displacements:

$$I_m = +P_B \cot\gamma\,[-m^2 + (p-2)\,m + p - 1]\,, \tag{4.16a}$$

$$S_m = +P_B \frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 - (p-1)m - \frac{p-1}{2}\right], \tag{4.16b}$$

$$D_m = -D'_m = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(m - \frac{p-1}{2}\right), \tag{4.16c}$$

$$u_{A,m} = +\frac{2P_B\cot\gamma}{3k_i}\left[m^3 - \frac{3}{2}(p-1)\,m^2 - \frac{3p-1}{2}\,m + \frac{p^3-p}{4}\right], \tag{4.17a}$$

$$u_{B,m} = +\frac{2P_B\cot\gamma}{3k_s}\left[m^3 - \frac{3}{2}\,pm^2 + \frac{1}{2}\,m + \frac{p^3-p}{4}\right], \tag{4.17b}$$

$$\begin{aligned} w_{A,m} = {} & +\frac{P_B\cot^2\gamma}{6}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[m^4 - 2(p-1)\,m^3 - (3p-2)\,m^2 + \right. \\ & \left. + (p_3 - 2p + 1)\,m + \frac{p^3-p}{2}\right] - \frac{P_B}{k_d\sin^2\gamma}\times \\ & \times\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{3p+1}{6}\right], \end{aligned} \tag{4.17c}$$

$$\begin{aligned} w_{B,m} = {} & -\frac{P_B\cot^2\gamma}{6}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)[m^4 - 2pm^3 - m^2 + (p^3+p)\,m] - \\ & - P_B\left[\frac{\cot^2\gamma}{k_s} - \frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\right](pm - m^2)\,. \end{aligned} \tag{4.17d}$$

4.4. *Case of the applied loads* $P_A + P_C$

Proceeding in a similar manner as in the case of loads P_B (see point 4.3), it is shown that the displacement function F_A satisfies the following finite difference equation*

$$(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})^2\,F_A = \frac{F_{Az}+F_{Cz}}{\psi_i\,\overline{\psi}_s\,k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}\,,$$

* For the sake of simplicity, F_A is written instead of F_{A+C}.

wherefrom the displacements are derived

$$u_A = \overline{\varphi}_s(1-E_x)(1+E_x^{-1})\,F_A\,,$$
$$u_B = 2\,\varphi_i(1-E_x^{-1})\,F_A\,,$$
$$w_A = \cot\gamma\,[2\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1}) + 4\varphi_i + \overline{\varphi}_s(1+E_x)(1+E_x^{-1})]\,F_A,$$
$$w_B = \cot\gamma\,[\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})(1+E_x^{-1}) + 2\,(\varphi_i+\overline{\varphi}_s)(1+E_x^{-1})]\,F_A$$

and then the forces in the bars

$$I = -k_i\,\overline{\varphi}_s(1-E_x)^2(1+E_x^{-1})\,F_A\,,$$
$$S = -\frac{k_s\,\varphi_i}{\sqrt{2}}(1-E_x)(1-E_x^{-1})\,F_A\,,$$
$$D = \cos\gamma\cdot k_d\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})\,F_A\,,$$
$$D' = \cos\gamma\cdot k_d\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})^2\,F_A\,.$$

When transcribed into finite differences, the previous relations become*

$$F_{m+2} - 4\,F_{m+1} + 6\,F_m - 4F_{m-1} + F_{m-2} = \frac{\mathfrak{F}_{Am} + P_{Cm}}{\varPsi_i\,\overline{\varPsi}_s\,k_d\sin\gamma\cdot\cos\gamma}\,, \tag{4.18}$$

$$u_{A,m} = -\,\overline{\varphi}_s(F_{m+1} - F_{m-1})\,,$$
$$u_{B,m} = 2\,\varphi_i\,(F_m - F_{m-1})\,,$$
$$w_{A,m} = \cot\gamma\,[-2\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(F_{m+1} - 2\,F_m + F_{m-1}) + 4\,\varphi_i\,F_m + \tag{4.19}$$
$$+\,\overline{\varphi}_s(F_{m+1} + 2\,F_m + F_{m-1})]\,,$$
$$w_{B,m} = \cot\gamma\,[-\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(F_{m+1} - F_m - F_{m-1} + F_{m-2}) +$$
$$+\,2\,(\varphi_i + \overline{\varphi}_s)\,(F_m + F_{m-1})]\,.$$
$$I_m = -k_i\,\overline{\varphi}_s\,(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1})\,,$$
$$S_m = +\frac{k_s\,\varphi_i}{\sqrt{2}}(F_{m+1} - 2\,F_m + F_{m-1})\,, \tag{4.20}$$
$$D_m = \cos\gamma\cdot k_d\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(F_{m+2} - 3\,F_{m+1} + 3\,F_m - F_{m-1})\,,$$
$$D'_m = -\cos\gamma\cdot k_d\,\varphi_i\,\overline{\varphi}_s(F_{m+1} - 3\,F_m + 3\,F_{m-1} - F_{m-2}) = -D_{m-1}\,.$$

When the nodal loads are equal ($F_{Az} + F_{Cz} = P_A + P_C$), the following solution is obtained for the equation which determines the displacement

* For the sake of simplicity, the subscript A which characterizes the position of the nodal forces is cancelled.

function F_A:

$$F_m = \frac{P_A+P_C}{\psi_i \bar{\psi}_s k_d \sin\gamma \cdot \cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}m^4+\frac{C_3}{3!}m^3+\frac{C_2}{2!}m^2+C_1 m+C_0\right), \quad (4.21)$$

where C_0, C_1, C_2, C_3 represent constants of integration.

The introduction of solution (4.21) into relations (4.19) and (4.20) leads to the following general expressions for the bar forces and joint displacements:

$$\begin{aligned}
I_m &= -(P_A+P_C)\cot\gamma\left[m^2+(2C_3+1)m+C_3+2C_2+\frac{2}{3}\right],\\
S_m &= +(P_A+P_C)\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\left(m^2+2C_3 m+2C_2+\frac{1}{6}\right), \qquad (4.22)\\
D_m &= \frac{P_A+P_B}{\sin\gamma}\left(m+C_3+\frac{1}{2}\right),\\
D'_m &= -D_{m-1} = -\frac{P_A+P_C}{\sin\gamma}\left(m+C_3+\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{A,m} &= -\frac{P_A+P_C}{k_i}\cot\gamma\left[\frac{1}{3}m^3+C_3m^2+\left(2C_2+\frac{1}{3}\right)m+\frac{1}{3}C_3+2C_1\right],\\
u_{B,m} &= 2\frac{P_A+P_C}{k_s}\cot\gamma\left[\frac{1}{3}m^3+\left(C_3-\frac{1}{2}\right)m^2-\right.\\
&\quad \left.-\left(C_3-2C_2-\frac{1}{3}\right)m+\frac{1}{3}C_3-C_2+2C_1-\frac{1}{12}\right], \qquad (4.23)\\
w_{A,m} &= (P_A+P_C)\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{1}{6}m^4+\frac{2}{3}C_3m^3+\right.\\
&\quad \left.+2C_2m^2+4C_1m+4C_0\right)+(P_A+P_C)\left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s}-\right.\\
&\quad \left.-\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\right)\left(m^2+2C_3m+2C_2+\frac{1}{6}\right),\\
w_{B,m} &= (P_A+P_C)\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[\frac{1}{6}m^4+\frac{2C_3-1}{3}m^3+\right.\\
&\quad +\left(-C_3+2C_2+\frac{1}{2}\right)m^2+\left(C_3-2C_2+4C_1-\frac{1}{3}\right)m-\\
&\quad \left.-\frac{1}{3}C_3+C_2-2C_1+4C_0+\frac{1}{12}\right]-(P_A+P_C)\times\\
&\quad \times\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\left[m^2+(2C_3-1)m-C_3+2C_2+\frac{2}{3}\right].
\end{aligned}$$

For the simply supported space grid the boundary conditions are written as:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{-V_0+P_A+P_C}{\sin\gamma} = -\frac{(P_A+P_C)(p-2)}{2\sin\gamma}, \\ S_0 &= -\frac{V_0\cot\gamma}{\sqrt{2}} = -(P_A+P_C)\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\cdot\frac{p}{2}, \\ w_{B,0} &= 0; \end{aligned}\right\} \text{for } m=0 \qquad (4.24)$$

$$w_{B,p} = 0 \qquad \text{for } m = p\,.$$

From the previous conditions, the following values of the constants of integration result in

$$C_0 = \frac{p^3+2p}{48}, \quad C_1 = \frac{p^3+p-2}{24}, \quad C_2 = -\frac{3p+1}{12}, \quad C_3 = -\frac{p-1}{2}. \qquad (4.25)$$

Introducing these values into (4.22) and (4.23), we obtain the following final expressions of the forces and displacements:

$$\begin{aligned} I_m &= +(P_A+P_C)\cot\gamma\,[-m^2+(p-2)\,m+p-1]\,, \\ S_m &= (P_A+P_C)\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2-(p-1)\,m-\frac{p}{2}\right], \\ D_m &= \frac{P_A+P_C}{\sin\gamma}\left(m-\frac{p}{2}+1\right), \\ D'_m &= \frac{P_A+P_C}{\sin\gamma}\left(\frac{p}{2}-m\right), \end{aligned} \qquad (4.26)$$

$$\begin{aligned} u_{A,m} &= -\frac{P_A+P_C}{3k_i}\cot\gamma\left[m^3-\frac{3}{2}(p-1)\,m^2-\frac{3p-1}{2}m+\frac{p^3-p}{4}\right], \\ u_{B,m} &= +\frac{2(P_A+P_C)}{3k_s}\cot\gamma\left(m^3-\frac{3}{2}pm^2-m+\frac{p^3+2p}{4}\right), \end{aligned} \qquad (4.27)$$

$$\begin{aligned} w_{A,m} &= \frac{1}{6}(P_A+P_C)\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[m^4-2(p-1)\,m^3-\right. \\ &\quad \left.-(3p+1)\,m^2+(p^3+p-2)\,m+\frac{1}{2}p^3+p\right]+ \\ &\quad +(P_A+P_C)\left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s}-\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\right)\left[m^2-(p-1)\,m-\frac{p}{2}\right], \\ w_{B,m} &= \frac{1}{6}(P_A+P_C)\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[m^4-pm^3-m^2+(p^3+p)\,m\right]+ \\ &\quad +(P_A+P_C)\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}(pm-m^2)\,. \end{aligned}$$

In papers [1], [5] is described an approximate method of the calculation of the bar forces and displacements of the double-layer diagonal square mesh grid with uniform vertical loads.

The approximation consists in the assumption that in all the four top bars around a bottom joint equal forces occur.

As, in the case of cylindrical bending, this assumption is rigorous, the results are that the approximate method leads to exact results.*

4.5. *Finite difference equations satisfied by the forces and the displacements*

In order to be able to directly establish some new results or to deduce certain properties of the space grid, it may appear necessary to express each unknown under a difference form, as a function of the applied loads. These expressions are established in a very simple manner, from the elimination of the displacement function between the equation governing it and the relation which determines the desired unknown, as a particular function of the displacement function.

Without transcribing the intermediate calculations, the following equations are obtained, corresponding to the type of loading, P_B or $P_A + P_C$.

Loads applied at the joints B

$$
\begin{aligned}
&(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})^2\,u_A = \frac{2\cot\gamma}{k_i}\,F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})\,u_B = \frac{2\cot\gamma}{k_s}\,(1+E_x)\,F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})^2\,w_A = \left[\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1}) + \right.\\
&\qquad \left. + 2\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\right](1+E_x)\,F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})^2\,w_B = 2\left[\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\,(1-E_x)(1-E_x^{-1}) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\cot^2\gamma}{k_s}\,(1+E_x)\,(1+E_x^{-1}) + \frac{2\cot^2\gamma}{k_i}\right]F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x^{-1})^2\,I = -2\cot\gamma\cdot F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,S = -\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\,(1+E_x)\,F_{Bz}\,,\\
&(1-E_x^{-1})\,D = \frac{1}{\sin\gamma}\,F_{Bz}\,.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

* With respect to the quoted paper [5], the following correspondence subsists between the load symbols: $P_A \leftrightarrow P_i$ and $P_B = P_C \leftrightarrow P_s$.

Loads applied at the nodes A and C

$$
\begin{aligned}
&(1-E_x)(1-E_x^{-1})^2 u_A = \frac{\cot\gamma}{k_i}(1+E_x^{-1})(F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})\, u_B = \frac{4\cot\gamma}{k_s}(F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})^2 w_A = \left[\frac{2}{k_d\sin^2\gamma}(1-E_x)(1-E_x^{-1}) + \frac{8\cot^2\gamma}{k_s} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\cot^2\gamma}{k_i}(1+E_x)(1+E_x^{-1})\right](F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})^2 w_B = \left[\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}(1-E_x)(1-E_x^{-1}) + \right.\\
&\qquad \left. + 2\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\right](1+E_x^{-1})(F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x^{-1})^2 I = -\cot\gamma\,(1+E_x^{-1})(F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x)(1-E_x^{-1})\, S = -\sqrt{2}\cot\gamma(F_{Az}+F_{Cz}),\\
&(1-E_x)\, D = \frac{1}{\sin\gamma}(F_{Az}+F_{Cz}).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

5. The equivalent continuous medium

If the mesh size is very small compared to the span, the double-layer space grid can be assimilated by an equivalent continuous medium, whose elastic properties will be established in the following.

The transformation of the space grid into a continuous structure succeeds by using Taylor's expansion

$$
F_{m+1} = E_x F_m = F(x_m+l) = F_m + l\frac{dF_m}{dx} + \frac{l^2}{2!}\frac{d^2F_m}{dx^2} + \frac{l^3}{3!}\frac{d^3F_m}{dx^3} + \frac{l^4}{4!}\frac{d^4F_m}{dx^4} + \dots
$$

and analogous expressions for F_{m-2}, F_{m-1} and F_{m+2}.

We shall deal in some detail with the case of nodal forces applied in the joints of type B.

Substituting the expansions given by the previous relations into the finite difference equation (4.10a) in the relation results

$$F_{m+2} - 4F_{m+1} + 6F_m - 4F_{m-1} + F_{m-2} = 24\frac{l^4}{4!}\cdot\frac{d^4F}{dx^4} + \\ + 120\frac{l^6}{6!}\cdot\frac{d^6F}{dx^6} + \ldots = \frac{P_{Bm}}{\psi_i\bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cdot\cos\gamma}.$$

Neglecting the terms proportional to l^6 and higher powers of l, as l is small, from the previous expression the differential equation satisfied by the displacement function F results:

$$\frac{d^4F}{dx^4} = \frac{P_{Bm}}{l^4\psi_i\bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cdot\cos\gamma}. \tag{5.1}$$

In a similar way, we deduce from relations (4.10b) and (4.10c):

$$u_A = -2l\bar{\psi}_s\frac{dF}{dx},$$

$$u_B = +2l\psi_i\frac{dF}{dx} = -\frac{2k_i}{k_s}u_A, \tag{5.2}$$

$$w_A = w_B = w = 2\cot\gamma\left[2(\psi_i+\bar{\psi}_s)F - \psi_i\bar{\psi}_s l^2\frac{d^2F}{dx^2}\right];$$

$$I = -2l^2 k_i\bar{\psi}_s\frac{d^2F}{dx^2},$$

$$S = +\frac{l^2}{\sqrt{2}}k_s\psi_i\frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \tag{5.3}$$

$$D = -D' = l^3\psi_i\bar{\psi}_s k_d\cos\gamma\frac{d^3F}{dx^3}.$$

The solution of the differential equation (5.1) follows directly by successive integration; for equal nodal forces ($P_{Bm} = P_B$), it is written as:

$$F = \frac{P_B}{l^4\psi_i\bar{\psi}_s k_d\sin\gamma\cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}x^4 + \frac{C_3}{3!}x^3 + \frac{C_2}{2!}x^2 + C_1x + C_0\right) \tag{5.4}$$

where C_0, C_1, C_2, C_3 represent constants of integration as in the case of finite differences.

Substituting the expressions of F and of its successive derivatives into (5.2) and (5.3) this results in:

$$u_A = -\frac{2P_B \cot\gamma}{3k_i}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{C_3}{2}x^2+C_2 x+C_1\right),$$

$$u_B = -\frac{2k_i}{k_s}u_A, \tag{5.5a}$$

$$w = \frac{4P_B \cot^2\gamma}{l^4}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{x^4}{24}+\frac{C_3}{6}x^3+\right.$$

$$\left.+\frac{C_2}{2}x^2+C_1 x+C_0\right) - \frac{P_B}{l^2 k_d \sin^2\gamma}(x^2+2C_3 x+2C_2);$$

$$I = -\frac{P_B \cot\gamma}{l^2}(x^2+2C_3 x+2C_2),$$

$$S = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \tag{5.5b}$$

$$D = -D' = \frac{P_B}{\sin\gamma}(x+C_3).$$

For the double-layer space grid simply supported at the two opposite edges, to the boundary conditions

$$I = 0 \text{ and } w = 0 \text{ for } x = 0 \text{ and } x = a$$

the following values of the constants of integration correspond:

$$C_0 = 0,\ C_1 = \frac{a^3}{24},\ C_2 = 0,\ C_3 = -\frac{a}{3}.$$

The final expressions of the bar forces and joint displacements are:

$$I = \frac{P_B \cot\gamma}{l^2}(ax-x^2),$$

$$S = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \tag{5.6a}$$

$$D = -D' = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(x-\frac{a}{2}\right);$$

$$u_B = \frac{P_B \cot\gamma}{6l^3 k_s}(4x^3-6ax^2+a^3),$$

$$u_A = -\frac{k_s}{2k_i}u_B, \tag{5.6b}$$

$$w = \frac{P_B \cot^2\gamma}{6l^4}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)(x^4-2ax^3+a^3 x)+\frac{P_B}{l^2 k_d \sin^2\gamma}(ax-x^2).$$

For the loading case of joints A and C the same relations are obtained if we replace P_B by the sum $P_A + P_C$. The boundary conditions consequently remain the same.

It still remains to point out, for the case of continuous equivalent medium, which are the coordinates x to be considered in the calculation of bar forces. In accordance with Fig. 3 we have

$$\begin{aligned}
&- \text{for } I_m && x = (m+1)\,l\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2),\\
&- \text{for } S_m && x = \left(m+\frac{1}{2}\right) l\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1)\,,\\
&- \text{for } D_m, D'_m && x = \left(m+\frac{1}{2}\right) l\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1)\,,\\
&- \text{for } u_{A,m} && x = \left(m+\frac{1}{2}\right) l\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1)\,, \qquad (5.7)\\
&- \text{for } u_{B,m} && x = ml\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1, p)\,,\\
&- \text{for } w_{A,m} && x = \left(m+\frac{1}{2}\right) l\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1)\,,\\
&- \text{for } w_{B,m} && x = ml\,, && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1, p)\,.
\end{aligned}$$

In closing this section, let us seek an analogy with the plates. Let us start out from Eq. (4.28) which determine the deflections $w_B = w$. Putting

$$w = w_1 - w_2 \tag{5.8a}$$

the two partial deflections satisfy the equations

$$\begin{aligned}
(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})^2\,w_1 &= 2\cot^2\gamma\left[\frac{1}{k_i}+\frac{1}{2k_s}\,(1+E_x)\,(1+E_x^{-1})\right]F_{Bz}\,,\\
(1-E_x)^2\,(1-E_x^{-1})^2\,w_2 &= -\frac{2}{k_d\sin^2\gamma}\,(1-E_x)\,(1-E_x^{-1})\,F_{Bz}\,.
\end{aligned} \tag{5.8b}$$

From a limit process, the preceding relations go into the following equations

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{2\cot^2\gamma}{l^2}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\frac{F_{Bz}}{l^2}\,,$$

and

$$\frac{d^4 w_2}{dx^4} = \frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{F_{Bz}}{l^2}\right).$$

If we note the load per unit area

$$\lim_{(l\to 0)} \frac{F_{Bz}}{l^2} = p_x$$

and keep in mind relations (1.1), we obtain

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right) p_x, \tag{5.9a}$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{1}{k_d \sin^2 \gamma}\, p_x. \tag{5.9b}$$

The term w_2 from (5.8a) represents the influence of the transverse shear forces of a plate; it is reduced as will be shown in the numerical example (Section 7) and, in a first approximation, could be neglected.

If now we denote in (5.9a)

$$K = \frac{2h^2}{\dfrac{1}{k_i} + \dfrac{2}{k_s}}, \tag{5.10}$$

then the differential equation (5.8a), written in the form

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{K},$$

represents the equation of the deformed surface in cylindrical bending of a plate having a flexural stiffness K.

Thus, the double-layer diagonal square mesh grid works in cylindrical bending as a strip plate of flexural stiffness K, as given by relation (5.10).

6. Numerical example

Let us apply the previous results to a numerical example, choosing the following numerical data

— number of intervals	$p = 8$ $(l = a/8)$,
— height of the space grid	$h = l/2 = a/16$,
— cross-sectional area of bars	$A_i = A_s = A$, $A_d = 0{,}5A$,
— the loading consists of equal loads in the top layer	$P_B = P_C = P$.

The angle γ results from the relation

$$\cot \gamma = \frac{2h}{l} = 1, \quad \text{therefore } \gamma = 45^\circ \text{ and } \sin \gamma = 1/\sqrt{2}.$$

We shall first establish the general expressions of the bar forces and joint displacements in the case of $P_B = P_C = P$. The results are obtained by superposition from the groups of relations (4.16), (4.17) and (4.26), (4.27) respectively, where $P_A = 0$.

Following this procedure, we obtain:

$$I_m = 2P\cot\gamma\,[-m^2 + (p-2)m + p - 1]\,,$$

$$S_m = 2P\,\frac{\cot\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2-(p-1)\,m - \frac{p}{2} + \frac{1}{4}\right], \tag{6.1}$$

$$D_m = \frac{2P}{\sin\gamma}\left(m - \frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right),\quad D'_m = \frac{2P}{\sin\gamma}\left(-m + \frac{p}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

$$u_{A,m} = \frac{3}{2}\;\frac{P\cot\gamma}{k_i}\left[m^3 - \frac{3}{2}\,(p-1)\,m^2 - \frac{3p-1}{2}\,m + \frac{p^3-p}{4}\right],$$

$$u_{B,m} = +\frac{4}{3}\;\frac{P\cot\gamma}{k_s}\left(m^3 - \frac{3}{2}\,pm^2 - \frac{1}{4}\,m + \frac{2p^3+p}{8}\right), \tag{6.2}$$

$$w_{A,m} = \frac{P\cot^2\gamma}{3}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left[m^4 - 2(p-1)\,m^3 - \left(3p - \frac{1}{2}\right)m^2 + \right.$$

$$\left. + \left(p^3 - \frac{p+1}{2}\right)m + \frac{2p^3+p}{4}\right] + P\left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s} - \frac{2}{k_d\sin^2\gamma}\right)$$

$$\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{p}{2}\right] + \frac{P}{6k_d\sin^2\gamma}\,.$$

$$w_{B,m} = \frac{P\cot^2\gamma}{3}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left[m^4 - 2pm^3 - m^2 + (p^3+p)\,m\right] -$$

$$- P\left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s} - \frac{2}{k_d\sin^2\gamma}\right)(pm - m^2).$$

The variation of the bar forces and joint displacements u depends on a dimensional factor and on the number of intervals p. To determine the deflections it is still necessary to dispose of the ratio of axial stiffnesses.

According to the numerical data, we have

$$k_i = \frac{EA_i}{l} = k,\quad k_s = \frac{EA_s}{l_s} = k\sqrt{2}\,,\quad k_d = \frac{EA_d}{l_d} = \frac{k}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s} = \frac{\sqrt{2}+1}{k} \approx \frac{2{,}414\,213\,6}{k}\,,$$

$$\frac{\cot^2\gamma}{k_s} - \frac{2}{k_d\sin^2\gamma} = \frac{1}{k\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{k} = -\frac{7}{\sqrt{2}\,k} \approx -\frac{4{,}949\,747\,5}{k}\,,$$

$$\frac{1}{6k_d\sin^2\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3k}\,. \cong \frac{0{,}471\,404\,5}{k}$$

With the previous numerical results, we finally obtain:

$$I_m = 2(-m^2 + 6m + 7)P,$$

$$S_m = \sqrt{2}(m^2 - 7m - 3{,}75)P,$$

$$D_m = 2\sqrt{2}(m - 3{,}25)P,$$

$$D'_m = -2\sqrt{2}(m - 3{,}75)P,$$

$$\bar{D}_m = -\frac{1}{\sqrt{2}}P;$$

$$u_{A,m} = -\frac{2}{3}(m^3 - 10{,}5\,m^2 - 11{,}5\,m + 128)\frac{P}{k_i},$$

$$u_{B,m} = +\frac{4}{3}(m^3 - 12\,m^2 - 0{,}25\,m + 129)\frac{P}{k_s} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}(m^3 - 12\,m^2 - 0{,}25\,m + 129)\frac{P}{k},$$

$$w_{A,m} = \Big[0{,}804\,737\,9(m^4 - 14m^3 - 23{,}5\,m^2 + 507{,}5\,m + 258) -$$

$$- 4{,}949\,747\,5(m^2 - 7m - 4) + 0{,}471\,404\,5\,\frac{1}{3}\Big]\frac{P}{k},$$

$$w_{B,m} = [0{,}804\,737\,9(m^4 - 16\,m^3 - m^2 + 520) + 4{,}949\,747\,5\,(8\,m - m^2)]\frac{P}{k},$$

$$u_{C,m} = \frac{1}{2}(u_{B,m+1} + u_{B,m}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}(m^3 - 10{,}5\,m^2 - 10{,}75\,m + 123{,}375)\frac{P}{k},$$

$$w_{C,m} = w_{A,m} + \frac{P}{2\,k_d \sin^2\gamma} = w_{A,m} + \sqrt{2}\,\frac{P}{k}.$$

The diagrams of variation of the bar forces S_m, I_m, D_m, D'_m and those of the joint displacements $u_{A,m}$, $u_{B,m}$, $w_{A,m}$ and $w_{B,m}$, are represented in Fig. 5 b—i.

If we consider the continuous equivalent medium, relations (5.6) may be used, in which P_B is replaced by $P_B + P_C = 2P$ and $a = 8l$.

Thus we have

$$I = 2P\left(8\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right), \quad S = -\frac{I}{\sqrt{2}},$$

$$D = -D' = P\sqrt{2}(x - 4l),$$

$$u_B = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{P}{k}\left(\frac{x^3}{l^3} - 12\frac{x^2}{l^2} + 128\right), \quad u_A = -\frac{u_B}{\sqrt{2}},$$

$$w = \frac{\sqrt{2}+1}{3}\frac{P}{k}\left(\frac{x^4}{l^4} - 16\frac{x^3}{l^3} + 512\frac{x}{l}\right) + 4\sqrt{2}\,\frac{P}{k}\left(8\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

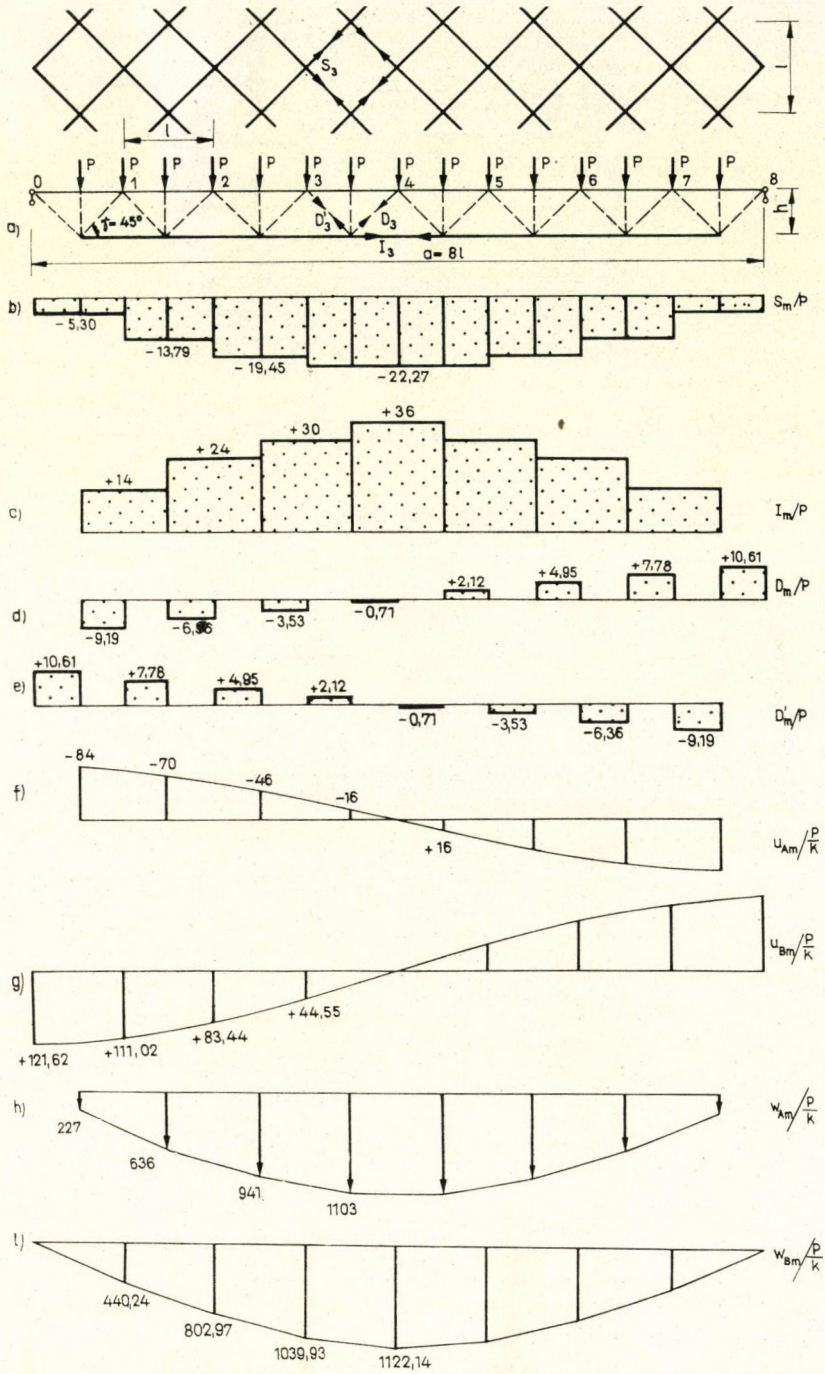


Fig. 5. Variation of the bar forces and joint displacements: *a)* geometry of the structure; *b)* forces I_m; *c)* forces S_m; *d)* forces D_m; *e)* forces D'_m; *f)* displacements $u_{A,m}$; *g)* displacements $u_{B,m}$; *h)* deflections $w_{A,m}$; *i)* deflections $w_{B,m}$

The co-ordinates x for the determination of the forces and displacements are defined by relations (5.7).

The comparison of the results obtained using alternatively the exact and the approximate solution (corresponding to the continuous equivalent medium) shows the following:

a) The values of the bar forces (I, S, D, D') coincide;

b) replacing into the previous formulae $x = ml$, we obtain for the displacements $u_{B,\,\text{approx.}}$ the relation

$$u_{B,\,\text{approx.}} = u_{B,m} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(0{,}25m - 1)\frac{P}{k} .$$

The difference is insignificant, having at the ends of the span the value

$$\Delta u_B = -0{,}942\,809\,1\,\frac{P}{k}, \quad \text{i.e. } 0{,}78\% .$$

c) For the deflections of joints B, one similarly obtains

$$w_{B,\,\text{approx.}} = w_{B,m} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}(8m - m^2)\frac{P}{k} .$$

The difference between the approximate and the exact result is also insignificant, representing at the centre

$$\Delta w_B = +\,9{,}751\,611\,2\,\frac{P}{k}, \text{ i.e. } 0{,}87\% \text{ (error in excess)}.$$

Both the exact and the approximate solutions represent relations which are extremely simple, so that the application of one or other of the solutions depend on the mental inclination of the designer.

APPENDIX — NOTATION

A_d — cross-sectional area of the bracing members,
A_i — cross-sectional area of the bars in the bottom layer,
A_s — cross-sectional area of the bars in the top layer,
D, D', $\overline{D}$ — forces in the bracing bars,
E_x, E_y; E_x^{-1}, E_y^{-1} — finite difference operators (to the right and the left hand, respectively),
F_A, F_B — displacement functions,
F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Cz} — components of the applied loads, assumed to be concentrated at the joints of types A, B, C and directed in the direction of the axes x, y, z,
I — force in a bar of the bottom layer,

$K = \dfrac{2h^2}{(1/k_i)+(2/k_s)}$ — flexural rigidity of the double-layer space grid,
P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm} — vertical nodal loads, applied in the joints A_m, B_m and C_m,
S — force in a bar of the top layer,
Vo — reaction of the space grid (in the joint 0),
$\mathfrak{F}_{Ax}$, $\mathfrak{F}_{Ay}$, $\mathfrak{F}_{Az}$, $\mathfrak{F}_{Bx}$, etc. — load terms,
$a = pl$ — span of the double-layer space grid,
h — height of the structure (vertical separation between the two layers),
k_d, k_i, k_s — axial stiffnesses of the bars
l — length of the bars in the bottom layer (mesh size),
$l_d = l/(2\cos\gamma)$ — length of the bracing members,
$l_s = l/\sqrt{2}$ — length of the bars in the top layer,
m — typical joint,
$p = a/l$ — number of intervals,
u, v, w — components of a joint displacement in the direction of the axes of coordinates,
γ — angle between the bracing members and the horizontal plane.

$$\psi_i = \frac{k_i}{k_d \cos^2\gamma}, \quad \psi_s = \frac{k_s}{k_d \cos^2\gamma}, \quad \bar{\psi} = \frac{1}{2}\psi_s .$$

REFERENCES

1. Kato, B., Takanashi, K., Tsushima, Y. and Hirata, Y.: The Analysis of a Space Truss Composed of Square Pyramid Units. In: Space Structures (R. N. Davies Editor), Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967, 201—212.
2. Renton, J. D.: The Related Behaviour of Plane Grids, Space Grids and Plates. In: Space Structures (R. N. Davies Editor), Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967, 19—32.
3. Soare, M.: L'application des équations aux différences finies au calcul des réseaux spatiaux planaires carrés. *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.* **14** (1969), 595—628.
4. Soare, M.: Contribution à l'étude des réseaux spatiaux planaires simples par la méthode des différences finies. *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.* **14** (1969), 949—984.
5. Soare, M.: Contributions to the Study of Double-Layer Diagonal Square Mesh Grids (in Romanian). *Construcţii si Materiale de Construcţii*, **25** (1970), 423—440
6. Suzuki, E., Kitamura, H. and Yamada, M.: The Analysis of the Space Truss Plate by Difference Equations. In: Space Structures (R. N. Davies Editor), Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967, 136—144.

Zylindrische Biegung von zweilagigen, zweiläufigen diagonalen Stabrosten. Ein neuer Typ eines zweilagigen, zweiläufigen diagonalen Stabrostes wird untersucht, der durch die verschiedene Form der beiden parallelen Schichten gekennzeichnet ist. Für den allgemeinen Fall wird die Formänderungsmethode angewendet, indem das durch die neun unbekannten Verschiebungen befriedigte Differenzengleichungssystem aufgestellt wird, welches den typischen Knoten des räumlichen Stabrostes entspricht. Im folgenden wird die zylindrische Biegung untersucht und es werden ausführliche Lösungen für den Fall gleicher Knotenlasten gegeben. An der Grenze geht der räumliche Stabrost in ein gleichwertiges kontinuierliches Medium über, dessen elastischen Eigenschaften ermittelt werden.

Цилиндрический изгиб пространственных пластинообразных сеток с квадратной решеткой (М. Шор). В настоящей работе исследуется новый вид пространственных пластинообразных сеток с квадратной решеткой, характеризуемый различным построением параллельных сетчатых пластин. Для общего случая применяется метод деформаций, приводящий к системе уравнений в конечных разностях, удовлетворяемой девятью неизвестными перемещениями, соответствующими тем различным видам узлов сетки. В дальнейшем развивается исследование цилиндрического изгиба, даются полные решения для случая равных узловых нагрузок; переходя к пределу, решетчатая система приводится к эквивалентной непрерывной среде; определяются ее упругие свойства.

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae; Tomus 69 (3—4), pp. 467—475 (1970)

SIDE FRICTION IN CONSOLIDATION TESTS

M. R. MADHAV*

[Manuscript received March 27, 1970]

For estimating the side friction force in consolidation testing, an adhesive component is considered in addition to the frictional component. Expressions are obtained for the side friction force and intergranular load at the end of consolidation, as functions of sample dimensions. A method is proposed for estimating the correct values of the coefficient of volume decrease and for determining the coefficient of side friction. The reported experimental results bring out the factors affecting the side friction, and the effect of side friction on the soil properties.

1. Introduction

The one dimensional consolidation theory of TERZACHI or any refinment to it, presupposes that the distribution of the applied load is uniform with the depth. In the consolidation test, since the soil sample, during deformation, moves relative to a fixed boundary, frictional forces are developed between the specimen and the wall of the ring containing the sample. Part of the applied load, usually an unaccountable quantity, is lost in overcoming the frictional resistance. The frictional force is dependent on (i) the soil type, (ii) the sample dimensions, (iii) the applied load, (iv) the degree of consolidation, and (v) the conditions on the wall of the ring. If the frictional force is not eliminated, this will lead to smaller values of coefficients of volume decrease. Since it is not possible to eliminate them fully, an estimate of their magnitude should be made and then corrections should be applied for the same. An attempt toward the same is presented below.

2. Review of the literature

TAYLOR [6] and his associates appear to be the first to initiate a study on side friction. Assuming that the frictional force (F) is proportional to the intergranular pressure and on the depth also, an expression for it, under con-

* Assistant Professor in Civil Engineering, Indian Institute of Technology, *Kanpur*-16, (INDIA).

ditions of complete consolidation, was obtained as

$$F = P\,(1 - e^{-2f'H/R}) \tag{1}$$

where H and R are the sample dimensions, P — the applied load, and f' — the side friction coefficient. ISHII et al. [3] showed that friction is to be found more in a fixed ring consolidometer than in a floating ring. Values for f' here have been computed by ARAI [1], from measured pore water pressures.

MUHS and KANY [2] and LEONARDS and GIRAULT [4] use a mercury trough below the ring to measure the load carried by the ring. HANSBO [2] measured the force required to move the ring relative to the soil, while NAKASE [5] measured the load transferred by the soil to the lower porous disc. NAKASE [5] also presented an approximate analysis of side friction in a partially consolidated state.

Use of lubricants, particularly silicon grease, is generally advocated as reducing the frictional force but their effect needs to be precisely determined. In most of the studies, the values of f' have been reported to be in the range 0.1 to 0.5, the range 0.15 to 0.3 being more common. The above review shows that the possible adhesion between the ring and the sample is not realized, though NAKASE [5] mentions the possibility of the frictional force being purely cohesive. An analysis which includes the adhesive force is presented below.

3. Shearing force between ring and sample

Assumptions:

1) The shearing resistance (here named side friction force) developed between the ring and the sample, is composed of (a) adhesion, and (b) friction.

2) The frictional component per unit area at any depth is proportional to the intergranular pressure at that depth.

The side friction force, F_z, at any depth is

$$F_z = f_c\, 2\pi R \cdot dz + f' \frac{\bar{P}_z}{\pi R^2} \cdot 2\pi R \cdot dz\,, \tag{2}$$

where f_c is the adhesive component, and $\bar{P}_z$ is the intergranular load at depth z. But

$$\bar{P}_z = P - \int_0^z F_z\, dz\,, \tag{3}$$

where P is the total applied load. Substituting for F_z from Eq. (2) and solving Eq. (3) for $\bar{P}_z$

$$\bar{P}_z = pe^{-2f'(Z/R)} - \frac{\pi R^2 f_c}{f'}\,[1 - e^{-2f'(Z/R)}]\,. \tag{4}$$

The total side friction force F is obtained by substituting for $\bar{P}_z$ from Eq. (4) into Eq. (2), and integrating,

$$F = \int_0^z F_z \, dz = \left[P + \frac{R^2 f_c}{f'} \right] \cdot \left[1 - e^{-2f'(Z/R)} \right] . \tag{5}$$

If H is the sample thickness, the total friction force F_H and the intergranular load $\bar{P}_H$, are

$$F_H = \left[P + \frac{\pi R^2 f_c}{f'} \right] \cdot \left[1 - e^{-2f'(H/R)} \right] \tag{6}$$

and

$$\bar{P}_H = p e^{-2f'(H/R)} - \frac{\pi R^2 f_c}{f'} \cdot \left[1 - e^{-2f'(H/R)} \right] . \tag{6a}$$

If $f_c = 0$, these equations are reduced to Taylor's [6] equations. The mean intergranular load, $\bar{P}$, needed to calculate the coefficients a_v and m_v, is given by

$$\bar{P} = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{P}_z \, dz = \frac{R}{2f'H} \left[\left\{ P + \frac{\pi R^2 f_c}{f'} \right\} \left\{ 1 - e^{-2f'(H/R)} \right\} - 2\pi R f_c \cdot H \right] . \tag{7}$$

In the testing methods of TAYLOR [6] and NAKASE [5] $\bar{P}_H$ is measured, while F_H is measured by MUHS and KANY [2], LEONARDS and GIRAULT [4]. Since experimentally two parameters f_c and f' have to be determined, two measurements of either F_H or $\bar{P}_H$ have to be made either with different total loads or with different thicknesses of the sample, and the resulting equations are solved simultaneously.

The analysis of side friction during consolidation is presented in *Appendix-I*.

4. Method for estimating m_v

If neither F_H nor $\bar{P}_H$ can be measured due to the lack of equipment, the total side friction force can be estimated by the following method. Soil samples of different thicknesses, but otherwise identical, are tested and their coefficients of volume decrease (m_v) computed for all pressure increments. The m_v — values plotted on log scale show a linear relation (Fig. 1) with H, the height of the sample for each pressure increment. Using the method of least squares the following relation is obtained:

$$m_{vH} = m_{v0} (10)^{-CH} = m_{v0} e^{-C'H} , \tag{8}$$

where m_{vH} and m_{v0} are the coefficients of volume decrease of samples whose thickness is H and 0, respectively, and C and C' are constants related by $C' = 2{,}3\ C$. Values of m_v decrease with thickness due to increasing loads being

lost in overcoming the side friction force. Correcting for the load in calculating m_{vH},

$$\frac{m_{vH}}{p_1 - F/\pi R^2} = \frac{m_{v0}}{p_1}, \tag{9}$$

or

$$\frac{p_1 - F/\pi R^2}{p_1} = \frac{m_{vH}}{m_{v0}} = C^{-C'H}, \tag{10}$$

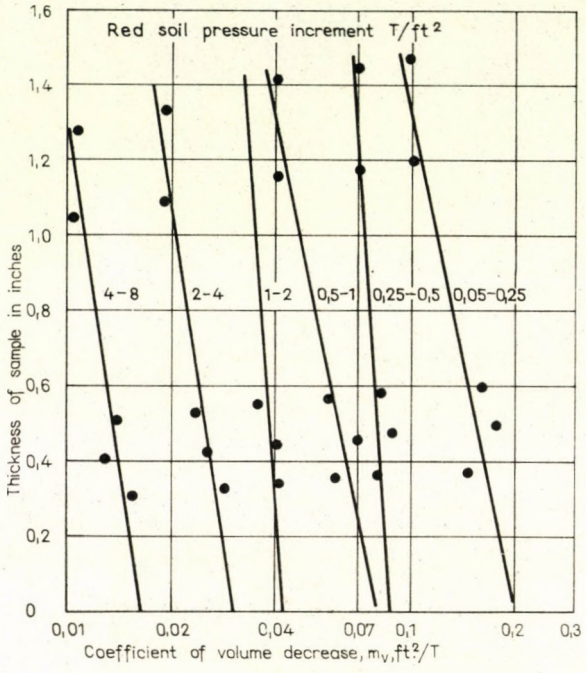


Fig. 1

or

$$F = \pi R^2 p_1 (1 - e^{-C'H}) = P_1 (1 - e^{-C'H}), \tag{11}$$

where F and P_1 are the frictional and applied loads, respectively, and $P_1 = P_1/\pi R^2$.

Comparing Eq. (11) with Eq. (1)

$$C' = 2f'/R. \tag{12}$$

If f_c is zero, Eq. (6) reduces to Eq. (11) and hence a linear plot between H and log m_{vH} is suggestive of the absence of adhesion in the side friction force. As an outcome of this investigation, determining C' from Fig. 1, m_{v0} — the correct coefficient of volume decrease can be estimated from the measured values of m_{vH}.

5. Experimental study

The study was carried out on three soils whose index properties are given in Table I. All samples were hand-moulded into rings of 3 in. diameter. The samples were loaded with a pressure increment ratio of one, up to a pressure of 8 T/ft^2. The computed values of m_v were plotted against a sample thickness. Only two typical curves are given (Figs. 1 and 2). A straight line relation between log m_{vH} and H is apparent in all cases. The method of least squares is used to compute m_{v0} and C'.

The computed C' — values are given in Table II. The coefficient of side friction f' ($f' = RC'/2$) is dependent on soil types, the pressure increment

Table I

Index properties of soils tested

Soil description	L.L.	P.L.	P.I.	Percentage passing through 200 mesh.
Red	40,5	22,5	18	58,7
Black	59,0	29,0	30	87,2
Kaolinitic	71,0	43,0	28	100,0

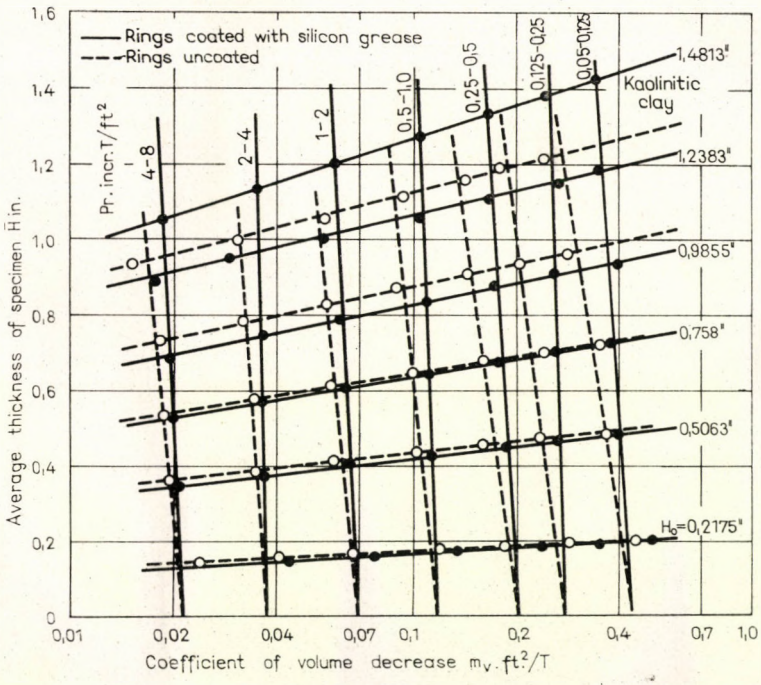


Fig. 2

Table II

Side friction coefficients (C') of tested soils

Pressure increment T/ft²	Red	Black	kaolinitic	
			Uncoated ring	Ring coated with silicon grease
0,05 ÷0,125	—	—	0,397	0,174
0,125÷0,25	0,586*	1,833*	0,322	0,075
0,25 ÷0,5	0,408	0,966	0,329	0,160
0,5 ÷1,0	0,465	0,602	0,271	0,095
1,0 ÷2,0	0,192	0,569	0,287	0,165
2,0 ÷4,0	0,398	0,504	0,196	0,075
4,0 ÷8,0	0,373	0,611	0,249	0,131

* Pressure increment is equal to $0.05 \div 0\ 25\ T/ft^2$

and the lubricant used. The red soil with a smaller clay content and P.I. has a higher coefficient compared to Kaolinitic soil. Also, the C' — values tend to decrease with increase of applied pressure. Silicon grease appears to be very effective in reducing the values of C' by 50% or more.

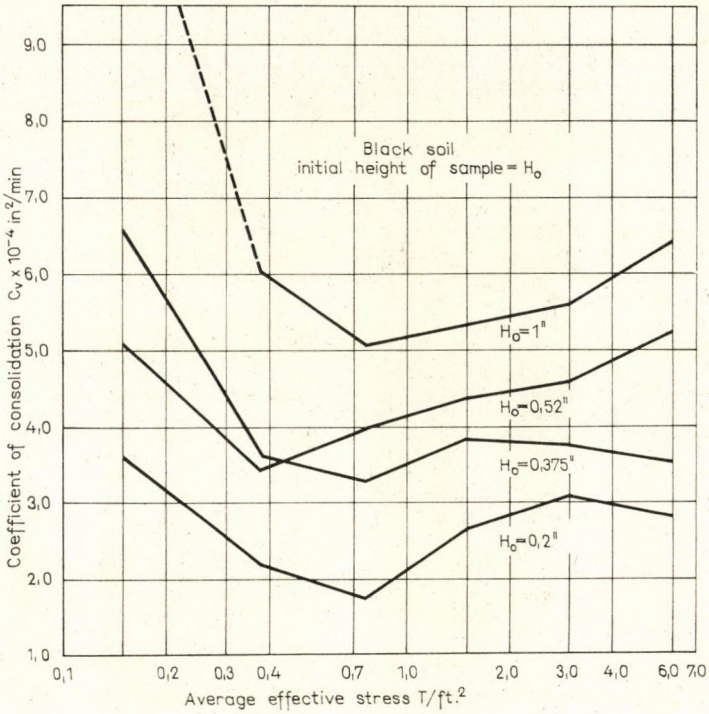


Fig. 3

An indirect effect of the smaller of uncorrected m_{vH} values in increasing the values of the coefficient of consolidation, C_v, is shown in Fig. 3. Since C_v is inversely proportional to m_v, and the m_v values decrease with increasing values of H, C_v — values increase with H. The increases in C_v for the range of thicknesses considered is considerable (100% or more). Hence, elimination or reduction of side friction is essential in soil testing, otherwise corrections have to be made to the measured and computed soil properties.

6. Conclusions

An adhesive component is included in the side friction force between the ring and the sample. Expressions are obtained for the variation of the intergranular and side friction loads with depth, as also for the average intergranular pressure for any pressure increment.

Using a method developed herein, the coefficient of side friction has been shown to be dependent on the soil type, the pressure increment, and the lubricant used. Side friction if left unaccounted, for reduces the values of m_v and increases the values of C_v.

Acknowledgement

The reported work was carried out at the Indian Institute of Science, Bangalore, India, and forms part of author's Ph. D. thesis. The author gratefully acknowledges the encouragement and assistance he received from Prof. N. S. GOVINDA RAO and Prof. B. V. RANGANATHAM.

REFERENCES

1. ARAI, H.: Pore Water Pressure Measurement during Consolidation Test, *Rep. of Transportation Technical Res. Inst.*, Japan (1955).
2. HANSBO, S.: Consolidation of Clay with Special Reference to Influence of Vertical Sand Drains, *Proc. of the Swedish Geotechnical Institute*, No. 18 (1960).
3. ISHII, Y.—SHINOHARA, T.—TALEISHI, T. and KURATA, S.: Estimation of m_v and C_v values for the Design of Sand Drains, *Proc. 4th ICOSMFE*, **1** (1957), 312—315.
4. LEONARDS, G. A.—GIRAULT, P.: A Study of the One-dimensional Consolidation Test, *Proc. 5th ICOSMFE*, **1** (1961), 212—216.
5. NAKASE, A.: Side Friction in Conventional Consolidation Tests, *Rep. of Port and Harbour Tech. Res. Inst.*, Japan, No. 3 (1963), 1—23.
6. TAYLOR, D. W.: Research on Consolidation of Clays, *Dept. of Civil and San. Engg., M. I. T.* (1942), *Rep.* 82.

APPENDIX I

Analysis of side friction during consolidation

Based on approximations given for Terzaghi's solution for the pore water pressure distribution with depth, NAKASE [5] obtained solutions for side friction and analyzed them for the partly consolidated state. The above analysis is extended to include an adhesive component in side friction.

In Terzaghi's approximate solution for consolidation, the isochrone is assumed to be parabolic and the intergranular load, $\bar{P}_z$, at a depth, z, is

$$\bar{P}_z = \Delta P \frac{(\sqrt{12\,TH^2} - z)^2}{12\,TH^2}, \quad T \leqslant 1/12 \tag{13}$$

and

$$\bar{P}_z = \Delta P \left\{1 - e^{-(3T - 1/4)} \frac{z}{H^2}(2H - z)\right\}, \quad T > 1/12. \tag{13a}$$

For the partially consolidated state, Eq. (3) can be written as

$$\bar{P}_{zf} = \bar{P}_z - 2\pi R f_c \cdot z - \frac{2f'}{R}\int_0^z \bar{P}_{zf} \cdot dz \tag{14}$$

where $\bar{P}_{zf}$ is the effective load when side friction exists. Substituting for $\bar{P}_z$ from Eqs (13) and (13a), Eq. (14) has been solved with the boundary conditions that at $z = 0$

$$\bar{P}_{zf} = P_0 + \Delta P,$$

as

$$\bar{P}_{zf} = P_0\,Ex\cdot 1 - \frac{\pi R^2 f_c}{f'}(1 - Ex\cdot 1) + \frac{2\,\Delta P}{a}\left[\left\{\frac{Rz}{2af'} - \frac{R}{f'} - \frac{R^2}{4af'^2}\right\} + Ex\cdot 1\left\{\frac{a}{2} + \frac{R^2}{2f'} + \frac{R^2}{4af'^2}\right\}\right], \quad T \leqslant 1/12 \tag{15}$$

and

$$\bar{P}_{zf} = (P_0 + \Delta P)\,Ex\cdot 1 - \left\{\frac{\pi R^2 f_c}{f'} + \frac{2\,\Delta P\,Ex\cdot 2}{H^2}\left(\frac{HR}{2f'} + \frac{R^2}{4f'^2}\right)\right\}(1 - Ex\cdot 1) + \frac{\Delta P\cdot Ex\cdot 2}{f'}\cdot\frac{ZR}{H^2}, \quad T > 1/12 \tag{15a}$$

where

$$a = \sqrt{12\,TH^2}, \quad Ex\cdot 1 = e^{-2f'z/R}, \quad \text{and} \quad Ex\cdot 2 = e^{(3T - 1/4)}.$$

Substituting these expressions into Eq. (2), the total side friction force is obtained as

$$F = \left[P_0 + \frac{\pi R^2 f_c}{f'} + \Delta P\left\{1 + \frac{R}{af'} + \frac{R^2}{2a^2 f'^2}\right\}\right](1 - Ex\cdot 1) + \Delta P\left\{\frac{z^2}{a^2} - \frac{2z}{a} - \frac{Rz}{a^2 f'}\right\}, \quad T \leqslant 1/12 \tag{16}$$

and

$$F = \left[P_0 + \frac{\pi R^2 f_c}{f'} + \Delta P \left\{1 + Ex \cdot 2 \frac{R}{Rf'} + \frac{R^2}{2H^2 f'^2}\right\}\right](1 - Ex \cdot 1) + \\ + P \cdot Ex \cdot 2 \left\{\frac{z^2}{H^2} - \frac{2z}{H} - \frac{Rz}{R^2 f'}\right\}, \qquad T > 1/12. \tag{16a}$$

The integranular load and the total side friction force at the bottom of the sample are obtained by substituting $z = H$.

APPENDIX II.

NOTATION

a	=	$12\,TH^2$
C, C'	=	constants,
C_v	=	coefficient of consolidation,
F, F_z, F_H	=	total side friction force,
f'	=	side friction coefficient (friction component),
f_c	=	side friction coefficient (adhesion component),
H	=	sample thickness,
m_v, m_{v0}, m_{vH}	=	coefficient of volume decrease,
P, P_1	=	applied loads,
P_z, P_{zf}	=	intergranular load,
R	=	radius of sample,
T	=	time factor,
z	=	space variable,
ΔP	=	load increment.

Seitenwandreibung in den Bodenbefestigungsversuchen. Um bei Bodenbefestigungsversuchen die Seitenwandreibungskraft schätzen zu können, muß außer der Reibungskomponente auch eine Haftkomponente vorausgesetzt werden. Der Verfasser hat für die Größe der Seitenreibungskraft am Ende des Befestigungsvorgangs von den Dimensionen des Versuchskörpers Formeln abgeleitet. Eine Methode für die Schätzung des genauen Wertes des Koeffizienten der Volumenverringerung und für die Ermittlung des Seitenreibungs-Beiwerts wird vorgeschlagen. Die angeführten Versuchsergebnisse zeigen deutlich die die Seitenreibung beeinflussenden Faktoren sowie die Einwirkung der Seitenwandreibung auf die Bodeneigenschaften.

Трение откоса при опытах по упрочнению грунта *(М. Р. Мадхав)*. При опытах по упрочнению грунта для оценки усилия трения, возникающего в откосе, слагающую трения необходимо дополнить еще и слагающей прилипания. Автор для возникающего в конце упрочения грунта усилия бокового трения и усилия между зернами в функции опытного образца выводит формулы. Автор вносит предложение по вычислению точного значения коэффициента уменьшения объема и определению коэффициента бокового трения. Показанные экспериментальные данные точно выражают коэффициенты, которые воздействуют на боковое трение, а также то воздействие, которое оказывает трение откоса на свойства материала грунта (m_v и c_v).

Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus 69 (3—4), pp. 477—484 (1970)

ESTIMATIONS OF EVAPOTRANSPIRATION OF RICE BY INDIRECT METHODS

V. K. VAMADEVAN,*

[Manuscript received 21. April, 1970]

ET of rice was measured by installing galvanised iron tanks embedded in the centre of the rice field at two water depths and compared with the ET values estimated by the different empirical and semiempirical formulae. The estimation of ET by the formulae of Ivanov, Johnson, Christianson, Petrasovits, Penman and Antal gave good monthly and seasonal values in a descending order. Considering the magnitude of conveyance losses, percolation losses and overirrigations in the rice field, the errors in the monthly values are not serious. Therefore, any of the above formulae can be used for estimating the ET of rice according to the availability of data at hand.

1. Introduction

According to recent concepts, evapotranspiration (*ET*) of a crop is governed primarily by meteorological parameters, when the plant cover is adequate and the moisture supply is not limited. Soil and plant factors play only a very insignificant role under above conditions. When the water supply is abundant, *ET* is a physical phenomenon governed by the incident energy at a place and is not a physiological process (Penman 1948 and Thornthwaite 1948). Hence climatological approach has been used in estimating the *ET* of rice.

A number of formulae have been developed in Europe and USA that aim at arriving at "potential evaporation" that takes place from a surface well provided with moisture, as indeed a rice field is [1—9].

The object of this study was to estimate *ET* by indirect methods to serve as comparison in evaluating the measured *ET*.

2. Materials and methods

The study was conducted during the 1968 and 1969 season at the State Farm at Mezőtur — a typical rice growing area in the Hungarian Great

* Department of Crop Production and Soil Cultivation, Agricultural University, Gödöllő, (HUNGARY).

Table 1

Comparison of the various formulae

Items		1968							
		June	in %	July	in %	Aug.	in %	Total	in %
Measured ET.	5 cm plot (mm)	154	100	185	100	118	100	457	100
	20 cm plot (mm)	178	100	189	100	120	100	487	100
	Water depth								
Antal PE	5 cm	164	106	182	89	127	108	473	103
	20 cm		93		96		106		98
Blaney—Criddle ET	5 cm								
	20 cm			—			—	—	
Christianson ET	5 cm	196	125	183	99	106	89	485	99
	20 cm	—	110		95		88		106
Ivanov ET	5 cm	180	115	170	92	116	97	466	101
	20 cm		101		98		96	—	98
Johnson ET	5 cm	175	112	177	96	136	114	488	110
	20 cm		98	—	92		113		103
Penman PE	5 cm	155	99	158	85	112	94	425	93
	20 cm		87		82		93		87
Petrasovits ET	5 cm	150	96	191	102	96	81	437	97
	20 cm	148	83	189	100	95	79	432	89
Thornthwaite PE	5 cm	120	77	118	64	101	85	339	74
	20 cm		67		61		84	—	69
Turc ET	5 cm	146	93	134	72	105	88	385	84
	20 cm		82		70		87		79

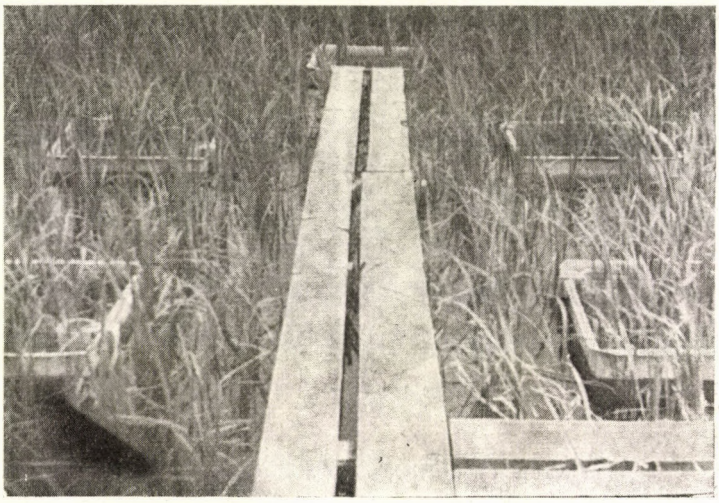


Fig. 1

with measured evapotranspiration

1969									
June	in %	July	in %	Aug.	in %	Sept. (20 days)	in %	Total	in %
142	100	168	100	161	100	89	100	560	100
159	100	178	100	168	100	88	100	593	100
86	61	138	83	155	96	75	85	454	81
	54		78		93		86		77
134	94	197	117	120	75		—	451	96
	84		111		71		—		89
143	101	192	114	123	76	51	57	509	91
	90		108		76	—	57		86
128	90	173	103	147	91	84	94	532	95
	81		97		88		95	—	90
127	89	176	105	142	88	73	82	518	93
	80		99		85		82		87
115	81	167	100	127	79	62	70	471	84
	72		94		76		70		79
93	65	171	102	123	76	65	73	452	81
95	60	184	97	129	77	67	76	475	80
71	50	121	72	105	65	50	56	347	62
	45		68		63		57		59
112	79	134	80	107	66	52	58	405	72
	70		75		64		58		68

Plane. The annual precipitation is 550 mm. The elevation is 83 metres and it is situated at 47° *N* latitude and 20,31° *E* longitude.

The *ET* was measured using galvanised iron tanks having a measurement of 50 × 50 cm and a depth of 80 cm, embedded in the centre of the rice field. The plan of layout is shown in Fig. 1. Daily measurements of *ET* were made using the "Héni–Tóth" type gauge which had been used as a standard instrument for measuring *ET* in this country. All the 20 tanks were embedded at water depths of 5 and 20 cm. Measurements of *ET* were made at 8 A.M. together with the measurements of precipitation in the amendments of measured values.

A standard rain gauge and a thermohygrograph were installed in each water depth to measure rainfall, temperature and humidity. Gross solar radiation data were taken from the Meteorological Station at Szarvas, which is situated 6 km from the experimental field. In the case of reflected solar

radiation measurement, a Russian type of solarimeter was mounted in an inverted position in the rice field. The instrument was held at 2 metres above the crop. The measurements were made generally on clear days.

3. Estimation of ET by indirect methods. Results and discussion

Estimation of *ET* by the various formulae is presented in Table I with measured *ET*. When the measured *ET* is taken as 100, the relative values of estimated *ET* are also given in order to illustrate the extent of differences between the above mentioned methods. Of the formulae tested, those mentioned in [1, 3—5, 7] gave the best results, followed by those in [8] and [9].

The empirical "*K*" coefficients obtained by dividing the measured *ET*, by the consumptive use factor according to BLANEY and CRIDDLE [2], are summarised in Table II.

Table II

Monthly coefficients, Blaney and Criddle (1956)

	1968.	1969.
June	0,9	0,8
July	1,0	0,8
August	0,7	0,5
September	—	0,6
Average during the season ...	0,9	0,7

The values seem to be reasonable when compared to the values for rice published by BLANEY and CRIDDLE [2].

The discrepancies between the various formulae were almost the same when the monthly values were compared. It can be observed that the formulae suggested by ANTAL [1] and PETRASOVITS [7] give exceptionally good results with the experiment in 1968.

Unfortunately, the classical formula suggested by THORNTHWAITE [8] is found to be the least accurate. In fact, VAN WIJK and DE VRIES [10] have come to the same conclusion from their studies in Netherlands, and have stated that — "No method based on monthly temperature can be expected to give reliable results for different regions".

It can also be expected that the empirical formula presented by TURC [9], not related to the physical processes determining *ET*, will give unreliable results under conditions different from those on which they are based.

Even though the Penman approach [6] is based on a sound theoretical basis, it does not give expected results under the experimental conditions.

The author feels that the accuracy required in various parameters in the aerodynamic equation is greater than can be achieved or maintained in the present investigation.

While making a review of these methods, one should consider not only their relative agreement with the actual values, but also other factors such as practicability and economy.

The best method from the practical point of view, is the one which can be worked up with data already at hand. In this respect, the best one is the formula suggested by Johnson. Only the value of solar radiation is required. Even though the Thornthwaite method needs only the temperature and heat values, it does not give accurate results. The formula suggested by PETRASOVITS requires values of temperature, sunshine hours and crop coefficients. Once the crop coefficients are determined, under a cultivation system, it need not be estimated every year. It is important to note that this formula is based not only on the physical factors affecting *ET*, but also contains a factor which is the resultant of the cultural and ecological aspects of plant growth. Antal's and Blaney and Criddle's formulae require only a minimum set of data. On the other hand, Penman's and Christianson's methods require the largest set of data, that can be nearly at hand.

In evaluating the above methods, one must always bear in mind, that the majority of irrigation engineering practices are based upon approximation of the actual phenomena. The complete evaluation of the phenomenon may be scientifically possible. But if the benefit to be derived from such an elaboration cannot be justified from the cost (in terms of money and time spent) incurred, it cannot be considered as economically justifiable. At this point the irrigation engineer is faced with the task of making "the most proper approximation" of the phenomenon by certain assumptions.

In conclusion, the selection of the method for estimating rice *ET* in irrigation practices, should not be based any more on the availability of measurements or climatic data and certainly not on considerations such as that the method is well known and has been widely used. However, *ET* estimations by any of the formulae except those of Thornthwaite and Turc serve useful purpose in irrigation practices as an index of rice *ET* if necessary adjustments of coefficients for the rice growing season and culture are known. Within the scope of technical operations of irrigation projects, the error in the estimated value of *ET* by the formulae for the evaluation of *ET* is perfectly admissible, both because of the statistical nature of the data and its magnitude, when compared with the conveyance losses, percolation and overirrigations in the rice field.

Micrometeorologists will continue to use and develop sophisticated methods which require special instrumentation and computation for the determination of short term values of *ET*. Such fundamental studies are necessary to understand the physics of *ET* and to test the empirical formulae.

Acknowledgements

Author wishes to express his sincere gratitude to Prof. Dénes PENYIGEY, head of the department, for providing him the necessary facilities. The assistance of Mrs. SZILVESZTER and Miss Lili BUCSAI in the data collection is gratefully acknowledged.

REFERENCES

1. ANTAL, E.: Candidate Thesis. Hungarian Academy of Sciences. Budapest 1969.
2. BLANEY, H. F.—CRIDDLE, W. D.: Determining Water Requirements in Irrigated Areas from Climatological and Irrigation Data. *USDA. Agr. Soil Conserv.* Tech. Paper. 96 (1950).
3. CHRISTIANSON, J. E. (1966—69). Estimating Pan Evaporation and ET from Climatic Data. *ASCE. Conf.* Las Vegas and *Proc. 7th Cong. Irri. Drainage*, Mexico 1966.
4. IVANOV, N. N.: *Klimatologija. Ser. Geograf. nauki irrig.* 13 (1966).
5. JOHNSON: Irrigation of Rice. IRRI. Manila, Philippines. Mimio. Rep. (1965).
6. PENMAN, H. L. (1948): Natural Evaporation from Open Water, Bare Soil and Grass. *Proc. Roy. Soc.* London. Serv. A. **193** (1948), 120—145.
7. PETRASOVITS, I.: Calculation of ET in Rice Plant Stands. *Növénytermelés.* **18** (1969), 35—43.
8. THORNTHWAITE, C. W. (1948): An Approach towards a Rationale Classification of Climate. *Geog. Rev.* **38** (1948), 55—94.
9. TURC (1963): Calcul graphique de l'évapotranspiration potentielle. *L'eau.* **8** (1963), 467—470.
10. VAN WIJK—DE VRIES, cited by BAIER, W. (1967): Recent Advances in the Use of Standard Climatic Data for Estimating Soil Moisture. *Ann. Arid. Zone.* 6 (1954), 1—21.

APPENDIX

Calculation of evapotranspiration and potential evapotranspiration

ET and PET were calculated as per the formulae suggested by various authors. They are stated below.

Antal (1967).

$$PET = 0{,}9\ (E - e)^{0{,}7}\ (1 + \alpha\, t)^{4{,}8}\ \text{mm day},$$

where PET = potential evapotranspiration
E = saturated vapour pressure (mm Hg.)
e = vapour pressure
$(E-e)$ = saturation deficit
t = mean air temperature in C°
α = 1/273

Christianson's Marshlands formulae (1966)

$$ETa = 0{,}37\ R\ CT\ C_w\ C_A\ C_S\ C_M, C_H$$

where ETa is the adjusted evapotranspiration for the month in inches and
CT = $0{,}048 + 0{,}014\ T$,
C_w = $0{,}790 + 0{,}0035\ W$,
C_H = $1{,}140 - 0{,}0035\ H$,
C_s = $0{,}440 + 0{,}00564\ S$,
C_M = monthly vegetative coefficient,
T = average mean monthly temperature in C°,
W = „ „ „ wind velocity m/sec,
H = „ „ „ relative humidity in %,
S = „ „ „ sun shine hours

Factors are taken from the table suggested by him.

Ivanov (1959).

$$E = 0{,}0018\ (25 + t)^2\ (100\text{-}a),$$

where

E = evapotranspiration,
t = temp. in °C (monthly average),
a = relative humidity in %.

Johnson (1965).

$Q = 0{,}11\ S$,
Q = ET m³/*ha* per day,
S = measured solar radiation cal/cm²

Petrasovits (1969).

$$ET = r \cdot t \cdot k,$$

where

ET = evapotranspiration in mm/day,
r = radiation factor (% of sunshine hours) (to the total potential sunshine hours),
t = average air temperature in C°,
$K = k_1 \cdot k_2$ = biotechnical factor depending upon the cultural and ecological factors (Tables are furnished for easy calculation).

Thornthwaite (1948).

$$e = 1.6\ (10\ t/I)^a,$$

where

e = monthly unadjusted evaporation in cm,
t = mean monthly temperature in degrees C,
I = heat index $\sum_{1}^{12} i$,
i = monthly heat index obtained by the relation $i = (t/5)^{1{,}514}$,
a = A coefficient which varies with the heat index =
= $0{,}0000000675\ I^3 - 0{,}0000771\ I^2 + 0{,}017921 + 0{,}49239$.

The value thus obtained is further adjusted by applying a correction factor which depends upon the number of days in a month and the day length for which THORNTWAITE has furnished values.

Penman (1948).

Computation of evapotranspiration by the Penman formula is very complicated.

MOCULLOCH (1965) has furnished tables for easy computation of Penman's values. Calculations were as per the above mentioned method.

E_0 mm/day

Turc (1963).

$$E = a\ t/(t+15)\ \ (Rc + 50)\ (1 + C),$$

where

E = potential monthly evapotranspiration, in mm/month,
a = coefficient equal to 0,40 except in February which is 0,37,
t = mean monthly air temperature,
Rc = mean total radiation received on a horizontal surface (cal/cm²) day,
C = coefficient depending on the relative humidity which is equal to zero when $U > 50\%$.

Schätzung der Evapotranspiration des Reises mit Hilfe von indirekten Methoden. Messung der ET mit Hilfe von verzinkten Eisenbehältern, die in der Mitte der Reisfelder in einer Tiefe von zweifacher Wasserhöhe eingebettet sind, und Kontrolle der erhaltenen Werte durch Gegenüberstellung der verschiedenen empirischen und halbempirischen Formeln. Die Schätzung der ET-Werte aufgrund der Formeln von IVANOV, JOHNSON, CHRISTIANSEN, PETRASOVITS, PENMAN und ANTAL ergab gute Monats- und Saisonwerte, mit degressiver Tendenz. Mit Rücksicht auf die Förderungsverluste, Sickerverluste und Überwässerung der Reisfelder, sind die Abweichungen in den Monatswerten unbedeutend. Deshalb kann jede beliebige erwähnte Formel zur Ermittelung des ET-Wertes des Reises anhand der verfügbaren Angaben angewendet werden.

Косвенный метод оценки поверхностного испарения и испарения растений на рисовых плантациях *(В. К. Вамаеван).* Измерение звапотранспирации риса производилось путем размещения примерно в середине рисовых плантаций резервуаров из оцинкованной истовой стали непосредственно в почве на соответствующей глубине; полученные таким образом данные были сравнены с результатами различных эмпирических и полуэмпирических звапотранспирационных формул. Оценка данных звапотранспирации на основе формул Иванова, Джонсона, Кристиансона, Петрашовича, Пенмана и Антала дала удовлетворительные месячные и сезонные результаты с убывающим порядком величин. Учитывая то обстоятельство, что имеют место транспортные и фильтрационные потери, а также избыточное орошение рисовых полей, наблюдающиеся отклонения по месячным данным не являются значительными. Вследствие сказанного выше, любая из упомянутых формул может быть использована для оценки данных ET риса — на основе имеющихся в распоряжении данных.

INDEX

Ferencz, Cs.—Tarcsai, Gy.: Theoretical Explanation of the Solar Red-Shift Limb Effect 223

Kaszap, I.: Über die Möglichkeiten der Verminderung des harten Ganges bei Dieselmotoren mit direkter Einspritzung — Study on the Possibility to Eliminate the Hard Running of Direct Injection Diesel Engines — *Касап, И.:* О возможностях уменьшения жесткости хода дизельных двигателей с непосредственным впрыскиванием 225

Nyíri, A.: Determination of the Theoretical Characteristics of Hydraulic Machines, Based on Potential Theory — Berechnung der theoretischen Charakteristik von hydraulischen Maschinen auf Grund der Potential-Theorie — *Нири, А.:* Определение теоретических характеристик гидродинамических машин на основе потенциальной теории 243

Cser, Gy.: Untersuchung des Saugvorganges von Viertakt-Dieselmotoren mit direkter Einspritzung — Analysis of the Suction Process in a Direct Injection Type 4-Stroke Dieselengine — *Чер, Д.:* Исследование процессов всасывания четырехтактного дизельного двигателя с непосредственным впрыскиванием 275

Goschy, B.: Analysis of the Torsional Equation of Box Girders being in the State of Complex Torsion — Analyse der Torsionsgleichung von Kastenträgern bei komplexer Drillung — *Гоши, Б.:* Анализ уравнений кручения коробообразных балок, находящихся в состоянии сложного кручения 325

Pethő, Sz.: Experimentale Vorbedingungen der Wichtemessung an festen Körpern — Experimental Conditions for Measuring the Specific Weight of Solid Probes — *Петe, С.:* О точности определения удельного веса 341

Sitkei, Gy.: Einige Probleme der Bereifung von Ackerschleppern, insbesondere an leichten Böden — Certain Problems of the Tyre-Outfit of Agricultural Tractors with Special Respect of Loose Soils — *Шиткеи, Д.:* Некоторые проблемы ошиновки тракторов, уделяя при этом особое внимание неплотным почвам 351

Fazakas, B.: Ergänzungen zur genaueren Berechnung des durch Fräsen erhaltenen Spanquerschnittes — Contribution to a More Precise Method of Finding the Cross-Section Area of a Chip Milling — *Фазакаш, Б.:* Дополнения к уточнению расчета сечения стружки, получаемой при фрезеровании 367

Domokos, M.: Estimations of Distributon and Density Functions and their Applications in the Management of Water Resources — Abschätzungen der Verteilungs- und Dichtefunktionen und deren Anwendung in der Wasserwirtschaft — *Домокош, М.:* Оценка функиий распределения и плотности и применение их в водном хозяйстве 381

Ray, D. R.: Mechanical Response in a Composite Piezoelectric Transducer under Polarisation Gradient — Das Verhalten des komplexen piezoelektrischen Transduktors gegenüber mechanischer Einwirkung bei einem Polarisationsgradienten — *Рей, Д. Р.:* Поведение сплошного пьезоэлектрического преобразователя в случае механического воздействия в присутствии поляризационного градиента 415

Schäffner, H.-J.: Viskosität und Lagerungsdichte vibrierender Kornhaufwerke — Viscosity and Relative Density of Vibrated Granular Waste Rock Piles — *Шеффнер, Х. Й.:* Вязкость и относительная плотность породных отвалов зернистой структуры, подверженных действию вибрации 425

Soare, M.: The Cylindrical Bending of Double-Layer Diagonal Square Mesh Grids — Zylindrische Biegung von zweilagigen, zweiläufigen diagonalen Stabrosten — *Шор, М.:* Цилиндрический изгиб пространственных пластинообразных сеток с квадратной решеткой 433

Madhav, M. R.: Side Friction in Consolidation Tests — Seitenwandreibung in den Bodenbefestigungsversuchen — *Мадхав, М. Р.:* Трение откоса при опытах по упрочнению грунта 467

Vamadevan, V. K.: Estimation of Evapotranspiration of Rice by Indirect Methods — Schätzung der Evapotranspiration des Reises mit Hilfe von indirekten Methoden — *Вамадеван, В. К.:* Косвенный метод оценки поверхностного испарения и испарения растений на рисовых плантациях 477

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Várhelyi Tamás

A kézirat nyomdába érkezett: 1970. XI. 30. Terjedelem: 23 (A/5) iv, 39 ábra

70.70805 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 225—241

KASZAP I.: *Study on the Possibility to Eliminate the Hard Running of Direct Injection Diesel Engines*

When examining the hard running of direct insection Diesel engines, the characteristic feature is always the intense inflammation, represented by the index $(dp/d\varphi)_{max}$. Intensity of inflammation can be rendered more favourable by diminishing of some parameters, such as the dynamic factor σ, the delay of ignition, the velocity of the initial evaporation, the number of the foci of inflammation. The survey of the relevant literary sources shows that the search of a more smooth running does not need a special processing; it claims a satisfactory choice of the parameter values influencing the mixture and inflammation.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 243—273

NYÍRI, A.: *Determination of the Theoretical Characteristics of Hydraulic Machines, Based on Potential Theory*

Author deduces an integral equation for the relative flow around the profile lattice on the mean surface of a part-channel, sliced out of the runner of a hydraulic machine by two surfaces of rotation. The machine works with an incompressible, frictionless fluid. Through the dependency of the solution on the direction of the approaching flow the theoretical characteristics of the runner as well as the characteristics of the inception of cavitation are determined.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 275—324

CSER GY.: *Analysis of the Suction Process in a Direct Injection Type 4-Stroke Dieselengine*

Taking into account the compressibility of air and its nonstationary flow conditions this paper deals with some regularities of the suction process as observed in a direct injection type 4-stroke Dieselengine. Author starts out from the assumption that the suction process, i.e. the flow conditions in the intake conduct exert a decisive influence on the filling-up factor of the motor-cylinder, on the tangential motion of the air taken in, and consequently on the efficiency of the burning process, further on the suction work performed by the piston viz. on the loss involved. Of course, after having analyzed these details, author extends the investigation to the total effect in order to find some optimum combination of all the influencing factors. For the sake of a simplified generalization, author tries to treat experimental results as functions of some criteria which may serve to determine the similitude of various suction effects. It is the mathematical model, as developed in the first chapter, the analysis of which proves suitable for finding the preconditions of similitude, and for the elaboration of measuring methods that even show some new features. In the second part of this paper the experimental results will be discussed.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 325—339

GOSCHY, B.: *Analysis of the Torsional Equation of Box Girders Being in the State of Complex Torsion*

As can be seen from a survey of the technical literature, the torsional equation of beams of closed or box section, has been several times derived. The results, however, in spite of the identity as to their form, are different assumptions, and compare with the method of calculation proposed in the paper. From the results of the numerical analyses, it is obvious that the equations established on the basis of different assumptions, differ only in respect with the movements, however, the internal forces are the same. The greatest inaccuracy is the consequence of ignoring shear deflections, therefore, taking into account shear deformations in designing closed sections is of great significance.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 341—349

PETHŐ SZ.: *Experimental Conditions for Measuring the Specific Weight of Solid Probes*

On the basis of the law of error propagation applied on the known relationship that prevails for pycnometric measurements, a further formula for error determination is derived that proved practically useful since it is conform to results obtained by tests. This new formula combined with actual measuring results helps us to infer some further important consequences. Namely, when a measuring error is predetermined, we have a strict directive rule at hand how to choose the adequate measuring method to be applied.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 351—365

SITKEI GY.: *Certain Problems of the Tyre-Outfit of Agricultural Tractors with Special Respect of Loose Soils*

The bearing capacity of sands and newly tilled soil is low, therefore, it would be practicable to apply tyres of large volume but causing low surface pressure. A new method has been worked out with the help of which the sinking of the tyre into the soil and the mean pressure acting on the contact surface can be determined, if the properties of the soil and tyre are known. The mean value of the contact pressure characterizes the degree of compaction of the soil. The applicability of SAAKJÄN's pressure-sinking relation has been confirmed, and the constant k may be employed as the characteristic of the soil. In the case of drive-wheels, the slip-sinking depends, in the first place, on the load capacity of the soil remaining in the trace of the wheel. Since sand is only slightly compacted under the rolling load of the wheel, the slip-sinking is here significantly deeper than in more cohesive soils having been entirely slackened.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 367—380

FAZAKAS, B.: *Contribution to a More Precise Method of Finding the Cross-Section Area of a Chip Milling*

Author deals with a method for computing the cross-section area of chips. For the determination of this area a common principle is applied, whether the cross-section is constant or changing with time, be it a simple or a complex one. The question of precise calculation is equally analyzed and the investigation is extended to cases when some neglection might be judged to be justified. In examining chip formation during milling, special care is given to expound methods for calculating the length of chips and to state the limits of application. Finally, a general example is presented by showing how to determine the cross-section area of chips obtained by means of a slabbing cutter having spiral edges.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 415—424

D. R. RAY: *Mechanical Response in a Composite Piezoelectric Transducer under Polarisation Gradient*

This is an attempt to investigate the mechanical response in a composite piezoelectric transducer partly subjected to a flow of current in the semiconducting boundary layer under polarisation gradient. The equations of electricity, the constitutive equations in piezoelectrical material are made use of to solve the problem. Laplace transform serves effectively as an operational technique for its solution.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 425—432

H.- J. SCHÄFFNER: *Viscosity and Relative Density of Vibrated Granular Waste Rock Piles*

Experimental researches verified that the viscosity of granular waste rock pile loosened by vibration in the range $b > 1\ g$ (g being the acceleration due to gravity) depends, in the same way as in the case of suspensions, on the grade of concentration of the particles. The mathematical form of the established relationship corresponds theoretically to the Mooney-equation, however, in the former one also the non-Newtonic flow behaviour has been taken into consideration. A comparison with the data published in the literature shows that the waste rock pile of granular structure fluidized by upstreaming gases or liquids in the stream bed has analogical properties. Accordingly, the flow behaviour of a waste rock pile of granular structure is essentially determined, independently of the energy input, only by the concentration of the particles. Loosening and energy input behave in the same way in the cases of both vibration and fluidization directly proportional through a major range.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 433—466

M. SOARE: *The Cylindrical Bending of Double-Layer Diagonal Square Mesh Grids*

A new type of double-layer square mesh grid is studied, characterised by the different configuration of the two parallel layers. For the general case, the deformation method is applied, being established the set of finite difference equations satisfied by the nine unknown displacements and corresponding to the three typical joints of the space structure. To continue, the cylindrical bending is studied, detailed solutions are given for the case of equal nodal forces and the space grid is assimilated, at the limit, with an analogous continuous medium, whose elastic properties are determined.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 467—475

M. R. MADHAV: *Side Friction in Consolidation Tests*

For estimating the side friction force in consolidation testing, an adhesive component is considered in addition to the frictional component. Expressions are obtained for the side friction force and intergranular load at the end of consolidation, as functions of sample dimensions. A method is proposed for estimating the correct values of the coefficient of volume decrease and for determining the coefficient of side friction. The reported experimental results bring out the factors affecting the side friction, and the effect of side friction on the soil properties.

Acta Techn. Hung. **69** (1970), 477—484

V. K. VAMADEVAN: *Estimations of Evapotranspiration of Rice by Indirect Methods*

ET of rice was measured by installing galvanised iron tanks embedded in the centre of the rice field at two water depths and compared with the ET values estimated by the different empirical and semiempirical formulae. The estimation of ET by the formulae of Ivanov, Johnson, Christianson, Petrasovits, Pennan and Antal gave good monthly and seasonal values in a descending order. Considering the magnitude of conveyance losses, percolation losses and overirrigations in the rice field, the errors in the monthly values are not serious. Therefore, any of the above formulae can be used for estimating the ET of rice according to the availability of data at hand.

The *Acta Technica* publish papers on technical subjects in English, French, German and Russian.

The *Acta Technica* appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription is $ 16.00 a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les *Acta Technica* paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les *Acta Technica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de $ 16.00 par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«*Acta Technica*» публикуют трактаты из области технических наук на русском, английском, французском и немецком языках.

«*Acta Technica*» выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Münnich Ferenc u. 7.
Budapest V.,
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена — $ 16.00 за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA

Drejtorija Qändrone e Pärhapjes dhe Propagandimit tä Libri
Kruga Konferenca e Päzes
Tirana

AUSTRALIA

A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA

GLOBUS
Höchstädtplatz 3
A-1200 Wien XX

BELGIUM

Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA

HEMUS
11 pl Slaveikov
Sofia

CANADA

Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA

Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA

Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštovní Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha 1
SLOVART A. G.
Gorkého
Bratislava

DENMARK

Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC

Deutscher Buch-Export und Impor
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstraße 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC

Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN

Blackwell's Periodicals
Oxenford House
Magdalen Street
Oxford
Collet's Subscription Import Department
Dennington Estate
Wellingsborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
4—5 Fitzroy Square
London W. 1

HOLLAND

Swetz & Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA

Hind Book House
66 Babar Road
New Delhi 1

ITALY

Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN

Kinokuniya Book-Store Co. Ltd.
826 Tsunohazu 1-chome
Shinjuku-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central

KOREA

Chulpanmul
Phenjan

NORWAY

Tanum-Cammermeyer
Karl Johansgt 41—43
Oslo 1

POLAND

RUCH
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA

Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18
Bucureşti

SOVIET UNION

Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN

Almquist & Wiksell
Gamla Brogatan 26
S—101 20 Stockholm

USA

F. W. Faxon Co. Inc.
15 Southwest Park
Westwood Mass. 02090
Stechert Hafner Inc.
31. East 10th Street
New York, N. Y. 10003

VIETNAM

Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA

Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

10. VI. 1971 Index: 26.025